

Helena Maria Monteiro Moreira Oliveira dos Reis

Pontos Umbílicos em Leis de Conservação



Departamento de Matemática Aplicada
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
Janeiro / 2001

Helena Maria Monteiro Moreira Oliveira dos Reis

Pontos Umbílicos em Leis de Conservação



*Tese submetida à Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
para obtenção do grau de Mestre em Matemática Aplicada*

Departamento de Matemática Aplicada
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
Janeiro / 2001

Tese orientada pelo
Professor Doutor José Basto Gonçalves

AGRADECIMENTOS

Quero agradecer em primeiro lugar ao Professor Doutor José Basto Gonçalves por todo o apoio e atenção, bem como ajuda prestada ao longo da orientação da tese.

Quero ainda agradecer a toda a minha família que sempre me transmitiu ânimo durante a elaboração do presente trabalho.

RESUMO

Neste trabalho começamos por mostrar que, em geral, as singularidades associadas às condições de Rankine-Hugoniot (condições essas inerentes ao Problema de Riemann) são removíveis por *blow-up*. Com esse objectivo é descrita a construção do *blow-up* de uma variedade sobre uma sua subvariedade.

São ainda estudadas as curvas de rarefacção do Sistema de Leis de Conservação

$$\begin{bmatrix} v \\ u \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} (1 + \lambda)v + \frac{u^2}{2} \\ \lambda v + u + vu \end{bmatrix}_x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

através da construção descrita em [6], dando especial atenção à bifurcação em torno do ponto umbílico.

Em [6], Isacson *et al.*, fazem um estudo geométrico do Problema de Riemann construindo subvariedades e foliações (entre as quais as curvas de rarefacção) da Variedade Fundamental das Ondas, cujas intersecções descrevem as bifurcações existentes. É então aqui feito um resumo de todo este estudo.

Para estudar as curvas de rarefacção do sistema dado acima é encontrada uma parametrização local da Variedade Fundamental das Ondas e da Variedade Característica, sendo essas variedades representadas graficamente, tendo em conta que o sistema é elíptico em

$$\{(v, u) : \frac{(v - \lambda)^2}{\lambda^2} + \frac{(u + \frac{\lambda}{2})^2}{(\frac{\lambda}{2})^2} < 1\}$$

e que temos um único ponto umbílico para $\lambda = 0$. São obtidas as equações diferenciais implícitas que descrevem as curvas de rarefacção, e estudados os retratos de fase correspondentes e as suas bifurcações na Variedade Característica, e na sua projecção sobre o espaço dos estados (v, u) .

Este estudo é relacionado com outros estudos já efectuados por Schaeffer e Shearer em [8], Holden em [5] e Bruce e Tari em [3].

SUMMARY

We start this work by proving that in general, the singularities associated to the Rankine-Hugoniot conditions, which are related to the Riemann Problem, are removable by *blow-up*. With this objective we describe the construction of the *blow-up* of a manifold over a submanifold.

Afterwards, we present a study of the rarefaction curves of the Conservation Laws of the system

$$\begin{bmatrix} v \\ u \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} (1 + \lambda)v + \frac{u^2}{2} \\ \lambda v + u + vu \end{bmatrix}_x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

by a technique developed in [6], conferring special attention to the bifurcation around the umbilic point.

In [6], Isacson *et al.* study on a geometric perspective the Riemann Problem building, for the purpose, submanifolds and foliations (among which the rarefaction curves can be found) of the Fundamental Wave Manifold, whose intersections describe the existing bifurcations. We, then, sum up the main idea of this study.

For the purpose of studying the rarefaction curves of the system above, we found local parametrizations of the Fundamental Wave Manifold and of the Characteristic Manifold, manifolds which were graphically represented having in mind that the system is elliptic on the set

$$\{(v, u) : \frac{(v - \lambda)^2}{\lambda^2} + \frac{(u + \frac{\lambda}{2})^2}{(\frac{\lambda}{2})^2} < 1\}$$

and that there is a single umbilic point for $\lambda = 0$. Then, we obtain the implicit differential equations that describe the rarefaction curves. Next we study the corresponding phase portraits and their bifurcations on both the Characteristic Manifold and its projection curves on the state space (v, u) .

This study is related with others made by Schaeffer and Shearer in [8], Holden in [5] and Bruce and Tari in [3].

ÍNDICE

Agradecimentos	5
Resumo	7
Summary	8
1. Introdução	11
2. Soluções Fracas	12
3. Problema de Riemann	13
4. <i>Blow-up</i>	14
5. Variedade Fundamental das Ondas	19
6. Variedade Característica	21
7. Ondas e Curvas de Rarefacção	23
8. Local de Inflexão	26
9. Foliação de Choque	28
10. Local Sónico	31
11. Foliação Composta	34
12. Resumo do Estudo Geométrico	36
13. Bifurcação de Curvas de Rarefacção	40
Referências	55

1. INTRODUÇÃO

Este trabalho tem como principal objectivo estudar o comportamento dos pontos umbílicos associados ao Problema de Riemann, para uma família de funções a 1-parâmetro em $C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$.

Ao longo dos anos tem sido desenvolvido um vasto trabalho em torno do Problema de Riemann. Modelos têm sido estudados através da Análise Matemática e com a ajuda de programas de computador. No entanto, este estudo clássico leva-nos a soluções com descrições bastante complicadas, de tal forma que se torna difícil determinar as propriedades qualitativas de tais soluções.

Isacson *et al.*, em [6], fazem um novo estudo do problema baseado na construção geométrica de pontos, foliações e subvariedades de uma variedade só, chamada Variedade Fundamental. Tanto para os sistemas hiperbólicos como para os mistos (hiperbólicos-elípticos) o estudo das singularidades presentes e da sua bifurcação é simplificado.

Schaeffer e Shearer, em [8], classificam os sistemas de Leis de Conservação 2×2 com um ponto umbílico isolado, com a particularidade que a matriz Jacobiana do Fluxo não admite valores próprios complexos. Em [5], Holden estuda o comportamento das curvas de rarefacção na região de separação entre as regiões elíptica e hiperbólica, para uma família de sistemas de Leis de Conservação 2×2 a 1-parâmetro, não estudando o comportamento dos pontos umbílicos, caso eles existam.

Neste trabalho iremos ver como construir todos os conjuntos importantes para o estudo do problema e ver que perda de transversalidade está estritamente relacionado com bifurcação.

Na base de tal estudo geométrico está a construção do *blow-up*. Segundo Isacson *et al.*, muitas das singularidades existentes nos conjuntos e foliações construídas são removíveis por *blow-up*. A primeira parte deste trabalho consiste na prova da possibilidade de eliminação das singularidades para sistemas genéricos; em [6] essa prova não é feita, assumindo-se uma outra condição que leva a resultado semelhante.

As curvas de rarefacção dos sistemas de Leis de Conservação 2×2 podem ser representados por equações implícitas. O estudo das curvas soluções das equações diferenciais implícitas em \mathbb{R}^2 é feito por Davydov em [4], e Bruce e por Tari, em [2], no caso de equações binárias. Bruce e Tari, em [3], fizeram ainda o mesmo tipo de estudo para as bifurcações numa família genérica a 1-parâmetro de equações diferenciais binárias de tipo Morse.

Em [8], tal como já referi, é feita a classificação dos pontos umbílicos dessas curvas apenas para sistemas hiperbólicos. No entanto este é um caso muito particular na medida em que, em geral, os sistemas têm parte hiperbólica e parte elíptica.

Desta forma, neste trabalho será considerada uma família de funções a 1-parâmetro de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R}^2 (que correspondem ao Fluxo das Leis de Conservação) e estudado, quer o comportamento das curvas de rarefacção em torno do ponto

umbílico isolado existente, quer a bifurcação provocada pela variação do parâmetro. Mais propriamente, para $\lambda = 0$ aparece um ponto umbílico isolado, e para os outros valores do parâmetro não aparecem pontos umbílicos; obtemos as equações diferenciais implícitas que descrevem as curvas de rarefacção, e estudamos, tal como em [5], o comportamento das curvas de rarefacção na região hiperbólica e, especialmente, na região não estritamente hiperbólica, para $\lambda \neq 0$, bem como a bifurcação correspondente a $\lambda = 0$, considerando os retratos de fase correspondentes e as suas bifurcações na Variedade Característica, e na sua projecção sobre o espaço dos estados (v, u) .

2. SOLUÇÕES FRACAS

Os sistemas quase-lineares da forma

$$U_t + F(U)_x = 0$$

onde $U \in \mathbb{R}^n$, $F \in C^2(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aberto, são usualmente designados por *Leis de Conservação*.

Ao Problema de valor inicial

$$(1) \quad \begin{cases} U_t + F(U)_x = 0 \\ U(x, 0) = \begin{cases} U_-, & \text{if } x < 0; \\ U_+, & \text{if } x > 0; \end{cases} \end{cases}$$

onde U_- e U_+ são constantes dá-se o nome de Problema de Riemann.

Sabe-se que, sendo s o inverso do declive da curva de descontinuidade $x(t)$, para o problema de Riemann ter solução, necessariamente temos de ter $s(U_+ - U_-) = F(U_+) - F(U_-)$.

Ao tentar estudar o conjunto dos ternos (U_-, U_+, s) para os quais existe solução deparamo-nos, eventualmente, com singularidades nos pontos em que $U_- = U_+$ e s é valor próprio de $F'(U_-)$, ou nos pontos em que $U_- \neq U_+$ e s é valor próprio duplo de $F'(U_-)$ com $F'(U_-) = F'(U_+)$ ou s é valor próprio de $F'(U_-)$ com $F'(U_-) = F'(U_+)$ não sendo $U_+ - U_-$ e $[-s + F'(U_+)]$ linearmente independentes.

Isacson *et al.*, em [6], afirmam, sem mostrar que, em geral, após fazer *blow-up* sobre a linha $U_- = U_+$ as singularidades desaparecem. Nesta primeira fase do trabalho vamos mostrar que realmente isso acontece.

Sistemas físicos podem eventualmente ser representados por equações diferenciais do tipo (1). Dada uma condição inicial nem sempre a equação diferencial tem uma solução C^1 definida $\forall t \geq 0$. Como para sistemas físicos pode não fazer sentido uma solução apenas até um certo instante de tempo, a noção de solução de uma equação diferencial deve ser generalizada.

Uma função $u(x, t)$ diz-se uma solução clássica do Problema de valor inicial

$$(2) \quad \begin{cases} U_t + F(U)_x = 0 \\ U(x, 0) = U_0(x) \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, u \in \mathbb{R}^n$$

se u for C^1 e verificar (2).

Deduz-se facilmente que, se u é uma solução clássica de (2), então para qualquer função Φ , de classe C^1 tal que

$$\text{supp}(\Phi) \cap \{(x, t) : t \geq 0\} \subseteq]a, b[\times]0, T[, \quad T \in \mathbb{R}$$

verifica-se

$$(3) \quad \iint_{t \geq 0} (U\Phi_t + F(U)\Phi_x) dx dt + \int_{t=0} U_0\Phi dx = 0$$

Definição 1. Uma função $u(x, t)$ mensurável e limitada diz-se uma solução fraca do problema de valor inicial (2) se verificar (3) para toda a função $\Phi \in C_0^1$.

- Nota 1.* (a) Se a solução U encontrada for C^1 , então U é uma solução clássica.
 (b) Transformações diferenciáveis não preservam soluções fracas das equações.
 (c) A partir deste momento, quando nos referirmos a uma solução estamos a falar no sentido fraco, isto é, estamos a considerar uma solução fraca.

Com esta nova definição passa-se a admitir soluções descontínuas. Suponhamos que a solução é C^1 excepto ao longo de uma linha. Designando tal linha por Γ e fixando um ponto $P \in \Gamma$, seja D uma bola aberta centrada em P , suficientemente pequena, de tal forma que, em D , Γ pode ser escrito na forma $x = x(t)$.

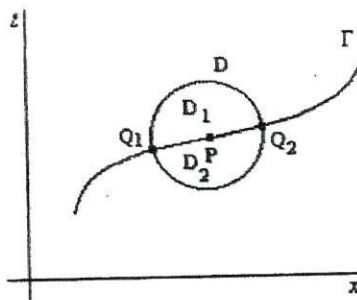


FIGURA 1

Considerando $s = \frac{dx}{dt}$, prova-se então que U tem de verificar

$$(4) \quad s[U_+ - U_-] = F(U_+) - F(U_-)$$

onde U_+ e U_- são os valores à direita e à esquerda da curva, respectivamente. Tal relação é usualmente designada por condição de Rankine-Hugoniot.

3. PROBLEMA DE RIEMANN

Considere-se o Problema de Riemann com condição inicial

$$(5) \quad U(x, 0) = \begin{cases} U_+, & \text{if } x > 0 \\ U_-, & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

Pelo que já foi visto atrás, a função

$$(6) \quad U(x, t) = \begin{cases} U_- & \text{if } x < st \\ U_+ & \text{if } x > st \end{cases}$$

é solução do problema sse $s[U_+ - U_-] = F(U_+) - F(U_-)$. A este tipo de solução dá-se o nome de onda de choque com velocidade constante s .

Podemos então questionar de que forma são os ternos (U_-, U_+, s) que satisfazem (4). Esses ternos são de uma das 3 seguintes formas:

- a) $U_+ \neq U_-$, representando pontos de choque
- b) $U_+ = U_-$ e s valor próprio da matriz Jacobiana $F'(U_+)$ (pontos de rarefacção)
- c) soluções com $U_+ = U_-$ e s outro valor qualquer

Podemos deduzir b) de a) fazendo $|U_+ - U_-| \rightarrow 0$, pois tendo em conta que o Problema de Riemann é invariante para a transformação $(x, y) \mapsto (\alpha x, \alpha t) \quad \forall \alpha > 0$, a função $U(x, t) = \tilde{U}(\frac{x}{t})$ é solução para $t > 0$ sse

$$[-s + F'(\tilde{U})]\tilde{U}' = 0, \quad s = \frac{x}{t}$$

Vamos então tentar estudar a forma do conjunto formado por tais pontos. Supondo que $U \in \mathbb{R}^n$, considere-se a função

$$\mathcal{H}: \quad \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \\ (U_-, U_+, s) \mapsto -s[U_+ - U_-] + F(U_+) - F(U_-)$$

Então, $\{\text{soluções de (4)}\} = \mathcal{H}^{-1}(0)$. Calculando a derivada de \mathcal{H}

$$d\mathcal{H}(U_-, U_+, s) = -[U_+ - U_-]ds + [-s + F'(U_+)]dU_+ - [-s + F'(U_-)]dU_-$$

vê-se, facilmente, que em b) $d\mathcal{H}$ é singular. Tal como já foi dito atrás, em geral, é possível remover estas singularidades usando *blow-up*. Antes de mostrar que tal realmente acontece comecemos por ver como funciona o *blow-up*.

4. *Blow-up*

A construção do *blow-up* de uma variedade sobre uma subvariedade é uma ferramenta importante na resolução de singularidades. As técnicas de *blow-up* envolvem mudanças de coordenadas que nos permitem expandir os pontos onde existem singularidades.

Sendo V um espaço vectorial e PV o respectivo espaço projectivo, o *blow-up* de V sobre a origem define-se como sendo o conjunto

$$\Gamma_0 V := \{(x, l) \in V \times PV : x \in l\}$$

À projecção

$$\pi: \Gamma_0 V \rightarrow V \\ (x, l) \mapsto x$$

dá-se o nome de *collapsing map*, e ao conjunto $0^* := \pi^{-1}[0] \cong PV$ chama-se hipersuperfície excepcional, pelo facto de 0^* ser uma subvariedade de codimensão 1.

É, contudo, importante construir as parametrizações de $\Gamma_0 V$. Suponhamos que V é um espaço vectorial de dimensão n . Será adoptada a seguinte notação:

$$y \in V \rightarrow y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

$$[y] := \{\alpha y : \alpha \in \mathbb{R}\} \quad \text{para } y \neq 0$$

e para cada $i = 1, \dots, n$, seja

$$\mathcal{O}_i = \{(x, [y]) : y \in V, y_i \neq 0, x \in [y]\}$$

$\{\mathcal{O}_i\}$ forma, naturalmente, uma cobertura aberta de $\Gamma_0 V$. Assim sendo, $\{(\mathcal{O}_i, \varphi_i), i = 1, \dots, n\}$ formam um atlas para $\Gamma_0 V$, onde

$$\begin{aligned} \varphi_i : \quad \mathcal{O}_i &\rightarrow V \\ (x, [y]) &\mapsto \left(\frac{y_1}{y_i}, \dots, \frac{y_{i-1}}{y_i}, x_i, \frac{y_{i+1}}{y_i}, \dots, \frac{y_n}{y_i} \right) \end{aligned}$$

$\Gamma_0 V$ e $(V \setminus \{0\}) \cup PV$ são isomorfos, sendo o isomorfismo entre eles tal que a cada $(x, l) \in \Gamma_0 V$ associamos x se $x \neq 0$, e l no caso contrário.

Suponhamos, primeiramente, que $0 \in \mathcal{O} \subseteq V$, \mathcal{O} aberto. Por definição o *blow-up* de \mathcal{O} sobre a origem é o conjunto

$$\Gamma_0 \mathcal{O} := \Gamma_0 V \cap (\mathcal{O} \times PV)$$

Consideremos agora os conjuntos \mathcal{O}_1 e \mathcal{O}_2 abertos ($\mathcal{O}_1 \subseteq V_1$, $\mathcal{O}_2 \subseteq V_2$) tais que $0 \in \mathcal{O}_2$ e seja $M = \mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2$. O *blow-up* de M sobre a sua subvariedade $S = \mathcal{O}_1 \times \{0\}$ é definido como sendo o conjunto

$$\Gamma_S M := \mathcal{O}_1 \times \Gamma_0 \mathcal{O}_2$$

onde, neste caso, o *collapsing map* é a projecção nas duas primeiras coordenadas, isto é

$$\begin{aligned} \Pi : \quad \Gamma_S M &\rightarrow M \\ (x_1, x_2, l) &\mapsto (x_1, x_2) \end{aligned}$$

Assim como é possível identificar $\Gamma_0 V$ com $(V \setminus \{0\}) \cup PV$, $\Gamma_S M$ também é identificável com $(M \setminus S) \cup (S \times PV_2)$. Nesse caso o *collapsing map* é a identidade em $M \setminus S$ e a projecção no primeiro factor em $S \times PV_2$.

