

Ana Cristina Azevedo Machado Oliveira

LOCALIZAÇÃO EM ANÉIS NOETHERIANOS NÃO COMUTATIVOS
E APLICAÇÕES AOS ANÉIS GRADUADOS



Departamento de Matemática Pura
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

2001

Ana Cristina Azevedo Machado Oliveira

LOCALIZAÇÃO EM ANÉIS NOETHERIANOS NÃO COMUTATIVOS
E APLICAÇÕES AOS ANEIS GRADUADOS



Tese submetida à Faculdade de Ciências da Universidade do Porto para a obtenção
do grau Mestre em Matemática - Fundamentos e Aplicações.

Departamento de Matemática Pura
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
Janeiro, 2001

Agradecimentos

À Doutora Paula Alexandra de Almeida Bastos Carvalho Lomp agradeço a orientação científica com que me acompanhou e a disponibilidade dispensada ao longo da realização deste trabalho.

Ao Professor Doutor Manuel Leite Arala Chaves agradeço toda a sua disponibilidade e preciosa ajuda.

Ao Dr. Christian Lomp agradeço a sua colaboração.

Agradeço à minha mãe, que sempre me apoiou.

À minha mãe.

Conteúdo

Introdução	iii
1 Preliminares	1
1.1 Conceitos gerais sobre anéis	1
1.2 Conceitos gerais sobre módulos	7
1.3 Séries filiadas	12
1.4 Ideais primitivos	16
1.5 R -submódulos essenciais	17
1.6 Módulos não singulares	19
1.7 Relações entre diferentes classes de anéis	22
1.8 Módulos injectivos	23
1.9 Módulos uniformes e dimensão de Goldie	25
1.10 Dimensão clássica de Krull	32
1.11 Alguns resultados sobre grupos	34
2 Anéis de Fracções	49
2.1 Construção de anéis de fracções	49
2.2 Anéis de Goldie	63
2.2.1 Torção de um módulo	74
2.3 Módulos de fracções	78
2.3.1 Extensão e contracção de módulos	83
3 Localização relativamente a ideais primos	93
3.1 Ligações entre ideais primos	94
3.2 A condição na segunda camada	101
3.3 Localização e dimensão clássica de Krull	125
3.4 Localização em cliques	131
3.5 A Propriedade de Artin-Rees	151
4 Anéis e módulos Graduados	165
4.1 Definições e alguns resultados preliminares	166
4.2 Submódulos gr-essenciais	173
4.3 Anéis com graduação não degenerada	178

4.4	Teoria de ideais em anéis fortemente graduados	193
4.5	Anéis de fracções graduados	200
5	Localização em anéis graduados	205
5.1	Anéis gr-Goldie	205
5.2	O Teorema de Goldie para alguns anéis graduados	217
5.3	Localização em anéis fortemente graduados	227
	Bibliografia	237

Introdução

É bem conhecido que, dados um anel comutativo R e um ideal primo P de R , é possível construir um anel de fracções R_P de R com respeito a $S = R \setminus P$. O processo de passagem de R para R_P designa-se por localização de R no ideal primo P . No caso particular de R ser um domínio comutativo, temos ainda que o anel de fracções de R com respeito a $S = R \setminus \{0\}$ é simples. No Teorema de Goldie, que data de 1958, é enunciado o análogo do resultado anterior, para o caso não comutativo. Goldie, num artigo publicado em 1958, demonstrou que, dado um anel de Goldie primo R , existe um anel Q tal que: - R é um subanel de Q ; - todos os elementos de $C_R(0)$ (o conjunto dos elementos regulares de R) são unidades de Q ; - todo o elemento de Q se escreve na forma ac^{-1} , para alguns $a \in R$, $c \in C_R(0)$; - Q é isomorfo a um anel de matrizes com entradas num anel de divisão, logo, é anel simples.

Ao contrário do que se passa com os anéis comutativos, verificaremos que nem sempre os ideais primos de anéis Noetherianos não comutativos são localizáveis. Tal deve-se à existência de certas “ligações” entre ideais primos.

Em 1982, Jategaonkar introduziu uma nova condição relativa a anéis Noetherianos - a condição na segunda camada. Esta é uma condição necessária para que os ideais primos de um anel Noetheriano não comutativo sejam classicamente localizáveis. Várias classes importantes de anéis Noetherianos satisfazem a condição na segunda camada, como, por exemplo, os anéis Artinianos, os anéis Noetherianos comutativos e os anéis de grupo da forma RG , onde R é anel Noetheriano comutativo ou R é anel Artiniano e onde G é um grupo que satisfaz uma propriedade especial - G tem uma série subnormais cujos quocientes são cíclicos ou finitos.

Os anéis de grupo constituem um caso especial de anéis graduados por grupo. Uma vez que os anéis de grupo da forma RG , onde R é anel Noetheriano comutativo ou R é anel Artiniano e onde G tem uma série subnormal cujos quocientes são cíclicos ou finitos, satisfazem a condição na segunda camada, é natural tentar desenvolver a teoria de localização para estes anéis de forma a obter anéis de fracções ainda graduados. Um dos primeiros teoremas cuja generalização poderia ser tentada é o Teorema de Goldie. Tal generalização foi obtida, para anéis graduados por grupos Abelianos, por Goodearl e Stafford em 2000.

Estudaremos, neste trabalho, o processo de localização em anéis Noetherianos

não comutativos com graduação trivial e em anéis graduados. No primeiro Capítulo, introduziremos noções fundamentais e resumiremos algumas propriedades importantes para o estudo que pretendemos fazer.

Nos segundo e terceiro Capítulos debruçar-nos-emos sobre o processo de localização em anéis Noetherianos não comutativos, tendo sempre como ponto de partida a teoria de anéis comutativos.

Indicaremos, no segundo Capítulo, um processo de construção de um anel de fracções à direita (respectivamente à esquerda) de um anel não comutativo R com respeito a um subconjunto multiplicativo especial X - um conjunto de denominadores à direita (respectivamente à esquerda) em R . Demonstraremos que, dado R , um anel de Goldie à direita semiprimo, o conjunto constituído pelos elementos regulares de R é um conjunto de denominadores à direita em R e o anel de fracções à direita correspondente é semisimples. Ainda nesse Capítulo introduzimos um processo de construção de um R -módulo de fracções de um R -módulo à direita M com respeito a um conjunto de denominadores à direita X em R e demonstraremos que, a menos de isomorfismo, os anéis de fracções à direita (respectivamente à esquerda) e os módulos de fracções são únicos.

As ligações entre ideais primos, a condição na segunda camada, o processo de localização de ideais primos e de conjuntos de ideais primos serão objecto de estudo do terceiro Capítulo. Na parte final desse Capítulo serão ainda introduzidas a propriedade de Artin Rees e a propriedade de Artin Rees muito forte. Tais propriedades desempenharão um papel fundamental no estudo da localização, em particular, no estudo da localização em anéis fortemente graduados.

No último Capítulo será dada uma ideia, necessariamente incompleta, de alguns desenvolvimentos do estudo da localização em anéis graduados. Nesse Capítulo serão focados dois pontos-chave: a existência de uma versão graduada do Teorema de Goldie e a localização em anéis fortemente graduados. Importa salientar que ainda está em aberto saber que anéis graduados admitem anéis de fracções graduados gr-semisimples (semisimples na classe dos anéis graduados). Várias tentativas têm sido feitas nesse sentido mas todas as condições suficientes não são obrigatoriamente necessárias.

O estudo de anéis graduados e, em particular, de anéis fortemente graduados, é de grande relevância, uma vez que algumas classes importantes de anéis - como os anéis de grupos ou os anéis de Laurent - admitem uma graduação forte, pelo que todos os resultados demonstrados para anéis fortemente graduados serão, em particular, válidos para estas classes de anéis.

Capítulo 1

Preliminares

Neste Capítulo introduzimos as noções gerais sobre anéis e módulos necessárias para a tese. Muitas das demonstrações serão neste Capítulo omitidas e podem ser encontradas em [14], [23] e [24].

1.1 Conceitos gerais sobre anéis

Neste trabalho designamos por anel um anel associativo, não necessariamente comutativo, com elemento identidade 1.

Como é habitual, designamos por **homomorfismo** entre estruturas algébricas da mesma natureza uma aplicação que preserva essa estrutura.

Designamos por **centro** de um anel R o subconjunto de R

$$\text{cen}(R) = \{r \in R : rs = sr, \text{ para todo } s \in R\}.$$

Dado um anel R , denotamos por $S \leq R$ um subanel S de R .

Se R é um anel que não contém ideais próprios não nulos, dizemos que R é anel **simples**. Dizemos que um anel R é **local** se R possuir apenas um ideal maximal. Observe-se que todo o anel simples é local, uma vez que possui um único ideal maximal - o ideal 0.

Introduzimos agora alguns exemplos clássicos de anéis não comutativos que serão mencionados ao longo deste trabalho.

Exemplo 1.1.1 *Consideremos um anel R e um grupo G . Designamos por RG o conjunto das expressões*

$$\left\{ \sum_{g \in G} r_g g : r_g \in R, g \in G \text{ e apenas um número finito de } r_g \text{ é tal que } r_g \neq 0 \right\}.$$

Podemos definir uma estrutura de R -módulo à direita em RG definindo a adição do seguinte modo:

$$\sum_{g \in G} r_g g + \sum_{g \in G} r'_g g = \sum_{g \in G} (r_g + r'_g) g$$

e definimos o produto por um escalar $r \in R$ da seguinte forma:

$$\left(\sum_{g \in G} r_g g \right) r = \sum_{g \in G} (r_g r) g.$$

Identificamos os elementos h de G com os elementos de RG da forma $\sum_{g \in G} r_g g$ tal que $r_g = 0$, para todo $g \in G \setminus \{h\}$, e $r_h = 1$. Identificamos ainda os elementos r de R com os elementos de RG da forma $\sum_{g \in G} r_g g$ tal que $r_g = 0$, para todo $g \in G \setminus \{e\}$, e $r_e = r$.

Munido da estrutura definida, RG é um R -módulo à direita tal que cada elemento $x \in RG \setminus \{0\}$ se escreve de forma única como uma soma finita do tipo $\sum_{i=1}^n r_{g_i} g_i$, onde $g_i \in G$ e r_{g_i} é um elemento não nulo de R , para todo $1 \leq i \leq n$.

Em seguida, definiremos uma estrutura de anel em RG . Para tal, definimos o produto de elementos de RG do seguinte modo:

$$\left(\sum_{g \in G} r_g g \right) \left(\sum_{h \in G} r_h h \right) = \sum_{t \in G} \left(\sum_{gh=t} r_g r_h \right) t.$$

Munido da estrutura definida, RG é um anel (com elemento identidade $1e$) que designamos por **anel de grupo**.

Observe-se que RG é um anel comutativo se e só se R for um anel comutativo e G um grupo Abelian.

Exemplo 1.1.2 Consideremos um anel R , um endomorfismo σ de R e uma variável x . Consideremos o conjunto das expressões

$$T = \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}_0} r_i x^i : r_i \in R \text{ e apenas um número finito de } r_i \text{ é tal que } r_i \neq 0 \right\}.$$

Definimos a adição em T do seguinte modo:

$$\sum_{i \in \mathbb{N}_0} r_i x^i + \sum_{i \in \mathbb{N}_0} r'_i x^i = \sum_{i \in \mathbb{N}_0} (r_i + r'_i) x^i.$$

O produto é definido em T , tendo em atenção as propriedades distributiva, associativa e a regra “ $xr = \sigma(r)x$, para todo $r \in R$ ”. Assim,

$$\left(\sum_{i \in \mathbb{N}_0} a_i x^i \right) \left(\sum_{j \in \mathbb{N}_0} b_j x^j \right) = \sum_{i,j \in \mathbb{N}_0} a_i \sigma^i(b_j) x^{i+j}.$$

O conjunto T munido da adição e produto definidos é um anel (com elemento identidade $1x^0$) que representamos por $R[x; \sigma]$.

Observe-se que $R[x; \sigma]$ só é um anel comutativo no caso de R ser um anel comutativo e $\sigma \equiv id$.

Ao longo deste trabalho designaremos por **anel de polinómios de R** e representaremos apenas por $R[x]$ o anel $R[x; id]$.

Exemplo 1.1.3 Sejam R um anel, σ um automorfismo de R e x uma variável. Consideremos o conjunto das expressões

$$T = \left\{ \sum_{i \in \mathbb{Z}} r_i x^i : r_i \in R \text{ e apenas um número finito de } r_i \text{ é tal que } r_i \neq 0 \right\}.$$

A adição em T é definida do seguinte modo:

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} r_i x^i + \sum_{i \in \mathbb{Z}} r'_i x^i = \sum_{i \in \mathbb{Z}} (r_i + r'_i) x^i.$$

O produto é definido em T , tendo em atenção as propriedades distributiva, associativa e a regra “ $x^i r = \sigma^i(r) x^i$, para todo $r \in R$, para todo $i \in \mathbb{Z}$, fazendo $\sigma^0 \equiv id$ ”. Assim, o produto é definido do seguinte modo:

$$\left(\sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i x^i \right) \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} b_j x^j \right) = \sum_{i, j \in \mathbb{Z}} a_i \sigma^i(b_j) x^{i+j}.$$

O conjunto T munido da adição e produto definidos é um anel que representamos por $R[x, x^{-1}; \sigma]$.

Exemplo 1.1.4 Sejam K um anel e θ uma variável. Consideremos

$$T = \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}_0} r_i \theta^i : r_i \in K \text{ e apenas um número finito de } r_i \text{ é tal que } r_i \neq 0 \right\}.$$

Podemos definir um produto em T utilizando a regra

$$\theta a = a\theta + \delta(a), \text{ onde } a \in K \text{ e } \delta(a) \in K.$$

Para o produto ser associativo tem de se verificar, para todos $a, b \in K$, $\theta(ab) = (\theta a)b$, logo,

$$(ab)\theta + \delta(ab) = (\theta a)b = (a\theta)b + \delta(a)b = ab\theta + a\delta(b) + \delta(a)b.$$

Cancelando $(ab)\theta$ e $ab\theta$ em ambos os membros, concluímos que

$$\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b), \text{ para todos } a, b \in K. \quad (1)$$

Para garantirmos a distributividade, temos também que

$$\delta(a + b) = \delta(a) + \delta(b), \text{ para todos } a, b \in K. \quad (2)$$

Uma aplicação $\delta : K \rightarrow K$ que satisfaça as propriedades **1)** e **2)**, para todos $a, b \in K$, designa-se por **derivação**. Podemos definir um produto para polinómios à esquerda em θ utilizando repetidamente a regra $\theta a = a\theta + \delta(a)$ (a demonstração de que o produto obtido é associativo pode ser encontrada em [14]). O conjunto T munido do produto descrito e da adição usual forma um anel que representaremos por $K[\theta, \delta]$.

Exemplo 1.1.5 Consideremos o anel $\mathbb{Q}$ e tomemos o anel de polinómios $\mathbb{Q}[x]$ definido em 1.1.2. Seja

$$\begin{aligned} d/dx : \quad \mathbb{Q}[x] &\rightarrow \mathbb{Q}[x] \\ \sum_{i=0}^n a_i x^i &\rightarrow \sum_{i=1}^n i a_i x^{i-1} \end{aligned}$$

A aplicação d/dx satisfaz as seguintes propriedades:

a) $d/dx(a + b) = d/dx(a) + d/dx(b)$, para todos $a, b \in \mathbb{Q}[x]$,

b) $d/dx(ab) = d/dx(a)b + ad/dx(b)$, para todos $a, b \in \mathbb{Q}[x]$,

pelo que d/dx é uma derivação de $\mathbb{Q}[x]$.

Consideremos o anel $\mathbb{Q}[x][\theta, d/dx]$. Por [14], Corolário 1.15, $\mathbb{Q}[x][\theta, d/dx]$ é anel simples.

Exemplo 1.1.6 Seja R um anel. Designamos por **anel oposto de R** e representamos por R^{op} o anel cujo conjunto base é o próprio R , mas algebrizado pela adição definida em R e pelo seguinte produto:

$$r \cdot_{op} s = sr, \text{ para todos } r, s \in R.$$

Observe-se que R^{op} é um anel comutativo se e só se R é um anel comutativo.

Exemplo 1.1.7 Seja G um grupo aditivo Abelian. Se considerarmos o conjunto E constituído pelos endomorfismos do grupo G , podemos definir uma estrutura de anel em E , considerando a adição e o produto em E como sendo, respectivamente, a adição usual de funções e a composição de funções. O anel assim construído será representado por $\text{End}_{\mathbb{Z}}(G)$.

Relembramos agora algumas definições básicas da Teoria de Anéis.

Um elemento a de um anel R diz-se **idempotente** se $a^2 = a$. Um elemento a de um anel R diz-se **nilpotente** se existir $k \in \mathbb{N}$ tal que $a^k = 0$. O elemento 0 é o

único elemento de R que é simultaneamente idempotente e nilpotente. O elemento 1 é um exemplo de um elemento de R que é idempotente e não nilpotente.

Dizemos que um elemento a de um anel R é **invertível à direita** (respectivamente à **esquerda**) se existir $b \in R$ tal que $ab = 1$ (respectivamente $ba = 1$). Um elemento $a \in R$ que é invertível à direita e à esquerda em R designa-se por **unidade** de R . O conjunto constituído pelas unidades de R é representado por $U(R)$.

No caso de todos os elementos não nulos de um anel R serem unidades dizemos que R é **anel de divisão**. Observe-se que, neste caso, se tem $aR = R$ e $Ra = R$, para todo $a \in R \setminus \{0\}$.

Um elemento não nulo a de um anel R diz-se um **divisor de zero à direita** se, existir $b \in R \setminus \{0\}$ tal que $ab = 0$ e a diz-se um **divisor de zero à esquerda** se, existir $b \in R \setminus \{0\}$ tal que $ba = 0$. O elemento não nulo a é um **divisor de zero** se for um divisor de zero à direita e um divisor de zero à esquerda. Um anel R cujos elementos não nulos não são divisores de zero designa-se por **domínio**.

Dizemos que um elemento a de um anel R é **normalizador** se $aR = Ra$. Observe-se que os elementos centrais e as unidades de R são exemplos de elementos normalizadores de R .

Dizemos que um ideal direito (ou esquerdo) I de um anel R é **principal** se I for gerado por um elemento $a \in R$ e dizemos que um anel R é um **anel de ideais direitos e esquerdos principais** se todos os ideais direitos e esquerdos de R forem principais.

Em seguida introduziremos uma nova classe de anéis - os anéis primos. Para tal, começamos por introduzir a definição de ideal primo.

Dizemos que um ideal próprio P de um anel R é **primo** se, para todos os ideais A, B de R , sempre que $AB \subseteq P$, então $A \subseteq P$ ou $B \subseteq P$.

Observe-se que afirmar que um ideal próprio P de um anel R é um ideal primo é equivalente a afirmar que, para quaisquer ideais direitos (respectivamente esquerdos) I, J de R tais que $IJ \subseteq P$, se tem $I \subseteq P$ ou $J \subseteq P$. Observe-se, ainda, que afirmar que um ideal próprio P de um anel R é um ideal primo é equivalente a afirmar que, para todos $a, b \in R$, $aRb \subseteq P$ implica $a \in P$ ou $b \in P$.

Dois ideais primos distintos P e Q dizem-se **incomparáveis** se $P \not\subseteq Q$ e $Q \not\subseteq P$.

Dizemos que um ideal primo P de um anel R é um **ideal primo minimal** se, para todo o ideal primo P' de R tal que $P' \subseteq P$, se tem $P' = P$.

Verificaremos, em seguida, que todo o ideal primo P de um anel R contém um ideal primo minimal. A demonstração é feita utilizando o dual do Lema de Zorn.

Lema 1.1.8 *Todo o ideal primo de um anel R contém um ideal primo minimal.*

Demonstração. Seja P um ideal primo de R e consideremos a família X

$$X = \{P' : P' \text{ é um ideal primo de } R \text{ e } P' \subseteq P\}$$

ordenada pela relação inclusão.

Observe-se que, como $P \in X$, $X \neq \emptyset$. Provaremos, em seguida, que toda a cadeia descendente de elementos de X possui um minorante em X .

Sejam Y uma cadeia de elementos de X e $Z = \bigcap_{P' \in Y} P'$. Assim definido, Z é um ideal próprio de R . Sejam $a, b \in R$ tais que $aRb \subseteq Z$ e suponhamos que $a \notin Z$; então existe $P_1 \in Y$ tal que $a \notin P_1$. Uma vez que P_1 é um ideal primo de R e $aRb \subseteq P_1$, concluímos que $b \in P_1$. Consequentemente, $b \in P^*$, para todo o ideal primo P^* de Y tal que $P_1 \subseteq P^*$.

Por outro lado, como $aRb \subseteq P^*$ e $a \notin P^*$, para todo $P^* \in Y$ tal que $P^* \subseteq P_1$, $b \in P^*$. Consequentemente, $b \in P^*$, para todo $P^* \in Y$, o que nos leva a concluir que $b \in Z$. Concluímos assim que Z é um ideal primo de R tal que $Z \subseteq P$. Consequentemente, Z é um elemento de X e Z é um minorante da cadeia Y . Concluímos, assim, que toda a cadeia descendente de elementos de X possui um minorante em X , logo, pelo dual do Lema de Zorn, existe um elemento minimal de X . Provamos, assim, que todo o ideal primo de R contém um ideal primo minimal, como desejávamos provar. ■

Um **anel primo** R é um anel para o qual se verifica que 0 é um ideal primo de R . Das definições de anel e ideal primos deduz-se que um ideal próprio P de um anel R é primo se e só se R/P é anel primo.

O conjunto constituído por todos os ideais primos de um anel R é designado por **espectro primo** de R e é representado por $\text{Spec}(R)$.

Um ideal de um anel R que resulta da intersecção de ideais primos de R é designado por **ideal semiprimo** de R .

O ideal semiprimo que resulta da intersecção de todos os ideais primos de um anel R é designado por **radical primo** de R e é representado por $\mathcal{P}(R)$.

Todo o elemento do radical primo $\mathcal{P}(R)$ de um anel R é **nilpotente**, isto é, para todo o elemento $x \in \mathcal{P}(R)$ existe um número natural k tal que $x^k = 0$. Um ideal I de um anel R cujos elementos sejam nilpotentes diz-se **nil**. Um ideal I de um anel R diz-se **nilpotente** se existir um número natural k tal que $I^k = 0$. Observe-se que todo o ideal nilpotente é, em particular, nil.

A Proposição seguinte sintetiza o que foi dito anteriormente.

Proposição 1.1.9 *Sejam R um anel e $\mathcal{P}(R)$ o radical primo de R ; então $\mathcal{P}(R)$ é um nil-ideal de R .*

Dizemos que um anel R é **semiprimo** se $\mathcal{P}(R) = 0$. Observe-se que afirmar que R é anel semiprimo é equivalente a afirmar que 0 é um ideal semiprimo de R .

Das definições de ideal semiprimo e anel semiprimo decorre que, se R é um anel e P é um ideal próprio de R , R/P é anel semiprimo se e só se P é um ideal semiprimo de R .

A Proposição que se segue é um resultado bem conhecido sobre ideais semiprimos.

Proposição 1.1.10 *Sejam R um anel e I um ideal próprio de R ; então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- a) I é um ideal semiprimo de R .
- b) Para todo o ideal J de R tal que $J^2 \subseteq I$, tem-se $J \subseteq I$.
- c) Para todo o ideal direito J de R tal que $J^2 \subseteq I$, tem-se $J \subseteq I$.
- d) Para todo o ideal esquerdo J de R tal que $J^2 \subseteq I$, tem-se $J \subseteq I$.

Demonstração. [23], Proposição 10.9. ■

Como consequência da Proposição anterior temos que, dados um ideal semiprimo I de um anel R e um ideal direito (ou esquerdo) J de R tal que $J^n \subseteq I$, para algum número natural n , então $J \subseteq I$.

1.2 Conceitos gerais sobre módulos

Dado um anel R , designamos por R -módulo à direita M um R -módulo à direita unitário e representamo-lo por M_R . O mesmo se passa para R -módulos à esquerda. Se M for um R -módulo à direita (esquerda), um R -submódulo N de M representa-se por $N \leq_R M$. Sempre que não haja ambiguidade, em vez de $N \leq_R M$, escrevemos $N \leq M$.

Neste trabalho, sempre que não houver ambiguidade, designaremos um R -módulo à direita simplesmente por R -módulo.

Dado um anel R , representamos por R_R o anel R visto como um R -módulo à direita sobre si mesmo. Reciprocamente, representamos por ${}_R R$ o anel R visto como um R -módulo à esquerda sobre si mesmo.

Dada $(M_i)_{i \in I}$, uma família não vazia de R -submódulos de um R -módulo à direita (ou à esquerda) M , dizemos que M é uma **soma directa interna** da família $(M_i)_{i \in I}$ se:

1. $M = \sum_{i \in I} M_i = \{ \sum_{k=1}^n m_{i_k} : m_{i_k} \in M_{i_k}, i_k \in I, n \in \mathbb{N} \}$
2. $M_j \cap \sum_{i \in I \setminus \{j\}} M_i = 0$, para todo $j \in I$.

Neste caso, representamos $M = \oplus_{i \in I} M_i$. Se uma família $M' = (M_i)_{i \in I}$ de R -submódulos do R -módulo M satisfizer a condição **2**), dizemos que M' é uma **família independente** de R -submódulos de M . Caso contrário, dizemos que M' é uma **família dependente** de R -submódulos de M .

Seja $(M_i)_{i \in I}$ uma família não vazia de R -módulos. Denotamos por $\prod_{i \in I} M_i$ o conjunto constituído pelas aplicações do tipo

$$\begin{aligned} \alpha : I &\rightarrow \cup_{i \in I} M_i \\ i &\rightarrow \alpha(i) \end{aligned} ,$$

tais que $\alpha(i) \in M_i$, para todo $i \in I$. Designamos $m_i = \alpha(i)$ por $i^{\text{ésima}}$ componente de α , representando-se o elemento α de $\prod_{i \in I} M_i$ por $(\alpha(i))_{i \in I}$ ou simplesmente por $(m_i)_{i \in I}$. É possível definir uma estrutura de R -módulo em $M' = \prod_{i \in I} M_i$, considerando, para todos $\alpha, \beta \in \prod_{i \in I} M_i$,

- $(\alpha + \beta)(i) = \alpha(i) + \beta(i)$, para todo $i \in I$,
- $(\alpha r)(i) = \alpha(i)r$, para todo $i \in I$, para todo $r \in R$.

O conjunto $M' = \prod_{i \in I} M_i$ munido da estrutura de R -módulo anteriormente definida é designado por **produto directo** da família $(M_i)_{i \in I}$. O R -submódulo de M' constituído pelos elementos $\alpha \in M'$ tais que o conjunto

$$I_\alpha = \{i \in I : \alpha(i) \neq 0\}$$

é finito é designado por **soma directa externa** da família $(M_i)_{i \in I}$ e é representado por $\coprod_{i \in I} M_i$. No caso de I ser um conjunto finito, $\prod_{i \in I} M_i = \coprod_{i \in I} M_i$.

Teorema 1.2.1 *Seja $(M_i)_{i \in I}$ uma família não vazia de R -módulos; então, para todo $i \in I$, existem R -submódulos M'_i de $\coprod_{i \in I} M_i$ tais que $M'_i \simeq M_i$, $(M'_i)_{i \in I}$ é uma família independente de R -submódulos de $\coprod_{i \in I} M_i$ e $\oplus_{i \in I} M'_i \simeq \coprod_{i \in I} M_i$.*

Demonstração. [22], Teorema 4.2.1. ■

Observação 1.2.2 *Tendo em consideração o Teorema 1.2.1, deixaremos, ao longo deste trabalho, de distinguir somas directas internas e externas, passando-se a representar uma soma directa (interna ou externa) pelo símbolo $\oplus$. O contexto permitirá determinar se a soma directa em questão é interna ou externa.*

Se M é um R -módulo à direita (esquerda) não nulo que não possui R -submódulos próprios não nulos, dizemos que M é **simples**.

Dizemos que um R -módulo à direita (esquerda) M é **Noetheriano** se M satisfizer a **condição de cadeia ascendente** (abreviadamente **c.c.a.**) em R -submódulos, isto é, se não existir uma cadeia infinita propriamente ascendente

$$N_1 \subsetneq N_2 \subsetneq \dots \subsetneq N_n \subsetneq \dots$$

de R -submódulos de M .

Um anel R é **Noetheriano à direita** se o R -módulo à direita R_R for Noetheriano. De forma análoga definimos anel **Noetheriano à esquerda**. Um anel R é **Noetheriano** se R é anel Noetheriano à direita e à esquerda.

Se, dado um R -módulo M , se verificar que não existem cadeias infinitas propriamente descendentes de R -submódulos de M , obtemos a definição de R -módulo à direita Artiniano. Assim, dizemos que um R -módulo à direita (esquerda) M

é **Artiniano** se M satisfizer a **condição de cadeia descendente** (abreviadamente **d.c.c.**) em R -submódulos de M , isto é, se não existir uma cadeia infinita propriamente descendente

$$\dots \subsetneq N_n \subsetneq \dots \subsetneq N_2 \subsetneq N_1$$

de R -submódulos de M .

Um anel R é **Artiniano à direita** se o R -módulo à direita R_R for Artiniano. De forma análoga definimos anel **Artiniano à esquerda**. Um anel R é **Artiniano** se R é anel Artiniano à direita e à esquerda.

Provaremos em seguida que, num anel Noetheriano à direita (ou à esquerda), existe um número finito de ideais primos minimais.

Teorema 1.2.3 *Num anel Noetheriano à direita (ou à esquerda) existe apenas um número finito de ideais primos minimais.*

Demonstração. Seja R um anel Noetheriano à direita (ou à esquerda).

Começamos por provar que existe um número finito de ideais primos de $R - P_1, \dots, P_n$ tais que $P_1 \dots P_n = 0$.

Com vista a um absurdo, suponhamos que não existe um número finito de ideais primos de $R - P_1, \dots, P_n$ tais que $P_1 \dots P_n = 0$. Consideremos a família

$$X = \{I : I \text{ é um ideal que não contém produtos finitos de ideais primos}\}$$

ordenada pela relação inclusão. Uma vez que $0 \in X$ e R é anel Noetheriano à direita (ou à esquerda), X possui elemento maximal K .

Sejam I, J ideais de R tais que $IJ \subseteq K$; então $(K + I)(K + J) \subseteq K$. Com vista a um absurdo, suponhamos que $I \not\subseteq K$ e $J \not\subseteq K$. Por construção de K , $K + I$ e $K + J$ contêm produtos finitos de ideais primos de R . Consequentemente, $(K + I)(K + J)$ contém produtos finitos de ideais primos de R e, logo, K contém produtos finitos de ideais primos de R , o que é absurdo. Concluímos, assim, que $I \subseteq K$ ou $J \subseteq K$, logo, K é um ideal primo de R , o que também é absurdo. O absurdo resultou de supormos que 0 não contém produtos finitos de ideais primos de R , logo, existem ideais primos de $R - P_1, \dots, P_n$ tais que $P_1 \dots P_n = 0$. Pelo Lema 1.1.8, existem ideais primos minimais de $R - P'_1, \dots, P'_n$ tais que $P'_1 \subseteq P_1, \dots, P'_n \subseteq P_n$, logo, $P'_1 \dots P'_n = 0$.

Consideremos agora um ideal primo P de R , então, $P'_1 \dots P'_n = 0 \subseteq P$ e, uma vez que P é um ideal primo, existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $P'_i \subseteq P$. Consequentemente, R contém apenas um número finito de ideais primos minimais, como desejávamos provar. ■

A Proposição que se segue e os respectivos Corolários são bem conhecidos, pelo que a sua demonstração será omitida.

Proposição 1.2.4 *Sejam M um R -módulo e N um R -submódulo de M ; então M é um R -módulo Noetheriano (respectivamente Artiniano) se e só se N e M/N são R -módulos Noetherianos (respectivamente Artinianos).*

Corolário 1.2.5 *Toda a soma directa finita de R -módulos Noetherianos (respectivamente Artinianos) é um R -módulo Noetheriano (respectivamente Artiniano).*

Corolário 1.2.6 *Seja R é um anel Noetheriano à direita (respectivamente Artiniano à direita); então, todos os R -módulos à direita finitamente gerados são Noetherianos (respectivamente Artinianos).*

Observe-se que, se M é um R -módulo Noetheriano, todos os R -submódulos de M são finitamente gerados. De facto, se existir um R -submódulo N de M que não seja finitamente gerado, para cada número natural n , podemos escolher um elemento i_n de N tal que

$$i_1R \subsetneq i_1R + i_2R \subsetneq \dots \subsetneq i_1R + i_2R + \dots + i_nR,$$

construindo-se, assim, uma cadeia infinita propriamente ascendente de R -submódulos de M , o que é absurdo. Consequentemente, todos os R -submódulos de M são finitamente gerados. Reciprocamente, se considerarmos um R -módulo M cujos R -submódulos são todos finitamente gerados e tomarmos uma cadeia propriamente ascendente de R -submódulos de M - $N_1 \subsetneq N_2 \subsetneq \dots$, concluímos que o R -submódulo de M - $J = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} N_i$ é finitamente gerado, pelo que a cadeia é finita. Tal leva-nos a concluir que:

Lema 1.2.7 *Um R -módulo M é Noetheriano se e só se todos os seus R -submódulos são finitamente gerados.*

O Teorema que se segue permite-nos relacionar anéis Noetherianos e Artinianos.

Teorema 1.2.8 (Hopkins, Levitzki) *Seja R um anel Artiniano à direita (respectivamente à esquerda); então R é anel Noetheriano à direita (respectivamente à esquerda).*

Demonstração. [14], Teorema 3.15. ■

Do Teorema 1.2.8 podemos concluir que todo o anel Artiniano é Noetheriano. A recíproca deste Teorema é falsa: por exemplo, o anel $\mathbb{Z}$, com as operações usuais, é um anel Noetheriano mas não é Artiniano.

Em seguida introduzimos uma nova classe de módulos - os módulos semisimples.

Um R -módulo à direita (esquerda) M é **semisimples** se M for igual à soma directa de uma família de R -submódulos simples de M .

Um anel R diz-se **semisimples** se R for semisimples como R -módulo à direita. Consideremos agora o seguinte Teorema:

Teorema 1.2.9 (Noether) *Seja R um anel. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- a) R_R é semisimples,
- b) ${}_R R$ é semisimples,
- c) todos os R -módulos à direita são semisimples,
- d) todos os R -módulos à esquerda são semisimples.

Demonstração. [14], Teorema 3.4. ■

Aplicando o Teorema anterior, concluímos que R é anel semisimples se e só se R é semisimples como R -módulo à esquerda.

Observe-se, agora, que se R é anel semisimples, por definição, R é igual a uma soma directa de uma família de ideais direitos simples - $(I_i)_{i \in K}$ de R . Uma vez que a identidade de R se escreve como uma soma finita de elementos - $i_1 \in I_{k_1}, \dots, i_n \in I_{k_n}$, com $k_1, \dots, k_n \in K$, R é igual a uma soma directa de uma família finita de ideais direitos simples de R . Ora, como todos os ideais direitos simples são R -módulos à direita Artinianos e R -módulos à direita Noetherianos, tendo em consideração o Corolário 1.2.5, concluímos que:

Lema 1.2.10 *Todo o anel semisimples é Noetheriano à direita e Artiniano à direita.*

Aplicando o Teorema 1.2.9, concluímos que:

Proposição 1.2.11 *Seja R um anel semisimples; então R é anel Artiniano e Noetheriano.*

Verificaremos, em seguida, que todo o anel semisimples contém anéis de divisão.

Lema 1.2.12 *Se R é um anel semisimples, então existem elementos idempotentes $e_1, \dots, e_n$ tais que $e_1 + \dots + e_n = 1$, $e_1 R e_1, \dots, e_n R e_n$ são anéis de divisão e $e_i e_j = 0$, para todos $i, j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $i \neq j$.*

Demonstração. Como R é anel semisimples, $R = \bigoplus_{i \in I} B_i$, onde B_i é um ideal direito simples de R , para todo $i \in I$. Consequentemente, existem $i_1, \dots, i_n \in I$ e $e_1 \in B_{i_1} \setminus \{0\}, \dots, e_n \in B_{i_n} \setminus \{0\}$ tais que $e_1 + \dots + e_n = 1$. Consideremos $l \in \{1, \dots, n\}$, então

$$e_l = 1e_l = (e_1 + \dots + e_n)e_l = e_1 e_l + \dots + e_n e_l.$$

Como a soma $\sum_{k=1}^n B_{i_k}$ é directa, $e_j e_l = 0$, para todo $j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{l\}$, e e_l é um elemento idempotente. Concluímos, assim, que $1 = e_1 + \dots + e_n$, onde $e_1, \dots, e_n$ são elementos idempotentes tais que $e_i e_j = 0$, para todos $i, j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $i \neq j$. Consequentemente, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, $e_i R e_i$ é um anel com identidade e_i .

Seja $j \in \{1, \dots, n\}$. Com o intuito de provarmos que $e_j Re_j$ é anel de divisão, consideremos $r \in e_j Re_j \setminus \{0\}$, então, $r = e_j b e_j$, para algum $b \in R$, e $rR \subseteq e_j R$. Como B_{i_j} é um ideal direito simples, $B_{i_j} = e_j R = rR$, logo, existe $a \in R \setminus \{0\}$ tal que $ra = e_j$. Assim,

$$e_j = e_j e_j = r a e_j = (e_j b e_j)(e_j a e_j).$$

Analogamente, existe $c \in R \setminus \{0\}$ tal que $e_j = (e_j a e_j)(e_j c e_j)$. Consequentemente,

$$e_j b e_j = e_j c e_j,$$

portanto $e_j b e_j$ é uma unidade de $e_j Re_j$. Provamos, assim, que $e_i R e_i$ é anel de divisão, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. ■

1.3 Séries filiadas

Sejam M um R -módulo e X um subconjunto de M . Designamos por **anulador de X em R** o conjunto

$$rann_R(X) = \{r \in R : xr = 0, \text{ para todo } x \in X\}.$$

O conjunto $rann_R(X)$ é um ideal direito de R e, no caso de X ser um R -submódulo de M , $rann_R(X)$ é um ideal bilateral de R . No caso de o conjunto X considerado ter apenas um elemento - x , por simplificação de linguagem, representamos $rann_R(\{x\})$ por $rann_R(x)$.

Suponhamos que o R -módulo considerado no parágrafo anterior é R_R . Se considerarmos um subconjunto X de R , temos

$$rann_R(X) = \{r \in R : xr = 0, \text{ para todo } x \in X\}.$$

Designamos o conjunto assim definido por **anulador à direita de X em R** . Logo, $rann_R(X)$ é um ideal direito de R e, se X for um ideal direito de R , $rann_R(X)$ é um ideal bilateral de R . De forma análoga, definimos

$$lann_R(X) = \{r \in R : rx = 0, \text{ para todo } x \in X\}$$

e designamos este conjunto por **anulador à esquerda de X em R** .

Se M é um R -módulo e X é um subconjunto de R , definimos

$$ann_M(X) = \{m \in M : mx = 0, \text{ para todo } x \in X\}$$

e designamos este conjunto por **anulador de X em M** . Observe-se que, no caso de X ser um ideal esquerdo, $ann_M(X)$ é um R -submódulo de M .

Um R -módulo M diz-se **fiel** se $rann_R(M) = 0$ e M diz-se **totalmente fiel** se $rann_R(N) = 0$, para todo o R -submódulo não nulo N de M .

Proposição 1.3.1 *Seja M um R -módulo não nulo e suponhamos que existe um ideal P tal que P é maximal entre os anuladores de R -submódulos não nulos de M em R ; então P é um ideal primo de R , $P = rann_R(ann_M(P))$ e $ann_M(P)$ é um R/P -módulo à direita totalmente fiel.*

Demonstração. O ideal P é próprio uma vez que $1 \notin P$.

Com o intuito de provarmos que P é um ideal primo, consideremos dois ideais I, J de R tais que $IJ \subseteq P$. Por hipótese, P é um anulador em R de um R -submódulo não nulo N de M , logo, em particular, $NIJ = 0$.

Se $NI = 0$, então $I \subseteq rann_R(N) = P$.

Se $NI \neq 0$, então $J \subseteq rann_R(NI)$. Uma vez que $NI \leq N$,

$$P = rann_R(N) \leq rann_R(NI)$$

e, pelo facto de P ser maximal entre os anuladores em R de R -submódulos não nulos de M , $P = rann_R(NI)$, o que nos leva a concluir que $J \subseteq P$. Consequentemente, $I \subseteq P$ ou $J \subseteq P$, isto é, P é um ideal primo.

Para provarmos que $ann_M(P)$ é um R/P -módulo fiel é suficiente provar que $rann_R(ann_M(P)) = P$. Para tal, observe-se que, como $ann_M(P)P = 0$,

$$P \subseteq rann_R(ann_M(P)).$$

Reciprocamente, como $NP = 0$, $N \leq ann_M(P)$, o que implica

$$rann_R(ann_M(P)) \subseteq rann_R(N) = P.$$

Consequentemente, $ann_M(P)$ é um R/P -módulo à direita fiel.

Consideremos um R -submódulo não nulo L de $ann_M(P)$. Então,

$$P = rann_R(ann_M(P)) \subseteq rann_R(L).$$

Pela escolha de P , $P = rann_R(L)$, o que nos leva a concluir que $ann_M(P)$ é um R/P -módulo à direita totalmente fiel, como desejávamos provar. ■

Sejam M um R -módulo e P um ideal primo de R . Dizemos que P é um **primo associado** de M se P for igual ao anulador em R de um R -submódulo não nulo N de M tal que N é um R/P -módulo à direita totalmente fiel.

O conjunto constituído por todos os primos associados de um R -módulo M é representado por $\mathbf{Ass}(M)$. A Proposição 1.3.1 permite-nos concluir que, se R for um anel Noetheriano à direita (ou à esquerda) e M for um R -módulo não nulo, o conjunto $\mathbf{Ass}(M)$ é não vazio.

Dizemos que um R -submódulo N de um R -módulo não nulo M é um **R -submódulo filiado** de M se $N = ann_M(P)$, onde P é um ideal de R que é um anulador em R de um R -submódulo não nulo de M e é maximal entre os

anuladores em R de R -submódulos não nulos de M . Note-se que, pela Proposição 1.3.1, P nas condições anteriores é um primo associado de M .

Uma **série filiada** de um R -módulo não nulo M é uma série de R -submódulos de M da forma

$$0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \dots \subsetneq M_n = M, \quad (1)$$

onde, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, o R -módulo M_i/M_{i-1} é um R -submódulo filiado de M/M_{i-1} . Os ideais primos de R da forma $P_i = \text{rann}_R(M_i/M_{i-1})$, com $i \in \{1, \dots, n\}$, designam-se por ideais primos filiados de M correspondentes à série filiada apresentada em 1). Um **primo filiado** de M é um ideal primo filiado de M correspondente a alguma série filiada de M .

A Proposição seguinte permite-nos concluir que, se R é anel Noetheriano à direita e M é um R -módulo não nulo Noetheriano, M tem uma série filiada. Em particular, pelo Corolário 1.2.6, se R é anel Noetheriano à direita e M é um R -módulo não nulo finitamente gerado, concluímos que M tem uma série filiada.

Proposição 1.3.2 *Sejam R um anel Noetheriano à direita e M um R -módulo Noetheriano não nulo; então M tem uma série filiada*

$$0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \dots \subsetneq M_n = M.$$

Demonstração. Como R é anel Noetheriano à direita, existe um ideal P tal que P é um anulador em R de um R -submódulo não nulo de M e é maximal entre os anuladores em R de R -submódulos não nulos de M .

Designemos $\text{ann}_M(P)$ por M_1 . Se $M_1 = M$, então $0 \subsetneq M$ é uma série filiada de M . Caso contrário, existe P_2 maximal entre os anuladores em R de R -submódulos não nulos de M/M_1 . Consideremos M_2 tal que $M_2/M_1 = \text{ann}_{M/M_1}(P_2)$. Repetindo o processo, construímos uma cadeia de R -submódulos de M

$$0 \subsetneq M_1 \subsetneq M_2 \subsetneq \dots$$

tal que $M_i/M_{i-1} = \text{ann}_{M/M_{i-1}}(P_i)$, onde P_i é um ideal de R que é um anulador em R de um R -submódulo não nulo de M/M_{i-1} e é maximal entre os anuladores em R de R -submódulos não nulos de M/M_{i-1} , para todo i . Pelo facto de M ser Noetheriano, concluímos que a cadeia apresentada é finita e que, portanto, M tem uma série filiada, como desejávamos provar. ■

Verificaremos que, se R for um anel de ideais direitos e esquerdos principais, todos os ideais bilaterais são gerados por um elemento normalizador.

Lema 1.3.3 *Sejam R um anel de ideais direitos e esquerdos principais, I um ideal não nulo de R e y um elemento de R que gera I como ideal esquerdo (ou direito). Então R é anel Noetheriano e y é um elemento normalizador de R . Em particular, todo o ideal bilateral de R é gerado por um elemento normalizador de R .*

Demonstração. Uma vez que, por definição, todos os ideais direitos e esquerdos de R são finitamente gerados (pois são gerados por um único elemento), R é anel Noetheriano.

Seja I um ideal não nulo de R e y um elemento de R que gera I como ideal esquerdo. Como R é um anel de ideais direitos e esquerdos principais e I é um ideal direito de R , existe $x \in R$ tal que $I = xR = Ry$.

Por definição de y , $yR \subseteq Ry$. Provaremos seguidamente que $Ry \subseteq yR$. Para tal, observe-se que, como $Ry = xR$, existe $a \in R$ tal que $ay = x$, logo, $ayR = xR$, o que nos leva a concluir que

$$I = ayR \subseteq aRy = aI \subseteq I.$$

Consequentemente,

$$I = aI = ayR.$$

Dado $i \in I$, $ai = ayr$, para algum $r \in R$, logo, $a(i - yr) = 0$, com $i - yr \in I$.

Para provarmos que $yR = Ry$ é suficiente provar que

$$rann_R(a) \cap I = 0.$$

Com efeito, se $rann_R(a) \cap I = 0$, então $i - yr = 0$, logo, $i \in yR$. Uma vez que i é um elemento arbitrário de I , concluímos que $Ry = I = yR$.

Com o intuito de provarmos que $rann_R(a) \cap I = 0$, observemos que, pelo facto de R ser anel Noetheriano à direita, existe um número natural n tal que

$$rann_R(a^n) = rann_R(a^{2n}).$$

Seja $i' \in I \cap rann_R(a^n)$; então, como $aI = I$, existe $j \in I$ tal que $i' = a^n j$, logo, $0 = a^n i' = a^{2n} j$. Consequentemente,

$$j \in rann_R(a^{2n}) \text{ e } rann_R(a^{2n}) = rann_R(a^n),$$

logo, $0 = a^n j = i'$, o que nos leva a concluir que $I \cap rann_R(a^n) = 0$. Uma vez que

$$I \cap rann_R(a) \subseteq I \cap rann_R(a^n) = 0,$$

concluímos que y é um elemento normalizador de R . De modo análogo, provamos que, se y é um elemento de R que gera I como ideal direito, y é um elemento normalizador de R . ■

1.4 Ideais primitivos

Dizemos que um ideal P de um anel R é **primitivo à direita** se $P = rann_R(M)$, para algum R -módulo à direita simples M . De forma análoga definimos ideal **primitivo à esquerda**.

Todo o ideal maximal de um anel R é primitivo à direita (e à esquerda). Com efeito, se tomarmos um ideal maximal M de R e considerarmos um ideal direito maximal K de R tal que $M \leq K$, concluímos que R/K é um R -módulo à direita simples. Uma vez que $(R/K)M = 0$, concluímos que $M \leq rann_R(R/K)$. Ora, como $rann_R(R/K)$ é um ideal próprio bilateral de R , por M ser um ideal maximal de R , $M = rann_R(R/K)$ e, consequentemente, M é um ideal primitivo à direita.

Por outro lado, pela Proposição 1.3.1, todo o ideal primitivo à direita é primo. Em particular, concluímos que todo o ideal maximal de um anel R é um ideal primo de R . Assim,

Lema 1.4.1 *Todo o ideal maximal de um anel R é um ideal primitivo à direita (e à esquerda). Todo o ideal primitivo à direita (ou à esquerda) de um anel R é primo.*

O ideal que se obtém intersectando todos os ideais primitivos à direita de um anel R é designado por **radical de Jacobson** de R e é representado por $J(R)$.

O Teorema que se segue permite-nos concluir que o radical de Jacobson de um anel R é igual à intersecção de todos os ideais direitos (ou esquerdos) maximais de R .

Teorema 1.4.2 *Num anel R os seguintes conjuntos coincidem:*

- a) a intersecção de todos os ideais direitos maximais de R ,*
- b) a intersecção de todos os ideais esquerdos maximais de R ,*
- c) a intersecção de todos os ideais primitivos à direita de R ,*
- d) a intersecção de todos os ideais primitivos à esquerda de R .*

Demonstração. [14], Proposição 2.16. ■

Lema 1.4.3 *Seja R um anel Artiniano à direita (ou à esquerda); então existe um número natural n tal que $J(R)^n = 0$.*

Demonstração. [14], Teorema 3.15. ■

1.5 R -submódulos essenciais

Sejam M um R -módulo e N um R -submódulo de M . Dizemos que N é um **R -submódulo essencial** de M e escrevemos $N \leq_e M$ se $N \cap K \neq 0$, para todo o R -submódulo não nulo K de M . Neste caso, dizemos que M é uma **extensão essencial** de N .

Uma vez que todos os R -submódulos não nulos de um R -módulo não nulo M possuem um R -submódulo da forma mR , para algum $m \in M \setminus \{0\}$, afirmar que N é um R -submódulo essencial de M é equivalente a afirmar que, para todo $m \in M \setminus \{0\}$, $mR \cap N \neq 0$, o que, por sua vez, é equivalente a afirmar que, para todo $m \in M \setminus \{0\}$, existe $r \in R \setminus \{0\}$ tal que $mr \in N \setminus \{0\}$.

Dados um anel R e um ideal direito I de R , dizemos que I é um **ideal direito essencial** de R se I for um R -submódulo essencial do R -módulo à direita R_R . De forma análoga definimos **ideal esquerdo essencial** de R .

Proposição 1.5.1 *Seja M um R -módulo.*

- a) *Se N e L são R -submódulos de M tais que $L \leq N$, então $L \leq_e N$ e $N \leq_e M$ se e só se $L \leq_e M$.*
- b) *Se N_1, N_2, N_3, N_4 são R -submódulos de M tais que $N_1 \leq_e N_2$ e $N_3 \leq_e N_4$, então $N_1 \cap N_3 \leq_e N_2 \cap N_4$.*
- c) *Sejam L um R -módulo, N um R -submódulo essencial de L e $f: M \rightarrow L$ um R -homomorfismo; então $f^{-1}(N) \leq_e M$.*
- d) *Sejam $X_1 = (N_i)_{i \in I}$ e $X_2 = (M_i)_{i \in I}$ duas famílias de R -submódulos de M tais que $N_i \leq_e M_i$, para todo $i \in I$. Se X_1 for uma família independente, então X_2 é uma família independente e*

$$\bigoplus_{i \in I} N_i \leq_e \bigoplus_{i \in I} M_i.$$

Demonstração. [14], Proposição 3.21. ■

Corolário 1.5.2 *Sejam I um ideal direito essencial de R , t um elemento de R e*

$$J = \{r \in R : tr \in I\};$$

então J é um ideal direito essencial de R .

Demonstração. Se considerarmos o R -homomorfismo

$$\begin{array}{ccc} f: & R & \rightarrow R \\ & r & \rightarrow tr \end{array},$$

concluimos, pela alínea c) da Proposição 1.5.1, que $f^{-1}(I) \leq_e R_R$. Uma vez que $f^{-1}(I) = J$, o resultado está provado. ■

Dizemos que um R -submódulo N de um R -módulo M é uma **parcela directa** de M , se existir um R -submódulo K de M tal que $M = N \oplus K$.

Provaremos, em seguida, que todo o R -submódulo N de um R -módulo M é uma parcela directa de um R -submódulo essencial de M .

Proposição 1.5.3 *Sejam M um R -módulo e N um R -submódulo de M ; então existe um R -submódulo K de M tal que $N \oplus K \leq_e M$ e $(N \oplus K)/K \leq_e M/K$.*

Demonstração. Sejam K um R -submódulo de M maximal para a relação $N \cap K = 0$ e S um R -submódulo de M tal que $S \cap (N \oplus K) = 0$. Logo,

$$N \cap (S \oplus K) = 0,$$

o que, pela escolha de K , implica $S = 0$. Logo, $N \oplus K \leq_e M$.

Seja D/K um R -submódulo não nulo de M/K . Como $K \not\subseteq D$, $D \cap N \neq 0$, logo,

$$\frac{N \oplus K}{K} \cap \frac{D}{K} \neq 0,$$

o que nos leva a concluir que $(N \oplus K)/K \leq_e M/K$. ■

A Proposição anterior permitir-nos-á deduzir alguns resultados sobre módulos semisimples.

A Demonstração da Proposição que se segue é omitida uma vez que Demonstração análoga será dada para uma classe de anéis - a classe dos anéis graduados (Proposição 4.2.7).

Proposição 1.5.4 *Um R -módulo M é semisimples se e só se todo o R -submódulo N de M é uma parcela directa de M .*

Corolário 1.5.5 *Seja R um anel semisimples; então R é um anel de ideais direitos e esquerdos principais e todo o ideal bilateral de R é gerado por um elemento normalizador e idempotente.*

Demonstração. Seja I um ideal direito de R . Pela Proposição 1.5.4, I é uma parcela directa de R , logo, existe um ideal direito K tal que $R = I \oplus K$. Em particular, $1 = a + b$, para alguns $a \in I$ e $b \in K$. Uma vez que, para todo $i \in I$, $bi = i - ai$ e $(i - ai) \in I$, concluímos que $i - ai = 0$, logo, $aR = I$. Consequentemente, todos os ideais direitos de R são principais. Analogamente, provamos que todos os ideais esquerdos de R são principais, logo, R é um anel de ideais direitos e esquerdos principais.

Seja I um ideal bilateral de R . Vimos já que existe $a \in I$ tal que $ai = i$, para todo $i \in I$. Em particular, concluímos que $a^2 = a$ e $aR = I$. Pelo Lema 1.3.3, concluímos que a é um elemento normalizador de R , o que nos leva a concluir que todo o ideal bilateral de R é gerado por um elemento idempotente e normalizador. ■

A Proposição que se segue é uma consequência das Proposições 1.5.3 e 1.5.4.

Proposição 1.5.6 *Um R -módulo M é semisimples se e só se M não possui R -submódulos essenciais próprios.*

Demonstração. Suponhamos que M é um R -módulo semisimples e seja N um R -submódulo próprio de M , então, pela Proposição 1.5.4, N é uma parcela directa de M , logo, $N \not\leq_e M$.

Reciprocamente, suponhamos que M não possui R -submódulos essenciais próprios e seja N um R -submódulo de M . Pela Proposição 1.5.3, existe um R -submódulo K de M tal que $N \oplus K \leq_e M$, logo, por hipótese, $N \oplus K = M$ e, pela Proposição 1.5.4, M é semisimples. ■

Em seguida verificaremos que, num anel primo, todos os ideais não nulos são essenciais como ideais direitos e como ideais esquerdos.

Proposição 1.5.7 *Num anel primo R , todos os ideais não nulos de R são ideais direitos (e esquerdos) essenciais de R .*

Demonstração. Sejam I um ideal não nulo de R e J um ideal direito de R tal que $I \cap J = 0$. Consequentemente, $JI = 0$ e, pelo facto de R ser anel primo, $J = 0$. Provamos, assim, que I é um ideal direito essencial de R . Analogamente provamos que I é um ideal esquerdo essencial de R . ■

1.6 Módulos não singulares

Introduzimos, agora, um R -submódulo importante de um R -módulo M , construindo à custa dos elementos de M cujos anuladores são essências.

Proposição 1.6.1 *Sejam R um anel e M um R -módulo. Então,*

$$Z(M_R) = \{m \in M : rann_R(m) \leq_e R_R\}$$

é um R -submódulo de M .

Demonstração. Sejam $m_1, m_2 \in Z(M_R)$; logo,

$$rann_R(m_1) \leq_e R_R, rann_R(m_2) \leq_e R_R.$$

Uma vez que

$$rann_R(m_1) \cap rann_R(m_2) \subseteq rann_R(m_1 + m_2),$$

e, pela Proposição 1.5.1,

$$rann_R(m_1) \cap rann_R(m_2) \leq_e R_R,$$

concluimos que

$$\text{rann}_R(m_1 + m_2) \leq_e R_R,$$

isto é, $m_1 + m_2 \in Z(M_R)$. Analogamente, provamos que $m_1 - m_2 \in Z(M_R)$.

Para provarmos que $Z(M_R)$ é um R -módulo à direita é, pois, suficiente provar que, para todo $m \in Z(M_R)$, para todo $r \in R$, $mr \in Z(M_R)$.

Consideremos $m \in Z(M_R)$ e $r \in R$. Uma vez que

$$\text{rann}_R(mr) = \{x \in R : rx \in \text{rann}_R(m)\}$$

e, por definição de $Z(M_R)$, $\text{rann}_R(m) \leq_e R_R$, pelo Corolário 1.5.2,

$$\text{rann}_R(mr) \leq_e R_R,$$

logo, $mr \in Z(M_R)$. ■

Dado um R -módulo M , o R -submódulo de M - $Z(M_R)$ definido na Proposição anterior é designado por **R -submódulo singular de M** . No caso de não haver ambiguidade, representamos o R -submódulo singular do R -módulo M por $Z(M)$.

Dizemos que um R -módulo à direita M é **não singular** se $Z(M) = 0$ e M é **singular** se $Z(M) = M$. Analogamente, definimos R -módulo à esquerda não singular e R -módulo à esquerda singular.

Observe-se que, dados um R -módulo à direita M e um R -submódulo N de M , $Z(N) = Z(M) \cap N$.

Proposição 1.6.2 *Seja R um anel.*

- a) Todos os R -submódulos, módulos quocientes e somas de R -módulos singulares são R -módulos singulares.*
- b) Todos os R -submódulos, somas directas e extensões essenciais de R -módulos não singulares são R -módulos não singulares.*
- c) Sejam M um R -módulo e N um R -submódulo de M tal que N e M/N são R -módulos não singulares; então M é um R -módulo não singular.*

Demonstração. [14], Proposição 3.28. ■

Proposição 1.6.3 *Seja R um anel.*

- a) Seja N um R -submódulo essencial de um R -módulo M ; então M/N é um R -módulo singular.*
- b) Sejam M um R -módulo não singular e N um R -submódulo de M tal que M/N é um R -módulo singular; então $N \leq_e M$.*

Demonstração. Seja $m \in M$ e ϕ o R -homomorfismo

$$\begin{aligned} \phi: R &\rightarrow M \\ r &\rightarrow mr \end{aligned}$$

Uma vez que $N \leq_e M$, pela Proposição 1.5.1, $\phi^{-1}(N) \leq_e R_R$, isto é,

$$J = \{r \in R : mr \in N\}$$

é um ideal direito essencial de R . Uma vez que $\text{rann}_R(m + N) = J$, concluímos que

$$(m + N) \in Z(M/N).$$

Consequentemente, M/N é um R -módulo singular, como desejávamos provar.

b) Seja $m \in M \setminus \{0\}$, logo,

$$\text{rann}_R(m) \subseteq \text{rann}_R(m + N).$$

Uma vez que M/N é um R -módulo singular, $\text{rann}_R(m + N) \leq_e R_R$. Por outro lado, como M é um R -módulo não singular, $\text{rann}_R(m) \not\leq_e R_R$, o que nos leva a concluir que

$$\text{rann}_R(m) \subsetneq \text{rann}_R(m + N).$$

Consequentemente, existe $r \in R$ tal que $mr \in N \setminus \{0\}$. Concluímos, assim, que $N \leq_e M$, como desejávamos provar. ■

Dizemos que um anel R é **não singular à direita** (respectivamente à **esquerda**) se $Z(R_R) = 0$ (respectivamente $Z({}_R R) = 0$). O anel R é **não singular** se é não singular à direita e à esquerda.

Proposição 1.6.4 *Seja R um anel não singular à direita; então:*

- a) *para todo o R -módulo M , $M/Z(M)$ é um R -módulo não singular,*
- b) *se N é um R -submódulo de um R -módulo M tal que N e M/N são R -módulos singulares, então M é um R -módulo singular,*
- c) *toda a extensão essencial de um R -módulo singular é um R -módulo singular.*

Demonstração. [14], Proposição 3.29. ■

1.7 Relações entre diferentes classes de anéis

Anteriormente introduzimos diferentes classes de anéis e estudámos propriedades características de cada uma destas classes. Em seguida, iremos relacionar várias classes introduzidas.

Teorema 1.7.1 (Wedderburn, Artin) *Seja R um anel; então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

- a) R é anel Artiniano à direita e $J(R) = 0$.
- b) R é anel Artiniano à esquerda e $J(R) = 0$.
- c) R é anel semisimples.

Demonstração. [14], Teorema 3.13. ■

Corolário 1.7.2 *Seja R um anel; então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

- a) R é anel Artiniano à direita semiprimo.
- b) R é anel Artiniano à esquerda semiprimo.
- c) R é anel semisimples.

Demonstração. Começamos por demonstrar que as condições “ R é anel Artiniano à direita e $J(R) = 0$ ” e “ R é anel Artiniano à direita semiprimo” são equivalentes.

Designemos o radical primo de R por $\mathcal{P}(R)$. Uma vez que todos os ideais primitivos à direita são, em particular, primos, concluímos que $\mathcal{P}(R) \subseteq J(R)$. Logo, $J(R) = 0$ implica $\mathcal{P}(R) = 0$, pelo que a condição “ R é anel Artiniano à direita e $J(R) = 0$ ” implica a condição “ R é anel Artiniano à direita semiprimo”.

Reciprocamente, suponhamos que R é anel Artiniano à direita semiprimo. Pelo Lema 1.4.3, existe um número natural n tal que $J(R)^n = 0$. Como R é anel semiprimo, $J(R) = 0$. Está, pois, demonstrado que as condições “ R é anel Artiniano à direita e $J(R) = 0$ ” e “ R é anel Artiniano à direita semiprimo” são equivalentes. De forma análoga, provamos que as condições “ R é anel Artiniano à esquerda e $J(R) = 0$ ” e “ R é anel Artiniano à esquerda semiprimo” são equivalentes. Aplicando o Teorema 1.7.1, concluímos que as condições a), b) e c) são equivalentes. ■

Corolário 1.7.3 *Seja R um anel; então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- a) R é anel Artiniano à direita primo.
- b) R é anel Artiniano à esquerda primo.
- c) R é anel Artiniano à direita simples.
- d) R é anel Artiniano à esquerda simples.
- e) R é anel simples e semisimples.

Demonstração. Começemos por verificar que a condição **a)** implica a condição **e)**. Suponhamos que R é anel Artiniano à direita primo. Pelo Corolário 1.7.2, R é anel semisimples. Com o intuito de provarmos que R é anel simples consideremos um ideal não nulo I de R . Como R é anel primo, pela Proposição 1.5.7, I é um ideal direito essencial de R . Uma vez que R é anel semisimples, aplicando a Proposição 1.5.6, concluímos que $I = R$. Consequentemente, R é anel simples.

É óbvio que a condição **e)** implica a condição **c)** e que esta implica a condição **a)**.

De forma análoga, provamos que a condição **b)** implica a condição **e)** e que esta implica a condição **d)** que, por sua vez, implica a condição **b)**. O corolário está, pois, demonstrado. ■

A Proposição que se segue é uma consequência imediata do Corolário anterior.

Proposição 1.7.4 *Num anel Artiniano à direita (ou à esquerda) todos os ideais primos são ideais maximais.*

Demonstração. Seja R um anel Artiniano à direita e P um ideal primo de R ; então R/P é anel Artiniano à direita primo, o que, pelo Corolário 1.7.3, nos leva a concluir que R/P é anel simples. Consequentemente, P é um ideal maximal de R , como desejávamos provar. ■

Corolário 1.7.5 *Todo o anel Artiniano à direita (ou à esquerda) tem um número finito de ideais primos.*

Demonstração. Seja R um anel Artiniano à direita. Pelo Teorema 1.2.8, R é anel Noetheriano à direita. Consequentemente, pelo Teorema 1.2.3, R contém um número finito de ideais primos minimais.

Uma vez que, pela Proposição 1.7.4, todos os ideais primos de R são ideais maximais, concluímos que todos os ideais primos de R são ideais primos minimais. Portanto, R contém um número finito de ideais primos. ■

1.8 Módulos injectivos

Seja M um R -módulo. Dizemos que M é um **módulo injectivo** se, para todo o R -módulo L , para todo o R -submódulo N de L e para todo o R -homomorfismo $f: N \rightarrow M$, existe um R -homomorfismo $g: L \rightarrow M$ tal que $f \equiv g|_N$.

Da definição apresentada decorre que uma soma directa de uma família finita de R -módulos injectivos ainda é um R -módulo injectivo. Para provarmos este facto, consideremos um R -módulo B , um R -submódulo C de B , um conjunto

finito I , uma família $(M_i)_{i \in I}$ de R -módulos injectivos e um R -homomorfismo $\phi: C \rightarrow \bigoplus_{j \in I} M_j$. Consideremos, para cada $i \in I$, a projecção

$$\begin{aligned} P_i: \bigoplus_{j \in I} M_j &\rightarrow M_i \\ (m_j)_{j \in I} &\rightarrow m_i \end{aligned}$$

Uma vez que, para cada $i \in I$, $\psi_i \equiv P_i \circ \phi$ é um R -homomorfismo e M_i é um R -módulo injectivo, existe, para cada $i \in I$, um R -homomorfismo $\psi_i^*: B \rightarrow M_i$ tal que $\psi_i^*|_C \equiv \psi_i$. Designemos por ψ^* o R -homomorfismo

$$\begin{aligned} \psi^*: B &\rightarrow \bigoplus_{i \in I} M_i \\ b &\rightarrow (\psi_i^*(b))_{i \in I} \end{aligned}$$

logo, $\psi^*|_C \equiv \phi$. Consequentemente, $\bigoplus_{j \in I} M_j$ é um R -módulo injectivo, como desejávamos provar.

Definição 1.8.1 Designa-se por *invólucro injectivo* de um R -módulo M um R -módulo injectivo que é uma extensão essencial de M .

Destacamos dois resultados fundamentais sobre módulos injectivos.

Proposição 1.8.2 *Todo o R -módulo possui um invólucro injectivo.*

Demonstração. [14], Teorema 4.8. ■

Proposição 1.8.3 *Sejam E, E' invólucros injectivos de um R -módulo M ; então $E \simeq E'$.*

Demonstração. [14], Proposição 4.9. ■

A Proposição 1.8.2 permite-nos concluir que todo o R -módulo M possui um invólucro injectivo E e a Proposição 1.8.3 leva-nos a concluir que o invólucro injectivo é, a menos de isomorfismo, único.

Representamos por $E(M_R)$ ou, no caso de não haver ambiguidade, por $E(M)$ o invólucro injectivo de um R -módulo M .

Proposição 1.8.4 *Sejam M um R -módulo e N um R -submódulo essencial de M ; então $E(M) = E(N)$.*

Demonstração. Uma vez que $N \leq_e M$ e $M \leq_e E(M)$, concluímos, pela Proposição 1.5.1, que $N \leq_e E(M)$. Por outro lado, como $E(M)$ é um R -módulo injectivo, conclui-se que $E(M)$ é o invólucro injectivo de N , isto é, $E(M) = E(N)$, como desejávamos provar. ■

Proposição 1.8.5 *Seja $(M_i)_{i \in I}$ uma família de R -módulos tal que I é um conjunto finito; então $E(\oplus_{i \in I} M_i) = \oplus_{i \in I} E(M_i)$.*

Demonstração. Uma vez que $M_i \leq_e E(M_i)$, para todo $i \in I$, pela Proposição 1.5.1,

$$\oplus_{i \in I} M_i \leq_e \oplus_{i \in I} E(M_i).$$

Ora, como verificámos já que a soma directa de uma família finita de R -módulos injectivos ainda é um R -módulo injectivo, $\oplus_{i \in I} E(M_i)$ é um R -módulo injectivo, o que nos leva a concluir que

$$E(\oplus_{i \in I} M_i) = \oplus_{i \in I} E(M_i),$$

como desejávamos provar. ■

1.9 Módulos uniformes e dimensão de Goldie

Dizemos que um R -módulo não nulo M é **uniforme** se a intersecção de dois quaisquer R -submódulos não nulos de M é não nula. Observe-se que afirmar que um R -módulo não nulo M é uniforme é equivalente a afirmar que todo o R -submódulo não nulo de M é essencial em M .

Proposição 1.9.1 *Todo o R -módulo semisimples e uniforme é simples.*

Demonstração. Seja M um R -módulo semisimples e uniforme e N um R -submódulo não nulo de M . Como M é semisimples, existe um R -submódulo K de M tal que $M = N \oplus K$. Em particular, $N \cap K = 0$. Por outro lado, como M é uniforme, $N \leq_e M$, logo, $K = 0$, o que nos leva a concluir que $N = M$. Consequentemente, M é um R -módulo simples, como desejávamos provar. ■

Em seguida verificaremos que afirmar que um R -módulo não nulo M é uniforme é equivalente a afirmar que M possui um R -submódulo essencial e uniforme.

Lema 1.9.2 *Um R -módulo M é uniforme se e só se M possui um R -submódulo uniforme N tal que $N \leq_e M$.*

Demonstração. Suponhamos que M é um R -módulo uniforme; então, se considerarmos $N = M$, concluímos que N é um R -submódulo uniforme de M tal que $N \leq_e M$.

Reciprocamente, suponhamos que M possui um R -submódulo uniforme N tal que $N \leq_e M$. Consideremos dois R -submódulos N_1, N_2 de M tais que $N_1 \cap N_2 = 0$. Então,

$$(N \cap N_1) \cap (N \cap N_2) = 0.$$

Uma vez que N é um R -módulo uniforme, $N \cap N_1 = 0$ ou $N \cap N_2 = 0$. Por outro lado, como N é um R -submódulo essencial de M , $N_1 = 0$ ou $N_2 = 0$, o que nos leva a concluir que M é um R -módulo uniforme, como desejávamos provar. ■

Corolário 1.9.3 *Um R -módulo M é uniforme se e só se $E(M)$ é um R -módulo uniforme.*

Demonstração. Se M é um R -módulo tal que $E(M)$ é um R -módulo uniforme, então M ainda é um R -módulo uniforme.

Reciprocamente, suponhamos que M é um R -módulo uniforme; então, como $M \leq_e E(M)$, pelo Lema 1.9.2, $E(M)$ é um R -módulo uniforme. ■

O Lema que se segue permite-nos concluir que, se R é anel Noetheriano à direita (ou à esquerda) e M é um R -módulo uniforme, o conjunto $\text{Ass}(M)$ tem um só elemento.

Lema 1.9.4 *Sejam R um anel Noetheriano à direita (ou à esquerda) e M um R -módulo uniforme; então $\text{Ass}(M) = \{P\}$, para algum ideal primo P de R .*

Demonstração. Como R é anel Noetheriano à direita, existe um ideal P que é um anulador em R de um R -submódulo não nulo de M e é maximal entre os anuladores em R de R -submódulos não nulos de M . Seja $N = \text{ann}_M(P)$. Pela Proposição 1.3.1, P é um ideal primo de R , $P = \text{rann}_R(N)$ e N é um R/P -módulo à direita não nulo totalmente fiel, logo, $P \in \text{Ass}(M)$.

Consideremos $Q \in \text{Ass}(M)$, então, $Q = \text{rann}_R(X)$, para algum R/Q -módulo à direita X não nulo totalmente fiel.

Uma vez que M é um R -módulo uniforme, $X \cap N \neq 0$ e, pelo facto de X ser um R/Q -módulo à direita totalmente fiel, $\text{rann}_R(X \cap N) = Q$. Analogamente, como N é um R/P -módulo à direita totalmente fiel,

$$P = \text{rann}_R(X \cap N) = Q,$$

consequentemente, $\text{Ass}(M) = \{P\}$, como desejávamos provar. ■

Com o intuito de definirmos dimensão de Goldie de um R -módulo M , atendamos à seguinte Proposição:

Proposição 1.9.5 *Sejam M um R -módulo e N, L R -submódulos essenciais de M . Suponhamos que*

$$N = N_1 \oplus \dots \oplus N_k,$$

onde N_i é um R -submódulo uniforme de N , para todo $i \in \{1, \dots, k\}$ e

$$L = L_1 \oplus \dots \oplus L_s,$$

onde L_j é um R -submódulo uniforme de L , para todo $j \in \{1, \dots, s\}$. Então, $s = k$.

Demonstração. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $s \geq k$.

Começemos por provar que existe $j \in \{1, \dots, s\}$ tal que $N' = N_2 \oplus \dots \oplus N_k$ intersecta trivialmente L_j . Com efeito, se $N' \cap L_j \neq 0$, para todo $j \in \{1, \dots, s\}$, pela uniformidade de L_j ,

$$N' \cap L_j \leq_e L_j, \text{ para todo } j \in \{1, \dots, s\}.$$

Aplicando a Proposição 1.5.1, concluímos que

$$(N' \cap L_1) \oplus \dots \oplus (N' \cap L_s) \leq_e L_1 \oplus \dots \oplus L_s \leq_e M.$$

Consequentemente, $N' \leq_e M$, o que é absurdo, uma vez que $N' \cap N_1 = 0$. O absurdo resultou de supormos que N' intersecta L_j não trivialmente, para todo $j \in \{1, \dots, s\}$. Consequentemente, existe $j \in \{1, \dots, s\}$ tal que $N' \cap L_j = 0$. Sem perda de generalidade, suponhamos $j = 1$.

Designemos por N'' o R -módulo $N' \oplus L_1$. Observe-se que $N'' \cap N_1 \neq 0$, pois, caso contrário, a soma $N_1 + N' + L_1$ seria uma soma directa, o que contraria o facto de $N_1 \oplus \dots \oplus N_k \leq_e M$. Como N_1 é um R -módulo uniforme, $N'' \cap N_1 \leq_e N_1$, logo, pela Proposição 1.5.1,

$$(N'' \cap N_1) \oplus N_2 \oplus \dots \oplus N_k \leq_e N_1 \oplus N_2 \oplus \dots \oplus N_k \leq_e M.$$

Ora, como

$$(N'' \cap N_1) \oplus N_2 \oplus \dots \oplus N_k \leq N'',$$

concluímos que $N'' \leq_e M$, isto é,

$$L_1 \oplus N_2 \oplus \dots \oplus N_k \leq_e M.$$

Repetindo o processo e se necessário modificando os índices da família $(L_i)_{i \in \{1, \dots, s\}}$, concluímos que

$$L_1 \oplus L_2 \oplus \dots \oplus N_k \leq_e M.$$

Ao fim de k passos, temos

$$L_1 \oplus L_2 \oplus \dots \oplus L_k \leq_e M.$$

Ora, como $L_1 \oplus L_2 \oplus \dots \oplus L_s \leq_e M$, $k = s$, como desejávamos provar. ■

Tendo em consideração a Proposição 1.9.5, podemos agora introduzir o conceito de dimensão de Goldie.

Definição 1.9.6 *Seja n um número natural. Dizemos que um R -módulo à direita M tem **dimensão de Goldie** (ou **dimensão uniforme**) n e escrevemos $u.\dim(M) = n$, se existir um R -submódulo essencial N de M tal que N é uma soma directa de uma família de n R -submódulos uniformes de M . No caso de existir um número natural n nas condições descritas, dizemos que M tem **dimensão de Goldie finita**. Caso contrário, dizemos que M tem **dimensão de Goldie infinita** (ou **dimensão uniforme infinita**) e escrevemos $u.\dim(M) = \infty$. De forma análoga, definimos dimensão de Goldie de um R -módulo à esquerda M .*

Dado um anel R , dizemos que R tem **dimensão de Goldie à direita finita** (respectivamente **dimensão de Goldie à esquerda finita**), se R_R (respectivamente ${}_R R$) tiver dimensão de Goldie finita e afirmamos que R tem **dimensão de Goldie à direita infinita** (respectivamente **à esquerda infinita**) se R_R (respectivamente ${}_R R$) tiver dimensão de Goldie infinita.

Proposição 1.9.7 *Sejam M um R -módulo e n um número natural tal que*

$$u.\dim(M) = n.$$

Seja $N = N_1 \oplus \dots \oplus N_k$ um R -submódulo de M tal que N_i é um R -submódulo não nulo de M , para todo $i \in \{1, \dots, k\}$; então $k \leq n$.

Demonstração. Provaremos a proposição por indução na dimensão de Goldie de R -módulos que têm dimensão de Goldie finita.

Seja M' um R -módulo com dimensão de Goldie $n = 1$; então M' contém um R -submódulo essencial L que é uniforme. Pelo Lema 1.9.2, M' é um R -módulo uniforme. Suponhamos que M' contém um R -submódulo $N' = N'_1 \oplus \dots \oplus N'_k$, onde k é um número natural e N'_i é um R -submódulo não nulo de M' , para todo $i \in \{1, \dots, k\}$. Uma vez que M' é um R -módulo uniforme, concluímos que $k = 1$. Assim, no caso $n = 1$, a proposição é válida.

Seja $n > 1$ e suponhamos que a proposição é válida no caso de o R -módulo considerado ter dimensão de Goldie $n - 1$. Consideremos um R -módulo M' que tem dimensão de Goldie n ; então M' possui um R -submódulo essencial L tal que

$$L = L_1 \oplus \dots \oplus L_n,$$

onde L_i é um R -submódulo uniforme de M' , para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Seja N' um R -submódulo de M' tal que

$$N' = N'_1 \oplus \dots \oplus N'_k,$$

onde N'_i é um R -submódulo não nulo de M' , para todo $i \in \{1, \dots, k\}$, com $k > 1$.

Consideremos $N'' = N'_2 \oplus \dots \oplus N'_k$. Provaremos que existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $N'' \cap L_i = 0$. Com vista a um absurdo, suponhamos que $N'' \cap L_j \neq 0$, para todo $j \in \{1, \dots, n\}$. Como L_j é um R -módulo uniforme,

$$N'' \cap L_j \leq_e L_j, \text{ para todo } j \in \{1, \dots, n\}.$$

Aplicando a Proposição 1.5.1, concluímos que

$$(N'' \cap L_1) \oplus \dots \oplus (N'' \cap L_n) \leq_e L_1 \oplus \dots \oplus L_n \leq_e M'.$$

Consequentemente, $N'' \leq_e M'$, o que é absurdo, uma vez que $N'' \cap N'_1 = 0$. O absurdo resultou de supormos que N'' intersecta L_j não trivialmente, para todo $j \in \{1, \dots, n\}$. Consequentemente, existe $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $N'' \cap L_j = 0$. Sem perda de generalidade, supomos $j = 1$.

Se designarmos o R -módulo

$$(N'_2 \cap L) \oplus \dots \oplus (N'_k \cap L)$$

por N^* , concluímos que $N^* \cap L_1 = 0$ e N^* é um R -submódulo de $L = L_1 \oplus \dots \oplus L_n$. Consideremos o R -homomorfismo

$$\begin{aligned} \phi: N^* &\rightarrow L_2 \oplus \dots \oplus L_n \\ m &\rightarrow m_2 + \dots + m_n \end{aligned},$$

representando-se por $m_1, m_2, \dots, m_n$ os elementos de, respectivamente, $L_1, \dots, L_n$ tais que $m = m_1 + \dots + m_n$. Uma vez que $N^* \cap L_1 = 0$, ϕ é um R -monomorfismo. Ora, como $L \leq_e M'$, então $N'_i \cap L \neq 0$, para todo $i \in \{2, \dots, k\}$. Uma vez que ϕ é um R -monomorfismo, concluímos que $\phi(N'_i \cap L) \neq 0$, para todo $i \in \{2, \dots, k\}$. Consequentemente, $L_2 \oplus \dots \oplus L_n$ contém um R -submódulo

$$L' = \phi(N'_2 \cap L) \oplus \dots \oplus \phi(N'_k \cap L)$$

que é uma soma directa de uma família de $k - 1$ R -submódulos não nulos. Uma vez que o R -módulo $L_2 \oplus \dots \oplus L_n$ tem dimensão de Goldie $n - 1$, aplicando a hipótese de indução, concluímos que $k - 1 \leq n - 1$, logo, $k \leq n$, como desejávamos provar. ■

No Teorema que se segue indicamos uma condição suficiente (e necessária) para um R -módulo não nulo ter dimensão de Goldie infinita. Utilizando esta condição, concluiremos, em particular, que os R -módulos não nulos Noetherianos e os R -módulos não nulos Artinianos têm dimensão de Goldie finita. Para provarmos o Teorema atendamos ao seguinte Lema:

Lema 1.9.8 *Seja M um R -módulo não nulo tal que M não contém somas directas de famílias infinitas de R -submódulos não nulos; então todo o R -submódulo não nulo N de M contém um R -submódulo uniforme.*

Demonstração. Com vista a um absurdo, suponhamos que N é um R -submódulo não nulo de M que não contém R -submódulos uniformes. Então, existem R -submódulos não nulos de N - N_1, N_2 tais que $N_1 \cap N_2 = 0$, logo, $N_1 \oplus N_2 \leq M$. Uma vez que $N_2 \leq N$, N_2 é um R -submódulo de M não uniforme.

Consequentemente, existem R -submódulos não nulos de $N_2 - N_3, N_4$ tais que $N_3 \cap N_4 = 0$, logo,

$$N_1 \oplus N_3 \oplus N_4 \leq M.$$

Repetindo o processo, construímos uma soma directa de uma família infinita de R -submódulos não nulos de M , o que é absurdo. O absurdo resultou de supormos que N não contém R -submódulos uniformes. Logo, todo o R -submódulo não nulo N de M contém um R -submódulo uniforme, como desejávamos provar. ■

Teorema 1.9.9 *Seja M um R -módulo não nulo; então M tem dimensão de Goldie infinita se e só se M contém uma soma directa de uma família infinita de R -submódulos não nulos.*

Demonstração. Se M tem dimensão de Goldie finita, pela Proposição 1.9.7, M não contém uma soma directa de uma família infinita de R -submódulos não nulos.

Para provarmos o teorema é, pois, suficiente provar que, se M não contém uma soma directa de uma família infinita de R -submódulos não nulos, então M tem dimensão de Goldie finita.

Suponhamos que M não contém somas directas de famílias infinitas de R -submódulos não nulos. Pelo Lema 1.9.8, M possui um R -submódulo uniforme N_1 . Se $N_1 \not\leq_e M$, então existe um R -submódulo não nulo N'_2 de M tal que $N_1 \cap N'_2 = 0$. Aplicando o Lema 1.9.8, concluímos que N'_2 possui um R -submódulo uniforme N_2 . Se $N_1 \oplus N_2 \not\leq_e M$, repetimos o processo. Uma vez que M não contém somas directas de famílias infinitas de R -submódulos não nulos, existe um número natural k e existem R -submódulos uniformes de $M - N_1, \dots, N_k$ tais que

$$N_1 \oplus \dots \oplus N_k \leq_e M.$$

Concluimos, assim, que M tem dimensão de Goldie finita, como desejávamos provar. ■

Corolário 1.9.10 *Todo o R -módulo não nulo Noetheriano ou Artiniano tem dimensão de Goldie finita.*

Demonstração. Se M é um R -módulo não nulo Noetheriano ou Artiniano, M não contém somas directas de famílias infinitas de R -submódulos não nulos, logo, pelo Teorema 1.9.9, M tem dimensão de Goldie finita. ■

Corolário 1.9.11 *Todo o R -módulo não nulo Noetheriano ou Artiniano possui um R -submódulo uniforme.*

A Proposição que se segue permite-nos reformular a definição de dimensão de Goldie. Mostraremos que um R -módulo M tem dimensão de Goldie finita igual a n , onde n é um número natural, se e só se M contém uma soma directa de uma família de n R -submódulos não nulos mas não contém uma soma directa de uma família de $n + 1$ R -submódulos não nulos.

Proposição 1.9.12 *Sejam M um R -módulo e n um número natural; então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

- a) M tem dimensão de Goldie n ,*
- b) M contém uma soma directa de uma família de n R -submódulos não nulos mas não contém uma soma directa de uma família de $n + 1$ R -submódulos não nulos.*

Demonstração. Suponhamos que é válida a condição **a)**.

Por definição de dimensão de Goldie, M contém um R -submódulo (essencial) que é uma soma directa de uma família de n R -submódulos (uniformes) não nulos. Pela Proposição 1.9.7, M não contém uma soma directa de uma família de $n + 1$ R -submódulos não nulos.

Reciprocamente, suponhamos que M contém uma soma directa de uma família de n R -submódulos não nulos mas não contém uma soma directa de uma família de $n + 1$ R -submódulos não nulos. Em particular, M não contém uma soma directa de uma família infinita de R -submódulos não nulos, o que, pelo Teorema 1.9.9, nos leva a concluir que M tem dimensão de Goldie finita. Como M contém um R -submódulo que é uma soma directa de uma família de n R -submódulos não nulos e M não contém uma soma directa de uma família de $n + 1$ R -submódulos não nulos, pela Proposição 1.9.7, concluímos que M tem dimensão de Goldie n , como desejávamos provar. ■

Corolário 1.9.13 *Sejam M um R -módulo com dimensão de Goldie finita e N um R -submódulo não nulo de M ; então N tem dimensão de Goldie finita e $u.\dim(N) \leq u.\dim(M)$. Por outro lado, $u.\dim(N) = u.\dim(M)$ se e só se $N \leq_e M$.*

Demonstração. Se $u.\dim(N) > u.\dim(M)$, então, N contém uma soma directa de uma família de $u.\dim(M) + 1$ R -submódulos não nulos. Em particular, M contém uma soma directa de uma família de $u.\dim(M) + 1$ R -submódulos não nulos, o que, pela Proposição 1.9.12, é absurdo. Provamos, assim, que $u.\dim(N) \leq u.\dim(M)$.

Suponhamos, agora, que $N \leq_e M$ e designemos a dimensão de Goldie de N por n . Por definição, existe um R -submódulo essencial N' de N tal que N' é uma soma directa de uma família de n R -submódulos uniformes. Uma vez que $N \leq_e M$, $N' \leq_e M$, logo, M contém um R -submódulo essencial que é uma soma directa de uma família de n R -submódulos uniformes. Concluímos, assim,

que $u.\dim(M) = u.\dim(N) = n$. Reciprocamente, suponhamos que $u.\dim(M) = u.\dim(N) = n$. Por definição, N contém um R -submódulo essencial N' tal que N' é uma soma directa de uma família de n R -submódulos uniformes. Se $N' \not\leq_e M$, existe um R -submódulo não nulo K de M tal que $N' \cap K = 0$, logo, $N' \oplus K \leq M$. Consequentemente, M contém uma soma directa de uma família de $n + 1$ R -submódulos não nulos, o que, pela Proposição 1.9.12, é absurdo. Provamos, assim, que $N' \leq_e M$ e, logo, $N \leq_e M$. ■

Corolário 1.9.14 *Sejam M um R -módulo com dimensão de Goldie finita e*

$$f : M \rightarrow M$$

um R -monomorfismo; então $f(M) \leq_e M$.

Demonstração. Uma vez que $f(M) \simeq M$, $u.\dim(f(M)) = u.\dim(M)$, o que, pelo Corolário 1.9.13, implica $f(M) \leq_e M$, como desejávamos provar. ■

1.10 Dimensão clássica de Krull

Nesta secção introduzimos uma dimensão do $\text{Spec}(R)$ de um anel Noetheriano R - a dimensão clássica de Krull.

