

António Manuel Lopes Gonçalves

# POLITOPOS CONVEXOS REGULARES



Departamento de Matemática Pura  
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto  
Dezembro 2000

António Manuel Lopes Gonçalves

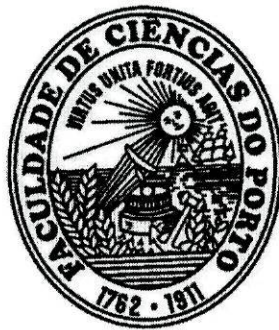
# POLITOPOS CONVEXOS REGULARES



Departamento de Matemática Pura  
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto  
Dezembro 2000

António Manuel Lopes Gonçalves

# POLITOPOS CONVEXOS REGULARES



*Tese submetida à Faculdade de Ciências da Universidade do Porto  
para obtenção do grau de Mestre em Matemática-Fundamentos e Aplicações*

Departamento de Matemática Pura  
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto  
Dezembro 2000

Aos meus pais,  
pelo (tempo) que me disponibilizaram.  
Às minhas mulher e filhas,  
pelo (tempo) que não lhes disponibilizei.

## AGRADECIMENTOS

As tarefas que nos propomos concluir são sempre menos difíceis se as adversidades passarem ao largo do caminho. Se, em abono do rumo tomado, os incentivos estiverem também presentes, então as dificuldades só poderão ser amenizadas. Neste caso, seria injusto, no mínimo e em primeiro lugar, não lembrar as palavras de desafio que o doutor Jorge Rocha me lançou (ainda decorria o processo de candidaturas a mestrados) para tentar levar a bom porto esta iniciativa. Para além dos docentes que ministraram cadeiras no âmbito do curso de mestrado, é de justiça realçar o empenho da doutora Maria do Rosário Pinto, orientadora desta dissertação, pelas sugestões feitas, críticas elaboradas e disponibilidade demonstrada. Apesar de se encontrar nos EUA, o doutor António Machiavello não se furtou a colaborar activamente (via correio electrónico) nesta dissertação, nomeadamente no que diz respeito a conteúdos algébricos. A todos, docentes do Departamento de Matemática Pura da Fac. de Ciências da Universidade do Porto, uma palavra de agradecimento só pode pecar por escassez.

## RESUMO

Este trabalho começa por abordar a classificação dos politopos convexos regulares de dimensão qualquer, tendo como ponto de partida a obra *Regular Polytopes*, de H. S. M. Coxeter. Em primeiro lugar, é estabelecida uma condição necessária para a existência de tais politopos (critério de Schlafli), sendo depois demonstrada a sua existência, o que inclui a construção dos politopos convexos regulares de dimensão 4 que possuem 24, 120 e 600 células. Assim, sabido o número infinito numerável de polígonos regulares do plano e os cinco sólidos platónicos tridimensionais, conclui-se que há seis politopos convexos regulares tetradimensionais e, em dimensões maiores que 4, apenas existem três em cada dimensão. Complementarmente, estabelecem-se relações entre duas pavimentações (de  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^4$ ) e os elementos inteiros de norma unitária de duas álgebras associativas sobre os números reais: a dos complexos e a dos quatérniões. O capítulo final é dedicado à relação entre as soluções inteiras das equações  $[x^2 + y^2 + z^2 = n]$  e os poliedros regulares, tendo por objectivo encontrar as soluções que correspondem aos vértices dos cinco sólidos platónicos.

## ABSTRACT

This publication starts with the classification of the convex regular polytopes in any dimension, having as a starting point the H. S. M. Coxeter's book *Regular Polytopes*. First, we'll establish a necessary condition for the existence of those polytopes (Schlafli's criterion) and, then, we'll demonstrate their existence, namely by the construction of three of them, with 24, 120 and 600 cells. We already knew that there are a numerable infinity number of regular polygons in the plane and five platonic solids in the case of the three dimensional space. In four dimensions, we'll count six convex regular polytopes and only three in each of the higher dimensions. Furthermore, we'll establish relations between one tessellation and one honeycomb (in  $\mathbb{R}^2$  and  $\mathbb{R}^4$ ) and the integral elements with unitary norm that belongs to two associative algebras over the real numbers: the complex and the quaternion algebras. Finally, we'll look for the relation between the integral solutions of the equations  $[x^2 + y^2 + z^2 = n]$  and the regular polyhedra with the objective of finding the solutions that correspond to the vertices of the five platonic solids.

## RESUMÉ

Ce travail, qui commence pour classier les polytopes convexes et réguliers dans toutes les dimensions, a pour base le livre *Regular Polytopes*, de H. S. M. Coxeter. Après, on établira une condition nécessaire pour l'existence de ces polytopes (le criterium de Schlafli) et on montrera cette existence (on construira trois de ces polytopes à quatre dimensions, avec 24, 120 et 600 cellules). Nous savons déjà qu'il y a un nombre infini numerable de polygones réguliers e cinq solides platoniciens dans le cas d'un espace à trois dimensions; on vera les six polytopes convexes e réguliers à quatre dimensions et seulement trois lorsque la dimension de l'espace est superieure à quatre. On vera, aussi, les relations qu'on peut trouver entre deux pavages – du plan et de l'espace à quatre dimensions – et les éléments entiers, avec une norme unitaire, de deux algèbres associatives sur les nombres reels : l'algèbre des complexes et l'algèbre des quatérniions. Le dernier chapitre étude la relation entre les solutions entiers des equations  $[x^2 + y^2 + z^2 = n]$  et les polyhèdres réguliers avec l'objectif de trouver les solutions que correspondent aux sommets des cinq solides platoniciens.

## ÍNDICE

Lista de símbolos .....	6
1. Dos simplexos aos hipercubos .....	7
2. O critério de Schlafli .....	11
2.1. Enumeração dos politopos possíveis .....	15
3. Construção de politopos regulares convexos de $\mathbb{R}^4$ .....	18
3.1. Construção de $\{3,4,3\}$ .....	19
3.2. Construção de $\{3,3,5\}$ e $\{5,3,3\}$ .....	21
3.3. Construção e representação plana de um 24-células .....	23
4. Simetrias de um politopo regular .....	24
5. Pavimentações .....	29
5.1. Álgebra real (associativa) dos números complexos .....	30
5.2. Álgebra real (associativa) dos quatérniões .....	30
6. Relações entre uma equação diofantina e alguns poliedros .....	32
6.1. O caso do icosaedro .....	33
Bibliografia .....	34

## ABREVIATURAS E SÍMBOLOS

$\mathbb{Z}$  : conjunto dos números inteiros

$\mathbb{Q}$  : conjunto dos números racionais

$\mathbb{R}$  : conjunto dos números reais

$\mathbb{C}$  : conjunto dos números complexos

$\mathbb{H}$  : conjunto dos quaterniões (números hipercomplexos)

$\alpha_n$  : simplexo regular de dimensão  $n$

$\beta_n$  : hiperoctaedro regular de dimensão  $n$

$\gamma_n$  : hipercubo regular de dimensão  $n$

$\delta_{n+1}$  : pavimentação de  $\mathbb{R}^n$  por hipercubos  $\gamma_n$

$\pi_n$  : politopo de dimensão  $n$

$\{p\}$  : polígono de  $p$  lados (arestas)

$\{p,q\}$  : poliedro com  $N_0$  vértices,  $N_1$  arestas,  $N_2$  faces  $\{p\}$  e figura do vértice  $\{q\}$

$\{p,q,r, \dots, u,v\}$  : politopo de células  $\{p,q,r, \dots, u\}$  e figura do vértice  $\{q,r, \dots, u,v\}$

$\left\{ \begin{matrix} p \\ q \end{matrix} \right\}$  : truncagem de  $\{p,q\}$

$\left\{ \begin{matrix} p \\ q,r,\dots,u,v \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} q,p \\ r,\dots,u,v \end{matrix} \right\}, \dots, \left\{ \begin{matrix} u,\dots,r,q,p \\ v \end{matrix} \right\}$  : truncagens do politopo  $\{p,q,r,\dots,u,v\}$

$O_0$  : vértice

$O_1$  : centro (ponto médio) de uma aresta

$O_n$  : centro de uma célula de dimensão  $n$

$R_i$  : medida do raio da esfera  $n$ -dimensional, centrada em  $O_n$ , que contém os  $O_i$  de  $\pi_n$

$[p,q,r,\dots,u,v]$  : grupo de simetria do politopo  $\{p,q,r,\dots,u,v\}$

$g_{p,q,r,\dots,u,v}$  : ordem do grupo  $[p,q,r,\dots,u,v]$

$N_{j,k}$  : ( $j < k$ ) número de  $\pi_k$ 's a que pertence  $\pi_j$  ou ( $j > k$ ) número de  $\pi_k$ 's que contém  $\pi_j$ .

$a|b$  :  $a$  divide  $b$  ( $a,b$  números inteiros)

# 1. DOS SIMPLEXOS AOS HIPERCUBOS

Se, num espaço n-dimensional, considerarmos  $(n+1)$  pontos em posição geral, esses pontos serão os vértices de uma figura geométrica que designaremos por simplexo n-dimensional (ou, mais simplesmente, um n-simplexo). Assim,

- 2 pontos são os vértices de um 1-simplexo
- 3 pontos são os vértices de um 2-simplexo (triângulo)
- 4 pontos são os vértices de um 3-simplexo (tetraedro)

.....

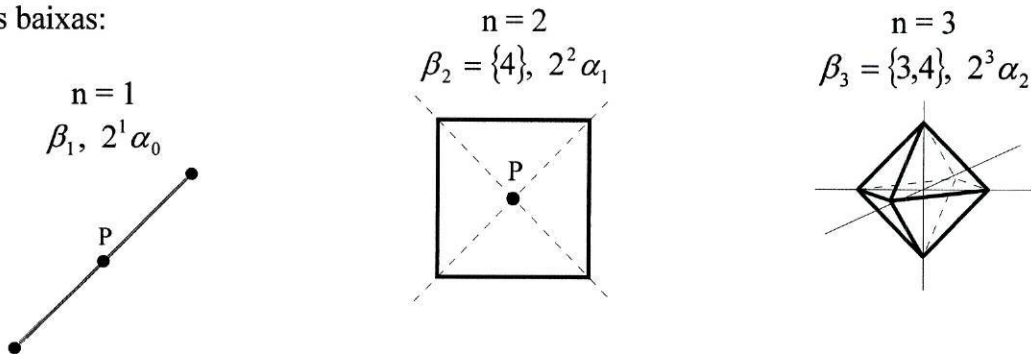
Os elementos de um n-simplexo são simplexos formados por subconjuntos de  $(n+1)$  pontos (os vértices),  $\binom{n+1}{2}$  arestas,  $\binom{n+1}{3}$  triângulos,  $\binom{n+1}{4}$  tetraedros, ... ,  $\binom{n+1}{i}$  faces de dimensão  $(i-1)$ , ... ,  $\binom{n+1}{n} = n+1$  células [subconjuntos de dimensão  $(n-1)$ , convexos, "limitados" por simplexos de dimensão  $(n-2)$ ]. Em resumo, o número de k-simplexos formado por  $(n+1)$  pontos em posição genérica é dado por  $N_k = \binom{n+1}{k+1}$ . Se os 1-simplexos (arestas), em número de  $\binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ , forem todos iguais (i.e., tiverem todos a mesma medida de comprimento), dizemos que estamos na presença de um simplexo regular  $\alpha_n$ . Assim,

$$\alpha_0 = \{\text{ponto}\}, \alpha_1 = \{\text{segmento de recta}\}, \alpha_2 = \{3\}, \alpha_3 = \{3,3\}$$

Em cada ponto P do espaço n-dimensional podemos traçar n rectas ortogonais entre si e

- i)  $2n$  pontos equidistantes de P e pertencentes a tais rectas (dois em cada recta) são os vértices de  $\alpha_{n-1}$ ;
- ii) se tomarmos os  $2n$  pontos equidistantes de P e pertencentes às citadas rectas, formaremos um hiperoctaedro  $\beta_n$  cujas células consistem em  $2^n \cdot \alpha_{n-1}$ .

Casos de dimensões mais baixas:



Notemos que  $\beta_3$  (octaedro regular) pode ser visto como uma dupla pirâmide quadrangular com a base  $\beta_2$  em comum; de forma análoga,  $\beta_4$  é uma dupla pirâmide quadridimensional com  $\beta_3$  em comum<sup>i</sup>.

Podemos construir a seguinte tabela:

	$\alpha_0$ (vértices)	$\alpha_1$ (arestas)	$\alpha_2$ ({3})	$\alpha_3$ ({3,3})	$\alpha_4$
$\beta_1$	2				
$\beta_2$	4	4			
$\beta_3$	6	12	8		
$\beta_4$	8	24	32	16	
$\beta_5$	10	40	80	80	32

em que o número recorrente  $N_{k,n}$  de  $\alpha_k$  em  $\beta_n$  é dado por

$$N_{k,n} = 2 \cdot N_{k-1,n-1} + N_{k,n-1}$$

Reparando que  $N_{0,n} = 2n$ , pode-se ainda<sup>ii</sup> determinar uma expressão geral:

$$N_{k,n} = 2^{k+1} \binom{n}{k+1}, \quad k < n \quad \text{iii}$$

Os dois tipos de figuras geométricas que vimos englobam-se em outras definições, mais amplas, e que usaremos a partir de agora: politopo e figura do vértice. Designaremos por politopo ( $\Pi_n$ ) uma região convexa e finita de um espaço  $n$ -dimensional limitada por um número finito de hiperplanos<sup>iv</sup> e por figura do vértice um outro politopo ( $\Pi'_{n-1}$ ) com vértices nos pontos médios das arestas de  $\Pi_n$  que têm um vértice  $V$  de ( $\Pi_n$ ) em comum. É imediato que este novo politopo ( $\Pi'_{n-1}$ ) tem dimensão  $(n-1)$ . Diremos, ainda, que um politopo é regular se as suas células forem regulares e a figura do vértice for regular em cada um dos seus vértices.