Note-se que a superfície S é expandida, através do *blow-up*, para $S^* = \Pi^{-1}(S)$, o qual é isomorfo a PNS (em $\Gamma_S M$), na medida em que $S \times V_2$ é o fibrado normal de S como subvariedade de M .

Por último, seja M uma variedade diferenciável e S uma sua subvariedade. Define-se o *blow-up* de M sobre S como sendo o conjunto

$$\Gamma_S M := (M \setminus S) \cup PNS$$

O problema de encontrar uma parametrização para PNS reduz-se ao problema de encontrar uma parametrização para $\mathcal{O}_1 \times \Gamma_0 \mathcal{O}_2$.

Consideremos a lei de conservação

$$U_t + F(U)_x = 0$$

onde $U = (v, u)$ e $F \in C^2$ é dada por $F(v, u) = (F_1(v, u), F_2(v, u))$. O conjunto dos pontos (U_-, U_+, s) que satisfazem a condição de Rankine-Hugoniot verifica $\mathcal{H}(U_-, U_+, s) = 0$, onde

$$\mathcal{H}(v_-, u_-, v_+, u_+, s) = \begin{pmatrix} -s(v_+ - v_-) + F_1(v_+, u_+) - F_1(v_-, u_-), \\ -s(u_+ - u_-) + F_2(v_+, u_+) - F_2(v_-, u_-) \end{pmatrix}$$

Tal como já foi referido existem singularidades no conjunto $\{(U_-, U_+, s) : U_+ = U_-\}$. Para resolver as singularidades vamos fazer *blow-up* sobre a diagonal $U_- = U_+$. Designe-se por M o espaço total, e por S a sua diagonal.

$$M = U \times U \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^5$$

$$S = \{(v_-, u_-, v_+, u_+, s) \in \mathbb{R}^5 : v_- = v_+, u_- = u_+\}$$

É necessário escrever as cartas para o *blow-up* de M sobre S . Temos que

$$NS = \{(v, u, v, u, s), (a, b, -a, -b, 0) : v, u, s, a, b \in \mathbb{R}\}$$

e, consequentemente

$$PNS = \{(v, u, v, u, s), [a : b : -a : -b : 0] : v, u, s, a, b \in \mathbb{R}\}$$

Temos então que as aplicações

$$\varphi' : (v_-, u_-, s, \rho, \omega) \mapsto (v_-, u_-, v_- + \rho, u_- + \rho\omega, s, [1 : \omega : -1 : -\omega : 0])$$

$$\varphi'' : (v_-, u_-, s, \rho, \omega) \mapsto (v_-, u_-, v_- + \rho\omega, u_- + \rho, s, [\omega : 1 : -\omega : -1 : 0])$$

são tais que

$$\begin{aligned} \varphi'(\cdot, \cdot, \cdot, 0, \cdot) &\subseteq PNS & \varphi''(\cdot, \cdot, \cdot, 0, \cdot) &\subseteq PNS \\ \pi\varphi'(\cdot, \cdot, \cdot, \neq 0, \cdot) &\subseteq \mathbb{R}^5 & \pi\varphi''(\cdot, \cdot, \cdot, \neq 0, \cdot) &\subseteq \mathbb{R}^5 \setminus S \end{aligned}$$

onde π é a projecção de $PT\mathbb{R}^5$ em \mathbb{R}^5 . Além do mais

$$\varphi'(\cdot, \cdot, \cdot, 0, \cdot) \cup \varphi''(\cdot, \cdot, \cdot, 0, \cdot) = PNS$$

$$\pi\varphi'(\cdot, \cdot, \cdot, \neq 0, \cdot) \cup \pi\varphi''(\cdot, \cdot, \cdot, \neq 0, \cdot) = \mathbb{R}^5 \setminus S$$

A aplicação φ' é um difeomorfismo, na medida em que é diferenciável e tem inversa diferenciável, sendo esta dada por

$$\psi'(v_-, u_-, v_+, u_+, s, [a_1 : a_2 : -a_1 : -a_2 : 0]) = (v_-, u_-, s, v_+ - v_-, a_2/a_1)$$

Analogamente, a inversa de φ'' é dada por:

$$\psi''(v_-, u_-, v_+, u_+, s, [a_1 : a_2 : -a_1 : -a_2 : 0]) = (v_-, u_-, s, u_+ - u_-, a_1/a_2)$$

Obtidas as cartas para o *blow-up* podemos escrever \mathcal{H} nas novas coordenadas. Esta é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \rho \left(s + \frac{F_1(v_- + \rho, u_- + \rho\omega) - F_1(v_-, u_-)}{\rho}, \right. \\ & \left. s\omega + \frac{F_2(v_- + \rho, u_- + \rho\omega) - F_2(v_-, u_-)}{\rho} \right) \\ = & \rho \bar{\mathcal{H}}(v_-, u_-, s, \rho, \omega) \end{aligned}$$

É de realçar que $\rho = 0$ corresponde ao caso em que $U_- = U_+$. Como o objectivo é resolver as singularidades existentes na diagonal $U_- = U_+$ temos de estudar o comportamento da função \mathcal{H} quando $\rho \rightarrow 0$. Mas isso é equivalente a estudar o comportamento de $\bar{\mathcal{H}}$ quando $\rho \rightarrow 0$.

$\bar{\mathcal{H}}$ estende-se continuamente a $\rho = 0$, sendo

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{H}}(v_-, u_-, s, 0, \omega) = & \left(s + \frac{\partial F_1}{\partial v}(v_-, u_-) + \omega \frac{\partial F_1}{\partial u}(v_-, u_-), \right. \\ & \left. s + \frac{\partial F_2}{\partial v}(v_-, u_-) + \omega \frac{\partial F_2}{\partial u}(v_-, u_-) \right) \end{aligned}$$

e a matriz Jacobiana é dada por

$$\text{Jac } \bar{\mathcal{H}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F_1}{\partial v^2} + \omega \frac{\partial^2 F_1}{\partial v \partial u} & \frac{\partial^2 F_1}{\partial u \partial v} + \omega \frac{\partial^2 F_1}{\partial u^2} & 1 & \frac{\partial^2 F_1}{\partial v^2} + \omega \frac{\partial^2 F_1}{\partial u \partial v} + \omega^2 \frac{\partial^2 F_1}{\partial u^2} & \frac{\partial F_1}{\partial u} \\ \frac{\partial^2 F_2}{\partial v^2} + \omega \frac{\partial^2 F_2}{\partial v \partial u} & \frac{\partial^2 F_2}{\partial u \partial v} + \omega \frac{\partial^2 F_2}{\partial u^2} & \omega & \frac{\partial^2 F_2}{\partial v^2} + \omega \frac{\partial^2 F_2}{\partial u \partial v} + \omega^2 \frac{\partial^2 F_2}{\partial u^2} & s + \frac{\partial F_2}{\partial u} \end{pmatrix}$$

Para facilitar a notação, denotemos $\left(F_1, F_2, \frac{\partial F_1}{\partial v}, \frac{\partial F_1}{\partial u}, \frac{\partial F_2}{\partial v}, \frac{\partial F_2}{\partial u}, \frac{\partial^2 F_1}{\partial v^2}, \frac{\partial^2 F_1}{\partial v \partial u}, \frac{\partial^2 F_1}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 F_2}{\partial v^2}, \frac{\partial^2 F_2}{\partial v \partial u}, \frac{\partial^2 F_2}{\partial u^2} \right)$, espaço dos jactos de ordem 2, por $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_6)$. Obtemos então, após alguma manipulação algébrica, que um ponto $(v_-, u_-, s, \rho, \omega) \in \mathcal{H}^{-1}(0)$ é um ponto singular de $\bar{\mathcal{H}}$ sse

$$(7) \quad \begin{cases} \rho = 0 \\ s = -\beta_1 - \omega\beta_2 \\ \beta_3 = \beta_1 + \omega\beta_2 - \beta_4 \\ \beta_4 = \beta_1 + 2\omega\beta_2 \\ \gamma_4 = \gamma_1 - \omega^2\gamma_3 + \omega\gamma_6 \\ \gamma_5 = \gamma_2 + \omega\gamma_3 - \gamma_6 \end{cases}$$

O conjunto formado pelos pontos, em \mathbb{R}^{17} , que verificam (7) forma uma variedade diferenciável de codimensão 6. Ignorando a variável ρ , podemos pensar nessa variedade mergulhada no conjunto $J^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \times \mathbb{R}^2$ (onde as duas últimas componentes correspondem às variáveis s e ω). Aí, a variedade obtida é uma variedade de codimensão 5. Designemos essa variedade por T' .

T' é um conjunto semi-algébrico, pois é definido como sendo a intersecção de curvas de nível de ordem zero de funções polinomiais. Denotando por T a projecção de T' em $J^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ segue que T é um conjunto semi-algébrico, na

medida em que a imagem de um conjunto semi-algébrico por uma aplicação polinomial é semi-algébrica.

Sendo T semi-algébrico, admite uma estratificação regular de Whitney com um número finito de estratos, tendo, cada estrato, codimensão maior ou igual a 3, visto a codimensão de T' ser 5 e, na projecção, duas das variáveis desaparecerem. T está, desta forma, nas condições de aplicabilidade do Teorema da Transversalidade, o qual passo a enunciar.

Teorema da Transversalidade. *Sejam X e Y variedades e $W \subseteq J^k(X, Y)$ um subconjunto estratificado. Então*

$$T_W = \{f \in C^\infty(X, Y) : j^k f \pitchfork W\}$$

é residual. Se W é fechado e a estratificação é regular, então T_W é aberto.

$T \subseteq J^2(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$. Como neste caso, $\dim(\mathbb{R}^2) = 2 \leq 3 = \text{codim } T$, resulta que

$$j^k F \pitchfork T \Leftrightarrow j^k F(X) \cap T = \emptyset$$

Mas dizer que $j^k F(X) \cap T = \emptyset$ é o mesmo que dizer que não existem singularidades em \mathbb{R}^2 .

Concluimos assim, pelo Teorema de Transversalidade, que o conjunto das funções $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ para as quais, após o *blow-up*, as singularidades desaparecem é denso e aberto.

Poder-se-á questionar agora se o mesmo resultado será válido quando estivermos a trabalhar com n leis de conservação.

Consideremos então a lei de conservação expressa por

$$U_t + F(U)_x = 0$$

onde $U = (u^1, \dots, u^n)$ e $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é C^2 ($F = (F^1, \dots, F^n)$). Tal como no caso anterior, a função \mathcal{H} que transcreve a condição de Rankine-Hugoniot é singular quando $U_- = U_+$ e s é valor próprio da matriz $F'(U_+)$.

O argumento para provar que, em geral, após fazer *blow-up* as singularidades desaparecem é rigorosamente o mesmo, utilizado no caso $n = 2$. Nas novas coordenadas a condição de Rankine-Hugoniot é expressa por

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(u_-^1, \dots, u_-^n, \rho, \omega^2, \dots, \omega^n) &= \rho \bar{\mathcal{H}}(u_-^1, \dots, u_-^n, \rho, \omega^2, \dots, \omega^n) \\ &= 0 \end{aligned}$$

onde

$$\bar{\mathcal{H}}_i(u_-^1, \dots, u_-^n, \rho, \omega^2, \dots, \omega^n) = s\omega^i + \frac{F^i(U_- + \rho((1, \omega^2, \dots, \omega^n))) - F^i(U_-)}{\rho}$$

e $\omega^1 \equiv 1$

A extensão de $\bar{\mathcal{H}}$ a 0 é tal que

$$\bar{\mathcal{H}}_i(u_-^1, \dots, u_-^n, 0, \omega^2, \dots, \omega^n) = s\omega^i + \frac{\partial F^i}{\partial u^1} + \omega^2 \frac{\partial F^i}{\partial u^2} + \dots + \omega^n \frac{\partial F^i}{\partial u^n}$$

onde novamente $\omega^1 \equiv 1$.

A matriz Jacobiana para ρ é dada por

$$\begin{pmatrix} \gamma_{11}^1 + \sum_{i=2}^n \omega^i \gamma_{1i}^1 & \cdots & \gamma_{n1}^1 + \sum_{i=2}^n \omega^i \gamma_{ni}^1 & 1 & \sum_{i,j} \gamma_{ij}^1 \omega^i \omega^j & \beta_2^1 & \cdots & \beta_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{11}^n + \sum_{i=2}^n \omega^i \gamma_{1i}^n & \cdots & \gamma_{n1}^n + \sum_{i=2}^n \omega^i \gamma_{ni}^n & \omega^n & \sum_{i,j} \gamma_{ij}^n \omega^i \omega^j & \beta_2^n & \cdots & s + \beta_n^n \end{pmatrix}$$

onde $\beta_j^i = \frac{\partial F^i}{\partial u^j}$ e $\gamma_{jk}^i = \frac{\partial F^i}{\partial u^j \partial u^k}$.

Tal como no caso $n = 2$, $\rho = 0$ é a expansão da diagonal $U_- = U_+$. Pretendemos então estudar o conjunto das singularidades de $\bar{\mathcal{H}}$ em $\rho = 0$. Seja T' o subconjunto de $J^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n$ composto por tais singularidades, e T a sua projecção em $J^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

$\bar{\mathcal{H}}^{-1}(0)$ é expresso por n equações independentes (para cada i podemos resolver tais equações em ordem a β_1^i). No entanto, se considerarmos a submatriz de Jac $\bar{\mathcal{H}}$ constituída pelas n primeiras colunas e as $n - 1$ últimas, visto cada uma dessas colunas envolver pelo menos uma variável, diferente de β_1^i (para todo $i = 1, \dots, n$) que não está presente em nenhuma das outras, temos que T' é definido por pelo menos $C_n^{2n-1} (\geq 2n + 1)$ equações independentes, e, conseqüentemente, T é um conjunto semi-algébrico de codimensão maior ou igual a $n + 1$.

Obtemos assim, usando o Teorema da Transversalidade, o seguinte resultado:

Teorema 1. *O conjunto das funções $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, de classe C^2 , para as quais, após o blow-up, as singularidades desaparecem é denso e aberto.*

5. VARIEDADE FUNDAMENTAL DAS ONDAS

Considere-se novamente o Problema de Riemann dado por (1). Seja $\mathcal{U} = \mathbb{R}^n$ e suponhamos que $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é diferenciável. O conjunto dos ternos (U_-, U_+, s) que satisfazem (4) forma um subconjunto de $\mathcal{P} = \mathcal{U} \times \mathcal{U} \times \mathbb{R}$. Denote-se por \mathcal{P}^* o *blow-up* de \mathcal{P} .

Uma das propriedades mais importantes do *blow-up* é a sua independência relativamente às coordenadas. Na construção atrás descrita as coordenadas utilizadas foram as projectivas. Podemos, no entanto, utilizar as coordenadas polares. Sejam então $R \in \mathbb{R}$ e $\Omega \in S^{n-1}$ tais que $Rr(\Omega) = U_+ - U_-$, onde $r(\Omega)$ é o vector unitário parametrizado por Ω e aplicado em $\bar{U} = \frac{1}{2}(U_+ + U_-)$. Assim sendo temos que

$$U_- = \bar{U} - \frac{1}{2}Rr(\Omega)$$

$$U_+ = \bar{U} + \frac{1}{2}Rr(\Omega)$$

Seja $\hat{\mathcal{P}} := \mathcal{U} \times \mathbb{R} \times S^{n-1} \times \mathbb{R}$. É de realçar que os pontos (\bar{U}, R, Ω, s) e $(\bar{U}, -R, -\Omega, s)$ originam exactamente o mesmo terno (U_-, U_+, s) . \mathcal{P}^* é assim a imagem de $\hat{\mathcal{P}}$ por $\sigma : \hat{\mathcal{P}} \rightarrow \mathcal{P}^*$ que identifica esses dois pontos. \mathcal{P}^* é uma variedade diferenciável e $\hat{\mathcal{P}}$ uma dupla cobertura de \mathcal{P}^* .

Definição 2. A $2n$ -variedade diferenciável $\mathcal{P}_0^* = \mathcal{U} \times \{0\} \times \mathbb{P}\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ é chamada *hipersuperfície excepcional*.

É de salientar que ter $R = 0$ é o mesmo que ter $U_- = U_+$, ou seja, $R = 0$ representa a expansão da diagonal $U_- = U_+$ por *blow-up*.

Sendo π ($\pi : \mathcal{P}^* \rightarrow \mathcal{P}$) a projecção de \mathcal{P}^* em \mathcal{P} , nas novas coordenadas, a condição de Rankine-Hugoniot pode ser escrita na forma

$$\mathcal{H} \circ \pi(\bar{U}, R, \Omega, s) = R[-s + A(\bar{U}, R, \Omega)]r(\Omega) = 0$$

onde

$$(8) \quad A(\bar{U}, R, \Omega) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} F'(\bar{U} + \alpha Rr(\Omega))d\alpha$$

$R = 0$ é a solução trivial da condição de Rankine-Hugoniot. O que pretendemos estudar é as soluções não triviais. Para tal temos de estudar as soluções de

$$(9) \quad \mathcal{F}(\bar{U}, R, \Omega, s) := [-s + A(\bar{U}, R, \Omega)]r(\Omega) = 0$$

onde \mathcal{F} é uma aplicação de $\hat{\mathcal{P}}$ em \mathbb{R}^n (\mathcal{F} não está bem definida em \mathcal{P}^*).

