Bernardino Carneiro de Andrade

A evolução histórica da resolução das equações do 2º grau

Departamento de Matemática-Pura da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

Fevereiro de 2000

Bernardino Carneiro de Andrade

A evolução histórica da resolução das equações do 2º grau

Departamento de Matemática Pura da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

Fevereiro de 2000

Bernardino Carneiro de Andrade

A evolução histórica da resolução das equações do 2º grau

Tese submetida à Faculdade de Ciências da Universidade do Porto para obtenção do grau de Mestre em Matemática – Fundamentos e Aplicações

Departamento de Matemática Pura da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

Fevereiro de 2000

À minha mulher, Raquel,

a quem eu muito amo.

AGRADECIMENTOS

Queria agradecer à minha mulher, a Quel, pelo incentivo que me deu desde o primeiro dia, pela paciência e companheirismo que revelou ter, principalmente nos momentos mais difíceis destes dois anos, bem como pelas ajudas preciosas que me deu ao nível de traduções de alguns textos, de correcções sintácticas e de sugestões relativas à estrutura do trabalho.

Ao Professor Carlos Sá, pela amizade e disponibilidade que sempre demonstrou, pelas ajudas na pesquisa de material bibliográfico, pelas boas sugestões e conselhos que me deu, e pelo rigor científico que lhe é característico e que em muito veio enriquecer este trabalho.

Aos meus pais e amigos, pelo incentivo e apoio.

À menina Helena da Biblioteca de Matemática Pura da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, pela ajuda e orientação na procura do material.

E a todos aqueles que, de algum modo, contribuíram para que a realização deste trabalho fosse possível.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

É meu objectivo, com esta dissertação, fazer uma apresentação histórica da evolução do modo de interpretar, resolver e demonstrar a validade das resoluções de problemas geométricos, aritméticos ou algébricos que possam ser interpretados ou reduzidos a uma equação quadrática. Associada à resolução das equações do 2º grau estão duas perspectivas diferentes: uma de ordem geométrica e outra de ordem aritmética. Iremos ver como estas duas vertentes se relacionaram desde as primeiras civilizações que deixaram trabalhos escritos neste âmbito até à matemática moderna do séc. XVIII.

Seguirei de perto, e sempre que me seja possível, as traduções das obras originais dos autores. É evidente que a interpretação dada aos textos será pessoal e consequentemente não deverá ser tida em conta sem uma análise dos textos originais.

Este trabalho está dividido em 4 capítulos, segundo uma ordem cronológica, retractando cada um deles um marco histórico e inovador no âmbito da resolução de tais equações.

O 1º capítulo deste trabalho é dedicado à abordagem feita pelas civilizações Egípcia e Mesopotâmica, uma vez que o nosso conhecimento das matemáticas pré-Helenísticas está quase exclusivamente dedicado ao material escrito por estas civilizações. Tanto no Egipto, como na Mesopotâmia os problemas resolvidos surgiam das necessidades práticas do quotidiano, na maioria dos casos relacionados com a medição. Desta forma eram consideradas apenas as soluções positivas dos problemas.

Habitualmente os Egípcios resolviam equações lineares simples e só em raros casos resolviam equações quadráticas, sendo estas associadas à resolução de triângulos rectângulos do tipo (3, 4, 5). Desta forma, era dada uma resolução aritmética de problemas puramente geométricos.

Enquanto isso, os Babilónios dessa época estavam na posse completa da técnica de manipulação das equações quadráticas, apresentando uma resolução de índole algébrica, com algoritmos muito semelhantes àqueles que hoje utilizamos. No entanto, na resolução dos problemas não se encontra sequer uma só instância daquilo a que chamamos "demonstração"; no lugar do argumento aparece somente a prescrição de regras.

Vamos no 2º capítulo ver a forma como a civilização Grega abordou as equações do 2º grau, numa atmosfera de racionalismo que colocava não só a questão *como*, mas também a questão *porquê*. Podemos distinguir duas épocas diferentes: a via de inspiração geométrica com Euclides (séc. III a.C.) e a via de inspiração aritmética com Diofanto (séc. III d.C.).

Em Euclides, os problemas do 2° grau eram de natureza geométrica, resolvidos geometricamente e acompanhados sempre com uma demonstração também ela geométrica. Desta forma, o raciocínio algébrico era em Euclides totalmente expresso de uma forma geométrica.

Já em Diofanto, os problemas considerados eram de natureza aritmética, sendo a resolução dada de índole algébrica. Em Diofanto encontramos, ao que se pensa, a primeira utilização sistemática de símbolos algébricos.

A fusão das duas vias atrás referidas deu-se na época seguinte, retratada nesta dissertação no 3° capítulo, que é dedicado à civilização Árabe. Os matemáticos Árabes, influenciados pela habilidade algébrica dos Babilónios e pelo rigor científico dos Gregos, foram os primeiros a sistematizar a resolução das equações do 2° grau, resolvendo os problemas por um processo algébrico e apresentando uma demonstração geométrica. Como ainda não eram aceites as soluções e os coeficientes negativos, havia a necessidade de dividir as equações do 2° grau em vários tipos e, consequentemente, continuavam a existir diferentes algoritmos de resolução.

Há a destacar o proeminente matemático Al Khowarizmi, que conseguiu com clareza e simplicidade resolver tais problemas apresentando demonstrações geométricas originais relativamente a Euclides.

Abu Kamil, outro matemático árabe também merecedor de destaque, utilizava, nas demonstrações apresentadas para a resolução dos mesmos tipos de equações, proposições dos *Elementos* de Euclides, tornando assim as demonstrações mais rápidas. Uma outra grande inovação deste matemático consistiu na introdução de um novo método de resolução das equações quadráticas, que permitia obter directamente o valor do quadrado. Nas demonstrações apresentadas para este método, Abu Kamil aceitava que um segmento de recta pudesse representar um quadrado, pondo assim de lado a aritmetização dos segmentos. No entanto, este progresso não foi aceite pela restante comunidade matemática e por várias décadas foi ignorado.

É de salientar que tanto Al Khowarizmi como Abu Kamil apresentavam os algoritmos e as respectivas demonstrações recorrendo a casos particulares. Foi com o árabe Al Khayyam que assistimos pela primeira vez à formulação do algoritmo resolutivo para o caso geral.

Os progressos que se fizeram sentir relativamente à resolução das equações quadráticas no período que se seguiu foram sobretudo referentes à notação. Do árabe Al

Qalasadi ao Europeu Girard, passando por muitos outros matemáticos, assistiu-se à evolução, embora lenta, da resolução dos problemas na forma sincopada.

Finalmente no 4º capítulo fazemos referência a alguns matemáticos Europeus que deram contributos nesta área nomeadamente Girard que aceitou já as soluções negativas e o carismático Descartes que, com a sua capacidade inventiva característica de mentes geniais, introduziu a notação que é usada nos dias de hoje. Descartes destaca-se também pelo facto das demonstrações geométricas apresentadas para os problemas algébricos que se propunha resolver serem originais em relação ao modo habitual de resolução característico do seu tempo.

Por fim, refiro-mo a MacLaurin, um matemático Britânico que apresentou no séc. XVIII a resolução das equações do 2º grau duma forma geral e cuja demonstração é a base daquela que é ensinada hoje em dia aos alunos do secundário.

1. CIVILIZAÇÕES PRÉ-HELENÍSTICAS

A matemática das civilizações anteriores à civilização Grega era de índole prática e ligada às necessidades do quotidiano (cálculo do calendário, administração das colheitas, organização das obras públicas, cobrança de impostos, pequeno comércio, etc.).

Segundo Eves ([22] pág. 30) a natureza estática da estrutura social e a vincada separação de certas áreas, aliadas a deficientes meios de comunicação, não permitiam que os conhecimentos se divulgassem. A acrescentar a isto, muito do material deixado por estas civilizações foi destruído, ora por guerras, inundações e catástrofes, ora por puros actos de vandalismo (conta-se, por exemplo, que um déspota chinês mandou destruir todos os livros de estudo) ou simplesmente por não ter resistido ao desgaste do tempo. Quando se tentou reescrever as obras perdidas houve necessidade de o fazer de memória, o que torna impreciso o conhecimento da versão original. Todos os aspectos referidos fazem com que seja difícil datar com precisão as descobertas destas civilizações.

Tanto os Chineses como os Indianos utilizavam um material muito deteriorável como a casca de árvore e o bambu. A partir do séc. I a.C. os Chineses começaram a utilizar o papel, mas mesmo assim poucos são os documentos desta civilização, anteriores ao séc. VII, que se conhecem. Já os Babilónios escreviam em placas de barro e coziam-nas, o que as tornava quase indestrutíveis. Os Egípcios utilizavam o papiro e o tempo seco da região fez com que alguns resistissem até aos nossos dias. Desta forma, a análise das matemáticas dos séculos pré-Helenísticos será dedicada às civilizações Egípcia e Mesopotâmica.

Convém, no entanto, salientar que o nosso conhecimento actual sobre estes povos depende dos documentos destas civilizações que sobreviveram até aos nossos dias, que foram descobertos e cujo texto foi decifrado. Por exemplo, até há muito pouco tempo pensava-se que a civilização mais rica ao nível de conhecimentos era a Egípcia, pois tinha-se em 1858 descoberto o chamado Papiro de Rhind, que embora tivesse sido escrito por volta de 1650 a.C., continha material ainda mais antigo. No entanto, à algumas décadas atrás, com as descobertas de O. Neugebauer e F. Thureau Dangin (que decifraram um grande número de placas de argila escritas pela civilização Mesopotâmica), descobriu-se que o desenvolvimento da civilização Mesopotâmica supera o da civilização Egípcia. Quem sabe se dentro de alguns anos ou décadas não encontraremos material destas ou de outras civilizações que demonstre conhecimentos mais evoluídos?

1.1 Civilização Egípcia

Uma grande parte dos conhecimentos matemáticos da civilização Egípcia chegaram até nós através de alguns raros papiros que, de algum modo, resistiram ao desgaste do tempo por mais de três milénios e meio. Referimo-nos ao Papiro de Rhind (escrito por volta de 1650 a.C.), ao Papiro de Moscovo (escrito por volta de 1850 a.C.), ao Papiro de Kahun e ao de Berlim, preciosas fontes de informação acerca da matemática egípcia. Segundo Boyer ([6] pág. 16), quase todo o conhecimento revelado nos papiros hoje conhecidos era de ordem prática e os elementos principais das questões eram cálculos. Mesmo quando apareciam elementos teóricos, o objectivo era facilitar a técnica e não a compreensão. Muitos destes cálculos surgiam como já foi referido, da necessidade de resolver problemas da vida quotidiana, nomeadamente no que diz respeito à actividade económica crescente na região, e por outro lado surgiam também associados ao ensino, ora como exercícios, ora como enigmas e recreações matemáticas. De entre os problemas apresentados nestes papiros, a maior parte dos que hoje se classificariam como algébricos, reduziam-se a equações do 1º grau.

Rolo de couro dos matemáticos egípcios tirado de *Histoire des mathémathiques – vol I* de Jean Paul Collette

Para resolver este tipo de problemas os Egípcios utilizavam um método (que hoje se designa por método de falsa posição ou falsa suposição) que consiste em atribuir à incógnita um valor numérico reconhecido à partida como falso. Substituía-se a incógnita por esse valor e fazia-se os respectivos cálculos. Para encontrar a solução do problema bastava multiplicar o valor atribuído inicialmente à incógnita pelo quociente entre o termo independente da equação que traduz o problema e o valor que se obteve ao substituir a incógnita pelo valor inicialmente suposto.

Saliente-se porém que, segundo Collete ([12] pág. 40), nem todos os problemas que aparecem nos papiros egípcios se traduzem em equações lineares. Nos papiros de Kahun e de Berlim aparecem alguns problemas que se reduzem a equações quadráticas simples ou, mais especificamente, a um sistema de 2 equações a 2 incógnitas, em que uma das equações é linear e a outra é quadrática. O método usado para resolver este tipo de problemas é também o da falsa posição, embora com as devidas adaptações: à semelhança do que acontecia para as equações lineares; também neste caso são atribuídos valores numéricos específicos às incógnitas que, embora reconhecidos como falsos, satisfazem a equação linear do problema. Substituindo esses valores na outra equação e fazendo os respectivos cálculos pode-se facilmente encontrar a solução; uma vez que se trata de uma equação quadrática, em vez de se multiplicar os valores supostos inicialmente pelo quociente entre o termo independente da equação quadrática e o valor que se obteve, multiplica-se pela raiz quadrada desse quociente. Senão, vejamos o seguinte exemplo tirado do papiro de Berlim:

«Divide 100 em dois quadrados, tal que o lado de um é $3/4$ do lado do outro. Fazes um triângulo em que um lado é 1 e o outro é $3/4$. O quadrado de $3/4$ é $9/16$; os quadrados somados fazem $25/16$; a raiz é $5/4$. A raiz de 100 é 10, dividamos 10 por $5/4$ que dá 8. Os $3/4$ de 8 são 6. As soluções são 6 e 8.» [1] (Cassinet [9] pág.4)

Em linguagem e simbologia actual, a analise da resolução do problema é a seguinte:

O problema reduz-se ao sistema $\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ y = \dfrac{3}{4}x \end{cases}$.

Como já foi referido, o autor do texto para resolver este problema, usou o método da falsa posição. Começou por supor que os lados do triângulo rectângulo mediam 1 e ¾ (isto é, que o valor de x e de y era 1 e ¾ respectivamente). Deste modo, a equação linear do sistema era satisfeita. Ao substituir estes valores na equação quadrática obteve $1^2 + \left(3/4\right)^2 = 25/16$.

Em seguida, o autor calculou a raiz quadrada do valor obtido e do termo independente da equação quadrática: $\sqrt{25/16} = 5/4$ *e* $\sqrt{100} = 10$. *Para terminar, calculou o quociente entre estes dois valores* $\dfrac{10}{5/4} = 8$. *Para obter as soluções finais, bastou multiplicar por 8 os valores supostos inicialmente, isto é* $x = 8 \times 1 = 8$ *e* $y = 8 \times 3/4 = 6$.

[1] Segundo Cassinet ([9] pág. 5), este problema é de natureza geométrica. O autor ao começar por: "fazes um triângulo", está a considerar que o problema consiste em resolver um triângulo rectângulo do tipo (3; 4; 5), cuja hipotenusa é conhecida ($\sqrt{100}$), e cujas incógnitas são os catetos desse triângulo.

A validade deste raciocínio deve-se ao seguinte:

O autor começou por escolher valores que satisfaziam a equação linear do problema. Deste modo, e aumentando linearmente ambos os valores, essa equação continuaria sempre a ser satisfeita.

Ao substituir esses valores na equação quadrática obteve um certo valor. Aumentando linearmente os valores atribuídos às incógnitas, e substituindo de novo na equação quadrática, o valor obtido iria aumentar o quadrado da proporção do aumento, isto por se tratar de uma equação quadrática. De facto, no exemplo apresentado $1^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{25}{16}$, e *dobrando os valores supostos para as incógnitas obtemos* $2^2 + \left(\frac{6}{4}\right)^2 = \frac{100}{16}$. *Temos então que* $\frac{100}{16} = \frac{25}{16} \times 2^2$.

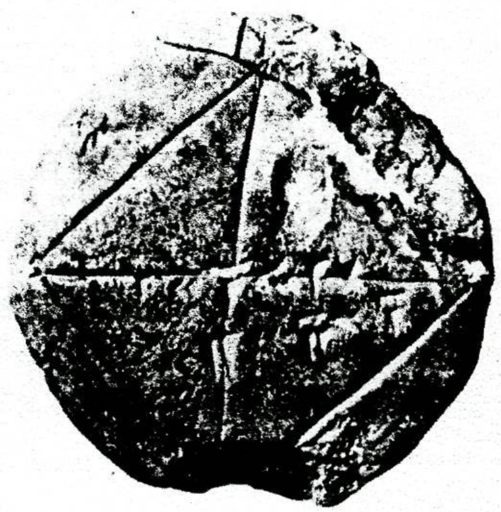
Conclui-se portanto que, para resolver o problema anterior, deve-se calcular a raiz quadrada do quociente entre o termo independente da equação quadrática do problema e o valor obtido ao substituir nessa equação os valores inicialmente supostos para as incógnitas ou, de outro modo, o quociente entre as raízes quadradas desses valores.

Segundo Radford ([38] pág. 72), a resolução dos problemas algébricos apresentada pelos Egípcios (método da falsa posição) não pode ser considerada um método algébrico, mas sim aritmético. No ponto de vista deste autor, num raciocínio algébrico a incógnita é tida como conhecida, é representada por uma letra, palavra ou símbolo e é envolvida em operações como se de um número se tratasse. O procedimento dos Egípcios baseava-se em fazer cálculos com números concretos até chegarem ao valor da incógnita. A incógnita era apenas o ponto de chegada dos problemas.

Tendo em conta o conteúdo dos papiros referidos, somos tentados a concluir que esta civilização pouco terá contribuído para a resolução das equações do 2º grau.

1.2 CIVILIZAÇÃO MESOPOTÂMICA

Uma outra civilização que se desenvolveu no mesmo período que a civilização Egípcia foi a Mesopotâmica, por vezes também chamada Babilónica[2]. Há uma maior abundância de documentos relativos à matemática desta civilização, em virtude do material utilizado para a escrita ser diferente; em vez de papiros, os Mesopotâmios utilizavam tábuas de barro mole, as quais eram escritas com um estilete e cozidas ao sol ou num forno. Desta forma, eram mais resistentes ao tempo e, consequentemente, mais duradouras.



Tábua Babilónica da colecção da Universidade de Yale tirado de *Mathématiques et Mathématiciens* de Pierre Dedron e Jean Itard.

Segundo Dedron e Itard ([15] pág. 317), a extracção de uma raiz quadrada terá sido, provavelmente, o mais antigo problema do 2º grau em toda a história da matemática, tendo sido resolvido pelos Babilónios de uma forma numérica[3] (correspondia a calcular o número que elevado ao quadrado dá a, que equivale a resolver a equação $x^2 = a$) utilizando uma tabela de quadrados, que lhes permitia obter um enquadramento da raiz procurada, dando-lhes um valor por defeito e outro por excesso.

Um excerto duma tabela utilizada pelos Babilónios para este fim poderia ser como o que a seguir se apresenta:

Número	Quadrado
...	...
1;20	1;46,40
1;21	1;49,21
1;22	1;52,04
1;23	1;54,49
1;24	1;57,36
1;25	2;00,25
...	...

[2] A Babilônia foi, durante alguns períodos, a cidade mais importante da Mesopotâmia.
[3] O documento mais antigo que se conhece que tem este problema resolvido de uma forma geométrica remonta à civilização Grega, mais especificamente a Euclides no livro II dos *Elementos*.

Analisando a tabela de quadrados[4] *podia-se concluir que* $\sqrt{2}$ *estava compreendido entre 1;24 e 1;25. Desde que as situações a resolver não exigissem um grau de aproximação muito grande, os Babilónios consideravam que* $\sqrt{2}$ *era 1;24 ou 1;25. No entanto e sempre que necessário, eram utilizados algoritmos rigorosos de pesquisa para obtenção de valores mais precisos. Por exemplo, conheciam uma aproximação de* $\sqrt{2}$ *bem mais rigorosa:* 1; 24, 51, 10.

Mas os Babilónios não sabiam apenas resolver equações do 2º grau do tipo $x^2 = a$.

Segundo Katz ([33] pág. 31), esta civilização estudou e desenvolveu significativamente a teoria da resolução das equações quadráticas, não constituindo para eles dificuldade encontrar as soluções de qualquer equação do 2º grau completa uma vez que estes haviam desenvolvido uma habilidade algébrica notável e introduzido operações algébricas muito flexíveis como transpor termos de uma equação somando "iguais a iguais", e multiplicar ambos os membros de uma equação por quantidades iguais para remover denominadores ou eliminar factores.

Para isso contavam com o auxílio de tabelas, essenciais no sistema de numeração sexagesimal utilizado.

«Os mais antigos documentos provenientes da civilização babilónica mostram-nos como já eles estavam na posse de um sistema completo de regras e cálculos para números racionais maiores do que zero, comprimentos e áreas; apesar dos textos que chegaram até nós lidarem apenas com problemas nos quais os dados eram explicitamente valores numéricos, [mas] não nos deixam dúvidas que a generalidade das regras por eles usadas denota uma facilidade técnica notável no trato das equações do 1º e 2º grau.» (Bourbaki [5] pág. 47)

Uma vez que apenas eram considerados coeficientes positivos, as equações quadráticas completas podem dividir-se em três tipos:

$x^2 + px = q,$

$x^2 = px + q,$

$x^2 + q = px.$

---

[4] Note-se que os valores da tabela estão escritos no sistema sexagesimal.

M. Thureau Dangin tem uma obra pioneira no que diz respeito à análise dos documentos da civilização Mesopotâmica, e os exemplos que se seguem foram tirados (embora não directamente) do seu trabalho, mais propriamente do seu livro intitulado *Textos Matemáticos Babilónicos*. Os dois primeiros exemplos que se seguem são extractos da tábua BM 13901, enquanto que o terceiro e último exemplo faz parte da tábua YBC 4663.

Nas transcrições destes textos, M. Thureau Dangin usou uma notação própria, designando as unidades por $^{\circ}$, as potências negativas de 60 pelos sinais $'$, $''$, etc., e as potências positivas de 60 por ` , ``, etc. Saliente-se porém que, quando se trata especificamente de uma unidade, o autor não utiliza qualquer símbolo, escreve apenas 1.

No livro de Mahammed ([37], pág. 12 a 15), fonte donde retirei estes textos, o autor substitui os símbolos utilizados por M. Thureau Dangin para representar as potências positivas de 60 por $^{\circ\circ}$, $^{\circ\circ\circ}$, etc.

Equação do tipo $x^2 + px = q$

«Eu adicionei a área e o lado do meu quadrado: deu 45´. Tu consideras 1, a unidade. Divides o 1 a meio: dá 30´. Multiplicas 30´ por 30´: dá 15´. Junta o 15´ ao 45´: dá 1. É o quadrado de 1. Subtrais 30´, que foi o que tu multiplicaste, a 1: obténs 30´, é o lado do quadrado.» (Mahammed [37] pág. 12)

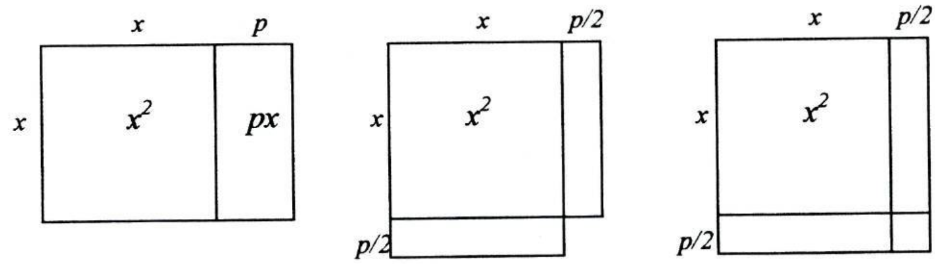
Representando o lado do quadrado por x, o problema reduz-se a resolver a equação $x^2 + x = 45'$ *que é do tipo* $x^2 + px = q$. *O algoritmo usado foi o seguinte:*

$$x = \sqrt{\left(\frac{1^\circ}{2}\right)^2 + 45'} - \frac{1^\circ}{2} = \sqrt{(30')^2 + 45'} - 30' = \sqrt{15' + 45'} - 30' = \sqrt{1^\circ} - 30' = 1^\circ - 30' = 30',$$

que corresponde no caso geral a $x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} - \frac{p}{2}$.

Os documentos matemáticos provenientes da civilização Mesopotâmica não fornecem, em geral, indicações quanto ao modo como eram obtidas as soluções dos problemas propostos (neste caso, como era obtido o algoritmo). Apesar de não haver certezas, Katz ([33] pág. 33 e 34) é de opinião que os algoritmos resolutivos das equações quadráticas devem ter sido obtidos através de raciocínios geométricos. Katz defende que a descoberta, para o caso particular das equações deste tipo, poderá ter sido apoiada numa figura como a que a seguir se apresenta. (Note-se que se trata apenas de uma conjectura, uma vez que tal figura não aparece nas placas de argila até hoje descobertas e referidas na literatura.)

"Argumentação"



área total $= x^2 + px$ *área total* $= x^2 + px$ *área total* $= x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2$

Como $x^2 + px = q$, *vem que a área do quadrado de lado* $\left(x + \frac{p}{2}\right)$ *é* $q + \left(\frac{p}{2}\right)^2$; *daí se conclui que* $x + \frac{p}{2} = \sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2} \Leftrightarrow x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} - \frac{p}{2}$. □

Equação do tipo $x^2 - px = q$ ou $x^2 = px+q$

«Eu subtraí à área da superfície, o lado do meu quadrado: deu 14°° 30°. Consideras 1, a unidade. Divides o 1 a meio : dá 30´. Multiplicas 30´ por 30´: dá 15´. Juntas o 15´ao 14°°30°: dá 14°° 30° 15´. É o quadrado de 29° 30´. Junta 30´, que foi o que tu multiplicaste, a 29° 30´: obténs 30°, é o lado do quadrado.» (Mahammed [37] pág. 12)

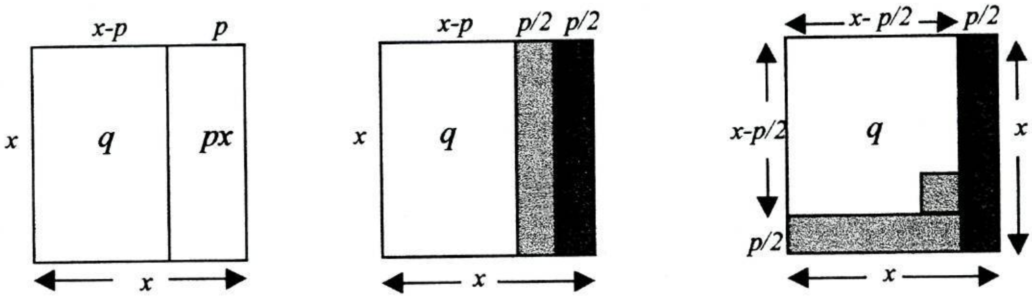
Neste caso, o problema reduz-se a resolver a equação $x^2 - x = 14°°30°$, *que é do tipo* $x^2 - px = q$. *Uma vez que os Babilónios não aceitavam coeficientes negativos, este problema foi interpretado como sendo do tipo* $x^2 = px + q$ *(onde novamente p e q são positivos). Este tipo de equação já tem um algoritmo de resolução diferente do anterior:*

$$x = \sqrt{\left(\frac{1°}{2}\right)^2 + 14°°30°} + \frac{1°}{2} = \sqrt{(30')^2 + 14°°30°} + 30' = \sqrt{15' + 14°°30°} + 30' = \sqrt{14°°30°15'} + 30'$$

$= 29°30' + 30' = 30°$ *que corresponde no caso geral a* $x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} + \frac{p}{2}$.

A figura que poderá ter estado na base da descoberta deste algoritmo poderá ter sido a seguinte:

"Argumentação"



Podemos assim concluir que a área do quadrado de lado $(x - \frac{p}{2})$ *é igual a* $q + \left(\frac{p}{2}\right)^2$,

de onde se tira que $x - \frac{p}{2} = \sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2} \Leftrightarrow x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} + \frac{p}{2}$. □

Equação do tipo $x^2+q=px$

Segundo Katz ([33], pág. 34), os Mesopotâmios tinham dificuldade em conceber um problema com várias soluções. Uma vez que uma equação deste tipo podia ter duas soluções positivas, a forma de apresentação do problema era totalmente diferente das anteriores. Em vez de considerarem uma equação quadrática, os Mesopotâmios utilizavam um sistema de duas equações com duas incógnitas. Senão vejamos:

«Eu adicionei o comprimento e a largura do meu rectângulo: deu 6° 30´; a sua área é 7° 30´. Tu divides 6° 30´ a meio: dá 3° 15´. Multiplicas 3° 15´ por 3° 15´: dá 10° 33´45´´. [A seguir] subtrais 7° 30´ de 10° 33´45´´ : dá 3° 3´ 45´´. É o quadrado de 1° 45´. Junta 3° 15´; que foi o que tu multiplicaste, a 1° 45´: dá 5°, é o comprimento do rectângulo. Retira de 3° 15´que foi o que tu multiplicaste, 1° 45´: dá 1° 30´, é a largura.» (Mahammed [37] pág. 13)

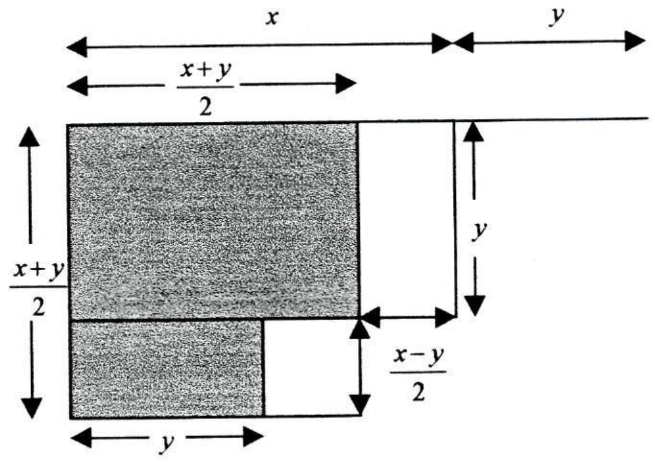
Neste caso, o problema reduz-se a resolver o sistema $\begin{cases} x+y=6°30' \\ x.y=7°30' \end{cases}$ *que é equivalente a resolver a equação* $x^2+7°30' = 6°30'\,x$. *Os cálculos apresentados correspondem, em simbologia actual a:*

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{\left(\frac{6°30'}{2}\right)^2 - 7°30'} + \frac{6°30'}{2} \\ &= \sqrt{(3°15')^2 - 7°30'} + 3°15' \\ &= \sqrt{10°33'45'' - 7°30'} + 3°15' \\ &= \sqrt{3°3'45''} + 3°15' \\ &= 1°45' + 3°15' \\ &= 5° \end{aligned} \quad e \quad \begin{aligned} y &= \frac{6°30'}{2} - \sqrt{\left(\frac{6°30'}{2}\right)^2 - 7°30'} \\ &= 3°15' - \sqrt{(3°15')^2 - 7°30'} \\ &= 3°15' - \sqrt{10°33'45'' - 7°30'} \\ &= 3°15' - \sqrt{3°3'45''} \\ &= 3°15' - 1°45' \\ &= 1°30' \end{aligned},$$

daí que, designando a soma das raízes por S *e o seu produto por* P, *obtemos que* $x=\sqrt{\left(\frac{S}{2}\right)^2 - P} + \frac{S}{2}$ *e* $y=\frac{S}{2} - \sqrt{\left(\frac{S}{2}\right)^2 - P}$.

