

Ana Inês Pimenta Azevedo

Gomes Teixeira e a lemniscata



Departamento de Matemática Pura
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
Agosto / 2000

Ana Inês Pimenta Azevedo

Gomes Teixeira e a lemniscata



*Tese submetida à Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
para obtenção do grau de Mestre em Ensino da Matemática*

Orientada pela Professora Doutora
Maria do Rosário Machado Lema Sinde Pinto

Departamento de Matemática Pura
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
Agosto / 2000

Dedico esta dissertação à Bia.

Agradecimentos

Agradeço à minha família a paciência e carinho em mim investidos. Em particular à mãe e ao Mingos o tempo e as dicas que comigo gastaram e ao pai a ida “relâmpago” a Madrid e os “empurrões” que me deu. À Bia por ser uma bebé tão boazinha e me ter deixado acabar este trabalho. À minha irmã o “ter ido à minha frente neste caminho”.

Um obrigado muito especial aos amigos muito especiais José Manuel dos Santos dos Santos, José Manuel Teixeira e Maria José Bahia, em particular ao José Manuel Teixeira pela ajuda prestada.

Obrigado ao amigo Manuel Lopes pela ajuda prestada, particularmente em comunicar com a Biblioteca da Academia de Ciências Exactas Físicas e Naturais de Madrid.

Agradeço a prontidão e simpatia da efficientíssima Bibliotecária Doutora Helena Barbosa.

Agradeço ao colega Joaquim Calado a simpatia e disponibilidade em se corresponder comigo e me ajudar.

Finalmente, um agradecimento muito muito especial à minha orientadora, a Professora Doutora Maria do Rosário Machado Lema Sinde Pinto, por todo o apoio, incansável paciência e disponibilidade demonstradas particularmente em relação à minha nova “característica” de ter sido mãe.

Resumo

Esta tese aborda questões relacionadas com a curva lemniscata em “várias facetas”. Abordamos entre outras características a sua forma, variedade, métodos construtivos (utilizando o software The Geometer’s Sketchpad) e equações (capítulo 1).

Apresentamos também a vida e obra de um grande matemático português que se dedicou, entre outros estudos, à curva lemniscata. Referimo-nos a Francisco Gomes Teixeira, premiado pelo seu *Tratado de las Curvas Notables* (capítulo 2).

Tratamos ainda a forma de estudar a lemniscata não só segundo o “trabalho” de Francisco Gomes Texeira (capítulo 3), mas também de outros matemáticos, entre os quais Gino Loria e Joaquin de Vargas y Aguirre.

Como resultado final apresentamos esta tese tendo em consideração não só os estudos acima mencionados mas também os resultados da nossa pesquisa no *Jornal de Mathematica Elementar* e através da Internet (capítulo 4).

Abstract

This thesis approaches issues related with the lemniscate curve in “several angles”. Among other characteristics, we focus on its shape, variety, construction procedure (using the software The Geometer’s Sketchpad”) and equations (chapter 1).

We also present the work and life of a great Portuguese mathematician that dedicated himself, among others, to the study of the lemniscate. We refer Francisco Gomes Teixeira awarded by his work *Tratado de las Curvas Notables* (chapter 2).

We dealt with the mode of treating the lemniscate according to Francisco Gomes Teixeira (chapter 3) and also to other mathematicians like Gino Loria and Joaquin de Vargas y Aguirre.

As a final result we are going to present the current thesis having taking into account the previous studies mentioned, as well as our research in the *Jornal de Mathematica Elementar* and in the Internet (chapter 4).