Definição 3. A Onda Fundamental \mathcal{W} é a imagem por σ do conjunto de nível de zero da função \mathcal{F} . Se \mathcal{W} for uma variedade, então designa-se por Variedade Fundamental das Ondas.

Para \mathcal{W} ser variedade basta exigir que zero seja valor regular da função \mathcal{F} , tal como o seguinte Teorema mostra

Teorema 2. *Suponhamos que zero é valor regular da função \mathcal{F} . Então \mathcal{W} é uma subvariedade diferenciável de \mathcal{P}^* .*

Prova. Visto 0 ser valor regular de \mathcal{F} podemos concluir que $\hat{\mathcal{W}}$ é uma variedade diferenciável de dimensão $n + 1$. Pelo facto de $\mathcal{F}(\bar{U}, -R, -\Omega, s) = -\mathcal{F}(\bar{U}, R, \Omega, s)$, $\hat{\mathcal{W}}$ é invariante sob transformações antípodas e, conseqüentemente, dado um conjunto aberto \mathcal{O} tal que $\mathcal{O} \cap (-\mathcal{O}) = \emptyset$, temos que σ estabelece um difeomorfismo entre $\hat{\mathcal{W}} \cap \mathcal{O}$ e $\mathcal{W} \cap \sigma(\mathcal{O})$. \square

Isacson *et al.* assumiram em todo o artigo que zero era um valor regular de \mathcal{F} , citando no entanto existirem sistemas bastante importantes para os quais \mathcal{W} não é variedade. Assim sendo, todos os resultados apresentados em [6] e aqui mencionados têm essa suposição como base.

Lema 1. *A hipersuperfície excepcional \mathcal{P}_0^* é transversal a \mathcal{W} .*

Prova. $\mathcal{P}_0^* = \mathbb{R}^n \times \{0\} \times S^{n-1} \times \mathbb{R}$ forma uma dupla cobertura de \mathcal{P}_0^* . Para mostrar o lema basta mostrar que $\hat{\mathcal{P}}_0$ é transversal a $\hat{\mathcal{W}}$. $\mathcal{F}_R = 0$, em $\hat{\mathcal{P}}_0$, na medida em que \mathcal{F}_R é uma função ímpar em R , e portanto dR é linearmente independente com $d\mathcal{F}$ em $\hat{\mathcal{W}} \cap \hat{\mathcal{P}}_0$. \square

Como os pontos de rarefacção ($U_- = U_+$ e s valor próprio de $\text{Jac } F(U_-)$) representam a intersecção de $R = 0$ e $\mathcal{F} = 0$ e, como sabemos que essa intersecção é transversal, temos que os pontos de rarefacção são pontos singulares.

Como imediata consequência desse lema temos o seguinte resultado:

Proposição 1. *A Variedade Fundamental das Ondas \mathcal{W} representa, geometricamente, a aderência, em \mathcal{P}^* , dos pontos (U_-, U_+, s) com $U_+ \neq U_-$ a satisfazer (4).*

Prova. O que pretendemos mostrar é que \mathcal{W} representa a aderência dos pontos $(\bar{U}, R, \Omega, s) \in \mathcal{P}^*$ com $R \neq 0$ a verificar $\mathcal{H} \circ \pi(\bar{U}, R, \Omega, s) = 0$. Por outras palavras, queremos mostrar que \mathcal{W} é a aderência de $\mathcal{W} \setminus \mathcal{P}_0^*$ em \mathcal{P}^* . Mas isso é consequência de $\mathcal{W} \pitchfork \mathcal{P}_0^*$. \square

O que a proposição nos diz é que \mathcal{W} é constituído pelos pontos de choque e de rarefacção. A partir deste momento vamos apenas estudar estes pontos e "esquecer" as soluções triviais. Para estudar tais pontos vamos ver a construção de vários outros conjuntos mergulhados em \mathcal{W} .

6. VARIEDADE CARACTERÍSTICA

Um ponto $(\bar{U}, R, \Omega, s) \in \mathcal{W}$ a verificar $R \neq 0$ corresponde a um ponto de choque, ao passo que se verificar $R = 0$ corresponde a um ponto de rarefacção. Facilmente se verifica por (8) e (9) que um ponto de rarefacção verifica

$$(10) \quad [-s + F'(\bar{U})]r(\Omega) = 0$$

Definição 4. O conjunto dos pontos de rarefacção, $\mathcal{C} = \mathcal{W} \cap \mathcal{P}_0^*$ forma uma variedade de dimensão n , designada por Variedade Característica.

Seja $\rho : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{U}$ a projecção que a cada $(\bar{U}, 0, \Omega, s) \in \mathcal{C}$ associa o elemento $\bar{U} \in \mathcal{U}$.

Por (10), um ponto $(\bar{U}, 0, \Omega, s) \in \mathcal{C}$ sse s é valor próprio de \bar{U} e $r(\Omega)$ o respectivo vector próprio. Se \bar{U} for tal que $F'(\bar{U})$ não tem valores próprios reais então não existe nenhum ponto em \mathcal{C} com projecção \bar{U} . A essa parte de \mathcal{U} dá-se o nome de região elíptica. O resto dos pontos pertence á região hiperbólica. Se $\bar{U} \in \mathbb{R}^n$ for tal que $F'(\bar{U})$ possui n valores próprios distintos então existem

n pontos $(\bar{U}, 0, \Omega_i, s_i) \in \mathcal{C}$, $i = 1, \dots, n$, que se projectam em \bar{U} , ou seja, \mathcal{C} representa uma n -ésima cobertura de uma vizinhança de \bar{U} (em \mathcal{U}).

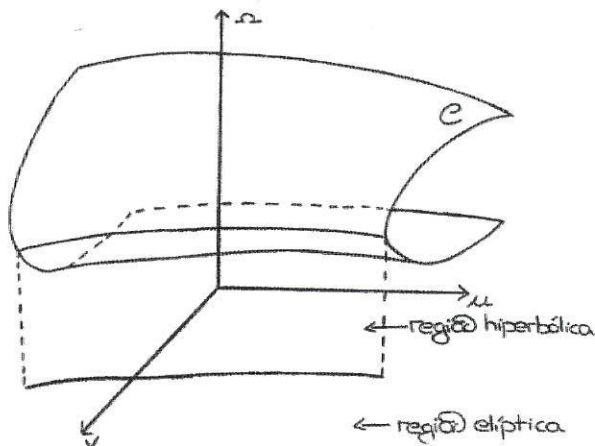


FIGURA 2. Projecção da Variedade Característica \mathcal{C} no espaço $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{RP}^1$, realçando o facto de que, em \mathcal{C} , $R = 0$ e $s = s(v, u, \Omega)$. Acima da região estritamente hiperbólica \mathcal{C} é constituído por 2 folhas. A coincidência dos valores próprios corresponde aos pontos onde as duas folhas se unem

Definição 5. O conjunto dos pontos $(\bar{U}, 0, \Omega, s) \in \mathcal{C}$ tais que s é valor próprio múltiplo de $F'(\bar{U})$ designa-se por Local de Coincidência e denota-se por \mathcal{E} .

Definição 6. $(\bar{U}, 0, \Omega, s) \in \mathcal{E}$ diz-se um ponto umbílico se s tem multiplicidade geométrica maior que 1.

Os pontos de \mathcal{E} podem também ser determinados recorrendo ao seguinte resultado.

Lema 2. O valor próprio real de $F'(\bar{U})$, s , com vector próprio correspondente $r(\Omega)$, tem multiplicidade algébrica superior a 1 sse $\det(\mathcal{F}_\Omega, \mathcal{F}_s) = 0$ em $(\bar{U}, 0, \Omega, s)$. Para além do mais, s tem multiplicidade geométrica 1 sse $\dot{s} \neq 0$.

Ora, os pontos de \mathcal{E} são tais que $\det(\mathcal{F}_\Omega, \mathcal{F}_s) = 0$. Para calcular a dimensão de \mathcal{E} , caso seja variedade diferenciável, o que é preciso notar é que a característica de uma matriz $n \times n$ tem de ser menor ou igual a $n - 1$. Assim o conjunto tem codimensão 1 em \mathcal{C} , sendo portanto uma variedade de dimensão $n - 1$ no espaço do *blow-up*.

A codimensão é deduzida através do seguinte resultado:

Lema 3. O conjunto de todas as matrizes de característica k em $L(m, n)$ forma uma variedade diferenciável de codimensão $(n - k)(m - k)$.

(ver [1], pág. 29).

Suponhamos, por exemplo, que o conjunto formado pelos pontos umbílicos forma uma variedade diferenciável. Qual a sua dimensão? Para $(\bar{U}, 0, \Omega, s) \in \mathcal{E}$

ser ponto umbílico, a matriz $\text{Jac } F(\bar{U})$ tem de ter um valor próprio com multiplicidade geométrica superior a 1. Para o cálculo da dimensão o que interessa é que uma matriz de dimensão $n \times n$ tem de ter característica menor ou igual a $n - 2$. No entanto, temos de ter em conta que, só pelo facto de $(\bar{U}, 0, \Omega, s) \in \mathcal{C}$, já estamos a exigir que $\text{car}(\text{Jac } F(\bar{U})) \leq n - 1$, ou seja, das novas equações uma é linearmente dependente das já existentes. Desta forma, o conjunto dos pontos umbílicos forma uma variedade de codimensão 3 (4-1). É então de realçar que, se estivermos perante um sistema de 2 Leis de Conservação, em geral, não aparecem pontos umbílicos.

O aspecto da variedade característica \mathcal{C} no espaço $\mathbb{R}^n \times \mathbb{P}\mathbb{R}^{n-1}$ num ponto $(\bar{U}, 0, \Omega, s)$ tal que s é valor próprio múltiplo é bastante diferente caso o ponto seja umbílico ou não.

Teorema 3. *A projecção de \mathcal{C} em \mathcal{U} ($\rho : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{U}$) é singular no ponto $p = (\bar{U}, 0, \Omega, s) \in \mathcal{C}$ sse $p \in \mathcal{E}$. Tal singularidade é um ponto dobra para ρ sse s tem multiplicidade algébrica 2 e geométrica 1.*

É de realçar que para $n = 2$, ou seja, numa 2-lei de conservação, as únicas singularidades para ρ que poderiam aparecer eram dobras e cúspides. No entanto, como uma cúspide exigiria a existência de 3 folhas sobre a projecção e como cada folha corresponde a um valor próprio distinto, só aparecem dobras.

7. ONDAS E CURVAS DE RAREFACÇÃO

No início da secção "Problemas de Riemann" vimos qual o conceito de onda de choque. No entanto, o Problema de Riemann não tem solução única, tal como o seguinte exemplo mostra.

Exemplo 1.

$$u_1(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < \frac{t}{2} \\ 1 & \text{se } x > \frac{t}{2} \end{cases} \quad u_2(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ \frac{x}{t} & \text{se } 0 < x < t \\ 1 & \text{se } x > t \end{cases}$$

são ambas soluções do Problema de Riemann

$$u_t + \left(\frac{u^2}{2} \right)_x = 0$$

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Uma função diferenciável, invariante para mudanças de escala $((x, t) \rightarrow (\alpha x, \alpha t), \forall \alpha > 0)$, $U(x, t) = \tilde{U}\left(\frac{x}{t}\right)$ é uma solução do Problema de Riemann sse

$$(11) \quad [-s + F'(\tilde{U})]\tilde{U}' = 0$$

onde $s = \frac{x}{t}$. A este tipo de soluções dá-se o nome de onda de rarefacção. Em cada instante t fixo, uma onda de rarefacção não é nada mais nada menos do que uma sequência de ondas de choque consecutivas.

A Variedade Característica \mathcal{C} pode ser foliada de tal forma que de cada linha podem ser obtidas as diferentes ondas de rarefacção para as diferentes condições iniciais. Vamos então ver como construir a tal foliação de \mathcal{C} e qual a relação entre os dois conjuntos.

Fixemos $U_0 \in \mathcal{U}$ e suponhamos que $F'(U_0)$ tem k valores próprios reais distintos. Então existe uma vizinhança \mathcal{O} de U_0 na qual estão definidas, para cada $i = 1, \dots, k$, funções λ_i e r_i tais que $\lambda_i(U)$ é valor próprio de $F'(U)$, com vector próprio associado $r_i(U)$.

Definição 7. Às curvas integrais da equação diferencial

$$(12) \quad \tilde{U}' = r_i(\tilde{U})$$

dá-se o nome de curvas de rarefacção.

Nota 2. Adota-se que, dados n valores próprios reais, temos $\lambda_1(U) \leq \lambda_2(U) \leq \dots \leq \lambda_n(U)$, e portanto, para cada $i = 1, \dots, n$, está associada uma família de curvas de rarefacção.

Como as funções λ_i e r_i são as funções valores/vectores próprios temos que

$$[-\lambda_i(\tilde{U}) + F'(\tilde{U})]r_i(\tilde{U}) = 0$$

Se a curva for reparametrizada de tal forma que $\lambda_i(\tilde{U}) = \frac{x}{t}$, como \tilde{U} satisfaz (12) vem que a curva satisfaz (11).

A curva satisfaz a condição genuína de não linearidade

$$\lambda_i'(U)r_i(U) \neq 0$$

razão pela qual é possível reparametrizar a curva de tal forma que $\lambda_i(\tilde{U}) = \frac{x}{t}$.

Surge, no entanto, um problema: a construção falha quando os valores próprios não são distintos. Esta dificuldade surge por estarmos a trabalhar em \mathcal{U} . Como citado em [6], Palmeira, em [7], resolve o problema: as curvas de rarefacção em \mathcal{U} são construídas como sendo a projecção, em \mathcal{U} , das curvas integrais do campo de linhas em \mathcal{C} (ou seja, no *blow-up*), correspondente à equação diferencial (12), campo de linhas esse, possivelmente singular, e que passamos a descrever:

Se considerarmos um elemento $p = (\bar{U}, 0, \Omega, s) \in \mathcal{P}_0^*$, então $r(\Omega)$ gera uma linha em $T_{\bar{U}}\mathcal{U}$. Por outro lado, se $(\dot{\bar{U}}, 0, \dot{\Omega}, \dot{s}) \in T_p\mathcal{P}_0^*$, $\dot{\bar{U}}$ também pertence a $T_{\bar{U}}\mathcal{U}$. Designemos então por \mathcal{T} o conjunto dos espaços tangentes a \mathcal{P}_0^* , de dimensão $n + 1$ constituído pelos vectores $(\dot{\bar{U}}, 0, \dot{\Omega}, \dot{s}) \in T_{(\bar{U}, 0, \Omega, s)}\mathcal{P}_0^*$ tais que $\dot{\bar{U}}$ e $r(\Omega)$ são colineares. $T_p\mathcal{C}$ e \mathcal{T}_p são subvariedades da subvariedade de \mathcal{P}^* , $R = 0$. Na subvariedade $R = 0$ (que é uma subvariedade de dimensão $2n$) $T_p\mathcal{C}$ e \mathcal{T}_p têm dimensões n e $n + 1$, respectivamente. Desta forma, em geral, $T_p\mathcal{C}$ e \mathcal{T}_p intersectam-se ao longo de uma linha ($\dim T_p\mathcal{C} + \dim \mathcal{T}_p - \dim(R = 0) = 1$). Ao campo de linhas induzido por \mathcal{T}_p dá-se o nome de campo de linhas de rarefacção

e à respectiva curva integral, curva de rarefacção em \mathcal{C} . Nos pontos em que, eventualmente, a intersecção dos dois conjuntos tenha dimensão superior a um o campo de linhas é singular, visto não estar bem definido.

Definição 8. Ao conjunto dos pontos para os quais o campo de linhas de rarefacção é singular, denotado por \mathcal{B}_0 , dá-se o nome de Local de Singularidades de rarefacção.

Existem, no entanto condições sobre o espaço dos jactos de ordem 1 da função \mathcal{F} (e, conseqüentemente, sobre o espaço dos 1-jactos da função F), para determinar quando é que um ponto está em \mathcal{B}_0 .

Proposição 2. *O campo de linhas é singular nos pontos em que $(\frac{1}{2}\mathcal{F}_{\bar{U}}r(\Omega), \mathcal{F}_\Omega, \mathcal{F}_s)$ não tem característica máxima. Em particular $\mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{E}$.*

Prova. Como \mathcal{C} é definido como o conjunto dos pontos a verificar

$$\begin{cases} \mathcal{F}(\bar{U}, R, \Omega, s) = 0 \\ R = 0 \end{cases}$$

temos que um vector $(\dot{\bar{U}}, \dot{R}, \dot{\Omega}, \dot{s}) \in T_{(\bar{U}, R, \Omega, s)}\mathcal{C}$ sse

$$\begin{cases} \mathcal{F}_{\bar{U}}\dot{\bar{U}} + \mathcal{F}_R\dot{R} + \mathcal{F}_\Omega\dot{\Omega} + \mathcal{F}_s\dot{s} = 0 \\ \dot{R} = 0 \end{cases}$$

Por outro lado, os vectores de \mathcal{T}_p são da forma $(\frac{1}{2}\dot{R}r(\Omega), 0, \dot{\Omega}, \dot{s})$. Os vectores que pertencem à intersecção verificam

$$(13) \quad \frac{1}{2}\mathcal{F}_{\bar{U}}r(\Omega)\dot{R} + \mathcal{F}_\Omega\dot{\Omega} + \mathcal{F}_s\dot{s} = 0$$

sendo esta equação uma equação linear homogénea da forma $Ax = b$, com $\dim(A) = (n+1) \times n$. O conjunto dos pontos que verificam (13) formam uma linha sse a matriz $(\frac{1}{2}\mathcal{F}_{\bar{U}}r(\Omega), \mathcal{F}_\Omega, \mathcal{F}_s)$ tem característica máxima, logo as singularidades ocorrem quando $(\frac{1}{2}\mathcal{F}_{\bar{U}}r(\Omega), \mathcal{F}_\Omega, \mathcal{F}_s)$ não tiver característica máxima. Em particular, $\text{car}(\frac{1}{2}\mathcal{F}_{\bar{U}}r(\Omega), \mathcal{F}_\Omega, \mathcal{F}_s) < n \Rightarrow \det(\mathcal{F}_\Omega, \mathcal{F}_s) = 0$, isto é, $p \in \mathcal{B}_0 \Rightarrow p \in \mathcal{E}$. \square

Como imediata consequência temos o seguinte resultado:

Corolário 1. *As curvas de rarefacção constituem uma foliação 1-dimensional de $\mathcal{C} \setminus \mathcal{B}_0$.*

Na projecção das curvas de rarefacção de \mathcal{C} em \mathcal{U} é natural o aparecimento de singularidades. Nos pontos de dobra de \mathcal{C} onde o campo de linhas está bem definido aparecem tais singularidades.

