

Mário Bessa da Costa

Homeomorfismos do Plano sem pontos fixos



Departamento de Matemática Pura
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
Setembro de 1999

Mário Bessa da Costa

Homeomorfismos do Plano sem pontos fixos



*Tese submetida à Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
para a obtenção do grau de Mestre em Matemática – Fundamentos e Aplicações.*

Departamento de Matemática Pura
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
Setembro de 1999

Mário Bessa da Costa

Homeomorfismos do Plano sem pontos fixos



*Tese submetida à Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
para a obtenção do grau de Mestre em Matemática*

Departamento de Matemática Pura
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
Setembro de 1999

À minha Família
e
à Marisa

Agradecimentos:

Ao Jorge Rocha pela motivação, influência e imensa competência. Pelas inúmeras correcções, sugestões, opiniões e fundamentalmente pela amizade.

Ao Miguel Ângelo e ao Vitor Araújo pela disponibilidade no apoio técnico, pela paciência...e acima de tudo, pela amizade.

Ao Stephen Andrea pela sugestão que, apesar de me tranquilizar, despertou-me a curiosidade...

Conteúdo

0.1	Introdução	3
1	Nas aplicações livres todos os pontos são errantes	5
1.1	Introdução	5
1.2	Construção de Isotopias	6
1.3	Criação de pontos periódicos de período 2 através de isotopias	8
1.4	Conjunto dos pontos fixos para homeomorfismos de $\mathbb{S}^2$ que preservam a orientação e que têm pontos de período 2	21
1.5	O Lema de Brouwer para arcos de translação	25
1.6	Algumas consequências do Teorema 1.22	27
2	O Teorema da translação de Brouwer	30
2.1	Introdução	30
2.2	Demonstração do Teorema da translação de Brouwer	31
3	Regiões fundamentais de divergência	42
3.1	Introdução	42
3.2	O contra-exemplo de Brouwer e outros	43
3.3	As aplicações livres não podem ter exactamente duas regiões de divergência	46
3.4	Caracterização topológica das aplicações livres com uma só região de divergência	50
4	O Hénon conservativo	56
4.1	Introdução	56
4.2	A dinâmica do Hénon conservativo	57

4.3	Construção da conjugação Hénon-Translação	61
5	Medidas invariantes para aplicações livres	65
5.1	Introdução	65
5.2	Construção de uma medida H -invariante	66

0.1 Introdução

Neste trabalho estudamos as aplicações livres do plano, que são os homeomorfismos de $\mathbb{R}^2$, que preservam a orientação e que não têm pontos fixos.

O exemplo mais simples de uma aplicação livre é a translação $T((x, y)) = (x + 1, y)$ e é imediato verificar que qualquer translação do plano, T' , é conjugada a T , isto é, existe um homeomorfismo de $\mathbb{R}^2$, C , tal que $T \circ C = C \circ T'$. Assim, do ponto de vista dinâmico estas aplicações são iguais.

Naturalmente coloca-se a questão de saber se qualquer aplicação livre é conjugada a uma translação. Brouwer foi o primeiro a apresentar exemplos de aplicações livres que não são conjugadas a uma translação. A Brouwer deve-se também um teorema (teorema da translação no plano) que descreve de uma forma semi-global a dinâmica de uma aplicação livre. Sem entrar em detalhes, podemos resumir parte desse resultado do seguinte modo: dada uma aplicação livre H e fixado um ponto qualquer do plano, x , existe um aberto não limitado (saturado de um domínio de translação) que é invariante por H e tal que a restrição de H a esse aberto é conjugada a uma translação.

Quando esse saturado é igual a $\mathbb{R}^2$ é claro que a aplicação é conjugada a uma translação. Assim, a questão que se coloca é a de caracterizar as aplicações livres que não são conjugadas a translações. A resposta a esta questão é obtida introduzindo a noção de regiões de divergência para infinito, noção essa que essencialmente traduz o modo como os iterados de um ponto divergem para infinito. De facto, uma aplicação livre é conjugada a uma translação se e só se todas as órbitas divergem para infinito do mesmo modo.

Este trabalho está organizado do seguinte modo:

No Capítulo 1, obtêm-se vários resultados sobre a dinâmica das aplicações livres, resultados esses que serão essenciais para a demonstração do Teorema de translação no plano. Em particular, mostra-se a existência de arcos de translação para aplicações livres e demonstra-se que o conjunto não errante de uma aplicação livre é igual ao conjunto vazio.

No Capítulo 2, apresenta-se uma demonstração do Teorema da translação no plano.

No Capítulo 3, introduz-se a noção de região de divergência. Mostra-se que uma aplicação livre é conjugada a uma translação se e só se possuir apenas uma região de divergência. Apresentam-se exemplos de aplicações livres com um número ímpar de regiões de divergência e demonstra-se que uma aplicação livre não pode ter exactamente duas regiões de divergência.

O Capítulo 4, é dedicado a um exemplo: o Hénon conservativo. Neste Capítulo estuda-se a dinâmica desta aplicação e com base nesse estudo constrói-se uma conjugação entre o Hénon e uma translação.

Finalmente, no Capítulo 5, constrói-se uma medida invariante para uma aplicação livre qualquer. A construção dessa medida apoia-se na dinâmica destas aplicações que será apresentada no Capítulo 1.

Capítulo 1

Nas aplicações livres todos os pontos são errantes

1.1 Introdução

O objectivo principal deste capítulo é mostrar que se $H : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é uma aplicação livre, então o conjunto dos pontos não errantes de H é vazio (Teorema 1.22). As demonstrações aqui apresentadas seguem de perto [3].

O esquema da demonstração é o seguinte:

1. Considerar $H : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ um homeomorfismo que preserva a orientação e tal que $\Omega(H) \neq \emptyset$;
2. Mostrar que H é isotópico a um homeomorfismo H_1 tal que $Fix(H) = Fix(H_1)$ e H_1 tem um ponto periódico de período 2 (Proposição 1.7);
3. Compactificar $\mathbb{R}^2$ com um ponto e estender H_1 a um homeomorfismo $\tilde{H}_1 : \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{S}^2$. Tal $\tilde{H}_1$ preserva a orientação e tem pelo menos um ponto fixo (o ponto de compactificação). Mostra-se então que $Fix(\tilde{H}_1) = F_1 \cup F_2$, onde F_1 e F_2 são fechados, não vazios e disjuntos (Proposição 1.19). É obvio que este último resultado mostra que $Fix(H) \neq \emptyset$.

Na secção 1.5 apresentamos três exemplos que mostram que este resultado não pode ser melhorado:

- Não se pode garantir a existência de pontos periódicos de período maior que um.
- Não se pode remover a hipótese de o homeomorfismo preservar a orientação.
- Não vale para dimensão maior que dois.

Por fim, na secção 1.6 apresentamos algumas consequências deste resultado.

1.2 Construção de Isotopias

Iremos considerar, seguidamente, deformações contínuas de homeomorfismos de $\mathbb{R}^2$, ou seja dados os homeomorfismos $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ e $G : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, consideramos as aplicações contínuas θ definidas por:

$$\begin{aligned} \theta : [0, 1] \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (t, X) &\longrightarrow \theta_t(X) \end{aligned}$$

onde $t \in [0, 1]$ é a variável de deformação e θ é tal que:

- Para $t = 0$, $\theta_0 = F$ e para $t = 1$, $\theta_1 = G$;
- θ_t é um homeomorfismo $\forall t \in [0, 1]$.

Definição 1.1 *Uma aplicação θ_t nestas condições diz-se uma **isotopia**.*

Neste caso diz-se que F é isotópica a G ou que F é isotopicamente equivalente a G , na medida em que fica claramente definida uma relação de equivalência no conjunto dos homeomorfismos de $\mathbb{R}^2$.

No que se segue, usaremos *isotopias* que enviam um ponto x num ponto y dentro de um compacto e que são a identidade no complementar desse compacto. Mais precisamente, vamos ver que é possível encontrar aplicações θ_t , $t \in [0, 1]$, tais que θ_t é um homeomorfismo, $\theta_0 = Id$, $\theta_1(x) = y$ e $\theta|_{\mathbb{R}^2 - K} = Id$ (onde K é um compacto que contém x e y no seu interior).

Começemos por considerar:

- Dois pontos distintos $A = (a, b)$ e $B = (c, d)$ de $\mathbb{R}^2$;
- O vector de translação $\overrightarrow{AB} = (v_1, v_2) = (c - a, d - b)$;
- O rectângulo $R_1 = [a_2, a_3] \times [b_2, b_3]$ com $a_2 < a$, $c < a_3$, $b_2 < b$, $d < b_3$;
- O rectângulo $R_2 = [a_1, a_4] \times [b_1, b_4]$ com $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ e $b_1 < b_2 < b_3 < b_4$;
- Uma função φ de classe C^∞ tal que $\varphi(t) = 1$, $\forall t \in [a_2, a_3]$, e $\varphi(t) = 0$, $\forall t \in]-\infty, a_1] \cup [a_4, +\infty[$;
- Uma função ψ de classe C^∞ tal que $\psi(t) = 1$, $\forall t \in [b_2, b_3]$, e $\psi(t) = 0$, $\forall t \in]-\infty, b_1] \cup [b_4, +\infty[$. (ver figura 1.1).

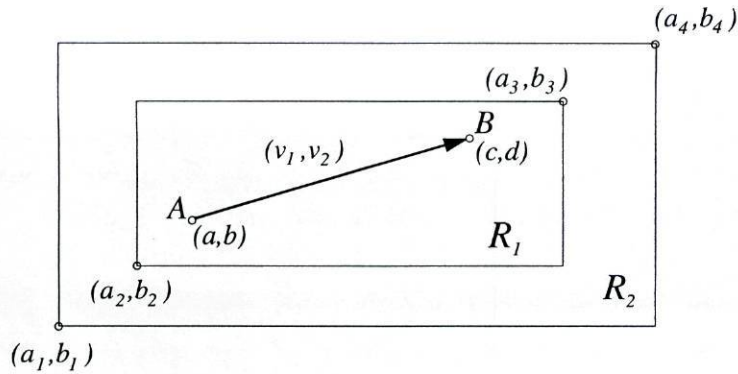


Figura 1.1:

Consideremos agora o campo de vectores $\mathfrak{X}((x, y)) = \varphi(x)\psi(y)(v_1, v_2)$ e a equação diferencial associada:

$$(*) \quad (x'(t), y'(t)) = \mathfrak{X}((x, y))$$

Note-se que se $(x, y) \notin \text{int}(R_2)$, então $\mathfrak{X}((x, y)) = (0, 0)$ e que se $(x, y) \in R_1$ então $\mathfrak{X}((x, y)) = (v_1, v_2)$.

Seja $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ o fluxo associado à equação diferencial, ou seja $\Phi(t, (x_0, y_0))$ é o tempo t da curva solução de $(*)$ com condição inicial (x_0, y_0) , para $t = 0$. Φ é contínua e para cada $t \in \mathbb{R}$ a aplicação:

$$\begin{aligned} \Phi_t : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longrightarrow \Phi(t, (x, y)) \end{aligned}$$

é um homeomorfismo, $\Phi_0 = Id$ por construção:

$$\Phi_{t|\mathbb{R}^2 - R_2} = Id \quad \text{e também} \quad \Phi_1(A) = A + (v_1, v_2) = B.$$

Considere-se então a isotopia $(\theta_t)_{t \in [0,1]}$, definida por $\theta_t = \Phi_t$, que claramente satisfaz o pretendido.

Notemos que a escolha dos rectângulos R_1 e R_2 não é relevante. De facto, se D é um disco topológico qualquer, isto é, homeomorfo à bola unitária fechada, e $A, B \in \text{int}(D)$, para obter uma isotopia $(\theta_t)_{t \in [0,1]}$, tal que $\theta_0 = Id$, $\theta_{t|\mathbb{R}^2 - D} = Id$, $\forall t \in [0, 1]$, e $\theta_1(A) = B$ procedemos do seguinte modo:

Considera-se um homeomorfismo F de D em R , sendo R rectângulo de $\mathbb{R}^2$. É claro que $F(A)$ e $F(B)$ pertencem a $\text{int}(R)$. Agora em R constrói-se, como atrás, uma isotopia $(\tilde{\theta}_t)_{t \in [0,1]}$, tal que $\tilde{\theta}_0 = Id$, $\tilde{\theta}_{t|\mathbb{R}^2 - R} = Id$, $\forall t \in [0, 1]$, e $\tilde{\theta}_1(F(A)) = F(B)$.

Finalmente define-se $(\theta_t)_{t \in [0,1]}$ por $\theta_t(X) = F^{-1} \circ \tilde{\theta}_t \circ F(X)$, se $X \in D$, e $\theta_t(X) = X$ se $X \notin D$, $\forall t \in [0, 1]$. É claro que esta isotopia satisfaz as condições impostas.

A construção de funções φ e ψ de classe C^∞ que verificam as condições anteriores pode ser encontrada em [6], na página 29.

1.3 Criação de pontos periódicos de período 2 através de isotopias

Vejamos em primeiro lugar algumas definições elementares:

Definição 1.2 *Seja $\mathbb{X}$ um conjunto, dada uma aplicação $H : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}$ diz-se que x é um ponto fixo para H se $H(x) = x$. Diz-se que um ponto é periódico de período n , se $H^n(x) = x$ e $H^i(x) \neq x$, $\forall i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$*

Notação 1.3 Denota-se por $Fix(H)$ e $Per_n(H)$, o conjunto dos pontos fixos e o conjunto dos pontos periódicos de período n de H , respectivamente.

Definição 1.4 Seja $\mathbb{X}$ um espaço topológico, dada uma aplicação $H : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}$, diz-se que x é um **ponto não errante** para H se qualquer que seja a vizinhança V de x , exista um $n \in \mathbb{N}$ tal que $H^n(V) \cap V \neq \emptyset$.

Notação 1.5 Denota-se por $\Omega(H)$ o conjunto dos pontos não errantes para H .

É claro que $Fix(H)$, $\Omega(H)$ e $Per_n(H)$ são invariantes por H , que $Fix(H) \subseteq \Omega(H)$, $Per_n(H) \subseteq \Omega(H)$ e que $Fix(H)$ e $\Omega(H)$ são conjuntos fechados.

Na construção das isotopias, conforme o descrito anteriormente, pretendemos enviar um ponto noutro, de modo a ficar invariante um conjunto, ou seja a deformação actua simplesmente num compacto fixando todos os pontos fora desse compacto. Vamos pois precisar da seguinte definição:

Definição 1.6 Seja $H : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ um homeomorfismo. O **Suporte de H** , $Supp(H)$, é a aderência do complementar de $Fix(H)$, isto é $Supp(H) = Ad\{t \in \mathbb{R}^2 : H(t) \neq t\}$.

Note-se que $Supp(H)$ é invariante por H e que $\mathbb{R}^2 = Supp(H) \dot{\cup} Int(Fix(H))$.

Queremos provar a seguinte:

Proposição 1.7 Seja $H : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ um homeomorfismo que preserva a orientação.

Se H tem um ponto não errante, não pertencente a $Fix(H)$, então existe uma isotopia $\{H_t : t \in [0, 1]\}$, tal que:

- 1) $H_0 = H$;
- 2) No complementar de um compacto contido em $\mathbb{R}^2 - Fix(H)$ tem-se $H_t = H$, $\forall t \in [0, 1]$;
- 3) $Fix(H_t) = Fix(H)$;
- 4) H_1 tem um ponto periódico de período 2.

Começemos por estabelecer alguns resultados. Tais resultados podem ser enunciados num contexto mais geral, no entanto fixamo-nos a $\mathbb{R}^2$. O Lema seguinte é óbvio, contudo vai ser útil na demonstração do Lema 1.9.

Lema 1.8 *Sejam $H_1, H_2, \dots, H_n$ homeomorfismos de $\mathbb{R}^2$. Se $X \subseteq \mathbb{R}^2$, então*

$$H_n \circ H_{n-1} \circ \dots \circ H_1(X) \subseteq X \cup \left(\bigcup_{i=1}^n \text{Supp}(H_i) \right).$$

Demonstração:

Para $n = 1$ temos claramente que $H_1(X) \subseteq X \cup \text{Supp}(H_1)$.

Supondo válido o resultado para $n - 1$, ou seja

$$H_{n-1} \circ H_{n-2} \circ \dots \circ H_1(X) \subseteq X \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} \text{Supp}(H_i) \right), \text{ obtemos:}$$

$$\begin{aligned} H_n \circ H_{n-1} \circ \dots \circ H_1(X) &\subseteq H_n \left(X \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} \text{Supp}(H_i) \right) \right) \\ &\subseteq \left[X \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} \text{Supp}(H_i) \right) \right] \cup \text{Supp}(H_n) \\ &= X \cup \left(\bigcup_{i=1}^n \text{Supp}(H_i) \right), \end{aligned}$$

e por indução temos o resultado pretendido. $\square$

O Lema seguinte, vai ser usado na demonstração do Lema 1.14.

Lema 1.9 *Sejam $H_1, H_2, \dots, H_n$ e H homeomorfismos de $\mathbb{R}^2$.*

Se $H(\text{Supp}(H_i)) \cap \left(\bigcup_{j=1}^i \text{Supp}(H_j) \right) = \emptyset, \forall i \in \{1, \dots, n\}$, então

$$\text{Fix}(H_n \circ H_{n-1} \circ \dots \circ H_1 \circ H) = \text{Fix}(H).$$

Demonstração:

($\supseteq$) Temos em particular que $H(\text{Supp}(H_i)) \cap \text{Supp}(H_i) = \emptyset$, e como esta situação se verifica $\forall i = 1, \dots, n$ podemos concluir que o conjunto dos pontos fixos de H não intersecta $\text{Supp}(H_i) \forall i = 1, \dots, n$. Logo $\text{Fix}(H) \cap \left(\bigcup_{i=1}^n \text{Supp}(H_i) \right) = \emptyset$, o que implica a inclusão $\text{Fix}(H) \subseteq \text{Fix}(H_n \circ H_{n-1} \circ \dots \circ H_1 \circ H)$.

($\subseteq$) Vamos provar por indução sobre n :

$$n = 1$$

Se $H_1 \circ H(x) = x$, ou seja se $x \in \text{Fix}(H_1 \circ H)$, e se $x \notin \text{Fix}(H)$ teríamos que $H(x) \neq x$. Logo, por definição de suporte, $H(x) \in \text{Supp}(H_1)$ e também $x \in \text{Supp}(H_1)$ (isto porque $x = H_1 \circ H(x)$), o que é manifestamente um absurdo, pois por hipótese temos que $H(\text{Supp}(H_1)) \cap \text{Supp}(H_1) = \emptyset$. Assim $H(x) = x$.

Supondo agora que $\text{Fix}(H_{n-1} \circ H_{n-2} \circ \dots \circ H_1 \circ H) \subseteq \text{Fix}(H)$, vamos mostrar que $\text{Fix}(H_n \circ H_{n-1} \circ \dots \circ H_1 \circ H) \subseteq \text{Fix}(H)$.

Seja $x \in \text{Fix}(H_n \circ H_{n-1} \circ \dots \circ H_1 \circ H)$. Assim:

$H_n \circ H_{n-1} \circ \dots \circ H_1 \circ H(x) = x$, o que é equivalente, por H_n ser homeomorfismo, a $H_{n-1} \circ H_{n-2} \circ \dots \circ H_1 \circ H(x) = H_n^{-1}(x)$.

Note-se que podem ocorrer duas situações: ou $x \in \text{Supp}(H_n)$ ou $x \notin \text{Supp}(H_n)$.

Se $x \in \text{Supp}(H_n)$, então $H(x) \in H(\text{Supp}(H_n))$. Por outro lado, aplicando o Lema 1.8 obtemos:

$$H(x) = H_1^{-1} \circ H_2^{-1} \circ \dots \circ H_{n-1}^{-1} \circ H_n^{-1}(x) \subseteq \{x\} \cup \left(\bigcup_{i=1}^n \text{Supp}(H_i^{-1}) \right) = \{x\} \cup \left(\bigcup_{i=1}^n \text{Supp}(H_i) \right).$$

Como, por hipótese, $H(\text{Supp}(H_n))$ e $\bigcup_{i=1}^n \text{Supp}(H_i)$ são disjuntos, segue que $H(x) = x$.

Se $x \notin \text{Supp}(H_n)$, então $x \notin \text{Supp}(H_n^{-1})$, logo $x = H_n^{-1}(x) = H_{n-1} \circ \dots \circ H_1 \circ H(x)$, o que, por hipótese, implica que $x \in \text{Fix}(H)$, como era pretendido. $\square$

Vejamos agora uma definição útil para o que se segue e que está ilustrada na figura 1.2.

Definição 1.10 *Seja $H : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ um homeomorfismo. Um arco injectivo $\tau \subseteq \mathbb{R}^2$ diz-se um **Arco de Translação** para H , se:*

1. τ liga algum ponto x à sua imagem $H(x)$;
2. $H(\tau) \cap \overset{\circ}{\tau} = \emptyset$ (onde $\overset{\circ}{\tau} = \tau - \{x, H(x)\}$).

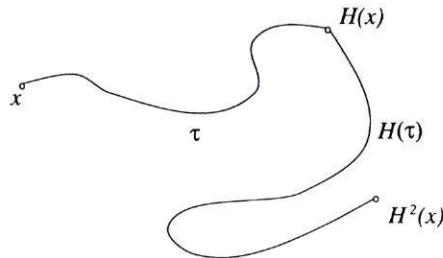


Figura 1.2:

Nota 1.11 τ não contém pontos fixos de H . De facto a existir um tal ponto seria necessariamente x ou $H(x)$. Logo, teríamos $H(x) = x$, o que contraria a injectividade de τ .

Nota 1.12 $H(x)$ pertence sempre a $\tau \cap H(\tau)$, e se x pertencer a esse conjunto então x é ponto periódico de período 2.