Definição 1.10.1 *Dado um anel R , define-se $\text{Spec}(R)^{-1} = \emptyset$ e $\text{Spec}(R)^0$ o conjunto dos ideais maximais de R . Para um ordinal arbitrário α tal que $\alpha > 0$, definimos $\text{Spec}(R)^\alpha$ como*

$$\{P \in \text{Spec}(R) : (\forall Q \in \text{Spec}(R) : P \subsetneq Q, \exists \beta < \alpha : Q \in \text{Spec}(R)^\beta)\}.$$

*Suponhamos que existe um ordinal β tal que $\text{Spec}(R) = \text{Spec}(R)^\beta$. Definimos **dimensão clássica de Krull de R** (e representamo-la por $\text{cl.Krull. dim}(R)$) como sendo o mais pequeno ordinal α para o qual se verifica $\text{Spec}(R) = \text{Spec}(R)^\alpha$.*

Se considerarmos o anel $R = (\mathbb{Z}, +, \times)$, onde os símbolos $+$ e $\times$ representam, respectivamente, a adição e a multiplicação usuais em $\mathbb{Z}$, temos $\text{cl.Krull. dim}(R) = 1$, uma vez que todos os ideais primos de R , à excepção do ideal 0 , são maximais. Por outro lado, pela Proposição 1.7.4, como num anel Artiniano à direita (ou à esquerda) R todos os ideais primos são maximais, temos $\text{cl.Krull. dim}(R) = 0$. O mesmo se passa quando o anel R é simples. Outra classe de anéis em que podemos garantir a existência de dimensão clássica de Krull é a classe dos anéis Noetherianos.

Proposição 1.10.2 *Seja R um anel que satisfaz a condição de cadeia ascendente em ideais primos; então existe $\text{cl.Krull. dim}(R)$.*

Demonstração. [14], Proposição 12.1. ■

Uma consequência imediata da Proposição enunciada é o facto de existir dimensão clássica de Krull para todo o anel Noetheriano à direita ou à esquerda.

Proposição 1.10.3 *Seja R um anel Noetheriano à direita (ou à esquerda) e α um ordinal tal que $\text{cl.Krull.dim}(R) = \alpha$; então, para todo o ordinal β menor ou igual a α , existe um ideal primo P de R tal que $\text{cl.Krull.dim}(R/P) = \beta$.*

Demonstração. [14], Lema 12.2. ■

Corolário 1.10.4 *Sejam R um anel Noetheriano à direita ou à esquerda e P, Q ideais primos de R tais que $P \subsetneq Q$; então existem*

$$\text{cl.Krull.dim}(R/P), \text{cl.Krull.dim}(R/Q) \text{ e}$$

$$\text{cl.Krull.dim}(R/Q) < \text{cl.Krull.dim}(R/P) \leq \text{cl.Krull.dim}(R).$$

Demonstração. Uma vez que R/P e R/Q são anéis Noetherianos à direita ou à esquerda, pela Proposição 1.10.2, existem

$$\text{cl.Krull.dim}(R/P) \text{ e } \text{cl.Krull.dim}(R/Q).$$

Afirmar que $\alpha = \text{cl.Krull.dim}(R/P)$ é equivalente a afirmar que $P \in \text{Spec}(R)^\alpha$ mas $P \notin \text{Spec}(R)^\beta$, para todo o ordinal β tal que $\beta < \alpha$.

Do parágrafo anterior, concluímos que

$$\text{cl.Krull.dim}(R) \geq \alpha = \text{cl.Krull.dim}(R/P).$$

Uma vez que $\alpha = \text{cl.Krull.dim}(R/P)$, concluímos que $P/P \in \text{Spec}(R/P)^\alpha$, logo, $Q/P \in \text{Spec}(R/P)^\beta$, para algum ordinal β tal que $\beta < \alpha$. Consequentemente, $Q \in \text{Spec}(R)^\beta$, para algum ordinal β tal que $\beta < \alpha$, o que nos leva a concluir que

$$\text{cl.Krull.dim}(R/Q) < \alpha = \text{cl.Krull.dim}(R/P),$$

como desejávamos provar. ■

Corolário 1.10.5 *Sejam R um anel Noetheriano à direita ou à esquerda, I um ideal de R e P um ideal primo de R tal que $I \subseteq P$; então $\text{cl.Krull.dim}(R/P) \leq \text{cl.Krull.dim}(R/I)$.*

Demonstração. Como R é um anel Noetheriano à direita ou à esquerda, R/I ainda é um anel Noetheriano à direita ou à esquerda. Pela Proposição 1.10.2, existe $\text{cl.Krull.dim}(R/I)$. Seja α um ordinal tal que $\alpha = \text{cl.Krull.dim}(R/I)$. Por definição de dimensão clássica de Krull, $P/I \in \text{Spec}(R/I)^\alpha$. Consequentemente, $P \in \text{Spec}(R)^\alpha$, o que nos leva a concluir que

$$\text{cl.Krull.dim}(R/P) \leq \alpha = \text{cl.Krull.dim}(R/I),$$

como desejávamos provar. ■

1.11 Alguns resultados sobre grupos

Uma vez que um dos objectivos deste trabalho é estudar anéis graduados por grupos (e, em particular, o processo de localização nestes anéis), necessitaremos de aplicar alguns resultados básicos sobre grupos que recordaremos nesta secção.

Utilizaremos a notação *standard* sobre grupos. Assim, dado um grupo G , denotamos por $H \leq G$ um subgrupo H de G ; denotamos por $H \trianglelefteq G$ um subgrupo normal H de G ; denotamos por $\langle X \rangle$ o subgrupo de G gerado por um subconjunto X de G e denotamos por $[G : H]$ o índice de um subgrupo H de G .

Referiremos, ao longo deste texto, resultados fundamentais sobre grupos - os Teoremas do isomorfismo e o Teorema fundamental dos grupos Abelianos finitamente gerados. As demonstrações destes Teoremas e outros resultados complementares sobre grupos podem ser encontrados em [11], [19], [20] e [31].

De 1954 a 1961, Philip Hall publicou três artigos nos quais estudou grupos solúveis finitamente gerados - [15], [16] e [17]. A sua abordagem baseava-se em propriedades do anel $\mathbb{Z}G$ onde G era um grupo policíclico. Estes três artigos deram origem ao estudo de anéis de grupo de grupos policíclicos segundo o ponto de vista da Teoria dos Anéis.

Nesta secção concentrar-nos-emos numa classe especial de grupos policíclicos - os grupos policíclicos-infinitos - e numa classe de grupos que abarca os grupos policíclicos-infinitos - a classe dos grupos policíclicos-por-finito.

Definição 1.11.1 Dizemos que uma família finita $X = (G_i)_{0 \leq i \leq n}$, com $n \in \mathbb{N}_0$, de subgrupos de um dado grupo G forma uma **série subnormal** de G se $G_0 = \{e\}$, $G_n = G$ e $G_{i-1} \trianglelefteq G_i$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Representamos esta série subnormal do seguinte modo:

$$\{e\} = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq G_n = G$$

e dizemos que a série tem **comprimento** n .

Definição 1.11.2 Dizemos que um grupo G é um grupo **policíclico-por-finito** (respectivamente **policíclico-infinito**) se G tem uma série subnormal

$$\{e\} = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq G_n = G$$

tal que $n \in \mathbb{N}_0$ e G_{i+1}/G_i é um grupo finito ou infinito cíclico (respectivamente infinito cíclico), para todo $0 \leq i \leq n-1$.

Na Proposição seguinte mostramos que a classe dos grupos policíclicos-por-finito e a classe dos grupos policíclicos-infinitos são fechadas para a formação de subgrupos.

Proposição 1.11.3 Todo o subgrupo de um grupo policíclico-por-finito (respectivamente policíclico-infinito) é um grupo policíclico-por-finito (respectivamente policíclico-infinito).

Demonstração. Seja G um grupo policíclico-por-finito. Por definição, existe uma série subnormal

$$\{e\} = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq G_n = G$$

tal que $n \in \mathbb{N}_0$ e G_{i+1}/G_i é um grupo finito ou infinito cíclico, para todo $0 \leq i \leq n-1$.

Consideremos um subgrupo N de G , então,

$$\{e\} = G_0 \cap N \trianglelefteq G_1 \cap N \trianglelefteq \dots \trianglelefteq G_n \cap N = N.$$

Uma vez que, para todo $1 \leq i \leq n$,

$$\frac{G_i \cap N}{G_{i-1} \cap N} = \frac{(G_i \cap N)}{(G_i \cap N) \cap G_{i-1}}$$

e $G_{i-1} \trianglelefteq G_i$, por um Teorema do isomorfismo,

$$\frac{G_i \cap N}{G_{i-1} \cap N} \simeq \frac{(G_i \cap N)G_{i-1}}{G_{i-1}} \leq \frac{G_i}{G_{i-1}},$$

para todo $1 \leq i \leq n$. Uma vez que G_i/G_{i-1} é um grupo infinito cíclico ou finito, concluímos que $(G_i \cap N)/(G_{i-1} \cap N)$ é um grupo infinito cíclico ou finito, para todo $1 \leq i \leq n$. Consequentemente, N é um grupo policíclico-por-finito.

De modo análogo concluímos que, se G é grupo policíclico-infinito, N também o é. ■

Em seguida demonstraremos que a classe dos grupos policíclicos-por-finito é também fechada para a formação de grupos quocientes.

Proposição 1.11.4 *Sejam G um grupo policíclico-por-finito e H um subgrupo normal de G ; então G/H é um grupo policíclico-por-finito.*

Demonstração. Sejam G um grupo policíclico-por-finito e H um subgrupo normal de G . Uma vez que G é um grupo policíclico-por-finito, G tem uma série subnormal

$$\{e\} = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq G_n = G$$

tal que $n \in \mathbb{N}_0$ e G_i/G_{i-1} é um grupo infinito cíclico ou finito, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Como $H \trianglelefteq G$,

$$H \trianglelefteq G_1H \trianglelefteq \dots \trianglelefteq G_nH = GH = G.$$

Consequentemente,

$$\frac{H}{H} \trianglelefteq \frac{G_1H}{H} \trianglelefteq \dots \trianglelefteq \frac{G_nH}{H} = \frac{G}{H}.$$

Uma vez que $G_{i-1}H \trianglelefteq G_iH$ e $G_i \leq G_iH$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, por um Teorema do isomorfismo,

$$\frac{G_i}{G_{i-1}H \cap G_i} \simeq \frac{G_i(G_{i-1}H)}{G_{i-1}H} = \frac{G_iH}{G_{i-1}H},$$

para todo $i \in \{1, \dots, n\}$.

Seja $i \in \{1, \dots, n\}$. Como $G_{i-1} \trianglelefteq G_{i-1}H \cap G_i$ e $G_{i-1} \trianglelefteq G_i$, por um dos Teoremas do isomorfismo,

$$\frac{G_i/G_{i-1}}{(G_{i-1}H \cap G_i)/G_{i-1}} \simeq \frac{G_i}{G_{i-1}H \cap G_i} \simeq \frac{G_iH}{G_{i-1}H}.$$

Assim, se G_i/G_{i-1} for um grupo finito, $(G_iH)/(G_{i-1}H)$ ainda é um grupo finito. Se G_i/G_{i-1} for um grupo infinito cíclico, $(G_iH)/(G_{i-1}H)$ ainda é um grupo cíclico, o que nos leva a concluir que $(G_iH)/(G_{i-1}H)$ é um grupo finito ou um grupo infinito cíclico. Por outro lado, como $H \trianglelefteq G$,

$$\frac{(G_iH)/H}{(G_{i-1}H)/H} \simeq \frac{G_iH}{G_{i-1}H},$$

para todo $1 \leq i \leq n$, o que implica que

$$\frac{(G_iH)/H}{(G_{i-1}H)/H}$$

seja um grupo cíclico infinito ou um grupo finito, para todo $1 \leq i \leq n$. Logo, G/H é um grupo policíclico-por-finito, como desejávamos provar. ■

Podemos, agora, relacionar a classe dos grupos policíclicos-por-finito com outra classe bem conhecida - a dos grupos finitamente gerados.

Lema 1.11.5 *Todo o grupo policíclico-por-finito é finitamente gerado.*

Demonstração. Seja G um grupo policíclico-por-finito. Por definição, existe uma série subnormal

$$\{e\} = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq G_m = G$$

tal que $m \in \mathbb{N}_0$ e G_i/G_{i-1} é um grupo finito ou infinito cíclico, para todo $1 \leq i \leq m$.

Provaremos o lema por indução no comprimento das séries normais de grupos policíclicos-por-finito.

Se $m = 0$, o resultado é trivial.

Seja $n \geq 1$ e suponhamos que, para todo o grupo policíclico-por-finito H que possui uma série subnormal de comprimento $n - 1$:

$$\{e\} = H_0 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq H_{n-1} = H$$

tal que H_i/H_{i-1} é grupo infinito cíclico ou finito, para todo $1 \leq i \leq n-1$, se tem que H é finitamente gerado.

Seja G' um grupo policíclico-por-finito que possui uma série subnormal

$$\{e\} = G'_0 \trianglelefteq G'_1 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq G'_n = G'$$

tal que G'_i/G'_{i-1} é um grupo finito ou cíclico, para todo $1 \leq i \leq n$. Uma vez que G'_{n-1} é um grupo policíclico-por-finito que possui uma série subnormal de comprimento $n-1$:

$$\{e\} = G'_0 \trianglelefteq G'_1 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq G'_{n-1}$$

tal que G'_i/G'_{i-1} é um grupo finito ou infinito cíclico, para todo $1 \leq i \leq n-1$, por hipótese de indução, G'_{n-1} é um grupo finitamente gerado. Designamos por $g_1, \dots, g_k$ os elementos geradores de G'_{n-1} . Uma vez que G'/G'_{n-1} é um grupo cíclico infinito ou um grupo finito, G'/G'_{n-1} é um grupo finitamente gerado. Designamos por $g'_1 G'_{n-1}, \dots, g'_l G'_{n-1}$ os elementos geradores de G'/G'_{n-1} , onde $l \in \mathbb{N}$ e

$$g'_1, \dots, g'_l \in G'.$$

Seja $g \in G'$. Se $g \in G'_{n-1}$, g é gerado pelos elementos $g_1, \dots, g_k$. Caso contrário, existem $k_1, \dots, k_m \in \mathbb{Z}$ tais que

$$g G'_{n-1} = (g'_{i_1} G'_{n-1})^{k_1} \dots (g'_{i_m} G'_{n-1})^{k_m} = ((g'_{i_1})^{k_1} \dots (g'_{i_m})^{k_m}) G'_{n-1},$$

com $i_1, \dots, i_m \in \{1, \dots, l\}$. Em particular,

$$g = (g'_{i_1})^{k_1} \dots (g'_{i_m})^{k_m} h,$$

para algum $h \in G'_{n-1}$. Uma vez que G'_{n-1} é gerado por $\{g_1, \dots, g_k\}$ e g é um elemento arbitrário de G' , concluímos que G' é gerado por

$$\{g'_1, \dots, g'_l\} \cup \{g_1, \dots, g_k\},$$

logo, G' é finitamente gerado.

Demonstrámos, assim, que todo o grupo policíclico-por-finito é finitamente gerado. ■

Pretendemos, agora, mostrar que os grupos policíclicos-por-finito contêm subgrupos policíclicos-infinitos com uma propriedade especial - são subgrupos característicos. Os subgrupos característicos não são mais do que uma generalização dos subgrupos normais.

Em seguida, introduzimos a definição de subgrupo característico de um grupo e algumas propriedades fundamentais.

Definição 1.11.6 Dizemos que um subgrupo H de um grupo G é *característico* em G se $\phi(H) \leq H$, qualquer que seja o automorfismo ϕ de G .

Proposição 1.11.7 *Sejam G um grupo e $H \leq G$; então:*

- a) se H é um subgrupo característico de G e ϕ um automorfismo de G , $\phi(H) = H$;*
- b) se H é um subgrupo característico de G , H é um subgrupo normal de G ;*
- c) se H é um subgrupo característico de G_1 e G_1 é um subgrupo característico (respectivamente normal) de G , então H é subgrupo característico (respectivamente normal) de G ;*
- d) se H é um subgrupo característico de G , G' é um subgrupo de G tal que $H \leq G'$ e G'/H é um subgrupo característico de G/H , então G' é um subgrupo característico de G .*

Demonstração. Sejam G um grupo e H um seu subgrupo característico. Consideremos um automorfismo ϕ de G . Logo, ϕ^{-1} é um automorfismo de G e, por definição, $\phi^{-1}(H) \leq H$. Consequentemente,

$$H = \phi(\phi^{-1}(H)) \leq \phi(H).$$

Como, por definição de subgrupo característico, $\phi(H) \leq H$, concluímos que $H = \phi(H)$ e obtemos a). Uma vez que, para cada $h \in G$, os homomorfismos do tipo

$$\begin{array}{ccc} \phi_h: & G & \rightarrow & G \\ & g & \rightarrow & hgh^{-1} \end{array}$$

são automorfismos de G , resulta, da alínea a), que $gHg^{-1} = H$, para todo $g \in G$, o que é equivalente a afirmar que H é um subgrupo normal de G , logo, tem-se b).

c) Suponhamos que G_1 é um subgrupo característico de G e H é um subgrupo característico de G_1 . Provaremos que H é um subgrupo característico de G . Com efeito, se considerarmos um automorfismo ϕ de G , concluímos, pelo facto de G_1 ser um subgrupo característico de G , que $\phi(G_1) = G_1$, logo, $\phi|_{G_1}$ é um automorfismo de G_1 . Consequentemente,

$$\phi|_{G_1}(H) = H,$$

o que é equivalente a afirmar que $\phi(H) = H$. Portanto, H é um subgrupo característico de G .

Se G_1 for um subgrupo normal de G e considerarmos $g \in G$, temos que $gG_1g^{-1} = G_1$, logo, a aplicação

$$\begin{array}{ccc} \phi: & G_1 & \rightarrow & G_1 \\ & g_1 & \rightarrow & gg_1g^{-1} \end{array}$$

é um automorfismo de G_1 . Suponhamos que H é um subgrupo característico de G_1 , então, $\phi(H) = H$, isto é, $gHg^{-1} = H$. Provamos, assim, que H é um subgrupo normal de G .

d) Sejam G um grupo, α um automorfismo de G , G' um subgrupo de G e H um subgrupo característico de G tal que $H \leq G'$ e G'/H é um subgrupo característico de G/H . Uma vez que H é um subgrupo característico de G , $\alpha(H) = H$. Consequentemente, $gH = g'H$ implica $\alpha(g')^{-1}\alpha(g) \in H$, ou seja, $\alpha(g')H = \alpha(g)H$. Portanto,

$$\begin{aligned} \phi: G/H &\rightarrow G/H \\ gH &\rightarrow \alpha(g)H \end{aligned}$$

está bem definida. Observe-se que ϕ é um automorfismo de G/H . Uma vez que G'/H é um subgrupo característico de G/H , $\phi(gH) \in G'/H$, para todo $g \in G'$. Assim, para todo $g \in G'$, existe $g' \in G'$ tal que $\alpha(g)H = g'H$. Consequentemente, $(g')^{-1}\alpha(g) \in H$, o que nos leva a concluir que $\alpha(G') \leq G'$, isto é, G' é um subgrupo característico de G , como desejávamos provar. ■

Podemos, agora, mostrar que todo o grupo policíclico-por-finito G contém um subgrupo característico policíclico-infinito com índice finito em G . Começamos, porém, por demonstrar alguns resultados preliminares.

Proposição 1.11.8 *Sejam L um grupo, N um subgrupo finito normal de L tal que L/N é um grupo infinito cíclico; então existe $x \in L$ tal que $L = \langle N, x \rangle$ e existe um número natural t tal que*

$$x^t n = n x^t,$$

qualquer que seja $n \in N$.

Demonstração. Uma vez que L/N é um grupo infinito cíclico, L/N é gerado por um elemento $y = xN$, para algum $x \in L$. Consequentemente, $L = \langle x, N \rangle$. Designemos a cardinalidade de N por k e representemos os elementos de N por $n_1, \dots, n_k$.

Como N é um subgrupo finito normal de L , existe $t_1 \in \mathbb{N}$ tal que $x^{-t_1} n_1 x^{t_1} = n_1$. Analogamente, concluímos que existe $t_2 \in \mathbb{N}$ tal que $x^{-t_2} n_2 x^{t_2} = n_2$, logo,

$$x^{-t_1 t_2} n_2 x^{t_1 t_2} = n_2.$$

Observe-se que

$$x^{-t_1 t_2} n_1 x^{t_1 t_2} = n_1.$$

Repetindo o processo k vezes, determinamos $t \in \mathbb{N}$ tal que $x^{-t} n_i x^t = n_i$, para todo $1 \leq i \leq k$, como desejávamos provar. ■

Corolário 1.11.9 *Sejam L um grupo, N um subgrupo finito normal de L tal que L/N é um grupo infinito cíclico; então existe $y \in L$ tal que $\langle y \rangle$ é um subgrupo normal infinito cíclico de L e $[L : \langle y \rangle] < \infty$.*

Demonstração. Consideremos o elemento $y = x^t$ construído na Proposição 1.11.8. Por definição de x , $\langle xN \rangle = L/N$ é um grupo infinito cíclico. Consequentemente, $\langle x \rangle$ é um subgrupo infinito cíclico de L , o que nos leva a concluir que $\langle x^t \rangle$ é um subgrupo cíclico infinito de L . Uma vez que $L = \langle N, x \rangle$ e $x^t n = n x^t$, para todo $n \in N$, temos $\langle y \rangle \trianglelefteq L$.

Por outro lado, como

$$L/\langle y \rangle = \{n x^i \langle y \rangle : i \in \{1, \dots, t\}, n \in N\},$$

concluimos que $[L : \langle y \rangle] < \infty$, como desejávamos provar. ■

Proposição 1.11.10 *Sejam G um grupo finitamente gerado e n um número natural; então G tem apenas um número finito de subgrupos com índice menor ou igual a n em G .*

Demonstração. Sejam G um grupo finitamente gerado e n um número natural.

Seja H um subgrupo de G tal que $[G : H] = m \leq n$ e seja G_{ρ_H} o conjunto constituído pelas classes de equivalência da relação ρ_H definida em G do seguinte modo:

$$a \rho_H b \Leftrightarrow a^{-1}b \in H,$$

para todos $a, b \in G$.

Para cada $g \in G$, consideremos as aplicações da forma

$$\begin{array}{ccc} \sigma_g : & G_{\rho_H} & \rightarrow & G_{\rho_H} \\ & g'H & \rightarrow & gg'H \end{array}.$$

Observe-se que estas aplicações são permutações de G_{ρ_H} . Uma vez que $[G : H] = m$, G_{ρ_H} é um conjunto finito com m elementos e o grupo $S_{G_{\rho_H}}$ das permutações de G_{ρ_H} (com a operação composição de funções) é finito e isomorfo a S_m , onde S_m representa o grupo simétrico de grau m . Consideremos o homomorfismo de grupos

$$\begin{array}{ccc} \sigma : & G & \rightarrow & S_{G_{\rho_H}} \\ & g & \mapsto & \sigma_g \end{array}.$$

Provaremos, em seguida, que $H = \sigma^{-1}(\sigma(H))$. É óbvio que $H \leq \sigma^{-1}(\sigma(H))$. Reciprocamente, se $x \in G$ é tal que $\sigma(x) \in \sigma(H)$, então existe $h \in H$ tal que

$$xgH = hgH, \text{ para todo } g \in G.$$

Em particular, $xH = hH$, o que implica $x \in H$. Portanto,

$$H = \sigma^{-1}(\sigma(H)).$$

Ora, como $\sigma(H) \leq S_{G_{\rho_H}}$, $H = \sigma^{-1}(W')$, para algum subgrupo W' de $S_{G_{\rho_H}}$. Mas $S_{G_{\rho_H}} \simeq S_m$, assim, H é igual à imagem recíproca de um subgrupo W de S_m por um homomorfismo de grupos $\varphi: G \rightarrow S_m$. Uma vez que o homomorfismo φ fica determinado pelas imagens dos geradores de G , concluímos, pelo facto de G ser um grupo finitamente gerado e S_m ser um grupo finito, que existe um número finito de homomorfismos do tipo $\varphi: G \rightarrow S_m$. Por outro lado, como S_m é um grupo finito, S_m possui um número finito de subgrupos, pelo que existe um número finito de possibilidades para H , logo, G possui um número finito de subgrupos de índice m , para todo $m \leq n$. Consequentemente, G possui apenas um número finito de subgrupos de índice menor ou igual a n . ■

Proposição 1.11.11 *Todo o grupo policíclico-por-finito G possui um subgrupo característico H policíclico-infinito que tem índice finito em G .*

Demonstração. Seja G um grupo policíclico-por-finito. Por definição, existe uma série subnormal

$$\{e\} = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq G_n = G$$

tal que $n \in \mathbb{N}_0$ e G_{i+1}/G_i é um grupo finito ou infinito cíclico, para todo $0 \leq i \leq n-1$.

Provaremos a proposição por indução no comprimento das séries normais do tipo da série acima indicada.

Se $n = 0$, o resultado é trivial.

Seja $n \geq 1$ e suponhamos que, para todo o grupo H policíclico-por-finito que possui uma série subnormal

$$\{e\} = H_0 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq H_{n-1} = H$$

tal que H_{i+1}/H_i é um grupo infinito cíclico ou finito, para todo $0 \leq i \leq n-2$, se tem que H possui um subgrupo característico policíclico-infinito N tal que N tem índice finito em H .

Seja G' um grupo policíclico-por-finito que possui uma série subnormal

$$\{e\} = G'_0 \trianglelefteq G'_1 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq G'_n = G'$$

tal que G'_{i+1}/G'_i é um grupo finito ou infinito cíclico, para todo $0 \leq i \leq n-1$. Por hipótese de indução, G'_{n-1} tem um subgrupo característico policíclico-infinito H tal que H tem índice finito em G'_{n-1} . Uma vez que H é um subgrupo característico de G'_{n-1} e G'_{n-1} é um subgrupo normal de G' , pela Proposição 1.11.7, H é um subgrupo normal de G' . Por definição, G'/G'_{n-1} é um grupo finito ou infinito cíclico. Se G'/G'_{n-1} for um grupo finito,

$$\frac{G'/H}{G'_{n-1}/H}$$

é um grupo finito e, uma vez que G'_{n-1}/H é um grupo finito, G'/H também o é. Assim, G' tem um subgrupo normal policíclico-infinito com índice finito em G' . Provaremos, em seguida, que se G'/G'_{n-1} for um grupo infinito cíclico, G' tem um subgrupo normal policíclico-infinito com índice finito em G' . Uma vez que $G'_{n-1}/H \trianglelefteq G'/H$, G'_{n-1}/H é um grupo finito e

$$\frac{G'}{G'_{n-1}} \simeq \frac{G'/H}{G'_{n-1}/H}$$

é um grupo infinito cíclico, pelo Corolário 1.11.9, existe $y \in G'/H$ tal que $\langle y \rangle$ é um subgrupo normal infinito cíclico de $L = G'/H$ e $[L : \langle y \rangle] < \infty$.

Seja $x \in G'$ tal que $y = xH$.

Verificaremos que $M = \langle x, H \rangle$ é um subgrupo normal de G' . Com efeito, como $\langle y \rangle$ é um subgrupo normal de G'/H , se considerarmos $g \in G'$, $(gH)\langle xH \rangle = \langle xH \rangle(gH)$. Logo,

$$(gH)(xH) = (xH)^k(gH),$$

para algum número inteiro k , o que nos leva a concluir que $gx = x^kgh$, para algum $h \in H$. Como $H \trianglelefteq G'$, concluímos que

$$gx = x^k h' g,$$

para algum $h' \in H$, portanto, $gx \in Mg$. Assim, como M é gerado por x e por H e $H \trianglelefteq G'$, então $gM \subseteq Mg$, para todo $g \in G'$. Consequentemente, M é um subgrupo normal de G' . Uma vez que

$$\frac{G'}{M} \simeq \frac{G'/H}{\langle x, H \rangle/H} \simeq \frac{G'/H}{\langle xH \rangle}$$

e $[L : \langle xH \rangle] < \infty$, concluímos que M tem índice finito em G' . Por outro lado,

$$\frac{M}{H} = \frac{\langle x, H \rangle}{H} \simeq \langle xH \rangle$$

é um grupo infinito cíclico e H é um grupo policíclico-infinito, logo, M é um grupo policíclico-infinito.

Concluímos assim que, em ambos os casos considerados, G' tem um subgrupo normal policíclico-infinito M com índice finito em G' .

Com o intuito de verificarmos que G' tem um subgrupo característico policíclico-infinito com índice finito em G' , consideremos a intersecção de todos os subgrupos normais de G' de índice $[G' : M]$ e designemos este grupo por T . Pelo Lema 1.11.5, G' é um grupo finitamente gerado, o que, pela Proposição 1.11.10, nos leva a concluir que G' apenas tem um número finito de subgrupos normais de índice $[G' : M]$ em G' . Designemos estes subgrupos por $H_1, \dots, H_n$ e consideremos um

automorfismo α de G' . Uma vez que, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, $\alpha(H_i)$ é um subgrupo normal de G' com índice $[G' : M]$ e $\alpha(H_i) \neq \alpha(H_j)$, para todo $1 \leq j \leq n$ tal que $i \neq j$, então

$$T = \cap_{i=1}^n H_i = \cap_{i=1}^n \alpha(H_i).$$

Como

$$\alpha(T) = \alpha(\cap_{i=1}^n H_i) \leq \cap_{i=1}^n \alpha(H_i) = T,$$

concluimos que $\alpha(T) \leq T$ e, que, portanto, T é um subgrupo característico de G' . Para verificarmos que T tem índice finito em G' , consideremos o homomorfismo de grupos

$$\begin{aligned} \pi : \quad \frac{G'}{T} &\rightarrow \times_{i=1}^n \frac{G'}{H_i} \\ gT &\rightarrow \times_{i=1}^n (gH_i) \end{aligned}.$$

Uma vez que π é um monomorfismo, G'/T é isomorfo a um subgrupo de

$$X = \times_{i=1}^n (G'/H_i)$$

e, uma vez que X é um grupo finito, G'/T é um grupo finito, pelo que T tem índice finito em G' .

Uma vez que $T \leq M$ e M é um grupo policíclico-infinito, pela Proposição 1.11.3, T é um grupo policíclico-infinito. Mostramos, assim, que G' possui um subgrupo característico policíclico-infinito com índice finito em G' . Consequentemente, todo o grupo policíclico-por-finito G possui um subgrupo característico H policíclico-infinito que tem índice finito em G . ■

Num grupo policíclico-por-finito G construímos um subgrupo característico policíclico-infinito que tem índice finito em G . Podemos, agora, demonstrar que é possível construir um subgrupo característico, Abeliano e livre.

Definição 1.11.12 *Seja G um grupo. Dizemos que G é **resolúvel**, se existir uma série subnormal*

$$\{e\} = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq G_n = G$$

tal que G_i/G_{i-1} é um grupo Abeliano, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$.

Observe-se que nem todos os grupos são solúveis. Por exemplo, os grupos simples não Abelianos não são solúveis. Como exemplo de um grupo simples não Abeliano, tome-se o subgrupo A_5 (das permutações pares) do grupo simétrico de grau 5 - S_5 .

Definição 1.11.13 Dizemos que um grupo G é **livre de torção** se o único elemento $g \in G$ para o qual se verifica que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $g^n = e$, onde e é o elemento neutro de G , é o próprio elemento e .

Proposição 1.11.14 Todo o grupo policíclico-infinito é resolúvel e livre de torção.

Demonstração. Seja G um grupo policíclico-infinito. Por definição, existe uma série subnormal

$$\{e\} = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq G_n = G$$

tal que G_i/G_{i-1} é um grupo infinito cíclico, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Como G_i/G_{i-1} é um grupo cíclico, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, em particular, G_i/G_{i-1} é um grupo Abelian, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Consequentemente, G é resolúvel, como desejávamos provar.

Por outro lado, suponhamos que existe $g \in G \setminus \{e\}$ tal que $g^m = e$, para algum número natural m . Então, existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $g \in G_i \setminus G_{i-1}$. Consequentemente, $gG_{i-1} \neq G_{i-1}$. Mas

$$(gG_{i-1})^m = g^m G_{i-1} = G_{i-1},$$

o que contraria o facto de G_i/G_{i-1} ser um grupo cíclico infinito. Consequentemente, G é um grupo livre de torção, como desejávamos provar. ■

Definição 1.11.15 Seja G um grupo. Definimos $G^{(0)} = G$ e, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$G^{(n)} = \langle \{x^{-1}y^{-1}xy : x, y \in G^{(n-1)}\} \rangle.$$

O subgrupo $G^{(1)}$ de G é designado por **grupo derivado** de G .

Observe-se que, na definição anterior, $G^{(n)}$ é o grupo derivado de $G^{(n-1)}$, para todo o número natural n .

Proposição 1.11.16 Sejam G um grupo e H o grupo derivado de G ; então H é um subgrupo característico de G .

Demonstração. Sejam G um grupo, H o grupo derivado de G e α um automorfismo de G ; então

$$\alpha(H) = \langle \{\alpha(x^{-1}y^{-1}xy) : x, y \in G\} \rangle.$$

Uma vez que

$$\alpha(x^{-1}y^{-1}xy) = \alpha(x)^{-1}\alpha(y)^{-1}\alpha(x)\alpha(y)$$

e $\alpha(x)^{-1}\alpha(y)^{-1}\alpha(x)\alpha(y) \in H$, para todos $x, y \in G$, então $\alpha(H) \leq H$. Consequentemente, H é um subgrupo característico de G . ■

Corolário 1.11.17 *Seja G um grupo; então, para todo $n \in \mathbb{N}$, $G^{(n)}$ é um subgrupo característico de G .*

Demonstração. Sejam G um grupo e n um número natural. Para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, $G^{(i)}$ é o grupo derivado de $G^{(i-1)}$. Consequentemente, pela Proposição 1.11.16, $G^{(i)}$ é um subgrupo característico de $G^{(i-1)}$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Aplicando a Proposição 1.11.7, concluímos que $G^{(n)}$ é um subgrupo característico de G . ■

Proposição 1.11.18 *Sejam G um grupo e H o grupo derivado de G ; então H é um subgrupo normal de G , G/H é um grupo Abelian e, se K é um subgrupo normal de G tal que G/K é um grupo Abelian, então $H \leq K$.*

Demonstração. Sejam G um grupo, H o grupo derivado de G e K um subgrupo normal de G tal que G/K é um grupo Abelian. Pela Proposição 1.11.16, H é um subgrupo característico de G , logo, é um subgrupo normal de G .

Seja K' um subgrupo normal de G . Afirmar que G/K' é um grupo Abelian é equivalente a afirmar que

$$(xK')(yK') = (yK')(xK'),$$

para todos $x, y \in G$, isto é, $x^{-1}y^{-1}xyK' = K'$, para todos $x, y \in G$. Consequentemente, afirmar que G/K' é um grupo Abelian é equivalente a afirmar que $x^{-1}y^{-1}xy \in K'$, para todos $x, y \in G$.

Do parágrafo anterior concluímos que, dado K um subgrupo normal de G tal que G/K é grupo Abelian, $H \leq K$. Além disso concluímos que G/H é um grupo Abelian, como desejávamos provar. ■

A Proposição que se segue permite-nos reformular a definição de grupo resolúvel. Assim, um grupo G é resolúvel se e só se existir um número natural n tal que $G^{(n)} = \{e\}$.

Proposição 1.11.19 *Um grupo G é resolúvel se e só se existe um número natural k tal que $G^{(k)} = \{e\}$.*

Demonstração. Seja G um grupo tal que $G^{(k)} = \{e\}$, para algum número natural k ; então G admite uma série subnormal

$$\{e\} = G^{(k)} \trianglelefteq \dots \trianglelefteq G^{(0)} = G.$$

Uma vez que $G^{(i)}$ é o grupo derivado de $G^{(i-1)}$, para todo $i \in \{1, \dots, k\}$, pela Proposição 1.11.18, $G^{(i-1)}/G^{(i)}$ é um grupo Abelian, para todo $1 \leq i \leq k$, logo, G é um grupo resolúvel.

Reciprocamente, consideremos um grupo resolúvel G , então, G admite uma série subnormal

$$\{e\} = H_0 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq H_n = G$$

tal que H_i/H_{i-1} é um grupo Abelian, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Como G/H_{n-1} é um grupo Abelian, pela Proposição 1.11.18, $G^{(1)} \subseteq H_{n-1}$.

Por outro lado, como H_{n-1}/H_{n-2} é um grupo Abelian, H_{n-2} contém o grupo derivado de H_{n-1} , isto é, H_{n-2} contém o grupo

$$\langle \{x^{-1}y^{-1}xy : x, y \in H_{n-1}\} \rangle.$$

Em particular, H_{n-2} contém o grupo

$$\langle \{x^{-1}y^{-1}xy : x, y \in G^{(1)}\} \rangle,$$

logo, $G^{(2)} \subseteq H_{n-2}$. Repetindo o raciocínio n vezes, deduzimos que

$$G^{(n)} \subseteq H_0 = \{e\},$$

o que nos leva a concluir que existe um número natural k ($k = n$) tal que $G^{(k)} = \{e\}$, como desejávamos provar. ■

Na Proposição 1.11.11 verificámos que todo o grupo policíclico-por-finito G possuía um subgrupo característico policíclico-infinito que tem índice finito em G . Em particular, podemos construir uma série subnormal

$$\{e\} = G_0 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq G_n = G$$

tal que G/G_{n-1} é um grupo finito e G_i/G_{i-1} é um grupo Abelian e livre, para todo $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Provaremos em seguida que é possível construir uma série de subgrupos característicos de G que satisfazem as condições descritas.

Teorema 1.11.20 *Seja G um grupo policíclico-por-finito; então G possui uma série de subgrupos característicos*

$$\{e\} = G_0 \leq G_1 \leq \dots \leq G_n = G$$

tal que $n \in \mathbb{N}_0$, G/G_{n-1} é um grupo finito e G_i/G_{i-1} é um grupo livre e Abelian, para todo i tal que $1 \leq i \leq n-1$. Além disso, G_j/G_i é um subgrupo característico de G/G_i , para todo $i \in \{0, \dots, n-1\}$, para todo j tal que $i < j \leq n$.

Demonstração. Pela Proposição 1.11.11, G possui um subgrupo característico policíclico-infinito H tal que G/H é grupo finito.

Se $H = \{e\}$, o resultado é trivial.

Suponhamos que $H \neq \{e\}$ e consideremos os subgrupos de H da forma $H^{(k)}$, com $k \in \mathbb{N}_0$, tais que $H^{(0)} = H$ e

$$H^{(k)} = \langle \{x^{-1}y^{-1}xy : x, y \in H^{(k-1)}\} \rangle,$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Como H é um grupo policíclico-infinito, pela Proposição 1.11.14, H é um grupo resolúvel e, pela Proposição 1.11.19, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $H^{(k)} = \{e\}$. Designemos por m o número natural para o qual se verifica que $H^{(m)} = \{e\}$ e $H^{(m-1)} \neq \{e\}$ e designemos o grupo $H^{(m-1)}$ por H_1 . Uma vez que $G_0 = \{e\}$ é o grupo derivado de H_1 , pela Proposição 1.11.18, H_1 é um grupo Abelianano.

Uma vez que H é um grupo policíclico-infinito, pela Proposição 1.11.3, H_1 é um grupo policíclico-infinito, o que, pelo Lema 1.11.5, implica que H_1 seja finitamente gerado.

Observe-se agora que, pela Proposição 1.11.14, H_1 é um grupo livre de torção. Uma vez que H_1 é um grupo Abelianano finitamente gerado e livre de torção, aplicando o Teorema Fundamental dos grupos Abelianos finitamente gerados, concluímos que

$$H_1 \simeq \mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z},$$

para um número k de factores. Assim, H_1 é um grupo Abelianano e livre. Pelo Corolário 1.11.17, concluímos que H_1 é um subgrupo característico de H . Uma vez que H é um subgrupo característico de G , pela Proposição 1.11.7, H_1 é um subgrupo característico de G .

Se G/H_1 for um grupo finito, o resultado está provado.

Suponhamos que G/H_1 não é um grupo finito. Uma vez que, pela Proposição 1.11.4, G/H_1 é um grupo policíclico-por-finito, pela Proposição 1.11.11, existe um subgrupo característico policíclico-infinito L/H_1 de G/H_1 tal que L/H_1 tem índice finito em G/H_1 . Observe-se que $L \neq H_1$ uma vez que L tem índice finito em G mas H_1 não o tem.

Consideremos os subgrupos de L/H_1 da forma $(L/H_1)^{(k)}$, com $k \in \mathbb{N}_0$, apresentados na Definição 1.11.15. Uma vez que L/H_1 é resolúvel, existe um número natural k tal que $(L/H_1)^{(k)} = H_1/H_1$. Designemos por H_2 o subgrupo de G tal que

$$H_2/H_1 = (L/H_1)^{(m-1)},$$

onde m é o menor número natural para o qual se tem $(L/H_1)^{(m)} = H_1/H_1$. Tal como anteriormente, provamos que H_2/H_1 é um grupo Abelianano, livre e é um subgrupo característico de L/H_1 . Uma vez que L/H_1 é um subgrupo característico de G/H_1 , concluímos que H_2/H_1 é um subgrupo característico de G/H_1 . Como H_1 é um subgrupo característico de G , pela Proposição 1.11.7, H_2 é um subgrupo característico de G . Se G/H_2 não for um grupo finito, repetimos o processo. Construimos, assim, uma série de subgrupos característicos de G

$$\{e\} = H_0 \subsetneq H_1 \subsetneq H_2 \subsetneq \dots$$

tal que H_i/H_{i-1} é um grupo Abelian e livre, para todo i . Provaremos em seguida que existe um número natural n tal que G/H_n é um grupo finito. Com vista a um absurdo, suponhamos que tal número natural não existe; então, conseguimos construir uma cadeia de subgrupos de G propriamente ascendente e infinita

$$\{e\} = H_0 \subsetneq H_1 \subsetneq H_2 \subsetneq \dots$$

Consideremos o subgrupo de G - $J = \cup_{i \in \mathbb{N}} H_i$. Como J é um subgrupo de G , J é um grupo policíclico-por-finito e, em particular, é finitamente gerado, o que é absurdo. O absurdo resultou de supormos que não existia um número natural n tal que G/H_n é um grupo finito. Logo, existe uma série de subgrupos característicos de G

$$\{e\} = H_0 \leq \dots \leq H_n \leq H_{n+1} = G \quad (1)$$

tal que G/H_n é um grupo finito e H_{i+1}/H_i é um grupo livre e Abelian, para todo $0 \leq i \leq n-1$.

Se $i = 0$, H_j/H_i é um subgrupo característico de G/H_i , para todo j pertencente a $\{1, \dots, n+1\}$.

Por construção da série apresentada em 1), H_{i+1}/H_i é um subgrupo característico de G/H_i , para todo $i \in \{0, \dots, n\}$. Assim, por construção, H_2/H_1 é um subgrupo característico de G/H_1 . Uma vez que H_3/H_2 é um subgrupo característico de G/H_2 , concluímos que

$$\frac{H_3/H_1}{H_2/H_1}$$

é um subgrupo característico de

$$\frac{G/H_1}{H_2/H_1}.$$

Uma vez que H_2/H_1 é um subgrupo característico de G/H_1 e

$$\frac{H_3/H_1}{H_2/H_1}$$

é um subgrupo característico de

$$\frac{G/H_1}{H_2/H_1},$$

pela Proposição 1.11.7, H_3/H_1 é um subgrupo característico de G/H_1 . Repetindo este processo, concluímos que H_j/H_1 é um subgrupo característico de G/H_1 , para todo $j \in \{4, \dots, n+1\}$. Do mesmo modo, concluímos que H_j/H_i é um subgrupo característico de G/H_i , para todo $i \in \{0, \dots, n\}$, para todo $i < j \leq n+1$, como desejávamos provar. ■

Capítulo 2

Anéis de Fracções

A formação de anéis de fracções e o processo associado de localização são das técnicas mais utilizadas na Álgebra Comutativa.

Neste Capítulo generalizamos a construção de anéis de fracções de anéis comutativos a anéis não comutativos. Para estes anéis, os subconjuntos multiplicativos a considerar terão de satisfazer propriedades adicionais (Lema 2.1.5). Um caso importante na construção de anéis de fracções acontece quando o subconjunto multiplicativo do anel R considerado for $C_R(0)$, o conjunto dos elementos regulares de R (ver Definição 2.2.1). A existência de um anel semisimples de fracções à direita e à esquerda de um anel R com respeito a $C_R(0)$ é condição necessária e suficiente para que R seja anel de Goldie semiprimo.

Dados um R -módulo M e S um subconjunto de R para o qual existe anel de fracções à direita de R com respeito a S - RS^{-1} , podemos construir um RS^{-1} -módulo MS^{-1} , designado por módulo de fracções de M com respeito a S , que satisfaz algumas propriedades especiais (existe um R -homomorfismo $f: M \rightarrow MS^{-1}$ tal que todo o elemento de MS^{-1} pode ser escrito na forma $f(a)x^{-1}$, para alguns $a \in M$, $x \in S$ e $\text{Ker}(f) = \{m \in M : ms = 0, \text{ para algum } s \in S\}$). Os módulos de fracções serão objecto de estudo da última secção deste Capítulo. Debruçar-nos-emos, ainda, sobre a relação existente entre RS^{-1} -submódulos de MS^{-1} e R -submódulos de M .

2.1 Construção de anéis de fracções

Consideremos um anel comutativo R e um **subconjunto multiplicativo** S de R , isto é, um subconjunto de R fechado para o produto tal que $0 \notin S$ e $1 \in S$. Com vista a construir um anel de fracções de R com respeito a S , começamos por definir a relação de equivalência $\sim$ em $R \times S$ tal que

$$(a, s) \sim (b, t) \Leftrightarrow \exists s' \in S : (at - bs)s' = 0,$$

com $a, b \in R$ e $s, t \in S$. Designamos por RS^{-1} o conjunto constituído pelas classes de equivalência da relação $\sim$ e representamos os elementos de RS^{-1} por

rs^{-1} , onde $r \in R$ e $s \in S$. Definindo-se

$$\begin{aligned} (as^{-1}) + (bt^{-1}) &= (at + bs)(st)^{-1} \\ (as^{-1}) \times (bt^{-1}) &= (ab)(st)^{-1} \end{aligned} ,$$

obtém-se em RS^{-1} uma estrutura de anel comutativo. O anel comutativo assim construído é designado por anel de fracções de R com respeito a S e representá-lo-emos por RS^{-1} . Observe-se que, se considerarmos o anel $B = RS^{-1}$ e tomarmos o homomorfismo de anéis

$$\begin{aligned} f : R &\rightarrow B \\ r &\rightarrow r1^{-1} \end{aligned} ,$$

este homomorfismo goza de três propriedades fundamentais:

- a) $f(s)$ é uma unidade de B , para todo $s \in S$,
- b) todo o elemento de B pode ser escrito na forma $f(r)f(s)^{-1}$, para alguns $r \in R$ e $s \in S$,
- c) $\text{Ker}(f) = \{r \in R : rs = 0, \text{ para algum } s \in S\}$.

Reciprocamente, as três condições descritas determinam o anel RS^{-1} , a menos de isomorfismo, isto é, se B for um anel, S um subconjunto multiplicativo de um anel comutativo R e $f : R \rightarrow B$ um homomorfismo de anéis que satisfaz as condições a), b) e c), então $B \simeq RS^{-1}$.

Por analogia com o caso comutativo, pretendemos que a definição de anel de fracções à direita B de um anel não comutativo R com respeito a um subconjunto multiplicativo S de R salvguarde a condição “existe um homomorfismo de anéis $f : R \rightarrow B$ que satisfaz as condições a) b) e c)”. Assim,

Definição 2.1.1 *Sejam R um anel e S um subconjunto multiplicativo de R . Um anel R' é um **anel de fracções à direita de R com respeito a S** se existir um homomorfismo de anéis*

$$\phi : R \rightarrow R'$$

tal que:

- a) $\phi(s)$ é uma unidade de R' , para todo $s \in S$,
- b) todo o elemento de R' pode ser escrito na forma $\phi(a)\phi(s)^{-1}$, para alguns $a \in R$ e $s \in S$,
- c) $\text{Ker}(\phi) = \{r \in R : rs = 0, \text{ para algum } s \in S\}$.

*De forma análoga, definimos **anel de fracções à esquerda** de um anel R com respeito a um subconjunto multiplicativo S de R .*

Embora a definição de anel de fracções à direita R' de um anel R com respeito a um subconjunto multiplicativo X de R dependa do homomorfismo de anéis $\phi : R \rightarrow R'$ escolhido, por abuso de notação, referimo-nos só a R' .

Perante a definição anterior é natural perguntar se “dados um anel não comutativo R e um subconjunto multiplicativo S de R , existe sempre um anel de fracções à direita de R com respeito a S ”. Começemos por analisar o seguinte Exemplo:

Exemplo 2.1.2 *Seja $R = M_2(K)$, o anel das matrizes quadradas 2×2 com entradas num anel K . Consideremos $S = \{id, e_{11}\}$, onde id é o elemento identidade de R e e_{11} é a matriz cuja entrada $(1,1)$ é igual a 1 e as restantes entradas são nulas. O conjunto S é um subconjunto multiplicativo de R .*

*Suponhamos que existe um anel de fracções à direita de R com respeito a S , que designamos por R' . Sejam $\phi: R \rightarrow R'$ um homomorfismo de anéis que satisfaz as condições **a)**, **b)** e **c)** descritas na Definição 2.1.1 e e_{21} a matriz cujas entradas são todas nulas à excepção da entrada $(2,1)$ que é igual a 1. Como $e_{21}e_{11} \neq 0$, $e_{21}id \neq 0$, por **c)**, $e_{21} \notin \text{Ker}(\phi)$. Por outro lado, $e_{11}e_{21} = 0$ implica $\phi(e_{11})\phi(e_{21}) = 0$ e, como por **a)**, $\phi(e_{11})$ é uma unidade de R' , $\phi(e_{21}) = 0$, o que é absurdo. O absurdo resultou de supormos que existia um anel de fracções à direita de R com respeito a S .*

O Exemplo anterior permite-nos concluir que pode não existir anel de fracções à direita de um dado anel não comutativo R com respeito a um subconjunto S multiplicativo de R . Com efeito, verificaremos seguidamente que, para existir anel de fracções à direita de um dado anel R com respeito a um subconjunto S multiplicativo de R , S tem de ser um conjunto “especial” - um conjunto de denominadores à direita.

Definição 2.1.3 *Sejam R um anel e S um subconjunto multiplicativo de R . O conjunto S é um **conjunto de Ore à direita** em R , se $rS \cap sR \neq \emptyset$, para todos $r \in R$ e $s \in S$. O conjunto S é um **conjunto reversível à direita** em R se, para todos $r \in R$ e $s \in S$ tais que $sr = 0$, existir $s' \in S$ tal que $rs' = 0$. Se S for simultaneamente um conjunto de Ore à direita em R e um conjunto reversível à direita em R , então S é um **conjunto de denominadores à direita** em R . De forma análoga, definimos **conjunto de Ore à esquerda**, **conjunto reversível à esquerda** e **conjunto de denominadores à esquerda**.*

Proposição 2.1.4 *Sejam R um anel que satisfaz c.c.a. em anuladores à direita em R e C um conjunto de Ore à direita em R ; então C é um conjunto reversível à direita em R . Em particular, se R for um anel Noetheriano à direita e C for um conjunto de Ore à direita em R , C é um conjunto reversível à direita em R .*

Demonstração. Seja R um anel que satisfaz c.c.a. em anuladores à direita em R e consideremos $c \in C$ e $r \in R$ tais que $cr = 0$. Consideremos a cadeia de ideais direitos

$$\text{rann}_R(c) \subseteq \text{rann}_R(c^2) \subseteq \dots \subseteq \text{rann}_R(c^n) \subseteq \dots$$

Uma vez que R satisfaz c.c.a. em anuladores à direita em R , existe um número natural n tal que

$$\text{rann}_R(c^n) = \text{rann}_R(c^{n+1}).$$

Como C é um conjunto de Ore à direita em R , existem $d \in C$ e $s \in R$ tais que $c^n s = rd$, logo,

$$c^{n+1}s = crd = 0,$$

o que nos leva a concluir que $s \in \text{rann}_R(c^{n+1})$. Uma vez que $\text{rann}_R(c^{n+1}) = \text{rann}_R(c^n)$, $0 = c^n s = rd$ e C é reversível à direita. ■

Da Proposição anterior, concluimos que, se R for um anel Noetheriano à direita e S for um subconjunto multiplicativo de R , então, as condições “ S é um conjunto de Ore à direita” e “ S é um conjunto de denominadores à direita” são equivalentes.

Lema 2.1.5 *Sejam R um anel e S um subconjunto multiplicativo de R . Suponhamos que existe um anel de fracções à direita de R com respeito a S , então S é um conjunto de denominadores à direita em R .*

Demonstração. Seja R' um anel de fracções à direita de R com respeito a S e $\phi: R \rightarrow R'$ um homomorfismo de anéis que satisfaz as condições **a)**, **b)** e **c)** descritas na Definição 2.1.1.

Começamos por mostrar que S é um conjunto de Ore à direita em R . Sejam $r \in R$ e $s \in S$; então, por **a)**, $\phi(s)$ é uma unidade de R' e, como R' é um anel, $\phi(s)^{-1}\phi(r) \in R'$. Por **b)**, existem $s' \in S$ e $r' \in R$ tais que

$$\phi(s)^{-1}\phi(r) = \phi(r')\phi(s')^{-1},$$

logo, $\phi(rs' - sr') = 0$, de onde concluimos, por **c)**, que existe $s'' \in S$ tal que $r(s's'') = s(r's'')$. Como $s's'' \in S$ e $r's'' \in R$, está provado que S é um conjunto de Ore à direita em R .

Por outro lado, se $r \in R$ e $s \in S$ são tais que $sr = 0$, então $\phi(s)\phi(r) = 0$, logo, aplicando **a)**, $\phi(r) = 0$, de onde concluimos que existe $s' \in S$ tal que $rs' = 0$, isto é, S é um conjunto reversível à direita. ■

O Lema apresentado admite recíproca, mas, para a demonstrarmos, necessitamos de introduzir novos resultados e definições. Começamos por introduzir um R -submódulo especial de um dado R -módulo M .

Lema 2.1.6 *Sejam R um anel, X um conjunto de Ore à direita em R e A um R -módulo; então*

$$t_X(A) = \{a \in A : ax = 0, \text{ para algum } x \in X\}$$

é um R -submódulo de A .

Demonstração. Consideremos $a_1, a_2 \in t_X(A)$; então, existem $x_1, x_2 \in X$ tais que $a_1x_1 = a_2x_2 = 0$. Como X é um conjunto de Ore à direita, existem $r_1 \in R$ e $r_2 \in X$ tais que

$$x_1r_1 = x_2r_2 = z \text{ e } z \in X,$$

logo, $(a_1 + a_2)z = 0$ e $a_1 + a_2 \in t_X(A)$. Analogamente, provamos que $a_1 - a_2 \in t_X(A)$. Por outro lado, dado $r \in R$, existem $r' \in R$ e $x \in X$ tais que $rx = x_1r'$, logo,

$$(a_1r)x = a_1x_1r' = 0$$

e $a_1r \in t_X(A)$.

Estão, pois, reunidas condições que nos permitem garantir que $t_X(A)$ é um R -submódulo de A . ■

O Lema anterior dá origem à seguinte definição:

Definição 2.1.7 Dados um anel R , um conjunto X de Ore à direita em R e um R -módulo A , o R -submódulo de A - $t_X(A)$ designa-se por **R -submódulo de X -torção** de A . Dizemos que A é de **X -torção** se $t_X(A) = A$ e A é **livre de X -torção** se $t_X(A) = 0$.

Definição 2.1.8 Sejam R um anel, X um conjunto de Ore à direita e A um R -módulo. Um elemento $a \in A$ é de **X -torção** se existir $x \in X$ tal que $ax = 0$, caso contrário, a é **livre de X -torção**.

Observação 2.1.9 Sejam R um anel, X um conjunto de Ore à direita em R e A um R -módulo. O R -módulo $A/t_X(A)$ é um exemplo de um R -módulo livre de X -torção. Com efeito, se

$$(a + t_X(A)) \in t_X(A/t_X(A)),$$

então existe $x \in X$ tal que $ax \in t_X(A)$, logo, existe $x' \in X$ tal que $a(xx') = 0$. Uma vez que $xx' \in X$, concluímos que $a \in t_X(A)$ ou, equivalentemente, $a + t_X(A) = 0$, logo, $t_X(A/t_X(A)) = 0$.

O Lema que se segue permite-nos reduzir o problema de encontrar um anel de fracções à direita de um anel R com respeito a um conjunto X de denominadores à direita em R ao de encontrar um anel de fracções à direita de um anel R' com respeito a um conjunto de denominadores à direita X' em R' tal que $t_{X'}(R'_{R'}) = 0$.

Lema 2.1.10 Sejam R um anel, X um conjunto de denominadores à direita em R e $\overline{X} = \pi(X)$, onde π é o epimorfismo

$$\begin{array}{ccc} \pi: & R & \rightarrow R/t_X(R_R) \\ & r & \rightarrow r + t_X(R_R) \end{array}$$

Então:

- a) $t_X(R_R)$ é um ideal próprio de R , $\overline{X}$ é um conjunto de denominadores à direita em $R/t_X(R_R)$ e $t_{\overline{X}}(R/t_X(R_R)) = 0$.
b) Se existir um anel de fracções à direita Z de $R/t_X(R_R)$ com respeito a $\overline{X}$, então Z ainda é um anel de fracções à direita de R com respeito a X .

Demonstração. a) Facilmente se verifica que $t_X(R_R)$ é um ideal esquerdo de R . Pelo Lema 2.1.6, $t_X(R_R)$ é também um ideal direito de R . Uma vez que $1 \notin t_X(R_R)$, concluímos que $t_X(R_R)$ é um ideal próprio de R .

É consequência imediata de X ser um conjunto de Ore à direita em R o facto de $\overline{X}$ ser um conjunto de Ore à direita em $R/t_X(R_R)$. Suponhamos, agora, que existem $r \in R$ e $x \in X$ tais que

$$(x + t_X(R_R))(r + t_X(R_R)) = 0,$$

logo, $rx \in t_X(R_R)$, o que nos leva a concluir que existe $x' \in X$ tal que $x(rx') = 0$. Pelo facto de X ser reversível à direita, existe $x'' \in X$ tal que $r(x'x'') = 0$, portanto,

$$(r + t_X(R_R))(x'x'' + t_X(R_R)) = 0,$$

logo, $\overline{X}$ é um conjunto reversível à direita em $R/t_X(R_R)$. Estão, pois, reunidas as condições necessárias para garantir que $\overline{X}$ é um conjunto de denominadores à direita em $R/t_X(R_R)$.

Pela Observação 2.1.9, $t_X(R/t_X(R_R)) = 0$, logo, $t_{\overline{X}}(R/t_X(R_R)) = 0$.

b) Suponhamos que existe um anel de fracções à direita Z de $R/t_X(R_R)$ com respeito a $\overline{X}$; então, existe um homomorfismo de anéis

$$\phi: R/t_X(R_R) \rightarrow Z$$

que satisfaz as condições a), b) e c) enunciadas na Definição 2.1.1.

Seja $\alpha \equiv \phi \circ \pi$. Observe-se que:

- a) para todo $x \in X$, $\alpha(x) = \phi(\pi(x))$ é, por definição de ϕ , uma unidade de Z .
b) seja $y \in Z$; então $y = \phi(a)\phi(b)^{-1}$, para alguns $a \in R/t_X(R_R)$ e $b \in \overline{X}$, logo, $y = \alpha(x)\alpha(z)^{-1}$, para alguns $x \in R$ e $z \in X$.
c) dado $r \in R$ tal que $\alpha(r) = 0$, então $\phi(\pi(r)) = 0$, isto é, $\pi(r)\pi(x) = 0$, para algum $x \in X$. Consequentemente, $rx \in t_X(R_R)$, ou seja, existe $x' \in X$ tal que $r(xx') = 0$, o que nos leva a concluir que

$$\text{Ker}(\alpha) \subseteq \{r \in R : rx = 0, \text{ para algum } x \in X\} = t_X(R_R).$$

Reciprocamente, se $r \in t_X(R_R)$, então $r + t_X(R_R) = 0_{R/t_X(R_R)}$ e $\alpha(r) = \phi(0) = 0$. Provamos, assim, que $\text{Ker}(\alpha) = t_X(R_R)$.

Estão, pois, reunidas as condições necessárias para afirmar que Z é um anel de fracções à direita de R com respeito a X . ■

Em seguida, construiremos um anel de fracções à direita Q de um dado anel R com respeito a um conjunto S de denominadores à direita em R (note-se que o Lema 2.1.10 nos permite supor que $t_S(R_R) = 0$). Por analogia com o caso comutativo, começaremos por considerar o conjunto constituído pelas classes de equivalência de uma certa relação de equivalência $\sim$ definida em $R \times S$. Posteriormente, definiremos em $(R \times S)/\sim$ uma estrutura de anel e verificaremos que este anel satisfaz os requisitos necessários para ser um anel de fracções à direita de R com respeito a S . No Lema que se segue definimos a relação $\sim$ mencionada.

Lema 2.1.11 *Sejam R um anel e S um conjunto de denominadores à direita em R tal que $t_S(R_R) = 0$.*

a) Sejam $r \in R$ e $s \in S$ tais que $sr = 0$; então $r = 0$.

b) Podemos definir uma relação de equivalência em $R \times S$ da seguinte forma: $(r_1, s_1) \sim (r_2, s_2)$ se e só se existem $r, r' \in R$ tais que $r_1 r = r_2 r'$, $s_1 r = s_2 r'$ e $s_2 r' \in S$.

Demonstração. a) Sejam $r \in R$ e $s \in S$ tais que $sr = 0$. Por S ser um conjunto reversível à direita, existe $s^* \in S$ tal que $rs^* = 0$. Uma vez que, por hipótese, $t_S(R_R) = 0$, $rs^* = 0$ implica $r = 0$, como desejávamos provar.

b) A relação $\sim$ é reflexiva e simétrica.

Para verificarmos que $\sim$ é transitiva, suponhamos que $(a, s) \sim (a', s')$ e $(a', s') \sim (a'', s'')$, para alguns $a, a', a'' \in R$ e $s, s', s'' \in S$. Por definição, existem $b, b', c, c' \in R$ tais que

$$ab = a'b', \quad sb = s'b', \quad s'b' \in S, \quad a'c = a''c', \quad s'c = s''c' \text{ e } s''c' \in S.$$

Como S é um conjunto de Ore à direita em R , existem $r_1 \in R$, $r_2 \in S$ tais que $s'b'r_1 = s'cr_2$ e $s'cr_2 \in S$. Consequentemente, $s'(b'r_1 - cr_2) = 0$ e, por a), $b'r_1 = cr_2$. Em particular,

$$a(br_1) = a'b'r_1 = a'cr_2 = a''(c'r_2),$$

$$s(br_1) = s'b'r_1 = s'cr_2 = s''(c'r_2).$$

Uma vez que $s'cr_2 \in S$, concluímos que $s''(c'r_2) \in S$. Consequentemente, $(a, s) \sim (a'', s'')$, como desejávamos provar. ■

Estamos, agora, em condições de enunciar e demonstrar a recíproca do Lema 2.1.5.

Teorema 2.1.12 *Sejam R um anel e S um subconjunto multiplicativo de R . Então, S é um conjunto de denominadores à direita em R se e só se existe anel de fracções à direita de R com respeito a S .*

Demonstração. Se existir anel de fracções à direita de R com respeito a S , então, pelo Lema 2.1.5, S é um conjunto de denominadores à direita em R .

Reciprocamente, suponhamos que S é um conjunto de denominadores à direita em R .

Pelo Lema 2.1.10, $R' = R/t_S(R_R)$ é um anel e $S' = \pi(S)$ é um conjunto de denominadores à direita em R' , onde $\pi: R \rightarrow R/t_S(R_R)$ é o epimorfismo canónico. Pelo Lema 2.1.10, concluímos ainda que $t_{S'}(R'_{R'}) = 0$. Consequentemente, pelo Lema 2.1.11, podemos definir uma relação de equivalência em $R' \times S'$ do seguinte modo: $(r_1, s_1) \sim (r_2, s_2)$ se e só se existem $r, r' \in R'$ tais que $r_1 r = r_2 r'$, $s_1 r = s_2 r'$ e $s_2 r' \in S'$.

Se provarmos que é possível definir uma estrutura de anel em $Z = (R' \times S')/\sim$ de tal modo que Z , munido desta estrutura, é um anel de fracções à direita de R' com respeito a S' , então, pelo Lema 2.1.10, concluímos que Z , munido da estrutura de anel definida, ainda é um anel de fracções à direita de R com respeito a S . Assim, para provarmos o teorema, é suficiente mostrar que é possível definir uma estrutura de anel em Z de tal forma que Z , munido dessa estrutura, é anel de fracções à direita de R' com respeito a S' .

Designemos os elementos de $(R' \times S')/\sim$ por r/s , onde $r \in R'$ e $s \in S'$.

Sejam $(a, c), (b, d) \in (R' \times S')$ e $c_1, d_1 \in R'$ tais que $cd_1 = dc_1$ e $dc_1 \in S'$. Suponhamos que existem também $c'_1, d'_1 \in R'$ tais que $cd'_1 = dc'_1$ e $dc'_1 \in S'$. Provaremos que

$$(ad_1 + bc_1, dc_1) \sim (ad'_1 + bc'_1, dc'_1).$$

Pelo facto de S' ser um conjunto de Ore à direita em R' , existem $c_2 \in S'$, $d_2 \in R'$ tais que $(dc_1)d_2 = (dc'_1)c_2$, logo, $(dc'_1)c_2 \in S'$ e $d(c_1d_2 - c'_1c_2) = 0$. Pelo Lema 2.1.11, $c_1d_2 = c'_1c_2$.

Para mostrarmos que

$$(ad_1 + bc_1, dc_1) \sim (ad'_1 + bc'_1, dc'_1)$$

bastar-nos-á verificar que $(ad_1 + bc_1)d_2 = (ad'_1 + bc'_1)c_2$. Uma vez que $(bc_1)d_2 = b(c'_1c_2) = (bc'_1)c_2$, é suficiente verificar que $d_1d_2 = d'_1c_2$, o que resulta de

$$c(d'_1c_2) = (cd'_1)c_2 = (dc'_1)c_2 = d(c'_1c_2) = d(c_1d_2) = (dc_1)d_2 = (cd_1)d_2 = c(d_1d_2).$$

Assim, $c(d'_1c_2 - d_1d_2) = 0$, logo, pelo Lema 2.1.11, $d_1d_2 = d'_1c_2$.

Tendo em conta o que foi visto anteriormente, podemos definir a aplicação:

$$\begin{aligned} f: (R' \times S') \times (R' \times S') &\rightarrow (R' \times S')/\sim \\ ((r_1, s_1), (r_2, s_2)) &\rightarrow (r_1a + r_2r)/(s_1a) \end{aligned}$$

onde $a, r \in R'$ são tais que $s_1a = s_2r$ e $s_2r \in S'$.

Consideremos, agora, $(r_2, s_2) \in R' \times S'$. Sejam $(r_1, s_1), (r'_1, s'_1) \in R' \times S'$ tais que

$$(r_1, s_1) \sim (r'_1, s'_1).$$

Então, existem $r, r' \in R'$ tais que $r_1 r = r'_1 r'$, $s_1 r = s'_1 r'$ e $s'_1 r' \in S'$. Como S' é um conjunto de Ore à direita em R' , existem $a \in R'$ e $r^* \in S'$ tais que $s_1(ra) = s_2 r^*$ e $s_2 r^* \in S'$. Consequentemente, $s'_1(r'a) = s_2 r^*$ e

$$(r_1(ra) + r_2 r^*, s_1 ra) \sim (r'_1(r'a) + r_2 r^*, s'_1 r'a).$$

Concluimos, assim, que

$$f(((r_1, s_1), (r_2, s_2))) = f(((r'_1, s'_1), (r_2, s_2))).$$

Do mesmo modo, concluimos que dados $(r_1, s_1), (r_2, s_2), (r'_2, s'_2) \in R' \times S'$ tais que $(r_2, s_2) \sim (r'_2, s'_2)$, então

$$f(((r_1, s_1), (r_2, s_2))) = f(((r_1, s_1), (r'_2, s'_2))).$$

Do que vimos anteriormente, concluimos que podemos definir a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned} (+) : ((R' \times S')/\sim) \times ((R' \times S')/\sim) &\rightarrow (R' \times S')/\sim \\ (r_1/s_1, r_2/s_2) &\rightarrow (r_1 a + r_2 r)/(s_1 a), \end{aligned}$$

onde a e r são tais que $s_1 a = s_2 r$ e $s_2 r \in S'$.

Suponhamos, agora, que existem $(r_1, s_1), (r_2, s_2) \in (R' \times S')$ e $a, r, r_0, a_0 \in R'$ tais que $r_2 a = s_1 r$, $r_2 a_0 = s_1 r_0$ e $s_2 a_0, s_2 a \in S'$. Uma vez que S' é um conjunto de Ore à direita, existem $r' \in R'$ e $s' \in S'$ tais que $s_2 a_0 r' = s_2 a s'$, logo, $s_2(a_0 r' - a s') = 0$ e, pelo Lema 2.1.11, $a_0 r' = a s'$. Então,

$$(s_1 r) s' = (r_2 a) s' = r_2 (a s') = r_2 a_0 r' = s_1 r_0 r',$$

de onde concluimos que $s_1(rs' - r_0 r') = 0$, logo, $rs' = r_0 r'$. Consequentemente

$$(r_1 r, s_2 a) \sim (r_1 r s', s_2 a s') \sim (r_1 r_0 r', s_2 a_0 r') \sim (r_1 r_0, s_2 a_0).$$

Tendo em conta o que foi visto anteriormente, podemos definir a aplicação:

$$\begin{aligned} g : (R' \times S') \times (R' \times S') &\rightarrow (R' \times S')/\sim \\ ((r_1, s_1), (r_2, s_2)) &\rightarrow (r_1 r)/(s_2 a), \end{aligned}$$

onde $r, a \in R'$ são tais que $r_2 a = s_1 r$ e $s_2 a \in S'$.

Consideremos, agora, $(r_2, s_2) \in R' \times S'$. Sejam $(r_1, s_1), (r'_1, s'_1) \in R' \times S'$ tais que

$$(r_1, s_1) \sim (r'_1, s'_1).$$

Então, existem $r, r' \in R'$ tais que $r_1 r = r'_1 r'$, $s_1 r = s'_1 r'$ e $s'_1 r' \in S'$. Como S' é um conjunto de Ore à direita em R' , existem $a \in S'$ e $r^* \in R'$ tais que $s_1(r r^*) = r_2 a$ e $s_2 a \in S'$. Consequentemente, $s'_1(r' r^*) = r_2 a$ e

$$(r_1(r r^*), s_2 a) \sim (r'_1(r' r^*), s_2 a).$$

Concluimos, assim, que

$$g(((r_1, s_1), (r_2, s_2))) = g(((r'_1, s'_1), (r_2, s_2))).$$

Do mesmo modo, concluimos que dados $(r_1, s_1), (r_2, s_2), (r'_2, s'_2) \in R' \times S'$ tais que $(r_2, s_2) \sim (r'_2, s'_2)$, então

$$g(((r_1, s_1), (r_2, s_2))) = g(((r_1, s_1), (r'_2, s'_2))).$$

Do que vimos anteriormente, concluimos que podemos definir a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned} (.) : ((R' \times S')/\sim) \times ((R' \times S')/\sim) &\rightarrow (R' \times S')/\sim \\ ((r_1/s_1), (r_2/s_2)) &\rightarrow (r_1 r)/(s_2 a) \end{aligned}$$

onde $a, r \in R'$ são tais que $r_2 a = s_1 r$ e $s_2 a \in S'$.

Os axiomas de anel para $((R' \times S')/\sim, +, .)$ são verificados tendo em conta a definição das operações e dos elementos de $(R' \times S')/\sim$.

Designamos o anel $((R' \times S')/\sim, +, .)$ por $(R' \times S')/\sim$.

Falta-nos provar que $(R' \times S')/\sim$ é um anel de fracções à direita de R' com respeito a S' . Consideremos o homomorfismo de anéis:

$$\begin{aligned} \phi : R' &\rightarrow (R' \times S')/\sim \\ r &\rightarrow r/1 \end{aligned} \quad (1)$$

Seguidamente provaremos que este homomorfismo satisfaz as condições **a)**, **b)** e **c)** da Definição 2.1.1:

Seja $s \in S'$; então $(s/1)(1/s) = s/s = 1/1$. Analogamente, provamos que $(1/s)(s/1) = 1/1$, o que nos leva a concluir que, para todo $s \in S'$, $\phi(s)$ é uma unidade de $(R' \times S')/\sim$.

Seja $a/s \in (R' \times S')/\sim$, com $a \in R'$ e $s \in S'$. Como $a/s = (a/1)(1/s)$ e, pelo que vimos anteriormente, $1/s = (s/1)^{-1}$, então $a/s = \phi(a)\phi(s)^{-1}$, onde $a \in R'$ e $s \in S'$.

Seja $a \in R'$ tal que $\phi(a) = a/1 = 0/1$. Por definição de $\sim$, existem $r, r' \in R'$ tais que $ar = 0r' = 0$, $r = 1r = 1r' = r'$ e $r' \in S'$. Ora, como $r \in S'$ e $t_{S'}(R'_R) = 0$, concluimos que $a = 0$, logo,

$$\text{Ker}(\phi) = 0 = t_{S'}(R'_R).$$

Estão, pois, reunidas as condições necessárias para afirmar que $(R' \times S')/\sim$ é um anel de fracções à direita de R' com respeito a S' , como desejávamos provar. ■

Sejam R um anel e S um conjunto de denominadores à direita em R . O anel de fracções à direita de R com respeito a S construído no Teorema anterior será representado por RS^{-1} . Representamos cada elemento $y \in RS^{-1}$ por ab^{-1} , com $a \in R$ e $b \in S$.

Na construção de um anel de fracções à direita de um anel R com respeito a um conjunto S de denominadores à direita em R podíamos ter seguido uma abordagem diferente utilizando o invólucro injectivo de R_R . Com efeito, se R for um anel e S um conjunto de denominadores à direita em R (o Lema 2.1.10 permite-nos supor $t_S(R_R) = 0$), então é possível definir uma estrutura de anel no R -submódulo N de $E(R_R)$ tal que $N/R = t_S(E(R_R)/R)$. A estrutura de anel pode até ser escolhida de forma a ser compatível com a estrutura de R -módulo de N e, com esta estrutura de anel definida em N , R é um subanel de N ([14], 9.6, 9.7). Nestas circunstâncias, a inclusão $i: R \rightarrow N$ é um homomorfismo de anéis que satisfaz as condições **a)**, **b)** e **c)** da Definição 2.1.1, pelo que N é um anel de fracções à direita de R com respeito a S .

Optou-se por não apresentar tal abordagem neste trabalho, uma vez que vários dos argumentos nela utilizados serão aplicados quando construirmos um módulo de fracções de um R -módulo com respeito a um conjunto S de denominadores à direita em R .

O nosso objectivo, até ao momento, foi o de encontrar condições que nos permitissem garantir a existência de um anel de fracções à direita de um dado anel R com respeito a um subconjunto multiplicativo S de R . Em seguida, verificaremos que, a menos de isomorfismo, existe apenas um anel de fracções à direita de um dado anel R com respeito a um conjunto S de denominadores à direita em R . Antes de provarmos este facto deduziremos uma propriedade útil apresentada pelos anéis de fracções à direita. Para tal, necessitamos de provar o seguinte Lema:

Lema 2.1.13 *Sejam R um anel, S um conjunto de Ore à direita em R e $s_1, \dots, s_n \in S$; então $S \cap s_1R \cap \dots \cap s_nR \neq \emptyset$.*

Demonstração. Como S é um conjunto de Ore à direita, existem $c \in R$ e $d \in S$ tais que $s_1c = s_2d$. Como $s_2, d \in S$, então, $s_2d \in S$ e $s_1R \cap s_2R \cap S \neq \emptyset$.

Seja $y = s_2d$. Analogamente, provamos que existe

$$z \in yR \cap s_3R \cap S.$$

Uma vez que $y \in s_1R \cap s_2R$, concluímos que $z \in s_1R \cap s_2R \cap s_3R \cap S$. Repetindo o processo n vezes, concluímos que

$$s_1R \cap \dots \cap s_nR \cap S \neq \emptyset,$$

como desejávamos provar. ■

Proposição 2.1.14 [*Regra do denominador comum*] *Sejam R' um anel de fracções à direita de um anel R com respeito a um conjunto S de denominadores à direita em R e $\phi: R \rightarrow R'$ um homomorfismo que satisfaz as condições a), b) e c) da Definição 2.1.1; então, dados $\phi(a_1)\phi(b_1)^{-1}, \dots, \phi(a_n)\phi(b_n)^{-1} \in R'$, com $a_1, \dots, a_n \in R$ e $b_1, \dots, b_n \in S$, existem $c \in S$ e $d_1, \dots, d_n \in R$ tais que $\phi(d_1), \dots, \phi(d_n)$ são unidades de R' ,*

$$\phi(a_1)\phi(b_1)^{-1} = \phi(a_1d_1)\phi(c)^{-1}, \dots, \phi(a_n)\phi(b_n)^{-1} = \phi(a_nd_n)\phi(c)^{-1},$$

com $c = b_1d_1 = \dots = b_nd_n$.

Demonstração. Pelo Lema 2.1.13, existe

$$c \in b_1R \cap \dots \cap b_nR \cap S$$

e, consequentemente, existem $r_1, \dots, r_n \in R$ tais que

$$b_1r_1 = \dots = b_nr_n = c$$

e $c \in S$. Como $\phi(r_1) = \phi(b_1)^{-1}\phi(c)$, ..., $\phi(r_n) = \phi(b_n)^{-1}\phi(c)$, concluímos que $\phi(r_1), \dots, \phi(r_n)$ são unidades de R' , logo,

$$\phi(a_1)\phi(b_1)^{-1} = \phi(a_1r_1)\phi(r_1)^{-1}\phi(b_1)^{-1} = \phi(a_1r_1)\phi(b_1r_1)^{-1} = \phi(a_1r_1)\phi(c)^{-1}, \dots,$$

$\phi(a_n)\phi(b_n)^{-1} = \phi(a_nr_n)\phi(c)^{-1}$, com $c = b_1r_1 = \dots = b_nr_n$, como desejávamos provar. ■

Estamos, agora, em condições de provar que os anéis de fracções à direita de um dado anel R com respeito a um conjunto S de denominadores à direita em R são únicos, a menos de isomorfismo.

Proposição 2.1.15 *Sejam R, T anéis, S um conjunto de denominadores à direita em R , R' um anel de fracções à direita de R com respeito a S e $\alpha: R \rightarrow T$ um homomorfismo de anéis tal que $\alpha(x)$ é uma unidade de T , para todo $x \in S$. Consideremos um homomorfismo de anéis $\varphi: R \rightarrow R'$ que satisfaz as condições a), b) e c) da Definição 2.1.1, então, existe um único homomorfismo de anéis $f: R' \rightarrow T$ tal que $f \circ \varphi \equiv \alpha$.*

Demonstração. Sejam $a_1, a_2 \in R$, $b_1, b_2 \in S$ tais que

$$\varphi(a_1)\varphi(b_1)^{-1} = \varphi(a_2)\varphi(b_2)^{-1}.$$

Pela Proposição 2.1.14, existem $r_1, r_2 \in R$ e $z \in S$ tais que

$$\varphi(a_1)\varphi(b_1)^{-1} = \varphi(a_1r_1)\varphi(z)^{-1}, \quad \varphi(a_2)\varphi(b_2)^{-1} = \varphi(a_2r_2)\varphi(z)^{-1},$$

com $z = b_1r_1 = b_2r_2$.

Como $z = b_1r_1$, $\alpha(z) = \alpha(b_1)\alpha(r_1)$ e, uma vez que $\alpha(b_1)$ e $\alpha(z)$ são unidades de T , $\alpha(r_1)$ também é uma unidade de T , o que nos leva a concluir que

$$\alpha(a_1)\alpha(b_1)^{-1} = \alpha(a_1)\alpha(r_1)\alpha(r_1)^{-1}\alpha(b_1)^{-1} = \alpha(a_1r_1)\alpha(z)^{-1}.$$

Analogamente, provamos que $\alpha(a_2)\alpha(b_2)^{-1} = \alpha(a_2r_2)\alpha(z)^{-1}$.

Por outro lado, $\varphi(a_1)\varphi(b_1)^{-1} = \varphi(a_2)\varphi(b_2)^{-1}$ implica $\varphi(a_1r_1) = \varphi(a_2r_2)$, logo, existe $s \in S$ tal que $(a_1r_1 - a_2r_2)s = 0$; conseqüentemente, $\alpha(a_1r_1 - a_2r_2)\alpha(s) = 0$. Uma vez que $\alpha(s)$ é uma unidade de T , concluímos que

$$\alpha(a_1r_1)\alpha(z)^{-1} = \alpha(a_2r_2)\alpha(z)^{-1},$$

logo,

$$\alpha(a_1)\alpha(b_1)^{-1} = \alpha(a_2)\alpha(b_2)^{-1}.$$

Tendo em conta o que foi visto anteriormente, podemos definir a aplicação:

$$f : \begin{array}{ccc} R' & \rightarrow & T \\ \varphi(a)\varphi(b)^{-1} & \rightarrow & \alpha(a)\alpha(b)^{-1} \end{array},$$

com $a \in R$ e $b \in S$.

Assim definida, f é um homomorfismo de anéis.

Observe-se agora que, dado $x \in R$,

$$f(\varphi(x)) = f(\varphi(x)\varphi(1)^{-1}) = \alpha(x)\alpha(1)^{-1} = \alpha(x),$$

logo, $f \circ \varphi \equiv \alpha$. Por outro lado, se tomarmos um homomorfismo de anéis $g : R' \rightarrow T$ tal que $g \circ \varphi \equiv \alpha$ e considerarmos $a \in R$ e $b \in S$, concluímos que

$$\begin{aligned} \alpha(a) &= g(\varphi(a)) = g(\varphi(a)\varphi(b)^{-1}\varphi(b)) \\ &= g(\varphi(a)\varphi(b)^{-1})g(\varphi(b)) = g(\varphi(a)\varphi(b)^{-1})\alpha(b), \end{aligned}$$

logo, $g(\varphi(a)\varphi(b)^{-1}) = \alpha(a)\alpha(b)^{-1}$, isto é, $g \equiv f$.

A aplicação $f : R' \rightarrow T$ é, pois, o único homomorfismo de anéis que satisfaz a propriedade $f \circ \varphi \equiv \alpha$, como desejávamos provar. ■

Corolário 2.1.16 *Sejam R um anel, S um conjunto de denominadores à direita em R e S_1, S_2 anéis de fracções à direita de R com respeito a S ; então $S_1 \simeq S_2$.*

Demonstração. Sejam $\phi_1: R \rightarrow S_1$ e $\phi_2: R \rightarrow S_2$ homomorfismos de anéis que satisfazem as condições **a)**, **b)** e **c)** da Definição 2.1.1.

Pela Proposição 2.1.15, existe um e um só homomorfismo de anéis

$$\alpha_1: S_1 \rightarrow S_2$$

tal que $\alpha_1 \circ \phi_1 \equiv \phi_2$. Analogamente, existe um e um só homomorfismo de anéis

$$\alpha_2: S_2 \rightarrow S_1$$

tal que $\alpha_2 \circ \phi_2 \equiv \phi_1$. Assim, $\alpha_1 \circ \alpha_2 \circ \phi_2 \equiv \phi_2$.

Uma vez que $id \circ \phi_2 \equiv \alpha_1 \circ \alpha_2 \circ \phi_2$ e, pela Proposição 2.1.15, existe um e um só homomorfismo f tal que $f \circ \phi_2 \equiv \phi_2$, então $id \equiv \alpha_1 \circ \alpha_2$. Analogamente, concluímos que $id \equiv \alpha_2 \circ \alpha_1$, logo, α_1 é um isomorfismo de anéis e $S_1 \simeq S_2$, como desejávamos provar. ■

Aplicando o Teorema 2.1.12 concluímos que, dados um anel R e um conjunto de denominadores à direita C , existe um anel de fracções à direita de R com respeito a $C - RC^{-1}$. Do Corolário anterior resulta que, a menos de isomorfismo, o anel de fracções à direita de R com respeito a C é único.

Dados um anel R e um automorfismo σ de R , o anel $R[x, x^{-1}; \sigma]$ introduzido no Exemplo 1.1.3 não é mais do que o anel de fracções à direita (e à esquerda) do anel $R' = R[x; \sigma]$ (introduzido no Exemplo 1.1.2) com respeito ao subconjunto multiplicativo de $R' - S = \{x^n : n \in \mathbb{N}_0\}$. Se tomarmos $x^n \in S$ e

$$\left(\sum_{k=0}^m a_k x^k \right) \in R',$$

com $a_k \in R$, para todo $k \in \{0, \dots, m\}$, uma vez que σ é um automorfismo de R , para todo $k \in \{0, \dots, m\}$, existe $b_k \in R$ tal que $\sigma^n(b_k) = a_k$, logo,

$$\left(\sum_{k=0}^m a_k x^k \right) x^n = x^n \left(\sum_{k=0}^m b_k x^k \right).$$

Concluímos, assim, que S é um conjunto de Ore à direita em R' . Com o intuito de demonstrarmos que S é um conjunto reversível à direita, consideremos

$$\left(\sum_{k=0}^n a_k x^k \right) \in R',$$

com $a_k \in R$, para todo $k \in \{0, \dots, n\}$, e $x^m \in S$ tal que $x^m (\sum_{k=0}^n a_k x^k) = 0$, logo, $\sigma^m(a_0) = \dots = \sigma^m(a_n) = 0$. Como σ é um automorfismo, $a_0 = \dots = a_n = 0$. Consequentemente, $(\sum_{k=0}^n a_k x^k) x^m = 0$. Concluímos assim que S é um

conjunto de denominadores à direita em R' . Analogamente, verificamos que S é um conjunto de denominadores à esquerda em R' .

Consideremos o homomorfismo de anéis

$$\begin{aligned} \phi : R[x; \sigma] &\rightarrow R[x, x^{-1}; \sigma] \\ \sum_{i=0}^n r_i x^i &\rightarrow \sum_{i=0}^n r_i x^i. \end{aligned}$$

Todos os elementos de $\phi(S)$ são invertíveis em $R[x, x^{-1}; \sigma]$, pelo que ϕ satisfaz a condição **a)** da Definição 2.1.1. Por outro lado, todo o elemento y de $R[x, x^{-1}; \sigma]$ escreve-se na forma $y = \sum_{i=-m}^n r_i x^i$, para alguns $n, m \in \mathbb{N}$ e $r_i \in R$, para todo $-m \leq i \leq n$. Logo,

$$y = \left(\sum_{i=-m}^n r_i x^{i+m} \right) x^{-m}.$$

Fazendo $s_i = r_{i-m}$, para todo $i \in \{0, \dots, m+n\}$, temos

$$y = \phi \left(\sum_{i=0}^{n+m} s_i x^i \right) \phi(x^m)^{-1},$$

o que nos leva a concluir que ϕ satisfaz a condição **b)** da Definição 2.1.1. Uma vez que $\text{Ker}(\phi) = 0$ e $t_S(R'_{R'}) = 0$,

$$\text{Ker}(\phi) = 0 = \{r \in R' : rz = 0, \text{ para algum } z \in S\}.$$

Logo, $R[x, x^{-1}; \sigma]$ é o anel de fracções à direita de R' com respeito a S . Analogamente, verificamos que $R[x, x^{-1}; \sigma]$ é o anel de fracções à esquerda de R' com respeito a S . Assim,

Proposição 2.1.17 *Sejam R um anel e σ um automorfismo de R . Então $S = \{x^i : i \in \mathbb{N}_0\}$ é um conjunto de denominadores à direita e à esquerda em $R[x; \sigma]$ e $R[x, x^{-1}; \sigma]$ é anel de fracções à direita e à esquerda de $R[x; \sigma]$ com respeito a S .*

2.2 Anéis de Goldie

Nesta secção, estudaremos uma classe especial de anéis - os anéis de Goldie.