Proposição 3. *Seja $p \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{B}_0$ um ponto dobra de $\rho: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{U}$. Então a curva de rarefacção que passa por p é transversal a \mathcal{E} e a sua projecção é uma cúspide.*

A figura que a seguir se segue dá-nos a ideia geométrica do que acontece.

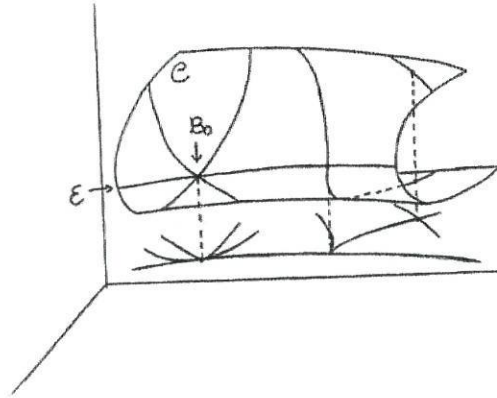


FIGURA 3

Por este resultado se pode ver que muitas singularidades das curvas de rarefacção são eliminadas fazendo um levantamento a \mathcal{C} . Como a figura pretende mostrar, em \mathcal{C} , fora de \mathcal{B}_0 , o campo de linhas está bem definido não apresentando as curvas integrais qualquer tipo de singularidades, ao passo que, quando projectamos tais curvas, passa a haver formação de bicos. É ainda de realçar que, em cada ponto $\bar{U} \in \mathcal{U}$ tal que $F'(\bar{U})$ tem n valores próprios distintos, existem n curvas de rarefacção a passar por \bar{U} , na medida em que temos n pontos em \mathcal{C} que se projectam em \bar{U} , e, desde que a projecção de cada curva tenha direcções distintas (figura (3)).

Nota 3. Localmente, uma curva integral do campo de linhas de rarefacção, pode ser obtida integrando o campo de vectores

$$\begin{aligned} \dot{\bar{U}} &= \det(\mathcal{F}_\Omega, \mathcal{F}_s)r(\Omega) \\ \begin{pmatrix} \dot{\bar{U}} \\ \dot{s} \end{pmatrix} &= -\text{adj}(\mathcal{F}_\Omega, \mathcal{F}_s)\mathcal{F}_{\bar{U}}r(\Omega) \end{aligned}$$

Vamos então ver qual a relação entre curvas e ondas de rarefacção. Consideremos uma onda de rarefacção com U_- -fixo (valor á esquerda da onda). Então $U(\frac{x}{t})$ toma valores na curva integral que passa por U_- , associada a $r_k(U)$, para algum k , na direcção em que $\lambda_k(U)$ cresce. Consequentemente, quando fixamos U_- , numa onda de rarefacção não é admitido qualquer valor para U_+ . U_+ também tem de ser um valor na curva de rarefacção U_- fixa.

8. LOCAL DE INFLEXÃO

Numa curva de rarefacção é satisfeita a condição genuína de não linearidade

$$\lambda'_i(U)r_i(U) \neq 0$$

Esta condição implica que ao longo da curva de rarefacção as velocidades características variam monotonamente. Existem, no entanto, pontos onde tal condição falha. Isacson *et al.* faz um estudo de como varia $s = \lambda_i(U)$ ao longo da curva

de rarefacção: quando s atinge um extremo e qual a interpretação geométrica de tal ocorrência. Nos pontos estacionários para s , considerando s como função da curva de rarefacção, ocorrem singularidades onde o campo de linhas está contido no hiperplano $ds = 0$, tal como o seguinte teorema afirma:

Teorema 4. *Considerando um ponto $p \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{E}$ ($p = (\bar{U}, 0, \Omega, s)$). A condição genuína de não linearidade falha em \bar{U} , para a família característica correspondente a s , sse o campo de linhas de rarefacção está contido no hiperplano $ds = 0$.*

A prova deste teorema recorre a um outro resultado que nos expressa a condição do campo de linhas estar contido no hiperplano $ds = 0$ no espaço dos 1-jactos da função \mathcal{F} .

Lema 4. *Existe um vector não nulo contido, simultaneamente, no campo de linhas de rarefacção e no hiperplano $ds = 0$, num ponto $(\bar{U}, 0, \Omega, s) \in \mathcal{C}$ sse a matriz $B_0(\bar{U}, \Omega, s) := (\frac{1}{2}\mathcal{F}_{\bar{U}r}(\Omega), \mathcal{F}_\Omega)$ é singular.*

Definição 9. Ao conjunto dos pontos em \mathcal{C} onde $\det(B_0) = 0$ dá-se o nome de Local de Inflexão, e denota-se por \mathcal{S} .

Se suposermos que 0 é valor regular da função $\det B_0$ então \mathcal{S} forma uma subvariedade de \mathcal{C} de dimensão $n - 1$, na medida em que $\det B_0$ é uma função de $\mathcal{U} = \mathbb{R}^n$ em \mathbb{R} .

Tal como já foi visto nas curvas de rarefacção, a transversalidade entre os conjuntos e as foliações está estritamente relacionado com bifurcação. Nesse caso, ao estudar o conjunto dos pontos, de \mathcal{T} , para os quais o gráfico de λ_i atinge um extremo ou um ponto sela, verifica-se que tal está relacionado com a transversalidade ou tangência entre as curvas de rarefacção e \mathcal{S} .

Proposição 4. *Considere-se o gráfico de s ao longo da curva de rarefacção que passa no ponto p , onde $p := (\bar{U}, 0, \Omega, s) \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{E}$ e p é ponto regular para $\det B_0$. Então a segunda derivada da função s anula-se em p sse \mathcal{S} e a curva de rarefacção são tangentes em p .*

Todos os pontos singulares do campo de linhas de rarefacção são pontos de inflexão, isto é, $\mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{S} \subseteq \mathcal{E}$:

$$\begin{aligned} p \in \mathcal{B}_0 &\Rightarrow (\frac{1}{2}\mathcal{F}_{\bar{U}r}(\Omega), \mathcal{F}_\Omega, \mathcal{F}_s) \text{ não tem característica máxima} \\ &\Rightarrow \det(\frac{1}{2}\mathcal{F}_{\bar{U}r}(\Omega), \mathcal{F}_\Omega) = 0 \\ &\Rightarrow p \in \mathcal{S} \end{aligned}$$

Quando restrito aos pontos dobra de $\rho : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{U}$ os dois conjuntos coincidem.

Proposição 5. *Seja $p \in \mathcal{C}$ um ponto dobra da função $\rho : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{U}$. Então, o ponto p é uma singularidade do campo de linhas de rarefacção sse $p \in \mathcal{S}$.*

Definição 10. O local de inflexão excepcional, denotado por \mathcal{H}_0 , é constituído pelos pontos de inflexão para os quais

- a) p não é ponto regular da função $\det B_0$

b) $l\dot{B}_0r = 0$ onde $lB_0 = 0 = B_0r$, $r = (\dot{R}, \dot{\Omega})$, $l \neq 0$, $r \neq 0$ e \dot{B}_0 representa B'_0 aplicado ao vector $(\frac{1}{2}\dot{R}r(\Omega), \dot{\Omega}, 0)$

Temos então, como corolário da Proposição 4, o seguinte resultado:

Corolário 2. *Seja $p \in \mathcal{S}$ um ponto regular para $\det B_0$. Se $p \notin \mathcal{H}_0 \cup \mathcal{B}_0$ então a curva de rarefacção que passa por p é transversal a \mathcal{S} em p .*

9. FOLIAÇÃO DE CHOQUE

Começamos por ver que (6) é solução do Problema de Riemann com condição inicial (5) sse o terno (U_-, U_+, s) satisfaz a condição de Rankine-Hugoniot. Foi então estudado o conjunto dos ternos (U_-, U_+, s) que verificam tal condição. De seguida é estudado um problema semelhante: fixando o estado esquerdo $U_- = U_0$, encontrar os pontos (U_+, s) tais que (U_-, U_+, s) satisfazem (4) e ver qual a importância das suas propriedades na resolução do Problema de Riemann.

O estudo deste problema será feito no *blow-up*. Em \mathcal{P}^* o conjunto das ondas de choque com estado esquerdo $U_- = U_0$ constante consiste nos pontos $(\bar{U}, R, \Omega, s) \in \mathcal{W}$ tal que

$$\bar{U} - \frac{1}{2}Rr(\Omega) = U_0$$

Numa vizinhança de cada ponto, não singular, nas condições acima descritas o conjunto solução forma uma variedade de dimensão 1, pelo que o conjunto de tais pontos se designa por curva de choque U_- -fixo.

Da mesma forma se pode definir a curva de choque U_+ -fixa, como sendo o conjunto dos pontos $(\bar{U}, R, \Omega, s) \in \mathcal{W}$ tal que

$$\bar{U} + \frac{1}{2}Rr(\Omega) = U_0$$

As curvas também podem ser vistas como as curvas integrais dos campos de linhas $dU_- = 0$ e $dU_+ = 0$.

Definição 11. O campo de linhas definido, em \mathcal{W} , pelas equações $dU_- = 0$ e $dU_+ = 0$ são chamados campos de linhas de choque U_- -fixo e U_+ -fixo, respectivamente.

Como o estudo de tais curvas é, em tudo semelhante, basicamente em [6] é tratado o estudo das curvas integrais de $dU_- = 0$.

Tal como no campo de linhas de rarefacção também é possível determinar os pontos de singularidade do campo de linhas de choque. Fixando o estado esquerdo $U_- = U_0$, pelo Teorema da Função Implícita o conjunto dos pontos (U, s) tais que (U_-, U, s) satisfazem a condição de Rankine-Hugoniot formam uma curva numa vizinhança do mesmo se a derivada de (4)

$$-[U - U_0]ds + [-s + F'(U)]dU$$

tiver característica máxima. Os pontos onde a característica não é máxima são de dois tipos:

a) Bifurcação Primária: pontos em que $U = U_0$ e s é valor próprio de $F'(U_0)$

Em cada ponto sem valores próprios coincidentes a curva de choque tem n ramificações em U_0 . Este tipo de singularidades, tal como já foi demonstrado é, em geral, removível por *blow-up*

b) Bifurcação Secundária: pontos em que a matriz $(U - U_0, -s + F'(U))$ não tem característica máxima

O teorema que a seguir se segue diz quais destes pontos são singulares

Teorema 5. $p \in \mathcal{W} \setminus \mathcal{C}$ é singularidade do campo de linhas de choque sse p é um ponto de bifurcação secundária; $p \in \mathcal{C}$ é singularidade do campo de linhas de choque sse é singularidade do campo de linhas de rarefacção.

Prova. Seja $p := (U_-, U_+, s) \in \mathcal{W} \setminus \mathcal{C}$. $(\dot{U}_-, \dot{U}_+, \dot{s})$ é tangente a \mathcal{W} e pertence, simultaneamente, ao campo de linhas $dU_- = 0$ sse

$$\begin{cases} -[U_+ - U_-]\dot{s} + [-s + F'(U_+)]\dot{U}_+ = 0 \\ \dot{U}_- = 0 \end{cases}$$

Então o campo de linhas tem uma singularidade quando a característica da matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & U_+ - U_- & -s + F'(U_+) \end{pmatrix}$ não for máxima, ou seja, quando a característica da matriz $(U_+ - U_-, -s + F'(U_+))$ for inferior a n . Mas esses pontos correspondem exactamente aos pontos de bifurcação secundária.

Dado um ponto $(\bar{U}, R, \Omega, s) \in \mathcal{C}$ temos $R = 0$ e $dU_- = d\bar{U} - \frac{1}{2}r(\Omega)dR$. Um vector $(\dot{\bar{U}}, \dot{R}, \dot{\Omega}, \dot{s})$ é tangente a \mathcal{W} , em $(\bar{U}, 0, \Omega, s)$ e pertence ao campo de linhas de choque sse

$$(14) \quad \begin{cases} \frac{1}{2}\mathcal{F}_{\bar{U}}r(\Omega)\dot{R} + \mathcal{F}_{\Omega}\dot{\Omega} + \mathcal{F}_s\dot{s} = 0 \\ \dot{\bar{U}} = \frac{1}{2}r(\Omega)\dot{R} \end{cases}$$

na medida em que $\mathcal{F}_R = 0$ em \mathcal{C} . As singularidades ocorrem quando a matriz $(\frac{1}{2}\mathcal{F}_{\bar{U}}r(\Omega), \mathcal{F}_{\Omega}, \mathcal{F}_s)$ não tem característica máxima, ou seja, quando o campo de linhas de rarefacção é singular. \square

Nota 4. A relação existente entre curvas de rarefacção e curvas de choque é bem notória, se tivermos em conta que o campo de linhas de choque em $R = 0$ é expresso pela equação

$$\begin{aligned} \dot{\bar{U}} &= \det(\mathcal{F}_{\Omega}, \mathcal{F}_s)r(\Omega) \\ \dot{R} &= 2 \det(\mathcal{F}_{\Omega}, \mathcal{F}_s) \\ \begin{pmatrix} \dot{\Omega} \\ \dot{s} \end{pmatrix} &= -adj(\mathcal{F}_{\Omega}, \mathcal{F}_s)\mathcal{F}_{\bar{U}}r(\Omega) \end{aligned}$$

a qual difere da das curvas de rarefacção apenas na componente \hat{R} .

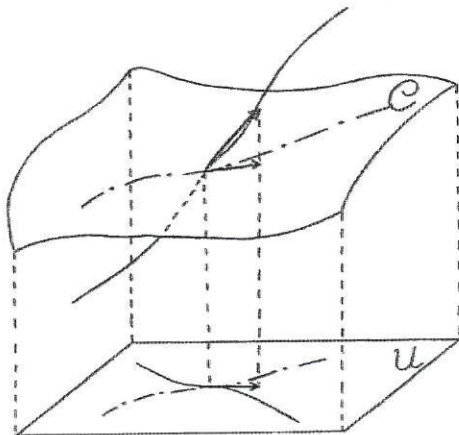


FIGURA 4

Definição 12. Ao conjunto dos pontos em que o campo de linhas de choque U_- -fixo é singular dá-se o nome de Local de Bifurcação Secundária à direita e escrevemos \mathcal{B}_R . Da mesma forma, \mathcal{B}_L , Local de Bifurcação Secundária à esquerda, é o conjunto dos pontos onde o campo de linhas de choque U_+ -fixo é singular.

As curvas de choque U_- -fixo e U_+ -fixo formam uma foliação 1-dimensional de $\mathcal{W} \setminus \mathcal{B}_R$ e $\mathcal{W} \setminus \mathcal{B}_L$, respectivamente.

É possível expressar as condições de ser bifurcação secundária em termos do espaço dos 1-jactos da função \mathcal{F} :

Proposição 6. Os pontos de bifurcação secundária \mathcal{B}_R são os pontos em que a matriz $(\mathcal{F}_R + \frac{1}{2}\mathcal{F}_{\bar{U}}r(\Omega), \mathcal{F}_\Omega + \frac{1}{2}R\mathcal{F}_{\bar{U}}r'(\Omega), \mathcal{F}_s)$ não tem característica máxima. Os pontos de \mathcal{B}_L são os pontos em que a matriz $(\mathcal{F}_R - \frac{1}{2}\mathcal{F}_{\bar{U}}r(\Omega), \mathcal{F}_\Omega - \frac{1}{2}R\mathcal{F}_{\bar{U}}r'(\Omega), \mathcal{F}_s)$ não tem característica máxima.

e, nesse caso, como o Teorema da Transversalidade sugere, é possível relacionar transversalidade com singularidade e, portanto, com bifurcação:

Proposição 7. Consideremos a projecção

$$U_+ : \quad \mathcal{W} \quad \rightarrow \mathcal{U} \\ (\bar{U}, R, \Omega, s) \mapsto U_+$$

restrita á curva de choque U_- -fixo. Esta projecção é singular em $p \in \mathcal{W} \setminus \mathcal{B}_R$ sse $p \in \mathcal{E}$. Um ponto dobra de $\mathcal{E} \setminus \mathcal{B}_0$ é transversal a \mathcal{E} e a projecção tem uma cúspide.

Este último resultado era natural de esperar. Note-se que, pela segunda parte do teorema atrás apresentado $\mathcal{B}_R \cap \mathcal{C} = \mathcal{B}_0 = \mathcal{B}_L \cap \mathcal{C}$. Então se, pelo que foi visto na secção "Ondas e Curvas de Rarefacção", a projecção das curvas de rarefacção

tem uma cúspide nos pontos dobra de $\mathcal{E} \setminus \mathcal{B}_0$ e, como em \mathcal{C} as equações diferem apenas na componente \dot{R} , a projecção das curvas de choque também tem uma cúspide.