Os politopos  $\alpha_n$  e  $\beta_n$  são regulares: as suas células são  $\alpha_{n-1}$  e  $\alpha_{n-1}$ , apresentando  $\alpha_{n-1}$  e  $\beta_{n-1}$  como figuras (ou, usando outra designação possível, 'configurações') do vértice, respectivamente.

Como as células da figura do vértice são figuras dos vértices das células, um  $\Pi_4$  regular cujas células são  $\{p,q\}$  tem de ter figuras do vértice  $\{q,r\}$ , com  $r$  a designar o número de células comuns a uma aresta. Assim, escreveremos  $\Pi_4 = \{p,q,r\}$ ,  $\alpha_4 = \{3,3,3\}$  e  $\beta_4 = \{3,3,4\}$ . De uma forma geral, um politopo regular  $\{p,q, \dots, v,w\}$  tem células  $\{p,q, \dots, v\}$  e figura do vértice  $\{q, \dots, v,w\}$ . Então, esquematicamente,

<sup>i</sup>  $\beta_4$  tem 8 vértices (os 6 de  $\beta_3$  e mais 2 equidistantes de  $P$  na recta ortogonal às três expostas na figura anterior) e, de cada um dos dois novos vértices, temos 6 arestas com extremidades nos vértices de  $\beta_3$ . Então,  $\beta_4$  tem 24 arestas. O número de faces  $\{3\}$  de  $\beta_4$  é 32 (as 8 de  $\beta_3$  e as 24 formadas a partir de cada um dos dois novos vértices e as 12 arestas de  $\beta_3$ ) e, como cada um dos dois vértices referidos define um  $\{3,3\}$  com cada uma das faces de  $\beta_3$ ,  $\beta_4$  tem 16 células tetraédricas regulares.

<sup>ii</sup> A prova faz-se por indução.

<sup>iii</sup>  $N_{k,n}$  é o coeficiente de  $X^{k+1}$  de  $(1+2X)^n$ .




<sup>iv</sup> Analiticamente e num espaço euclídeo, um politopo é o conjunto dos pontos cujas coordenadas cartesianas satisfazem  $(n-1)$  inequações lineares independentes.

$$\alpha_n = \underbrace{\{3, 3, \dots, 3\}}_{n-1 \text{ cópias}} \rightarrow \alpha_n = \{3^{n-1}\}$$

$$\beta_n = \underbrace{\{3, 3, \dots, 3, 4\}}_{(n-2) \text{ cópias}} \rightarrow \beta_n = \{3^{n-2}, 4\}$$

Uma terceira espécie particular de politopos surge como generalização do conceito – bidimensional – que temos de um paralelogramo: os paralelotopos ( $\pi_n$ ).

Um ponto  $\pi_0 = \Pi_0$ , movendo-se ao longo de uma recta, traça o segmento  $\pi_1 = \Pi_1$ , compreendido entre as posições inicial e final do ponto; se efectuarmos, depois, uma translação de  $\pi_1$ , não ao longo da sua recta de suporte, teremos um paralelogramo  $\pi_2$ . Da translação deste último ao longo de uma direcção não pertencente ao plano em que  $\pi_2$  está apostado resultará  $\pi_3$ . Por este processo, construiremos  $\pi_n$ .

	$\pi_0$	$\pi_1$ 	$\pi_2$ 	$\pi_3$ 	$\pi_4$	$\pi_5$
vértices	1	2	4	8	16	32
arestas		1	4	12	32	80
faces			1	6	24	80
4-células				1	8	40

Um paralelotopo  $\pi_n$  tem  $2^n$  vértices e os seus restantes elementos são  $\pi_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ . O número  $M_{k,n}$  de  $\pi_k$  em  $\pi_n$  pode ser determinado à custa de uma relação de recorrência

$$M_{k,n} = M_{k-1,n-1} + M_{k,n-1}$$

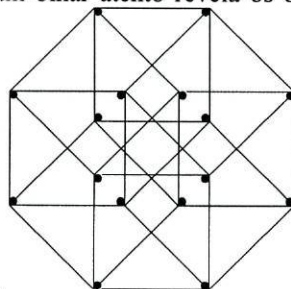
e pela expressão (a prova faz-se por indução)

$$M_{k,n} = 2^{n-k} \binom{n}{k} \quad 1$$

Se as translações que referimos se efectuarem ortogonalmente ao espaço anterior, a figura obtida será designada por ortotopo (a generalização do rectângulo ou de uma vulgar caixa de sapatos). Mais ainda, se os vectores associados a cada uma das translações tiverem igual norma, falaremos então de (também politopos regulares) hipercubos ou politopos de medida ( $\gamma_n$ )<sup>ii</sup>: se a norma for unitária, estaremos na presença dos hipercubos canónicos<sup>iii</sup>.

<sup>ii</sup>  $\gamma_0 = \pi_0$ ,  $\gamma_1 = \pi_1$ ,  $\gamma_2 = \{4\}$ ,  $\gamma_3 = \{4,3\}$ ,  $\gamma_4 = \{4,3,3\}$ , etc. Cada  $\gamma_n$  tem células  $\gamma_{n-1}$  e apresenta  $\alpha_{n-1}$  como figura dos seus vértices.

<sup>iii</sup> Será interessante a “visualização” plana de  $\gamma_4$  (com os seus 16 vértices, 32 arestas, 24 faces e oito 4-células) representada na figura: um olhar atento revela os oito cubos e o detalhe de cada quadrado ser



comum (só e apenas) a dois deles.

Em resumo, ( $n > 2$ )

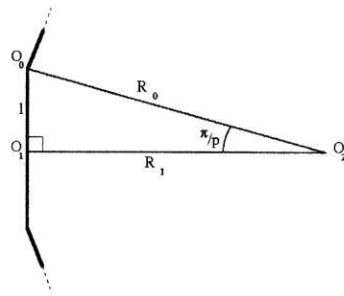
$\alpha_n = \{3^{n-1}\}, n > 1$	$\beta_n = \{3^{n-2}, 4\}$	$\gamma_n = \{4, \underbrace{3, 3, \dots, 3}_{(n-2) \text{ cópias}}\} = \{4, 3^{n-2}\}$
---------------------------------	----------------------------	---

Os politopos convexos regulares não se resumem aos expostos até aqui. Nos próximos capítulos mostraremos a existência de outros politopos convexos regulares em dimensões 2, 3 e 4, e a forma de os construir. Também veremos que, em dimensões superiores a 4 ( $n \geq 5$ ), os únicos politopos convexos regulares são  $\alpha_n$ ,  $\beta_n$  e  $\gamma_n$ .

## 2. O CRITÉRIO DE SCHLAFLI<sup>1</sup>

O objectivo deste capítulo é determinar uma fórmula geral para o ângulo  $\phi$  segundo o qual é vista a semi-aresta  $O_0O_1$  a partir do centro  $O_n$  de um politopo  $\{p, q, \dots, v, w\}$  e uma condição necessária para a existência deste mesmo politopo.

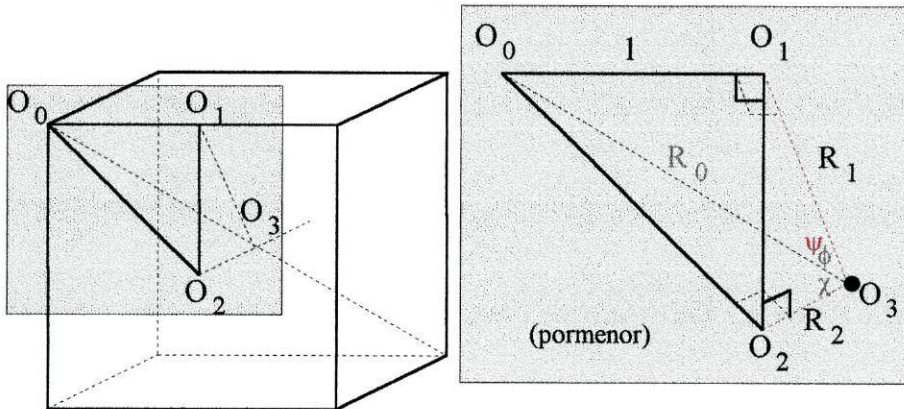
Observemos em primeiro lugar que, num  $p$ -ágono regular  $\{p\}$ , o raio  $R_0$  da circunferência que contém os vértices de  $\{p\}$  pode ser escrito como  $R_0=l.\operatorname{cosec}(\pi/p)$  e o raio  $R_1$  da circunferência inscrita em  $\{p\}$  expressa-se como  $R_1=l.\operatorname{cotg}(\pi/p)$ .



No caso de estarmos na presença de um poliedro regular  $\{p,q\}$ , obteremos as seguinte expressões:

$$R_0^2 = (l.\operatorname{cosec}\frac{\pi}{p})^2 + R_2^2 \quad \text{e} \quad R_1^2 = (l.\operatorname{cotg}\frac{\pi}{p})^2 + R_2^2$$

Na figura seguinte está representado o caso do cubo  $\{4,3\}$ :



Neste exemplo, ao construirmos as regiões sólidas comuns a um poliedro regular e ao seu dual – os poliedros regular  $\left\{ \begin{matrix} 3 \\ 3 \end{matrix} \right\} = \{3,4\}$  e quasi-regulares  $\left\{ \begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix} \right\}$  e  $\left\{ \begin{matrix} 3 \\ 5 \end{matrix} \right\}$  – verificamos a existência, em cada uma delas, de polígonos regulares com vértices em círculos maiores das respectivas circum-esferas:  $\{4\}$  em  $\{3,4\}$ ,  $\{6\}$  em  $\left\{ \begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix} \right\}$  e  $\{10\}$  em  $\left\{ \begin{matrix} 3 \\ 5 \end{matrix} \right\}$ .

<sup>1</sup> Ludwig Schläfli (1814-1895)

A figura do vértice de  $\left\{ \begin{matrix} p \\ q \end{matrix} \right\}$  é um rectângulo em que cada par de vértices

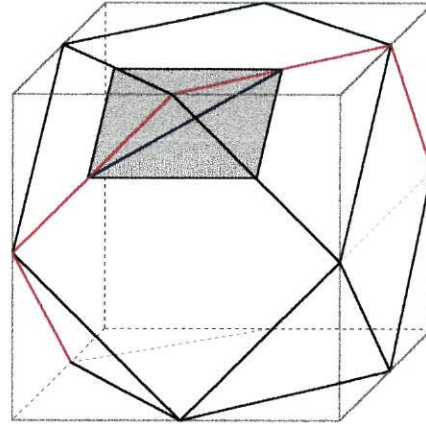
opostos é constituído pelos pontos médios de dois lados adjacentes do polígono equatorial. Em  $\{h\}$  ( $h = 4, 6, 10$ ), cada aresta da figura do vértice (de comprimento  $2L \cdot \cos(\pi/h)$ , em que  $2L$  representa o comprimento das arestas de  $\{h\}$ ) é a diagonal de um rectângulo de lados  $2L \cdot \cos(\pi/p)$  e  $2L \cdot \cos(\pi/q)$ . Então,

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{h}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)$$

Exemplo:

No cuboctaedro, representou-se o rectângulo figura dos seus vértices, a sombreado, um dos polígonos  $\{6\}$  equatoriais, a vermelho, e uma figura de um vértice de  $\{6\}$  (segmento a azul). Neste sólido, como já vimos, temos

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)$$



Notando que a circum-esfera de  $\left\{ \begin{matrix} p \\ q \end{matrix} \right\}$  tem raio igual a  $L \cdot \operatorname{cosec}(\pi/h)$  – exactamente o raio da esfera que contém os pontos médios das arestas de  $\{p, q\}$  – e que a aresta de  $\left\{ \begin{matrix} p \\ q \end{matrix} \right\}$ , de comprimento  $2L$ , é a figura do vértice, de comprimento  $2L \cdot \cos(\pi/p)$ , de uma face de  $\{p, q\}$ , então  $L = l \cdot \cos(\pi/p)$  e

$$R_1 = L \cdot \operatorname{cosec}(\pi/h) = l \cdot \cos(\pi/p) \cdot \operatorname{cosec}(\pi/h)$$

$$R_0 = \sqrt{l^2 + L^2 \cdot \operatorname{cosec}^2 \frac{\pi}{h}} = l \cdot \sin(\pi/q) \cdot \operatorname{cosec}(\pi/h)$$

$$R_2 = \sqrt{R_1^2 + l^2 \cdot \operatorname{cotg}^2 \frac{\pi}{p}} = l \cdot \operatorname{cotg}(\pi/p) \cdot \cos(\pi/q) \cdot \operatorname{cosec}(\pi/h)$$

Podemos assim concluir que:

$$\begin{cases} \cos \phi = \frac{R_1}{R_0} = \cos \frac{\pi}{p} \cdot \operatorname{cosec} \frac{\pi}{q} \\ \cos \chi = \frac{R_2}{R_0} = \operatorname{cotg} \frac{\pi}{p} \cdot \operatorname{cotg} \frac{\pi}{q} \\ \cos \psi = \frac{R_2}{R_1} = \operatorname{cosec} \frac{\pi}{p} \cdot \cos \frac{\pi}{q} \end{cases}$$

Notemos ainda que  $\sin \phi = l/R_0$  e  $(\pi - 2\psi)$  é o ângulo diedral entre os planos de duas faces adjacentes (o plano definido por  $O_1O_2O_3$  é perpendicular à aresta comum das duas faces).