Os anéis de Goldie semiprimos apresentam várias propriedades a salientar. Em particular, qualquer anel de Goldie semiprimo R tem anel de fracções à direita (e à esquerda) com respeito a um subconjunto multiplicativo especial - o conjunto dos elementos regulares, sendo o correspondente anel de fracções à direita (e à esquerda) semisimples. No caso de R ser um anel de Goldie primo, o anel de fracções à direita (esquerda) com respeito ao conjunto dos elementos regulares de R é não só semisimples mas também simples.

Definição 2.2.1 Dizemos que um elemento x de um anel R é **regular à direita** se $\text{rann}_R(x) = 0$. De forma análoga, definimos elemento **regular à esquerda**. Um elemento é **regular** se é regular à direita e à esquerda. Designamos o conjunto dos elementos regulares de R por $C_R(0)$.

Definição 2.2.2 Dados um anel R e um ideal próprio I de R , designamos o conjunto $\{x \in R : x + I \text{ é um elemento regular de } R/I\}$ por $C_R(I)$.

Observe-se que $C_R(0)$ é precisamente o conjunto constituído pelos elementos x de R tais que $x + 0$ é regular em $R/0$.

Definição 2.2.3 Um anel R é um **anel de Goldie à direita** se R tem dimensão de Goldie à direita finita e R satisfaz c.c.a. em anuladores à direita em R . De forma análoga, definimos **anel de Goldie à esquerda**. Um anel é **anel de Goldie** se é simultaneamente anel de Goldie à direita e à esquerda.

Todo o anel Noetheriano à direita (respectivamente à esquerda) é um anel de Goldie à direita (respectivamente à esquerda); no entanto, o recíproco não é verdadeiro. Como contra-exemplo basta considerar qualquer domínio comutativo não Noetheriano. Assim, se considerarmos os anéis da forma $R = K[\{x_i : i \in \mathbb{Z}\}]$, onde K é um corpo e $X = \{x_i : i \in \mathbb{Z}\}$ é um conjunto constituído por variáveis comutativas, temos que R é um domínio comutativo. Por outro lado, a cadeia

$$x_1R \subsetneq x_1R + x_2R \subsetneq \dots \subsetneq x_1R + x_2R + \dots + x_nR \subsetneq \dots$$

é uma cadeia propriamente ascendente de ideais de R , logo, R é um anel não Noetheriano. Consequentemente, o anel R é um anel de Goldie à direita (e à esquerda) não Noetheriano à direita (e à esquerda).

Definição 2.2.4 Seja Q um anel. Dizemos que um subanel R de Q é uma **ordem à direita** em Q , se $C_R(0) \subseteq U(Q)$ e todo o elemento de Q se pode escrever na forma as^{-1} , com $a \in R$ e $s \in C_R(0)$. De forma análoga, definimos **ordem à esquerda**.

Note-se que afirmar que Q é o anel de fracções à direita de um anel R com respeito a $C_R(0)$ é equivalente a afirmar que R é, a menos de isomorfismo, uma ordem à direita no anel Q .

No caso particular de o anel R ser Artiniano à direita, verificaremos que R é uma ordem à direita em si mesmo.

Proposição 2.2.5 Num anel Artiniano à direita (respectivamente à esquerda), todo o elemento regular à direita (respectivamente à esquerda) é uma unidade.

Demonstração. Sejam R um anel Artiniano à direita e x um elemento regular à direita em R . Consideremos a cadeia de ideais direitos

$$\dots \leq x^n R \leq \dots \leq xR.$$

Uma vez que R é anel Artiniano à direita, existe um número natural n tal que $x^n R = x^{n+1} R$. Em particular, existe $y \in R$ tal que $x^n = x^{n+1}y$, logo, $x^n(1 - xy) = 0$. Uma vez que x é regular à direita, $1 = xy$, isto é, x é invertível à direita e y é invertível à esquerda. Suponhamos que existe $z \in R$ tal que $yz = 0$, logo, $0 = (xy)z = z$, de onde concluímos que y é um elemento regular à direita. Pelo que vimos anteriormente, y é invertível à direita. Como R é um anel, os inversos, respectivamente, à direita e à esquerda de y , coincidem, logo, x é uma unidade de R , como desejávamos provar. ■

Da Proposição enunciada resulta, em particular, que todo o elemento regular x de um anel Artiniano à direita (ou à esquerda) R é uma unidade de R , isto é, $C_R(0) \subseteq U(R)$. Como todo o elemento r de R se escreve na forma $r = r.1 = r.1^{-1}$, onde $1 \in C_R(0)$, estão reunidas as condições necessárias para afirmarmos que R é uma ordem à direita em R , logo, $R \simeq RC_R(0)^{-1}$.

Proposição 2.2.6 *Seja R um anel Artiniano à direita (ou à esquerda); então R é uma ordem à direita em R . Em particular, $R \simeq RC_R(0)^{-1}$. ■*

Da Proposição anterior resulta, em particular, que todo o anel semisimples é uma ordem à direita em si mesmo e, portanto, é uma ordem à direita num anel semisimples. A questão sobre a qual nos debruçaremos em seguida é: “Quando é que um anel R é uma ordem à direita num anel semisimples?”. No resultado principal desta secção, o “Teorema de Goldie”, provamos que um anel R é (a menos de isomorfismo) uma ordem à direita num anel semisimples Q se e só se R é um anel de Goldie à direita semiprimo. Com vista a provar este Teorema, necessitamos de alguns resultados que, em seguida, demonstraremos.

Lema 2.2.7 *Sejam R um anel com dimensão de Goldie à direita finita e a um elemento regular à direita de R ; então $(aR)_R \leq_e R_R$.*

Demonstração. Uma vez que a é elemento regular à direita,

$$\begin{array}{ccc} \phi: & R & \rightarrow R \\ & r & \rightarrow ar \end{array}$$

é um R -monomorfismo. Pelo Corolário 1.9.14, $(aR)_R \leq_e R_R$, como desejávamos provar. ■

Proposição 2.2.8 *Seja R um anel semiprimo, não singular à direita e com dimensão de Goldie à direita finita; então:*

- a) *se a é um elemento regular à direita em R , $a \in C_R(0)$.*
b) *se I é um ideal direito não nulo de R , então existe $a \in I$ tal que*

$$rann_R(a) \cap I = 0.$$

Demonstração. a) Seja $b \in lann_R(a)$; então $b(aR) = 0$ e, como pelo Lema 2.2.7, $(aR)_R \leq_e R_R$, então, $b \in Z(R_R)$. Como R é um anel não singular à direita, $Z(R_R) = 0$, logo, a é um elemento regular de R .

b) Provaremos o resultado por indução na dimensão de Goldie de ideais direitos não nulos de R .

Se I' é um ideal direito não nulo de R tal que $u.\dim(I') = 1$, então I' é um ideal direito uniforme. Como R é anel semiprimo, $(I')^2 \neq 0$, logo, existem $a, a' \in I'$ tais que $aa' \neq 0$. Com vista a um absurdo, suponhamos que

$$J = I' \cap rann_R(a) \neq 0.$$

Então, por I' ser um ideal direito uniforme, $J \leq_e I'$, logo, pela Proposição 1.5.1,

$$K = \{x \in R : a'x \in J\} \leq_e R_R.$$

Ora, $aa'K \leq aJ = 0$ e, uma vez que $K_R \leq_e R_R$, $aa' \in Z(R_R)$. Como R é um anel não singular à direita, $Z(R_R) = 0$ - o que é absurdo. O absurdo resultou de supormos que $I' \cap rann_R(a) \neq 0$, logo, $I' \cap rann_R(a) = 0$.

Seja $n > 1$ e suponhamos que, para todo o ideal direito não nulo K cuja dimensão de Goldie é estritamente menor que n , existe $a \in K$ tal que $K \cap rann_R(a) = 0$. Consideremos um ideal direito não nulo I' de R tal que $u.\dim(I') = n$. Seja K' um ideal direito não nulo tal que $K' \subseteq I'$ e K' tem dimensão de Goldie $n - 1$. Por hipótese de indução, existe $a_0 \in K'$ tal que $rann_R(a_0) \cap K' = 0$. Seja

$$J = I' \cap rann_R(a_0).$$

Se $J = 0$, consideramos $a = a_0$.

Suponhamos que $J \neq 0$. Como $J \cap K' = 0$, $J \not\leq_e I'$, logo, pelo Corolário 1.9.13, $u.\dim(J) \leq n$. Por hipótese de indução, existe $b \in J$ tal que $rann_R(b) \cap J = 0$. Seja $a = b + a_0$; então, como $J \cap K' = 0$,

$$rann_R(a) = rann_R(a_0) \cap rann_R(b),$$

logo,

$$rann_R(a) \cap I' = rann_R(a_0) \cap I' \cap rann_R(b) = rann_R(b) \cap J = 0.$$

Concluimos, pois, que existe $a \in I'$ tal que $rann_R(a) \cap I' = 0$.

Uma vez que R tem dimensão de Goldie à direita finita, todos os ideais direitos não nulos de R têm dimensão de Goldie finita, pelo que o resultado é válido. ■

Lema 2.2.9 *Sejam R um anel e I um ideal de R tal que $I^2 = 0$; então $\text{lann}_R(I)$ é um ideal direito essencial de R .*

Demonstração. Se $I = 0$, $\text{lann}_R(I) = R$ e $\text{lann}_R(I)$ é um ideal direito essencial de R .

Suponhamos que $I \neq 0$. Seja K um ideal direito de R tal que $K \cap \text{lann}_R(I) = 0$. Uma vez que $I^2 = 0$, $I \subseteq \text{lann}_R(I)$, logo, $K \cap I = 0$. Ora, como I é um ideal bilateral, $KI = 0$, logo, $K \subseteq \text{lann}_R(I)$, o que implica $K = 0$. Logo $\text{lann}_R(I)$ é um ideal direito essencial de R . ■

Lema 2.2.10 *Sejam R um anel e A um anulador à direita (respectivamente à esquerda) em R ; então $\text{rann}_R(\text{lann}_R(A)) = A$ (respectivamente $\text{lann}_R(\text{rann}_R(A)) = A$).*

Demonstração. Como $\text{lann}_R(A)A = 0$, $A \subseteq \text{rann}_R(\text{lann}_R(A))$.

Reciprocamente, como A é um anulador à direita em R , $A = \text{rann}_R(X)$, para algum subconjunto X de R , logo, $XA = 0$. Consequentemente, $X \subseteq \text{lann}_R(A)$, de onde concluímos que

$$\text{rann}_R(\text{lann}_R(A)) \subseteq \text{rann}_R(X) = A,$$

como desejávamos provar ■

Estamos, agora, em condições de enunciar e demonstrar o resultado principal desta secção.

Teorema 2.2.11 [Goldie] *Seja R um anel. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- a) R é um anel de Goldie à direita semiprimo,
- b) R é anel semiprimo, não singular à direita e tem dimensão de Goldie à direita finita,
- c) para todo o ideal direito I de R , $I_R \leq_e R_R$ se e só se $I \cap C_R(0) \neq \emptyset$,
- d) R é, a menos de isomorfismo, uma ordem à direita num anel semisimples Q .

Demonstração. $a) \Rightarrow b)$

Para provarmos esta implicação é suficiente provar que um anel semiprimo R que satisfaz a.c.c em anuladores à direita em R é não singular à direita.

Designemos $Z(R_R)$ por J e consideremos a cadeia de ideais direitos

$$\text{rann}_R(J) \subseteq \dots \subseteq \text{rann}_R(J^n) \subseteq \dots$$

Como R satisfaz c.c.a. em anuladores à direita em R , existe um número natural n tal que

$$\text{rann}_R(J^n) = \text{rann}_R(J^{n+1}).$$

Com vista a um absurdo, suponhamos que $J^{n+1} \neq 0$; então, existe $x \in J$ tal que $J^n x \neq 0$. Suponhamos agora que, para todo $b \in J$ tal que $J^n b \neq 0$, existe $c \in J$ tal que

$$J^n c \neq 0, \text{ rann}_R(b) \subsetneq \text{rann}_R(c);$$

então, conseguimos construir uma cadeia propriamente ascendente infinita de anuladores à direita em R - o que é absurdo, uma vez que R satisfaz c.c.a. em anuladores à direita em R . Concluimos, assim, que existe $a \in J$ tal que $J^n a \neq 0$ e, para todo $b \in J$ tal que $\text{rann}_R(a) \subsetneq \text{rann}_R(b)$, $J^n b = 0$.

Seja $b \in J$. Por definição de J , $\text{rann}_R(b) \leq_e R_R$, logo, $\text{rann}_R(b) \cap aR \neq 0$, de onde concluimos que existe $c \in R$ tal que $ac \neq 0$ e $bac = 0$. Como $ba \in J$ e

$$\text{rann}_R(a) \subsetneq \text{rann}_R(ba),$$

por definição de a , $J^n ba = 0$. Ora, como b é um elemento arbitrário de J , $J^{n+1}a = 0$, isto é, $a \in \text{rann}_R(J^{n+1})$. Uma vez que

$$\text{rann}_R(J^{n+1}) = \text{rann}_R(J^n),$$

temos um absurdo. O absurdo resultou de supormos $J^{n+1} \neq 0$, logo, J é um ideal nilpotente. Pelo facto de R ser um anel semiprimo, concluimos que $J = Z(R_R) = 0$, logo, R é um anel não singular à direita.

b) $\Rightarrow$ c)

Seja I um ideal direito de R tal que $I \cap C_R(0) \neq \emptyset$. Consideremos $a \in I \cap C_R(0)$. Pelo Lema 2.2.7, $(aR)_R \leq_e R_R$, logo, $I_R \leq_e R_R$.

Reciprocamente, seja I um ideal direito essencial de R ; pela Proposição 2.2.8, existe $a \in I$ tal que

$$\text{rann}_R(a) \cap I = 0,$$

logo, $\text{rann}_R(a) = 0$. Mas, pela Proposição 2.2.8, $\text{rann}_R(a) = 0$ implica $a \in C_R(0)$, logo, $I \cap C_R(0) \neq \emptyset$, como desejávamos provar.

c) $\Rightarrow$ d)

Comecemos por verificar que $C_R(0)$ é um conjunto de Ore à direita em R .

Para tal, consideremos $a \in R$ e $s \in C_R(0)$; por **c)**, $(sR)_R \leq_e R_R$, logo, pelo Corolário 1.5.2,

$$I = \{r \in R : ar \in sR\} \leq_e R_R.$$

Por **c)**, $I \cap C_R(0) \neq \emptyset$, isto é,

$$aC_R(0) \cap sR \neq \emptyset.$$

Provamos, assim, que $C_R(0)$ é um conjunto de Ore à direita em R . Como $C_R(0)$ é um conjunto de Ore à direita em R e é reversível à direita em R (pois todos

os seus elementos são regulares), então $C_R(0)$ é um conjunto de denominadores à direita em R , logo, existe anel de fracções à direita de R com respeito a $C_R(0)$ - Q . Seja $\phi: R \rightarrow Q$ um homomorfismo de anéis que satisfaz as condições a), b) e c) da Definição 2.1.1; então $\phi(R) \simeq R$, o que nos leva a identificar R e $\phi(R)$. Consequentemente, R é uma ordem à direita em Q .

Provaremos seguidamente que Q é anel semisimples. Para tal, consideremos um ideal direito não nulo I de Q . Pela Proposição 1.5.3, podemos considerar um ideal direito J de R tal que

$$((I \cap R) \oplus J)_R \leq_e R_R$$

e, por c), existe um elemento regular x de R tal que $x \in (I \cap R) \oplus J$. Uma vez que R é uma ordem à direita em Q , x é uma unidade de Q , logo,

$$Q = (I \cap R)Q + JQ.$$

Ora, como $(I \cap R)Q = I$ e $(I \cap R)Q \cap JQ = 0$, concluímos que $I \oplus JQ = Q$; consequentemente, I é uma parcela directa de Q . Como todo o ideal direito de Q é parcela directa de Q , pela Proposição 1.5.4, Q é anel semisimples, como desejávamos provar.

$d) \Rightarrow a)$

Seja R uma ordem à direita num anel semisimples Q . Consideremos um ideal I de R tal que $I^2 = 0$. Pelo Lema 2.2.9, o ideal bilateral $I' = lann_R(I)$ é essencial como ideal direito de R , logo, $(I'Q)_Q \leq_e Q_Q$. Uma vez que Q é um anel semisimples, pela Proposição 1.5.6, $I'Q = Q$. Em particular,

$$1 = a_1 b_1^{-1} + \dots + a_n b_n^{-1},$$

para alguns $a_1, \dots, a_n \in I'$ e $b_1, \dots, b_n \in C_R(0)$. Aplicando a Proposição 2.1.14, concluímos que $1 = ab^{-1}$, para alguns $a \in I'$ e $b \in C_R(0)$, logo, $b \in I'$, de onde concluímos que I' contém um elemento regular b . Ora, como $bI = 0$, $I = 0$. Concluímos, assim, que R é anel semiprimo.

Consideremos uma cadeia $A_1 \subseteq \dots \subseteq A_n \subseteq \dots$ de anuladores à direita em R , logo,

$$\dots \subseteq lann_R(A_n) \subseteq \dots \subseteq lann_R(A_1).$$

Consequentemente,

$$rann_Q(lann_R(A_1)) \subseteq \dots \subseteq rann_Q(lann_R(A_n)) \subseteq \dots$$

Uma vez que Q é anel semisimples, Q é anel Noetheriano à direita, logo, existe um número natural n tal que

$$rann_Q(lann_R(A_n)) = rann_Q(lann_R(A_m)),$$

para todo $m > n$. Logo, aplicando o Lema 2.2.10,

$$\begin{aligned} A_n &= \text{rann}_R(\text{lann}_R(A_n)) = \text{rann}_Q(\text{lann}_R(A_n)) \cap R = \text{rann}_Q(\text{lann}_R(A_m)) \cap R \\ &= \text{rann}_R(\text{lann}_R(A_m)) = A_m, \end{aligned}$$

para todo $m > n$. Está, pois, provado que R satisfaz c.c.a. em anuladores à direita em R .

Seguidamente iremos provar que R tem dimensão de Goldie à direita finita. Com vista a um absurdo, suponhamos que existe uma família independente infinita $(I_j)_{j \in L}$ de ideais direitos não nulos de R . Para cada $j \in L$, escolhemos $i_j \in I_j \setminus \{0\}$. Consideremos os ideais direitos de Q da forma $i_j Q$, com $j \in L$. Como Q é anel Noetheriano à direita, a família $(i_j Q)_{j \in L}$ é dependente, logo, existem $j_1, \dots, j_n \in L$ e $q_{j_1}, \dots, q_{j_n} \in Q$ tais que

$$i_{j_1} q_{j_1} + \dots + i_{j_n} q_{j_n} = 0$$

e $i_{j_l} q_{j_l} \neq 0$, para todo $l \in \{1, \dots, n\}$. Como R é uma ordem à direita em Q , Q é anel de fracções à direita de R com respeito a $C_R(0)$, logo, podemos aplicar a Proposição 2.1.14 e determinar $a_1, \dots, a_n \in R \setminus \{0\}$ e $c \in C_R(0)$ tais que $q_{j_1} = a_1 c^{-1}$, ..., $q_{j_n} = a_n c^{-1}$. Consequentemente,

$$i_{j_1} a_1 + \dots + i_{j_n} a_n = 0$$

e $i_{j_l} a_l \neq 0$, para todo $l \in \{1, \dots, n\}$, o que contraria o facto de a família $(I_j)_{j \in L}$ ser independente. Consequentemente, R não contém somas directas de famílias infinitas de ideais direitos não nulos. Está, pois, provado que R é anel de Goldie à direita. ■

Corolário 2.2.12 *Seja R uma ordem à direita num anel semisimples Q ; então Q é anel simples se e só se R é anel primo.*

Demonstração. Suponhamos que R é anel primo.

Seja J um ideal bilateral não nulo de Q ; logo, $J \cap R$ é um ideal bilateral não nulo de R . Uma vez que R é anel primo, pela Proposição 1.5.7,

$$(J \cap R)_R \leq_e R_R,$$

logo, pelo Teorema de Goldie, $J \cap R$ contém um elemento regular de R . Consequentemente, J contém uma unidade de Q e $J = Q$. Provamos, assim, que Q é anel simples.

Reciprocamente, suponhamos que Q é anel simples e consideremos ideais A, B de R tais que $AB = 0$. Suponhamos que $A \neq 0$. Como $Q A Q$ é um ideal bilateral não nulo de Q e Q é anel simples, $Q A Q = Q$. Em particular,

$$1 = \sum_{i=1}^n q_i a_i c_i d_i^{-1},$$

onde $q_i \in Q$, $a_i \in A$, $c_i \in R$ e $d_i \in C_R(0)$, para todo i tal que $1 \leq i \leq n$. Aplicando a Proposição 2.1.14, concluímos que existem $c \in C_R(0)$ e $a'_i \in A$, para todo i tal que $1 \leq i \leq n$, tais que

$$1 = \sum_{i=1}^n q_i a'_i c^{-1},$$

logo, $c = \sum_{i=1}^n q_i a'_i$. Uma vez que $c \in QA$, $cB = QAB = 0$. Ora, como c é regular, $cB = 0$ implica $B = 0$. Consequentemente, R é anel primo, como desejávamos provar. ■

Corolário 2.2.13 *Seja X um subconjunto multiplicativo de um anel de Goldie à direita semiprimo R . Se $X \subseteq C_R(0)$ e todo o ideal direito essencial de R intersecta X não trivialmente, então, X é um conjunto de denominadores à direita em R e*

$$RX^{-1} \simeq RC_R(0)^{-1}.$$

Demonstração. Pelo Teorema de Goldie, existe anel de fracções à direita de R com respeito a $C_R(0)$ - $RC_R(0)^{-1}$. Seja $\phi: R \rightarrow RC_R(0)^{-1}$ um homomorfismo de anéis que satisfaz as condições **a)**, **b)** e **c)** da Definição 2.1.1. Provaremos que $RC_R(0)^{-1}$ é anel de fracções à direita de R com respeito a X .

Observe-se que, como $X \subseteq C_R(0)$, todo o elemento da forma $\phi(x)$, com $x \in X$, é uma unidade de $RC_R(0)^{-1}$.

Se considerarmos $z \in RC_R(0)^{-1}$, concluímos que $z = \phi(a)\phi(b)^{-1}$, para alguns $a \in R$ e $b \in C_R(0)$. Pelo Teorema de Goldie, $(bR)_R \leq_e R_R$, logo, por hipótese,

$$bR \cap X \neq \emptyset,$$

o que nos leva a concluir que existem $r \in R$, $x \in X$ tais que $br = x$. Uma vez que $\phi(b)$ e $\phi(x)$ são unidades de $RC_R(0)^{-1}$, $\phi(r)$ é uma unidade de $RC_R(0)^{-1}$. Consequentemente, $z = \phi(ar)\phi(x)^{-1}$, o que nos leva a concluir que todos os elementos de $RC_R(0)^{-1}$ se escrevem na forma $\phi(s)\phi(y)^{-1}$, para alguns $s \in R$ e $y \in X$.

Uma vez que

$$\text{Ker}(\phi) = \{r \in R : rx = 0, \text{ para algum } x \in X\} = 0,$$

estão reunidas as condições necessárias para afirmar que $RC_R(0)^{-1}$ é anel de fracções à direita de R com respeito a X . Logo, X é um conjunto de denominadores à direita em R e $RC_R(0)^{-1} \simeq RX^{-1}$. ■

Em seguida verificaremos que um anel de Goldie à direita apresenta uma propriedade especial - o facto de todo o seu nil-ideal ser nilpotente.

Dado X um ideal de um anel R , apresentaremos uma condição “mais fraca” que a condição “ X é nilpotente” e verificaremos que, no caso particular de R satisfazer c.c.a. em anuladores à direita em R , as condições são equivalentes.

Definição 2.2.14 *Sejam R um anel e X um ideal de R . Dizemos que X é T -nilpotente se, para qualquer sequência $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de elementos de X , existir um número natural m tal que $x_m \dots x_2 x_1 = 0$.*

Lema 2.2.15 *Sejam R um anel que satisfaz c.c.a. em anuladores à direita em R e X um ideal de R . O ideal X é T -nilpotente se e só se X é nilpotente.*

Demonstração. É óbvio que, se X é nilpotente, X é T -nilpotente. Reciprocamente, suponhamos que X é T -nilpotente. Uma vez que

$$\text{rann}_R(X) \subseteq \dots \subseteq \text{rann}_R(X^n) \subseteq \dots$$

e R satisfaz c.c.a. em anuladores à direita em R , existe um número natural n tal que $\text{rann}_R(X^n) = \text{rann}_R(X^m)$, para todo $m \geq n$.

Com vista a um absurdo, suponhamos que X não é nilpotente. Como $X^{n+1} \neq 0$, existe $x_1 \in X$ tal que $X^n x_1 \neq 0$, logo, $X^{n+1} x_1 \neq 0$. Analogamente, concluímos que existe $x_2 \in X$ tal que $X^n x_2 x_1 \neq 0$, logo,

$$X^{n+1} x_2 x_1 \neq 0.$$

Repetindo o processo, construímos uma sequência de elementos de X - $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ tal que $x_m \dots x_1 \neq 0$, para todo $m > 1$, o que contraria o facto de X ser T -nilpotente. Concluímos, assim, que X é nilpotente, como desejávamos provar. ■

Teorema 2.2.16 [*Herstein, Small, Lanski*] *Sejam R um anel de Goldie à direita e X um nil-ideal de R ; então X é nilpotente.*

Demonstração. Pelo Lema 2.2.15, é suficiente provar que X é T -nilpotente. Com vista a um absurdo, suponhamos que X não é T -nilpotente.

Dizemos que um elemento $x \in X$ satisfaz a condição **A)** se existir uma sequência de elementos de X - $(z_i)_{i \in \mathbb{N}}$ tal que $z_1 = x$ e $z_m \dots z_2 z_1 \neq 0$, para todo $m > 1$. Seja

$$S_1 = \{x \in X : x \text{ satisfaz a condição A)}\}.$$

Como, por hipótese, X não é T -nilpotente, $S_1 \neq \emptyset$. Consideremos $x_1 \in S_1$ tal que $\text{rann}_R(x_1)$ é maximal entre os anuladores à direita em R de elementos de S_1 .

Seja n um número natural maior que 1. Definiremos x_n indutivamente. Para tal, suponhamos já definidos $x_2 \in S_2, \dots, x_{n-1} \in S_{n-1}$. Consideremos

$$S_n = \{x \in X : xx_{n-1} \dots x_1 \text{ satisfaz a condição A)}\}.$$

Como $S_n \neq \emptyset$, podemos tomar $x_n \in S_n$ tal que $\text{rann}_R(x_n)$ é maximal entre os anuladores à direita em R de elementos de S_n .

Para todo o número natural n , designamos por y_n os elementos da forma $x_n \dots x_1$. Observe-se que $y_n \neq 0$, para todo o número natural n .

Como $x_{i+j} \dots x_{i+1} \in X$ e

$$(x_{i+j} \dots x_{i+1} x_i)(x_{i-1} \dots x_1) \neq 0,$$

para todos $i, j \in \mathbb{N}$, então, $x_{i+j} \dots x_{i+1} x_i \in S_i$, para todos $i, j \in \mathbb{N}$. Por outro lado, como $\text{rann}_R(x_i)$ é maximal entre os anuladores à direita dos elementos de S_i , concluímos que

$$\text{rann}_R(x_i) = \text{rann}_R(x_{i+j} \dots x_{i+1} x_i), \text{ para todos } i, j \in \mathbb{N}. \quad \mathbf{1)}$$

Com vista a um absurdo, suponhamos que existem $n, i \in \mathbb{N}$ tais que $x_i y_n \neq 0$ e $n \geq i \geq 1$. Uma vez que $x_i y_n \neq 0$, por **1)**, $(x_{i+j} \dots x_i) y_n \neq 0$, para todo o número natural j , logo,

$$(x_{i+j} \dots x_{i+1})[(x_i x_n \dots x_i)(x_{i-1} \dots x_1)] \neq 0,$$

para todo o número natural j . Consequentemente, $x_i x_n \dots x_i \in S_i$. Por definição de x_i ,

$$\text{rann}_R(x_i) = \text{rann}_R(x_i x_n \dots x_i). \quad \mathbf{2)}$$

Pelo facto de X ser nil existe um número natural k tal que $(x_n \dots x_i)^k = 0$, logo,

$$x_i(x_n \dots x_i)(x_n \dots x_i)^{k-1} = 0.$$

Aplicando **2)**, concluímos que $x_i(x_n \dots x_i)^{k-1} = 0$. Repetindo o processo $k - 2$ vezes, obtemos $x_i(x_n \dots x_i) = 0$ e, logo, $x_i y_n = 0$, o que é absurdo. O absurdo resultou de supormos $x_i y_n \neq 0$, logo, $x_i y_n = 0$, para todos $n, i \in \mathbb{N}$ tais que $n \geq i \geq 1$.

Consideremos, agora, a família de ideais direitos não nulos de R , $(y_n R)_{n \in \mathbb{N}}$. Uma vez que R é anel de Goldie à direita, concluímos que a família apresentada é dependente, logo, existem $r_1, \dots, r_n \in R$ tais que

$$y_1 r_1 + \dots + y_n r_n = 0,$$

onde os elementos da forma $y_j r_j$, com $1 \leq j \leq n$, não são todos nulos. Logo,

$$-x_2 y_1 r_1 = x_2 y_2 r_2 + \dots + x_2 y_n r_n.$$

Uma vez que $x_i y_k = 0$, para todos $k, i \in \mathbb{N}$ tais que $k \geq i \geq 1$,

$$x_2 y_2 r_2 = \dots = x_2 y_n r_n = 0,$$

logo, $x_2 y_1 r_1 = 0$. Como $r_1 \in \text{rann}_R(x_2 y_1)$ e, por **1)**,

$$\text{rann}_R(x_1) = \text{rann}_R(x_2 x_1) = \text{rann}_R(x_2 y_1),$$

tem-se $x_1 r_1 = y_1 r_1 = 0$. Repetindo o processo, concluímos que $y_1 r_1 = \dots = y_n r_n = 0$, o que é absurdo. O absurdo resultou de supormos que X não era T -nilpotente, logo, X é T -nilpotente e, pelo Lema 2.2.15, X é nilpotente, como desejávamos provar. ■

Corolário 2.2.17 *Seja R um anel de Goldie à direita; então $\mathcal{P}(R)$ é nilpotente.*

Demonstração. Pela Proposição 1.1.9, $\mathcal{P}(R)$ é um nil-ideal, logo, pelo Teorema 2.2.16, $\mathcal{P}(R)$ é nilpotente. ■

2.2.1 Torção de um módulo

No caso particular de R ser um anel de Goldie à direita semiprimo, concluímos, pelo Teorema de Goldie, que R é, a menos de isomorfismo, uma ordem à direita num anel Q , logo, $C_R(0)$ é um conjunto de denominadores à direita em R . Neste caso, dizemos que um R -módulo M é um **R -módulo de torção** se M for um R -módulo de $C_R(0)$ -torção e M é um **R -módulo livre de torção** se M for um R -módulo livre de $C_R(0)$ -torção e designamos o R -módulo $t_{C_R(0)}(M)$ por **R -submódulo de torção** de M . Começamos por relacionar dois R -submódulos - $Z(M)$ e $t_{C_R(0)}(M)$ - de um dado R -módulo M sobre um anel de Goldie à direita semiprimo R .

Lema 2.2.18 *Sejam R um anel de Goldie à direita semiprimo e M um R -módulo; então $Z(M) = \{m \in M : mx = 0, \text{ para algum } x \in C_R(0)\} = t_{C_R(0)}(M)$.*

Demonstração. Se $m \in Z(M)$, por definição, $I = rann_R(m) \leq_e R_R$. Pelo facto de I ser um ideal direito essencial de um anel de Goldie à direita semiprimo, aplicando o Teorema de Goldie, concluímos que I contém um elemento regular x . Em particular, $mx = 0$ e $m \in t_{C_R(0)}(M)$.

Reciprocamente, consideremos $m \in M$ tal que $mx = 0$, para algum $x \in C_R(0)$. Logo, $mxR = 0$ e, uma vez que $x \in C_R(0)$ e R é um anel de Goldie à direita semiprimo, $(xR)_R \leq_e R_R$, logo,

$$rann_R(m) \leq_e R_R$$

e $m \in Z(M)$. Consequentemente,

$$Z(M) = \{m \in M : mx = 0, \text{ para algum } x \in C_R(0)\} = t_{C_R(0)}(M),$$

como desejávamos provar. ■

O Corolário que se segue é uma consequência imediata do Lema 2.2.18.

Corolário 2.2.19 *Sejam R um anel de Goldie à direita semiprimo e M um R -módulo. Afirmar que M é um R -módulo de torção é equivalente a afirmar que M é um R -módulo singular e afirmar que M é um R -módulo livre de torção é equivalente a afirmar que M é um R -módulo não singular.■*

A Proposição seguinte é uma consequência imediata do Corolário 2.2.19, da Proposição 1.6.2 e da Proposição 1.6.3.

Proposição 2.2.20 *Seja R um anel de Goldie à direita semiprimo; então:*

- a) todos os R -submódulos, módulos quocientes e somas de R -módulos de torção são R -módulos de torção,*
- b) todos os R -submódulos, somas directas e extensões essenciais de R -módulos livres de torção são R -módulos livres de torção,*
- c) sejam M um R -módulo e N um R -submódulo de M tal que N e M/N são R -módulos livres de torção; então M é um R -módulo livre de torção,*
- d) seja N um R -submódulo essencial de um R -módulo M ; então M/N é um R -módulo de torção,*
- e) sejam M um R -módulo livre de torção e N um R -submódulo de M tal que M/N é um R -módulo de torção; então $N \leq_e M$.*

Como, pelo Teorema de Goldie, os anéis de Goldie à direita semiprimos são não singulares à direita, aplicando a Proposição 1.6.4 e o Corolário 2.2.19, podemos enunciar o seguinte resultado:

Proposição 2.2.21 *Seja R um anel de Goldie à direita semiprimo,*

- a) para todo o R -módulo M , o R -módulo $M/Z(M) = M/t_{CR(0)}(M)$ é livre de torção,*
- b) se N é um R -submódulo de um R -módulo M tal que N e M/N são R -módulos de torção, então M é um R -módulo de torção,*
- c) toda a extensão essencial de um R -módulo de torção é um R -módulo de torção.*

Consideremos um anel de Goldie à direita semiprimo R e um R -módulo M . Uma vez que $M \leq_e E(M_R)$, pela Proposição 2.2.20, afirmar que M é um R -módulo livre de torção é equivalente a afirmar que $E(M_R)$ é um R -módulo livre de torção e, pelas Proposições 2.2.20 e 2.2.21, afirmar que M é um R -módulo de torção é equivalente a afirmar que $E(M_R)$ é um R -módulo de torção. Portanto,

Lema 2.2.22 *Sejam R um anel de Goldie à direita semiprimo e M um R -módulo; então M é um R -módulo livre de torção se e só se $E(M_R)$ é um R -módulo livre de torção e M é um R -módulo de torção se e só se $E(M_R)$ é um R -módulo de torção.■*

Proposição 2.2.23 *Seja R um anel de Goldie à direita semiprimo; então*

$$t_{CR(0)}(R_R) = 0.$$

Demonstração. Pelo Teorema de Goldie, R é anel não singular à direita, isto é, $Z(R_R) = 0$. Aplicando o Lema 2.2.18, concluímos que $t_{C_R(0)}(R_R) = 0$. ■

Corolário 2.2.24 *Sejam R um anel Noetheriano à direita, P um ideal próprio semiprimo de R e C um conjunto de Ore à direita em R tal que $C \subseteq C_R(P)$; então R/P é um R -módulo à direita livre de C -torção.*

Demonstração. O anel R/P é um anel Noetheriano à direita e semiprimo, logo, pela Proposição 2.2.23, R/P é um R/P -módulo à direita livre de torção. Uma vez que $C \subseteq C_R(P)$, R/P é um R -módulo à direita livre de C -torção. ■

Provaremos em seguida que, no caso particular de R ser um anel de Goldie à direita semiprimo e M ser um R -módulo uniforme, então M ou é um R -módulo livre de torção ou é um R -módulo de torção.

Proposição 2.2.25 *Sejam R um anel de Goldie à direita semiprimo e M um R -módulo uniforme; então M ou é um R -módulo de torção ou é um R -módulo livre de torção.*

Demonstração. Se $t_{C_R(0)}(M) = 0$, M é um R -módulo livre de torção.

Suponhamos que $t_{C_R(0)}(M) \neq 0$, então, por M ser um R -módulo uniforme, $t_{C_R(0)}(M) \leq_e M$. Uma vez que $t_{C_R(0)}(M)$ é um R -módulo de torção, pela Proposição 2.2.21, M é um R -módulo de torção. Concluímos, assim, que M ou é um R -módulo de torção ou é um R -módulo livre de torção, como desejávamos provar. ■

No Lema que se segue relacionam-se R -módulos livres de torção com R -módulos totalmente fiéis.

Lema 2.2.26 *Sejam R um anel primo de Goldie à direita e M um R -módulo não nulo livre de torção; então M é um R -módulo totalmente fiel.*

Demonstração. Suponhamos que M não é um R -módulo totalmente fiel, então, existe $0 \neq N \leq M$ tal que $\text{rann}_R(N) \neq 0$. Como $I = \text{rann}_R(N)$ é um ideal bilateral não nulo e R é um anel primo, pela Proposição 1.5.7, I é um ideal direito essencial de R , logo, I contém um elemento regular de $R - c$. Em particular, $Nc = 0$, o que é absurdo, uma vez que M é um R -módulo livre de torção. O absurdo resultou de supormos que M não é um R -módulo totalmente fiel, provando-se, assim, o desejado. ■

Finalizamos esta secção com um resultado relacionado com a torção de bimódulos - Lema 2.2.28. Antes de o introduzirmos, atendamos ao seguinte Lema:

Lema 2.2.27 *Sejam ${}_R A_S$ um bimódulo e B um S -submódulo de A tal que ${}_R(RB)$ é finitamente gerado; então existe um número natural n tal que $S/\text{rann}_S(B)$ é isomorfo a um S -submódulo de $\bigoplus_{i=1}^n B_i$, onde $B_i = B$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$.*

Demonstração. Sejam $b_1, \dots, b_n \in B$ tais que $RB = Rb_1 + \dots + Rb_n$, logo,

$$\text{rann}_S(B) = \text{rann}_S(RB) = \bigcap_{i=1}^n \text{rann}_S(b_i).$$

Consideremos o S -homomorfismo

$$\begin{aligned} \phi: S &\rightarrow \bigoplus_{i=1}^n B_i \\ s &\rightarrow (b_1 s, \dots, b_n s) \end{aligned} ,$$

onde $B_i = B$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Logo,

$$\frac{S}{\text{Ker}(\phi)} \simeq \phi(S) \leq \bigoplus_{i=1}^n B_i.$$

Ora, como

$$\text{Ker}(\phi) = \bigcap_{i=1}^n \text{rann}_S(b_i) = \text{rann}_S(B),$$

$S/\text{rann}_S(B)$ é isomorfo a um S -submódulo de $\bigoplus_{i=1}^n B_i$, como desejávamos provar. ■

Lema 2.2.28 *Sejam ${}_R A_S$ um bimódulo tal que ${}_R A$ é Noetheriano e S é um anel de Goldie à direita semiprimo. Seja C um sub-bimódulo de A e B um S -submódulo de A que contém C . Se B/C é um S -módulo de torção, então existe um ideal não nulo I de S tal que $BI \leq C$.*

Demonstração. Uma vez que S é um anel de Goldie à direita semiprimo, pelo Corolário 2.2.19, B/C é um S -módulo singular, logo, $(\text{rann}_S(\bar{b}))_S \leq_e S_S$, para todo $\bar{b} \in B/C$.

Como ${}_R A$ é Noetheriano, ${}_R(RB/C)$ é um R -módulo à esquerda finitamente gerado. Sejam $\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n$ elementos de B/C que geram ${}_R(RB/C)$; logo

$$\bigcap_{i=1}^n \text{rann}_S(\bar{b}_i) = \text{rann}_S(RB/C) = \text{rann}_S(B/C).$$

Uma vez que $(\text{rann}_S(\bar{b}_i))_S \leq_e S_S$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, concluímos que

$$I = \text{rann}_S(B/C) = \bigcap_{i=1}^n \text{rann}_S(\bar{b}_i) \neq 0.$$

Provamos, assim, que existe um ideal não nulo I de S tal que $BI \leq C$. ■

No caso particular de o S -submódulo B do bimódulo ${}_R A_S$ considerado no Lema 2.2.28 ser de torção, concluímos, tomando $C = 0$, que existe um ideal não nulo I de S tal que $BI = 0$, logo, $\text{rann}_S(B) \neq 0$. Portanto,

Corolário 2.2.29 *Seja ${}_R A_S$ um bimódulo tal que ${}_R A$ é Noetheriano e S é um anel de Goldie à direita semiprimo. Seja B um S -submódulo de A tal que B é um S -módulo de torção; então $\text{rann}_S(B) \neq 0$.*

2.3 Módulos de fracções

Nesta secção iremos generalizar a módulos vários dos resultados estudados sobre anéis de fracções.

Começemos por observar que se M é um RC^{-1} -módulo à direita, onde R é um anel e C um conjunto de denominadores à direita em R , então, existe uma estrutura natural de R -módulo à direita em M para a qual se verifica que $t_C(M) = 0$. Com efeito, a aplicação

$$\begin{aligned} \phi: M \times R &\rightarrow M \\ (m, r) &\rightarrow m(r1^{-1}) \end{aligned}$$

define uma estrutura de R -módulo à direita em M e, uma vez que, dados $m \in M$ e $c \in C$ tais que $mc = 0$, então $m = m(c1^{-1})c^{-1} = 0$, pelo que concluímos que $t_C(M) = 0$.

Definição 2.3.1 *Sejam R um anel, C um conjunto de denominadores à direita em R e M um R -módulo à direita. Um **módulo de fracções M' de M com respeito a C** é um RC^{-1} -módulo à direita para o qual existe um R -homomorfismo $f: M \rightarrow M'$ tal que:*

- a) todo o elemento de M' pode ser escrito na forma $f(a)x^{-1}$, para alguns $a \in M$ e $x \in C$,*
- b) $\text{Ker}(f) = t_C(M)$.*

Com o intuito de demonstrarmos que, dados um anel R , um conjunto C de denominadores à direita em R e um R -módulo M , é sempre possível construir um módulo de fracções M' de M com respeito a C , introduziremos alguns resultados e definições.

Definição 2.3.2 *Sejam R um anel, X um subconjunto multiplicativo de R e A um R -módulo. Dizemos que A é **X -divisível** se $Ax = A$, para todo $x \in X$.*

Lema 2.3.3 *Sejam R um anel, X um conjunto de denominadores à direita em R e A um R -módulo à direita. Suponhamos que A é um R -módulo à direita livre de X -torção e X -divisível, então, podemos definir uma estrutura de RX^{-1} -módulo à direita em A compatível com a sua estrutura de R -módulo à direita.*

Demonstração. Afirmar que A tem uma estrutura de RX^{-1} -módulo à direita é equivalente a afirmar que existe um homomorfismo de anéis

$$\phi: RX^{-1} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{Z}}(A)^{\text{op}}.$$

Por outro lado, como A tem uma estrutura de R -módulo à direita, existe um homomorfismo de anéis

$$\begin{aligned} \varphi: R &\rightarrow \text{End}_{\mathbb{Z}}(A)^{\text{op}} \\ r &\rightarrow \varphi(r): A \rightarrow A \\ &\quad a \rightarrow ar \end{aligned}$$

e, como RX^{-1} é anel de fracções à direita de R com respeito a X , existe um homomorfismo de anéis $\alpha: R \rightarrow RX^{-1}$ que satisfaz as condições a), b) e c) da Definição 2.1.1.

Se $\varphi(x)$ for uma unidade de $End_{\mathbb{Z}}(A)^{op}$, para todo $x \in X$, pela Proposição 2.1.15, concluímos que existe um único homomorfismo de anéis

$$\phi: RX^{-1} \rightarrow End_{\mathbb{Z}}(A)^{op}$$

tal que $\phi \circ \alpha \equiv \varphi$.

Para provarmos o lema é, pois, suficiente verificar que, para todo $x \in X$, $\varphi(x)$ é uma unidade de $End_{\mathbb{Z}}(A)^{op}$, ou, equivalentemente, $\varphi(x)$ é uma bijecção.

Seja $x \in X$. Começemos por provar que $\varphi(x)$ é uma função injectiva. De facto, se $(\varphi(x))(a) = 0$, para algum $a \in A$, então, $ax = 0$, isto é, $a \in t_X(A)$. Ora, como A é um R -módulo livre de X -torção, $t_X(A) = 0$, logo, $\varphi(x)$ é uma função injectiva. Por outro lado, se considerarmos $a \in A$, como A é X -divisível, existe $a' \in A$ tal que $a'x = a$; consequentemente, $a = (\varphi(x))(a')$, o que nos leva a concluir que $\varphi(x)$ é sobrejectiva, como desejávamos provar. ■

Seguindo uma abordagem semelhante à descrita na página 59, demonstraremos que um módulo de fracções A' de um R -módulo A com respeito a um conjunto X de denominadores à direita em R pode ser caracterizado à custa de um R -submódulo de $E(C_R)$, onde $C = A/t_X(A)$.

Teorema 2.3.4 *Sejam R um anel, X um conjunto de denominadores à direita em R e A um R -módulo; então existe um módulo de fracções de A com respeito a X .*

Demonstração. Sejam $C = A/t_X(A)$ e B o R -submódulo de $E(C_R)$ tal que $B/C = t_X(E(C_R)/C)$. Consideremos o R -homomorfismo

$$\begin{aligned} f: A &\rightarrow B \\ a &\rightarrow a + t_X(A) \end{aligned} \quad (1)$$

Vamos mostrar que podemos definir em B uma estrutura de RX^{-1} -módulo à direita compatível com a sua estrutura de R -módulo à direita. Pelo Lema 2.3.3, é suficiente mostrar que B é um R -módulo livre de X -torção e é um R -módulo X -divisível.

Para mostrarmos que B é um R -módulo livre de X -torção começemos por notar que, pela Observação 2.1.9, $t_X(C) = 0$. Assim,

$$0 = t_X(C) = t_X(B) \cap C.$$

Uma vez que $C \leq_e E(C_R)$, concluímos que $t_X(B) = 0$, isto é, B é um R -módulo livre de X -torção.

Em seguida provaremos que B é X -divisível. Começemos por verificar que, dados $b \in B$ e $x \in X$, se tem $\text{rann}_R(x) \subseteq \text{rann}_R(b)$. Para tal observe-se que, se $r \in \text{rann}_R(x)$, então, $xr = 0$. Pela reversibilidade à direita de X , existe $x' \in X$ tal que $rx' = 0$. Consequentemente $bx' = 0$, o que implica $br \in t_X(B)$. Uma vez que $t_X(B) = 0$, $r \in \text{rann}_R(b)$ e, logo,

$$\text{rann}_R(x) \subseteq \text{rann}_R(b).$$

Concluimos assim que, se $xr = xr'$, para alguns $r, r' \in R$, então, $b(r - r') = 0$, o que implica $br = br'$. Portanto,

$$\begin{array}{ccc} \phi : & xR & \rightarrow E(C_R) \\ & xr & \rightarrow br \end{array} \quad (2)$$

está bem definida. Pelo facto de $E(C_R)$ ser um R -módulo injectivo, podemos estender ϕ a um R -homomorfismo $\varphi : R \rightarrow E(C_R)$. Assim, $\varphi(1)x = \varphi(x) = \phi(x) = b$. Para provarmos que B é X -divisível é suficiente provar que $\varphi(1) \in B$. Ora, como $\varphi(1)x \in B$ e $B/C = t_X(E(C)/C)$, concluimos que existe $x' \in X$ tal que

$$(\varphi(1)x + C)x' = (\varphi(1) + C)xx' = 0_{B/C}$$

e, uma vez que $xx' \in X$, $\varphi(1) \in B$. Está, pois, demonstrado que B possui uma estrutura de RX^{-1} -módulo à direita compatível com a sua estrutura de R -módulo à direita.

Para provarmos que B é um módulo de fracções de A com respeito a X é suficiente verificar que o R -homomorfismo f definido em 1) satisfaz as condições a) e b) da Definição 2.3.1:

a) Como $B/C = t_X(E(C)/C)$, dado $b \in B$, existe $x \in X$ tal que

$$(b + C)x = 0_{B/C},$$

logo, $bx \in C$. Ora, como $bx \in C$, $bx = f(a)$, para algum $a \in A$, logo, $b = f(a)x^{-1}$, com $a \in A$ e $x \in X$.

b) Por definição, $\text{Ker}(f) = t_X(A)$. Estão, pois, reunidas as condições necessárias para afirmar que B é um módulo de fracções de A com respeito a X .

■

Sejam R um anel, X um conjunto de denominadores à direita em R e M um R -módulo; o módulo de fracções de M com respeito a X construído no Teorema 2.3.4 será representado por MX^{-1} . Representamos cada elemento $y \in MX^{-1}$ por ab^{-1} , com $a \in M$ e $b \in X$.

Demonstrámos a existência de módulo de fracções de um R -módulo arbitrário com respeito a um conjunto X de denominadores à direita em R . O passo seguinte será provar que, a menos de isomorfismo, o módulo de fracções é único.

Proposição 2.3.5 *Sejam R um anel, C um conjunto de denominadores à direita em R , M um R -módulo, M' um módulo de fracções de M com respeito a C , N um RC^{-1} -módulo à direita e $g: M \rightarrow N$ um R -homomorfismo. Designemos por $f: M \rightarrow M'$ um R -homomorfismo que satisfaz as condições **a)** e **b)** da Definição 2.3.1; então existe um e um só RC^{-1} -homomorfismo $h: M' \rightarrow N$ tal que $h \circ f \equiv g$.*

Demonstração. Vimos já, no início desta secção, que, se considerarmos em N a estrutura natural de R -módulo à direita, então, $t_C(N_R) = 0$. Uma vez que

$$0 = t_C(N_R) = t_C(E(N_R)) \cap N$$

e $E(N_R)$ é uma extensão essencial de N , $t_C(E(N_R)) = 0$.

Começaremos por provar que existe um R -homomorfismo $h: M' \rightarrow N$ tal que $h \circ f \equiv g$.

Consideremos $m, m' \in M$ tais que $f(m) = f(m')$, então, $(m - m') \in \text{Ker}(f)$. Por definição de f ,

$$(m - m') \in t_C(M),$$

isto é, existe $x \in C$ tal que $(m - m')x = 0$; logo, $g(m - m')x = 0$. Uma vez que $t_C(E(N_R)) = 0$, $g(m - m')x = 0$ implica $g(m - m') = 0$, logo, $g(m) = g(m')$.

Tendo em conta o que foi visto anteriormente, podemos definir a aplicação:

$$\begin{array}{ccc} h_0: f(M) & \rightarrow & E(N_R) \\ f(m) & \rightarrow & g(m) \end{array}.$$

Assim definida, h_0 é um R -homomorfismo.

Como $f(M) \leq M'$ e $E(N_R)$ é um R -módulo injectivo, existe um R -homomorfismo

$$\begin{array}{ccc} h_1: M' & \rightarrow & E(N_R) \\ m & \rightarrow & h_1(m) \end{array}$$

tal que $h_1|_{f(M)} \equiv h_0$. Pretendemos, agora, provar que $h_1(M') \subseteq N$. Para tal, observe-se que se $a \in M'$, por definição de f , $a = f(m)c^{-1}$, para alguns $m \in M$ e $c \in C$, logo, $f(m) = ac$. Assim,

$$h_1(a)c = h_1(ac) = h_1(f(m)) = h_0(f(m)) = g(m),$$

logo, $h_1(a)c = g(m)$ e $g(m) \in N$. Uma vez que N é um RC^{-1} -módulo,

$$g(m) = g(m)c^{-1}c,$$

logo,

$$(h_1(a) - g(m)c^{-1})c = 0.$$

Ora, como $t_C(E(N_R)) = 0$, $h_1(a) = g(m)c^{-1}$, portanto, $h_1(a) \in N$. Concluimos, assim, que $h_1(M') \subseteq N$.

Consideremos o R -homomorfismo

$$\begin{array}{ccc} h : M' & \rightarrow & N \\ m & \rightarrow & h_1(m) \end{array} .$$

Observe-se que, para todo $a \in M$,

$$(h \circ f)(a) = h_0(f(a)) = g(a),$$

logo, $h \circ f \equiv g$.

Verificaremos, seguidamente, que o R -homomorfismo h é também um RC^{-1} -homomorfismo. Consideremos $m \in M'$ e $rc^{-1} \in RC^{-1}$, com $r \in R$ e $c \in C$. Como h é um R -homomorfismo,

$$h(m)r = h(mr) = h(m(rc^{-1})c1^{-1}) = h(m(rc^{-1}))c.$$

Ora, como $h(m)r \in N$ e N é um RC^{-1} -módulo à direita,

$$h(m)(rc^{-1}) = h(m(rc^{-1})),$$

o que nos leva a concluir que h é um RC^{-1} -homomorfismo, como desejávamos provar.

Falta-nos provar que h é o único RC^{-1} -homomorfismo que satisfaz a condição $h \circ f \equiv g$. Para provarmos tal facto consideremos um RC^{-1} -homomorfismo $h' : M' \rightarrow N$ que satisfaz a condição $h' \circ f \equiv g$. Consideremos $m^* \in M'$. Por definição de f , $m^* = f(m)c^{-1}$, para alguns $m \in M$ e $c \in C$. Uma vez que h' e h são RC^{-1} -homomorfismos,

$$h'(m^*) = h'(f(m)c^{-1}) = h'(f(m))c^{-1} = g(m)c^{-1} = (h \circ f)(m)c^{-1} = h(m^*).$$

Consequentemente, $h' \equiv h$, como desejávamos provar. ■

Corolário 2.3.6 *Sejam R um anel, C um conjunto de denominadores à direita em R , M um R -módulo e M'_1, M'_2 módulos de fracções de M com respeito a C . Então, M'_1 e M'_2 são isomorfos como RC^{-1} -módulos à direita.*

Demonstração. A demonstração é análoga à apresentada no Corolário 2.1.16. ■

Aplicando o Teorema 2.3.4, concluimos que, dados um anel R , um R -módulo à direita M e um conjunto de denominadores à direita C em R , existe um módulo de fracções de M com respeito a C - MC^{-1} . Do Corolário anterior, resulta que, a menos de isomorfismo, o módulo de fracções de M com respeito a C é único.

2.3.1 Extensão e contracção de módulos

Nesta secção iremos relacionar R -submódulos de um dado R -módulo M e RC^{-1} -submódulos de MC^{-1} , onde C é um conjunto de denominadores à direita em R . Estudaremos o caso particular de o R -módulo M considerado ser um ideal de R .

Consideremos um anel R , um conjunto C de denominadores à direita em R e um R -módulo M . Seja N um RC^{-1} -submódulo de MC^{-1} . Designamos por **contracção de N em M** o conjunto

$$N^c = \{m \in M : m1^{-1} \in N\}.$$

Observe-se que N^c é um R -submódulo de M . Reciprocamente, se considerarmos um R -submódulo N de M , designamos por **extensão de N para MC^{-1}** o conjunto

$$N^e = \{nc^{-1} \in MC^{-1} : n \in N, c \in C\}.$$

Provaremos, em seguida, que N^e é um RC^{-1} -submódulo de MC^{-1} . Para tal, consideremos $rc^{-1} \in RC^{-1}$, com $r \in R$ e $c \in C$, $n_1c_1^{-1}, n_2c_2^{-1} \in N^e$, onde $n_1, n_2 \in N$ e $c_1, c_2 \in C$. Pela Proposição 2.1.14, existem $r_1, r_2 \in R$ e $c_* \in C$ tais que $r_1c_*^{-1} = c_1^{-1}$ e $r_2c_*^{-1} = c_2^{-1}$, logo,

$$n_1c_1^{-1} + n_2c_2^{-1} = n_1(r_1c_*^{-1}) + n_2(r_2c_*^{-1}) = (n_1r_1 + n_2r_2)c_*^{-1}.$$

Consequentemente,

$$(n_1c_1^{-1} + n_2c_2^{-1}) \in N^e.$$

Analogamente, provamos que $(n_1c_1^{-1} - n_2c_2^{-1}) \in N^e$. Por outro lado,

$$(n_1c_1^{-1})(rc^{-1}) = n_11^{-1}(c_1^{-1}rc^{-1}).$$

Ora, como $c_1^{-1}rc^{-1} \in RC^{-1}$, existem $r_2 \in R$ e $c_2 \in C$ tais que $c_1^{-1}rc^{-1} = r_2c_2^{-1}$, o que nos leva a concluir que

$$(n_1c_1^{-1})(rc^{-1}) = (n_1r_2)c_2^{-1}.$$

Estão, pois, reunidas as condições necessárias para afirmar que N^e é um RC^{-1} -submódulo de MC^{-1} .

Lema 2.3.7 *Sejam R um anel, C um conjunto de denominadores à direita em R e M um R -módulo. Então:*

a) *se N é um R -submódulo de M ,*

$$N^e = \{nc^{-1} \in MC^{-1} : n \in N, c \in C\}$$

é um RC^{-1} -submódulo de MC^{-1} .

b) *se N é um RC^{-1} -submódulo de MC^{-1} ,*

$$N^c = \{m \in M : m1^{-1} \in N\}$$

é um R -submódulo de M .

Proposição 2.3.8 *Sejam R um anel, X um conjunto de denominadores à direita em R e A um R -módulo. Então:*

- a) se B é um RX^{-1} -submódulo de AX^{-1} , $B = B^{ce}$;*
- b) se C é um R -submódulo de A , então, $C \leq C^{ec}$ e $C = C^{ec}$ se e só se A/C é um R -módulo livre de X -torção.*

Demonstração. a) Seja $b' \in B^{ce}$. Por definição, $b' = bx^{-1}$, para alguns $b \in B^c$ e $x \in X$. Ora, $b \in B^c$ implica $b1^{-1} \in B$, logo, $bx^{-1} \in B$ e $B^{ce} \leq B$.

Por outro lado, se $a \in B$, $a = bx^{-1}$, para alguns $b \in A$ e $x \in X$, logo, $b1^{-1} = ax1^{-1}$, portanto, $b1^{-1} \in B$ e $b \in B^c$. Consequentemente, $bx^{-1} \in B^{ce}$ e $B^{ce} = B$, como desejávamos provar.

b) Seja $c \in C$. Por definição, $c1^{-1} \in C^e$, logo, $c \in C^{ec}$ e $C \leq C^{ec}$.

Para provarmos que $C = C^{ec}$ se e só se A/C é um R -módulo livre de X -torção é suficiente provar que

$$C^{ec}/C = t_X(A/C).$$

Começemos por verificar que A/C^{ec} é um R -módulo livre de X -torção. Com efeito, se considerarmos $a \in A$ e $x \in X$ tal que $ax \in C^{ec}$, concluímos que $ax1^{-1} \in C^e$; logo, $a1^{-1} \in C^e$ ou, equivalentemente, $a \in C^{ec}$, o que nos leva a concluir que A/C^{ec} é um R -módulo livre de X -torção.

Por outro lado, C^{ec}/C é um R -módulo de X -torção uma vez que, se $c \in C^{ec}$, então, $c1^{-1} \in C^e$, logo, $c1^{-1} = ax^{-1}$, para alguns $a \in C$ e $x \in X$. Assim, existe $x' \in X$ tal que

$$cax' = ax'$$

e $ax' \in C$, de onde concluímos que

$$(c + C) \in t_X(C^{ec}/C),$$

logo, $t_X(C^{ec}/C) = C^{ec}/C$.

Pelo facto de C^{ec}/C ser um R -módulo de X -torção, concluímos que

$$C^{ec}/C \leq t_X(A/C).$$

Por outro lado, consideremos $a \in A$ tal que $ax \in C$, para algum $x \in X$. Uma vez que $C \leq C^{ec}$, $ax \in C^{ec}$. Como A/C^{ec} é um R -módulo livre de X -torção, $a \in C^{ec}$, o que nos leva a concluir que $C^{ec}/C = t_X(A/C)$, como desejávamos provar. ■

Lema 2.3.9 *Sejam R um anel, S um conjunto de denominadores à direita em R e M um R -módulo.*

- a) Sejam N, L RS^{-1} -submódulos do módulo de fracções MS^{-1} ; então $N^c \cap L^c = (N \cap L)^c$.*
- b) Sejam N, L R -submódulos de M ; então $N^e \cap L^e = (N \cap L)^e$.*

Demonstração. a) Obviamente que

$$(N \cap L)^c \leq N^c \cap L^c.$$

Reciprocamente, consideremos $x \in N^c \cap L^c$. Por definição, $x1^{-1} \in N \cap L$, isto é, $x \in (N \cap L)^c$, o que nos leva a concluir que $(N \cap L)^c = N^c \cap L^c$.

b) A inclusão $(N \cap L)^e \subseteq N^e \cap L^e$ é imediata.

Reciprocamente, consideremos $n \in N^e \cap L^e$. Por definição, existem $n_1 \in N$, $n_2 \in L$, $s_1, s_2 \in S$ tais que

$$n = n_1 s_1^{-1}, \quad n = n_2 s_2^{-1}.$$

Aplicando a Proposição 2.1.14, concluímos que existem $r_1, r_2 \in R$ e $s \in S$ tais que $s_1^{-1} = r_1 s^{-1}$ e $s_2^{-1} = r_2 s^{-1}$. Assim, $(n_1 r_1 - n_2 r_2) s^{-1} = 0$; portanto, existe $s' \in S$ tal que $n_1(r_1 s') = n_2(r_2 s')$. Uma vez que $n_1 r_1 s' \in N$, $n_2 r_2 s' \in L$, $n_1 r_1 s' \in (N \cap L)$ e

$$(n_1 r_1 s')(s s')^{-1} \in (N \cap L)^e,$$

o que nos leva a concluir que $n \in (N \cap L)^e$. Portanto, $(N \cap L)^e = N^e \cap L^e$, como desejávamos provar. ■

Concentremos, agora, o nosso estudo nas propriedades dos ideais de um anel de fracções à direita RS^{-1} de um anel R com respeito a um conjunto de denominadores à direita S .

Uma propriedade a salientar é que, se R for um anel, X for um conjunto de denominadores à direita em R e I for um ideal de RX^{-1} , então, I^e é um ideal bilateral de R . No entanto, não é verdade que, se I for um ideal de R , I^e seja um ideal de RX^{-1} , como mostramos no Exemplo 2.3.10.

Exemplo 2.3.10 Consideremos o anel $R = \mathbb{Q}[\{t_i : i \in \mathbb{Z}\}]$, onde t_i é uma indeterminada comutativa, para todo $i \in \mathbb{Z}$. Seja σ o automorfismo de R tal que σ fixa todos os elementos de $\mathbb{Q}$ e $\sigma(t_i) = t_{i+1}$, para todo $i \in \mathbb{Z}$.

Pela Proposição 2.1.17, $R' = R[x, x^{-1}; \sigma]$ é anel de fracções à direita de $R' = R[x; \sigma]$ com respeito a $S = \{1, x, x^2, \dots\}$. Observe-se que

$$\begin{aligned} \phi : \quad R' &\rightarrow R' \\ \sum_{i=0}^n a_i x^i &\rightarrow \sum_{i=0}^n a_i x^i \end{aligned}$$

é um homomorfismo de anéis que satisfaz as condições a), b) e c) da Definição 2.1.1. Provaremos em seguida que, embora

$$I = t_1 R' + \dots + t_n R' + \dots$$

seja um ideal bilateral de R' , I^e não é um ideal bilateral de R'' .

Por definição, I é um ideal direito de R' . Se considerarmos $(t_1 r_1 + \dots + t_n r_n) \in I$,

com $r_1, \dots, r_n \in R'$, e $\sum_{i=0}^m p_i x^i \in R'$, com $p_i \in R$, para todo $i \in \{0, \dots, m\}$, concluímos que

$$y = \left(\sum_{i=0}^m p_i x^i \right) (t_1 r_1 + \dots + t_n r_n) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=0}^m \sigma^i(t_j) p_i x^i r_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=0}^m t_{j+i} (p_i x^i r_j).$$

Uma vez que $y \in I$, concluímos que I é um ideal bilateral de R' .

Em seguida verificaremos que I^e não é um ideal bilateral de R'' . Para tal, observemos que $t_1 \in I^e$; no entanto, se $x^{-2} t_1 \in I^e$, então, como

$$x^{-2} t_1 = \sigma(t_1)^{-2} x^{-2} = t_{-1} x^{-2}, \quad t_{-1} x^{-2} \in I^e.$$

Ora, se $t_{-1} x^{-2} \in I^e$, então $t_{-1} \in I^e$. Logo, $t_{-1} = \sum_{i=1}^m t_i r_i$, onde $m \in \mathbb{N}$ e $r_i \in R'$, para todo $1 \leq i \leq m$, o que é absurdo. Concluímos assim que, embora I seja um ideal bilateral de R' , I^e não é um ideal bilateral de R'' .

Verificámos já que o anel R apresentado no Exemplo 2.3.10 não é Noetheriano à direita (página 64). Provaremos em seguida que, se o anel R em questão for Noetheriano à direita e X for um conjunto de denominadores à direita em R , todas as extensões de ideais bilaterais de R para RX^{-1} ainda são ideais bilaterais de RX^{-1} .

Proposição 2.3.11 *Sejam R um anel, C um conjunto de denominadores à direita em R e I um ideal de R . Então:*

- a)** *se o anel R é Noetheriano à direita (respectivamente Artiniano à direita), então RC^{-1} é anel Noetheriano à direita (respectivamente Artiniano à direita);*
- b)** *se RC^{-1} é anel Noetheriano à direita, I^e é um ideal bilateral de RC^{-1} ;*
- c)** *se R é anel Noetheriano à direita, todas as extensões de ideais bilaterais de R para RC^{-1} ainda são ideais bilaterais de RC^{-1} ;*
- d)** *se RC^{-1} é anel Noetheriano à direita e I_1 é um ideal direito de R , então, $(I_1 I)^e = (I_1)^e I^e$;*
- e)** *se R é anel Noetheriano à direita e C é um conjunto disjunto de I , então, $\overline{C} = \{c + I : c \in C\}$ é um conjunto de denominadores à direita em $\overline{R} = R/I$.*

Demonstração. **a)** Suponhamos que $I_1 \leq \dots \leq I_n \leq \dots$ é uma cadeia ascendente de ideais direitos de RC^{-1} . Logo,

$$(I_1)^c \leq \dots \leq (I_n)^c \leq \dots,$$

sendo $(I_j)^c$ um ideal direito de R , para todo $j \in \mathbb{N}$. Uma vez que R é anel Noetheriano à direita, concluímos que existe um número natural n tal que $(I_n)^c = (I_m)^c$, para todo $m > n$, logo, $(I_n)^{ce} = (I_m)^{ce}$, para todo $m > n$. Aplicando a Proposição 2.3.8, concluímos que $I_n = I_m$, para todo $m > n$; logo, RC^{-1} é anel Noetheriano à direita, como desejávamos provar.

Analogamente, provamos que se R é anel Artiniano à direita, RC^{-1} é anel Artiniano à direita.

b) Vimos já que I^e é um ideal direito de RC^{-1} .

Para provarmos que I^e é um ideal esquerdo de RC^{-1} é suficiente provar que $c^{-1}I^e = I^e$, para todo $c \in C$. Verificaremos em seguida que, dado $c \in C$, se tem $I^e \leq c^{-1}I^e$. Se considerarmos $x \in I^e$, por definição, $x = is^{-1}$, para alguns $i \in I$ e $s \in C$, logo, $(c1^{-1})x = (ci)s^{-1}$ e $(ci)s^{-1} \in I^e$, o que nos leva a concluir que $(c1^{-1})I^e \leq I^e$; consequentemente, $I^e \leq c^{-1}I^e$. Consideremos a cadeia de ideais direitos de RC^{-1} :

$$I^e \leq c^{-1}I^e \leq \dots \leq c^{-n}I^e \leq \dots$$

Como RC^{-1} é anel Noetheriano à direita, existe um número natural n tal que $c^{-n}I^e = c^{-n-1}I^e$. Logo, $I^e = c^{-1}I^e$, como desejávamos provar.

c) Pela alínea a) RC^{-1} é um anel Noetheriano à direita e, pela alínea b), todas as extensões de ideais bilaterais de R para RC^{-1} ainda são ideais bilaterais de RC^{-1} .

d) Facilmente se verifica que $(I_1I)^e \leq (I_1)^eI^e$.

Consideremos $a_1s_1^{-1} \in (I_1)^e$ e $a_2s_2^{-1} \in I^e$, com $a_1 \in I_1$, $a_2 \in I$ e $s_1, s_2 \in C$. Como, pela alínea b), I^e é um ideal bilateral de RC^{-1} , $s_1^{-1}a_2s_2^{-1} \in I^e$, logo, $s_1^{-1}a_2s_2^{-1} = a_3s_3^{-1}$, para alguns $a_3 \in I$ e $s_3 \in C$. Assim,

$$(a_1s_1^{-1})(a_2s_2^{-1}) = (a_1a_3)s_3^{-1}$$

e $(a_1a_3)s_3^{-1} \in (I_1I)^e$. Assim, $(I_1I)^e = (I_1)^eI^e$.

e) O conjunto $\overline{C}$ é fechado para o produto em R/I e é tal que $1+I \in \overline{C}$. Como C é disjunto de I , concluímos também que $0_{R/I} \notin \overline{C}$, logo, $\overline{C}$ é um subconjunto multiplicativo de R/I . O facto de $\overline{C}$ ser um conjunto de Ore à direita em R/I é uma consequência imediata de C ser um conjunto de Ore à direita em R . Uma vez que R/I é anel Noetheriano à direita, aplicando a Proposição 2.1.4, concluímos que $\overline{C}$ é um conjunto reversível à direita em R/I e, portanto, é um conjunto de denominadores à direita em R/I . ■

Proposição 2.3.12 *Sejam R um anel Noetheriano à direita, C um conjunto de denominadores à direita em R e P um ideal primo de R disjunto de C . Então:*

a) $C \subseteq C_R(P)$,

b) $P = P^{ec}$,

c) *sejam $\overline{R} = R/P$ e $\overline{C} = \{c+P : c \in C\}$; então existe anel de fracções à direita de $\overline{R}$ com respeito ao conjunto $\overline{C}$ e $\overline{RC}^{-1} \simeq RC^{-1}/P^e$.*

Demonstração. a) Vimos já, na Proposição 2.3.11, que

$$\overline{C} = \{c+P : c \in C\}$$

é um conjunto de denominadores à direita em R/P . Pelo Lema 2.1.10,

$$T = t_{\overline{C}}((R/P)_{R/P})$$

é um ideal bilateral de R/P . Se $T \neq 0$, como R/P é um anel primo, então, pela Proposição 1.5.7, T é um ideal direito essencial de R/P . Logo, como R/P é anel Noetheriano à direita primo, pelo Teorema de Goldie, T contém um elemento regular - x . Uma vez que $x \in T$, $xc = 0$, para algum $c \in \overline{C}$, mas, como x é regular, $c = 0$, o que é absurdo uma vez que $C \cap P = \emptyset$. Provamos, assim, que $T = 0$; logo, todos os elementos de $\overline{C}$ são regulares à esquerda em R/P . Do facto de $\overline{C}$ ser um conjunto reversível à direita (pois é um conjunto de denominadores à direita) resulta que todos os elementos de $\overline{C}$ são também regulares à direita em R/P , logo, $C \subseteq C_R(P)$.

b) Uma vez que, pela alínea anterior, $C \subseteq C_R(P)$, estão reunidas as condições necessárias para aplicar o Corolário 2.2.24 e afirmar que R/P é um R -módulo à direita livre de C -torção, o que, pela Proposição 2.3.8, é equivalente a afirmar que $P^{ec} = P$.

c) Como C é um conjunto de denominadores à direita em R , existe anel de fracções à direita de R com respeito a C - RC^{-1} .

Por outro lado, pela Proposição 2.3.11, P^e é um ideal bilateral e, uma vez que, pela alínea b), $P^{ec} = P$, $P^e \neq RC^{-1}$. Logo, RC^{-1}/P^e é um anel.

Pela Proposição 2.3.11, $\overline{C}$ é um conjunto de denominadores à direita em $\overline{R}$, logo, existe anel de fracções à direita de $\overline{R}$ com respeito a $\overline{C}$.

Consideremos o homomorfismo de anéis

$$\begin{aligned} \phi: \quad \overline{R} &\rightarrow RC^{-1}/P^e \\ r + P &\rightarrow r1^{-1} + P^e \end{aligned}$$

Pretendemos mostrar que RC^{-1}/P^e é anel de fracções à direita de $\overline{R}$ com respeito a $\overline{C}$. Para tal, é suficiente verificar que ϕ satisfaz as condições a), b) e c) descritas na Definição 2.1.1:

Seja $c \in C$; logo, $c1^{-1}$ é uma unidade de RC^{-1} , o que implica que $c1^{-1} + P^e$ seja uma unidade de RC^{-1}/P^e . Consequentemente, $\phi(\overline{c})$ é uma unidade de RC^{-1}/P^e , para todo $\overline{c} \in \overline{C}$.

Seja $x \in RC^{-1}/P^e$; então, $x = z + P^e$, para algum $z \in RC^{-1}$. Por definição de RC^{-1} , $z = ab^{-1}$, para alguns $a \in R$ e $b \in C$, logo,

$$x = (a1^{-1} + P^e)(b1^{-1} + P^e)^{-1} = \phi(a + P)\phi(b + P)^{-1},$$

onde $(a + P) \in \overline{R}$ e $(b + P) \in \overline{C}$.

Seja $r + P \in \text{Ker}(\phi)$; então, $r1^{-1} \in P^e$, isto é, $r \in P^{ec}$. Pela alínea b), $P^{ec} = P$, logo, $r + P = 0_{R/P}$. Consequentemente, $\text{Ker}(\phi) = 0$. Por outro lado, como $\overline{R}$ é anel Noetheriano à direita e primo, pela Proposição 2.2.23,

$$t_{C_{\overline{R}}(0)}(\overline{R}_{\overline{R}}) = 0.$$

Ora, como pela alínea **a)** $C \subseteq C_R(P)$, $\overline{C} \subseteq C_{\overline{R}}(0)$, logo,

$$t_{\overline{C}}(\overline{R}_{\overline{R}}) = 0 = \text{Ker}(\phi).$$

Estão, pois, reunidas as condições necessárias para afirmar que RC^{-1}/P^e é anel de fracções à direita de $\overline{R}$ com respeito a $\overline{C}$, logo, $RC^{-1}/P^e \simeq \overline{RC}^{-1}$, como pretendíamos provar. ■

Se na Proposição 2.3.12 considerarmos o caso particular de o anel R ser Noetheriano à direita e primo e C ser um conjunto de denominadores à direita em R , então, uma vez que 0 é um ideal primo de R e $0 \cap C = \emptyset$, pela alínea **a)**, $C \subseteq C_R(0)$. Aplicando, agora, o Corolário 2.2.24, concluímos que R é um R -módulo à direita livre de C -torção. Portanto,

Lema 2.3.13 *Sejam R um anel primo Noetheriano à direita e C um conjunto de denominadores à direita em R ; então R é um R -módulo livre de C -torção e $C \subseteq C_R(0)$.*

O próximo Teorema permite-nos concluir ser possível definir uma correspondência bijectiva entre $\text{Spec}(RC^{-1})$, onde R é anel Noetheriano à direita e C é um conjunto de denominadores à direita em R , e o conjunto X constituído pelos ideais primos de R disjuntos de C .

Teorema 2.3.14 *Sejam R um anel Noetheriano à direita, C um conjunto de denominadores à direita em R e X o conjunto constituído pelos ideais primos de R disjuntos de C . Então, as correspondências*

$$\begin{array}{ccc} \phi_1 : & \text{Spec}(RC^{-1}) & \rightarrow X \\ & P & \rightarrow P^c \end{array},$$

$$\begin{array}{ccc} \phi_2 : & X & \rightarrow \text{Spec}(RC^{-1}) \\ & P & \rightarrow P^e \end{array}$$

são aplicações bijectivas e inversas uma da outra.

Demonstração. Seja $Q \in \text{Spec}(RC^{-1})$. Provaremos que Q^c é um ideal primo de R . O ideal Q^c é um ideal próprio de R , pois, caso contrário, teríamos, pela Proposição 2.3.8, $Q = Q^{ce} = RC^{-1}$, o que é absurdo, uma vez que Q é um ideal primo de RC^{-1} . Com o intuito de provarmos que $P = Q^c$ é um ideal primo de R , consideremos ideais bilaterais de R - I, I' tais que $II' \subseteq P$; então, pela Proposição 2.3.11,

$$I^e(I')^e = (II')^e \subseteq P^e = Q^{ce} = Q.$$

Uma vez que Q é um ideal primo de RC^{-1} e, pela Proposição 2.3.11, I^e e $(I')^e$ são ideais bilaterais de RC^{-1} , $I^e \subseteq Q$ ou $(I')^e \subseteq Q$, logo,

$$I^{ec} \subseteq Q^c \text{ ou } (I')^{ec} \subseteq Q^c.$$

Aplicando a Proposição 2.3.8, concluímos que $I \subseteq I^{ec}$ e $I' \subseteq (I')^{ec}$, logo, $I \subseteq Q^c$ ou $I' \subseteq Q^c$. Consequentemente, Q^c é um ideal primo de R .

Por outro lado, $Q^c \cap C = \emptyset$, pois, caso contrário, teríamos $11^{-1} \in Q^{ce}$, o que é absurdo, uma vez que $Q = Q^{ce}$ e Q é um ideal próprio de RC^{-1} .

Do que foi visto, concluímos que, se Q é um ideal primo de RC^{-1} , então, Q^c é um ideal primo de R disjunto de C .

Reciprocamente, suponhamos que P é um ideal primo de R disjunto de C . Provaremos que P^e é um ideal primo de RC^{-1} . Pela Proposição 2.3.11, P^e é um ideal bilateral de RC^{-1} . Por outro lado, aplicando a Proposição 2.3.12, concluímos que $P = P^{ec}$. Em particular, P^e é um ideal próprio de RC^{-1} . Sejam I, J ideais bilaterais de RC^{-1} tais que $IJ \subseteq P^e$, logo,

$$(IJ)^c \subseteq P^{ec} = P.$$

Uma vez que $I^c J^c \subseteq (IJ)^c$ e I^c, J^c são ideais direitos de R , então $I^c \subseteq P$ ou $J^c \subseteq P$. Logo,

$$I = I^{ce} \subseteq P^e \text{ ou } J = J^{ce} \subseteq P^e,$$

de onde concluímos que P^e é um ideal primo de RC^{-1} . Do que foi visto, concluímos que, se P é um ideal primo de R disjunto de C , então, P^e é um ideal primo de RC^{-1} .

Uma vez que, para todo o ideal primo P de RC^{-1} , se tem $P = P^{ce}$ e verificámos já que, para todo o ideal primo P pertencente a X , se tem $P = P^{ec}$, as aplicações ϕ_1, ϕ_2 são inversas uma da outra. ■

Corolário 2.3.15 *Sejam R um anel Noetheriano à direita e C um conjunto de denominadores à direita em R ; então:*

- a) *um ideal I de RC^{-1} é primo se e só se I^c é um ideal primo de R ;*
- b) *seja P um ideal primo de R . Então, $P = Q^c$, para algum ideal primo Q de RC^{-1} se e só se $C \subseteq C_R(P)$.*

Demonstração. a) É uma consequência imediata do Teorema 2.3.14 que, se I é um ideal primo de RC^{-1} , então I^c é um ideal primo de R .

Reciprocamente, suponhamos que I é um ideal de RC^{-1} tal que I^c é um ideal primo de R . Se provarmos que I^c é disjunto de C , pelo Teorema 2.3.14, concluiremos que I^{ce} é um ideal primo de RC^{-1} . Ora, como, pela Proposição 2.3.8, $I^{ce} = I$, concluiremos que I é um ideal primo de RC^{-1} .

Ora, se $I^c \cap C \neq \emptyset$, então $11^{-1} \in I$, logo, $I = RC^{-1}$ e, portanto, $I^c = R$, o que é absurdo, uma vez que I^c é um ideal próprio de R . Concluimos, assim, que $I^c \cap C = \emptyset$ e, portanto, I é um ideal primo de RC^{-1} , como desejávamos provar.

b) Se $P = Q^c$, para algum ideal primo Q de RC^{-1} , então, pelo Teorema 2.3.14,

$$\emptyset = Q^c \cap C = P \cap C$$

e, aplicando a Proposição 2.3.12, $C \subseteq C_R(P)$.

Reciprocamente, se $C \subseteq C_R(P)$, então,

$$P \cap C = C_R(P) \cap P = \emptyset;$$

logo, aplicando o Teorema 2.3.14, concluimos que P^e é um ideal primo de RC^{-1} . Aplicando a Proposição 2.3.12, concluimos que $P = (P^e)^c$. Assim, designando por Q o ideal primo P^e , demonstramos o Corolário. ■

Capítulo 3

Localização relativamente a ideais primos

Após se ter definido anel de fracções de um anel comutativo R , o passo a seguir na Álgebra Comutativa será localizá-lo relativamente a ideais primos. Assim, se considerarmos um anel comutativo R , um ideal primo P e o conjunto $S = R \setminus P$, verificaremos que este conjunto é um subconjunto multiplicativo de R . Com efeito, dados $a, b \in R$ tais que $ab \in P$, tem-se $aRb = abR \subseteq P$, o que nos leva a concluir, pelo facto de P ser ideal primo, que $a \in P$ ou $b \in P$; logo, S é fechado para o produto. Uma vez que $1 \in S$ e $0 \notin S$, S é um subconjunto multiplicativo de R . Observe-se ainda que $S = C_R(P)$. Uma vez que $C_R(P)$ é um subconjunto multiplicativo de R e R é anel comutativo, podemos construir o anel de fracções $RC_R(P)^{-1}$, que designaremos por R_P . O processo de passagem de R para R_P designa-se por localização de R em P .

Seguindo o exemplo da Teoria de Anéis Comutativos será natural tentar localizar um anel não comutativo num ideal primo.

Com este intuito, Goldie definiu ideal primo **localizável à direita** de um anel R como sendo qualquer ideal primo P para o qual se verifica que $C_R(P)$ é um conjunto de denominadores à direita em R . De forma análoga, definimos ideal primo **localizável à esquerda**. Um ideal primo P de um anel R é **localizável** se e só se $C_R(P)$ for um conjunto de denominadores à direita e à esquerda em R .

Observe-se que, se o anel R considerado no parágrafo anterior for Noetheriano à direita (respectivamente à esquerda), pela Proposição 2.1.4 (e pela respectiva versão esquerda), afirmar que um ideal primo P é localizável à direita (respectivamente à esquerda) é equivalente a afirmar que $C_R(P)$ é um conjunto de Ore à direita (respectivamente à esquerda) em R . No caso de o anel R ser comutativo, se considerarmos um qualquer ideal primo P de R , o conjunto $C_R(P)$ é, trivialmente, um conjunto de denominadores à direita e à esquerda em R , pelo que todos os ideais primos num anel comutativo são localizáveis.

Dados um anel R e um ideal primo P de R localizável à direita, podemos definir um anel de fracções à direita de R com respeito a $C_R(P)$, $RC_R(P)^{-1}$. Por

analogia com o caso comutativo, se P for um ideal primo localizável à direita de um anel R , designamos o anel $RC_R(P)^{-1}$ por R_P .

Ao contrário do caso comutativo, nem todos os ideais primos de anéis Noetherianos não comutativos são localizáveis. Uma dificuldade crucial na localização deve-se à existência de certas “ligações” entre alguns ideais primos.

3.1 Ligações entre ideais primos

Consideremos um corpo K e $R = \begin{pmatrix} K & K \\ 0 & K \end{pmatrix}$ o anel das matrizes triangulares superiores com entradas no corpo K . Por [[23], 1.22], R é anel Artiniano. Consequentemente, pelo Teorema 1.2.8, R é anel Noetheriano. Observemos, agora, que R contém apenas dois ideais primos $Q = \begin{pmatrix} K & K \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $P = \begin{pmatrix} 0 & K \\ 0 & K \end{pmatrix}$.

Sejam Q' um ideal não nulo de R e $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ um elemento não nulo de Q' . Suponhamos que $a \neq 0$, então

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in Q'.$$

Assim, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in Q'$. Consequentemente,

$$\begin{pmatrix} K & K \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \subseteq Q'.$$

Se $c \neq 0$,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in Q' \text{ e } \begin{pmatrix} 0 & K \\ 0 & K \end{pmatrix} \subseteq Q'.$$

Se $b \neq 0$, concluímos que

$$I = \begin{pmatrix} 0 & K \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \subseteq Q'.$$

Como Q , P e I são ideais de R , concluímos que qualquer ideal não nulo de R contém um destes ideais. Podemos verificar que estes são os únicos ideais próprios não nulos de R .

Como

$$\begin{pmatrix} K & K \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & K \\ 0 & K \end{pmatrix} \subseteq \begin{pmatrix} 0 & K \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & K \\ 0 & K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K & K \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \subseteq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = X,$$

I e X não são ideais primos de R .

Uma vez que $I \subseteq P$, $I \subseteq Q$ e, para todo $n \in \mathbb{N}$, $P^n = P$ e $Q^n = Q$, concluímos que P e Q são ideais primos.

Facilmente se verifica que $C_R(Q) = R \setminus Q$ e $C_R(P) = R \setminus P$.

Dados $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in C_R(P)$ e $\begin{pmatrix} d & e \\ 0 & f \end{pmatrix} \in R$, temos

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{-1}d & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & e \\ 0 & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Podemos assim concluir que $C_R(P)$ é um conjunto de Ore à direita em R . No entanto, $C_R(Q)$ não é um conjunto de Ore à direita em R uma vez que, para qualquer $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in R$ e $\begin{pmatrix} d & e \\ 0 & f \end{pmatrix} \in C_R(Q)$, temos $f \neq 0$, logo,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & e \\ 0 & f \end{pmatrix}.$$

Assim, P é um ideal primo localizável à direita de R mas Q não o é.

Se tentarmos analisar as diferenças entre P e Q verificamos que, enquanto $Q \cap P = I = QP$, $PQ = 0 \subsetneq P \cap Q = I$.

Como, se

$$\begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

então, $i = 0$ ou $j = 0$, concluímos que $(P \cap Q)/PQ$ é um R/Q -módulo à direita livre de torção. Analogamente, podemos mostrar que $(P \cap Q)/PQ$ é um R/P -módulo à esquerda livre de torção.

Em 1976, Bruno Mueller definiu um tipo de ligações especiais entre dois ideais primos P e Q em condições análogas às acima descritas no caso das matrizes triangulares superiores.