Lema 1.13 (Brouwer) Seja $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um homeomorfismo. Se y e $H(y)$ estão contidos na mesma componente conexa de $\mathbb{R}^2 - \text{Fix}(H)$, então existe um arco de translação, τ , tal que $y \in \overset{\circ}{\tau}$.

Demonstração:

Seja U a componente conexa de $\mathbb{R}^2 - \text{Fix}(H)$ que contém y e $H(y)$. Seja então D um disco topológico contido em U , tal que $y \in \text{int}(D)$ e tal que $H(D) \cap D = \emptyset$, uma vez que U é conexo podemos considerar uma isotopia em U , $\{\theta_t : t \in [0, 1]\}$, que verifique as seguintes condições:

1. $\theta_0 = Id$;
2. $\theta_t(y) = y, \forall t \in [0, 1]$;
3. $\theta_1(H(y)) \in D$.

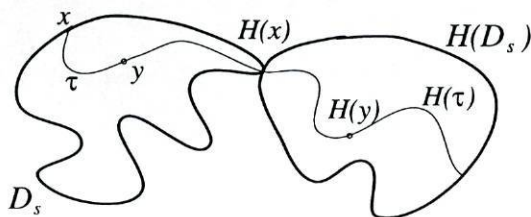


Figura 1.3:

Consideremos $D_t = \theta_t^{-1}(D)$; por compacidade existe um primeiro $t \in]0, 1[$, tal que $D_t \cap H(D_t) \neq \emptyset$. Vamos chamar s a esse primeiro t e analisando a figura 1.3, temos então que:

(a) $y \in \text{Int}(D_s)$ (por construção da isotopia);

(b) $\text{Int}(D_s) \cap H(\text{Int}(D_s))$ (por escolha de s);

(c) D_s intersecta $H(D_s)$ num ponto que pertence à fronteira de cada um deles. Se chamarmos $H(x)$ a esse ponto então x pertence também à fronteira de D_s , pois pontos da fronteira são enviados em pontos da fronteira.

Logo, podemos escolher um arco injectivo τ contido em D_s que liga x a $H(x)$ e tal que $\overset{\circ}{\tau}$ esteja no interior de D_s . Por (b) tem-se que $H(\tau) \cap \overset{\circ}{\tau} = \emptyset$ e, portanto, τ é um arco de translação nas condições do enunciado. $\square$

Lema 1.14 *Seja τ um arco de translação para o homeomorfismo $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Se $H^n(\tau) \cap \tau \neq \emptyset$ para algum $n \geq 2$, então existe uma isotopia $\{H_t : t \in [0, 1]\}$ que verifica as seguintes condições:*

1. $H_0 = H$;
2. No complementar de um compacto contido em $\mathbb{R}^2 - \text{Fix}(H)$ tem-se $H_t = H$, $\forall t \in [0, 1]$;
3. $\text{Fix}(H_t) = \text{Fix}(H)$, $\forall t \in [0, 1]$;
4. H_1 tem um ponto periódico de período 2.

Demonstração:

Vamos chamar x e $H(x)$ às extremidades de τ . Por definição de arco de translação tem-se que $\tau \cap H(\tau) \subseteq \{x, H(x)\}$. Se $\tau \cap H(\tau) = \{x, H(x)\}$ então, de acordo com a Nota 1.12, x é um ponto periódico de período 2 e o resultado é trivial. Suponha-se então que $\tau \cap H(\tau) = \{H(x)\}$. Chamemos $n + 1$ ao primeiro inteiro maior ou igual a 2, tal que $H^{n+1}(\tau) \cap \tau \neq \emptyset$.

Seja $z \in H^{n+1}(\tau) \cap \tau$. É interessante notar que $z \neq H(x)$; isto porque se $n + 1 = 2$ e $z = H(x)$ ter-se-ia um ponto de período 2, pois $H^2(H(x)) = H(x)$ e se $n + 1 \geq 3$, então como $z = H(x)$ implica que $H^{-1}(z) = x \in \tau$ e como $H^{-1}(z) \in H^n(\tau)$, ter-se-ia que $H^n(\tau) \cap \tau \neq \emptyset$, o que é absurdo pela escolha de n .

Vamos orientar o segmento injectivo $\bigcup_{i=0}^n H^i(\tau)$ de x para $H^{n+1}(x)$; designemos por $\leq$ a ordem natural induzida por esta orientação com $x < H(x)$.

No caso de $n + 1$ ser igual a 2 pode acontecer que $H^{-2}(z) \leq z$ ou $H^{-2}(z) \geq z$; contudo se $n + 1 \geq 3$, a única situação possível é $H^{-2}(z) \geq z$.

Vai estudar-se, em primeiro lugar, o caso $n + 1 = 2$ e $H^{-2}(z) \leq z$, ver figura 1.4.

Seja $\gamma \subseteq \tau - \{H(x)\}$ o subarco compacto que une $H^{-2}(z)$ a z . Temos claramente que $H(\gamma) \cap \gamma = \emptyset$. Tomemos um disco topológico V contendo γ e que verifique a condição $H(V) \cap V = \emptyset$, o que é sempre possível por compacidade de γ .

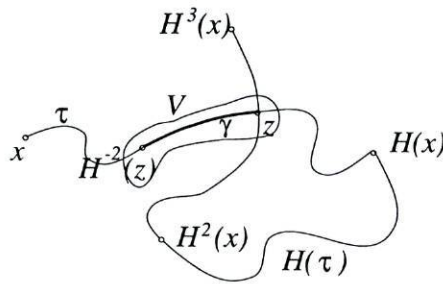


Figura 1.4:

Considere-se uma isotopia de $\mathbb{R}^2$, θ_t , $t \in [0, 1]$, com suporte compacto contido em V que verifique $\theta_0 = Id$ e $\theta_1(z) = H^{-2}(z)$. Vejamos que a isotopia definida por $H_t = \theta_t \circ H$ verifica as condições do Lema:

1. $H_0 = \theta_0 \circ H = Id \circ H = H$.
2. Como $\forall t \in [0, 1]$ se tem que $Supp(\theta_t) \subseteq V$, decorre que se $w \notin H^{-1}(V)$ então $H_t(w) = \theta_t(H(w)) = H(w)$. É também claro que $H^{-1}(V) \cap Fix(H) = \emptyset$.
3. Como $Supp(\theta_t) \subseteq V$ e $H(V) \cap V = \emptyset$, temos que $H(Supp(\theta_t)) \cap Supp(\theta_t) = \emptyset$. Logo, pelo Lema 1.9, temos que $Fix(H_t) = Fix(\theta_t \circ H) = Fix(H)$.
4. Vejamos então que H_1 tem um ponto periódico de período 2. Mostremos em primeiro lugar que $\theta_1(H^{-1}(z)) = H^{-1}(z)$. Como $H^{-2}(z) \in V$, temos que $H^{-1}(z) \in H(V)$ e como $H(V) \cap V = \emptyset$ e $Supp(\theta_t) \subseteq V$, temos que $H(V) \cap Supp(\theta_t) = \emptyset$. Assim, $H^{-1}(z) \notin Supp(\theta_1)$ e, portanto, $H^{-1}(z)$ é fixo por θ_1 .

Vejamos agora que $H^{-2}(z)$ é periódico de período 2 para H_1 :

$H_1(H^{-2}(z)) = (\theta_1 \circ H) \circ (H^{-2}(z)) = \theta_1(H^{-1}(z)) = H^{-1}(z)$. Logo, $H^{-2}(z)$ não é fixo para H_1 ,

$$H_1^2(H^{-2}(z)) = (\theta_1 \circ H) \circ (\theta_1 \circ H^{-1})(z) = (\theta_1 \circ H) \circ H^{-1}(z) = \theta_1(z) = H^{-2}(z).$$

Considere-se agora o caso em que $H^{-2}(z) \geq z$, (ver figura 1.5).

Escolhemos $z_0 = z \leq z_1 \leq \dots \leq z_k = H^{-2}(z)$, uma partição do arco de extremos z e $H^{-2}(z)$, de modo a que o subsegmento $[z_0, z_i]$ seja disjunto de $H([z_{i-1}, z_i])$ para $i = 1, \dots, k$, tomemos como partição:

$$z_0 = z, z_1 = H(x), z_2 = H(z), z_3 = H^2(x), z_4 = H^2(z), \dots, z_k = H^{-2}(z).$$

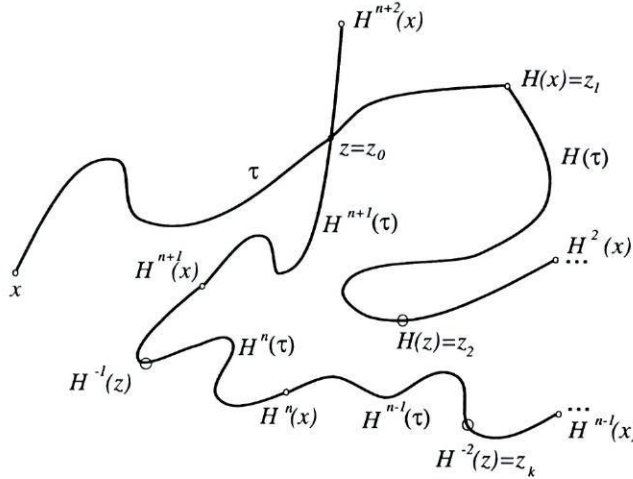


Figura 1.5:

De um modo geral a partição é escolhida no segmento $\bigcup_{i=0}^{n-1} H^i(\tau)$.

A escolha dos arcos garante que existem vizinhanças compactas $V_1, V_2, \dots, V_i, \dots, V_k$ de $[z_0, z_1], [z_1, z_2], \dots, [z_{i-1}, z_i], \dots, [z_{k-1}, z_k]$, respectivamente, tais que $H(V_i) \cap (\bigcup_{j=1}^i V_j) = \emptyset$. Constrói-se agora uma sequência de isotopias $\theta_1^1, \dots, \theta_t^k$ com suporte compacto, tais que $\theta_1^i(z_{i-1}) = z_i$ e $Supp(\theta_t^i) \subseteq V_i$, para $i = \{1, \dots, k\}$.

Para cada $t \in [0, 1]$ considere-se $H_t = \theta_t^k \circ \dots \circ \theta_t^1 \circ H$. As conclusões 1 e 2 seguem directamente da construção. Como $Supp(\theta_t^i) \subseteq V_i$ e $H(V_i) \cap (\bigcup_{j=1}^i V_j) = \emptyset$ para $i = 1, \dots, k$, pelo Lema 1.9 conclui-se que $Fix(\theta_t^k \circ \dots \circ \theta_t^1 \circ H) = Fix(H)$, o que mostra 3. Além disso, como $H^{-1}(z) \in H(V_k)$, que é disjunto de $\bigcup_{i=1}^k Supp(\theta_i)$, obtém-se:

$$\begin{aligned}
(\theta_t^k \circ \dots \circ \theta_t^1 \circ H)^2(H^{-2}(z)) &= (\theta_t^k \circ \dots \circ \theta_t^1 \circ H) \circ (\theta_t^k \circ \dots \circ \theta_t^1 \circ H)(H^{-2}(z)) = \\
&= (\theta_t^k \circ \dots \circ \theta_t^1 \circ H) \circ (\theta_t^k \circ \dots \circ \theta_t^1)(H^{-1}(z)) = \\
&= (\theta_t^k \circ \dots \circ \theta_t^1 \circ H)(H^{-1}(z)) = \\
&= (\theta_t^k \circ \dots \circ \theta_t^1)(z_0) = (\theta_t^k \circ \dots \circ \theta_t^2)(z_1) = \\
&= (\theta_t^k \circ \dots \circ \theta_t^3)(z_2) = \dots = \theta_t^k(z_{k-1}) = \\
&= z_k = H^{-2}(z),
\end{aligned}$$

o que mostra 4. $\square$

Como Corolário do Lema 1.14 obtém-se um resultado mais forte, pois a hipótese de $H^n(\tau) \cap \tau \neq \emptyset$ é substituída pela condição $Ad(\bigcup_{i=2}^n H^i(\tau)) \cap \tau \neq \emptyset$.

Corolário 1.15 *Seja τ um arco de translação para um homeomorfismo $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Supondo-se que algum ponto de τ está na aderência de $\bigcup_{i=2}^n H^i(\tau)$, então existe uma isotopia $\{H_t : t \in [0, 1]\}$ que verifica as seguintes condições:*

1. $H_0 = H$;
2. No complementar de um compacto contido em $\mathbb{R}^2 - \text{Fix}(H)$, tem-se $H_t = H$, $\forall t \in [0, 1]$;
3. $\text{Fix}(H_t) = \text{Fix}(H)$, $\forall t \in [0, 1]$;
4. H_1 tem um ponto periódico de período 2.

Demonstração:

Pode-se supor que $\bigcup_{i=2}^n H^i(\tau) \cap \tau = \emptyset$, e seguidamente vai-se encontrar uma isotopia $\{H_t : t \in [0, 1]\}$ que verifica as condições 1, 2, 3 e 4 do enunciado e tal que τ é um arco de translação para cada H_t e $H_1^p(\tau) \cap \tau \neq \emptyset$ para algum $p \geq 2$.

O resultado segue então aplicando o Lema 1.14 a H_1 .

Denote-se por x e $H(x)$ as extremidades do arco de translação τ . Seja $z \in \tau - \{H(x)\}$ um ponto de acumulação de $\bigcup_{i=2}^n H^i(\tau)$, seja V uma vizinhança conexa do ponto z suficientemente pequena e que não intersecta $H(\tau)$ (ver figura 1.6).

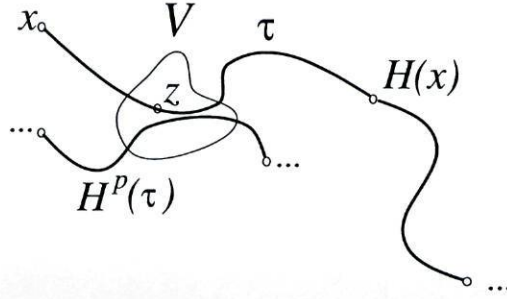


Figura 1.6:

Seja $p \geq 2$ o primeiro inteiro tal que $H^p(\tau)$ intersecta $\text{int}(V)$.

Seja $\{\theta_t : t \in [0, 1]\}$ uma isotopia com suporte compacto contido em V , tal que $\theta_0 = Id$ e $z \in \theta_1 \circ H^p(\tau)$. É suficiente agora definir $H_t = \theta_t \circ H$. $\square$

O próximo resultado é o elo de ligação que falta para provar a Proposição 1.7, no caso em que H deixa invariante cada componente conexa de $\mathbb{R}^2 - \text{Fix}(H)$.

Lema 1.16 *Seja $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um homeomorfismo. Suponhamos que H tem um ponto não errante que não é fixo por H , então existe uma isotopia $\{H_t : t \in [0, 1]\}$ que verifica as seguintes condições:*

1. $H_0 = H$;
2. No complementar de um compacto contido em $\mathbb{R}^2 - \text{Fix}(H)$, tem-se $H_t = H$, $\forall t \in [0, 1]$;
3. $\text{Fix}(H_t) = \text{Fix}(H)$, $\forall t \in [0, 1]$;
4. H_1 tem pelo menos um ponto periódico de período maior do que 1.

Demonstração:

Seja z o ponto não errante (que não é fixo); seja V uma vizinhança conexa de z e suficientemente pequena que verifica $H(V) \cap V = \emptyset$; seja $p \geq 2$ o menor natural tal que $H^p(V) \cap V \neq \emptyset$, escolha-se $x \in H^{-p}(V) \cap V \neq \emptyset$ e considere-se uma isotopia $\{\theta_t : t \in [0, 1]\}$ com suporte compacto contido em V e tal que $\theta_0 = Id$ e $\theta_1(H^p(x)) = x$.

É suficiente agora definir $H_t = \theta_t \circ H$. É claro que H_t satisfaz 1, 2 e 3 e que $H_1^p(x) = \theta_1 \circ H^p(x) = x$. $\square$

Estamos já em condições de provar a Proposição 1.7, no caso em que H deixa invariante cada componente conexa de $\mathbb{R}^2 - \text{Fix}(H)$. Para o caso em que H não deixa invariante cada componente conexa de $\mathbb{R}^2 - \text{Fix}(H)$, vamos provar um resultado que é uma adaptação de um Teorema de Brown e Kister [21]. Vejamos algumas definições que serão úteis no Lema 1.18:

Seja $x \in \mathbb{R}^2$. É claro que $\pi_1(\mathbb{R}^2 - \{x\}) = \mathbb{Z}$. Se H é um homeomorfismo de $\mathbb{R}^2$, então H induz um isomorfismo de $\pi_1(\mathbb{R}^2 - \{x\})$ em $\pi_1(\mathbb{R}^2 - \{H(x)\})$, $H_*^x : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$.

Assim, $H_*^x(k) = k$, $\forall k \in \mathbb{Z}$ ou $H_*^x(k) = -k$, $\forall k \in \mathbb{Z}$. É fácil de verificar que não depende do ponto x escolhido, pois se y é outro ponto de $\mathbb{R}^2$, então $H_*^x = H_*^y$. Por isso, designamos H_*^x apenas por H_* .

Definição 1.17 *Seja $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um homeomorfismo. H preserva a orientação se $H_* = \text{Id}$. H reverte a orientação se $H_* = -\text{Id}$.*

Lema 1.18 *Seja $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um homeomorfismo. Então, uma das seguintes situações ocorre:*

1. *Todas as componentes de $\mathbb{R}^2 - \text{Fix}(H)$ são invariantes por H ;*
2. *Dada uma componente conexa U , não vazia, de $\mathbb{R}^2 - \text{Fix}(H)$ tem-se que $\mathbb{R}^2 = U \dot{\cup} H(U) \dot{\cup} \text{Fix}(H)$, $H^2(U) = U$ e H reverte a orientação.*

Demonstração:

A ideia da prova é supor que não se verifica 1 e chegar a 2.

Suponha-se que não se verifica 1. Seja então U uma componente conexa de $\mathbb{R}^2 - \text{Fix}(H)$ tal que $H(U) \cap U = \emptyset$ e, defina-se uma função F do seguinte modo:

$$F(x) = \begin{cases} H(x) & x \in U \\ H^{-1}(x) & x \in H(U) \\ x & x \in \mathbb{R}^2 - (U \cup H(U)) \end{cases}$$

Note-se que:

1. $F \neq Id$;
2. $F^2 = Id$;
3. F é um homeomorfismo.

Como 1. e 2. são imediatas, mostremos 3:

Vejamos em primeiro lugar que U é aberto. Seja então $x \in U$, como U é componente conexa de $\mathbb{R}^2 - Fix(H)$, temos que $x \notin Fix(H)$. Logo, $\exists \varepsilon > 0$, tal que $B(x, \varepsilon) \cap Fix(H) = \emptyset$. Isto porque $Fix(H)$ é fechado. Vamos ver que $B(x, \varepsilon) \subseteq U$, donde concluiremos que U é aberto. Assim, temos que $(U \cup B(x, \varepsilon)) \cap Fix(H) = \emptyset$ e é claro que $U \cup B(x, \varepsilon)$ é conexo, pois é união de conexos cuja intersecção é não vazia. Temos, então que, $U \cup B(x, \varepsilon) \subseteq U$.

Obviamente que $F|_U = H|_U$ e é contínua em U (U é aberto), $F|_{H(U)} = H|_{H(U)}^{-1}$ é contínua em $H(U)$ ($H(U)$ é aberto) e também que em $Int(\mathbb{R}^2 - (U \cup H(U)))$ a função F é contínua. Falta ver para o caso em que $x \in Fr(U \cup H(U))$. Seja $x \in Fix(H)$, tem-se que:

$$\|F(y) - F(x)\| = \|y - x\|, \text{ se } y \in B(x, \delta) - (U \cup H(U));$$

$$\|F(y) - F(x)\| = \|H(y) - H(x)\|, \text{ se } y \in B(x, \delta) \cap U;$$

$$\|F(y) - F(x)\| = \|H^{-1}(y) - H^{-1}(x)\|, \text{ se } y \in B(x, \delta) \cap H(U).$$

Conclui-se, assim que, F é contínua em x .

4. F preserva a orientação se e só se H preserva a orientação.

É claro que se existir um aberto V tal que $F|_V = Id$, então F preserva a orientação. Observe-se também que, como $H(U) \cap U = \emptyset$, a fronteira de U não tem pontos isolados.

Seja γ uma curva simples contida em $H(U)$ de extremos X e Y distintos e pertencentes à fronteira de $H(U)$. Dados a e b no interior de $H(U)$, é claro que estes pontos são de período 2 para F (ver figura 1.7). Consideremos agora $F(\gamma)$; $\gamma \cup F(\gamma)$ é homeomorfo a $\mathbb{S}^1$, pois X e Y , sendo fixos e por continuidade de F ,

"colam" as duas curvas. Note-se que o arco $\overrightarrow{ab}$ é enviado por F no arco $\overrightarrow{F(a)F(b)}$ e, portanto, F reverte a orientação, onde a seta indica a orientação.