Índice

ABSTRACT.....	4
INTRODUÇÃO	6
1. A LEMNISCATA	8
2. GOMES TEIXEIRA – VIDA E OBRA.....	21
3. A LEMNISCATA NO TRATADO DAS CURVAS DE GOMES TEIXEIRA	62
3.1 ESPÍRICAS – LEMNISCATAS ELÍPTICAS E LEMNISCATAS HIPERBÓLICAS	64
3.1.1. <i>lemniscata elíptica</i>	66
3.1.2. <i>Lemniscata hiperbólica</i>	73
3.2 A LEMNISCATA DE BERNOULLI	77
3.3. LEMNISCATA DE GERONO	91
3.4. AS LEMNISCATAS PERTENCENTES ÀS CURVAS CÍCLICAS ESFÉRICAS	97
3.4.1 <i>Curva de Viviani - Uma Curva em Forma de Oito</i>	97
3.4.2 <i>A lemniscata Esférica de Eudoxo ou Hipópeda</i>	107
3.4.3. <i>A lemniscata Esférica de Roberts</i>	108
4. OUTRAS ABORDAGENS DA LEMNISCATA	115
4.1 GINO LORIA	115
4.2 JOAQUIN DE VARGAS Y AGUIRRE	135
4.3 OUTRAS OBRAS... ..	139
4.4 AINDA OUTRAS ABORDAGENS	141
ANEXOS.....	152
ANEXOS AO CAPÍTULO 3	152
<i>Anexo 3.1.1</i>	152
<i>Anexo 3.1.2</i>	153
<i>Anexo 3.2</i>	154
<i>Anexo 3.3</i>	157
ANEXOS AO CAPÍTULO 4	157
<i>Anexo 4.1</i>	157
<i>Anexo 4.2</i>	158
<i>Anexo 4.3</i>	159
ANEXO DE BIOGRAFIAS	161
BIBLIOGRAFIA.....	181

Introdução

Esta dissertação tem como objectivo sintetizar o estudo da curva lemniscata ao longo dos tempos. Pretende-se apontar diferenças no tratamento que esta curva mereceu por parte de três matemáticos de final do século XIX, princípio do século XX. Foram eles o português Francisco Gomes Teixeira, o italiano Gino Loria e o espanhol Joaquin de Vargas y Aguirre.

Tal como explica Gomes Teixeira no prefácio da primeira edição da sua obra, escrita em 1897, responde a uma proposta feita pela Academia de Ciências de Madrid primeiramente em 1892 e depois em 1895 de um “*Catálogo ordenado de todas las curvas de cualquier clase que han recibido nombre especial, acompañado de una idea sucinta de la forma, ecuaciones y propiedades generales de cada una, con noticia de los libros ó autores que primeiramente las han dado a conocer*”. Nesta obra, bem como num artigo de Appel em *Annaes Scientificos da Academia Polytechnica do Porto*, encontra-se referência a Haton de La Goupilliere que, entre os dois apelos da referida Academia e na falta de respostas à primeira proposta, chamou a atenção dos matemáticos sobre as vantagens que haveria em reunir numa obra especial o estudo das curvas notáveis.

Como resposta ao primeiro apelo, inicialmente apenas Brocard publicou um lista de nomes especiais dados a diversas curvas, que ele pretendia que fosse analisada pela referida Academia, a qual no entanto não foi a concurso por não responder a todas as condições impostas por aquela instituição.

Várias obras sobre curvas de certas espécies ou outros trabalhos mais completos haviam sido publicados em diversas alturas: em 1711, *Enumeratio Linearum Tertii Ordinir* de Issac Newton; *Histoire des lignes et des surfaces courbes dans l'antiquité* de Paul Tannery (em 1901 Basset publicou um livro cujo título era *An Elemetary Treatise on cubic and quartic curves*) mas faltava uma obra completa formando um catálogo ordenado de todas as curvas notáveis.

Responderam a ambos os apelos: Gomes Teixeira, com a obra *Tratado de las Curvas Especiales Notables*, publicada pela primeira vez em 1897; Gino Loria, com *Las Curvas Planas Particulares Algebraicas y Transcendentes. Teoria e Historia*, também publicada pela primeira vez em 1897; e Joaquin de Vargas y Aguirre, com *Catálogo General de Curvas*.¹

¹ É provável que exista uma edição do mesmo ano que as duas antes referidas, mas como existe pouca informação a seu respeito, apenas posso referir a publicação a que tive acesso, datada de 1908.