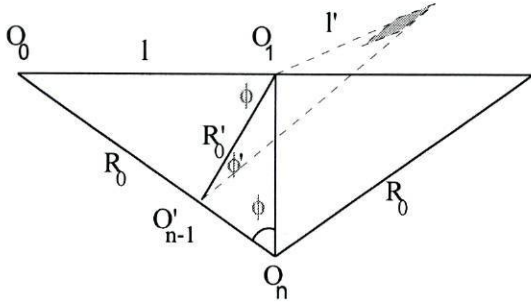
Se generalizarmos estes resultados para um politopo regular n-dimensional,

em que 
$$\begin{cases} O_n = \text{centro} \\ \phi = O_0 O_n O_1 \\ \chi = O_0 O_n O_{n-1} \\ \psi = O_{n-2} O_n O_{n-1} \end{cases}, \text{ continuamos a ter } l = \overline{O_1 O_0} = R_0 \cdot \sin \phi, \quad 2\phi \text{ como o ângulo}$$

ao centro de uma aresta de comprimento  $2l$  e  $(\pi - 2\psi)$  como ângulo diedral entre dois hiperplanos contendo duas células adjacentes.

Consideremos, agora, a secção produzida em  $\{p, q, \dots, v, w\}$  pelo plano  $O_0 O_1 O_n$  e designemos por  $R'_0, l', \phi'$  os valores congêneres para a figura do vértice  $\{q, \dots, v, w\}$ , com centro em  $O'_{n-1}$ .

Atendendo a que  $O_0$  é equidistante dos vértices de  $\{q, \dots, v, w\}$ ;  $O_n$  é equidistante dos vértices de  $\{q, \dots, v, w\}$  (estes vértices pertencem à esfera que contém os pontos médios das arestas de  $\{p, q, \dots, v, w\}$  e é centrada em  $O_n$ ) e  $O'_{n-1}$  é o centro da circum-esfera de  $\{q, \dots, v, w\}$ , conclui-se que os três pontos pertencem à mesma recta que é perpendicular à recta  $O'_{n-1} O_1$ .



A partir da figura construída,

$$\begin{cases} R'_0 = l \cdot \cos \phi \\ R'_0 \cdot \sin \phi' = l' = l \cdot \cos \frac{\pi}{p} \end{cases} \Rightarrow \Rightarrow \cos \phi = \frac{\cos \frac{\pi}{p}}{\sin \phi'} \Rightarrow \sin^2 \phi = 1 - \frac{\cos^2 \frac{\pi}{p}}{\sin^2 \phi'}$$

Se  $\phi'$  se referir à segunda figura do vértice, ...,  $\phi^{(k)}$  à k-ésima figura do

vértice, teremos  $\sin^2 \phi' = 1 - \frac{\cos^2 \frac{\pi}{q}}{\sin^2 \phi''}$ , ...,  $\sin^2 \phi^{(n-3)} = 1 - \frac{\cos^2 \frac{\pi}{v}}{\sin^2 \phi^{(n-2)}}$  e

$$\sin^2 \phi = 1 - \frac{\cos^2 \frac{\pi}{p}}{1 - \frac{\cos^2 \frac{\pi}{q}}{1 - \frac{\cos^2 \frac{\pi}{r}}{\dots}}}$$

$$\therefore \frac{\cos^2 \frac{\pi}{v}}{1 - \cos^2 \frac{\pi}{w}}, \text{ porque } \phi^{(n-2)} = \frac{\pi}{w}.$$



e, então, pode-se estabelecer

$$\Delta_{p,q,\dots,v,\psi} \geq 0$$

também designado por **critério de Schläfli para a existência da figura correspondente ao símbolo dado**  $\{p, q, \dots, v, w\}$ .

## 2.1. ENUMERAÇÃO DOS POLITOPOS POSSÍVEIS

Analiseemos, agora, as consequências da desigualdade expressa e enumeremos os politopos regulares possíveis.

Se  $n = 3$ , temos  $\Delta_{p,q} \geq 0 \Leftrightarrow \sin \frac{\pi}{q} \geq \cos \frac{\pi}{p} \Leftrightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq \frac{1}{2}$ , iii

que apresenta as soluções

<b>p</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>3</b>	<b>3</b>
<b>q</b>	3	3	3	3	4	4	5	6
<b>sólido</b>	tetraedro	cubo	dodecaedro		octaedro		icosaedro	

iv

Se  $n = 4$ ,

$$\Delta_{p,q,r} \geq 0 \Leftrightarrow \sin \frac{\pi}{p} \cdot \sin \frac{\pi}{r} \geq \cos \frac{\pi}{q} \Leftrightarrow \sin \frac{\pi}{r} \geq \cos \frac{\pi}{q} \cdot \operatorname{cosec} \frac{\pi}{p} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin \frac{\pi}{r} \geq \cos \psi = \sin \left( \frac{\pi}{2} - \psi \right) \Rightarrow \frac{\pi}{r} \geq \frac{\pi}{2} - \psi \Leftrightarrow \frac{2\pi}{r} \geq \pi - 2\psi$$

Como  $(\pi - 2\psi)$  é o ângulo diedral de  $\{p, q\}$ , fica estabelecida a possibilidade de colocar  $r$   $\{p, q\}$  em torno de uma aresta comum.

Quadro de soluções:

<b>p</b>	<b>3</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>3</b>	<b>3</b>	<b>5</b>	<b>4</b>
<b>q</b>	3	3	3	4	3	3	3
<b>r</b>	3	4	3	3	5	3	4
	$\alpha_4$	$\beta_4$	$\gamma_4$				$\delta_4$

v

Se  $n = 5$ ,

$$\Delta_{p,q,r,s} \geq 0 \Leftrightarrow \sin^2 \frac{\pi}{p} \left( \sin^2 \frac{\pi}{s} - \cos^2 \frac{\pi}{r} \right) - \cos^2 \frac{\pi}{q} \cdot \sin^2 \frac{\pi}{s} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\cos^2 \frac{\pi}{q}}{\sin^2 \frac{\pi}{p}} + \frac{\cos^2 \frac{\pi}{r}}{\sin^2 \frac{\pi}{s}} \leq 1$$

A desigualdade estabelecida relaciona  $(\cos \psi)$  em  $\{p, q\}$  e  $\{s, r\}$ .

Quadro de soluções:

p	3	3	4	3	3	4
q	3	3	3	3	4	3
r	3	3	3	4	3	3
s	3	4	3	3	3	4
	$\alpha_5$	$\beta_5$	$\gamma_5$			$\delta_5$

Dos resultados expressos no quadro,  $\{3,3,4,3\}$  e  $\{3,4,3,3\}$  referem-se a duas pavimentações duais. Assim, no caso de cinco dimensões, apenas existem três polítopos regulares convexos.

No caso de dimensões superiores ( $n > 5$ ), por indução e atendendo à dualidade, constata-se que os únicos polítopos regulares convexos são  $\alpha_n$ ,  $\beta_n$  e  $\gamma_n$ <sup>vi</sup>.

Como  $\Delta_{p,q,r} \geq 0$  é, apenas e como vimos, uma condição suficiente, temos de provar a existência dos polítopos regulares convexos  $\{3,4,3\}$ ,  $\{3,3,5\}$  e  $\{5,3,3\}$  no caso de  $n = 4$ .

Nos casos das dimensões inferiores, a família dos polígonos convexos regulares é composta por um número infinito numerável de elementos, existindo um polígono convexo regular  $\{m\}$  para cada  $m \geq 3$ , e os poliedros convexos regulares são já conhecidos desde a Antiga Grécia, recebendo a designação comum de sólidos platónicos.

<sup>i</sup> A prova faz-se por indução.

$$\Delta = |1| = 1$$

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & C_1 \\ C_1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - C_1^2 = \sin^2\left(\frac{\pi}{p}\right)$$

$$\Delta_{p,q} = \begin{vmatrix} 1 & C_1 & 0 \\ C_1 & 1 & C_2 \\ 0 & C_2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & C_2 \\ C_2 & 1 \end{vmatrix} - C_1 \cdot \begin{vmatrix} C_1 & 0 \\ C_2 & 1 \end{vmatrix} = \Delta_q - C_1^2 \cdot \Delta$$

$$\Delta_{p,q,r} = \begin{vmatrix} 1 & C_1 & 0 & 0 \\ C_1 & 1 & C_2 & 0 \\ 0 & C_2 & 1 & C_3 \\ 0 & 0 & C_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & C_2 & 0 \\ C_2 & 1 & C_3 \\ 0 & C_3 & 1 \end{vmatrix} - C_1 \begin{vmatrix} C_1 & 0 & 0 \\ C_2 & 1 & C_3 \\ 0 & C_3 & 1 \end{vmatrix} = \Delta_{q,r} - C_1^2 \cdot \Delta_r$$

Suponhamos, como hipótese de indução, que  $\Delta_{p,q,\dots,v} = \Delta_{q,\dots,v} - C_1^2 \cdot \Delta_{r,\dots,w}$ .

$$\Delta_{p,q,\dots,v,w} = \Delta_{q,\dots,v,w} - C_1 \begin{vmatrix} C_1 & & & & \\ C_2 & 1 & C_3 & & 0 \\ C_3 & 1 & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ 0 & \cdot & \cdot & 1 & C_{n-1} \\ & & & C_{n-1} & 1 \end{vmatrix} = \Delta_{q,\dots,v,w} - C_1^2 \cdot \Delta_{r,\dots,v,w}$$

$$\text{Então, } \Delta_{p,q,\dots,v,w} = \Delta_{q,\dots,v,w} - \Delta_{r,\dots,w} \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)$$

ii O valor exposto para o simplexo regular  $\alpha_n$  pode ser obtido por indução e, no caso do hiperocatedro  $\beta_n$ , tem-se  $\Delta_{\beta_n} = \Delta_{3^{n-2},4} = \Delta_{4,3^{n-2}} = \Delta_{3^{n-2}} - \Delta_{3^{n-3}} \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{n}{2^{n-1}} - \frac{n-1}{2^{n-2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^{n-1}}$ .

Retomando as igualdades  $l = R_0 \sin\phi$  e  $\sin^2\phi = \frac{\Delta_{p,q,\dots,v,w}}{\Delta_{q,\dots,v,w}}$ , podemos concluir  $R_0 = l \sqrt{\frac{\Delta_{q,\dots,v,w}}{\Delta_{p,q,\dots,v,w}}}$  e

é então imediato que, para  $\alpha_n$  de aresta  $(2l)$ , se obtém  $R_0 = l \sqrt{\frac{\Delta_{\alpha_{n-1}}}{\Delta_{\alpha_n}}} = l \sqrt{\frac{2n}{n+1}}$ . Para o cálculo

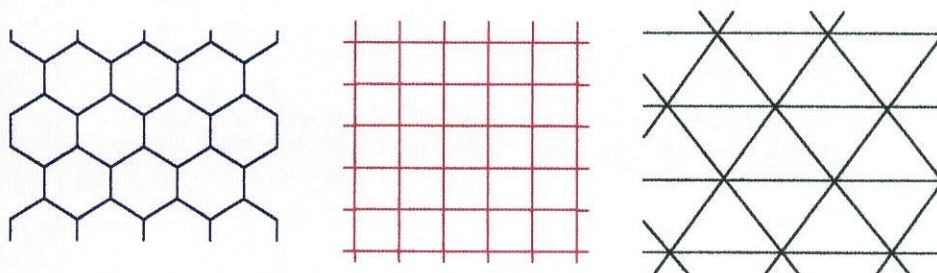
dos  $R_j$ , basta reparar que o triângulo  $O_0O_jO_n$  é rectângulo em  $O_j$  e apenas teremos de subtrair o quadrado do circum-raio de um elemento de dimensão  $j$  ao quadrado do raio similar de todo o politopo.

No caso de  $\alpha_n$ , com a já referida aresta, tem-se  $R_j = l \sqrt{\frac{2n}{n+1} - \frac{2j}{j+1}} = l \sqrt{\frac{2}{j+1} - \frac{2}{n+1}}$ .

iii  $\{3,6\}$ ,  $\{4,4\}$ ,  $\{6,3\}$ , são pares de números e únicas soluções inteiras positivas de  $(p-2)(q-2) = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2}$ , enquanto os pares de números relativos aos cinco poliedros regulares convexos são

igualmente as únicas soluções inteiras de  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2}$

iv As soluções  $\{6,3\}$ ,  $\{4,4\} = \delta_3$ ,  $\{3,6\}$ , correspondem a pavimentações (infinitas) do plano, cada uma delas representada parcialmente na figura seguinte:



v  $\delta_4$  refere-se ao preenchimento de  $\mathbb{R}^3$  por cubos  $\gamma_3 = \{4,3\}$ , cada vértice comum a oito cubos e cada face comum a dois  $\{4,3\}$ ; genericamente, e como nos surgirá,  $\delta_{n+1}$  significa a pavimentação de  $\mathbb{R}^n$  por hipercubos  $\gamma_n = \{4,3^{n-2}\}$ , cada vértice comum a  $2^n$  hipercubos e cada  $(n-1)$ -célula comum a dois  $\gamma_n$ .

vi Se o politopo  $\{p,q,r,s,t\}$  for regular (caso  $n = 6$ ), então a sua figura do vértice  $\{q,r,s,t\}$  é um politopo regular de dimensão 5. Atendendo ao que já mostrámos para esta dimensão,  $\{s,t\}$  deve ser um sólido platónico com  $s = 3$  ou 4.