Segundo Katz ([33] pág. 32 e 33), a figura que poderá ter estado na base da descoberta do algoritmo para as equações deste tipo poderá ter sido a que se segue:

"Argumentação"



A área da zona a sombreado é igual à área do rectângulo que tem de lados x e y, daí que a área seja $x \times y = P$. *Donde se conclui que:*

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \left(\frac{S}{2}\right)^2 = P + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{x-y}{2} = \sqrt{\left(\frac{S}{2}\right)^2 - P}.$$

Desta última igualdade, facilmente se tiram os valores de x e de y:

$$\begin{cases} x = \dfrac{x+y}{2} + \dfrac{x-y}{2} = \dfrac{S}{2} + \sqrt{\left(\dfrac{S}{2}\right)^2 - P} \\ y = \dfrac{x+y}{2} - \dfrac{x-y}{2} = \dfrac{S}{2} - \sqrt{\left(\dfrac{S}{2}\right)^2 - P} \end{cases}. \qquad \square$$

Com os exemplos atrás apresentados confirma-se que a habilidade algébrica dos Babilónios lhes permitia resolver toda e qualquer equação quadrática. Cajori ([7] pág. 4) salienta o facto deste sucesso ter sido obtido à margem do uso de qualquer simbolismo algébrico.

Boyer ([6] pág. 25) chama a atenção para a questão do utilitarismo associado a esta civilização, uma vez que não são conhecidos problemas do quotidiano dos Mesopotâmios que os obrigasse a desenvolver de uma forma tão clara a resolução das equações quadráticas.

Para terminar, saliente-se a opinião de Bochner ([4] pág. 21) que diz ser notável como é que os Babilónios conseguiram ser tão avançados nos seus algoritmos, sem terem as respectivas construções intelectuais. Estas construções só foram criadas pelos Gregos que introduziram nomes expressivos e reflexões próprias sobre as várias áreas da matemática.

2 CIVILIZAÇÃO GREGA

Durante todo o primeiro milénio a.C., profundas alterações económicas, culturais e políticas ocorreram na bacia do Mediterrâneo. Nesta atmosfera turbulenta, a actividade intelectual das civilizações Egípcia e Mesopotâmica estava em declínio, enquanto que uma outra civilização se começava a destacar, a civilização Grega. Segundo Boyer ([6] pág. 33), quando esta civilização surgiu (final do segundo milénio a.C.) não trazia consigo qualquer tradição matemática ou literária; logo porém, mercadores, negociantes e estudiosos gregos dirigiram-se aos centros de cultura no Egipto e Babilónia, onde contactaram com a matemática aí desenvolvida.

Segundo Szabó ([47] pág. 185) os antigos gregos aprenderam bastante com os conhecimentos das civilizações anteriores, mais particularmente com a civilização Babilónica; mas a predisposição que mostravam ter para aprender não só lhes permitiu assimilar conhecimentos científicos das outras civilizações, como também expandi-los e melhorá-los.

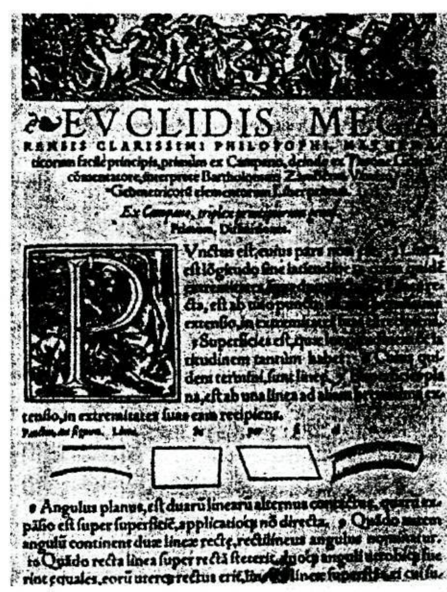
Segundo Struik ([45] pág. 73) o objectivo inicial da civilização Grega era compreender o lugar do Homem no universo, e a matemática ajudava no sentido de ordenar as ideias de uma forma racional. Embora não se conheçam fontes fidedignas que nos permitam visualizar o quadro do desenvolvimento inicial da matemática nesta civilização, possuímos edições credíveis das obras de alguns matemáticos importantes da antiguidade, nomeadamente Euclides e Diofanto. Vejamos agora as contribuições destes dois matemáticos no que diz respeito à resolução das equações do 2º grau.

2.1 Euclides de Alexandria

Pouco se sabe da vida de Euclides. Apesar da data e local do seu nascimento serem desconhecidos, pensa-se que terá vivido no início do séc. III a.C.. Segundo Collette ([12] pág. 68), parece provável que o autor tenha recebido a sua formação matemática na Academia Platónica de Atenas e que tenha sido o fundador da escola de matemáticos de Alexandria.

Euclides de Alexandria num quadro do séc. XV de Juste de Grand de *Histoire des mathémathiques – vol I* de Jean Paul Collette

Relativamente aos trabalhos escritos por Euclides, Eves ([22] pág. 114) é de opinião que terão sido pelo menos dez, embora apenas cinco das suas obras tenham sobrevivido até aos nossos dias. De todas as suas obras, a mais conhecida é os *Elementos*, daí que Euclides e os *Elementos* sejam muitas vezes considerados sinónimos. Segundo Boyer ([6] pág. 87), os *Elementos* são cronologicamente a primeira obra de matemática hoje conhecida; neles Euclides reúne matérias vindas de autores diversos, épocas distintas e estilos variados. Mahammed ([37] pág. 15) adianta ainda que Euclides não terá apenas compilado, sistematizado e ordenado os trabalhos dos seus antecessores, mas também os terá completado e aperfeiçoado em diferentes pontos, sendo, no entanto, o seu principal mérito o facto de ter deduzido 465 proposições a partir dum reduzido número de definições e postulados.



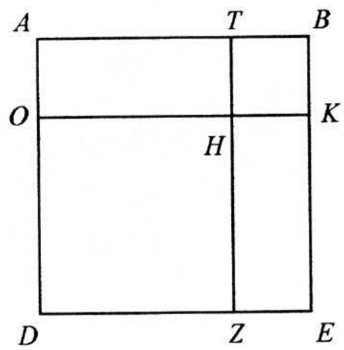
Primeira página dos *Elementos* de Euclides da edição de Bâle 1558 tirado de *Mathématiques et Mathématiciens* de Pierre Dedron e Jean Itard.

No que diz respeito às equações quadráticas, podemos dizer que o autor apenas apresenta a resolução de tais equações (e de uma forma geométrica) no livro VI dos *Elementos*. No entanto, o livro II da mesma obra é dedicado exclusivamente à equivalência de áreas, mais concretamente, à equivalência de rectângulos, o que se traduz numa variedade de igualdades entre expressões do 2º grau. Note-se que Dedron e Itard ([15] pág. 63) apelidaram este livro de "Álgebra Geométrica dos Gregos".

Vejamos algumas das proposições dos livros II e VI dos *Elementos*, e as respectivas igualdades algébricas que lhes estão associadas.

Proposição II-4: Se uma linha recta é cortada num ponto arbitrário, o quadrado da linha inteira é igual aos quadrados dos segmentos, e a duas vezes o rectângulo contido por esses dois segmentos. (Euclides [20] pág. 43)

A figura associada a esta proposição, e que foi apresentada por Euclides é a seguinte[5]*:*

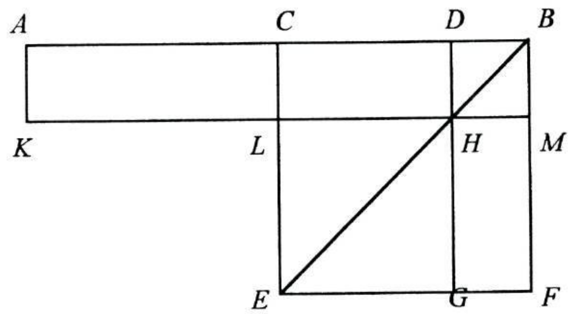


Se designarmos AT por a e TB por b, a proposição anterior é traduzida por:

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

Proposição II-5: Se uma linha recta é cortada em partes iguais e desiguais, o rectângulo [compreendido] entre os dois segmentos desiguais da linha recta, adicionado com o quadrado da linha compreendida entre as secções, é igual ao quadrado da metade da linha recta. (Euclides [20] pág. 45)

A figura que Euclides apresentou para esta proposição foi a seguinte:



Se designarmos AC por a e CD por b, a proposição anterior é traduzida por:

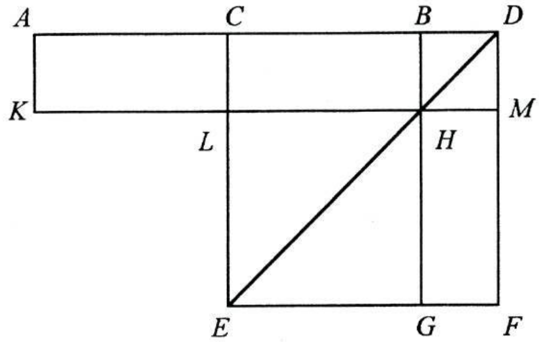
$$(a+b)(a-b) + b^2 = a^2$$

[5] Embora as figuras que vão ser apresentadas ao longo deste capítulo façam parte da obra de Euclides, e tenham sido tiradas do livro [20] da bibliografia, nalguns casos as letras foram alteradas.

A proposição II-6 é complementar da proposição II-5 e diz o seguinte:

Proposição II-6: Se uma linha recta é cortada em duas partes iguais, e se lhe acrescentarmos directamente outra linha, o rectângulo compreendido entre a linha recta com a linha acrescentada, e entre a linha acrescentada, adicionado ao quadrado da metade da linha recta, é igual ao quadrado descrito sobre a linha composta pela metade da linha recta e a linha acrescentada, como uma só linha. (Euclides [20] pág. 46)

A figura apresentada por Euclides foi a seguinte:



Para obtermos uma igualdade algébrica com base nesta proposição, vamos representar AC por a e CD por b. A igualdade será:

$$(a+b)(b-a)+a^2=b^2$$

De entre as restantes proposições do livro II dos *Elementos* há também a destacar a proposição 11. Esta já não se trata de uma igualdade entre expressões quadráticas, mas da resolução de uma equação quadrática concreta, cuja solução conduz à conhecida divina proporção (que actualmente se designa por número de ouro). No entanto, a resolução apresentada não pode ser generalizada às outras equações do 2º grau.

Como já referi, a apresentação da resolução geral (embora geométrica) das equações do 2º grau, foi dada apenas no livro VI da mesma obra.

Note-se que, no que diz respeito às equações completas do 2º grau, estas podiam ser divididas em três tipos:

$x^2 + px = q$,

$x^2 = px + q$,

$x^2 + q = px$.

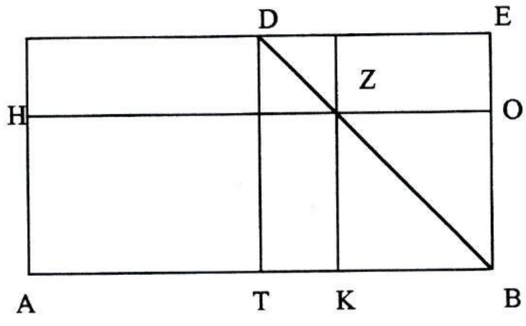
À semelhança do que aconteceu anteriormente (e também do que, séculos mais tarde, Diofanto fará), Euclides apresentou resoluções para cada um dos diferentes tipos.

As proposições 28 e 29 do livro VI dos *Elementos* são as que apresentam tais resoluções, resoluções essas geométricas baseando-se em aplicações de áreas. A proposição 27 do mesmo livro dá a condição de resolubilidade do primeiro destes problemas.

Antes de enunciar as referidas proposições, convém referir que aplicar uma figura rectilínea a um segmento é construir um rectângulo sobre esse segmento que tenha a mesma área da figura rectilínea. Por vezes, a aplicação é feita não ao segmento exacto, mas a um outro maior ou menor; nesses casos, dizemos que a aplicação é feita por excesso ou por defeito, respectivamente.

Proposição VI - 27: De todos os paralelogramos que são aplicados a uma mesma linha recta, e que são deficientes por paralelogramos semelhantes e semelhantemente situados ao paralelogramo descrito sobre a metade dessa linha, o maior é aquele que é aplicado sobre a metade dessa linha, e que é semelhante ao seu defeito. (Euclides [20] pág. 169)

Para o caso dos paralelogramos serem rectângulos, a figura suporte da proposição dada por Euclides seria a seguinte:



A demonstração dada em linguagem e simbologia actual é a seguinte:

Seja AB a linha dada que está cortada a meio no ponto T. Sobre AB foi aplicado o paralelogramo AD deficiente pelo paralelogramo TE, que é semelhante a uma figura dada, mas que está descrito sobre a metade da linha AB.

O que a proposição afirma é que de todos os paralelogramos que são aplicados sobre AB, e cujo o defeito é semelhante a TE, o maior é AD. Para mostrar tal resultado, Euclides considerou que sobre AB foi também aplicado um outro paralelogramo arbitrário, neste caso AZ, também deficiente e com defeito semelhante a TE. O que se pretende mostrar é que AD é maior que AZ.

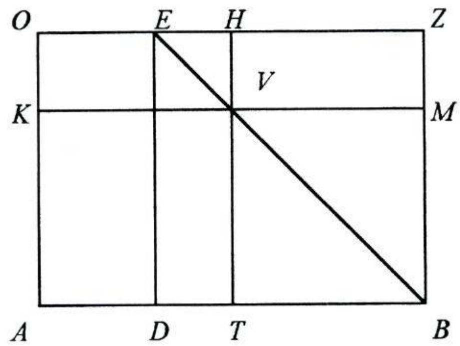
Como os paralelogramos TE e KO são semelhantes, têm a mesma diagonal. Portanto TZ será igual a ZE. Juntando a ambos o paralelogramo KO, obtemos que o paralelogramo TO será igual ao paralelogramo KE.

Além disso, o paralelogramo TO é igual ao paralelogramo TH (porque a linha AT é igual à linha TB); daí que TH seja igual a KE. Juntando agora a ambos o paralelogramo TZ, concluímos que o paralelogramo inteiro AZ será igual ao gnomom ZTBE.

Ora, o paralelogramo AD, que é igual ao paralelogramo TE, é maior que o gnomom; logo é maior que o paralelogramo AZ.

De seguida, Euclides considerou o caso em que o defeito é maior que a figura dada inicialmente. Dividiu de novo a linha AB em duas partes iguais no ponto T, e aplicou a essa linha o paralelogramo AV, deficiente pelo paralelogramo TM que novamente é semelhante a uma figura dada, e está descrito sobre a metade da linha AB. De seguida, aplicou à linha AB o paralelogramo AE deficiente pelo paralelogramo DZ, semelhante a TM, e por sua vez à figura dada inicialmente.

Novamente, o que a proposição afirma é que o paralelogramo AV (que foi aplicado sobre a metade da linha dada) é maior que o paralelogramo AE. A figura referente a este segundo caso é a seguinte:

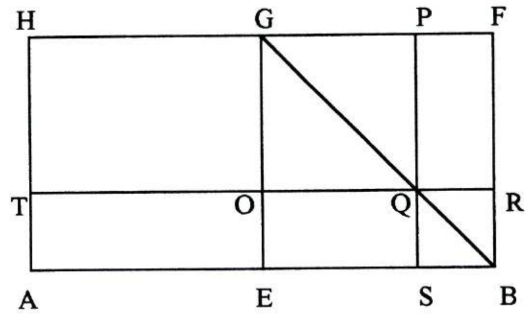


Como os paralelogramos DZ e TM são semelhantes, têm a mesma diagonal, que neste caso é EB. Além disso, temos que VZ é igual a VO (porque HZ é igual a OH), daí se conclui que VZ é maior que KE. Temos também que VZ é igual a VD, daí que VD seja maior que KE.

Juntando a ambos o paralelogramo KD; vem que o paralelogramo inteiro AV é maior que o paralelogramo inteiro AE, que é o que se pretendia mostrar. □

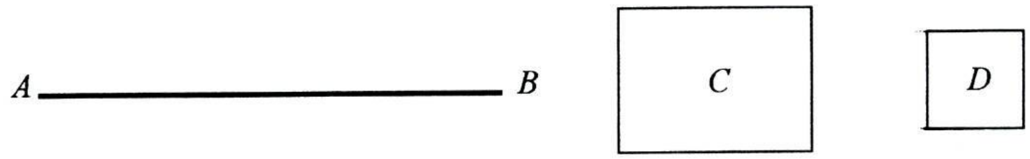
Proposição VI - 28: A uma linha recta dada aplicar um paralelogramo que é igual a uma figura rectilínea dada, mas que é deficiente por um paralelogramo semelhante a um paralelogramo dado: é necessário que a figura rectilínea dada não seja maior que o paralelogramo construído sobre a metade da linha dada, e semelhante ao defeito. (Heath [28] pág. 260)

A adaptação da figura apresentada por Euclides relativamente a esta proposição, para o caso particular dos paralelogramos serem rectângulos, e consequentemente o defeito ser um quadrado[6] é a que se segue:

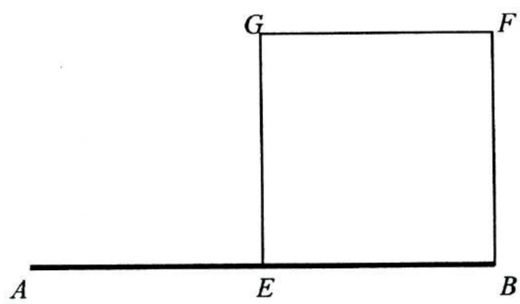


Vejamos como se obtém a figura apresentada.

É dado um comprimento (AB), a área de uma figura plana (C) e uma figura (D) ao qual o defeito será semelhante.

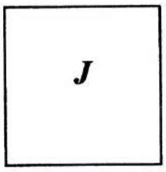


A primeira etapa, consiste em dividir o segmento dado a meio, e desenhar sobre a segunda metade do segmento uma figura semelhante a D.

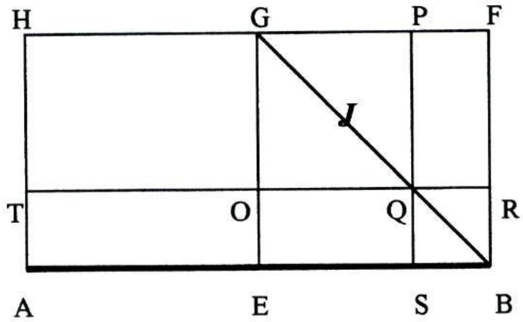


[6]Escolhi o caso particular dos paralelogramos serem rectângulos, e consequentemente o defeito ser um quadrado para ser mas claro a relação que existe entre esta proposição e a resolução das equações quadráticas.

Na segunda etapa constrói-se um paralelogramo J, semelhante a D, tal que a área de J seja igual à área de EBFG – área de C. (Esta construção obriga a usar outras proposições do livro VI dos Elementos, às quais não faço referência, nomeadamente quadraturas e Teorema de Pitágoras.)



Finalmente, na terceira etapa coloca-se a figura J no canto superior esquerdo da figura EBGF e prolongam-se alguns dos lados, de modo a obter a figura pretendida.



Demonstração:

Pretendemos mostrar que a área de ASQT é igual à área de C e que SBRQ é um quadrado:

SBRQ é um quadrado pois por construção EBFG e OQPG são quadrados. Logo SQ=QR.

Como por construção área de J = área de EBFG – área de C, vem que:

área do gnomom EBFQ = área de EBFG – área de J

= área de EBFG – (área de EBFG – área de C)

= área de C

Uma vez que GB é a diagonal do quadrado EBFG, vem que a área de QF é igual à área de QE. Se juntarmos a ambos o paralelogramo QB, vem que o paralelogramo PB é igual ao paralelogramo OB.

Mas OB é igual a TE, pois o lado AE é igual ao lado EB, daí que TE seja igual a PB.

Juntando a ambas as figuras o paralelogramo OS, temos que o paralelogramo inteiro TS será igual ao gnomomEBFQ, que como já vimos tem de área C. Está assim demonstrado o pretendido. □

Embora Euclides não tivesse usado tal facto, era possível (e de uma forma mais curta) demonstrar o resultado anterior usando a proposição 5 do livro II, uma vez que, o enunciado destas duas proposições se refere a um segmento de recta que está dividido em partes iguais e desiguais.

Finalmente, para que possamos ver as equações do 2º grau subjacentes ao problema, vamos atribuir letras aos vários segmentos. Consideremos o segmento dado AB como sendo a e AS (que é o comprimento procurado) como sendo x. O rectângulo procurado (ASQT) tem de lados x e $a - x$ e tem área C, daí que procurar esse rectângulo seja procurar o comprimento x tal que:

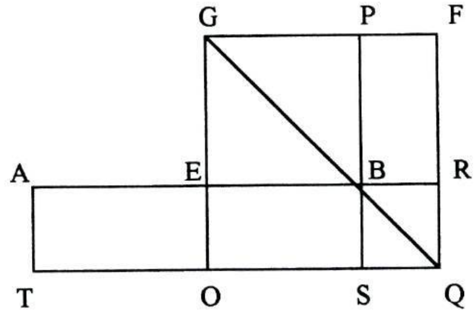
$$x(a-x)=C \Leftrightarrow x^2+C=ax \quad \rightarrow \quad \text{equação do tipo } x^2+q=px.$$

Além disso, este problema pode ser visto como o de procurar um rectângulo, sendo dada a soma e o produto dos seus lados. Um problema semelhante a este já havia aparecido numa tábua da Babilónia, que terá sido escrita cerca de mil anos antes, e voltou a aparecer em Diofanto que viveu vários séculos depois de Euclides.

A proposição 29 é complementar da proposição 28 e permite-nos resolver geometricamente os outros tipos de equações do 2º grau completas.

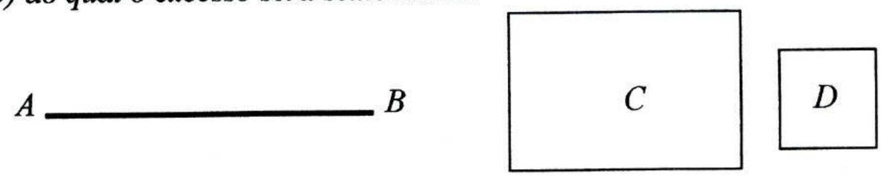
Proposição VI - 29: Aplicar sobre uma linha recta dada, um paralelogramo que é igual a uma figura rectilínea dada, mas que é excedente por um paralelogramo semelhante a outro paralelogramo dado. (Euclides [20] pág. 172)

Adaptando a figura apresentada por Euclides para esta proposição para o caso particular dos paralelogramos serem rectângulos, e consequentemente o excesso ser um quadrado, obtém-se a seguinte figura:

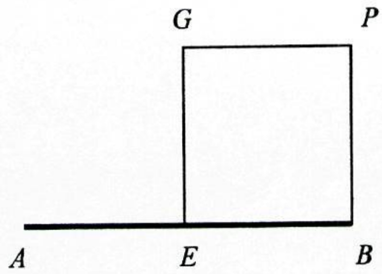


Vejamos como é que ela se obtém.

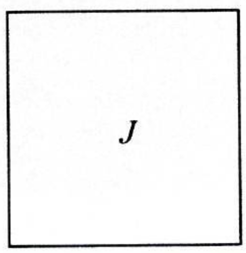
Novamente, é dado um comprimento (AB), a área de uma figura plana (C) e uma figura (D) ao qual o excesso será semelhante.



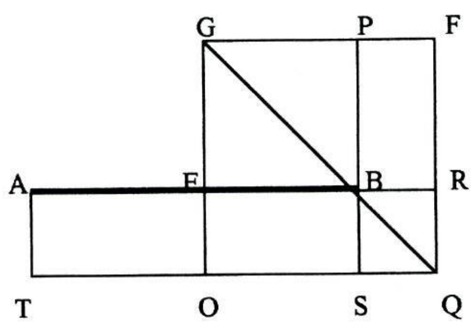
A primeira etapa é perfeitamente análoga à do caso anterior, que é construir sobre a segunda metade do segmento AB uma figura semelhante a D.



Na segunda etapa, constrói-se um paralelogramo J, semelhante a D, mas tal que a área da figura J seja igual à área de EBPG + área de C (novamente, esta construção usa outras proposições do livro VI dos Elementos).



Na terceira e última etapa, coloca-se a figura J no canto superior esquerdo da figura EBPG e prolongam-se os lados, obtendo-se assim a figura apresentada inicialmente.



Demonstração:

Pretendemos agora mostrar que ATQR tem área igual à de C e que SQRB é um quadrado.

Por construção, temos que EBPG e OQFG são quadrados, donde se conclui que SQRB também é um quadrado.

Também por construção, temos que:

área de J = área de EBPG + área de C.

Daí se conclui que área do gnomom OQFB = área de J – área de EBPG

= (área de EBPG + área de C) – área de EBPG

= área de C

Como AE é igual a EB, vem que a área do paralelogramo AO é igual à área do paralelogramo OB que, por sua vez, é igual à área de PR uma vez que GQ é a diagonal do quadrado GOQF. Juntando a AO e a PR o paralelogramo EQ, vem que a área de AQ é igual à área do gnomom OQFB, que como já vimos é igual à de C. Está assim demonstrado o que se pretendia. □

Do modo análogo aquilo que acontecia com a proposição 28, esta proposição podia ter sido demonstrada mais rapidamente usando a proposição II-6, pois neste caso ambas as proposições (II-6 e VI-29) referem-se a um segmento que foi dividido em partes iguais e tinha no seu prolongamento um outro segmento.

À semelhança do que fizemos anteriormente, vamos atribuir letras aos diferentes segmentos, para transformar a proposição anterior numa igualdade algébrica. Na mesma linha de raciocínio, consideremos o segmento dado AB como sendo a e AR (que é o comprimento procurado) como sendo x. O rectângulo procurado ARQT tem de lados x e $x - a$ e tem área C; daí que procurar o rectângulo seja procurar x tal que:

$$x(x-a)=C \Leftrightarrow x^2 = C + ax \rightarrow \text{equação do tipo } x^2 = px + q$$

Se considerássemos o segmento AB como sendo a e a linha que lhe foi acrescentada (BR) como sendo x, então o rectângulo procurado teria de lados x e $a + x$. Neste caso, procurar esse rectângulo seria procurar o comprimento x tal que:

$$x(x+a)=C \Leftrightarrow x^2 + ax = C \rightarrow \text{equação do tipo } x^2 + px = q$$

Desta forma, obtivemos os outros dois tipos de equações do 2º grau completas.

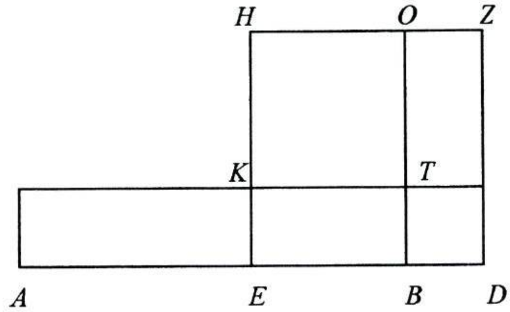
A primeira atribuição de letras aos segmentos apresentada para esta proposição pode ser vista como a de procurar um rectângulo em que é dada a diferença e o produto dos seus lados. Novamente, um problema semelhante a este, já tinha aparecido numa tábua babilónica, e foi também resolvido mais tarde por Diofanto. Note-se porém que, tanto os Babilónios como Diofanto resolveram o problema de uma forma algébrica e não geométrica.

Numa outra obra de Euclides, chamada *Dados*, o autor apresenta a resolução de equações do 2º grau, mas em casos concretos. Exemplo disso são as proposições 84 e 85. Estas proposições baseiam-se nas proposições 59 e 58 da mesma obra, que por sua vez são aplicações das proposições 28 e 29 do livro VI dos *Elementos* que acabamos de analisar.

Vejamos o que dizem as proposições 58 e 59 dos *Dados*.

Proposição 58: Se um espaço dado é aplicado a uma recta dada, e se esse espaço é deficiente por uma figura semelhante a uma figura dada, [então] os lados do defeito são conhecidos. (Euclides [20] pág. 564)

Vou novamente considerar o caso particular em que o defeito é um quadrado. Para este caso particular, a figura apresentada por Euclides seria a seguinte:



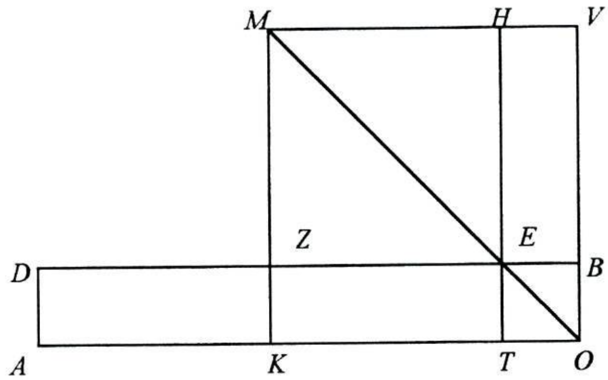
Tendo agora em conta a figura, o que a proposição afirma é que se o espaço dado AT for aplicado à linha dada AD, e se esse espaço for deficiente pela figura TD semelhante a uma figura dada (que considerei ser um quadrado), então os lados do defeito (que neste caso serão iguais) são conhecidos. A demonstração consiste no seguinte:

É dado o segmento AD, uma figura C ao qual AT é equivalente, e um paralelogramo ao qual TD é semelhante (que como já referi, considero ser um quadrado). Toma-se o segmento AD e marca-se o seu ponto médio, E. O comprimento de ED será portanto conhecido. Sobre ED descreve-se a figura EZ semelhante ao defeito (que neste caso é um quadrado). A área dessa figura será portanto conhecida.