A Academia avaliou-os e, excepcionalmente, atribuiu dois prémios em vez de apenas um. Os prémios foram atribuídos a Gomes Teixeira e a Gino Loria e a terceira memória, de Vargas y Aguirre, recebeu uma menção honrosa.

A presente dissertação começa com uma descrição da curva *lemniscata*, pretendendo-se dar a conhecer, entre outras coisas, as suas formas, equações, propriedades e construções. Em particular referem-se a lemniscata de Bernoulli e a lemniscata de Geroni.

No segundo capítulo, sobre Francisco Gomes Teixeira, faz-se uma apresentação biográfica sobre este matemático português, apresentando os factos mais importantes da sua vida. No término deste capítulo encontra-se um resumo da obra por ele publicada, tal como fez Henrique Vilhena no livro *O Professor Doutor Francisco Gomes Teixeira*.

O capítulo três é dedicado ao estudo da curva *lemniscata* no *Tratado de las Curvas Especiales Notables* de Gomes Teixeira.

No capítulo quatro encontra-se o estudo da *lemniscata* noutras obras, em particular nas outras duas obras a concurso, *Las Curvas Planas Particulares Algebraicas y Transcendentes. Teoria e Historia* de Gino Loria e *Catálogo General de Curvas* de Vargas y Aguirre. Nas últimas secções deste capítulo encontra-se uma abordagem publicada no *Jornal de Mathematica Elementar* usando o software Mathematica, feita por Joaquim Calado, professor aposentado e colaborador assíduo deste jornal. O capítulo termina com o resultado de pesquisas sobre a referida família de curvas, feitas através da Internet.

1. A Lemniscata

A palavra *lemniscata* vem do grego $\lambda\eta\mu\nu\iota\sigma\chi\omicron\zeta$ (lhmniscoz) e designa uma curva em forma de oito. De todas as curvas com este nome, a mais citada é a de Bernoulli, logo seguida da *de Gerono*. Sobre a primeira, são abundantes as referências que se podem encontrar em obras de vários matemáticos e até através da Internet. Outras curvas também chamadas de *lemniscatas* são, como veremos no capítulo 3, a *lemniscata esférica de Eudoxo* e a *lemniscata esférica de Roberts*, que se podem encontrar na obra de Gomes Teixeira, ou, conforme veremos no capítulo 4, a *lemniscata geral*, a *lemniscata de Booth* e a *lemniscata logarítmica*, referidas entre outras pelo geómetra italiano Gino Loria, ou ainda a *lemniscata de Dandelin*, mencionada pelo matemático espanhol Vargas y Aguirre.

No que diz respeito à mais conhecida das *lemniscatas*, a *lemniscata de Bernoulli*, podemos defini-la como o lugar geométrico dos pontos de um plano tais que o produto das suas distâncias d e d' a dois pontos fixos desse plano, designados respectivamente por F e F' , é igual ao quadrado de metade da distância entre esses pontos, isto é:

$$d \times d' = \frac{(\overline{FF'})^2}{4}.$$

Denote-se o produto dd' por a^2 .

A *lemniscata de Bernoulli* é uma curva que pertence à família das Ovais de Cassini. Estas, por sua vez, integram a família das cassinoideas ou curvas de Cassini.

Uma cassinoidea é o lugar geométrico dos pontos de um plano cujo produto das distâncias a dois ou mais pontos fixos do plano é constante. Os pontos destas curvas satisfazem a uma equação do tipo

$$r^{2m} - 2c^m r^m \cos(mt) + c^{2m} = a^{2m}$$

onde r representa o raio vector, m o número de pontos fixos, c designa a semi-distância entre os focos da curva e a^2 diz respeito ao produto constante das distâncias acima referido.

No caso de serem dois os pontos fixos F e F' , a equação tem a forma

$$r^4 - 2c^2 r^2 \cos(2t) + c^4 = a^4$$

e trata-se de uma oval de Cassini.