As hipóteses são sete, com quatro de fácil identificação:  $\{3,3,3,3,3\} = \alpha_6$ ;  $\{3,3,3,3,4\} = \beta_6$ ;  $\{4,3,3,3,3\} = \gamma_6$ ;  $\{4,3,3,3,4\} = \delta_6$ . As restantes três hipóteses são  $\{3,3,3,3,5\}$ ,  $\{4,3,3,3,5\}$  e  $\{3,3,3,4,3\}$ . Se  $\{3,3,3,3,5\}$  e  $\{4,3,3,3,5\}$  fossem politopos convexos regulares, também os seus duais, construídos a partir de  $\{5,3,3,3,3\}$ , o seriam, o que já vimos não ser verdadeiro; se  $\{3,3,3,4,3\}$  fosse um politopo convexo regular, também o seu dual o seria e, como já vimos,  $\{3,4,3,3,3\}$  é uma pavimentação. Conclui-se, assim, que só  $\alpha_6$ ,  $\beta_6$  e  $\gamma_6$  são politopos convexos regulares ( $\delta_6$  refere-se a uma pavimentação)

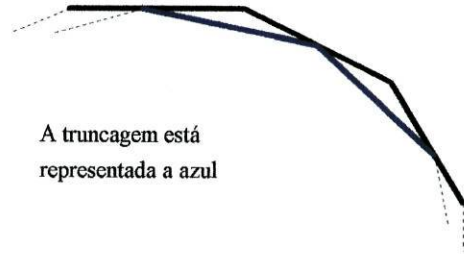
Se admitirmos, como hipótese de indução, que  $\alpha_{n-1}$ ,  $\beta_{n-1}$  e  $\gamma_{n-1}$  são os únicos politopos convexos regulares num espaço euclidiano de dimensão  $(n-1)$ , concluiremos o pretendido utilizando um raciocínio similar ao exposto para  $n = 6$ .

### 3. CONSTRUÇÃO DE POLITOPOS REGULARES CONVEXOS DE $\mathbb{R}^4$

Antes de mostrar a existência dos politopos regulares convexos quadridimensionais referidos na parte final do capítulo anterior – a saber,  $\{3,4,3\}$ ,  $\{3,3,5\}$  e  $\{5,3,3\}$  – é necessário introduzir o conceito de truncagem.

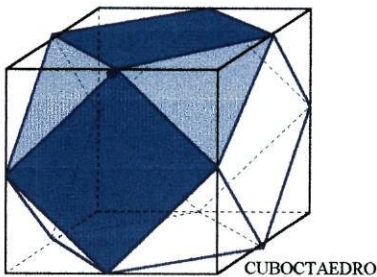
No plano euclideano, as figuras dos vértices de  $\{p\}$  são os lados de outro  $\{p\}$ , que designaremos por truncagem do primeiro. Os vértices do segundo polígono regular convexo são os pontos médios das arestas do primeiro, como se observa na figura. Os dois  $\{p\}$  são duais relativamente ao círculo inscrito do primeiro, que não é

mais do que o circun-círculo do segundo polígono.



Analogamente, as figuras dos vértices e as faces truncadas de um poliedro regular convexo  $\{p,q\}$  são as faces de uma truncagem  $\begin{Bmatrix} p \\ q \end{Bmatrix}$  ou  $\begin{Bmatrix} q \\ p \end{Bmatrix}$  cujos vértices são os pontos médios das arestas de  $\{p,q\}$ . Como cada aresta de  $\{p,q\}$  une dois vértices e separa duas faces, em cada vértice de  $\begin{Bmatrix} p \\ q \end{Bmatrix}$  confluem dois  $\{p\}$  e dois  $\{q\}$  de forma alternada.

No caso do cubo  $\{4,3\}$  representado na figura seguinte, cada vértice da figura do vértice está “rodeado” de dois  $\{3\}$  e dois  $\{4\}$ .



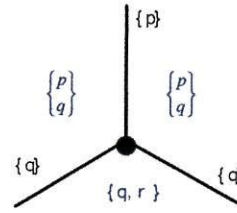
Neste caso, a truncagem é um cuboctaedro  $\begin{Bmatrix} 3 \\ 4 \end{Bmatrix}$  que também pode ser visto como a intersecção sólida do cubo  $\{4,3\}$  e do octaedro  $\{3,4\}$ , dois poliedros regulares convexos duais.

O auto-dual tetraedro regular,  $\{3,3\}$ , apresenta como truncagem  $\begin{Bmatrix} 3 \\ 3 \end{Bmatrix}$ , o octaedro regular  $\{3,4\}$ , também intersecção sólida de dois  $\{3,3\}$ .

As  $N_0$  figuras dos vértices e  $N_3$  células truncadas de um politopo  $\{p,q,r\}$  são as células  $\{q,r\}$  e  $\begin{Bmatrix} p \\ q \end{Bmatrix}$  da truncagem  $\begin{Bmatrix} p \\ q,r \end{Bmatrix}$  ou  $\begin{Bmatrix} q,r \\ p \end{Bmatrix}$  que tem  $N_1$  vértices, os pontos médios das  $N_1$  arestas de  $\{p,q,r\}$ . Cada aresta da truncagem une os dois pontos médios de outros tantos lados adjacentes de um determinado  $\{p\}$  de  $\{p,q,r\}$  sendo, assim, uma aresta de uma figura do vértice  $\{q,r\}$  e, também, a figura do vértice de  $\{p\}$ . Mas este  $\{p\}$  é a face comum de duas células  $\{p,q\}$  de  $\{p,q,r\}$ . Então, a aresta de  $\begin{Bmatrix} p \\ q,r \end{Bmatrix}$  é

rodeada por um  $\{q,r\}$  e dois  $\begin{Bmatrix} p \\ q \end{Bmatrix}$ , com dois  $\{q\}$  e um  $\{p\}$  a servir de separação.

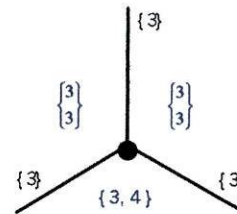
Podemos representar a situação de uma forma esquemática, com a aresta de  $\begin{Bmatrix} p \\ q,r \end{Bmatrix}$  de



topo, no centro da figura:

### 3.1. CONSTRUÇÃO DE $\{3,4,3\}$

Consideremos, agora, a truncagem  $\begin{Bmatrix} 3 \\ 3,4 \end{Bmatrix}$  de  $\beta_4 = \{3,3,4\}$ . As células da truncagem são oito octaedros  $\{3,4\}$  – as figuras do vértice de  $\beta_4$  e tantos quantos os seus vértices – e 16 octaedros  $\begin{Bmatrix} 3 \\ 3 \end{Bmatrix} = \{3,4\}$  (as truncagens dos tetraedros, com já vimos neste capítulo, e tantos quantas as células de  $\beta_4$ ), perfazendo, desta maneira, 24 octaedros  $\{3,4\}$ . Cada aresta pertence a somente três octaedros, dois dos quais  $\begin{Bmatrix} 3 \\ 3 \end{Bmatrix}$  e o outro  $\{3,4\}$ .



Utilizando o esquema já apresentado e com  $p = 3, q = 3, r = 4$ :

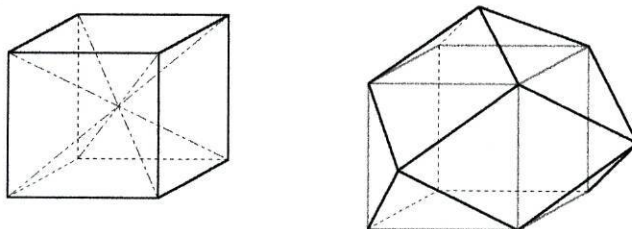
Nestas condições, a truncagem de  $\beta_4$  é regular e  $\begin{Bmatrix} 3 \\ 3,4 \end{Bmatrix} = \{3,4,3\}$ .

Esta construção do politopo regular convexo  $\{3,4,3\}$  ficou a dever-se a Ernesto Cesàro<sup>i</sup>. O politopo em causa tem 24 células octaédricas (é proveniente deste valor a designação comum de 24-células) e, sendo dual de si mesmo, tem também 24 vértices, os centros das arestas de  $\beta_4$ . Como cada octaedro tem oito faces triangulares e, ao mesmo tempo, cada um destes triângulos pertence a dois octaedros, o número total de triângulos é  $24 \cdot \frac{8}{2} = 96$ . A dualidade remete-nos de imediato para o mesmo número de 96 arestas. Em resumo,

$\{3,4,3\}$	$N_0 = 24 = N_3$	$N_1 = 96 = N_2$
-------------	------------------	------------------

<sup>i</sup> Ernesto Cesàro (1859-1906), in "Forme poliedriche regolari e semi-regolari in tutti gli spazii", Memórias da Academia Real das Sciencias de Lisboa (Classe de Sciencias Mathematicas, Physicas e Naturaes), Nova Serie, 6.2 (1887), citado por H. S. M. Coxeter.

Uma outra forma de construir um  $\{3,4,3\}$  ficou a dever-se a Thorold Gosset<sup>ii</sup> e em que se recorre à analogia da construção de um dodecaedro rômboico a partir de dois cubos iguais: destaquem-se as seis pirâmides de bases quadrangulares (as bases são as faces do cubo) que partilham o ponto central do cubo e coleam-se, pelas bases, as mesmas seis pirâmides às faces de outro cubo igual ao primeiro. Obtemos um sólido com catorze vértices, doze faces e 24 arestas.

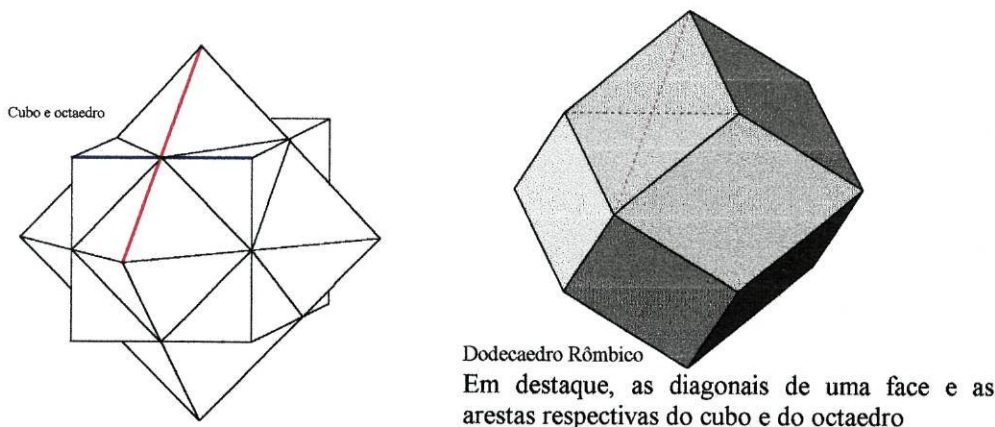


Exemplo com três das seis pirâmides "coladas" no cubo da direita

A ideia de Gosset foi tomar dois hipercubos (ou tesseractos, uma outra designação muito vulgarizada para esta figura geométrica)  $\gamma_4$  iguais e, num deles, separar as oito pirâmides cúbicas (as bases são as células) com o centro de  $\gamma_4$  em comum. O passo seguinte é a colagem das oito pirâmides nas células do outro  $\gamma_4$ . O politopo resultante é  $\{3,4,3\}$ .

As duas construções expostas estão relacionadas por uma dualidade: enquanto Cèsaro corta pirâmides a partir dos "cantos" de  $\beta_4$ , Gosset erige pirâmides a partir das células de  $\gamma_4$ .

Uma outra construção do dodecaedro rômboico – que merece a pena salientar – assenta nas propriedades de dois poliedros duais,  $\{p,q\}$  e  $\{q,p\}$ : a sua intersecção sólida é  $\left\{ \begin{matrix} p \\ q \end{matrix} \right\}$  e o menor (no sentido da inclusão) corpo convexo que contém os dois poliedros é um poliedro cujas faces consistem em  $N_1$  losangos. As diagonais destes losangos são as arestas de  $\{p,q\}$  e  $\{q,p\}$ . O poliedro rômboico tem  $(2.N_1)$  arestas e  $(N_0+N_2)$  vértices, sendo o dual de  $\left\{ \begin{matrix} p \\ q \end{matrix} \right\}$ . Para construir especificamente o dodecaedro rômboico<sup>iii</sup> (o dual do cuboctaedro), basta munirmo-nos de um cubo e de um octaedro e, como se poderá observar a partir da figura, teremos  $N_0=14$ ,  $N_1=24$  e  $N_2=12$ :



Dodecaedro Rômboico

Em destaque, as diagonais de uma face e as arestas respectivas do cubo e do octaedro

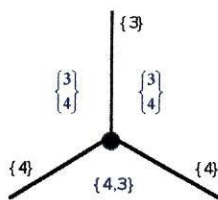
<sup>ii</sup> Thorold Gosset (1869-1962)

<sup>iii</sup> A forma dos cristais de granada é a de um dodecaedro rômboico, como descobriu Kepler em 1611.