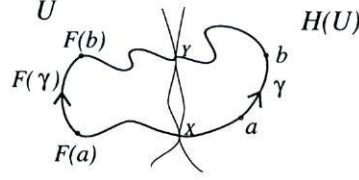


Figura 1.7:

Seja $T = \mathbb{R}^2 - (U \dot{\cup} H(U))$. Se $Int(T) \neq \emptyset$, então F preserva a orientação, já que $F|_{Int(T)} = Id$. Assim, provamos que o interior de T é vazio. Logo, $Fix(F)$ tem interior vazio. Temos então que $\mathbb{R}^2 = U \dot{\cup} H(U) \dot{\cup} Fix(H)$, que é equivalente a $\mathbb{R}^2 - Fix(H) = U \dot{\cup} H(U)$, ou seja, $\mathbb{R}^2 - Fix(H)$ tem exactamente duas componentes conexas que são trocadas por H e H reverte a orientação. $\square$

Vejamos então agora a demonstração da Proposição 1.7:

Demonstração:

Seja $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um homeomorfismo que preserva a orientação e $z \in \Omega(H)$, tal que $z \notin Fix(H)$. Se z é um ponto periódico de período 2 o resultado é imediato, considerando $H_t = H$, $\forall t \in [0, 1]$. Suponha-se então que z não é periódico de período 2. O Lema 1.16 garante que H é isotópico a um homeomorfismo de $\mathbb{R}^2$, H_1 , tal que $Fix(H_1) = Fix(H)$ e H_1 tem um ponto periódico de período maior do que 1. Como H preserva a orientação, também H_1 preserva a orientação e, portanto, segundo o Lema 1.18, fixa todas as componentes de $\mathbb{R}^2 - Fix(H_1)$. O Lema 1.13 garante que existe um arco de translação τ associado ao ponto periódico de H_1 , tal que $H_1^k(\tau) \cap \tau \neq \emptyset$ para algum $k \geq 2$. Agora o Lema 1.14, permite-nos afirmar que existe um homeomorfismo de $\mathbb{R}^2$, H_2 , isotópico a H_1 , tal que $Fix(H_2) = Fix(H_1)$ e H_2 tem pelo menos um ponto periódico de período 2.

Assim, H é isotópico a H_2 e $Fix(H) = Fix(H_2)$.

Finalmente, a propriedade 2 é assegurada pelo modo como foram construídas as várias isotopias. $\square$

1.4 Conjunto dos pontos fixos para homeomorfismos de $\mathbb{S}^2$ que preservam a orientação e que têm pontos de período 2

Proposição 1.19 *Seja $H : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ um homeomorfismo que preserva a orientação. Se H tem pontos periódicos de período 2, então $\text{Fix}(H) = F_1 \cup F_2$, onde F_1 e F_2 são fechados e não vazios.*

Demonstração:

Seja x um ponto periódico de período 2. Consideremos $C = \mathbb{S}^2 - \{x, H(x)\}$; temos que $\pi_1(C) = \mathbb{Z}$. H induz um isomorfismo $H_* : \pi_1(C) \rightarrow \pi_1(C)$.

Observando a figura 1.8 conclui-se facilmente que o facto de H preservar a orientação implica que $H_*(k) = -k$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.

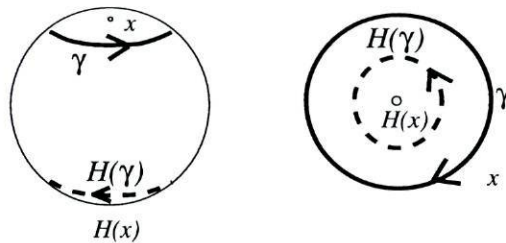


Figura 1.8:

Vamos agora escolher um anel fechado A , contido em C , suficientemente grande de tal modo que quando compusermos a aplicação $H : A \rightarrow C$ com uma retracção $R : C \rightarrow A$, obtemos uma aplicação $\bar{H} : A \rightarrow A$ que verifica as seguintes condições:

1. $\text{Fix}(\bar{H}) \cap \text{Fr}(A) = \emptyset$;
2. $\text{Fix}(\bar{H}) = \text{Fix}(H)$;
3. Numa vizinhança do conjunto dos pontos fixos, tem-se $\bar{H} = H$.

Ver figura 1.9

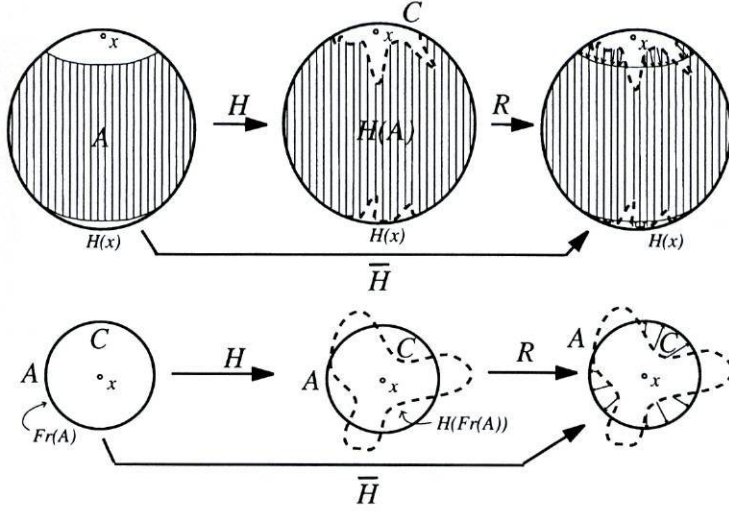


Figura 1.9:

Seja $\tilde{A} = [0, 1] \times \mathbb{R}$ o revestimento universal de A e $P : \tilde{A} \rightarrow A$ a projecção canónica associada, $P((x, y)) = P((x, y + 1))$, $\forall (x, y) \in \tilde{A}$ (ver figura 1.10). Note-se que o anel A é homeomorfo a C e também a um cilindro.

Seja $\tilde{H} : \tilde{A} \rightarrow \tilde{A}$ um levantamento de $\overline{H}$, isto é $P \circ \tilde{H} = \overline{H} \circ P$. Mostremos que $\tilde{H}$ verifica $\tilde{H} = T \circ \tilde{H} \circ T$, onde $T((x, y)) = (x, y + 1)$.

Como $P \circ \tilde{H} = \overline{H} \circ P$ e $P((x, y)) = P((x, y + n))$ para todo o $n \in \mathbb{Z}$, temos que:

$P \circ \tilde{H}((x, y + 1)) = \overline{H} \circ P((x, y + 1)) = \overline{H} \circ P((x, y)) = P \circ \tilde{H}((x, y))$. Logo, pela definição de P , existe um $k \in \mathbb{Z}$, tal que $\tilde{H}((x, y + 1)) = \tilde{H}((x, y)) + (0, k)$, $\forall (x, y) \in \tilde{A}$. Note-se, observando a figura 1.10, que $k < 0$ e usando um argumento sobre o número de voltas de $\overline{H} \circ P(\gamma) = R \circ H \circ P(\gamma)$, onde $\gamma = \{x\} \times [y, y + 1]$, obtemos $|k| = 1$, logo $k = -1$. Temos então que:

$$\begin{aligned} \tilde{H}((x, y + 1)) &= \tilde{H}((x, y)) + (0, -1) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \tilde{H}((x, y + 1)) + (0, 1) &= \tilde{H}((x, y)) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow T \circ \tilde{H}((x, y + 1)) &= \tilde{H}((x, y)) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow T \circ \tilde{H} \circ T((x, y)) &= \tilde{H}((x, y)), \end{aligned}$$

como se queria mostrar.

Podemos agora estender $\tilde{H}$ à compactificação de $\tilde{A}$ pelas suas duas extremidades ε_- e ε_+ , por uma aplicação $\tilde{H}_c$ que troca estas duas extremidades. Temos então que

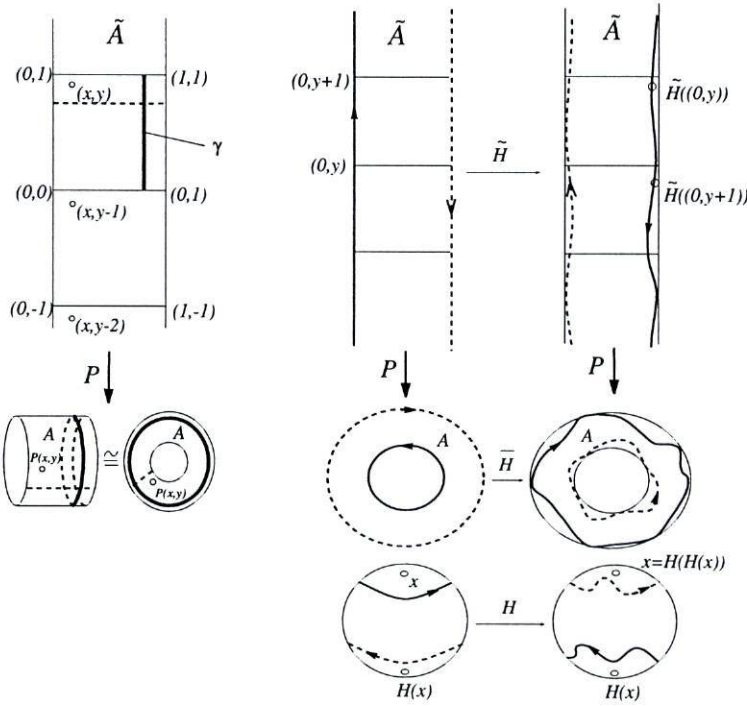


Figura 1.10:

$\tilde{A} \cup \{\varepsilon_-, \varepsilon_+\}$ é homeomorfo a um disco D e $\tilde{H}_c(X) = \tilde{H}(X)$, se $X \in \tilde{A}$, $\tilde{H}_c(\varepsilon_-) = \varepsilon_+$ e $\tilde{H}_c(\varepsilon_+) = \varepsilon_-$. Vejamos que o conjunto $\tilde{F}_1 = \text{Fix}(\tilde{H}_c)$ verifica as seguintes propriedades:

1. $\tilde{F}_1 \neq \emptyset$, (pelo teorema do ponto fixo de Brouwer);
2. $\tilde{F}_1$ é compacto;
3. $\tilde{F}_1$ não intersecta o bordo de D (por construção);
4. $P_{|\tilde{F}_1}$ é injectiva.

Queremos ver que na fibra correspondente a $X \in \tilde{F}_1$, constituída pelos pontos $X + (0, n)$, com $n \in \mathbb{Z}$, só X é fixo para $\tilde{H}_c$. Temos, então, que:

$X + (0, n) = \tilde{H}_c(X + (0, n)) = \tilde{H}_c \circ T^n(X) = T^{-n} \circ \tilde{H}_c(X) = X + (0, -n)$, de onde se conclui que $n = 0$. Logo, na fibra, só X é fixo.

Definimos agora $F_1 = P(\tilde{F}_1)$. F_1 é compacto e $F_1 \subseteq \text{Fix}(\overline{H})$.

Seja $X \in \tilde{F}_1$, então:

$$T \circ \tilde{H}_c(X + (0, n)) = T \circ \tilde{H}_c \circ T^n(X) = T \circ T^{-n} \circ \tilde{H}_c(X) = X + (0, 1 - n).$$

Temos então que $X + (0, n)$ não pode ser ponto fixo de $T \circ \tilde{H}_c$, pois nessa hipótese teríamos $n = \frac{1}{2}$, o que é absurdo.

Seja $\tilde{F}_2 = \text{Fix}(T \circ \tilde{H}_c)$. Do parágrafo anterior obtemos que $\tilde{F}_1 \cap \tilde{F}_2 = \emptyset$. Vejamos algumas propriedades de $\tilde{F}_2$:

1. $\tilde{F}_2 \neq \emptyset$;
2. $\tilde{F}_2$ é compacto;
3. $\tilde{F}_2$ não intersecta o bordo de D ;
4. $P|_{\tilde{F}_2}$ é injectiva.

Queremos ver que na fibra correspondente a $X \in \tilde{F}_2$, constituída pelos pontos $X + (0, n)$, com $n \in \mathbb{Z}$, só X é fixo para $T \circ \tilde{H}_c$. Ora,

$$T \circ \tilde{H}_c(X + (0, n)) = T \circ \tilde{H}_c \circ T^n(X) = T \circ T^{-n} \circ \tilde{H}_c(X) = T^{-n} \circ T \circ \tilde{H}_c(X) = T^{-n}(X) = X + (0, -n), \text{ donde se conclui que } n = 0. \text{ Logo, na fibra, só } X \text{ é fixo.}$$

Se definirmos $F_2 = P(\tilde{F}_2)$, temos que $F_1 \cap F_2 = \emptyset$. Com efeito, se existisse x em A que pertencesse a F_1 e F_2 , então existiria na fibra $P^{-1}(X)$, um ponto de $\tilde{F}_1$ e outro de $\tilde{F}_2$, o que, como vimos atrás, não é possível. Tem-se então que $F_2 \subseteq \text{Fix}(\overline{H})$. Com efeito, se $X \in F_2$, então $X = P(\tilde{X})$ para algum $\tilde{X} \in \tilde{F}_2$. Assim, $\overline{H}(X) = \overline{H} \circ P(\tilde{X}) = P \circ \tilde{H}_c(\tilde{X}) = P \circ T^{-1}(\tilde{X}) = X$, já que $T \circ \tilde{H}_c(\tilde{X}) = \tilde{X}$.

Concluimos deste modo que $\text{Fix}(\overline{H}) \supseteq F_1 \cup F_2$. Mostremos a inclusão contrária:

Seja $X \in \text{Fix}(\overline{H})$; como $X \in \text{Fix}(\overline{H})$, tem-se que $\tilde{H}_c(\tilde{X}) = \tilde{X} + (0, n)$, para algum $n \in \mathbb{Z}$, onde $P(\tilde{X}) = X$.

Se $n = 0$, então $X \in F_1$;

Se $n = 2k$, então

$$\tilde{H}_c(\tilde{X} + (0, k)) = \tilde{H}_c \circ T^k(\tilde{X}) = T^{-k} \circ \tilde{H}_c(\tilde{X}) = \tilde{X} + (0, n - k) = \tilde{X} + (0, k);$$

logo, $\tilde{X} + (0, k) \in \tilde{F}_1$, donde se conclui que $X \in F_1$.

Se $n = 2k - 1$, então

$$T \circ \tilde{H}_c(\tilde{X} + (0, k)) = T \circ \tilde{H}_c \circ T^k(\tilde{X}) = T \circ T^{-k} \circ \tilde{H}_c(\tilde{X}) = \tilde{X} + (0, n+1-k) = \tilde{X} + (0, k);$$

logo, $\tilde{X} + (0, k) \in \tilde{F}_2$, donde se conclui que $X \in F_2$.

Finalmente, como $Fix(\overline{H}) = Fix(H)$, temos a proposição demonstrada. $\square$

Nota 1.20 *Note-se que a hipótese de H preservar a orientação é essencial, como podemos observar pelo seguinte exemplo:*

$$\begin{aligned} H : \quad \mathbb{S}^2 &\longrightarrow \mathbb{S}^2 \\ (x, y, z) &\longrightarrow (x, y, -z) \end{aligned}$$

H tem uma infinidade pontos periódicos de período 2. Contudo, $Fix(H) = \mathbb{S}^1 \times \{z = 0\}$.

1.5 O Lema de Brouwer para arcos de translação

Definição 1.21 *Diz-se que $H : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é uma **aplicação livre** se for um homeomorfismo que preserva a orientação e que não tem pontos fixos.*

Agora se combinarmos a Proposição 1.7 e a Proposição 1.19, obtemos o seguinte:

Teorema 1.22 (Lema de Brouwer para arcos de translação) *Seja $H : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação livre, então H não tem pontos periódicos e cada ponto é errante por H . Além disso, se τ é um arco de translação, então $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} H^n(\tau)$ é homeomorfo a $\mathbb{R}$ e não se acumula sobre ele próprio.*

Demonstração:

Seja $H : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ um homeomorfismo que preserva a orientação e tal que $\Omega(H) \neq \emptyset$. Suponha-se que H tem um ponto não errante que não é fixo. Pela Proposição 1.7 H é isotópico a um homeomorfismo $H_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $Fix(H) = Fix(H_1)$ e H_1 tem um ponto periódico de período 2. Consideremos agora $\mathbb{S}^2$ como compactificado (a um ponto) de $\mathbb{R}^2$ e o homeomorfismo induzido por H_1 , $\tilde{H}_1 : \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{S}^2$.

$\tilde{H}_1$ preserva a orientação, $Fix(\tilde{H}_1) = Fix(H_1) \cup \{\omega\}$, onde ω é o ponto de compactificação, e $\tilde{H}_1$ tem um ponto periódico de período 2.

Pela Proposição 1.19 conclui-se que $\text{Fix}(\tilde{H}_1) = F_1 \cup F_2$, sendo F_1 e F_2 fechados e não vazios. Decorre que $\text{Fix}(H_1) = \text{Fix}(H) \neq \emptyset$.

A segunda conclusão do Teorema é consequência directa do Corolário 1.15 e da Proposição 1.19. $\square$

Vejamos agora alguns exemplos:

Exemplo 1.23 Considere-se a rotação $R_\alpha : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de ângulo $2\pi\alpha$ e centro na origem, sendo α irracional.

Neste caso $\Omega(R_\alpha) = \mathbb{R}^2$ e R_α tem um único ponto fixo $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$, e não tem pontos periódicos de outros períodos.

Considerando $\mathbb{S}^2$ como compactificado (a um ponto) de $\mathbb{R}^2$ obtemos o homeomorfismo induzido $\tilde{R}_\alpha : \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{S}^2$, sendo que $\Omega(\tilde{R}_\alpha) = \mathbb{S}^2$, $\text{Fix}(\tilde{R}_\alpha)$ reduz-se a dois pontos e $\tilde{R}_\alpha$ não tem pontos periódicos de outros períodos.

Exemplo 1.24 Considere-se a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned} H : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longrightarrow (1 + x - y^2, -y) \end{aligned}$$

Como $\det(DH(x, y)) = -1$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, é claro que H reverte a orientação. É também claro que $\text{Fix}(H) = \emptyset$. Por outro lado tem-se que $H^2((0, 1)) = (0, 1)$ e portanto $\Omega(H) \neq \emptyset$.

Exemplo 1.25 Este exemplo permite notar que pode-se ter um homeomorfismo $H : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ sem pontos fixos, que preserva a orientação e contudo com pontos periódicos de outros períodos, o que mostra que o resultado provado é válido em dimensão 2, e não em dimensões maiores. Vamos indicar como obter um tal homeomorfismo:

Seja então:

$$\begin{aligned} H : \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longrightarrow (x, y, z + 1) \end{aligned}$$

Vamos considerar a curva γ definida por $\gamma(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), kt)$, onde $t \in [0, 1]$ e $k \geq 2$.

Temos que $H^k((1, 0, 0)) = (1, 0, k)$ e $\gamma \cap H^i(\gamma) = \emptyset$, $\forall i \in \{1, \dots, k-1\}$.

Vamos considerar uma vizinhança compacta e conexa D de γ , tal que $\gamma \subseteq \text{int}(D)$, suficientemente fina para que

$D \cap H^i(D) = \emptyset$, $\forall i \in \{1, \dots, k-1\}$, é claro que $D \cap H^k(D) \neq \emptyset$, ver figura 1.11.

Agora vamos considerar uma isotopia θ com suporte compacto contido em D que envia $(1, 0, k)$ em $(1, 0, 0)$.

Seja $H_1 = \theta \circ H$; H_1 preserva a orientação e tem-se que

$H_1^k((1, 0, 0)) = (\theta \circ H)^k((1, 0, 0)) = \theta((1, 0, k)) = (1, 0, 0)$ e

$H_1^j((1, 0, 0)) = H^j((1, 0, 0)) \neq (1, 0, 0)$, $\forall j \in \{0, \dots, k-1\}$.

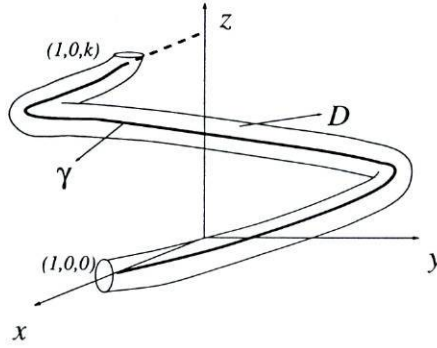


Figura 1.11:

Portanto $(1, 0, 0)$ é um ponto periódico de período k . Por outro lado se $H_1(z) = z$ temos que $\theta \circ H(z) = z$, o que é absurdo se $H(z) \notin D$; se $H(z) \in D$ então $\theta \circ H(z) = z \in D \cap H^{-1}(D)$, o que é absurdo. Assim H_1 não tem pontos fixos.

Esta construção assenta no facto de que existe um disco topológico D tal que $H(D) \cap D = \emptyset$ e $H^k(D) \cap D \neq \emptyset$, para algum $k \geq 2$. Veremos na próxima secção que tal não acontece em dimensão 2.

1.6 Algumas consequências do Teorema 1.22

O próximo resultado dá-nos uma caracterização dinâmica da noção de preservar a orientação para homeomorfismos de $\mathbb{R}^2$ que não têm pontos fixos.

Corolário 1.26 *Seja $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um homeomorfismo sem pontos fixos. Se H preserva a orientação, então para qualquer disco topológico aberto D tal que $H(D) \cap D = \emptyset$ tem-se que $H^n(D) \cap D = \emptyset, \forall n \in \mathbb{Z} - \{0\}$.*

Demonstração:

A demonstração desta implicação, pode-se encontrar em [4], contudo uma demonstração alternativa pode ser vista em [2].

Vamos então supor por absurdo que existe n tal que $H^n(D) \cap D \neq \emptyset$. Vamos considerar p o menor inteiro positivo tal que $H^p(D) \cap D \neq \emptyset$. Vamos considerar também um elemento $x \in D \cap H^{-p}(D)$, logo x e $H^p(x)$ pertencem a D , seja então γ uma curva polygonal contida em D com extremos $H^p(x)$ e x .

Escolha-se uma vizinhança V compacta de γ suficientemente pequena para estar contida em D . A ideia agora é considerar uma isotopia $\{H_t : t \in [0, 1]\}$ com suporte compacto V , que envia $H^p(x)$ em x ao longo de γ , ou seja $H_1(H^p(x)) = x$. Consideremos $F = H \circ H_1$. Note-se que F não tem pontos fixos no complementar de D , pois por construção da isotopia, fora de $V \subseteq D$ a aplicação H_1 é a identidade, também é claro que em D a aplicação F não tem pontos fixos pois $F(D) = H(D)$ que por hipótese é disjunto de D . Mas então temos que $F(H^p(x)) = H \circ H_1(H^p(x)) = H(x)$, logo $F^p(H^p(x)) = H^p(x)$, e portanto F tem pontos periódicos sem ter pontos fixos, o que contraria o Teorema 1.22. $\square$

A implicação contrária também se verifica, uma demonstração deste facto pode ser encontrada em [2]. Obtém-se assim uma nova caracterização das aplicações livres do plano, que são portanto, os homeomorfismos H do plano, sem pontos fixos e que verificam a condição $H(D) \cap D = \emptyset \implies H^n(D) \cap D = \emptyset, \forall n \in \mathbb{Z} - \{0\}$, e D qualquer disco topológico aberto.