10. LOCAL SÓNICO

Pelo facto do Fluxo da Lei de Conservação $U_t + F(U)_x = 0$, em geral, não depender linearmente de U , é frequente o aparecimento de várias soluções, quando fixada uma condição inicial. Quando a Lei de Conservação expressa algum sistema físico muitas das soluções podem não ter qualquer interpretação. É portanto importante saber qual a solução "fisicamente mais aceitável". O critério de Lax permite-nos dizer quais as ondas de choque aceitáveis (vários outros critérios existem, mas o critério de Lax é o mais típico): uma onda de choque é admissível se for uma k -onda. Uma k -onda de choque é, por definição, um terno (U_-, U_+, s) que satisfaz (4) e tal que

$$\lambda_k(U_+) < s < \lambda_{k+1}(U_+) \quad \text{e} \quad \lambda_{k-1}(U_-) < s < \lambda_k(U_-)$$

Esta condição é ainda equivalente a uma outra que, em geral, é a mais utilizada:

$$(15) \quad \lambda_k(U_+) < s < \lambda_k(U_-) \quad \text{e} \quad \lambda_{k-1}(U_-) < s < \lambda_{k+1}(U_+)$$

As desigualdades (15) são designadas por desigualdades de entropia ou condições de choque de Lax.

Nota 5. a) Convém apenas salientar que este critério não é global visto não ser adequado para ondas de choque fortes

b) As condições de choque de Lax são condições estáveis visto persistirem sob pequenas perturbações, pois o conjunto das ondas de choque que as satisfazem é aberto

c) Se $n = 1$, o que as condições de entropia dizem é que $F'(U_-) > s > F'(U_+)$

Fixemos uma curva de choque com o estado esquerdo fixo ($U_- = U_0$). A parte da curva constituída por ondas de choque admissíveis é limitada por pontos tais que $s = \lambda_i(U_-)$ ou $s = \lambda_i(U_+)$. Tais pontos são designados por sónicos, à esquerda ou à direita conforme $s = \lambda_i(U_-)$ ou $s = \lambda_i(U_+)$, respectivamente. Desta forma, pela nota b), o bordo, em \mathcal{W} , da região constituída pelas ondas de choque admissíveis, é o conjunto das ondas de choque sónicas. As ondas de choque sónicas são importantes na medida em que expressam o comportamento da velocidade s ao longo das curvas de choque.

Proposição 8. *Consideremos a curva de choque U_- -fixo, com $U_- = U_0$, e um ponto $U \neq U_0$ tal que o ponto da curva não é bifurcação secundária. Então o gráfico de s ao longo da curva tem um ponto estacionário em U sse s é valor próprio de $F'(U)$, isto é, sse o ponto é uma onda de choque sónica.*

Os pontos de bifurcação secundária para uma curva de choque U_- -fixo são os pontos do conjunto $(\mathcal{B}_R \setminus \mathcal{C}) \cup \mathcal{B}_0$. Assim sendo a proposição anterior pode ser expressa na seguinte forma

Teorema 6. Num ponto $\mathcal{W} \setminus \mathcal{B}_r$ com $U_+ \neq U_-$, ou seja, $(\mathcal{W} \setminus \mathcal{C}) \setminus \mathcal{B}_R$ o campo de linhas de choque está contido no hiperplano $ds = 0$ sse s é valor próprio de $F'(U_+)$.

Num ponto de $\mathcal{C} \setminus \mathcal{B}_0$ o campo de linhas de choque está contido no hiperplano $ds = 0$ sse pertence a \mathcal{S} , ou seja, se é um ponto de inflexão.

A segunda parte do teorema seria de esperar pelo que já foi comentado atrás relativamente à nota (4).

Este teorema é provado à custa da maneira de escrever a condição de o campo de linhas de choque estar contido no hiperplano $ds = 0$ no espaço dos 1-jactos da função \mathcal{F} .

Lema 5. Existe um vector não nulo contido simultaneamente no campo de linhas de choque U_- -fixo e no hiperplano $ds = 0$ num ponto $p = (\bar{U}, R, \Omega, s) \in \mathcal{W}$ sse $\det B_+(p) = 0$ onde

$$B_+(\bar{U}R, \Omega, s) := (\mathcal{F}_R + \frac{1}{2}\mathcal{F}_{\bar{U}}r(\Omega), \mathcal{F}_\Omega + \frac{1}{2}R\mathcal{F}_{\bar{U}}r'(\Omega))$$

Da mesma forma existe um vector não nulo contido simultaneamente no campo de linhas de choque $dU_+ = 0$ e no hiperplano $ds = 0$ em p sse $\det B_-(p) = 0$ onde

$$B_-(\bar{U}R, \Omega, s) := (\mathcal{F}_R - \frac{1}{2}\mathcal{F}_{\bar{U}}r(\Omega), \mathcal{F}_\Omega - \frac{1}{2}R\mathcal{F}_{\bar{U}}r'(\Omega))$$

Definição 13. O Local Sónico à direita \mathcal{S}_R é constituído pelos pontos de \mathcal{W} onde $\det B_+ = 0$. O Local Sónico à esquerda \mathcal{S}_L é constituído pelos pontos de \mathcal{W} onde $\det B_- = 0$.

Nota 6. a) Para $R \neq 0$, \mathcal{S}_R pode ser definido pela equação $\det(-s + F'(U_+)) = 0$. Logo o conjunto é singular sse s for valor próprio com multiplicidade algébrica superior a 1.

b) Se 0 é valor regular de $\det B_-$ e $\det B_+$ então \mathcal{S}_L e \mathcal{S}_R formam variedades de dimensão n . Isacson *et al.*, supuseram que 0 era valor regular das duas funções.

c) $\mathcal{S}_L \cap \mathcal{C} = \mathcal{S} = \mathcal{S}_R \cap \mathcal{C}$, pois quando $R = 0$, $\mathcal{F}_R = 0$ e portanto $\det B_+ = 0 = \det B_-$ reduz-se a $\det(\frac{1}{2}\mathcal{F}_{\bar{U}}r(\Omega), \mathcal{F}_\Omega) = 0$. O resultado segue do lema 3.

d) $\mathcal{B}_R \subseteq \mathcal{S}_R$ e $\mathcal{B}_L \subseteq \mathcal{S}_L$

Proposição 9. Fixemos $p = (U_-, U_+, s) \in \mathcal{S}_R \setminus \mathcal{B}_R$ com $U_+ \neq U_-$. O gráfico de s ao longo da curva U_- -fixa que passa por p tem segunda derivada nula em p sse a curva de choque é tangente a \mathcal{S}_R em p .

Definição 14. O Local de Histerese à direita \mathcal{H}_R é constituído pelos pontos de \mathcal{S}_R tais que $l\dot{B}_+r = 0$, onde $l \neq 0$, $r \neq 0$, $lB_+ = 0 = B_+r$, $r = (\dot{R}, \dot{\Omega})$ e \dot{B}_+ representa B_+' aplicado ao vector $(\dot{U}, \dot{R}, \dot{\Omega}, 0)$ com $\dot{U} := \frac{1}{2}r(\Omega)\dot{R} + \frac{1}{2}Rr'(\Omega)\dot{\Omega}$. De forma análoga se define o Local de Histerese à esquerda \mathcal{H}_L .

Desta forma podemos escrever o teorema anterior na forma:

Corolário 3. *Seja $p \in \mathcal{S}_R \setminus \mathcal{B}_R$. A curva de choque U_- -fixa que passa por p é transversal a \mathcal{S}_R em p sse $p \notin \mathcal{H}_R$.*

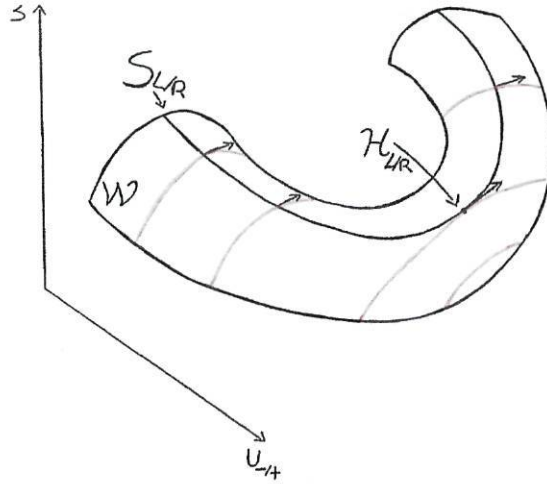


FIGURA 5. A rosa estão representadas as curvas de choque U_+/U_- -fixo.

Proposição 10. $\mathcal{H}_L \cap \mathcal{C} = \mathcal{H}_R \cap \mathcal{C} \subseteq \mathcal{H}_0$. *Mais propriamente, $p \in \mathcal{H}_0$ sse $p \in \mathcal{H}_R \cap \mathcal{C}$ ou \mathcal{S}_R não é transversal a \mathcal{C} em p .*

Acabamos de ver pelo Corolário 3 uma caracterização dos pontos onde \mathcal{S}_R e as curvas de choque U_- -fixo são transversais. De uma forma equivalente se obtem uma caracterização dos pontos onde \mathcal{S}_L e as curvas de choque U_+ -fixo são transversais. A proposição seguinte descreve-nos agora os pontos em que \mathcal{S}_R e as curvas de choque U_+ -fixo são transversais.

Proposição 11. *A curva de choque U_+ -fixo é transversal a \mathcal{S}_R em p ($p = (U_-, U_+, s) \in \mathcal{S}_R \setminus \mathcal{B}_L$, com $U_- \neq U_+$) sse a onda de choque (U_-, U_+, s) é duplamente sónica, isto é, $\det(-s + F'(U_+)) = \det(-s + F'(U_-)) = 0$ (ver ??fig7)).*

Pela definição dos pontos duplamente sónicos temos que estes são os pontos de $\mathcal{S}_L \cap \mathcal{S}_R$.

Definição 15. O Local duplamente sónico \mathcal{D} é constituído pelos pontos de \mathcal{W} tais que

$$(16) \quad \det(R^{-1}\mathcal{F}_R, \mathcal{F}_\Omega) + \det\left(\frac{1}{2}\mathcal{F}_{\bar{U}}r(\Omega), \frac{1}{2}\mathcal{F}_{\bar{U}}r'(\Omega)\right) = 0$$

$$\det\left(\frac{1}{2}\mathcal{F}_{\bar{U}}r(\Omega), \mathcal{F}_\Omega\right) + R^2 \det(R^{-1}\mathcal{F}_R, \frac{1}{2}\mathcal{F}_{\bar{U}}r'(\Omega)) = 0$$

As equações (16) deduzem-se a partir de $\det B_- = 0 = \det B_+$ "eliminando" R . Então temos o seguinte resultado:

Corolário 4. $\mathcal{S}_L \cap \mathcal{S}_R = \mathcal{S} \cup \mathcal{D}$

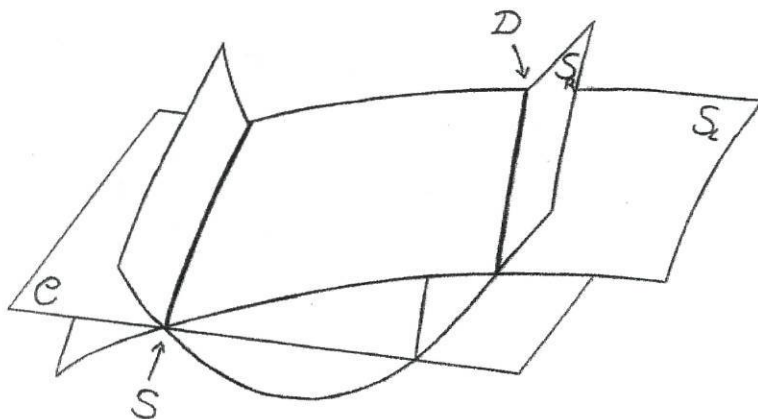


FIGURA 6

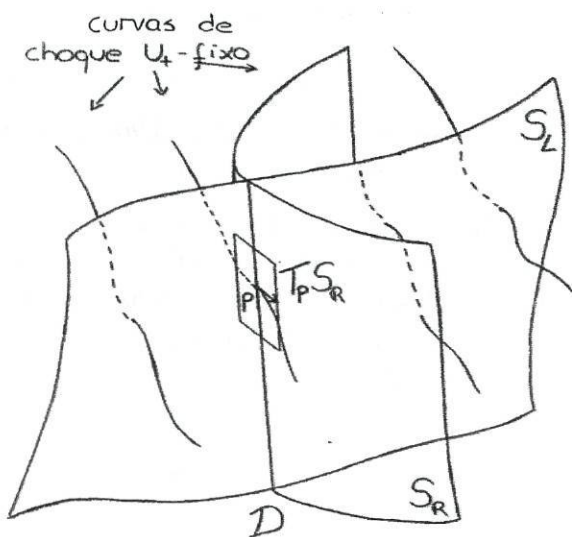


FIGURA 7

Teorema 7. A projecção

$$\begin{aligned} \tau_- : \quad W &\rightarrow U \times \mathbb{R} \\ (\bar{U}, R, \Omega, s) &\mapsto (U_-, s) \end{aligned}$$

é singular em S_R . Mais precisamente, $p \in S_R$ é um ponto dobra para τ_- sse $p \notin \mathcal{H}_R$.

11. FOLIAÇÃO COMPOSTA

Já falamos de ondas de choque e de ondas de rarefacção, que são soluções do Problema de Riemann. Tais soluções são invariantes para as homotetias

$(x, t) \mapsto (\alpha x, \alpha t)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. As ondas de choque e de rarefacção não são as únicas soluções com esta propriedade. Consideremos, por exemplo, a função

$$(17) \quad U(x, t) = \begin{cases} U_0 & \text{se } x < s_0 t \\ \tilde{U}\left(\frac{x}{t}\right) & \text{se } s_0 t \leq x < st \\ U_+ & \text{se } x > st \end{cases}$$

onde \tilde{U} satisfaz (11), (U_-, U_+, s) verifica (4) e $U_- = \tilde{U}(s)$. Esta função é invariante para as homotetias e representa uma onda de rarefacção seguida, à direita, por uma onda de choque, sem estado intermédio. Para tal poder acontecer e ser solução do Problema de Riemann é necessário que a onda de choque seja sónica. Estas soluções são chamadas de ondas compostas esquerdas. Uma onda de rarefacção situada à direita de uma onda de choque sónica é uma onda composta direita.

É de realçar que \tilde{U} é unicamente determinada por U_0 na medida em que \tilde{U} é uma solução da equação diferencial (12), $\tilde{U}' = r_i(\tilde{U})$, onde i é tal que $s = \lambda_i(\tilde{U})$, com condição inicial U_0 . U_- tem de ser tal que (U_-, U_+, s) formam uma onda de choque sónica e, simultaneamente, tem que pertencer à curva de rarefacção que passa por U_- .

Definição 16. Ao conjunto de ondas compostas esquerda com U_0 fixo dá-se o nome de curva composta.

É de realçar que a onda composta (17) pode ser associada à onda de choque sónica (U_-, U_+, s) , pelo que as ondas compostas podem ser vistas como subconjuntos do Local Sónico \mathcal{S}_L .

Tal como as curvas de rarefacção e de choque, as curvas compostas representam curvas integrais de um campo de linhas, possivelmente singular, cuja construção passo a descrever:

Consideremos um ponto $p = (\bar{U}, R, \Omega, s) \in \mathcal{S}_L$. Pela nota (6) se pode concluir, de maneira análoga a \mathcal{S}_R , que $\det(-s + F'(U_-)) = 0$ em $\mathcal{W} \setminus \mathcal{C}$. No entanto, como $U_- = \tilde{U}(s)$ segue, por (10), $[-s + F'(\bar{U})]r(\Omega) = 0$, que em \mathcal{C} também temos $\det(-s + F'(U_-)) = 0$. Seja então \mathcal{T}_p o conjunto dos vectores $(\dot{U}, \dot{R}, \dot{\Omega}, \dot{s})$ tangentes a \mathcal{S}_L em p e tais que a U_- -projecção, dada por $\dot{U} := \dot{U} - \frac{1}{2}r(\Omega)\dot{R} - \frac{1}{2}Rr'(\Omega)\dot{\Omega}$ verifica

$$(18) \quad (-s + F'(U_-))\dot{U} = 0$$

O subespaço definido por (18) tem dimensão 1, definindo um campo de linhas diferenciável em \mathcal{S}_L , \mathcal{T} , excepto no caso em que $\text{car}(-s + F'(U_-)) < n - 1$.

Definição 17. O campo de linhas \mathcal{T} , possivelmente singular, é chamado campo de linhas compostas. Uma curva composta é uma curva integral de tal campo de linhas.

Geometricamente:

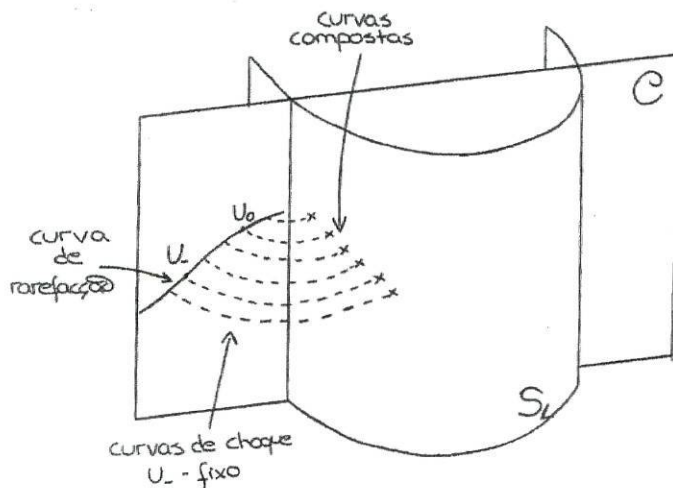


FIGURA 8

Proposição 12. *Um ponto $p \in S_L \setminus C$ é uma singularidade da foliação composta à esquerda sse $p \in \mathcal{D} \cap \mathcal{H}_L$ ou $p \in S_L \cap \mathcal{B}_R$. Um ponto $p \in S_L \cap C$ é uma singularidade da mesma foliação sse p é um ponto umbílico ou $p \in \mathcal{H}_0$ ou $p \in \mathcal{B}_0$.*

Existe uma outra maneira de construir os campos de linhas compostas. Esta outra construção é baseada na seguinte proposição

Proposição 13. *Dado $p \in S_L$ existe um vector tangente a \mathcal{W} em p que pertence simultaneamente a $dU_+ = 0$ e a $ds = 0$. Seja u_- a sua U_- -projectção. Então*

$$[-s + F'(U_-)]u_- = 0$$

e u_- anula-se sse p é um ponto umbílico.