Pela proposição II-5 dos Elementos, temos que a figura EZ é igual à soma das figuras AT e KO. Como a área das figuras EZ e AT são conhecidas, a área de KO será também conhecida. Como KO (neste caso) é um quadrado, facilmente se deduz o comprimento do seu lado. Assim sendo, o lado EB (que é igual ao lado do quadrado KO) é conhecido. Como o comprimento ED é também conhecido, o comprimento de BD será facilmente deduzido. Está assim encontrado o lado do defeito, que é o que se pretendia. □

Proposição 59: Se um espaço dado é aplicado a uma recta dada, e se esse espaço é excedente por uma figura semelhante a uma figura dada, [então] os lados do excesso são conhecidos. (Euclides [20] pág. 565)

Mais uma vez, vou considerar que o excesso é um quadrado. Assim sendo, a figura associada a esta proposição é a seguinte:



Novamente, e tendo em conta a figura, o que a proposição afirma é que se o espaço dado AB for aplicado à linha dada AT, e se esse espaço for excedente pela figura TB semelhante a uma figura dada (que considerei ser um quadrado), então os lados do excesso (que novamente são iguais) são conhecidos. A demonstração consiste no seguinte:

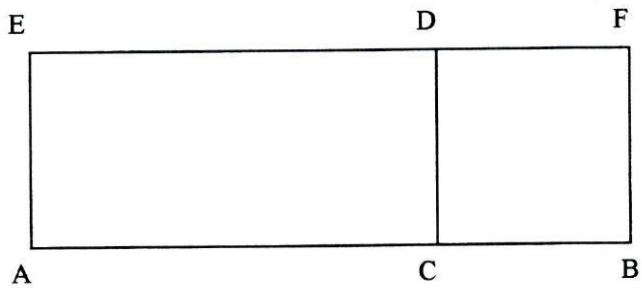
É dado o segmento DE, uma figura C ao qual AB é equivalente e um paralelogramo ao qual TB é semelhante (que como já referi, considero ser um quadrado).

Divide-se o segmento DE a meio, no ponto Z. O comprimento de ZE será portanto conhecido. Sobre ZE descreve-se a figura ZH semelhante ao excesso. A área dessa figura será portanto conhecida.

Pela proposição II-6 dos Elementos, temos que a figura KV é igual a soma da área das figuras AB e ZH daí que seja também conhecida. Como KV (neste caso) é um quadrado facilmente se deduz o comprimento do seu lado, isto é KO. Como KT é também conhecido, pois é igual a ZE, facilmente se deduz o comprimento de TO (o lado do excesso), que é o que pretendíamos mostrar. □

Proposição 84: Se duas rectas compreendem um espaço dado, e formam um ângulo dado, e se uma delas é maior que a outra uma linha dada, [então] cada uma delas será conhecida. (Euclides [20] pág. 591)

No caso particular em que o ângulo BAE é recto, a figura correspondente à proposição é a seguinte:



Tendo em conta a figura, o que a proposição afirma é que se duas linhas rectas AB e AE compreendem um espaço dado AF com um ângulo dado BAE, e em que AB é maior que a linha AE uma certa linha dada AC, então cada uma das linhas AB e AE é também conhecida.

Demonstração

São dados o segmento AC, o ângulo BAE (que vamos considerar ser recto) e uma determinada área J. Pretende-se encontrar os segmentos AB e AE tal que a diferença entre os seus comprimentos seja o segmento dado AC e a área do rectângulo que tem esses comprimentos como lados (AF) seja a área dada J.

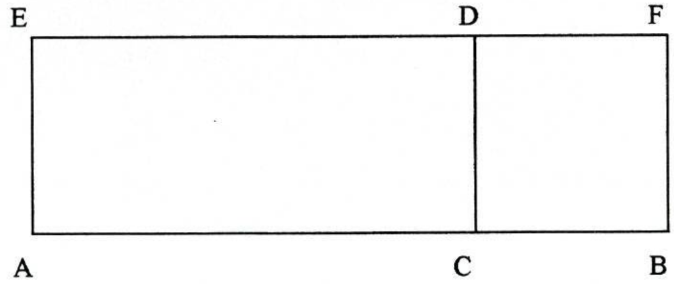
Por construção, a diferença entre o comprimento de AB e o de AE é AC, portanto, vem necessariamente que AE = CB, donde resulta que CF é um quadrado. Então, pela proposição 59 do Dados, conclui-se que CB é conhecido. Fica assim o problema resolvido pois AE é igual a CB e AB é a soma de AC, que é dado inicialmente, com CB. □

De uma forma algébrica, o problema consiste em encontrar os segmentos x (comprimento) e y (largura), tais que $\begin{cases} x \times y = J \\ x - y = d \end{cases}$ (onde d = AC) o que equivale a encontrar o comprimento x ou y tal que: $y^2 + dy = J$ ou $x^2 = dx + J$.

A resolução da equação do tipo $x^2 + q = px$ está patente na proposição 85 dos *Dados*.

Proposição 85: Se duas rectas compreendem um espaço dado, e formam um ângulo dado, e se a sua soma é dada, [então] cada uma delas será conhecida. (Euclides [20] pág. 592)

Novamente, se considerarmos que o ângulo é recto, a figura é a que se segue:



Tendo em conta a figura, o que a proposição afirma é que se duas linhas rectas AC e CD compreendem um espaço dado AD com um ângulo dado ACD, e em que a linha composta pelas linhas AC e CD é dada, então cada uma das linhas AC e CD é também conhecida.

Demonstração

São dados o segmento AB, o ângulo ACD (que novamente vamos considerar ser recto) e uma determinada área J. Pretende-se encontrar os segmentos AC e CD (=CB) tal que a soma dos seus comprimentos seja o segmento dado AB e a área do rectângulo de lados AC e CD seja a área dada J.

Como CF é um quadrado, pela proposição 58 dos Dados, temos que o lado desse quadrado (CB) é conhecido. Fica assim resolvido o problema pois CD é igual a CB, e AC é a diferença entre AB que é dado inicialmente e CB. □

De uma forma algébrica, o problema consiste em encontrar os segmentos x (AC) e y (CD), tais que $\begin{cases} x \times y = J \\ x + y = s \end{cases}$ (onde s = AB), o que equivale a encontrar o comprimento x ou y tal que: $x^2 + J = sx$ ou $y^2 + J = sy$.

Por tudo o que vimos, somos levados a concluir que a contribuição que Euclides deu ao nível da resolução das equações do 2º grau é notável. Note-se, no entanto, que o raciocínio algébrico em Euclides é expresso totalmente numa forma geométrica.

Varadarajan ([49] pág. 3) classifica Euclides como sendo um dos matemáticos mais famosos de todos os tempos, provavelmente tendo em conta os notáveis contributos deste matemático em várias áreas com destaque para a geometria.

Szabó ([47] pág. 187) admira-se com o facto de os Gregos, nomeadamente Euclides, terem sentido a necessidade de demonstrar uma proposição matemática, e terem-no feito com tal perícia que ainda é admirada nos dias de hoje. No entanto, Dedron e Itard ([15] pág. 332) salientam o facto de Euclides também camuflar o processo de descoberta, à semelhança do que acontecia na Babilónia, como é o caso, de entre muitos outros da proposição II-11.

Segundo Cajori ([7] pág. 58), após a morte de Euclides, a teoria dos números permaneceu estacionária por volta de 400 anos, uma vez que a geometria monopolizava a atenção de quase todos os matemáticos gregos. De facto, o matemático grego que maiores contributos deu no campo da álgebra e aritmética nasceu em meados do séc. III d.C. (600 anos depois de Euclides) e dá pelo nome de Diofanto de Alexandria.

2.2 DIOFANTO DE ALEXANDRIA

Diofanto de Alexandria foi um matemático grego que terá nascido no início da segunda metade do séc. III d.C. Embora se desconheçam datas exactas acerca do seu nascimento e morte, pensa-se que terá morrido com 84 anos[7].

Tanto quanto se conhece, Diofanto é autor duma obra intitulada *Aritmética*, composta por 13 livros, dos quais apenas 10 são conhecidos. Segundo Mahammed ([37] pág. 25), a obra de Diofanto apresenta uma colecção de problemas que recaem explicitamente sobre a resolução de equações do 1° e 2° grau (e por vezes de grau superior) envolvendo uma ou mais incógnitas. Segundo Smith ([43] pág. 382), os problemas apresentados são puramente algébricos e o tratamento apresentado, apesar de por vezes recorrer à geometria, baseia-se essencialmente em métodos analíticos.

Apesar de muitos dos problemas apresentados se reduzirem a equações do 2° grau completas e de Diofanto ter dito no fim do preâmbulo da sua obra que iria expor a forma de as resolver, esta não se encontra no corpo da parte da sua obra, hoje conhecida.

Os problemas 27 a 30 do livro I da *Aritmética* de Diofanto são os primeiros que se reduzem a equações do 2° grau completas e na apresentação da sua resolução, Diofanto utiliza um artifício que permite transforma-las em equações do 2° grau incompletas, cuja resolução é imediata. Segundo Ver Eecke ([17] pág. XXIII) tal artifício consiste (independentemente do número de equações, do grau dessas equações e do número de incógnitas envolvidas no problema) em designar uma certa quantidade desconhecida (uma nova incógnita por excelência) por aritmo. De seguida, as várias incógnitas do problema são escritas em função dessa nova incógnita e, ou são feitas substituições de entre as várias equações ou, como no caso das equações indeterminadas, são tomados casos particulares, de modo a reduzir tudo a uma só equação, com uma só incógnita (o aritmo) nunca com grau superior ao segundo.

Note-se que a escolha do aritmo não era arbitrária. Ao invés, era feita de forma a que, no final, se obtivesse uma equação nas condições acima referidas. Após calcular o valor do aritmo era fácil determinar as várias soluções do problema.

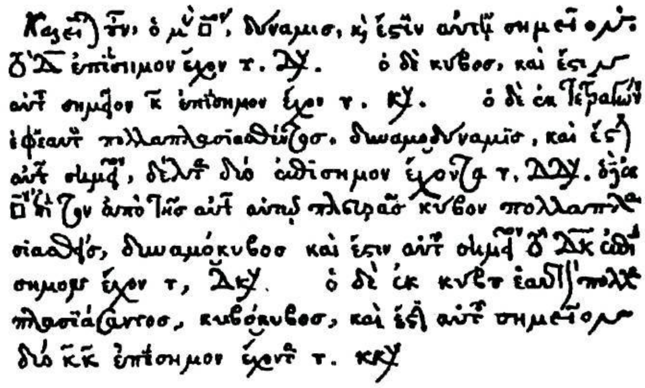
Luís Radford chama a atenção para o método inovador introduzido por Diofanto:

[7] Segundo Ver Eecke, ([17] pág. VII) no epitáfio da campa de Diofanto estaria escrito um problema cuja solução indicava com que idade este matemático tinha falecido.

«O procedimento de Diofanto é totalmente diferente, do ponto de vista conceptual, dos procedimentos de falsa posição, e da geometria de colagem. Com efeito, aqui, uma incógnita (designada por aritmo, que quer dizer número) é posta em evidência nos cálculos. Esta incógnita não é como nos processos aritméticos, o ponto de chegada dos cálculos, ela não é mais, como acontece no caso da geometria da colagem, um ponto de referencia estático no desenvolvimento do problema, mas sim uma quantidade que é operada como se fosse um número conhecido.» (Radford [38] pág. 74)

Segundo Ver Eecke ([17] pág. XXIII), Diofanto seguia a tradição da época, na medida em que aceitava e trabalhava apenas com números racionais positivos. Sempre que um problema tinha como solução um número negativo, apelidava-o de "absurdo"; e se a solução fosse um número irracional ou imaginário, era tido como impossível.

À semelhança do que aconteceu com os seus antecessores, também Diofanto resolvia os problemas utilizando o discurso contínuo[8]. No entanto, introduziu já algumas abreviaturas e símbolos. Struik ([45] pág. 106) afirma mesmo que foi com Diofanto que encontramos pela primeira vez uma utilização sistemática de símbolos algébricos. Segundo Klein ([34] pág. 146) os sinais usados por Diofanto eram meras abreviaturas. Por esta razão, Nesselmann (em Algebra der Griechen, pág. 302) chamou ao procedimento praticado por Diofanto de álgebra sincopada que é uma transição da álgebra retórica para a moderna álgebra simbólica.



De um manuscrito do século XIV mostrando o simbolismo em uso de *History of Mathematics – Vol II* de David Smith.

Um outro progresso de Diofanto consistiu no facto do leitor poder acompanhar o processo de descoberta do resultado. Isso é bem visível na resolução dos seus problemas, e iremos vê-lo nos exemplos que a seguir se apresentam.

[8] Isto é, dando explicações e resoluções usando texto corrido.

2.2.1 EQUAÇÕES DO 2º GRAU DETERMINADAS

O primeiro problema do 2º grau é a 26ª proposição do livro I. Note-se que tal problema conduz a uma equação do 2º grau incompleta:

Problema I-26

«São-te dados dois números, procura o número que, se o multiplicarmos respectivamente, dá dum lado um quadrado, e doutro lado a raiz desse quadrado.

Sejam 200 e 5 os dois números dados, e [consideremos] que o número procurado é 1 aritmo. Temos então que, se o número procurado é multiplicado por 200 unidades, dá 200 aritmos, e se é multiplicado por 5 unidades, dá 5 aritmos. Ora, foi dito que um desses números é um quadrado e que o outro é a raiz desse quadrado; daí que, se nós elevarmos ao quadrado 5 aritmos obtemos 25 quadrados de aritmos [que são] iguais a 200 aritmos. Dividamos tudo pelo aritmo; vem que 25 aritmos são iguais a 200 unidades, e o aritmo é igual a 8 unidades; isto satisfaz a proposição.» (Diofanto [17] pág. 36)

Neste primeiro exemplo, Diofanto representa o número procurado por 1 aritmo (que iremos designar por x). Facilmente se vê que o problema se reduz à equação $25x^2 = 200x$. *A resolução dada em simbologia actual foi a seguinte:* $25x^2 = 200x \Leftrightarrow 25x = 200 \Leftrightarrow x = 8$

□

Como já referi, a proposição 27 do mesmo livro é o primeiro problema que se reduz a uma equação do 2º grau completa, mas que Diofanto através da nova incógnita denominada aritmo transformou numa equação do 2º grau incompleta.

Problema I-27

«Encontrar dois números tais que a sua soma e o seu produto sejam dois números dados.

É preciso, no entanto, que o quadrado da semi-soma dos números procurados exceda por um quadrado o produto desses números; coisa que é figurativo.[9] Propomos portanto que a soma dos números seja 20 unidades, e que o produto seja 96 unidades.» (Diofanto [17] pág. 36 e 37)

[9] Segundo Ver Eecke ([17] pág. 37) ser figurativo significa que pode ser susceptível de representação geométrica através de transformações de áreas.

Em linguagem actual este problema reduz-se a resolver o sistema $\begin{cases} X + Y = 20 \\ X \times Y = 96 \end{cases}$,

que é equivalente a resolver a equação $X^2 + 96 = 20X$, *do tipo* $x^2 + q = px$.

«[Consideremos] que a diferença entre os números seja 2 aritmos. Daí que, como a soma dos números é 20 unidades, se dividirmos em duas partes iguais, cada uma das partes será metade da soma, ou seja, 10 unidades. Daí que, se nós juntarmos a uma das partes, e se retirarmos à outra parte, a metade da diferença entre os números, ou seja 1 aritmo, estabelece-se de novo que a soma dos números é 20 unidades, e que a sua diferença é 2 aritmos. Em consequência disso, consideremos que o número maior é 1 aritmo aumentado de 10 unidades, que são a metade da soma dos números; daí que o número mais pequeno será 10 unidades menos 1 aritmo, e temos [novamente] que a soma dos números é 20 unidades e que a diferença entre eles é 2 aritmos.

Temos também que o produto dos números é 96 unidades. Ora, o seu produto é igual a 100 unidades menos 1 quadrado de aritmo; se igualarmos isso a 96 unidades, vem que o aritmo é igual a 2 unidades. Em consequência disso, o número maior será 12 unidades e o mais pequeno 8 unidades, e estes números satisfazem a proposição.» (Diofanto [17] pág. 37 e 38)

Diofanto considerou que a diferença entre os dois números era 2 aritmos. Vamos representar um aritmo por x. Além disso, como a semi-soma dos números é 10, vem que os números são X= 10 – x e Y = 10 + x. Como o produto dos números é 96 resulta que: $(10-x)(10+x) = 96 \Leftrightarrow 100 - x^2 = 96 \Leftrightarrow x^2 = 4$ *donde se tira que x = 2 e os números procurados são 8 e 12.* □

Podemos ver o cálculo dos valores de X e de *Y* da seguinte forma:

$$X = 10 - \sqrt{10^2 - 96} \wedge Y = 10 + \sqrt{10^2 - 96}$$ **, que corresponde a**

$$X = \frac{X+Y}{2} - \sqrt{\left(\frac{X+Y}{2}\right)^2 - XY} \wedge Y = \frac{X+Y}{2} + \sqrt{\left(\frac{X+Y}{2}\right)^2 - XY}.$$

Como $X + Y = 20$ e $X \times Y = 96$, que são os coeficientes da equação $X^2 + 96 = 20X$, resulta que $X = \frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \wedge Y = \frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$, que são as fórmulas usadas já anteriormente pelos Babilónios para resolverem as equações do 2º grau deste tipo.

Note-se que a condição inicial dada por Diofanto: "é preciso, no entanto que o quadrado da semi-soma dos números procurados exceda por um quadrado o produto desses números", é suficiente para que se possa calcular a raiz quadrada, ou seja (no contexto em que Diofanto trabalhava) que a solução seja racional. Senão vejamos:

Temos que $\begin{cases} X + Y = S \\ X \times Y = P \end{cases}$. *Considerou-se que* $X = \dfrac{S}{2} - x$ *e que* $Y = \dfrac{S}{2} + x$.

Assim sendo, $X \times Y = \left(\dfrac{S}{2} - x\right)\left(\dfrac{S}{2} + x\right) = \left(\dfrac{S}{2}\right)^2 - x^2$. *Mas* $P = \left(\dfrac{S}{2}\right)^2 - x^2$ *é equivalente a* $\left(\dfrac{S}{2}\right)^2 - P = x^2$. □

Problema I-30

«Encontrar dois números tais que a sua diferença e o seu produto sejam dois números dados.

É preciso no entanto que o quádruplo do produto dos números, aumentado do quadrado da diferença, seja um quadrado; coisa que é também figurativo.

Propomos portanto que a diferença dos números seja 4 unidades e que o produto seja 96 unidades.» (Diofanto [17] pág. 40)

Neste caso, o problema cinge-se a resolver o sistema $\begin{cases} X - Y = 4 \\ X \times Y = 96 \end{cases}$, *que é equivalente quer à equação* $X^2 = 4X + 96$ *do tipo* $x^2 = px + q$, *quer à equação* $Y^2 + 4Y = 96$ *que é do tipo* $x^2 + px = q$.

«Que a soma dos números seja 2 aritmos. Ora, nós temos também que a sua diferença é 4 unidades, daí que o maior é 1 aritmo mais 2 unidades, e o menor é 1 aritmo menos 2 unidades; isto estabelece que a sua soma é 2 aritmos e que a sua diferença é 4 unidades.

Temos agora que o produto dos números é 96 unidades. Mas o produto dos números é 1 quadrado de aritmo menos 4 unidades. Igualemos isso a 96 unidades; o número maior é de novo 12 unidades e o mais pequeno 8 unidades; números esses que satisfazem o problema.» (Diofanto [17] pág. 40)

Como a diferença entre os números estava definida, Diofanto considerou que o aritmo (que eu represento por x) era a semi-soma dos números. Como a diferença entre eles é 4, o autor chegou à conclusão que $X = x + 2$ *e* $Y = x - 2$.

Como o produto entre os números é 96 resulta que $(x+2)(x-2)=96 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 96$ $\Leftrightarrow x^2 = 100 \Leftrightarrow x = 10$. *Assim sendo, os números procurados são o 12 e o 8.* □

Da mesma forma que anteriormente, podemos ver os cálculos dos valores de X e de Y como sendo $X = \sqrt{96 + 2^2} + 2 \wedge Y = \sqrt{96 + 2^2} - 2$, que correspondem a

$$X = \sqrt{XY + \left(\frac{X-Y}{2}\right)^2} + \frac{X-Y}{2} \wedge Y = \sqrt{XY + \left(\frac{X-Y}{2}\right)^2} - \frac{X-Y}{2}.$$

Como X − Y = 4 e X × Y = 96 que, novamente são os coeficientes das equações $X^2 = 4X + 96$ e $Y^2 + 4Y = 96$ dos tipos $x^2 = px + q$ e $x^2 + px = q$ respectivamente, resulta que $X = \sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2} + \frac{p}{2} \wedge Y = \sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2} - \frac{p}{2}$, que novamente são as fórmulas usadas já anteriormente pelos Babilónios para resolverem as equações do 2° grau destes dois tipos.

Novamente, a condição inicial dada por Diofanto: "é preciso no entanto que o quádruplo do produto dos números, aumentado do quadrado da diferença, seja igual a um quadrado", é para garantir que dê uma raiz quadrada racional. Senão vejamos:

Temos que $\begin{cases} X - Y = D \\ X \times Y = P \end{cases}$. *Considerou-se que* $X = x + \frac{D}{2}$ *e que* $Y = x - \frac{D}{2}$.

Assim sendo, $X \times Y = \left(x + \frac{D}{2}\right)\left(x - \frac{D}{2}\right) = x^2 - \left(\frac{D}{2}\right)^2$. *Temos então que* $x^2 - \left(\frac{D}{2}\right)^2 = P$, *que é equivalente a* $P + \left(\frac{D}{2}\right)^2 = x^2$. *Multiplicando ambos os membros desta última equação por 4, obtemos* $4P + D^2 = (2x)^2$. □

Os restantes problemas que se reduzem a uma equação do 2° grau determinada têm uma resolução muito semelhante às apresentadas.

2.2.2 EQUAÇÕES DO 2º GRAU INDETERMINADAS

O primeiro problema do 2º grau indeterminado que aparece nos livros de Diofanto é o problema 8 do livro II. Também neste tipo de problemas, o autor escreve as várias incógnitas em função da incógnita suplementar a que ele chama aritmo.

Mas vejamos tudo o que foi dito com o exemplo atrás referido:

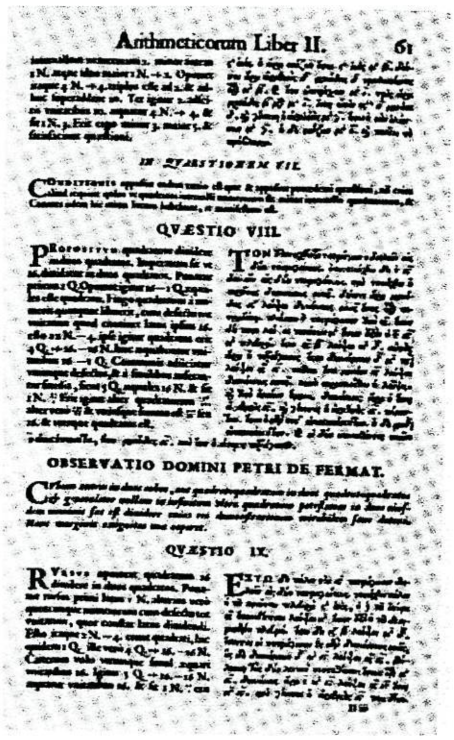
Problema II-8

«Divide um quadrado proposto em dois quadrados. Propomos portanto dividir 16 em dois quadrados.» (Diofanto [17] pág. 53 e 54)

O problema reduz-se a encontrar uma solução racional para a equação $k_1^2+k_2^2=16$.

«Consideremos que o primeiro número é 1 quadrado de aritmo. Temos então que o outro número será 16 unidades menos 1 quadrado de aritmo. É portanto necessário que 16 unidades menos 1 quadrado de aritmo seja igual a um quadrado.

Formemos o quadrado duma quantidade qualquer de aritmos diminuída de tantas unidades quantas a raiz de 16 unidades. Que seja o quadrado de 2 aritmos menos 4 unidades. Esse quadrado será portanto 4 quadrados de aritmo mais 16 unidades menos 16 aritmos. Igualemos isso a 16 unidades menos 1 quadrado de aritmo; juntemos às duas partes os termos negativos, e retiremos os semelhantes dos semelhantes. Vem que 5 quadrados de aritmos são iguais a 16 aritmos, e o aritmo vale $^{16}/_{5}$. Temos então que um dos números será $^{256}/_{25}$ e o outro será $^{144}/_{25}$. Ora, esses dois números adicionados valem $^{400}/_{25}$, que é 16 unidades, e cada um deles é um quadrado.» (Diofanto [17] pág. 53 e 54.)


Arithmeticorum Liber II. 61

QVÆSTIO VIII.

OBSERVATIO DOMINI PETRI DE FERMAT.

QVÆSTIO IX.

Página 61 da edição de 1670 da *Arithmetica* de Diofanto, que contém a resolução do problema II-8.

Diofanto supôs que k_1 fosse 1 aritmo, isto é $k_1 = x$. Em seguida considerou que $k_2 = ax - 4$ (um certo número de aritmos menos 4 unidades) e escolheu um caso particular:

$k_2 = 2x - 4$. *Calculou o quadrado de cada um dos números:* $k_1{}^2 = x^2$ *enquanto que o outro quadrado é* $k_2{}^2 = (2x-4)^2 = 4x^2 + 16 - 16x$. *Por fim, escreveu a equação que traduzia o problema e resolveu-a:*

$$x^2 + 4x^2 + 16 - 16x = 16 \Leftrightarrow x^2 + 4x^2 + 16 - 16x + 16x = 16 + 16x$$
$$\Leftrightarrow 5x^2 + 16 = 16 + 16x$$
$$\Leftrightarrow 5x^2 = 16x$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{16}{5}$$

No final, e uma vez que já tinha obtido o valor do aritmo, foi calcular o valor das incógnitas envolvidas no problema:

$$\therefore\ k_1{}^2 = x^2 = \left(\frac{16}{5}\right)^2 = \frac{256}{25} \text{ e } k_2{}^2 = (2x-4)^2 = \left(\frac{32}{5} - 4\right)^2 = \left(\frac{12}{5}\right)^2 = \frac{144}{25}.$$

Confirma-se que $k_1{}^2 + k_2{}^2 = \frac{256}{25} + \frac{144}{25} = \frac{400}{25} = 16$. □

É curioso referir que foi junto a este problema que Fermat enunciou, na margem do seu exemplar da *Aritmética* de Diofanto, o famoso resultado conhecido como "Último teorema de Fermat", só demonstrado há relativamente pouco anos, apesar de já terem passado mais de 350 anos da sua morte.

Pelo que atrás foi apresentado, podemos constatar que embora o trabalho de Diofanto se assemelhe muito à álgebra praticada na Babilónia[10], houve alguns progressos.

Vários autores, nomeadamente Mahammed ([37] pág. 25) e Struik ([45] pág. 105) são da opinião que, apesar de Diofanto não ter sistematizado a álgebra, mostrou na resolução dos seus problemas um alto grau de habilidade matemática e de engenho. Cajori adianta:

«A extraordinária habilidade de Diofanto permanece também noutra direcção: na sua ingenuidade maravilhosa de reduzir todos os tipos de equações a casos particulares que ele sabia resolver.» (Cajori ([7] pág. 62)

Não obstante o facto de Diofanto não ter generalizado os diferentes métodos, segundo Boyer ([6] pág. 133), o estudo em termos numéricos de tantos problemas, por vezes muito semelhantes, talvez fosse uma tentativa de conseguir tal generalização.

[10] Swift ([46] pág. 163-170) afirmou que a obra de Diofanto é " o mais belo florescimento da álgebra babilónica".

Apesar da sua válida contribuição ao nível da álgebra, foi com os árabes, nomeadamente com Al Khowarizmi, que a álgebra se assumiu como disciplina autónoma.

«A álgebra em Diofanto aparece como um instrumento para resolver os problemas: mas não é autónoma. O Aritmo, quanto a ele, é um artifício heurístico (...). A obra de Al Khowarizmi mostra-nos, pelo contrário, uma álgebra que constitui uma disciplina.» (Radford [38] pág. 77)

3 CIVILIZAÇÃO ÁRABE

Apesar da quase inexistente tradição matemática na civilização árabe, a partir do séc. VIII, com a constituição do vasto império islâmico, começava a surgir interesse pelos mais variados campos da ciência e uma grande predisposição para aprender. Segundo Youschkevitch ([51] pág. 4), no fim do séc. VIII e início do séc. IX reagruparam-se em Bagdad numerosos sábios e tradutores vindos de diferentes cidades do mundo. Certos califas[11] como Al Mansur (754-775) e Harun ar Rashid (786-809) receberam-nos e encorajaram-nos a recolher e desenvolver os conhecimentos existentes nas diferentes ciências, incluindo a matemática. Por exemplo, o califa Al Mansur mandou fundar uma grande biblioteca contendo os mais importantes manuscritos das civilizações anteriores; poucos anos depois o califa Al Mamum (813-833) mandou fundar em Bagdad uma academia de ciência chamada "Casa da Sabedoria".

Novamente segundo Youschkevitch ([51] pág. 6), o trabalho inicial desta comunidade cientifica consistia em estudar as obras da antiguidade e traduzi-las para árabe; passados 100 a 150 anos já estavam traduzidas as obras mais importantes de Euclides, Arquimedes, Apolónio, Herão, Ptolomeu e Diofanto.

Foi com esta civilização que se criaram as bases e toda uma estrutura sólida para que o ramo da matemática chamado álgebra pudesse surgir e desenvolver-se como uma verdadeira Ciência.

Como responsáveis de todos estes progressos há a destacar nomes como Al Khowarizmi, Abu Kamil, Al Khayyam e Al Qalasadi.

[11] Os califas eram os soberanos espirituais.

3. 1 AL KHOWARIZMI

Abu Abd Allah Mohammed Ben Musa Al Khowarizmi[12] viveu entre 780 e 850. Era originário de Khazen e foi um dos matemáticos que pertenceram à *"Casa da Sabedoria"*. Foi em Bagdad, o novo centro de Matemática do mundo após Alexandria, que Al Khowarizmi escreveu, entre 813 e 833, o seu célebre livro *Al Kitab al-muhtasar fi hisab al-jabr wa al-muqabala* cuja tradução à letra é *Breve tratado sobre o cálculo [para o processo] de restauração e comparação*. Foi da deturpação do termo al-jabr e da extensão do nome à resolução das equações que, no séc. XIV, surgiu a palavra álgebra. Segundo A. Djebar ([19] pág. 7) e E. Hebert ([30] pág. 29), todos os especialistas em história da matemática são unânimes em admitir que foi com este pequeno tratado que se deu o nascimento oficial da álgebra como disciplina e com tudo o que lhe é adjacente: nome, objectos, algoritmos, demonstrações, aplicações etc. É esse o motivo principal pelo qual Al Khowarizmi é considerado por muitos o "Pai da Álgebra". De salientar que a forma como o autor apresenta a álgebra é simples e prática, sendo o seu conteúdo bastante próximo da álgebra elementar dos nossos dias. Djebar ([32] pág. 72) classificou-o mesmo como a "melhor exposição elementar da álgebra dos tempos modernos".

Al Khowarizmi num selo da União Soviética de *A History of Mathematics* de Vitor Katz.