O próximo resultado é também uma consequência directa do Teorema 1.22 e será utilizado no Capítulo 3.

Corolário 1.27 *Seja $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação livre. Então para qualquer $x \in \mathbb{R}^2$, tem-se $\|H^n(x)\| \xrightarrow{n \rightarrow \pm\infty} \infty$.*

Demonstração:

Por absurdo suponha-se que existem $z \in \mathbb{R}^2$, $(n_s)_{s \in \mathbb{N}} \rightarrow +\infty$ (ou $-\infty$) e um compacto $K \subseteq \mathbb{R}^2$ tais que $H^{n_s}(z) \in K$, $\forall s \in \mathbb{N}$. Se w é um valor de aderência da sucessão $(H^{n_s}(z))_{s \in \mathbb{N}}$, que existe por compacidade, então é claro que $w \in \Omega(H)$. Assim $\Omega(H) \neq \emptyset$, o que contraria o Teorema 1.22. $\square$

Observe-se que se $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ reverte a orientação e $Per(H) \neq \emptyset$, então $F = H \circ H$ preserva a orientação e $Per(F) \neq \emptyset$, assim, pelo Teorema 1.22, F tem um ponto fixo z e portanto ou $H(z) = z$ ou $H^2(z) = z$. Mostramos assim o seguinte:

Corolário 1.28 *Seja $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um homeomorfismo que reverte a orientação e que tem algum ponto periódico. Então H tem um ponto fixo ou um ponto de período 2.*

O seguinte Corolário não vai ser usado no que se segue, contudo é um resultado que permite concluir a existência de um ponto fixo no disco aberto.

Corolário 1.29 *Seja $H : D \rightarrow D$ um homeomorfismo no disco aberto D que preserva a orientação e a área. Então $Fix(H) \neq \emptyset$.*

Demonstração:

Supondo que $H \neq Id$ é possível encontrar um disco V tal que $V \cap H(V) = \emptyset$.

Se $Fix(H) = \emptyset$ então a aplicação H é uma aplicação livre e portanto $V \cap H^n(V) = \emptyset$, $\forall n \in \mathbb{Z} - \{0\}$, o que implica que $H^i(V) \cap H^j(V) = \emptyset$, $\forall i \neq j$, e portanto $\{H^n(V)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ é uma família de abertos dois a dois disjuntos cuja união tem área infinita já que H preserva a área, o que é absurdo. $\square$

Capítulo 2

O Teorema da translação de Brouwer

2.1 Introdução

No período de 1909 a 1919, L.E.J.Brouwer formulou e demonstrou o Teorema da translação. Inicialmente, Brouwer supunha que as aplicações livres eram sempre conjugadas a uma translação. Contudo, posteriormente apresenta um contra-exemplo, ou seja, constrói uma aplicação livre que não é conjugada a uma translação. No próximo capítulo, será debatida mais profundamente esta questão.

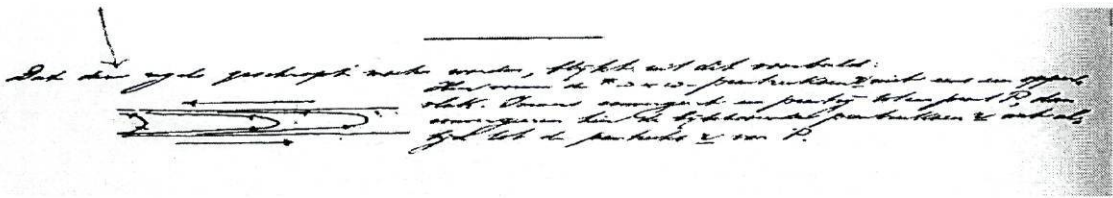


Figura 2.1: Brouwer corrigindo o seu artigo em 1919.

Em 1912, Brouwer publica o artigo "Beweis des ebenen translationssatzes" [15] onde usa pela primeira vez o Lema para arcos de translação (Teorema 1.22). No decurso das tentativas para provar o Teorema da Translação, Brower usa argumentos que foram consideradas, por diversos matemáticos, confusos e até errados. Em [5] Lucien Guillon afirma que a prova de Brouwer é "...difícil de seguir, senão incompleta ou mesmo errada."

Brouwer debruça-se neste problema na tentativa de provar um resultado mais geral,

concretamente o 5º problema que Hilbert apresentou no Congresso Internacional de Matemática, em 1900.

Desde 1920 vários foram os matemáticos que apresentaram provas do Teorema da Translação de Brouwer, corrigindo erros anteriores e tentando simplificar o mais possível a prova. Kérékjártó [23], Scherrer [22], Teresaka [24], Sperner [25] e mais recentemente Slaminka [18] são alguns exemplos. Apesar das diferenças, todos estes autores concordavam que o ponto de partida para esta teoria era o Lema de Brouwer para arcos de translação.

A prova aqui apresentada é da autoria de J. Franks e foi apresentada em 1992. Este teorema continua a fascinar autores, não sendo exclusiva a abordagem contemporânea de Franks, pois, em 1993, L. Guillou apresenta outra prova seguindo um caminho bastante distinto do que é aqui apresentado.

2.2 Demonstração do Teorema da translação de Brouwer

Definição 2.1 *Sejam $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ espaços métricos, $f : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$ é um **mergulho** se f é contínua, injectiva e é um homeomorfismo sobre a imagem, $f(\mathbb{X})$. Se, além disso, $f^{-1}(K)$ é compacto para qualquer compacto K de $\mathbb{Y}$, f diz-se um **mergulho próprio**.*

Note-se que, se $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é um mergulho próprio, então $\lambda = f(\mathbb{R})$ é um fechado de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^2 - \lambda$ tem duas componentes conexas.

Definição 2.2 *Seja H um homeomorfismo de $\mathbb{R}^2$. Um **domínio de translação** $\mathcal{D}$ para H é um aberto conexo de $\mathbb{R}^2$ cuja fronteira é $\lambda \cup H(\lambda)$, onde λ é a imagem de um mergulho próprio de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^2$ e tal que λ separa $H(\lambda)$ de $H^{-1}(\lambda)$.*

A existência de domínios de translação $\mathcal{D}$ para homeomorfismos de $\mathbb{R}^2$ é dinamicamente significativa, pois sendo $U = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} H^n(Ad(\mathcal{D}))$ segue que:

- U é aberto;

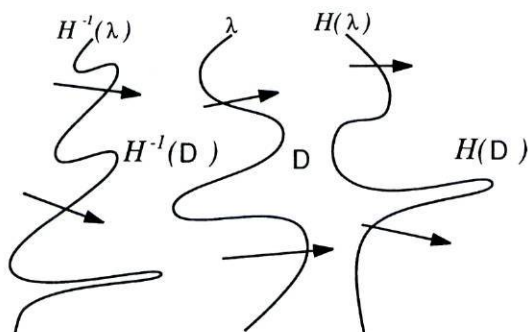


Figura 2.2: Exemplo de um domínio de translação

- $H(U) = U$ (U é invariante por H);
- $H|_U$ é topologicamente conjugado a uma translação de $\mathbb{R}^2$.

O Teorema seguinte mostra a existência de tais domínios de translação para as aplicações livres do plano.

Teorema 2.3 (da translação de Brouwer) *Seja $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação livre, então, $\forall x \in \mathbb{R}^2$, x está contido em algum domínio de translação $\mathcal{D}$.*

Vejamos a definição seguinte que será útil para o que se segue:

Definição 2.4 *Diz-se que uma sequência finita de pontos do plano $x = x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ é uma ε -cadeia de x a y para a aplicação H se:*

- $d(H(x_i), x_{i+1}) < \varepsilon \forall i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$;
- $d(H(x_n), y) < \varepsilon$.

Sejam $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação livre e τ um arco de translação para H (conforme a Definição 1.10). Para cada $\varepsilon > 0$ seja U_ε o conjunto dos pontos y de $\mathbb{R}^2$ tais que existe uma ε -cadeia de algum ponto de τ até y . Pela definição de ε -cadeia, U_ε é um aberto, e também é claro, pela definição de U_ε que $H(\tau)$ está contido em U_ε , pois dado um ponto arbitrário z do arco de translação tem-se que $z, H(z)$ é uma cadeia.

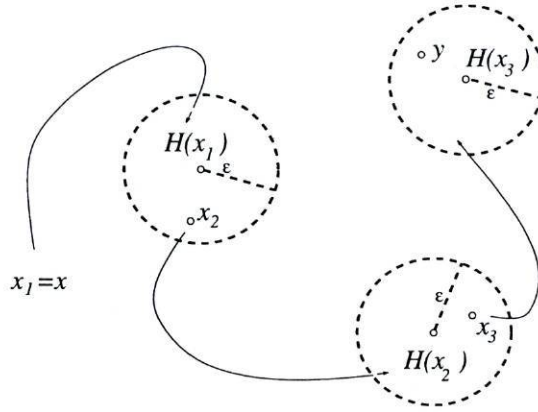


Figura 2.3: $x = x_0, x_1, x_2, x_3$ é uma ϵ -cadeia de x a y

O Lema seguinte mostra que uma aplicação livre do plano é conjugada, via um difeomorfismo, a uma aplicação em que cada ponto está a uma distância não inferior a 1 da sua imagem.

Lema 2.5 *Seja $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação livre. Então existe um difeomorfismo $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $H_1 = F \circ H \circ F^{-1}$ é uma aplicação livre que verifica*

$$d(H_1(x), x) \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}^2.$$

Demonstração:

Para cada $r \in \mathbb{R}_0^+$ considere-se D_r o disco aberto centrado em $x = (0, 0)$ e de raio r . Escolha-se uma função diferenciável $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para todo $t \in \mathbb{R}_0^+$, $f(t) > 1$, $f'(t) \geq 0$ e também que tome valores suficientemente grandes para que $f(r)$ seja estritamente maior que $\max_{x \in D_{r+1}} \frac{1}{\|x - H(x)\|}$.

Note-se que é sempre possível encontrar uma função nestas condições.

É imediato que $\frac{1}{f(r)} < \min_{x \in D_{r+1}} \|x - H(x)\|$.

Defina-se agora um difeomorfismo:

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (r, \theta) &\longrightarrow (rf(r), \theta) \end{aligned}$$

(onde r e θ são coordenadas polares).

Considere-se as bases ortonormadas $(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta})$ em (r, θ) e $(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{rf(r)} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta})$ em $F((r, \theta))$ então a matriz da aplicação derivada $DF_{(r, \theta)}$ relativamente às bases apresentadas é:

$$\begin{pmatrix} f(r) + rf'(r) & 0 \\ 0 & f(r) \end{pmatrix}$$

Donde se obtém pelo teorema da função inversa:

$$DF_{F(r, \theta)}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{f(r) + rf'(r)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{f(r)} \end{pmatrix}$$

E consequentemente:

$$\|DF_{F(r, \theta)}^{-1}\| \leq \frac{1}{f(r)}$$

Mostremos que $\|F(H(x)) - F(x)\| \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Suponha-se, por absurdo, que existia um $x \in \mathbb{R}^2$ tal que $\|F(H(x)) - F(x)\| < 1$, aplicando o teorema da desigualdade do valor médio ao difeomorfismo $F^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ obtém-se:

$$\|F^{-1}(F(H(x))) - F^{-1}(F(x))\| \leq \sup_{t \in [0, 1]} \|DF_{(1-t)F(x) + tF(H(x))}^{-1}\| \cdot \|F(x) - F(H(x))\|$$

Logo existe $y \in \mathbb{R}^2$ no segmento de recta que une $F(x)$ a $F(H(x))$, que verifica:

$$\|H(x) - x\| \leq \|DF_y^{-1}\| \cdot \|F(H(x)) - F(x)\| < \|DF_y^{-1}\|$$

Logo obtém-se:

$$\|H(x) - x\| < \frac{1}{f(r)} < \min_{z \in D_{r+1}} \|z - H(z)\|$$

onde $r = \|F^{-1}(y)\|$. Contudo F^{-1} é uma contracção, já que $\|DF_{F(r, \theta)}^{-1}\| \leq \frac{1}{f(r)} < 1$ e $f'(t) \geq 0$, logo $\|x - F^{-1}(y)\| \leq \|F(x) - y\| < 1$, portanto sempre que $r = \|F^{-1}(y)\|$ tem-se $x \in D_{r+1}$, que é absurdo.

Segue que, para todo o $x \in \mathbb{R}^2$, se tem $\|F(H(x)) - F(x)\| \geq 1$. Se se definir $H_1 = F \circ H \circ F^{-1}$ então $\|H_1(x) - x\| = \|F(H(F^{-1}(x))) - F(F^{-1}(x))\| \geq 1$. $\square$

Lema 2.6 *Seja $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um homeomorfismo que preserva a orientação e suponha-se que existe algum δ positivo, tal que $d(H(x), x) > \delta, \forall x \in \mathbb{R}^2$. Então se $0 < \varepsilon_1 < \delta$, não existe alguma ε_1 -cadeia periódica de y até y , $\forall y \in \mathbb{R}^2$.*

Demonstração:

Vamos supor, por absurdo, que existe uma ε_1 -cadeia periódica $y = x_1, x_2, \dots, x_n = y$ e vamos concluir ser possível encontrar um homeomorfismo $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $F(H(x_k)) = x_{k+1}$ e que $d(F(x), x) < \varepsilon_1 \forall x \in \mathbb{R}^2$.

Em primeiro lugar, e se necessário, altera-se os pontos da cadeia à excepção dos extremos que são ambos y , de modo a que todos os pontos da cadeia e as suas imagens por H sejam distintos.

Considere-se agora todos os segmentos σ_k que ligam $H(x_k)$ a x_{k+1} , que por definição de ε -cadeia têm comprimento inferior a ε_1 , e seguidamente parametriza-se estes segmentos $\sigma_k : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ proporcionalmente ao comprimento de arco.

Agora, e também se necessário, alteramos ligeiramente estes caminhos de modo a que sejam arcos poligonais, parametrizados proporcionalmente ao comprimento de arco e de modo a evitar intersecções dos segmentos no mesmo *tempo*, ou seja de modo a que $i \neq j \implies \sigma_i(s) \neq \sigma_j(s), \forall s \in [0, 1]$.

Seja $\delta = \min d(\sigma_i(s), \sigma_j(s))$, onde $s \in [0, 1]$ e o par i, j assume todas as possibilidades à excepção $i = j$, e escolha-se um inteiro positivo N suficientemente grande para que $\frac{1}{N} < \frac{\delta}{2}$.

Por estarem parametrizados proporcionalmente ao comprimento de arco e por ser uma ε_1 -cadeia obtém-se que todos os arcos $\sigma_k([\frac{i-1}{N}, \frac{i}{N}])$, $i \in \{1, \dots, N\}$, $k \in \{1, \dots, n-1\}$ têm comprimento menor que $\frac{\varepsilon_1}{N}$, além disso pela definição de δ e posterior escolha do tamanho da partição (N) tira-se que fixando i os arcos $\sigma_k([\frac{i-1}{N}, \frac{i}{N}])$, $k \in \{1, \dots, n-1\}$ são dois a dois disjuntos.

Agora, para cada $i \in \{1, \dots, N\}$ constrói-se uma isotopia $\theta_t^i : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ que verifique as seguintes propriedades:

1. O suporte de θ_t^i está contido na união de pequenas vizinhanças V_i^k , duas a duas disjuntas, dos arcos $\sigma_k([\frac{i-1}{N}, \frac{i}{N}])$, $\forall k \in \{1, \dots, n-1\}$, $(\text{Supp}(\theta_t^i) \subseteq \bigcup_{k=1}^{n-1} V_i^k)$;
2. $d(\theta_t^i(x), x) < \frac{\varepsilon_1}{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}^2, \forall t \in [0, 1]$;
3. $\theta_1^i(\sigma_k(\frac{i-1}{N})) = \sigma_k(\frac{i}{N})$, $\forall k \in \{1, \dots, n-1\}$.

Finalmente defina-se $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ como $F = \theta_1^N \circ \theta_1^{N-1} \circ \dots \circ \theta_1^1$.

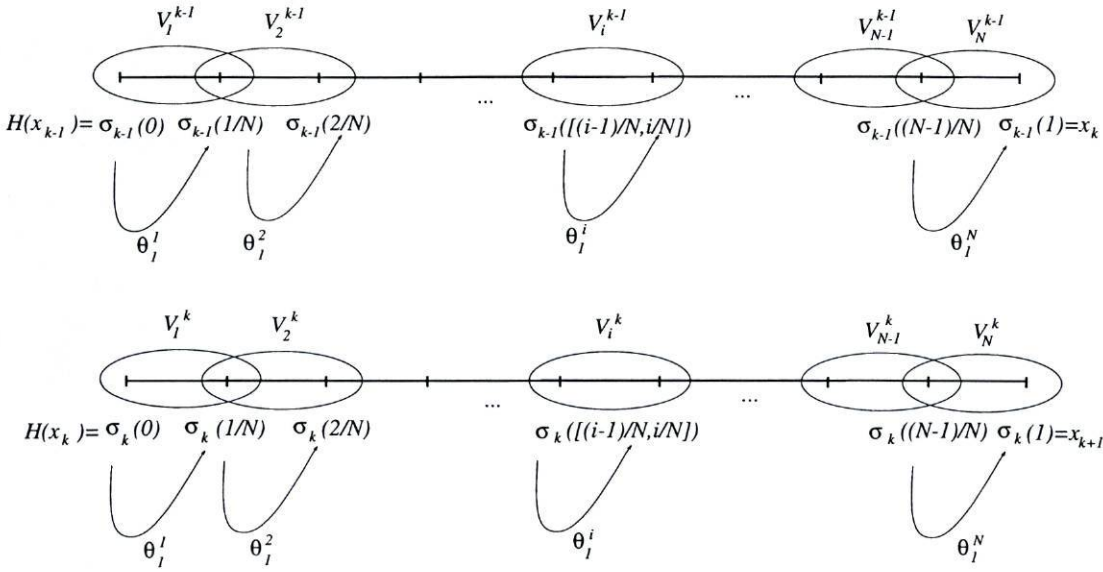


Figura 2.4:

No caso particular de x_1 tem-se:

$$\begin{array}{ccccccc}
 x_1 & \longrightarrow & H(x_1) & \xrightarrow{\theta_1^1} & \sigma_1(\frac{1}{N}) & \xrightarrow{\theta_1^2} & \sigma_1(\frac{2}{N}) \longrightarrow \dots \xrightarrow{\theta_1^N} \sigma_1(1) = x_2 \\
 \searrow & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow \\
 & \underline{H} & & & \text{-----} & & \nearrow \\
 & & & & F & &
 \end{array}$$

É claro que:

$$d(F(x), x) \leq \sum_{j=1}^N d(\theta_1^j \circ \theta_1^{j-1} \circ \dots \circ \theta_1^1(x), \theta_1^{j-1} \circ \dots \circ \theta_1^1(x)) < N \cdot \frac{\varepsilon_1}{N} = \varepsilon_1, \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$$

e que $F(H(x_k)) = x_{k+1}$. Logo, o homeomorfismo $G = F \circ H$, tem $x_1, \dots, x_n$ como órbita periódica e pelo Teorema 1.22, o homeomorfismo G tem um ponto fixo w , logo tem-se:

$$\delta < d(H(w), w) = d(H(w), G(w)) = d(H(w), F(H(w)))$$

Usando o facto de $d(F(x), x) < \varepsilon_1$, conclui-se que:

$$\delta < d(H(w), w) < \varepsilon_1 < \delta$$

Este absurdo surge do facto de se ter considerado a existência de uma ε_1 -cadeia periódica. $\square$

Lema 2.7 *Seja $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação livre tal que $d(H(x), x) \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}^2$, e τ um arco de translação para H . Então existe pelo menos um número positivo ε_0 tal que $H^{-1}(\tau)$ e U_{ε_0} são disjuntos.*

Demonstração:

Vai-se mostrar que se para um valor de ε_0 suficientemente pequeno, existe uma ε_0 -cadeia $y_1, y_2, \dots, y_n$ de um ponto $y_1 \in \tau$ a $z \in H^{-1}(\tau)$ então é possível substituir H por uma aplicação H_1 tal que $d(H_1(x), x) > \delta \forall x \in \mathbb{R}^2$ (Lema 2.5) e de modo que H_1 possui uma ε_1 -cadeia periódica de $y_1 \in \tau$ para $\varepsilon_1 < \delta$, o que contraria o Lema 2.6. Obtém-se portanto o resultado pretendido, ou seja, $H^{-1}(\tau) \cap U_{\varepsilon_0} = \emptyset$.

Seja τ um arco de translação para H e $x, H(x)$ os seus extremos.

Considere-se então um disco topológico D centrado em x que verifique as condições:

- $\text{diam}(D) < \frac{1}{4}$;
- $\text{diam}(H(D)) < \frac{1}{4}$;
- $H(D) \cap D = \emptyset$.

Sejam $\gamma_1 = \tau - \text{int}(H(D))$ e $\gamma_2 = \tau - \text{int}(D)$; γ_1 e γ_2 são subarcos compactos de τ . Escolha-se $\delta_0 \in [0, 1]$ de modo a que existam vizinhanças compactas V_i de γ_i com $d(V_i, H^{-1}(V_i)) > \delta_0$ onde $i \in \{1, 2\}$.