Considerando um referencial cujos eixos coordenados sejam os eixos de simetria da curva e tal que F e F' estejam sobre um dos eixos coordenados (seja o dos xx) em posições simétricas relativamente à origem, então a equação resultante é

$$(I) \quad y^4 + 2(x^2 + c^2)y^2 + (x^2 - c^2)^2 - a^4 = 0,$$

onde $\overline{FF'} = 2c$.

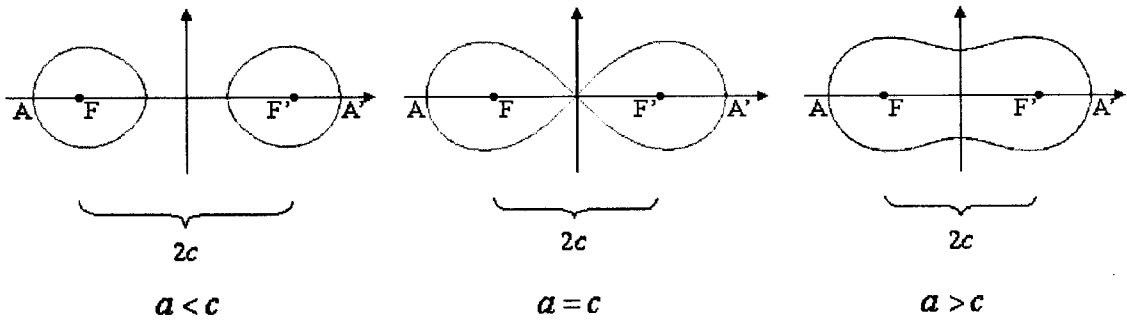


Fig.1.1

Assim, para que (I) tenha raízes reais, é necessário que

$$a^2 + c^2 \geq x^2 \geq c^2 - a^2.$$

Logo, tomando no eixo dos xx A e A' em lados opostos de O tais que

$$\overline{OA} = \overline{OA'} = \sqrt{a^2 + c^2},$$

a curva está compreendida entre as paralelas ao eixo dos yy por A e A'.

Dos três casos possíveis - $a < c$, $a = c$ ou $a > c$ - iremos debruçar-nos sobre o caso $a = c$, isto é, quando x varia entre $-a\sqrt{2}$ e $a\sqrt{2}$, o caso da *lemniscata de Bernoulli*. Esta curva apresenta na origem um ponto duplo, no qual as tangentes à curva são as bissectrizes dos quadrantes.

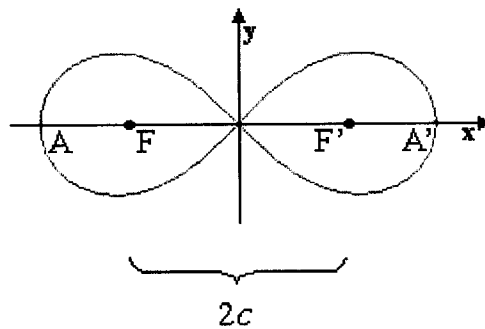


Fig.1.2

A *lemniscata de Bernoulli* pode ser definida pela equação

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$$

ou, em coordenadas polares, pela expressão

$$\rho^2 = a^2 \cos 2\omega,$$

sendo M um ponto qualquer da curva, $\rho = \overline{MF}$ e $\omega = \widehat{MOF}$.

Os pontos onde a curva corta o eixo dos xx são os vértices A e A', de coordenadas $(-a\sqrt{2}, 0)$ e $(a\sqrt{2}, 0)$, respectivamente, e o centro da *lemniscata* é O, a origem do referencial.

A distância dos diferentes pontos da curva aos dois pontos fixos F e F' varia na razão inversa um do outro, pois $\overline{MF} \cdot \overline{MF'} = \text{constante}$. Todas as linhas que passam pelo centro e por um ponto da curva são divididas, neste ponto, em duas partes iguais. A estas linhas chama-se diâmetros.