«Este livro foi largamente difundido, e pode ser considerado como a referência da primeira escola matemática arabo - islâmica. (...) Este livro constituiu uma fonte, por excelência; para todos os sucessores de Al Khowarizmi.» (Hebert [30] pág. 29)

Saliente-se porém que o livro do "Pai da álgebra" era destinado ao público em geral. Al Khowarizmi, no prefácio do seu livro, confirmou tal facto quando escreveu:

Fui encorajado «...a escrever um pequeno trabalho sobre o cálculo [para o processo] de al-jabr wa al-muqabala, e ele contém tudo o que há de mais fácil e mais útil em aritmética, como aquilo que os homens necessitam constantemente para repartirem as suas heranças, seus donativos, suas partilhas, nas decisões, no comércio, e noutras transacções que eles fazem entre eles, [e que são] relativas à medição de

[12] A grande maioria dos nomes árabes aparecem muitas vezes escritos de forma diferente consoante os livros que se consulte.

terrenos, à escavação de canais, no cálculo geométrico, ou outros aspectos de vários tipos que possam surgir de novo.» (Radford [38] pág. 77).

Note-se também que segundo Sesiano ([41] pág. 103), os tratados árabes não só não usavam qualquer simbolismo algébrico, como também não usavam sinais numéricos; usavam apenas o discurso contínuo.

Relativamente ao conteúdo do livro, Al Khowarizmi começou por identificar os objectos da álgebra, dizendo que existem três classes de números:

- o *Dirham*[13] que representava os números simples, o dinheiro que se possui;
- o *Gizr* ou *Say* que designava a raiz, a incógnita, a coisa;
- o *Mal* que era o nome dado ao quadrado da coisa ou a um determinado montante.

Estas quantidades eram vistas, pelo autor da obra, como sendo objectos matemáticos puros, desligados de um objecto concreto.

Um dos progressos da obra de Al Khowarizmi foi a introdução das equações na resolução dos seus problemas. As equações serviram inclusivamente de base a toda a sua obra, que como já vimos, deu origem à álgebra. As equações surgiram quando o autor tomou consciência de que números de diferentes espécies podiam ser iguais entre si:

«Um número pertencente a uma classe pode ser igual a um número de uma outra classe; tu podes dizer por exemplo, "que quadrados são iguais a raízes" ou "que quadrados são iguais a números" ou "que raízes são iguais a números."» (Radford [38] pág. 78).

Tendo em conta que apenas eram aceites coeficientes e soluções positivas, as diferentes combinações possíveis entre os números das três classes existentes definiam os seis tipos de equações que deviam ser estudadas. Al Khowarizmi dividiu esses seis tipos de equações em dois conjuntos: três tipos de equações simples e três tipos de equações combinadas. São elas:

Equações simples

1º tipo	quadrados iguais a raízes,	$ax^2 = bx$
2º tipo	quadrados iguais a números,	$ax^2 = c$
3º tipo	raízes iguais a números.	$ax = b$

[13] O Dirham era a unidade monetária árabe.

Equações combinadas

4º tipo raízes e quadrados iguais a números, $x^2 + px = q$

5º tipo quadrados e números iguais a raízes, $x^2 + q = px$

6º tipo raízes e números iguais a quadrados. $px + q = x^2$

Saliente-se porém que Al Khowarizmi evitou sempre que possível as equações com soluções irracionais. Segundo Youschkevitch ([51] pág. 39), os exemplos apresentados tinham quase sempre coeficientes racionais e soluções inteiras. Entre as raras excepções, encontram-se algumas equações do 2º tipo ($a\,x^2 = b$) e a equação $10x=(10-x)^2$ que é equivalente a $x^2 + 100 = 30x$.

Note-se porém que os números que aparecem nas equações e a que nós hoje chamamos coeficientes não eram vistos como números que estavam a multiplicar pela raiz ou pelo quadrado, mas sim como as quantidades de raízes ou de quadrados que estavam envolvidas no problema.

Para reduzir uma equação quadrática qualquer à forma canónica, Al Khowarizmi apresentou dois processos: o de al-jabr e o de al-muqabala.[14]

Aos nossos olhos, o processo de **al-jabr** consiste em desembaraçarmo-nos de sinais (-) que aparecem na equação, bastando para isso passar termos negativos da equação de um membro para outro, trocando-lhes o sinal. Mas, para Al Khowarizmi não existiam termos negativos; ao invés, existiam números ou combinações incompletas de números de diferentes espécies. O processo de al-jabr consistia em restaurar, completando essa combinação de números naquilo que lhe faltava. Al Khowarizmi sabia que teria que juntar a mesma quantidade a ambos os membros da equação para que a igualdade continuasse válida. Senão, vejamos o seguinte exemplo:

«... a soma é cem mais dois quadrados sem vinte coisas, e isso é igual a cinquenta e oito dinheiros. Completa agora cem e dois quadrados sem vinte coisas juntando vinte coisas a cinquenta e oito; fica cem mais dois quadrados igual a cinquenta e oito e vinte coisas.» (Radford [38] pág. 79).

$$100 + 2x^2 - 20x = 58$$
$$\Leftrightarrow 100 + 2x^2 - 20x + 20x = 58 + 20x$$
$$\Leftrightarrow 100 + 2x^2 = 58 + 20x$$

[14] Os nomes destes processos surgem inclusivamente no título do livro. Segundo Sesiano ([41] pág. 103) estes dois processos já tinham sido usados e explicados por Diofanto na sua obra, embora sem lhes ter dado qualquer nome.

O processo de **al-muqabala** consistia em reduzir todos os termos da mesma espécie a um só, agrupando os vários termos semelhantes. O autor também considerava ser processo de al-muqabala a divisão de todos os termos da equação pelo número de quadrados que estavam envolvidos no problema. Continuemos com o exemplo anterior:

«...fica cem mais dois quadrados igual a cinquenta e oito e vinte coisas. Reduz isso a um quadrado, tomando a metade de tudo o que tu tens. Isso dá: cinquenta dinheiros e um quadrado, que é igual a vinte e nove dinheiros e dez coisas. Então reduz isso, tomando vinte e nove de cinquenta, resta vinte e um e um quadrado igual a dez coisas.» (Radford [38] pág. 79.)

$$
\begin{aligned}
& 100 + 2x^2 = 58 + 20x \\
\Leftrightarrow\ & 50 + x^2 = 29 + 10x \\
\Leftrightarrow\ & 50 - 29 + x^2 = 10x \\
\Leftrightarrow\ & 21 + x^2 = 10x
\end{aligned}
$$

Note-se porém que a ordem pela qual os processos al-jabr e al-muqabala eram aplicados não era arbitrária. Se se trocasse essa ordem, poderíamos ser conduzidos a uma expressão igual a zero (a qual não teria qualquer significado). Vejamos isso através dum outro exemplo:

Suponhamos que temos a equação $17x^2 - 9x - 46 = 12x^2 - 3x - 44$. *O processo de al-muqabala transformá-la-ia na equação* $5x^2 - 6x - 2 = 0$ *que carecia de significado. Em contrapartida, o processo de al-jabr permitia obter* $17x^2 = 12x^2 - 3x - 44 + 9x + 46$, *e posteriormente, o de al-muqabala conduziria a* $5x^2 = 6x + 2$.

Com os dois processos referidos, era possível reduzir toda e qualquer equação quadrática à sua forma canónica. Depois, era só aplicar a essa equação (na sua forma canónica) o algoritmo correspondente. Para cada um dos seis tipos de equações, Al Khowarizmi apresentou um algoritmo. No caso das equações simples (1°, 2° e 3° tipo) foi dada a resolução através de exemplos, sem apresentar qualquer demonstração. Isso talvez se devesse ao facto de tais demonstrações serem simples e já conhecidas da restante comunidade matemática.

Nas equações combinadas (4°, 5° e 6° tipo) era dado o caso geral, mas a resolução algébrica (algoritmo) era apresentada através de um exemplo numérico concreto. Curiosamente, estas resoluções são idênticas às dadas pelos Mesopotâmios. Hebert ([30] pág. 33) é mesmo da opinião que Al Khowarizmi terá recebido esse conhecimento de herança dessa civilização.

No entanto, depois de resolver os problemas de uma forma algébrica, Al Khowarizmi apresentava sempre uma demonstração geométrica. Segundo Djebar ([32] pág. 73), o facto de o autor pensar que era necessário demonstrar geometricamente os seus resultados demonstra uma nítida influência do rigor grego.

Vejamos também a opinião de Berggren sobre as fontes usadas por Al Khowarizmi:

«Neste livro estão evidentes uma variedade de influências incluindo métodos hindus e babilônicos que levam à solução daquela a que chamamos equações quadráticas, e conceitos gregos na classificação dos problemas em diferentes tipos, bem como nas provas geométricas da validade dos métodos envolvidos.» (Berggren [3] pág. 7)

Apesar de Al Khowarizmi apresentar os algoritmos e as demonstrações geométricas para casos particulares, A. P. Youschkevitch ([51] pág. 37) e Hebert ([29] pág. 33) afirmam que o autor tinha consciência de que o seu raciocínio era válido para as outras equações do mesmo tipo.

De seguida, vou apresentar a análise que Al Khowarizmi fez das equações do 2° grau simples.

Equações do 1º tipo $ax^2 = bx$

«Aqui temos um exemplo de quadrados iguais a raízes: um quadrado é igual a cinco das suas raízes. A raiz do quadrado é 5 e 25 constitui o próprio quadrado, que é evidentemente igual a 5 vezes a sua raiz. Vejamos um outro exemplo:

Um terço de um quadrado é igual a quatro vezes a raiz. A raiz do quadrado é 12, e 144 é o número que corresponde ao próprio quadrado.

E agora, do mesmo modo, cinco quadrados são equivalentes a 10 raízes. Um quadrado é portanto igual a 2 raízes, a raiz do quadrado é 2, e 4 representa o quadrado. (...)» (Chester [11] pág. 9)

Os exemplos e as respectivas resoluções apresentados em simbologia actual correspondem a:

Casos particulares

$$x^2 = 5x \Leftrightarrow x = 5 \Leftrightarrow x^2 = 25$$

$$\frac{x^2}{3} = 4x \Leftrightarrow x^2 = 12x \Leftrightarrow x = 12 \Leftrightarrow x^2 = 144$$

$$5x^2 = 10x \Leftrightarrow x^2 = 2x \Leftrightarrow x = 2 \Leftrightarrow x^2 = 4$$

Caso geral

$$ax^2 = bx \Leftrightarrow x^2 = \frac{b}{a}x \Leftrightarrow x = \frac{b}{a} \Leftrightarrow x^2 = \left(\frac{b}{a}\right)^2$$

Para resolver este tipo de equações, o autor ora reduzia o 1º membro da equação a um só quadrado, ora completava o quadrado, consoante a quantidade de quadrados fosse superior ou inferior a 1 respectivamente. Depois, dividindo ambos os membros por x obtinha o valor da raiz. O valor do quadrado era imediato.

Note-se que a solução nula era simplesmente ignorada.

Equações do 2º tipo $\quad ax^2 = c$

«Mostra-se do seguinte modo que quadrados são iguais a números:

Um quadrado é igual a 9. O número 9 dá a área de um quadrado, daí que o número 3 seja a raiz.

Do mesmo modo, quando estamos perante uma grande ou pequena quantidade de quadrados do quadrado procurado, devemos proceder a uma redução, que nos permita definir uma equivalência com um só quadrado. (...) Obtemos então uma equação que define em números o valor de um só quadrado.

Se tivermos menos que um quadrado, por exemplo, se tivermos um terço, um quarto, ou a quinta parte dum quadrado ou duma raiz, a equação deve ser tratada da mesma maneira, de modo que apareça, o valor do quadrado completo ou duma só raiz. Examinemos o seguinte exemplo:

Cinco quadrados são equivalentes a 80. Daí que um quadrado corresponda a uma quinta parte do número 80, que é evidentemente 16. Vejamos um outro exemplo:

A metade de um quadrado é equivalente a 18. O quadrado inteiro vale portanto 36.

Deste modo, todos os quadrados, qualquer que seja o seu número serão reduzidos a um só, ou a parte do quadrado será convertida num quadrado inteiro. É necessário proceder do mesmo modo no que concerne aos números que acompanham os quadrados.» (Chester [11] pág. 9 e 10)

Os exemplos e as respectivas resoluções apresentadas em linguagem e simbologia actual foram os seguintes:

Casos particulares

$$\begin{aligned} &x^2 = 9 \\ \Leftrightarrow\ &x = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &5x^2 = 80 \\ \Leftrightarrow\ &x^2 = \frac{80}{5} \\ \Leftrightarrow\ &x^2 = 16 \\ \Leftrightarrow\ &x = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}x^2 = 18 \\ \Leftrightarrow\ &x^2 = 36 \\ \Leftrightarrow\ &x = 6 \end{aligned}$$

Caso geral

$$\begin{aligned} &ax^2 = c \\ \Leftrightarrow\ &x^2 = \frac{c}{a} \\ \Leftrightarrow\ &x = \sqrt{\frac{c}{a}} \end{aligned}$$

Para resolver este tipo de equações, à semelhança do que fez no caso anterior, o autor reduzia o 1º membro da equação a um só quadrado, dividindo ou multiplicando ambos os membros pelo mesmo número. Obtinha assim o valor do quadrado, e o valor da raiz seria portanto imediato.

Note-se que a raiz negativa nunca era considerada.

Equações do 3º tipo $\quad a\,x = b$

«Para vermos o que é raízes iguais a números, vejamos o seguinte exemplo:

Uma raiz é igual a 3. Daí que o número 9 seja o quadrado dessa raiz. Vejamos um outro exemplo:

Quatro raízes iguais a 20. Então a raiz desse quadrado será igual a 5.

Vejamos agora um outro exemplo: a metade de uma raiz é igual a 10. A raiz inteira é portanto igual a 20, daí que, é evidente que 400 represente o quadrado.» (Chester [11] pág. 10)

Casos particulares

$$x = 3 \quad \Leftrightarrow x^2 = 9$$

$$4x = 20 \quad \Leftrightarrow x = 5 \quad \Leftrightarrow x^2 = 25$$

$$\frac{1}{2}x = 10 \quad \Leftrightarrow x = 20 \quad \Leftrightarrow x^2 = 400$$

Caso geral

$$a\,x = b$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{b}{a}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \left(\frac{b}{a}\right)^2$$

Uma vez que nas equações do 1º tipo, a solução nula era ignorada, as equações do 3º tipo têm uma resolução equivalente às do 1º tipo.

Com os exemplos apresentados, podemos concluir que o autor não procurava apenas o valor da raiz, nem apenas o valor do quadrado, mas ambos.

Vejamos agora os algoritmos e as demonstrações dadas por Al Khowarizmi para os três tipos de equações combinadas.

Equações do 4º tipo $\quad x^2 + p\,x = q$

«Quando os tesouros e as raízes são iguais a um número, é como quando tu dizes: um tesouro e dez das suas raízes são iguais a trinta e nove dinheiros.

O seu significado é que ao teu bem, se lhe juntares o equivalente a dez das suas raízes, atinge trinta e nove. O processo [de resolução] consiste em dividir as raízes por dois[15], que é cinco neste problema. Multiplica-lo por si próprio que dá vinte e cinco. Junta o que obtiveste aos trinta e nove. Isso dará sessenta e quatro. Tomas então a sua raiz quadrada que é oito e retiras-lhe a metade [do número] das raízes que são cinco. Resta três que é a raiz do bem que tu procuras e o bem é nove.» (Djebar **[18]** pág. 5)

Este problema reduz-se à resolução da equação $x^2 + 10x = 39$, *que é do tipo* $x^2 + px = q$.

O algoritmo seguido pelo autor foi $x = \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 + 39} - \frac{10}{2} = 3$ *que para o caso geral corresponde a* $x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} - \frac{p}{2}$.

Demonstração

«Quanto ao problema: um quadrado e dez [das suas raízes] é igual a trinta e nove, a figura [correspondente] é uma superfície quadrada de lados desconhecidos, e é o quadrado que tu queres conhecer, daí que tu queiras conhecer a raiz.

Seja essa a superfície AB; e qualquer um dos seus lados é a sua raiz. Para cada um dos seus lados, se tu o multiplicares por um número qualquer, então o montante desse número pode ser visto como o número de raízes que estão junto à superfície.

Como dissemos que com o quadrado, temos dez das suas raízes, nós tomamos o quarto de dez que é dois e meio, e nós transformamos cada um desses quartos <em rectângulos> juntamente com um dos lados da superfície. Teremos assim, com a primeira superfície que é a superfície (AB), quatro [novas] superfícies iguais, cujo comprimento é igual à raiz da superfície (AB) e a sua largura é dois e meio; são elas as superfícies (H), (T), (K), (J). Resulta uma superfície de lados iguais, também desconhecidos, mas deficientes nos seus quatro cantos; cada canto está deficiente [um quadrado] de dois e meio por dois e meio. Então, se tivermos necessidade de juntar [alguma coisa] de modo que a superfície seja quadrada, será dois e meio por dois e meio, quatro vezes, o que dá o valor total de vinte e cinco.

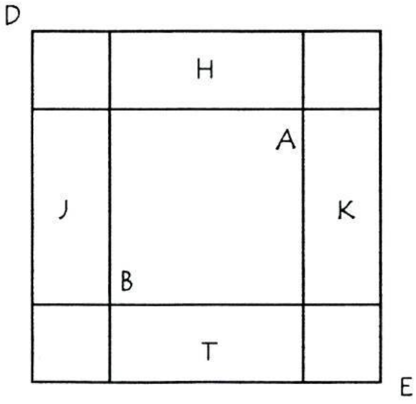
---

[15] **Metade das raízes deve ser entendida como metade do coeficiente das raízes, isto é, metade do número de raízes envolvidas no problema.**

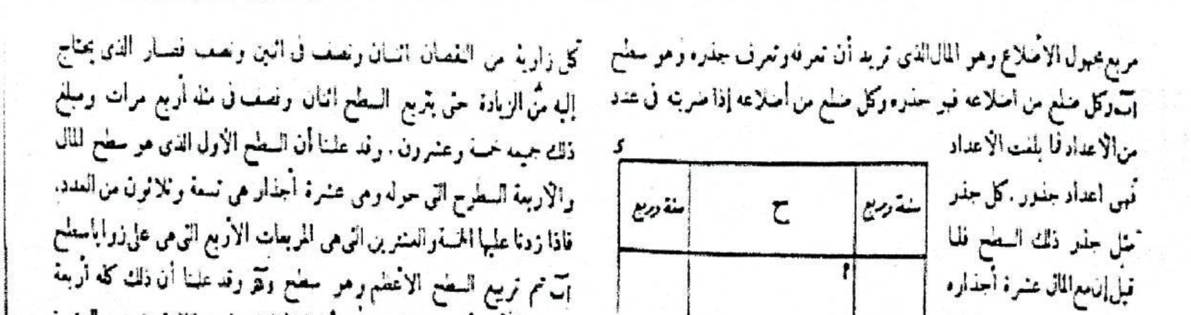
Ora, nós sabemos que a primeira superfície, que é a superfície do bem, juntamente com as quatro superfícies que a rodeiam e que valem dez raízes, [são iguais] a trinta e nove em número.

Se nós lhe juntarmos os vinte e cinco que são os quatro quadrados que estão nos cantos da superfície (AB), a área da superfície maior que é DE será completada. Sabemos portanto que tudo isso será sessenta e quatro, e que um dos seus lados é a sua raiz, que é oito.

Se retirarmos a oito o equivalente a duas vezes um quarto de dez, que é cinco, e são as extremidades do lado da superfície maior que é DE; resta o lado [inicial] que é três, que é a raiz do quadrado [procurado]. (...) E esta é a figura:

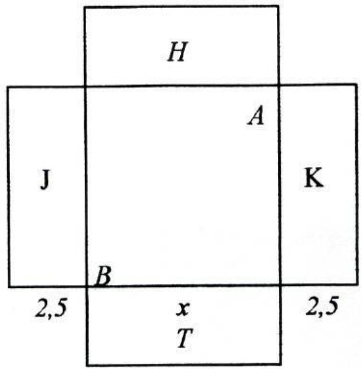


» (Djebar [18] pág. 6 e 7)



Um extracto do livro *Al Kitab al-muhtasar fi hisab al-jabr wa al-muqabala* de Al Khowarizmi onde aparece esta demonstração de *Decouvrir les mathematiques arabes* de E. Hebert

Al Khowarizmi representa o bem procurado (x^2) por um quadrado (AB) de lado desconhecido (x). Pelo facto do problema proposto ser "um quadrado e dez das suas raízes é *igual a 39", o autor juntou ao quadrado inicial uma superfície cuja área é 10x, subdividindo em quatro rectângulos iguais cujos lados são x e 2,5. Obteve assim a seguinte figura:*



Pelas condições do problema, a área desta nova figura é 39. Para completar esta figura de modo a obter um quadrado falta em cada um dos 4 cantos, 1 pequeno quadrado de lado 2,5. A área total desses 4 quadrados é $4 \times 2{,}5^2 = 25$.

Juntando esses quatro quadrados, obtém-se a figura por ele apresentada.

A área dessa figura, ou seja do quadrado maior será portanto 25 + 39, isto é 64. Sendo assim, o lado do quadrado maior é $\sqrt{64}$, que é 8. Logo, o lado do quadrado inicial (x) é $8 - 2 \times 2{,}5 = 3$.

Está assim encontrado o valor da raiz e o quadrado completo vale 9. □

Mas, se repararmos, existe algumas diferenças entre os cálculos feitos aquando da resolução numérica e os cálculos feitos na demonstração geométrica do mesmo problema. Os cálculos feitos na resolução numérica foram $x = \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 + 39} - \frac{10}{2}$ enquanto que na resolução geométrica foram $x = \sqrt{4 \times \left(\frac{10}{4}\right)^2 + 39} - 2 \times \frac{10}{4}$.

Apesar das duas fórmulas serem obviamente equivalentes, Al Khowarizmi explicou a pequena diferença que existe entre elas:

«Nós dividimos a meio as dez raízes, multiplicamos [o resultado] por si próprio, e juntamos [o resultado] ao número que é trinta e nove, a fim de completar a construção da superfície maior, naquilo que lhe faltava nos seus quatro cantos, pois todo o número cujo quarto é multiplicado por si próprio, e depois por quatro, é como o produto da sua metade por si própria.

Somos portanto dispensados de [multiplicar] o quarto por si próprio, e depois por quatro, multiplicando apenas a metade por si própria.» (Djebar [18] pág. 7)

Equações do 5º tipo $\quad x^2 + q = p\,x$

«Quando os quadrados e os números são iguais às raízes é como quando tu dizes: Um quadrado e vinte e um em número é igual a dez das suas raízes. Isto vale também para o teu bem, que é tal que se lhe juntares vinte e um dinheiros, a soma que daí resulta é igual a dez raízes desse bem. O método de resolução consiste no seguinte:

Toma metade das raízes, isto é cinco. Multiplica-as por elas próprias, dá vinte e cinco. Retira-lhe os vinte e um que é o que nós dissemos que está junto do quadrado, restará quatro. Toma a sua raiz que é dois. Retira [esse valor] à metade das raízes que são cinco. Restam três. Isso é a raiz do quadrado que tu procuras e o quadrado é nove.

Se tu quiseres, junta a raiz (de quatro) à metade das raízes. Isso dá sete que é [também] a raiz do quadrado que tu procuras, e o quadrado é quarenta e nove.» (I. R. E. M. Paris [32] pág. 76)

Em linguagem actual, o problema cinge-se a resolver a equação $x^2 + 21 = 10x$ *que é do tipo* $x^2 + q = p\,x$.

O algoritmo dado para resolver esta equação foi: $x = \frac{10}{2} - \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 - 21} = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = 9$ *que corresponde no caso geral a* $x = \frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$.

Note-se que esta equação tem duas soluções positivas. Para obter a outra solução, como o próprio autor referiu, basta alterar a última operação (que foi indicada no algoritmo) para uma adição. O valor da segunda solução é $x = \frac{10}{2} + \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 - 21} = 7 \Rightarrow x^2 = 49$,

que corresponde a $x = \frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$.

Demonstração:

«Quanto à (justificação da solução de): um quadrado e vinte e um dinheiros é igual a dez das suas raízes, nós tomamos para o quadrado uma superfície quadrada de lados desconhecidos, é a superfície (AD), depois juntamo-lhe uma superfície de lados paralelos de largura igual a um dos lados da superfície (AD). Isso será o lado EN, e a superfície será (EB).

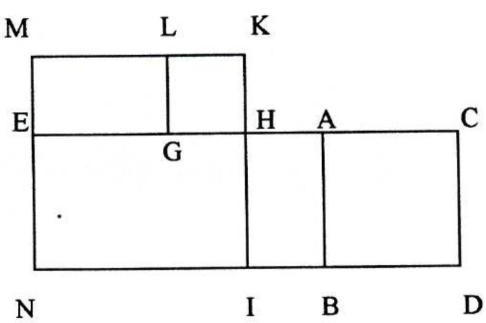
O comprimento das duas superfícies reunidas será portanto CE. Nós sabemos que o seu comprimento é igual a dez em número pois para toda a superfície quadrada de lados e ângulos iguais, um dos seus lados multiplicado por um, é igual à raiz dessa superfície, e (se for multiplicado) por dois, (será igual a) duas das suas raízes.

Como nós dissemos: Um quadrado e vinte e um é igual a dez das suas raízes, então nós sabemos que o comprimento do lado CE é dez em número, pois o lado CD é igual ao lado do quadrado.

Depois, nós dividimos o lado CE a meio, no ponto H. Temos portanto que o segmento EH é igual ao segmento HC. (Seja I o ponto médio de DN). Sabemos que HI é igual a CD. Juntemos ao segmento HI, no seu prolongamento, o equivalente ao excesso de CH sobre HI, (Juntemos ao segmento EN, no seu prolongamento, o segmento EM) a fim de que a superfície (NK) seja um quadrado. O segmento IK, é portanto igual a KM. Temos portanto, uma superfície quadrada de ângulos e lados iguais, que é a superfície (MI). Ora, nós vimos que o segmento IK é (igual a) cinco, e que os seus lados são iguais. A superfície é portanto (igual a) vinte e cinco, que é o resultado do produto da metade das raízes por elas próprias, (isto é) cinco (a multiplicar) por cinco que dá vinte e cinco. (Mas), nós vimos que a superfície (EB) vale os vinte e um que se juntaram ao quadrado.

Com a ajuda do segmento IK que é um dos lados da superfície (MI), nós separamos (EI) da superfície (EB), e resta-nos a superfície (AI). Nós tomamos do segmento KM, o segmento KL que é igual ao segmento HK (e sobre HE, o segmento HG igual a LK). Nós sabemos que o segmento IH é igual ao segmento ML, e o resto do segmento MK, que é o segmento LK, é igual ao segmento KH. A superfície (MG) é portanto igual a (IA).

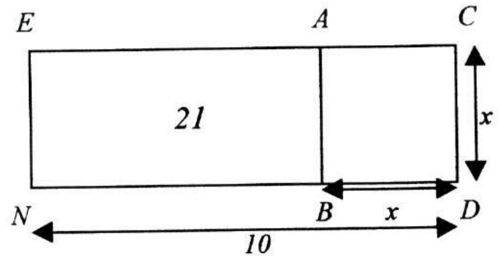
Vemos portanto que a superfície (EI) aumentada pela superfície (MG) é igual à superfície (EB) que vale vinte e um. Mas, a superfície (MI) é (igual a) vinte e cinco. Daí que quando nós retiramos à superfície (MI) as superfícies (EI) e (MG) que são (iguais a) vinte e um, resta uma pequena superfície que é a superfície (GK) que vale a diferença entre os vinte e cinco e os vinte e um, que dá quatro. A sua raiz quadrada é o segmento GH que é igual ao segmento HA, que é (igual a) dois. Se tu o retirares ao segmento HC que é metade das raízes, resta o segmento AC que é (igual a) três, e é a raiz do primeiro quadrado. Se tu juntares ao segmento CH que é (igual a) metade das raízes, dará sete que é o segmento GC. Este será a raiz dum quadrado maior [que o primeiro quadrado], e que, se tu lhe juntares vinte e um, [também] é igual a dez das suas raízes. E aqui está a figura (da prova)[16]:



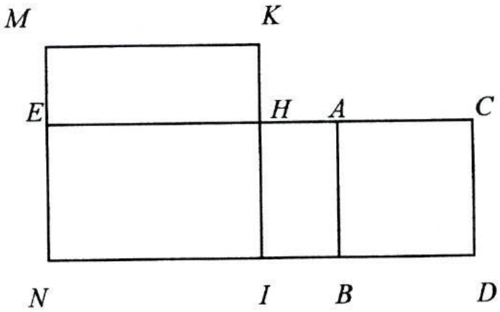
» (I. R. E. M. Paris [32] pág. 76)

[16] As letras da figura apresentada não são as mesmas que aparecem no livro onde a transcrição do texto foi retirada, pois na figura apresentada nesse livro existem algumas gralhas. Alterei as letras que estavam na figura de modo ao texto fazer sentido.

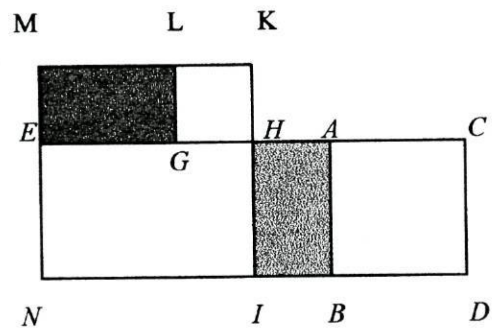
Al Khowarizmi representa o quadrado (x^2) por uma superfície quadrada (AD) de lado desconhecido (x). Em seguida, e sobre um dos lados do quadrado constrói um rectângulo de área igual a 21; trata-se do rectângulo EB. Pelas condições do problema ($x^2 + 21 = 10x$), conclui-se que o comprimento desse rectângulo tomado com o lado do quadrado inicial vale 10. A figura completa é ED, e vale 10 raízes do quadrado. Eis a figura:



A seguir, o autor do livro dividiu o segmento EC a meio no ponto H, (e consequentemente o segmento ND no ponto I) e construiu um quadrado sobre esse lado (o lado desse quadrado corresponde a metade do número das raízes).



Para terminar, construiu no canto superior direito de NK um quadrado sobre o lado KH, obtendo assim a seguinte figura:



A demonstração consiste no seguinte:

Por hipótese e por construção, temos que a área de AD é x^2 e a de EB é 21. Pelas condições do problema ($x^2 + 21 = 10x$) temos que a superfície ED vale 10x, isto implica que o segmento ND mede 10. Como I é o ponto médio de ND e NK é um quadrado, temos que NK vale $\left(\frac{10}{2}\right)^2 = 5^2 = 25$.