Escolha-se $\varepsilon_0 < \min\{\frac{1}{4}, \frac{\delta_0}{2}\}$ e suponha-se que existe uma ε_0 -cadeia $y_1, y_2, \dots, y_n$ de $y_1 \in \tau$ a $z \in H^{-1}(\tau)$. Alterando um pouco a ε_0 -cadeia, se necessário, pode-se assumir que $y_1 \in \overset{\circ}{\tau}$ e $\{y_2, \dots, y_n, H(y_1), \dots, H(y_n)\} \cap \tau = \emptyset$.

Caso 1: Suponha-se que $y_1 \in D \cup H(D)$ e $z \in H^{-1}(D) \cup D$. Se $y_1, z \in D$ então $d(H(y_n), y_1) \leq d(H(y_n), z) + d(z, y_1) < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$. Logo, se $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}$, então $y_1, y_2, \dots, y_n$ é uma ε_1 -cadeia periódica de y_1 a y_1 para H . Logo tomando $H_1 = H$ e $\delta = 1$ entra-se em contradição com o Lema 2.6. Analogamente, se $y_1 \in H(D)$ e $z \in D$, ou se $y_1 \in D$ e $z \in H^{-1}(D)$, então $y_1, y_2, \dots, y_n, z, y_1$ é uma ε_1 -cadeia periódica de y_1 a y_1 . Do mesmo modo se $y_1 \in H(D)$ e $z \in H^{-1}(D)$ então $y_1, y_2, \dots, y_n, z, H(z), y_1$ é uma ε_1 -cadeia periódica de y_1 a y_1 , logo nestes casos pode-se tomar também $H_1 = H$, $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}$ e $\delta = 1$ e chegar a uma contradição com o Lema 2.6.

Caso 2: Se não ocorre o 1º Caso então o subarco de τ que une y_1 a $H(z)$ está contido em γ_1 ou contido em γ_2 .

Suponha-se que tal arco está contido em γ_1 (o outro caso é análogo), ver figura 2.5. Seja $\theta_t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \in [0, 1]$ uma isotopia tal que $\theta_1(H(z)) = y_1$ e com suporte numa vizinhança de γ_1 suficientemente pequena para estar contida em V_1 e disjunta de $\{y_2, \dots, y_n, H(y_1), \dots, H(y_n)\}$. Define-se $H_1 = \theta_1 \circ H$. Como $H_1(z) = \theta_1 \circ H(z) = y_1$ e $H_1(y_i) = H(y_i)$, $i \in \{1, \dots, n\}$, tem-se que existe uma ε_0 -cadeia periódica para H_1 , a saber $y_1, y_2, \dots, y_n, z, y_1$. Como $\varepsilon_0 < \delta_0 < 1$ tudo o que falta para obter uma contradição com o Lema 2.6 é mostrar que $d(H_1(x), x) > \delta_0$, $\forall x \in \mathbb{R}^2$. Observe-se que se $x \in H^{-1}(V_1)$ então $d(H_1(x), x) > \delta_0$ por escolha de V_1 e de δ_0 . Se $x \notin H^{-1}(V_1)$ então $H(x) = H_1(x)$, logo $d(H_1(x), x) \geq 1 > \delta_0$. Consequentemente $d(H_1(x), x) > \delta_0$, $\forall x \in \mathbb{R}^2$. Logo tem-se um homeomorfismo H_1 , que preserva a orientação, tal que $\forall x \in \mathbb{R}^2$ $d(H_1(x), x) > \delta_0$, com uma ε_0 -cadeia periódica $y_1, y_2, \dots, y_n, z, y_1$ o que contradiz o Lema 2.6 com $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$ e $\delta = \delta_0$. $\square$

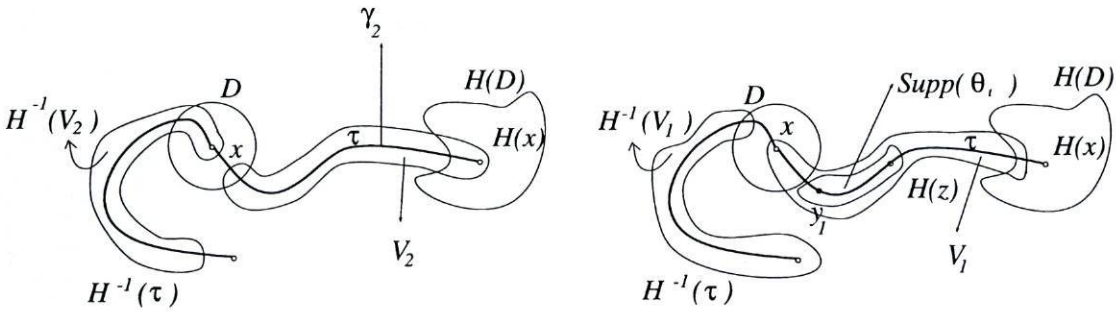


Figura 2.5:

Vejam os segundamente o último Lema necessário para provar o Teorema da translação de Brouwer.

Lema 2.8 *Sejam $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação livre, τ um arco de translação para H , $\varepsilon_0 > 0$ tal que $H^{-1}(\tau) \cap U_{\varepsilon_0} = \emptyset$, $U = U_{\varepsilon_0}$ e $V = H^{-1}(Ad(\mathbb{R}^2 - Ad(U)))$ então:*

$$Ad(H(U)) \subseteq U \text{ e } V \subseteq \mathbb{R}^2 - Ad(U)$$

Demonstração:

Dado $y \in Ad(H(U))$, como $Ad(H(U)) = H(Ad(U))$ segue que $H^{-1}(y) \in Ad(U)$. Como $Ad(U) \subseteq U_{\varepsilon_0}$ tem-se que para algum $z \in \tau$, existe uma ε_0 -cadeia $z = x_1, x_2, \dots, x_n$ de z até um ponto w com $d(w, H^{-1}(y)) < \delta$, onde δ é escolhido de modo a verificar $d(w, H^{-1}(y)) < \delta \implies d(H(w), y) < \varepsilon_0$ (usando a continuidade de H). Assim, tem-se que $z = x_1, x_2, \dots, x_n, w$ é uma ε_0 -cadeia desde z até y , logo $y \in U$. Mostrou-se então que $Ad(H(U)) \subseteq U$, donde também se conclui imediatamente que $Ad(U) \subseteq H^{-1}(U)$.

Para provar a segunda inclusão, como se viu atrás $Ad(U) \subseteq H^{-1}(U)$ o que implica que $V = H^{-1}(Ad(\mathbb{R}^2 - Ad(U))) = \mathbb{R}^2 - H^{-1}(U) \subseteq \mathbb{R}^2 - Ad(U)$. $\square$

Note-se que V e $Ad(U)$ são disjuntos.

Estamos agora em condições de apresentar a demonstração do Teorema da translação de Brouwer.

Demonstração:(do Teorema 2.3)

Pelo Lema 2.5 pode-se assumir que $d(H(x), x) \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}^2$. Seja então $x_0 \in \mathbb{R}^2$ arbitrário. Considera-se um arco de translação para H que liga x_0 a $H(x_0)$ (Lema 1.13). Para $\varepsilon > 0$, seja U_ε definido como anteriormente. Pelo Lema 2.7, existe ε_0 tal que $H^{-1}(\tau) \cap U_{\varepsilon_0} = \emptyset$. Sejam $U = U_{\frac{\varepsilon_0}{2}}$ e $V = H^{-1}(Ad(\mathbb{R}^2 - Ad(U)))$, como no Lema 2.8. V é fechado e $V \cap Ad(U) = \emptyset$. Assim, considerem-se as funções de classe C^∞ , $u_0 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ e $v_0 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, definidas do seguinte modo:

$$u_0(x) \begin{cases} = 0 & , \text{ se } x \in Ad(U) \\ > 0 & , \text{ se } x \notin Ad(U) \end{cases} \quad v_0(x) \begin{cases} = 0 & , \text{ se } x \in V \\ > 0 & , \text{ se } x \notin V \end{cases}$$

Para a existência de tais funções ver, por exemplo, [7] página 321.

Em seguida define-se a função $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, também de classe C^∞ , à custa de u_0 e v_0 como se apresenta:

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow \frac{u_0(x)}{u_0(x) + v_0(x)} \end{aligned}$$

é claro que g verifica:

$$g(x) \begin{cases} = 0 & , \text{ se } x \in Ad(U) \\ \in]0, 1[& , \text{ se } x \in \mathbb{R}^2 - (Ad(U) \cup V) \\ = 1 & , \text{ se } x \in V \end{cases}$$

Note-se que:

$$\begin{aligned}
g(x) \in]0, 1[&\iff x \in \mathbb{R}^2 - (Ad(U) \cup V) \iff x \in (\mathbb{R}^2 - Ad(U)) \cap (\mathbb{R}^2 - V) \iff \\
&\iff x \in (\mathbb{R}^2 - Ad(U)) \cap H^{-1}(U) \iff \\
&\iff x \in H^{-1}(U) - Ad(U)
\end{aligned}$$

Donde se conclui que $H(x) \in U$ e consequentemente $g(H(x)) = 0$, do mesmo modo $H^{-1}(x) \in V$ e portanto $g(H^{-1}(x)) = 1$, logo se $g(x) \in]0, 1[$ tem-se $g(H(x)) < g(x)$; também se $x \in Ad(U)$, como $H(Ad(U)) \subseteq U$, obtemos que $g(H(x)) = 0 = g(x)$. Se $x \in V$ é claro que $g(H(x)) \leq 1 = g(x)$. Assim, $g(H(x)) \leq g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^2$.

Como $H^{-1}(\tau) \cap Ad(U) = \emptyset$ e g é não nula fora de $Ad(U)$, vem que $\min(g(x)|_{H^{-1}(\tau)}) > 0$. Pelo facto de g ser de classe C^∞ , pode-se aplicar o teorema de Sard e concluir que o conjunto dos valores regulares de g é denso em $\mathbb{R}$, logo existe um valor regular $c \in]0, 1[$ de g que é menor que este mínimo.

Considere-se agora a subvariedade $g^{-1}(]-\infty, c])$ de $\mathbb{R}^2$. Como $H(\tau) \subseteq U$ e g é nula em U , vem que $H(\tau) \subseteq g^{-1}(0)$, logo $H(\tau)$ está totalmente contido no interior de uma componente conexa, M , de $g^{-1}(]-\infty, c])$. Note-se que $H(M) \subseteq \text{int}(g^{-1}(]-\infty, c]))$, isto porque dado um $x \in M$, tem-se que $g(x) \in]-\infty, c]$, e como g é não negativa obtém-se $g(x) \in [0, 1[$, o que pelo que foi visto atrás implica a seguinte desigualdade $g(H(x)) \leq g(x)$. Ora, se $g(x) = 0$, então $g(H(x)) = g(x)$. Se $g(x) \in]0, 1[$, então $g(H(x)) < g(x)$ e em ambos os casos se conclui que $H(x) \subseteq \text{int}(g^{-1}(]-\infty, c]))$. Esta inclusão e o facto dos extremos de $H(\tau)$, $H(x_0)$ e $H^2(x_0)$ estarem ambos em M leva a concluir que $H(M) \subseteq \text{int}(M)$.

Tem-se que $Fr(M)$ é a união das componentes de $g^{-1}(c)$ (sendo cada uma um fechado em $\mathbb{R}^2$ e cada uma destas componentes é a fronteira de uma componente do complementar de M). Pela escolha de c , o arco $H^{-1}(\tau)$ é disjunto de M , logo $x_0 \notin M$.

Denote-se por N a componente do complementar de M que contém x_0 , e seja λ a sua fronteira ($\lambda = Fr(N)$). λ é conexo e $g(\lambda) = \{c\}$. Mostremos que $H^{-1}(N) \subseteq \text{int}(N)$. Como $x_0, H^{-1}(x_0) \in N$ tem-se que $H^{-1}(N) \cap N \neq \emptyset$, por $H(M) \subseteq \text{int}(M)$ obtém-se $M \subseteq H^{-1}(\text{int}(M))$ e por conseguinte $H^{-1}(N) \cap M = \emptyset$, logo $H^{-1}(N) \subseteq N$, ver figura 2.6. Basta agora ver que dado $y \in Fr(N)$ tem-se $H^{-1}(y) \notin Fr(N)$, para isso note-se

que $g(y) = c$ donde, por $g(H^{-1}(y)) \in]0, 1]$, segue que $g(H^{-1}(y)) > g(H(H^{-1}(y))) = g(y) = c > 0$, e portanto $H^{-1}(y) \notin Fr(N)$.

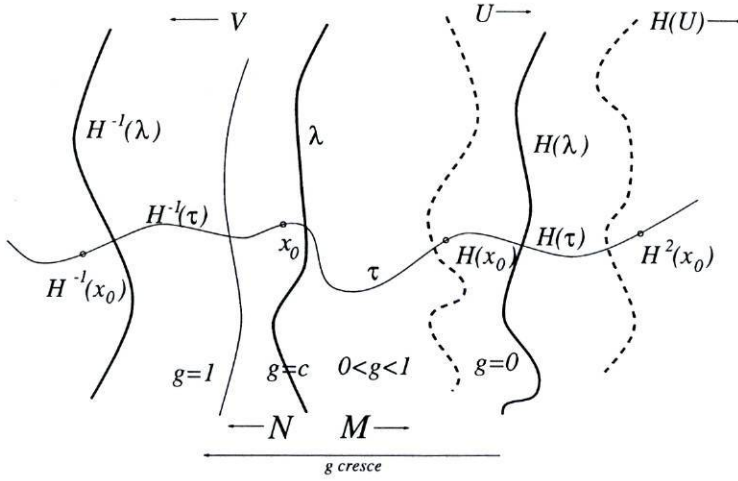


Figura 2.6:

Sendo τ um arco que liga $x_0 \in int(N)$ a $H(x_0) \in int(M)$, por conexão do arco de translação, este tem que intersectar $\lambda = Fr(N)$. Como $\lambda \subseteq Fr(M)$ e $H(Fr(M)) \subseteq H(M) \subseteq int(M)$, decorre que $H(\lambda) \subseteq int(M)$. E ainda $\lambda \subseteq N = Ad(N)$ (por N ser fechado), por isso $H^{-1}(\lambda) \subseteq H^{-1}(N) \subseteq int(N)$. Logo, pode-se concluir que $\lambda, H(\lambda)$ e $H^{-1}(\lambda)$ são dois a dois disjuntos e λ separa $H(\lambda)$ de $H^{-1}(\lambda)$.

Observe-se que λ não é compacto. Com efeito, se o fosse teria que ser homeomorfo a $\mathbb{S}^1$ donde se obteria que λ delimitava um disco topológico D e ter-se-ia $M \subseteq D$ ou $N = D$. No primeiro caso $H(D) \subseteq D$ e no segundo caso $H^{-1}(D) \subseteq D$ e ambos os casos levariam, pelo teorema do ponto fixo de Brouwer, à existência de um ponto fixo de H , o que por hipótese não ocorre, logo conclui-se que λ não é compacto. Como λ é uma componente conexa não-compacta de $g^{-1}(c)$ e c é um valor regular de g , decorre que λ é uma subvariedade não-compacta e fechada de $\mathbb{R}^2$, de dimensão 1, assim λ é um mergulho próprio de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^2$.

Finalmente, para concluir que x_0 está no domínio de translação limitado por λ e $H^{-1}(\lambda)$, note-se que $H^{-1}(\tau)$ contém x_0 e um ponto de $H^{-1}(\lambda)$, mas não contém algum ponto de λ , enquanto τ contém x_0 e um ponto de λ , mas nenhum ponto de $H^{-1}(\lambda)$.

□

Capítulo 3

Regiões fundamentais de divergência

3.1 Introdução

Como já foi referido, inicialmente Brouwer pensava que as aplicações livres eram sempre conjugadas a uma translação do plano. Posteriormente explicita uma aplicação livre que não poderia ser topologicamente conjugada a uma translação, na medida em que se podiam distinguir três regiões invariantes que constituíam uma partição de $\mathbb{R}^2$ e tais que em cada uma delas a aplicação era conjugada a uma translação mas a "divergência para infinito" era distinta de região para região. Este exemplo é generalizável para mais do que três regiões com veremos. Em [16], Brouwer afirma "...contudo à questão *será possível que T' de cada transformação T encha todo o plano Γ* , tem de ser respondida negativamente, como foi indicado por mim na nota de rodapé da página 37 no artigo do *Mathematische Annalen*", aqui T' designa o saturado de um domínio de translação e o artigo referido por Brouwer é [15].

As regiões fundamentais de divergência serão definidas como sendo as classes de equivalência de uma relação definida no plano.

No seguimento da conjectura de Brouwer apresentaremos um resultado que é a sua reformulação e que afirma que, se uma aplicação livre tiver unicamente uma região fundamental de divergência, então é conjugada a uma translação, obteremos portanto uma condição necessária e suficiente, pois é imediato que tal condição é necessária.

Mostraremos também que uma aplicação livre não pode ter exactamente duas regiões fundamentais de divergência.

Este capítulo tem por base um artigo de S. A. Andrea [2].

3.2 O contra-exemplo de Brouwer e outros

Seja $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação livre do plano. Diz-se que x está em relação com y , $x \sim y$, se existir um arco compacto γ de extremos x e y de modo que arbitrado o compacto $K \subseteq \mathbb{R}^2$, exista $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que para qualquer $n > n_0$ e $n < -n_0$, tem-se $H^n(\gamma) \cap K = \emptyset$.

Note-se que, a relação assim definida é uma relação de equivalência, pois a simetria e a transitividade são imediatas sendo a reflexividade consequência do Corolário 1.27.

Definição 3.1 *As regiões fundamentais de divergência são as classes de equivalência da relação definida anteriormente.*

Dizemos então que dois pontos estão em relação se existe um arco que os una que "foge" de compactos. Estas regiões, por vezes têm a designação de *classes de convergência para infinito*, no que se segue estas regiões serão designadas por *regiões de divergência*.

Da definição, resulta imediatamente que uma translação tem uma única região de divergência e que, se uma aplicação livre é conjugada a uma translação, então tem exactamente uma região de divergência.

Exemplo 3.2 (contra-exemplo de Brouwer) *Considere-se as regiões:*

$$R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 1\}$$

$$R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 1\}$$

$$R_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq -1\}$$

e a aplicação H definida do seguinte modo:

$$H|_{R_1}((x, y)) = (x + 1, y)$$

$$H|_{R_3}((x, y)) = (x - 1, y)$$

Em R_2 consideram-se as curvas $\zeta_c = \frac{1}{(y+1)(y-1)} + c$, onde $c \in \mathbb{R}$, parametrizadas pelo comprimento de arco e define-se uma aplicação $H|_{R_2}$ de tal modo que para todo $c \in \mathbb{R}$ e todo o $X \in \zeta_c$ tem-se que $H(X) \in \zeta_c$ e $d_c(H(X), X) = 1$, onde $d_c(., .)$ é a distância em ζ_c , ver figura 3.1. e também a figura 2.1.

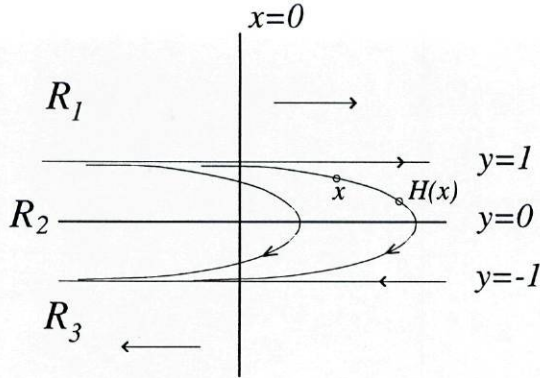


Figura 3.1:

A aplicação H assim definida é uma aplicação livre e tem três regiões de divergência que são exactamente os R_i , $i = 1, 2, 3$.

Escolhendo dois pontos x e y em R_i , é claro que $x \sim y$, $i = 1, 2, 3$. Escolhendo, por exemplo, um arco compacto que intersecte R_1 e R_2 então existem pontos desse arco que tendem para ∞ em direcções opostas por iterações positivas, logo a partir de certa ordem todos os iterados desse arco intersectam o compacto $\{0\} \times [-1, 1]$, e portanto, se $x \in R_1$ e $y \in R_2$ é claro que $x \approx y$. No caso de R_2 e R_3 o raciocínio é análogo, considerando iterados negativos. No caso de R_1 e R_3 é imediato.

Exemplo 3.3 Com o exemplo anterior, podemos generalizar para um número ímpar de regiões de divergência que se pretenda, e também para um número infinito (numerável), indicamos na figura 3.2 um exemplo com 5 regiões.

Exemplo 3.4 Este exemplo mostra que nem sempre é possível mergulhar uma aplicação livre H num fluxo, ou seja numa família de aplicações livres que varia continuamente a um parâmetro t , H_t , tal que $H_t \circ H_s = H_{t+s}$, $H_0 = Id$ e $H_1 = H$.

Consideram-se 5 regiões R_{-2}, R_{-1}, R_0, R_1 e R_2 de modo que:

$$H|_{R_{-2}}((x, y)) = H|_{R_2}((x, y)) = (x + 1, y)$$

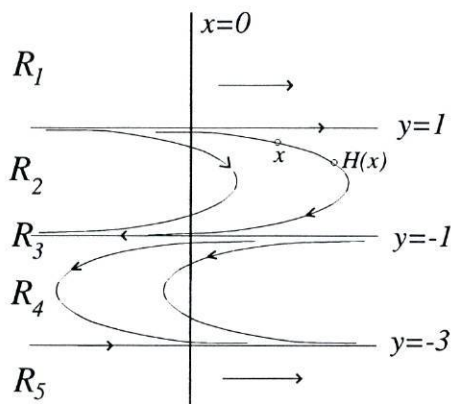


Figura 3.2:

$$H|_{R_0}((x, y)) = (x - 1, y)$$

$H|_{R_1}((x, y))$ e $H|_{R_{-1}}((x, y))$ é sugerido pela figura 3.3 sendo a distância entre (x, y) e $H((x, y))$ calculada ao longo da curva parametrizada pelo comprimento de arco, conforme o primeiro exemplo.