### 3.2. CONSTRUÇÃO DE $\{3,3,5\}$ E $\{5,3,3\}$

Para construir  $\{3,3,5\}$ , vamos partir do 24-células  $\{3,4,3\}$  e de uma truncagem particular, consistindo no “enviesamento” de  $\{3,4,3\}$  e que designaremos como  $e\{3,4,3\}$ . Truncando  $\{3,4,3\}$ , obtemos o politopo  $\left\{ \begin{matrix} 3 \\ 4,3 \end{matrix} \right\}$ , cujas células são 24 cubos  $\{3,4\}$  e outros tantos cuboctedros  $\left\{ \begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix} \right\}$ . Os seus vértices são os pontos médios das 96 arestas de  $\{3,4,3\}$  e cada aresta está rodeada por um cubo e dois cuboctedros. Utilizando de novo a representação esquemática a que já aludimos, temos

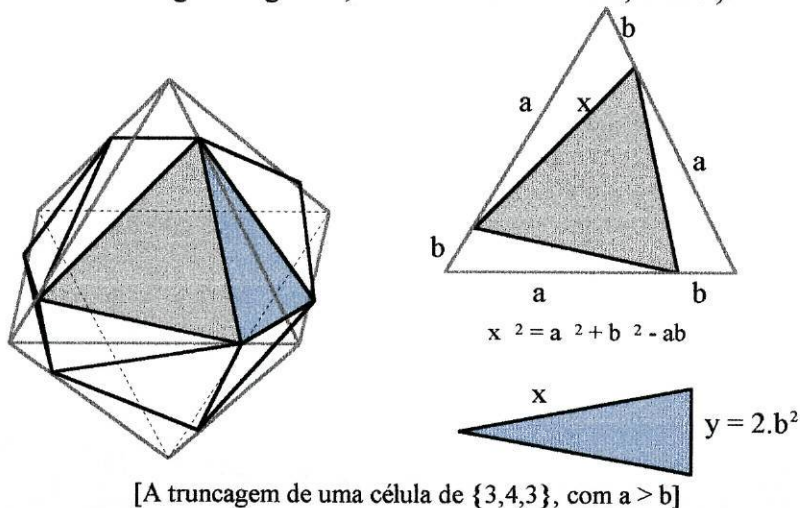
As faces são triangulares (cada triângulo comum a dois cuboctaedros) e quadradas (cada quadrado pertence a um cubo e a um cuboctaedro)



Como cada um dos 24 cubos tem arestas e seis faces, estamos, agora, na presença de 288 arestas e 144 faces quadradas. As 288 arestas são os lados das 96 faces triangulares (truncagens das 96 faces de  $\{3,4,3\}$ ). Em resumo,  $\left\{ \begin{matrix} 3 \\ 4,3 \end{matrix} \right\}$  tem

$$N_0 = 96 \quad N_1 = 288 \quad N_2 = 96 + 144 = 240 \quad N_3 = 24 + 24 = 48$$

Se, em vez de tomarmos os pontos médios de cada aresta de  $\{3,4,3\}$  para vértices da truncagem, escolhermos outro ponto em cada aresta de forma a que se mantenha constante a razão das distâncias do ponto aos vértices da aresta, estaremos a distorcer o politopo  $\left\{ \begin{matrix} 3 \\ 4,3 \end{matrix} \right\}$ : cada cuboctaedro será, nas circunstâncias referidas, um icosaedro, não necessariamente regular (o icosaedro terá faces triangulares, oito regulares, a cinzento na figura seguinte, e outras 12 isósceles, a azul).



Se os doze pontos dividirem as doze arestas numa razão  $r = a/b$  (os três pontos de cada face a formar um  $\{3\}$  regular) podemos supor que  $a \geq b$ , sem perda de generalidade. Quanto maior for  $r$ , tanto mais pequenas serão as bases dos triângulos

isósceles, desaparecendo estes no limite; se fizermos  $r \rightarrow 1$ , o triângulo isósceles tende para um triângulo rectângulo e, no limite, cada par de triângulos formará metade das faces quadradas do cuboctedro.

Por continuidade e para algum  $r$ , os triângulos isósceles serão equiláteros e o icosaedro será, então, regular. Tal acontecerá se  $x = y$ , i. e.,  $a^2 - b^2 - ab = 0 \Rightarrow r = \tau$  (o número de ouro  $\tau = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  surgirá de novo adiante e a propósito do icosaedro).

No caso limite de  $r = 1$ , o icosaedro degenera num cuboctaedro com uma diagonal em cada face quadrada. Por outro lado, cada cubo de  $\left\{ \begin{matrix} 3 \\ 4,3 \end{matrix} \right\}$  aparecerá agora como uma figura com a simetria de um tetraedro regular. Se compararmos o politopo  $\Pi$  assim obtido com o  $\left\{ \begin{matrix} 3 \\ 4,3 \end{matrix} \right\}$ , podemos escrever que

$$N_0(\Pi) = 96$$

$$N_1(\Pi) = 288 + 144 \text{ (as 144 diagonais das faces quadradas)} = 432$$

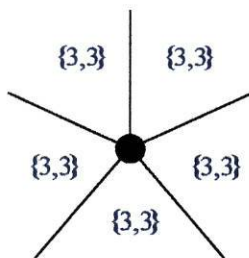
$$N_2(\Pi) = 96 + 4 \cdot 24 \text{ (4 faces de cada tetraedro regular inscrito nos cubos)} + 2 \cdot 144 \text{ (triângulos isósceles formados com as diagonais dos quadrados)} = 480$$

$$N_3(\Pi) = 120 \text{ (cada cubo gera um tetraedro regular e 4 não regulares)} + 24 \text{ (icosaedros, não necessariamente regulares)} = 144$$

Se  $r = \tau$ , os icosaedros são regulares, as faces são triângulos equiláteros e as pirâmides tetraedros regulares. Assim,

$$e\{3,4,3\} \rightarrow \begin{cases} N_0 = 96 \\ N_1 = 432 \\ N_2 = 480\{3\} \\ N_3 = 120\{3,3\} + 24\{3,5\} \end{cases}$$

A ideia de Gosset partiu de erigir uma pirâmide quadridimensional (na linha de pensamento já exposta no caso de  $\{3,4,3\}$ ) com base num  $\{3,5\}$  e com 20 células  $\{3,3\}$ , tantas quantas as faces de  $\{3,5\}$ . Usando cada um dos 24  $\{3,5\}$  de  $e\{3,4,3\}$  para bases de tais pirâmides – para cada  $\{3,5\}$  contabiliza-se um novo vértice, 12 novas arestas e 30 novos triângulos – e retirando-os da figura, obtemos um politopo com  $(96+24)$  vértices,  $(288+144+288)$  arestas,  $(96+96+288+720)$  faces triangulares e  $(24+96+480)$  células  $\{3,3\}$ . O politopo é, então, regular. Esquemáticamente,



$$\{3,3,5\} \rightarrow \begin{cases} N_0 = 120 \\ N_1 = 720 \\ N_2 = 1200 \\ N_3 = 600 \end{cases}$$

Por dualidade,  $\{5,3,3\}$  tem 600 vértices, 1200 arestas, 720 faces  $\{5\}$  e 120 células  $\{5,3\}$ .

### 3.3. CONSTRUÇÃO E REPRESENTAÇÃO PLANA DE UM 24-CÉLULAS

A representação plana de um politopo convexo regular quadridimensional, neste caso do auto-dual 24-células  $\{3,4,3\}$ , pode ser executada à custa das propriedades do citado politopo e das representações planas de poliedros convexos regulares.

A partir da representação de um  $\gamma_4$ , inscrevemos adequadamente (de forma dual) um octaedro regular  $\{3,4\}$  em cada uma das suas oito células cúbicas  $\gamma_3$ . Na figura 1, representou-se uma célula cúbica a azul e o octaedro pretendido a vermelho. Se construirmos os oito  $\{3,4\}$  de forma semelhante e removermos o  $\gamma_4$  original, formaremos a pretendida representação do  $\{3,4,3\}$ .

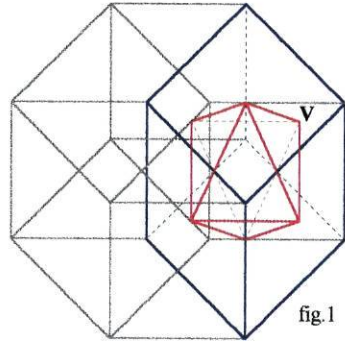


fig.1

Se atentarmos ao facto que cada face quadrada de  $\gamma_4$  ser comum a duas células, cada vértice V de um octaedro pertencerá também a outro octaedro (ver figuras 2 e 2a), ficando, assim, na presença de  $48:2 = 24$  vértices. Os oito octaedros possuem  $8 \cdot 12 = 96$  arestas,  $8 \cdot 12 = 96$  faces  $\{3\}$  e constituem oito das 24 células do politopo. As restantes 16 células  $\{3,4\}$  resultam da forma como se dispõem as oito originalmente traçadas.

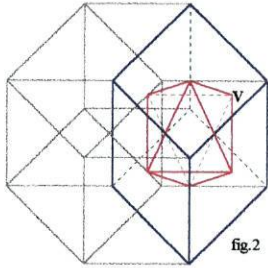


fig.2

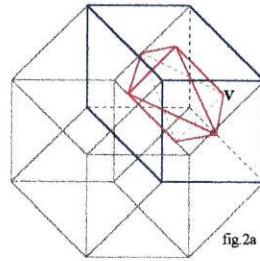


fig.2a

A construção final terá a seguinte representação (figura 3) em que, na figura 3a, se coloriu de forma diferente os três tipos (apenas foi traçado um dos dois octaedros de cada tipo) de representação plana dos 24 octaedros formados, células do  $\{3,4,3\}$ :

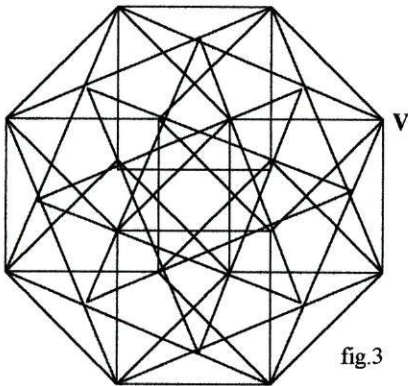


fig.3

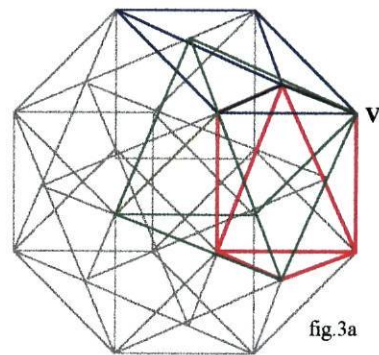


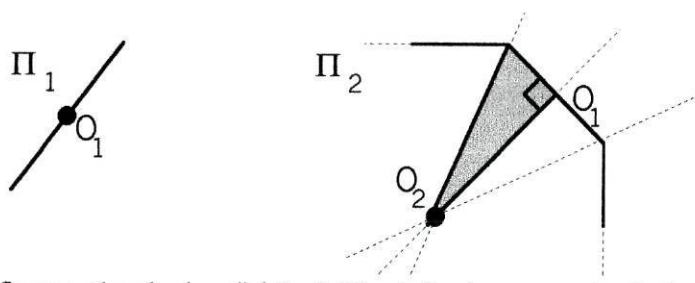
fig.3a

#### 4. SIMETRIAS DE UM POLITOPO REGULAR

Nos espaços em que estamos a trabalhar, podemos definir um produto interno (uma forma bilinear, simétrica, definida positiva) para originar uma norma e, a partir desta, uma métrica ou distância. Uma aplicação, definida em qualquer um daqueles espaços, que preserve as distâncias e seja sobrejectiva é designada por isometria.

Sustentando-nos no teorema de Leonardo (todo o grupo finito de isometrias tem pelo menos um ponto invariante), todos os polítopos convexos regulares têm um centro  $O_n$  a partir do qual podemos construir as esferas de raio  $R_i$  pelos centros de todos os  $\Pi_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n-1$ ). A primeira e a última destas esferas são a circum-esfera e a esfera inscrita.

Alguns conceitos são ainda necessários para determinarmos o grupo de simetria de um polítopo convexo regular. Em primeiro lugar, a divisão simplicial (em simplexes).



Na figura está realçada a divisão de  $\Pi_2 = \{p\}$  pelas suas rectas de simetria; o resultado serão  $2p$  triângulos rectângulos.

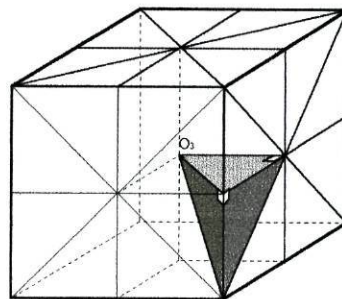
Se dividirmos  $\Pi_3 = \{p, q\}$  pelos seus planos de simetria, obteremos  $g$  tetraedros quadrirectangulares ( $g = 4 \times n^\circ$  de arestas de  $\{p, q\}$ ), em estreita ligação com  $O_3$  e as faces simplicialmente divididas. Analogamente, um polítopo convexo regular  $\Pi_n$  é dividido num determinado número de simplexes construídos a partir da ligação de  $O_n$  com as células simplicialmente divididas.

Um simplexo típico será  $O_0O_1\dots O_n$ , em que  $O_i$  é o centro de uma célula  $\Pi_{i+1}$  centrada em  $O_{i+1}$  ( $i = 0, 1, \dots, n-1$ ). Utilizando os números configuracionais – segundo a nomenclatura utilizada por H. M. Coxeter – representados por  $N_{j,k}$  e a significar que um elemento  $\Pi_j$  ( $k > j$ ) pertence a, ou ( $k < j$ ) contém,  $N_{j,k}$   $\Pi_k$ 's, podemos escrever

- a aresta é dividida em  $N_{10} = 2$  segmentos
- $\{p\}$  é dividido em  $N_{21} \cdot N_{10}$  triângulos
- $\{p, q\}$  é dividido em  $N_{32} \cdot N_{21} \cdot N_{10}$  tetraedros
- ...
- $\{p, q, \dots, v, w\}$  é dividido em  $g_{p,q,\dots,v,w} = N_{n-1} \cdot N_{n-1,n-2} \cdot \dots \cdot N_{21} \cdot N_{10}$  simplexes<sup>i</sup>.

Na figura está destacado um dos 48 tetraedros quadri-rectangulares, resultado da divisão simplicial do cubo  $\{4, 3\}$ . Três dos quatro ângulos rectos do tetraedro da figura estão assinalados (o quarto está definido na face oculta da representação). Note-se que

$$N_{32}N_{21}N_{10} = 6.4.2 = 48 = 8.3.2 = N_0N_{01}N_{12}$$



<sup>i</sup> Recorde-se que  $N_j$  representa o número de vértices ( $j=0$ ), arestas ( $j=1$ ), faces ( $j=2$ ), 3-células ( $j=3$ ), ..., do polítopo em causa.