A equação bipolar e as equações paramétricas da lemniscata são respectivamente

$$rr' = \frac{1}{2}a^2$$

e

$$\begin{cases} x = \frac{a \cos(t)}{1 + \sin^2(t)} \\ y = \frac{a \sin(t) \cos(t)}{1 + \sin^2(t)} \end{cases}$$

A equação em coordenadas pedais, considerando o centro como ponto pedal, é

$$pa^2 = r^3.$$

A curvatura da lemniscata é dada por

$$k = \frac{3\sqrt{2} \cos(t)}{\sqrt{3 - \cos(2t)}}$$

e a expressão do comprimento de arco é

$$L = 2 \int_0^a \frac{dr}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{a}\right)^4}}.$$

Sendo $t = \frac{r}{a}$ obtém-se a expressão

$$L = 2a \int_0^1 (1 - t^4)^{-1/2} dt$$

que se chama função lemniscata. A partir desta é possível definir as novas funções $\text{senlemn}(P)$ e $\text{coslemn}(P)$ e, sendo $a = 1$, deduzir que

$$L = 5.2441151086...$$

À quantidade $\frac{L}{2}$ dá-se o nome de constante lemniscata que desempenha uma função análoga à de π para a circunferência.

Vejamos algumas propriedades: primeiro veremos duas relativas às cassinoideas e depois algumas relacionadas com a *lemniscata*:

1ª - O lugar geométrico dos vértices dos ângulos circunscritos² a uma hipérbole equilátera é uma cassinoidea. (Vargas p. 109)

2ª - Os vértices dos ângulos da base dos triângulos em que a mediana correspondente é constante em magnitude e posição, e em que o produto dos outros lados é invariável, descrevem duas cassinoideas. Se a mediana é meio proporcional entre os lados adjacentes, as curvas descritas são *lemniscatas*. (Propriedade atribuída a Mr. Garlin em Vargas y Aguirre p. 109)

3ª - A área total limitada pela curva *lemniscata* é, de acordo com Vargas, igual a $\frac{4}{3}a^2$ mas de acordo com outras obras não é assim.³

4ª - O integral que expressa o arco da *lemniscata* possui propriedades análogas ao do integral que representa o arco de círculo. Existe uma relação algébrica entre os limites dos integrais que exprimem os arcos de *lemniscata*, um o dobro do outro, de modo que um arco de *lemniscata* pode, como um arco de círculo, ser duplicado ou dividido em partes iguais por meio de uma construção geométrica. Estes resultados eram já conhecidos por Fagnano, como veremos mais adiante (Vargas p. 671).

5ª - O lugar geométrico dos vértices de um sistema de hipérboles equiláteras que tem o mesmo centro e um ponto comum é uma *lemniscata*; e o lugar dos focos das mesmas curvas é também uma *lemniscata* que as corta ortogonalmente (Serret, *Journal de Liouville*⁴, tomo VIII, p. 499).(Vargas p. 671)

6ª - Os arcos da *lemniscata*, calculados a partir de um ponto fixo, são percorridos ao mesmo tempo que as cordas por um móbil pesado que parta de um estado de repouso, formando a *lemniscata* um ângulo de 45° com a vertical e estando o seu centro no ponto fixo de onde parte o móbil (atribuída a Fuss por Vargas y Aguirre, *Catálogo General de Curvas*, p. 671)⁵.

7ª - A propriedade anterior é igualmente válida quando o ponto material, em vez de estar sujeito à acção do seu peso, está sujeito à acção de uma força central proporcional à distância (atribuída a Bonnet por Vargas p. 671)⁶.

² Os lados são tangentes a um dos ramos de hipérbole.

³ Veja-se páginas 84 e 119 para comparar com os resultados de Gomes Teixeira e Gino Loria, respectivamente.

⁴ Mais correctamente o seu nome é *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*.