Definição 3.1.1 *Sejam R um anel Noetheriano e P, Q ideais primos de R . Existe uma **ligação na segunda camada de Q para P** se existir um ideal A de R tal que $QP \subseteq A \subsetneq Q \cap P$ e $(Q \cap P)/A$ é livre de torção como R/Q -módulo à esquerda e como R/P -módulo à direita. Neste caso, escrevemos $Q \rightsquigarrow P$. O bimódulo $(Q \cap P)/A$ designa-se por **bimódulo de ligação entre Q e P** .*

Usando o exemplo introduzido no início desta secção, podemos verificar que a definição apresentada não é simétrica.

Exemplo 3.1.2 *Sejam K um corpo, $R = \begin{pmatrix} K & K \\ 0 & K \end{pmatrix}$ e os ideais primos de R -*

$$Q = \begin{pmatrix} K & K \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & K \\ 0 & K \end{pmatrix}.$$

Pelo que foi visto anteriormente, tem-se que $P \rightsquigarrow Q$ mas Q não está ligado a P .

Embora a definição não seja simétrica, esta goza de uma “certa simetria”: dados dois ideais primos P e Q de um anel Noetheriano R tem-se $P \rightsquigarrow Q$ em R se e só se $Q \rightsquigarrow P$ em R^{op} .

Dado um anel Noetheriano R , dizemos que $P \in \text{Spec}(R)$ tem apenas uma **ligação trivial** se sempre que $P \rightsquigarrow Q$ ou $Q \rightsquigarrow P$, para algum $Q \in \text{Spec}(R)$, se tem $P = Q$.

Exemplo 3.1.3 Num anel comutativo Noetheriano R as únicas ligações na segunda camada existentes são triviais.

Sejam P, Q ideais primos de R tais que $Q \rightsquigarrow P$ através do bimódulo de ligação $(Q \cap P)/A$. Observe-se que

$$(Q \cap P)(Q + P) \subseteq (Q \cap P)Q + (Q \cap P)P \subseteq QP + QP = QP \subseteq A,$$

logo,

$$\frac{Q \cap P}{A} \frac{Q + P}{P} = 0. \quad (1)$$

Suponhamos que $Q \not\subseteq P$, então $(Q + P)/P$ é um ideal não nulo de R/P . Uma vez que R/P é um anel primo Noetheriano, pela Proposição 1.5.7, $(Q + P)/P$ é um ideal direito essencial de R/P e, pelo Teorema de Goldie, contém um elemento regular c . Ora, por (1),

$$((Q \cap P)/A).c = 0,$$

de onde concluímos que $(Q \cap P)/A$ é um R/P -módulo à direita de torção, o que contraria a hipótese. Provamos, assim, que $Q \subseteq P$. Analogamente, provamos que $P \subseteq Q$. Logo, $P = Q$, como desejávamos provar.

A noção de ligação permite-nos pensar em $\text{Spec}(R)$ (onde R é um anel Noetheriano) como um grafo direccionado, designando-se as componentes conexas do grafo por cliques. Assim,

Definição 3.1.4 O **grafo de ligações** de um anel Noetheriano R é um grafo direccionado cujos vértices correspondem aos elementos de $\text{Spec}(R)$, com uma seta de Q para P sempre que $Q \rightsquigarrow P$. O **clique** de um ideal primo P , que representaremos por $\text{cl}(P)$, é o conjunto dos ideais primos que formam a componente conexa do grafo de ligações que contém o vértice designado por P .

Definição 3.1.5 Sejam R um anel Noetheriano e P um ideal primo de R . O conjunto $r.\text{cl}(P) =$

$$\{Q \in \text{Spec}(R) : (\exists P_1, \dots, P_n \in \text{Spec}(R) : Q = P_n \rightsquigarrow P_{n-1} \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow P_1 = P)\}$$

é designado por **clique à direita** de P . De forma análoga, definimos **clique à esquerda** de P .

Observe-se que o clique de um ideal primo P de um anel Noetheriano R se obtém permitindo que cada uma das setas entre cada par de primos P_i, P_{i-1} na Definição 3.1.5 aponte em cada uma das duas direcções possíveis.

Exemplo 3.1.6 Nas condições do Exemplo 3.1.2, $r.cl(P) = \{P\}$ e $cl(P) = \{Q, P\}$.

Definição 3.1.7 Sejam R um anel Noetheriano e $X \subseteq \text{Spec}(R)$. Dizemos que X é **fechado para ligações à direita** se, sempre que $P \in X$ e $Q \rightsquigarrow P$, se tem $Q \in X$. O **fecho de ligações à direita** de X é o menor subconjunto de $\text{Spec}(R)$ fechado para ligações à direita que contém X .

Dados um anel Noetheriano R e um ideal primo P de R , o menor subconjunto de $\text{Spec}(R)$ que contém P e é fechado para ligações à direita é $r.cl(P)$, isto é, o fecho de ligações à direita de $\{P\}$ é o conjunto $r.cl(P)$.

Verificaremos que, dados um anel Noetheriano R , um conjunto C de Ore à direita em R tal que RC^{-1} é anel Noetheriano e um subconjunto X de $\text{Spec}(R)$ fechado para ligações à direita e tal que todos os seus elementos são disjuntos de C , o conjunto constituído pelas imagens dos elementos de X através da aplicação

$$\begin{array}{ccc} \phi: X & \rightarrow & \text{Spec}(RC^{-1}) \\ P & \rightarrow & P^e \end{array}$$

ainda é fechado para ligações à direita em RC^{-1} . Tal facto é uma consequência do Teorema 2.3.14 e da Proposição 3.1.9. Para provarmos esta Proposição, começamos por introduzir o seguinte Lema:

Lema 3.1.8 Sejam R um anel Noetheriano à direita, S um conjunto de Ore à direita em R e P um ideal primo de R disjunto de S . Então, afirmar que $r \in C_R(P)$ é equivalente a afirmar que $rs^{-1} \in C_{RS^{-1}}(P^e)$, para algum $s \in S$, o que, por sua vez, é equivalente a afirmar que $r1^{-1} \in C_{RS^{-1}}(P^e)$.

Demonstração. Sejam R, S e P nas condições enunciadas e $r \in R$.

Começamos por verificar que $rs^{-1} \in C_{RS^{-1}}(P^e)$, para algum $s \in S$, se e só se $r1^{-1} \in C_{RS^{-1}}(P^e)$. Como P é um ideal primo disjunto de S , pelo Teorema 2.3.14, P^e é um ideal primo de RS^{-1} e, em particular, é um ideal próprio de RS^{-1} .

Dado $s \in S$, $s1^{-1}$ é uma unidade de RS^{-1} , logo,

$$(s1^{-1} + P^e), (1s^{-1} + P^e)$$

são elementos regulares de RS^{-1}/P^e . Assim, se $rs^{-1} \in C_{RS^{-1}}(P^e)$,

$$r1^{-1} + P^e = (rs^{-1} + P^e)(s1^{-1} + P^e)$$

é um elemento regular de RS^{-1}/P^e , logo, $r1^{-1} \in C_{RS^{-1}}(P^e)$. Reciprocamente, se $r1^{-1} \in C_{RS^{-1}}(P^e)$, como $rs^{-1} = r1^{-1}s^{-1}$, então $rs^{-1} \in C_{RS^{-1}}(P^e)$, para todo $s \in S$.

Para provarmos o lema é, pois, suficiente provar que $r \in C_R(P)$ se e só se $r1^{-1} \in C_{RS^{-1}}(P^e)$.

Suponhamos que $r \in C_R(P)$. Pelo Teorema 2.3.14 e pelas Proposições 2.3.11 e 2.3.12, concluímos que $P^{ec} = P$ e RS^{-1}/P^e é um anel primo e Noetheriano à direita, logo, pelo Teorema de Goldie, é não singular à direita. Consequentemente, pela Proposição 2.2.8, para provarmos que $r1^{-1} \in C_{RS^{-1}}(P^e)$, é suficiente provar que $r1^{-1} + P^e$ é um elemento regular à direita de RS^{-1}/P^e . Com vista a um absurdo, suponhamos que $r1^{-1} + P^e$ não é regular à direita; então, existe $r's^{-1} \in RS^{-1} \setminus P^e$ tal que

$$(r1^{-1})(r's^{-1}) \in P^e,$$

logo, $rr'1^{-1} \in P^e$ e $rr' \in P^{ec}$. Como $P^{ec} = P$, $rr' \in P$. Uma vez que $r \in C_R(P)$, $r' \in P$, de onde concluímos que $r's^{-1} \in P^e$, o que é absurdo. Portanto, $r1^{-1} \in C_{RS^{-1}}(P^e)$, como desejávamos provar.

Reciprocamente, suponhamos que $r1^{-1} \in C_{RS^{-1}}(P^e)$, com $r \in R$. Uma vez que R/P é um anel primo Noetheriano à direita, para provarmos que $r \in C_R(P)$, pela Proposição 2.2.8, é suficiente provar que $r + P$ é regular à direita em R/P . Com vista a um absurdo, suponhamos que $r + P$ não é regular à direita. Então, existe $r' \in R \setminus P$ tal que $rr' \in P$, logo, $rr'1^{-1} \in P^e$ e $rr'1^{-1} = (r1^{-1})(r'1^{-1})$. Como $r1^{-1} \in C_{RS^{-1}}(P^e)$, concluímos que $r'1^{-1} \in P^e$, consequentemente, $r' \in P^{ec}$, o que é absurdo, uma vez que $P^{ec} = P$. Portanto, $r \in C_R(P)$, como desejávamos provar. ■

Proposição 3.1.9 *Sejam R um anel Noetheriano, S um conjunto de Ore à direita em R tal que RS^{-1} é anel Noetheriano e P, Q ideais primos de R disjuntos de S . Então, $Q \rightsquigarrow P$ se e só se $Q^e \rightsquigarrow P^e$.*

Demonstração. Suponhamos que $Q \rightsquigarrow P$ através do bimódulo de ligação $(P \cap Q)/A$.

Começamos por mostrar que R/A é um R -módulo livre de S -torção. Consideremos $r \in R$ e $s \in S$ tais que $rs \in P \cap Q$. Pela Proposição 2.3.12,

$$S \subseteq C_R(P) \cap C_R(Q),$$

assim, $s \in C_R(P)$. Como $rs \in P$, $r \in P$. Analogamente, concluímos que $r \in Q$, logo, $r \in P \cap Q$ e $R/(P \cap Q)$ é um R -módulo livre de S -torção. Como $(Q \cap P)/A$ é, por definição, um R/P -módulo livre de torção, em particular, $(Q \cap P)/A$ é um R -módulo livre de S -torção. Sejam $r \in R$ e $s \in S$ tais que $rs \in A$, então, $rs \in P \cap Q$ e, pelo que vimos anteriormente, $r \in P \cap Q$. Uma vez que $r \in P \cap Q$,

$rs \in A$ e $(Q \cap P)/A$ é um R -módulo livre de S -torção, concluímos que $r \in A$, isto é, R/A é um R -módulo à direita livre de S -torção. Pela Proposição 2.3.8, concluímos que

$$A^{ec} = A.$$

Pela Proposição 2.3.11, A^e é um ideal bilateral de RS^{-1} . Pela Proposição 2.3.12, $P^{ec} = P$ e $Q^{ec} = Q$. Pelo Teorema 2.3.14, temos que P^e e Q^e são ideais primos de RS^{-1} .

Demonstraremos que $(P^e \cap Q^e)/A^e$ é um bimódulo de ligação entre Q^e e P^e . Uma vez que $QP \subseteq A \subsetneq P \cap Q$, pela Proposição 2.3.11 e Lema 2.3.9,

$$Q^e P^e = (QP)^e \subseteq A^e \subseteq (P \cap Q)^e = P^e \cap Q^e.$$

Suponhamos que $A^e = P^e \cap Q^e$, então $A = A^{ec} = (P^e \cap Q^e)^c$. Pelo Lema 2.3.9,

$$A = (P^e \cap Q^e)^c = P^{ec} \cap Q^{ec} = P \cap Q,$$

o que é absurdo. Assim, $Q^e P^e \subseteq A^e \subsetneq P^e \cap Q^e$.

O RS^{-1} -módulo $(P^e \cap Q^e)/A^e$ é um RS^{-1}/P^e -módulo à direita, uma vez que

$$(P^e \cap Q^e)P^e \subseteq Q^e P^e \subseteq A^e.$$

De forma análoga verificamos que $(P^e \cap Q^e)/A^e$ é um RS^{-1}/Q^e -módulo à esquerda. Verificaremos que $(P^e \cap Q^e)/A^e$ é um RS^{-1}/P^e -módulo à direita livre de torção. Sejam $r_1 s_1^{-1} \in C_{RS^{-1}}(P^e)$ e $rx^{-1} \in (P^e \cap Q^e)$ tais que

$$(rx^{-1})(r_1 s_1^{-1}) \in A^e.$$

Por definição de RS^{-1} , existem $r_2 \in R$ e $s_2 \in S$ tais que $x^{-1} r_1 s_1^{-1} = r_2 s_2^{-1}$. Uma vez que $r_1 s_1^{-1} \in C_{RS^{-1}}(P^e)$, $r_2 s_2^{-1} \in C_{RS^{-1}}(P^e)$, logo, pelo Lema 3.1.8, $r_2 \in C_R(P)$. E, como $rr_2 s_2^{-1} \in A^e$, então $rr_2 1^{-1} \in A^e$, o que implica $rr_2 \in A^{ec}$, logo, $rr_2 \in A$. Por outro lado, como $rx^{-1} \in P^e \cap Q^e$, $r \in (P^e \cap Q^e)^c$. Pelo Lema 2.3.9,

$$(P^e \cap Q^e)^c = P^{ec} \cap Q^{ec} = P \cap Q.$$

Consequentemente, $r \in P \cap Q$.

Ora, como $rr_2 \in A$, $r_2 \in C_R(P)$, $r \in P \cap Q$ e como, por hipótese,

$$\frac{P \cap Q}{A}$$

é um R/P -módulo à direita livre de torção, então $r \in A$ e $rx^{-1} \in A^e$. Consequentemente, $(P^e \cap Q^e)/A^e$ é um RS^{-1}/P^e -módulo à direita livre de torção.

Com vista a mostrar que $(P^e \cap Q^e)/A^e$ é um RS^{-1}/Q^e -módulo à esquerda livre de torção, consideremos

$$rx^{-1} \in (P^e \cap Q^e), \quad r_1 s_1^{-1} \in C_{RS^{-1}}(Q^e)$$

tais que $(r_1 s_1^{-1})(rx^{-1}) \in A^e$. Uma vez que S é um conjunto de Ore à direita em R , existem $r_2 \in R$ e $s_2 \in S$ tais que $s_1 r_2 = r s_2$, logo, $r_2 s_2^{-1} = s_1^{-1} r 1^{-1}$. Ora, como $rx^{-1} \in P^e \cap Q^e$, $r \in (P^e \cap Q^e)^c$, isto é, $r \in P \cap Q$. Consequentemente, $s_1 r_2 \in P \cap Q$ e, uma vez que $s_1 \in S$ e $S \subseteq C_R(P) \cap C_R(Q)$, $r_2 \in P \cap Q$. Tal como anteriormente, concluímos que $r_2 \in A$, logo, $s_1^{-1} r 1^{-1} \in A^e$, o que nos leva a concluir que $rx^{-1} \in A^e$. Consequentemente, $(P^e \cap Q^e)/A^e$ é um RS^{-1}/Q^e -módulo à esquerda livre de torção e $Q^e \rightsquigarrow P^e$ através do bimódulo de ligação $(P^e \cap Q^e)/A^e$.

Reciprocamente, suponhamos que $Q^e \rightsquigarrow P^e$ através do bimódulo de ligação $(P^e \cap Q^e)/A$. Pretendemos provar que $(P \cap Q)/A^c$ é um bimódulo de ligação entre Q e P . Uma vez que, pela Proposição 2.3.11,

$$(QP)^e = Q^e P^e \subseteq A \subsetneq Q^e \cap P^e,$$

concluímos, aplicando o Lema 2.3.9 e a Proposição 2.3.8, que

$$QP \subseteq (QP)^{ec} \subseteq A^c \subseteq (Q^e \cap P^e)^c = Q^{ec} \cap P^{ec} = Q \cap P.$$

Com vista a um absurdo, suponhamos que $Q \cap P = A^c$. Então,

$$Q^e \cap P^e = (Q \cap P)^e = A^{ce} = A,$$

o que é absurdo. Concluímos, assim, que $QP \subseteq A^c \subsetneq Q \cap P$.

Por outro lado,

$$(P \cap Q)P \subseteq QP \subseteq A^c,$$

logo, $(P \cap Q)/A^c$ é um R/P -módulo à direita. Analogamente, provamos que $(P \cap Q)/A^c$ é um R/Q -módulo à esquerda. Com o intuito de provarmos que $(P \cap Q)/A^c$ é um R/P -módulo à direita livre de torção, suponhamos que existe $x \in P \cap Q$ e $c \in C_R(P)$ tal que $xc \in A^c$. Logo, $(xc)1^{-1} \in A^{ce}$. Como $A^{ce} = A$, então $(x1^{-1})c1^{-1} \in A$, com $x1^{-1} \in (P \cap Q)^e$ e

$$(P \cap Q)^e = P^e \cap Q^e.$$

Ora, pelo Lema 3.1.8, $c1^{-1} \in C_{RS^{-1}}(P^e)$ e, uma vez que $(P^e \cap Q^e)/A$ é um RS^{-1}/P^e -módulo à direita livre de torção, $x1^{-1} \in A$. Logo, $x \in A^c$, o que nos leva a concluir que $(P \cap Q)/A^c$ é um R/P -módulo à direita livre de torção. Analogamente, provamos que $(P \cap Q)/A^c$ é um R/Q -módulo à esquerda livre de torção. Estão, pois, reunidas as condições necessárias para afirmar que $Q \rightsquigarrow P$ através do bimódulo de ligação $(Q \cap P)/A^c$. ■

3.2 A condição na segunda camada

Em 1982, Jategaonkar introduziu uma nova condição relativa a anéis Noetherianos - a condição na segunda camada.

Dados R um anel Noetheriano, M um R -módulo não nulo e P um ideal primo de R tal que $\text{Ass}(M) = \{P\}$, define-se a primeira camada de M como sendo o módulo $\text{ann}_M(P)$.

Note-se que, nestas condições, M é uma extensão essencial de $\text{ann}_M(P)$ e este como R/P -módulo é totalmente fiel. Define-se a segunda camada de M como sendo o conjunto de classes de isomorfismo de R -submódulos uniformes de $M/\text{ann}_M(P)$.

Em $M/\text{ann}_M(P)$ existe uma dicotomia: se V for um R -submódulo uniforme de $M/\text{ann}_M(P)$ tal que $\text{Ass}(V) = \{Q\}$, então, $\text{ann}_V(Q)$ ou é um R/Q -módulo livre de torção ou é um R/Q -módulo de torção.

No Lema Principal de Jategaonkar (Lema 3.2.1) verificaremos que, se $\text{ann}_M(P)$ for um R/P -módulo livre de torção, sempre que o primeiro caso acontecer, podemos construir a ligação $Q \rightsquigarrow P$. Se acontecer o segundo temos $Q \subsetneq P$.

A condição na segunda camada irá garantir que o segundo caso não se verifique. Esta condição é de grande importância, uma vez que a classe dos anéis que a satisfaz forma (como se verificará) uma classe “natural” onde estudar a localização em ideais primos e em famílias de ideais primos.

Se a partir de certas séries de R -submódulos podemos originar ligações, o recíproco também é possível. A equivalência entre certas séries e a existência de ligações foi demonstrada por Brown e Jategaonkar (Teorema 3.2.6).

Ainda nesta secção mostraremos que, se R é um anel Noetheriano que satisfaz a condição na segunda camada à direita e I é um ideal próprio de R , então R/I satisfaz a condição na segunda camada à direita.

Lema 3.2.1 [Lema Principal de Jategaonkar] *Sejam R um anel Noetheriano e M um R -módulo com série filiada $0 \subsetneq U \subsetneq M$ e primos filiados correspondentes P e Q tal que $U \leq_e M$. Designemos por M' um R -submódulo de M que contém propriamente U e é tal que o ideal $A = \text{rann}_R(M')$ é maximal entre os anuladores de R -submódulos de M que contém propriamente U . Então, verifica-se uma e uma só das seguintes condições:*

a) $Q \rightsquigarrow P$ através do bimódulo de ligação $\frac{Q \cap P}{A}$.

b) $A = Q \subsetneq P$.

Se se verificar a) e U for um R/P -módulo à direita livre de torção, então M'/U é um R/Q -módulo à direita livre de torção. Se se verificar b), então, M' e M'/U são R/Q -módulos à direita de torção.

Demonstração. Consideremos M um R -módulo nas condições enunciadas. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $M' = M$.

Comecemos por verificar que não se podem verificar simultaneamente as condições **a)** e **b)**. Para tal, basta observar que no caso **a)** se tem $A \subsetneq Q$ uma vez que, por definição de bimódulo de ligação, se tem $A \subsetneq Q \cap P$.

Como P e Q são primos filiados da série considerada, então

$$M(QP) = (MQ)P \leq UP = 0,$$

de onde concluímos que $QP \subseteq A = \text{rann}_R(M)$. Por outro lado, como

$$\text{rann}_R(M) \subseteq \text{rann}_R(U) = P$$

e $\text{rann}_R(M) \subseteq \text{rann}_R(M/U) = Q$, concluímos que $A \subseteq Q \cap P$.

Comecemos por supor que $A \subsetneq Q \cap P$.

Consideremos o $(R, R/P)$ -bimódulo não nulo $(Q \cap P)/A$. Designemos o R/P -submódulo de torção de $(Q \cap P)/A$ por I/A e suponhamos que $I/A \neq 0$. Como R/P é anel Noetheriano à direita primo e ${}_R((Q \cap P)/A)$ é Noetheriano, pelo Corolário 2.2.29, $\text{rann}_{R/P}(I/A) \neq 0$, logo, $\text{rann}_R(I/A) \not\subseteq P$. Por outro lado,

$$(MI)\text{rann}_R(I/A) \leq MA = 0,$$

logo, $\text{rann}_R(I/A) \subseteq \text{rann}_R(MI)$. Ora, como $MI \neq 0$ (porque $I \neq A$),

$$MI \leq M(Q \cap P) \leq MQ \leq U$$

e como U é, por hipótese, um R/P -módulo à direita totalmente fiel,

$$\text{rann}_R(MI) = \text{rann}_R(U) = P,$$

logo, $\text{rann}_R(I/A) \subseteq P$, o que é absurdo. O absurdo resultou de supormos $A \neq I$, provando-se, assim, que $(Q \cap P)/A$ é um R/P -módulo à direita livre de torção.

Designemos o R/Q -submódulo à esquerda de torção do $(R/Q, R)$ -bimódulo $(Q \cap P)/A$ por J/A e suponhamos, com vista a um absurdo, que $J \neq A$. Aplicando a versão esquerda do Corolário 2.2.29, verificamos, como anteriormente, que $S = \text{lann}_R(J/A) \not\subseteq Q$. Consequentemente, $MS \not\subseteq U$ uma vez que $\text{rann}_R(M/U) = Q$. Em seguida provaremos que

$$\text{rann}_R(MS) = \text{rann}_R(MS + U) = A.$$

Uma vez que $U \leq_e M$, $MS \cap U \neq 0$, logo, como U é um R/P -módulo totalmente fiel,

$$\text{rann}_R(MS) \subseteq \text{rann}_R(MS \cap U) = \text{rann}_R(U).$$

Consequentemente, $\text{rann}_R(MS) = \text{rann}_R(U + MS)$. Como $MS \not\subseteq U$,

$$U \subsetneq MS + U$$

e, da definição de A , concluímos que

$$A = \text{rann}_R(MS + U) = \text{rann}_R(MS),$$

como desejávamos provar. Ora, como $SJ \subseteq A$, $(MS)J \leq MA = 0$, de onde concluímos que $J \subseteq \text{rann}_R(MS) = A$ - o que é absurdo. O absurdo resultou de supormos que $J \neq A$, provando-se, assim, que $(Q \cap P)/A$ é um R/Q -módulo à esquerda livre de torção.

Estão, pois, reunidas as condições que nos permitem garantir que $Q \rightsquigarrow P$ através do bimódulo de ligação $(Q \cap P)/A$.

Suponhamos que $A = Q \cap P$. Logo, $MPQ \leq M(P \cap Q) = 0$. Como $MP \neq 0$, pois $U \neq M$, concluímos, pelo facto de $U \leq_e M$, que $MP \cap U \neq 0$. Assim,

$$Q \subseteq \text{rann}_R(MP \cap U) = \text{rann}_R(U) = P$$

e $A = Q$. Se $Q = P$, então, $U = \text{ann}_M(P) = \text{ann}_M(Q) = M$, o que é absurdo. Provamos, assim, que $Q \subsetneq P$.

Suponhamos, agora, que $Q \rightsquigarrow P$ através do bimódulo de ligação $(Q \cap P)/A$ e U é um R/P -módulo à direita livre de torção.

Para provarmos que M/U é um R/Q -módulo à direita livre de torção é suficiente provar que não existem $m \in M \setminus U$ e $d \in C_R(Q)$ tais que $md \in U$. Com vista a um absurdo, suponhamos que existem $m \in M \setminus U$ e $d \in C_R(Q)$ tais que $md \in U$. Consideremos o R/P -homomorfismo ϕ

$$\phi: \begin{array}{ccc} \frac{Q \cap P}{A} & \rightarrow & \frac{Q \cap P}{A} \\ q + A & \rightarrow & dq + A \end{array}.$$

Uma vez que $(Q \cap P)/A$ é um R/Q -módulo à esquerda livre de torção, ϕ é um R/P -monomorfismo. Como $(Q \cap P)/A$ é um R/P -módulo à direita com dimensão de Goldie finita (pois R é anel Noetheriano) e ϕ é um R/P -monomorfismo, concluímos, pelo Corolário 1.9.14, que

$$\phi\left(\frac{Q \cap P}{A}\right) = \frac{d(Q \cap P) + A}{A} \leq_e \frac{Q \cap P}{A}$$

como R/P -módulo à direita. Logo, pela Proposição 2.2.20,

$$\frac{(Q \cap P)/A}{(d(Q \cap P) + A)/A} \simeq \frac{Q \cap P}{d(Q \cap P) + A}$$

é um R/P -módulo à direita de torção. Consideremos, agora, o R -homomorfismo

$$\psi: \begin{array}{ccc} R & \rightarrow & M \\ r & \rightarrow & mr \end{array}.$$

Como $md \in U$, $m(d(Q \cap P) + A) = 0$. Tomemos $q \in Q \cap P$. Uma vez que

$$\frac{Q \cap P}{d(Q \cap P) + A}$$

é um R/P -módulo de torção, concluímos que existe $c \in C_R(P)$ tal que

$$mqc \in m(d(Q \cap P) + A),$$

o que nos leva a concluir que $m(Q \cap P)$ é um R/P -módulo à direita de torção. Por outro lado,

$$m(Q \cap P) \leq mQ \leq U$$

e U é, por hipótese, um R/P -módulo à direita livre de torção, logo, $m(Q \cap P) = 0$. Consequentemente, $(mR + U)(Q \cap P) = 0$. Uma vez que, por definição de A , $A \subsetneq Q \cap P$, concluímos que $m \in U$, o que é absurdo. O absurdo resultou de supormos que M/U não é um R/Q -módulo à direita livre de torção, provando-se, assim, o desejado.

Suponhamos, agora, que se verifica a condição b), isto é, $A = Q \subsetneq P$. Pela Proposição 1.5.7, P/Q é um ideal direito essencial de R/Q , logo, pelo Teorema de Goldie, P/Q contém um elemento regular de R/Q - c . Uma vez que $Uc = 0$, U é um R/Q -módulo de torção. Como $U \leq_e M$ e $MQ = 0$, $U_{R/Q} \leq_e M_{R/Q}$, o que, pelas Proposições 2.2.21 e 2.2.20, nos leva a concluir que M e M/U são R/Q -módulos de torção. ■

Definição 3.2.2 *Um ideal primo P de um anel Noetheriano R satisfaz a **condição na segunda camada à direita** se, dadas as condições do Lema 3.2.1 e a condição de U ser um R/P -módulo à direita livre de torção, a condição b) nunca ocorrer.*

Definição 3.2.3 *Um anel Noetheriano R satisfaz a **condição na segunda camada à direita** se todos os ideais primos de R satisfizerem a condição na segunda camada à direita. De forma análoga, define-se **condição na segunda camada à esquerda**. Um anel Noetheriano R satisfaz a **condição na segunda camada** se R satisfizer a condição na segunda camada à direita e à esquerda.*

Ao longo deste trabalho serão apresentados diversos exemplos de anéis que satisfazem a condição na segunda camada. É, então, natural perguntar: “todos os anéis Noetherianos satisfazem a condição na segunda camada?”. A resposta a esta questão é negativa. Com efeito, no Exemplo 3.2.4 é apresentado um anel Noetheriano e primo que não satisfaz a condição na segunda camada.

Exemplo 3.2.4 Consideremos o anel simples $S = \mathbb{Q}[x][\theta, d/dx]$ definido no Exemplo 1.1.5. Consideremos o subanel de S - $R = \mathbb{Q} + \theta S$.

Provaremos que R é um anel Noetheriano que não satisfaz a condição na segunda camada. Para tal, começaremos por provar que θS é um ideal primo de R .

Verificaremos em seguida que θS é um ideal próprio bilateral de R . Uma vez que $\mathbb{Q} \not\subseteq \theta S$, $\theta S \neq R$. Por outro lado, como $\mathbb{Q}\theta S \subseteq \theta\mathbb{Q}S \subseteq \theta S$ e $\theta S\theta S \subseteq \theta S$, $R\theta S \subseteq \theta S$, o que nos leva a concluir que θS é um ideal bilateral próprio de R .

Em seguida verificaremos que θS é o único ideal próprio não nulo de R . Seja I um ideal bilateral não nulo de R ; então $SI\theta S$ é um ideal não nulo de S . Como S é anel simples, $SI\theta S = S$, logo, $\theta SI\theta S = \theta S$. Ora, como I é um ideal bilateral de R , $\theta SI\theta S \subseteq I$, logo, $\theta S \subseteq I$. Suponhamos que $\theta S \subsetneq I$, então, existe $(i + \theta s) \in I$, para alguns $i \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ e $s \in S$. Uma vez que $\theta S \subsetneq I$, $i \in I$, logo, $1 \in I$ e $I = R$. Está, pois, demonstrado que θS é o único ideal próprio não nulo de R . Em particular, θS é um ideal maximal de R , logo, θS é um ideal primo de R .

Provaremos, seguidamente, que S/R é um R -módulo simples. Para tal, começamos por verificar que θS é um ideal direito maximal de S . Sejam I um ideal direito de S tal que $\theta S \subsetneq I$ e $p \in I \setminus \theta S$; então $p = q + \theta s$, para alguns $q \in \mathbb{Q}[x] \setminus \{0\}$ e $s \in S$. Como $\theta S \subsetneq I$, $q \in I$. Se $q \in \mathbb{Q}$, então $1 \in I$. Suponhamos que $q \notin \mathbb{Q}$. Uma vez que I é um ideal direito de S , $q\theta \in I$. Por outro lado, como $\theta S \subsetneq I$, $\theta q \in I$ e, logo, $(q\theta - \theta q) \in I$. Consequentemente, $\delta(q) \in I$. Se $\delta(q) \in \mathbb{Q}$, então $1 \in I$. Caso contrário, como $\delta(q) \in I$, $(\delta(q)\theta - \theta\delta(q)) \in I$, o que nos leva a concluir que $\delta^2(q) \in I$. Repetindo o processo um número finito de vezes, determinamos $k' \in (\mathbb{Q} \cap I) \setminus \{0\}$. Consequentemente, $1 \in I$ e $I = S$. Concluimos, assim, que θS é um ideal direito maximal de S .

Com o intuito de demonstrarmos que R é um R -submódulo maximal de S , consideremos $p \in S \setminus R$. Então, $p = q + \theta s$, para alguns $q \in \mathbb{Q}[x] \setminus \{0\}$ e $s \in S$. Com vista a um absurdo, suponhamos que $p\theta \in \theta S$, então, $q\theta \in \theta S$. Consequentemente, $\delta(q) \in \theta S$. Tal como anteriormente, determinamos $k' \in (\mathbb{Q} \cap \theta S) \setminus \{0\}$, o que é absurdo. O absurdo resultou de supormos que $p\theta \in \theta S$, logo, $i\theta \notin \theta S$, para todo $i \in S \setminus R$.

Seja T um R -submódulo de S tal que $R \subsetneq T$ e consideremos $p \in T \setminus R$. Uma vez que $p\theta \notin \theta S$, $\theta S + p\theta S$ é um ideal direito de S que contém estritamente θS . Ora, como θS é um ideal direito maximal de S , $\theta S + p\theta S = S$. Portanto, $T = S$ e R é um R -submódulo maximal de S . Em particular, concluimos que $(S/R)_R$ é um R -módulo à direita simples.

O R -módulo à direita S/R é também um R -módulo fiel. Com efeito, como $\text{rann}_R(S/R)$ é um ideal bilateral próprio de R e θS é o único ideal próprio não nulo de R , $\text{rann}_R(S/R) = 0$ ou $\text{rann}_R(S/R) = \theta S$. Com vista a um absurdo, suponhamos que $\text{rann}_R(S/R) = \theta S$, então, $S\theta S \subseteq R$. Ora, como $S\theta S$ é ideal bilateral não nulo de S e S é anel simples, $S\theta S = S$, logo, $S = R$, o que é absurdo. O absurdo resultou de supormos que $\text{rann}_R(S/R) = \theta S$, logo, $\text{rann}_R(S/R) = 0$ e S/R é um R -módulo à direita fiel.

Como S/R é um R -módulo simples e $\text{rann}_R(S/R) = 0$, 0 é ideal primitivo à

direita e, em particular, 0 é ideal primo de R .

Provaremos, agora, que R é anel Noetheriano à direita. Para tal, consideremos um ideal direito J de R .

Por [14], Teorema 1.12, S é anel Noetheriano. Logo, o ideal direito JS de S é finitamente gerado como S -módulo. Assim, $JS = b_1S + \dots + b_nS$, onde $b_1, \dots, b_n \in JS$. Logo, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, $b_i = \sum_{e=1}^{m_i} b_{i,e}s_{i,e}$, com $b_{i,e} \in J$ e $s_{i,e} \in S$ e, portanto,

$$JS = b_{1,1}S + \dots + b_{1,m_1}S + \dots + b_{n,1}S + \dots + b_{n,m_n}S.$$

Com vista a simplificar a notação, escrevemos $\{b_{1,1}, \dots, b_{n,m_n}\} = \{a_1, \dots, a_m\}$. Assim, $JS = a_1S + \dots + a_mS$, com $a_1, \dots, a_m \in J$.

Pretendemos, agora, mostrar que $JS/(a_1R + \dots + a_mR)$ é um R -módulo à direita Noetheriano. Seja $I = a_1R + \dots + a_mR$; então

$$\frac{JS}{I} = \sum_{i=1}^m \left(\frac{a_iS + I}{I} \right).$$

Uma vez que S/R é um R -módulo simples, se tomarmos $x \in S \setminus R$, temos $S = xR + R$. Assim,

$$\frac{a_iS + I}{I} = \frac{(a_ixR + a_iR) + I}{I} \simeq \frac{a_ixR + a_iR}{I \cap (a_ixR + a_iR)},$$

para todo $i \in \{1, \dots, m\}$.

Ora, como $I \cap (a_ixR + a_iR) = a_iR + (I \cap a_ixR)$, para todo $i \in \{1, \dots, m\}$, temos

$$\frac{a_iS + I}{I} \simeq \frac{a_iS}{a_iR + (a_ixR \cap I)} \simeq \frac{a_iS/a_iR}{(a_iR + (a_ixR \cap I))/a_iR},$$

para todo $i \in \{1, \dots, m\}$.

Seja $i \in \{1, \dots, m\}$. Suponhamos que $a_iS \neq a_iR$ e consideremos o R -homomorfismo

$$\phi : \begin{array}{ccc} \frac{S}{R} & \rightarrow & \frac{a_iS}{a_iR} \\ s + R & \rightarrow & a_i s + a_i R \end{array}.$$

Como $a_iS \neq a_iR$, $\phi \neq 0$. Ora, como S/R é um R -módulo simples, $\text{Ker}(\phi) = 0$, o que nos leva a concluir que ϕ é um isomorfismo. Consequentemente, a_iS/a_iR é um R -módulo simples.

Concluimos, assim, que $a_iS/a_iR = 0$ ou que a_iS/a_iR é um R -módulo simples, para todo $i \in \{1, \dots, m\}$. Consequentemente, $(a_iS + I)/I = 0$ ou $(a_iS + I)/I$ é um R -módulo simples, para todo $i \in \{1, \dots, m\}$.

Uma vez que

$$\frac{JS}{I} = \sum_{i=1}^m \frac{a_iS + I}{I}$$

e $(a_i S + I)/I$ é um R -módulo simples ou nulo, para todo $i \in \{1, \dots, m\}$, podemos tomar $j_1, \dots, j_k \in \{1, \dots, m\}$ tais que

$$\frac{JS}{I} = \bigoplus_{i=1}^k \frac{a_{j_i} S + I}{I}.$$

Consequentemente, JS/I é igual a uma soma directa finita de R -módulos Noetherianos, o que nos permite concluir que JS/I é um R -módulo Noetheriano.

Observe-se agora que, como J/I é um R -submódulo de JS/I , J/I ainda é um R -módulo Noetheriano e, portanto, é um R -módulo finitamente gerado. Consequentemente,

$$J = b_1 R + \dots + b_s R + a_1 R + \dots + a_m R,$$

para alguns $b_1, \dots, b_s \in J$. Provamos, assim, que todo o ideal direito de R é finitamente gerado. Consequentemente, R é anel Noetheriano à direita.

Suponhamos que é possível definir uma aplicação bijectiva $\psi: R \rightarrow R$ que satisfaz as seguintes condições

- a) $\psi(r_1 + r_2) = \psi(r_1) + \psi(r_2)$, para todos $r_1, r_2 \in R$,
- b) $\psi(r_1 r_2) = \psi(r_2) \psi(r_1)$, para todos $r_1, r_2 \in R$,
- c) $\psi(1) = 1$

Se $A_1 \leq \dots \leq A_n \leq \dots$ for uma cadeia ascendente de ideais esquerdos de R , $\psi(A_1) \leq \dots \leq \psi(A_n) \leq \dots$ é uma cadeia ascendente de ideais direitos de R . Uma vez que R é anel Noetheriano à direita, existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $\psi(A_m) = \psi(A_n)$, para todo $m \geq n$. Consequentemente, $A_m = A_n$, para todo $m \geq n$, o que nos leva a concluir que R é anel Noetheriano à esquerda. Assim, para provarmos que R é anel Noetheriano à esquerda é suficiente provar que é possível definir uma aplicação bijectiva $\psi: R \rightarrow R$ que satisfaz as condições a) e b) e c) descritas.

Começamos por considerar

$$\begin{aligned} \phi: \mathbb{Q} + \theta S &\rightarrow \mathbb{Q} + S\theta \\ k + \theta p &\rightarrow k + p\theta \end{aligned}$$

onde $k \in \mathbb{Q}$ e $p \in S$. Observe-se que se $k + \theta p = k' + \theta p'$, com $k, k' \in \mathbb{Q}$ e $p, p' \in S$, então $k = k'$ e $p = p'$, logo, $k + p\theta = k' + p'\theta$. Consequentemente, ϕ está bem definida. Assim definida, ϕ é um isomorfismo de anéis.

Consideremos, agora,

$$\begin{aligned} \psi': S &\rightarrow S \\ \sum_{i=0}^n p_i(x) \theta^i &\rightarrow \sum_{i=0}^n (-1)^i \theta^i p_i(x) \end{aligned}$$

onde $p_i(x) \in \mathbb{Q}[x]$, para todo $i \in \{0, \dots, n\}$.

Assim definida, ψ' é uma aplicação bijectiva que satisfaz as condições:

- d) $\psi'(s_1 + s_2) = \psi'(s_1) + \psi'(s_2)$, para todos $s_1, s_2 \in S$,
- e) $\psi'(s_1 s_2) = \psi'(s_2)\psi'(s_1)$, para todos $s_1, s_2 \in S$,
- f) $\psi'(1) = 1$

Uma vez que $\psi'(\mathbb{Q} + S\theta) \subseteq \mathbb{Q} + \theta S$, podemos considerar a aplicação

$$\begin{array}{ccc} \psi : \mathbb{Q} + S\theta & \rightarrow & \mathbb{Q} + \theta S \\ x & \rightarrow & \psi'(x) \end{array}.$$

Observe-se que ψ é uma aplicação sobrejectiva. Uma vez que ψ' é uma aplicação injectiva que satisfaz as condições d), e) e f), ψ ainda é uma aplicação injectiva que satisfaz as condições:

- g) $\psi(s_1 + s_2) = \psi(s_1) + \psi(s_2)$, para todos $s_1, s_2 \in \mathbb{Q} + S\theta$,
- h) $\psi(s_1 s_2) = \psi(s_2)\psi(s_1)$, para todos $s_1, s_2 \in \mathbb{Q} + S\theta$,
- i) $\psi(1) = 1$

Consequentemente $\psi \circ \phi : R \rightarrow R$ é uma aplicação bijectiva que satisfaz as condições:

- j) $(\psi \circ \phi)(s_1 + s_2) = (\psi \circ \phi)(s_1) + (\psi \circ \phi)(s_2)$, para todos $s_1, s_2 \in R$,
- l) $(\psi \circ \phi)(s_1 s_2) = (\psi \circ \phi)(s_2)(\psi \circ \phi)(s_1)$, para todos $s_1, s_2 \in R$,
- m) $(\psi \circ \phi)(1) = 1$

Consequentemente, R é anel Noetheriano à esquerda, logo, R é anel Noetheriano. Com o intuito de provarmos que θS é um ideal primo do anel Noetheriano R que não satisfaz a condição na segunda camada à direita, consideremos a série de R -submódulos de $S/\theta S$

$$0 \not\subseteq \frac{R}{\theta S} \not\subseteq \frac{S}{\theta S}.$$

Provaremos que esta série é uma série filiada de $S/\theta S$.

Uma vez que $(R/\theta S)\theta S = 0$ e θS é o único ideal próprio não nulo de R , concluímos que $\text{rann}_R(R/\theta S) = \theta S$. Ora, como θS é um ideal maximal de R , θS é maximal entre os anuladores em R de R -submódulos não nulos de $S/\theta S$. Por outro lado,

$$R/\theta S \subseteq \text{ann}_{S/\theta S}(\theta S).$$

Como R é um R -submódulo maximal de S , $\text{ann}_{S/\theta S}(\theta S) = R/\theta S$ ou $\text{ann}_{S/\theta S}(\theta S) = S/\theta S$. Uma vez que $S\theta S$ é um ideal não nulo de S e S é anel simples, $S = S\theta S$,

o que nos leva a concluir que $\text{ann}_{S/\theta S}(\theta S) \neq S/\theta S$. Concluimos assim que $R/\theta S = \text{ann}_{S/\theta S}(\theta S)$ e, portanto, $R/\theta S$ é um R -submódulo filiado de $S/\theta S$. Por outro lado, como $(S/R)_R$ é um R -módulo simples, concluimos que

$$0 \not\leq \frac{R}{\theta S} \not\leq \frac{S}{\theta S}$$

é uma série filiada de $S/\theta S$ cujos ideais primos filiados correspondentes são θS e

$$\text{rann}_R \left(\frac{S/\theta S}{R/\theta S} \right) = \text{rann}_R \left(\frac{S}{R} \right) = 0.$$

Para aplicarmos o Lema Principal de Jategaonkar precisamos ainda de provar que $(R/\theta S)_R \leq_e (S/\theta S)_R$. Seja I um R -submódulo de S que contém estritamente θS e consideremos $p \in I \setminus \theta S$. Uma vez que $p = q + \theta s$, para alguns $q \in \mathbb{Q}[x] \setminus \{0\}$ e $s \in S$, concluimos que $q \in I$. Se $q \in \mathbb{Q}$, então $I \cap \mathbb{Q} \neq 0$. Suponhamos que $q \notin \mathbb{Q}$. Como I é um R -módulo à direita, $q\theta \in I$. Por outro lado, como $\theta S \subseteq I$, $\theta q \in I$, logo, $(q\theta - \theta q) \in I$, isto é, $\delta(q) \in I$. Tal como anteriormente, repetindo o processo, determinamos $k' \in (I \cap \mathbb{Q}) \setminus \{0\}$. Concluimos, assim, que

$$(R/\theta S) \cap (I/\theta S) \neq 0$$

e, logo, $(R/\theta S)_R \leq_e (S/\theta S)_R$.

Observe-se ainda que, como θS é um ideal primo de R , $(R/\theta S)$ é um $(R/\theta S)$ -módulo livre de torção.

Com vista a um absurdo suponhamos que θS satisfaz a condição na segunda camada à direita. Então $0 \rightsquigarrow \theta S$, o que é absurdo.

Provamos, assim, que R é um anel Noetheriano (primo) que não satisfaz a condição na segunda camada à direita. Em particular, R não satisfaz a condição na segunda camada.

No Lema Principal de Jategaonkar verificámos que, se R é anel Noetheriano e M é um R -módulo que possui uma série filiada $0 \not\leq U \not\leq M$ com primos filiados correspondentes P e Q tal que $U \leq_e M$, então, em determinadas circunstâncias (no caso $Q \not\subseteq P$ ou $A \neq Q$, onde A é um anulador de um R -submódulo de M que contém propriamente U e A é maximal entre os anuladores de R -submódulos de M que contém propriamente U), podemos definir uma ligação na segunda camada de Q para P . O Teorema que se segue leva-nos, em particular, a concluir que, se tivermos dois ideais primos P, Q de um anel Noetheriano R tais que $Q \rightsquigarrow P$, existe um R -módulo M que possui uma série filiada $0 \not\leq U \not\leq M$ com primos filiados correspondentes P e Q tal que $U \leq_e M$. Antes porém de enunciarmos e demonstrarmos tal resultado, introduzimos um Lema necessário.

Lema 3.2.5 *Sejam $A, B_1, \dots, B_n$ R -módulos tais que A é uniforme e existe um R -monomorfismo $\phi: A \rightarrow B_1 \oplus \dots \oplus B_n$. Então, existe um R -monomorfismo $\phi': A \rightarrow B_i$, para algum $i \in \{1, \dots, n\}$.*

Demonstração. Seja

$$\begin{aligned} p_i : B_1 \oplus \dots \oplus B_n &\rightarrow B_i \\ b_1 + \dots + b_n &\rightarrow b_i \end{aligned} ,$$

para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Como

$$\text{Ker}(p_1 \circ \phi) \cap \dots \cap \text{Ker}(p_n \circ \phi) = 0$$

e A é um R -módulo uniforme, existe j tal que $1 \leq j \leq n$ e $\text{Ker}(p_j \circ \phi) = 0$, logo, $p_j \circ \phi$ é um R -monomorfismo de A em B_j . ■

Podemos agora enunciar e demonstrar o resultado desejado.

Teorema 3.2.6 [Brown, Jategaonkar] *Sejam P e Q ideais primos de um anel Noetheriano R . Então, $Q \rightsquigarrow P$ se e só se existe um R -módulo finitamente gerado e uniforme M com série filiada $0 \not\leq U \not\leq M$ e primos filiados correspondentes P, Q tais que U é um R/P -módulo livre de torção e M/U é isomorfo a um ideal direito uniforme de R/Q .*

Demonstração. Suponhamos que existe um R -módulo finitamente gerado, uniforme M com série filiada $0 \not\leq U \not\leq M$ e primos filiados correspondentes P, Q tal que U é um R/P -módulo livre de torção e M/U é isomorfo a um ideal direito uniforme de R/Q . Como M/U é isomorfo a um ideal direito de R/Q , então, M/U é um R/Q -módulo livre de torção. Logo, se tomarmos M' como no enunciado do Lema 3.2.1, um R -submódulo de M que contém propriamente U e é tal que o ideal $A = \text{rann}_R(M')$ é maximal entre os anuladores de R -submódulos de M que contém propriamente U , então M'/U é um R/Q -módulo livre de torção.

Não se pode verificar a condição **b)** do Lema Principal de Jategaonkar, uma vez que tal implicaria que M'/U fosse um R/Q -módulo de torção. Consequentemente, verifica-se a condição **a)** deste Lema, portanto, $Q \rightsquigarrow P$, como desejávamos provar.

Reciprocamente, suponhamos que $Q \rightsquigarrow P$. Seja A um ideal de R tal que $(Q \cap P)/A$ é o bimódulo de ligação entre Q e P .

Sem perda de generalidade, podemos assumir $A = 0$ e, logo, $QP = 0$. Por definição de bimódulo de ligação, concluímos que $Q \cap P$ é livre de torção como R/Q -módulo à esquerda e como R/P -módulo à direita.

Começamos por verificar que Q é um ideal direito essencial de R . Para tal, suponhamos que I é um ideal direito de R tal que $Q \cap I = 0$, logo,

$$I(Q \cap P) = 0.$$

Como $Q \cap P$ é um R/Q -módulo à esquerda não nulo e livre de torção, pela versão esquerda do Lema 2.2.26, $Q \cap P$ é um R/Q -módulo à esquerda fiel, logo, $I \subseteq Q$. Consequentemente, $I = 0$ e Q é um ideal direito essencial de R .

Verificaremos agora que Q é um R/P -módulo à direita livre de torção. Para tal, consideremos o R/P -monomorfismo

$$\begin{aligned} \phi: \quad \frac{Q}{Q \cap P} &\rightarrow R/P \\ q + (Q \cap P) &\rightarrow q + P \end{aligned}$$

Logo, $Q/(Q \cap P)$ é isomorfo a um ideal direito de R/P . Portanto, $Q/(Q \cap P)$ é um R/P -módulo à direita livre de torção. Como $Q \cap P$ é um R/P -módulo à direita livre de torção, pela Proposição 2.2.20, concluímos que Q também o é.

Sejam $E = E(R_R)$ e $K = \text{ann}_E(P)$; então

$$\text{ann}_E(P) \cap R = \text{lann}_R(P).$$

Observe-se que $\text{lann}_R(P) = Q$. Com efeito, $\text{lann}_R(P)P = 0$ implica

$$\text{lann}_R(P)(Q \cap P) = 0.$$

Como $Q \cap P$ é um R/Q -módulo à esquerda fiel, $\text{lann}_R(P) \subseteq Q$. Por outro lado, como $QP = 0$, então, $Q \subseteq \text{lann}_R(P)$. Logo,

$$Q = \text{lann}_R(P) = K \cap R.$$

Assim,

$$R/Q = \frac{R}{K \cap R} \simeq \frac{R + K}{K} \leq E/K. \quad (1)$$

O R -módulo K tem duas propriedades a salientar: K é uma extensão essencial de Q (uma vez que, como $R_R \leq_e E(R_R)$, tem-se $Q = K \cap R \leq_e K$) e K é um R/P -módulo à direita livre de torção. Com efeito, por definição de K , $KP = 0$, logo, $Q_{R/P} \leq_e K_{R/P}$. Como Q é um R/P -módulo à direita livre de torção, pela Proposição 2.2.20, K também o é.

Como R é anel Noetheriano à direita, pelo Corolário 1.9.10, R tem dimensão de Goldie à direita finita, logo, R possui um ideal direito essencial I que é uma soma directa finita de ideais direitos uniformes de R - $I_1, \dots, I_n$. Assim, pelas Proposições 1.8.4 e 1.8.5,

$$E = E(R_R) = E(I_R) = E(I_1) \oplus \dots \oplus E(I_n).$$

Pelo facto de $I_1, \dots, I_n$ serem R -módulos uniformes, concluímos, pelo Corolário 1.9.3, que $E_1 = E(I_1), \dots, E_n = E(I_n)$ são R -módulos uniformes. Por definição,

$$K = (K \cap E_1) \oplus \dots \oplus (K \cap E_n),$$

logo,

$$E/K \simeq (E_1/(K \cap E_1)) \oplus \dots \oplus (E_n/(K \cap E_n)).$$

Como R é anel Noetheriano à direita, R/Q possui um ideal direito uniforme V . Por (1), R/Q é isomorfo a um R -submódulo de E/K , logo, podemos definir um R -monomorfismo $\phi: V \rightarrow E/K$. Aplicando o Lema 3.2.5, concluímos que existe um número natural j tal que $j \in \{1, \dots, n\}$ e existe um R -monomorfismo

$$\psi: V \rightarrow E_j/(K \cap E_j).$$

Seja M' um R -submódulo de E_j que contém propriamente $K \cap E_j$ tal que $M'/(K \cap E_j) \simeq V$. Consideremos um R -submódulo M de M' finitamente gerado tal que M não está contido em K e seja

$$U = K \cap M = \text{ann}_M(P).$$

Uma vez que Q é um ideal direito essencial de R , $Q_R \leq_e E_R$, logo, $K_R \leq_e E_R$, o que nos leva a concluir que $U \neq 0$. Como $M_R \leq (E_j)_R$, M é um R -módulo uniforme.

Como K é um R/P -módulo livre de torção e $U \leq K$, U também é um R/P -módulo livre de torção.

Consideremos o R -monomorfismo

$$\begin{aligned} \phi: \quad \frac{M}{K \cap M} &\rightarrow \frac{M'}{K \cap E_j} \\ m + (K \cap M) &\rightarrow m + (K \cap E_j) \end{aligned}.$$

Como $M'/(K \cap E_j)$ é isomorfo a um ideal direito uniforme V de R/Q , concluímos que $M/(K \cap M)$ é isomorfo a um ideal direito uniforme de R/Q .

Para obtermos o resultado desejado, demonstraremos que $0 \not\leq U \not\leq M$ é uma série filiada de M com primos filiados correspondentes P e Q . Como U é um R/P -módulo à direita livre de torção, pelo Lema 2.2.26, U é um R/P -módulo totalmente fiel, logo, $\text{Ass}(U) = \{P\}$. Pelo Lema 1.9.4, concluímos que

$$\text{Ass}(M) = \text{Ass}(U) = \{P\}.$$

Ora, como $U = \text{ann}_M(P)$, U é um R -submódulo filiado de M . Por outro lado, como M/U é isomorfo a um ideal direito uniforme de R/Q ,

$$\text{rann}_R(M/U) = \text{rann}_R(N/U) = Q,$$

para todo o R -submódulo N de M tal que $U \not\leq N$. Concluímos, assim, que $0 \not\leq U \not\leq M$ é uma série filiada de M com primos filiados correspondentes P e Q , como desejávamos provar. ■

A Proposição que se segue dá-nos um critério útil para verificarmos se um ideal primo de um anel Noetheriano satisfaz ou não a condição na segunda camada à direita.

Proposição 3.2.7 *Seja P um ideal primo de um anel Noetheriano R ; então P satisfaz a condição na segunda camada à direita se e só se não existir um R -módulo M finitamente gerado uniforme com série filiada $0 \not\leq U \not\leq M$ e primos filiados correspondentes P, Q tais que U é um R/P -módulo à direita livre de torção, M/U é uniforme, $Q \subsetneq P$ e $MQ = 0$.*

Demonstração. Sejam R um anel Noetheriano e P um ideal primo de R . Suponhamos que P satisfaz a condição na segunda camada à direita e que existe um R -módulo uniforme M com série filiada $0 \not\leq U \not\leq M$ e primos filiados correspondentes P, Q tais que U é um R/P -módulo à direita livre de torção, $Q \subsetneq P$ e $MQ = 0$.

Uma vez que M é um R -módulo uniforme, $U \leq_e M$, logo, estão reunidas as condições necessárias para aplicar o Lema Principal de Jategaonkar. Ora, como U é um R/P -módulo livre de torção e P é um ideal primo que satisfaz a condição na segunda camada à direita, é válida a condição a) do Lema Principal de Jategaonkar.

Por outro lado, como $MQ = 0$, concluímos que $Q \subseteq A$, onde A é um anulador de um R -submódulo de M que contém propriamente U e A é maximal entre os anuladores de R -submódulos de M que contém propriamente U . Mas, por definição de Q , $A \subseteq Q$, o que nos leva a concluir que $A = Q \subsetneq P$, logo, não é válida a condição a) do Lema Principal de Jategaonkar, o que é absurdo. Está, pois, provado que se P é um ideal primo de R que satisfaz a condição na segunda camada à direita, então não existe um R -módulo M finitamente gerado uniforme, com série filiada $0 \not\leq U \not\leq M$ e primos filiados correspondentes P, Q tais que U é um R/P -módulo à direita livre de torção, M/U é uniforme, $Q \subsetneq P$ e $MQ = 0$.

Reciprocamente, suponhamos que P não satisfaz a condição na segunda camada à direita. Por definição, existe um R -módulo M_1 que possui uma série filiada $0 \not\leq U_1 \not\leq M_1$ e primos filiados correspondentes P e Q tais que $U_1 \leq_e M_1$, U_1 é um R/P -módulo à direita livre de torção, $Q \subsetneq P$ e $M_1Q = 0$.

Tomemos $x \in M_1 \setminus U_1$, $M_2 = xR$ e $U_2 = M_2 \cap U_1 = \text{ann}_{M_2}(P)$. Uma vez que $U_1 \leq_e M_1$, então, $U_2 = M_2 \cap U_1 \leq_e M_2$. Como

$$\begin{aligned} \phi: M_2/U_2 &\rightarrow M_1/U_1 \\ m + U_2 &\rightarrow m + U_1 \end{aligned}$$

é um R -monomorfismo, então M_2 tem série filiada $0 \not\leq U_2 \not\leq M_2$ com primos filiados correspondentes P e Q . Temos, ainda, que $U_2 \leq_e M_2$, U_2 é um R/P -módulo à direita livre de torção e $M_2Q = 0$.

Como M_2 é finitamente gerado e R é anel Noetheriano, M_2 é um R -módulo Noetheriano. Consequentemente, M_2 contém um R -submódulo essencial igual a uma soma directa de n R -submódulos uniformes - $I_1, \dots, I_n$, o que, pelas Proposições 1.8.4 e 1.8.5, nos leva a concluir que

$$E(M_2) = E(I_1 \oplus \dots \oplus I_n) = E(I_1) \oplus \dots \oplus E(I_n).$$

Como $I_1, \dots, I_n$ são R -módulos uniformes, pelo Corolário 1.9.3, $E_1 = E(I_1), \dots, E_n = E(I_n)$ são R -módulos uniformes. Uma vez que $U_2 \leq_e M_2 \leq_e E(M_2)$, $U_2 \cap E_i \neq 0$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, consideremos

$$A_i = \text{ann}_{E_i}(P) = E_i \cap \text{ann}_{E(M_2)}(P).$$

Uma vez que $U_2 \cap E_i \neq 0$, $A_i \neq 0$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Como $M_2 \leq_e E(M_2)$, então,

$$U_2 = \text{ann}_{E(M_2)}(P) \cap M_2 \leq_e \text{ann}_{E(M_2)}(P),$$

consequentemente, $(U_2)_{R/P} \leq_e (\text{ann}_{E(M_2)}(P))_{R/P}$. Ora, como U_2 é um R/P -módulo livre de torção, $\text{ann}_{E(M_2)}(P)$ também o é. Logo, A_i é um R/P -módulo livre de torção, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Seja

$$\begin{aligned} U_3 &= A_1 \oplus \dots \oplus A_n = (\text{ann}_{E(M_2)}(P) \cap E_1) \oplus \dots \oplus (\text{ann}_{E(M_2)}(P) \cap E_n) \\ &= \text{ann}_{E(M_2)}(P). \end{aligned}$$

Como A_i é um R/P -módulo livre de torção, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, pela Proposição 2.2.20, U_3 é um R/P -módulo livre de torção. Pelo Lema 2.2.26, U_3 é um R/P -módulo totalmente fiel.

Definimos $M_3 = M_2 + U_3$ e consideramos o R -homomorfismo

$$\begin{aligned} \phi : M_2/(U_3 \cap M_2) &\rightarrow M_3/U_3 \\ m + (U_3 \cap M_2) &\rightarrow m + U_3 \end{aligned}$$

Assim definida, ϕ é um isomorfismo. Por outro lado,

$$M_2 \cap U_3 = M_2 \cap \text{ann}_{E(M_2)}(P) = \text{ann}_{M_2}(P) = U_2,$$

portanto, $M_3/U_3 \simeq M_2/U_2$.

Consideremos a série $0 \not\leq U_3 \not\leq M_3$.

Observe-se que, como $U_2 \leq_e E(M_2)$, $U_3 \leq_e M_3$. Como U_3 é um R/P -módulo totalmente fiel e $U_3 \leq_e M_3$, concluímos que $\text{Ass}(M_3) = \{P\}$. Com efeito, como R é um anel Noetheriano, $\text{Ass}(M_3) \neq \emptyset$. Por outro lado, se $T \in \text{Ass}(M_3)$, então $T = \text{rann}_R(X)$, onde X é um R -submódulo não nulo de M_3 e X é um R/T -módulo totalmente fiel. Como $U_3 \cap X \neq 0$, concluímos que

$$T = \text{rann}_R(X \cap U_3) = \text{rann}_R(U_3) = P,$$

provando-se, assim, o desejado.

Uma vez que $U_3 \leq M_3 \leq E(M_2)$ e $U_3 = \text{ann}_{E(M_2)}(P)$, então, $U_3 = \text{ann}_{M_3}(P)$.

Por outro lado, como $M_3/U_3 \simeq M_2/U_2$, concluímos que a série $0 \not\leq U_3 \not\leq M_3$ é uma série filiada com ideais primos filiados correspondentes P e Q .

Como $Q \subsetneq P$ e $U_3 = \text{ann}_{M_3}(P)$, $U_3Q = 0$, logo, $(U_3 + M_2)Q = 0$, isto é, $M_3Q = 0$. De

$$M_3 \leq E(M_2) = E_1 \oplus \dots \oplus E_n,$$

deduzimos que

$$M_3 \leq \text{ann}_{E_1}(Q) \oplus \dots \oplus \text{ann}_{E_n}(Q).$$

Designemos $\text{ann}_{E_i}(Q)$ por B_i , para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, e observe-se que $A_i \leq B_i$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Como M_2 é um R -módulo finitamente gerado, M_2 é Noetheriano como R -módulo. Assim, M_2/U_2 é um R -módulo Noetheriano e M_3/U_3 também o é, já que é isomorfo ao primeiro, logo, podemos tomar um R -submódulo uniforme V de M_3/U_3 . Consideremos

$$\begin{aligned} \phi: \quad V &\rightarrow (B_1/A_1) \oplus \dots \oplus (B_n/A_n) \\ x + U_3 &\rightarrow (x_1 + A_1) \oplus \dots \oplus (x_n + A_n), \end{aligned}$$

onde $x_1, \dots, x_n$ são os elementos de, respectivamente, $B_1, \dots, B_n$ tais que

$$x = x_1 + \dots + x_n.$$

Observe-se que, como $A_1 \oplus \dots \oplus A_n = U_3$, ϕ está bem definida. Por outro lado, se $x_i \in A_i$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, então $x \in U_3$. Consequentemente, ϕ é um R -monomorfismo. Como V é um R -módulo uniforme, pelo Lema 3.2.5, existe um R -monomorfismo $\psi: V \rightarrow B_i/A_i$, para algum $i \in \{1, \dots, n\}$. Seja M_4 um R -submódulo de B_i tal que $M_4/A_i \simeq V$. Como $M_4 \leq B_i \leq E_i$ e E_i é um R -módulo uniforme, M_4 é também um R -módulo uniforme. Consideremos a série $0 \subsetneq A_i \subsetneq M_4$. Como $A_i \leq U_3$, $\text{Ass}(A_i) = \{P\}$. Ora, como M_4 é um R -módulo uniforme, pelo Lema 1.9.4, $\text{Ass}(M_4) = \{P\}$. Por outro lado, como

$$\frac{M_4}{A_i} \simeq V \leq \frac{M_3}{U_3},$$

$\text{rann}_R(N/A_i) = Q$, para todo o R -submódulo N de M_4 tal que $A_i \subsetneq N$. Uma vez que $A_i = \text{ann}_{M_4}(P)$, estão reunidas as condições necessárias para afirmar que $0 \subsetneq A_i \subsetneq M_4$ é uma série filiada de M_4 com primos filiados correspondentes P e Q .

Por outro lado, temos que M_4/A_i é uniforme (uma vez que $M_4/A_i \simeq V$), $M_4Q \leq B_iQ = 0$ e A_i é um R/P -módulo à direita livre de torção. Assim, M_4 satisfaz as condições definidas no enunciado com a possível excepção de ser finitamente gerado.

Tomemos $y \in M_4 \setminus A_i$, $M = yR$ e $U = M \cap A_i$. Então, M é finitamente gerado, uniforme (pois é um R -submódulo de M_4), $MQ \leq M_4Q = 0$, U é um R/P -módulo livre de torção, M/U é uniforme, uma vez que

$$\frac{M}{U} = \frac{M}{A_i \cap M} \simeq \frac{M + A_i}{A_i} \leq \frac{M_4}{A_i},$$

e $0 \not\subseteq U \not\subseteq M$ é uma série filiada de M com primos filiados correspondentes P e Q . Logo, se não existir um R -módulo M finitamente gerado uniforme, com série filiada $0 \not\subseteq U \not\subseteq M$ e primos filiados correspondentes P, Q tais que U é um R/P -módulo à direita livre de torção, M/U é uniforme, $Q \subsetneq P$ e $MQ = 0$, então P satisfaz a condição na segunda camada à direita. ■

Pretendemos, agora, construir exemplos de anéis que satisfazem a condição na segunda camada.

Exemplo 3.2.8 *Todo o anel R simples e Noetheriano satisfaz a condição na segunda camada.*

Uma vez que um anel simples R apenas possui um ideal primo - o ideal 0 - e 0 satisfaz, trivialmente, a condição na segunda camada, R satisfaz a condição na segunda camada.

Exemplo 3.2.9 *Todo o anel Artiniano R satisfaz a condição na segunda camada.*

Tal resulta do facto de, nos anéis Artinianos, todos os ideais primos serem maximais (Proposição 1.7.4), pelo que não pode existir um par de ideais primos de R - (P, Q) que satisfaz a condição $Q \subsetneq P$, logo, R satisfaz a condição na segunda camada à direita. De modo análogo, provamos que R satisfaz a condição na segunda camada à esquerda.

Em particular, no Exemplo 3.1.2 é apresentado um anel que satisfaz a condição na segunda camada uma vez que este anel é Artiniano.

Exemplo 3.2.10 *Todo o anel Noetheriano comutativo satisfaz a condição na segunda camada.*

*Seja R um anel Noetheriano comutativo e consideremos um R -módulo M nas condições enunciadas no Lema Principal de Jategaonkar e tal que U é um R/P -módulo à direita livre de torção. Suponhamos que se verifica a situação **b)** do Lema Principal de Jategaonkar. Então, M'/U é um $\bar{R}$ -módulo à direita de torção, onde $\bar{R} = R/Q$ e M' é um R -submódulo de M que contém propriamente U e é tal que o ideal $A = \text{rann}_R(M')$ é maximal entre os anuladores de R -submódulos de M que contém propriamente U . Assim, dado $v \in (M'/U) \setminus \{0\}$, existe $\bar{c} \in C_{\bar{R}}(0)$ tal que $v\bar{c} = 0$. Por R ser um anel comutativo, $v\bar{r}\bar{c} = 0$, para todo $\bar{r} \in \bar{R}$, concluindo-se que $\bar{c} \in \text{rann}_{\bar{R}}(v\bar{R}) \setminus \{0\}$.*

Mas, como $0 \not\subseteq U \not\subseteq M$ é uma série filiada de M com primos filiados correspondentes P e Q , M/U é um $\bar{R}$ -módulo à direita totalmente fiel, logo, $\text{rann}_{\bar{R}}(v\bar{R}) = 0$, o que contraria o facto de $\bar{c} \in \text{rann}_{\bar{R}}(v\bar{R})$.

*Concluimos, portanto, que a condição **b)** do Lema Principal de Jategaonkar nunca pode ocorrer, logo, R satisfaz a condição na segunda camada à direita.*

Analogamente provamos que R satisfaz a condição na segunda camada à esquerda.

No Capítulo 5 indicaremos outras classes de anéis que satisfazem a condição na segunda camada. Nomeadamente, verificaremos que os anéis de grupo do tipo RG , onde R é anel Noetheriano comutativo ou R é anel Artiniano e G é um grupo policíclico-por-finito, satisfazem esta condição.

Uma questão que nos podemos colocar é o que acontece a um anel Noetheriano R que satisfaz a condição na segunda camada à direita quando construímos a partir dele um anel quociente. A resposta é que o anel obtido ainda satisfaz a condição na segunda camada à direita.

Proposição 3.2.11 *Sejam R um anel Noetheriano que satisfaz a condição na segunda camada à direita (respectivamente à esquerda) e I um ideal próprio de R ; então R/I satisfaz a condição na segunda camada à direita (respectivamente à esquerda).*

Demonstração. Suponhamos que R/I não satisfaz a condição na segunda camada à direita. Seja Q/I um ideal primo de R/I que não satisfaz a condição na segunda camada à direita. Pela Proposição 3.2.7, concluímos que existe um (R/I) -módulo M finitamente gerado, uniforme com uma série filiada $0 \subsetneq U \subsetneq M$ e primos filiados correspondentes $Q/I, Q'/I$ tais que

$$U \text{ é um } \left(\frac{R/I}{Q/I} \right)\text{-módulo à direita livre de torção,}$$

M/U é um (R/I) -módulo uniforme com $Q'/I \subsetneq Q/I$ e $M(Q'/I) = 0$. Considerando em M a estrutura de R -módulo induzida pela sua estrutura de R/I -módulo, temos que M ainda é um R -módulo finitamente gerado, uniforme, com uma série filiada $0 \subsetneq U \subsetneq M$ e primos filiados correspondentes - Q, Q' tais que U é um (R/Q) -módulo à direita livre de torção, M/U é um R -módulo uniforme com $Q' \subsetneq Q$ e $MQ' = 0$. Novamente, pela Proposição 3.2.7, R não satisfaz a condição na segunda camada à direita, o que, por hipótese, é absurdo. O absurdo resultou de supormos que R/I não satisfaz a condição na segunda camada à direita, provando-se, assim, o desejado. ■

A Proposição anterior não admite recíproca. Com efeito, se considerarmos o anel Noetheriano R apresentado no Exemplo 3.2.4 e um ideal maximal P de R , então R/P é um anel Noetheriano simples, logo, pelo Exemplo 3.2.8, R/P satisfaz a condição na segunda camada. No entanto, verificámos já que o anel R não satisfaz a condição na segunda camada à direita.

Definição 3.2.12 *Um par de ideais primos (Q, P) de um anel R que satisfaz as condições:*

a) $Q \subsetneq P$ e

*b) existe um R -módulo finitamente gerado uniforme M tal que $\text{rann}_R(M) = Q$ e M contém um R -submódulo não nulo U que é um R/P -módulo livre de torção, designa-se por **par de primos indesejável**.*

Da Proposição 3.2.7, resulta, em particular, que se não existirem pares de primos indesejáveis num anel Noetheriano R , então R satisfaz a condição na segunda camada à direita.

Em seguida provaremos que, dados um anel Noetheriano à direita R , um conjunto C de Ore à direita em R e Q, P ideais primos de R disjuntos de C , então (Q, P) é um par de primos indesejável de R se e só se (Q^e, P^e) é um par de primos indesejável de RC^{-1} . Para tal, atenda-se aos seguintes Lemas:

Lema 3.2.13 *Sejam R um anel Noetheriano à direita, C um conjunto de Ore à direita em R , P um ideal primo de R tal que $C \subseteq C_R(P)$ e M um R -módulo uniforme que contém um R -submódulo não nulo U tal que U é um R/P -módulo livre de torção; então M é um R -módulo livre de C -torção.*

Demonstração. Seja $N = t_C(M)$. Como N é, por definição, um R -módulo de C -torção e $C \subseteq C_R(P)$, então, $N \cap U$ é um R/P -módulo de torção. Ora, como U é um R/P -módulo livre de torção, $N \cap U = 0$. Como M é um R -módulo uniforme, $N = 0$, logo, M é um R -módulo livre de C -torção, como desejávamos provar. ■

Lema 3.2.14 *Sejam R um anel, C um conjunto de denominadores à direita em R , M um R -módulo uniforme e livre de C -torção; então MC^{-1} é um RC^{-1} -módulo uniforme.*

Demonstração. Consideremos um RC^{-1} -submódulo não nulo N de MC^{-1} . Seja $mc^{-1} \in MC^{-1} \setminus \{0\}$, onde $m \in M$ e $c \in C$. Como M é um R -módulo uniforme, existe $r \in R$ tal que $mr \in N^c \setminus \{0\}$, logo, $mr1^{-1} \in N^{ce}$. Como M é um R -módulo livre de C -torção,

$$0 \neq mr1^{-1} = (mc^{-1})(cr)1^{-1}.$$

Uma vez que, pela Proposição 2.3.8, $N^{ce} = N$, então $mr1^{-1} \in N$, o que nos leva a concluir que MC^{-1} é um RC^{-1} -módulo uniforme. ■

Proposição 3.2.15 *Sejam R um anel Noetheriano à direita, C um conjunto de Ore à direita em R e Q, P ideais primos de R disjuntos de C ; então (Q, P) é um par de primos indesejável de R se e só se (Q^e, P^e) é um par de primos indesejável de RC^{-1} .*

Demonstração. Pela Proposição 2.3.12, $C \subseteq C_R(Q) \cap C_R(P)$, $P^{ec} = P$ e $Q^{ec} = Q$. Pelo Teorema 2.3.14, P^e, Q^e são ideais primos de RC^{-1} .

Suponhamos que (Q^e, P^e) é um par de primos indesejável de RC^{-1} . Então, $Q^e \subsetneq P^e$ e existe um RC^{-1} -módulo finitamente gerado uniforme M tal que

$\text{rann}_{RC^{-1}}(M) = Q^e$ e M contém um RC^{-1} -submódulo não nulo U tal que U é um RC^{-1}/P^e -módulo livre de torção.

Como $Q^e \subsetneq P^e$, $Q = Q^{ec} \subseteq P^{ec} = P$. Com vista a um absurdo, suponhamos que $Q = P$, então, $Q^e = P^e$, o que é absurdo. Concluimos, assim, que $Q \subsetneq P$.

Sejam $l_1, \dots, l_n$ geradores de M . Consideremos em M a estrutura natural de R -módulo à direita. Com esta estrutura, M é um R -módulo livre de C -torção e o RC^{-1} -módulo M é o módulo de frações do R -módulo M com respeito a C . Definamos

$$N = l_1 R + \dots + l_n R,$$

logo, N é um R -submódulo de M tal que $N^e = M_{RC^{-1}}$. Como M é um R -módulo livre de C -torção, N também o é.

Provaremos agora que M é um R -módulo uniforme. Para tal, consideremos um R -submódulo não nulo L de M e $m \in M \setminus \{0\}$. Como M é um RC^{-1} -módulo uniforme, $L^e \leq_e M_{RC^{-1}}$, logo, existe $(r_1 c_1^{-1}) \in RC^{-1}$ tal que $0 \neq m(r_1 c_1^{-1}) = l c_1^{-1}$, para alguns $l \in L$, $c \in C$. Aplicando a Proposição 2.1.14, concluimos que existem $r_2, s \in R$ e $c_* \in C$ tais que

$$0 \neq m(r_1 c_1^{-1}) = m(r_2 c_*^{-1}) = l(s c_*^{-1}),$$

logo, $0 \neq m r_2 = l s$ e, como $l s \in L$, $L_R \leq_e M_R$. Uma vez que L é um R -submódulo não nulo arbitrário de M , M é um R -módulo uniforme. Em particular, N é um R -módulo uniforme.

Consideremos $V_R = (U \cap N)_R \leq N_R$. Suponhamos, agora, que V não é um R/P -módulo livre de torção; então existem $v \in V \setminus \{0\}$ e $c \in C_R(P)$ tais que $vc = 0$, logo,

$$v(c 1^{-1} + P^e) = 0.$$

Pelo Lema 3.1.8, $c 1^{-1} + P^e$ é um elemento regular de RC^{-1}/P^e . Ora, como $v \in U$ e U é um RC^{-1}/P^e -módulo à direita livre de torção, concluimos que $v = 0$, o que é absurdo. O absurdo resultou de supormos que V não é um R/P -módulo à direita livre de torção.

Por hipótese, $M Q^e = 0$, logo, como M é um R -módulo livre de C -torção, $N Q = 0$. Para provarmos que o par (Q, P) é um par de primos indesejável de R é, agora, suficiente provar que $\text{rann}_R(N) \subseteq Q$. Seja I um ideal de R tal que $NI = 0$; então $(NI)^e = 0$. Uma vez que, pela Proposição 2.3.11, I^e é um ideal bilateral de RC^{-1} , $(NI)^e = N^e I^e$. Ora, como $N^e = M$, temos $I^e \subseteq \text{rann}_{RC^{-1}}(M)$. Como $\text{rann}_{RC^{-1}}(M) = Q^e$, temos $I^e \subseteq Q^e$, logo,

$$I \subseteq I^{ec} \subseteq Q^{ec} = Q.$$

Concluimos, assim, que $\text{rann}_R(N) = Q$, como desejávamos provar.

Reciprocamente, suponhamos que (Q, P) é um par de primos indesejável de R , então, $Q \subsetneq P$ e existe um R -módulo finitamente gerado uniforme M tal que $\text{rann}_R(M) = Q$ e M contém um R -submódulo não nulo U tal que U é um R/P -módulo livre de torção. Pelo Lema 3.2.13, M é um R -módulo livre de C -torção. Consequentemente, $U^e \neq 0$.

Uma vez que M é um R -módulo finitamente gerado, concluímos que MC^{-1} é um RC^{-1} -módulo finitamente gerado. Pelo Lema 3.2.14, MC^{-1} é um RC^{-1} -módulo uniforme.

Como Q^e é um ideal bilateral de RC^{-1} , $(MQ)^e = (MC^{-1})Q^e$. Ora, como $MQ = 0$, $(MQ)^e = 0$, o que nos leva a concluir que

$$Q^e \subseteq \text{rann}_{RC^{-1}}(MC^{-1}).$$

Por outro lado, se $rc^{-1} \in RC^{-1}$ é tal que $(MC^{-1})rc^{-1} = 0$, então, $(MC^{-1})r1^{-1} = 0$. Ora, como M é um R -módulo livre de C -torção, $Mr = 0$, de onde concluímos que $r \in Q$ e $rc^{-1} \in Q^e$. Provamos, assim, que $Q^e = \text{rann}_{RC^{-1}}(MC^{-1})$.

Com o intuito de provarmos que U^e é um RC^{-1}/P^e -módulo à direita, observemos que, como $UP = 0$, então $(UP)^e = 0$. Ora, como P^e é um ideal bilateral de RC^{-1} , $(UP)^e = U^eP^e$, logo, U^e é um RC^{-1}/P^e -módulo à direita.

Provaremos, em seguida, que U^e é um RC^{-1}/P^e -módulo livre de torção. Para tal, consideremos $us^{-1} \in U^e$ e $r_1s_1^{-1} \in C_{RC^{-1}}(P^e)$ tais que

$$(us^{-1})(r_1s_1^{-1}) = 0,$$

logo, $u1^{-1}(s^{-1}r_1s_1^{-1}) = 0$. Uma vez que $r_1s_1^{-1} \in C_{RC^{-1}}(P^e)$, concluímos que

$$s^{-1}r_1s_1^{-1} \in C_{RC^{-1}}(P^e).$$

Seja $r_2s_2^{-1} = s^{-1}r_1s_1^{-1}$, com $r_2 \in R$ e $s_2 \in C$; então $ur_21^{-1} = 0$. Uma vez que M é um R -módulo livre de C -torção, concluímos que $ur_2 = 0$. Ora, como pelo Lema 3.1.8, $r_2 \in C_R(P)$ e, como U é um R/P -módulo livre de torção, $u = 0$, o que nos leva a concluir que $us^{-1} = 0$. Consequentemente, U^e é um RC^{-1}/P^e -módulo livre de torção.

Para provarmos que (Q^e, P^e) é um par de primos indesejável de RC^{-1} bastar-nos-á provar que $Q^e \subsetneq P^e$. Para tal, observe-se que $Q \subsetneq P$ implica $Q^e \subseteq P^e$. Por outro lado, $Q^e = P^e$ implica $Q^{ec} = P^{ec}$, logo, $Q = P$, o que é absurdo. Consequentemente, $Q^e \subsetneq P^e$.

Estão, pois, reunidas as condições necessárias para afirmar que (Q^e, P^e) é um par de primos indesejável de RC^{-1} , como pretendíamos provar. ■

O Lema que se segue é de demonstração imediata.

Lema 3.2.16 *Sejam R um anel, (Q, P) um par de primos indesejável de R e I um ideal de R tal que $I \subseteq Q$; então $(Q/I, P/I)$ é um par de primos indesejável de R/I . ■*

Mostramos agora a primeira consequência importante da existência da condição na segunda camada num anel Noetheriano. Provaremos que, na presença de um anel Noetheriano R que satisfaz a condição na segunda camada à direita, podemos provar que, dado um R -módulo não nulo finitamente gerado M tal que $\text{ann}_M(P)$ é livre de torção como R/P -módulo à direita, para todo $P \in \text{Ass}(M)$, M é anulado por um produto finito de ideais primos que pertencem ao fecho de ligações à direita de $\text{Ass}(M)$.

Teorema 3.2.17 *Sejam R um anel Noetheriano, M um R -módulo não nulo e X um subconjunto de $\text{Spec}(R)$ tal que todos os ideais primos de X satisfazem a condição na segunda camada à direita e X é fechado para ligações à direita. Suponhamos que M satisfaz as condições:*

a) M é um R -módulo finitamente gerado.

b) $\text{Ass}(M) \subseteq X$.

c) Para todo $P \in \text{Ass}(M)$ e para todo o R -submódulo uniforme N de M tal que $\text{Ass}(N) = \{P\}$ e $\text{rann}_R(N) = P$, tem-se que N é um R/P -módulo livre de torção.

d) Dado P o anulador de um R -submódulo não nulo de M tal que P é maximal entre os anuladores de R -submódulos não nulos de M ; então $\text{ann}_M(P)$ é um R/P -módulo livre de torção e $P \in X$.

Então, M tem uma série de R -submódulos

$$0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \dots \subsetneq M_n = M$$

tal que, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, M_i/M_{i-1} é um R -módulo uniforme e

$$\text{rann}_R(M_i/M_{i-1}) = P_i,$$

para algum $P_i \in X$, com $P_1 \in \text{Ass}(M)$. Assim, $MP_n \dots P_1 = 0$.

Demonstração. Sejam R , M e X nas condições do enunciado.

Como R é anel Noetheriano podemos considerar P_1 maximal entre os anuladores de R -submódulos não nulos de M . Pela Proposição 1.3.1, $P_1 \in \text{Ass}(M)$. Por **b)**, $P_1 \in X$.

Como R é anel Noetheriano e, por **a)**, M é um R -módulo finitamente gerado, M é um R -módulo Noetheriano. Consequentemente, $\text{ann}_M(P_1)$ é um R -módulo Noetheriano, pelo que podemos escolher um R -submódulo uniforme M_1 de $\text{ann}_M(P_1)$ tal que M_1 é maximal entre os R -submódulos uniformes de $\text{ann}_M(P_1)$. Pela Proposição 1.3.1, $\text{ann}_M(P_1)$ é um R/P_1 -módulo totalmente fiel, logo, $\text{rann}_R(M_1) = P_1$.

Se $M_1 = M$, temos $MP_1 = 0$, pelo que o teorema é válido.

Suponhamos que $M_1 \neq M$.

Provaremos que:

1) M/M_1 é um R -módulo finitamente gerado.

2) $\text{Ass}(M/M_1) \subseteq X$.

3) Para todo $P \in \text{Ass}(M/M_1)$ e para todo o R -submódulo uniforme N de M/M_1 tal que $\text{Ass}(N) = \{P\}$ e $\text{rann}_R(N) = P$, tem-se que N é um R/P -módulo livre de torção.

4) Dado P o anulador de um R -submódulo não nulo de M/M_1 tal que P é maximal entre os anuladores de R -submódulos não nulos de M/M_1 . Então, $\text{ann}_{M/M_1}(P)$ é um R/P -módulo livre de torção e $P \in X$.

Como M é um R -módulo finitamente gerado, M/M_1 é um R -módulo finitamente gerado, o que nos leva a concluir que é válida a condição 1).

Sejam $Q \in \text{Ass}(M/M_1)$ e N um R -submódulo uniforme de M/M_1 tal que $\text{Ass}(N) = \{Q\}$ e $\text{rann}_R(N) = Q$. Consideremos o R -submódulo M' de M tal que $M'/M_1 = N$.

Suponhamos que M' é um R -módulo uniforme. Uma vez que $M_1 \not\subseteq M'$ e $M_1 \leq \text{ann}_M(P_1)$, concluímos que

$$M_1 \leq \text{ann}_{M'}(P_1) \leq \text{ann}_M(P_1),$$

logo, $\text{ann}_{M'}(P_1)$ é um R -submódulo uniforme de $\text{ann}_M(P_1)$ que contém M_1 . Ora, como M_1 é um R -submódulo uniforme de $\text{ann}_M(P_1)$ tal que M_1 é maximal entre os R -submódulos uniformes de $\text{ann}_M(P_1)$, $M_1 = \text{ann}_{M'}(P_1)$. Assim, $0 \not\subseteq M_1 \not\subseteq M'$ é uma série filiada de M' com primos filiados correspondentes P_1 e Q . Além disso, como M' é um R -módulo uniforme, $M_1 \leq_e M'$. Observe-se, agora, que, por d), $\text{ann}_M(P_1)$ é um R/P_1 -módulo livre de torção, logo, $M_1 = \text{ann}_{M'}(P_1)$ é um R/P_1 -módulo livre de torção. Como $P_1 \in X$, por hipótese, P_1 satisfaz a condição na segunda camada à direita. Consequentemente, $Q \rightsquigarrow P_1$ e $V = M''/M_1$ é um R/Q -módulo livre de torção, onde M'' é um R -submódulo de M' que contém propriamente M_1 e é tal que $\text{rann}_R(M'')$ é maximal entre os anuladores de R -submódulos de M' que contêm propriamente M_1 . Uma vez que $N = M'/M_1$ é um R -módulo uniforme e $NQ = 0$, temos que $(M''/M_1)_{R/Q} \leq_e N_{R/Q}$, logo, N é um R/Q -módulo livre de torção. Por outro lado, como $Q \rightsquigarrow P_1$ e X é fechado para ligações à direita, $Q \in X$.

Se M' não é um R -módulo uniforme, então $M_1 \not\leq_e M'$. Com efeito, se $M_1 \leq_e M'$, então, como M_1 é um R -módulo uniforme, pelo Lema 1.9.2, M' é um R -módulo uniforme, o que é absurdo. Concluímos, assim, que existe um R -submódulo não nulo L de M' tal que $M_1 \cap L = 0$. Consequentemente,

$$L \simeq \frac{L \oplus M_1}{M_1} \leq \frac{M'}{M_1} = N.$$

Uma vez que N é um R -módulo uniforme tal que $\text{Ass}(N) = \{Q\}$ e $\text{rann}_R(N) = Q$, concluímos que L é um R -submódulo uniforme de M tal que $\text{Ass}(L) = \{Q\}$ e $\text{rann}_R(L) = Q$. Consequentemente,

$$\{Q\} = \text{Ass}(L) \subseteq \text{Ass}(M),$$

portanto, $Q \in \text{Ass}(M)$ e, por **b**), $Q \in X$. Por **c**), concluímos que L é um R/Q -módulo livre de torção, logo, $(L \oplus M_1)/M_1$ é um R/Q -módulo livre de torção. Uma vez que $(L \oplus M_1)/M_1 \leq_e N$, concluímos que N é um R/Q -módulo livre de torção.