Nos poliedros convexos regulares tridimensionais é expedita a contagem dos seus números configuracionais, permitindo-nos construir a seguinte tabela:

	{3, 3}	{4, 3}	{3, 4}	{5, 3}	{3, 5}
N <sub>10</sub>	2	2	2	2	2
N <sub>21</sub>	3	4	3	5	3
N <sub>2</sub>	4	6	8	12	20
N <sub>0</sub>	4	8	6	20	12
N <sub>01</sub>	3	3	4	3	5
N <sub>12</sub>	2	2	2	2	2
P	24	48	48	120	120

- notas: i) os poliedros duais têm o mesmo produto, P, de termos de n<sup>os</sup> configuracionais.  
 ii) os números configuracionais N<sub>21</sub> e N<sub>01</sub> de {p,q} são p e q, respectivamente

As igualdades N<sub>01</sub>= q = N<sub>02</sub> e N<sub>21</sub>= p = N<sub>20</sub> são facilmente verificáveis. Na presença destes elementos, estamos em condições de poder apresentar os números configuracionais sob uma forma matricial. Nos sólidos platónicos e usando as relações já obtidas, teremos a seguinte representação:

$$\begin{bmatrix} N_0 & N_{01} & N_{02} \\ N_{10} & N_1 & N_{12} \\ N_{20} & N_{21} & N_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_0 & q & q \\ 2 & N_1 & 2 \\ p & p & N_2 \end{bmatrix}$$

Um dos resultados importantes que os números configuracionais permitem determinar é a ordem dos grupos de simetria dos politopos. O número g<sub>p,q,...,v,w</sub> representa exactamente a referida ordem de [p,q,...,v,w]<sup>ii</sup>.

Uma expressão alternativa para a ordem do grupo poderá ser procurada a partir do subgrupo de índice N<sub>0</sub> que mantém o vértice O<sub>0</sub> invariante. A ordem do grupo de simetria do figura do vértice {q,...,v,w} será g<sub>q,...,v,w</sub> = g<sub>p,q,...,v,w</sub> / N<sub>0</sub>. Se aplicarmos este raciocínio sucessivamente, obteremos

$$g_{p,q,\dots,v,w} = N_0 \cdot N_{01} \cdot N_{12} \cdot \dots \cdot \underbrace{N_{n-2,n-1}}_2 \text{ iii}$$

O cálculo destas ordens de grupos permite-nos determinar, por exemplo, o número  $N_{p,\dots,r}^{p,\dots,r}$  de {p,...,r} existentes num politopo convexo regular {p,...,r,s,t,u,...,w}.

Já vimos que a figura do vértice {q,...,w} indica a forma como o vértice está rodeado. O politopo {r,...,w}, “figura do vértice da figura do vértice”, ou segunda figura do vértice, indicará a forma como uma aresta é rodeada. Assim, o subgrupo

<sup>ii</sup> A prova faz-se por indução. O grupo de simetria de Π<sub>1</sub> tem ordem N<sub>0</sub>=2 - as duas permutações  $\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}$  e  $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ . Suponhamos válido para a dimensão (n-1), i. e., o grupo de simetria da célula

{p,q,...,v} tem ordem g<sub>p,q,...,v</sub> = N<sub>n-1,n-2</sub> ... N<sub>21</sub>·N<sub>10</sub> = g<sub>p,q,...,v,w</sub> / N<sub>n-1</sub>. No grupo de simetria de todo o politopo, esta ocorrência está ligada a um subgrupo de índice N<sub>n-1</sub>, o subgrupo que tem O<sub>n-1</sub> invariante. Então, as N<sub>n-1</sub> classes associadas correspondem às N<sub>n-1</sub> células e g<sub>p,q,...,v,w</sub> é a ordem do grupo.

<sup>iii</sup> Esta igualdade permite justificar o realçado na tabela anterior dos números configuracionais dos poliedros convexos regulares tridimensionais: N<sub>01</sub> de {p,q} é igual a q.

$[p, q, r, \dots, w]$  que mantém invariantes todos os pontos da aresta é  $[r, \dots, w]$ , de ordem  $g_{r, \dots, w}$ . Convém não esquecer que existe ainda um subgrupo de ordem 2, um subgrupo isomorfo ao grupo de simetria da própria aresta. Então, o subgrupo completo que deixa  $O_1$  invariante é o produto directo dos dois subgrupos atrás mencionados e

$$2 \cdot g_{r, \dots, w} = g_{p, q, r, \dots, w} / N_1. \quad (I)$$

O mesmo raciocínio permite obter uma generalização e afirmar que

$$N_{p, \dots, r, s, t, u, \dots, w}^{p, \dots, r} = \frac{g_{p, \dots, r, s, t, u, \dots, w}}{g_{p, \dots, r} \cdot g_{u, \dots, w}}.$$

O subgrupo que deixa o elemento  $\{p, \dots, r\}$  invariante é o produto directo  $[p, \dots, r] \times [u, \dots, w]$ , em que o primeiro factor é isomorfo ao grupo de simetria desse elemento e o segundo mantém invariantes todos os seus pontos.

Analisemos alguns exemplos.

No caso dos simplexos regulares,  $\alpha_n$ , a ordem dos respectivos grupos é um número factorial em virtude de  $N_k = \binom{n+1}{k+1}$ .

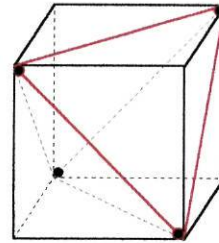
Nos polígonos convexos regulares  $\{p\}$ ,  $g_p = 2p$  (pois  $N_0 = N_1 = p = g_p/2$ ). Se se tratar de  $\{p, q\}$ , concluímos que:

$$N_2 = g_{p,q}/g_p \quad N_1 = g_{p,q}/4 \quad N_0 = g_{p,q}/g_q \quad g_{p,q} = \frac{4}{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{2}} \quad v$$

A verificação dos casos tridimensionais leva-nos a estabelecer algumas igualdades relacionadas com os subgrupos **T**, **O** e **I** das isometrias directas<sup>vi</sup> dos sólidos platónicos:

$$\begin{aligned} g_{\{3,3\}} &= 2 \cdot q \cdot N_0 = \mathbf{24} = 2 \cdot O(\mathbf{T}) \quad vii \\ g_{\{4,3\}} &= g_{\{3,4\}} = \mathbf{48} = 2 \cdot O(\mathbf{O}) \\ g_{\{5,3\}} &= g_{\{3,5\}} = \mathbf{120} = 2 \cdot O(\mathbf{I}) \end{aligned}$$

A observação dos sólidos em causa permite escrever  $\mathbf{T} \subset \mathbf{O}$  e  $\mathbf{T} \subset \mathbf{I}$ . Repare-se o que se passa, observando a figura e a título de exemplo, com  $\{3,3\}$  e  $\{4,3\}$ . Confirma-se, assim, que  $O(\mathbf{T})|O(\mathbf{O})$  e  $O(\mathbf{T})|O(\mathbf{I})$ .



<sup>v</sup> Para determinar a ordem do grupo usou-se a conhecida igualdade de Euler:  $N_0 - N_1 + N_2 = 2$ .

<sup>vi</sup> Uma isometria tridimensional diz-se directa se se escrever como um número par de reflexões e, assim, pertencer ao grupo ortogonal especial  $SO(3)$ , um subgrupo do grupo linear geral. O grupo das isometrias contém também as inversas visto que existe pela menos um plano de simetria em cada um dos sólidos platónicos.

<sup>vii</sup>  $O(\mathbf{T})$  significa a ordem do grupo **T**.

No caso de  $\{p,q,r\}$ , sabemos que  $g_{p,q,r} = g_{p,q} \cdot N_3$ , bastando conhecer o número de 3-células do politopo em causa. Em alternativa, porque  $g_{p,q,r} = g_{q,r} \cdot N_0$ , o conhecimento do número de vértices fornecerá também a ordem do grupo. Analisando caso a caso,

$$\begin{aligned} \alpha_4 = \{3,3,3\} &\rightarrow g_{3^3} = 5 \cdot g_{3^2} = 5 \cdot 24 = \mathbf{120} \\ \beta_4 = \{3,3,4\} &\rightarrow g_{\{3,3,4\}} = 8 \cdot g_{\{3,4\}} = 8 \cdot 48 = \mathbf{384} = g_{\{4,3,3\}}^{\text{viii}} \\ 24\text{-células } \{3,4,3\} &\rightarrow g_{\{3,4,3\}} = 24 \cdot g_{\{4,3\}} = 24 \cdot 48 = \mathbf{1\ 152} \\ 120\text{-células } \{5,3,3\} &\rightarrow g_{\{5,3,3\}} = 600 \cdot g_{\{3,3\}} = 600 \cdot 24 = \mathbf{14\ 400} = g_{\{3,3,5\}}^{\text{viii}} \end{aligned}$$

Já vimos (I) que  $N_1 = \frac{g_{p,q,r,\dots,w}}{2 \cdot g_{r,\dots,w}}$ . Para estes politopos convexos regulares,

$N_1 = \frac{g_{p,q,r}}{2 \cdot g_r}$  e, atendendo às dualidades, calculamos os elementos que constam no seguinte quadro:

	$N_0$	$N_1$	$N_2$	$N_3$
$\alpha_4$	<b>5</b>	$120/(6 \cdot 2) = \mathbf{10}$	<b>10</b>	<b>5</b>
$\beta_4$	<b>8</b>	$384/(8 \cdot 2) = \mathbf{24}$	<b>32</b>	<b>16</b>
$\gamma_4$	<b>16</b>	$384/(6 \cdot 2) = \mathbf{32}$	<b>24</b>	<b>8</b>
$\{3,4,3\}$	<b>24</b>	$1152/(6 \cdot 2) = \mathbf{96}$	<b>96</b>	<b>24</b>
$\{5,3,3\}$	<b>600</b>	$14400/(6 \cdot 2) = \mathbf{1200}$	<b>720</b>	<b>120</b>
$\{3,3,5\}$	<b>120</b>	$14400/(10 \cdot 2) = \mathbf{720}$	<b>1200</b>	<b>600</b>

As faces continuam a ter tantos vértices quantas as arestas ( $N_{20} = N_{21} = p$ ), uma aresta é comum a tantas faces como células ( $N_{12} = N_{13} = r$ ), uma aresta tem dois vértices e uma face pertence simultaneamente a duas células ( $N_{10} = N_{23} = 2$ ) e a célula tem tantos vértices, arestas e faces quantos os mesmos elementos de  $\{p,q\}$  ( $N_{3i} = N_i$  de  $\{p,q\}$ ).

De  $g_{p,q,r} = N_0 \cdot N_{01} \cdot N_{12} \cdot 2$ , tiramos que  $N_{01} = \frac{g_{p,q,r}}{2rN_0}$  e, então,

$\alpha_4$	$\beta_4$	$\gamma_4$	$\{3,4,3\}$	$\{5,3,3\}$	$\{3,3,5\}$
$N_{01} = 4$	$N_{01} = 6$	$N_{01} = 4$	$N_{01} = 8$	$N_{01} = 4$	$N_{01} = 12$

Repare-se que o número de arestas comuns a um vértice,  $N_{01}$ , é o número de vértices da figura do vértice do politopo, i. e.,  $N_{01} = N_0$  de  $\{q,r\}$ . Analogamente, o número de faces (e células) comuns a um vértice,  $N_{02}$  (e  $N_{03}$ ), é o número de arestas (e faces) da figura do vértice.

<sup>viii</sup> A igualdade é devida à dualidade (pode-se confirmar:  $g_{\{4,3,3\}} = 16$ .  $g_{\{3,3\}} = 16 \cdot 24 = 384$ ;

$g_{\{3,3,5\}} = 120$ .  $g_{\{3,5\}} = 120 \cdot 120 = 14\ 400$ )

Em suma,  $N_{0i} = N_{i-1}$  de  $\{q,r\}$ .<sup>ix</sup>

À semelhança do que efectuámos no caso tridimensional, estamos, agora, em condições de apresentar a forma matricial dos números configuracionais dos politopos regulares convexos quadridimensionais:

$$\begin{bmatrix} N_0 & N_{01} & N_{02} & N_{03} \\ N_{10} & N_1 & N_{12} & N_{13} \\ N_{20} & N_{21} & N_2 & N_{23} \\ N_{30} & N_{31} & N_{32} & N_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_0 & N_0\{q,r\} & N_1\{q,r\} & N_2\{q,r\} \\ 2 & N_1 & r & r \\ p & p & N_2 & 2 \\ N_0\{p,q\} & N_1\{p,q\} & N_2\{p,q\} & N_3 \end{bmatrix}$$

Para completar as representações matriciais de números configuracionais dos politopos regulares convexos, falta considerar os casos das dimensões superiores a quatro. Sabemos que, em cada uma destas dimensões, existem apenas três politopos nas condições referidas: o  $n$ -simplexo regular  $\alpha_n$ , o hipercubo  $\beta_n$  e o seu dual,  $\gamma_n$ .

- i.  $\alpha_n = \left\{ \underbrace{3,3,\dots,3}_{n-1} \right\} \rightarrow g_{\alpha_{n-1}} = (n+1) \cdot g_{\alpha_{n-2}} = (n+1)!$
- ii.  $\beta_n = \left\{ \underbrace{3,3,\dots,3,4}_{n-2} \right\} \rightarrow g_{\beta_n} = 2^n \cdot g_{\beta_{n-2}} = 2^n \cdot n!$ , visto que  $\beta_n$  tem  $2^n$  células  $\alpha_{n-1}$
- iii.  $g_{\beta_n} = g_{\gamma_n} = 2^n \cdot n!$

<sup>ix</sup> A seguir, apresenta-se o quadro-resumo dos politopos quadridimensionais em causa:

	$N_0$	$N_1$	$N_2$	$N_3$	$N_{10}$	$N_{21}$	$N_{32}$	$N_{01}$	$N_{12}$	$N_{23}$	$N_{13}$	$N_{31}$	$N_{02}$	$N_{20}$	$N_{03}$	$N_{30}$
$\alpha_4$	5	10	10	5	2	3	4	4	3	2	3	6	6	3	4	4
$\beta_4$	8	24	32	16	2	3	4	6	4	2	4	6	12	3	8	4
$\gamma_4$	16	32	24	8	2	4	6	4	3	2	3	12	6	4	4	8
$\{3,4,3\}$	24	96	96	24	2	3	8	8	3	2	3	12	12	3	6	6
$\{3,3,5\}$	120	720	1200	600	2	3	4	12	5	2	5	6	30	3	20	4
$\{5,3,3\}$	600	1200	720	120	2	5	12	4	3	2	3	30	6	5	4	20

## 5. PAVIMENTAÇÕES E UNIDADES DE ÁLGBRAS

Neste capítulo serão abordadas as pavimentações regulares, isto é, cujas células são regulares e iguais, dos espaços de dimensão 2, 3 e 4. Como já vimos, caso a dimensão do espaço seja 5 ou superior, há apenas uma pavimentação regular,  $\delta_n$  ( $n > 5$ ).