⁵ No *Bulletin de la Société Mathématique de France* (Tomo 20, de 1892, p. 38), Fouret refere na sua comunicação de 4 de Maio de 1892 que é errado atribuir a descoberta desta propriedade tanto a Fuss como a Saladini, referindo mais adiante que a procura de uma curva nas condições enunciadas foi tratada analiticamente por Euler (nas páginas 166, 167) em *Mécanique* publicada 1736.

⁶ John Bernoulli chama de isócrona paracêntrica a curva com a propriedade de o tempo gasto por uma partícula para a percorrer ser proporcional à distância a partir de um ponto fixo.

8ª - A secção produzida num toro por um plano tangente ao anel interior é uma *lemniscata*, como veremos no capítulo 3 (Vargas, p. 672).

9ª - A *lemniscata* é um caso particular da espiral sinusoidal. Vargas, no já referido *Catálogo General de Curvas*, define esta curva espiral como tendo equação $m\rho^m = a^m \sin(m\omega)$, acrescentando que se « $m = 2$ obtém-se a *lemniscata* cujos focos estão situados na intersecção da 1ª bissectriz e do círculo concêntrico à origem que tem raio a ».

Uma expressão diferente encontra-se em *A Catalog of Special Plane Curves* de J. Dennis Lawrence: $r^n = a^n \cos(n\theta)$ correspondendo o caso $n = 2$ à *lemniscata de Bernoulli*. A diferença entre as duas expressões diz respeito aos eixos de simetria da figura, sendo para o primeiro caso as bissectrizes e no segundo caso os eixos coordenados.

10ª - Ainda na mesma obra de Vargas encontrámos a *lemniscata* como caso particular das curvas isocromáticas⁷ (Vargas p. 634-638). É também possível descobrir semelhanças a nível da forma entre a *lemniscata* (e as ovais de Cassini) e as linhas equipotenciais geradas por duas cargas eléctricas do mesmo sinal.

11ª - Encontrámos na obra *Curves and Their Properties* de Robert C. Yates a *lemniscata* como cissoide do círculo de raio $\frac{a}{2}$ com respeito a um ponto O que dista $\frac{\sqrt{2}}{2}a$ do seu centro.⁸

12ª - A *lemniscata hiperbólica* é a podaria da hipérbole equilátera relativamente ao centro⁹ (Vargas p. 813).

13ª - Na publicação da American Mathematical Society, *Lectures in the History of Mathematics*, Henk J. M. Bos refere que a *lemniscata de Bernoulli* pertence à classe das *lemniscatas de Booth*, sendo estas um caso especial das cissoides (falaremos desta *lemniscata* mais pormenorizadamente nos capítulos 3 e 4). Acrescenta depois que a *lemniscata* é um caso especial da curva concóidal, que pertence à classe das curvas de Watt, e ainda que é uma curva de Lissajous.

14ª - Na obra *A Catalog of Special Plane Curves* de J. Dennis Lawrence, encontramos nova referência à *lemniscata de Bernoulli*. A secção 5.11 reservada à hipópeda descreve-a como o lugar geométrico de equação

$$(x^2 + y^2)^2 + 4b(b - a)(x^2 + y^2) = 4b^2x^2$$

⁷ De acordo com o autor (em Física) dá-se o nome de curvas isocromáticas às linhas traçadas em superfícies com o mesmo nome. Acrescenta ainda que Mr. Bertin (*Annales de Chimie et de Physique*, 3ª série, tomo LXIII, p. 57, 1861) dá o nome de superfície isocromática ao lugar dos pontos do espaço em que a diferença de marcha do raio ordinário e do extraordinário (noções que infelizmente não define) que se propagam segundo uma mesma direcção, tem um valor dado.

⁸ Visto ser o mais divulgado, este método será referido com algumas variantes ao longo deste estudo.

⁹ Ver (128), capítulo 3.

onde $a > 0$, $b > 0$, cuja equação polar é $r^2 = 4b(a - b \sin^2(\theta))$ e acrescenta que, sendo $b = 2a$, a curva se reduz a uma *lemniscata de Bernoulli*.