H é uma aplicação livre e possui 5 regiões de divergência.

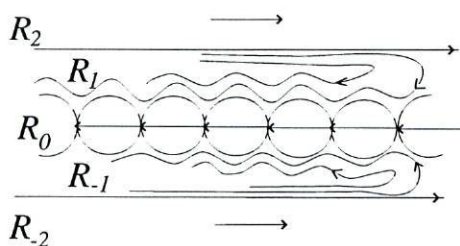


Figura 3.3:

É claro que não se pode mergulhar H num fluxo, pois se tal fosse possível R_0 seria enviado pelo fluxo em si mesmo, mas qualquer homeomorfismo de R_0 em si mesmo teria que enviar $\{H^n(x)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ em si mesmo, sendo x um ponto que desconecta R_0 . Como $H_0 = Id$ em $\{H^n(x)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ e para o tempo $t = 1$, $H_1 = H$, que é a translação de uma unidade em $\{H^n(x)\}_{n \in \mathbb{Z}}$, tem-se que, para $0 < t < 1$, $H_t(x)$ pertence ao disco que contém x e $H(x)$ e não pode ser igual a algum destes pontos o que é claramente impossível.

3.3 As aplicações livres não podem ter exactamente duas regiões de divergência

Na secção anterior, vimos que existem aplicações livres com um qualquer número ímpar de regiões de divergência, seguidamente mostramos que uma aplicação livre não pode ter exactamente duas regiões de divergência.

Lema 3.5 *Seja $H : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação livre do plano e $\{C_n\}$ uma colecção finita de conjuntos abertos, conexos por arcos e dois a dois disjuntos. Se cada $H(C_i)$ é igual a algum C_j , então $H(C_i) = C_i$ para todo o $C_i \in \{C_n\}$.*

Demonstração:

Por hipótese tem-se que H induz uma permutação na colecção $\{C_n\}$. Se, por absurdo, $H(C_i) \neq C_i \forall C_i \in \{C_n\}$, então $H(C_i) \cap C_i = \emptyset$, contudo existem $C_i \in \{C_n\}$ e $p \in \mathbb{N}$ tais que $H^p(C_i) = C_i$. Escolha-se $x \in C_i$ e como C_i é aberto e conexo por arcos, pode-se considerar um disco topológico $D \subseteq C_i$ em que $x, H^p(x) \in D$, mas então tem-se que $H^n(D) \cap D \neq \emptyset$ apesar de $H(D) \cap D = \emptyset$ o que contraria o Corolário 1.26.

□

Recorde-se que dada uma aplicação livre H e τ um arco de translação para H então $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} H^n(\tau)$ é um mergulho de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^2$, que separa $\mathbb{R}^2$ em duas componentes conexas Ω_x e Ω_y , que pelo Lema 3.5 são invariantes, ou seja, $H(\Omega_x) = \Omega_x$ e $H(\Omega_y) = \Omega_y$.

Teorema 3.6 *Seja $H : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação livre do plano, então H não pode ter exactamente duas regiões de divergência.*

Demonstração:

Vai-se supôr que H tem exactamente duas regiões de divergência, X e Y , e daí concluir que essas regiões se intersectam, o que é absurdo.

Observe-se que se R é uma região de divergência também o é $H(R)$, neste caso ou $H(X) = X$ e $H(Y) = Y$, ou $H(X) = Y$ e $H(Y) = X$. O Lema 3.5 elimina a 2ª hipótese.

Como H não tem pontos fixos é possível escolher $x \in X$ e $y \in Y$ de tal modo que o segmento de extremos x e y seja disjunto da sua imagem por H .

Seja γ uma curva de extremos x e $H(x)$ e tal que $H^n(\gamma) \xrightarrow{n \rightarrow \pm\infty} \infty$; a existência de tal curva é assegurada pelo facto de x e $H(x)$ pertencerem a X . Seja μ o menor sub-arco fechado de γ , com extremo x e w tal que $H(\mu) \cap \mu \neq \emptyset$. Tal segmento existe já que $H(\gamma) \cap \gamma \neq \emptyset$.

Caso 1) Se $\mu = \gamma$ então γ é um arco de translação, e por conseguinte escrevendo $\Phi_x = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} H^n(\gamma)$, tem-se que Φ_x é a imagem de um mergulho de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^2$.

Caso 2) Se $\mu \neq \gamma$ e $w \in H(\mu)$, então o sub-arco τ de $H(\mu)$ de extremos w e $H(w)$ é um arco de translação e consequentemente $\Phi_x = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} H^n(\mu)$ será a imagem de um mergulho de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^2$, com *cabelos* colados, sendo esses cabelos o saturado do arco α_x de extremos $H(x)$ e w .

Caso 3) Se $\mu \neq \gamma$ e $H(w) \in \overset{\circ}{\mu}$, então o sub-arco τ de μ de extremos w e $H(w)$ é um arco de translação e consequentemente $\Phi_x = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} H^n(\mu)$ será a imagem de um mergulho de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^2$, com *cabelos* colados, sendo esses cabelos o saturado do arco α_x de extremos $H(w)$ e x .

É claro que estes três casos são exclusivos pois 2) e 3) não podem ocorrer simultaneamente, ou caso contrário teríamos $H^{-1}(w)$, $H(w) \in \alpha$ (arco de extremos x e w), mas o sub-arco β de α de extremos $H^{-1}(w)$, $H(w)$ verifica $H(\beta) \cap \beta = \emptyset$ e $H^2(\beta) \cap \beta \neq \emptyset$ o que contraria o Corolário 1.26, ver figura 3.4.

No caso 1) em que $\mu = \gamma$ pode-se considerar cada $H^n(x)$ como um cabelo de comprimento zero. Como $\alpha_x \subseteq \gamma$, segue que $H^n(\alpha_x) \xrightarrow{n \rightarrow \pm\infty} \infty$.

Para $y \in Y$ faz-se uma construção inteiramente análoga, ver figura 3.5.

Considerem-se agora os conjuntos $\Phi_x \cup H^n(\alpha_x)$ e $\Phi_y \cup H^n(\alpha_y)$, seja ε o menor segmento fechado do segmento de extremos x e y , construído no início, que une estes dois conjuntos. O facto destes conjuntos serem fechados garante a existência de tal ε . Pelo facto do segmento ε ser o menor nestas condições, ele não pode intersectar mais do que um cabelo $H^n(\alpha_x)$ nem mais do que um cabelo $H^{n'}(\alpha_y)$, logo pode-se unir Φ_x a Φ_y por um arco β usando ε e escolhendo os cabelos que este intersecta ou, eventualmente, usando apenas o segmento ε .

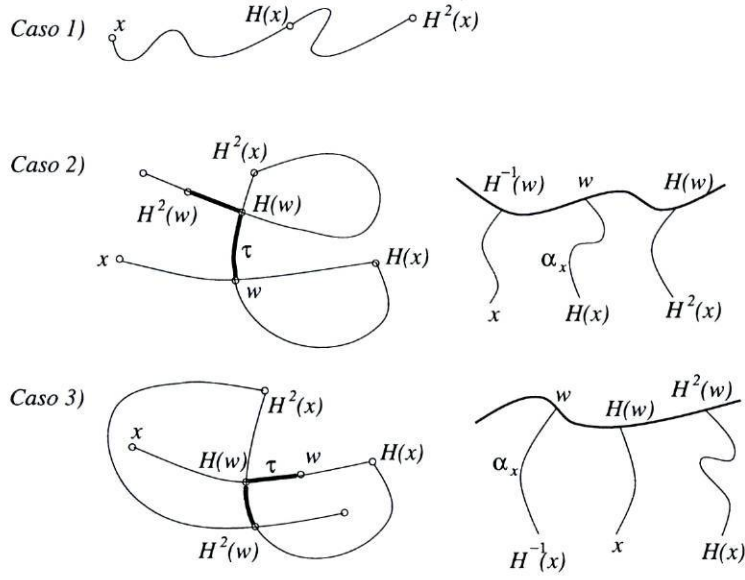


Figura 3.4:

É importante notar que $H(\varepsilon) \cap \varepsilon = \emptyset$.

Obtém-se portanto um arco β e se não foi necessário usar os cabelos, então $\beta = \varepsilon$.

Logo $H(\beta) \cap \beta = \emptyset$. Se $\beta = H^p(\alpha_x) \cup H^q(\alpha_y) \cup \varepsilon$, então $H(\beta) \cap \beta = \emptyset$, isto porque:

- $H^p(\alpha_x)$, $H^q(\alpha_y)$ e ε são disjuntos das suas imagens;
- $H^p(\alpha_x) \cap H^q(\alpha_y) = \emptyset$, $\forall p, q \in \mathbb{Z}$;
- $H^i(\alpha_x) \cap \varepsilon = \emptyset$ para $i \neq p$, e $H^i(\alpha_y) \cap \varepsilon = \emptyset$ para $i \neq q$, por escolha de ε .

Portanto, pode-se resumir que:

- Φ_x e Φ_y são imagens de mergulhos nas regiões X e Y respectivamente;
- β intersecta Φ_x em um só ponto;
- β intersecta Φ_y em um só ponto;
- $\beta \cap H(\beta) = \emptyset$.

Vamos agora definir dois conjuntos não limitados Ω_x (respectivamente Ω_y) como sendo a componente de $\mathbb{R}^2 - \Phi_x$ (respectivamente $\mathbb{R}^2 - \Phi_y$) que não contém Φ_y (respec-

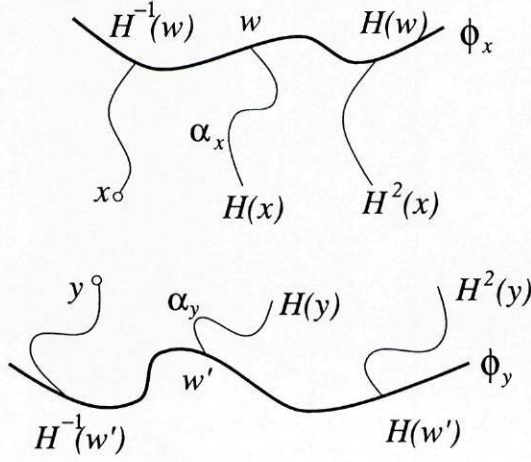


Figura 3.5:

tivamente Φ_x). Seja Δ a componente conexa de $\mathbb{R}^2 - \{\Phi_x \cup \Phi_y \cup \beta\}$ que não intersecta Ω_x, Ω_y e $H(\beta)$, (ver figura 3.6).

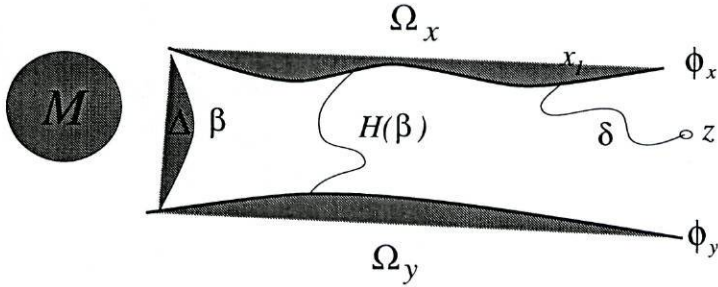


Figura 3.6:

Seja $M = Ad(\Omega_x) \cup Ad(\Delta) \cup Ad(\Omega_y)$.

Por construção é imediato que $M \subseteq H(M) \subseteq H^2(M) \subseteq \dots$. Mostremos que o saturado de M é todo o plano, ou seja $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} H^n(M) = \mathbb{R}^2$.

Fixemos $z \in \mathbb{R}^2 - M$; $z \in X$ ou $z \in Y$. Suponha-se que $z \in X$ e seja δ um arco de extremos z e um ponto $x_1 \in \Phi_x$, sendo este x_1 escolhido de modo a que $\delta - \{x_1\} \subseteq \mathbb{R}^2 - (Ad(\Omega_x) \cup Ad(\Omega_y))$, e tal que $H^n(\delta) \xrightarrow{n \rightarrow \pm \infty} \infty$.

Logo, para algum $p \in \mathbb{N}$, tem-se $H^{-p}(x_1) \in Ad(\Delta)$ e $H^{-p}(\delta) \cap \beta = \emptyset$. Por $H(\mathbb{R}^2 - (\Omega_x \cup \Omega_y)) = \mathbb{R}^2 - (\Omega_x \cup \Omega_y)$ segue que $H^{-p}(\delta) \subseteq \mathbb{R}^2 - (\Omega_x \cup \Omega_y)$.

Assim $H^{-p}(\delta) \cap Fr(M) = \emptyset$; Como $H^{-p}(x_1)$ pertence a M , conclui-se que $H^{-p}(\delta) \subseteq M$. Como $H^{-p}(z) \in M$ segue que $z \in H^p(M)$ o que é suficiente para mostrar que $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} H^n(M) = \mathbb{R}^2$.

É imediato que, se $z \in M$, então $z \in int(H^n(M))$ para algum n . Assim $\{int(H^n(M))\}_{n \in \mathbb{Z}}$ é igual a $\mathbb{R}^2$.

Seja agora K um qualquer compacto. Pelo que foi visto atrás, existe algum m_0 tal que $K \subseteq int(H^m(M))$, $\forall m > m_0$ e, conseqüentemente, $K \cap H^m(\beta) = \emptyset$, $\forall m > m_0$. Analogamente, considerando $N = Ad(\Omega_x) \cup Ad(\Omega_y) \cup Ad(\mathbb{R}^2 - \Delta)$, então existe algum n_0 tal que $K \subseteq int(H^{-n}(N))$, $\forall n > n_0$, e conseqüentemente $K \cap H^{-n}(\beta) = \emptyset$, $\forall n > n_0$. Assim, conclui-se que β é um arco que "foge" de compactos e que tem extremos em Φ_x e Φ_y , logo $X \cap Y \neq \emptyset$, o que é absurdo. $\square$

Terminamos esta secção, observando que não se conhecem exemplos de aplicações livres com um número par (maior que dois) de regiões de divergência. S. A. Andrea conjectura que não existem tais exemplos.

3.4 Caracterização topológica das aplicações livres com uma só região de divergência

Nesta secção vai ser mostrado que, se uma aplicação livre $H : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tiver somente uma região de divergência, então é topologicamente conjugada a uma translação. Note-se que o recíproco é imediato.

Teorema 3.7 *Uma aplicação livre $H : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tem somente uma região de divergência se e somente se for topologicamente conjugada a uma translação.*

Considere-se em primeiro lugar a seguinte:

Proposição 3.8 *Seja $H : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação livre com apenas uma região de divergência. Então, para qualquer compacto $K \subseteq \mathbb{R}^2$, tem-se que $H^n(K) \xrightarrow{n \rightarrow \pm \infty} \emptyset$.*

A Proposição seguinte vai ser usada na demonstração da Proposição 3.8. A demonstração desta proposição pode ser encontrada em [1].

Proposição 3.9 *Dada uma aplicação livre $H : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ e qualquer compacto $K \subseteq \mathbb{R}^2$, então existe um conjunto não limitado e conexo $A \subseteq \mathbb{R}^2$ tal que, $\forall n \in \mathbb{Z}$, tem-se $H^n(K) \cap A = \emptyset$.*

Demonstração:(da Proposição 3.8).

Seja $x \in \mathbb{R}^2$. Como H tem só uma região de divergência existe uma curva δ de extremos x e $H(x)$, tal que $H^n(\delta) \xrightarrow{n \rightarrow \pm\infty} \infty$. Considere-se a classe dos sub-arcs fechados de δ com extremos w e $H(w)$; é claro que o próprio δ faz parte dessa classe. Seja τ um elemento minimal. Tem-se que; τ tem extremos w_0 e $H(w_0)$, $H(\tau) \cap \tau = H(w_0)$ (por minimalidade), e $H^n(\tau) \xrightarrow{n \rightarrow \pm\infty} \infty$. Assim, τ é um arco de translação e pelo Teorema 1.22, é imagem de um mergulho próprio de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^2$. Compondo com um homeomorfismo conveniente, pode-se assumir que $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} H^n(\tau)$ é o eixo dos x 's e que $H((x, 0)) = (x + 1, 0)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Sejam K e K_1 compactos. $K \cup K_1$ é compacto e se $H^n(K \cup K_1) \cap (K \cup K_1) = \emptyset$ para qualquer n tal que $|n| \geq n_0$, então é claro que $H^n(K) \cap K_1 = \emptyset$, desde que $|n| \geq n_0$. Assim, para mostrar que $H^n(K) \xrightarrow{n \rightarrow \pm\infty} \infty$, K compacto, basta mostrar que $H^n(K) \cap K \neq \emptyset$ apenas para um número finito de números naturais n .

Pelo Lema 3.5 os semi planos $y < 0$ e $y > 0$ são ambos invariantes e portanto para mostrar o Teorema basta mostrar que, para qualquer compacto K de $\mathbb{R}^2$, se tem $H^n(K \cap \{y \geq 0\}) \xrightarrow{n \rightarrow \pm\infty} \infty$ e que $H^n(K \cap \{y \leq 0\}) \xrightarrow{n \rightarrow \pm\infty} \infty$. Como os dois caso são análogos restringimo-nos a compactos contidos no semi-plano superior.

Seja então K um qualquer compacto contido no semi-plano $y \geq 0$ e seja D um semi-disco, com centro contido no eixo dos x 's, que contém K . Pelo que foi visto basta provar que $H^n(D) \cap D \neq \emptyset$ apenas para um número finito de números naturais n . Pela Proposição 3.9 existe $A \subseteq \mathbb{R}^2$, conexo e não limitado, tal que $H^n(D) \cap A = \emptyset$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. Como H só tem uma classe de divergência, fixados $y_0 \in A$ e x_0 pertencente ao eixo dos x 's, existe um arco α de extremos x_0 e y_0 tal que $H^n(\alpha) \xrightarrow{n \rightarrow \pm\infty} \infty$. Em particular existe $N_0 \in \mathbb{N}_0$ tal que para $|n| \geq N_0$ se tem $H^n(\alpha) \cap D = \emptyset$; além disso é possível

escolher N_0 tal que $H^{N_0}(\alpha)$ intersecte o eixo dos x 's à direita de D e $H^{-N_0}(\alpha)$ intersecte o eixo dos x 's à esquerda de D . Seja $N_1 \in \mathbb{N}$, $N_1 \geq 2N_0$ tal que $H^{N_1}(D)$ intersecte o eixo dos x 's à direita de w_{N_0} , sendo w_{N_0} o ponto de intersecção de $H^{N_0}(\alpha)$ com este eixo, (ver figura 3.7-A).

Agora, tem-se que $H^N(D) \cap D = \emptyset$, $\forall N \geq N_1$. Com efeito, suponha-se que para algum $N \geq N_1$ se tem $H^N(D) \cap D \neq \emptyset$. Seja γ um arco cujos extremos são C (o centro de D) e $H^N(C)$ e que está totalmente contido em $D \cup H^N(D)$.

Juntando a γ um arco de extremos C e $H^N(C)$ e contido no semi-plano $y < 0$ (com excepção de C e $H^N(C)$) obtemos uma curva de Jordan β . Como $H^{N_0}(A)$ não é limitado, este conjunto está contido na componente conexa não limitada de $\mathbb{R}^2 - \beta$; por construção w_{N_0} pertence à componente conexa limitada de $\mathbb{R}^2 - \beta$. Como $H^{N_0}(A) \cup H^{N_0}(\alpha)$ é conexo, resulta que $(H^{N_0}(A) \cup H^{N_0}(\alpha)) \cap \beta \neq \emptyset$ e portanto $H^{N_0}(\alpha) \cap D \neq \emptyset$ ou $H^{N_0}(\alpha) \cap H^N(D) \neq \emptyset$, ver figura 3.7-B. A primeira hipótese está excluída por escolha de N_0 da segunda hipótese obtemos $H^{N_0-N}(\alpha) \cap D \neq \emptyset$ o que também não é possível já que $N_0 - N \leq -N_0$.

Assim $H^N(D) \cap D = \emptyset$, $\forall N \geq N_1$, como pretendíamos mostrar. $\square$

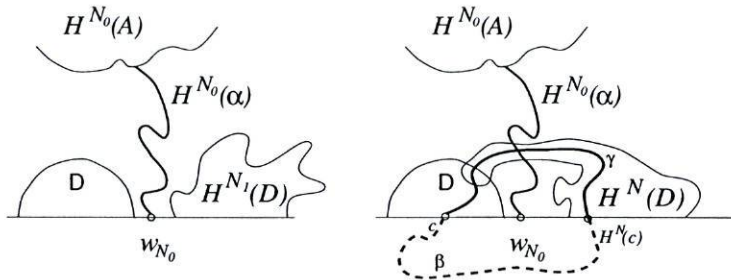


Figura 3.7: A e Figura 3.7: B

Seja $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação livre e considere-se o espaço quociente $\mathbb{R}^2/H$ cujos elementos são as classes $\{H^n(x) : n \in \mathbb{Z}\}$, $x \in \mathbb{R}^2$. Este espaço é designado por **espaço das órbitas**. Seja $P : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2/H$ a projecção canónica; em $\mathbb{R}^2/H$ considera-se a topologia quociente, cujos abertos são exactamente os subconjuntos cuja imagem recíproca por P é um aberto de $\mathbb{R}^2$.

O Lema seguinte será essencial no que se segue.

Lema 3.10 *Seja $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação livre com uma única região de divergência então $\mathbb{R}^2/H$ é homeomorfo a um cilindro (sem bordo).*

Demonstração:

Começemos por observar que $\mathbb{R}^2/H$ é localmente homeomorfo a $\mathbb{R}^2$. Com efeito fixado um $[x] \in \mathbb{R}^2/H$ seja D um disco topológico contendo x no seu interior e tal que $D \cap H(D) = \emptyset$, já que H não tem pontos fixos. Pelo Corolário 1.26 obtemos que $D \cap H^n(D) = \emptyset, \forall n \in \mathbb{Z} - \{0\}$. Agora é claro que $P_{int(D)} : int(D) \rightarrow P(int(D))$ é um homeomorfismo.