O caso bidimensional já foi abordado no final do capítulo 2. Recorde-se que, no plano, existem três pavimentações regulares:  $\{6,3\}$ ,  $\{4,4\} = \delta_3$  e  $\{3,6\}$ .

Uma pavimentação sólida tridimensional é um conjunto infinito de poliedros que preenchem a totalidade do espaço e que se intersectam apenas segundo as faces, sendo cada face comum a dois poliedros da pavimentação. Se as células são poliedros regulares  $\{p,q\}$ , então o número de células que se dispõem em torno de cada aresta é constante uma vez que são iguais os ângulos diedrais entre as duas faces de cada poliedro incidentes com essa aresta, para todos os poliedros. Se tivermos um número  $r$  de células em torno de cada aresta, este número  $r$  tem de ser o mesmo para cada aresta em virtude da necessidade de um ângulo diedral de  $\frac{2\pi}{r}$  para a célula. Como o cubo é o único poliedro regular cujo ângulo diedral é um submúltiplo de  $2\pi$ , então  $\{4,3,4\} = \delta_3$  é a única pavimentação sólida regular, ficando  $\mathbb{R}^3$  repleto de cubos, oito em comum com cada vértice.

Consideremos, agora, o caso de  $\mathbb{R}^4$ . A partir da já conhecida pavimentação  $\{4,3,3,4\} = \delta_5$  (o espaço em causa repleto de hipercubos, 16 a partilharem cada vértice), construamos uma nova figura a partir de cada hipercubo  $\gamma_4$ . Se tomarmos para vértices da nova figura os pontos médios das arestas de cada hipercubo  $\gamma_4$ , estaremos a “truncar”

o hipercubo e obteremos  $\left\{ \begin{array}{c} 4 \\ 3,3,4 \end{array} \right\}$ . Se optarmos pela truncagem em que os vértices são

os centros das 24 faces de  $\gamma_4$ , estaremos na presença da figura  $\left\{ \begin{array}{c} 3,4 \\ 3,4 \end{array} \right\}$ , composta

unicamente por  $\{3,4,3\}$ , o politopo regular 24-células. Aliás, se repararmos na construção deste politopo exibida no final do capítulo 3, chegamos à conclusão que

$\left\{ \begin{array}{c} 3,4 \\ 3,4 \end{array} \right\}$  é composta somente por  $\{3,4,3\}$ . Trata-se, então, de uma pavimentação regular e

$\left\{ \begin{array}{c} 3,4 \\ 3,4 \end{array} \right\} = \{3,4,3,3\}$  (os centros das suas células são os vértices do dual  $\{3,3,4,3\}$ ).

Assim,  $\mathbb{R}^4$  pode ser preenchido por hipercubos  $\gamma_4$ , 24-células  $\{3,4,3\}$  ou hiperoctaedros  $\beta_4$ .

Deste modo, concluímos que existem três formas de preencher o plano ou o espaço tetradimensional com politopos regulares de dimensão 2 ou 4, respectivamente, e apenas uma para o caso do espaço tridimensional.

Vamos agora observar que existem ligações entre as figuras dos vértices das pavimentações  $\{4,4\} = \delta_3$  e  $\{3,3,4,3\}$  e os elementos inteiros de duas álgebras associativas sobre os números reais.

Uma álgebra é, por definição, um espaço vectorial  $V$  sobre um corpo  $K$  em que o produto entre vectores é definido de forma a que

$$\forall u, v, w \in V \quad \forall a \in K \quad \begin{array}{l} 1. (au)v = a(uv) = u(av) \\ 2. (u+v)w = (uw) + (vw) \\ 3. w(u+v) = (wu) + (wv) \end{array}$$

A álgebra diz-se associativa se o produto o for (sendo, então, um anel). Estamos particularmente interessados em duas álgebras associativas sobre  $\mathbb{R}$ : a dos números complexos  $\mathbb{C}$  e a dos quaterniões  $\mathbb{H}$ .

### 5.1. Álgebra real (associativa) dos números complexos

$\mathbb{C}$  é a álgebra real associativa gerada por 1 e  $i$ , com  $i^2 = -1$ . Dado  $z \in \mathbb{C}$ ,  $z = x + yi$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ), define-se o conjugado de  $z$  por  $\bar{z} = x - yi$  e a sua norma por  $\|z\| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

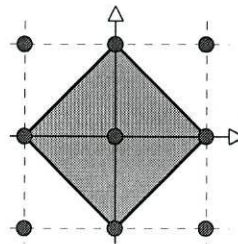
Um conjunto de elementos de uma álgebra denomina-se um conjunto de elementos inteiros se satisfizer as quatro condições seguintes:

- Para cada elemento, os coeficientes de  $x^2 - 2a_s x + \|a\| = 0$ , com  $\begin{cases} 2a_s = a + \bar{a} \\ \|a\| = a\bar{a} \end{cases}$ , são números inteiros;
- o conjunto é fechado para a subtração e produto;
- o conjunto contém 1;
- o conjunto não é um subconjunto de um conjunto maior (no sentido da inclusão) satisfazendo as três primeiras condições.

Os elementos inteiros da álgebra  $\mathbb{C}$  são denominados inteiros de Gauss:  $\mathbb{Z}[i] = \{a_0 + a_1 i, a_j \in \mathbb{Z}\}$ . As unidades – os elementos de norma unitária – são as soluções de  $a_0^2 + a_1^2 = 1$ , i. e.,  $\pm 1$  e  $\pm i$ , a que correspondem os pontos  $(\pm 1, 0)$  e  $(0, \pm 1)$  no referencial cartesiano  $\langle O, 1, i \rangle$ .

A representação dos elementos de  $\mathbb{Z}[i]$  no mesmo referencial corresponde aos vértices da pavimentação regular  $\delta_3 = \{4, 4\}$  e os pontos representativos das unidades formam um quadrado – a figura do vértice da pavimentação  $\delta_3$  – de aresta igual a  $\sqrt{2}$ , como se destacou na figura seguinte:

Alguns dos elementos de  $\mathbb{Z}[i]$  estão representados na figura por pequenos discos e o quadrado destacado é a figura do vértice de outra pavimentação  $\{4, 4\}$ , de aresta dupla à utilizada nesta figura.



### 5.2. Álgebra real (associativa) dos quaterniões

$\mathbb{H}$  é a álgebra real associativa gerada por 1,  $i$ ,  $j$  e  $k$ , com

$i^2 = j^2 = k^2 = -1$	$ij = -ji = k$	$jk = -kj = i$	$ki = -ik = j$
------------------------	----------------	----------------	----------------

[ $\mathbb{H}$  é usualmente designada por álgebra dos quaterniões, ou dos hipercomplexos]

Dado  $h \in \mathbb{H}$ ,  $h = a + bi + cj + dk$  ( $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ), define-se o conjugado de  $h$  por  $\bar{h} = a - bi - cj - dk$  e a sua norma por  $\|h\| = \sqrt{h\bar{h}} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$ .

O conjunto  $I_h$  dos elementos inteiros desta álgebra é constituído pelos quaterniões cujos coeficientes reais são inteiros ou metades de inteiros ímpares:

$$I_h = \{ a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k, a_i \in \mathbb{Z} \text{ ou } 2a_i \in \mathbb{Z} - 2\mathbb{Z} \}$$

As unidades desta álgebra são as soluções de  $a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$ :

$$a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1 \Leftrightarrow \underbrace{a_i = \pm 1 \text{ e } a_j = 0, \forall j \neq i}_{8 \text{ unidades}} \text{ ou } \underbrace{a_i = \pm \frac{1}{2}, \forall i}_{16 \text{ unidades}}$$

A representação destas 24 unidades no referencial cartesiano  $\langle O, 1, i, j, k \rangle$  determina os pontos  $(\pm 1, 0, 0, 0)$  e as suas permutações cíclicas e  $\frac{1}{2}(\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1)$  que constituem os 24 vértices do politopo  $\{3, 4, 3\}$ , politopo este que, como já vimos, é a figura do vértice da pavimentação regular  $\{3, 3, 4, 3\}$ .

Se fizermos 
$$\begin{cases} 2l_1 = 1 + k \\ 2l_2 = 1 - k \\ 2l_3 = i + j \\ 2l_4 = i - j \end{cases}, \text{ poderemos ainda escrever as 24 unidades da álgebra à}$$

custa dos  $l_i$  visto que

$$1 = l_1 + l_2; i = l_3 + l_4; j = l_3 - l_4; k = l_1 - l_2 \text{ e } \frac{1}{2}(1 + i + j + k) = l_1 + l_3$$

Assim,  $(\pm l_n \pm l_m)$ ,  $n \neq m$ , são as 24 expressões que representam as unidades desta álgebra.

Também os quaterniões inteiros podem ter uma expressão mais simples, podendo-se escrever  $I_h = \{ \sum_{i=1}^4 x_i l_i, x_i \in \mathbb{Z} \text{ e } \sum_{i=1}^4 x_i \in 2\mathbb{Z} \}$ . Basta notar que, em

$\sum_{i=1}^4 x_i l_i = \frac{1}{2}((x_1 + x_2) + (x_3 + x_4)i + (x_3 - x_4)j + (x_1 - x_2)k)$ , cada  $x_i$  aparece sempre num número par de vezes.

## 6. RELAÇÕES ENTRE UMA EQUAÇÃO DIOFANTINA E ALGUNS POLIEDROS

Neste capítulo, em que nos situaremos em  $\mathbb{R}^3$  (munido de um referencial ortonormado e com a métrica usual, salvo se for outra a indicação) serão apresentados alguns resultados relacionados com os poliedros convexos regulares<sup>i</sup> na procura de todas as soluções inteiras para a equação diofantina

$$x^2 + y^2 + z^2 = n, n \in \mathbb{N} \quad (I)$$

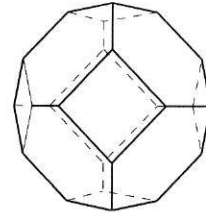
É imediato verificar que, para  $n = 1$ , temos seis soluções  $[(\pm 1, 0, 0), (0, \pm 1, 0) \text{ e } (0, 0, \pm 1)]$ , tantas quantas o número de vértices e a corresponder às coordenadas dos mesmos vértices do octaedro regular  $\{3, 4\}$ .

Se fizermos  $n = 2$ , as 12 soluções  $[(\pm 1, \pm 1, 0), (\pm 1, 0, \pm 1) \text{ e } (0, \pm 1, \pm 1)]$  são duas vezes mais que as anteriores e representam os vértices do cuboctaedro  $\left\{ \begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix} \right\}$ , um poliedro convexo quasi-regular.

Os oito pontos  $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ , vértices do cubo  $\{4, 3\}$ , constituem a solução da equação em causa quando fazemos  $n = 3$ .

As escolhas feitas para  $n$  decorrem naturalmente das coordenadas dos poliedros invocados: basta que  $n$  tome o valor do quadrado da norma do vector associado a cada vértice e ao centro do poliedro, aqui localizado na origem do referencial. Aliás, uma interpretação particular da equação (I) é, exactamente, a procura de esferas (do seu raio) que contenham todos os vértices de cada um dos poliedros convexos regulares.

Outras soluções inteiras surgem igualmente se  $n = 5$  e, então, obteremos as coordenadas dos 24 vértices de  $t\{3, 4\}$  - o octaedro truncado, com uma representação na figura ao lado - como solução.



<sup>i</sup> As coordenadas dos vértices dos poliedros convexos regulares tridimensionais (e, também, de dois outros poliedros convexos quasi-regular e de uma truncagem) são de cálculo simples e podem resumir-se no seguinte quadro:

poliedro	medida da aresta	$N_0$	coordenadas dos vértices
$\{3, 3\}$	$2\sqrt{2}$	4	(1, 1, 1), as 3 permutações cíclicas [p.c.] de (1, -1, -1)
$\{4, 3\}$	2	8	$(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$
$\{3, 4\}$	$\sqrt{2}$	6	$(\pm 1, 0, 0), (0, \pm 1, 0) \text{ e } (0, 0, \pm 1)$
$\{5, 3\}$	$2\tau^{-1} = 2(\tau - 1)$	20	$(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ e as p.c. de $(0, \pm \tau^{-1}, \pm \tau)$
$\{3, 5\}$	2	12	$(0, \pm \tau, \pm 1)$ e as suas p.c.
$\left\{ \begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix} \right\}$	$\sqrt{2}$	12	$(0, \pm 1, \pm 1)$ e as suas p.c.
$\left\{ \begin{matrix} 3 \\ 5 \end{matrix} \right\}$	$2\tau^{-1} = 2(\tau - 1)$	30	p.c. de $(\pm \tau, 0, 0)$ e de $(\pm \tau, \pm \tau^{-1}, \pm 1)$
$t\{3, 4\}$	$\sqrt{2}$	24	p.c. de $(\pm 2, \pm 1, 0)$ e de $(\pm 1, \pm 2, 0)$

Refira-se que a equação  $x^2 + y^2 + z^2 = n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , é invariante no caso de se operar uma inversão na origem  $[(x,y,z) \rightarrow (-x,-y,-z)]$  e, então, só poderemos encontrar como soluções os vértices de poliedros com simetria central. As coordenadas dos vértices do tetraedro regular  $\{3,3\}$  não podem, assim, fornecer a totalidade das soluções da equação referida.