Como por construção MK = KI e KL = KH, concluiu-se que ML = HI. Além disso, como LG = KH = HA, o autor conclui que as superfícies MG e IA são iguais. De tudo o que vimos, conclui-se que:

$$
\begin{aligned}
\text{área de } GK &= \text{área de } KN - (\text{área de } NH + \text{área de } MG)\\
&= \text{área de } KN - (\text{área de } NH + \text{área de } IA)\\
&= \text{área de } KN - \text{área de } EB\\
&= 25 - 21\\
&= 4.
\end{aligned}
$$

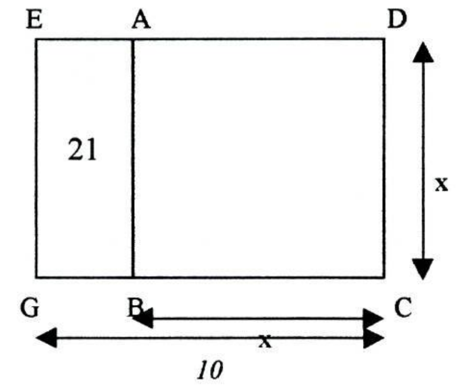
Daí se conclui que HG = 2. Como HG = HA vem que x = CA = HC – HA = 5 – 2 = 3 ficando assim resolvido o problema. □

A demonstração acima apresentada, refere-se à primeira solução da equação. Segundo Youschkevitch ([51] pág. 38), não se encontra qualquer demonstração para a segunda solução nos manuscritos árabes de Al Khowarizmi conservados em Oxford, apesar deste autor ser de opinião que o matemático conhecesse tal demonstração. No entanto, e ainda segundo Youschkevitch ([51] pág. 38), tal demonstração e a respectiva figura suporte encontram-se já em numerosas versões latinas da obra de Al Khowarizmi.

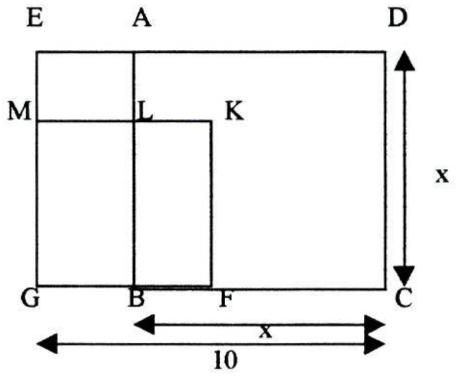
Note-se que, segundo Sesiano ([41] pág. 106), tal demonstração e a respectiva figura aparecem na obra de um contemporâneo de Al Khowarizmi, chamado Ibn Turk. Essa demonstração é, por sinal, muito semelhante à apresentada por Al Khowarizmi para a primeira solução.

Vejamos então, em linguagem e simbologia actual, como se obtém essa figura e a respectiva demonstração:

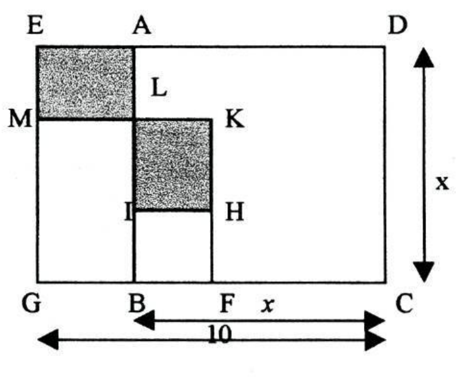
Como no caso anterior, vamos representar o quadrado (x^2) por uma superfície quadrada que, neste caso, designamos por AC. Em seguida, de modo análogo ao que foi feito anteriormente, constrói-se um rectângulo de área 21 (que desta vez será menor que o quadrado) em que um dos lados é o lado do quadrado desenhado anteriormente e o outro é *tal que, tomado juntamente com esse lado perfaz 10 - trata-se do rectângulo BE. Desta forma, tendo em atenção as condições do problema, EC tem de área 10x e consequentemente o segmento GC mede 10.*



A seguir, o autor terá dividido o segmento GC a meio no ponto F e construído um quadrado sobre o lado GF (novamente, o lado desse quadrado corresponde à metade do número das raízes).



Por fim, construindo um quadrado sobre BF obtém-se a figura[17] *pretendida:*



[17] Figura tirada do livro de Youschkevitch ([51] pág. 193).

A demonstração para este caso consiste no seguinte:

Por construção, temos que a área de AC é x^2 e a de EB é 21. Também por construção, temos que GC é igual a 10. Como F é o ponto médio de GC vem que GF = FC = 5, daí que a área de GK seja igual a 5^2 ou seja 25.

Por um raciocínio análogo ao que foi feito na demonstração para a primeira solução, temos que as superfícies HL e LE são iguais. Então:

$$\begin{aligned} \text{área de } IF &= \text{área de } GK - (\text{área de } BM + \text{área de } HL) \\ &= \text{área de } GK - (\text{área de } BM + \text{área de } LE) \\ &= \text{área de } GK - \text{área de } EB \\ &= 25 - 21 \\ &= 4 \end{aligned}$$

Daí se conclui que BF = 2. Então x = CB = CF + FB = 5 + 2 = 7 ficando assim resolvido o problema. □

O facto das equações do 5° tipo poderem ter mais do que uma solução (positiva) não passou desapercebido a Al Khowarizmi, e como tal foi também explorado. O autor explicou como se pode ver à partida se uma equação deste tipo tem ou não soluções, e caso as tenha, quantas são. Este estudo corresponde a estudar o sinal do que chamamos hoje binómio discriminante.

Al Khowarizmi alerta ainda para o facto de existirem alguns problemas que conduzem a equações deste tipo, que podem ter duas soluções, embora só uma dessas soluções satisfaça as condições iniciais do problema: neste tipo de situações é, portanto, necessário fazer as respectivas verificações. Mas vejamos tudo isto nas próprias palavras de Al Khowarizmi:

«Se tu encontrares um problema que se reduza a este caso, verifica a sua validade pela adição, se ela não (se verificar), ela será então necessariamente verificada pela subtracção.

Este caso resolve-se pela regra da adição, e pela da subtracção, e isto não se passa assim nos outros casos entre os três onde há necessidade de tomar a metade das raízes.[18]

Aprende também que, neste caso, se nós tomarmos metade das raízes, e se as multiplicarmos por elas próprias, [e se] o resultado for inferior aos dinheiros que estão junto do quadrado, então o problema será impossível.

Se for igual ao número de dinheiros, a raiz do quadrado é portanto exactamente igual à metade das raízes sem qualquer aumento ou diminuição.» (I. R. E. M. Paris [32] pág. 76)

[18] O autor está-se a referir às equações do 4°, 5° e 6° tipo.

Equações do 6º tipo $px + q = x^2$

«Para as equações deste tipo, propomos o seguinte: 3 raízes e 4 números são iguais a um quadrado. (...) Divide-se por 2 o número das raízes; obtêm-se $1\frac{1}{2}$; multiplicamos de seguida esse número por ele próprio, faz $2\frac{1}{4}$. A esse número junta-se 4, faz $6\frac{1}{4}$. Extrai-se a raiz quadrada desse número; obtêm-se $2\frac{1}{2}$. Junta-se essa raiz a metade do número das raízes, isto é $1\frac{1}{2}$, obtêm-se 4, que corresponde à raiz do quadrado. O quadrado no seu conjunto vale 16.» (Chester [11] pág. 14)

O problema traduz-se pela equação $3x + 4 = x^2$, *que é do tipo* $px + q = x^2$. *O algoritmo apresentado foi* $x = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 4} + \frac{3}{2} = 4 \Rightarrow x^2 = 16$, *que corresponde no caso geral a*

$$x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} + \frac{p}{2}.$$

Demonstração:

«Três raízes e quatro números são iguais a um quadrado. Eu considero um quadrado de lado desconhecido. Seja ABCD, e eu declaro que esse quadrado, como dissemos, é igual a 3 raízes às quais se juntaram 4 em número.

É evidente que se multiplicarmos um lado do quadrado uma única vez pela unidade, obtêm-se necessariamente uma raiz desse mesmo quadrado. Assim com a linha EF divide-se o quadrado ABCD, e nós decidimos que um dos lados dessa nova figura representa o número 3. Que esse lado seja a linha AE. Para nós, é claro que a figura EC tem de área 4, [que é o] número que juntamos às três raízes.

Dividamos então a meio, em G o segmento AE que mede 3. A partir de G, constrói-se um quadrado GKLE, quadrado esse que nós obtemos multiplicando por si próprio a metade do número de raízes, isto é, multiplicando por si próprio o número $1\frac{1}{2}$.

A seguir, juntamos ao segmento GK o segmento KM de comprimento tal, que é igual ao do segmento ED. Obtemos então o segmento GM igual ao segmento GD, aparecendo assim o quadrado GO. É evidente que o segmento AD é igual ao segmento EF. Mas GD é igual a EN, porque esses dois segmentos do quadrado GO provêm da mesma medida.

Daí que o segmento GA seja igual ao segmento NF. Uma vez que GA é igual ao segmento GE, porque estes dois segmentos partem a meio o [segmento] que representa o número das raízes, isto é, dividem-no em duas partes, e que o segmento GE é, entre outras coisas, igual a KL; com efeito, tanto um como o outro correspondem à largura do rectângulo EM, [então] o segmento KL será igual ao segmento NF.

É por outro lado evidente que o segmento DG é igual ao segmento EN, porque no quadrado GO, tanto um como outro, são traçados a partir de lados iguais. Mas o segmento GE é igual ao segmento EL, porque tanto um como outro são lados do quadrado GL. O segmento ED será portanto igual ao segmento LN.

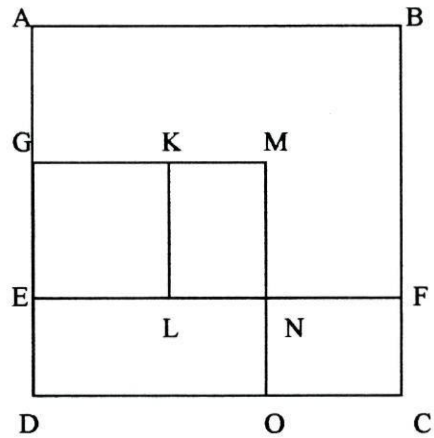
Como o segmento ED é igual ao segmento NO, porque são ambos a largura da mesma figura, portanto são traçados com o mesmo comprimento, o segmento NO será igual ao segmento LN, e após tudo o que foi demonstrado, o segmento KL não é de todo diferente do segmento NF; a figura da qual os segmentos KL e LN são os lados será igual à figura cujos lados são NF e NO. A figura KN será portanto igual à figura NC.

Agora, é obvio que as duas figuras EO e KN são iguais à figura EC, que vale 4, pois a figura EC contém uma superfície que corresponde ao número 4, que foi o que foi acrescentado às 3 raízes. É portanto evidente que o quadrado GO tem a uma superfície total que é a soma por um lado do produto da metade do número das raízes, isto é, $1\frac{1}{2}$, por ela própria, e por outro lado do número 4, à qual corresponde as superfícies das duas figuras EO e KN. Este quadrado inteiro é igual a $6\frac{1}{4}$; a raiz de $6\frac{1}{4}$ é $2\frac{1}{2}$, que é o comprimento do lado DG. Para termos o lado do primeiro quadrado, que é constituído pela figura ABCD representante do grande quadrado inteiro, falta-nos a metade do número das raízes, que equivale a $1\frac{1}{2}$, que é o lado GA. Uma vez que o segmento DG (...) vale $2\frac{1}{2}$, e lhe foi acrescentado GA, que corresponde à metade do número de raízes, isto é $1\frac{1}{2}$, a soma total é 4. Este número corresponde ao comprimento do segmento DA.

Esse valor é portanto, o valor da raiz do quadrado, ou seja, o lado do quadrado AC. O quadrado inteiro será 16.

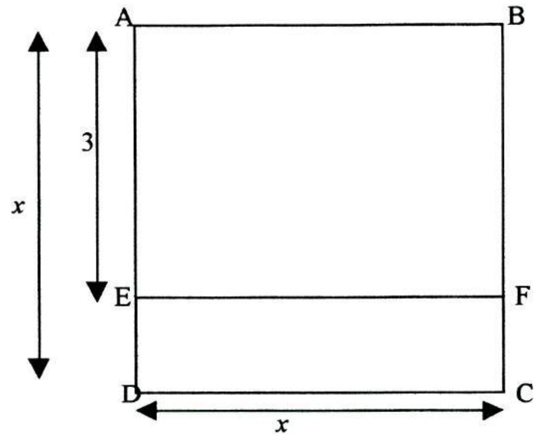
Eis o que queríamos demonstrar.

A figura é a seguinte:

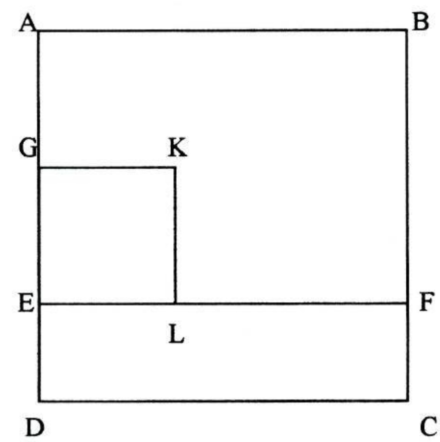


» (Chester [11] pág. 22 à 25)

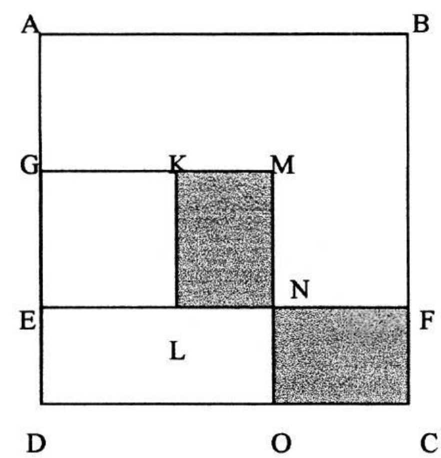
Al Khowarizmi representa o quadrado (x^2), por uma superfície quadrada (AC) de lado desconhecido (x). De seguida, divide esse quadrado em duas partes marcando o segmento EF paralelo a AB e tal que AE seja igual a 3 (o número das raízes).



Assim sendo, temos que EB vale 3x e pelas condições do problema conclui-se que EC vale 4. A seguir, Al Khowarizmi divide o segmento AE a meio no ponto G e desenha um quadrado sobre o lado GE (GE representa metade do número das raízes).



Para obter a figura dada, o autor da obra construiu um outro quadrado (GO), agora sobre o lado GD.



A demonstração em linguagem e simbologia actual (embora de uma forma mais simplificada) consiste no seguinte:

Por hipótese e por construção temos que AC vale x^2, AF vale 3x e, consequentemente EC vale 4. Temos também que o segmento AE mede 3.

Como AC é um quadrado, vem que AD = DC. Como DM também é um quadrado, vem que GD = DO. Daí se conclui que OC = AG. Mas AG = GE (uma vez que G é o ponto médio de AE) e GE = KL (porque são ambos lados do quadrado GL); daí se tira que OC = KL.

Como GO é um quadrado, vem que GM = MO. Como GL também é um quadrado, vem que GK = GE, que por sua vez é igual a MN, daí se tira que KM = NO.

Como as superfícies KN e NC têm os mesmos comprimentos, são iguais. Então:

$$\begin{aligned} \text{área de } DM &= \text{área de } GL + (\text{área de } DN + \text{área de } NK) \\ &= \text{área de } GL + (\text{área de } DN + \text{área de } NC) \\ &= \text{área de } GL + \text{área de } EC \\ &= 2\tfrac{1}{4} + 4 \\ &= 6\tfrac{1}{4} \end{aligned}$$

Daí se conclui que GD = 2½. Então x = AD = AG + GD = 1½ + 2½ = 4. O quadrado inteiro vale portanto 16. Fica assim resolvido o problema. □

Para terminar saliente-se que apesar de Al Khowarizmi dar uma apresentação completa de todos os tipos de equações do 2º grau, a parte final do seu livro, que ocupa mais de metade da obra, consiste na apresentação de problemas resolvidos (acerca de homens, heranças ou terras etc.).

Tudo o que vimos sobre Al Khowarizmi leva-nos a concluir que este matemático foi brilhante, e somos tentados a concordar com Gandz quando diz que:

«A álgebra de Al Khowarizmi pode ser vista como a pedra angular da ciência.» (Gandz [24] pág. 264)

Mas vários foram os matemáticos árabes dignos de referência no que diz respeito à resolução das equações quadráticas, nomeadamente Abu Kamil, cuja obra analisarei de seguida.

3.2 Abu Kamil

Abu Kamil Shuja ibn Aslam ibn Muhammad al-Hasib al-Mirsi foi um matemático egípcio que se especializou em álgebra. Não se conhecem datas rigorosas acerca da data do seu nascimento e morte, mas pensa-se que terá nascido por volta de 850 e morrido perto do ano de 930. Segundo Youschkevitch ([51] pág. 52), no período que se seguiu à morte de Al Khowarizmi, foi este o matemático que mais progressos fez no campo da álgebra, tanto a nível teórico como prático, chegando mesmo a ser conhecido por "Calculador Egípcio".

Abu Kamil foi autor de um importante tratado[19] sobre álgebra de título *Kitab al jabr wa l-muqabala* cuja tradução é *O livro completo sobre [o processo de] restauração e comparação*, embora hoje em dia seja conhecido por *O livro completo sobre álgebra*. Segundo Hebert ([30] pág. 31), o livro de álgebra de Abu Kamil pouco difere na sua estrutura do livro de Al Khowarizmi, embora existam certos progressos dignos de referência: a utilização de várias incógnitas, às quais atribui nomes diferentes (embora continue a usar o discurso contínuo e não use qualquer símbolo); o uso sistemático de coeficientes e raízes que podem ser irracionais (embora continuem a ser consideradas apenas as positivas); e a aceitação de que um segmento de recta pode representar um número, a coisa ou o quadrado da coisa.

Youschkevitch ([51] pág. 52) partilha a mesma opinião de Hebert, acrescentando ainda que as demonstrações apresentadas por Abu Kamil, embora também fossem baseadas em raciocínios geométricos, seguiam um raciocínio diferente na medida em que usavam proposições dos *Elementos* de Euclides.

«Além disso, eu vou explicar as suas regras usando figuras geométricas clarificadas pelos grandes homens da geometria, e explicadas no livro de Euclides.» (Levey [36] pág. 32)

É de salientar que o matemático egípcio não inseriu na sua obra qualquer parte de geometria, problemas de heranças ou coisas similares.

À semelhança do que aconteceu com Al Khowarizmi quando escreveu o seu livro, também Abu Kamil começou por fazer referência às diferentes classes de números, para em seguida dividir as equações do 2º grau nos mesmos 6 tipos.

[19] Além deste importante tratado, escreveu outro cujo nome é *O livro sobre as coisas curiosas no cálculo*.

No que diz respeito às equações simples (3 primeiros tipos), Abu Kamil cingiu-se a apresentar alguns exemplos com a respectiva resolução numérica sem, no entanto, dar qualquer justificação.

Nas equações combinadas, Abu Kamil apresentava o caso geral, mas a formulação dos algoritmos resolutivos incidia num caso particular. No entanto, na resolução deste tipo de equações, o autor utilizou dois métodos diferentes:

> «(...) Existem dois métodos para resolver o problema; um que dá a raiz do quadrado, e o outro que dá o quadrado directamente. (...) A solução, para obter a raiz do quadrado, já foi anteriormente apresentada por Al Khowarizmi, no seu livro.» (Levey [36] pág. 32)

Como o próprio autor referiu, o primeiro método apresentado foi o mesmo que Al Khowarizmi inseriu no seu livro. Youschkevitch ([51] pág. 53) afirma mesmo que Abu Kamil apresentou exactamente os mesmos exemplos que Al Khowarizmi para explicar a resolução das equações do 2º grau combinadas.

O segundo método, totalmente original, permitia obter directamente o valor do quadrado. Os seus algoritmos tinham uma estrutura semelhante aos anteriores e as demonstrações baseavam-se também em raciocínios geométricos mas, como já foi referido, pela primeira vez e contrariamente às convicções da época, o autor considerou que um segmento de recta podia representar um número, uma raiz ou o quadrado da raiz.

> «(...) Com Abu Kamil, segmentos e superfícies podem designar indiferentemente números ou a primeira ou segunda potência da incógnita. Assim renunciou às exigências clássicas da respectiva homogeneidade de dimensões nas demonstrações geométricas, e isto é digno de atenção.» (Youschkevitch [51] pág. 54 e 55)

Saliente-se porém que as demonstrações que eram dadas na resolução das equações usavam proposições dos *Elementos* de Euclides, mas o enunciado destas não era apresentado, o que fazia com que a compreensão destas demonstrações não estivesse ao alcance de todos.

Vejamos agora os exemplos apresentados por Abu Kamil para as equações do 2º grau simples.

3.2.1 EQUAÇÕES DO 2º GRAU SIMPLES

Exemplo de equações do 1º tipo $\quad ax^2 = bx$

«Para quadrados iguais a raízes, é como quando alguém diz que o quadrado é igual a cinco raízes porque o quadrado é igual a cinco das suas raízes. Isto é assim desde que a raiz do quadrado esteja de acordo com a soma das raízes do seu quadrado. Neste caso é 5. O quadrado é 25 que é igual a cinco das suas raízes. (...) Quando alguém diz que metade do quadrado é igual a 10 raízes, o quadrado inteiro é 20 raízes. Então a raiz do quadrado é 20, e o quadrado é 400. Quando alguém diz que 5 quadrados são iguais a 20 raízes, o quadrado é igual a 4 raízes. A raiz do quadrado é 4 e o quadrado é 16. (...)» (Levey [36] pág. 28 e 30)

Tais resoluções correspondem a:

$$\begin{aligned} & x^2 = 5x \\ \Leftrightarrow\ & x = 5 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 = 25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{x^2}{2} = 10x \\ \Leftrightarrow\ & x^2 = 20x \\ \Leftrightarrow\ & x = 20 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 = 400 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 5x^2 = 20x \\ \Leftrightarrow\ & x^2 = 4x \\ \Leftrightarrow\ & x = 4 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 = 16 \end{aligned}$$

Exemplos de equações do 2º tipo $\quad ax^2 = b$

«Quadrados iguais a números, é como quando alguém diz que o quadrado é igual a 16; a sua raiz é igual a 4. Da mesma maneira, quando 5 quadrados são iguais a 45, a unidade é a quinta parte, que é 9. Se alguém disser um terço do quadrado é igual a 27, então o quadrado é 81. (...)» (Levey [36] pág. 30)

Em linguagem actual, temos:

$$\begin{aligned} & x^2 = 16 \\ \Leftrightarrow\ & x = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 5x^2 = 45 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 = \frac{45}{5} \\ \Leftrightarrow\ & x^2 = 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{x^2}{3} = 27 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 = 81 \end{aligned}$$

Exemplos de equações do 3º tipo $\quad ax = b$

«Raízes iguais a números é como quando alguém diz que a raiz é igual a 4. A raiz é 4, e o quadrado é 16. Do mesmo modo, se alguém disser, 5 raízes são iguais a 30, a raiz é 6, e o quadrado é 36. Se alguém disser, metade de uma raiz é igual a 10, a raiz é 20, e o quadrado é 400.» (Levey [36] pág. 30)

Estes exemplos correspondem a:

$$x = 4 \qquad 5x = 30 \qquad \frac{x}{2} = 10$$

$$\Leftrightarrow x = 4 \qquad \Leftrightarrow x = 6 \qquad \Leftrightarrow x = 20$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 16 \qquad \Leftrightarrow x^2 = 36 \qquad \Leftrightarrow x^2 = 400$$

3.2.2 MÉTODO DA RAIZ PARA AS EQUAÇÕES DO 2º GRAU COMBINADAS

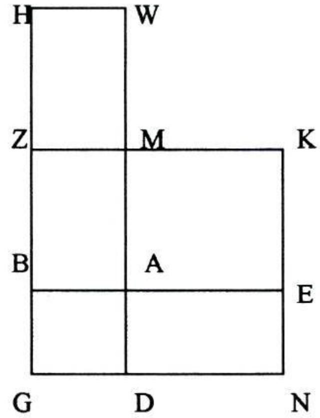
Equações do 4º tipo: $x^2 + px = q$

«Quando quadrados e raízes são iguais a números, é como se alguém dissesse: um quadrado mais 10 raízes é igual a 39 [em número]; isto é quando alguém adiciona ao quadrado 10 das suas raízes obtém 39. Existem dois métodos para resolver o problema; um que dá a raiz do quadrado, e o outro que dá o quadrado directamente. (...) O método [que dá a raiz] consiste em tomar sempre metade das raízes que neste problema é 5. Multiplica-se isso por si próprio; dá 25. Soma-se isso com 39, e obtém-se 64. Toma-se a sua raiz quadrada que é 8. Subtrai-se a isso metade das raízes que são 5, sobram 3. Isso é a raiz do quadrado, e o quadrado é 9.» (Levey [36] pág. 30 e 32)

O problema consiste em resolver a equação $x^2 + 10x = 39$, *que é do tipo* $x^2 + px = q$.

A resolução dada foi a seguinte $x = \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 + 39} - \frac{10}{2} = 3 \Rightarrow x^2 = 9$, *que corresponde no caso geral a* $x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} - \frac{p}{2}$

«A solução óbvia obtém-se quando alguém coloca uma superfície rectangular junto da superfície quadrada – ABGD:



Se alguém juntar [o correspondente] às raízes – que são 10 – obtém a superfície ABHW. Sabe-se que BH é 10, porque o lado AB da superfície ABGD multiplicado pela unidade é igual a uma raiz da superfície ABGD. Multiplicado por 10, é igual a 10 raízes da superfície ABGD. Portanto a linha BH mede 10.

A superfície inteira WHDG vale [portanto] 39, porque foram coladas ao quadrado 10 das suas raízes. [Essa superfície] é o produto da linha HG pela linha GD. Mas a linha GD é igual à linha GB. Portanto, também o produto da linha HG pela linha GB vale 39.

A linha HB é igual a 10. Dividamos [HB] a meio no ponto Z. Ora a linha GB está no seu prolongamento. Então, a superfície [GNKZ] é o resultado do produto [de ZG por ele próprio assim como é o resultado do produto] de HG pela linha BG adicionado ao quadrado obtido a partir do produto de ZB por ele próprio, de acordo com o que Euclides mostrou na segunda parte do seu livro.

Mas o produto da linha HG por GB é 39. O produto da linha ZB por ela próprio é 25. O total é 64. Então, o produto de ZG por ele próprio é 64; e a raiz de 64 é 8. Assim, a linha ZG é 8.

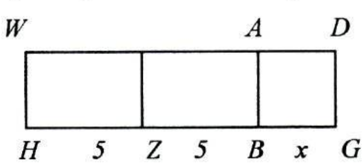
Sabe-se que a linha ZB é 5 e a linha BG que é o que resta, mede 3. Trata-se da raiz do quadrado e o quadrado é 9.

Se alguém quiser que eu demonstre o que foi dito, faça uma superfície quadrada sobre a linha ZG; é a superfície ZKNG. Estenda a linha AB no seu comprimento até ao ponto E. A linha ZG é igual à linha NG; a linha BG é igual à linha DG. Daí se concluiu que a linha BZ é igual à linha [DN]. [Portanto] a superfície ZA é igual à superfície AN. Porém a superfície [ZA] é igual à superfície MH; [daí que] a superfície MH seja igual à superfície AN. [Então, ZA, DB, e AN estão todas na superfície] as três são iguais a 39. Mas a superfície AK é igual a 25, porque é igual ao produto de ZB por ele próprio. A superfície inteira KG vale 64; a linha ZG é a raiz, ou seja 8. A linha BZ é 5. Para a linha GB sobra 3. Aqui está o que nós queiramos mostrar.» (Levey [36] pág. 34 e 36)

Abu Kamil procedeu do seguinte modo:

Construiu um quadrado de lado desconhecido (x) para designar x^2. Colou a esse quadrado um rectângulo de lados x e 10 para representar 10x (que é a quantidade que no enunciado do problema está junto de x^2). Sabe-se que essas duas figuras juntas valem 39.

Para poder aplicar a proposição II-6 dos Elementos de Euclides[20], o autor tomou o ponto médio do lado do rectângulo que mede 10, a que chamou Z.

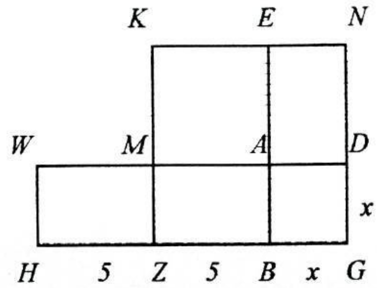


Neste caso concreto, a proposição afirma que $HG \times BG + ZB^2 = ZG^2$.

Temos que $HG \times BG = HG \times GD = 39$ e $ZB^2 = 5^2 = 25$, daí que $ZG^2 = 39+25 = 64$, de onde resulta que $ZG = 8$. Mas $x = BG = ZG - ZB = 8 - 5 = 3$. Daí se conclui que $x^2 = 9$.

[20] O enunciado desta proposição encontra-se no sub-capítulo 2.1 deste trabalho.

Apesar do resultado já estar demonstrado, Abu Kamil continuou a demonstração explicando tudo com ainda mais detalhe. Para isso, começou por construir um quadrado sobre o lado ZG.



Em seguida, mostrou que a superfície MH é igual à superfície NA:

Temos por construção que ZG = GN e que BG = GD; então conclui-se que ZB = DN; mas HZ = ZB daí que HZ seja igual a DN; além disso, AD = AB = MZ, portanto as superfícies MH e NA são iguais.

Como a superfície WG vale 39 e as superfícies MH e NA são iguais, o autor concluiu que as três superfícies (AZ, AG e NA) juntas também valiam 39. Para completar a superfície KG bastava acrescentar a essas superfícies a superfície KA que vale 25 (pois trata-se de um quadrado de lado 5). Assim sendo, a superfície KG vale 64, daí que o segmento ZG seja igual a 8. Como o segmento ZB é igual a 5, o valor da raiz (BG) é igual a 3. Daí se conclui que o quadrado vale 9.

De uma forma sucinta e para o caso geral $(x^2 + px = q)$, a demonstração dada corresponde ao seguinte:

Pela proposição II-6 temos que $HG \times GB + ZB^2 = ZG^2$.

Tendo em conta o caso geral, $HG \times GB = HG \times GD = q$ *e* $ZB^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2$. *Resulta portanto que* $ZG = x + \frac{p}{2} = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q}$ *donde se conclui que* $x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} - \frac{p}{2}$.