15ª - Numa carta de A. W. Phillips publicada em 1878 na revista *American Journal of Mathematics* I, encontramos a seguinte construção da *lemniscata* (o texto cujo conteúdo traduzimos abaixo tem por título “*Link-Work for the Lemniscate*”):

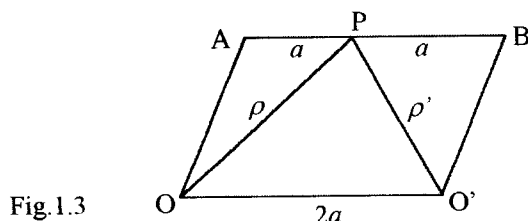


Fig.1.3

“Tendo em conta a descrição da lemniscata, eu descobri, quando trabalhava com um sistema de três barras, que se O e O' são pontos fixos, $ABO'O$ um paralelogramo, $\overline{AP} = \overline{PB}$ e $\overline{AO} = r = \sqrt{2}a$, então P descreve uma lemniscata, da qual O e O' são focos. A equação completa da curva descrita por P , expressa em coordenadas polares, reduz-se a

$$(\rho^2 + \rho'^2 - 6a^2)(\rho^2 \rho'^2 - a^4) = 0,$$

onde $\rho^2 + \rho'^2 - 6a^2 = 0$ é a equação de um círculo em coordenadas bipolares. Então $\rho^2 \rho'^2 - a^4 = 0$ dá $\rho\rho' = a^2$ como equação da lemniscata.”

16ª - A lemniscata de Bernoulli é a *envelope* de círculos cujo centro pertence à hipérbole rectangular e em que cada círculo passa no centro da hipérbole. (De http://www.best.com/~xah/SpecialPlaneCurves_dir/Lemnis.../lemniscateOfBernoulli.htm)

17ª - Em <http://home.wxs.nl/~wassel70/higher/higherm.html> encontra-se uma outra curva de nome lemniscata mas de forma muito diferente das que aqui tratamos (em oito). Trata-se das lemniscatas de Mandelbrot, definidas através de uma recorrência quadrática e associadas ao conjunto de Mandelbrot e a curvas equipotenciais.

Em *An Elementary Treatise on Cubic and Quartic Curves* de A. B. Basset, a *lemniscata de Bernoulli* surge logo após as cassinianas, tal como já tinha sido feito em outras obras, referindo o autor que é um caso particular das cassinianas. Basset apresenta na secção reservada à *lemniscata de Bernoulli* do capítulo X intitulado “Special quartics” as suas equações polar e cartesiana e acrescenta que se trata de uma curva em que a origem é um biflecnode¹⁰, fazendo as tangentes neste ponto um ângulo recto. Acrescenta ainda que a *lemniscata* apresenta a propriedade de ser a inversa e simultaneamente a curva pedal de uma

¹⁰ Um biflecnode é definido na página 108 da mesma obra como sendo um nó no qual ambas as tangentes são estacionárias.

hipérbole rectangular relativamente ao seu centro e que, além das propriedades já assumidas pela cassiniana, a *lemniscata de Bernoulli* possui mais algumas que o autor demonstra.

O autor procede então a uma descrição que o leva a encontrar as equações pedal e tangencial da *lemniscata*: $p^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \cos\left(\frac{2}{3}\chi\right)$.¹¹

No ponto 256 relata como encontrar a equação da evoluta de uma *lemniscata* e para concluir faz referência aos números de Plücker para a curva pedal.