Sendo assim, para construir \mathcal{T}_p ($p \in S_L$) basta construir a curva de choque U_+ -fixo que passa por p e considerar a U_- -projectção de um vector não nulo tangente à curva. \mathcal{T}_p é constituído por todos os vectores tangentes a S_L cuja U_- -projectção tem a mesma direcção de u_- .

12. RESUMO DO ESTUDO GEOMÉTRICO

A bifurcação das curvas de ondas é um dos problemas fundamentais na teoria das Leis de Conservação. As mudanças abruptas na natureza das soluções do problema de Riemann são causadas por bifurcações das "wave curves as the origin varies".

Furtado, assumindo o critério de admissibilidade de Lax, identificou a lista completa das formas do Local de Bifurcação das curvas de ondas.

A bifurcação das curvas de ondas representa perda de transversalidade e singularidades entre as foliações das ondas e o bordo de admissibilidade.

Causas para a perda de transversalidade:

- 1) a foliação é singular
- 2) o bordo de admissibilidade é singular
- 3) a curva na foliação é tangente ao bordo de admissibilidade

Conjuntos onde cada um dos casos acontece:

- 1) a) a foliação de rarefacção é singular em \mathcal{B}_0
- b) a foliação de choque é singular nos pontos de bifurcação secundário \mathcal{B}_L e \mathcal{B}_R
- c) a foliação composta é singular nos pontos umbílicos, nos pontos singulares de \mathcal{S} , em $(\mathcal{D} \cap \mathcal{H}_L) \cup (\mathcal{S}_L \cap \mathcal{B}_R)$ e $(\mathcal{D} \cap \mathcal{H}_R) \cup (\mathcal{S}_R \cap \mathcal{B}_L)$

Cada um destes locais de bifurcação tem codimensão 2 relativamente às variedades foliadas pelas curvas (\mathcal{C} , \mathcal{W} e \mathcal{S}_L ou \mathcal{S}_R , respectivamente).

- 2) assumindo \mathcal{S}_L e \mathcal{S}_R variedades (que é assumido em [6]) o bordo de admissibilidade tem singularidades apenas nas intersecções dessas variedades: $\mathcal{S} \cup \mathcal{D}$, que tem codimensão 2 em \mathcal{W}
- 3) a) a foliação de choque é tangente a \mathcal{S}_L e \mathcal{S}_R em \mathcal{H}_L e \mathcal{H}_R , respectivamente
- b) a foliação de rarefacção é tangente ao local sónico em \mathcal{H}_0

O grupo de todos os conjuntos importantes definidos, respectivas dimensões (caso sejam variedades) e caracterização está resumido no quadro a seguir apresentado.

Conjunto	Dimensão	Definição e Caracterização
\mathcal{W}	$n + 1$	<ul style="list-style-type: none"> - $\hat{\mathcal{W}} = \mathcal{F}^{-1}(0) \quad \sigma : \hat{\mathcal{P}} \rightarrow \mathcal{P}^*, \quad \mathcal{W} = \sigma(\hat{\mathcal{W}})$ - \mathcal{W} é a aderência, em \mathcal{P}^*, dos pontos (U_-, U_+, s) com $U_- \neq U_+$ a satisfazer a condição de Rankine-Hugoniot.
\mathcal{C}	n	<ul style="list-style-type: none"> - $\mathcal{C} = \mathcal{W} \cap \mathcal{P}_0^*$ - conjunto dos pontos que verifica $[-s + F'(\bar{U})]r(\Omega) = 0$ - $\mathcal{C} = \mathcal{F}_{ \mathcal{P}_0^*}^{-1}(0)$
\mathcal{E}	$n - 1$	<ul style="list-style-type: none"> - é o conjunto dos pontos $(\bar{U}, 0, \Omega, s) \in \mathcal{C}$ onde s é valor próprio múltiplo de $F'(\bar{U})$ - conjunto dos pontos onde $(\mathcal{F}_\Omega, \mathcal{F}_s)$ é singular - pontos críticos da projecção $\mathcal{W} \rightarrow \mathcal{U}$
\mathcal{B}_0	$n - 2$	<ul style="list-style-type: none"> - conjunto dos pontos nos quais o campo de linhas de rarefacção é singular - conjunto dos pontos para os quais $(\frac{1}{2}\mathcal{F}_{\bar{U}}r(\Omega), \mathcal{F}_\Omega, \mathcal{F}_s)$ não tem característica máxima
\mathcal{S}	$n - 1$	<ul style="list-style-type: none"> - conjunto dos pontos em \mathcal{C} onde existe um vector não nulo contido simultaneamente no campo de linhas de rarefacção e no hiperplano tangente $ds = 0$ - conjunto dos pontos onde a matriz $B_0 = (\frac{1}{2}\mathcal{F}_{\bar{U}}r(\Omega), \mathcal{F}_\Omega)$ é singular
\mathcal{H}_0		<ul style="list-style-type: none"> - consiste nos pontos de inflexão a verificar <ul style="list-style-type: none"> a) p não é ponto regular de $\det B_0$ b) $l\dot{B}_0r = 0$ onde $l/r = (\dot{R}, \dot{\Omega}) \neq 0$ v. p. esq./dir. B_0 e $\dot{B}_0 \rightarrow B'_0$ aplicado a $(\frac{1}{2}\dot{R}r(\Omega), \dot{\Omega}, 0)$

\mathcal{B}_R	$n - 1$	<ul style="list-style-type: none"> - conjunto dos pontos em \mathcal{W} onde $dU_- = 0$ é singular - conjunto dos pontos onde a matriz $(\mathcal{F}_R + \frac{1}{2}\mathcal{F}_{\bar{U}}r(\Omega), \mathcal{F}_\Omega + \frac{1}{2}R\mathcal{F}_{\bar{U}}r'(\Omega), \mathcal{F}_s)$ não tem característica máxima
\mathcal{B}_L	$n - 1$	<ul style="list-style-type: none"> - conjunto dos pontos em \mathcal{W} onde $dU_+ = 0$ é singular - conjunto dos pontos onde a matriz $(\mathcal{F}_R - \frac{1}{2}\mathcal{F}_{\bar{U}}r(\Omega), \mathcal{F}_\Omega - \frac{1}{2}R\mathcal{F}_{\bar{U}}r'(\Omega), \mathcal{F}_s)$ não tem característica máxima
\mathcal{S}_R	n	<ul style="list-style-type: none"> - consiste nos pontos de \mathcal{W} onde existe um vector não nulo contido simultaneamente em $dU_- = 0$ e $ds = 0$ - Conjunto dos pontos onde $B_+ = (\mathcal{F}_R + \frac{1}{2}\mathcal{F}_{\bar{U}}r(\Omega), \mathcal{F}_\Omega + \frac{1}{2}R\mathcal{F}_{\bar{U}}r'(\Omega))$ é singular
\mathcal{S}_L	n	<ul style="list-style-type: none"> - consiste nos pontos de \mathcal{W} onde existe um vector não nulo contido simultaneamente em $dU_+ = 0$ e $ds = 0$ - Conjunto dos pontos onde $B_- = (\mathcal{F}_R - \frac{1}{2}\mathcal{F}_{\bar{U}}r(\Omega), \mathcal{F}_\Omega - \frac{1}{2}R\mathcal{F}_{\bar{U}}r'(\Omega))$ é singular
\mathcal{H}_R		<ul style="list-style-type: none"> - consiste nos pontos em \mathcal{S}_R tais que $l\dot{B}_+r = 0$
\mathcal{H}_L		<ul style="list-style-type: none"> - consiste nos pontos em \mathcal{S}_L tais que $l\dot{B}_-r = 0$
\mathcal{D}	$n - 1$	<ul style="list-style-type: none"> - conjunto dos pontos tais que $\det B_- = \det B_+ = 0$ e $R \neq 0$

13. BIFURCAÇÃO DE CURVAS DE RAREFAÇÃO

Já foi referido na secção "Variedade Característica" que para um sistema de 2 Leis de Conservação em geral não aparecem pontos umbílicos. Só para sistemas com n Leis de Conservação, $n \geq 3$, ou famílias de funções a k -parâmetros, para $k \geq 1$ e $n \geq 2$ é que, em geral, tais pontos aparecem. O estudo para um sistema de 2 Leis de Conservação, onde o Fluxo F é uma família de funções 1-parâmetro, de uma certa forma genérica, leva a considerar equações implícitas em superfícies. Desta forma, em geral aparecem pontos umbílicos isolados e é possível tanto estudar o comportamento em volta dos pontos umbílicos como a bifurcação existente provocada pela variação do parâmetro do Fluxo.

Consideremos então o sistema de leis de conservação

$$U_t + F(U)_x = 0$$

onde F é a função de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R}^2 a 1-parâmetro λ dada por

$$F(v, u) = \left((1 + \lambda)v + \frac{u^2}{2}, \lambda v + u + vu \right)$$

$$|\text{Jac } F(v, u) - sI| = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 + \lambda - s & u \\ \lambda + u & 1 + v - s \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow s^2 - (2 + \lambda + v)s + (1 + \lambda)(1 + v) - u(\lambda + u) = 0$$

O sistema dado é hipérbólico nos pontos (v, u) tal que

$$(2 + \lambda + v)^2 + 4u(\lambda + u) - 4(1 + \lambda)(1 + v) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda - v)^2 + (2u + \lambda)^2 - \lambda^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda - v)^2 + (2u + \lambda)^2 \geq \lambda^2$$

Se $\lambda = 0$ a condição é automaticamente verificada e, portanto, o sistema é hipérbólico. Não é contudo estritamente hipérbólico pois

$$\text{Jac } F(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ou seja, na origem 0 é um valor próprio de $\text{Jac } F$ com multiplicidade algébrica 2 ($(0, 0)$ é o único ponto com multiplicidade algébrica superior a 1). Neste caso a multiplicidade geométrica também é 2, logo a origem é um ponto umbílico.

No ponto $(0, 0)$

$$(\lambda - v)^2 + (2u + \lambda)^2 = \lambda^2 \geq 0$$

Então, para cada $\lambda \neq 0$ existe uma vizinhança da origem para o qual os valores próprios são reais. Essas vizinhanças são da forma

$$(\lambda - v)^2 + 4\left(u + \frac{\lambda}{2}\right)^2 \geq \lambda^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\lambda - v)^2}{\lambda^2} + \frac{(u + \frac{\lambda}{2})^2}{(\frac{\lambda}{2})^2} \geq 1$$

isto é, são o exterior da elipse com centro em $(\lambda, -\frac{\lambda}{2})$ e semi-eixos $|\lambda|$ e $|\frac{\lambda}{2}|$. A elipse corresponde à projecção, no plano (v, u) , do Local de Coincidência (\mathcal{E}). É de realçar que nenhum destes pontos é umbílico.

Para estudar a geometria das curvas de rarefacção é necessário encontrar a função \mathcal{H} que caracteriza a condição de Rankine-Hugoniot.

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(v_-, u_-, v_+, u_+, s) &= -s((v_+, u_+) - (v_-, u_-)) + F(v_+, u_+) - F(v_-, u_-) \\ &= ((1 + \lambda - s)(v_+ - v_-) + \frac{1}{2}(u_+^2 - u_-^2), \\ &\quad (1 - s)(u_+ - u_-) + \lambda(v_+ - v_-) + v_+u_+ - v_-u_-) \end{aligned}$$

Nas novas coordenadas

$$\begin{aligned} (v_-, u_-) &= (\bar{v}, \bar{u}) - \frac{1}{2}R(\cos \Omega, \sin \Omega) \\ &= (\bar{v} - \frac{1}{2}R \cos \Omega, \bar{u} - \frac{1}{2}R \sin \Omega) \\ (v_+, u_+) &= (\bar{v}, \bar{u}) + \frac{1}{2}R(\cos \Omega, \sin \Omega) \\ &= (\bar{v} + \frac{1}{2}R \cos \Omega, \bar{u} + \frac{1}{2}R \sin \Omega) \end{aligned}$$

temos

$$\mathcal{F}(\bar{v}, \bar{u}, R, \Omega, s) = ((1 + \lambda - s) \cos \Omega + \bar{u} \sin \Omega, (1 + \bar{v} - s) \sin \Omega + (\lambda + \bar{u}) \cos \Omega)$$

A Variedade Fundamental das Ondas \mathcal{W} é definida como sendo $\mathcal{F}^{-1}(0)$ e portanto é o conjunto dos pontos tais que

$$\begin{cases} (1 + \lambda - s) \cos \Omega + \bar{u} \sin \Omega = 0 \\ (1 + \bar{v} - s) \sin \Omega + (\lambda + \bar{u}) \cos \Omega = 0 \end{cases}$$

Nota 7. $\mathcal{F}_{\bar{v}} = (0, \sin \Omega)$

$$\mathcal{F}_{\bar{u}} = (\sin \Omega, \cos \Omega)$$

$$\mathcal{F}_R = (0, 0)$$

$$\mathcal{F}_\Omega = (-(1 + \lambda - s) \sin \Omega + \bar{u} \cos \Omega, (1 + \bar{v} - s) \cos \Omega - (\lambda + \bar{u}) \sin \Omega)$$

$$\mathcal{F}_s = (-\cos \Omega, -\sin \Omega)$$

Temos que $\det(\mathcal{F}_{\bar{v}}, \mathcal{F}_{\bar{u}}) = -\sin^2 \Omega$ e $\det(\mathcal{F}_{\bar{u}}, \mathcal{F}_s) = \cos^2 \Omega - \sin^2 \Omega$. Estes 2 determinantes não se anulam simultaneamente, pelo que $(0, 0)$ é valor regular da função \mathcal{F} e consequentemente \mathcal{W} é uma variedade diferenciável de dimensão 3.

\mathcal{F} não depende de R , pelo que a variável R tem necessariamente de ser uma das variáveis utilizadas na parametrização de \mathcal{W} . Quaisquer que sejam as outras duas variáveis, de entre \bar{v} , \bar{u} , Ω e s , que se escolha para parametrizar \mathcal{W} a parametrização é apenas local. Por exemplo, $\det(\mathcal{F}_{\bar{v}}, \mathcal{F}_{\bar{u}}) = -\sin^2 \Omega$ e portanto a parametrização só funciona fora de $\Omega = 0$.

Suponhamos que parametrizamos \mathcal{W} por \bar{v} , \bar{u} e R , ou seja, $s = s(\bar{v}, \bar{u}, R)$ e $\Omega = \Omega(\bar{v}, \bar{u}, R)$. Seja ψ a parametrização. Vamos tentar representar as variedades e foliações no espaço (\bar{v}, \bar{u}, R) . Em primeiro lugar temos de tentar representar \mathcal{W} . Ora, como \mathcal{F} não depende de R , um ponto $(\bar{v}, \bar{u}, R) \in \psi^{-1}(\mathcal{W})$ sse $(\bar{v}, \bar{u}, 0) \in \psi^{-1}(\mathcal{W})$. Basta-nos então tentar identificar os pontos $(\bar{v}, \bar{u}, 0) \in \psi^{-1}(\mathcal{W})$. Como $s = s(\bar{v}, \bar{u}, R)$ tem de ser um número real e, para $R = 0$, $(\bar{v}, \bar{u}) = (v_-, u_-) = (v_+, u_+)$ necessariamente temos de ter

$$\frac{(\lambda - v)^2}{\lambda^2} + \frac{(u + \frac{\lambda}{2})^2}{(\frac{\lambda}{2})^2} \geq 1$$

A Variedade Característica \mathcal{C} é facilmente representável pois corresponde à intersecção de \mathcal{W} com o plano $R = 0$.

Outra particularidade geométrica interessante nesta família de funções é que dado um ponto $(\bar{v}, \bar{u}, 0) \in \psi^{-1}(0)$ a imagem recíproca, por ψ , das curvas de choque está contida num cone com vértice em $(\bar{v}, \bar{u}, 0)$:

$$(v_-, u_-) = (v_0, u_0)$$

$$(v_0, u_0) = (\bar{v}, \bar{u}) - \frac{1}{2}R(\cos \Omega, \sin \Omega)$$

$$\|(\bar{v}, \bar{u}) - (v_0, u_0)\| = \|\frac{1}{2}R(\cos \Omega, \sin \Omega)\| = \frac{1}{2}R$$

e ângulo $\alpha = \arctan \frac{1}{2}$.

Antes de partir para o estudo das curvas de rarefacção neste exemplo, vamos ver qual o resultado obtido por Schaeffer e Shearer quanto à classificação dos sistemas não estritamente hiperbólicos de Leis de Conservação 2×2 , ver [8] (relativamente às curvas de rarefacção).

Em primeiro lugar Schaeffer e Shearer começaram por considerar sistemas de Leis de Conservação da forma

$$(19) \quad U_t + Q(U)_x = 0$$

onde $Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é quadrático.

Definição 18. $Q_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $Q_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, funções quadráticas, dizem-se equivalentes se existir uma matriz constante invertível S a verificar

$$Q_2(U) = S^{-1}Q_1(SU) \quad \forall U \in \mathbb{R}^2$$

Teorema 8. *Seja $Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma função quadrática tal que o sistema (19) é hiperbólico e possui um ponto umbílico isolado para $U = 0$. Então existe uma família de funções a 2-parâmetros dada por*

$$C_{a,b}(x, y) = \frac{1}{3}ax^3 + bx^2y + xy^2$$

com $a \neq 1 + b^2$ e tal que Q é equivalente a dC . A estrutura das curvas é preservada por equivalência.