Equações do 5º tipo: $x^2 + q = p\,x$

«Quando quadrados e números são iguais a raízes, é como se alguém dissesse: um quadrado e 21 [em número] é [igual a] 10 raízes; [isto é] quando alguém adiciona 21 ao quadrado, a soma é 10 raízes do quadrado. Neste caso, existem dois métodos [para resolver o problema]; um que dá a raiz do quadrado, e o outro dá o quadrado [directamente]. Cada um deles tem duas soluções, uma pela adição e outra pela subtração.

A regra que dá a raiz do quadrado é a seguinte: toma-se metade das raízes, isto é 5. Multiplica-se isso por si próprio, que dá 25. Subtrai-se 21 a esse valor, sobram 4. Toma-se a sua raiz, que é 2. Subtrai-se isso à metade das raízes que são 5, sobram 3. Isso é a raiz do quadrado; o quadrado é 9.

Se alguém quiser adicionar 2 à metade das raízes, dá 7; [que também] é a raiz do quadrado; esse quadrado é 49.» (Levey [36] pág. 38)

O problema consiste em resolver a equação $x^2 + 21 = 10x$*, que é do tipo* $x^2 + q = px$*. Esta equação tem duas soluções (positivas). A sequência dos cálculos feitos por Abu Kamil foi a seguinte:*

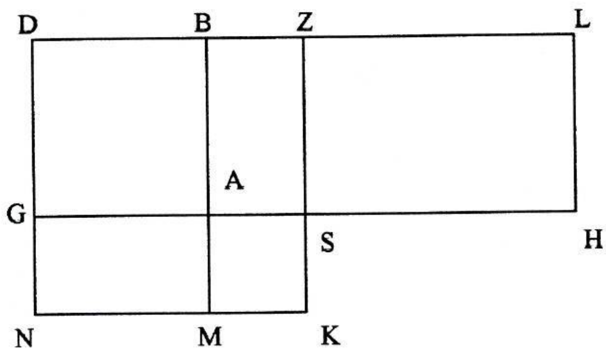
Para a 1ª solução $x = \frac{10}{2} - \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 - 21} = 3 \Rightarrow x^2 = 9$, *que corresponde a* $x = \frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$.

Para a 2ª solução $x = \frac{10}{2} + \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 - 21} = 7 \Rightarrow x^2 = 49$, *que corresponde a* $x = \frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$.

Na demonstração das equações do 4º tipo, o autor usou a proposição II-6 dos *Elementos*. Nas demonstrações para as equações deste tipo é usada a proposição II-5 da mesma obra.

Demonstração da 1ª solução:

«Tomemos o número que está junto do quadrado, ou seja 21 [e consideremos] que é maior do que o quadrado. Construamos o quadrado como sendo a superfície quadrada– ABGD:



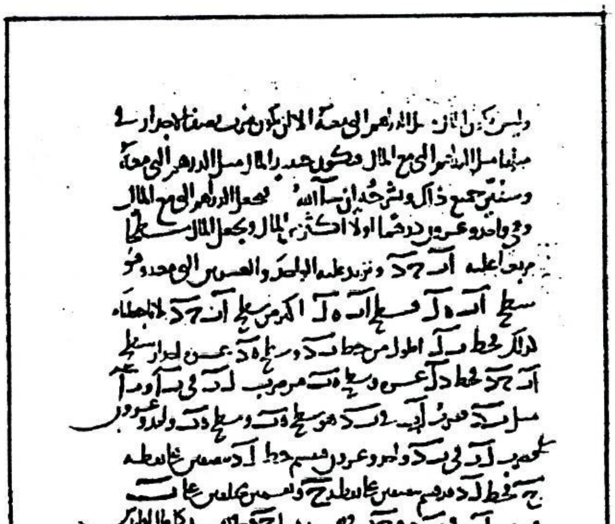
Juntemos [a esse quadrado] 21; que é a superfície ABHL. Esta superfície é por construção mais larga que a superfície ABGD. Por esse motivo, a linha BL é maior do que a linha BD. [Assim sendo] a superfície HD é igual a 10 raízes da superfície ABGD; então a linha LD é 10. A superfície HB é igual a 21, que é igual ao produto de LB por BD, porque BD é igual a BA. Divide-se a linha LD a meio no ponto Z. [Esta linha] também já estava dividida em duas partes desiguais no ponto B.

Assim, o produto de LB por BD adicionado com o quadrado sobre ZB é igual ao quadrado sobre ZD de acordo com o que Euclides mostrou na segunda parte do seu livro.

Mas o produto da linha ZD por ela própria é 25, visto que o seu comprimento é 5. A linha LB a multiplicar por BD é 21, como já mostramos. [Então] o quadrado sobre a linha ZB vale 4, e o seu lado é 2. Mas a linha ZD é 5, daí que BD seja 3, que é a raiz do quadrado e o quadrado é 9.

Se alguém quiser que eu demonstre o que foi dito, construa uma superfície quadrada KD sobre a linha ZD.

A superfície KD é 25, visto que ZD é 5. A superfície ZG é igual à superfície ZH, uma vez que a linha LZ é igual à linha ZD, e a superfície AZ é igual à superfície AN. [Então], também as 3 superfícies AZ, AD, e AN são iguais à superfície



Uma página do livro *Kitab al jabr wa al-muqabala* de Abu Kamil, que contém a demonstração para a primeira solução das equações do 5º tipo pelo método da raiz tirada de *Materiaux por l'etude de la tradition algebrique arabe* de A. Djebar.

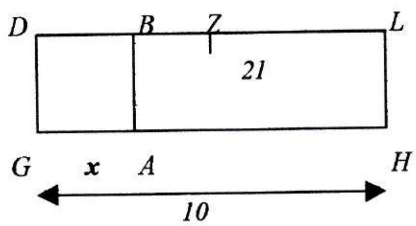
HB que [por sua vez] é igual ao produto de LB por BD, ou seja, 21. [Donde resulta que] para a superfície KA sobram 4, e é uma superfície quadrada, visto que KN é igual a KZ e a linha ZS é igual à linha NM. [Então] a linha KS resulta igual a KM.

A linha MK é igual a 2; que é igual à linha ZB. A linha ZB é portanto igual a 2. Consequentemente, a linha BD é o que sobra, 3, e é a raiz do quadrado. O quadrado será 9. Isto é o que queríamos mostrar.» (Levey [36] pág. 40)

Abu Kamil seguiu o seguinte raciocínio:

Construiu um quadrado de lado desconhecido (x) para designar o x^2. Justapôs a esse quadrado um rectângulo em que um dos lados é obviamente x e o outro lado é maior do que x, para representar a quantidade 21 (que é a quantidade que no enunciado do problema está junto de x^2). Ora estas duas figuras juntas valem 10 raízes do quadrado inicial (10x). Como um dos lados da figura completa é o lado do quadrado (x), resulta que o outro lado medirá 10.

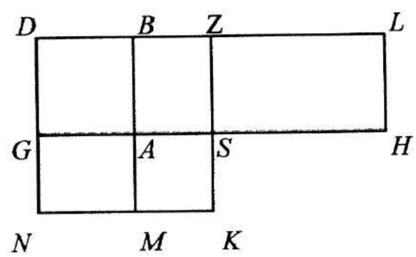
Para poder aplicar a proposição II-5 dos Elementos de Euclides[21], o autor dividiu o lado do rectângulo maior a meio, no ponto Z.



Neste caso concreto a proposição referida diz que $DB \times BL + ZB^2 = DZ^2$.

Mas $DB \times BL = BA \times BL = 21$ e $DZ^2 = 5^2 = 25$. Portanto $ZB^2 = 25 - 21 = 4$, daí que $ZB = 2$. Mas $x = DB = DZ - ZB = 5 - 2 = 3$. Portanto $x^2 = 9$.

Do mesmo modo que no caso anterior, Abu Kamil continua a sua explicação. Para isso, e seguindo a "sugestão" da proposição, o autor começou por construir um quadrado sobre o lado ZD, obtendo assim a figura pretendida.



[21] O enunciado desta proposição encontra-se no sub-capítulo 2.1 deste trabalho.

Abu Kamil notou que KD é igual a 5^2 ou seja 25. Em seguida referiu que a superfície ZH é igual à superfície ZG uma vez que Z é o ponto médio de DL. A seguir salientou que a superfície AZ é igual à superfície NA. A partir daí, notou que as 3 superfícies (AZ, AD, e NA) juntas eram iguais à superfície HB que vale 21. Concluiu portanto que a superfície AK vale 25–21 que é 4.

Mostrou em seguida que a superfície AK é uma superfície quadrada, logo os seus lados são iguais e medem 2. Como ZB é igual ao lado desse quadrado, vale 2, daí que o valor procurado x seja igual a $DB = DZ - ZB = 5 - 2 = 3$. *Portanto o quadrado vale 9.* □

Sucintamente e para o caso geral ($x^2 + q = px$) a demonstração dada consiste no seguinte:

Pela proposição II-5 temos que $DB \times BL + ZB^2 = DZ^2$.

Mas $DB \times BL = BA \times BL = q$ *e* $DZ^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2$. *Daí se conclui que*

$$ZB = \frac{p}{2} - x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \Leftrightarrow x = \frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad \square$$

Demonstração da 2ª solução:

«Devo explicar a seguinte questão. Quando alguém toma metade das raízes, e multiplica o resultado por si próprio, este é maior do que o número que está junto do quadrado, que neste caso é 21, mas [vamos considerar que é] menor do que o quadrado.

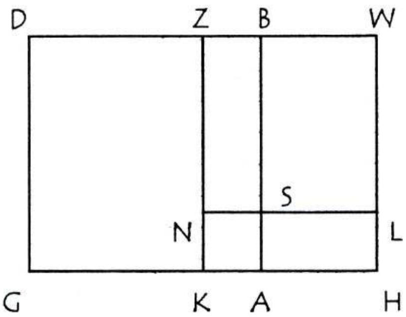
Construamos o quadrado como sendo a superfície ABGD. A isso, adicionemos 21 que é a superfície ABHW. A superfície AD é por construção maior do que a superfície AW. [Portanto] a linha BD é maior do que a linha BW.

A superfície [WG] vale 10 raízes da superfície AD. Então a linha DW é 10. O produto da linha [WB] por BD é 21. Dividamos a linha WD a meio, no ponto Z. Note-se que WD já estava dividida em duas partes desiguais em B.

Assim, o produto de WB por BD, adicionado com o produto de BZ por ele próprio, é igual ao produto de ZD por ele próprio, de acordo com o que Euclides mostrou na segunda parte do seu livro.

O produto de ZD por ele próprio é 25, e uma vez que o produto de WB por BD é 21, resulta que o produto de ZB por ele próprio, é o que sobra, que neste caso é 4. A linha ZB é a raiz de 4, ou seja 2. Adicionando à linha ZD que é 5, [obtemos que] a linha BD é 7 e que é a raiz do quadrado. O quadrado é 49.

Assim está explicado. (...) Se alguém quiser que eu explique cuidadosamente tudo o que eu disse, construa uma superfície quadrada WN sobre a linha WZ.

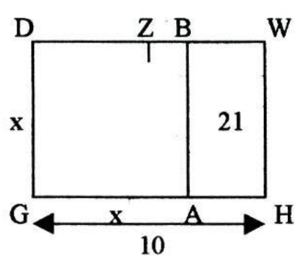


Estende-se a linha ZN no seu prolongamento até ao ponto K. A superfície BN, é igual à superfície NH, visto que a linha LN é igual à linha NZ, e a linha [KN] ser igual à linha [NS], porque a superfície AN é um quadrado, como já foi explicado.

A superfície WN é 25 e a superfície AW é 21. A superfície AN, é o que sobra, isto é, 4, e é uma superfície quadrada, uma vez que a linha AB é igual à linha AG e KG ser igual a linha BS em virtude de KG ser igual a ZD e de ZD ser igual a ZW e ZW ser igual a ZN e ZN ser igual à linha BS. Assim, a linha BS é igual à linha KG. Resulta que a linha AK é igual à linha AS. [Portanto] a superfície AN é uma superfície quadrada sobre a linha [SN]. Mas a linha SN, é igual à linha BZ, daí que a linha BZ seja igual a 2.

Adicionando a isto a linha ZD, que mede 5, resulta que a linha BD mede 7. Isto é a raiz do quadrado, [logo] o quadrado é 49. Além disso, esta explicação mostra que quando alguém multiplica metade das raízes por elas próprias, o resultado é maior do que o número que está junto do quadrado, [que é] igual à superfície NA, que é o que pretendíamos mostrar.» (Levey [36] pág. 40 e 42)

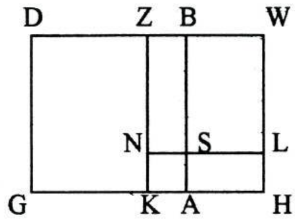
Como já referi, esta demonstração é muito semelhante à anterior. A grande diferença, reside no facto de, neste caso, a área do rectângulo que Abu Kamil juntou ao quadrado ser menor que a área do quadrado. No entanto, os lados do rectângulo maior continuam a medir 10 e x. O autor voltou, novamente, a dividir o lado maior do rectângulo maior a meio, para poder usar a proposição II-5 dos Elementos de Euclides.



Obteve $WB \times BD + ZB^2 = DZ^2$.

Mas $WB \times BD = WB \times BA = 21$ *e* $DZ^2 = 5^2 = 25$. *Daí se tira que* $ZB^2 = 25 - 21 = 4$, *de onde se conclui que* $ZB = 2$. *Mas* $x = DZ + ZB = 5 + 2 = 7$. *Portanto* $x^2 = 49$.

Também para este caso, Abu Kamil continuou a sua explicação. Começou por construir um quadrado sobre o lado ZW e, a seguir, prolongou um dos lados do último quadrado construído para obter a figura pretendida.



Depois observou que a superfície WN é igual a 25 e que a superfície AW é 21. Reparou, em seguida, que a diferença entre estas duas superfície é a superfície NA que valerá portanto 4. Mostrou de seguida que essa superfície é uma superfície quadrada:

AG = *AB por construção. Além disso,* $KG = ZD = ZW = ZN = BS$. *Portanto AK é igual a AS, daí que AN seja uma superfície quadrada. Concluiu assim que* $NS = 2$. *Uma vez que* $ZB = NS = 2$, *o valor procurado x é* $DB = DZ + ZB = 5 + 2 = 7$. *Assim sendo o quadrado vale 49.* □

Para o caso geral, temos:

Pela proposição II-5 $WB \times BD + ZB^2 = DZ^2$.

Mas $WB \times BD = WB \times BA = q$ *e* $DZ^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2$. *Então* $ZB = x - \frac{p}{2} = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

$\Leftrightarrow x = \frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ □

Dentro das equações do 5º tipo existem algumas que não têm soluções (positivas) e outras que têm uma única solução (positiva), correspondente a uma raiz dupla. Tal facto também não passou desapercebido a Abu Kamil, embora as suas explicações neste sentido não fossem muito claras. Mas vejamo-las:

Demonstração da raiz dupla:

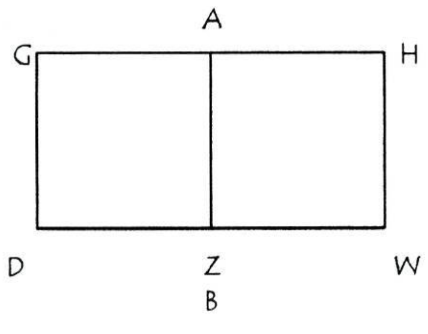
«Saiba-se que quando tomamos metade do total das raízes, por este método, e multiplicamos por si próprio e o total é menor que o número que está junto do quadrado, mudamos de procedimento. Por vezes, é igual ao próprio número. A raiz do quadrado será então metade das raízes sem qualquer adição ou subtração.

Além disso, tudo o que dissemos vai ser explicado nesta secção, com figuras geométricas. (...)» (Levey [36] pág. 38)

No caso em que o quadrado de metade das raízes é menor do que o número que está junto do quadrado (que corresponde a um discriminante negativo, isto é, não existem soluções reais), Abu Kamil diz que é necessário mudar de procedimento, em vez de considerar o problema impossível, não voltando a referir-se ao assunto. No caso em que o quadrado de metade das raízes é igual ao número que está junto do quadrado (que corresponde a um discriminante nulo, isto é, tem uma única solução), Abu Kamil diz que a solução do problema é metade das raízes sem qualquer adição ou subtração.

Vejamos o exemplo e a demonstração dada por Abu Kamil sobre este segundo ponto:

«(...) Devo explicar também que, quando o resultado do produto de metade das raízes por elas próprias for igual ao número que está junto do quadrado, então o quadrado é igual ao número. A raiz do quadrado é igual a metade das raízes. Devo agora dar outro exemplo, olhando para esta questão. Tomemos o número mais o quadrado igual a dez raízes. [22] Construamos o quadrado como sendo a superfície quadrada ABGD:



Juntemos a isso o 25 em número, que é a superfície ABHW. A superfície inteira GW é 10 raízes da superfície ABGD. [Portanto] a linha DW é 10. Quando dividimos DW em duas partes iguais, no ponto Z, temos três possibilidades, o ponto Z está no ponto B, antes ou depois.

[22] Segundo Martin Levey, embora Abu Kamil não tivesse dito implicitamente a que número se estava a referir, esse número era o 25, e em consequência disso a equação é $x^2 + 25 = 10x$.

Primeiro, vamos supor que está depois; se assumirmos isso, a linha DW está dividida a meio no ponto Z, e em duas partes desiguais no ponto B. Assim, o produto de DB por BW mais o produto de ZB por si próprio, é igual ao produto de ZW por si próprio, de acordo com o que Euclides mostrou na segunda parte do seu livro.

Mas o produto de WZ por si próprio é 25, visto que o pusemos como sendo metade de WD, que mede 10. Então o produto de [WB] por BD mais o quadrado de BZ é 25. Mas dissemos que o quadrado de ZW é WB vezes BD. Daí que o quadrado sobre BZ seja igual a zero e que BZ seja também igual a zero, isto é, Z está sobre B. Parece-me que estas operações não são aqui adequadas.

Aliás, deve ser dito que quando o ponto Z está depois do ponto B, então o número é maior do que quadrado. Quando está antes, então o quadrado é maior do que o número. Tudo isto foi explicado em cima.

Isso leva a que o ponto Z, neste caso não esteja nem antes nem depois mas seja necessariamente igual. (...) Ele continuou as suas explicações, mas não são muito claras para mim.» (Levey [36] pág. 44 e 46)

Equações do 6º tipo: $x^2 = px + q$

«Quando raízes e números são iguais a quadrados, é como se alguém dissesse: 3 raízes mais 4 em número é igual a um quadrado. Para este problema, existem dois métodos, um que dá a raiz do quadrado, e o outro dá o quadrado [directamente].

O método que dá a raiz, é aquele onde se dividem as raízes a meio que dá $1\frac{1}{2}$. Multiplica-se isso por si próprio, dá $2\frac{1}{4}$. Adiciona-se a isso 4, perfaz $6\frac{1}{4}$. Toma-se a sua raiz, que é $2\frac{1}{2}$. Adiciona-se isso à metade das raízes [que são $1\frac{1}{2}$]; obtém-se 4. Isso é a raiz do quadrado, e o quadrado é 16.» (Levey [36] pág. 48)

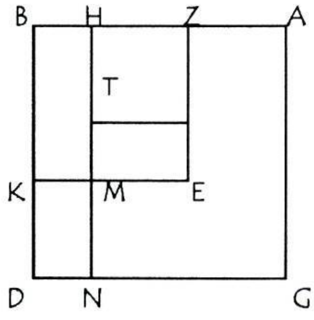
O exemplo escolhido para este caso foi $x^2 = 3x + 4$ *que é do tipo* $x^2 = px + q$.

A resolução para este caso, é bastante próxima da resolução dos outros casos:

$x = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 4} + \frac{3}{2} = 4 \Rightarrow x^2 = 16$, *que corresponde no caso geral a*

$$x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} + \frac{p}{2} \quad \square$$

«Para encontrar a solução deste problema, que é 3 raízes mais 4 em número igual a um quadrado, pelo método que nos dá a raiz, construamos uma superfície quadrada ABGD que é 3 raízes mais 4 em número.



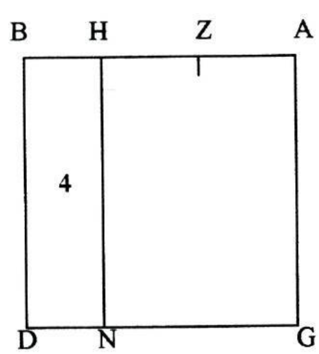
Tiramos da superfície AD a superfície AHGN, e estabelecemos que vale 3 raízes da superfície AD. E isto vem do que dissemos: 3 raízes mais 4 em número é igual a 1 quadrado. A superfície HD corresponde [portanto] a 4 em número.

Dividamos a linha AH a meio no ponto Z. Assim a linha AH está dividida a meio no ponto Z. Temos no seu prolongamento a linha BH. Então, o produto de AB por BH adicionado com o quadrado de lado HZ é igual ao produto de BZ por ele próprio, como mostrou Euclides na segunda parte do seu livro.

[Mas] o produto de AB por BH é 4, uma vez que a linha AB é igual à linha BD e o produto da linha ZH por si própria é $2\frac{1}{4}$. A sua soma é $6\frac{1}{4}$, daí que a raiz [isto é ZB,] seja igual a $2\frac{1}{2}$. Então a linha ZB é $2\frac{1}{2}$ mas a linha ZA é $1\frac{1}{2}$. Desta forma, a linha [AB] é 4, que é a raiz do quadrado que é 16.

Para uma maior clarificação, construamos uma superfície quadrada ZK sobre a linha ZB. A linha ME é igual à linha KD uma vez que a linha AB é igual a BD e a linha BZ ser igual à linha BK. Então KD é igual a AZ, que [por sua vez] é igual a ZH, e ZH é igual a ME. Assim ME é igual a KD. Construamos a linha MT igual à linha ND, então a superfície ET é igual à superfície MD. Construamos a superfície HK na sua continuação. Toda a superfície HD é igual às superfícies ET e MB juntas ou seja 4. É sabido que a superfície ZT é um quadrado uma vez que a linha BZ é igual à linha MH, e a linha MT ser igual à linha HB. A linha ZH resulta igual à linha HT, e a linha ZH é $1\frac{1}{2}$. Assim, a superfície ZT vale $2\frac{1}{4}$ então a superfície inteira ZK será $6\frac{1}{4}$. A linha BZ é $2\frac{1}{2}$ e a linha AZ é $1\frac{1}{2}$. [Portanto] a linha inteira AB é 4; isto é a raiz do quadrado que é 16.» (Levey [36] pág. 48 e 50)

Abu Kamil construiu um quadrado de lado desconhecido (x) para designar x^2. Dentro desse quadrado tomou um rectângulo de lados x e 3, para representar 3x. Tendo em conta o enunciado do problema, a parte restante valerá 4. De seguida, dividiu o lado do rectângulo de comprimento 3 a meio, para poder aplicar a proposição II-6 dos Elementos de Euclides.

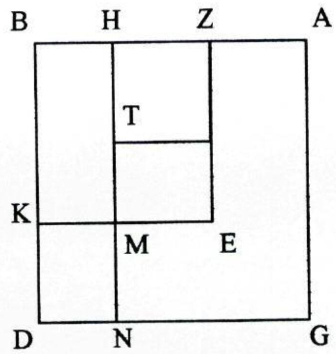


A proposição acima referida diz-nos que $AB \times HB + ZH^2 = ZB^2$.

Mas $AB \times HB = BD \times HB = 4$ e $ZH^2 = (1\frac{1}{2})^2 = 2\frac{1}{4}$. Portanto $ZB^2 = 4 + 2\frac{1}{4} = 6\frac{1}{4}$, donde se tira que $ZB = 2\frac{1}{2}$. Mas $x = AB = ZB + ZA = 2\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} = 4$. Então $x^2 = 16$.

Mais uma vez, Abu Kamil continuou a explicação com mais detalhe:

Construiu um quadrado sobre o lado ZB e considerou MT igual a DN, obtendo assim a figura apresentada:



Por construção BD = AB e BK = BZ portanto KD = ZA. Mas ZA = HZ = ME, logo KD = ME. Também por construção temos que MT = MK, portanto a superfície MD é igual à superfície ET. Então as superfícies ET e MB adicionadas têm a mesma área que a superfície NB que vale 4. Por outro lado temos que a superfície ZT é uma superfície quadrada de lado 1½, daí que a superfície inteira ZK seja igual a $4 + (1\frac{1}{2})^2 = 6\frac{1}{4}$. *A linha BZ é 2½ e a linha AZ é 1½, daí que a linha inteira AB seja 4, que é a raiz do quadrado, e o quadrado será 16.*

Para o caso geral ($px + q = x^2$) e de uma forma mais sucinta, temos:

Pela proposição II-6 $AB \times HB + ZH^2 = ZB^2$.

Mas $AB \times HB = BD \times HB = q$ *e* $ZH^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2$. *Portanto*

$$ZB = x - \frac{p}{2} = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} \Leftrightarrow x = \frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} \quad \square$$

3.2.3 MÉTODO DO QUADRADO PARA AS EQUAÇÕES DO 2º GRAU COMBINADAS

Equações do 4º tipo $x^2 + px = q$

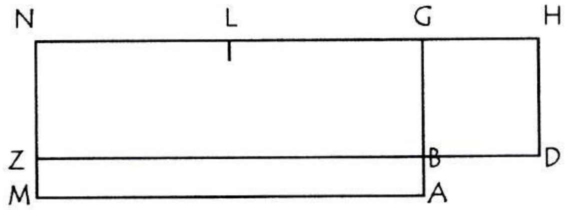
«Quando quadrados e raízes são iguais a números, é como se alguém dissesse: um quadrado mais 10 raízes é igual a 39 {em número]; isto é quando alguém adiciona ao quadrado 10 das suas raízes obtém 39. Existem dois métodos para resolver o problema; um que dá a raiz do quadrado, e o outro que dá o quadrado directamente. (...)

Para obter a solução que dá o quadrado, começa-se por multiplicar o 10 por ele próprio; dá 100. Multiplica-se isso por 39; dá 3900. Toma-se metade de 100, que é 50. Multiplica-se isso por si próprio; dá 2500. Adiciona-se isso a 3900, dá 6400. Toma-se a raiz quadrada, que é 80. Subtrai isso [à soma] de 50, que é metade de 100 e 39 que é igual à soma das raízes com o quadrado. Resulta 89. Então sobra 9, que é o quadrado.» (Levey [36] pág. 30 e 32)

O problema consiste em resolver a equação $x^2 + 10x = 39$, *que é do tipo* $x^2 + px = q$.

Os cálculos feitos foram os seguintes: $x^2 = \frac{10^2}{2} + 39 - \sqrt{\left(\frac{10^2}{2}\right)^2 + 10^2 \times 39} = 9$, *que correspondem no caso geral a* $x^2 = \frac{p^2}{2} + q - \sqrt{\left(\frac{p^2}{2}\right)^2 + p^2 q}$.

«A regra da solução que dá o quadrado é uma construção em que o quadrado é representado pela linha AB:



Adiciona-se 10 das suas raízes, isto é, a linha BG; a linha AG vale 39. Se alguém desejar saber quanto mede AB, construa uma superfície quadrada sobre a linha BG. É a superfície DHGB. São 100 vezes a linha AB multiplicada pela sua unidade, porque BG é 10 raízes da linha AB. Dez raízes da coisa [quadrado] multiplicado por si próprio, é igual a 100 vezes a coisa multiplicada por ela própria.

Construamos a linha AM igual a 100, e sabemos que AG vale 39. Construamos a superfície AN; que é 3900, uma vez que a linha AG é 39, e a linha [AM] tem de comprimento 100. Desenhemos a linha BZ, paralela à linha de comprimento 100, para dar a superfície AZ igual ao quadrado BH, porque também vale 100 vezes a linha AB multiplicada pela unidade.

Isto é assim, desde que o comprimento da linha AM seja 100. Por causa disto, a superfície DN também é igual a 3900; [essa superfície] é o produto de GH por HN porque GH é igual a HD. A linha GN é 100, porque é igual a AM. Dividamos isso [ou seja, o segmento GN] em duas partes iguais, no ponto L. Já tínhamos uma linha no seu prolongamento, ao termos a linha NH. Em virtude disto, a superfície [que] é o produto de NH pela linha HG adicionado ao quadrado sobre a linha GL, é igual ao quadrado sobre a linha LH, de acordo com o Euclides mostrou na segunda parte do seu livro.

Mas a superfície NH por HG vale 3900, e a superfície quadrada sobre GL vale 2500. Juntemos isso, e obtemos 6400. É o produto da linha HL, ou seja 80, por ela própria; a linha GH é igual a BG. Então, a linha LG com a linha BG valem 80. E quando subtrairmos BG e GL cuja soma é 80 à linha AG e GL cuja soma é 89, sobra a linha AB que é o quadrado, 9. Era isto que pretendíamos mostrar.» (Levey [36] pág. 36)

Apesar desta demonstração também usar uma proposição dos *Elementos* de Euclides, é totalmente inovadora pelo facto de usar um segmento de recta a representar um quadrado. Vejamo-la em linguagem actual:

Abu Kamil representou x^2 pelo segmento de recta AB. Na continuação desse segmento, desenhou o segmento BG, para representar 10x. Quer isto dizer que o segmento completo AG vale 39. Depois construiu um quadrado sobre o lado BG, que vale 100 vezes o produto do segmento AB pela unidade ($100x^2$). Por A, e perpendicularmente a AB, construiu o segmento AM de comprimento 100. Construiu a superfície rectangular NA que vale 3900 uma vez que tem de lados 39 e 100. Traçou uma recta paralela a AM por B. Obteve, assim, uma nova superfície AZ, que vale o mesmo que o quadrado inicial ($100\ x^2$). Com isto, o autor concluiu que a superfície AN é igual à superfície ND. Mas a superfície ND é o produto de NH por HD que é igual ao produto de NH por HG. Para poder aplicar a esta figura a proposição II-6 dos Elementos de Euclides, o autor dividiu o segmento NG a meio no ponto L. Pela proposição referida temos que $NH \times GH + LG^2 = LH^2$.

Mas $NH \times GH = NH \times HD = 3900$ e $LG^2 = 50^2 = 2500$. Daí se concluir que a superfície inteira $LH^2 = 3900 + 2500 = 6400$ e portanto $LH = 80$. Como GH é igual a GB, então também os comprimentos LG e GB juntos valem 80. Além disso, LG vale 50 e AG vale 39, daí que os segmentos AG e GL juntos valem 89. A diferença entre esses conjuntos de segmentos é AB (que representa o quadrado) que valerá 9, que era o que queríamos descobrir.