Provamos, assim, que para todo o R -submódulo uniforme N de M/M_1 tal que $\text{Ass}(N) = \{Q\}$ e $\text{rann}_R(N) = Q$, com $Q \in \text{Ass}(M/M_1)$, se tem que N é um R/Q -módulo livre de torção e $Q \in X$. Está, pois, demonstrado que é válida a condição **3**).

Consideremos, agora, $Q \in \text{Ass}(M/M_1)$. Logo, $Q = \text{rann}_R(Z)$, para algum R -submódulo não nulo Z de M/M_1 tal que Z é um R/Q -módulo totalmente fiel. Uma vez que M/M_1 é um R -módulo finitamente gerado e R é anel Noetheriano, Z é um R -módulo Noetheriano, logo, Z possui um R -submódulo uniforme Y . Como Z é um R/Q -módulo totalmente fiel, Y é um R/Q -módulo totalmente fiel, logo, $\text{Ass}(Y) = \{Q\}$ e $\text{rann}_R(Y) = Q$. Ora, como Y é um R -submódulo uniforme de M/M_1 tal que $\text{Ass}(Y) = \{Q\}$ e $\text{rann}_R(Y) = Q$, verificamos, no parágrafo anterior, que $Q \in X$. Consequentemente, $\text{Ass}(M/M_1) \subseteq X$ e a condição **2**) é válida.

Seja P um anulador de um R -submódulo não nulo de M/M_1 tal que P é maximal entre os anuladores de R -submódulos não nulos de M/M_1 . Pela Proposição 1.3.1, $P \in \text{Ass}(M/M_1)$ e $\text{ann}_{M/M_1}(P)$ é um R/P -módulo totalmente fiel. Uma vez que $P \in \text{Ass}(M/M_1)$ e $\text{Ass}(M/M_1) \subseteq X$, concluímos que $P \in X$. Por outro lado, como M/M_1 é um R -módulo Noetheriano, $\text{ann}_{M/M_1}(P)$ é um R -módulo Noetheriano e, em particular, $\text{ann}_{M/M_1}(P)$ tem dimensão de Goldie finita. Assim, existem R -submódulos uniformes $X_1, \dots, X_n$ de $\text{ann}_{M/M_1}(P)$ tais que

$$Z = X_1 \oplus \dots \oplus X_n \leq_e \text{ann}_{M/M_1}(P).$$

Observe-se que $Z, X_1, \dots, X_n$ são R/P -submódulos de $\text{ann}_{M/M_1}(P)$ e, uma vez que $\text{ann}_{M/M_1}(P)$ é um R/P -módulo totalmente fiel, $\text{Ass}(X_1) = \dots = \text{Ass}(X_n) = \{P\}$ e $\text{rann}_R(X_1) = \dots = \text{rann}_R(X_n) = P$, logo, por **3**), $X_1, \dots, X_n$ são R/P -módulos livres de torção. Pela Proposição 2.2.20, $X_1 \oplus \dots \oplus X_n$ é um R/P -módulo livre de torção e, uma vez que

$$X_1 \oplus \dots \oplus X_n \leq_e \text{ann}_{M/M_1}(P),$$

pela Proposição 2.2.20, $\text{ann}_{M/M_1}(P)$ é um R/P -módulo livre de torção.

Provamos, assim, que as condições **1**), **2**), **3**) e **4**) são válidas.

Consideremos agora P_2 maximal entre os anuladores de R -submódulos não nulos de M/M_1 . Uma vez que M/M_1 é um R -módulo Noetheriano, podemos considerar um R -submódulo uniforme M_2/M_1 de $Z = \text{ann}_{M/M_1}(P_2)$ tal que M_2/M_1 é maximal entre os R -submódulos uniformes de Z . Uma vez que, pela Proposição 1.3.1, $P_2 \in \text{Ass}(M_2/M_1)$ e Z é um R/P_2 -módulo totalmente fiel, $\text{rann}_R(M_2/M_1) = P_2$.

Se $M_2/M_1 = M/M_1$, então $0 \subsetneq M_1 \subsetneq M$ é uma série de R -submódulos de M tais que M_1 e M/M_1 são R -módulos uniformes,

$$rann_R(M_1) = P_1, \quad rann_R(M/M_1) = P_2, \quad \text{com } P_1 \in \text{Ass}(M_1) \text{ e } P_2 \in \text{Ass}(M_2/M_1).$$

Por 2), concluímos que $P_2 \in X$.

Se $M_2/M_1 \neq M/M_1$, tal como anteriormente, concluímos que:

1) $M/M_2 \simeq \frac{M/M_1}{M_2/M_1}$ é um R -módulo finitamente gerado.

2) $\text{Ass}(M/M_2) = \text{Ass}\left(\frac{M/M_1}{M_2/M_1}\right) \subseteq X$.

3) Para todo $P \in \text{Ass}(M/M_2)$ e para todo o R -submódulo uniforme N de M/M_2 tal que $\text{Ass}(N) = \{P\}$ e $rann_R(N) = P$, tem-se que N é um R/P -módulo livre de torção.

4) Dado P o anulador de um R -submódulo não nulo de M/M_2 tal que P é maximal entre os anuladores de R -submódulos não nulos de M/M_2 . Então, $ann_{M/M_2}(P)$ é um R/P -módulo livre de torção e $P \in X$.

Repetindo o processo descrito, sucessivamente determinamos uma cadeia propriamente ascendente de R -submódulos de M

$$0 = M_0 \subsetneq \dots \subsetneq M_n \subsetneq \dots$$

tal que M_i/M_{i-1} é um R -módulo uniforme e $rann_R(M_i/M_{i-1}) = P_i$, para algum $P_i \in X$, com $P_1 \in \text{Ass}(M)$. Uma vez que M é um R -módulo Noetheriano, a cadeia considerada é finita. ■

Corolário 3.2.18 [*Jategaonkar*] *Sejam R um anel Noetheriano e M um R -módulo não nulo finitamente gerado tal que $ann_M(P)$ é livre de torção como R/P -módulo à direita, para todo $P \in \text{Ass}(M)$. Suponhamos que todos os ideais primos de $X = \cup\{r.cl(P) : P \in \text{Ass}(M)\}$ satisfazem a condição na segunda camada à direita. Então, M tem uma série de R -submódulos*

$$0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \dots \subsetneq M_n = M$$

tal que, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, M_i/M_{i-1} é um R -módulo uniforme e

$$rann_R(M_i/M_{i-1}) = P_i,$$

para algum $P_i \in X$, com $P_1 \in \text{Ass}(M)$. Assim, $MP_n \dots P_1 = 0$.

Demonstração. Começamos por observar que o conjunto X é fechado para ligações à direita. Para provarmos o corolário é, pois, suficiente provar que o R -módulo M considerado satisfaz as condições a), b), c) e d) enunciadas no Teorema 3.2.17.

Por hipótese, as condições a), b) são válidas.

Seja $P \in \text{Ass}(M)$ e N um R -submódulo uniforme de M tal que $\text{Ass}(N) = \{P\}$ e $\text{rann}_R(N) = P$. Como $\text{rann}_R(N) = P$, $N \leq \text{ann}_M(P)$. Ora, como por hipótese, $\text{ann}_M(P)$ é um R/P -módulo livre de torção, N é um R/P -módulo livre de torção, pelo que a condição c) é válida.

Consideremos um anulador P de um R -submódulo não nulo de M tal que P é maximal entre os anuladores de R -submódulos não nulos de M . Pela Proposição 1.3.1, $P \in \text{Ass}(M)$, logo, $\text{ann}_M(P)$ é um R/P -módulo livre de torção. Uma vez que $\text{Ass}(M) \subseteq X$, temos também que $P \in X$. Consequentemente, a condição d) é válida, como desejávamos provar. ■

3.3 Localização e dimensão clássica de Krull

Nas secções anteriores estudámos as ligações na segunda camada entre dois ideais primos Q e P de um anel Noetheriano R . As ligações foram definidas recorrendo à existência de um $(R/Q, R/P)$ -bimódulo especial. A questão que se pode colocar é se, dados $P, Q \in \text{Spec}(R)$ tais que $P \rightsquigarrow Q$, onde R é um anel Noetheriano, poderemos comparar os anéis R/P e R/Q . Veremos que, se R for um anel que satisfaz a condição na segunda camada, eles terão a mesma dimensão clássica de Krull.

Os resultados que introduzimos a seguir são demonstrados com a ajuda da dimensão clássica de Krull e sempre na presença da condição na segunda camada. Começamos por mostrar que, dado um bimódulo Noetheriano não nulo N sobre um anel Noetheriano R que satisfaz a condição na segunda camada, existem sub-bimódulos N', N'' de N tais que $N'' \not\subseteq N'$ e N'/N'' é livre de torção em ambos os lados sobre quocientes primos de R .

O resultado pretendido, isto é, “se $P \rightsquigarrow Q$ num anel Noetheriano R que satisfaz a condição na segunda camada, então

$$\text{cl.Krull dim}(R/P) = \text{cl.Krull dim}(R/Q),$$

é obtido como Corolário de um Teorema de Jategaonkar (Teorema 3.3.2), onde um resultado mais forte é demonstrado.

Proposição 3.3.1 *Sejam R um anel Noetheriano que satisfaz a condição na segunda camada à direita e B um bimódulo não nulo Noetheriano sobre R . Se P é um ideal primo de R tal que $\text{rann}_R(B) \subseteq P$, então, existem sub-bimódulos B', B'' de B tais que $B'' \not\subseteq B'$ e existe um ideal primo Q de R tal que $\text{lann}_R(B'/B'') = Q$, $\text{rann}_R(B'/B'') = P$ e B'/B'' é um R/Q -módulo à esquerda livre de torção e um R/P -módulo à direita livre de torção.*

Demonstração. Como R é anel Noetheriano, podemos tomar P_1 maximal entre os anuladores em R de R -submódulos não nulos de B_R . Consequentemente,

pela Proposição 1.3.1, P_1 é um ideal primo de R e $B'_1 = \text{lann}_B(P_1)$ é um R/P_1 -módulo à direita totalmente fiel.

Seja D o R/P_1 -submódulo de torção do $(R, R/P_1)$ -bimódulo B'_1 e suponhamos que $D \neq 0$. Como R/P_1 é um anel primo e Noetheriano à direita e ${}_R B'_1$ é um R -módulo à esquerda Noetheriano, pelo Corolário 2.2.29, $\text{rann}_{R/P_1}(D) \neq 0$, o que contraria o facto de B'_1 ser um R/P_1 -módulo à direita totalmente fiel. Concluimos, assim, que $D = 0$ e B'_1 é um R/P_1 -módulo à direita livre de torção.

Consideremos Q_1 maximal entre os anuladores em R de R -submódulos não nulos de ${}_R(B'_1)$. Definamos $B_1 = \text{rann}_{B'_1}(Q_1)$. Observe-se que B_1 é um (R, R) -bimódulo não nulo Noetheriano em ambos os lados. Tal como no caso anterior, provamos que B_1 é um R/Q_1 -módulo à esquerda livre de torção. Como $(B_1)_R \leq (B'_1)_R$, B_1 é um R/P_1 -módulo à direita livre de torção. Consequentemente, $\text{lann}_R(B_1) = Q_1$ e $\text{rann}_R(B_1) = P_1$.

Repetindo os mesmos argumentos, uma vez que B_R é Noetheriano, construímos uma cadeia finita de (R, R) -sub-bimódulos de B -

$$0 = B_0 \subsetneq B_1 \subsetneq \dots \subsetneq B_n = B$$

tais que $Q_i = \text{lann}_R(B_i/B_{i-1})$, $P_i = \text{rann}_R(B_i/B_{i-1})$ são ideais primos e B_i/B_{i-1} é um (R/Q_i) -módulo à esquerda livre de torção e um (R/P_i) -módulo à direita livre de torção, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Assim, $B P_n \dots P_1 = 0$, o que implica

$$P_n \dots P_1 \subseteq \text{rann}_R(B) \subseteq P.$$

Como P é um ideal primo, $P_i \subseteq P$, para algum $i \in \{1, \dots, n\}$. Seja $P' = P_i$; então $C' = B_i/B_{i-1}$ é um R/P' -módulo à direita livre de torção e um R/Q_i -módulo à esquerda livre de torção, $\text{rann}_R(C') = P'$ e $\text{lann}_R(C') = Q_i$. Observe-se, ainda, que $\text{rann}_R(B) \subseteq P'$.

Se $P = P'$, tem-se o resultado.

Suponhamos que $P' \subsetneq P$ e consideremos $E = E((R/P)_{R/P'})$. Como C' é um (R, R) -bimódulo Noetheriano, pelo Lema 2.2.27, existe um número natural n tal que $R/\text{rann}_R(C') = R/P'$ é isomorfo a um R -submódulo X de $\bigoplus_{j=1}^n C'_j$, onde $C'_j = C'$, para todo $j \in \{1, \dots, n\}$. Consequentemente, R/P' é isomorfo a um R/P' -submódulo X de $\bigoplus_{j=1}^n C'_j$.

Assim, se considerarmos o R/P' -homomorfismo não nulo

$$\begin{aligned} \phi: R/P' &\rightarrow E \\ r + P' &\rightarrow r + P \end{aligned}$$

uma vez que E é um R/P' -módulo injectivo, podemos estender ϕ a um R/P' -homomorfismo $\Psi: \bigoplus_{j=1}^n C'_j \rightarrow E$. Em particular, existe um R/P' -homomorfismo não nulo $f: C' \rightarrow E$.

Provaremos que $\text{Ass}(f(C')) = \{P/P'\}$. Começemos por observar que $P/P' = \text{rann}_{R/P'}(R/P)$ e R/P é um $\frac{R/P'}{P/P'}$ -módulo totalmente fiel.

Dado $Q/P' \in \text{Ass}(f(C'))$, temos $Q/P' = \text{rann}_{R/P'}(X)$, para algum R/P' -submódulo X não nulo de $f(C')$ tal que

$$X \text{ é um } \frac{R/P'}{Q/P'}\text{-módulo totalmente fiel.}$$

De $(R/P)_{R/P'} \leq_e E_{R/P'}$ concluímos que $X \cap (R/P) \neq 0$, logo,

$$Q/P' = \text{rann}_{R/P'}(X \cap R/P).$$

Uma vez que $X \cap (R/P)$ é um R/P' -submódulo de R/P ,

$$P/P' = \text{rann}_{R/P'}(X \cap R/P) = Q/P'.$$

Portanto, $\text{Ass}(f(C')) = \{P/P'\}$.

Com o intuito de aplicar o Corolário 3.2.18, provaremos que

$$\text{ann}_{f(C')}(P/P') \text{ é um } \frac{R/P'}{P/P'}\text{-módulo livre de torção.}$$

Para tal, observemos que, como $(R/P)(P/P') = 0$,

$$(R/P)_{R/P'} \leq \text{ann}_E(P/P')_{R/P'}.$$

De $(R/P)_{R/P'} \leq_e E_{R/P'}$ concluímos que

$$(R/P)_{\frac{R/P'}{P/P'}} \leq_e (\text{ann}_E(P/P'))_{\frac{R/P'}{P/P'}}.$$

Mas R/P é um R/P -módulo livre de torção, consequentemente, R/P é um $\frac{R/P'}{P/P'}$ -módulo livre de torção, logo, $\text{ann}_E(P/P')$ também o é e o mesmo acontece a $\text{ann}_{f(C')}(P/P')$.

Como, pela Proposição 3.2.11, R/P' satisfaz a condição na segunda camada à direita, $f(C')$ é um R/P' -módulo não nulo, finitamente gerado (porque C' é finitamente gerado), $\text{Ass}(f(C')) = \{P/P'\}$ e

$$\text{ann}_{f(C')}(P/P') \text{ é um } \frac{R/P'}{P/P'}\text{-módulo livre de torção;}$$

então, pelo Corolário 3.2.18, existem ideais primos $P_1/P', \dots, P_n/P'$ de R/P' pertencentes ao fecho de ligações à direita de $\{P/P'\}$ tais que

$$f(C')(P_n/P') \dots (P_1/P') = 0$$

e $P_1/P' = P/P'$. Uma vez que todos os ideais primos da forma P_i/P' pertencem ao fecho de ligações à direita de P/P' e nenhum ideal primo está ligado ao ideal nulo, então $P' \subsetneq P_j$, para todo $j \in \{1, \dots, n\}$.

Seja I um ideal direito de R tal que $I = \text{rann}_R(f(C'))$; logo

$$I/P' = \text{rann}_{R/P'}(f(C')).$$

Começemos por verificar que $I \subseteq P$. De facto, como $\text{Ass}(f(C')) = \{P/P'\}$,

$$\text{rann}_{R/P'}(f(C')) \subseteq P/P',$$

logo, $I \subseteq P$. Por outro lado, se $P' = I$, de

$$(P_n/P') \dots (P_1/P') \subseteq I/P' = P'/P'$$

concluimos que $P' = P_j$, para algum $j \in \{1, \dots, n\}$, o que é absurdo. Consequentemente, $P' \subsetneq I \subseteq P$.

Seja $J = \text{rann}_R(C'/C'I)$; então

$$f(C')J = f(C'J) \subseteq f(C'I) = 0,$$

provando-se, assim, que $J \subseteq \text{rann}_R(f(C')) = I$, logo $\text{rann}_R(C'/C'I) = I$.

Consideremos, agora,

$$B = B_i/(B_iI + B_{i-1}) \simeq C'/C'I.$$

Observe-se que $C' \neq C'I$, pois, caso contrário, teríamos $f(C') = f(C')I = 0$, o que é absurdo. Consequentemente, $B \neq 0$.

Uma vez que B é um (R, R) -bimódulo Noetheriano não nulo tal que $I = \text{rann}_R(B) \subseteq P$, repetindo o processo descrito, obtemos um ideal primo P'' tal que $I \subseteq P'' \subseteq P$. Construimos, assim, uma cadeia de ideais primos de R -

$$P' \subsetneq P'' \subseteq \dots \subseteq P.$$

Como R é anel Noetheriano, a cadeia é finita, logo, existem sub-bimódulos B', B'' de B tais que $B'' \subsetneq B'$ e existe um ideal primo Q de R tal que $\text{lann}_R(B'/B'') = Q$, $\text{rann}_R(B'/B'') = P$ e B'/B'' é um R/Q -módulo à esquerda livre de torção e um R/P -módulo à direita livre de torção. ■

Teorema 3.3.2 [Jategaonkar] *Sejam R um anel Noetheriano que satisfaz a condição na segunda camada e B um bimódulo Noetheriano não nulo sobre R ; então*

$$\text{cl.Krull.dim}(R/\text{lann}_R(B)) = \text{cl.Krull.dim}(R/\text{rann}_R(B)).$$

Demonstração. Mostraremos que

$$\text{cl.Krull.dim}(R/\text{lann}_R(B)) \geq \text{cl.Krull.dim}(R/\text{rann}_R(B)).$$

Procedemos por indução transfinita em $\alpha = cl.Krull.\dim(R/rann_R(B))$.

Se $\alpha = 0$, a condição é verdadeira.

Suponhamos, agora, que $\alpha > 0$ e que, para todo o ordinal β tal que $\beta < \alpha$ e para todo o (R, R) -bimódulo Noetheriano não nulo D tal que

$$cl.Krull.\dim(R/rann_R(D)) = \beta,$$

se tem

$$cl.Krull.\dim(R/lann_R(D)) \geq cl.Krull.\dim(R/rann_R(D)).$$

Pela Proposição 1.10.3, existe um ideal primo P tal que

$$\alpha = cl.Krull.\dim\left(\frac{R/rann_R(B)}{P/rann_R(B)}\right),$$

isto é, $\alpha = cl.Krull.\dim(R/P)$, com $rann_R(B) \subseteq P$. Pela Proposição 3.3.1, existem sub-bimódulos B' , B'' de B tais que $B'' \leq B'$ e existe um ideal primo Q de R tal que $lann_R(B'/B'') = Q$, $rann_R(B'/B'') = P$ e $C = B'/B''$ é um R/Q -módulo à esquerda livre de torção e um R/P -módulo à direita livre de torção. Uma vez que $lann_R(B)C = 0$, $lann_R(B) \subseteq Q$, logo, pelo Corolário 1.10.5,

$$cl.Krull.\dim(R/lann_R(B)) \geq cl.Krull.\dim(R/Q).$$

Provaremos agora que

$$cl.Krull.\dim(R/Q) \geq cl.Krull.\dim(R/rann_R(B)) = \alpha.$$

Seja β um ordinal tal que $\beta < \alpha$. Pela Proposição 1.10.3, existe um ideal primo P' tal que

$$cl.Krull.\dim\left(\frac{R/P}{P'/P}\right) = \beta.$$

Logo, $cl.Krull.\dim(R/P') = \beta$ e $P \subsetneq P'$.

Como ${}_R C_R$ é Noetheriano, ${}_R C$ tem dimensão de Goldie finita. Podemos agora escolher C' , um sub-bimódulo de C não nulo cuja dimensão de Goldie como R -módulo à esquerda seja a menor possível. Como C' é um R/P -módulo livre de torção, pelo Lema 2.2.26, C' é um R/P -módulo totalmente fiel, logo, $rann_R(C') = P \subsetneq P'$. Então, podemos aplicar a Proposição 3.3.1 e afirmar que existem sub-bimódulos C^* , C^{**} de C' tais que $C^{**} \leq C^*$ e existe um ideal primo Q' de R tal que $lann_R(C^*/C^{**}) = Q'$, $rann_R(C^*/C^{**}) = P'$ e $C'' = C^*/C^{**}$ é um $(R/Q', R/P')$ -bimódulo livre de torção em ambos os lados.

Se $(C'')_R \leq (C')_R$, então

$$P = rann_R(C') = rann_R(C'') = P',$$

o que é absurdo.

Provamos, assim, que $C'' = Y/X$, para alguns sub-bimódulos X, Y de C' tais que $0 \neq X \not\subseteq Y$. Pela forma como foi definido C' , concluímos que $u.\dim({}_R X) = u.\dim({}_R Y)$, logo, pela versão esquerda do Corolário 1.9.13, ${}_R X \leq_e {}_R Y$. Consequentemente, ${}_{R/Q} X \leq_e {}_{R/Q} Y$, o que nos leva a concluir, pela Proposição 2.2.20, que $C'' = Y/X$ é um (R/Q) -módulo à esquerda de torção, logo, $Q' \neq Q$. Concluímos, assim, que

$$Q = \text{lann}_R(C) \subsetneq \text{lann}_R(C'') = Q',$$

logo, pelo Corolário 1.10.4,

$$\text{cl.Krull. dim}(R/Q) > \text{cl.Krull. dim}(R/Q').$$

Como $\text{cl.Krull. dim}(R/P') = \beta < \alpha$ e C'' é um (R, R) -bimódulo Noetheriano não nulo, por hipótese, $\text{cl.Krull. dim}(R/Q') =$

$$\begin{aligned} \text{cl.Krull. dim}(R/\text{lann}_R(C'')) &\geq \text{cl.Krull. dim}(R/\text{rann}_R(C'')) \\ &= \text{cl.Krull. dim}(R/P') = \beta. \end{aligned}$$

Provamos, assim, que $\text{cl.Krull. dim}(R/Q) > \beta$, para todo o ordinal β tal que $\beta < \alpha$, logo,

$$\text{cl.Krull. dim}(R/Q) \geq \alpha = \text{cl.Krull. dim}(R/\text{rann}_R(B)),$$

consequentemente,

$$\text{cl.Krull. dim}(R/\text{lann}_R(B)) \geq \text{cl.Krull. dim}(R/\text{rann}_R(B)).$$

De forma análoga, provamos a outra desigualdade, demonstrando-se o teorema. ■

Deduzimos, agora, o resultado desejado inicialmente.

Corolário 3.3.3 [Jategaonkar] *Sejam R um anel Noetheriano que satisfaz a condição na segunda camada e Q, P ideais primos distintos de R que pertencem ao mesmo clique; então $\text{cl.Krull. dim}(R/Q) = \text{cl.Krull. dim}(R/P)$ e P, Q são ideais primos incomparáveis.*

Demonstração. Como Q e P estão no mesmo clique, existe um número natural n tal que

$$P = P_1 \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow P_n = Q,$$

onde o símbolo $A \rightsquigarrow B$ representa que existe uma ligação do tipo $A \rightsquigarrow B$ ou uma ligação do tipo $B \rightsquigarrow A$. Sejam $(P \cap P_2)/A_1, \dots, (P_{n-1} \cap Q)/A_{n-1}$ os bimódulos de ligação correspondentes às ligações consideradas.

Aplicando o Teorema 3.3.2, concluímos que

$$cl.Krull.\dim\left(R/lan_R\left(\frac{P \cap P_2}{A_1}\right)\right) = cl.Krull.\dim\left(R/rann_R\left(\frac{P \cap P_2}{A_1}\right)\right).$$

Sendo o bimódulo $(P \cap P_2)/A_1$ um R/P -módulo (à direita ou à esquerda) livre de torção e um R/P_2 -módulo (respectivamente, à esquerda ou à direita) livre de torção, concluímos, pelo Lema 2.2.26 e pela respectiva versão esquerda, que este é um R/P -módulo (à direita ou à esquerda) totalmente fiel e é um R/P_2 -módulo (respectivamente, à esquerda ou à direita) totalmente fiel; logo,

$$cl.Krull.\dim(R/P) = cl.Krull.\dim(R/P_2).$$

Repetindo o processo $n - 1$ vezes, concluímos que

$$cl.Krull.\dim(R/P) = cl.Krull.\dim(R/Q).$$

Como, por hipótese, P e Q são ideais primos distintos, pelo Corolário 1.10.4, os ideais primos P e Q são incomparáveis. ■

3.4 Localização em cliques

No início da secção 3.1 introduzimos um exemplo de um anel Noetheriano R que possui ideais primos P e Q tais que P é um ideal primo localizável à direita de R mas Q não o é, ou seja, $C_R(P)$ é um conjunto de Ore à direita em R mas $C_R(Q)$ não o é. É, pois, natural perguntar: “Qual o maior conjunto de Ore à direita S que está contido em $C_R(Q)$?”.

Proposição 3.4.1 *Sejam R um anel Noetheriano, P, Q ideais primos de R tais que $Q \rightsquigarrow P$ e S um subconjunto de R .*

Se S for um conjunto de Ore à direita em R tal que $S \subseteq C_R(P)$, então $S \subseteq C_R(Q)$.

Se S for um conjunto de Ore à esquerda em R tal que $S \subseteq C_R(Q)$, então $S \subseteq C_R(P)$.

Demonstração. Suponhamos que S é um conjunto de Ore à direita em R tal que $S \subseteq C_R(P)$. Consequentemente, S é disjunto de P e, pela Proposição 2.1.4, S é um conjunto de denominadores à direita em R .

Seja $(Q \cap P)/A$ o bimódulo de ligação entre Q e P .

Se $S \not\subseteq C_R(Q)$, então existe $c \in S \setminus C_R(Q)$. Como R/Q é anel Noetheriano à direita primo, pelo Teorema de Goldie, R/Q é anel não singular à direita. Pela

Proposição 2.2.8, $c + Q$ não é regular à direita em R/Q , logo, existe $r \in R \setminus Q$ tal que $cr \in Q$. Consequentemente,

$$cr(Q \cap P) \subseteq QP \subseteq A,$$

logo, $cr((Q \cap P)/A) = 0$ e, dado $q \in Q \cap P$, temos $\overline{crq} = 0$ em $\overline{R} = R/A$, onde $\overline{x}$ representa $x + A$, para todo $x \in R$. Uma vez que $S \cap P = \emptyset$ e $A \subseteq P$, $S \cap A = \emptyset$; consequentemente, pela Proposição 2.3.11, $\overline{S} = \{\overline{s} : s \in S\}$ é um conjunto de denominadores à direita em $\overline{R}$. Em particular, $\overline{S}$ é um conjunto reversível à direita em $\overline{R}$, portanto, existe $\overline{d} \in \overline{S}$ tal que $\overline{r}\overline{q}\overline{d} = 0$. Como $(Q \cap P)/A$ é, por hipótese, um R/P -módulo à direita livre de torção e $S \subseteq C_R(P)$, então $\overline{r}\overline{q} = 0$. Uma vez que $\overline{q}$ é um elemento arbitrário de $(Q \cap P)/A$, então $r((Q \cap P)/A) = 0$, consequentemente, $\text{lann}_R((Q \cap P)/A) \not\subseteq Q$, o que, pela versão esquerda do Lema 2.2.26, contradiz o facto de $(Q \cap P)/A$ ser um R/Q -módulo à esquerda livre de torção. Concluimos, portanto, que $S \subseteq C_R(Q)$, como desejávamos provar.

Por outro lado, se S for um conjunto de Ore à esquerda de R tal que $S \subseteq C_R(Q)$, então, S é um conjunto de Ore à direita em R^{op} e $P \rightsquigarrow Q$ em R^{op} . Tal como anteriormente, provamos que $S \subseteq C_R(P)$. ■

Corolário 3.4.2 *Sejam R um anel Noetheriano, P um ideal primo de R e C um subconjunto de R disjunto de P .*

Se C for um conjunto de Ore à direita em R , então

$$C \subseteq \cap \{C_R(Q) : Q \in r.cl(P)\}.$$

Se C for um conjunto de Ore à direita e à esquerda em R , então

$$C \subseteq \cap \{C_R(Q) : Q \in cl(P)\}.$$

Demonstração. Suponhamos que C é um conjunto de Ore à direita em R . Uma vez que P é um ideal primo disjunto de C , pela Proposição 2.3.12, $C \subseteq C_R(P)$.

Seja $Q \in r.cl(P)$; então existe um número natural n tal que

$$Q = Q_1 \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow Q_n = P.$$

Se $n = 1$, está provado que $C \subseteq C_R(Q)$.

Se $n > 1$, como $Q_{n-1} \rightsquigarrow P$, pela Proposição 3.4.1, concluimos que $C \subseteq C_R(Q_{n-1})$. Repetindo o processo n vezes, concluimos que $C \subseteq C_R(Q)$. Consequentemente,

$$C \subseteq \cap \{C_R(Q) : Q \in r.cl(P)\}.$$

Suponhamos, agora, que C é um conjunto de Ore à direita e à esquerda em R . Tal como antes, tem-se $C \subseteq C_R(P)$.

Se $Q \in cl(P)$, então existe um número natural n tal que $Q = Q_1 \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow Q_n = P$, onde o símbolo $A \rightsquigarrow B$ representa que existe uma ligação do tipo $A \rightsquigarrow B$ ou uma ligação do tipo $B \rightsquigarrow A$.

Se $n = 1$, está provado que $C \subseteq C_R(Q)$.

Se $n > 1$, então, se $Q_{n-1} \rightsquigarrow P$, como anteriormente, concluímos que $C \subseteq C_R(Q_{n-1})$ e, se $P \rightsquigarrow Q_{n-1}$, então, como C é um conjunto de Ore à esquerda em R , concluímos, pela Proposição 3.4.1, que $C \subseteq C_R(Q_{n-1})$. Repetindo o processo n vezes, concluímos que $C \subseteq C_R(Q)$. Consequentemente,

$$C \subseteq \cap \{C_R(Q) : Q \in cl(P)\}.$$

■

Tendo em conta o Corolário anterior, interessa agora determinar em que circunstâncias é que, dado um ideal primo P de um anel Noetheriano R , o conjunto

$$C = \cap \{C_R(Q) : Q \in r.cl(P)\}$$

é um conjunto de Ore à direita em R . Começamos por introduzir algumas definições e resultados preliminares.

Definição 3.4.3 *Sejam R um anel e $X \subseteq \text{Spec}(R)$. Dizemos que X satisfaz a condição de incomparabilidade se não existirem ideais primos P e Q pertencentes a X tais que $P \subsetneq Q$.*

Definição 3.4.4 *Sejam R um anel e $X \subseteq \text{Spec}(R)$. Dizemos que X satisfaz a condição de intersecção à direita se, para todo o ideal direito I tal que $I \cap C_R(P) \neq \emptyset$, para todo $P \in X$, se tem $I \cap (\cap_{P \in X} C_R(P)) \neq \emptyset$. De forma análoga, definimos condição de intersecção à esquerda. Dizemos que X satisfaz a condição de intersecção se X satisfizer a condição de intersecção à direita e à esquerda.*

Lema 3.4.5 *Sejam R um anel e X um subconjunto de $\text{Spec}(R)$ que satisfaz a condição de intersecção à direita. Seja M um R -módulo que possui um elemento m que satisfaz a condição “para todo $P \in X$, existe $c_P \in C_R(P)$ tal que $mc_P = 0$ ”. Então, existe $c \in \cap_{P \in X} C_R(P)$ tal que $mc = 0$.*

Demonstração. Por definição de m , $rann_R(m) \cap C_R(P) \neq \emptyset$, para todo $P \in X$. Uma vez que X satisfaz a condição de intersecção à direita,

$$rann_R(m) \cap (\cap_{P \in X} C_R(P)) \neq \emptyset.$$

Consequentemente, existe $c \in (\cap_{P \in X} C_R(P))$ tal que $mc = 0$. ■

Lema 3.4.6 *Sejam R um anel Noetheriano e X um subconjunto de $\text{Spec}(R)$ fechado para ligações à direita que satisfaz a condição de intersecção à direita e tal que todos os elementos de X satisfazem a condição na segunda camada à direita. Sejam $C = \cap_{P \in X} C_R(P)$ e M um R -módulo finitamente gerado uniforme tal que:*

- 1) *existe $m \in M$ tal que $mc \neq 0$, para todo $c \in C$;*
- 2) *para todo o R -submódulo não nulo N de M , para todo $m \in M$, existe $c \in C$ tal que $mc \in N$.*

Então, existe $P \in X$ tal que:

- a) $MP = 0$,
- b) M é um R/P -módulo livre de torção.

Demonstração. Sejam R , C , X e M nas condições enunciadas.

Como X satisfaz a condição de intersecção à direita e existe $x \in M$ tal que $xc \neq 0$, para todo $c \in C$, pelo Lema 3.4.5, existe $P \in X$ tal que x não é anulado por elementos de $C_R(P)$.

Seja $L = \{m \in M : mP = 0\}$. Mostraremos que $L = M$.

O ideal $(\text{rann}_R(x) + P)/P$ não é um ideal direito essencial de $\bar{R} = R/P$, pois, caso contrário, pelo Teorema de Goldie, $(\text{rann}_R(x) + P)/P$ conteria um elemento regular de R/P , o que nos leva a concluir que $\text{rann}_R(x) \cap C_R(P) \neq \emptyset$. Consequentemente, existiria $c \in C_R(P)$ tal que $xc = 0$, o que é absurdo.

Suponhamos, agora, que $R/(\text{rann}_R(x) + P)$ é um R/P -módulo de torção. Então, como R/P é um R/P -módulo livre de torção e

$$\frac{R/P}{(\text{rann}_R(x) + P)/P} \simeq R/(\text{rann}_R(x) + P),$$

pela Proposição 2.2.20,

$$(\text{rann}_R(x) + P)/P \leq_e R/P,$$

o que é absurdo. Provamos, assim, que $R/(\text{rann}_R(x) + P)$ não é um R/P -módulo de torção. Consequentemente, $R/(\text{rann}_R(x) + P)$ contém um elemento que não é anulado por elementos de $C_R(P)$.

Consideremos

$$\begin{aligned} \phi: \quad xR &\rightarrow R/(\text{rann}_R(x) + P) \\ \quad xr &\rightarrow r + (\text{rann}_R(x) + P) \end{aligned} .$$

Assim definida, ϕ é um R -epimorfismo. Uma vez que $r + (\text{rann}_R(x) + P) = 0$ implica que $r = r' + r''$, para alguns $r' \in \text{rann}_R(x)$ e $r'' \in P$, $xr = xr''$ e $xr \in xP$, concluindo-se, assim, que $\text{Ker}(\phi) = xP$. Logo,

$$xR/xP \simeq R/(\text{rann}_R(x) + P).$$

Assim, xR/xP contém um elemento que não é anulado por elementos de $C_R(P)$. Logo, M/xP contém um elemento que não é anulado por elementos de $C_R(P)$. Como $C \subseteq C_R(P)$, concluímos que M/xP contém um elemento que não é anulado por elementos de C . Uma vez que, por hipótese, para todo o R -submódulo não nulo N de M e para todo $m \in M$, existe $c \in C$ tal que $mc \in N$, então, $xP = 0$. Consequentemente, $x \in L$ e $L \neq 0$.

Por outro lado, como L é um R -submódulo de M , concluímos que L é um R -módulo uniforme e, pelo facto de L ser um R/P -módulo, L é um R/P -módulo uniforme. Aplicando a Proposição 2.2.25, concluímos que L é um R/P -módulo livre de torção ou é um R/P -módulo de torção. Ora, como L contém um elemento que não é anulado por elementos de $C_R(P)$, L é necessariamente um R/P -módulo livre de torção. Pelo Lema 2.2.26, L é um R/P -módulo totalmente fiel, consequentemente,

$$\{P\} = \text{Ass}(L) \subseteq \text{Ass}(M).$$

Uma vez que M é um R -módulo uniforme, pelo Lema 1.9.4, $\{P\} = \text{Ass}(L) = \text{Ass}(M)$.

Com vista a um absurdo, suponhamos que $L \neq M$.

Uma vez que R é um anel Noetheriano e M é um R -módulo finitamente gerado, M é um R -módulo Noetheriano, logo, pela Proposição 1.3.2, existe uma série filiada

$$0 \subsetneq U_1 \subsetneq \dots \subsetneq U_n = M.$$

Como $\text{Ass}(M) = \{P\}$ e, por definição, $L = \text{ann}_M(P)$, então, $U_1 = L$. Consideremos $M' = U_2$. Como $L \leq_e M'$ (porque M é uniforme) e $0 \subsetneq L \subsetneq M'$ é uma série filiada de M' com primos filiados correspondentes P e Q , podemos aplicar o Lema Principal de Jategaonkar. Como L é um R/P -módulo à direita livre de torção e, por hipótese, P satisfaz a condição na segunda camada à direita, $Q \rightsquigarrow P$. Pelo Lema Principal de Jategaonkar temos ainda que M''/L é um R/Q -módulo à direita livre de torção, onde M'' é um R -submódulo de M' que contém propriamente L e é tal que o ideal $A = \text{rann}_R(M'')$ é maximal entre os anuladores de R -submódulos de M' que contêm propriamente L .

Uma vez que $Q \rightsquigarrow P$, concluímos, pelo facto de X ser fechado para ligações à direita, que $Q \in X$, logo, $C \subseteq C_R(Q)$, de onde resulta que M''/L contém pelo menos um elemento que não é anulado por elementos de C . Como $M''/L \leq M/L$, então M/L contém pelo menos um elemento que não é anulado por elementos de C , o que, por definição de M , contraria o facto de $L \neq 0$. Tal contradição resulta de termos suposto $L \neq M$. Concluímos, assim, que $L = M$. Consequentemente, $MP = 0$ e M é um R/P -módulo livre de torção. ■

No resultado seguinte apresentamos condições suficientes para que, dado um ideal primo P de um anel Noetheriano R ,

$$C = \bigcap_{Q \in r.cl(P)} C_R(Q)$$

seja um conjunto de Ore à direita em R .

Proposição 3.4.7 *Sejam R um anel Noetheriano e $X \subseteq \text{Spec}(R)$ tal que X é fechado para ligações à direita, X satisfaz a condição de intersecção à direita e todos os elementos de X satisfazem a condição na segunda camada à direita. Então, $C = \bigcap_{P \in X} C_R(P)$ é um conjunto de Ore à direita em R .*

Demonstração. Suponhamos, com vista a um absurdo, que, dados R e X nas condições da proposição, $C = \bigcap_{P \in X} C_R(P)$ não é um conjunto de Ore à direita em R . Assim, existem $r \in R$ e $c^* \in C$ tais que $c^*R \cap rC = \emptyset$, consequentemente, o elemento $r + c^*R$ do R -módulo à direita $R' = R/c^*R$ não é anulado por elementos de C .

Consideremos $T = \{J : J \text{ é um } R\text{-submódulo de } R' \text{ para o qual se verifica que existe um elemento } z \text{ de } R'/J \text{ tal que } z \text{ não é anulado por elementos de } C\}$. Uma vez que $0 \in T$, $T \neq \emptyset$. Como R' é um R -módulo Noetheriano, podemos tomar J maximal em T . Em particular, $K = R'/J$ possui um elemento y tal que y não é anulado por elementos de C .

No entanto, se considerarmos um R -submódulo não nulo de $K - K'$, então $K' = I/J$, para algum R -submódulo I de R' tal que $J \subsetneq I$. Assim, por construção de J , se x é um elemento de K/K' , como $K/K' \simeq R'/I$, existe $c' \in C$ tal que $xc' = 0$. Assim, para todo $m \in K$, existe $c \in C$ tal que $mc \in K'$.

Seguidamente provaremos que K é um R -módulo uniforme. Para tal, suponhamos, com vista a um absurdo, que $K = R'/J$ não é uniforme; então existem R -submódulos A, B de R' tais que $J \subsetneq A$, $J \subsetneq B$ e $A \cap B = J$. Assim,

$$B/J = B/(A \cap B) \simeq (B + A)/A.$$

Como todos os elementos de R'/A são anulados por algum elemento de C , concluímos que todos os elementos de B/J são anulados por algum elemento de C .

Consideremos, agora, $z \in R' \setminus J$ tal que $z + J$ não é anulado por elementos de C . Uma vez que $J \subsetneq B$, existe $c \in C$ tal que $zc \in B$. Como todos os elementos de B/J são anulados por algum elemento de C , concluímos que existe $c' \in C$ tal que $z(cc') \in J$, o que é absurdo uma vez que $cc' \in C$. O absurdo resultou de supormos que K não é um R -módulo uniforme, provando-se, assim, que K é um R -módulo uniforme.

Observe-se que R é um anel Noetheriano, X é um subconjunto de $\text{Spec}(R)$ fechado para ligações à direita tal que X satisfaz a condição de intersecção à direita e todos os elementos de X satisfazem a condição na segunda camada à direita e K é um R -módulo finitamente gerado, uniforme que satisfaz as condições “existe $m \in K$ tal que $mc \neq 0$, para todo $c \in C$ ” e “para todo o R -submódulo não nulo N de K e para todo $m \in K$, existe $c \in C$ tal que $mc \in N$ ”. Estão, pois, reunidas as condições necessárias para aplicar o Lema 3.4.6 e afirmar que existe $P \in X$ tal que $KP = 0$ e K é um R/P -módulo livre de torção. Uma vez que

$C \subseteq C_R(P)$, concluímos que, para todo $m \in K$ e $c \in C$ tal que $mc = 0$, então $m = 0$.

Por outro lado, $y = (1 + c^*R) + J$ é um elemento não nulo de K que é anulado por c^* - o que é absurdo. O absurdo resultou de termos suposto que C não é um conjunto de Ore à direita em R , provando-se, assim, o desejado. ■

O desenvolvimento da Teoria da Localização para anéis Noetherianos não comutativos feito até ao momento, neste trabalho, teve como ponto de partida o que acontecia para anéis comutativos. Se voltarmos ao caso dos anéis comutativos e considerarmos um anel comutativo R e um ideal primo P de R , não só P é um ideal localizável de R como R_P tem uma propriedade importante - o anel R_P é local. Começemos por verificar que P^e é um ideal próprio de R_P . Se $11^{-1} \in P^e$, então $1 = pc^{-1}$, para alguns $p \in P$, $c \in C_R(P)$, o que nos leva a concluir que P contém um elemento de $R \setminus P$ - o que é absurdo. Está, pois, provado que P^e é um ideal próprio de R_P . Por outro lado, suponhamos que I é um ideal próprio de R_P e i é um elemento de I tal que $i = ab^{-1}$, para alguns $a, b \in R \setminus P$. Como R é um anel comutativo, $C_R(P) = R \setminus P$, logo, $a1^{-1}$ e b^{-1} são unidades de R_P , o que nos leva a concluir que i é uma unidade de R_P . Consequentemente, $I = R_P$ - o que é absurdo, uma vez que I é um ideal próprio de R_P . Concluímos, assim, que todos os elementos de I são da forma ab^{-1} , para alguns $a \in P$ e $b \in C_R(P)$, logo, $I \subseteq P^e$. Consequentemente, P^e é o único ideal maximal de R_P , R_P é anel local e $J(R_P) = P^e$. Como P^e é ideal maximal de R_P , concluímos que R_P/P^e é anel simples e, uma vez que R_P é anel comutativo, R_P/P^e é anel Artiniano.

No caso não comutativo, dados um anel Noetheriano à direita R e P um ideal primo localizável à direita de R , temos ainda que o anel R_P é local e R_P/P^e é anel Artiniano.

Proposição 3.4.8 *Seja P um ideal primo localizável à direita de um anel Noetheriano à direita R ; então R_P/P^e é um anel semisimples e $P^e = J(R_P)$. Em particular, o anel R_P é local e o único ideal primitivo à direita de R_P é P^e .*

Demonstração. Sejam R um anel Noetheriano à direita e P um ideal primo de R localizável à direita. O anel $\overline{R} = R/P$ é um anel primo Noetheriano à direita, logo, pelo Teorema de Goldie, $\overline{RC}^{-1}$ é um anel semisimples, onde $\overline{C} = C_{\overline{R}}(0)$.

Uma vez que P é um ideal primo localizável à direita de R , $C_R(P)$ é um conjunto de denominadores à direita em R . Pela Proposição 2.3.12,

$$RC_R(P)^{-1}/P^e \simeq \overline{RC}^{-1}$$

ou, abreviadamente, $R_P/P^e \simeq \overline{RC}^{-1}$. Assim, R_P/P^e é anel semisimples, logo, pelo Teorema de Wedderburn, Artin, $J(R_P/P^e) = 0$, o que nos leva a concluir que $J(R_P) \subseteq P^e$. Para mostrarmos a inclusão contrária bastar-nos-á provar que, para todo o ideal direito maximal I de R_P , $P^e \subseteq I$.

Seja I um ideal direito maximal de R_P . Observe-se que $I^c \cap C_R(P) = \emptyset$, pois, caso contrário, teríamos $11^{-1} \in I$, o que contraria o facto de I ser ideal direito maximal de R_P . Portanto, $R/(I^c + P)$ não é um R/P -módulo à direita de torção já que, caso contrário, $1 + (I^c + P)$ seria um elemento de $C_R(P)$ -torção; logo, $(I^c + P) \cap C_R(P) \neq \emptyset$, o que contraria o facto de $I^c \cap C_R(P) = \emptyset$.

Seja $K/(I^c + P)$ o R/P -submódulo de torção de $R/(I^c + P)$. Como $R/(I^c + P)$ não é um R/P -módulo à direita de torção, $K \neq R$.

Pela Proposição 2.2.21,

$$\frac{R/(I^c + P)}{K/(I^c + P)} \simeq R/K$$

é um R/P -módulo à direita livre de torção. Uma vez que R/K é um R -módulo livre de $C_R(P)$ -torção, pela Proposição 2.3.8, concluímos que $K^{ec} = K$, logo, $K^e \neq R_P$. Uma vez que $I^c \subseteq K$, $I = I^{ce} \subseteq K^e$, o que, pelo facto de I ser um ideal direito maximal de R_P , implica $I = K^e$. Logo, como $P \subseteq K$, $P^e \subseteq I$ e $J(R_P) = P^e$.

Por outro lado, como $P \cap C_R(P) = \emptyset$, pelo Teorema 2.3.14, P^e é um ideal primo de R_P , logo, R_P/P^e é anel primo Artiniano; consequentemente, pelo Corolário 1.7.3, é anel simples. Portanto, P^e é ideal maximal de R_P e é primitivo à direita. Seja J um ideal primitivo à direita de R_P . Então, $P^e = J(R_P) \subseteq J$. Como P^e é ideal maximal de R_P , $J = P^e$, o que nos leva a concluir que P^e é o único ideal primitivo à direita de R_P . Em particular, P^e é o único ideal maximal de R_P , logo, R_P é anel local. ■

No caso dos anéis Noetherianos comutativos existe mais uma propriedade que interessa mencionar: dados um anel Noetheriano comutativo R e $P \in \text{Spec}(R)$, todo o R_P -módulo finitamente gerado M que é extensão essencial de um R_P -módulo simples é Artiniano. Em seguida demonstraremos tal propriedade.

Lema 3.4.9 *Sejam R um anel Noetheriano comutativo, P um ideal primo de R , Y um R_P -módulo finitamente gerado que é extensão essencial de um R_P -módulo simples S ; então Y é um R_P -módulo Artiniano.*

Demonstração. Vimos já que P^e é o único ideal maximal de R_P e, logo, R_P/P^e é anel Artiniano.

Uma vez que num anel comutativo todos os ideais primitivos são maximais, P^e é o único ideal primitivo de R_P . Consequentemente, $P^e = \text{rann}_{R_P}(S)$.

Em seguida demonstraremos que existe um número natural n tal que $Y(P^e)^n = 0$. Para tal, observe-se que, como R é anel Noetheriano, R_P é também anel Noetheriano. Uma vez que Y é um R_P -módulo finitamente gerado, Y é um R_P -módulo Noetheriano, pelo que existe um número natural n tal que

$$\text{ann}_Y((P^e)^n) = \text{ann}_Y((P^e)^{n+1}).$$

Com vista a um absurdo, suponhamos que $Y(P^e)^n \neq 0$. Então, existe $y \in Y$ tal que $y(P^e)^n \neq 0$. Uma vez que R_P é anel Noetheriano, $(P^e)^n$ é um R_P -módulo finitamente gerado. Designemos por $p_1, \dots, p_k$ os geradores de $(P^e)^n$ tais que $yp_i \neq 0$, para todo $i \in \{1, \dots, k\}$. Como $S \leq_e Y$, existe $r_1 \in R_P$ tal que $yp_1r_1 \neq 0$ e $yp_1r_1 \in S$. Seja i o menor dos elementos de $\{1, \dots, k\}$ tal que $yp_ir_1 \neq 0$; então existe $r_2 \in R_P$ tal que $yp_ir_1r_2 \neq 0$ e $yp_ir_1r_2 \in S$. Repetindo o processo (no máximo k vezes), determinamos $r = r_1 \dots r_j$ tal que $y(P^e)^nr \neq 0$ e $y(P^e)^nr \subseteq S$. Ora, se $y(P^e)^nr \subseteq S$ então

$$yr(P^e)^{n+1} \subseteq SP^e.$$

Uma vez que $\text{rann}_{R_P}(S) = P^e$, concluímos que $yr \in \text{ann}_Y((P^e)^{n+1})$. Por outro lado, como $y(P^e)^nr \neq 0$, $yr \notin \text{ann}_Y((P^e)^n)$, o que é absurdo, uma vez que

$$\text{ann}_Y((P^e)^n) = \text{ann}_Y((P^e)^{n+1}).$$

O absurdo resultou de supormos $Y(P^e)^n \neq 0$, logo, $Y(P^e)^n = 0$.

Com o intuito de provarmos que Y é um R_P -módulo Artiniano, consideremos o R_P/P^e -módulo $Y(P^e)^{n-1}$. Como Y é um R_P -módulo Noetheriano, $Y(P^e)^{n-1}$ é um R_P -módulo finitamente gerado, logo, $Y(P^e)^{n-1}$ é um R_P/P^e -módulo finitamente gerado. Ora, como R_P/P^e é anel Artiniano, $Y(P^e)^{n-1}$ é um R_P/P^e -módulo Artiniano. Consequentemente, $Y(P^e)^{n-1}$ é um R_P -módulo Artiniano. Por outro lado, como Y é um R_P -módulo Noetheriano, $Y(P^e)^{n-2}$ é um R_P -módulo finitamente gerado, consequentemente,

$$Z = \frac{Y(P^e)^{n-2}}{Y(P^e)^{n-1}}$$

é um R_P/P^e -módulo finitamente gerado. Uma vez que R_P/P^e é anel Artiniano, Z é um R_P/P^e -módulo Artiniano, logo, Z é um R_P -módulo Artiniano. Uma vez que Z e $Y(P^e)^{n-1}$ são R_P -módulos Artinianos, $Y(P^e)^{n-2}$ é um R_P -módulo Artiniano. Repetindo o processo n vezes, concluímos que Y é um R_P -módulo Artiniano, como desejávamos provar. ■

No caso dos anéis Noetherianos não comutativos a propriedade acima descrita origina a seguinte definição:

Definição 3.4.10 *Um ideal primo P de um anel Noetheriano R é **classicamente localizável à direita** se P é localizável à direita e se todo o R_P -módulo à direita finitamente gerado M que é extensão essencial de um R_P -módulo à direita simples é Artiniano. De forma análoga, definimos ideal primo **classicamente localizável à esquerda**. Um ideal primo P num anel Noetheriano R é **classicamente localizável** se for classicamente localizável à direita e à esquerda.*

É uma questão ainda em aberto saber se a localização à direita implica a localização clássica à direita para um ideal primo num anel Noetheriano.

Seguidamente introduzimos a definição de subconjunto de $\text{Spec}(R)$ localizável à direita de um anel Noetheriano R . Mas, antes de a introduzirmos, recordemos que na Proposição 3.4.8 foram descritas propriedades que são verificadas pelo ideal primo P^e de R_P , onde P é um ideal primo localizável à direita de um anel Noetheriano à direita R . Em particular, observamos que R_P/P^e é anel Artiniano e P^e é o único ideal primitivo à direita de R_P . Assim, na sequência do que foi observado, interessar-nos-á que, na definição de subconjunto de $\text{Spec}(R)$ localizável à direita, se imponham condições que nos garantam que se verificam propriedades análogas às enunciadas.

Definição 3.4.11 *Sejam R um anel Noetheriano e $X \subseteq \text{Spec}(R)$. Dizemos que X é **localizável à direita** se*

$$C(X) = \cap_{P \in X} C_R(P)$$

for um conjunto de Ore à direita em R e o anel de frações $R_X = RC(X)^{-1}$ gozar das seguintes propriedades:

- a) Para todo $P \in X$, o anel R_X/P^e é Artiniano.*
- b) Os únicos ideais primitivos à direita de R_X são os ideais da forma P^e , com $P \in X$.*

Por analogia com a definição de ideal primo classicamente localizável à direita, afirmamos que:

Definição 3.4.12 *Seja R um anel Noetheriano. Um subconjunto X de $\text{Spec}(R)$ é **classicamente localizável à direita** se X for localizável à direita e todo o $RC(X)^{-1}$ -módulo à direita finitamente gerado que é uma extensão essencial de um $RC(X)^{-1}$ -módulo à direita simples for Artiniano, onde $C(X) = \cap_{P \in X} C_R(P)$. De forma análoga, definimos subconjunto de $\text{Spec}(R)$ **classicamente localizável à esquerda**. Um subconjunto X de $\text{Spec}(R)$ é **classicamente localizável** se X for classicamente localizável à direita e à esquerda.*

Após a introdução da definição de subconjunto de $\text{Spec}(R)$ classicamente localizável à direita de um anel Noetheriano R , deduziremos, em seguida, condições necessárias e suficientes para um clique de R ser classicamente localizável à direita.

Teorema 3.4.13 [Jategaonkar] *Sejam R um anel Noetheriano e $X \subseteq \text{Spec}(R)$; então X é classicamente localizável à direita se e só se X satisfaz as seguintes condições:*

- a) X é fechado para ligações à direita,*
- b) todos os elementos de X satisfazem a condição na segunda camada à direita,*
- c) X satisfaz a condição de intersecção à direita,*
- d) X satisfaz a condição de incomparabilidade.*

Demonstração. Sejam R um anel Noetheriano e $X \subseteq \text{Spec}(R)$ tal que X satisfaz as condições a), b), c) e d).

Uma vez que X satisfaz as condições a), b) e c), pela Proposição 3.4.7, $C = \cap_{P \in X} C_R(P)$ é um conjunto de Ore à direita em R . Assim, existe anel de fracções à direita de R com respeito a $C - RC^{-1}$.

Consideremos $P \in X$ e um ideal direito I de R tal que $P \subsetneq I$ e $I/P \leq_e R/P$. Então, pela Proposição 2.2.20,

$$\frac{R/P}{I/P} \simeq R/I$$

é um R/P -módulo de torção. Assim, para todo $r \in R$, $I \cap rC_R(P) \neq \emptyset$. Em particular, $I \cap C_R(P) \neq \emptyset$.

Seja $Q \in X \setminus \{P\}$. Uma vez que X satisfaz a condição de incomparabilidade, $P \not\subseteq Q$, logo, $(Q + P)/Q$ é um ideal não nulo de R/Q . Uma vez que R/Q é um anel primo, pela Proposição 1.5.7, $(Q + P)/Q$ é um ideal direito essencial de R/Q . Pelo Teorema de Goldie,

$$((Q + P)/Q) \cap C_{R/Q}(0) \neq \emptyset,$$

logo, $P \cap C_R(Q) \neq \emptyset$. Como $P \subsetneq I$, então, $I \cap C_R(Q) \neq \emptyset$. Uma vez que $I \cap C_R(Q) \neq \emptyset$, para todo $Q \in X$, e X satisfaz a condição de intersecção à direita, $I \cap C \neq \emptyset$. Está, pois, provado que todo o ideal direito essencial de R/P intersecta não trivialmente $\overline{C} = \{c + P : c \in C\}$.

Observe-se que, como C é um conjunto de denominadores à direita em R e $C \cap P = \emptyset$, pela Proposição 2.3.11, $\overline{C}$ é um conjunto de denominadores à direita em $\overline{R} = R/P$.

Ora, como $\overline{C}$ é um conjunto de denominadores à direita em $\overline{R}$, $\overline{C} \subseteq C_{\overline{R}}(0)$ e todo o ideal direito essencial de $\overline{R}$ intersecta $\overline{C}$ não trivialmente, podemos aplicar o Corolário 2.2.13 e afirmar que

$$\overline{RC}^{-1} \simeq \overline{RC}_{\overline{R}}(0)^{-1}.$$

Uma vez que $\overline{R}$ é um anel primo Noetheriano à direita, pelo Teorema de Goldie, $\overline{RC}_{\overline{R}}(0)^{-1}$ é anel semisimples, logo, $\overline{RC}^{-1}$ é anel Artiniano.

Por outro lado, pela Proposição 2.3.12,

$$\overline{RC}^{-1} \simeq RC^{-1}/P^e,$$

o que nos leva a concluir que RC^{-1}/P^e é anel Artiniano. Concluimos, assim, que é válida a condição a) da Definição 3.4.11. Por outro lado, pelo Teorema 2.3.14, P^e é um ideal primo de RC^{-1} , logo, RC^{-1}/P^e é anel primo Artiniano. Consequentemente, pelo Corolário 1.7.3, RC^{-1}/P^e é anel simples. Uma vez que RC^{-1}/P^e é anel simples, P^e é ideal maximal de RC^{-1} , o que nos leva a concluir

que P^e é ideal primitivo à direita. Provamos assim que Q^e é um ideal primitivo à direita de RC^{-1} , para todo $Q \in X$.

Pretendemos, agora, mostrar que os únicos ideais primitivos à direita de RC^{-1} são da forma Q^e , para algum $Q \in X$.

Seja N um RC^{-1} -módulo simples; logo $N = nRC^{-1}$, onde n é um elemento não nulo de N . Consideremos em N a estrutura natural de R -módulo à direita. Com esta estrutura definida em N , N é um R -módulo livre de C -torção e o RC^{-1} -módulo N é o R -módulo de fracções de N com respeito a C .

Seja $N_1 = nR$; então N_1 é um R -módulo finitamente gerado e $(N_1)^e = N$. O R -módulo N_1 é um R -módulo livre de C -torção, uma vez que N é um R -módulo livre de C -torção.

Provaremos em seguida que N_1 é um R -módulo uniforme. Para tal, consideremos dois R -submódulos de N_1 - N' , N'' tais que $N' \cap N'' = 0$. Suponhamos, com vista a um absurdo, que $N' \neq 0$ e $N'' \neq 0$. Uma vez que N_1 é um R -módulo livre de C -torção, $(N')^e \neq 0$ e $(N'')^e \neq 0$. Como N é um RC^{-1} -módulo simples, $(N')^e = (N'')^e = N$. Seja $n' \in N_1 \setminus \{0\}$. Pela Proposição 2.1.14, existem $n_1 \in N'$, $n_2 \in N''$ e $c \in C$ tais que $n' = n_1 c^{-1} = n_2 c^{-1}$, logo, $n'c = n_1 = n_2$. Ora, como $0 \neq n'c$, $N' \cap N'' \neq 0$, o que é absurdo. O absurdo resultou de supormos que existem R -submódulos não nulos de N_1 - N' , N'' tais que $N' \cap N'' = 0$, logo, N_1 é um R -módulo uniforme.

Seja, agora, N' um R -submódulo não nulo de N_1 . Como N_1 é um R -módulo livre de C -torção, $(N')^e \neq 0$. Ora, como N é um RC^{-1} -módulo simples, $N = (N')^e$. Assim, se considerarmos $n' \in N_1$, existem $n^* \in N'$ e $c \in C$ tais que $n^* c^{-1} = n'$, logo, $n^* = n'c$. Provamos, assim, que para todo o R -submódulo não nulo N' de N_1 , para todo $n' \in N_1$, existe $c \in C$ tal que $n'c \in N'$. Ora, como N_1 é um R -módulo finitamente gerado, uniforme e livre de C -torção, podemos aplicar o Lema 3.4.6 e afirmar que existe $P \in X$ tal que $N_1 P = 0$ e N_1 é um R/P -módulo livre de torção. Consequentemente, $P = \text{rann}_R(N_1)$ e $P^e \subseteq \text{rann}_{RC^{-1}}(N)$. Uma vez que foi já provado que P^e é um ideal maximal de RC^{-1} , temos que $P^e = \text{rann}_{RC^{-1}}(N)$. Concluímos, assim, que os únicos ideais primitivos à direita de RC^{-1} são os ideais da forma P^e , com $P \in X$. Está, pois, demonstrado que X é localizável à direita.

Com vista a mostrar que X é classicamente localizável à direita, consideremos um RC^{-1} -módulo finitamente gerado M que é uma extensão essencial de um RC^{-1} -módulo simples N . Pretendemos mostrar que M é um RC^{-1} -módulo Artiniano.

Como M é um RC^{-1} -módulo finitamente gerado,

$$M = m_1 RC^{-1} + \dots + m_n RC^{-1},$$

para alguns $m_1, \dots, m_n \in M$. Uma vez que N é um RC^{-1} -módulo simples, $N = nRC^{-1}$, para algum $n \in N$. Podemos supor que $n \in \{m_1, \dots, m_n\}$. Consideremos em M e em N a estrutura natural de R -módulo à direita. Deste modo, os

RC^{-1} -módulos à direita M e N são R -módulos de fracções, respectivamente, dos R -módulos M e N com respeito a C .

Sejam $M' = m_1R + \dots + m_nR$ e $N' = nR$. Logo, M' , N' são R -módulos finitamente gerados tais que $M = (M')^e$ e $N = (N')^e$. Tal como anteriormente, verificamos que N' e M' são R -módulos livres de C -torção e N' é um R -módulo uniforme. Observe-se, ainda, que $(N')_R \leq (M')_R$.

Provaremos em seguida que $N'_R \leq_e M'_R$. Seja $m \in M' \setminus \{0\}$; então, como $N_{RC^{-1}} \leq_e M_{RC^{-1}}$, existe $rx^{-1} \in RC^{-1}$ tal que

$$m(rx^{-1}) \in N \setminus \{0\},$$

logo $mr1^{-1} \in N \setminus \{0\}$. Uma vez que $(N')^e = N$, existem $n' \in N' \setminus \{0\}$, $c \in C$ tais que $mr1^{-1} = n'c^{-1}$, logo, $m(rc) = n'$. Consequentemente, existe $r' \in R$ tal que $mr' \in N' \setminus \{0\}$, o que nos leva a concluir que $N'_R \leq_e M'_R$. Uma vez que N' é um R -módulo uniforme e $N'_R \leq_e M'_R$, pelo Lema 1.9.2, M' é um R -módulo uniforme.

Tal como anteriormente, provamos que, para todo o R -submódulo não nulo K de N' e, para todo $m \in N'$, existe $c \in C$ tal que $mc \in K$. Uma vez que N' é um R -módulo uniforme, finitamente gerado, livre de C -torção, estão reunidas as condições necessárias para aplicar o Lema 3.4.6 e afirmar que existe $P \in X$ tal que $N'P = 0$ e N' é um R/P -módulo livre de torção.

Ora, como N' é um R/P -módulo livre de torção, pelo Lema 2.2.26, N' é um R/P -módulo totalmente fiel, logo,

$$\{P\} \subseteq \text{Ass}(N') \subseteq \text{Ass}(M').$$

Uma vez que M' é um R -módulo uniforme, pelo Lema 1.9.4, $\text{Ass}(M') = \{P\}$.

Por outro lado, como $N' \leq_e M'$, $(N')_{R/P} \leq_e (\text{ann}_{M'}(P))_{R/P}$, pela Proposição 2.2.20, $\text{ann}_{M'}(P)$ é um R/P -módulo livre de torção.

Uma vez que X é fechado para ligações à direita, $r.cl(P) \subseteq X$, logo, por hipótese, todos os ideais primos de $r.cl(P)$ satisfazem a condição na segunda camada à direita. Estão, pois, reunidas as condições necessárias para aplicar o Corolário 3.2.18 e afirmar que existem ideais primos $P_1, \dots, P_n \in r.cl(P)$ tais que $P = P_1$ e $M'P_n \dots P_1 = 0$. Portanto,

$$M(P_n)^e \dots (P_1)^e = 0,$$

onde $P_1, \dots, P_n \in r.cl(P)$. Como $r.cl(P) \subseteq X$, temos $M(P_n)^e \dots (P_1)^e = 0$, com $P_1, \dots, P_n \in X$.

Uma vez que M é um RC^{-1} -módulo finitamente gerado e, pela Proposição 2.3.11, RC^{-1} é anel Noetheriano à direita, M é um RC^{-1} -módulo Noetheriano. Consequentemente, $M(P_n)^e \dots (P_2)^e$ é um RC^{-1} -módulo Noetheriano, o que nos leva a concluir que $Z = M(P_n)^e \dots (P_2)^e$ é um $RC^{-1}/(P_1)^e$ -módulo finitamente gerado. Uma vez que $RC^{-1}/(P_1)^e$ é anel Artiniano, Z é um $RC^{-1}/(P_1)^e$ -módulo Artiniano. Em particular, Z é um RC^{-1} -módulo Artiniano.

Se considerarmos o RC^{-1} -módulo

$$M^* = \frac{M(P_n)^e \dots (P_3)^e}{M(P_n)^e \dots (P_2)^e},$$

então, como M^* é um RC^{-1} -módulo finitamente gerado, M^* é um $RC^{-1}/(P_2)^e$ -módulo finitamente gerado. Uma vez que $RC^{-1}/(P_2)^e$ é anel Artiniano, M^* é um $RC^{-1}/(P_2)^e$ -módulo Artiniano. Em particular, M^* é um RC^{-1} -módulo Artiniano. Como Z e M^* são RC^{-1} -módulos Artinianos, concluímos que $M(P_n)^e \dots (P_3)^e$ é um RC^{-1} -módulo Artiniano. Repetindo este raciocínio n vezes, concluímos que M é um RC^{-1} -módulo Artiniano. Demonstrámos, assim, que X é classicamente localizável à direita.

Reciprocamente, suponhamos que R é anel Noetheriano e X é um subconjunto de $\text{Spec}(R)$ classicamente localizável à direita.

Como X é localizável à direita, $C = \cap_{P \in X} C_R(P)$ é um conjunto de denominadores à direita em R , RC^{-1}/P^e é anel Artiniano, para todo $P \in X$, e os únicos ideais primitivos à direita de RC^{-1} são os ideais da forma P^e , para algum $P \in X$. Por outro lado, como X é classicamente localizável à direita, todo o RC^{-1} -módulo finitamente gerado que é extensão essencial de um RC^{-1} -módulo simples é Artiniano.

Começamos por provar que X satisfaz a condição de incomparabilidade.

Com vista a um absurdo, suponhamos que existem ideais primos Q, P pertencentes a X tais que $Q \subsetneq P$. Como $C = \cap_{P \in X} C_R(P)$, $C \subseteq C_R(Q)$ e $C \subseteq C_R(P)$, logo, $C \cap Q = \emptyset$ e $C \cap P = \emptyset$. Pelo Teorema 2.3.14, Q^e e P^e são ideais primos de RC^{-1} tais que $Q^e \subseteq P^e$. Se $Q^e = P^e$, então $Q^{ec} = P^{ec}$. Ora, como pela Proposição 2.3.12, $Q^{ec} = Q$ e $P^{ec} = P$, temos $Q = P$, o que é absurdo. Consequentemente, $Q^e \subsetneq P^e$ e P^e/Q^e é um ideal próprio não nulo de RC^{-1}/Q^e .

Por outro lado, como $Q \in X$, RC^{-1}/Q^e é anel Artiniano, logo, RC^{-1}/Q^e é anel Artiniano primo. Pelo Corolário 1.7.3, concluímos que RC^{-1}/Q^e é anel simples, o que é absurdo uma vez que P^e/Q^e é um ideal próprio não nulo de RC^{-1}/Q^e . O absurdo resultou de supormos que existe um par de ideais primos Q, P em X tal que $Q \subsetneq P$. Consequentemente, X satisfaz a condição de incomparabilidade.

Em seguida provaremos que todos os elementos de X satisfazem a condição na segunda camada à direita.

Com vista a um absurdo, suponhamos que existe $P \in X$ tal que P não satisfaz a condição na segunda camada à direita. Pela Proposição 3.2.7, existe um R -módulo M finitamente gerado uniforme, com série filiada $0 \subsetneq U \subsetneq M$ e primos filiados correspondentes P, Q tais que U é um R/P -módulo à direita livre de torção, M/U é uniforme, $Q \subsetneq P$ e $MQ = 0$.

Como P é ideal primo de R , C é um conjunto de denominadores à direita em R tal que $C \subseteq C_R(P)$ e M é um R -módulo uniforme tal que M contém um R -submódulo não nulo U tal que U é um R/P -módulo à direita livre de torção; então, pelo Lema 3.2.13, M é um R -módulo livre de C -torção.

Uma vez que M é um R -módulo uniforme livre de C -torção, pelo Lema 3.2.14, MC^{-1} é um RC^{-1} -módulo uniforme. Em particular, U^e é um RC^{-1} -módulo uniforme.

Como $P \cap C = \emptyset$, pelo Teorema 2.3.14, P^e é um ideal primo de RC^{-1} . Em particular, P^e é um ideal bilateral de RC^{-1} , logo, $U^e P^e = (UP)^e$. Ora, como $UP = 0$, então $U^e P^e = 0$, o que nos leva a concluir que U^e é um RC^{-1}/P^e -módulo à direita.

Ora, como $P \in X$, RC^{-1}/P^e é anel Artiniano. Uma vez que RC^{-1}/P^e é também anel primo, concluímos, pelo Corolário 1.7.3, que RC^{-1}/P^e é anel semisimples. Consequentemente, pelo Teorema 1.2.9, U^e é um RC^{-1}/P^e -módulo semisimples, o que nos leva a concluir que U^e é um RC^{-1} -módulo semisimples. Uma vez que U^e é um RC^{-1} -módulo semisimples e uniforme, pela Proposição 1.9.1, U^e é um RC^{-1} -módulo simples.

Uma vez que M é um R -módulo finitamente gerado, MC^{-1} é um RC^{-1} -módulo finitamente gerado. Ora, como MC^{-1} é um RC^{-1} -módulo finitamente gerado, MC^{-1} é uma extensão essencial de um RC^{-1} -módulo simples - U^e e X é um conjunto classicamente localizável à direita, MC^{-1} é um RC^{-1} -módulo Artiniano.

Observe-se ainda que, como MC^{-1} é um RC^{-1} -módulo finitamente gerado e RC^{-1} é anel Noetheriano à direita, MC^{-1} é um RC^{-1} -módulo Noetheriano.

Com vista a um absurdo, suponhamos que não existe um RC^{-1} -submódulo Y de MC^{-1} tal que MC^{-1}/Y seja simples. Então, se considerarmos um RC^{-1} -submódulo próprio Y_1 de MC^{-1} , existe um RC^{-1} -submódulo de $MC^{-1} - Y_1$ tal que $Y_1 \subsetneq Y_2 \subsetneq MC^{-1}$. Analogamente, existe um RC^{-1} -submódulo Y_3 de MC^{-1} tal que

$$Y_1 \subsetneq Y_2 \subsetneq Y_3 \subsetneq MC^{-1}.$$

Construímos, assim, uma cadeia propriamente ascendente e infinita de RC^{-1} -submódulos de MC^{-1} , o que é absurdo uma vez que MC^{-1} é um RC^{-1} -módulo Noetheriano. Provamos assim que existe um RC^{-1} -submódulo Y_1 de MC^{-1} tal que MC^{-1}/Y_1 é um RC^{-1} -módulo simples. Analogamente, se $Y_1 \neq 0$, concluímos que existe um RC^{-1} -submódulo Y_2 de MC^{-1} tal que Y_1/Y_2 é um RC^{-1} -módulo simples. Deste modo construímos uma cadeia propriamente descendente

$$\dots \subsetneq Y_2 \subsetneq Y_1 \subsetneq MC^{-1}$$

de RC^{-1} -submódulos de MC^{-1} . Como MC^{-1} é um RC^{-1} -módulo Artiniano, a cadeia é finita. Consequentemente, é possível construir uma cadeia finita de RC^{-1} -submódulos de MC^{-1}

$$0 = Y_n \subsetneq Y_{n-1} \subsetneq \dots \subsetneq Y_0 = MC^{-1}$$

tal que Y_j/Y_{j+1} é um RC^{-1} -módulo simples, para todo $j \in \{0, \dots, n-1\}$. Assim, $P_j = \text{rann}_{RC^{-1}}(Y_j/Y_{j+1})$ é um ideal primitivo à direita de RC^{-1} , para todo $j \in \{0, \dots, n-1\}$, e $(MC^{-1})P_0 \dots P_{n-1} = 0$.

Uma vez que X é localizável à direita e P_j é um ideal primitivo à direita de RC^{-1} , para todo $j \in \{0, \dots, n-1\}$, existem $Q_0, \dots, Q_{n-1} \in X$ tais que $P_j = Q_j^e$, para todo $j \in \{0, \dots, n-1\}$. Consequentemente, $(MQ_0 \dots Q_{n-1})^e = 0$. Uma vez que M é um R -módulo livre de C -torção, $MQ_0 \dots Q_{n-1} = 0$. Ora, como $\text{rann}_R(M/U) = Q$, $\text{rann}_R(M) \subseteq Q$. Consequentemente,

$$Q_0 \dots Q_{n-1} \subseteq Q$$

e, como Q é ideal primo de R , existe $i \in \{0, \dots, n-1\}$ tal que $Q_i \subseteq Q$. Logo, $Q_i \subseteq Q \subsetneq P$, o que é absurdo uma vez que $Q_i, P \in X$ e provámos já que X satisfaz a condição de incomparabilidade. O absurdo resultou de supormos que existia um ideal primo P de X que não satisfazia a condição na segunda camada à direita; logo, todos os elementos de X satisfazem a condição na segunda camada à direita.

Em seguida provaremos que X é fechado para ligações à direita.

Seja $P \in X$ e suponhamos que existe $Q \in \text{Spec}(R)$ tal que $Q \rightsquigarrow P$. Pelo Teorema 3.2.6, existe um R -módulo finitamente gerado e uniforme M com série filiada $0 \subsetneq U \subsetneq M$ e primos filiados correspondentes P, Q tais que U é um R/P -módulo livre de torção e M/U é isomorfo a um ideal direito uniforme de R/Q .

Como M é um R -módulo finitamente gerado, MC^{-1} é um RC^{-1} -módulo finitamente gerado.

Pelo Lema 3.2.13, M é um R -módulo livre de C -torção e, pelo Lema 3.2.14, MC^{-1} é um RC^{-1} -módulo uniforme.

Uma vez que $C \subseteq C_R(P)$, $P \cap C = \emptyset$, logo, pelo Teorema 2.3.14, P^e é um ideal primo de RC^{-1} e, em particular, é um ideal bilateral de RC^{-1} . Consequentemente, $U^e P^e = (UP)^e$. Ora, como $UP = 0$, temos que $U^e P^e = 0$, logo, U^e é um RC^{-1}/P^e -módulo à direita.

Por outro lado, como P^e é um ideal primo de RC^{-1} , RC^{-1}/P^e é anel primo. Uma vez que X é classicamente localizável à direita, temos também que RC^{-1}/P^e é anel Artiniano. Aplicando o Corolário 1.7.3, concluímos que RC^{-1}/P^e é anel semisimples. Uma vez que U^e é um RC^{-1}/P^e -módulo à direita, pelo Teorema 1.2.9, U^e é um RC^{-1}/P^e -módulo semisimples, logo, U^e é um RC^{-1} -módulo semisimples. Como MC^{-1} é um RC^{-1} -módulo uniforme, U^e é um RC^{-1} -módulo uniforme semisimples, logo, pela Proposição 1.9.1, U^e é um RC^{-1} -módulo simples.

Como $C \subseteq C_R(P)$, C é um conjunto de Ore à direita em R , R é anel Noetheriano e $Q \rightsquigarrow P$, então, pela Proposição 3.4.1, $C \subseteq C_R(Q)$. Logo, $C \cap Q = \emptyset$. Pelo Teorema 2.3.14, Q^e é um ideal primo de RC^{-1} .

Observemos agora que, como M/U é isomorfo a um ideal direito de R/Q , M/U é um R/Q -módulo livre de torção. Logo, como $C \subseteq C_R(Q)$, M/U é um R -módulo livre de C -torção. Consequentemente, pela Proposição 2.3.8, $U^{ec} = U$. Em particular, $MC^{-1} \neq U^e$.

Uma vez que MC^{-1} é um RC^{-1} -módulo uniforme, $U^e \leq_e MC^{-1}$. Assim, MC^{-1} é um RC^{-1} -módulo finitamente gerado que é uma extensão essencial de um RC^{-1} -módulo simples. Logo, como X é classicamente localizável à direita, MC^{-1} é um RC^{-1} -módulo Artiniano. Em particular, MC^{-1}/U^e é um RC^{-1} -módulo Artiniano. Consequentemente, MC^{-1}/U^e contém um RC^{-1} -submódulo simples - N .

Uma vez que $MQ \leq U$, $(MQ)^e \leq U^e$. Como Q^e é um ideal bilateral de RC^{-1} ,

$$(MC^{-1})Q^e = (MQ)^e \leq U^e.$$

Concluimos, assim, que MC^{-1}/U^e é um RC^{-1}/Q^e -módulo à direita.

Provaremos em seguida que MC^{-1}/U^e é um RC^{-1}/Q^e -módulo totalmente fiel. Consideremos um RC^{-1} -submódulo X de MC^{-1} tal que $U^e \not\subseteq X$. Uma vez que $Xrann_{RC^{-1}}(X/U^e) \leq U^e$, concluimos que

$$X^c(rann_{RC^{-1}}(X/U^e))^c \leq U^{ec}.$$

Como $U^{ec} = U$,

$$(rann_{RC^{-1}}(X/U^e))^c \subseteq rann_R(X^c/U).$$

Uma vez que M/U é um R/Q -módulo livre de torção, pelo Lema 2.2.26, M/U é um R/Q -módulo totalmente fiel, logo, $(rann_{RC^{-1}}(X/U^e))^c \subseteq Q$, o que nos leva a concluir que

$$rann_{RC^{-1}}(X/U^e) = rann_{RC^{-1}}(X/U^e)^{ce} \subseteq Q^e.$$

Está, pois, demonstrado que MC^{-1}/U^e é um RC^{-1}/Q^e -módulo totalmente fiel.

Como MC^{-1}/U^e é um RC^{-1}/Q^e -módulo totalmente fiel, em particular,

$$rann_{RC^{-1}}(N) = Q^e.$$

Consequentemente, Q^e é um ideal primitivo à direita de RC^{-1} .

Uma vez que os únicos ideais primitivos à direita de RC^{-1} são os ideais da forma T^e , para algum $T \in X$, concluimos que $Q^e = T^e$, para algum $T \in X$. Como $T \in X$, $T \cap C = \emptyset$, logo, pela Proposição 2.3.12, $T^{ec} = T$. Uma vez que já provámos $Q \cap C = \emptyset$, temos também que $Q^{ec} = Q$. Consequentemente, $Q = T$ e $Q \in X$. Concluimos, assim, que X é fechado para ligações à direita.

Para provarmos o teorema é ainda necessário provar que X satisfaz a condição de intersecção à direita. Com vista a um absurdo, suponhamos que existe um ideal direito K de R tal que $K \cap C_R(P) \neq \emptyset$, para todo $P \in X$, e $K \cap C = \emptyset$. Como R é anel Noetheriano, podemos escolher um ideal direito L maximal para a relação $L \cap C_R(P) \neq \emptyset$, para todo $P \in X$, e $L \cap C = \emptyset$.

Começamos por verificar que se J é um ideal direito tal que $L \subsetneq J$, então o R -módulo à direita R/J é de C -torção. Uma vez que $L \subsetneq J$, $J \cap C_R(P) \neq \emptyset$,

para todo $P \in X$ e, por escolha de L , $J \cap C \neq \emptyset$. Se $R = J$, R/J é um R -módulo de C -torção. Suponhamos que $R \neq J$. Como C é um conjunto de Ore à direita, dados $r \in R \setminus J$ e $c \in J \cap C$, existem $r' \in R$ e $c' \in C$ tais que $cr' = rc'$. Ora, como $c \in J$, $rc' \in J$, o que nos leva a concluir que $(r + J)c' = 0_{R/J}$. Consequentemente, R/J é um R -módulo de C -torção.

Em seguida provaremos que R/L é um R -módulo livre de C -torção. Para tal, suponhamos que $t_C(R/L) \neq 0$; então, $t_C(R/L) = J/L$, para algum ideal direito J tal que $L \subsetneq J$. Pelo que vimos no parágrafo anterior, temos que

$$\frac{R/L}{t_C(R/L)} \simeq \frac{R}{J}$$

é um R -módulo de C -torção. Consequentemente, existe $c \in C$ tal que

$$(1 + L)c \in t_C(R/L),$$

o que nos leva a concluir que existe $c' \in C$ tal que $(1 + L)cc' = 0_{R/L}$. Uma vez que $cc' \in C$, concluímos que $L \cap C \neq \emptyset$, o que é absurdo. O absurdo resultou de supormos $t_C(R/L) \neq 0$, logo, R/L é um R -módulo livre de C -torção.

Seja $M = R/L$. Com o intuito de provarmos que MC^{-1} é um RC^{-1} -módulo simples, consideremos um RC^{-1} -submódulo N de MC^{-1} . Tomemos o R -módulo N^c , logo, $N^c = J/L$, para algum ideal direito J tal que $L \subseteq J$. Se $L = J$, $N^c = 0$ e $N = N^{ce} = 0$. Se $L \subsetneq J$, então $J \cap C \neq \emptyset$, o que nos leva a concluir que $N^{ce} = MC^{-1}$, isto é, $N = MC^{-1}$. Provamos, assim, que MC^{-1} é um RC^{-1} -módulo simples.

Uma vez que MC^{-1} é um RC^{-1} módulo simples, $\text{rann}_{RC^{-1}}(MC^{-1})$ é um ideal primitivo à direita de RC^{-1} . Por hipótese, $\text{rann}_{RC^{-1}}(MC^{-1}) = P^e$, para algum $P \in X$. Consequentemente, $(MC^{-1})P^e = 0$, logo, $(MP)^e = 0$. Como M é um R -módulo livre de C -torção, $MP = 0$ e M é um R/P -módulo. Ora, como $P \in X$, $L \cap C_R(P) \neq \emptyset$, logo, M não é um R/P -módulo livre de torção.

Consideremos o (RC^{-1}/P^e) -módulo MC^{-1} e um elemento não nulo m de MC^{-1} . Seja ϕ o (RC^{-1}/P^e) -homomorfismo

$$\begin{array}{ccc} \phi: & RC^{-1}/P^e & \rightarrow MC^{-1} \\ & r & \rightarrow mr \end{array}.$$

Como MC^{-1} é um RC^{-1} -módulo simples, em particular, MC^{-1} é um (RC^{-1}/P^e) -módulo simples e ϕ é um RC^{-1}/P^e -epimorfismo. Consequentemente,

$$MC^{-1} \simeq \frac{RC^{-1}/P^e}{\text{Ker}(\phi)},$$

onde $\text{Ker}(\phi)$ é um ideal direito próprio de RC^{-1}/P^e .

Observemos agora que, por hipótese, RC^{-1}/P^e é anel Artiniano. Uma vez que $P \cap C = \emptyset$, pelo Teorema 2.3.14, P^e é ideal primo de RC^{-1} , logo, RC^{-1}/P^e é anel

Artiniano primo. Pelo Corolário 1.7.3, RC^{-1}/P^e é anel semisimples. Uma vez que RC^{-1}/P^e é anel semisimples, existe um ideal direito não nulo I de RC^{-1}/P^e tal que $RC^{-1}/P^e = I \oplus \text{Ker}(\phi)$, logo,

$$I \simeq \frac{RC^{-1}/P^e}{\text{Ker}(\phi)} \simeq MC^{-1}.$$

Em particular, MC^{-1} é um RC^{-1}/P^e -módulo livre de torção.

Por outro lado, como M não é um R/P -módulo livre de torção, existe $m \in M \setminus \{0\}$ e $c \in C_R(P)$ tal que $mc = 0$, logo,

$$(m1^{-1})(c1^{-1} + P^e) = 0.$$

Uma vez que MC^{-1} é um RC^{-1}/P^e -módulo livre de torção e, pelo Lema 3.1.8, $c1^{-1} \in C_{RC^{-1}}(P^e)$, $m1^{-1} = 0$. Ora, como M é um R -módulo livre de C -torção, $m = 0$, o que é absurdo. O absurdo resultou de supormos que existia um ideal direito K tal que $K \cap C_R(P) \neq \emptyset$, para todo $P \in X$, e $K \cap C = \emptyset$. Consequentemente, X satisfaz a condição de intersecção à direita, como desejávamos provar. ■

Aplicando o Corolário 3.3.3 podemos alterar o enunciado do Teorema anterior da seguinte forma:

Proposição 3.4.14 *Seja R um anel Noetheriano que satisfaz a condição na segunda camada e seja X um clique de R ; então X é classicamente localizável se e só se X satisfaz a condição de intersecção.*

Demonstração. Sejam R e X nas condições enunciadas na Proposição. Como X é um clique, X é um conjunto fechado para ligações à direita e para ligações à esquerda. Por outro lado, pelo Corolário 3.3.3, concluímos que X satisfaz a condição de incomparabilidade.

Pelo Teorema 3.4.13 e pela sua versão esquerda obtemos o resultado pretendido. ■

No caso de X ser um clique finito de um anel Noetheriano que satisfaz a condição na segunda camada podemos eliminar a condição exigida no enunciado da Proposição 3.4.14. Temos, assim, que

Teorema 3.4.15 (Jategaonkar) *Seja R um anel Noetheriano que satisfaz a condição na segunda camada e seja X um clique finito de R ; então X é classicamente localizável.*

Demonstração. Pela Proposição 3.4.14, é suficiente mostrar que, num anel Noetheriano que satisfaz a condição na segunda camada, todo o clique finito X satisfaz a condição de intersecção. Começamos por mostrar que X satisfaz a

condição de intersecção à direita. Para tal, consideremos um ideal direito I de R tal que $I \cap C_R(P) \neq \emptyset$, para todo $P \in X$. Designemos a cardinalidade de X por n e os elementos de X por P_i , com $i \in \{1, \dots, n\}$.