Vejamos agora que $\mathbb{R}^2/H$ é um espaço de Hausdorff.

Para $[x], [y] \in \mathbb{R}^2/H$ escolhemos discos topológicos D_x e D_y centrados em x e y respectivamente. Como H tem apenas uma região de divergência, pela Proposição 3.8, conclui-se que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $H^n(D_x) \cap D_y = \emptyset, \forall n \in \mathbb{Z}$ com $|n| \geq n_0$. Assim, e diminuindo D_x e D_y , se necessário, obtemos que $H^n(D_x) \cap D_y = \emptyset, \forall n \in \mathbb{Z}$. É imediato agora que $P(D_x)$ e $P(D_y)$ são vizinhanças disjuntas de $[x]$ e $[y]$ respectivamente.

É claro que $\mathbb{R}^2/H$ é conexo e separável. Assim $\mathbb{R}^2/H$ é uma variedade topológica de dimensão 2, orientável porque H preserva a orientação, sem bordo e tendo $\mathbb{R}^2$ como revestimento universal. Assim, $\pi_1(\mathbb{R}^2/H)$, é isomorfo ao grupo das transformações de revestimento actuando em $\mathbb{R}^2$, isto é, ao grupo gerado por H .

Observe-se que, se $H^n = Id$, para algum $n \in \mathbb{N}$, então H terá um ponto periódico de período n e portanto um ponto fixo, o que não ocorre. Assim, o grupo gerado por H é cíclico infinito e em particular $\mathbb{R}^2/H$ não é compacto. Decorre que $\mathbb{R}^2/H$ é homeomorfo a um cilindro sem bordo (para um Teorema de classificação de variedades topológicas não compactas de dimensão 2, orientáveis e sem bordo refere-se [20]). $\square$

Estamos em condições de provar a seguinte:

Proposição 3.11 (Teorema de Sperner) *Dada uma aplicação livre $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ suponha-se que para qualquer compacto $K \subseteq \mathbb{R}^2$ se tem que $H^n(K) \xrightarrow{n \rightarrow \pm\infty} \emptyset$, então H é topologicamente conjugada a uma translação do plano.*

Demonstração:

Sejam $P : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2/H$ definida como acima e $\Theta : \mathbb{R}_{z,\theta}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2/H$ uma parametrização do cilindro $\mathbb{R}^2/H$ a partir do plano em coordenadas polares $\mathbb{R}_{z,\theta}^2$, de tal modo que $\Theta((z_1, \theta_1)) = \Theta((z_2, \theta_2))$ se $z_1 = z_2$ e $\theta_1 = k + \theta_2$, para algum $k \in \mathbb{Z}$. Como $\mathbb{R}^2$ é simplesmente conexo P é um revestimento universal para $\mathbb{R}^2/H$, sendo a aplicação H o gerador do grupo das transformações de revestimento. Analogamente, o plano $\mathbb{R}_{z,\theta}^2$ e Θ constituem um revestimento universal para $\mathbb{R}^2/H$, sendo a aplicação $T((z, \theta)) = (z, \theta + 1)$ o gerador do grupo das transformações de revestimento. Então por $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}_{z,\theta}^2$ serem ambos espaços de revestimento universal para $\mathbb{R}^2/H$ existem aplicações contínuas $A : \mathbb{R}_{z,\theta}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ e $B : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}_{z,\theta}^2$ tais que $P \circ A = \Theta$ e $\Theta \circ B = P$. Assim, $P \circ (A \circ B) = P$ e $\Theta = \Theta \circ (B \circ A)$, ver figura 3.8.

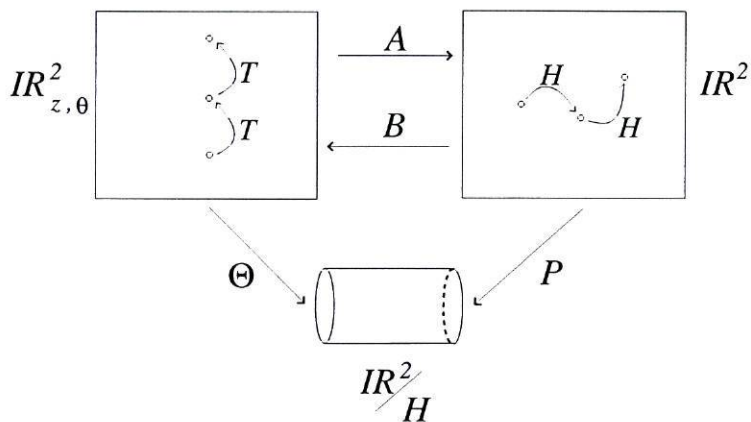


Figura 3.8:

É possível escolher A e B de modo a que $A \circ B$ e $B \circ A$ tenham ambas pelo menos um ponto fixo. Temos então que $A \circ B$ é uma aplicação sobrejectiva de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ tal que $P \circ A \circ B = P$ e que tem um ponto fixo, logo $A \circ B$ tem que ser a identidade. Do mesmo modo se mostra que $B \circ A$ é a identidade, logo A é um homeomorfismo.

Consideremos agora o homomorfismo $\varphi : \{T^n : n \in \mathbb{Z}\} \longrightarrow \{H^n : n \in \mathbb{Z}\}$ do grupo de transformações de revestimento em $\mathbb{R}_{z,\theta}^2$ no grupo de transformações de revestimento em $\mathbb{R}^2$ definido por $\varphi(T^n) = A \circ T^n \circ A^{-1}$, como $\varphi^{-1}(H^n) = A^{-1} \circ H^n \circ A$ é o homomorfismo inverso, obtemos que φ é um isomorfismo de grupos. Como T e T^{-1} são geradores do grupo de transformação de revestimento e geradores são enviados em geradores por

isomorfismos obtemos que $\varphi(T) = A \circ T \circ A^{-1} = H$ ou $\varphi(T^{-1}) = A \circ T^{-1} \circ A^{-1} = H$.

Em qualquer dos casos conclui-se que H é topologicamente conjugada a uma translação do plano. $\square$

Podemos agora terminar a demonstração do Teorema 3.7:

Demonstração:(do Teorema 3.7)

Dada uma aplicação livre $H : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ com somente uma região de divergência, pela Proposição 3.8, arbitrado um qualquer compacto $K \subseteq \mathbb{R}^2$, tem-se que $H^n(K) \xrightarrow{n \rightarrow \pm\infty} \infty$, e pela Proposição 3.11 segue que nestas condições H é topologicamente conjugada a uma translação do plano. $\square$

Observe-se que se $H : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é uma aplicação livre com mais que uma região de divergência, então o saturado de qualquer domínio de translação é sempre diferente de $\mathbb{R}^2$.

Capítulo 4

O Hénon conservativo

4.1 Introdução

Neste capítulo, vamos apresentar um exemplo de uma aplicação livre, denominada por *Hénon conservativo*, que é topologicamente conjugada a uma translação, via um homeomorfismo que vai ser explicitado. De facto, a conjugação aqui construída é somente de classe C^0 , contudo é possível construir conjugações de classe C^∞ .

Apesar de mostrarmos que o Hénon conservativo tem uma só região de divergência, e por conseguinte, usando o Teorema 3.7, ser imediato concluir que é conjugado a uma translação, vamos de facto, como já referido, exhibir essa conjugação. Como os domínios de translação e as rectas invariantes são por vezes difíceis de determinar numa aplicação livre genérica, no caso particular do Hénon conservativo, uma vez determinada a conjugação, esses mesmos objectos serão imagem, pela conjugação, de objectos homólogos que numa translação são obviamente de determinação imediata.

4.2 A dinâmica do Hénon conservativo

Definição 4.1 A aplicação $H_{a,b}$ nos parâmetros $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} H_{a,b} : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longrightarrow (a - x^2 - by, x) \end{aligned}$$

designa-se por aplicação de Hénon. No caso particular de $|b| = 1$ a aplicação conserva a área ($|\det(DH_{a,1})| = 1$) e designa-se por **Hénon conservativo**. Se $b = 1$, então $H_{a,1}$ preserva a orientação, já que $\det(DH_{a,1}) = 1$. Dependendo do parâmetro a , $H_{a,1}$ pode ter ou não pontos fixos. De facto, é imediato verificar que $\text{Fix}(H_{a,1}) = \emptyset$ se e só se $a < -1$.

Seguidamente, fazemos o estudo da aplicação $H_{a,1}$, que por brevidade será designada por H e se nada for dito em contrário considera-se sempre $a < -1$.

É fácil de ver que o Hénon conservativo é um homeomorfismo de $\mathbb{R}^2$ com inversa $H_{a,1}^{-1}((x, y)) = (y, a - y^2 - x)$.

Nota 4.2 Note-se que, sendo $S((x, y)) = (y, x)$, tem-se $S \circ H^{-1} \circ S = H$, pois:

$$S \circ H^{-1} \circ S((x, y)) = S \circ H^{-1}(y, x) = S(x, a - x^2 - y) = (a - x^2 - y, x) = H((x, y))$$

Logo, H é topologicamente conjugada à sua inversa via reflexão na recta $y = x$, $H \circ S = S \circ H^{-1}$. Neste caso a conjugação é igual à sua inversa $S = S^{-1}$. Temos então, que a aplicação H^{-1} pode ser vista como a reflexão relativamente à recta $y = x$ do próprio H .

Vejamos então qual é a dinâmica do Hénon conservativo.

Vamos designar os quadrantes do 1º ao 4º por I , II , III e IV , respectivamente, a sub-região de III , $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y\}$ por D^+ e finalmente $S(D^+) = D^-$.

Lema 4.3 *Valem as seguintes inclusões:*

$$1) H(D^+) \subseteq D^+ \text{ e } H^n(D^+) \subseteq \text{int}(D^+), \forall n \geq 2$$

$$2) H^{-1}(D^-) \subseteq D^- \text{ e } H^{-n}(D^-) \subseteq \text{int}(D^-), \forall n \geq 2$$

Demonstração:

Note-se que 2) decorre de 1) tendo em consideração a nota 4.2 e o facto de $S(D^+) = D^-$.

Vejam os que dado $(x, y) \in D^+$, $H((x, y)) = (a - x^2 - y, x)$ tem ambas as coordenadas negativas e $a - x^2 - y \leq x$, donde se conclui que $(a - x^2 - y, x) \in D^+$.

É claro que a 2ª coordenada, x , é menor ou igual a zero, vejamos também que $a - x^2 - y \leq x$. Note-se então que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $a - x^2 - 2x \leq 0$, logo $a - x^2 - x \leq x$ e como $-y \leq -x$ segue que $a - x^2 - y \leq a - x^2 - x \leq x$ donde se conclui que $a - x^2 - y \leq x$, logo $H((x, y)) \in D^+$ e portanto $H(D^+) \subseteq D^+$.

Finalmente, para vermos que $H^n(D^+) \subseteq \text{int}(D^+)$, $\forall n \geq 2$, notemos em primeiro lugar que o único ponto de D^+ que é enviado em $Fr(D^+)$ é o ponto $(0, 0)$. Como $H^2((0, 0)) = H((a, 0)) = (a - a^2, a) \in \text{int}(D^+)$, concluimos que $H^2(D^+) \subseteq \text{int}(D^+)$ e portanto $H^n(D^+) = H^{n-2}(H^2(D^+)) \subseteq H^{n-2}(\text{int}(D^+)) \subseteq \text{int}(D^+)$, $\forall n \geq 2$. $\square$

Lema 4.4 *Dado um ponto (x, y) de $\mathbb{R}^2$ tem-se:*

- 1) Se (x, y) pertence a I, então $H((x, y))$ pertence a II
- 2) Se (x, y) pertence a II, então $H((x, y))$ pertence a D^+
- 3) Se (x, y) pertence a IV, então $H((x, y))$ pertence a I ou a II
- 4) Se (x, y) pertence a III, então $H((x, y))$ pertence a III ou a IV; se $H^n((x, y))$ pertence a III, $\forall n \in \mathbb{N}_0$, então existe $k \in \mathbb{N}_0$ tal que $H^k((x, y)) \in D^+$.

Demonstração:

1) Se $(x, y) \in I$, então como $H((x, y)) = (a - x^2 - y, x)$, $a - x^2 - y \leq a < 0$ e $x \geq 0$ logo $H((x, y)) \in II$.

2) Se $(x, y) \in II$, então como $H((x, y)) = (a - x^2 - y, x)$, $x \leq 0$ e $a - x^2 - y \leq x$ pois note-se que $\forall x \in \mathbb{R}$, $a - x^2 - 2x \leq 0$ (porque $a < -1$), logo $a - x^2 - x \leq x$ e,

como $-y \leq -x$, segue como já foi visto atrás que $a - x^2 - y \leq a - x^2 - x \leq x$. Logo $H((x, y)) \in D^+$.

3) Se $(x, y) \in IV$, então como $H((x, y)) = (a - x^2 - y, x)$ e $x \geq 0$ é óbvio que $H((x, y))$ pertence a I ou II .

4) Se $(x, y) \in III$ então, como $H((x, y)) = (a - x^2 - y, x)$, ter $H((x, y))$ em III ou em IV é equivalente a $x \leq 0$, o que é óbvio.

Seja agora $(x_0, y_0) \in III$ tal que $H^n((x_0, y_0)) \in III, \forall n \in \mathbb{N}$. Assuma-se que $H^n((x_0, y_0)) \notin D^+, \forall n \in \mathbb{N}$.

Designando $(x_n, y_n) = H^n((x_0, y_0))$ temos:

$0 \geq x_n \geq y_n = x_{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}$. Assim, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sucessão crescente e limitada, logo converge para $a \in \mathbb{R}_0^+$. Como $y_n = x_{n-1}$ decorre que $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$. Assim $H^n((x_0, y_0)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (a, a)$ e portanto (a, a) é ponto fixo de H , o que é absurdo. $\square$

Os Lemas 4.3 e 4.4 permitem-nos concluir que para qualquer $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ existe n_0 (que depende de (x, y)) tal que $H^{-n}((x, y)) \in \text{int}(D^+), \forall n \geq n_0$. Analogamente se conclui que existe n_1 tal que $H^{-n}((x, y)) \in \text{int}(D^-), \forall n \geq n_1$. Resta portanto estudar a dinâmica de H em D^+ (respectivamente a de H^{-1} em D^-). Na figura 4.1 indica-se as imagens por H das quatro regiões.

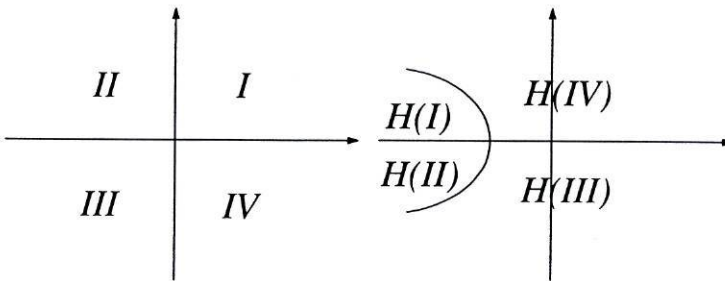


Figura 4.1:

Lema 4.5 *Seja $(x_0, y_0) \in D^+$ e defina-se $(x_n, y_n) = H^n((x_0, y_0))$. Então $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, que depende de (x_0, y_0) , tal que $\forall n \in \mathbb{N}$ com $n \geq n_0$ se tem:*

$$1) x_{n+1} \leq x_n + a$$

$$2) y_{n+1} \leq y_n \text{ e } y_{n+2} \leq y_n + a$$

Demonstração:

Dado $(x_1, y_1) = (a - x_0^2 - y_0, x_0)$ tem-se que $y_1 = x_0 \leq y_0$ e $x_1 = a - x_0^2 - y_0 \leq a - x_0^2 - x_0 \leq x_0$, logo as sucessões $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ são decrescentes.

Note-se que, $\forall (x, y) \in D^+$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $x_{n_0} < -2$, pois por um argumento já apresentado a sua negação implicava a existência de um ponto fixo.

Como para $x < -2$ se verifica que $x_{n+1} = a - x_n^2 - y_n \leq a - x_n^2 - x_n \leq x_n + a, 1)$ está mostrado.

Para mostrarmos 2) é só notar que a primeira desigualdade segue de $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ser decrescente e a segunda de $y_{n+2} = x_{n+1} \leq x_n + a \leq y_n + a$. $\square$

O Lema 4.5 dá-nos a indicação que para haver uma deslocação para "baixo" de pelo menos 1 e para a "esquerda" de pelo menos 2 (já que $a < -1$) são suficientes duas iterações. O que nos dá bastante informação da dinâmica do Hénon conservativo.

Proposição 4.6 *O Hénon conservativo tem uma única região de divergência.*

Demonstração:

Sejam A e B pontos de $\mathbb{R}^2$, γ um segmento compacto de extremos A e B e seja também $K \subseteq \mathbb{R}^2$ um qualquer compacto. É claro que $K \subseteq Q_K$ para algum Q_K , quadrado com centro na origem. Os Lemas 4.3 a 4.5 são suficientes para concluir que $\exists n_k \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > n_k$ tem-se $H^n(\gamma) \cap Q_K = \emptyset$. De facto, fixado um $Z \in \gamma$, existe $n_Z \in \mathbb{N}$ tal que $H^{n_Z}(Z) \notin Q_K$, $H^{n_Z}(Z) \in \text{int}(D^+)$ e a abcissa de $H^{n_Z}(Z)$ é menor que -2 . Logo, $\forall n > n_Z$, $H^n(Z) \notin Q_K$ e por continuidade n_Z serve para uma vizinhança aberta de Z , V_Z , suficientemente pequena. Seja agora $\{V_Z\}_{Z \in \gamma}$ uma cobertura aberta de γ , como γ é compacto $\{V_Z\}_{Z \in \gamma}$ admite uma sub-cobertura finita $\{V_{Z_1}, \dots, V_{Z_s}\}$ e como fizemos atrás a cada Z_i associamos um n_{Z_i} tal que $H^{n_{Z_i}}(V_{Z_i}) \cap Q_K = \emptyset$, $H^{n_{Z_i}}(V_{Z_i}) \subseteq D^+$ e a abcissa de qualquer ponto de $H^{n_{Z_i}}(V_{Z_i})$ é menor que -2 . Agora, é só escolher $n_0 = \max\{n_{Z_1}, \dots, n_{Z_s}\}$ e temos que para $n > n_0$, $H^n(\gamma) \cap K = \emptyset$.

Analogamente se mostra que, $H^{-n}(\gamma) \cap K = \emptyset$, usando a aplicação S em D^- . $\square$

4.3 Construção da conjugação Hénon-Translação

Usando a Proposição 4.6 e o Teorema 3.7 podemos concluir que H é conjugada a uma translação, contudo não nos limitaremos a saber da existência da conjugação mas iremos explicitá-la. Essa conjugação será feita num fechado, o domínio fundamental, e posteriormente estendida a todo o $\mathbb{R}^2$. A escolha natural para o domínio fundamental será $\mathcal{D} \cup \{\lambda, H(\lambda)\}$ onde $\mathcal{D}$ é um domínio de translação para H , e $\{\lambda, H(\lambda)\}$ a fronteira sendo λ a recta $y = x$ e a sua imagem $H(\lambda)$, a parábola $H((x, x)) = (a - x^2 - x, x)$. Designemos por $\mathcal{D}$ esse domínio. Vejamos em primeiro lugar que o saturado de $\mathcal{D}$ é o $\mathbb{R}^2$.

Lema 4.7 $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} H^n(\mathcal{D}) = \mathbb{R}^2$.

Demonstração:

Notemos que é suficiente mostrar que dado um ponto (x, y) com $x \leq y$, existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $H^{-n}((x, y)) \in \mathcal{D}$, pois para a região $x \geq y$ usa-se o facto de $H^{-1} = S \circ H \circ S$. Note-se também que, para $(x, y) \in II - \mathcal{D}$, tem-se $H^{-1}((x, y)) \in \mathcal{D}$.

Resta então o caso em que $(x, y) \in D^+ - \mathcal{D}$. Então $H^{-1}((x, y))$ pertence a II ou a III . Note-se que, se $H^{-1}((x, y))$ pertence a II , ou se existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $H^{-n}((x, y))$ pertence a II , então $H^{-1}((x, y)) \in \mathcal{D}$ ou $H^{-2}((x, y)) \in \mathcal{D}$. Assim, resta analisar o caso em que $(x, y) \in D^+$ e $H^{-n}((x, y))$ pertence a III , $\forall n \in \mathbb{N}$. Suponha-se, por absurdo que $H^{-n}((x, y)) \notin \mathcal{D}$, $\forall n \in \mathbb{N}$; então como $(x, y) \in D^+ - \mathcal{D}$ obtemos que $x < a - y^2 - y$ e portanto $H^{-1}((x, y)) \in D^+$. Obtemos assim uma sucessão em D^+ , $(x_{-n}, y_{-n}) = H^{-n}((x, y))$, $n \in \mathbb{N}$, tal que $x_{-n} \geq x_{-n+1}$ e $y_{-n} \geq y_{-n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Portanto $((x_{-n}, y_{-n}))_{n \in \mathbb{N}}$ converge para (x_0, y_0) que será necessariamente um ponto fixo, o que é absurdo. $\square$

Nota 4.8 É imediato verificar que $\text{int}(\mathcal{D}) \cap H^n(\text{int}(\mathcal{D})) = \emptyset$, $\forall n \in \mathbb{Z} - \{0\}$.

Vamos agora proceder à construção da conjugação topológica, ou seja determinar um homeomorfismo $C : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ que torna o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{H} & \mathbb{R}^2 \\ \downarrow C & & \downarrow C \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{T} & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

Onde $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é a translação $T((x, y)) = (x + 1, y)$.