### 6.1. O CASO DO ICOSAEDRO

O icosaedro  $\{3,5\}$  e os poliedros com ele relacionados mantêm-se constantes quando sujeitos a rotações convenientes de amplitude  $2\pi/5$ ; as coordenadas destes poliedros estão relacionadas com  $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \frac{1}{2\tau}$ , com  $\tau$  a representar o número de ouro  $[\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}]$  e a verificar, entre outras, as seguintes igualdades:  $\tau^2 = \tau + 1$  e  $\tau^{-1} = \tau - 1$ .

Como reconciliar a natureza inteira das soluções pretendidas e a irracionalidade das coordenadas do icosaedro e do seu dual?

Em primeiro lugar, recordemos que  $\xi$  diz-se um número algébrico se satisfizer uma equação (II) algébrica  $\sum_{i=0}^n a_i \xi^{n-i} = 0$ , com  $a_i \in \mathbb{Z}$ , nem todos nulos. Se  $a_0 = 1$ , então  $\xi$  diz-se um número inteiro algébrico, uma definição que surge de forma natural ao estendermos o conceito dos inteiros “ordinários”  $\mathbb{Z}$  a partir dos números racionais (se  $\xi \in \mathbb{Q}$ ,  $\xi = \frac{a}{b}$  e satisfaz a equação  $b\xi - a = 0$ ;  $\xi \in \mathbb{Z}$  se  $b = 1$ )<sup>ii</sup>. Se  $n = 2$  na equação (II),  $\xi$  diz-se um número quadrático (e será um número inteiro algébrico quadrático se  $a_0 = 1$ )<sup>iii</sup>.

Para respondermos à questão levantada, necessitamos de outras estruturas para substituir  $\mathbb{Q}$  e o seu anel de inteiros  $\mathbb{Z}$ . A opção recai, naturalmente, no corpo de números quadráticos  $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$  e no seu anel de inteiros algébricos  $\mathbb{Z}[\tau]$ .

Em  $\mathbb{Q}[\sqrt{5}] = \{a+b\sqrt{5}; a,b \in \mathbb{Q}\}$ , à semelhança de outros subanáis similares de  $\mathbb{C}$  ( $\mathbb{Q}[\sqrt{m}] = \{a+b\sqrt{m}; a,b \in \mathbb{Q}\}$  é subcorpo de  $\mathbb{C}$ ,  $\forall m$  livre de quadrados), podemos determinar os seus inteiros algébricos.

Tomemos  $z = \frac{x}{y} + \frac{u}{v}\sqrt{5}$ , um elemento genérico de  $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$ , com  $(x,y)=(u,v)=1$ ,

e definamos o operador “conjugação” (um automorfismo de  $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$ ):

<sup>ii</sup> Com base no que ficou exposto,  $i = \sqrt{-1}$  é um número inteiro algébrico ( $i^2 + 1 = 0$ ). Analogamente,

$$\omega = e^{\frac{2}{3}\pi i} = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3}) \text{ é outro número inteiro algébrico } (\omega^2 + \omega + 1 = 0).$$

<sup>iii</sup> Além dos exemplos referidos em <sup>ii</sup>, citem-se os números inteiros de Gauss,  $\mathbb{Z}[i]$ , e os de Eisenstein,  $\mathbb{Z}[\omega]$ . A saber,  $\mathbb{Z}[i] = \{\xi; \xi = a+bi; a,b \in \mathbb{Z}\}$  e  $\xi^2 - 2a\xi + a^2 + b^2 = 0$ ;

$$\mathbb{Z}[\omega] = \{\eta; \eta = a+b\omega; a,b \in \mathbb{Z}\} \text{ e } \eta^2 - (2a-b)\eta + a^2 - ab + b^2 = 0.$$

$$\sigma: \mathbb{Q}[\sqrt{5}] \rightarrow \mathbb{Q}[\sqrt{5}]$$

$$z \rightarrow \sigma(z) = \frac{x}{y} - \frac{u}{v}\sqrt{5}.$$

Os inteiros do anel – que designaremos por  $\mathbf{I}(5)$  – são os elementos do anel que verificam simultaneamente as condições  $[z + \sigma(z)] \in \mathbb{Z}$  e  $[z \cdot \sigma(z)] \in \mathbb{Z}$ . Então,

$$[z + \sigma(z)] \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{2x}{y} \in \mathbb{Z} \Rightarrow y = 2 \text{ ou } y = 1.$$

$$\text{Se } y = 1, x^2 - 5\frac{u^2}{v^2} \in \mathbb{Z} \Rightarrow v^2 \mid 5u^2 \Rightarrow v^2 \mid 5 \Rightarrow v = \pm 1. \text{ Logo, } \mathbb{Z}[\sqrt{5}] \subseteq \mathbf{I}(5).$$

$$\text{Se } y = 2, \frac{x^2}{4} - 5\frac{u^2}{v^2} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{x^2 v^2 - 20u^2}{4v^2} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 4v^2 \mid x^2 v^2 - 20u^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow 4 \mid x^2 v^2 \wedge v^2 \mid 20u^2 \Rightarrow (2 \mid x \vee 2 \mid v) \wedge v^2 \mid 20 \Leftrightarrow (2 \mid x \wedge v^2 \mid 20) \vee (2 \mid v \wedge v^2 \mid 20).$$

Assim, de  $2 \mid x$ , concluir-se-ia que  $x$  par, o que é absurdo visto que  $y$  par e  $(x,y) = 1$ . Logo,  $x$  ímpar. De  $2 \mid v$ , tira-se que  $v$  é par e, em virtude de  $v^2 \mid 20$ ,  $v = \pm 2$ . Como assumimos que  $(u,v) = 1$ , então  $u$  ímpar. No caso de  $y = 2$ , obtemos

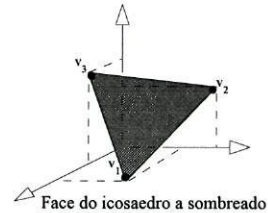
$$M = \left\{ \frac{1}{2}(x + u\sqrt{5}); x, u, \text{ ímpares} \right\} \subseteq \mathbf{I}(5).$$

Em jeito de conclusão,  $\mathbf{I}(5) = \mathbb{Z}[\sqrt{5}] \cup \left\{ \frac{1}{2}(x + u\sqrt{5}); x, u, \text{ ímpares} \right\}$ . Basta

provar que  $\mathbb{Z}[\sqrt{5}] \cup M = \mathbb{Z}[\tau]$ , i. e.,  $(\mathbb{Z}[\sqrt{5}] \cup M \supset \mathbb{Z}[\tau]) \wedge (\mathbb{Z}[\sqrt{5}] \cup M \subset \mathbb{Z}[\tau])$  para retornar ao problema inicial<sup>iv</sup>.

Refira-se que, no caso mais geral de  $\mathbb{Q}[\sqrt{m}]$ , a determinação de  $\mathbf{I}(m)$  segue um raciocínio similar ao utilizado no caso particular que estivemos a tratar<sup>v</sup>.

Voltando ao icosaedro, vamos utilizar uma outra base  $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$  de  $\mathbb{R}^3$  (construída a partir dos vértices de uma face do icosaedro, com os eixos não ortogonais entre si), pretendendo obter soluções de números inteiros algébricos  $N$ . Como  $v_1 = (\tau, 1, 0)$ ,  $v_2 = (0, \tau, 1)$  e  $v_3 = (1, 0, \tau)$ , um ponto qualquer escreve-se



$$u = x.v_1 + y.v_2 + z.v_3 = (x\tau + z, y\tau + x, z\tau + y)$$

<sup>iv</sup> Tomemos  $f \in \mathbb{Z}[\tau]$ ,  $f = a + b\tau$ ,  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Se  $b$  par,  $f \in \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ ; caso contrário,  $f \in M$ . Logo,  $\mathbb{Z}[\tau] \subset \mathbf{I}(5)$ .

Seja, agora,  $g \in \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ ,  $g = a + b\sqrt{5} \Leftrightarrow g = (a-b) + 2b\tau \in \mathbb{Z}[\tau]$ ; por outro lado, se  $h \in M$ ,  $h = (x + u\sqrt{5})/2$ , com  $x = 2n+1$  e  $y = 2m+1$  ( $m, n \in \mathbb{Z}$ ) e, então,  $h = (n+m) + \tau \in \mathbb{Z}[\tau]$ . Logo,  $\mathbb{Z}[\tau] \supset \mathbf{I}(5)$ .

<sup>v</sup> Apesar de se ter tomado a opção da procura particular dos inteiros algébricos do anel  $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$ , o conjunto  $\mathbf{I}(m)$  dos inteiros algébricos dos anéis  $\mathbb{Q}[\sqrt{m}]$ ,  $m$  livre de quadrados, são:

$$\rightarrow m \equiv 2, 3 \pmod{4} \Rightarrow \mathbf{I}(m) = \{a + b\sqrt{m}; a, b \in \mathbb{Z}\}$$

$$\rightarrow m \equiv 1 \pmod{4} \Rightarrow \mathbf{I}(m) = \{a + b\sqrt{m}; a, b \in \mathbb{Z} \text{ ou } a, b \text{ são metades de ímpares de } \mathbb{Z}\}$$

O quadrado da norma, à semelhança do que havíamos feito para os poliedros anteriores, é

$$\|u\|^2 = u \cdot u = (x^2 + y^2 + z^2)(2 + \tau) + (xy + yz + zx) \cdot 2\tau = N$$

O quadro seguinte mostra os valores de N para os vértices dos poliedros regulares convexos que pretendemos como solução da “nova” equação diofantina:

Cálculo de N	
{3,5}	$N = \tau^2 + 1 = \tau + 2$
{5,3}	$N = 1^2 + 1^2 + 1^2 = (\tau^{-1})^2 + \tau^2 = 3$

Para os dois poliedros referidos, a tabela seguinte mostra os resultados obtidos na resolução da equação (I), todos eles inteiros algébricos (tal como se esperava):

	x	y	z	u
{3,5}	$\pm 1$	0	0	$\pm v_1$
	0	$\pm 1$	0	$\pm v_2$
	0	0	$\pm 1$	$\pm v_3$
	$\pm(\tau - 1)$	$\mp 1$	$\pm(\tau - 1)$	$\pm(\tau, -1, 0)$
	$\mp 1$	$\pm(\tau - 1)$	$\pm(\tau - 1)$	$\pm(-1, 0, \tau)$
	$\pm(\tau - 1)$	$\pm(\tau - 1)$	$\mp 1$	$\pm(0, \tau, -1)$
{5,3}	$\pm(2 - \tau)$	$\pm(2 - \tau)$	$\pm(2 - \tau)$	$\pm(1, 1, 1)$
	$\pm(1 - \tau)$	$\pm 1$	0	$\pm(-1, 1, 1)$
	0	$\pm(1 - \tau)$	$\pm 1$	$\pm(1, -1, 1)$
	$\pm 1$	0	$\pm(1 - \tau)$	$\pm(1, 1, -1)$
	$\pm(\tau - 2)$	$\pm(\tau - 1)$	$\pm(\tau - 1)$	$\pm(0, \tau^{-1}, \tau)$
	$\pm(\tau - 1)$	0	$\mp 1$	$\pm(0, \tau^{-1}, -\tau)$
	$\pm(\tau - 1)$	$\pm(\tau - 2)$	$\pm(\tau - 1)$	$\pm(\tau, 0, \tau^{-1})$
	$\mp 1$	$\pm(\tau - 1)$	0	$\pm(-\tau, 0, \tau^{-1})$
	$\pm(\tau - 1)$	$\pm(\tau - 1)$	$\pm(\tau - 2)$	$\pm(\tau^{-1}, \tau, 0)$
	0	$\mp 1$	$\pm(\tau - 1)$	$\pm(\tau^{-1}, -\tau, 0)$

Em suma, a equação  $[x^2 + y^2 + z^2 = n]$  tem tantas soluções inteiras quantos os vértices dos cinco poliedros regulares convexos de  $\mathbb{R}^3$  (além de outros exemplos citados) desde que o valor inteiro algébrico do segundo membro da equação seja escolhido convenientemente e não tenhamos, necessariamente, de nos restringir à base canónica do espaço tridimensional.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] Coxeter, H. S. M., *Integral Cayley Numbers*  
Duke Mathematical Journal, Vol. **13**, 561-578
- [2] Coxeter, H. S. M., *Regular and Semiregular Polyhedra*  
Shapping Space – A Polyhedral Approach, Marjorie Senechal and George Fleck  
(Editors), Birkhauses Boston Inc – Cambridge, 67-79
- [3] Coxeter, H. S. M., *Regular Polytopes*, 3ª edição  
Dover Publications, Inc, Nova Iorque, 1973
- [4] Dean, Richard A., *Elementos of Abstract Algebra*  
John Wiley and Sons, Inc, Nova Iorque, 1966
- [5] Deskins, W. E., *Abstract Algebra*  
Dover Publications, Inc, Nova Iorque, 1995
- [6] Hardy, G. H. e Wright, E. M., *An Introduction to the Theory of Numbers*  
Clarendon Press, Oxford, 1938
- [7] Monson, Barry, *Uniform Polyhedra from Diophantine Equations*  
Shapping Space – A Polyhedral Approach, Marjorie Senechal and George Fleck  
(Editors), Birkhauses Boston Inc – Cambridge, 219-220

## OUTROS

- [8] Rego, Eduardo, Complementos de Geometria (aulas e apontamentos)  
Mestrado em Matemática-Fundamentos e Aplicações  
Dep. Matemática Pura, Fac. Ciências Univ. Porto
- [9] Machiavello, António, Complementos de Álgebra (aulas e apontamentos)  
Mestrado em Matemática-Fundamentos e Aplicações  
Dep. Matemática Pura, Fac. Ciências Univ. Porto
- [10] Swab, Eric, 24-Cell Construction  
<http://www.uccs.edu/~eswab/24-cell.htm>  
Universidade do Colorado em Colorado Springs