Equações do 5º tipo $x^2 + q = p\,x$

«Quando quadrados e números são iguais a raízes, é como se alguém dissesse um quadrado e 21 é [igual a] 10 raízes; [isto é] quando alguém adiciona 21 ao quadrado, a soma é 10 raízes do quadrado. Neste caso, existem dois métodos [para resolver o problema]; um que dá a raiz do quadrado, [e o outro dá o quadrado directamente]. Cada um deles tem duas soluções, uma pela adição, e outra pela subtração. (...)

Para obter a solução que dá o quadrado, começa-se por multiplicar as raízes por elas próprias, que neste caso dá 100. Multiplica-se estes 100 por 21; dá 2100. Toma-se metade de 100; que é 50. Multiplica-se isso por si próprio; dá 2500. Subtrai-se 2100 a esse valor; sobram 400. Toma-se a sua raiz quadrada que é 20. Subtrai-se isso a 50; sobram 30. Subtrai-se agora 21 a 30. Sobra 9, que é o quadrado.

Se alguém quiser adicionar 20 aos 50 dá 70. Subtrai-se 21 a isso; sobra 49, que [também] é o quadrado» (Levey [36] pág. 38)

O problema consiste em resolver a equação $x^2 + 21 = 10x$*, que é do tipo* $x^2 + q = px$*. De uma forma geral, os cálculos feitos foram:*

Para a 1ª solução $x^2 = \frac{10^2}{2} - 21 - \sqrt{\left(\frac{10^2}{2}\right)^2 - 10^2 \times 21} = 9$*, que corresponde a:*

$$x^2 = \frac{p^2}{2} - q - \sqrt{\left(\frac{p^2}{2}\right)^2 - p^2 q}.$$

Para a 2ª solução $x^2 = \frac{10^2}{2} - 21 + \sqrt{\left(\frac{10^2}{2}\right)^2 - 10^2 \times 21} = 49$*, que corresponde a:*

$$x^2 = \frac{p^2}{2} - q + \sqrt{\left(\frac{p^2}{2}\right)^2 - p^2 q}.$$

Segundo Martin Levey, as demonstrações por este segundo método das equações do 5º tipo não se encontram no livro por ele traduzido.

«Parece-me que o autor do livro quis explicar o 2º método desta secção, isto é, o método já referido que dá o quadrado directamente. No entanto, está em falta no livro que eu traduzi.» (Levey [36] pág. 46)

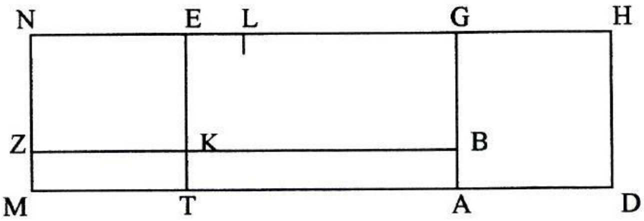
No entanto, Martin Levey apresentou como nota de rodapé uma ideia da demonstração. Vejamo-la em linguagem e simbologia actual.

Demonstração da 1ª solução:

Para a primeira solução, que é o caso do quadrado ser menor que o número, Abu Kamil terá representado o quadrado pelo segmento de recta AB. No seu prolongamento, terá posto o segmento BG (que neste caso será maior que o segmento AB) para representar o 21 em número. Pelas condições do problema, o segmento inteiro (AG) valerá 10 raízes do segmento AB.

Em seguida, terá construído sobre AG uma superfície quadrada (AGDH), cujo valor será 100 vezes o segmento AB vezes a unidade ($100x^2$) e terá considerado o segmento AM, perpendicular a AG igual a 100 em número. Desta forma a superfície rectangular (ABZM) terá o mesmo valor que a superfície quadrada AH ($100x^2$).

Em seguida terá prolongado dois dos lados, e voltado a desenhar a superfície quadrada no lado esquerdo da figura, obtendo assim a seguinte figura:



Temos então que AB vale x^2 e BG vale 21, logo AG vale $10x$. Temos também que GN, BZ e AM valem 100. Como as superfícies AZ e TN valem o mesmo ($100x^2$), então as superfícies AE e BN também valerão o mesmo. Daí se tira que AE será igual a 2100, uma vez que $AE = BN = BG \times GN = 21 \times 100 = 2100$. O segmento GN está dividido em duas partes (desiguais) no ponto E. Para poder aplicar a esse segmento a proposição II-5 dos Elementos, o autor terá dividido esse segmento a meio no ponto L, como se pode ver na figura.

O que a proposição afirma é que $GE \times EN + EL^2 = LG^2$.

Mas $GE \times EN = GE \times ET = 2100$ (uma vez que se trata da superfície AE). Temos também que $LG^2 = 50^2 = 2500$. Portanto $EL^2 = 2500 - 2100 = 400$, daí se tira que $EL = 20$.

Como NL vale 50 e EL vale 20, vem que NE é igual a 30. Como $GA = NE = 30$, e GB vale 21, conclui-se que o valor do quadrado (AB) é 9.

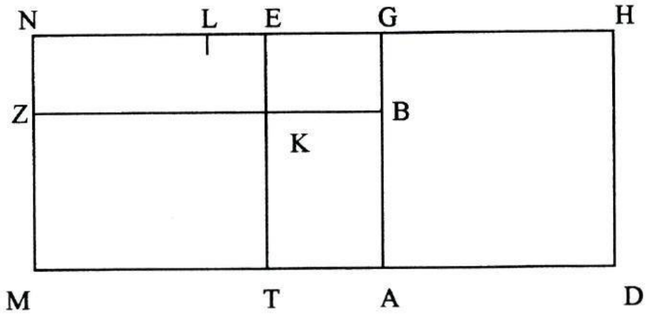
Para a segunda solução, a demonstração é semelhante à anterior, apenas com a diferença de que neste caso se vai considerar que o quadrado é maior que o número. Deste modo, e apesar da semelhança, os cálculos e a figura serão diferentes.

Demonstração da 2ª solução:

Do mesmo modo que no caso anterior, Abu Kamil terá representado o quadrado pelo segmento de recta AB. No seu prolongamento, terá posto o segmento BG (que desta vez será menor que o segmento AB) para representar o 21 em número. Pelas condições do problema, o segmento inteiro (AG) valerá 10 raízes do segmento AB.

A seguir, construiu de novo sobre AG uma superfície quadrada (AGDH), cujo valor será 100 vezes o segmento AB vezes a unidade ($100x^2$). Em seguida marca o segmento AM perpendicular a AG que vale 100 em número. Desta forma obtém uma superfície rectangular (ABZM) com o mesmo valor que a superfície quadrada AH ($100x^2$).

Novamente, completa a figura prolongando dois dos lados da figura, e desenhando a superfície quadrada no lado esquerdo.



À semelhança do que aconteceu na demonstração anterior, AB vale x^2, BG vale 21 e AG vale 10x. Ora GN, BZ e AM valem 100. Como as superfícies AZ e TN valem o mesmo ($100x^2$), então as superfícies AE e BN também valerão o mesmo. Temos então que $AE = BN = BG \times GN = 21 \times 100 = 2100$

O segmento GN continua dividido em duas partes (desiguais) no ponto E. Para poder aplicar a proposição II-5 dos Elementos, o autor terá novamente dividido esse segmento a meio no ponto L.

A proposição diz-nos que $GE \times EN + LE^2 = LG^2$.

Como $GE \times EN = GE \times ET = 2100$ *(uma vez que se trata da superfície AE) e* $LG^2 = 50^2 = 2500$*, conclui-se que* $LE^2 = 2500 - 2100 = 400$*, donde se tira que* $LE = 20$.

Como NL vale 50 e LE vale 20, vem que NE é igual a 70. Esta é a grande diferença em relação à demonstração anterior; é que no caso anterior, o valor de NE (que é o valor do lado do quadrado desenhado inicialmente) era a diferença entre NL e EL e agora é a soma. Temos portanto que GA = NE = 70. Como GB vale 21, conclui-se que o valor do quadrado (AB) é 49.

Equações do 6º tipo $x^2 = px + q$

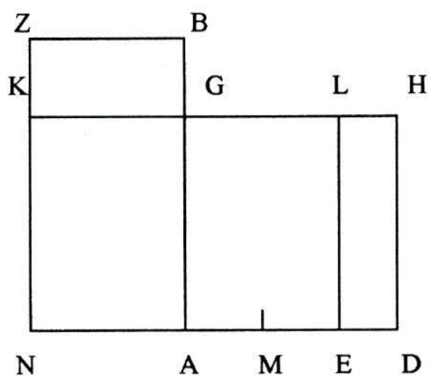
«Quando raízes e números são iguais a um quadrado, é como se alguém dissesse: 3 raízes mais 4 em número é igual a um quadrado. Para este problema, existem dois métodos, um que dá a raiz do quadrado, e o outro dá o quadrado [directamente]. (...)

O método que dá o quadrado é aquele em que as raízes são multiplicadas por elas próprias, que neste caso dá 9. Multiplica-se o 9 por 4, que é o número que está junto das raízes; dá 36. [Toma-se] metade de 9; é $4^1/_2$. Multiplica-se isso por si próprio, dá $20^1/_4$. Adiciona-se isso a 36; dá $56^1/_4$. Toma-se a raiz quadrada, que é $7^1/_2$. Adiciona-se isso a $4^1/_2$ que é metade de 9 e ao número 4 que é o que está junto das raízes; o total é 16. É o valor do quadrado.» (Levey [36] pág. 48)

O problema consiste em resolver a equação $3x+4=x^2$, que é do tipo $px+q=x^2$.

Para este caso, os cálculos feitos foram $x^2 = \sqrt{\left(\frac{3^2}{2}\right)^2 + 3^2 \times 4} + \frac{3^2}{2} + 4 = 16$, ***que de uma forma geral correspondem a*** $x^2 = \sqrt{\left(\frac{p^2}{2}\right)^2 + p^2 q} + \frac{p^2}{2} + q$.

«Para a solução que dá o quadrado, considere-se que o quadrado é a linha AB que é igual a 3 raízes e 4 em número. A linha GB é 4 em número, e sobra AG que é 3 raízes da linha AB. Constrói-se uma superfície quadrada AGDH sobre a linha AG. Sabe-se que isto é igual a 9 vezes a linha [AB] calculada por unidades:



Desenha-se a linha AN igual a 9, na perpendicularidade da linha AB, e completa-se a superfície AZ. Então, a superfície AZ é igual ao quadrado AH. Desenhe-se a linha GK paralela a BZ, e retire-se à linha AD a linha AE, igual à linha AN. Desenha-se a linha EL paralela a DH. Então, a superfície EG é igual à superfície AK, e a superfície EH é igual à superfície KB. Mas a superfície KB é 36 uma vez que a linha GB é 4, e a linha GK é igual a AN que é 9. Seja M o ponto médio de AE. Adicionemos ao seu prolongamento a linha ED. Então, o produto da linha AD por DE adicionado com o produto de EM por ele próprio, será igual ao produto de DM por ele próprio, de acordo com o que Euclides mostrou na segunda parte do seu livro.

Mas o produto de AD por DE é igual à superfície EH uma vez que a linha AD é igual a DH. A superfície EH vale 36, ou seja, o produto de AD por ED é 36. O produto de EM por si próprio é $20\frac{1}{4}$. Somando-os obtemos $56\frac{1}{4}$. Então a linha MD é $7\frac{1}{2}$, e a linha AM é $4\frac{1}{2}$ então a linha AD é 12, que é igual a AG. A linha GB é 4, [daí que] a linha AB é 16, que é o quadrado. Isto é o que queríamos mostrar.»(Levey [36] pág. 50 e 52)

Abu Kamil representou x^2 pelo segmento de recta AB. A seguir dividiu esse segmento em duas partes no ponto G, representando AG as 3 raízes e GB os 4 em número. Em seguida construiu um quadrado sobre o lado AG, que vale 9 vezes o segmento AB vezes a unidade ($9x^2$). Posteriormente por A e perpendicularmente a AB construiu o segmento AN de comprimento 9. Sobre esse lado, construiu a superfície rectangular AZ que vale (o mesmo que o quadrado desenhado inicialmente) $9x^2$ uma vez que é $9 \times x^2$. Traçou uma recta paralela a AN por G. Em seguida, desenhou sobre o lado AD o segmento AE igual ao segmento NA, e por E traçou uma recta paralela a DH.

A superfície EG é portanto igual à superfície AK. Como as superfícies AH e AZ têm o mesmo valor, pode-se concluir que a superfície EH é igual à superfície KB. Mas o valor da superfície KB é $GB \times GK = 4 \times 9 = 36$.

Para poder aplicar a proposição II-6 dos Elementos à linha AD, o autor marcou o ponto médio de AE; que é M. Assim sendo, pela proposição resulta que $AD \times DE + EM^2 = DM^2$.

Ora $AD \times DE = DH \times DE = 36$ (uma vez que a superfície EH é igual à superfície KB). Além disso, $EM^2 = (4\frac{1}{2})^2 = 20\frac{1}{4}$. Daí se concluiu que a superfície $DM^2 = 36 + 20\frac{1}{4} = 56\frac{1}{4}$ e portanto $DM = 7\frac{1}{2}$. Como a linha $AM = 4\frac{1}{2}$ vem que $AD = AM + MD = 12$. Mas $AD = AG$. Daí se concluiu que $AB = 16$, que é o que pretendíamos demonstrar.

3.2.3 NÚMEROS IRRACIONAIS E MUDANÇA DE VARIÁVEIS

Além de matemático, Abu Kamil também foi astrónomo, e o desenvolvimento da astronomia obrigava a um grande rigor nos cálculos trigonométricos, fazendo assim com que surgisse um maior conhecimento sobre os números irracionais. Este conhecimento expandiu-se para outros ramos do saber, entre os quais a álgebra. Segundo Hebert ([29] pág. 35), os números irracionais quadráticos e biquadráticos aparecem frequentemente na obra de Abu Kamil, ora como coeficientes ora como raízes. Youschkevitch ([51] pág. 57) acrescenta ainda que a recolha de problemas da obra de Abu Kamil é extremamente rica em exemplos, muitos deles com origem na obra de Al Khowarizmi, mas aos quais Abu Kamil aumentava o nível de dificuldade. Um outro progresso de Abu Kamil reside no facto deste usar, na resolução de alguns problemas, mudanças de variáveis. Vejamos em linguagem e simbologia actual um dos exemplos apresentado em Hebert ([29] pág. 35 e 36) em que Abu Kamil faz uma mudança de variável:

O problema em questão equivale a resolver o seguinte sistema $\begin{cases} a+b=10 \\ \left(\frac{a}{b}\right)^2 - \left(\frac{b}{a}\right)^2 = 2 \end{cases}$.

Abu Kamil considerou que $a = x$ *e* $b = 10 - x$. *Daí tirou que* $\frac{a}{b} = \frac{x}{10-x}$. *Em seguida, tomou* $y = \frac{10-x}{x}$. *Assim sendo, o problema reduz-se a resolver a seguinte equação* $\frac{1}{y^2} = y^2 + 2$, *que é equivalente a resolver a equação* $y^4 + 2y^2 = 1$. *Tomando* $X = y^2$, *obteve a equação* $X^2 + 2X = 1$. *Utilizando o processo habitual calculou a solução desta equação* $X = \sqrt{2} - 1$, *o que o levou a concluir que* $y = \sqrt{\sqrt{2} - 1}$. *Resolveu então a igualdade* $\frac{10-x}{x} = \sqrt{\sqrt{2} - 1}$ *para obter a solução* $x = \frac{10}{1 + \sqrt{\sqrt{2} - 1}} \approx 6{,}0842$.

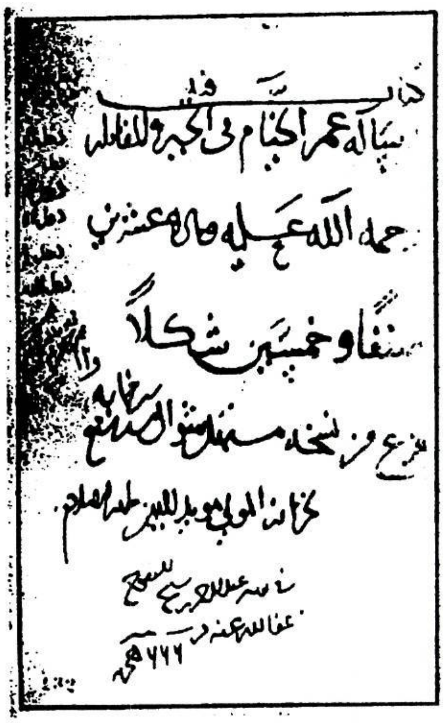
Como vimos, Abu Kamil foi inovador em vários aspectos, mas continuou a formular os algoritmos resolutivos para casos particulares. Foi com o matemático árabe Al Khayyam que se deu essa generalização.

3.3 OMAR KHAYYAM

Abu l Fath Omar Ibrahin al Khayyam nasceu em Khorassam (agora pertencente ao Irão) tendo passado a maior parte da sua vida em Nasapur. Segundo Coolidge ([14] pág. 19), apesar das incertezas que existem sobre as datas do seu nascimento e morte, parece que o autor terá vivido durante a segunda metade do séc. XI e princípio do séc. XII e é usual apontar o ano de 1123 para a sua morte, apesar de tal não ser muito credível.

Foi matemático, astrónomo, filósofo, médico e poeta. Segundo Youschkevitch ([51] pág. 95), além da matemática, os ramos onde ele mais se notabilizou foram a poesia, nomeadamente na poesia persa (traduzida em várias línguas europeias, e hoje em dia mundialmente conhecida e estudada) e a astronomia (com destaque para a reforma do calendário persa por ele preparada, que consistia na introdução de um ano bissexto de 4 em 4 anos).

No campo da matemática, Al Khayyam escreveu vários livros, de onde se destacam dois: *Demonstração dos problemas de al gabr e al mugabala,* que terá sido escrito em 1074 e um *Comentário aos Elementos de Euclides* em 1077. Foi no primeiro livro referido que o autor desenvolveu a teoria das equações algébricas.



A primeira página do livro de álgebra de Al Khayyam tirada de *Materiaux por l'etude de la tradition algebrique arabe* de A. Djebar.

Youschkevitch ([51] pág. 95) refere ainda que o autor considerava a álgebra como sendo a ciência das equações, e que as equações eram as relações entre os números e grandezas conhecidas, e números e grandezas desconhecidas.

Segundo Collette ([12] pág. 126), Al Khayyam notabilizou-se essencialmente pelo facto de ter encontrado métodos que lhe permitia resolver qualquer equação do 3° grau.

No que diz respeito às equações do 2° grau, a sua grande inovação reside no facto de, para as equações do 4°, 5° e 6° tipo, ter apresentado algoritmos no caso geral. Para as equações do 4° tipo, por exemplo, Omar Khayyam escreveu o seguinte:

«Um quadrado e dez raízes são iguais a trinta e nove em número (...) multiplica-se a metade das raízes por elas próprias. Junta-se o produto ao número, e retira-se à raiz da soma, a metade das raízes. O resto é a raiz do quadrado.» (Cassinet [9] pág. 38)

A equação correspondente ao problema é $x^2 + 10x = 39$, *que é do tipo* $x^2 + px = q$, *com p e q positivos. A solução (positiva) foi apresentada para o caso geral. A sequência dos cálculos, em linguagem e simbologia actual foram os seguintes:*

$$1^\circ \ \frac{p}{2} \times \frac{p}{2} = \frac{p^2}{4};$$

$$2^\circ \ \frac{p^2}{4} + q;$$

$$3^\circ \ \sqrt{\frac{p^2}{4} + q};$$

$$4^\circ \ x = \sqrt{\frac{p^2}{4} + q} - \frac{p}{2}$$

Em seguida, o autor apresentou 3 demonstrações, todas elas geométricas e já conhecidas da comunidade matemática, uma vez que já haviam sido dadas por Abu Kamil, Al Khowarizmi e Euclides, respectivamente.

Para as equações do 5º e 6º tipos, Al Khayyam apresentou algoritmos gerais perfeitamente análogos ao anterior.

3.4 AL QALASADI

Abu L Hasan Ali Ibn Muhammad Al Qalasadi nasceu em Granada onde viveu grande parte da sua vida. Depois, partiu para a Tunísia, onde viveu exilado até ao ano da sua morte em 1486. O seu principal trabalho foi o livro intitulado *Kasf al-mahgub min ibn al gubar* cuja tradução é *Desenvolvimento da Ciência da Aritmética*. Este livro está dividido em quatro partes, sendo a última referente à resolução de equações.

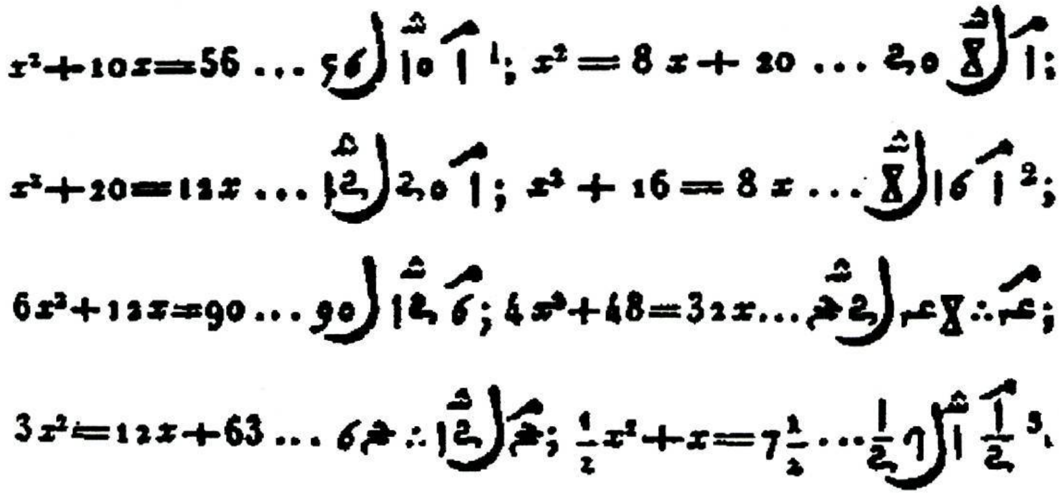
Youschkevitch ([51] pág. 103) afirma que em quase todas as obras dos matemáticos dos países islâmicos, não existe qualquer simbolismo algébrico. Acrescenta ainda que também não existe simbolismo algébrico nos tratados dos sábios do Oriente desde Al Khowarizmi (morreu em 850) até Al Kasi (morreu por volta de 1429). No entanto, nos países Ocidentais existe o tratado de aritmética e álgebra de Al Qalasadi, que é uma excepção notável e inesperada, não por conter algum resultado novo digno de nota, mas por todo o simbolismo apresentado, que constitui naturalmente um interessante exemplo histórico. Esta opinião é partilhada por Djebbar ([19] pág. 42) que acrescenta que já o matemático árabe Ibn Qunfudh (que morreu em 1407) tinha utilizado parte daquele simbolismo; mas o seu silêncio quanto ao sujeito que deu origem a este simbolismo leva a pensar que a sua invenção é anterior ao séc. XIII, apesar do absentismo de simbolismo nas obras que hoje se conhecem de matemáticos posteriores a essa data. Djebbar reforça esta hipótese alegando uma passagem de um livro de um outro matemático árabe, Ibn al-Yasamin (morreu em 1204), que apresenta uma equação do 2° grau onde o polinómio associado contém em parte o simbolismo utilizado mais tarde pela matemático Ibn Qunfudh.

Segundo Cajori ([7] pág. 111), o trabalho de Al Qalasadi distingue-se de todos os outros trabalhos árabes no que diz respeito à quantidade de simbolismo algébrico utilizado, enquadrando-se na fase terminal da álgebra na sua forma sincopada iniciada, como já foi referido, por Diofanto. Vejamos agora a simbologia adoptada por Al Qalasadi:

O símbolo para a igualdade era a última letra da palavra "adala" (que significa igualar). A primeira potência e o quadrado eram designados pela primeira letra das palavras Say e Mal, respectivamente, que Qalasadi colocava por cima do respectivo coeficiente.

Essa simbologia adaptada ao nosso alfabeto corresponderia a usar a letra L que é a última letra da palavra igual, para representar uma igualdade; e para a primeira e segunda potência da incógnita usar as letra C de coisa e Q de quadrado que, como já foi referido, era colocado por cima do coeficiente.

Vejamos alguns exemplos de equações do 2º grau, com a simbologia adoptada por Qalasadi:



Exemplos da simbologia usada por Al Qalasadi tirada de *Les Mathématiques Arabes* de Youschkevitch.

Os dois primeiros exemplos, adaptados ao nosso alfabeto seriam escritos da seguinte forma:

C Q   C Q

$x^2 + 10x = 56$ ... 56 L 10 1; $x^2 = 8x + 20$ ... 20 8 L 1

Deve-se, no entanto referir que apesar de ter introduzido uma simbologia própria que lhe permitia escrever as equações e os respectivos algoritmos usando unicamente símbolos, Al Qalasadi não deixou de usar o discurso contínuo.

Segundo Hebert ([30] pág. 42), Al Qalasadi redigia o texto literal (do mesmo modo que fazia Al Khowarizmi), para em seguida escrever em paralelo com o texto uma escrita simbólica. Não obstante tal facto, o autor tem o mérito de ter sido dos primeiros (senão o primeiro) a poder resolver as equações de grau não superior ao 2º grau usando unicamente símbolos.[23]

Na altura da morte de Omar Khayyam já a civilização árabe estava em declínio. A partir de 1486, com a morte de Al Qalasadi, podemos dar por encerrado as contribuições dos matemáticos árabes. Porém, simultaneamente ao declínio da cultura árabe, as civilizações

[23] Já matemáticos anteriores, como por exemplo Diofanto, haviam usado símbolos, mas apenas como abreviaturas de algumas palavras.

europeias estavam em ascensão e prontas para receber todo o conhecimento oriundo das eras anteriores.

«Foi realmente uma sorte que, quando a cultura árabe começou a declinar, a ciência na Europa estivesse em ascensão e preparada para aceitar a herança intelectual legada por eras anteriores. Diz-se às vezes que os árabes fizeram pouco mais que pôr a ciência grega em "conservação a frio" à espera que a Europa estivesse preparada para aceitá-la. Mas (...) pelo menos no caso da matemática, a tradição transmitida ao mundo latino nos séculos doze e treze era mais rica do que a que os iletrados conquistadores árabes encontraram no século sete.» (Boyer [6] pág. 178)

4 CIVILIZAÇÃO EUROPEIA A PARTIR DO SÉCULO XVI

Foi no séc. XII que surgiram na Europa (mais propriamente em Itália) as primeiras cidades comerciais. Segundo Struik ([45] pág. 138), os mercadores de tais cidades visitavam muito o Oriente, tomando assim contacto com os conhecimentos dessa civilização. Foi através dos mercadores italianos que o conhecimento árabe chegou à Europa. Há a destacar Leonardo de Pisa (1175-1250), mais conhecido por Leonardo Fibonacci que, no seu regresso do Oriente, escreveu um livro intitulado *Liber Abaci* (1202) que continha grande parte da informação aritmética e algébrica da civilização árabe. No entanto, e ainda segundo Struik ([45] pág. 138), há a referir que esta obra apenas teve de original alguns dos exemplos apresentados.

Nos vários séculos que se seguiram, embora a Europa estivesse em ascensão, não se conhece qualquer trabalho original digno de ênfase.

A partir da segunda metade do séc. XV, assiste-se na Europa a uma actividade cientifica cada vez mais notória. Para tal, muito contribuiu o passar das várias crises sociais e a descoberta da imprensa, que permitia editar livros com maior facilidade e rapidez.[24] Foi nesta altura que se começaram a fazer traduções latinas de obras gregas e árabes. Segundo Boyer ([6] pág. 197), a recuperação dos clássicos gregos demorou mais do que as obras árabes sobre álgebra e aritmética, pois poucos eram os homens que dominavam a língua grega e a matemática ao mesmo tempo. No entanto, e aos poucos, essas traduções também foram surgindo. Boyer ([6] pág. 222) refere também que, em 1575, a Europa Ocidental já tinha recuperado a maior parte das obras matemáticas da antiguidade hoje conhecidas, estando nessa altura a álgebra árabe perfeitamente dominada e já tendo sofrido melhorias tanto a nível da resolução de equações cubicas e quárticas, como ao nível das notações (embora as equações ainda não fossem resolvidas apenas com símbolos). Os matemáticos François Viete (1540-1603), Simon Stevin (1548-1620) e Albert Girard (1595-1632) foram alguns dos que contribuíram para este desenvolvimento. Segundo Cassinet ([9] pág. 54), Girard destaca-se dos restantes matemáticos citados pois, além de criar uma notação própria, considerava já as soluções negativas, apesar destas continuarem a ser ignoradas pela restante comunidade matemática até ao séc. XVIII.

[24] Segundo Boyer ([6] pág. 197), o primeiro livro impresso na Europa Ocidental foi em 1447, e por volta do fim do século já estavam mais de 30000 edições de várias obras em circulação, embora apenas algumas fossem de matemática.

4.1 ALBERT GIRARD

Pouco se conhece sobre a vida de Albert Girard. Pensa-se que terá vivido[25] entre 1595 e 1632 e que terá nascido em St. Mihiel, em Lorena, embora tenha passado a maior parte da sua vida nos Países Baixos, onde estudou e esteve como voluntário a cumprir serviço militar. Segundo V. Katz ([33] pág. 406), Girard escreveu trabalhos de trigonometria e retomou, aperfeiçoou e editou algumas obras de Viéte e Stevin; no entanto foi na álgebra que ele mais se notabilizou e onde deu as suas maiores contribuições. O seu trabalho mais importante foi escrito em francês e publicado em Amsterdão em 1629, com o título *Invenção nova em Álgebra*. Este livro é um livro algébrico, constituído por muitas definições e alguns teoremas, devidamente acompanhadas de explicações e exemplos. Katz ([33] pág. 407) chama a atenção para o facto da primeira parte do teorema central desta obra de Girard apresentar *o Teorema Fundamental da Álgebra*: "toda a equação completa de grau n tem o número de soluções igual ao seu grau".

Smith ([43] pág. 474) completou a ideia anterior, dizendo que o primeiro escritor a afirmar que "qualquer equação de grau n tem exactamente n soluções e não mais", parece ter sido Peter Roth, mas que esta lei só terá sido realmente reforçada em 1629, pelo "mais proeminente algebrista" Albert Girard.