A ideia é encontrar um homeomorfismo $\tilde{C} : \mathfrak{D} \longrightarrow \mathfrak{D}_c$ tal que $\tilde{C}(\lambda) = \lambda_c$ e $\tilde{C}(H(\lambda)) = T(\lambda_c)$, onde λ_c é a recta $x = 0$ e $\mathfrak{D}_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1\}$. De facto, qualquer homeomorfismo nestas condições serve, contudo como pretendemos explicitar um, vamos considerar o mais natural, ou seja, o homeomorfismo que para cada $x \in \mathbb{R}$ envia o segmento orientado de (x, x) para $H((x, x)) = (a - x^2 - x, x)$ no segmento orientado de $\tilde{C}((x, x))$ para $\tilde{C}(H((x, x))) = \tilde{C}((a - x^2 - x, x))$. Uma vez construído o homeomorfismo nesse domínio fundamental, é só estendê-lo ao $\mathbb{R}^2$ inteiro, ver figura 4.2.

Consideremos então uma parametrização do primeiro segmento:

$$(1 - t)(x, x) + t(a - x^2 - x, x), \quad t \in [0, 1]$$

e pretendemos que seja enviado por $\tilde{C}$ no segundo segmento:

$$(1 - t)(0, x) + t(1, x), \quad t \in [0, 1]$$

ou seja:

$$\tilde{C}((1 - t)x + t(a - x^2 - x), x) = (t, x)$$

Seja agora $(x, y) \in \text{int}(\mathfrak{D})$, este ponto pertence ao segmento de extremos (y, y) e $(a - y^2 - y, y)$, logo existe um e um só $t \in [0, 1]$ tal que:

$$(x, y) = (1 - t)(y, y) + t(a - y^2 - y, y)$$

donde:

$$x = (1 - t)y + t(a - y^2 - y) \Leftrightarrow x - y = t(a - y^2 - 2y) \Leftrightarrow t = \frac{x - y}{a - y^2 - 2y}$$

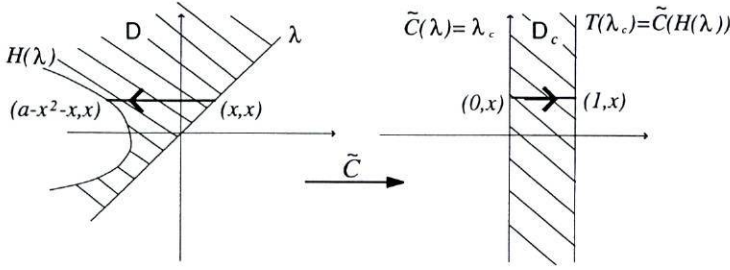


Figura 4.2:

e como $\tilde{C}((y, y)) = (0, y)$ e $\tilde{C}((a - y^2 - y, y)) = (1, y)$ segue que:

$$\tilde{C}((x, y)) = (1 - t)(0, y) + t(1, y) = (t, y) = \left(\frac{x - y}{a - y^2 - 2y}, y\right)$$

Logo o homeomorfismo $\tilde{C}$ é definido por:

$$\begin{aligned} \tilde{C}: \quad \mathfrak{D} &\longrightarrow \mathfrak{D}_c \\ (x, y) &\longrightarrow \left(\frac{x - y}{a - y^2 - 2y}, y\right) \end{aligned}$$

Note-se que, por construção, se $X \in \lambda$ então $\tilde{C} \circ H(X) = T \circ \tilde{C}(X)$

Para estender $\tilde{C}$ a $\mathbb{R}^2$ comecemos por observar que, $\forall X \in \mathbb{R}^2$, $\exists n_X \in \mathbb{Z}$, tal que $H^{n_X}(X) \in \mathfrak{D}$. Este facto é consequência directa do Lema 4.7. Observe-se que, se $X \in \text{int}(H^{n_X}(\mathfrak{D}))$, para algum $n \in \mathbb{Z}$, então n_X é único. Se $X \in \text{Fr}(H^{n_X}(\mathfrak{D}))$, para algum $n \in \mathbb{Z}$, então existe n_X tal que $H^{n_X}(X) \in \lambda$ e $H^{n_X+1}(X) \in H(\lambda)$.

Defina-se:

$$\begin{aligned} C: \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ X &\longrightarrow T^{-n_X} \circ \tilde{C} \circ H^{n_X}(X) \end{aligned}$$

Note-se que, se $H^{n_X}(X) \in \lambda$ então:

$$\begin{aligned} T^{-n_X-1} \circ \tilde{C} \circ H^{n_X+1}(X) &= T^{-n_X-1} \circ \tilde{C} \circ H(H^{n_X}(X)) = \\ &= T^{-n_X-1} \circ T \circ \tilde{C}(H^{n_X}(X)) = \\ &= T^{-n_X} \circ \tilde{C}(H^{n_X}(X)), \end{aligned}$$

o que mostra que C está bem definido.

Da construção segue imediatamente que:

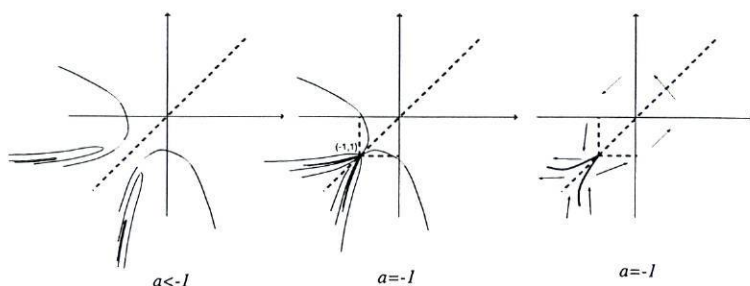


Figura 4.3:

Proposição 4.9 A aplicação $C : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T^{-n_x} \circ \tilde{C} \circ H^{n_x}(X)$ é um homeomorfismo e $C \circ H = T \circ C$.

No caso do Hénon conservativo com $a = -1$, a aplicação deixa de ser livre, pois aparece um ponto fixo, não sendo portanto conjugada a uma translação. Apesar disso a dinâmica desta nova aplicação é bastante semelhante à estudada neste Capítulo, ver figura 4.3.

Capítulo 5

Medidas invariantes para aplicações livres

5.1 Introdução

No Capítulo anterior, foi estudada uma aplicação que como vimos era conservativa, ou seja a área era preservada por H . Contudo, esta situação é particular e geralmente as aplicações livres não possuem esta propriedade.

Podemos então pensar na possibilidade de, dada uma aplicação livre $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ genérica, existir uma medida μ definida nos borelianos de $\mathbb{R}^2$, que possua algumas propriedades razoáveis e tal que μ seja H -invariante, isto é, $\mu(H^{-1}(A)) = \mu(A)$. Entenda-se por propriedades razoáveis μ ser em certo sentido semelhante à medida de Lebesgue λ , ou seja:

- A medida de conjuntos limitados ser finita;
- A medida em abertos ser positiva;
- Pontos terem medida nula.

Veremos neste Capítulo, que se considerarmos uma aplicação livre, H , é possível construir uma medida μ com boas propriedades e H -invariante e que, além disso, a medida de Lebesgue é absolutamente contínua relativamente a μ , $\lambda \ll \mu$ (i.e. $\mu(X) =$

$0 \implies \lambda(X) = 0$). Por fim, será apresentado um exemplo que mostra que nem sempre se verifica $\mu \ll \lambda$.

5.2 Construção de uma medida H -invariante

Definição 5.1 *Uma medida μ completa definida na σ -álgebra dos Borelianos, diz-se **razoável** se verifica:*

1. $\mu(X) < \infty, \forall X \subseteq \mathbb{R}^2$, limitado;
2. $\mu(U) > 0, \forall U \subseteq \mathbb{R}^2$, aberto e não vazio;
3. Se $X \subseteq \mathbb{R}^2$ é tal que $\lambda(F(X)) = 0$, para qualquer homeomorfismo F de $\mathbb{R}^2$, então $\mu(X) = 0$;
4. $\lambda \ll \mu$.

Vejamos seguidamente um Lema que será essencial para a construção da medida e que usa na sua demonstração o Corolário 1.26.

Lema 5.2 *Seja $H : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação livre e U um aberto tal que $H(U) \cap U = \emptyset$ e $\lambda(U) \leq 1$. Então a medida μ definida por $\mu(X) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \lambda(H^i(X) \cap U)$ satisfaz as seguintes propriedades:*

1. É σ -aditiva;
2. $\mu(X) < \infty$, para todo o $X \subseteq \mathbb{R}^2$ μ -mensurável e limitado;
3. Se $X \subseteq \mathbb{R}^2$ é λ -mensurável e $\lambda(F(X)) = 0$, para qualquer homeomorfismo F de $\mathbb{R}^2$, então $\mu(X) = 0$;
4. $\forall V \subseteq \mathbb{R}^2$, tal que $H(V) \cap V = \emptyset$ e V é aberto, tem-se $\mu(V) \leq 1$;
5. $\lambda(W) = \mu(W)$, para qualquer aberto W de U ;
6. $\mu(H^{-1}(X)) = \mu(X), \forall X \subseteq \mathbb{R}^2$, μ -mensurável.

Demonstração:

Comecemos por observar que, de acordo com a definição de μ , um conjunto X é μ -mensurável se $H^i(X) \cap U$ for λ -mensurável, $\forall i \in \mathbb{Z}$, e que $\mu(X)$ é infinito se a série diverge.

1. Sejam X_j , $j \in \mathbb{N}$, μ -mensuráveis e disjuntos dois a dois, então:

$$\begin{aligned}\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} X_j\right) &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \lambda\left(H^i\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} X_j\right) \cap U\right) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \lambda\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} H^i(X_j) \cap U\right) = \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(H^i(X_j) \cap U) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(X_j)\end{aligned}$$

2. Seja $X \subseteq \mathbb{R}^2$, limitado e suponha-se que $\mu(X) = \infty$. Dividindo sucessivamente X em subconjuntos de diâmetro a tender para zero e com μ -medida infinita, obtemos um ponto $x \in U$ tal que $\mu(U) = \infty$, $\forall U$ aberto contendo x .

A existência de tal x é incompatível com o facto de existir D aberto contendo x tal que, $H(D) \cap D = \emptyset$, o que acontece por H ser livre.

3.

$$\mu(X) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \lambda(H^i(X) \cap U) \leq \sum_{i=-\infty}^{\infty} \lambda(H^i(X)) = 0$$

É imediato que, $\lambda(H^i(X)) = 0$, $\forall i \in \mathbb{Z}$, pois H^i é homeomorfismo, $\forall i \in \mathbb{Z}$.

4. Consideremos V aberto tal que $H(V) \cap V = \emptyset$, tem-se:

$$\mu(V) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \lambda(H^i(V) \cap U) \leq \lambda(U) \leq 1$$

A desigualdade verifica-se, pois se considerarmos V_i como sendo as intersecções de $H^i(V)$ com U , pelo Corolário 1.26, segue que $V_i \cap V_j = \emptyset$, porque $H^i(V) \cap H^j(V) = \emptyset$ para $i \neq j$.

5. Basta notar que $H^n(U) \cap U = \emptyset$, $\forall n \in \mathbb{Z} - \{0\}$, logo:

$$\mu(W) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \lambda(H^i(W) \cap U) = \lambda(W \cap U) = \lambda(W)$$

6.

$$\mu(H^{-1}(X)) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \lambda(H^i(H^{-1}(X)) \cap U) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \lambda(H^{i-1}(X) \cap U) = \mu(X)$$

□

Teorema 5.3 *Seja $H : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação livre, então existe uma medida μ razoável e H -invariante.*

Demonstração:

Como H não tem pontos fixos, dado um ponto qualquer x , existe U_x uma vizinhança aberta de x , tal que $H^k(U_x) \cap U_x = \emptyset$, $\forall k \in \mathbb{Z} - \{0\}$. É claro que U_x pode ser escolhido tal que, $\lambda(U_x) < 1$. Seja $\mathfrak{U} = \{U_1, U_2, \dots\}$ uma cobertura numerável de $\mathbb{R}^2$ formada por tais vizinhanças. Agora, para cada U_n , vamos definir uma medida associada a U_n de acordo com o Lema 5.2, ou seja:

$$\mu_n(X) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \lambda(H^i(X) \cap U_n)$$

Estamos em condições de definir uma medida razoável que é H -invariante.

$$\mu(X) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \mu_i(X)$$

Vejamos que $\mu(X)$ é razoável:

1. Se V é um aberto tal que $H^n(V) \cap V = \emptyset$, $\forall n \in \mathbb{Z} - \{0\}$, então da definição de μ e de 4 do Lema 5.2 decorre que $\mu(V) \leq \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} = 1$. Deste facto, e de modo análogo ao que foi feito para provar 2 do Lema 5.2, conclui-se que μ é finita em conjuntos limitados.
2. Segue directamente da definição de μ e de 5 do Lema 5.2.
- 3.

$$\begin{aligned} \mu(X) &= \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \mu_i(X) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} \lambda(H^j(X) \cap U_i) \right) \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} \lambda(H^j(X)) \right) = 0, \text{ já que } \lambda(H^j(X)) = \emptyset, \forall j \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

4. Vejamos então que $\lambda \ll \mu$.

Seja $X \subseteq \mathbb{R}^2$ tal que $\mu(X) = 0$ então:

$$\begin{aligned} \mu(X) = 0 &\iff \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \mu_i(X) = 0 \iff \mu_i(X) = 0, \forall i \in \mathbb{N} \iff \\ &\iff \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} \lambda(H^j(X) \cap U_i) \right) = 0, \forall i \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Logo, obtemos $\lambda(H^j(X) \cap U_i) = 0, \forall j \in \mathbb{Z}$ e $\forall i \in \mathbb{N}$. Em particular $\lambda(X \cap U_i) = 0, \forall i \in \mathbb{N}$ o que implica que $\lambda(X) = 0$, já que $\{U_1, U_2, \dots\}$ é uma cobertura de $\mathbb{R}^2$.

Finalmente, como $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \mu_n$ e μ_n é H -invariante, $\forall n \in \mathbb{N}$, decorre que μ é H -invariante. $\square$

Consideremos agora o seguinte:

Lema 5.4 *Seja $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um homeomorfismo tal que $\exists a, b \in \mathbb{R}^+$ com $a < b$ tais que:*

$$a < \frac{|H(x) - H(y)|}{|x - y|} < b, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^2$$

Se $\lambda(X) = 0$, então $\lambda(H^i(X)) = 0, \forall i \in \mathbb{Z}$.

Demonstração:

Começemos por observar que $\text{diam} H(B(x_0; r)) \leq 2br$ e que $\text{diam} H^{-1}(B(x_0; r)) \leq 2a^{-1}r$, onde $B(x_0; r)$ denota a bola de centro x_0 e raio r . Segue que $\lambda(H(B(x_0; r))) \leq 4b^2 \cdot \lambda(B(x_0; r))$ e $\lambda(H^{-1}(B(x_0; r))) \leq 4a^{-2} \lambda(B(x_0; r))$; destas desigualdades segue facilmente o resultado. $\square$

Nas condições do Lema 5.4, ou seja quando a variação da aplicação está controlada, decorre imediatamente que a medida construída no Teorema 5.3 é absolutamente contínua relativamente à medida de Lebesgue.

Vamos ver, seguidamente, um exemplo que mostra que nem sempre tal medida é absolutamente contínua relativamente à medida de Lebesgue.

Exemplo 5.5 Sejam $\mathfrak{C} = \{C_1, C_2, C_3, \dots\}$ conjuntos de Cantor em $[0, 1]$, tais que $C_n \subseteq C_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\{0, 1\} \subseteq C_1$ e $\lambda(C_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

Pretendemos definir uma aplicação livre $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Definimos em primeiro lugar h em $[0, 1]$, de tal modo que h preserva a orientação, $h([0, 1]) = [1, 2]$ e $h(C_1) = D_1$ onde D_1 é um conjunto de Cantor com medida de Lebesgue nula.

Definimos agora h em $[1, 2]$, de tal modo que $h([1, 2]) = [2, 3]$ e para isso considera-se uma função $g_2 : [0, 1] \rightarrow [2, 3]$ tal que $g_2(C_2) = D_2$ onde D_2 é um conjunto de Cantor e $\lambda(D_2) = 0$. Agora definimos $h|_{[1, 2]} = g_2 \circ h^{-1}|_{[1, 2]}$.

Para o intervalo $[2, 3]$, h será definida à custa da função $g_3 : [0, 1] \rightarrow [3, 4]$ tal que $g_3(C_3) = D_3$ onde D_3 é um conjunto de Cantor e $\lambda(D_3) = 0$. Agora definimos $h|_{[2, 3]} = g_3 \circ h^{-2}|_{[2, 3]}$.

Recursivamente, para o intervalo $[n, n+1]$, h será definida à custa da função h restrita aos n intervalos unitários anteriores e da função $g_{n+1} : [0, 1] \rightarrow [n+1, n+2]$ tal que $g_{n+1}(C_{n+1}) = D_{n+1}$ onde D_{n+1} é um conjunto de Cantor e $\lambda(D_{n+1}) = 0$. Finalmente definimos $h|_{[n, n+1]} = g_{n+1} \circ h^{-n}|_{[n, n+1]}$.

Fica assim definida h para $x \geq 0$, para $x \leq 0$ consideramos $h(x) = x + 1$.

Vejamos que a única medida σ -aditiva que é h -invariante e absolutamente contínua relativamente à medida de Lebesgue é a medida nula.

Notemos que se μ é h -invariante então, $\forall n \in \mathbb{N}$, tem-se:

$$\begin{aligned} \mu(D_n) &= \mu(h^{-n}(D_n)) = \mu(h^{-n+1} \circ h^{-1}(D_n)) = \mu(h^{-n+1} \circ (g_n \circ h^{-n+1})^{-1}(D_n)) = \\ &= \mu(g_n^{-1}(D_n)) = \mu(C_n) \end{aligned}$$

Por construção, tem-se que $\lambda(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n) = 0$ e portanto, se $\mu \ll \lambda$ tem-se que, $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n) = 0$, o que, pela observação inicial implica que $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n) = 0$. Decorre que $\mu([0, 1]) = 0$ (já que $\lambda(C_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$) e, como $h^{-n}([n, n+1]) = [0, 1]$, decorre que μ é a medida nula.

Finalmente, para obter uma aplicação livre no plano, consideramos:

$$\begin{aligned} H : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longrightarrow (h(x), y) \end{aligned}$$

Bibliografia

- [1] S. Andrea, "The Plane is not compactly generated by a Free Mapping", Transactions of the American Mathematical Society, Vol-151, 481-498, 1970.
- [2] S. Andrea, "On Homeomorphisms on the Plane which have no Fixed Points", Abh. Math. Semin. Univ. Hamb. 30, p.61-74, 1967.
- [3] A. Fathi, "An orbit closing proof of Brouwer's Lemma on Translation Arcs", L'Enseignement Mathématique, t-33, p.315-322, 1987.
- [4] J. Franks, "A new proof of the Brouwer plane translation theorem", Ergodic Theory and Dynamical Systems, 12, p.217-226, 1992.
- [5] L. Guillon, "Théorème de translation plane de Brouwer et généralisations du théorème de Poincaré-Birkoff", Topology, Vol-22, n°2, p.331-351, 1994.
- [6] M. Spivak "Calculus on Manifolds", W.A. Benjamin, 1965.
- [7] R. Abraham, J. Marsden, T. Ratiu, "Manifolds, Tensor analysis and Applications", Addison-Wesley Publishing Company inc., 1983.
- [8] S. Massey, "Algebraic Topology, an introduction", Harcourt Brace, Jovanovich, New York 1967.
- [9] J. Munkres, "Topology, a first course", Prentice-Hall Inc. Englewood Cliffs, New Jersey 1975.
- [10] E. Lima, "Curso de Análise, vol 2", IMPA Projecto Euclides, 1989.

- [11] L. Brouwer, "Continuous one-one transformations of surfaces in themselves" 02/1909 p.195-206. Collected works.
- [12] L. Brouwer, "Continuous one-one transformations of surfaces in themselves- 2nd communication", 06/1909 p.207-220. Collected works.
- [13] L. Brouwer, "Continuous one-one transformations of surfaces in themselves- 3rd communication", 12/1910 p.221-232. Collected works.
- [14] L. Brouwer, "Continuous one-one transformations of surfaces in themselves- 4th communication", 05/1911 p.233-243. Collected works.
- [15] L. Brouwer, "Beweis des ebenen Translationssatzes", Mathematische Annalen, 72, p.37-54.1912.
- [16] L. Brouwer, "Remark on the plane translation theorem", communicated in the meeting of december 28/1918. Collected works.
- [17] L. Brouwer, "Über einein dentige stetige transformationen von flachen in sich" 08/1909, p. 244-249. Collected works.
- [18] E. Slaminka, "A Brouwer Translation Theorem for Free Homeomorphisms", Transactions of the American Mathematical Society, Vol-306, n^o1, p. 277-291, 1988..
- [19] E. Slaminka and S. Baldwin, "On measure preserved by Brouwer homeomorphisms", Topology Proceedings, vol-14, n^o1, p.1-6, 1989.
- [20] I. Richards, "On the classification of non compact surfaces", Transactions of the American Mathematical Society, 106, p.259-269, 1963.
- [21] M. Brown and J. Kister, "Invariance of complementary domains of a fixed point set", Proceedings of the American Mathematical Society, 91, p.503-504, 1984.
- [22] W. Scherrer, "Transalationen uber einfach zusammenhangende Gebiete", Viertelsschr. Naturf. Ges. Zurich, 70 p.77-84, 1925.

- [23] Kérékjártó, "The plane translation theorem of Brouwer and the last geometric theorem of Poincaré", *Acta Sci. Math. Szeged*, 4, p.86-102, 1928-9.
- [24] I. Teresaka, "Ein Beweis des Brouwerschen ebenen translationssatzes", *Japan Journal of Math.*, 7, p.61-69, 1930.
- [25] E. Sperner, "Über die fixpunktfreien abbildungen der ebene", *Hamburger Math. Einzelsch*, 14, p.1-47, 1933.