Basta então estudar as curvas de rarefacção para as funções quadráticas que têm como potencial alguma função C , $C : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Consideremos o sistema (19) onde $Q = dC_{a,b}$, para algum a e b . Existem 4 configurações diferentes para as curvas de ondas em torno do ponto umbílico, configurações essas que dependem dos parâmetros a e b . Nas figuras (9) e (10) são esboçadas as regiões no plano (a, b) das diferentes configurações e as curvas, respectivamente. s .

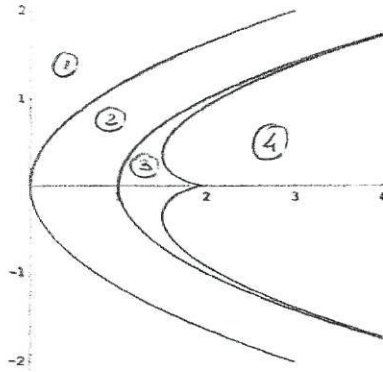


FIGURA 9

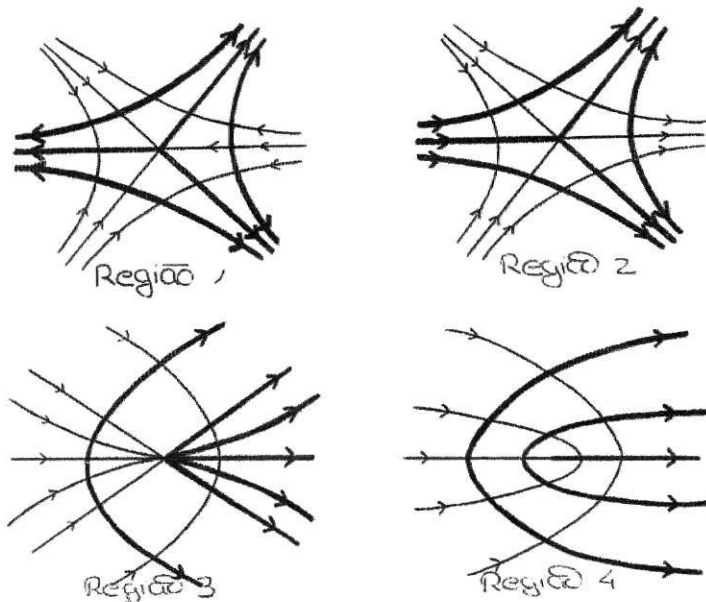


FIGURA 10. As curvas de rarefacção representadas a mais escuro correspondem a integrar (12) para $i = 2$. O sentido das setas indica o sentido crescente da velocidade s

- Nota 8.* a) As curvas de separação entre as regiões 1 e 2, 2 e 3 e 3 e 4 têm equações $a = \frac{3}{4}b^2$, $a = 1 + b^2$ e $-32b^4 + b^2(27 + 36(a - 2) - 4(a - 2)^2) + 4(a - 2)^3 = 0$, respectivamente
- b) A figura (9) é simétrica relativamente ao eixo dos a 's. Isso resulta do facto de $dC_{a,b}$ ser equivalente a $dC_{a,-b}$.
- c) Por cada ponto com 2 valores próprios distintos passam exactamente 2 curvas de rarefacção. Já se o ponto for umbílico isolado existem 1 ou 3 curvas de rarefacção a passar pelo ponto

Quando o Fluxo é dado por uma parte quadrática mais termos de ordem superior, a estrutura das curvas é idêntica. O teorema que a seguir se segue descreve tal estrutura.

Teorema 9. *Suponhamos que Q é uma função quadrática não degenerada. Então existe uma correspondência biunívoca entre as curvas de ondas do sistema $U_t + F(U)_x = 0$, onde $F = Q + h.o.t.$, e as curvas de ondas de Q , no ponto umbílico. Em particular, no ponto umbílico, qualquer curva de ondas de F é tangente a uma curva de ondas de Q .*

Finalmente só falta ver o que acontece quando F também tem parte constante e/ou linear. Ora, mostra-se facilmente que, dada uma função F com um ponto umbílico isolado, através de mudanças de variável a função F reduz-se a

$$F(U) = Q(U) + h.o.t.$$

onde Q é a parte quadrática da expansão em série se Taylor da função F .

Visto isto já sabemos que só temos 4 hipóteses para as curvas de rarefacção da família a 1-parâmetro de Leis de Conservação dada. Vamos então fazer um estudo pormenorizado das curvas de rarefacção através da construção descrita em [6]

Tal como já foi visto para o sistema dado no início desta secção

$$\mathcal{F}(v, u, R, \Omega, s) = ((1 + \lambda - s) \cos \Omega + u \sin \Omega, (1 - s + v) \sin \Omega + (u + \lambda) \cos \Omega)$$

Então as equações algébricas para \mathcal{C} são

$$(20) \quad \begin{cases} (1 + \lambda - s) \cos \Omega + u \sin \Omega = 0 \\ (1 - s + v) \sin \Omega + (u + \lambda) \cos \Omega = 0 \\ R = 0 \end{cases}$$

Vamos deduzir a equação diferencial que define $\mathcal{T}_p \cap T_p \mathcal{C}$, e portanto o campo de linhas de rarefacção, recorrendo ao estudo feito na secção "Ondas e Curvas de Rarefacção"

$$\mathcal{T}_p : \quad \begin{cases} \dot{U} = k \begin{bmatrix} \cos \Omega \\ \sin \Omega \end{bmatrix} \\ \dot{R} = 0 \end{cases}$$

Obviamente $\dim \mathcal{T}_p = 3$

$$T_p\mathcal{C} : \begin{cases} \mathcal{F}_U\dot{U} + \mathcal{F}_\Omega\dot{\Omega} + \mathcal{F}_s\dot{s} = 0 \\ \dot{R} = 0 \end{cases}$$

Neste caso $\dim T_p\mathcal{C} = 2$

Ora

$$\mathcal{F}_U\dot{U} + \mathcal{F}_\Omega\dot{\Omega} + \mathcal{F}_s\dot{s} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \sin \Omega \dot{u} + (-(1 + \lambda - s) \sin \Omega + u \cos \Omega) \dot{\Omega} - \cos \Omega \dot{s} \\ \sin \Omega \dot{v} + \cos \Omega \dot{u} + ((1 - s + v) \cos \Omega - (u + \lambda) \sin \Omega) \dot{\Omega} - \sin \Omega \dot{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Logo $T_p \cap T_p\mathcal{C}$ é dado por

$$(21) \quad \begin{cases} \sin \Omega \dot{u} + (-(1 + \lambda - s) \sin \Omega + u \cos \Omega) \dot{\Omega} - \cos \Omega \dot{s} = 0 \\ \sin \Omega \dot{v} + \cos \Omega \dot{u} + ((1 - s + v) \cos \Omega - (u + \lambda) \sin \Omega) \dot{\Omega} - \sin \Omega \dot{s} = 0 \\ -\sin \Omega \dot{v} + \cos \Omega \dot{u} = 0 \\ \dot{R} = 0 \end{cases}$$

Se $\Omega = \frac{\pi}{4}$ as equações reduzem-se a

$$\begin{cases} \dot{u} + (u - 1 - \lambda + s) \dot{\Omega} - \dot{s} = 0 \\ \dot{v} + \dot{u} + (1 - s + v - u - \lambda) \dot{\Omega} - \dot{s} = 0 \\ \dot{v} = \dot{u} \\ \dot{R} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{s} = (3s + 3u - 3 - v - \lambda) \dot{\Omega} \\ \dot{u} = (2s + 2u - 2 - v) \dot{\Omega} \\ \dot{v} = (2s + 2u - 2 - v) \dot{\Omega} \\ \dot{R} = 0 \end{cases}$$

ou seja, existe uma vizinhança de $\Omega = \frac{\pi}{4}$ tal que o campo de linhas de rarefacção não é singular. O mesmo se pode concluir para $\Omega = -\frac{\pi}{4}$. Como para $\Omega = \frac{\pi}{4}$ ou $\Omega = -\frac{\pi}{4}$ o campo de linhas não é singular posso utilizar a parametrização em que

$$\begin{cases} u = u(v, \Omega) \\ s = s(v, \Omega) \end{cases}$$

Facilmente pegando nas equações algébricas que definem \mathcal{C} , reescrevendo-as na forma

$$(22) \quad \begin{cases} -\cos \Omega s + \sin \Omega u = -(1 + \lambda) \cos \Omega \\ -\sin \Omega s + \cos \Omega u = -\lambda \cos \Omega - (1 + v) \sin \Omega \\ R = 0 \end{cases}$$

e aplicando a regra de Cramer obtemos após alguma manipulação algébrica

$$\begin{cases} u = -\frac{\lambda \cos \Omega}{\sin \Omega + \cos \Omega} + \frac{v \sin \Omega \cos \Omega}{\sin^2 \Omega - \cos^2 \Omega} \\ s = 1 + \frac{v \sin^2 \Omega}{\sin^2 \Omega - \cos^2 \Omega} + \frac{\lambda \cos \Omega}{\sin \Omega + \cos \Omega} \\ R = 0 \end{cases}$$

Derivando (22) obtemos

$$\begin{cases} -\cos \Omega \dot{s} + \sin \Omega \dot{u} = ((1 + \lambda - s) \sin \Omega - u \cos \Omega) \dot{\Omega} \\ -\sin \Omega \dot{s} + \cos \Omega \dot{u} = ((\lambda + u) \sin \Omega - (1 + v - s) \cos \Omega) \dot{\Omega} - \dot{v} \sin \Omega \\ \dot{R} = 0 \end{cases}$$

e, novamente pela regra de Cramer obtemos

$$\dot{u} = \frac{\lambda \sin \Omega \dot{\Omega}}{\sin \Omega + \cos \Omega} + \frac{(1 - s) \dot{\Omega} - 2u \sin \Omega \cos \Omega \dot{\Omega} + \dot{v} \cos \Omega \sin \Omega + v \cos^2 \Omega \dot{\Omega}}{\sin^2 \Omega - \cos^2 \Omega}$$

(\dot{s} não vai ser necessário).

Nesta parametrização posso substituir as 2 primeiras equações de (21) por

$$\begin{cases} \dot{u} = \dot{u}(\dot{v}, \dot{\Omega}) \\ \dot{s} = \dot{s}(\dot{v}, \dot{\Omega}) \end{cases}$$

e estudar o comportamento da terceira. Substituindo \dot{u} pelo resultado acima obtido vem

$$-\sin \Omega \dot{v} + \cos \Omega \dot{u} = 0 \Leftrightarrow f(v, \Omega) \dot{v} + g(v, \Omega) \dot{\Omega} = 0$$

onde

$$f(v, \Omega) = -\sin \Omega + \frac{\sin \Omega \cos^2 \Omega}{\sin^2 \Omega - \cos^2 \Omega}$$

e

$$g(v, \Omega) = \cos \Omega \left(\frac{\lambda \sin \Omega}{\sin \Omega + \cos \Omega} + \frac{1 - s(v, \Omega)}{\sin^2 \Omega - \cos^2 \Omega} + \frac{v \cos^2 \Omega}{\sin^2 \Omega - \cos^2 \Omega} + \frac{\sin \Omega \cos^2 \Omega}{\sin^2 \Omega - \cos^2 \Omega} \left(\frac{2\lambda}{\sin \Omega + \cos \Omega} - \frac{2v \sin \Omega}{\sin^2 \Omega - \cos^2 \Omega} \right) \right)$$

A terceira equação pode ser escrita através da seguinte equação diferencial

$$(23) \quad \begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{\Omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g(v, \Omega) \\ -f(v, \Omega) \end{bmatrix}$$

Vamos encontrar os pontos críticos desta equação diferencial

$$\begin{aligned} f(v, \Omega) = 0 &\Leftrightarrow -\sin \Omega + \frac{\sin \Omega \cos^2 \Omega}{\sin^2 \Omega - \cos^2 \Omega} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{\sin \Omega (2 \cos^2 \Omega - \sin^2 \Omega)}{\sin^2 \Omega - \cos^2 \Omega} = 0 \\ &\Leftrightarrow \Omega = 0 \vee \Omega = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}} \vee \Omega = \arccos \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \end{aligned}$$

Mas $g(v, 0) = s - 1 - v$. Assim sendo temos pontos criticos quando $\Omega = 0$ e $s = 1 + v$. No entanto tenho de ter o ponto em \mathcal{W} . Logo, quando $\Omega = 0$ vem

por (20)

$$\begin{cases} 1 + \lambda - s = 0 \\ \lambda + u = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = 1 + \lambda \\ u = -\lambda \end{cases}$$

e portanto o ponto crítico é o ponto $(\lambda, -\lambda, 0, 0, 1 + \lambda)$. Da mesma forma se verifica que a equação diferencial tem mais dois pontos críticos:

$$\begin{aligned} & \left(\lambda - \frac{2\sqrt{2}}{3}\lambda, -\frac{\lambda}{3}, 0, \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}, 1 + \lambda - \frac{\sqrt{2}}{3}\lambda \right) \\ & \left(\lambda + \frac{2\sqrt{2}}{3}\lambda, -\frac{\lambda}{3}, 0, \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right), 1 + \lambda + \frac{\sqrt{2}}{3}\lambda \right) \end{aligned}$$

A projecção destes no plano (v, u) pertence à elipse que corresponde à projecção do Local de Coincidência(fig).

No entanto, quando $\lambda = 0$ estes 3 pontos, na projecção, reduzem-se a um só: a origem. Resta saber qual das representações da figura (10) corresponde às curvas de rarefacção do sistema dado, para $\lambda = 0$.

Ora, se repararmos bem, este "único" ponto crítico resultou da projecção de 3 pontos críticos distintos das mesmas equações escritas no *blow-up*. Desta forma, é mais fácil representar as curvas de rarefacção no *blow-up* e depois projectá-las em (v, u) ou, equivalentemente, estudá-las nas variáveis v e Ω e, tendo em conta que $u = u(v, \Omega)$ e $\dot{u} = \dot{u}(\dot{v}, \dot{\Omega})$, no fim passar para o plano (v, u) .

A partir deste momento esqueça-se a variável R já que, em \mathcal{C} , $R = 0$. Estudemos então o sistema (23).

Facilmente se verifica que $\Omega = 0$, $\Omega = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$ e $\Omega = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ são separatrizes da equação diferencial. Vejamos ainda qual o comportamento ao longo das rectas $v = 0$, $\Omega = \frac{\pi}{4}$ e $\Omega = -\frac{\pi}{4}$ (estas duas últimas pelo facto da parametrização não ser válida nessas duas rectas).

-Comportamento ao longo da recta $v = 0$

Se $v = 0$ necessariamente temos de ter $u = 0$ e $s = 1$, podendo Ω ser qualquer. Logo qualquer ponto da forma $(0, \Omega)$ pertence à projecção de \mathcal{C} . Ao longo de todos os pontos desta recta $\dot{v} = 0$, mas $\dot{\Omega} = 0$ sse (v, Ω) é um dos 3 pontos singulares, pelo que uma curva de rarefacção ou está contida na recta $v = 0$ ou então nunca a cruza.

-Comportamento para $\Omega = \frac{\pi}{4}$
equações algébricas

$$\begin{cases} (1 - s) + u = 0 \\ u + 1 - v - s = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = s - 1 \\ v = 0 \end{cases}$$

equação diferencial

$$\begin{cases} \dot{u} + 2u\dot{\Omega} - \dot{s} = 0 \\ \dot{v} + \dot{u} - 2u\dot{\Omega} - \dot{s} = 0 \\ \dot{v} - \dot{u} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{u} = \dot{v} = 4u\dot{\Omega} \\ \dot{s} = 6u\dot{\Omega} \end{cases}$$

Pelas equações algébricas concluímos que quando $\Omega = \frac{\pi}{4}$ necessariamente $v = 0$. Contudo, existe uma infinidade de pontos em \mathcal{C} que se projectam em $(0, \frac{\pi}{4})$: todos os pontos da forma $(0, u, \frac{\pi}{4}, 1 + u)$. Por cada um destes pontos passa uma curva de rarefacção pelo que, na projecção, passa uma infinidade de curvas integrais de (23) pelo ponto $(0, \frac{\pi}{4})$, cada uma com uma direcção própria, distinta das outras e que depende de u : $\dot{v} = 4u\dot{\Omega}$.

-Comportamento para $\Omega = -\frac{\pi}{4}$
equações algébricas

$$\begin{cases} (1-s) - u = 0 \\ 1 + v - s - u = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 - s \\ v = 0 \end{cases}$$

equação diferencial

$$\begin{cases} \dot{u} - 2u\dot{\Omega} + \dot{s} = 0 \\ \dot{v} - \dot{u} - 2u\dot{\Omega} - \dot{s} = 0 \\ \dot{v} + \dot{u} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{u} = -4u\dot{\Omega} \\ \dot{v} = 4u\dot{\Omega} \\ \dot{s} = 6u\dot{\Omega} \end{cases}$$

O comportamento neste caso é bastante idêntico ao de $\Omega = \frac{\pi}{4}$: quando $\Omega = -\frac{\pi}{4}$ necessariamente $v = 0$ e pelo ponto $(0, -\frac{\pi}{4})$ passa uma infinidade de curvas integrais da equação (23) que resulta da projecção de cada uma das curvas de rarefacção que passa pelo ponto $(0, u, -\frac{\pi}{4}, 1 - u)$. Cada uma dessas curvas integrais tem uma direcção distinta e que depende da componente u do ponto por onde passa a curva de rarefacção que nela se projecta: $\dot{v} = 4u\dot{\Omega}$.

É assim possível construir o diagrama de fase.