Seja $k \in \{1, \dots, n\}$. Pelo Corolário 3.3.3, X satisfaz a condição de incomparabilidade, logo, $(P_i + P_k)/P_k$ é um ideal não nulo de R/P_k , para todo $i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{k\}$. Consequentemente, pela Proposição 1.5.7, $(P_i + P_k)/P_k$ é um ideal direito essencial de R/P_k , para todo $i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{k\}$. Pelo Teorema de Goldie, concluímos que $P_i \cap C_R(P_k) \neq \emptyset$, para todo $i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{k\}$. Consideremos $d_0 \in I \cap C_R(P_k)$ e $d_i \in P_i \cap C_R(P_k)$, para todo $i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{k\}$. Seja

$$c_k = d_0 \dots d_{k-1} d_{k+1} \dots d_n;$$

então

$$c_k \in I \cap \left(\bigcap_{j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{k\}} P_j \right) \cap C_R(P_k).$$

Seja $c = \sum_{k=1}^n c_k$. Verificaremos que o elemento c pertence a $I \cap (\bigcap_{k=1}^n C_R(P_k))$. Suponhamos que $cr \in P_i$, para algum $i \in \{1, \dots, n\}$ e $r \in R$, então

$$c_1 r + \dots + c_n r \in P_i.$$

Por definição, c_k pertence a P_i , para todo $i \neq k$, logo, $c_i r \in P_i$. Como $c_i \in C_R(P_i)$, $r \in P_i$. Analogamente provamos que se $rc \in P_i$, $r \in P_i$. Assim, $c \in \bigcap_{i=1}^n C_R(P_i)$. Logo,

$$I \cap \left(\bigcap_{i=1}^n C_R(P_i) \right) \neq \emptyset$$

e, portanto, X satisfaz a condição de intersecção à direita. De forma análoga, provamos que X satisfaz a condição de intersecção à esquerda, demonstrando-se o teorema. ■

Do Teorema 3.4.15 podemos deduzir que, dado um anel Noetheriano R que satisfaz a condição na segunda camada e tem um número finito de ideais primos, todo o seu clique é classicamente localizável. Em particular, todos os cliques de um anel Artiniano são classicamente localizáveis. Com efeito, pelo Exemplo 3.2.9, qualquer anel Artiniano satisfaz a condição na segunda camada. Por outro lado, pelo Corolário 1.7.5, qualquer anel Artiniano contém apenas um número finito de ideais primos. Assim,

Proposição 3.4.16 *Todos os cliques de um anel Artiniano são classicamente localizáveis.*

Observe-se que, no anel R apresentado no Exemplo 3.1.2, embora o ideal Q não seja classicamente localizável à direita, $cl(Q) = \{Q, P\}$ é classicamente localizável, uma vez que R é anel Artiniano.

Teorema 3.4.17 [Jategaonkar] *Sejam R um anel Noetheriano e P um ideal primo de R . Então, P é classicamente localizável à direita se e só se P satisfaz a condição na segunda camada à direita e $r.cl(P) = \{P\}$.*

Demonstração. Aplicando a Proposição 3.4.8, concluímos que afirmar que um ideal primo P é classicamente localizável à direita é equivalente a afirmar que o subconjunto de $Spec(R) - X = \{P\}$ é classicamente localizável à direita.

Uma vez que $\{P\}$ satisfaz, trivialmente, a condição de intersecção à direita e a condição de incomparabilidade, pelo Teorema 3.4.13, P é classicamente localizável à direita se e só se P satisfaz a condição na segunda camada à direita e $\{P\}$ é fechado para ligações à direita, isto é, $r.cl(P) = \{P\}$. ■

3.5 A Propriedade de Artin-Rees

Introduzimos agora uma nova propriedade - a propriedade de Artin-Rees. Esta propriedade foi de grande importância no estudo da localização efectuado por Goldie em [12] e por McConnell em [25].

O conjunto dos ideais primos que satisfazem a propriedade de Artin-Rees de um anel Noetheriano R que satisfaz a condição na segunda camada constitui um subconjunto do conjunto de ideais primos classicamente localizáveis de R (Teorema 3.5.20). Mostraremos também que, dado um anel Noetheriano R tal que todo o ideal primo de R satisfaz a propriedade de Artin-Rees, então todo o ideal primo de R é classicamente localizável (Proposição 3.5.21). Ainda como consequência da propriedade de Artin-Rees podemos concluir que todos os ideais primos de um anel semisimples são classicamente localizáveis.

Definição 3.5.1 *Um ideal I de um anel R satisfaz a **propriedade de Artin-Rees à direita** se, para todo o ideal direito J de R , existir um número natural n tal que $J \cap I^n \subseteq JI$. Para simplificação de linguagem, afirmaremos que I satisfaz a **propriedade AR à direita**. De forma análoga, definimos a **propriedade AR à esquerda**. Um ideal I satisfaz a **propriedade AR** se satisfizer a propriedade AR à direita e à esquerda.*

A definição apresentada não é simétrica. Com efeito, no Exemplo 3.1.2 é apresentado um ideal P que satisfaz a propriedade AR à direita mas não à esquerda e é apresentado um ideal Q que satisfaz a propriedade AR à esquerda mas não à direita.

Exemplo 3.5.2 *Sejam R o anel apresentado no Exemplo 3.1.2,*

$$I = \begin{pmatrix} 0 & K \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} K & K \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad P = \begin{pmatrix} 0 & K \\ 0 & K \end{pmatrix}.$$

Vimos já que P , Q e I são ideais de R .

Uma vez que, para todo o número natural n , $P^n \cap Q = P \cap Q = I$ e $PQ = 0$, concluímos que P não satisfaz a propriedade AR à esquerda.

Por outro lado, se considerarmos um ideal direito de R qualquer - J , temos $J \cap P \subseteq JP$, logo, P satisfaz a propriedade AR à direita.

Analogamente provamos que Q satisfaz a propriedade AR à esquerda mas não satisfaz a propriedade AR à direita.

Em seguida, verificaremos que, se R e S são anéis, $\pi: R \rightarrow S$ é um epimorfismo de anéis e I um ideal de R que satisfaz a propriedade AR à direita (respectivamente à esquerda), então $\pi(I)$ é um ideal de S que satisfaz a propriedade AR à direita (respectivamente à esquerda) em S .

Observação 3.5.3 *Sejam R e S anéis, $\pi: R \rightarrow S$ um epimorfismo e I um ideal de R que satisfaz a propriedade AR à direita (respectivamente à esquerda). Como π é um epimorfismo de anéis, $\pi(I)$ é um ideal de S . Verificaremos que $\pi(I)$ satisfaz a propriedade AR à direita (respectivamente à esquerda). Com efeito, como I satisfaz a propriedade AR à direita, se considerarmos um ideal direito J de S , então, existe um número natural n tal que*

$$I^n \cap \pi^{-1}(J) \subseteq \pi^{-1}(J)I.$$

Seja $x \in \pi(I)^n \cap J$; então $x = \pi(i)$, para algum $i \in I^n$. Consequentemente, $i \in I^n \cap \pi^{-1}(J)$, o que nos leva a concluir que $\pi(i) \in \pi(I^n \cap \pi^{-1}(J))$. Ora, como $I^n \cap \pi^{-1}(J) \subseteq \pi^{-1}(J)I$,

$$\pi(I^n \cap \pi^{-1}(J)) \subseteq \pi(\pi^{-1}(J)I) \subseteq J\pi(I),$$

o que nos leva a concluir que $x \in J\pi(I)$. Logo, $\pi(I)^n \cap J \subseteq J\pi(I)$. Consequentemente, $\pi(I)$ satisfaz a propriedade AR à direita.

Lema 3.5.4 *Sejam R um anel e I um ideal de R . As condições seguintes são equivalentes*

- a) O ideal I satisfaz a propriedade AR à direita.*
- b) Para todo o R -módulo finitamente gerado M e para todo o R -submódulo N de M , existe um número natural n tal que $N \cap MI^n \leq NI$.*
- c) Para todo o R -módulo finitamente gerado M que contém um R -submódulo essencial N tal que $NI = 0$, existe um número natural n tal que $MI^n = 0$.*

Demonstração. Começamos por provar que se I é um ideal que satisfaz a propriedade AR à direita, então, verifica-se a condição **c)**.

Consideremos um R -módulo finitamente gerado M que contém um R -submódulo essencial N tal que $NI = 0$. Sejam x_1 um dos elementos geradores de M e

$$K = \{r \in R : x_1 r \in N\}.$$

Como K é um ideal direito de R e I satisfaz a propriedade AR à direita, logo, existe um número natural n_1 tal que $K \cap I^{n_1} \subseteq KI$. Consideremos, agora, $y \in x_1 I^{n_1} \cap N$, logo, $y = x_1 r$, para algum $r \in I^{n_1}$. Consequentemente, $r \in (I^{n_1} \cap K)$ e

$$y \in x_1(I^{n_1} \cap K) \subseteq x_1 KI \subseteq NI = 0,$$

de onde concluímos que $x_1 I^{n_1} \cap N = 0$. Como $N \leq_e M$, temos $x_1 I^{n_1} = 0$. Repetindo o raciocínio para os restantes $k - 1$ elementos geradores de $M - x_2, \dots, x_k$, determinamos $n_2, \dots, n_k \in \mathbb{N}$, tais que $x_2 I^{n_2} = 0, \dots, x_k I^{n_k} = 0$. Seja $n = \max\{n_1, n_2, \dots, n_k\}$; então $MI^n = 0$, como desejávamos provar.

Para provarmos que a condição **c)** implica a condição **b)**, consideremos um R -módulo finitamente gerado M e N um R -submódulo de M . Pela Proposição 1.5.3, existe um R -submódulo X/NI de M/NI tal que

$$N' = \frac{N/NI \oplus X/NI}{X/NI} \leq_e \frac{M/NI}{X/NI} \simeq \frac{M}{X}.$$

Uma vez que $N' \simeq N/NI$, M/X contém um R -submódulo essencial Z que é isomorfo a N/NI , logo, $ZI = 0$. Aplicando **c)** ao R -módulo M/X , concluímos que existe um número natural n tal que $(M/X)I^n = 0$. Assim, $MI^n \leq X$ e

$$MI^n \cap N \leq X \cap N \leq NI,$$

como desejávamos provar.

Para demonstrarmos que, se se verificar **b)**, então I satisfaz a propriedade AR à direita basta tomarmos $M = R_R$ e N um ideal direito arbitrário de R . ■

Neste trabalho, para simplificação de notação, dado um ideal direito (ou esquerdo) I de um anel R , representamos por I^0 o anel R .

Introduzimos agora noções relacionadas com a propriedade AR . Estas serão essencialmente usadas no capítulo 5.

Definição 3.5.5 *Um ideal I de um anel R satisfaz a **propriedade AR muito forte à direita** se, para toda a sequência $L_0, L_1, \dots$ de ideais direitos de R com $L_n \subseteq I^n$ e $L_n I \subseteq L_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}_0$, existe um número natural m tal que $L_n I = L_{n+1}$, para todo $n \geq m$. De forma análoga, definimos **propriedade AR muito forte à esquerda**. Um ideal I de R satisfaz a **propriedade AR muito forte** se satisfizer a propriedade AR muito forte à direita e à esquerda.*

Tal como sugere o nome das propriedades, todo o ideal que satisfaz a propriedade AR muito forte à direita também satisfaz a propriedade AR à direita.

Desconhecem-se exemplos de ideais que satisfaçam a propriedade AR à direita (respectivamente à esquerda) mas não satisfaçam a propriedade AR muito forte à direita (respectivamente à esquerda).

Podemos relacionar a propriedade AR muito forte à direita de um ideal I de um anel Noetheriano à direita R com o facto de um dado subanel de $R[x]$ - o anel de Rees de I - ser anel Noetheriano à direita.

Definição 3.5.6 *Sejam R um anel e I um ideal de R . O anel de Rees de I é o subanel $\mathcal{R}_R(I)$ do anel de polinómios $R[x]$ definido da seguinte forma:*

$$\mathcal{R}_R(I) = R + Ix + I^2x^2 + \dots + I^i x^i + \dots$$

Proposição 3.5.7 *Sejam R um anel Noetheriano à direita e I um ideal de R . Então, I satisfaz a propriedade AR muito forte à direita se e só se o anel $\mathcal{R}_R(I)$ é Noetheriano à direita.*

Demonstração. Sejam R um anel Noetheriano à direita e I um ideal de R que satisfaz a propriedade AR muito forte à direita.

Sejam K um ideal direito de $\mathcal{R}_R(I)$ e $l \in \mathbb{N}_0$. Consideremos

$$Id_l(K) = \left\{ r_l \in I^l : (\exists r_0, \dots, r_l \in R : \sum_{j=0}^l r_j x^j \in K \wedge r_j \in I^j, \forall j \in \{1, \dots, l\}) \right\}.$$

Assim definido, $Id_l(K)$ é um ideal direito de R contido em I^l , para todo $l \in \mathbb{N}_0$. Como $Id_l(K)I \subseteq Id_{l+1}(K)$, para todo $l \in \mathbb{N}_0$, uma vez que I satisfaz a propriedade AR muito forte à direita, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $Id_{m+j}(K) = Id_m(K)I^j$, para todo $j \in \mathbb{N}$.

Uma vez que R é anel Noetheriano à direita, $Id_l(K)$ é finitamente gerado como ideal direito, para todo $l \in \mathbb{N}_0$.

Para cada $l \in \{0, \dots, m\}$, consideremos polinómios de grau l : $f_l^1, \dots, f_l^{n_l}$ pertencentes a K tais que os seus coeficientes directores geram $Id_l(K)$ como ideal direito. Começemos por provar que todos os polinómios pertencentes a K de grau menor ou igual a m são combinações lineares de elementos de

$$X = \{f_0^1, \dots, f_0^{n_0}, \dots, f_m^1, \dots, f_m^{n_m}\}.$$

Os polinómios de grau 0 pertencentes a K não são mais do que os elementos de $Id_0(K)$, logo, são combinações lineares de $f_0^1, \dots, f_0^{n_0}$. Seja $p \in K$ tal que $p = r_0 + r_1 x$, com $r_0 \in R$, $r_1 \in I$; então, $r_1 \in Id_1(K)$, logo, $r_1 = a_1^1 s_1 + \dots + a_1^{n_1} s_{n_1}$, onde $s_1, \dots, s_{n_1} \in R$ e $a_1^1, \dots, a_1^{n_1}$ são os coeficientes directores de, respectivamente, $f_1^1, \dots, f_1^{n_1}$. Como

$$f_1^1 s_1 + \dots + f_1^{n_1} s_{n_1} \in K,$$

então,

$$p - f_1^1 s_1 - \dots - f_1^{n_1} s_{n_1} \in K.$$

Seja

$$y = p - f_1^1 s_1 - \dots - f_1^{n_1} s_{n_1};$$

pelo facto de y ter grau zero, y escreve-se como combinação linear de $f_0^1, \dots, f_0^{n_0}$. Concluimos, assim, que todos os polinómios de grau 1 de K são combinações lineares de $f_0^1, \dots, f_0^{n_0}, f_1^1, \dots, f_1^{n_1}$. Repetindo o processo m vezes, concluimos que os polinómios pertencentes a K de grau menor ou igual a m são combinações lineares de elementos de X .

Consideremos $y \in K$ tal que y é um polinómio de grau $m+1$ e designemos o coeficiente director de y por s . Uma vez que $Id_{m+1}(K) = Id_m(K)I$, $s = \sum_{k=1}^n r_k i_k$, com $r_k \in Id_m(K) \setminus \{0\}$, $i_k \in I$, para todo $k \in \{1, \dots, n\}$. Consideremos, para cada $k \in \{1, \dots, n\}$, um polinómio p_k pertencente a K de grau m que tem coeficiente director r_k . Como $i_k x \in \mathcal{R}_R(I)$, então

$$z = y - \sum_{k=1}^n p_k i_k x$$

é um polinómio de grau menor ou igual a m que pertence a K . Pelo que foi visto antes podemos concluir que z é gerado por elementos de X . Como p_k tem grau m , p_k é gerado por elementos de X , para todo $k \in \{1, \dots, n\}$. Logo, y é gerado por elementos de X . Por indução, concluimos que qualquer elemento de K é gerado por elementos de X . Consequentemente, todo o ideal direito K de $\mathcal{R}_R(I)$ é finitamente gerado, o que é equivalente a afirmar que $\mathcal{R}_R(I)$ é anel Noetheriano à direita.

Reciprocamente, suponhamos que $\mathcal{R}_R(I)$ é anel Noetheriano à direita e consideremos uma sequência de ideais direitos de R , $L_0, L_1, \dots$, com $L_n \subseteq I^n$ e $L_n I \subseteq L_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Seja

$$L^j = L_0 + L_1 x + \dots + L_j x^j + L_j I x^{j+1} + L_j I^2 x^{j+2} + \dots,$$

para todo $j \in \mathbb{N}$.

Como $L_t I x \subseteq L_{t+1} x$ e $L_t \subseteq I^t$, para todo t , L^i é um ideal direito de $\mathcal{R}_R(I)$, para todo $i \in \mathbb{N}$, e $L^1 \subseteq L^2 \subseteq \dots$. Uma vez que $\mathcal{R}_R(I)$ é anel Noetheriano à direita, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $L^n = L^{n+1}$, para todo $n \geq m$. Tal implica, em particular, que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $L_n I = L_{n+1}$, para todo $n \geq m$, de onde se conclui que I satisfaz a propriedade AR muito forte à direita, como desejávamos provar. ■

Provaremos que, num anel Noetheriano à direita, qualquer ideal gerado por um conjunto constituído por elementos normalizadores que comutam entre si satisfaz a propriedade AR muito forte à direita. Para tal, utilizaremos um Teorema demonstrado em [25] por McConnell.

Teorema 3.5.8 (McConnell) *Sejam Q um anel, R um anel Noetheriano à direita que é um subanel de Q e x um elemento de Q tal que $xR = Rx$. Então, $R^x = \sum_{i \in \mathbb{N}_0} R x^i$ é um subanel de Q e é Noetheriano à direita.*

Demonstração. Dados Q , R e x nas condições do enunciado, uma vez que $1 \in R^x$ e $xR = Rx$, R^x é um subanel de Q .

Sejam I um ideal direito de R^x , $i \in \mathbb{N}_0$ e $L_i(I)$ o subconjunto de R constituído pelos elementos da forma $a_i \in R$ para os quais existem $b_{i-1}, \dots, b_0 \in R$ tais que

$$a_i x^i + b_{i-1} x^{i-1} + \dots + b_0 \in I.$$

Assim definido, $L_i(I)$ é um subgrupo aditivo de R . Para provarmos que $L_i(I)$ é um ideal direito de R bastar-nos-á provar que, dados $t \in R$ e $l_i \in L_i(I)$, se tem $l_i t \in L_i(I)$. Como $l_i \in L_i(I)$, existe $p \in I$ tal que

$$p = \sum_{j=0}^{i-1} r_j x^j + l_i x^i,$$

com $r_j \in R$, para todo $j \in \{0, \dots, i-1\}$. Como $Rx = xR$, então $tx^i = x^i s$, para algum $s \in R$, logo

$$ps = \sum_{j=0}^{i-1} r_j x^j s + l_i x^i s = \sum_{j=0}^{i-1} a_j x^j + l_i t x^i,$$

com $a_j \in R$ (para todo $0 \leq j \leq i-1$). Uma vez que $ps \in I$, $l_i t \in L_i(I)$, concluindo-se, assim, que $L_i(I)$ é um ideal direito de R .

Pelo facto de R ser anel Noetheriano à direita e, como $L_i(I) \subseteq L_{i+1}(I)$, para todo o número natural i , existe um número natural n tal que $L_n(I) = L_m(I)$, para todo $m \geq n$. Como R é anel Noetheriano à direita, os ideais direitos $L_0(I)$, ..., $L_n(I)$ são finitamente gerados. Para todo $i \in \{0, \dots, n\}$, designemos os geradores de $L_i(I)$ por $l_i^0, \dots, l_i^{m_i}$. Para todo $i \in \{0, \dots, n\}$, para todo $k \in \{0, \dots, m_i\}$, consideremos um elemento f_i^k de I tal que

$$f_i^k = l_i^k x^i + a_{i-1} x^{i-1} + \dots + a_0,$$

para alguns $a_{i-1}, \dots, a_0 \in R$. Tal como na demonstração da Proposição 3.5.7, concluímos que I é gerado por

$$X = \{f_0^0, \dots, f_0^{m_0}, \dots, f_n^0, \dots, f_n^{m_n}\},$$

logo, I é finitamente gerado. Como I é um ideal direito arbitrário de R^x , R^x é anel Noetheriano à direita. ■

Corolário 3.5.9 *Se R é um anel Noetheriano à direita e φ é um endomorfismo sobrejectivo de R , então $R[x; \varphi]$ é anel Noetheriano à direita.*

Demonstração. Uma vez que φ é um endomorfismo sobrejectivo de R , $xR = Rx$. Como R é um subanel de $R[x; \varphi]$ e $R[x; \varphi] = \sum_{i \in \mathbb{N}_0} Rx^i$, concluímos, pelo Teorema 3.5.8, que $R[x; \varphi]$ é anel Noetheriano à direita. ■

Como consequência do Corolário anterior, temos que, se R for um anel Noetheriano à direita, o anel de polinómios $R[x]$ ainda é anel Noetheriano à direita.

Proposição 3.5.10 *Num anel Noetheriano à direita R , qualquer ideal gerado por um conjunto constituído por elementos normalizadores de R que comutam entre si satisfaz a propriedade AR muito forte à direita.*

Demonstração. Suponhamos que R é anel Noetheriano à direita, A é um conjunto constituído por elementos normalizadores de R que comutam entre si e I é um ideal não nulo de R gerado por A .

Como R é anel Noetheriano à direita e I é gerado por A , então, existe um subconjunto de A finito - $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ tal que I é gerado por B .

Definimos $I_0 = 0$ e I_p o ideal de R gerado por $\{b_1, \dots, b_p\}$, para todo $p \in \{1, \dots, n\}$.

Assim, $\mathcal{R}_R(I_0) \simeq R$ é anel Noetheriano à direita.

Seja $p \in \{0, \dots, n-1\}$ e suponhamos que $\mathcal{R}_R(I_p)$ é anel Noetheriano à direita. Como $\mathcal{R}_R(I_p)$ é um subanel de $\mathcal{R}_R(I_{p+1})$ e $b_{p+1}x$ é um elemento de $\mathcal{R}_R(I_{p+1})$ tal que

$$\mathcal{R}_R(I_p)(b_{p+1}x) = (b_{p+1}x)\mathcal{R}_R(I_p),$$

estão reunidas as condições necessárias para aplicar o Teorema 3.5.8 e afirmar que $\sum_{i \in \mathbb{N}_0} \mathcal{R}_R(I_p)(b_{p+1}x)^i$ é anel Noetheriano à direita. Uma vez que

$$\mathcal{R}_R(I_{p+1}) = \sum_{i \in \mathbb{N}_0} \mathcal{R}_R(I_p)(b_{p+1}x)^i,$$

$\mathcal{R}_R(I_{p+1})$ é anel Noetheriano à direita. Por indução, provamos que $\mathcal{R}_R(I_n) = \mathcal{R}_R(I)$ é anel Noetheriano à direita. Aplicando a Proposição 3.5.7, concluímos que I satisfaz a propriedade AR muito forte à direita. ■

O Corolário seguinte é consequência imediata da Proposição 3.5.10.

Corolário 3.5.11 *Num anel Noetheriano à direita (respectivamente à esquerda) qualquer ideal gerado por um conjunto de elementos centrais satisfaz a propriedade AR muito forte à direita (respectivamente à esquerda). Em particular, todo o ideal de um anel Noetheriano comutativo satisfaz a propriedade AR muito forte.*

Verificámos, no Corolário 3.5.11, que, dado um anel Noetheriano à direita R , todo o ideal gerado por um conjunto de elementos centrais satisfaz a propriedade AR à direita. Em seguida, generalizaremos este resultado, demonstrando que todo o ideal I de um anel Noetheriano à direita R que tem um conjunto centralizador de geradores satisfaz a propriedade AR à direita.

Definição 3.5.12 *Sejam R um anel, I um ideal de R e $x_1, \dots, x_n$ elementos de I . Dizemos que $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ é um **conjunto centralizador de geradores de I** se $I = x_1R + \dots + x_nR$, onde x_1 é um elemento central de R e $x_k + (x_1R + \dots + x_{k-1}R)$ é um elemento central de $R/(x_1R + \dots + x_{k-1}R)$, para todo $k \in \{2, \dots, n\}$.*

Obviamente que todo o ideal finitamente gerado de um anel comutativo tem um conjunto centralizador de geradores. O resultado que provaremos em seguida é de Nouazé e Gabriel mas a demonstração apresentada baseia-se na de Chatters e Hayarnanis em [8].

Proposição 3.5.13 *Todo o ideal de um anel Noetheriano à direita que tem um conjunto centralizador de geradores satisfaz a propriedade AR à direita.*

Demonstração. Sejam R um anel Noetheriano à direita e I um ideal de R tal que $I = x'_1R + \dots + x'_nR$, onde $\{x'_1, \dots, x'_n\}$ é um conjunto centralizador de geradores de I . Pretendemos mostrar que, dado um R -módulo finitamente gerado M que contém um R -submódulo essencial N tal que $NI = 0$, existe um número natural k tal que $MI^k = 0$. A demonstração é feita por indução no número de elementos do conjunto centralizador de geradores de I - n .

Se $n = 1$, como x'_1 é um elemento central de R , pelo Corolário 3.5.11, $I = x'_1R$ satisfaz a propriedade AR à direita. Aplicando o Lema 3.5.4, concluímos que existe um número natural s tal que $MI^s = 0$.

Seja $n > 1$ e suponhamos que, para todo o anel Noetheriano à direita R' , para todo o ideal I' de R' tal que $I' = x''_1R' + \dots + x''_{n-1}R'$, onde $X = \{x''_1, \dots, x''_{n-1}\}$ é um conjunto centralizador de geradores de I' e, para todo o R' -módulo finitamente gerado M' que contém um R' -submódulo essencial N' tal que $N'I' = 0$, existe um número natural s tal que $M'(I')^s = 0$.

Sejam R um anel Noetheriano à direita, I um ideal de R tal que

$$I = x_1R + \dots + x_nR,$$

onde $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ é um conjunto centralizador de geradores de I e seja M um R -módulo finitamente gerado que contém um R -submódulo essencial N tal que $NI = 0$.

Uma vez que x_1 é um elemento central de R , pelo Corolário 3.5.11, x_1R satisfaz a propriedade AR à direita. Ora, como M é um R -módulo finitamente gerado que contém um R -submódulo essencial N tal que $N(x_1R) = 0$, pelo Lema 3.5.4, existe um número natural s tal que $M(x_1R)^s = 0$, logo, $Mx_1^s = 0$. Seja k o menor número natural para o qual se tem $Mx_1^k = 0$.

Suponhamos que $k = 1$. Como $Mx_1 = 0$, M é um R/x_1R -módulo finitamente gerado que contém um R/x_1R -submódulo essencial N tal que $N(I/x_1R) = 0$. Uma vez que

$$\frac{I}{x_1R} = (x_2 + x_1R)\frac{R}{x_1R} + \dots + (x_n + x_1R)\frac{R}{x_1R},$$

onde $\{x_2 + x_1R, \dots, x_n + x_1R\}$ é um conjunto centralizador de geradores de I/x_1R , aplicando a hipótese de indução, concluímos que existe um número natural s tal que $M(I/x_1R)^s = 0$, logo, $M(I)^s = 0$.

Suponhamos, agora, que $k > 1$. Uma vez que x_1 é um elemento central de R e M é finitamente gerado, Mx_1^{k-1} é um R -módulo não nulo finitamente gerado. Uma vez que Mx_1^{k-1} é um R -módulo finitamente gerado, $N \cap Mx_1^{k-1} \leq_e Mx_1^{k-1}$, $(N \cap Mx_1^{k-1})I = 0$ e $(Mx_1^{k-1})x_1 = 0$, tal como no parágrafo anterior, concluímos que existe um número natural s_1 tal que $(Mx_1^{k-1})(I)^{s_1} = 0$. Como x_1 é um elemento central de R , $(M(I)^{s_1})x_1^{k-1} = 0$.

Suponhamos que $(M(I)^{s_1})x_1 \neq 0$. Seja l o menor número natural tal que $(M(I)^{s_1})x_1^l = 0$. Por hipótese, $l > 1$ e, como $(M(I)^{s_1})x_1^{k-1} = 0$, $l \leq k-1$. Uma vez que M é um R -módulo Noetheriano, $M(I)^{s_1}x_1^{l-1}$ também é um R -módulo Noetheriano, pelo que é um R -módulo finitamente gerado. Uma vez que

$$N \cap M(I)^{s_1}x_1^{l-1} \leq_e M(I)^{s_1}x_1^{l-1},$$

$(N \cap M(I)^{s_1}x_1^{l-1})I = 0$ e $(M(I)^{s_1}x_1^{l-1})x_1 = 0$, tal como anteriormente, concluímos que existe $s_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$M(I)^{s_1}x_1^{l-1}(I)^{s_2} = 0.$$

Como x_1 é um elemento central de R ,

$$((M(I)^{s_1})x_1^{l-1})I^{s_2} = M(I)^{s_1+s_2}x_1^{l-1}.$$

Assim, repetindo o processo no máximo $l-1$ vezes, determinamos $s' \in \mathbb{N}$ tal que $M(I)^{s'}x_1 = 0$.

Se $M(I)^{s'} \neq 0$, então, $M(I)^{s'}$ é um R/x_1R -módulo finitamente gerado que contém um R/x_1R -submódulo essencial - $N \cap M(I)^{s'}$ tal que $(N \cap M(I)^{s'})(I/x_1R) = 0$. Uma vez que

$$\frac{I}{x_1R} = (x_2 + x_1R)\frac{R}{x_1R} + \dots + (x_n + x_1R)\frac{R}{x_1R},$$

onde $\{x_2 + x_1R, \dots, x_n + x_1R\}$ é um conjunto centralizador de geradores de I/x_1R , aplicando a hipótese de indução, concluímos que existe um número natural s'' tal que $(M(I)^{s'})(I/x_1R)^{s''} = 0$, logo, $M(I)^{s'+s''} = 0$.

Provamos, assim, que para todo o R -módulo finitamente gerado M que contém um R -submódulo essencial N tal que $NI = 0$, existe um número natural s tal que $M(I)^s = 0$. Pelo Lema 3.5.4, concluímos que I satisfaz a propriedade AR à direita.

Consequentemente, todo o ideal I'' de um anel Noetheriano à direita R'' que possui um conjunto centralizador de geradores satisfaz a propriedade AR à direita, como desejávamos provar. ■

Utilizando a propriedade AR à direita determinaremos uma nova classe de anéis que satisfaz a condição na segunda camada à direita. Para tal, atenda-se ao seguinte Lema:

Lema 3.5.14 *Sejam R um anel e P, Q ideais primos de R tais que $Q \subsetneq P$. Se existir um ideal K de R tal que $Q \subsetneq K \subseteq P$ e K/Q satisfaz a propriedade AR à direita em R/Q , então (Q, P) não é um par de primos indesejável de R .*

Demonstração. Com vista a um absurdo, suponhamos que (Q, P) é um par de primos indesejável de R . Por definição, existe um R -módulo finitamente gerado M , um R -submódulo essencial U de M tal que $UP = 0$, $\text{rann}_R(M) = Q$. Consequentemente, M é um R/Q -módulo finitamente gerado que contém um R/Q -submódulo essencial U tal que

$$U \frac{K}{Q} \subseteq U \frac{P}{Q} = 0.$$

Estão reunidas as condições necessárias para aplicar o Lema 3.5.4 e afirmar que existe um número natural n tal que

$$M \left(\frac{K}{Q} \right)^n = 0,$$

logo, $M(K)^n = 0$. Uma vez que $\text{rann}_R(M) = Q$, concluímos que $K^n \subseteq Q$, portanto, $K \subseteq Q$, o que é absurdo. Consequentemente, (Q, P) não é um par de primos indesejável de R . ■

Corolário 3.5.15 *Sejam R um anel e P, Q ideais primos de R tais que $Q \subsetneq P$. Se existir um ideal K de R tal que $K \not\subseteq Q$, $K \subseteq P$ e K satisfaz a propriedade AR à direita em R , então (Q, P) não é um par de primos indesejável de R .*

Demonstração. Como $K \not\subseteq Q$, temos que $Q \subsetneq K + Q \subseteq P$.

Por outro lado, como $(Q + K)/Q$ é a imagem de K pelo epimorfismo de anéis

$$\begin{aligned} \pi: R &\rightarrow R/Q \\ r &\rightarrow r + Q \end{aligned},$$

pela Observação 3.5.3, $(Q + K)/Q$ satisfaz a propriedade AR à direita em R/Q . Estão, pois, reunidas as condições necessárias para aplicar o Lema 3.5.14 e afirmar que (Q, P) não é um par de primos indesejável de R . ■

Corolário 3.5.16 *Seja R um anel Noetheriano e P um ideal primo de R que satisfaz a propriedade AR à direita; então P satisfaz a condição na segunda camada à direita.*

Demonstração. Suponhamos que P não satisfaz a condição na segunda camada à direita, então, pela Proposição 3.2.7, existe um ideal primo Q tal que $Q \subsetneq P$ e existe um R -módulo finitamente gerado uniforme M tal que $\text{rann}_R(M) = Q$ e M contém um R -submódulo não nulo U que é um R/P -módulo livre de torção. Em particular, (Q, P) é um par de primos indesejável de R .

Por outro lado, como $Q \subsetneq P$ e P satisfaz a propriedade AR à direita, pelo Corolário 3.5.15, (Q, P) não é um par de primos indesejável de R , o que é absurdo. O absurdo resultou de supormos que P não satisfazia a condição na segunda camada à direita, provando-se, assim, o desejado. ■

O Lema 3.5.14 dá origem à seguinte Definição:

Definição 3.5.17 *Um anel R é AR -separado à direita se, para todo o par de ideais primos (Q, P) de R tal que $Q \subsetneq P$, existir um ideal K tal que $Q \subsetneq K \subseteq P$ e K/Q satisfaz a propriedade AR à direita em R/Q . De forma análoga, definimos anel AR -separado à esquerda. Um anel R é AR -separado se R é AR -separado à direita e à esquerda.*

O Lema 3.5.14 permite-nos concluir que um anel Noetheriano AR -separado à direita R não contém pares de primos indesejáveis, logo, R satisfaz a condição na segunda camada à direita. Assim,

Proposição 3.5.18 *Todo o anel Noetheriano e AR -separado à direita (respectivamente à esquerda) satisfaz a condição na segunda camada à direita (respectivamente à esquerda).*

O Teorema que se segue (Teorema 3.5.20) relaciona a propriedade de Artin Rees para ideais primos de um anel Noetheriano que satisfaz a condição na segunda camada com o facto de os ideais primos serem classicamente localizáveis. Para o provarmos, começamos por demonstrar o seguinte Lema:

Lema 3.5.19 *Sejam R um anel Noetheriano, P um ideal primo de R que satisfaz a propriedade AR à direita e Q um ideal primo de R tal que $Q \rightsquigarrow P$. Então, $P \subseteq Q$.*

Demonstração. Sejam R , P e Q nas condições do enunciado e $(Q \cap P)/A$ o bimódulo de ligação entre Q e P . Como P satisfaz a propriedade AR à direita, existe um número natural n tal que $P^n \cap Q \subseteq QP \subseteq A$. Por outro lado, como

$$P^n(Q \cap P) \subseteq P^n \cap Q \subseteq A,$$

concluimos que $P^n \subseteq \text{lann}_R((Q \cap P)/A)$. Aplicando a versão esquerda do Lema 2.2.26, concluimos que $\text{lann}_R((Q \cap P)/A) = Q$. Como Q é um ideal primo, $P \subseteq Q$. ■

Teorema 3.5.20 *Seja R um anel Noetheriano que satisfaz a condição na segunda camada. Então, todo o ideal primo de R que satisfaz a propriedade AR à direita é classicamente localizável à direita.*

Demonstração. Se considerarmos um ideal primo P de R que satisfaz a propriedade AR à direita e supusermos que existe um ideal primo Q tal que $Q \rightsquigarrow P$, concluímos, aplicando o Lema 3.5.19, que $P \subseteq Q$. Pelo Corolário 3.3.3, $P = Q$, logo, $r.cl(P) = \{P\}$.

Uma vez que P satisfaz a condição na segunda camada à direita, concluímos, pelo Teorema 3.4.17, que P é classicamente localizável à direita, como desejávamos provar. ■

Proposição 3.5.21 *Seja R um anel Noetheriano tal que todo o ideal primo de R satisfaz a propriedade AR , então, todo o ideal primo é classicamente localizável.*

Demonstração. Seja P um ideal primo de R . Por hipótese, P satisfaz a propriedade AR . Aplicando o Corolário 3.5.16 e a sua versão esquerda, concluímos que P satisfaz a condição na segunda camada. Como P é um ideal primo arbitrário de R , R satisfaz a condição na segunda camada. Pelo Teorema 3.5.20 e pela respectiva versão esquerda, concluímos que todo o ideal primo de R é classicamente localizável à direita e à esquerda, como desejávamos provar. ■

Uma vez que, como provaremos, todos os ideais primos de um anel de ideais direitos e esquerdos principais são classicamente localizáveis, pelo Teorema 3.4.17 e pela respectiva versão esquerda, concluímos que todos os ideais primos destes anéis satisfazem a condição na segunda camada.

Assim, utilizando a Proposição 3.5.10, determinaremos uma nova classe de anéis que satisfaz a condição na segunda camada - a classe dos anéis de ideais direitos e esquerdos principais.

Proposição 3.5.22 *Seja R um anel de ideais direitos e esquerdos principais; então todo o ideal primo de R é classicamente localizável.*

Demonstração. Pelo Lema 1.3.3, R é anel Noetheriano.

Pelo Lema 1.3.3, todos os ideais de R são gerados por um elemento normalizador. Pela Proposição 3.5.10 e respectiva versão esquerda, todos os ideais primos de R satisfazem a propriedade AR muito forte à direita e à esquerda. Concluímos, assim, que todos os ideais primos de R satisfazem a propriedade AR . Aplicando a Proposição 3.5.21, concluímos que todo o ideal primo de R é classicamente localizável. ■

Atendendo ao Corolário 1.5.5, concluímos que todo o anel semisimples é anel de ideais direitos e esquerdos principais, logo, pela Proposição 3.5.22, todos os ideais primos de um anel semisimples são classicamente localizáveis. Assim,

Corolário 3.5.23 *Todos os ideais primos de um anel semisimples são classicamente localizáveis.*

Capítulo 4

Anéis e módulos Graduados

Dados um anel R e uma indeterminada x , o anel de polinómios $R[x]$ pode ser escrito como soma directa de subgrupos aditivos de $R[x]$,

$$R[x] = \oplus_{i \in \mathbb{Z}} R_i,$$

onde $R_i = Rx^i$, se $i \in \mathbb{Z}_0^+$, e $R_i = 0$, se $i \in \mathbb{Z}^-$. Este anel faz parte de uma classe de anéis que estudaremos neste Capítulo - os anéis graduados.

Dado um grupo G com elemento identidade e , dizemos que um anel R é anel graduado do tipo G se existir uma família de subgrupos aditivos de R

$$\{R_\sigma : \sigma \in G\}$$

tal que $R = \oplus_{\sigma \in G} R_\sigma$ e $R_\sigma R_t \subseteq R_{\sigma t}$ para todos $\sigma, t \in G$, designando por $R_\sigma R_t$ o conjunto constituído pelas somas finitas de produtos da forma $r_\sigma r'_t$, com $r_\sigma \in R_\sigma$ e $r'_t \in R_t$. Os elementos de $\cup_{\sigma \in G} R_\sigma$ são designados por elementos homogêneos de R .

Vários exemplos de anéis graduados serão introduzidos na secção 4.1. Entre os exemplos de anéis graduados salientamos o caso dos anéis de grupos.

Se considerarmos um anel graduado do tipo G - $R = \oplus_{g \in G} R_g$, podemos generalizar a noção de R -módulos para R -módulos graduados. Assim, dizemos que um R -módulo M é graduado se existir uma família de subgrupos

$$\{M_t : t \in G\}$$

de M tal que $M = \oplus_{g \in G} M_g$ e $M_t R_s \subseteq M_{ts}$, para todos $s, t \in G$.

Em 4.2 estudaremos submódulos gr-essenciais, isto é, submódulos graduados de um módulo graduado com propriedades semelhantes às dos submódulos essenciais de um módulo.

As secções 4.3 e 4.4 são dedicadas ao estudo de anéis graduados com uma graduação especial - a graduação não degenerada.

Na última secção estudaremos a existência de anéis de fracções de um anel graduado R relativamente a um subconjunto de elementos homogêneos de R , de forma que o anel de fracções ainda possua o mesmo tipo de graduação do anel R .

4.1 Definições e alguns resultados preliminares

Nesta secção introduzimos algumas noções e propriedades que necessitaremos para este e para o próximo Capítulo.

Definição 4.1.1 *Dado um grupo G com elemento identidade e , dizemos que um anel R é **anel graduado do tipo G** se existir uma família de subgrupos aditivos de R*

$$\{R_\sigma : \sigma \in G\}$$

*tal que $R = \bigoplus_{\sigma \in G} R_\sigma$ e $R_\sigma R_t \subseteq R_{\sigma t}$ para todos $\sigma, t \in G$, designando por $R_\sigma R_t$ o conjunto constituído pelas somas finitas de produtos da forma $r_\sigma r'_t$, com $r_\sigma \in R_\sigma$ e $r'_t \in R_t$. O conjunto $\bigcup_{\sigma \in G} R_\sigma$ é representado por $h(R)$ e os seus elementos são designados por **elementos homogêneos de R** . O conjunto $\{\lambda \in G : R_\lambda \neq 0\}$ designa-se por **suporte de R** , sendo representado por $\text{sup}(R)$.*

*Dado $\sigma \in G$, os elementos não nulos de R_σ são designados por **elementos homogêneos de grau σ** , representando-se o grau de um elemento homogêneo não nulo $r \in R$ por $\text{gr}(r)$.*

*Por definição de R , todo o elemento não nulo $r \in R$ escreve-se de forma única como uma soma de elementos homogêneos, $r = \sum_{\sigma \in G} r_\sigma$, com $r_\sigma \in R_\sigma$, para todo σ , onde r_σ é não nulo para um número finito de σ em G . Cada elemento não nulo r_σ na decomposição de r designa-se por **componente homogênea de r** . Por analogia, chamamos a cada um dos subgrupos aditivos R_t de R , onde $t \in G$, **componente homogênea de R** .*

*Dado um elemento não nulo $r \in R$, designamos por **suporte de r** e representamos por $\text{sup}(r)$ o conjunto*

$$\{g \in G : \text{existe uma componente homogênea de } r \text{ de grau } g\}.$$

Definição 4.1.2 *Seja $R = \bigoplus_{g \in G} R_g$ um anel graduado do tipo G . A **graduação** de R é a decomposição em grupos Abelianos de $R = \bigoplus_{g \in G} R_g$ tal que $R_g R_h \subseteq R_{gh}$, para todos $g, h \in G$.*

Assumiremos sempre, ao longo deste Capítulo, que R representa um anel graduado do tipo G .

Dado um anel graduado R do tipo G representaremos por R_g , com $g \in G$, as componentes homogêneas de R correspondentes à graduação do tipo G definida em R .

Dados um anel arbitrário R e um grupo arbitrário G , é sempre possível definir uma graduação do tipo G em R - a graduação trivial.

Definição 4.1.3 *Sejam R um anel arbitrário e G um grupo arbitrário. Consideremos $R_e = R$ e $R_t = 0$, para todo $t \in G \setminus \{e\}$, onde e é o elemento neutro de G . A graduação assim definida designa-se por **graduação trivial**.*

Em seguida apresentaremos alguns exemplos de anéis graduados que consideramos relevantes. Oportunamente serão introduzidos outros exemplos.

Começamos por verificar que é sempre possível definir em $M_n(F)$, o anel das matrizes quadradas $n \times n$ com entradas num anel F , uma graduação do tipo $\mathbb{Z}$.

Exemplo 4.1.4 *Sejam F um anel, n um número natural diferente de 1 e $R = M_n(F)$. É possível definir uma graduação não trivial do tipo $\mathbb{Z}$ em R do seguinte modo: designamos por $e_{i,j}$ a matriz que tem todas as entradas nulas excepto a entrada (i,j) , que é igual a 1, consideramos $t \in \mathbb{Z}$ e:*

$$\begin{aligned} R_t &= \sum_{i=1}^{n-t} F e_{i,i+t}, \text{ se } 0 \leq t \leq n \\ R_t &= \sum_{i=1}^{n-|t|} F e_{i+|t|,i}, \text{ se } -n \leq t \leq 0 \\ R_t &= 0, \text{ se } |t| \geq n \end{aligned}$$

Assim, temos, por exemplo,

$$R_0 = \begin{pmatrix} F & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & F & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & F & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & F \end{pmatrix}, R_1 = \begin{pmatrix} 0 & F & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & F & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & F \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \dots$$

Consequentemente, $R = \bigoplus_{t \in \mathbb{Z}} R_t$ e $R_0 R_t = R_t R_0 = R_t$, para todo $t \in \mathbb{Z}$. Consideremos $t, s \in \mathbb{Z}^+$ e duas matrizes: $M_t \in R_t \setminus \{0\}$ e $M_s \in R_s \setminus \{0\}$. Se $M = M_t M_s = 0$, então $M \in R_{t+s}$. Suponhamos que $M \neq 0$ e consideremos uma entrada não nula - x - de M . Logo, existem uma entrada não nula em M_t - $a_{i,i+t}$ e uma entrada não nula em M_s - $a_{j,j+s}$ tais que $a_{i,i+t} a_{j,j+s} = x$, com $i+t = j$. Consequentemente, $i = j - t$, o que nos leva a concluir que x corresponde à entrada $(l, l + (t + s))$ da matriz M , onde $l = j - t$. Concluimos, assim, que $M \in R_{t+s}$. Consequentemente, $R_t R_s \subseteq R_{t+s}$. Analogamente provamos que, se $t, s \in \mathbb{Z}^-$, $R_t R_s \subseteq R_{t+s}$.

Consideremos agora $t, s \in \mathbb{Z}$ de tal forma que $t < 0$ e $s > 0$ e suponhamos que $R_t R_s \neq 0$. Sejam $M_t \in R_t$ e $M_s \in R_s$ duas matrizes cujo produto é não nulo e consideremos uma entrada não nula a' da matriz $M = M_t M_s$. Então, existe uma entrada não nula em M_t - $a_{i+|t|,i}$ e uma entrada não nula em M_s - $a_{i,i+s}$ tal que $a' = a_{i+|t|,i} a_{i,i+s}$, logo, a' corresponde à entrada $(i + |t|, i + s)$ da matriz M . Suponhamos que $|t| \geq s$, então, a' corresponde à entrada

$$((i + s) + (|t| - s), i + s)$$

da matriz M . Analogamente, se $|t| < s$, a' corresponde à entrada

$$(i + |t|, i + |t| + (s - |t|))$$

da matriz M , o que nos leva a concluir que $M \in R_{t+s}$. Consequentemente, $R_t R_s \subseteq R_{t+s}$, para todos $t, s \in \mathbb{Z}$ tais que $t < 0$ e $s > 0$.

Analogamente, se $t > 0$ e $s < 0$, provamos que $R_t R_s \subseteq R_{t+s}$, logo, o anel R é um anel graduado do tipo $\mathbb{Z}$ com graduação não trivial, como desejávamos provar.

Exemplo 4.1.5 Sejam R um anel, ϕ um endomorfismo de R e consideremos o anel $S = R[x; \phi]$. Definimos $S_i = \{ax^i : a \in R\}$, para todo $i \in \mathbb{Z}_0^+$, e $S_i = 0$, para todo $i \in \mathbb{Z}^-$. Uma vez que, para todo $i \in \mathbb{Z}$, S_i é um grupo aditivo, $S = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} S_i$ e $S_i S_j \subseteq S_{i+j}$, para todos $i, j \in \mathbb{Z}$, então é possível definir em S uma graduação não trivial do tipo $\mathbb{Z}$.

Exemplo 4.1.6 Sejam R um anel, ϕ um automorfismo de R e $S = R[x, x^{-1}; \phi]$. Definimos $S_i = \{ax^i : a \in R\}$, para todo $i \in \mathbb{Z}$. Uma vez que, para todo $i \in \mathbb{Z}$, S_i é um grupo aditivo, $S = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} S_i$ e $S_i S_j \subseteq S_{i+j}$, para todos $i, j \in \mathbb{Z}$, é possível definir em S uma graduação não trivial do tipo $\mathbb{Z}$.

Exemplo 4.1.7 Dados um grupo G e um anel R arbitrários, um exemplo de um anel graduado do tipo G que possui uma graduação não trivial é o anel de grupo RG . Com efeito, se considerarmos os subgrupos aditivos de RG da forma $R_g = Rg$, para todo $g \in G$, concluímos que $RG = \bigoplus_{g \in G} R_g$ e $R_g R_h \subseteq R_{gh}$, para todos $g, h \in G$. Assim, RG é anel graduado do tipo G .

Exemplo 4.1.8 Seja R um anel graduado do tipo G . Podemos definir uma graduação do tipo G em R^{op} , considerando $(R^{\text{op}})_t = R_{t^{-1}}$, para todo $t \in G$.

É, por vezes, possível reduzir o estudo de certas propriedades de um anel graduado R do tipo G , onde G é um grupo arbitrário, ao estudo de propriedades apresentadas pela componente homogênea de R - R_e , onde e é o elemento neutro de G . Uma propriedade a salientar sobre R_e é o facto de R_e ser um subanel de R .

Proposição 4.1.9 Se R é um anel graduado do tipo G , então R_e é um subanel de R .

Demonstração. Dado um anel graduado R do tipo G , por definição, R_e é um grupo aditivo Abelian. Como $R_e R_e \subseteq R_e$, concluímos que R_e é fechado para o produto. Para provarmos que R_e é um subanel de R é, pois, suficiente demonstrar que $1 \in R_e$.

Sejam $r_1, \dots, r_n$ as componentes homogêneas de 1, elemento identidade de R . Consideremos $r_t \in h(R) \setminus \{0\}$, então, $r_t = r_t r_1 + \dots + r_t r_n$. Como os elementos não nulos da forma $r_t r_1, \dots, r_t r_n$ são elementos homogêneos com graus distintos, existe uma componente homogênea r_i de 1 tal que $r_i \in R_e$ e $r_t r_i = r_t$. Concluímos, assim, que $r_u r_i = r_u$, para todo $r_u \in h(R)$. Portanto, $rr_i = r$, para todo $r \in R$. Analogamente provamos que $r = r_i r$, para todo $r \in R$, o que nos leva a concluir

que $r_i = 1$ e que $1 \in R_e$. Estão, pois, reunidas as condições que nos permitem garantir que R_e é um subanel de R . ■

O subanel R_e de um anel graduado R do tipo G é designado por **anel base** de R .

Seja R um anel graduado do tipo G . Se considerarmos um grupo H e um monomorfismo de grupos $\theta : H \rightarrow G$, podemos, a partir de R e de θ , construir um anel graduado do tipo H do seguinte modo:

$$R^H = \oplus_{\sigma \in H} (R^H)_\sigma, \text{ onde } (R^H)_\sigma = R_{\theta(\sigma)}, \text{ para todo } \sigma \in H.$$

Neste trabalho, e se nada for dito em contrário, sempre que tivermos um anel graduado R do tipo G e um subgrupo H de G , consideramos $R^H = \oplus_{h \in H} R_h$.

Por outro lado, se R for um anel graduado do tipo G e $\pi : G \rightarrow H$ for um epimorfismo de grupos, podemos definir uma graduação em R do tipo H , considerando

$$R = \oplus_{h \in H} S_h \text{ e } S_h = \oplus_{t \in \pi^{-1}(h)} R_t, \text{ para todo } h \in H.$$

Representaremos por R_H o anel R com a graduação do tipo H assim definida. Assim, se, por exemplo, considerarmos um anel graduado R do tipo G e tomarmos um subgrupo normal H de G , se considerarmos o grupo G/H (com a operação induzida pela operação de G) e o epimorfismo canónico $\pi : G \rightarrow G/H$, utilizando o processo indicado, podemos definir em R uma graduação do tipo G/H . Designaremos o anel R com tal graduação por $R_{G/H}$.

Introduzimos agora o conceito de módulo graduado sobre um anel graduado.

Definição 4.1.10 *Sejam R um anel graduado do tipo G e M um R -módulo à direita. Dizemos que M é um R -módulo graduado se existir uma família de subgrupos aditivos $X = \{M_t : t \in G\}$ de M tal que $M = \oplus_{t \in G} M_t$ e $M_t R_s \subseteq M_{ts}$, para todos $s, t \in G$. Os subgrupos aditivos da forma M_t , com $t \in G$, designam-se por **componentes homogêneas** de M . Os elementos de $h(M) = \cup_{\sigma \in G} M_\sigma$ designam-se por **elementos homogêneos** de M .*

*Dados $\sigma \in G$ e um elemento $m_\sigma \in M_\sigma \setminus \{0\}$, dizemos que este é **homogêneo de grau σ** e representamos o grau de m_σ por $gr(m_\sigma)$. Todo o elemento não nulo $m \in M$ escreve-se de forma única como soma de elementos homogêneos - $m = \sum_{\sigma \in G} m_\sigma$, onde m_σ é não nulo para um número finito de σ em G . Cada elemento não nulo m_σ na decomposição de m designa-se por **componente homogênea** de m .*

De forma análoga, definimos um R -módulo à esquerda graduado.

Em seguida introduzimos a definição de R -submódulo graduado de um R -módulo graduado.

Definição 4.1.11 *Seja R um anel graduado do tipo G . Um R -submódulo N de um R -módulo graduado $M = \bigoplus_{t \in G} M_t$ diz-se um **R -submódulo graduado** de M se $N = \bigoplus_{t \in G} (N \cap M_t)$, ou, equivalentemente, se, para todo $x \in N \setminus \{0\}$, todas as componentes homogêneas de x em M ainda pertencerem a N .*

Dado um anel graduado R do tipo G , por analogia com o caso não graduado, os R -submódulos graduados de R_R (respectivamente ${}_R R$) serão designados por ideais direitos (respectivamente esquerdos) graduados. Assim,

Definição 4.1.12 *Dados um anel graduado R do tipo G e um ideal direito I , dizemos que I é um **ideal direito graduado** (ou **homogêneo**) se I for um R -submódulo graduado de R_R . De modo análogo, definimos **ideal esquerdo graduado** (ou **homogêneo**). Um ideal de um anel graduado R é **graduado** se for simultaneamente um ideal direito graduado e um ideal esquerdo graduado.*

Se I for um ideal direito (ou esquerdo) graduado de um anel graduado R do tipo G , então $I = \bigoplus_{t \in G} I_t$, onde $(I_t)_{t \in G}$ são as componentes homogêneas de I .

Dados um anel graduado R do tipo G e um ideal próprio graduado I de R , é possível definir uma graduação do tipo G no anel R/I de tal forma que, se $r \in R \setminus I$ for um elemento homogêneo de grau t , então, $r + I$ ainda é um elemento homogêneo de grau t de R/I .

Observação 4.1.13 *Sejam R um anel graduado do tipo G e I um ideal próprio graduado de R ; então, se definirmos $(R/I)_t = (R_t + I)/I$, para todo $t \in G$, temos:*

a) $R/I = \bigoplus_{t \in G} (R/I)_t$,

b) $(R/I)_t (R/I)_s \subseteq (R/I)_{ts}$, para todos $t, s \in G$,

logo, o anel R/I é um anel graduado do tipo G . Observe-se, ainda, que o epimorfismo canônico $\pi: R \rightarrow R/I$ transforma elementos homogêneos de R de grau t em elementos de $(R/I)_t$, para todo $t \in G$.

Em seguida apresentamos alguns resultados elementares sobre módulos graduados.

Lema 4.1.14 *Sejam R um anel graduado do tipo G , M um R -módulo graduado e X um subconjunto de M tal que, para todo $x \in X \setminus \{0\}$, as componentes homogêneas de x ainda pertencem a X ; então o R -submódulo de M gerado por X é um R -submódulo graduado de M . Em particular, se $m \in h(M)$, mR é um R -submódulo graduado de M .*

Demonstração. Seja m um elemento não nulo do R -submódulo N de M gerado por X ; então $m = m_1 r_1 + \dots + m_n r_n$, para alguns $m_1, \dots, m_n \in X \setminus \{0\}$, $r_1, \dots, r_n \in R \setminus \{0\}$.

Por definição de X , todas as componentes homogêneas de $m_1, \dots, m_n$ ainda pertencem a X . Sejam $m_{11}, \dots, m_{1l_1}$ as componentes homogêneas de $m_1, \dots, m_{n1}$,

$\dots, m_{nl_n}$ as componentes homogêneas de m_n , $r_{11}, \dots, r_{1k_1}$ as componentes homogêneas de r_1 , $\dots, r_{nk_n}$ as componentes homogêneas de r_n . Como $m_{il_j} r_{tk_s} \in N$, para todo $1 \leq i, j, t, s \leq n$, concluímos que todas as componentes homogêneas de m pertencem a N , logo, N é um R -submódulo graduado de M . ■

Lema 4.1.15 *Sejam R um anel graduado do tipo G , M um R -módulo graduado e X um subconjunto de M tal que, para todo $x \in X \setminus \{0\}$, as componentes homogêneas de x ainda pertencem a X ; então $\text{rann}_R(X)$ é um ideal direito graduado de R . Em particular, $\text{rann}_R(x)$ é um ideal direito graduado de R , para todo o elemento homogêneo x de M .*

Demonstração. Se $\text{rann}_R(X) = 0$ ou $X = 0$, o resultado é trivial.

Suponhamos que $\text{rann}_R(X) \neq 0$ e $X \neq 0$, consideremos $r \in \text{rann}_R(X) \setminus \{0\}$, $x \in X \setminus \{0\}$ e designemos por $x_1, \dots, x_l$ as componentes homogêneas de x . Uma vez que $x_1, \dots, x_l \in X$ e $r \in \text{rann}_R(X)$, temos que $x_i r = 0$, para todo $1 \leq i \leq l$. Designemos por $r_1, \dots, r_n$ as componentes homogêneas de r ; como $x_1 r = 0$, então $x_1 r_1 = \dots = x_1 r_n = 0$, isto é,

$$r_1, \dots, r_n \in \text{rann}_R(x_1).$$

Analogamente, concluímos que

$$r_1, \dots, r_n \in \text{rann}_R(x_i), \text{ para todo } 2 \leq i \leq l;$$

logo,

$$r_1, \dots, r_n \in \text{rann}_R(x).$$

Uma vez que, para todo $x \in X$, $r_1, \dots, r_n \in \text{rann}_R(x)$, então $r_1, \dots, r_n \in \text{rann}_R(X)$. Provamos assim que, para todo $r \in \text{rann}_R(X) \setminus \{0\}$, as componentes homogêneas de r ainda pertencem a $\text{rann}_R(X)$; logo, $\text{rann}_R(X)$ é um ideal direito graduado de R , como desejávamos provar. ■

Lema 4.1.16 *Sejam R um anel graduado do tipo G , M um R -módulo graduado e $F = (M_i)_{i \in K}$ uma família de R -submódulos graduados de M ; então $\cap_{i \in K} M_i$ e $\sum_{i \in K} M_i$ são R -submódulos graduados de M .*

Demonstração. Se $\cap_{i \in K} M_i = 0$, então $N = \cap_{i \in K} M_i$ é um R -submódulo graduado de M . Caso contrário, consideremos $m \in N \setminus \{0\}$. Uma vez que, para todo $i \in K$, M_i é um R -submódulo graduado de M todas as componentes homogêneas de m pertencem a M_i , para todo $i \in K$, logo, todas as componentes homogêneas de m pertencem a N , pelo que N é um R -submódulo graduado de M .

Seja $L = \sum_{i \in K} M_i$. Consideremos, agora, $m \in L$ tal que $m \neq 0$, logo, $m = m_{k_1} + \dots + m_{k_n}$, para alguns $m_{k_1} \in M_{k_1} \setminus \{0\}$, ..., $m_{k_n} \in M_{k_n} \setminus \{0\}$, com $k_1, \dots, k_n \in K$. Como todas as componentes homogêneas de m_{k_1} pertencem a M_{k_1} , ..., todas as componentes homogêneas de m_{k_n} pertencem a M_{k_n} , concluímos que todas as componentes homogêneas de $m_{k_1}, \dots, m_{k_n}$ pertencem a L . Consequentemente, todas as componentes homogêneas de m pertencem a L e L é um R -submódulo graduado de M , como desejávamos provar. ■

A demonstração do Lema que se segue é consequência das definições de ideal graduado e ideal direito (ou esquerdo) graduado.

Lema 4.1.17 *Sejam R um anel graduado do tipo G e I um ideal bilateral de R tal que I é um ideal direito (ou esquerdo) graduado; então I é um ideal graduado de R .*

Lema 4.1.18 *Sejam R um anel graduado do tipo G e J um ideal direito graduado; então J^k é um ideal direito graduado de R , para todo o número natural k .*

Demonstração. Sejam $j_1, \dots, j_k \in J$. Como J é um ideal direito graduado, todas as componentes homogêneas de $j_1, \dots, j_k$ pertencem a J .

Designemos as componentes homogêneas de j_i por $j_{i1}, \dots, j_{in_i}$, para todo $i \in \{1, \dots, k\}$. Consequentemente, $j_{1i_1} \dots j_{ki_k} \in J^k$, para todo $i_1 \in \{1, \dots, n_1\}$, ..., para todo $i_k \in \{1, \dots, n_k\}$, o que nos leva a concluir que todas as componentes homogêneas de $j_1 \dots j_k$ pertencem a J^k . Logo, J^k é um ideal direito graduado de R . ■

Ao estudarmos certas propriedades de um anel graduado R do tipo G (respectivamente R -módulo graduado M) interessar-nos-á apenas considerar o que se passa com ideais graduados de R (respectivamente R -submódulos graduados de M). Assim, diremos que um anel graduado R (respectivamente R -módulo graduado M) satisfaz a propriedade $gr - P$ quando uma dada propriedade P é válida para ideais graduados de R (respectivamente R -submódulos graduados de M).

Com base no que foi dito anteriormente, um ideal direito próprio graduado I de um anel graduado R do tipo G diz-se **gr-maximal** se o único ideal direito graduado que contém estritamente I é o próprio R . Um ideal direito graduado não nulo I de um anel graduado R do tipo G diz-se **gr-minimal** se o único ideal direito graduado que está estritamente contido em I é o próprio ideal 0 .

Ao longo deste capítulo será apresentada a “versão graduada” de algumas definições já introduzidas para anéis/módulos.

4.2 Submódulos gr-essenciais

Analogamente ao que fizemos para a classe de R -módulos, podemos agora, na classe dos módulos graduados sobre anéis graduados, definir submódulos gr-essenciais.

Definição 4.2.1 *Seja R um anel graduado do tipo G . Um R -submódulo graduado N de um R -módulo graduado M diz-se **gr-essencial** e escreve-se $N \leq_{gr-e} M$, se $N' \cap N \neq 0$, qualquer que seja o R -submódulo graduado não nulo N' de M . Neste caso, dizemos que M é uma **extensão gr-essencial** de N .*

Uma propriedade fulcral ligada aos R -submódulos graduados de um R -módulo graduado M é o facto de um R -submódulo graduado N de M ser gr-essencial se e só se N for um R -submódulo essencial de M .

Proposição 4.2.2 *Sejam R um anel graduado do tipo G , M um R -módulo graduado e M' um R -submódulo graduado de M ; então as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. $M' \leq_{gr-e} M$;
2. para todo $m \in h(M) \setminus \{0\}$, existe $r \in R$ tal que $mr \in M' \setminus \{0\}$;
3. para todo $m \in M \setminus \{0\}$, existe $r \in R$ tal que $mr \in M' \setminus \{0\}$;
4. $M' \leq_e M$.

Demonstração. Suponhamos que $M' \leq_{gr-e} M$ e consideremos $m \in h(M) \setminus \{0\}$; então, como pelo Lema 4.1.14, mR é um R -submódulo graduado não nulo de M , concluímos que $mR \cap M' \neq 0$, isto é, existe $r \in R$ tal que $mr \in M' \setminus \{0\}$. Portanto, a condição 1) implica a condição 2).

Provemos, agora, que a condição 2) implica a condição 3). Suponhamos que a condição 2) é válida, consideremos $m \in M \setminus \{0\}$ e $m_1, \dots, m_n$ as suas componentes homogêneas. Por 2), podemos considerar $r'_1 \in R$ tal que $m_1 r'_1 \in M' \setminus \{0\}$. Como M' é um R -submódulo graduado de M , existe, em particular, uma componente homogênea r_1 de r'_1 tal que

$$m_1 r_1 \in M' \setminus \{0\}.$$

Seja, agora, i o menor dos elementos de $\{2, \dots, n\}$ tal que $m_i r_1 \neq 0$. Uma vez que $m_i r_1 \in h(M) \setminus \{0\}$, tal como anteriormente, concluímos que existe $r_2 \in h(R)$ de tal modo que $m_i r_1 r_2 \in M' \setminus \{0\}$. Repetindo o processo k vezes (com $k \leq n$), determinamos $s = r_1 \dots r_k$ tal que $ms \in M' \setminus \{0\}$. Consequentemente, a condição 3) é válida.

Verificámos já que a condição 3) implica a condição 4).

Pelas definições de submódulo gr-essencial e de submódulo essencial, concluímos que a condição 4) implica a condição 1). ■

Podemos, agora, enunciar uma Proposição análoga à Proposição 1.5.1 e ao Corolário 1.5.2 cuja demonstração é omitida em virtude da Proposição 4.2.2.

Proposição 4.2.3 *Seja R um anel graduado do tipo G ; então:*

- a) *Se C é um R -módulo graduado, B é um R -submódulo graduado de C e A é um R -submódulo graduado de B , então, $A \leq_{gr-e} C$ se e só se $A \leq_{gr-e} B$ e $B \leq_{gr-e} C$.*
- b) *Sejam X_1, X_2, Y_1, Y_2 R -submódulos graduados de um R -módulo graduado C . Se $X_1 \leq_{gr-e} Y_1$ e $X_2 \leq_{gr-e} Y_2$, então $X_1 \cap X_2 \leq_{gr-e} Y_1 \cap Y_2$.*
- c) *Se $r \in h(R)$ e I é um ideal direito graduado gr-essencial de R , então*

$$J = \{x \in R : rx \in I\} \leq_{gr-e} R_R.$$

Enunciaremos e demonstraremos um resultado análogo ao apresentado na Proposição 1.5.6. Para tal, necessitaremos de introduzir novas definições e resultados.

Definição 4.2.4 *Um anel graduado R do tipo G diz-se **gr-semisimples** se existirem ideais direitos graduados gr-minimais $L_1, \dots, L_n$ tais que $R = L_1 \oplus \dots \oplus L_n$.*

Definição 4.2.5 *Um anel graduado R do tipo G diz-se **gr-simples** se não possuir ideais graduados próprios não nulos.*

Definição 4.2.6 *Seja R um anel graduado do tipo G . Um R -módulo (à direita ou à esquerda) graduado não nulo M diz-se **gr-simples** se não possuir R -submódulos graduados próprios não nulos.*

Proposição 4.2.7 *Um anel graduado R do tipo G é gr-semisimples se e só se, para todo o ideal direito graduado I de R , existir um ideal direito graduado J de R tal que $R = I \oplus J$.*

Demonstração. Suponhamos que R é anel gr-semisimples, então $R = L_1 \oplus \dots \oplus L_n$, para alguns ideais direitos graduados gr-minimais $L_1, \dots, L_n$ de R . Seja I um ideal direito graduado de R e consideremos a família

$$T = \{X : X \text{ é um ideal direito graduado de } R \text{ tal que } X \cap I = 0\}$$

ordenada pela relação inclusão. Como $0 \in T$ e todas as cadeias ascendentes de elementos de T têm majorante em T , podemos aplicar o Lema de Zorn e afirmar que existe um elemento maximal de T - X . Suponhamos, agora, que $I \oplus X \neq R$, então, existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $L_i \not\subseteq I \oplus X$. Como L_i é um ideal direito gr-minimal e, pelo Lema 4.1.16, $I \oplus X$ é um ideal direito graduado de R ,

$L_i \cap (I \oplus X) = 0$ ou $L_i \cap (I \oplus X) = L_i$. Ora, como $L_i \not\subseteq (I \oplus X)$, concluímos que $L_i \cap (I \oplus X) = 0$, logo, $I \cap (L_i \oplus X) = 0$, o que é absurdo pela escolha de X . O absurdo resultou de supormos $I \oplus X \neq R$, logo, $I \oplus X = R$, como desejávamos provar.

Reciprocamente, suponhamos que, para todo o ideal direito graduado I de R , existe um ideal direito graduado J de R tal que $R = I \oplus J$.

Designemos por B a soma de todos os ideais direitos gr-minimais de R e observe-se que, pelo Lema 4.1.16, B é um ideal direito graduado de R . Por hipótese, existe um ideal direito graduado C tal que $R = B \oplus C$. Se $C \neq 0$, existe $c \in (C \cap h(R)) \setminus \{0\}$. Podemos considerar um ideal direito graduado M maximal entre os ideais direitos graduados de R para a relação $c \notin M$ e $M \subseteq cR$. Por hipótese, existe um ideal direito graduado N tal que $R = M \oplus N$, logo, $cR = cR \cap (M \oplus N)$. Consequentemente, $cR = M \oplus (cR \cap N)$. Pelo Lema 4.1.16, $M' = cR \cap N$ é um ideal direito graduado de R . Como M é um ideal direito graduado maximal entre os ideais direitos graduados de R contidos estritamente em cR e, uma vez que $M \oplus M' = cR$, concluímos que M' é um ideal direito gr-minimal de R , logo, $M' \subseteq B$. Ora, como $M' \subseteq C$ e $C \cap B = 0$, concluímos que $M' = 0$, o que é absurdo, uma vez que M' é um ideal direito gr-minimal de R . O absurdo resultou de supormos $C \neq 0$, logo, $C = 0$ e $R = \sum_{k \in K} S_k$, representando por $(S_k)_{k \in K}$ a família dos ideais direitos gr-minimais de R .

Ora, como $1 = s_{k_1} + \dots + s_{k_n}$, para alguns $k_1, \dots, k_n \in K$ e $s_{k_i} \in S_{k_i}$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, concluímos que $R = \bigoplus_{i=1}^l S_{k_i}$, onde S_{k_i} é um ideal direito gr-minimal de R , para todo $i \in \{1, \dots, l\}$. Consequentemente, R é anel gr-semisimples. ■

Corolário 4.2.8 *Seja R um anel graduado do tipo G gr-semisimples; então todo o ideal direito graduado não nulo de R é gerado por um elemento idempotente homogêneo de grau e .*

Demonstração. Seja I um ideal direito graduado não nulo de R . Pela Proposição 4.2.7, existe um ideal direito graduado J tal que $I \oplus J = R$. Em particular, $1 = i + j$, para alguns $i \in I \setminus \{0\}$ e $j \in J$. Uma vez que 1 é um elemento homogêneo de grau e , podemos supor que i e j são elementos homogêneos pertencentes a R_e . Logo, $I = iR$ e i é um elemento idempotente. ■

Proposição 4.2.9 *Um anel graduado R do tipo G é gr-semisimples se e só se R não contém ideais direitos próprios gr-essenciais.*

Demonstração. Suponhamos que R é anel gr-semisimples, então, pela Proposição 4.2.7, todo o ideal direito graduado é parcela directa de R , logo, não existem ideais direitos próprios gr-essenciais em R .

Reciprocamente, suponhamos que R não contém ideais direitos próprios gr-essenciais. Seja I um ideal direito graduado de R . Podemos escolher um ideal

direito graduado K maximal entre os ideais direitos graduados de R relativamente à propriedade $I \cap K = 0$, então,

$$(I \oplus K)_R \leq_{gr-e} R_R.$$

Com efeito, se J é um ideal direito graduado de R tal que $(I \oplus K) \cap J = 0$, então $(J \oplus K) \cap I = 0$. Ora, como pelo Lema 4.1.16, $J \oplus K$ é um ideal direito graduado de R , por definição de K , $J = 0$. Logo, $(I \oplus K)_R \leq_{gr-e} R_R$. Como R não contém ideais direitos próprios gr-essenciais, $R = I \oplus K$ e, pela Proposição 4.2.7, R é anel gr-semisimples. ■

Depois de introduzirmos o conceito de submódulo graduado gr-essencial de um R -módulo graduado M , estamos em condições de definir R -submódulo gr-singular de M .

O primeiro passo será verificar que o R -submódulo singular de um R -módulo graduado M não é necessariamente um R -submódulo graduado de M , como se comprova com o seguinte Exemplo:

Exemplo 4.2.10 Consideremos em $R = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ uma estrutura de anel definida do seguinte modo:

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b') \text{ e } (a, b) \cdot (a', b') = (aa' + bb', ab' + a'b).$$

Se considerarmos $R_0 = \mathbb{Z}_2 \oplus 0$ e $R_1 = 0 \oplus \mathbb{Z}_2$, definimos em R uma graduação do tipo $(\mathbb{Z}_2, +)$. Com efeito, $R = R_0 \oplus R_1$ e, dada a forma como foi definido o produto, $R_0 R_0 \subseteq R_0$, $R_1 R_0 \subseteq R_1$, $R_0 R_1 \subseteq R_1$ e $R_1 R_1 \subseteq R_0$, o que nos leva a afirmar que R é um anel graduado do tipo $(\mathbb{Z}_2, +)$.

Com vista a descrevermos $Z(R_R)$ necessitamos de determinar os R -submódulos essenciais de R_R .

Seja M qualquer R -submódulo de R_R . Se $(1, 0) \in M$, então, como $(1, 0)$ é a identidade de R , $M = R$. Se $(0, 1) \in M$, então $(0, 1)(0, 1) \in M$, isto é, $(1, 0) \in M$, logo, $M = R$. Assim, os únicos R -submódulos de R_R são R , $\{(0, 0)\}$ e $X = \{(0, 0), (1, 1)\}$, o que nos permite concluir que X é um R -submódulo essencial de R_R .

Uma vez que

$$rann_R((1, 0)) = rann_R((0, 1)) = \{(0, 0)\}$$

e

$$rann_R((1, 1)) = \{(a, b) \in R : (1, 1)(a, b) = (0, 0)\} = \{(a, -a) : a \in \mathbb{Z}_2\} = X,$$

concluimos que $Z(R_R) = \{(0, 0), (1, 1)\}$. No entanto, $Z(R_R)$ não é um R -submódulo graduado de R_R , uma vez que as componentes homogêneas de $(1, 1)$ - $(1, 0)$ e $(0, 1)$ não pertencem a $Z(R_R)$.

Em seguida definiremos R -submódulo gr-singular de um R -módulo graduado M sobre um anel graduado R do tipo G . Para tal, para cada $\sigma \in G$, consideremos o subgrupo aditivo

$$(Z^g(M))_\sigma = \{x_\sigma \in M_\sigma : rann_R(x_\sigma) \leq_{gr-e} R_R\}.$$

Pela Proposição 4.2.2,

$$(Z^g(M))_\sigma = \{x_\sigma \in M_\sigma : rann_R(x_\sigma) \leq_e R_R\}.$$

Definimos

$$Z^g(M) = \bigoplus_{\sigma \in G} (Z^g(M))_\sigma.$$

Por definição, $Z^g(M)$ é um subgrupo aditivo de M .

Sejam $z \in Z^g(M) \setminus \{0\}$ e $r \in R \setminus \{0\}$. Designemos por $r_{t_1}, \dots, r_{t_n}$ as componentes homogêneas de r e por $z_{s_1}, \dots, z_{s_k}$ as componentes homogêneas de z , com $s_1, \dots, s_k, t_1, \dots, t_n \in G$. Por definição de M , para todo $i \in \{1, \dots, k\}$, para todo $j \in \{1, \dots, n\}$, $z_{s_i} r_{t_j} \in M_{s_i t_j}$. Por outro lado,

$$rann_R(z_{s_i} r_{t_j}) = \{r \in R : r_{t_j} r \in rann_R(z_{s_i})\},$$

para todo $i \in \{1, \dots, k\}$, para todo $j \in \{1, \dots, n\}$. Uma vez que $z_{s_i} \in (Z^g(M))_{s_i}$, para todo $i \in \{1, \dots, k\}$, $rann_R(z_{s_i}) \leq_{gr-e} R_R$, para todo $i \in \{1, \dots, k\}$. Ora, como pela Proposição 4.2.3,

$$rann_R(z_{s_i} r_{t_j}) \leq_{gr-e} R_R,$$

concluimos que $z_{s_i} r_{t_j} \in (Z^g(M))_{s_i t_j}$, para todo $i \in \{1, \dots, k\}$, para todo $j \in \{1, \dots, n\}$. Logo,

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n z_{s_i} r_{t_j} \in Z^g(M),$$

isto é, $zr \in Z^g(M)$. Assim, $Z^g(M)$ é um R -submódulo de M que tem a particularidade de todas as componentes homogêneas dos elementos não nulos de $Z^g(M)$ ainda pertencerem a $Z^g(M)$, isto é, $Z^g(M)$ é um R -submódulo graduado de M .

Definição 4.2.11 *Sejam R um anel graduado do tipo G e M um R -módulo graduado. O R -submódulo graduado $Z^g(M)$ de M é designado por **R -submódulo gr-singular de M** .*

Definição 4.2.12 *Seja R um anel graduado do tipo G . Afirmamos que um R -módulo à direita graduado M é **gr-singular** se $Z^g(M) = M$ e é **gr-não singular** se $Z^g(M) = 0$. Analogamente, definimos R -módulo à esquerda graduado gr-singular e R -módulo à esquerda graduado gr-não singular.*

Definição 4.2.13 *Um anel graduado R do tipo G diz-se **gr-singular à direita** se $Z^g(R_R) = R$ e diz-se **gr-não singular à direita** se $Z^g(R_R) = 0$. De forma análoga, definimos anel graduado **gr-singular à esquerda** e **gr-não singular à esquerda**.*

No Exemplo 4.2.10, temos $Z^g(R_R) = \{(0, 0)\}$ e $Z(R_R) = \{(0, 0), (1, 1)\}$, o que nos leva a concluir que o R -submódulo singular e o R -submódulo gr-singular de um R -módulo graduado podem ser diferentes. Concluimos, ainda, que um anel graduado pode ser gr-não singular à direita sem ser não singular à direita.

4.3 Anéis com graduação não degenerada

Frequentemente, quando se estuda um anel graduado R do tipo G , certas propriedades de R são deduzidas a partir de propriedades apresentadas pelo anel base de R - R_e . Para deduzir tais propriedades é comum impor-se certas condições sobre o tipo de graduação de R .

Nesta secção estudaremos anéis graduados que satisfazem uma condição extra - a graduação é não degenerada. Estudaremos também um tipo especial de anéis graduados que possuem graduação não degenerada - os anéis fortemente graduados.

Tal como indicado na Secção 4.1, dados um anel graduado R do tipo G e um ideal direito (ou esquerdo) graduado I de R , designamos as componentes homogéneas de I por I_t , para todo $t \in G$. Assim, dado um elemento $r \in h(R)$, designamos por $(rR)_e$ a componente homogénea de grau e do ideal direito graduado rR e designamos por $(Rr)_e$ a componente homogénea de grau e do ideal esquerdo graduado Rr .

Definição 4.3.1 *Seja R um anel graduado do tipo G . Dizemos que R tem **graduação não degenerada à direita** se, sempre que $(rR)_e = 0$, então $r = 0$, para todo $r \in h(R)$. Analogamente, dizemos que R tem **graduação não degenerada à esquerda** se, sempre que $(Rr)_e = 0$, então $r = 0$, para todo $r \in h(R)$. O anel R tem **graduação não degenerada** se tiver graduação não degenerada à esquerda e não degenerada à direita.*

Observe-se que, dado um elemento homogéneo não nulo r de grau t de um anel graduado R do tipo G , $(rR)_e = rR_{t-1}$. Assim,

Observação 4.3.2 *Um anel graduado R do tipo G tem graduação não degenerada à direita se e só se, para todo $\sigma \in G$, $r_\sigma R_{\sigma^{-1}} = 0$ implica $r_\sigma = 0$, para todo $r_\sigma \in R_\sigma$.*

O anel R apresentado no Exemplo 4.1.4 é um exemplo de um anel com graduação não degenerada. Para provarmos tal facto, consideremos um elemento

homogêneo $r \in R \setminus \{0\}$ de grau k tal que $-n \leq k \leq n$. Tomemos a matriz transposta de $r - s'$ e substitua-se cada entrada não nula da matriz s' por 1. Designemos por s a matriz obtida. Então, $s \in R_{-k}$ e $rs \neq 0$, pelo que $(rR)_0 \neq 0$, o que nos leva a concluir que $(r'R)_0 = 0$ implica $r' = 0$, para todo o elemento homogêneo r' de R_k tal que $-n \leq k \leq n$. Analogamente provamos que $(Rr)_0 = 0$ implica $r = 0$, para todo o elemento homogêneo r de R_k tal que $-n \leq k \leq n$. Uma vez que $R_k = 0$, para todo o número inteiro k tal que $|k| \geq n$, concluímos que R tem graduação não degenerada.

Facilmente se verifica que os anéis graduados apresentados no Exemplo 4.1.6 e no Exemplo 4.1.7 são anéis com graduação não degenerada.

A graduação não degenerada à direita de um anel está relacionada com uma propriedade introduzida em [28] por Nastasescu e Van Oystaeyen - a propriedade **E**. Assim, dizemos que um anel graduado R do tipo G satisfaz a **propriedade E**, se todo o ideal direito graduado não nulo de R intersecta R_e não trivialmente.

Proposição 4.3.3 *Seja R um anel graduado do tipo G . O anel R tem graduação não degenerada à direita (respectivamente à esquerda) se e só se todo o ideal direito (respectivamente esquerdo) graduado não nulo intersecta R_e não trivialmente, isto é, R satisfaz a propriedade **E**.*

Demonstração. Suponhamos que todo o ideal direito graduado não nulo de R intersecta R_e não trivialmente. Consideremos $\sigma \in G$ e $r_\sigma \in R_\sigma \setminus \{0\}$, então $r_\sigma R$ é um ideal direito graduado não nulo de R e

$$0 \neq r_\sigma R \cap R_e = r_\sigma R_{\sigma^{-1}}.$$

Consequentemente, pela Observação 4.3.2, R tem graduação não degenerada à direita.

Suponhamos, agora, que R tem graduação não degenerada à direita e seja I um ideal direito graduado não nulo de R . Consideremos um elemento homogêneo não nulo i pertencente a I e designemos o grau de i por σ . Por hipótese, existe $r_{\sigma^{-1}} \in R_{\sigma^{-1}}$ tal que $ir_{\sigma^{-1}} \neq 0$; logo, como I é ideal direito, $ir_{\sigma^{-1}} \in I$, consequentemente, $I \cap R_e \neq 0$, como desejávamos provar. ■

No caso particular de o subanel R_e de um anel graduado R do tipo G ser semiprimo, as definições de anel com graduação não degenerada à direita e anel com graduação não degenerada à esquerda são equivalentes. Assim,

Proposição 4.3.4 *Seja R um anel graduado do tipo G tal que R_e é anel semiprimo. Então, R tem graduação não degenerada à direita se e só se R tem graduação não degenerada à esquerda.*

Demonstração. Suponhamos que R tem graduação não degenerada à direita e que existe $r \in h(R) \setminus \{0\}$ de grau σ tal que $(Rr)_e = 0$, logo, $R_{\sigma^{-1}}r = 0$. Consequentemente, $(rR_{\sigma^{-1}})^2 = 0$ e, como $rR_{\sigma^{-1}}$ é um ideal direito do anel semiprimo

$R_e, rR_{\sigma^{-1}} = 0$. Como, por hipótese, R tem graduação não degenerada à direita, $r = 0$, o que é absurdo. Provamos, assim, que R tem graduação não degenerada à esquerda. Analogamente provamos que se R tem graduação não degenerada à esquerda, então R tem graduação não degenerada à direita. ■

Em seguida introduziremos algumas definições - “anel gr-semiprimo” e “anel gr-primo” - e verificaremos que, se R é um anel graduado do tipo G , gr-semiprimo com suporte finito, então R tem graduação não degenerada e o anel base R_e é semiprimo.

Definição 4.3.5 *Um anel graduado R do tipo G diz-se **gr-primo** se, dados dois ideais graduados A, B de R tais que $AB = 0$, se tem $A = 0$ ou $B = 0$.*

Definição 4.3.6 *Um anel graduado R do tipo G diz-se **gr-semiprimo** se não contém ideais graduados nilpotentes não nulos.*

Observe-se que um anel graduado R é gr-semiprimo se e só se R não contém ideais direitos (ou esquerdos) graduados nilpotentes não nulos. O anel R é gr-primo se e só se, dados dois ideais direitos (ou esquerdos) graduados A, B de R tais que $AB = 0$, se tem $A = 0$ ou $B = 0$.

Com vista a demonstrar o resultado pretendido, introduzimos um resultado acerca de grupos.

Lema 4.3.7 *Sejam G um grupo, n e d números naturais e $\lambda_1, \dots, \lambda_{nd}$ uma sequência de elementos de G não necessariamente distintos. Designemos os produtos da forma $\prod_{j=1}^i \lambda_j$ por α_i , para todo $1 \leq i \leq nd$. Suponhamos que existe um subconjunto X de G tal que $e \in X$, $\#(X) = n$ e $\alpha_i \in X$, para todo i tal que $1 \leq i \leq nd$. Então, existem*

$$j_0, j_1, \dots, j_d \in \{0, 1, \dots, nd\}$$

tais que $0 \leq j_0 < j_1 < \dots < j_d \leq nd$ e:

$$e = \lambda_{j_0+1} \lambda_{j_0+2} \dots \lambda_{j_1} = \lambda_{j_1+1} \dots \lambda_{j_2} = \dots = \lambda_{j_{d-1}+1} \dots \lambda_{j_d}$$

Demonstração. Suponhamos que existem $j_1, \dots, j_d \in \{1, \dots, nd\}$ tais que $1 \leq j_1 < \dots < j_d \leq nd$ e

$$\prod_{i=1}^{j_1} \lambda_i = \dots = \prod_{i=1}^{j_d} \lambda_i = e.$$

Então,

$$e = \lambda_1 \dots \lambda_{j_1} = \lambda_{j_1+1} \dots \lambda_{j_2} = \dots = \lambda_{j_{d-1}+1} \dots \lambda_{j_d}.$$

Fazendo $j_0 = 0$, concluímos que o lema é válido.

Suponhamos agora que não existem d produtos da forma $\prod_{j=1}^i \lambda_j$, com $i \in \{1, \dots, nd\}$, iguais a e , então, existem pelo menos $d + 1$ produtos da forma $\alpha_{j_i} = \prod_{k=1}^{j_i} \lambda_k$, com $i \in \{0, \dots, d\}$, onde

$$1 \leq j_0 < j_1 < \dots < j_d \leq nd$$

que são iguais a um dado elemento $a \in X$. Ora, $\alpha_{j_0} = \alpha_{j_1}$ implica

$$\alpha_{j_0} = \lambda_1 \dots \lambda_{j_0} = \lambda_1 \dots \lambda_{j_0} \lambda_{j_0+1} \dots \lambda_{j_1} = \alpha_{j_1}.$$

Portanto, $\lambda_{j_0+1} \dots \lambda_{j_1} = e$.