A segunda parte do teorema acima citado era referente à relação que existe entre os coeficientes de uma equação e as suas soluções. De facto, o termo independente de uma equação de grau n é, a menos do sinal, igual ao produto de todas as raízes (positivas ou negativas, reais ou imaginárias); o coeficiente do termo de grau 1 é novamente, a menos do sinal, igual à soma de todas as combinações possíveis de n-1 raízes; o coeficiente do termo de grau 2 é, a menos do sinal, igual à soma de todas as combinações possíveis de n-2 raízes, e assim sucessivamente. O número de coeficientes dessas somas aparece na linha $n+1$ do triângulo hoje conhecido por triângulo de Pascal.

Foi o uso deste resultado, embora no sentido oposto, que permitiu a Girard encontrar as várias soluções de equações de grau 3, 4, e por vezes superior.

A resolução dessas equações, por este processo obrigava, na maioria dos casos, a resolver equações do 2º grau. Na resolução das equações do 2º grau, Girard apresentou apenas o algoritmo (já conhecido de toda a comunidade matemática) sem dar qualquer explicação ou demonstração, muito provavelmente por já ser do conhecimento geral.

[25] Estas datas foram tiradas do livro de Cassinet ([9] pág. 54). No livro de Boyer ([6] pág. 222) tem que o autor viveu entre 1590 e 1633.

No entanto, nessas resoluções há a destacar dois aspectos em que Girard foi inovador: o facto de aceitar as soluções negativas e a notação própria que criou e usou.

Relativamente à aceitação das soluções negativas, Katz ([33] pág. 407) afirma que Girard esteve entre os primeiros a reconhecer o significado geométrico das soluções negativas de uma equação, e terá mesmo dito que:

«O negativo em geometria, indica um retrocesso, enquanto que o positivo corresponde a um avanço.» (Cassinet [9] pág. 54)

Smith ([44] pág. 423) completou a ideia de Katz, dizendo que Girard foi um dos primeiros a apreciar o significado do negativo em geometria, embora também fosse bem sucedido nas quantidades imaginárias da teoria das equações.

Só com a aceitação das soluções imaginárias é que Girard podia comprovar que uma equação de grau n tinha n soluções. O autor, além de as aceitar, também as usava nos seus cálculos para encontrar as restantes soluções de uma equação.

«Elas são boas por três coisas: pela funcionalidade da regra geral[26], por se ter a certeza de não haver mais soluções, e pela sua própria utilidade.» (Knorr [35] pág. 408)

No entanto, e segundo Waerden ([50] pág.177), sempre que surgiam soluções imaginárias, Girard classificava-as de inexplicáveis ou impossíveis.

Relativamente à notação usada, Girard ([25] pág. 1) usava já alguns símbolos, embora continuasse a usar o discurso contínuo. Alguns dos símbolos por ele utilizados têm o mesmo significado que têm hoje em dia, como é o exemplo do +, do - e da $\sqrt{\ }$. Relativamente às potências das incógnitas, Girard escrevia o expoente dentro de parêntesis (por exemplo, x^2 era representado por (2)). Curioso é o facto de o autor não ter qualquer símbolo para a igualdade.

Por exemplo, a equação $5x^2 = 18x + 72$ era escrita por Albert Girard do seguinte modo: 5 (2) é igual a 18 (1) + 72. O algoritmo de resolução dessa equação era o habitual.

[26] O autor referia-se ao teorema central do seu livro.

Vejamo-lo:

«5 (2) igual a 18 (1) + 72. A metade do número dos (1) é +9. O seu quadrado é +81, ao qual junta-se 5 vezes +72, que é +360. A soma dá 441. A $\sqrt{441}$ é 21, a qual é acrescentada e retirada ao primeiro, donde resulta 30 e -12. Cada um deles dividido por 5, dá 6 e $-\frac{12}{5}$, que é o valor de 1 (1)» (Cassinet [9] pág. 54)

Um outro matemático merecedor de destaque no campo da resolução das equações do 2º grau foi o francês René Descartes que, contrariamente ao habitual na sua época, voltou a resolver tais equações de uma forma geométrica, embora por um processo totalmente diferente do usado pelos Gregos.

4.2 RENÉ DESCARTES

René Descartes nasceu em Touraine (França) no ano de 1596 e morreu no ano de 1650. Segundo Collette ([13] pág. 5), Descartes foi um dos fundadores da Biologia, um dos primeiros grandes filósofos modernos, um físico de grande talento e um matemático por acaso.

René Descartes tirada de *Histoire des Mathématiques-vol II* de Jean Paul Collette.

Inicialmente, Descartes estudou medicina e direito, tendo-se graduado (embora sem grande gosto) em direito em 1616. Nos anos que se seguiram contactou com intelectuais de vários países tais como Faulhaber na Alemanha, Desargues e Mersene na França.

Segundo Collette ([13] pág. 6), Descartes terá escrito em 1619 numa carta a um amigo, dizendo que estava na posse dos fundamentos de uma «ciência admirável». Embora Descartes não tivesse dito a que ciência se estava a referir, Collette pensa que seria a geometria analítica. No entanto, parece ter sido nas cartas escritas a Isaac Beeckmann em 1628 que se encontra a origem do que chamamos hoje de geometria analítica de Descartes[27].

No ano de 1628 retirou-se para a Holanda onde começou a escrever sobre a teoria que descobrira. Paralelamente, Descartes estava a desenvolver um trabalho de filosofia, uma vez que pretendia encontrar um método filosófico geral, que respondesse aos principais problemas da filosofia. Em 1637, publicou finalmente a sua obra de filosofia intitulada *Discurso do método* e, como apêndice desse livro, editou pela primeira vez o seu trabalho de geometria analítica (com cerca de 100 páginas).

Este trabalho de geometria analítica está dividido em três livros. No primeiro livro, o autor começou por mostrar que as 5 operações fundamentais que existem na aritmética correspondem a construções simples com régua e compasso na geometria. Não se esqueceu de referir que nas multiplicações, divisões e na extracção de uma raiz quadrada era necessário um segmento unitário do qual o resultado estava dependente. Segundo Waerden ([50] pág. 74), Descartes considerava (contrariamente ao que Stevin fazia) que o quociente entre dois segmentos era ainda um segmento e não um número, evitando assim todos os inconvenientes lógicos dos números irracionais. Descartes conseguia assim libertar a álgebra do princípio da homogeneidade que desde os primórdios "estorvava" o progresso da matemática.[28] Deste modo, expressões como $\sqrt[3]{a^2b^2 - b}$ (onde a e b representam segmentos de recta e o segmento unidade é conhecido) ganharam sentido.

«...quando a unidade é conhecida, é a causa pela qual se pode entender tudo onde haja pequenas ou grandes dimensões: como se se quiser tirar a raiz cúbica de aabb – b, é preciso pensar que a quantidade aabb é dividida uma vez pela unidade, e que a outra quantidade b é multiplicada duas vezes pela mesma.» (Descartes [16] pág.7)

Em seguida, o autor apresentou detalhadamente a resolução geométrica dos três tipos de equações do 2º grau completas com os coeficientes e soluções positivas.[29]

Segundo Smith ([44] pág. 375) a ideia fundamental de Descartes não era revolucionar a geometria, mas sim elucidar a álgebra através da intuição geométrica e dos seus conceitos, ou por outras palavras, fazer o tratamento gráfico das equações.

Antes de passarmos à análise das resoluções dos vários tipos de equações do 2º grau, convém referir que embora o autor, em parte, ainda utilizasse o discurso contínuo na resolução das equações, a notação usada era já bastante próxima da dos nossos dias. Segundo Smith ([43] pág. 43), na parte relativa às equações do 2º grau, a simbologia apresentada por Descartes difere da actual apenas em dois aspectos: yy em vez de y^2 e o símbolo ∞ representava o sinal de =. Note-se também que já em Descartes, as quantidades desconhecidas eram representadas pelas últimas letras do alfabeto, enquanto que as quantidades conhecidas eram representadas pelas primeiras.

Waerden ([50] pág. 74) afirmou mesmo que toda a nossa notação essencial foi estabelecida por Descartes.

Vejamos agora a resolução das equações do 2º grau dada por Descartes.

[27] Segundo Smith ([43] pág. 322), embora a invenção da geometria analítica seja frequentemente atribuída a Descartes, uma vez que este publicou em 1637 o primeiro tratado sobre esta matéria, parece não haver dúvidas que esta ideia terá ocorrido a Fermat ao mesmo tempo.

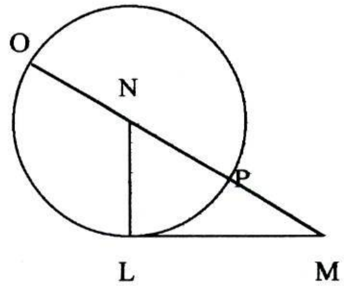
[28] Abu Kamil, no séc. X, já tinha considerado nalgumas demonstrações que um segmento de recta podia representar um número, uma raiz ou até mesmo o quadrado da raiz, mas tal facto não foi seguido pela restante comunidade matemática.

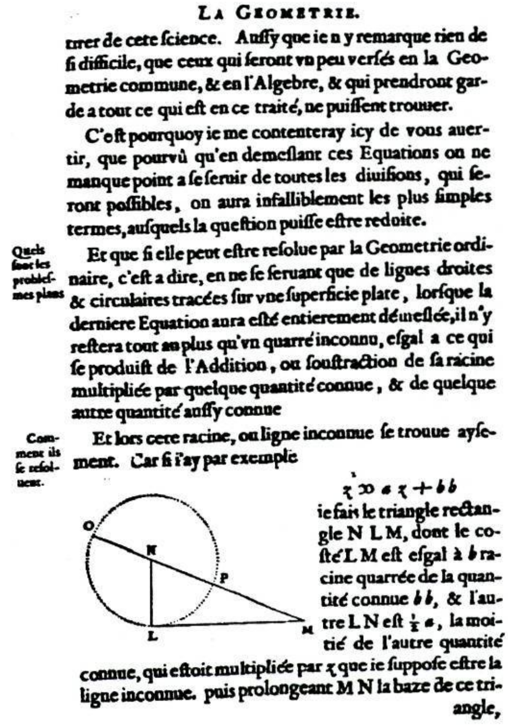
[29] No livro III desta obra de Descartes, aquando da apresentação das equações de grau superior ao 3º, Descartes considerou já as soluções negativas, chamando-lhes raízes falsas.

Equações do tipo $z^2 = az + bb$

«Constrói-se o triângulo rectângulo NLM tal que o lado LM seja igual a *b*, a raiz quadrada da quantidade conhecida *bb*, e o [lado] LN seja $a/2$, a metade da outra quantidade conhecida, que está multiplicada por *z*, que se supõe ser a linha desconhecida. Depois, prolonga-se MN, a base desse triângulo, até O, de modo que NO seja igual a NL; toda a linha OM é *z*, a linha procurada. Ela exprime-se desta forma: $z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$.» (Descartes [16] pág. 12 e 15)

A figura apresentada foi a seguinte:





LA GEOMETRIE.

trer de cete ſcience. Auſſy que ie n y remarque rien de ſi difficile, que ceux qui ſeront vn peu verſés en la Geometrie commune, & en l'Algebre, & qui prendront garde a tout ce qui eſt en ce traité, ne puiſſent trouuer.

C'eſt pourquoy ie me contenteray icy de vous auertir, que pourvû qu'en demeſlant ces Equations on ne manque point a ſe ſeruir de toutes les diuiſions, qui ſeront poſſibles, on aura infalliblement les plus ſimples termes, auſquels la queſtion puiſſe eſtre reduite.

Quels ſont les problesmes plans

Et que ſi elle peut eſtre reſolue par la Geometrie ordinaire, c'eſt a dire, en ne ſe ſeruant que de lignes droites & circulaires tracées ſur vne ſuperficie plate, lorſque la derniere Equation aura eſté entierement démeſlée, il n'y reſtera tout au plus qu'vn quarré inconnu, eſgal a ce qui ſe produiſt de l'Addition, ou ſouſtraction de ſa racine multipliée par quelque quantité connue, & de quelque autre quantité auſſy connue

Comment ils ſe reſoluent.

Et lors cete racine, ou ligne inconnue ſe trouue ayſement. Car ſi i'ay par exemple

$z^2 \propto az + bb$

ie fais le triangle rectangle N L M, dont le coſté L M eſt eſgal à *b* racine quarrée de la quantité connue *bb*, & l'autre L N eſt $\frac{1}{2}a$, la moitié de l'autre quantité connue, qui eſtoit multipliée par *z* que ie ſuppoſe eſtre la ligne inconnue. puis prolongeant M N la baze de ce triangle,

Página 12 do livro *La Geométrie* de René Descartes, onde é feita a demonstração referida.

Como se pode ver pela transcrição dada, Descartes explicou a forma de obter a solução, embora sem apresentar qualquer justificação. Essa justificação deduz-se facilmente se tivermos em conta a proposição III-36 dos E*lementos* de Euclides.

Por construção, temos que LM = b e que LN= $a/2$. Pela proposição referida temos que MP × MO = ML². Temos então que:

$$MP \times MO = ML^2 \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow (MO - a) \times MO = bb$$

$$\Leftrightarrow MO^2 - a \times MO = bb$$

$$\Leftrightarrow MO^2 = a \times MO + bb$$

Pela última igualdade, conclui-se que MO satisfaz a equação $z^2 = az + bb$, sendo portanto solução da equação.

Para se deduzir a expressão algébrica da solução $\left(z=\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}\right)$ *é suficiente aplicar o teorema de Pitágoras ao triângulo MNL. A solução obtém-se acrescentando à hipotenusa do triângulo MNL o raio da circunferência.*

A outra solução da equação não é apresentada, uma vez que é negativa.

Equação do tipo $y^2 + ay = bb$.

«Se tivermos $yy=-ay+bb$, em que y é a quantidade procurada, faz-se o mesmo triângulo rectângulo NLM, de base MN e tal que NP é igual a NL e a recta PM é a raiz procurada. Deste modo temos que $y=-\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}$.» (Descartes [16] pág. 15)

Neste caso, Descartes usou a mesma construção do exemplo anterior.

Partindo da mesma condição inicial, e substituindo MO por $MP + a$, obteve:

$$MP \times MO = ML^2$$
$$\Leftrightarrow MP \times (MP + a) = bb$$
$$\Leftrightarrow MP^2 + a \times MP = bb,$$

de onde resulta que MP é a solução da equação $y^2 + ay = bb$.

Para obter a expressão algébrica da solução $\left(y=-\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}\right)$ *o autor começa por usar novamente o teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo MLN para em seguida subtrair à hipotenusa do triângulo MNL o raio da circunferência, obtendo assim a expressão pretendida.*

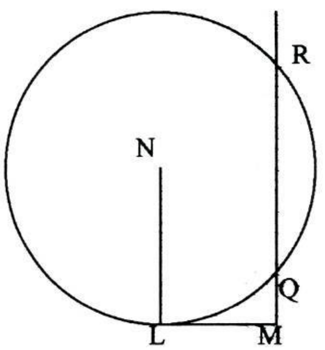
A solução negativa desta equação também foi ignorada.

Equação do tipo $z^2 = az - bb$

«Enfim, se tivermos $z^2 = az - bb$, faz-se NL igual a $a/2$ e LM igual a b. Depois, em vez de unir os pontos MN, tira-se MQR paralela a LN. De centro N até L descreve-se um círculo que corte a linha nos pontos Q e R; a linha procurada z é MQ e MR, pois neste caso ela exprime-me de duas maneiras, a saber: $z = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$ e $z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$.

E se o círculo, que tem o seu centro no ponto N, passar pelo ponto L, mas não cortar nem tocar a linha MQR, não existe nenhuma solução da equação, de modo que é possível garantir que a construção do problema proposto é impossível.» (Descartes [16] pág. 15)

A figura para este tipo de equações é a seguinte:



Neste caso, a figura suporte é diferente, embora o raciocínio seja análogo e a proposição usada seja a mesma:

Por construção, temos que LM = b e que LN = $a/2$. Pela proposição III-36 vem que: $MQ \times MR = ML^2$. *Mas*

$$MQ \times MR = ML^2 \Leftrightarrow \qquad\qquad MQ \times MR = ML^2 \Leftrightarrow$$
$$MQ \times (a - MQ) = b^2 \Leftrightarrow \quad \text{ou} \quad (a - MR) \times MR = b^2 \Leftrightarrow$$
$$a \times MQ - MQ^2 = b^2 \Leftrightarrow \qquad\qquad a \times MR - MR^2 = b^2 \Leftrightarrow$$
$$MQ^2 = a \times MQ - b^2 \qquad\qquad MR^2 = a \times MR - b^2$$

Donde se conclui que tanto MQ como MR são soluções da equação $z^2 = az - bb$

Como este tipo de equações nem sempre tem soluções, o autor referiu os casos em que a equação é impossível (quando a recta perpendicular a LM por M não intersecta a circunferência de centro N e raio NL (que corresponde a b > $a/2$)).

Relativamente às expressões algébricas apresentadas, consideremos que P é o ponto médio de QR. Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo NQP conclui-se que $PQ = PR = \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, *daí que as soluções da equação (MR e MQ) sejam respectivamente* $\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$ *e* $\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$.

Como vimos, Descartes resolveu toda e qualquer equação do 2° grau de uma forma geométrica e totalmente original relativamente aos Gregos, introduzindo a notação que ainda hoje utilizamos. No entanto, ignorou (pelo menos no 1° livro do seu trabalho) as soluções negativas, e continuou a dividir as equações do 2° grau em vários tipos.

O primeiro tratamento unificado e geral das equações do 2° grau, referido na literatura, data do séc. XVIII e é da autoria de MacLaurin.

4.3 COLIN MACLAURIN

Colin MacLaurin era um matemático britânico, que nasceu na Escócia no ano de 1698 e faleceu em 1746.

Segundo Collette ([13] pág. 101), a sua habilidade matemática desde cedo foi notória, tendo entrado para a Universidade com 12 anos e terminado com brio o bacharelato sobre gravidade na Universidade de Glasgow quando tinha 15 anos. Aos 19 anos, foi professor universitário em Aberdeen. Seis anos mais tarde estava já na universidade de Edimburgo.

Boyer ([6] pág. 315) classificou mesmo MacLaurin de "o mais importante matemático britânico da geração posterior a Newton" e afirmou que ele terá escrito trabalhos de matemática nas mais variadas áreas.

Segundo Cassinet ([9] pág. 58), no que diz respeito às equações do 2° grau, MacLaurin apresentou no seu livro *Álgebra,* que foi publicado em 1748 (2 anos depois da sua morte), a teoria das equações do 2° grau de uma forma completa (considera todas as soluções positivas ou negativas), geral (considera todos os casos de uma só vez, sem os dividir em vários tipos) e acessível a todos (com uma linguagem perfeitamente acessível a um público vasto, mesmo sem grandes conhecimentos matemáticos), dando a demonstração algébrica que é ensinada hoje em dia aos alunos do secundário. Cassinet alerta porém, que é possível que a resolução das equações do 2° grau, em toda a sua generalidade, possa ter ocorrido algum tempo antes de MacLaurin.

Vejamos tal resolução.

«Transportam-se todos os termos que contêm a incógnita para um membro da equação e todos os termos conhecidos para o outro.

Se o quadrado da incógnita está multiplicado por alguma quantidade, dividem-se todos os termos da equação por essa quantidade.

Forma-se o quadrado da metade da quantidade que multiplica a incógnita simples, juntando-o a ambos membros da equação e, nesse momento, um membro da equação será um quadrado perfeito.

Tira-se a raiz quadrada de ambos os membros, e um membro será sempre a incógnita com a metade da quantidade que multiplica a incógnita simples; de modo que se transpusermos essa metade, teremos o valor da incógnita.

Exemplo: $y^2 + a y = b$

Junta-se o quadrado de $\frac{a}{2}$ .... $y^2 + ay + \frac{a^2}{4} = b + \frac{a^2}{4}$

Extrai-se a raiz.. $y + \frac{a}{2} = \pm\sqrt{b + \frac{a^2}{4}}$

Transpomos $\frac{a}{2}$ .... $y = \pm\sqrt{b + \frac{a^2}{4}} - \frac{a}{2}$

Como todo o quadrado é positivo, é evidente que a raiz quadrada duma quantidade negativa é imaginária pelo que não poderá ser aceite; é por isso, que existem equações do 2° grau que podem não ter qualquer solução.

Exemplo: $y^2 - a y = -3 a^2$

Junta-se $\frac{a^2}{2}$ .... $y^2 - ay + \frac{a^2}{4} = -3a^2 + \frac{a^2}{4} = -\frac{11a^2}{4}$

Extrai-se a raiz.. $y - \frac{a}{2} = \pm\sqrt{-\frac{11a^2}{4}}$

$$y = \frac{a}{2} \pm \sqrt{-\frac{11a^2}{4}}$$

Neste exemplo, os dois valores de y são imaginários ou impossíveis, porque não podemos aceitar a raiz quadrada de $-\frac{11a^2}{4}$.» (Cassinet [9] pág. 58 e 59).

CONCLUSÃO

Sintetizarei agora com alguns breves comentários o que pretendi com esta dissertação.

Apesar deste trabalho ser breve e conciso, não podendo desta forma abranger todos os matemáticos que deram contribuições na evolução do processo de resolução das equações do 2° grau, penso que foram referidos os aspectos e as fases mais importantes de tal evolução.

É importante salientar que, por vezes o aparecimento de trabalhos que estavam perdidos ou parcialmente destruídos vêm pôr em questão convicções fortes, e afirmações como "este matemático foi o primeiro a ..." podem deixar de fazer sentido. Não obstante tal facto, os matemáticos referidos não deixam de ter mérito e de serem considerados mentes geniais.

Como já referi na introdução, tentei sempre que me foi possível seguir as traduções das obras originais dos autores, nomeadamente as traduções feitas por M. Thureau Dangin sobre os documentos deixados pela civilização Mesopotâmica; as de F. Peyrard relativamente aos *Elementos* e aos *Dados* de Euclides; para Diofanto segui as traduções de Paul Ver Eecke dos livros inicialmente conhecidos da *Aritmética* do autor; no que diz respeito aos árabes, para Al Khowarizmi analisei traduções feitas por A. Djebbar e por Jean Pierre Levet; e para Abu Kamil baseei-me nas traduções de Martin Levey; para os Europeus Girard e Descartes segui os textos originais.

Analisando agora a vertente pedagógica relativa ao meu trabalho como professor do ensino secundário, penso que com esta dissertação e ao analisar os textos deixados pelos matemáticos referidos consegui sentir em parte as dificuldades e o deslumbramento sentidas pelos autores e que podem ser semelhantes às que os nossos alunos sentem quando, por exemplo, são confrontados com a apresentação e demonstração da fórmula resolvente das equações do 2° grau. Fiquei também a conhecer bastante melhor a história da matemática, podendo tal conhecimento, quando aplicado oportunamente, servir de incentivo aos nossos alunos quando lhes estamos a leccionar diferentes temas.

BIBLIOGRAFIA

[1] **AISSANI, Djamil** (Edit.) - *Bougie a L`Epoque Medievale. Les mathematiques au sein du movement intellectuel.* Rouen: IREM de Rouen, 1993

[2] **BENOIT, Paul; MICHEAU, Françoise** – "O Intermediário Árabe?" de Michel Serres (Dir.) – *Elementos para uma história das ciências. Vol. I – Da Babilónia à Idade Média*. Trad. Lisboa: Terramar, 1989.

[3] **BERGGREN, J. L.** - *Episodes in the Mathematics of Medieval Islam.* New York: Springer – Verlag, 1986

[4] **BOCHNER, Salomon** - *The Role Mathematics in the Rise of Science.* Princeton: Princeton University Press, 1996.

[5] **BOURBAKI, Nicolas** – *Elements of the History of Mathematics.* Transl. Berlin: Springer-Velag, 1994

[6] **BOYER, Carl B.** - *História da Matemática.* Trad. por Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blucher, 1974

[7] **CAJORI, Florian** – *A History of Mathematics.* New York: Chelsea, 1991

[8] **CASSINET, M. J.** (Edit.) - *Equations du premier degre - Methode de "Fausse Position".* Tolouse: IREM de Tolouse, 1982

[9] **CASSINET, M. J.** (Edit.) - *Equations du second degre.* Tolouse: IREM de Tolouse, 1979

[10] **CASSINET, M. J.** (Edit.) - *Equations du* troisieme *degre.* Tolouse: IREM de Tolouse, 1980

[11] **CHESTER, Robert** – *Livre d'Algèbre e d'Almucabola de Al Khwarizmi; Fascicule 1*. Trad. por Jean-Pierre Levet. Poitiers: IREM de Poitiers,1997.

[12] **COLLETTE, Jean-Paul** – *Histoire des Mathématiques, vol. 1.* Montreal: Vuibert, 1973

[13] **COLLETTE, Jean-Paul** – *Histoire des Mathématiques, vol. 2.* . Montreal: Vuibert, 1979

[14] **COOLIDGE, Julian Lowell** – *The Mathematics of Great Amateurs, 2nd. Ed.* Oxford: Clarendon Press, 1990.

[15] **DEDRON, Pierre; ITARD, Jean** - *Mathématiques et Mathématiciens "de l'an 2000 à l'an 2000 – de Babylone à Paris".* Paris: Magnard, 1959

[16] **DESCARTES, René** – *The Geometry of René Descartes.* Trad. por David Eugene Smith e Marcia Lathan. New York: Dover, 1954

[17] **DIOPHANTE d'Alexandrie** – *Les six livres arithmétiques et le livre des nombres polygones.* Trad. por Paul Ver Eecke. Paris: Albert Blanchard, 1959

[18] **DJEBAR A.** – *Materiaux pour l'etude de la tradition algébrique arabe (IX^e^ – XV^e^ siècles), premiére version.* Paris: IREM Paris, 1996

[19] **DJEBAR, A.** – *La phase arabe de l'algèbre (VIII^e^ – XV^e^ siecles); 12^e^ Colloque Inter – IREM Épistémologie sur "La pensée algébrique".* Douai, 1998

[20] **EUCLIDE** – *Les Oeuvres D'Euclide.* Trad. por F. Peyrard. Paris: Albert Blanchard, 1993

[21] **EUCLIDE** – *Les Elements, Vol. I – Introdution Generale: Livre I a IV – Geometrie plane.* Trad. por Bernard Vitrac. Paris: Presses Universitaires de France, 1990

[22] **EVES, Howard** – *An Introdution to the History of Mathematics.* New York: Holt, Rinehart and Winston, 1974

[23] **FRAJESE, Attilio; MACCIONI, Lamberto** (Edit.) – *Gli Elementi di Euclide.* Torino: Unione Tipografico-Editrice Torinese, 1970

[24] **GANDZ, S.** – "The Sources of Al-Khowarizmi Algebra" de Osiris Vol. I pp. 263-277, 1936

[25] **GIRARD, Albert** – "Des equations ordonnées" de *L'invention nouvelle em álgebre*;1629

[26] **GUIMARÃES, António Andrade** – *O pensamento Matemático na Grécia Antiga – 1ª parte: da antiguidade Oriental até Zenão de Eleia.* Porto: Centro Universitário do Porto, 1973

[27] **HEATH, Thomas** – *A History of Greek Mathematics, vol. I - from Thales to Euclid.* New York: Dover, 1981

[28] **HEATH, Thomas** – *A History of Greek Mathematics, vol. II – from Aristarchus to Diophantus.* New York: Dover 1981

[29] **HEBERT, E.** (Edit.) - *Decouvrir les mathematiques arabes.* Rouen: IREM de Rouen, 1989

[30] **HEBERT, E.** (Edit.) - *Quelques aspects des mathematiques d'Ibn al-Banna de Marrakech (1256-1321).* Rouen: IREM de Rouen, 1995

[31] **HOFMANN, Ehrenfried** – *Historia de la Matematica, tomo I* – Desde el comienzo hasta Fermat y Descartes. Trad. por Valis Y Angles y Fernandez Tomas. Barcelona: Union tipografica Editorial Hispano Americana, 1960

[32] **I. R. E. M. de Paris VII (M. A. T. H.)** – *Exemples d'utilization de textes originaux.* Paris: IREM Université Paris VII, 1990

[33] **KATZ, Vitor J.** – *A History of Mathematics: an introduction*. New York: Harper Collins College, 1993

[34] **KLEIN, Jacob** – *Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra.* Trad. por Eva Brann. New York: Dover, 1968

[35] **KNORR, Wilbur** – *The Ancient Tradition of Geometric Problems.* Boston: Birkhausor, 1986

[36] **LEVEY, Martin** - *The Algebra of Abu Kamil.* Transl. Madison: University of Wislonsin Press, 1966.

[37] **MAHAMMED, Norredine** - *Sur la résolution des équations algébriques.* Lille: IREM de Lille, 1995

[38] **RADFORD, Luis** – "L`émergence et le developpement conceptuel de l`algèbre" in *Actes de la première université d`eté européenne.* Montpellier: IREM de Montpellier, 1993

[39] **ROBINS, Gay; SHUTE Charles** – *The Rhind Mathematical Papyrus, an ancient Egyptian text.* New York: Dover, 1987

[40] **SALIBA, George A.**– "The Meaning of al-jabr wa'l-muqabalah" in Centaurus Vol. 17, 1972-73

[41] **SESIANO, Jacques** – "Rhetorische Algebra in der arabisch-islamischen Welt" de *Geschichte der Algebra, eine Einfuhrung*. Edit. por E. Scholz

[42] **SESIANO, Jacques** – *Books IV to VII of Diophantus Arithmetica, in the Arabic translaction attributed to Qusta Ibn Luqa.* New York: Springer-Verlag: 1982

[43] **SMITH, David Eugene** – *History of Mathematics, vol. II – Special topics of elementary Mathematics.* New York: Dover, 1953

[44] **SMITH David Eugene** – *History of Mathematics, vol. I – General survey of the history of elementary Mathematics. New York: Dover, 1951*

[45] **STRUIK, Dirk J.** - *História concisa das Matemáticas.* Trad. por João Cosme Santos Guerreiro. Lisboa: Gradiva, 1992

[46] **SWIFT, J. D.** – "Diophantos of Alexandria" in *American Mathematical Monthly*, 1956

[47] **SZABÓ, Árpad** – *The Beginnings of Greek Mathematics.* Dordrecht: Reidel, 1978

[48] **TIMMERMANS, Benoit** – *La résolution des problemes de Descartes à Kant: L'analyse a l'age de la revolution scientifique.* Paris: Press Universitaire de France, 1995

[49] **VARADARAJAN, V. S.** - *Algebra in Ancient and Moderd Times.* Providence: American Mathematical Society, 1998

[50] **WAERDEN, B. L. Van Der** – *A History of Algebra – From al-Khwarizmi to Emmy Noether. Berlin: Springer Velag, 1985*

[51] **YOUSCHKEVITCH, Adolf P.** – *Les Mathématiques Arabes (VIII^e-XV^e siecles).* Trad. por M. Cazenaze e K. Jaouiche. Paris: VRIN, 1976