Diagrama de fase:

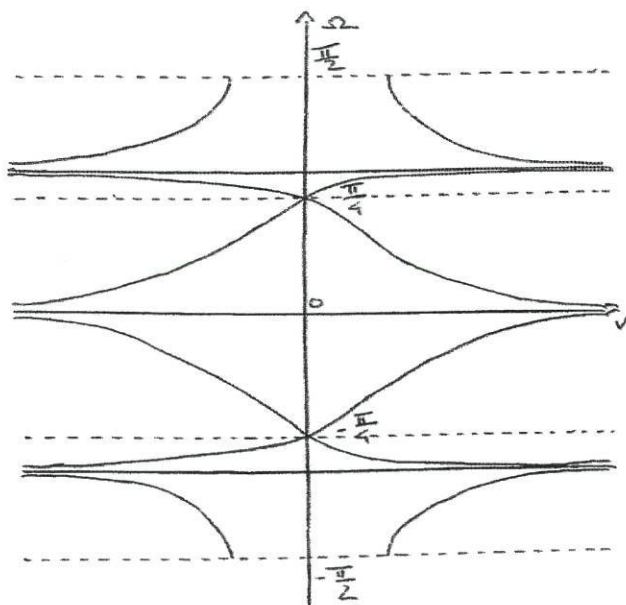


FIGURA 11

Nesta representação parece que existem mais duas singularidades: $(0, \frac{\pi}{4})$ e $(0, -\frac{\pi}{4})$. Esta ideia é apenas uma ilusão provocada por estarmos a utilizar uma parametrização, ou seja, esta singularidade que aparece resulta apenas da projecção de toda a figura no *blow-up* no plano (v, Ω) .

A figura (11) representa a projecção, no plano (v, Ω) , do diagrama de fase na Variedade Característica no espaço (v, u, Ω) :

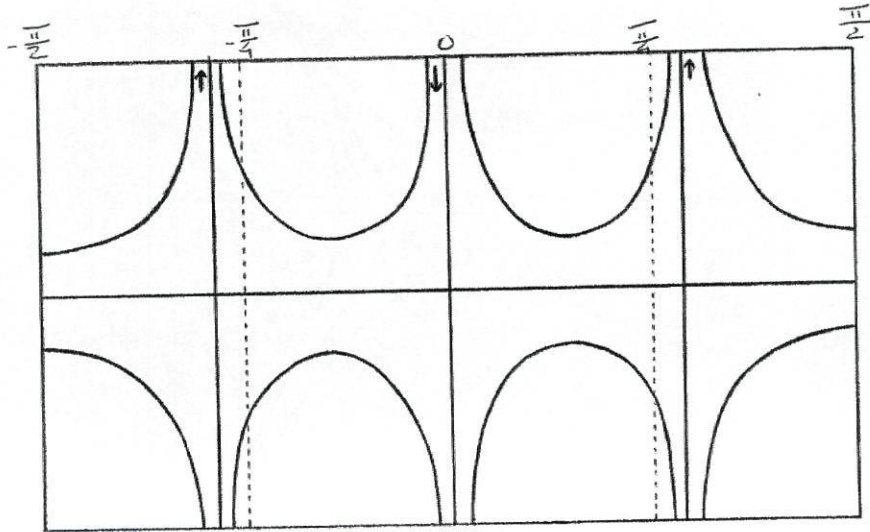


FIGURA 12

As rectas $\Omega = \frac{\pi}{4}$ e $\Omega = -\frac{\pi}{4}$ correspondem a rectas verticais em que $v = 0$, ao passo que a recta $\Omega = 0$ corresponde a uma recta horizontal em que $u = 0$. A superfície no espaço (v, u, Ω) é como que um rectângulo torcido 2 vezes em que $\Omega = -\frac{\pi}{2}$ é identificado com $\Omega = \frac{\pi}{2}$. A figura (12) resulta dessa superfície distorcida, razão pela qual a parte central apresenta uma orientação distinta das outras.

A figura (11) é obtida da figura (12) tendo colapsado as rectas $\Omega = \frac{\pi}{4}$ e $\Omega = -\frac{\pi}{4}$ em dois pontos distintos (visto que se $\Omega = \frac{\pi}{4}$ ou $\Omega = -\frac{\pi}{4}$ então $v = 0$) e voltando novamente a torcer as partes laterais da figura.

Para representar as curvas de rarefacção é preciso salientar 2 coisas:

- 1) $\Omega = 0$, $\Omega = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$ e $\Omega = \arccos(-\frac{1}{\sqrt{3}})$ são separatrizes da equação diferencial
- 2) Se $v = 0$ então $u = 0$ excepto no caso em que $\Omega = \frac{\pi}{4}$ ou $\Omega = -\frac{\pi}{4}$. Assim, pelas equações diferenciais se pode ver que, fixado u , se $(0, u)$ é a projecção dum ponto com $\Omega = \frac{\pi}{4}$, \dot{v} e \dot{u} têm o mesmo sinal, dependendo este de u . Já se $(0, u)$ é a projecção de um ponto em que $\Omega = -\frac{\pi}{4}$ então \dot{v} e \dot{u} têm sinais contrários.

- 3) Existem curvas no plano (v, Ω) que não intersectam a recta $v = 0$ e portanto, também existem curvas de rarefacção, no plano (v, u) que não intersectam a recta $v = 0$.

Por tudo isto podemos já fazer um esboço das curvas de rarefacção para $\lambda = 0$

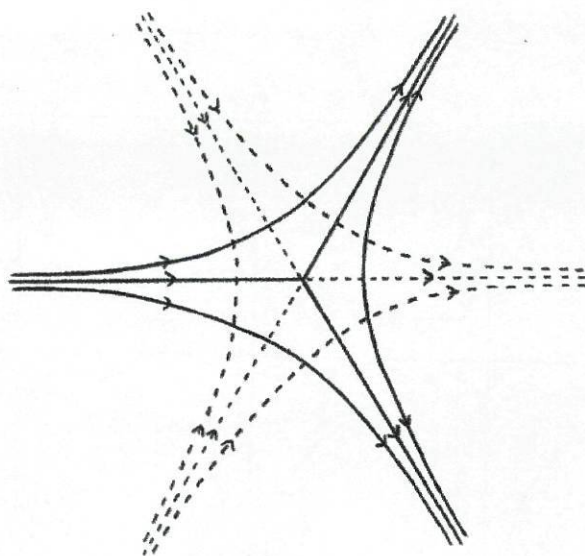


FIGURA 13

A cheio estão representadas as curvas correspondentes ao valor próprio de maior valor e a tracejado as correspondentes ao de menor valor. O sentido das setas indica o sentido de crescimento da velocidade característica. O estudo do Local de Inflexão é apresentado a seguir.

Vamos estudar o Local de Inflexão, ou seja, o conjunto dos pontos onde falha a condição genuína de não linearidade.

Fixado um ponto (v, u) tal que $u \neq -\lambda$ temos que

$$\lambda_1(v, u) = \frac{1}{2}(2 + v + \lambda - \sqrt{4u^2 + v^2 + 4u\lambda - 2v\lambda + \lambda^2})$$

$$r_1(v, u) = \left(-\frac{v - \lambda + \sqrt{4u^2 + v^2 + 4u\lambda - 2v\lambda + \lambda^2}}{2(u + \lambda)}, 1 \right)$$

$$\lambda_2(v, u) = \frac{1}{2}(2 + v + \lambda + \sqrt{4u^2 + v^2 + 4u\lambda - 2v\lambda + \lambda^2})$$

$$r_2(v, u) = \left(-\frac{v - \lambda - \sqrt{4u^2 + v^2 + 4u\lambda - 2v\lambda + \lambda^2}}{2(u + \lambda)}, 1 \right)$$

Facilmente se verifica que

$$\lambda'_1(U)r_1(U) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda'_2(U)r_2(U) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u = -\frac{\lambda}{3}$$

No caso em que $u = -\lambda$ temos que

$$\lambda_1(v, u) = \begin{cases} 1 + \lambda & \text{se } v \geq \lambda \\ 1 + v & \text{se } v < \lambda \end{cases}$$

$$r_1(v, u) = \begin{cases} (1, 0) & \text{se } v \geq \lambda \\ \left(-\frac{\lambda}{v-\lambda}, 1\right) & \text{se } v < \lambda \end{cases}$$

$$\lambda_2(v, u) = \begin{cases} 1 + v & \text{se } v > \lambda \\ 1 + \lambda & \text{se } v \leq \lambda \end{cases}$$

$$r_2(v, u) = \begin{cases} \left(-\frac{\lambda}{v-\lambda}, 1\right) & \text{se } v > \lambda \\ (1, 0) & \text{se } v \leq \lambda \end{cases}$$

pelo que a condição genuína de não linearidade falha em toda a recta, nas duas famílias, se $\lambda = 0$. Já se $\lambda \neq 0$ só falha na primeira família para os pontos em que $v \geq \lambda$ e na segunda família nos pontos em que $v \leq \lambda$.

No caso $\lambda = 0$ vem que a condição genuína de não linearidade falha apenas ao longo da recta $u = 0$, pelo que estamos no caso representado pela região 2 nas figuras (9) e (10).

Vamos agora estudar a bifurcação provocada pela variação do parâmetro λ . Já sabemos que o sistema é elíptico em

$$\{(v, u) \in \mathbb{R}^2 : \frac{(v - \lambda)^2}{\lambda^2} + \frac{(u + \frac{\lambda}{2})^2}{(\frac{\lambda}{2})^2} \leq 1\}$$

A projecção do Local de Coincidência no plano (v, Ω) é uma curva de equação

$$\frac{\sec^2(2\Omega)(v^2 - 2v\lambda + 2\lambda^2 + 2(v - \lambda)\lambda \sin(2\Omega))}{\lambda^2}$$

Os pontos críticos da equação diferencial (23) são dados por $p_1 = (\lambda, 0)$, $p_2 = (\lambda - \frac{2\sqrt{2}}{3}\lambda, \arccos \frac{1}{\sqrt{3}})$ e $p_3 = (\lambda + \frac{2\sqrt{2}}{3}\lambda, \arccos(-\frac{1}{\sqrt{3}}))$ e, como é óbvio, pertencem a essa curva.

Podemos, tal como no caso $\lambda = 0$, verificar, sem grande trabalho de cálculos, que $\Omega = 0$, $\Omega = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$ e $\Omega = \arccos(-\frac{1}{\sqrt{3}})$ são separatrizes de (23). Também temos que se $\Omega = \frac{\pi}{4}$ então $v = 0$, ao passo que se $\Omega = -\frac{\pi}{4}$ então $v = 2\lambda$. Por estes dois pontos, $(0, \frac{\pi}{4})$ e $(2\lambda, -\frac{\pi}{4})$, passam uma infinidade de curvas integrais, cada uma com uma direcção distinta.

Vamos fazer uma representação gráfica das curvas integrais de (23), tal como foi feito no caso $\lambda = 0$.

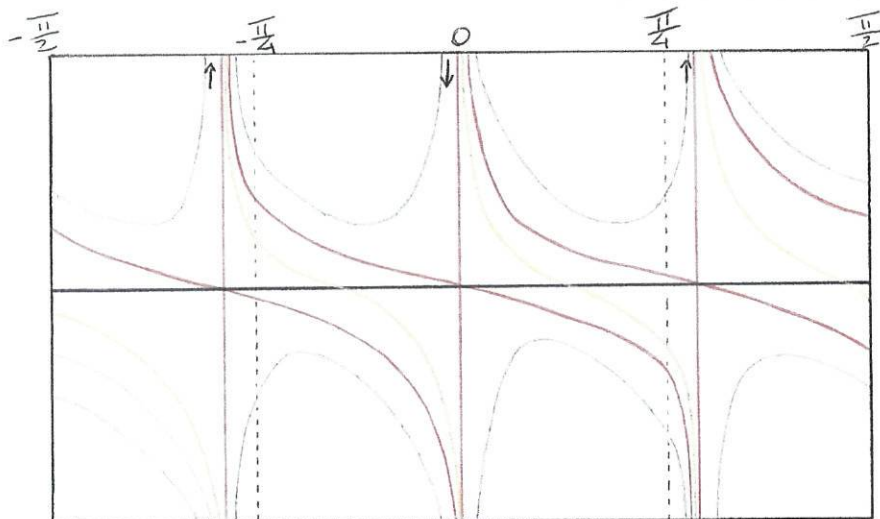


FIGURA 14

Tal como no caso $\lambda = 0$, a figura (14) representa o diagrama de fase na Variedade Característica no espaço (v, u, Ω) distorcida (as rectas $\Omega = \frac{\pi}{4}$, $\Omega = -\frac{\pi}{4}$ e $\Omega = 0$ correspondem a $v = 0$, $v = 2\lambda$ e $u = 0$, respectivamente).

A vermelho estão representadas as separatrizes. As separatrizes óbvias são as rectas correspondentes a $\Omega = 0$, $\Omega = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$ e $\Omega = \arccos(-\frac{1}{\sqrt{3}})$. As outras, embora não saibamos exactamente a sua equação, sabemos qual a sua forma. A curva que representa a projecção do Local de Coincidência é representada a preto e sabemos que a ela pertencem os pontos críticos, que por sua vez são os 3 pontos representados a verde. À parte das separatrizes existem nitidamente 2 tipos de curvas: as que cruzam a projecção de \mathcal{E} e as que não cruzam. Para facilitar a interpretação gráfica tais curvas são representadas por cores distintas - as primeiras por dourado e as últimas por lilás. A interpretação é facilitada na medida em que as primeiras, representadas nas coordenadas (v, u) , vão tocar transversalmente a elipse, formando cúspides, ao passo que as segundas não têm qualquer tipo de singularidade.

É de realçar que as separatrizes são tangentes á elipse. Tal tinha que acontecer como foi visto na secção "Variedade Característica". Que as rectas $\Omega = 0$, $\Omega = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$ e $\Omega = \arccos(-\frac{1}{\sqrt{3}})$ se projectam em rectas no plano (v, u) é fácil verificar tendo em conta que $u = -\frac{\lambda \cos \Omega}{\sin \Omega + \cos \Omega} + \frac{\sin \Omega \cos \Omega}{\sin^2 \Omega - \cos^2 \Omega} v$.

Todas as outras curvas de rarefacção se tornam simples de construir tendo em conta, na figura (14), que curvas convergem para que separatriz, o sentido crescente de v e se as curvas cruzam a projecção do Local de Coincidência ou não.

Na figura (15) apresentamos as curvas de rarefacção no plano (v, u) , representando, tal como no caso $\lambda = 0$, a cheio as curvas correspondentes ao valor próprio de maior valor e a tracejado as correspondentes ao de menor valor. Na figura figura (14) a linha preta separa exactamente os dois tipos de curvas e portanto as curvas de rarefacção obtidas são apresentadas na seguinte figura:

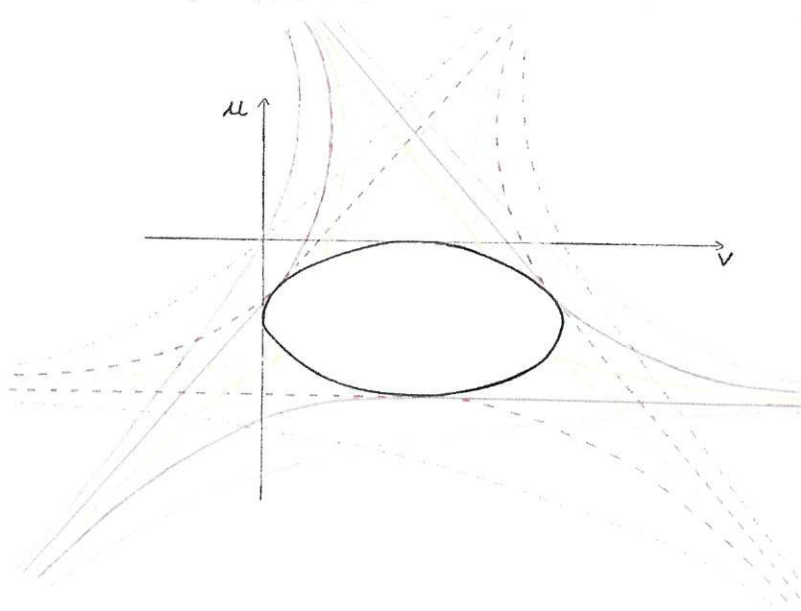


FIGURA 15

A bifurcação dos retratos de fase corresponde a um dos casos descritos em [3], apesar de as equações aí em causa não serem directamente da mesma forma.

REFERÊNCIAS

- [1] Arnold, V. I., *Singularities of Differential Maps*, Vol. I, Birkhäuser, 1985, pag. 29
- [2] Bruce, J. W., Tari, F., *On binary differential equations*, Nonlinearity, 1995, 255-271
- [3] Bruce, J. W., Tari, F., *Generic 1-Parameter of Binary Differential Equations of Morse Type*, Discrete and Continuous Dynamical Systems, Vol. 3, 1997, 79-90
- [4] Davydov, A., *Qualitative Theory of Control Systems*, Translations of Mathematical Monographs, Vol. 141, AMS, Providence, 1994
- [5] Holden, Helge, *On the Riemann Problem for a Prototype of a Mixed Type Conservation Law*, Comm. Pure Appl. Math. Vol XL, 1987, 229-264.
- [6] Isacson, Eli L., Marchesin, Dan, Palmeira, C. Frederico e Plohr, Bradley J., *A Global Formalism for Nonlinear Waves in Conservation Laws*, Commun. Math. Phys., 1992, 505-552
- [7] Palmeira, C., F., *Line fields defined by eigenspaces of derivatives of maps from the plane to itself*, Proseguimento das IV's Conferências Internacionais de Geometria Diferencial, Santiago de Compostela, Espanha, 1988
- [8] Schaeffer, David G. e Shearer, Michael, *The Classification of 2×2 Systems of Non-Strictly Hyperbolic Conservation Laws, With Application to Oil Recovery*, Comm. Pure Appl. Math. Vol XL, 1987, 141-178.
- [9] Smoller, Joel, *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*, Springer-Verlag: Berlin-Heidelberg-New York, 1983.