Repetindo o processo d vezes determinamos d produtos da forma $\lambda_{j_l+1} \dots \lambda_{j_{l+1}}$, com $0 \leq l \leq d - 1$, iguais a e . Provamos, assim, que existem $j_0, \dots, j_d \in \{0, 1, \dots, nd\}$ tais que $0 \leq j_0 < j_1 < \dots < j_d \leq nd$ e

$$e = \lambda_{j_0+1} \lambda_{j_0+2} \dots \lambda_{j_1} = \lambda_{j_1+1} \dots \lambda_{j_2} = \dots = \dots \lambda_{j_d}.$$

■

Proposição 4.3.8 *Seja R um anel graduado do tipo G tal que o suporte de R tem cardinalidade finita. Seja $n = \# \text{sup}(R)$. Tem-se que:*

- 1) *se A é um ideal direito graduado de R tal que $A_e = 0$, $A^n = 0$;*
- 2) *se A é um ideal direito de R_e tal que $A^d = 0$, para algum número natural d , então $(AR)^{nd} = 0$;*
- 3) *se R é anel gr-semiprimo, R_e é anel semiprimo e R tem graduação não degenerada.*

Demonstração. 1) Como A é ideal direito graduado,

$$A^n = \sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_n \in G} A_{\lambda_1} \dots A_{\lambda_n}.$$

Para provarmos a alínea é, pois, suficiente provar que $A_{\lambda_1} \dots A_{\lambda_n} = 0$, para qualquer sequência de elementos $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in G$. Tal facto é verdade no caso de $\lambda_1 \dots \lambda_i \notin \text{sup}(R)$, para algum $i \in \{1, \dots, n\}$.

Seja $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ uma sequência de elementos de G e suponhamos que

$$\prod_{j=1}^i \lambda_j \in \text{sup}(R),$$

para todo $1 \leq i \leq n$. Como $e \in \text{sup}(R)$ e $\text{sup}(R)$ tem n elementos, podemos aplicar o Lema 4.3.7 no caso $d = 1$ e afirmar que existem $j_0, j_1 \in \mathbb{N}_0$ tais que $0 \leq j_0 < j_1 \leq n$ e $\lambda_{j_0+1} \dots \lambda_{j_1} = e$. Logo,

$$A_{\lambda_{j_0+1}} \dots A_{\lambda_{j_1}} \subseteq A_e = 0;$$

portanto, $A_{\lambda_1} \dots A_{\lambda_n} = 0$, o que nos leva a concluir que $A^n = 0$.

2) Suponhamos que A é um ideal direito de R_e tal que $A^d = 0$, para algum número natural d , e consideremos $R' = AR$. Então, R' é um ideal direito graduado de R com $(R')_e = A$ e

$$(AR)^{nd} = \sum_{t_1, \dots, t_{nd} \in G} R'_{t_1} \dots R'_{t_{nd}}.$$

Seja $t_1, \dots, t_{nd}$ uma sequência de elementos de G . Se $\prod_{k=1}^j t_k \notin \text{sup}(R)$, para algum $1 \leq j \leq nd$, então $R'_{t_1} \dots R'_{t_{nd}} = 0$. Caso contrário, podemos aplicar o Lema 4.3.7 e afirmar que existem $j_0, \dots, j_d \in \{0, \dots, nd\}$ tais que

$$0 \leq j_0 < j_1 < \dots < j_d \leq nd$$

e existem d produtos da forma $Y_i = \prod_{k=j_{(i-1)}+1}^{j_i} t_k$, com $1 \leq i \leq d$, iguais a e . Assim,

$$\begin{aligned} R'_{t_1} \dots R'_{t_{nd}} &= R'_{t_1} \dots R'_{t_{j_0}} (R'_{t_{j_0+1}} \dots R'_{t_{j_1}}) (R'_{t_{j_1+1}} \dots R'_{t_{j_2}}) \dots (\dots R'_{t_{j_d}}) \dots R'_{t_{nd}} \\ &\subseteq R'_{t_1} \dots A^d \dots R'_{t_{nd}} = 0. \end{aligned}$$

Consequentemente $(AR)^{nd} = 0$, como desejávamos provar.

3) Suponhamos que R é anel gr-semiprimo e que existe um ideal direito A de R_e e um número natural d tal que $A^d = 0$, então, pela alínea 2), $(AR)^{nd} = 0$. Como R é anel gr-semiprimo, $AR = 0$, o que implica $A = 0$. Assim, R_e é anel semiprimo.

Da alínea 1), concluímos que R tem graduação não degenerada à direita. Com efeito, se r é elemento homogêneo de R tal que $(rR)_e = 0$, então $(rR)^n = 0$ e, pelo facto de R ser anel gr-semiprimo, $rR = 0$, logo, $r = 0$. Provamos, assim, que R tem graduação não degenerada à direita. Como R_e é anel semiprimo, pela Proposição 4.3.4, concluímos que R tem graduação não degenerada à esquerda.

■

Na Proposição anterior provámos que, se considerarmos um anel graduado R do tipo G cujo suporte é finito, então, se R for anel gr-semiprimo, R_e é anel semiprimo e R tem graduação não degenerada. A recíproca é também verdadeira.

Proposição 4.3.9 *Seja R um anel graduado do tipo G com graduação não degenerada tal que R_e é anel semiprimo; então R é anel gr-semiprimo.*

Demonstração. Seja I um ideal graduado de R tal que $I^k = 0$, para algum número natural k . Em particular, $(I \cap R_e)^k = 0$. Como R_e é anel semiprimo, $I \cap R_e = 0$. Pela Proposição 4.3.3, concluímos que $I = 0$, logo, R é um anel gr-semiprimo, como desejávamos provar. ■

Em seguida provaremos que os anéis graduados com graduação não degenerada que têm suporte finito e anel base semisimples são Artinianos. Para tal, atendamos ao seguinte Lema:

Lema 4.3.10 *Sejam R um anel graduado do tipo G com graduação não degenerada e $r \in R$ um elemento homogêneo; então, $\text{rann}_R(r) = 0$ se e só se $\text{rann}_{R_e}(r) = 0$ e $\text{lann}_R(r) = 0$ se e só se $\text{lann}_{R_e}(r) = 0$.*

Demonstração. Sejam R um anel graduado do tipo G com graduação não degenerada e r um elemento homogêneo de R . Se $\text{rann}_R(r) = 0$, temos $\text{rann}_{R_e}(r) = 0$. Por outro lado, suponhamos que $\text{rann}_{R_e}(r) = 0$ e que existe $s \in \text{rann}_R(r) \setminus \{0\}$. Então, $rs_t = 0$, para qualquer componente homogênea s_t de s . Ora, pelo facto de R ter graduação não degenerada, existe $a_{t-1} \in R_{t-1}$ tal que $s_t a_{t-1} \in R_e \setminus \{0\}$, logo,

$$s_t a_{t-1} \in \text{rann}_{R_e}(r) \setminus \{0\},$$

o que é absurdo. Provamos, assim, que $\text{rann}_{R_e}(r) = 0$ se e só se $\text{rann}_R(r) = 0$. Analogamente provamos que $\text{lann}_{R_e}(r) = 0$ se e só se $\text{lann}_R(r) = 0$. ■

Teorema 4.3.11 [*Cohen, Rowen*] [9] *Seja R um anel graduado do tipo G com graduação não degenerada tal que R_e é anel semisimples. Então:*

- 1) *para todo $t \in \text{sup}(R)$, R_t é finitamente gerado como R_e -módulo à direita e à esquerda;*
- 2) *se $\text{sup}(R)$ for finito, então R é simultaneamente um anel Artiniano à direita e à esquerda.*

Demonstração. Seja R um anel graduado do tipo G nas condições enunciadas no teorema.

Pelo Lema 1.2.12, 1 é igual à soma de k elementos idempotentes - $e_1, \dots, e_k \in R_e$ tais que $e_i e_j = 0$, para todos $i, j \in \{1, \dots, k\}$, com $i \neq j$, e $e_j R_e e_j$ é anel de divisão, para todo $j \in \{1, \dots, k\}$. Consequentemente, dado $t \in G$,

$$R_t = 1.R_t.1 = (e_1 + \dots + e_k)R_t(e_1 + \dots + e_k) = \sum_{i,j=1}^k e_i R_t e_j.$$

1) Começemos por mostrar que, para todos $1 \leq i, j \leq k$ e, para todo $t \in G$, existe $y \in R_t$ tal que $e_j R_t e_i = y e_i R_e e_i$.

Sejam $i, j \in \{1, \dots, k\}$. Suponhamos que $e_j R_t e_i \neq 0$. Uma vez que R tem graduação não degenerada e

$$e_j R_t e_i \subseteq R_e R_t R_e \subseteq R_t,$$

podemos concluir que $e_j R_t e_i R_{t-1} \neq 0$. Por outro lado, como R_e é anel semisimples, R_e é anel semiprimo, logo,

$$(e_j R_t e_i R_{t-1})^2 \neq 0,$$

o que nos leva a concluir que $e_j R_t e_i R_{t-1} e_j \neq 0$. Seja $x_{t-1} \in e_i R_{t-1} e_j$ tal que $A = e_j R_t x_{t-1} \neq 0$; então A é um ideal esquerdo não nulo do anel de divisão $e_j R_e e_j$, portanto,

$$A = e_j R_t x_{t-1} = e_j R_e e_j.$$

Assim, existe $y \in e_j R_t$ tal que $e_j = (e_j)^2 = y x_{t-1}$. Portanto,

$$y e_i R_e e_i \subseteq e_j R_t e_i = y x_{t-1} R_t e_i \subseteq y e_i R_e e_i,$$

logo,

$$e_j R_t e_i = y e_i R_e e_i \subseteq y R_e.$$

Consequentemente, $R_t = \sum_{n=1}^{k^2} y_n R_e$, para alguns $y_1, \dots, y_{k^2} \in R_t$. Portanto, R_t é um R_e -módulo à direita finitamente gerado. Analogamente, provamos que R_t é um R_e -módulo à esquerda finitamente gerado.

2) Seja R_t uma componente homogênea não nula de R .

Como R_e é anel Artiniano e, pela alínea 1), R_t é um R_e -módulo à direita finitamente gerado, então R_t é um R_e -módulo à direita Artiniano. Consequentemente, como $R = \bigoplus_{t \in \text{sup}(R)} R_t$, R é uma soma directa finita de R_e -módulos à direita Artinianos, logo, R é um R_e -módulo à direita Artiniano. Uma vez que R_e é um subanel de R , R é anel Artiniano à direita. Analogamente provamos que R é anel Artiniano à esquerda, como desejávamos demonstrar. ■

Em seguida relacionaremos o facto de um anel graduado R do tipo G ser um domínio com o facto da sua componente homogênea de grau e - R_e ser um domínio. É imediato que, se R é um domínio, R_e também o é. Provaremos que, no caso de R ter graduação não degenerada, G ser um grupo policíclico-infinito e R_e ser um domínio, R ainda é domínio.

Lema 4.3.12 *Seja R um anel graduado do tipo G com graduação não degenerada tal que R_e é anel primo; então $\text{sup}(R)$ é um subgrupo de G .*

Demonstração. Seja $G' = \text{sup}(R)$. Como $1 \in R_e$, $e \in G'$.

Por outro lado, se $t \in G'$, existe $r_t \in R_t \setminus \{0\}$. Como R tem graduação não degenerada à direita, $r_t R_{t-1} \neq 0$, logo, $R_{t-1} \neq 0$, o que nos permite concluir que $t^{-1} \in G'$.

Para provarmos que G' é grupo basta verificar que, se $t, s \in G'$, então $ts \in G'$. Com vista a um absurdo, suponhamos que existem $t, s \in G'$ tais que $R_t R_s = 0$. Logo,

$$(R_{t-1} R_t)(R_s R_{s-1}) = 0.$$

Uma vez que R_e é anel primo e $R_{t-1}R_t$, R_sR_{s-1} são ideais de R_e , então $R_{t-1}R_t = 0$ ou $R_sR_{s-1} = 0$, o que contraria o facto de R ter graduação não degenerada. Provamos, assim, que

$$0 \neq R_t R_s \subseteq R_{ts},$$

logo, $ts \in G'$. Estão, pois, reunidas as condições necessárias para afirmar que G' é um grupo, como desejávamos provar. ■

Lema 4.3.13 *Seja R um anel graduado do tipo G com graduação não degenerada tal que R_e é domínio e $\sup(R) \simeq \mathbb{Z}$; então R é domínio.*

Demonstração. Identifiquemos $\sup(R)$ com $\mathbb{Z}$. Com vista a um absurdo, suponhamos que existem $a, b \in R \setminus \{0\}$ tais que $ab = 0$. Consideremos as componentes homogêneas de maior grau de, respectivamente, a e $b - a_t$ e b_s , logo, $a_t b_s = 0$. Pelo facto de R ter graduação não degenerada, existem $a', b' \in R$ tais que $a' a_t \in R_e \setminus \{0\}$ e $b_s b' \in R_e \setminus \{0\}$. Como $(a' a_t)(b_s b') = 0$ e R_e é, por hipótese, um domínio, $a' a_t = 0$ ou $b_s b' = 0$ - o que é absurdo. Provamos, assim, que R é um domínio. ■

Corolário 4.3.14 *Seja R um anel graduado do tipo G tal que R tem graduação não degenerada, R_e é domínio e G é um grupo policíclico-infinito; então R é domínio.*

Demonstração. Seja R_1 um anel graduado do tipo G^1 tal que R_1 tem graduação não degenerada, $(R_1)_e$ é domínio e G^1 é um grupo policíclico-infinito. Como $(R_1)_e$ é domínio, $(R_1)_e$ é anel primo, então, pelo Lema 4.3.12, $G^2 = \sup(R_1)$ é um subgrupo de G^1 . Logo, pela Proposição 1.11.3, G^2 é um grupo policíclico-infinito, o que nos leva a concluir que G^2 possui uma série subnormal

$$\{e\} = G_1^2 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq G_n^2 = G^2,$$

onde G_i^2/G_{i-1}^2 é um grupo cíclico infinito, para todo $i \in \{2, \dots, n\}$.

A demonstração é feita por indução no comprimento da série subnormal do suporte do anel graduado considerado.

Se $n = 1$, então $R_1 = (R_1)_e$, logo, R_1 é domínio.

Seja $n > 1$ e suponhamos que, para todo o anel graduado R_2 do tipo G^3 tal que R_2 tem graduação não degenerada, $(R_2)_e$ é domínio e G^3 é um grupo policíclico-infinito tal que o grupo $G^4 = \sup(R_2)$ possui uma série subnormal de comprimento $n - 1$

$$\{e\} = G_1^4 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq G_{n-1}^4 = G^4,$$

onde G_i^4/G_{i-1}^4 é um grupo cíclico infinito, para todo $i \in \{2, \dots, n-1\}$, se tem que R_2 é domínio.

Seja R_3 um anel graduado do tipo G^5 tal que R_3 tem graduação não degenerada, $(R_3)_e$ é domínio e G^5 é um grupo policíclico-infinito tal que $G^6 = \sup(R_3)$ possui uma série subnormal de comprimento n

$$\{e\} = G_1^6 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq G_n^6 = G^6,$$

onde G_i^6/G_{i-1}^6 é um grupo cíclico infinito, para todo $i \in \{2, \dots, n\}$. Uma vez que $(R_3)^{G_{n-1}^6}$ é um anel graduado do tipo G_{n-1}^6 tal que $(R_3)^{G_{n-1}^6}$ tem graduação não degenerada, $((R_3)^{G_{n-1}^6})_e = (R_3)_e$ é domínio, G_{n-1}^6 é um grupo policíclico-infinito tal que

$$G_{n-1}^6 = \sup((R_3)^{G_{n-1}^6})$$

e G_{n-1}^6 possui uma série subnormal

$$\{e\} = G_1^6 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq G_{n-1}^6,$$

onde G_i^6/G_{i-1}^6 é um grupo cíclico infinito, para todo $i \in \{2, \dots, n-1\}$, por hipótese de indução, $(R_3)^{G_{n-1}^6}$ é domínio.

Consideremos o anel graduado do tipo $G^6/G_{n-1}^6 - S = (R_3)_{G^6/G_{n-1}^6}$. Verificaremos, em seguida, que este anel tem graduação não degenerada. Seja r um elemento homogêneo não nulo de S de grau $t \in G^6/G_{n-1}^6$; então

$$r = r_{t_1} + \dots + r_{t_n},$$

para alguns $r_{t_1} \in (R_3)_{t_1} \setminus \{0\}$, ..., $r_{t_n} \in (R_3)_{t_n} \setminus \{0\}$, com $t_1, \dots, t_n \in G^6$ tais que

$$\pi(t_1) = \dots = \pi(t_n) = t,$$

onde

$$\pi : G^6 \rightarrow G^6/G_{n-1}^6$$

é o epimorfismo canônico. Como R_3 tem graduação não degenerada, existe $r' \in (R_3)_{t_1}$ tal que $r_{t_1}r' \neq 0$, logo, $rr' \neq 0$. Uma vez que $r' \in S_{t_1}$, concluímos que $(rS)_e \neq 0$. Consequentemente, S tem graduação não degenerada à direita. Por outro lado, como o anel base de $S - (R_3)^{G_{n-1}^6}$ é domínio, pela Proposição 4.3.4, S tem graduação não degenerada à esquerda, portanto, tem graduação não degenerada. Além disso, tem-se que $\sup(S) = G^6/G_{n-1}^6$. Como G^6/G_{n-1}^6 é um grupo infinito cíclico, $G^6/G_{n-1}^6 \simeq \mathbb{Z}$. Uma vez que $(R_3)_{G^6/G_{n-1}^6}$ é um anel graduado do tipo G^6/G_{n-1}^6 com graduação não degenerada e cujo anel base $(R_3)^{G_{n-1}^6}$ é domínio, pelo Lema 4.3.13, R_3 é domínio.

Provamos, assim, que todo o anel graduado R do tipo G tal que R tem graduação não degenerada, R_e é domínio e G é um grupo policíclico-infinito é um domínio ■

Do Corolário anterior deduz-se que, se R for um domínio e G for um grupo policíclico-infinito, o anel de grupo RG é um domínio. Por outro lado, como os anéis da forma $S = R[x, x^{-1}; \varphi]$, onde R é um anel e φ é um automorfismo de R , são anéis graduados do tipo $\mathbb{Z}$ com graduação não degenerada, concluimos que, se R for um domínio, o anel S ainda é um domínio.

Corolário 4.3.15 *Se R é um domínio e G é um grupo policíclico-infinito, o anel RG é domínio.*

Corolário 4.3.16 *Se R é um domínio e φ é um automorfismo de R , o anel $R[x, x^{-1}; \varphi]$ é domínio.*

Introduzimos, agora, um tipo especial de graduação - a graduação forte. Este conceito foi introduzido por E.C.Dade em [10].

Definição 4.3.17 *Um anel graduado R do tipo G diz-se **fortemente graduado** se $R_t R_s = R_{ts}$, para todos $t, s \in G$.*

Podemos, agora, provar que todo o anel fortemente graduado tem graduação não degenerada.

Proposição 4.3.18 *Seja R um anel fortemente graduado; então R tem graduação não degenerada.*

Demonstração. Seja R um anel fortemente graduado do tipo G . Se r é um elemento homogêneo não nulo de grau σ tal que $(Rr)_e = 0$, então,

$$R_{\sigma^{-1}}r = 0 = R_{\sigma}R_{\sigma^{-1}}r = R_e r,$$

o que é absurdo. Provamos, assim, que R tem graduação não degenerada à esquerda. Analogamente, provamos que R tem graduação não degenerada à direita. ■

No entanto, a recíproca da Proposição 4.3.18 não é verdadeira. Como contra-exemplo podemos considerar o anel $R = M_n(F)$ apresentado no Exemplo 4.1.4, onde F é um anel arbitrário e n é um número natural maior ou igual a 2. Vimos já que R tem graduação não degenerada; no entanto, como verificaremos em seguida, R não é um anel fortemente graduado. De facto, como $R_{n+1} = 0$, temos que $R_{n+1}R_{-n-1} = 0$, logo, $R_{n+1}R_{-n-1} \neq R_0$, o que nos leva a concluir que R não é um anel fortemente graduado.

Uma técnica frequentemente utilizada para verificar se um anel graduado R do tipo G é fortemente graduado consiste em determinar se a identidade de R pertence a $R_t R_{t^{-1}}$, para todo $t \in G$. Com efeito, verificaremos que esta condição é equivalente à condição “ R é anel fortemente graduado”.

Proposição 4.3.19 *Um anel graduado R do tipo G é fortemente graduado se e só se $1 \in R_t R_{t^{-1}}$, para todo $t \in G$.*

Demonstração. Seja R um anel graduado do tipo G . Se R é fortemente graduado, então, $R_t R_{t^{-1}} = R_e$, para todo $t \in G$; em particular, $1 \in R_t R_{t^{-1}}$, para todo $t \in G$.

Reciprocamente, se $1 \in R_t R_{t^{-1}}$, para todo $t \in G$, então $R_e = R_t R_{t^{-1}}$, para todo $t \in G$; logo,

$$R_{tg} = R_e R_{tg} = R_t R_{t^{-1}} R_{tg} = R_t (R_{t^{-1}} R_{tg}) \subseteq R_t R_g,$$

para todos $t, g \in G$. Como, por definição, $R_t R_g \subseteq R_{tg}$, concluímos que $R_{tg} = R_t R_g$, para todos $t, g \in G$, como desejávamos provar. ■

Um exemplo de um anel fortemente graduado é o anel de grupo RG , onde R e G são, respectivamente, um anel e um grupo arbitrários.

Os anéis da forma $R[x, x^{-1}; \phi]$, onde R é um anel arbitrário e ϕ é um automorfismo de R , são exemplos de anéis graduados do tipo $\mathbb{Z}$ que são fortemente graduados.

Por outro lado, qualquer anel graduado R do tipo G que possua componentes homogêneas nulas, por exemplo um anel graduado R com graduação trivial, é um exemplo de um anel que não é fortemente graduado.

Dados um anel fortemente graduado R do tipo G e um subgrupo H de G , o anel graduado do tipo H - R^H é um anel fortemente graduado, uma vez que $1 \in R_h R_{h^{-1}}$, para todo $h \in H$. Por outro lado, se H for um subgrupo normal de G , o anel graduado do tipo G/H - $R_{G/H}$ ainda é um anel fortemente graduado. Com efeito, se considerarmos $gH \in G/H$, com $g \in G$, concluímos que

$$R_g \subseteq R_{gH} \text{ e } R_{g^{-1}} \subseteq R_{g^{-1}H} = R_{(gH)^{-1}}.$$

Ora, como $1 \in R_g R_{g^{-1}}$, $1 \in R_{gH} R_{(gH)^{-1}}$. Consequentemente, $1 \in R_{jH} R_{(jH)^{-1}}$, para todo $jH \in G/H$, e, pela Proposição 4.3.19, $R_{G/H}$ é um anel fortemente graduado do tipo G/H . Assim,

Proposição 4.3.20 *Sejam R um anel fortemente graduado do tipo G e H um subgrupo de G ; então R^H é um anel fortemente graduado do tipo H com anel base R_e . Se H for um subgrupo normal de G , $R_{G/H}$ é um anel fortemente graduado do tipo G/H cujo anel base é R^H .*

Como afirmámos no início desta secção, uma razão que nos levou a impor condições na graduação de um anel graduado R foi o facto de pretendemos deduzir propriedades de R a partir de propriedades apresentadas pelo anel base R_e . Nomeadamente, pretendemos determinar circunstâncias em que o facto de R ser um anel fortemente graduado e R_e ser anel Noetheriano à direita (respectivamente à esquerda) implica que R seja anel Noetheriano à direita (respectivamente à

esquerda). Para tal, cingir-nos-emos a um tipo de grupos - os grupos policíclicos-por-finito - e provaremos que, se R for um anel fortemente graduado do tipo G , onde G é um grupo policíclico-por-finito, cujo anel base R_e é Noetheriano à direita (respectivamente à esquerda), então R é anel Noetheriano à direita (respectivamente à esquerda). Com este intuito, introduzimos alguns resultados preliminares. O próximo Lema é semelhante à alínea 1) do Teorema 4.3.11; no entanto, não necessitamos da hipótese de R_e ser anel semisimples.

Lema 4.3.21 *Seja R um anel fortemente graduado do tipo G ; então R_t é um R_e -módulo à direita (e à esquerda) finitamente gerado, para todo $t \in G$.*

Demonstração. Seja $t \in G$. Como $R_t R_{t^{-1}} = R_e$, existem $r_t^1, \dots, r_t^n \in R_t$ e $r_{t^{-1}}^1, \dots, r_{t^{-1}}^n \in R_{t^{-1}}$ tais que $1 = \sum_{i=1}^n r_t^i r_{t^{-1}}^i$. Assim, dado $s \in R_t$,

$$s = \sum_{i=1}^n r_t^i (r_{t^{-1}}^i s).$$

Como $r_{t^{-1}}^i s \in R_e$, para todo i tal que $1 \leq i \leq n$, concluímos que R_t é gerado como R_e -módulo à direita pelos elementos $r_t^1, \dots, r_t^n$ e, logo, R_t é um R_e -módulo à direita finitamente gerado. Analogamente, provamos que R_t é um R_e -módulo à esquerda finitamente gerado. ■

No Teorema 4.3.11 mostrámos que, se R é um anel graduado do tipo G com graduação não degenerada tal que R_e é anel semisimples e $\sup(R)$ é finito, então R é anel Artiniano. No caso de anéis fortemente graduados do tipo G , onde G é um grupo finito, não necessitamos da hipótese de R_e ser anel semisimples (basta-nos supor que R_e é anel Artiniano). Assim, temos:

Corolário 4.3.22 *Sejam G um grupo finito, R um anel fortemente graduado do tipo G cujo anel base R_e é Noetheriano à direita (respectivamente Artiniano à direita); então R é anel Noetheriano à direita (respectivamente Artiniano à direita).*

Demonstração. Pelo Lema 4.3.21, concluímos que R_t é um R_e -módulo à direita finitamente gerado, para todo $t \in G$, logo, R_t é um R_e -módulo à direita Noetheriano (respectivamente Artiniano).

Uma vez que G é um grupo finito, $R = \bigoplus_{t \in G} R_t$ é um R_e -módulo à direita Noetheriano (respectivamente Artiniano). Ora, como R_e é um subanel de R , R é anel Noetheriano à direita (respectivamente Artiniano à direita), como desejávamos provar. ■

Do Corolário anterior e da respectiva versão esquerda resulta, em particular, que os anéis de grupo da forma RG , onde R é anel Artiniano (respectivamente Noetheriano) e G é um grupo finito, são Artinianos (respectivamente Noetherianos). Assim,

Proposição 4.3.23 *Se R é anel Artiniano (respectivamente Noetheriano) e G é um grupo finito, o anel RG é Artiniano (respectivamente Noetheriano).*

O Lema que se segue é de demonstração imediata.

Lema 4.3.24 *Sejam R um anel graduado do tipo G , I um ideal direito de R e X um subconjunto de G tal que $e \notin X$; então*

$$Id_X(I) = \left\{ r \in R_e : r + \sum_{g \in X} s_g \in I, \text{ para alguns } s_g \in R_g, \text{ com } g \in X \right\}$$

é um ideal direito de R_e .

No caso particular de G ser um grupo cíclico infinito, R ser um anel graduado do tipo G e I ser um ideal direito de R , consideramos um gerador g de G e designamos por $Id_n(I)$ o conjunto:

$$Id_n(I) = \left\{ r \in R_e : r + \sum_{i=1}^n s_i \in I, \text{ para alguns } s_i \in R_{g^i}, \text{ com } 1 \leq i \leq n \right\},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Do Lema anterior deduz-se que $Id_n(I)$ é um ideal direito de R_e , para todo o número natural n . Definimos, ainda, $Id_0(I) = I \cap R_e$.

Lema 4.3.25 *Sejam G um grupo infinito cíclico, R um anel fortemente graduado do tipo G , I e J ideais direitos de R tais que $J \subseteq I$ e $Id_n(I) = Id_n(J)$, para todo $n \in \mathbb{N}_0$; então $I = J$.*

Demonstração. Sejam R , I e J nas condições do enunciado. Com vista a um absurdo, suponhamos que $J \subsetneq I$.

Consideremos um gerador g de G . Seja $i' \in I \setminus J$ tal que $i' = \sum_{l=n_1}^{n_2} r'_l$, com $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ tais que $n_1 \leq n_2$ e $r'_l \in R_{g^l}$, para todo $n_1 \leq l \leq n_2$, de tal modo que $n_2 - n_1$ tome o menor valor possível.

Observe-se que $i'R_{g^{-n_1}} \not\subseteq J$, pois, caso contrário,

$$i'R_e = (i'R_{g^{-n_1}})R_{g^{n_1}} \subseteq JR_{g^{n_1}} \subseteq J;$$

logo, $i' \in J$, o que é absurdo. Consequentemente, existe $r^* \in R_{g^{-n_1}}$ tal que $i'r^* \in I \setminus J$. Designemos $i'r^*$ por i .

Suponhamos que $n_1 = n_2$, então, $i \in R_e$ e $i \in Id_0(I)$. Uma vez que $Id_0(I) = Id_0(J)$, concluímos que $i \in J$, o que é absurdo. Consequentemente, $n_2 - n_1 \geq 1$.

Assim, $i = r + \sum_{l=1}^{n_2-n_1} r_l$, com $r \in R_e$, $r_l \in R_{g^l}$, para todo $l \in \{1, \dots, n_2 - n_1\}$, o que nos leva a concluir que $r \in Id_{n_2-n_1}(I)$. Ora, por hipótese,

$$Id_{n_2-n_1}(I) = Id_{n_2-n_1}(J),$$

logo, $r \in Id_{n_2-n_1}(J)$, isto é, existe $j \in J$ tal que $j = r + \sum_{l=1}^{n_2-n_1} s_l$, para alguns $s_l \in R_{g^l}$, com $l \in \{1, \dots, n_2 - n_1\}$. Uma vez que $J \subseteq I$, concluímos que $i - j \in I$, logo,

$$\sum_{l=1}^{n_2-n_1} (r_l - s_l) \in I.$$

Seja $z = i - j$. Por definição de i' , $z \in J$, logo, $z + j \in J$, ou seja, $i \in J$, o que é absurdo. O absurdo resultou de supormos $J \subsetneq I$, logo, $J = I$, como desejávamos provar. ■

Introduziremos, agora, um dos resultados principais desta secção (Teorema 4.3.27), o qual generaliza o Corolário 4.3.22 a grupos policíclicos por-finitos. Para tal, comecemos por atender ao seguinte Lema:

Lema 4.3.26 *Sejam G um grupo infinito cíclico e R um anel fortemente graduado do tipo G tal que R_e é anel Noetheriano à direita (respectivamente à esquerda); então R é anel Noetheriano à direita (respectivamente à esquerda).*

Demonstração. Seja g um gerador de G . Consideremos uma cadeia ascendente de ideais diretos de R - $I_1 \subseteq \dots \subseteq I_n \subseteq \dots$; então $Id_1(I_1) \subseteq \dots \subseteq Id_n(I_n) \subseteq \dots$

Pelo Lema 4.3.24, $Id_j(I_j)$ é um ideal direito de R_e , para todo o número natural j ; então, como R_e é anel Noetheriano à direita, existe um número natural n_0 tal que $Id_{n_0}(I_{n_0}) = Id_m(I_m)$, para todo $m \geq n_0$.

Por outro lado, como

$$Id_0(I_1) \subseteq \dots \subseteq Id_0(I_n) \subseteq \dots,$$

concluímos que existe um número natural k tal que $k \geq n_0$ e $Id_0(I_k) = Id_0(I_m)$, para todo $m \geq k$. Do mesmo modo, concluímos que existe um número natural n_1 tal que $n_1 \geq k$ e $Id_1(I_{n_1}) = Id_1(I_m)$, para todo $m > n_1$.

Repetindo o processo n_0 vezes, determinamos um número natural n tal que $n \geq n_0$ e $Id_j(I_n) = Id_j(I_m)$, para todo $j \leq n_0$ e $m \geq n$. Consideremos $j \geq n_0$ e $m > n$; então

$$Id_{n_0}(I_{n_0}) \subseteq Id_j(I_{n_0}) \subseteq Id_j(I_n) \subseteq Id_j(I_m).$$

Ora, se $j \leq m$,

$$Id_j(I_m) \subseteq Id_m(I_m) = Id_{n_0}(I_{n_0})$$

e se $j > m$,

$$Id_j(I_m) \subseteq Id_j(I_j) = Id_{n_0}(I_{n_0}).$$

Em ambos os casos concluímos que $Id_j(I_m) = Id_j(I_n)$. Uma vez que $Id_j(I_m) = Id_j(I_n)$, para todo $j \in \mathbb{N}_0$ e $m > n$, estão reunidas as condições necessárias para aplicar o Lema 4.3.25 e afirmar que $I_n = I_m$, para todo $m > n$. Provamos, assim, que R é anel Noetheriano à direita. ■

Teorema 4.3.27 *Sejam G um grupo policíclico-por-finito, R um anel fortemente graduado do tipo G tal que R_e é anel Noetheriano à direita (respectivamente à esquerda); então R é anel Noetheriano à direita (respectivamente à esquerda).*

Demonstração. Sejam G^1 um grupo policíclico-por-finito e R_1 um anel fortemente graduado do tipo G^1 tal que $(R_1)_e$ é anel Noetheriano à direita. Por definição de grupo policíclico-por-finito, existe uma série subnormal

$$\{e\} = G_1^1 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq G_n^1 = G^1$$

tal que G_i^1/G_{i-1}^1 é finito ou infinito cíclico, para todo $i \in \{2, \dots, n\}$.

Se $n = 1$, então R_1 é anel Noetheriano à direita.

Seja $n > 1$ e suponhamos que, para todo o anel fortemente graduado R_2 do tipo G^2 tal que $(R_2)_e$ é anel Noetheriano à direita e G^2 é um grupo policíclico-por-finito que possui uma série subnormal de comprimento $n - 1$

$$\{e\} = G_1^2 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq G_{n-1}^2 = G^2$$

tal que G_i^2/G_{i-1}^2 é grupo finito ou infinito cíclico, para todo $i \in \{2, \dots, n - 1\}$, se tem que R_2 é anel Noetheriano à direita.

Seja R_3 um anel fortemente graduado do tipo G^3 tal que $(R_3)_e$ é anel Noetheriano à direita e G^3 é um grupo policíclico-por-finito que possui uma série subnormal de comprimento n

$$\{e\} = G_1^3 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq G_n^3 = G^3$$

tal que G_i^3/G_{i-1}^3 é grupo finito ou infinito cíclico, para todo $i \in \{2, \dots, n\}$.

Pela Proposição 4.3.20, $(R_3)_{G^3/G_{n-1}^3}$ é anel fortemente graduado do tipo $G^* = G^3/G_{n-1}^3$ cujo anel base é o anel fortemente graduado $R_3^{G_{n-1}^3}$.

Uma vez que $R_3^{G_{n-1}^3}$ é um anel fortemente graduado do tipo G_{n-1}^3 , $(R_3)_e$ é anel Noetheriano à direita e G_{n-1}^3 é um grupo policíclico-por-finito que possui uma série subnormal de comprimento $n - 1$

$$\{e\} = G_1^3 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq G_{n-1}^3$$

tal que G_i^3/G_{i-1}^3 é grupo finito ou infinito cíclico, para todo $i \in \{2, \dots, n - 1\}$, por hipótese de indução, $R_3^{G_{n-1}^3}$ é anel Noetheriano à direita. Consequentemente, se G^3/G_{n-1}^3 for um grupo finito, concluímos, pelo Corolário 4.3.22, que $(R_3)_{G^3/G_{n-1}^3}$

é anel Noetheriano à direita. Se G^3/G_{n-1}^3 for um grupo cíclico infinito, pelo Lema 4.3.26, $(R_3)_{G^3/G_{n-1}^3}$ é anel Noetheriano à direita. Concluimos, assim, que R_3 é anel Noetheriano à direita.

Mostrámos que, para todo o anel fortemente graduado R do tipo G tal que G é um grupo policíclico-por-finito e R_e é anel Noetheriano à direita, se tem que R é anel Noetheriano à direita. Analogamente, provamos que, se R_e é anel Noetheriano à esquerda, R é anel Noetheriano à esquerda. ■

Corolário 4.3.28 *Sejam R um anel Noetheriano à direita (respectivamente à esquerda) e G um grupo policíclico-por-finito; então RG é anel Noetheriano à direita (respectivamente à esquerda).*

Do Corolário anterior e do Corolário 4.3.15 resulta que:

Corolário 4.3.29 *Se R é um domínio Noetheriano e G é um grupo policíclico-infinito, então o anel RG é um domínio Noetheriano.*

Uma vez que o anel $S = R[x, x^{-1}; \varphi]$, onde R é anel Noetheriano à direita (respectivamente à esquerda) e φ é um automorfismo de R , é um anel fortemente graduado do tipo $(\mathbb{Z}, +)$ cujo anel base $S_0 = R$ é Noetheriano à direita (respectivamente à esquerda), pelo Teorema 4.3.27, concluimos que este anel é Noetheriano à direita (respectivamente à esquerda). Assim,

Corolário 4.3.30 *Sejam R um anel Noetheriano à direita (respectivamente à esquerda) e φ um automorfismo de R ; então $R[x, x^{-1}; \varphi]$ é anel Noetheriano à direita (respectivamente à esquerda).*

Do Corolário anterior e do Corolário 4.3.16 resulta que:

Corolário 4.3.31 *Se R é um domínio Noetheriano e σ é um automorfismo de R , então o anel $R[x, x^{-1}; \sigma]$ é um domínio Noetheriano.*

4.4 Teoria de ideais em anéis fortemente graduados

No Capítulo 5 debruçar-nos-emos sobre alguns resultados relacionados com localização em anéis fortemente graduados. Para tal, necessitaremos de aplicar certas propriedades satisfeitas pelos ideais de um anel fortemente graduado que estudaremos nesta secção.

Sejam R um anel fortemente graduado do tipo G e I um ideal de R_e . Dizemos que I é um ideal G -invariante de R_e se e só se $IR_g = R_g I$, para todo $g \in G$. Observe-se que afirmar que I é um ideal G -invariante de R_e é equivalente a afirmar que $R_g IR_{g^{-1}} \subseteq I$, para todo $g \in G$. Um exemplo de um ideal G -invariante de R_e é o radical primo $\mathcal{P}(R_e)$ de R_e , como demonstramos no seguinte Lema:

Lema 4.4.1 *Seja R um anel fortemente graduado do tipo G e designemos por $\mathcal{P}(R_e)$ o radical primo de R_e . Então, $\mathcal{P}(R_e)$ é um ideal G -invariante de R_e .*

Demonstração. Começemos por verificar que se Q é um ideal primo de R_e , então $R_g Q R_{g^{-1}}$ é um ideal primo de R_e , para todo $g \in G$.

O ideal de $R_e - R_g Q R_{g^{-1}}$ é um ideal próprio de R_e . Sejam I, J ideais de R_e tais que $IJ \subseteq R_g Q R_{g^{-1}}$; então

$$R_{g^{-1}} I J R_g = (R_{g^{-1}} I R_g)(R_{g^{-1}} J R_g) \subseteq Q;$$

logo, pelo facto de Q ser um ideal primo de R_e , $R_{g^{-1}} I R_g \subseteq Q$ ou $R_{g^{-1}} J R_g \subseteq Q$, isto é, $I \subseteq R_g Q R_{g^{-1}}$ ou $J \subseteq R_g Q R_{g^{-1}}$, o que nos leva a concluir que $R_g Q R_{g^{-1}}$ é um ideal primo de R_e , para todo $g \in G$.

Consideremos $g \in G$; então

$$R_g \mathcal{P}(R_e) R_{g^{-1}} \subseteq \cap_{Q \in \text{Spec}(R_e)} R_g Q R_{g^{-1}}.$$

Pelo que vimos anteriormente, se Q é um ideal primo de R_e , $R_{g^{-1}} Q R_g$ é um ideal primo de R_e , logo

$$R_g \mathcal{P}(R_e) R_{g^{-1}} \subseteq \cap_{Q \in \text{Spec}(R_e)} R_g (R_{g^{-1}} Q R_g) R_{g^{-1}} = \cap_{Q \in \text{Spec}(R_e)} Q = \mathcal{P}(R_e),$$

provando-se, assim, que $\mathcal{P}(R_e)$ é um ideal G -invariante de R_e . ■

Lema 4.4.2 *Se R é um anel fortemente graduado do tipo G e I é um ideal G -invariante de R_e , então o ideal de R_e gerado por $I \cap \text{cen}(R_e)$ é G -invariante.*

Demonstração. Tomemos $g \in G$. Como $R_g R_{g^{-1}} = R_e$, existem $s_{g,1}, \dots, s_{g,n} \in R_g$ e $s_{g^{-1},1}, \dots, s_{g^{-1},n} \in R_{g^{-1}}$ tais que $1 = \sum_{i=1}^n s_{g,i} s_{g^{-1},i}$. Definimos

$$\begin{aligned} \phi: \text{cen}(R_e) &\rightarrow R_e \\ r &\rightarrow \sum_{i=1}^n s_{g,i} r s_{g^{-1},i} \end{aligned}$$

Demonstraremos que $\phi(\text{cen}(R_e)) \subseteq \text{cen}(R_e)$. Dados $x \in \text{cen}(R_e)$ e $r \in R_e$

$$\begin{aligned} \phi(x)r &= \sum_{i=1}^n s_{g,i} x s_{g^{-1},i} r = \sum_{i=1}^n s_{g,i} x s_{g^{-1},i} r \sum_{j=1}^n s_{g,j} s_{g^{-1},j} \\ &= \sum_{j,i=1}^n s_{g,i} x (s_{g^{-1},i} r s_{g,j}) s_{g^{-1},j} = \sum_{j,i=1}^n s_{g,i} (s_{g^{-1},i} r s_{g,j}) x s_{g^{-1},j} \\ &= r \sum_{j=1}^n s_{g,j} x s_{g^{-1},j} = r \phi(x), \end{aligned}$$

logo, $\phi(x) \in \text{cen}(R_e)$ e $\phi(\text{cen}(R_e)) \subseteq \text{cen}(R_e)$. Dada a forma como está definida, a aplicação ϕ é aditiva.

A aplicação ϕ é um homomorfismo de anéis já que $\phi(1) = 1$ e, dados $x, x' \in \text{cen}(R_e)$,

$$\begin{aligned}\phi(xx') &= \sum_{i=1}^n s_{g,i}xx's_{g^{-1},i} = \sum_{i=1}^n s_{g,i}xx's_{g^{-1},i} \sum_{j=1}^n s_{g,j}s_{g^{-1},j} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (s_{g,i}xs_{g^{-1},i})(s_{g,j}x's_{g^{-1},j}) = \phi(x)\phi(x').\end{aligned}$$

Designemos por X o ideal $(I \cap \text{cen}(R_e))R_e$.

Se mostrarmos que, dados $x \in I \cap \text{cen}(R_e)$, $r \in R_e$, $s_g \in R_g$ e $s_{g^{-1}} \in R_{g^{-1}}$, com $g \in G$, se tem $s_g x r s_{g^{-1}} \in X$, então $R_g X R_{g^{-1}} \subseteq X$ e X é um ideal G -invariante de R_e . Ora,

$$\begin{aligned}s_g x r s_{g^{-1}} &= (s_g r)(x s_{g^{-1}}) = (s_g r)(x s_{g^{-1}} \sum_{j=1}^n s_{g,j}s_{g^{-1},j}) \\ &= \sum_{j=1}^n s_g r s_{g^{-1}} s_{g,j} x s_{g^{-1},j} = s_g r s_{g^{-1}} \sum_{j=1}^n s_{g,j} x s_{g^{-1},j} \\ &= s_g r s_{g^{-1}} \phi(x) = \phi(x) s_g r s_{g^{-1}}.\end{aligned}$$

Como $x \in I$ e $R_g I R_{g^{-1}} \subseteq I$, concluímos que $\phi(x) \in I$, logo, $\phi(x) \in I \cap \text{cen}(R_e)$. Por outro lado, como $s_g r s_{g^{-1}} \in R_e$,

$$\phi(x) s_g r s_{g^{-1}} \in (I \cap \text{cen}(R_e))R_e,$$

isto é, $s_g x r s_{g^{-1}} \in X$, como desejávamos provar. ■

Seja R um anel fortemente graduado do tipo G com anel base R_e . Um ideal próprio G -invariante I de R_e diz-se **G -maximal** se o único ideal G -invariante de R_e que contém estritamente I é o próprio R_e . O anel R_e diz-se **G -simples** se 0 for um ideal G -maximal de R_e .

Dado um anel fortemente graduado R do tipo G com anel base R_e , um ideal próprio I G -invariante de R_e é **G -semiprimo** se, para todo o ideal G -invariante J de R_e tal que $J^k \subseteq I$, para algum número natural k , se tem $J \subseteq I$. Um ideal próprio G -invariante de R_e I é **G -primo** se, para quaisquer ideais G -invariantes J e K de R_e tais que $JK \subseteq I$, se tem $J \subseteq I$ ou $K \subseteq I$.

Dizemos que o anel base R_e de um anel fortemente graduado R é **G -semiprimo** (respectivamente **G -primo**) se 0 for um ideal G -semiprimo (respectivamente G -primo) de R_e .

Relacionaremos agora propriedades de um ideal P de um anel fortemente graduado R com propriedades do ideal de R_e - $P \cap R_e$.

Lema 4.4.3 *Seja R um anel fortemente graduado do tipo G com anel base R_e . Se P for um ideal de R , então $P \cap R_e$ é um ideal G -invariante de R_e . Se P for um ideal semiprimo de R , então $I = P \cap R_e$ é um ideal G -semiprimo de R_e . Se P for um ideal primo de R , então $I = P \cap R_e$ é um ideal G -primo de R_e .*

Demonstração. Sejam R um anel fortemente graduado do tipo G e P um ideal de R .

Como $R_g P R_{g^{-1}} \subseteq P$ e $R_g R_e R_{g^{-1}} \subseteq R_e$, para todo $g \in G$, então $I = P \cap R_e$ é um ideal G -invariante de R_e .

Por outro lado, se P é um ideal próprio de R , I é um ideal próprio de R_e .

Suponhamos que P é um ideal semiprimo de R e seja J um ideal G -invariante de R_e tal que $J^k \subseteq I$, para algum número natural k ; então, como J é um ideal G -invariante de R_e ,

$$(JR)^k = J^k R \subseteq IR \subseteq P,$$

logo, pelo facto de P ser ideal semiprimo, $JR \subseteq P$. Concluímos então que

$$J = JR \cap R_e \subseteq P \cap R_e = I,$$

isto é, I é um ideal G -semiprimo de R_e .

Suponhamos agora que P é um ideal primo de R e sejam L, J ideais G -invariantes de R_e tais que $LJ \subseteq P \cap R_e$; logo,

$$(LR)(JR) = LJ R \subseteq (P \cap R_e) R \subseteq P$$

e, consequentemente, $LR \subseteq P$ ou $JR \subseteq P$. Se $LR \subseteq P$, então

$$L = LR \cap R_e \subseteq P \cap R_e$$

e, analogamente, se $JR \subseteq P$, então $J \subseteq P \cap R_e$. Provamos, assim, que $P \cap R_e$ é um ideal G -primo de R_e . ■

A Proposição que se segue é uma consequência do Corolário 2.2.17 e do Lema 4.4.1.

Proposição 4.4.4 *Seja R um anel fortemente graduado do tipo G tal que R_e é anel G -semiprimo e anel de Goldie à direita; então R_e é anel semiprimo.*

Demonstração. Designemos o radical primo de R_e por $\mathcal{P}(R_e)$.

Pelo Corolário 2.2.17, existe um número natural k tal que $\mathcal{P}(R_e)^k = 0$.

Uma vez que, pelo Lema 4.4.1, $\mathcal{P}(R_e)$ é um ideal G -invariante e, por hipótese, 0 é um ideal G -semiprimo de R_e , concluímos que $\mathcal{P}(R_e) = 0$, isto é, R_e é anel semiprimo, como desejávamos provar. ■

Mostraremos agora propriedades relacionadas com a existência de elementos centrais num anel fortemente graduado.

Lema 4.4.5 *Sejam R um anel fortemente graduado do tipo G cujo anel base R_e é semisimples e $J \subsetneq I$ ideais G -invariantes de R_e ; então existe $r \in I \setminus J$ tal que $r + JR$ é um elemento não nulo central de R/JR .*

Demonstração. Começemos por observar que, como J é um ideal G -invariante de R_e , JR é um ideal bilateral de R . Ora, como $J \neq R_e$, JR é um ideal próprio de R e R/JR é um anel.

Pelo Corolário 1.5.5, existe um elemento idempotente a de R_e tal que $R_e a = I = aR_e$. Se $a \in J$, então, como I é gerado por a teríamos $J = I$, o que é absurdo; consequentemente, $a \in I \setminus J$ e $a + JR \neq 0_{R/JR}$.

Para provarmos o lema é suficiente provar que a é um elemento central de R . Começaremos por provar que a é um elemento normalizador de R . Como I é um ideal G -invariante de R_e ,

$$aR_g = aR_e R_g = IR_g = R_g I = R_g R_e a = R_g a,$$

para todo $g \in G$. Consequentemente, $aR = Ra$. Mas, como $s = as + (1 - a)s$, para todo $s \in R$, temos

$$sa = asa + (1 - a)sa.$$

Pelo facto de a ser um elemento normalizador de R , $sa = as'$, para algum $s' \in R$, consequentemente,

$$sa = asa + (1 - a)as'.$$

Como a é um elemento idempotente, temos $sa = asa$. De forma análoga concluímos que $as = asa$. Portanto, a é um elemento central de R , como desejávamos provar. ■

Provaremos em seguida que se G for um grupo policíclico-por-finito Abelian e R for um anel fortemente graduado do tipo G cujo anel base é semisimples, todos os ideais próprios não nulos de R têm um conjunto centralizador de geradores.

Lema 4.4.6 *Sejam G um grupo Abelian, R um anel fortemente graduado do tipo G cujo anel base R_e é semisimples e I, J ideais de R tais que $J \subsetneq I$. Então, existe um elemento não nulo $x \in I/J$ tal que x é central em R/J .*

Demonstração. Seja s um elemento de $I \setminus J$ cujo suporte tem a menor cardinalidade possível.

Podemos supor que $e \in \text{sup}(s)$.

Suponhamos que $\text{sup}(s) = \{e\}$. Então $J \cap R_e \subsetneq I \cap R_e$. Pelo Lema 4.4.3, $I \cap R_e$ e $J \cap R_e$ são ideais G -invariantes de R_e , logo, pelo Lema 4.4.5, existe

$r \in (I \cap R_e) \setminus (J \cap R_e)$ tal que $r + (J \cap R_e)R$ é um elemento central de $R/(J \cap R_e)R$. Assim, se considerarmos $y \in R$, concluímos que

$$ry - yr \in (J \cap R_e)R.$$

Uma vez que $(J \cap R_e)R \subseteq J$, $(r + J)$ é um elemento não nulo de I/J que é central em R/J .

Suponhamos, agora, que $\text{sup}(s) \neq \{e\}$. Designamos a componente homogênea de s de grau e por r^* e as restantes componentes homogêneas por s'_g , onde $g \in \text{sup}(s)$.

Seja $X = \text{sup}(s) \setminus \{e\}$ e consideremos os ideais direitos de $R_e - Id_X(I)$ e $Id_X(J)$. Uma vez que I, J são ideais bilaterais de R e G é grupo Abelian, concluímos que $Id_X(J)$ e $Id_X(I)$ são ideais bilaterais G -invariantes de R_e .

Seguidamente provaremos que $Id_X(J) \subsetneq Id_X(I)$. Com vista a um absurdo, suponhamos que $Id_X(J) = Id_X(I)$. Em particular, $r^* \in Id_X(J)$, logo,

$$\left(r^* + \sum_{g \in X} s_g \right) \in J,$$

para alguns $s_g \in R_g$, com $g \in X$. Consequentemente

$$a = \sum_{g \in X} s'_g - \sum_{g \in X} s_g = s - \left(r^* + \sum_{g \in X} s_g \right)$$

é um elemento de I . Ora, como $\text{sup}(a) \subseteq X$, a cardinalidade do suporte de a é estritamente menor que a do suporte de s . Concluímos, assim, que $a \in J$, logo

$$\left(a + r^* + \sum_{g \in X} s_g \right) \in J,$$

isto é, $s \in J$, o que é absurdo. O absurdo resultou de supormos $Id_X(J) = Id_X(I)$, logo, $Id_X(J) \subsetneq Id_X(I)$.

Pelo Lema 4.4.5, existe $r \in Id_X(I) \setminus Id_X(J)$ tal que $r + Id_X(J)R$ é um elemento não nulo central de $R/Id_X(J)R$.

Uma vez que $r \in Id_X(I) \setminus Id_X(J)$, por definição de $Id_X(I)$ e $Id_X(J)$, existe $s' \in I \setminus J$ tal que

$$s' = r + \sum_{g \in X} s_g, \text{ para alguns } s_g \in R_g, \text{ com } g \in X.$$

Como $r + Id_X(J)R$ é um elemento central de $R/Id_X(J)R$, se considerarmos $h \in G$ e $y_h \in R_h$,

$$ry_h - y_hr \in Id_X(J)R.$$

Seja $z = ry_h - y_hr$. Como z é um elemento homogêneo de grau h , $z \in Id_X(J)R_h$.

Provaremos, em seguida, que existe $t \in JR_h$ tal que a cardinalidade do suporte de $s'y_h - y_hs' - t$ é menor que a do suporte de s . Para tal, observe-se que, como $z \in Id_X(J)R_h$,

$$z = \sum_{i=1}^n s_i s_i^h,$$

com $s_i \in Id_X(J)$ e $s_i^h \in R_h$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Consequentemente, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, para cada $g \in X$, existe $s_g^i \in R_g$ tal que

$$s_i + \sum_{g \in X} s_g^i \in J.$$

Assim,

$$s_i s_i^h + \sum_{g \in X} s_g^i s_i^h \in JR_h, \text{ para todo } i \in \{1, \dots, n\},$$

logo,

$$t = \sum_{i=1}^n s_i s_i^h + \sum_{i=1}^n \sum_{g \in X} s_g^i s_i^h = z + \sum_{i=1}^n \sum_{g \in X} s_g^i s_i^h$$

é um elemento de JR_h e, como $JR_h \subseteq J$, $t \in J$. Observe-se que

$$v = s'y_h - y_hs' - t = \sum_{g \in X} (s_g y_h - y_h s_g) - \sum_{i=1}^n \sum_{g \in X} s_g^i s_i^h,$$

logo, pelo facto de G ser grupo Abelian, a cardinalidade do suporte de v é menor que a do suporte de s . Como $v \in I$, então $v \in J$ e, uma vez que $t \in J$, $s'y_h - y_hs' \in J$. Como y_h foi escolhido arbitrariamente, $s'y - ys' \in J$, para todo $y \in R$. Concluímos, assim, que $s' + J$ é um elemento não nulo de I/J que é central em R/J . ■

Corolário 4.4.7 *Sejam G um grupo policíclico-por-finito Abelian, R um anel fortemente graduado do tipo G cujo anel base R_e é semisimples; então todo o ideal não nulo I de R tem um conjunto centralizador de geradores.*

Demonstração. Como $R \simeq R/0$, pelo Lema 4.4.6, existe um elemento não nulo $s_1 \in I$ tal que s_1 é central em R .

Se $s_1 R = I$, o resultado está provado. Suponhamos que $s_1 R \neq I$. Como s_1 é um elemento central de R , $s_1 R$ é um ideal bilateral de R . Uma vez que $s_1 R \subsetneq I$, aplicando novamente o Lema 4.4.6, determinamos

$$(s_2 + s_1 R) \in (I/s_1 R) \setminus \{0\}$$

tal que $\overline{s_2} = s_2 + s_1R$ é central em R/s_1R .

Provaremos que $J = s_1R + s_2R$ é um ideal bilateral de R . Por definição, J é um ideal direito de R . Por outro lado, como $\overline{s_2}$ é um elemento central de R/s_1R , concluímos que $R(s_2R) \subseteq s_2R + s_1R$, logo,

$$R(s_1R + s_2R) \subseteq s_1R + s_2R,$$

o que nos leva a concluir que J é um ideal bilateral de R . Se $J = I$, o resultado está provado. Caso contrário, repetimos o processo.

Repetindo sucessivamente o processo descrito, obtemos ideais

$$I_n = s_1R + \dots + s_nR,$$

onde s_1 é um elemento central de R e $s_i + (s_1R + \dots + s_{i-1}R)$ é um elemento central de $R/(s_1R + \dots + s_{i-1}R)$, para todo $i \in \{2, \dots, n\}$. Temos também que

$$I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq \dots \subsetneq I_n \subsetneq \dots$$

Uma vez que R_e é um anel semisimples, R_e é anel Noetheriano à direita, logo, pelo Teorema 4.3.27, R é anel Noetheriano à direita. Consequentemente, existe algum número natural n tal que $I = s_1R + \dots + s_nR$, onde $\{s_1, \dots, s_n\}$ é um conjunto centralizador de geradores de I . ■

4.5 Anéis de fracções graduados

Vimos no Capítulo 2 que, dados um anel R e um subconjunto multiplicativo S de R , existe anel de fracções à direita de R com respeito a S se e só se S é um conjunto de denominadores à direita em R .

Nesta secção analisamos o caso de anéis graduados relativamente à existência de anéis de fracções. Verificaremos que se R for um anel graduado e S for um subconjunto multiplicativo de R tal que $S \subseteq h(R)$, para existir anel de fracções à direita de R com respeito a S é suficiente e necessário que: “para todos $r \in h(R)$ e $s \in S$ tais que $sr = 0$, exista $s' \in S$ tal que $rs' = 0$ ” e “para todo $r \in h(R)$, para todo $s \in S$, existam $r' \in h(R)$, $s' \in S$ tais que $rs' = sr'$ ”.

Proposição 4.5.1 *Sejam R um anel graduado do tipo G e $S \subseteq h(R)$ um subconjunto multiplicativo de R ; então S é um conjunto de denominadores à direita em R se e só se:*

- 1) *para todos $r \in h(R)$ e $s \in S$ tais que $sr = 0$, existe $s' \in S$ tal que $rs' = 0$;*
- 2) *para todo $r \in h(R)$ e para todo $s \in S$, existem $r' \in h(R)$, $s' \in S$ tais que $rs' = sr'$.*

Demonstração. Por definição de conjunto reversível à direita, se S for um conjunto de denominadores à direita em R , verifica-se a condição **1)**. Por outro lado, se S for um conjunto de denominadores à direita em R , para todo $r \in h(R)$, para todo $s \in S$, existem $r^* \in R$ e $s' \in S$ tais que $rs' = sr^*$. Se $r^* \notin h(R)$, uma vez que $r, s', s \in h(R)$, existe uma componente homogênea r' de r^* tal que $rs' = sr'$, o que nos permite concluir que a condição **2)** é válida.

Reciprocamente, suponhamos que se verificam as condições **1)** e **2)**.

Sejam $r \in R$ e $s \in S$ tais que $sr = 0$.

Se $r \in h(R)$, então, por hipótese, existe $s' \in S$ tal que $rs' = 0$.

Suponhamos que $r \notin h(R)$ e designemos por $r_1, \dots, r_n$ as componentes homogêneas de r . Observe-se que $n > 1$.

Como $sr = 0$, $sr_1 = \dots = sr_n = 0$.

Uma vez que $sr_1 = 0$, por hipótese, existe $s_1 \in S$ tal que $r_1s_1 = 0$. Ora, como $s(r_2s_1) = 0$ e $r_2s_1 \in h(R)$, por hipótese, existe $s_2 \in S$ tal que $r_2s_1s_2 = 0$. Concluimos, assim, que $(r_1 + r_2)s_1s_2 = 0$ e $s_1s_2 \in S$.

Repetindo o processo n vezes, determinamos $s^* \in S$ tal que

$$rs^* = (r_1 + \dots + r_n)s^* = 0.$$

Concluimos, assim, que S é um conjunto reversível à direita.

Consideremos, agora, $r \in R$ e $s \in S$.

Se $r \in h(R)$, então, por hipótese, existem $s' \in S$ e $r' \in h(R)$ tais que $rs' = sr'$.

Suponhamos que $r \notin h(R)$ e designemos as componentes homogêneas de r por $r_1, \dots, r_n$. Por hipótese, existem $s'_1, s'_2 \in S$ e $r'_1, r'_2 \in h(R)$ tais que $r_1s'_1 = sr'_1$ e $r_2s'_2 = sr'_2$. Pela condição **2)**, existem $t_1 \in S$, $t_2 \in h(R)$ tais que $s'_1t_1 = s'_2t_2 = t$ e $t \in S$, logo,

$$(r_1 + r_2)t = r_1(s'_1t_1) + r_2(s'_2t_2) = sr'_1t_1 + sr'_2t_2 = s(r'_1t_1 + r'_2t_2).$$

Se considerarmos $r' = r'_1t_1 + r'_2t_2$, temos $(r_1 + r_2)t = sr'$.

Repetindo o processo n vezes, determinamos $r^* \in R$ e $t^* \in S$ tais que $rt^* = sr^*$. Consequentemente, S é um conjunto de denominadores à direita em R , como desejávamos provar. ■

Se R é um anel graduado do tipo G e $S \subseteq h(R)$ é um subconjunto multiplicativo de R que satisfaz as condições **1)** e **2)** da Proposição anterior, então existe anel de fracções à direita de R com respeito a S , RS^{-1} . Neste caso, é possível definir uma graduação do tipo G em RS^{-1} de tal modo que, se r é um elemento homogêneo não nulo de grau t em R , $r1^{-1} \in (RS^{-1})_t$.

Proposição 4.5.2 *Sejam R um anel graduado do tipo G e S um subconjunto multiplicativo de R tal que $S \subseteq h(R)$ e S satisfaz as condições **1)** e **2)** da Proposição 4.5.1. Definimos $(RS^{-1})_t =$*

$$\{y \in RS^{-1} : \exists s \in S, \exists a \in h(R) \setminus \{0\} : y = as^{-1} \wedge gr(a)gr(s)^{-1} = t\} \cup \{01^{-1}\},$$

para todo $t \in G$. Então, $(RS^{-1})_t$ é um subgrupo aditivo de RS^{-1} , para todo $t \in G$, $RS^{-1} = \bigoplus_{t \in G} (RS^{-1})_t$ e $(RS^{-1})_t(RS^{-1})_h \subseteq (RS^{-1})_{th}$, para todos $t, h \in G$.

Demonstração. Começemos por observar que $(RS^{-1})_t$ é um subgrupo aditivo de RS^{-1} , para todo $t \in G$.

Seja $t \in G$. Por definição, $01^{-1} \in (RS^{-1})_t$ e é imediato que, se $x \in (RS^{-1})_t$, $-x \in (RS^{-1})_t$. Para demonstrarmos que $(RS^{-1})_t$ é subgrupo aditivo de RS^{-1} é, pois, suficiente provar que, dados $x, y \in (RS^{-1})_t$, $x + y \in (RS^{-1})_t$. Se $x = 01^{-1}$ ou $y = 01^{-1}$ temos $x + y \in (RS^{-1})_t$. Suponhamos que $x \neq 01^{-1}$, $y \neq 01^{-1}$ e $x + y \neq 01^{-1}$. Por definição, $x = ac^{-1}$ e $y = bd^{-1}$, para alguns $a, b \in h(R) \setminus \{0\}$, $c, d \in S$ tais que

$$gr(a)gr(c)^{-1} = gr(b)gr(d)^{-1} = t.$$

Por definição de S , existem $i \in h(R)$ e $j \in S$ tais que $ci = dj = z$ e $z \in S$. Uma vez que $z1^{-1}$ e $c1^{-1}$ são unidades de RS^{-1} , concluímos que $i1^{-1}$ é uma unidade de RS^{-1} . Como $j \in S$, $j1^{-1}$ é uma unidade de RS^{-1} . Consequentemente, $ac^{-1} = (ai)z^{-1}$ e $bd^{-1} = (bj)z^{-1}$. Ora, como ai e bj são elementos homogêneos de R não nulos e

$$gr(ai)gr(z)^{-1} = gr(a)gr(i)gr(i)^{-1}gr(c)^{-1} = t = gr(b)gr(d)^{-1} = gr(bj)gr(z)^{-1},$$

então, $gr(ai) = gr(bj)$. Logo, $ai + bj$ é um elemento homogêneo não nulo de R e $gr(ai) = gr(ai + bj)$. Consequentemente, $gr(ai + bj)gr(z)^{-1} = t$, o que nos permite concluir que

$$x + y \in (RS^{-1})_t,$$

como desejávamos provar. Analogamente, provamos que

$$(RS^{-1})_t(RS^{-1})_s \subseteq (RS^{-1})_{ts}, \text{ para todos } t, s \in G.$$

Em seguida provaremos que $RS^{-1} = \bigoplus_{t \in G} (RS^{-1})_t$.

É consequência imediata da definição de $(RS^{-1})_t$, com $t \in G$, que $RS^{-1} = \sum_{t \in G} (RS^{-1})_t$.

Para provarmos que a soma considerada é directa, suponhamos que existem

$$y_1 \in (RS^{-1})_{t_1} \setminus \{0\}, \dots, y_n \in (RS^{-1})_{t_n} \setminus \{0\}$$

tais que $y_1 + \dots + y_n = 0$, onde $t_1, \dots, t_n$ são elementos distintos de G .

Por definição, existem $a_1, \dots, a_n \in h(R) \setminus \{0\}$, $s_1, \dots, s_n \in S$ tais que

$$y_1 = a_1s_1^{-1}, \dots, y_n = a_ns_n^{-1} \text{ e } gr(a_1)gr(s_1)^{-1} = t_1, \dots, gr(a_n)gr(s_n)^{-1} = t_n.$$

Uma vez que S é, pela Proposição 4.5.1, um conjunto de denominadores à direita, podemos aplicar o Lema 2.1.13 e determinar $x_1, \dots, x_n \in R$ tais que $s_1x_1 = \dots = s_nx_n = z$ e $z \in S$. Como $s_1, \dots, s_n$ e z são elementos homogêneos de R , podemos supor que $x_1, \dots, x_n$ são elementos homogêneos de R . Por outro lado, como $x_11^{-1}, \dots, x_n1^{-1}$ são unidades de RS^{-1} , $y_1 = (a_1x_1)z^{-1}, \dots, y_n = (a_nx_n)z^{-1}$, logo,

$$(a_1x_1)1^{-1} + \dots + (a_nx_n)1^{-1} = 0;$$

portanto, existe $s \in S$ tal que $a_1x_1s + \dots + a_nx_ns = 0$.

Ora, como os elementos $a_1x_1s, \dots, a_nx_ns$ são elementos homogêneos não nulos de R com graus diferentes, temos um absurdo. O absurdo resultou de supormos que a soma considerada não era directa, demonstrando-se, assim, a proposição.

■

Da Proposição anterior concluímos que, dados um anel graduado R do tipo G , um conjunto de denominadores à direita em $R - S \subseteq h(R)$, se considerarmos em RS^{-1} a graduação do tipo G definida nesta Proposição, todo o elemento homogêneo não nulo y de RS^{-1} pode ser escrito na forma $y = as^{-1}$, para alguns $a \in h(R) \setminus \{0\}$ e $s \in S$. Além disso, $gr(y) = gr(a)gr(s)^{-1}$.

Capítulo 5

Localização em anéis graduados

O primeiro passo a seguir na Teoria da Localização em anéis graduados seria tentar provar um Teorema análogo ao Teorema de Goldie para o caso graduado. No entanto, verificaremos que tal nem sempre é possível sem acrescentar algumas condições extra relativamente a um anel graduado R : a existência de elementos regulares homogêneos em ideais direitos gr-essenciais de R ou o facto de o anel R em consideração ter graduação não degenerada e ter anel base semiprimo.

Em 2000, Goodearl e Stafford demonstraram (Teorema 5.1.14) que, dados um grupo Abeliano G e um anel graduado R do tipo G gr-primo e gr-Goldie à direita, se considerarmos um ideal direito graduado gr-essencial I de R , então I contém um elemento homogêneo regular. Assim, para anéis graduados por grupos Abelianos gr-primos, é possível demonstrar uma versão graduada do Teorema de Goldie. Por outro lado, o facto de ser possível provar uma versão graduada do Teorema de Goldie para anéis graduados com graduação não degenerada e anel base semiprimo permitir-nos-á demonstrar uma versão graduada deste Teorema para anéis fortemente graduados (Teorema 5.2.7) e para anéis graduados com suporte finito (Teorema 5.2.8).

Nesta secção, estudaremos ainda o processo de Localização em anéis fortemente graduados e introduziremos novos exemplos de anéis que satisfazem a condição na segunda camada (Corolário 5.3.4) e novos exemplos de anéis Noetherianos cujos ideais primos são todos classicamente localizáveis (Proposição 5.3.8).

5.1 Anéis gr-Goldie

Por analogia com os anéis não graduados, dizemos que um anel graduado R do tipo G tem **gr-dimensão de Goldie à direita finita** se R não contiver somas directas infinitas de ideais direitos graduados não nulos.

Um anel graduado R do tipo G é **gr-Goldie à direita** se R tiver gr-dimensão de Goldie à direita finita e satisfizer c.c.a em ideais direitos que são simultaneamente anuladores à direita em R e ideais direitos graduados de R . De forma

análoga, define-se **anel gr-Goldie à esquerda**. Dizemos que um anel graduado R é **gr-Goldie** se R for gr-Goldie à direita e à esquerda.

Para simplificação de linguagem, designamos por **anulador à direita graduado** de um anel graduado R do tipo G um ideal direito que é simultaneamente um anulador à direita em R e um ideal direito graduado de R .

No Teorema de Goldie, considerámos um anel Q ($Q \simeq RC_R(0)^{-1}$) que se obtém invertendo os elementos regulares de um anel R . No caso de R ser um anel graduado do tipo G , com vista a manter o tipo de graduação, pretendemos inverter apenas os elementos regulares homogêneos de R , isto é, pretendemos inverter apenas os elementos de $S = C_R(0) \cap h(R)$. Provaremos em seguida que, se o conjunto S for um conjunto de Ore à direita em R e RS^{-1} , com a graduação do tipo G definida na Proposição 4.5.2, for gr-semisimples, então R é anel gr-Goldie à direita gr-semiprimo.

Neste trabalho, sempre que não houver ambiguidade, dado um anel graduado R do tipo G tal que $S = h(R) \cap C_R(0)$ é um conjunto de Ore à direita em R , consideraremos em RS^{-1} a graduação do tipo G definida na Proposição 4.5.2.

Lema 5.1.1 *Seja R um anel graduado do tipo G tal que $S = h(R) \cap C_R(0)$ é um conjunto de Ore à direita em R . Se I é um ideal direito graduado de R , então I^e é um ideal direito graduado de RS^{-1} .*

Demonstração. Seja I um ideal direito graduado do anel graduado de tipo G - R . Se $I^e = 0$, então I^e é um ideal direito graduado de RS^{-1} .

Suponhamos que $I^e \neq 0$. Para provarmos que I^e é um ideal direito graduado de RS^{-1} é suficiente provar que, para todo $is^{-1} \in I^e \setminus \{0\}$, onde $i \in I$ e $s \in S$, as suas componentes homogêneas ainda pertencem a I^e .

Seja $is^{-1} \in I^e$, com $i \in I \setminus \{0\}$ e $s \in S$. Como I é um ideal direito graduado de R , as componentes homogêneas de i - $i_1, \dots, i_n$ pertencem a I . Uma vez que $is^{-1} = i_1s^{-1} + \dots + i_ns^{-1}$ e $i_1s^{-1}, \dots, i_ns^{-1}$ são elementos homogêneos não nulos de RS^{-1} de graus distintos, então $i_1s^{-1}, \dots, i_ns^{-1}$ são precisamente as componentes homogêneas de is^{-1} em RS^{-1} . Ora, como $i_1, \dots, i_n \in I$, $i_1s^{-1}, \dots, i_ns^{-1} \in I^e$, o que nos leva a concluir que I^e é um ideal direito graduado de RS^{-1} . ■

Proposição 5.1.2 *Seja R um anel graduado do tipo G tal que $S = h(R) \cap C_R(0)$ é um conjunto de Ore à direita em R e o anel RS^{-1} é gr-semisimples; então R é anel gr-Goldie à direita, gr-semiprimo.*

Demonstração. Começemos por verificar que R é anel gr-semiprimo. Suponhamos que existe um ideal graduado de R - I tal que $I^2 = 0$. Pelo Lema 2.2.9, o ideal bilateral $I' = lann_R(I)$ é essencial como ideal direito de R .

Aplicando a versão esquerda do Lema 4.1.15, concluímos que I' é um ideal esquerdo graduado de R . Pelo Lema 4.1.17, I' é um ideal graduado de R . Logo,

pelo Lema 5.1.1, $(I')^e$ é um ideal direito graduado de RS^{-1} . Ora, como $I'_R \leq_e R_R$ e $S \subseteq C_R(0)$, concluímos que

$$(I')^e_{RS^{-1}} \leq_e (RS^{-1})_{RS^{-1}}.$$

Pela Proposição 4.2.2, temos que $(I')^e$ é um ideal direito graduado gr-essencial de RS^{-1} .

Uma vez que RS^{-1} é anel gr-semisimples, pela Proposição 4.2.9, $(I')^e = RS^{-1}$. Em particular, $11^{-1} = is^{-1}$, para alguns $i \in I'$ e $s \in S$. Logo, $s \in I'$ e, consequentemente, $sI = 0$. Por s ser um elemento regular, $I = 0$. Provamos assim que R é anel gr-semiprimo.

Para demonstrarmos que R é anel gr-Goldie à direita, começaremos por provar que RS^{-1} satisfaz c.c.a em ideais direitos graduados. Com efeito, se considerarmos uma cadeia ascendente de ideais direitos graduados não nulos de RS^{-1}

$$I_1 \subseteq \dots \subseteq I_n \subseteq \dots,$$

concluímos, pelo Corolário 4.2.8, que o ideal direito graduado $J = \cup_{i \in \mathbb{N}} I_i$ de RS^{-1} é gerado por um elemento homogêneo x . Uma vez que x pertence a I_n , para algum número natural n , $J = I_n = I_m$, para todo $m \geq n$, logo, RS^{-1} satisfaz c.c.a em ideais direitos graduados.

Observe-se agora que, como $S \subseteq C_R(0)$, o homomorfismo de anéis

$$\begin{aligned} \phi: R &\rightarrow RS^{-1} \\ r &\rightarrow r1^{-1} \end{aligned}$$

que satisfaz as condições **a)**, **b)** e **c)** da Definição 2.1.1 é injectivo, logo, $\phi(R) \simeq R$ e podemos identificar R com $\phi(R)$.

Se considerarmos uma cadeia ascendente de anuladores à direita graduados de R - $I_1 \subseteq \dots \subseteq I_n \subseteq \dots$, então, $\phi(I_1) \subseteq \dots \subseteq \phi(I_n) \subseteq \dots$, logo,

$$rann_{RS^{-1}}(lann_{\phi(R)}(\phi(I_1))) \subseteq \dots \subseteq rann_{RS^{-1}}(lann_{\phi(R)}(\phi(I_n))) \subseteq \dots$$

Verificaremos em seguida que, para todo $n \in \mathbb{N}$, para todo

$$x \in (lann_{\phi(R)}(\phi(I_n))) \setminus \{0\},$$

todas as componentes homogêneas de x ainda pertencem a $lann_{\phi(R)}(\phi(I_n)) \setminus \{0\}$. Uma vez que $\phi(R) \simeq R$, se $x \in lann_{\phi(R)}(\phi(I_n)) \setminus \{0\}$, então $x = \phi(j)$, para algum $j \in lann_R(I_n) \setminus \{0\}$. Como, pela versão esquerda do Lema 4.1.15, $lann_R(I_n)$ é um ideal esquerdo graduado de R , todas as componentes homogêneas de $j - j_1, \dots, j_m$ pertencem a $lann_R(I_n)$; consequentemente,

$$\phi(j_1), \dots, \phi(j_m) \in lann_{\phi(R)}(\phi(I_n)).$$

Pela forma como foi definida a graduação em RS^{-1} , $\phi(j_1), \dots, \phi(j_m)$ são as componentes homogêneas de x . Consequentemente, todas as componentes homogêneas de todos os elementos não nulos de $\text{lann}_{\phi(R)}(\phi(I_n))$ ainda pertencem a $\text{lann}_{\phi(R)}(\phi(I_n))$. Pelo Lema 4.1.15, concluímos que $\text{rann}_{RS^{-1}}(\text{lann}_{\phi(R)}(\phi(I_n)))$ é um ideal direito graduado de RS^{-1} , para todo $n \in \mathbb{N}$. Ora, como RS^{-1} satisfaz c.c.a em ideais direitos graduados, existe um número natural n tal que

$$\text{rann}_{RS^{-1}}(\text{lann}_{\phi(R)}(\phi(I_n))) = \text{rann}_{RS^{-1}}(\text{lann}_{\phi(R)}(\phi(I_m))),$$

para todo $m \geq n$, o que nos leva a concluir que

$$\text{rann}_{\phi(R)}(\text{lann}_{\phi(R)}(\phi(I_n))) = \text{rann}_{\phi(R)}(\text{lann}_{\phi(R)}(\phi(I_m))),$$

para todo $m \geq n$.

Como $I_1, \dots, I_n$ são anuladores à direita em R e $R \simeq \phi(R)$, $\phi(I_1), \dots, \phi(I_n)$ são anuladores à direita em $\phi(R)$. Aplicando o Lema 2.2.10, concluímos que $\phi(I_n) = \phi(I_m)$, para todo $m \geq n$, o que nos permite concluir, pela injectividade de ϕ , que $I_n = I_m$, para todo $m \geq n$, ou seja, R satisfaz c.c.a em anuladores à direita graduados.

Suponhamos, agora, que R não tem gr-dimensão de Goldie à direita finita, logo, existe uma família infinita independente de ideais direitos graduados não nulos de $R - (I_j)_{j \in K}$. Para cada I_j , escolhemos um elemento homogêneo i_j pertencente a $I_j \setminus \{0\}$; então,

$$((i_j 1^{-1})(RS^{-1}))_{j \in K}$$

é uma família infinita de ideais direitos graduados não nulos de RS^{-1} . Uma vez que RS^{-1} satisfaz c.c.a em ideais direitos graduados, a família

$$((i_j 1^{-1})(RS^{-1}))_{j \in K}$$

é dependente, logo, existem $k_1, \dots, k_n \in K$, $r_1, \dots, r_n \in R$, $s_1, \dots, s_n \in S$ tais que

$$i_{k_1} r_1 s_1^{-1} + \dots + i_{k_n} r_n s_n^{-1} = 0,$$

com

$$i_{k_1} r_1 s_1^{-1} \in ((i_{k_1} 1^{-1})(RS^{-1})) \setminus \{0\}, \dots, i_{k_n} r_n s_n^{-1} \in ((i_{k_n} 1^{-1})(RS^{-1})) \setminus \{0\}.$$

Logo, aplicando a Proposição 2.1.14, determinamos $r'_1, \dots, r'_n \in R$ e $z \in S$ tais que $i_{k_1} r_1 s_1^{-1} = i_{k_1} r'_1 z^{-1}$, $\dots$, $i_{k_n} r_n s_n^{-1} = i_{k_n} r'_n z^{-1}$. Consequentemente,

$$(i_{k_1} r'_1 + \dots + i_{k_n} r'_n) 1^{-1} = 0,$$

portanto, $i_{k_1} r'_1 + \dots + i_{k_n} r'_n = 0$ e $i_{k_1} r'_1 \neq 0$, $\dots$, $i_{k_n} r'_n \neq 0$, o que contraria o facto de a família $(I_j)_{j \in K}$ ser independente. Estão, pois, reunidas as condições necessárias para afirmar que R é anel gr-Goldie à direita, como desejávamos provar. ■

Afirmámos, na introdução desta secção, não ser possível enunciar uma versão graduada do Teorema de Goldie sem acrescentar “condições extra”. Tal deve-se ao facto de a Proposição 5.1.2 não admitir recíproca. Para comprovarmos este facto, comecemos por observar que, se R é um anel graduado do tipo G tal que $S = C_R(0) \cap h(R)$ é um conjunto de Ore à direita em R e o anel RS^{-1} é gr-semisimples, então todo o ideal direito graduado gr-essencial I de R contém um elemento homogéneo regular. Com efeito, se I é um ideal direito graduado gr-essencial de R , pela Proposição 4.2.2, I é um ideal direito essencial de R , logo, I^e é um ideal direito essencial de RS^{-1} . Uma vez que, pelo Lema 5.1.1, I^e é um ideal direito graduado de RS^{-1} , pela Proposição 4.2.2, I^e é um ideal direito graduado gr-essencial de RS^{-1} . Como RS^{-1} é anel gr-semisimples, pela Proposição 4.2.9, $I^e = RS^{-1}$. Em particular, $11^{-1} = is^{-1}$, para alguns $i \in I$ e $s \in S$. Consequentemente, $s \in I$ e I contém um elemento homogéneo regular. Assim,

Proposição 5.1.3 *Se R é um anel graduado do tipo G tal que $S = h(R) \cap C_R(0)$ é um conjunto de Ore à direita em R e o anel RS^{-1} é gr-semisimples, então todo o ideal direito gr-essencial de R contém um elemento homogéneo regular.*

Atendamos, agora, ao seguinte Exemplo:

Exemplo 5.1.4 *Sejam K um corpo e $R = K[X, Y]$ a álgebra comutativa nas variáveis X, Y tais que $XY = YX = 0$. Para todo $n \in \mathbb{Z}$, definimos $R_n = KX^n$, se $n \geq 0$, e $R_n = KY^{-n}$, se $n < 0$. Observe-se que $R = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} R_n$, $R_0 R_n = R_n R_0 = R_n$, para todo o número inteiro n . Além disso, $R_n R_m = R_{n+m}$, se n, m são dois números inteiros positivos ou dois números inteiros negativos e $R_n R_m = 0 \subseteq R_{n+m}$, se n, m são dois números inteiros de sinais contrários. Logo, podemos definir uma graduação do tipo $\mathbb{Z}$ em R .*

Provaremos em seguida que R é anel gr-semiprimo. Para tal, suponhamos que existe um ideal graduado não nulo J e um número natural k tal que $J^k = 0$. Seja j um elemento homogéneo não nulo pertencente a J . Sem perda de generalidade, supomos $\text{gr}(j) \geq 0$. Logo, $j = aX^n$, para alguns $a \in K \setminus \{0\}$ e $n \in \mathbb{N}_0$. Como $J^k = 0$, temos $(aX^n)^k = 0$, logo, $X^{nk} = 0$, o que é um absurdo. Consequentemente, R é anel gr-semiprimo.

Por outro lado, como R é anel Noetheriano, em particular, R é anel gr-Goldie à direita. Logo, R é anel gr-Goldie à direita gr-semiprimo.

Consideremos, agora, o ideal graduado gr-essencial de R - $I = RX + RY$. O ideal I não contém elementos homogéneos regulares, o que nos permite concluir, pela Proposição 5.1.3, que a recíproca da Proposição 5.1.2 nem sempre é válida.

A razão que nos levou, no Exemplo anterior, a concluir que a recíproca da Proposição 5.1.2 nem sempre é válida foi o facto de existir um ideal direito graduado gr-essencial do anel graduado R que não contém elementos homogéneos regulares.

Provaremos em seguida que, se R for um anel graduado com gr -dimensão de Goldie à direita finita que satisfaz a condição “todo o ideal direito graduado gr -essencial de R contém um elemento homogêneo regular”, é válida a recíproca da Proposição 5.1.2. Para tal, atenda-se às Proposições que se seguem.

Proposição 5.1.5 *Sejam R um anel graduado do tipo G com gr -dimensão de Goldie à direita finita e a um elemento homogêneo de R . Se $rann_R(a) = 0$, então aR é um ideal direito graduado gr -essencial de R .*

Demonstração. Seja I um ideal direito graduado tal que $aR \cap I = 0$. Começamos por observar que a soma $I + \sum_{i \in \mathbb{N}} a^i I$ é directa.

Se existirem $n \in \mathbb{N}$ e $i_0, i_1, \dots, i_n \in I$ tais que

$$i_0 + \sum_{j=1}^n a^j i_j = 0,$$

então, $i_0 \in aR \cap I$, logo, $\sum_{j=1}^n a^j i_j = 0$. Consequentemente, $a(\sum_{j=1}^n a^{j-1} i_j) = 0$ e, como $rann_R(a) = 0$,

$$i_1 + \sum_{j=2}^n a^{j-1} i_j = 0,$$

de onde concluímos que $i_1 = 0$. Repetindo este processo $n - 1$ vezes, concluímos que $i_k = 0$, para todo $k \in \{0, \dots, n\}$. Consequentemente, a soma $I + \sum_{i \in \mathbb{N}} a^i I$ é directa.

Uma vez que, pelo Lema 4.1.16,

$$I \oplus (\oplus_{j \in \mathbb{N}} a^j I)$$

é um ideal direito graduado de R e R tem gr -dimensão de Goldie à direita finita, existe um número natural n tal que $a^n I = 0$. Mas, como $rann_R(a) = 0$, de $a^n I = 0$ obtemos $I = 0$. Consequentemente, aR é um ideal direito graduado gr -essencial de R . ■

Proposição 5.1.6 *Seja R um anel graduado do tipo G com gr -dimensão de Goldie à direita finita tal que todo o ideal direito de R gr -essencial contém um elemento regular homogêneo. Então, o conjunto dos elementos regulares homogêneos de R - $S = C_R(0) \cap h(R)$ é um conjunto de denominadores à direita em R .*

Demonstração. Seja R um anel graduado como no enunciado da proposição. Uma vez que $S \subseteq C_R(0)$, S é um conjunto reversível à direita.

Consideremos $r' \in h(R)$ e $s \in S$. Pela Proposição 5.1.5, sR é um ideal direito graduado gr -essencial. Assim, pela Proposição 4.2.3, o ideal direito graduado

$I = \{x \in R : r'x \in sR\}$ é um ideal direito gr-essencial de R que, por hipótese, contém um elemento homogêneo regular t . Assim, existe $r \in R$ tal que $r't = sr$. Uma vez que $r't$ e s são elementos homogêneos de R , podemos supor que $r \in h(R)$.

Como S é um subconjunto multiplicativo de R tal que $S \subseteq h(R)$ e S satisfaz as condições 1) e 2) da Proposição 4.5.1, concluímos que S é um conjunto de denominadores à direita em R , como desejávamos provar. ■

Estamos, agora, em condições de enunciar a recíproca da Proposição 5.1.2 para anéis graduados que satisfazem a condição “todo o ideal direito graduado gr-essencial contém um elemento regular homogêneo”. Começamos por introduzir o seguinte Lema:

Lema 5.1.7 *Seja R um anel graduado do tipo G tal que $S = h(R) \cap C_R(0)$ é um conjunto de denominadores à direita em R . Então, se I é um ideal direito graduado de RS^{-1} , I^c é um ideal direito graduado de R .*

Demonstração. Sejam R , S e I nas condições do lema. Seja $i \in I^c \setminus \{0\}$; logo $i1^{-1} \in I \setminus \{0\}$.

Designemos as componentes homogêneas de i por $i_1, \dots, i_n$. Uma vez que $i1^{-1} = i_11^{-1} + \dots + i_n1^{-1}$, as componentes homogêneas de $i1^{-1}$ em RS^{-1} são $i_11^{-1}, \dots, i_n1^{-1}$, logo, como I é um ideal direito graduado de RS^{-1} ,

$$i_11^{-1}, \dots, i_n1^{-1} \in I.$$

Consequentemente, $i_1, \dots, i_n \in I^c$.

Uma vez que, para todo o elemento $i \in I^c \setminus \{0\}$, as componentes homogêneas de i pertencem a I^c , I^c é um ideal direito graduado de R . ■

Teorema 5.1.8 *Seja R um anel graduado do tipo G com gr-dimensão de Goldie à direita finita tal que todo o ideal direito gr-essencial contém um elemento regular homogêneo; então existe anel de fracções à direita de R com respeito a $S = C_R(0) \cap h(R)$ e RS^{-1} é anel gr-semisimples.*

Demonstração. Pela Proposição 5.1.6, sabemos que S é um conjunto de denominadores à direita em R ; portanto, existe RS^{-1} , anel de fracções à direita de R com respeito a S .

Para provarmos que o anel RS^{-1} , com a graduação definida na Proposição 4.5.2, é gr-semisimples basta mostrar, pela Proposição 4.2.9, que RS^{-1} não contém ideais direitos próprios gr-essenciais. Para tal, suponhamos, com vista a um absurdo, que I é um ideal direito próprio gr-essencial de RS^{-1} .

Seja $r \in R \setminus \{0\}$. Uma vez que $S \subseteq C_R(0)$, $r1^{-1} \neq 0$. Como $I \leq_{gr-e} RS^{-1}$, pela Proposição 4.2.2, existe $ax^{-1} \in RS^{-1}$ tal que

$$(r1^{-1})ax^{-1} \in I \setminus \{0\},$$

logo, $ra1^{-1} \in I \setminus \{0\}$. Ora, como $ra1^{-1} \in I \setminus \{0\}$, $ra \in I^c \setminus \{0\}$, o que nos leva a concluir que $I^c \leq_e R_R$. Pelo Lema 5.1.7 e pela Proposição 4.2.2, concluímos que I^c é um ideal direito gr-essencial de R , logo, por hipótese, I^c contém um elemento regular homogêneo, pelo que $11^{-1} \in I^{ce}$. Uma vez que $I^{ce} = I$, $11^{-1} \in I$, o que é absurdo, uma vez que I é um ideal direito próprio de RS^{-1} . O absurdo resultou de supormos que RS^{-1} contém ideais direitos próprios graduados gr-essenciais; logo RS^{-1} é anel gr-semisimples, como desejávamos provar. ■

Tendo em consideração o Teorema anterior e a Proposição 5.1.3, concluímos que o problema de demonstrar uma versão graduada do Teorema de Goldie se pode reduzir ao problema de encontrar anéis graduados que satisfazem a condição “todo o ideal direito graduado gr-essencial contém um elemento homogêneo regular”.

Em [13], Goodearl e Stafford demonstraram que se R for um anel graduado do tipo G , gr-primo, gr-Goldie à direita e G for um grupo Abelian, então, R satisfaz a condição “todo o ideal direito graduado gr-essencial de R contém um elemento homogêneo regular”, pelo que, neste caso, é possível demonstrar uma versão graduada do Teorema de Goldie. Para provarmos tal facto introduzimos alguns resultados preliminares.

Proposição 5.1.9 *Seja R um anel graduado do tipo G que satisfaz c.c.a em anuladores à direita graduados; então $Z^g(R_R)$ é nilpotente. Se R for gr-semiprimo, $Z^g(R_R) = 0$.*

Demonstração. Seja $J = Z^g(R_R)$ e consideremos a cadeia

$$rann_R(J) \subseteq rann_R(J^2) \subseteq \dots \subseteq rann_R(J^n) \subseteq \dots$$

Como J é um ideal direito graduado, pelo Lema 4.1.18, J^k é um ideal direito graduado, para todo $k \in \mathbb{N}$. Pelo Lema 4.1.15, $rann_R(J^k)$ é um anulador à direita graduado, para todo $k \in \mathbb{N}$. Portanto, a cadeia considerada é uma cadeia ascendente de anuladores à direita graduados, logo, existe um número natural n tal que $rann_R(J^n) = rann_R(J^{n+1})$.

Suponhamos que $J^{n+1} \neq 0$. Se, para todo o elemento homogêneo $a \in J$, tivermos $J^n a = 0$, como J é gerado pelos seus elementos homogêneos, concluímos que $J^{n+1} = 0$, o que é absurdo. Assim, concluímos que existe um elemento homogêneo $a \in J$ para o qual $J^n a \neq 0$.

Suponhamos que para todo o elemento homogêneo $a' \in J$ tal que $J^n a' \neq 0$ existe um elemento homogêneo $a'' \in J$ tal que $J^n a'' \neq 0$ e $rann_R(a') \subsetneq rann_R(a'')$; então conseguimos construir uma cadeia propriamente ascendente infinita de anuladores à direita graduados

$$rann_R(a') \subsetneq rann_R(a'') \subsetneq \dots,$$

o que, por hipótese, é absurdo. Logo, podemos escolher um elemento homogêneo $a \in J$ que goza da propriedade " $J^n a \neq 0$ e, para todo $x \in h(R) \cap J$ tal que $\text{rann}_R(a) \subsetneq \text{rann}_R(x)$, tem-se $J^n x = 0$ ".

Consideremos, agora, um elemento homogêneo b de $Z^g(R_R)$. Por definição,

$$\text{rann}_R(b) \leq_{gr-e} R_R,$$

consequentemente, $\text{rann}_R(b) \cap aR \neq 0$. Podemos, então, escolher

$$ac \in (\text{rann}_R(b) \cap aR) \setminus \{0\},$$

logo, $bac = 0$. Uma vez que

$$c \in (\text{rann}_R(ba) \setminus \text{rann}_R(a)),$$

$\text{rann}_R(a) \subsetneq \text{rann}_R(ba)$, logo, pela escolha de a , $J^n ba = 0$. Como b é um elemento homogêneo arbitrário de J e J é gerado pelos seus elementos homogêneos, concluímos que $J^n Ja = 0$, isto é,

$$a \in \text{rann}_R(J^{n+1}).$$

Uma vez que $\text{rann}_R(J^{n+1}) = \text{rann}_R(J^n)$, temos um absurdo - pois $J^n a \neq 0$. O absurdo resultou de supormos $J^{n+1} \neq 0$, logo, o ideal direito graduado J é nilpotente.

Se R for gr-semiprimo, então, como J é nilpotente, $J = 0$. ■

Corolário 5.1.10 *Seja R um anel graduado do tipo G gr-Goldie à direita gr-semiprimo. Se a é um elemento homogêneo regular à direita de R , então, a é um elemento regular de R .*

Demonstração. Suponhamos que existe $c \in R \setminus \{0\}$ tal que $ca = 0$. Uma vez que a é um elemento homogêneo, existe uma componente homogênea c' de c tal que $c'a = 0$. Em particular, $c'(aR) = 0$. Como, pela Proposição 5.1.5, $(aR)_R \leq_{gr-e} R_R$,

$$\text{rann}_R(c') \leq_{gr-e} R_R,$$

logo, $c' \in Z^g(R_R)$.

Por outro lado, pela Proposição 5.1.9, $Z^g(R_R) = 0$, o que é absurdo, uma vez que

$$c' \in Z^g(R_R) \setminus \{0\}.$$

O absurdo resultou de supormos que existe $c \in R \setminus \{0\}$ tal que $ca = 0$, logo, a é um elemento regular de R , como queríamos demonstrar. ■

Proposição 5.1.11 *Seja R um anel graduado do tipo G , gr-semiprimo que satisfaz c.c.a em anuladores à direita graduados; então todo o ideal direito graduado não nulo de R contém um elemento homogêneo não nilpotente.*

Demonstração. Seja I um ideal direito graduado não nulo de R e x um elemento homogêneo não nulo de I tal que $rann_R(x)$ é maximal entre os anuladores à direita em R de elementos homogêneos não nulos de I . Como $RxR \neq 0$ e R é anel gr-semiprimo, $(RxR)^2 \neq 0$. Podemos, então, considerar $r \in h(R)$ tal que $rxr \neq 0$. Uma vez que $rann_R(x) \subseteq rann_R(xrx)$ e $rann_R(x)$ é maximal entre os anuladores à direita em R de elementos homogêneos não nulos de I , temos $rann_R(x) = rann_R(xrx)$, logo, $(xr)^2 \neq 0$.

Aplicando um raciocínio de indução, concluímos que $(xr)^n \neq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, portanto, xr é um elemento homogêneo não nilpotente de I . ■

Definição 5.1.12 *Seja R um anel graduado do tipo G . Um R -módulo graduado não nulo M diz-se **gr-uniforme** se a intersecção de dois quaisquer R -submódulos graduados não nulos de M for não nula.*

Lema 5.1.13 *Seja R um anel graduado do tipo G gr-semiprimo que satisfaz c.c.a em anuladores à direita graduados. Seja $a \in h(R) \setminus \{0\}$ tal que aR é gr-uniforme. Então, o anulador à direita de a em R é maximal entre os anuladores à direita dos elementos homogêneos não nulos de R .*

Demonstração. Com vista a um absurdo, suponhamos que existe um elemento homogêneo não nulo b tal que

$$rann_R(a) \subsetneq J = rann_R(b).$$

Então, $aJ \neq 0$ e, como aR é gr-uniforme, $aJ \leq_{gr-e} aR$, logo, $aJ \leq_e aR$ e, pela Proposição 1.6.3, aR/aJ é um R -módulo singular.

Observemos, agora, que $ar + aJ = ar' + aJ$ implica

$$a(r - r' - j) = 0,$$

para algum $j \in J$; conseqüentemente,

$$(r - r' - j) \in rann_R(a) \subsetneq rann_R(b),$$

o que nos leva a concluir que

$$0 = b(r - r' - j) = br - br' - bj = br - br',$$

logo, $br = br'$. Podemos, pois, definir a aplicação

$$\begin{array}{ccc} \phi : & aR/aJ & \rightarrow & bR \\ & ar + aJ & \rightarrow & br \end{array}.$$

Assim definida, ϕ é um R -epimorfismo. O R -homomorfismo ϕ é ainda injectivo uma vez que $\phi(ar + aJ) = 0$ implica $r \in J$, logo, $ar \in aJ$. Consequentemente, $bR \simeq aR/aJ$. Uma vez que aR/aJ é um R -módulo singular, concluímos que bR é um R -módulo singular, logo,

$$\text{rann}_R(br) \leq_e R_R, \text{ para todo } r \in R.$$

Seja $y \in (bR)_t$, com $t \in G$; então, $\text{rann}_R(y)$ é um ideal direito graduado de R , logo, $\text{rann}_R(y) \leq_{gr-e} R_R$ e, portanto, $y \in (Z^g(bR))_t$. Concluímos, assim, que $Z^g(bR) = bR$.

Por outro lado, como R é anel gr-semiprimo e satisfaz c.c.a em anuladores à direita graduados, pela Proposição 5.1.9, $Z^g(R_R) = 0$, logo, $Z^g(bR) = 0$, o que nos leva a concluir que $b = 0$, o que é absurdo. Provamos, assim, que o anulador à direita de a é maximal entre os anuladores à direita dos elementos homogêneos não nulos de R , como desejávamos provar. ■

Teorema 5.1.14 (Goodearl, Stafford) *Sejam G um grupo Abeliano e R um anel graduado do tipo G , gr-primo e gr-Goldie à direita. Todo o ideal direito graduado gr-essencial I de R contém um elemento homogêneo regular.*

Demonstração. Para simplificação de linguagem, dizemos que um elemento homogêneo não nulo $a \in R$ é gr-uniforme se o ideal direito graduado aR for gr-uniforme.

Seja I um ideal direito gr-essencial de um anel graduado R do tipo G gr-primo e gr-Goldie à direita. Suponhamos que o grupo G é Abeliano.

Começamos por provar que todo o ideal direito graduado não nulo de R contido em I possui um elemento homogêneo não nilpotente gr-uniforme. Consideremos um ideal direito graduado I' não nulo de R tal que $I' \subseteq I$. Pela Proposição 5.1.11, I' contém um elemento homogêneo não nilpotente a_1 . Suponhamos que todos os elementos homogêneos não nilpotentes de I' não são gr-uniformes; então, em particular, existem dois ideais direitos graduados não nulos I_1 e I_2 tais que $I_2 \oplus I_1 \subseteq a_1 R$. Analogamente, I_2 contém um elemento homogêneo não nilpotente a_2 e, portanto, existem dois ideais direitos graduados não nulos I_3 e I_4 tais que $I_4 \oplus I_3 \subseteq a_2 R$, logo, $I_4 \oplus I_3 \oplus I_1$ é um ideal direito graduado não nulo de R . Repetindo este processo, construímos uma soma directa de uma família infinita de ideais direitos graduados não nulos de R , o que contraria o facto de R ter gr-dimensão de Goldie à direita finita. Provamos, assim, que existe um elemento homogêneo não nilpotente gr-uniforme em I' . Em particular, existe um elemento homogêneo não nilpotente gr-uniforme em I - a_1 .

Suponhamos que $\text{rann}_R(a_1) = 0$, então, pelo Corolário 5.1.10, a_1 é um elemento regular de R . Provamos, assim, que I possui um elemento homogêneo regular.

Suponhamos que $rann_R(a_1) \neq 0$, então, como I é um ideal direito gr-essencial, $I \cap rann_R(a_1) \neq 0$. Pelo que vimos anteriormente, existe um elemento homogêneo, não nilpotente, gr-uniforme a_2 em $I \cap rann_R(a_1)$.

Provaremos em seguida que, se para todo o número natural n existir um elemento homogêneo, não nilpotente, gr-uniforme a_{n+1} tal que

$$a_{n+1} \in (\cap_{1 \leq j \leq n} rann_R(a_j)) \cap I,$$

então a soma $\sum_{i \in \mathbb{N}} a_i R$ é directa. Com efeito, se

$$a_1 r_1 + \dots + a_m r_m = 0,$$

para algum número natural m e para alguns $r_1, \dots, r_m \in R$, então

$$a_1 a_1 r_1 + \dots + a_1 a_m r_m = 0.$$

Uma vez que $a_2, \dots, a_m \in rann_R(a_1)$, temos que $r_1 \in rann_R(a_1^2)$. Uma vez que a_1 é um elemento homogêneo não nilpotente, a_1^2 é um elemento homogêneo não nulo. Ora, como a_1 é um elemento homogêneo gr-uniforme, pelo Lema 5.1.13,

$$rann_R(a_1^2) = rann_R(a_1).$$

Concluimos, assim, que $a_1 r_1 = 0$. De modo análogo provamos que todas as parcelas da soma consideradas são nulas, portanto, $\sum_{i \in \mathbb{N}} a_i R$ é uma soma directa de uma família de ideais direitos graduados não nulos, o que é absurdo, uma vez que R tem gr-dimensão de Goldie à direita finita.

Consequentemente existe um número natural n (com $n \geq 2$) e existem elementos homogêneos, não nilpotentes, gr-uniformes - $a_1, \dots, a_n \in I$ tais que

$$a_i \in ((\cap_{1 \leq j \leq i-1} rann_R(a_j)) \cap I,$$

para todo i tal que $1 < i \leq n$, e $I \cap (\cap_{1 \leq j \leq n} rann_R(a_j))$ não contém elementos homogêneos não nilpotentes gr-uniformes. Uma vez que já provamos que os ideais direitos graduados não nulos contidos em I possuem um elemento homogêneo não nilpotente gr-uniforme, concluimos que $I \cap (\cap_{1 \leq j \leq n} rann_R(a_j)) = 0$. Ora, como I é um ideal direito gr-essencial de R ,

$$\cap_{1 \leq j \leq n} rann_R(a_j) = 0.$$

Pelo Lema 5.1.13, $rann_R(a_j)$ é maximal entre os anuladores à direita de elementos homogêneos não nulos de R , para todo j tal que $1 \leq j \leq n$. Tal como no parágrafo anterior concluimos que $\sum_{i=1}^n a_i R$ é uma soma directa.

Suponhamos, agora, que $a_1^2 R a_2^2 R \dots a_n^2 R = 0$; então, como R é anel gr-primo, existe i tal que $1 \leq i \leq n$ e $a_i^2 R = 0$, em particular, $a_i^2 = 0$, o que é absurdo, uma

vez que a_i é um elemento não nilpotente. Logo, $a_1^2 R a_2^2 R \dots a_n^2 R \neq 0$ e existem elementos homogêneos de R - $s_1, \dots, s_{n-1}$ tais que

$$x = a_1^2 s_1 a_2^2 s_2 \dots s_{n-1} a_n^2 \neq 0.$$

Pela Proposição 5.1.11, xR contém um elemento homogêneo não nilpotente

$$d = a_1^2 s_1 a_2^2 s_2 \dots s_{n-1} a_n^2 s_n,$$

onde $s_n \in h(R)$.

Dado $i \in \{1, \dots, n\}$, designamos por d_i o elemento

$$(a_i s_i a_{i+1}^2 s_{i+1} \dots s_{n-1} a_n^2 s_n) (a_1^2 s_1 \dots s_{i-2} a_{i-1}^2 s_{i-1} a_i),$$

Como $d^2 \neq 0$, d_i é não nulo, para todo i tal que $1 \leq i \leq n$. Ora, como $\text{rann}_R(a_i) \subseteq \text{rann}_R(d_i)$ e $\text{rann}_R(a_i)$ é maximal entre os anuladores à direita de elementos homogêneos não nulos de R ,

$$\text{rann}_R(d_i) = \text{rann}_R(a_i), \text{ para todo } i.$$

Observe-se, ainda, que a soma $\sum_{i=1}^n d_i R$ é directa, uma vez que $d_i R \subseteq a_i R$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Assim,

$$\text{rann}_R(d_1 + \dots + d_n) = \bigcap_{i=1}^n \text{rann}_R(d_i) = \bigcap_{i=1}^n \text{rann}_R(a_i) = 0.$$

Como G é grupo Abelian, d_i é um elemento homogêneo não nulo tal que $gr(d_i) = gr(d)$, para todo i tal que $1 \leq i \leq n$. Portanto, $d' = d_1 + \dots + d_n$ é um elemento homogêneo não nulo de R cujo grau é igual ao grau de d . Concluimos, assim, que d' é um elemento homogêneo regular à direita. Pelo Corolário 5.1.10, d' é um elemento homogêneo regular de I , como desejávamos provar. ■

5.2 O Teorema de Goldie para alguns anéis graduados

Nesta secção, concentrar-nos-emos na determinação de condições que nos permitam demonstrar a recíproca da Proposição 5.1.2 no caso de o anel graduado R em consideração ter graduação não degenerada. Em particular, provaremos que, no caso de um anel graduado R ter graduação não degenerada e ter anel base semiprimo, é válida a recíproca da Proposição 5.1.2. Verificaremos ainda que, se o anel graduado R em causa tiver suporte finito (note-se que, pela Proposição 4.3.8, um anel gr-semiprimo com suporte finito tem graduação não degenerada) ou for fortemente graduado, é possível demonstrar uma versão graduada do Teorema de Goldie.

Começaremos por provar que, se R é anel graduado com graduação não degenerada à direita e gr-Goldie à direita, R_e é anel de Goldie à direita.

Lema 5.2.1 *Seja R um anel graduado do tipo G que satisfaz c.c.a em anuladores à direita graduados; então R_e satisfaz c.c.a em anuladores à direita.*

Demonstração. Consideremos uma cadeia ascendente de anuladores à direita de R_e - $X_1 \subseteq \dots \subseteq X_n \subseteq \dots$, logo,

$$rann_R(lann_{R_e}(X_1)) \subseteq \dots \subseteq rann_R(lann_{R_e}(X_n)) \subseteq \dots$$

Uma vez que $Y_i = lann_{R_e}(X_i) \subseteq R_e$, para todo i , pelo Lema 4.1.15, $rann_R(Y_i)$ é um anulador à direita graduado de R , para todo i .

Por hipótese, R satisfaz c.c.a em anuladores à direita graduados, portanto, existe um número natural n tal que $rann_R(Y_m) = rann_R(Y_n)$, para todo $m \geq n$; logo, $rann_{R_e}(Y_m) = rann_{R_e}(Y_n)$, para todo $m \geq n$, o que, pelo Lema 2.2.10, implica $X_m = X_n$, para todo $m > n$. Está, pois, provado que R_e satisfaz c.c.a em anuladores à direita. ■

Proposição 5.2.2 *Seja R um anel graduado do tipo G com graduação não degenerada à direita; então R_e tem dimensão de Goldie à direita finita se e só se R tem gr-dimensão de Goldie à direita finita.*

Demonstração. Seja R um anel graduado do tipo G com graduação não degenerada à direita. Suponhamos que R_e tem dimensão de Goldie à direita finita e consideremos uma família independente de ideais direitos não nulos graduados de R - $(I_i)_{i \in K}$. Pelo facto de R ter graduação não degenerada à direita concluímos, pela Proposição 4.3.3, que $(I_i \cap R_e)_{i \in K}$ é uma família independente de ideais direitos não nulos de R_e . Como R_e tem, por hipótese, dimensão de Goldie à direita finita, concluímos que K é um conjunto finito. Portanto, R tem gr-dimensão de Goldie à direita finita, como desejávamos provar.

Reciprocamente, suponhamos que R tem gr-dimensão de Goldie à direita finita e consideremos uma família independente $(I_i)_{i \in K}$ de ideais direitos não nulos de R_e . Consideremos a família de ideais direitos graduados não nulos - $(I_i R)_{i \in K}$. Suponhamos que existem $x_1 \in (I_{k_1} R) \setminus \{0\}$, ..., $x_n \in (I_{k_n} R) \setminus \{0\}$, com $k_1, \dots, k_n \in K$, tais que $x_1 + \dots + x_n = 0$. Seja $(x_1)_t^*$ uma componente homogênea de x_1 de grau $t \in G$. Para todo $j \in \{2, \dots, n\}$, consideramos, no caso de x_j ter uma componente homogênea de grau t , $(x_j)_t^* = (x_j)_t$, caso contrário, $(x_j)_t^* = 0$. Assim,

$$(x_1)_t^* + \dots + (x_n)_t^* = 0$$

e, uma vez que $(I_i R)_{i \in K}$ é uma família de ideais direitos graduados de R , $(x_1)_t^* \in I_{k_1} R$, ..., $(x_n)_t^* \in I_{k_n} R$. Pelo facto de R ter graduação não degenerada à direita, existe $r \in R_{t^{-1}}$ tal que $(x_1)_t^* r \in R_e \setminus \{0\}$, logo,

$$(x_1)_t^* r + \dots + (x_n)_t^* r = 0.$$

Ora, como $(x_1)_t^* r \in I_{k_1}, \dots, (x_n)_t^* r \in I_{k_n}$ e $(I_i)_{i \in K}$ é, por hipótese, uma família independente de ideais direitos não nulos de R_e ,

$$(x_1)_t^* r = \dots = (x_n)_t^* r = 0,$$

o que é absurdo, uma vez que $0 \neq (x_1)_t^* r$. Consequentemente, a família de ideais direitos graduados não nulos de $R - (I_i R)_{i \in K}$ é independente, o que nos leva a concluir, pelo facto de R ter gr-dimensão de Goldie à direita finita, que K é um conjunto finito e, portanto, R_e tem dimensão de Goldie à direita finita, como desejávamos provar. ■

O Corolário da Proposição que se segue dá-nos condições suficientes para um anel graduado R do tipo G satisfazer a condição “todo o ideal direito graduado gr-essencial I de R contém um elemento homogéneo regular”. De facto, provaremos que, se R é um anel graduado do tipo G com graduação não degenerada e tal que R_e é anel de Goldie à direita semiprimo, todo o ideal direito graduado gr-essencial de R contém um elemento regular homogéneo de grau e .

Proposição 5.2.3 *Sejam R um anel graduado do tipo G com graduação não degenerada à direita e L um ideal direito graduado de R . O ideal direito graduado L de R é gr-essencial se e só se $L \cap R_e$ é essencial como ideal direito de R_e .*

Demonstração. Seja L um ideal direito graduado gr-essencial de R e seja K um ideal direito não nulo de R_e ; então KR é um ideal direito não nulo graduado de R e, como L é gr-essencial, $L \cap KR$ é um ideal direito graduado não nulo. Uma vez que R tem graduação não degenerada à direita, concluímos, pela Proposição 4.3.3, que

$$0 \neq (L \cap KR) \cap R_e = (L \cap R_e) \cap K.$$

Portanto, $L \cap R_e$ é um ideal direito essencial de R_e , como desejávamos provar.

Reciprocamente, suponhamos que $L \cap R_e$ é um ideal direito essencial de R_e e seja K um ideal direito graduado não nulo de R ; então, pelo facto de R ter graduação não degenerada à direita, pela Proposição 4.3.3, $K \cap R_e \neq 0$. Como $L \cap R_e$ é um ideal direito essencial de R_e ,

$$(L \cap R_e) \cap (K \cap R_e) \neq 0,$$

portanto, $L \cap K \neq 0$, o que nos leva a concluir que L é um ideal direito graduado gr-essencial, como desejávamos provar. ■

Corolário 5.2.4 *Seja R um anel graduado do tipo G com graduação não degenerada tal que R_e é anel de Goldie à direita semiprimo e seja I um ideal direito graduado gr-essencial de R ; então I contém um elemento regular homogéneo de grau e .*

Demonstração. Se I é um ideal direito graduado gr-essencial, então, pela Proposição 5.2.3, $I \cap R_e$ é um ideal direito essencial de R_e , logo, pelo Teorema de Goldie, $I \cap R_e$ contém um elemento regular x . Como $rann_{R_e}(x) = 0 = lann_{R_e}(x)$, pelo Lema 4.3.10,

$$rann_R(x) = 0 = lann_R(x),$$

concluindo-se, assim, que I contém um elemento regular homogêneo de grau e . ■

Estamos, agora, em condições de demonstrar a recíproca da Proposição 5.1.2 para anéis com graduação não degenerada cujo anel base é semiprimo.

Proposição 5.2.5 *Seja R um anel graduado do tipo G gr-Goldie à direita cuja graduação é não degenerada e tal que R_e é anel semiprimo; então existe anel de frações à direita de R com respeito a $S = C_R(0) \cap h(R)$ e RS^{-1} é anel gr-semisimples.*

Demonstração. Do Lema 5.2.1 e da Proposição 5.2.2, concluímos que R_e é anel de Goldie à direita. Estão, pois, reunidas as condições necessárias para aplicar o Corolário 5.2.4 e afirmar que todo o ideal direito graduado gr-essencial de R contém um elemento regular homogêneo.

A proposição é, agora, uma consequência imediata do Teorema 5.1.8. ■

Afirmámos, no início desta secção, ser também possível demonstrar uma versão graduada do Teorema de Goldie para anéis fortemente graduados. Para tal necessitamos de aplicar a seguinte Proposição:

Proposição 5.2.6 *Seja R um anel fortemente graduado tal que R_e é anel de Goldie à direita; então R é anel gr-semiprimo se e só se R_e é anel semiprimo.*

Demonstração. Como R é um anel fortemente graduado, em particular, R tem graduação não degenerada. Pela Proposição 4.3.9, se R_e for anel semiprimo, R é anel gr-semiprimo.

Reciprocamente, suponhamos que R é anel gr-semiprimo. Pela Proposição 4.4.4, para provarmos que R_e é anel semiprimo é suficiente provar que R_e é anel G -semiprimo. Ora, se considerarmos um ideal G -invariante I de R_e para o qual existe um número natural n tal que $I^n = 0$, então $I^n R^n = 0$. Uma vez que I é um ideal de R_e G -invariante, $(IR)^n = 0$ e, como IR é um ideal direito graduado de R e R é anel gr-semiprimo, $IR = 0$, o que nos leva a concluir que $I = 0$. Portanto, R_e é um anel G -semiprimo, como desejávamos provar. ■

Teorema 5.2.7 *Seja R um anel fortemente graduado; então R é anel gr-Goldie à direita, gr-semiprimo se e só se existe anel de frações à direita de R com respeito a $S = C_R(0) \cap h(R)$ e o anel RS^{-1} é gr-semisimples.*

Demonstração. Foi provado na Proposição 5.1.2 que, se existir anel de fracções à direita de R com respeito a $S = C_R(0) \cap h(R)$ e se o anel RS^{-1} , com a graduação definida na Proposição 4.5.2, é gr-semisimples, então R é anel gr-Goldie à direita e gr-semiprimo.

Reciprocamente, suponhamos que R é um anel gr-Goldie à direita, gr-semiprimo. Para provarmos o teorema é suficiente, pela Proposição 5.2.5, provar que R_e é anel semiprimo. Ora, como R é anel gr-Goldie à direita e R tem graduação não degenerada, pelo Lema 5.2.1 e pela Proposição 5.2.2, R_e é anel Goldie à direita, logo, pela Proposição 5.2.6, R_e é anel semiprimo, como desejávamos provar. ■

Como consequência da Proposição 4.3.8, temos que todo o anel graduado R do tipo G gr-semiprimo com suporte finito tem graduação não degenerada e anel base semiprimo. Aplicando a Proposição 5.2.5, concluímos que, se R é um anel graduado do tipo G gr-semiprimo, gr-Goldie à direita cujo suporte é finito, é válida a recíproca da Proposição 5.1.2. Assim,

Teorema 5.2.8 *Seja R um anel graduado do tipo G com suporte finito. Então, R é anel gr-semiprimo, gr-Goldie à direita se e só se $S = C_R(0) \cap h(R)$ é um conjunto de denominadores à direita em R e RS^{-1} é anel gr-semisimples.*

No Teorema anterior demonstrou-se uma versão graduada do Teorema de Goldie para anéis com suporte finito. Em particular, este resultado é válido no caso de considerarmos anéis graduados por grupos finitos.

Em seguida apresentaremos um resultado (Teorema 5.2.10) que nos permitirá, em particular, concluir que, se considerarmos um anel graduado R do tipo G gr-Goldie à direita, gr-semiprimo e com suporte finito, existe anel de fracções à direita de R com respeito a $C_R(0) - RC_R(0)^{-1}$, sendo este anel Artiniano.

Proposição 5.2.9 *Seja R um anel graduado do tipo G com graduação não degenerada tal que R_e é anel de Goldie à direita semiprimo; então:*

- 1) *o subconjunto multiplicativo $S = C_R(0) \cap h(R)$ de R é um conjunto de denominadores à direita em R ,*
- 2) *o subconjunto multiplicativo $T = C_{R_e}(0)$ de R é um conjunto de denominadores à direita em R e $T \subseteq S$.*

Demonstração. 1) Como R_e tem dimensão de Goldie à direita finita, pela Proposição 5.2.2, R tem gr-dimensão de Goldie à direita finita e, como pelo Corolário 5.2.4, todo o ideal direito graduado gr-essencial de R contém um elemento homogêneo regular, estão reunidas as condições necessárias para aplicar a Proposição 5.1.6 e afirmar que S é um conjunto de denominadores à direita em R .

2) Pelo Lema 4.3.10, $T \subseteq C_R(0)$, o que nos permite concluir que T é um conjunto reversível e $T \subseteq C_R(0) \cap h(R) = S$.

Sejam $s_e \in T$ e $r \in R$. Como $s_e \in S$ e, por **1)**, S é um conjunto de denominadores à direita em R , existem $s \in S$ e $r' \in R$ tais que $s_e r' = rs$.

Como R tem gr-dimensão de Goldie à direita finita, pela Proposição 5.1.5, sR é um ideal direito graduado gr-essencial de R ; logo, pelo Corolário 5.2.4, existe um elemento regular homogêneo de grau e em $sR - sr^*$. Assim, $s_e(r'r^*) = r(sr^*)$. Uma vez que $sr^* \in T$, provamos que T é um conjunto de Ore à direita em R . Consequentemente, T é um conjunto de denominadores à direita em R , como desejávamos provar. ■

Teorema 5.2.10 *Seja R um anel graduado do tipo G com graduação não degenerada tal que R_e é anel de Goldie à direita, semiprimo. Sejam $S = C_R(0) \cap h(R)$ e $T = C_{R_e}(0)$; então:*

- 1) *existe anel de frações à direita de R com respeito a $S - RS^{-1}$ e existe anel de frações à direita de R com respeito a $T - RT^{-1}$, sendo $RS^{-1} \simeq RT^{-1}$;*
- 2) *RS^{-1} é anel gr-semisimples, com graduação não degenerada tal que $\sup(RS^{-1}) = \sup(R)$ e $(RS^{-1})_e \simeq R_e T^{-1}$. Em particular, $(RS^{-1})_e$ é anel semisimples;*
- 3) *se considerarmos em RT^{-1} a graduação apresentada na Proposição 4.5.2, $(RT^{-1})_e$ é anel semisimples;*
- 4) *para todo $t \in \sup(R)$, existe um número natural n tal que R_t é isomorfo a um R_e -submódulo do R_e -módulo à direita $\oplus_{i=1}^n R_e$;*
- 5) *se $\sup(R)$ for um conjunto finito, então RS^{-1} é anel de frações à direita de R com respeito a $C_R(0)$ e RS^{-1} é anel Artiniano.*

Demonstração. **1)** Pela Proposição 5.2.9, os conjuntos S e T são conjuntos de denominadores à direita em R , logo, RS^{-1} e RT^{-1} existem.

Verificaremos, em seguida, que RS^{-1} é anel de frações à direita de R com respeito a T . Consideremos o homomorfismo

$$\begin{aligned} \phi: R &\rightarrow RS^{-1} \\ r &\rightarrow r1^{-1} \end{aligned}$$

que satisfaz as condições **a)**, **b)** e **c)** da Definição 2.1.1.

Como $T \subseteq S$, os elementos da forma $\phi(t)$, com $t \in T$, são unidades de RS^{-1} . Por outro lado, como $T \subseteq C_R(0)$,

$$\text{Ker}(\phi) = 0 = \{r \in R : rs = 0, \text{ para algum } s \in T\}.$$

Para demonstrarmos que RS^{-1} é anel de frações à direita de R com respeito a T é, agora, suficiente verificar que todo o elemento de RS^{-1} se escreve na forma ab^{-1} , para alguns $a \in R$ e $b \in T$. Seja $y \in RS^{-1}$; então $y = cd^{-1}$, para alguns $c \in R$ e $d \in S$. Ora, como, pela Proposição 5.2.2, R tem gr-dimensão de Goldie à direita finita e como $d \in S$, pela Proposição 5.1.5, $(dR)_R \leq_{gr-e} R_R$, logo, pelo Corolário 5.2.4, dR contém um elemento regular homogêneo de grau $e - t = dx$.

Consequentemente, $d^{-1} = xt^{-1}$, o que nos leva a concluir que $cd^{-1} = (cx)t^{-1}$, com $t \in T$ e $cx \in R$. Logo, todos os elementos de RS^{-1} se escrevem na forma ab^{-1} , para alguns $a \in R$ e $b \in T$. Uma vez que RS^{-1} é anel de fracções à direita de R com respeito a T , concluímos que $RS^{-1} \simeq RT^{-1}$, como desejávamos provar.

2) Pelo Corolário 5.2.4, todo o ideal direito gr-essencial de R contém um elemento regular homogêneo de grau e . Ora, como, pela Proposição 5.2.2, R tem gr-dimensão de Goldie à direita finita, estão reunidas as condições necessárias para aplicar o Teorema 5.1.8 e afirmar que o anel RS^{-1} é gr-semisimples.

Consideremos o subanel $(RS^{-1})_e$ de RS^{-1} e o homomorfismo de anéis

$$\begin{array}{ccc} \phi|_{R_e}: R_e & \rightarrow & (RS^{-1})_e \\ r & \rightarrow & r1^{-1} \end{array}.$$

Uma vez que $T \subseteq S$, $\phi(t)$ é uma unidade de RS^{-1} , para todo $t \in T$.

Seja $t \in T$. Como $\phi(t)$ é um elemento homogêneo de grau e de RS^{-1} , o inverso de $\phi(t)$ é também um elemento homogêneo de RS^{-1} de grau e , logo, pertence a $(RS^{-1})_e$. Consequentemente, $\phi(s)$ é uma unidade de $(RS^{-1})_e$, para todo $s \in T$.

Por outro lado,

$$\text{Ker}(\phi|_{R_e}) = 0 = \{r \in R_e : rs = 0, \text{ para algum } s \in T\}.$$

Consequentemente, para provarmos que $(RS^{-1})_e$ é anel de fracções à direita de R_e com respeito a T é suficiente provar que todo o elemento de $(RS^{-1})_e$ se escreve na forma at^{-1} , para alguns $a \in R_e$ e $t \in T$. Para tal, consideremos

$$y \in (RS^{-1})_e \setminus \{0\};$$

então, $y = rs^{-1}$, para alguns elementos $r \in h(R) \setminus \{0\}$ e $s \in S$ tais que $gr(r) = gr(s)$.

Uma vez que, pela Proposição 5.2.2, R tem gr-dimensão de Goldie à direita finita e como $s \in S$, pela Proposição 5.1.5, $sR \leq_{gr-e} R_R$, logo, pelo Corolário 5.2.4, sR contém um elemento regular homogêneo de grau $e - ss'$. Como $s, ss' \in h(R)$, podemos supor que $s' \in h(R)$. Por outro lado, como ss', s pertencem a S , $s'1^{-1}$ é uma unidade de RS^{-1} . Consequentemente, $rs^{-1} = (rs')(ss')^{-1}$. Ora, uma vez que $gr(ss') = e$, concluímos que

$$gr(rs') = gr(ss') = e,$$

logo, $y = (rs')(ss')^{-1}$, com $rs' \in R_e$ e $ss' \in T$. Portanto, $(RS^{-1})_e$ é anel de fracções à direita de R_e com respeito a T , logo,

$$(RS^{-1})_e \simeq R_e T^{-1}.$$

Uma vez que R_e é anel de Goldie à direita semiprimo, pelo Teorema de Goldie, $R_e T^{-1}$ é anel semisimples, logo, $(RS^{-1})_e$ é anel semisimples.

Para verificarmos que RS^{-1} tem graduação não degenerada à direita é suficiente mostrar que $(aRS^{-1})_e \neq 0$, para todo o elemento homogêneo não nulo $a \in RS^{-1}$.

Dado um elemento homogêneo não nulo $a \in RS^{-1}$, temos $a = bc^{-1}$, para alguns $b \in h(R) \setminus \{0\}$, $c \in S$. Como R tem graduação não degenerada, existe $b' \in h(R)$ tal que $bb' \in R_e \setminus \{0\}$. Consequentemente,

$$0 \neq (bb')1^{-1} = a(cb')1^{-1}$$

e

$$a(cb')1^{-1} \in (aRS^{-1})_e,$$

o que nos permite concluir que RS^{-1} tem graduação não degenerada à direita.

Uma vez que $(RS^{-1})_e$ é anel semisimples, $(RS^{-1})_e$ é anel semiprimo, logo, pelo Lema 4.3.4, RS^{-1} tem graduação não degenerada à esquerda.

Verificaremos, em seguida, que $\sup(RS^{-1}) = \sup(R)$.

Facilmente se verifica que $\sup(R) \subseteq \sup(RS^{-1})$. Considerando $\alpha \in \sup(RS^{-1})$, então existe $x \in RS^{-1} \setminus \{0\}$ tal que $x = as^{-1}$, para alguns $a \in h(R) \setminus \{0\}$, $s \in S$ tais que $gr(a)gr(s)^{-1} = \alpha$. Tal como anteriormente, determinamos $s' \in h(R)$ tal que $ss' \in T$. Consequentemente, $as^{-1} = (as')(ss')^{-1}$, onde $as' \in h(R)$ e $ss' \in T$. Ora, como

$$gr(a)gr(s)^{-1} = gr(as')gr(ss')^{-1}$$

e $ss' \in T$, concluímos que $gr(as') = \alpha$ e $as' \neq 0$. Portanto, $\alpha \in \sup(R)$, o que nos leva a concluir que $\sup(R) = \sup(RS^{-1})$, como desejávamos provar.

3) Tal como na alínea anterior demonstramos que $(RT^{-1})_e$ é anel de fracções à direita de R_e com respeito a T . Uma vez que R_e é anel de Goldie à direita semiprimo, pelo Teorema de Goldie, $(RT^{-1})_e$ é anel semisimples.

4) Seja $X = RS^{-1}$. Como, pela alínea **2)**, X tem graduação não degenerada e X_e é anel semisimples, estão reunidas as condições necessárias para aplicar o Teorema 4.3.11 e afirmar que $X_{\sigma^{-1}}$ é finitamente gerado como X_e -módulo à esquerda, para todo $\sigma \in \sup(RS^{-1})$. Assim, dado $\sigma \in \sup(RS^{-1})$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$X_{\sigma^{-1}} = \sum_{i=1}^n X_e x_i s_i^{-1},$$

para alguns $x_i s_i^{-1} \in X_{\sigma^{-1}}$, onde i é tal que $1 \leq i \leq n$. Pela Proposição 2.1.14, existem $x'_1, \dots, x'_n \in R$ e $s \in S$ tais que $x_1 s_1^{-1} = x'_1 s^{-1}$, ..., $x_n s_n^{-1} = x'_n s^{-1}$.

Como R tem gr-dimensão de Goldie à direita finita, $sR \leq_{gr-e} R_R$. Aplicando o Corolário 5.2.4, concluímos que existe $s' \in R$ tal que $ss' \in T$. Seja $t = ss'$.

Consequentemente, existem $x'_1, \dots, x'_n \in R_{\sigma^{-1}}$ tais que $x'_1 s^{-1} = x'_1 t^{-1}, \dots, x'_n s^{-1} = x'_n t^{-1}$. Consideremos o R_e -homomorfismo

$$\begin{aligned} \varphi : R_{\sigma} &\rightarrow \oplus_{i=1}^n R_e \\ r &\rightarrow (x'_1 r, \dots, x'_n r) \end{aligned} \cdot$$

Mostremos que $\text{Ker}(\varphi) = 0$. Para tal, suponhamos que existe $r \in R_{\sigma}$ tal que $x'_i r = 0$, para todo i tal que $1 \leq i \leq n$, então

$$0 = \sum_{i=1}^n X_e(x'_i r) 1^{-1} = \left(\sum_{i=1}^n X_e(x'_i t^{-1}) \right) (tr 1^{-1}) = X_{\sigma^{-1}}(tr) 1^{-1}.$$

Como a graduação de X é não degenerada, $(tr) 1^{-1} = 0$. Como $t 1^{-1}$ é uma unidade de X , $r 1^{-1} = 0$, logo, $r = 0$. Consequentemente, $\text{Ker}(\varphi) = 0$. Concluímos, assim, que, para todo $\sigma \in \text{sup}(RS^{-1})$, existe um número natural n tal que R_{σ} é isomorfo a um R_e -submódulo do R_e -módulo à direita $\oplus_{i=1}^n R_e$. Como, pela alínea **2)**, $\text{sup}(R) = \text{sup}(RS^{-1})$, temos que, para todo $\sigma \in \text{sup}(R)$, existe um número natural n tal que R_{σ} é isomorfo a um R_e -submódulo do R_e -módulo à direita $\oplus_{i=1}^n R_e$, como desejávamos provar.

5) Pela alínea **2)**, RS^{-1} é um anel graduado com graduação não degenerada tal que $(RS^{-1})_e$ é anel semisimples e $\text{sup}(R) = \text{sup}(RS^{-1})$. Uma vez que $\text{sup}(RS^{-1})$ é um conjunto finito (note-se que $\text{sup}(RS^{-1}) = \text{sup}(R)$), estão reunidas as condições necessárias para aplicar o Teorema 4.3.11 e afirmar que RS^{-1} é anel Artiniano.

Por outro lado, como $S \subseteq C_R(0)$, para provarmos que RS^{-1} é anel de fracções à direita de R com respeito a $C_R(0)$ é suficiente provar que, dado o homomorfismo de anéis

$$\begin{aligned} \phi : R &\rightarrow RS^{-1} \\ r &\rightarrow r 1^{-1} \end{aligned}$$

que satisfaz as condições **a)**, **b)** e **c)** da Definição 2.1.1, para todo o elemento regular $r \in R$, $r 1^{-1}$ é uma unidade de RS^{-1} . Observe-se que qualquer elemento da forma $r 1^{-1}$, onde r é um elemento regular de R , é regular à direita em RS^{-1} . Como RS^{-1} é anel Artiniano, pela Proposição 2.2.5, $r 1^{-1}$ é uma unidade de RS^{-1} .

Estão, pois, reunidas as condições necessárias para afirmar que RS^{-1} é anel de fracções à direita de R com respeito a $C_R(0)$. ■

Corolário 5.2.11 *Seja R um anel graduado do tipo G gr-Goldie à direita, gr-semiprimo e com suporte finito; então existe anel de fracções à direita de R com respeito a $C_R(0)$ e $RC_R(0)^{-1}$ é anel Artiniano.*

Demonstração. Pela Proposição 4.3.8, R_e é anel semiprimo e R tem graduação não degenerada.

Uma vez que R é anel gr-Goldie à direita, aplicando o Lema 5.2.1 e a Proposição 5.2.2, concluímos que R_e é anel Goldie à direita.

Estão, pois, reunidas as condições necessárias para aplicar a alínea 5) do Teorema 5.2.10 e afirmar que existe anel de fracções à direita de R com respeito a $C_R(0)$ e $RC_R(0)^{-1}$ é anel Artiniano. ■

Corolário 5.2.12 *Seja R um anel graduado do tipo G com graduação não degenerada tal que R_e é anel semiprimo Noetheriano à direita (respectivamente à esquerda). Então, para todo $\sigma \in \text{sup}(R)$, R_σ é finitamente gerado como R_e -módulo à direita (respectivamente à esquerda). Se $\text{sup}(R)$ for finito, R é anel Noetheriano à direita (respectivamente à esquerda).*

Demonstração. Seja $\sigma \in \text{sup}(R)$. Como R_e é anel semiprimo Noetheriano à direita, R_e é anel de Goldie à direita semiprimo, logo, pela alínea 4) do Teorema 5.2.10, existe um número natural n tal que R_σ é isomorfo a um R_e -submódulo do R_e -módulo à direita $\oplus_{i=1}^n R_e$. Como R_e é anel Noetheriano à direita, R_σ é um R_e -módulo à direita Noetheriano, logo, R_σ é finitamente gerado como R_e -módulo à direita.

Se o suporte de R for finito, como, para todo $t \in \text{sup}(R)$, R_t é um R_e -módulo à direita Noetheriano, então R é um R_e -módulo à direita Noetheriano. Uma vez que R_e é um subanel de R , R é anel Noetheriano à direita. ■

O Teorema de Goldie para anéis não graduados admite um Corolário (Corolário 2.2.12) no qual se afirma que, se R é anel de Goldie à direita primo, $RC_R(0)^{-1}$ é anel simples. No caso graduado é possível demonstrar um resultado análogo, que passamos a enunciar:

Proposição 5.2.13 *Seja R um anel graduado do tipo G com graduação não degenerada tal que R_e é anel de Goldie à direita primo. Seja $S = C_R(0) \cap h(R)$; então o anel graduado RS^{-1} é gr-simples.*

Demonstração. Seja I um ideal próprio graduado de RS^{-1} . Pelo Teorema 5.2.10, RS^{-1} é anel gr-semisimples, logo, pela Proposição 4.2.9, RS^{-1} não contém ideais diretos próprios graduados gr-essenciais. Portanto, existe um ideal direito graduado não nulo J de RS^{-1} tal que $I \cap J = 0$, logo, $JI = 0$. Consequentemente, $J^c I^c = 0$ e

$$(J^c \cap R_e)(I^c \cap R_e) = 0.$$

Uma vez que R_e é anel primo, $I^c \cap R_e = 0$ ou $J^c \cap R_e = 0$. Ora, como pelo Lema 5.1.7, I^c , J^c são ideais diretos graduados de R , pela Proposição 4.3.3, $I^c = 0$ ou $J^c = 0$, logo, $I = I^{ce} = 0$ ou $J = J^{ce} = 0$. Uma vez que $J \neq 0$, concluímos que $I = 0$, logo, RS^{-1} é anel gr-simples, como desejávamos provar. ■

5.3 Localização em anéis fortemente graduados

No Capítulo 3, provámos que qualquer anel R que satisfaz uma das seguintes condições - **a)** R é anel Noetheriano simples, **b)** R é anel Artiniano, **c)** R é anel Noetheriano comutativo ou **d)** R é anel de ideais direitos e esquerdos principais - satisfaz a condição na segunda camada.

Verificaremos agora que, se R for um anel fortemente graduado do tipo G , onde G é um grupo policíclico-por-finito, para R satisfazer a condição na segunda camada é suficiente que o anel base R_e de R goze de uma das propriedades descritas no parágrafo anterior. Como consequência deste resultado concluímos que, se R é um anel que satisfaz uma das condições **a)**, **b)**, **c)** ou **d)** acima apresentadas e G é um grupo policíclico-por-finito, o anel de grupo RG satisfaz a condição na segunda camada. Analogamente, se R for um anel que satisfaz uma das condições **a)**, **b)**, **c)** ou **d)** descritas e φ for um automorfismo de R , o anel $R[x, x^{-1}; \varphi]$ satisfaz a condição na segunda camada. Os Lemas que se seguem serão utilizados na demonstração do resultado enunciado.

Lema 5.3.1 *Sejam G um grupo policíclico-por-finito, R um anel fortemente graduado do tipo G cujo anel base R_e é Noetheriano à direita e I um ideal G -invariante de R_e que satisfaz a propriedade AR muito forte à direita; então IR é um ideal de R que satisfaz a propriedade AR muito forte à direita.*

Demonstração. Uma vez que I é um ideal G -invariante de R_e , IR é um ideal bilateral de R e $IR = RI$.

Consideremos o anel de Rees $\mathcal{R}_{\mathcal{R}_e}(I)$ de I . Para cada $g \in G$, definimos o subgrupo aditivo de $R[x]$

$$R(g, I) = \mathcal{R}_{\mathcal{R}_e}(I)R_g = R_g + IR_gx + I^2R_gx^2 + \dots$$

Como I é ideal G -invariante de R_e e R é anel fortemente graduado,

$$I^n(R_gI^m)R_h = I^{n+m}R_gR_h = I^{n+m}R_{gh},$$

para todos $n, m \in \mathbb{N}$, $g, h \in G$; logo, definindo

$$R(I) = \bigoplus_{g \in G} R(g, I),$$

concluímos que $R(I)$ é um anel fortemente graduado do tipo G cujo anel base é $\mathcal{R}_{\mathcal{R}_e}(I)$.

Pela Proposição 3.5.7, $\mathcal{R}_{\mathcal{R}_e}(I)$ é anel Noetheriano à direita. Ora, como $R(I)$ é anel fortemente graduado do tipo G , G é um grupo policíclico-por-finito e o anel base de $R(I)$ - $\mathcal{R}_{\mathcal{R}_e}(I)$ é Noetheriano à direita, pelo Teorema 4.3.27, $R(I)$ é anel Noetheriano à direita.

Por outro lado, uma vez que R_e é anel Noetheriano à direita, aplicando o Teorema 4.3.27, concluímos, também, que R é anel Noetheriano à direita.

Uma vez que

$$R(I) = R + IRx + I^2Rx^2 + \dots = R + (IR)x + (IR)^2x^2 + \dots,$$

$R(I)$ é o anel de Rees de IR . Logo, como R e $R(I)$ são anéis Noetherianos à direita, pela Proposição 3.5.7, concluímos que IR satisfaz a propriedade AR muito forte à direita, como desejávamos provar. ■

Lema 5.3.2 *Sejam R um anel Noetheriano, G um grupo policíclico-por-finito e S um anel fortemente graduado do tipo G com anel base R . Então, não existe um par de primos indesejável (Q, P) de S tal que $Q \cap R = P \cap R$.*

Demonstração. Sejam R um anel Noetheriano, G um grupo policíclico-por-finito e S um anel fortemente graduado do tipo G com anel base R . Com vista a um absurdo, suponhamos que (Q, P) é um par de primos indesejável de S tal que $Q \cap R = P \cap R$.

Uma vez que R é anel Noetheriano, G é um grupo policíclico-por-finito e S é anel fortemente graduado do tipo G com anel base R , pelo Teorema 4.3.27, S é anel Noetheriano.

Pelo Lema 4.4.3, $I = Q \cap R$ é um ideal G -invariante de R . Como $(Q \cap R)S$ é um ideal bilateral de S contido em Q , pelo Lema 3.2.16,

$$\left(\frac{Q}{(Q \cap R)S}, \frac{P}{(Q \cap R)S} \right)$$

é um par de primos indesejável de $S/(Q \cap R)S$.

Uma vez que $(Q \cap R)S$ é um ideal próprio graduado de S , podemos definir em $S' = S/(Q \cap R)S$ a graduação do tipo G apresentada na Observação 4.1.13. Observe-se que, com esta graduação, S' ainda é um anel fortemente graduado do tipo G cujo anel base é

$$R' = \frac{R + (Q \cap R)S}{(Q \cap R)S} \simeq \frac{R}{Q \cap R}.$$

Consequentemente, o anel base de S' é anel Noetheriano. Como S' é um anel fortemente graduado do tipo G , cujo anel base é Noetheriano, pelo Teorema 4.3.27, S' é anel Noetheriano.

Consideremos

$$Q' = \frac{Q}{(Q \cap R)S}, \quad P' = \frac{P}{(Q \cap R)S}.$$

Assim, (Q', P') é um par de primos indesejável de S' e $Q' \cap R' = P' \cap R' = 0$.

Como R' é anel Noetheriano e, pelo Lema 4.4.3, $0 = P' \cap R'$ é um ideal G -semiprimo, aplicando a Proposição 4.4.4, concluímos que R' é anel semiprimo.

Aplicando a Proposição 5.2.9, concluímos que $C_{R'}(0)$ é um conjunto de denominadores à direita em S' e, considerando em $S'' = S'C_{R'}(0)^{-1}$ a graduação do tipo G apresentada na Proposição 4.5.2, concluímos que, com esta graduação, S'' é um anel fortemente graduado do tipo G com anel base $R'' = (S'C_{R'}(0)^{-1})_e$. Observe-se que, pela alínea **3**) do Teorema 5.2.10, R'' é anel semisimples.

Uma vez que $Q' \cap R' = 0 = P' \cap R'$,

$$Q' \cap C_{R'}(0) = P' \cap C_{R'}(0) = \emptyset.$$

Ora, como S' é anel Noetheriano, $C_{R'}(0)$ é um conjunto de denominadores à direita em S' e (Q', P') é um par de primos indesejável de S' , pela Proposição 3.2.15, concluímos que $((Q')^e, (P')^e)$ é um par de primos indesejável de $S'C_{R'}(0)^{-1}$. Consideremos $Q'' = (Q')^e$ e $P'' = (P')^e$.

Provámos, assim, que se R é anel Noetheriano, G é um grupo policíclico-por-finito, S é anel fortemente graduado do tipo G com anel base R e (Q, P) é um par de primos indesejável de S tal que $Q \cap R = P \cap R$, então existe um anel fortemente graduado S'' do tipo G tal que o anel base R'' é semisimples e S'' possui um par de primos indesejável (Q'', P'') .

Por hipótese, G é um grupo policíclico-por-finito, logo, pelo Teorema 1.11.20, existe uma série de subgrupos característicos de G com comprimento n :

$$\{e\} = G_0 \leq \dots \leq G_n = G$$

tal que G/G_{n-1} é grupo finito, G_i/G_{i-1} é grupo Abelian e livre, para todo i tal que $1 \leq i \leq n-1$ e G_j/G_i é um subgrupo característico de G/G_i , para todo $i \in \{0, \dots, n-1\}$, para todo j tal que $i < j \leq n$.

Provaremos o lema por indução em n .

Se $n = 0$, $S'' = R''$ é anel semisimples, logo, S'' é anel Artiniano. Consequentemente, pela Proposição 1.7.4, todos os ideais primos de S'' são maximais, o que nos permite concluir que não existem pares de primos indesejáveis em S'' - o que é absurdo. O absurdo resultou de supormos que existia um par de primos indesejável (Q, P) em S tal que $Q \cap R = P \cap R$. Consequentemente, no caso $n = 0$, o lema é válido.

Se $n = 1$, então $G \simeq G_1/G_0$ é grupo finito. Aplicando o Corolário 4.3.22 e a respectiva versão esquerda, concluímos que S'' é anel Artiniano, logo, não existem pares de primos indesejáveis em S'' , o que nos permite concluir que, no caso $n = 1$, o lema é válido.

Suponhamos que $n > 1$ e que, para todo o anel fortemente graduado T do tipo H cujo anel base V é Noetheriano e H é um grupo policíclico-por-finito que possui uma série de subgrupos característicos com comprimento $n-1$:

$$\{e\} = H_0 \leq \dots \leq H_{n-1} = H$$

tal que H/H_{n-2} é grupo finito, H_i/H_{i-1} é grupo Abelian livre, para todo i tal que $1 \leq i \leq n-2$, e H_j/H_i é um subgrupo característico de H/H_i , para todo

$i \in \{0, \dots, n-2\}$ e para todo j tal que $i < j \leq n-1$, se verifica que não existe um par de primos indesejável (I, J) de T tal que $I \cap V = J \cap V$.

Sejam S^* um anel fortemente graduado do tipo G^* cujo anel base R^* é Noetheriano e G^* um grupo policíclico-por-finito que possui uma série de subgrupos característicos com comprimento n :

$$\{e\} = G_0^* \leq \dots \leq G_n^* = G^*$$

tal que G^*/G_{n-1}^* é grupo finito, G_i^*/G_{i-1}^* é grupo Abelian livre, para todo i tal que $1 \leq i \leq n-1$, e G_j^*/G_i^* é um subgrupo característico de G^*/G_i^* , para todo $i \in \{0, \dots, n-1\}$, para todo j tal que $i < j \leq n$. Com vista a um absurdo, suponhamos que S^* possui um par de primos indesejável (Q^*, P^*) tal que $Q^* \cap R^* = P^* \cap R^*$. Pelo que vimos anteriormente, existe um anel fortemente graduado S^{**} do tipo G^* cujo anel base R^{**} é semisimples e S^{**} possui um par de primos indesejável (Q^{**}, P^{**}) .

Uma vez que a série de subgrupos de G^* considerada é uma série de subgrupos característicos de G^* , concluimos, pela Proposição 1.11.7, que G_1^* é um subgrupo normal de G^* .

Pela Proposição 4.3.20, $S_{G^*/G_1^*}^{**}$ é anel fortemente graduado do tipo G^*/G_1^* cujo anel base é $(S^{**})^{G_1^*}$.

Pela Proposição 4.3.20, $(S^{**})^{G_1^*}$ é anel fortemente graduado do tipo G_1^* cujo anel base é R^{**} . Por outro lado, como R^{**} é anel semisimples, R^{**} é anel Noetheriano. Assim, pelo Teorema 4.3.27, $(S^{**})^{G_1^*}$ é anel Noetheriano. Logo, $(S^{**})_{G^*/G_1^*}$ é um anel fortemente graduado do tipo G^*/G_1^* cujo anel base é Noetheriano e $(S^{**})_{G^*/G_1^*}$ possui um par de primos indesejável (Q^{**}, P^{**}) .

Pela Proposição 1.11.4, $G^{**} = G^*/G_1^*$ é um grupo policíclico-por-finito. Por hipótese, G^{**} possui uma série de subgrupos característicos com comprimento $n-1$:

$$\frac{G_1^*}{G_1^*} \leq \frac{G_2^*}{G_1^*} \leq \dots \leq \frac{G^*}{G_1^*} = G^{**}$$

tal que

$$\frac{G^*/G_1^*}{G_{n-1}^*/G_1^*}$$

é grupo finito,

$$\frac{G_i^*/G_1^*}{G_{i-1}^*/G_1^*}$$

é grupo Abelian livre, para todo i tal que $2 \leq i \leq n-1$, e

$$\frac{G_j^*/G_1^*}{G_i^*/G_1^*}$$

é um subgrupo característico de

$$\frac{G^*/G_1^*}{G_i^*/G_1^*},$$

para todo $i \in \{1, \dots, n-1\}$ e para todo j tal que $i < j \leq n$. Logo, podemos aplicar a hipótese de indução e afirmar que

$$Q^{**} \cap (S^{**})^{G_1^*} \subsetneq P^{**} \cap (S^{**})^{G_1^*}.$$

Por outro lado, como G_1^* é um grupo Abelian, $(S^{**})^{G_1^*}$ é um anel fortemente graduado do tipo G_1^* cujo anel base - R^{**} - é semisimples e $Q^{**} \cap (S^{**})^{G_1^*}$, $P^{**} \cap (S^{**})^{G_1^*}$ são ideais de $(S^{**})^{G_1^*}$ tais que

$$Q^{**} \cap (S^{**})^{G_1^*} \subsetneq P^{**} \cap (S^{**})^{G_1^*},$$

estão reunidas as condições necessárias para aplicar o Lema 4.4.6 e afirmar que existe um elemento

$$x \in (P^{**} \cap (S^{**})^{G_1^*}) \setminus (Q^{**} \cap (S^{**})^{G_1^*})$$

tal que $x + (Q^{**} \cap (S^{**})^{G_1^*})$ é um elemento central de

$$\frac{(S^{**})^{G_1^*}}{Q^{**} \cap (S^{**})^{G_1^*}}.$$

Seja $J = Q^{**} \cap (S^{**})^{G_1^*}$. Como, pelo Lema 4.4.3, J é um ideal G^{**} -invariante de $(S^{**})^{G_1^*} = (S_{G^*/G_1^*}^{**})_e$, JS^{**} é um ideal graduado próprio de $(S^{**})_{G^*/G_1^*}$. Definimos no anel

$$S_1 = (S_{G^*/G_1^*}^{**})/JS^{**} = S^{**}/JS^{**}$$

a graduação do tipo $G^{**} = G^*/G_1^*$ apresentada na Observação 4.1.13 e observe-se que, com esta graduação, S_1 é um anel fortemente graduado do tipo G^{**} . Definimos

$$R_1 = \frac{(S^{**})^{G_1^*} + JS^{**}}{JS^{**}} \simeq \frac{(S^{**})^{G_1^*}}{J}, \quad P_1 = \frac{P^{**}}{JS^{**}} \text{ e } Q_1 = \frac{Q^{**}}{JS^{**}}.$$

Observe-se que R_1 é o anel base de S_1 . Como S_1 é um anel fortemente graduado do tipo G^{**} cujo anel base é Noetheriano, pelo Teorema 4.3.27, S_1 é anel Noetheriano.

Pelo Lema 3.2.16, (Q_1, P_1) é um par de primos indesejável de S_1 .

Uma vez que

$$x \in (P^{**} \cap (S^{**})^{G_1^*}) \setminus (Q^{**} \cap (S^{**})^{G_1^*}),$$

concluimos que

$$0 = Q_1 \cap R_1 \subsetneq P_1 \cap R_1.$$

Se considerarmos $z = x + JS^{**}$, concluimos que z é um elemento não nulo de $P_1 \cap R_1$ e é central em R_1 , logo, o ideal L de R_1 gerado por $P_1 \cap \text{cen}(R_1)$ é não nulo.

Uma vez que R_1 é anel Noetheriano, podemos aplicar o Corolário 3.5.11 e afirmar que L satisfaz a propriedade AR muito forte à direita.

Como S_1 é um anel fortemente graduado do tipo G^{**} e $P_1 \cap R_1$ é um ideal G^{**} -invariante de R_1 , pelo Lema 4.4.2, o ideal L de R_1 gerado por

$$P_1 \cap R_1 \cap \text{cen}(R_1) = P_1 \cap \text{cen}(R_1)$$

é G^{**} -invariante.

Por outro lado, como S_1 é anel fortemente graduado do tipo G^{**} , onde G^{**} é um grupo policíclico-por-finito, o anel base de $S_1 - R_1$ é anel Noetheriano e L é um ideal G^{**} -invariante de R_1 que satisfaz a propriedade AR muito forte à direita, então, pelo Lema 5.3.1, LS_1 é um ideal de S_1 que satisfaz a propriedade AR muito forte à direita.

Por definição $LS_1 \subseteq P_1$.

Provaremos, seguidamente, que $LS_1 \not\subseteq Q_1$. Para tal, observe-se que, se $LS_1 \subseteq Q_1$, então $L = LS_1 \cap R_1 \subseteq Q_1 \cap R_1 = 0$, o que é absurdo.

Aplicando o Corolário 3.5.15, concluimos que (Q_1, P_1) não é um par de primos indesejável de S_1 , o que é absurdo. O absurdo resultou de supormos que existia um par de primos indesejável (Q^*, P^*) de S^* tal que $Q^* \cap R^* = P^* \cap R^*$. Consequentemente, não existem pares de primos indesejáveis (Q, P) em S^* tais que $Q \cap R^* = P \cap R^*$.

Por indução, provamos que, dados um anel Noetheriano R , um grupo policíclico-por-finito G , um anel fortemente graduado S do tipo G com anel base R , não existe um par de primos indesejável (Q, P) de S tal que $Q \cap R = P \cap R$. ■

Na Proposição 3.5.18 constatamos que os anéis Noetherianos que são AR -separados à direita satisfazem a condição na segunda camada à direita. Assim, se R é anel Noetheriano tal que, para todo o par de ideais primos (Q, P) , com $Q \subsetneq P$, existe um ideal K tal que $Q \subsetneq K \subseteq P$ e K/Q é um ideal que satisfaz a propriedade AR à direita em R/Q , então, R satisfaz a condição na segunda camada à direita.

Em seguida provaremos que, se R é um anel fortemente graduado do tipo G , onde G é um grupo policíclico-por-finito, cujo anel base R_e é Noetheriano e R satisfaz a condição “para todo o par (I, J) de ideais G -primos de R_e tal que $I \subsetneq J$, existe um ideal G -invariante K de R_e tal que $I \subsetneq K \subseteq J$ e K/I satisfaz a propriedade AR muito forte à direita em R_e/I ”, então R é um anel Noetheriano que satisfaz a condição na segunda camada à direita.

Teorema 5.3.3 (Bell) *Sejam G um grupo policíclico-por-finito e R um anel fortemente graduado do tipo G cujo anel base R_e é Noetheriano. Se, para qualquer par de ideais G -primos I e J de R_e tal que $I \subsetneq J$, existir um ideal G -invariante K de R_e tal que $I \subsetneq K \subseteq J$ e K/I é um ideal que satisfaz a propriedade AR muito forte à direita em R_e/I , então R é um anel Noetheriano que satisfaz a condição na segunda camada à direita.*

Demonstração. Uma vez que R_e é anel Noetheriano, G é um grupo policíclico-por-finito e R é um anel fortemente graduado do tipo G , pelo Teorema 4.3.27, R é anel Noetheriano.

Suponhamos que (Q, P) é um par de primos indesejável de R , logo, pelo Lema 5.3.2, $Q \cap R_e \subsetneq P \cap R_e$ e, pelo Lema 4.4.3, $Q \cap R_e$ e $P \cap R_e$ são ideais G -primos de R_e . Por hipótese, existe um ideal G -invariante K de R_e tal que $Q \cap R_e \subsetneq K \subseteq P \cap R_e$ e $K/(Q \cap R_e)$ é um ideal que satisfaz a propriedade AR muito forte à direita em $R_e/(Q \cap R_e)$.

Definimos a graduação do tipo G no anel $R^* = R/((Q \cap R_e)R)$ apresentada na Observação 4.1.13. Observe-se que R^* é um anel fortemente graduado do tipo G com anel base

$$R_e^* = \frac{R_e + (Q \cap R_e)R}{(Q \cap R_e)R} \simeq \frac{R_e}{Q \cap R_e}.$$

Sejam

$$P^* = \frac{P}{(Q \cap R_e)R}, \quad Q^* = \frac{Q}{(Q \cap R_e)R} \text{ e } K^* = \frac{K + (Q \cap R_e)R}{(Q \cap R_e)R}.$$

Pelo Lema 3.2.16, (Q^*, P^*) é um par de primos indesejável de R^* .

Por hipótese, $K/(Q \cap R_e)$ satisfaz a propriedade AR muito forte à direita em $R_e/(Q \cap R_e)$, logo, K^* satisfaz a propriedade AR muito forte à direita em R_e^* .

Uma vez que R^* é um anel fortemente graduado do tipo G , R_e^* é anel Noetheriano, K^* é um ideal G -invariante¹ de R_e^* que satisfaz a propriedade AR muito forte à direita, pelo Lema 5.3.1, K^*R^* é um ideal de R^* que satisfaz a propriedade AR muito forte à direita.

Por outro lado, $K^*R^* \subseteq P^*$ e K^*R^* não está contido em Q^* , pois, se $K^*R^* \subseteq Q^*$ então

$$K^* = K^*R^* \cap R_e^* \subseteq Q^* \cap R_e^* = 0,$$

o que é absurdo.

¹Observe-se que K^* é um ideal G -invariante de R_e^* uma vez que, dado $g \in G$, $\frac{R_g + (Q \cap R_e)R}{(Q \cap R_e)R} \cdot K^* \cdot \frac{R_{g^{-1}} + (Q \cap R_e)R}{(Q \cap R_e)R} \subseteq \frac{R_g K R_{g^{-1}} + (Q \cap R_e)R}{(Q \cap R_e)R}$. Uma vez que K é um ideal G -invariante de R_e , $\frac{R_g K R_{g^{-1}} + (Q \cap R_e)R}{(Q \cap R_e)R} \subseteq \frac{K + (Q \cap R_e)R}{(Q \cap R_e)R} = K^*$

Pelo Corolário 3.5.15, concluímos que (Q^*, P^*) não é um par de primos indesejável de R^* , o que é absurdo. Provamos, assim, que não existem pares de primos indesejáveis em R , logo, R satisfaz a condição na segunda camada à direita, como desejávamos provar. ■

Estamos, agora, em condições de enunciar e demonstrar o resultado principal desta secção.

Corolário 5.3.4 *Sejam G um grupo policíclico-por-finito e R um anel fortemente graduado do tipo G com anel base R_e . Se R_e satisfizer uma das seguintes condições:*

- 1) R_e é anel Noetheriano G -simples,
 - 2) R_e é anel Artiniano,
 - 3) R_e é anel Noetheriano comutativo ou
 - 4) R_e é anel de ideais direitos e esquerdos principais;
- então R é anel Noetheriano que satisfaz a condição na segunda camada.*

Demonstração. Sejam G um grupo policíclico-por-finito e R um anel fortemente graduado do tipo G com anel base R_e tal que R_e satisfaz uma das condições enunciadas: 1), 2), 3) ou 4). Observe-se que, em todos os casos descritos, R_e é anel Noetheriano, portanto, pelo Teorema 4.3.27, R é anel Noetheriano.

Se R_e for anel Noetheriano G -simples, não existem ideais G -primos I, J tais que $I \subsetneq J$; logo, pelo Teorema 5.3.3, R satisfaz, trivialmente, a condição na segunda camada à direita.

Suponhamos, agora, que existem ideais G -primos de $R_e - I, J$ tal que $I \subsetneq J$. Como I é um ideal G -invariante próprio de R_e , IR é um ideal próprio graduado de R . Consideremos em $R^* = R/IR$ a graduação do tipo G definida na Observação 4.1.13 e observe-se que, com esta graduação, R^* ainda é um anel fortemente graduado com anel base $R_e^* \simeq R_e/I$.

Suponhamos, agora, que R_e é anel Artiniano. Uma vez que I é, por hipótese, ideal G -primo de R_e , 0 é um ideal G -semiprimo de R_e^* . Como R^* é um anel fortemente graduado cujo anel base é anel de Goldie à direita e G -semiprimo, pela Proposição 4.4.4, R_e^* é anel semiprimo. Como R_e^* é anel Artiniano semiprimo, pelo Corolário 1.7.2, R_e^* é anel semisimples, logo, pelo Corolário 1.5.5, todo o ideal de R_e/I é gerado por um elemento normalizador. Consequentemente, pela Proposição 3.5.10, todo o ideal de R_e/I satisfaz a propriedade AR muito forte à direita. Em particular, J/I satisfaz a propriedade AR muito forte à direita em R_e/I . Consequentemente, pelo Teorema 5.3.3, R satisfaz a condição na segunda camada à direita.

Se R_e for um anel Noetheriano comutativo, pelo Corolário 3.5.11, todos os ideais de R_e/I satisfazem a propriedade AR muito forte. Em particular, J/I satisfaz a propriedade AR muito forte à direita em R_e/I . Consequentemente, pelo Teorema 5.3.3, R satisfaz a condição na segunda camada à direita.

Falta-nos provar que, se R_e é um anel de ideais direitos e esquerdos principais, R é um anel que satisfaz a condição na segunda camada à direita. Se R_e é um anel de ideais direitos e esquerdos principais, R_e/I ainda é um anel de ideais direitos e esquerdos principais, logo, pelo Lema 1.3.3, R_e/I é anel Noetheriano e todo o ideal de R_e/I é gerado por um elemento normalizador. Aplicando a Proposição 3.5.10, concluímos que todo o ideal de R_e/I satisfaz a propriedade AR muito forte à direita em R_e/I . Em particular, J/I satisfaz a propriedade AR muito forte à direita em R_e/I . Pelo Teorema 5.3.3, R satisfaz a condição na segunda camada à direita.

De forma análoga, provamos, em cada um dos casos considerados, que R satisfaz a condição na segunda camada à esquerda e, portanto, satisfaz a condição na segunda camada, como desejávamos provar. ■

Aplicando o Corolário anterior, determinamos novas classes de anéis que satisfazem a condição na segunda camada. Os Corolários seguintes são consequência imediata do Corolário 5.3.4.

Corolário 5.3.5 *Se G é um grupo policíclico-por-finito e R é um anel que satisfaz uma das condições - 1) R é anel Artiniano, 2) R é anel Noetheriano simples, 3) R é anel de ideais direitos e esquerdos principais ou 4) R é anel Noetheriano comutativo - então RG satisfaz a condição na segunda camada.*

Corolário 5.3.6 *Se R é um anel que satisfaz uma das condições - 1) R é anel Artiniano, 2) R é anel Noetheriano simples, 3) R é anel de ideais direitos e esquerdos principais ou 4) R é anel Noetheriano comutativo - e, se ϕ é um automorfismo de R , então $R[x, x^{-1}; \phi]$ satisfaz a condição na segunda camada.*

Em seguida apresentamos uma aplicação dos resultados anteriores à Teoria da Localização.

Proposição 5.3.7 *Sejam G um grupo policíclico-por-finito, R um anel fortemente graduado do tipo G cujo anel base R_e é Noetheriano comutativo e P um ideal primo de R tal que $P = IR = RI$, para algum ideal I de R_e . Então, P é classicamente localizável.*

Demonstração. Como R_e é anel Noetheriano comutativo, pelo Corolário 3.5.11, I satisfaz a propriedade AR muito forte.

Por outro lado, como R é um anel fortemente graduado do tipo G , onde G é um grupo policíclico-por-finito, R_e é anel Noetheriano e I é um ideal G -invariante de R_e que goza da propriedade AR muito forte, estão, então, reunidas as condições necessárias para aplicar o Lema 5.3.1 e afirmar que $P = IR$ satisfaz a propriedade AR muito forte à direita. De forma análoga, provamos que P satisfaz a propriedade AR muito forte à esquerda.

Observe-se, agora, que, pelo Corolário 5.3.4, R é anel Noetheriano que satisfaz a condição na segunda camada. Aplicando o Teorema 3.5.20 e a respectiva versão esquerda, concluímos que P é um ideal primo classicamente localizável de R , como desejávamos provar. ■

Em seguida determinaremos classes de anéis cujos ideais primos são todos classicamente localizáveis.

Proposição 5.3.8 *Sejam G um grupo policíclico-por-finito Abelian, R um anel fortemente graduado do tipo G cujo anel base R_e é semisimples; então todo o ideal primo de R é classicamente localizável.*

Demonstração. Como R_e é anel semisimples, em particular, R_e é anel Noetheriano. Consequentemente, pelo Teorema 4.3.27, R é anel Noetheriano.

Por outro lado, pelo Corolário 4.4.7, concluímos que todos os ideais primos não nulos de R têm um conjunto centralizador de geradores, o que pela Proposição 3.5.13, nos leva a concluir que todos os ideais primos de R satisfazem a propriedade AR à direita. Aplicando a versão esquerda da Proposição 3.5.13, concluímos que todos os ideais primos de R satisfazem a propriedade AR à esquerda. Estão, pois, reunidas as condições necessárias para aplicar a Proposição 3.5.21 e afirmar que todos os ideais primos de R são classicamente localizáveis. ■

Podemos agora aplicar o resultado anterior aos anéis de grupo e anéis de Laurent.

Corolário 5.3.9 *Sejam G um grupo policíclico-por-finito Abelian e R um anel semisimples; então todo o ideal primo de RG é classicamente localizável.*

Corolário 5.3.10 *Sejam R um anel semisimples e σ um automorfismo de R ; então todo o ideal primo de $R[x, x^{-1}; \sigma]$ é classicamente localizável.*

Bibliografia

- [1] Aláez, E.S., *El Submódulo Singular Graduado. Un Teorema de Goldie para anillos Graduados*, Algebra and Geometry: proceedings of the II SBW AG, Santiago de Compostela, 1989.
- [2] Atiyah, M.F., MacDonald, I.G., *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley Publishing Company, Cambridge, 1969
- [3] Bell, A.D., *Localization and ideal theory in Noetherian strongly group-graded rings*, J.Algebra 105, 1987, n°1, 76-115.
- [4] Bell, A.D., *Notes on Localization in Noetherian rings*, preprint.
- [5] Brown, K.A., *Ore Sets in Noetherian rings*, Séminaire d'Algèbre P. Dubreil et M. P. Malliavin, 36 ème année (Paris 1983-1984), Lectures in Math., Vol. 1146, Springer, Berlin, 1985, 355-366.
- [6] Brown, K.A., *The Representation Theory of Noetherian Rings*, Noncommutative Rings, Springer-Verlag, 1992.
- [7] Brown, K.A., *The Representation Theory of Noetherian Rings*, Notes for talks at the University of Lisbon, Dec. 1991.
- [8] Chatters, A.W., Hayarnanis, C.R., *Rings with chain conditions*, Research notes in Mathematics, n°4, Pitman, Bostan, 1980.
- [9] Cohen, M., Rowen, L., *Group Graded Rings*, Communications in Algebra, 1983, 1253-1270.
- [10] Dade, E.C., *Group-Graded Rings and Modules*, Mathematische Zeitschrift, 1980, 241-262.
- [11] Gardiner, C.F., *A First Course in Group Theory*, Springer-Verlag, New York, 1980.
- [12] Goldie, A.W., *The structure of prime rings under ascending chain conditions*, Proc. London Mathematical Society (3) 8, 1958, 589-608.

- [13] Goodearl, K.R., Stafford, J.T., *The graded version of Goldie's theorem*, Algebra and its applications, 237-240, Contemp. Math., 259, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.
- [14] Goodearl, K.R., Warfield, R.B., *An Introduction to Noncommutative Noetherian Rings*, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.
- [15] Hall, P., *Finiteness conditions for soluble groups*, Proc. London Mathematical Society (3) 4, 1954, 419-436.
- [16] Hall, P., *On the finiteness of certain soluble groups*, Proc. London Mathematical Society (3) 9, 1959, 595-622.
- [17] Hall, P., *The Frattini subgroups of finitely generated groups*, Proc. London Mathematical Society (3) 11, 1961, 327-352.
- [18] Halmos, P., *Naive Set Theory*, Springer-Verlag, New York, 1960.
- [19] Humphreys, J.F., *A Course in Group Theory*, Oxford Science Publications, New York, 1996.
- [20] Huntigton, R.E., *Group Theory*, Krieger Publishing Company, 1975.
- [21] Jategaonkar, A.V., *Localization in Noetherian Rings*, London Mathematical Society Lecture Note Series, Cambridge, 1986.
- [22] Kash, F., *Modules and Rings*, Academic Press, London, 1982.
- [23] Lam, T.Y., *A First Course in Noncommutative Rings*, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [24] Lam, T.Y., *Lectures on Modules and Rings*, Springer-Verlag, New York, 1999.
- [25] McConnell, J.C., *Localisation in enveloping rings*, J. London Mathematical Society (2) 43, 1968, 600-610.
- [26] McConnell, J.C., Robson, J.C., *Noncommutative Noetherian Rings*, Wiley-Interscience, New York, 1987.
- [27] Mueller, B., *Localization in fully bounded Noetherian rings*, Pacific Journal of Mathematics 67, 1976, 233-245.
- [28] Nastasescu, C., Van Oystaeyen, F., *Arithmetically graded rings revisited*, Communications in Algebra 14, 1986, 19991-2017.
- [29] Nastasescu, C., Van Oystaeyen, F., *Graded Ring Theory*, Mathematical Library n°28 - North Holland, 1975.

- [30] Passman, D.S., *The Algebraic Structure of Group Rings*, Wiley-Interscience, New York, 1977.
- [31] Rose, J.S., *A Course on Group Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1978.
- [32] Rowen, L., *Ring Theory - Vol.1*, Academic Press, London, 1988.
- [33] Sigurdsson, G., *Links between prime ideals in differential operator rings*, J. Algebra **102**, 1986, 260-283.
- [34] Warfield, R.B., *Review of Localization in Noetherian rings by A. V. Jategaonkar*, *London Mathematical Society Lecture Note Series*, vol. 98, Cambridge University Press, Cambridge, 1986, Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 17, 2, 1987, 396-400.

Índice

anel

- AR-separado, 161
 - à direita, 161
 - à esquerda, 161
- Artiniano, 9
 - à direita, 9
 - à esquerda, 9
- base, 169
- de divisão, 5
- de fracções
 - à direita, 50
 - à esquerda, 50
- de Goldie, 64
 - à direita, 64
 - à esquerda, 64
- de grupo, 2
- de ideais direitos e esquerdos principais, 5
- de polinómios, 3
- de Rees, 154
- fortemente graduado, 187
- G-primo, 195
- G-semiprimo, 195
- G-simples, 195
- graduado, 166
 - gr-Goldie, 206
 - gr-Goldie à direita, 205
 - gr-Goldie à esquerda, 206
 - gr-não singular à direita, 178
 - gr-não singular à esquerda, 178
 - gr-primo, 180
 - gr-semiprimo, 180
 - gr-semisimples, 174
 - gr-simples, 174
 - gr-singular à direita, 178

- gr-singular à esquerda, 178
- local, 1
- não singular, 21
 - à direita, 21
 - à esquerda, 21
- Noetheriano, 8
 - à direita, 8
 - à esquerda, 8
- oposto, 4
- primo, 6
- semiprimo, 6
- semisimples, 10
- simples, 1
- anulador, 12
 - à direita, 12
 - graduado, 206
 - à esquerda, 12
- $\text{Ass}(M)$, 13
- bimódulo de ligação, 95
- $\text{cen}(R)$, 1
- centro, 1
- $\text{cl}(P)$, 96
- clique, 96
 - à direita, 96
 - à esquerda, 96
- componente homogénea
 - de um anel graduado, 166
 - de um elemento de um anel graduado, 166
 - de um elemento de um módulo graduado, 169
 - de um módulo graduado, 169
- comprimento de uma série normal de um grupo, 34

- condição
 - de incomparabilidade, 133
 - de intersecção, 133
 - à direita, 133
 - à esquerda, 133
 - na segunda camada, 104
 - à direita, 104
 - à esquerda, 104
- condição
 - de cadeia
 - ascendente (a.c.c.), 8
 - descendente (d.c.c.), 9
- conjunto
 - classicamente localizável, 140
 - à direita, 140
 - à esquerda, 140
 - de denominadores
 - à direita, 51
 - à esquerda, 51
 - de Ore
 - à direita, 51
 - à esquerda, 51
 - fechado para ligações à direita, 97
 - localizável à direita, 140
 - reversível
 - à direita, 51
 - à esquerda, 51
 - T-nilpotente, 72
- conjunto centralizador de geradores, 158
- contracção, 83
- derivação, 4
- dimensão clássica de Krull, 32
- dimensão de Goldie, 28
 - à direita
 - finita, 28
 - infinita, 28
 - à esquerda
 - finita, 28
 - infinita, 28
- finita, 28
- infinita, 28
- divisor de zero, 5
 - à direita, 5
 - à esquerda, 5
- domínio, 5
- $E(M)$, 24
- elemento
 - de X-torção, 53
 - homogéneo de um anel graduado, 166
 - de grau, 166
 - homogéneo de um módulo graduado, 169
 - idempotente, 4
 - invertível
 - à direita, 5
 - à esquerda, 5
 - livre de X-torção, 53
 - nilpotente, 4
 - normalizador, 5
 - regular, 64
 - à direita, 64
 - à esquerda, 64
- espectro primo, 6
- extensão, 83
- extensão essencial, 17
- extensão gr-essencial, 173
- família
 - dependente, 7
 - independente, 7
- fecho de ligações à direita, 97
- $gr(m)$, 169
- $gr(r)$, 166
- gr-dimensão de Goldie à direita
 - de um anel graduado, 205
- graduação
 - de um anel, 166
 - não degenerada, 178
 - à direita, 178
 - à esquerda, 178
 - trivial, 166
- grafo de ligações, 96

- [30] Passman, D.S., *The Algebraic Structure of Group Rings*, Wiley-Interscience, New York, 1977.
- [31] Rose, J.S., *A Course on Group Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1978.
- [32] Rowen, L., *Ring Theory - Vol.1*, Academic Press, London, 1988.
- [33] Sigurdsson, G., *Links between prime ideals in differential operator rings*, J. Algebra **102**, 1986, 260-283.
- [34] Warfield, R.B., *Review of Localization in Noetherian rings by A. V. Jategaonkar*, *London Mathematical Society Lecture Note Series*, vol. 98, Cambridge University Press, Cambridge, 1986, Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 17, 2, 1987, 396-400.

grupo

- derivado, 44
- livre de torção, 44
- policíclico-infinito, 34
- policíclico-por-finito, 34
- solúvel, 43

$h(M)$, 169

$h(R)$, 166

homomorfismo, 1

ideais

- primos
- incomparáveis, 5

ideal

- G-invariante, 193
- G-maximal, 195
- G-primo, 195
- G-semiprimo, 195
- graduado, 170
- nil, 6
- nilpotente, 6
- primitivo à direita (esquerda), 16
- primo, 5
- semiprimo, 6

ideal direito

- graduado, 170
- gr-maximal, 172
- gr-minimal, 172
- principal, 5

ideal esquerdo

- graduado, 170
- principal, 5

ideal primo

- classicamente localizável, 139
- à direita, 139
- à esquerda, 139
- localizável, 93
- à direita, 93
- à esquerda, 93
- minimal, 5

invólucro injectivo, 24

$J(R)$, 16

ligação

- na segunda camada, 95
- trivial, 96

módulo

- Artiniano, 9
- de fracções, 78
- de torção, 74
- de X-torção, 53
- fiel, 12
- graduado, 169
- gr-não singular, 177
- gr-simples, 174
- gr-singular, 177
- gr-uniforme, 214
- injectivo, 23
- livre de torção, 74
- livre de X-torção, 53
- Noetheriano, 8
- semisimples, 10
- simples, 8
- totalmente fiel, 12
- uniforme, 25
- X-divisível, 78

ordem

- à direita, 64
- à esquerda, 64

$P(R)$, 6

par de primos indesejável, 117

parcela directa, 18

primo associado, 13

primo filiado, 14

produto directo, 8

propriedade

- AR muito forte, 153
- à direita, 153
- à esquerda, 153
- de Artin-Rees, 151
- à direita, 151
- à esquerda, 151
- E, 179

- r.cl(P), 96
- radical de Jacobson, 16
- radical primo, 6
- RG, 1

- série filiada, 14
- série normal de um grupo, 34
- soma directa
 - externa, 8
 - interna, 7
- Spec(R), 6
- subconjunto
 - multiplicativo, 49
- subgrupo
 - característico, 37
- submódulo
 - de torção, 74
 - de X-torção, 53
 - essencial, 17
 - filiado, 13
 - graduado, 170
 - gr-essencial, 173
 - gr-singular, 177
- sup(R), 166
- sup(r), 166
- suporte
 - de um anel graduado, 166
 - de um elemento de um anel graduado, 166

- U(R), 5
- u.dim(M), 28
- unidade, 5

- Z(M), 20