Vejamos algo relativo ao traçado da *lemniscata de Bernoulli*. Um método que nos permite obter esta curva é o seguinte, apresentado num artigo de Adília Ribeiro e Helena Torres, na revista *Educação Matemática*:

- Desenhar uma circunferência de centro C e raio r (Fig. 1.4 a, abaixo);
- Assinalar o ponto O (centro da *lemniscata*) de modo que a sua distância a C seja $r\sqrt{2}$;
- Traçar uma recta m que passe pelo ponto O e intersecte a circunferência nos pontos Q e Q';
- Na recta m , assinalar os pontos P e P', equidistantes de O, a uma distância deste igual a $\overline{QQ'}$;
- Repetindo o procedimento anterior para todas as posições possíveis de m , os pontos P e P' descrevem uma *lemniscata de Bernoulli*.

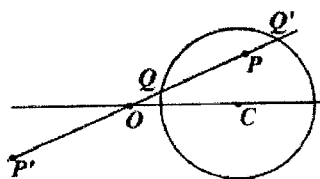


Fig. 1.4a

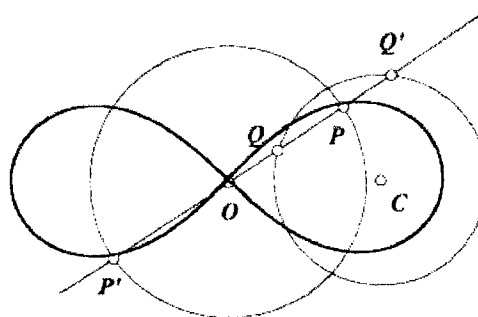
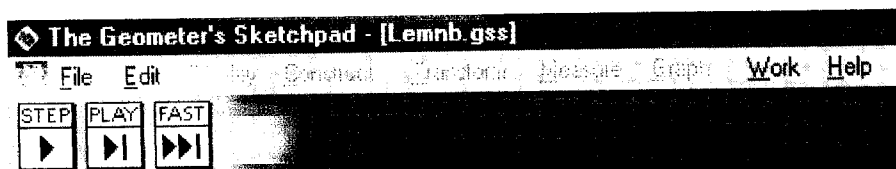


Fig. 1.4b

¹¹ Para um determinado ponto P, χ representa o ângulo formado pela semi-recta que contem o centro e um foco da lemniscata e a semi-recta que contem o centro e o pé da perpendicular (que passa pelo centro) à tangente no ponto.

A curva pode ser obtida utilizando o programa *The Geometer's Sketchpad* do modo que abaixo se descreve:

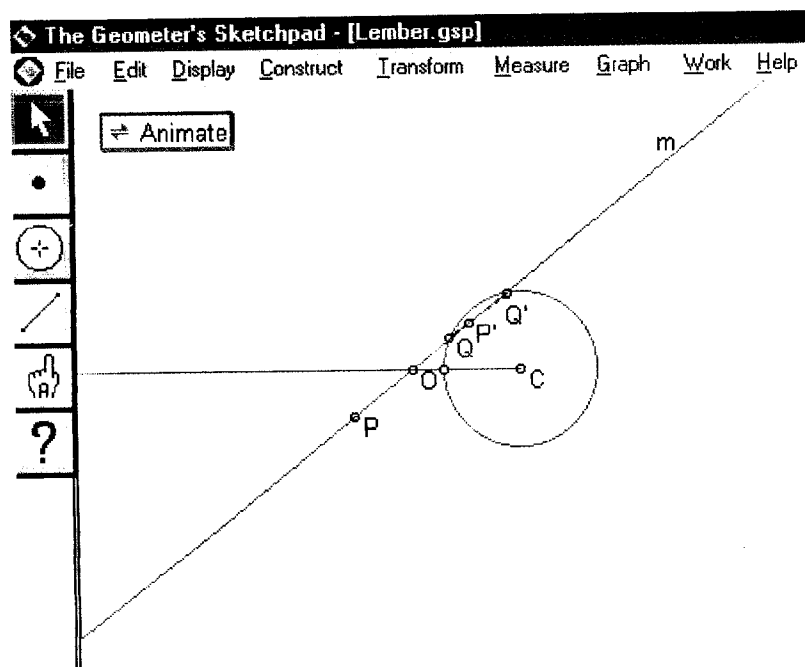


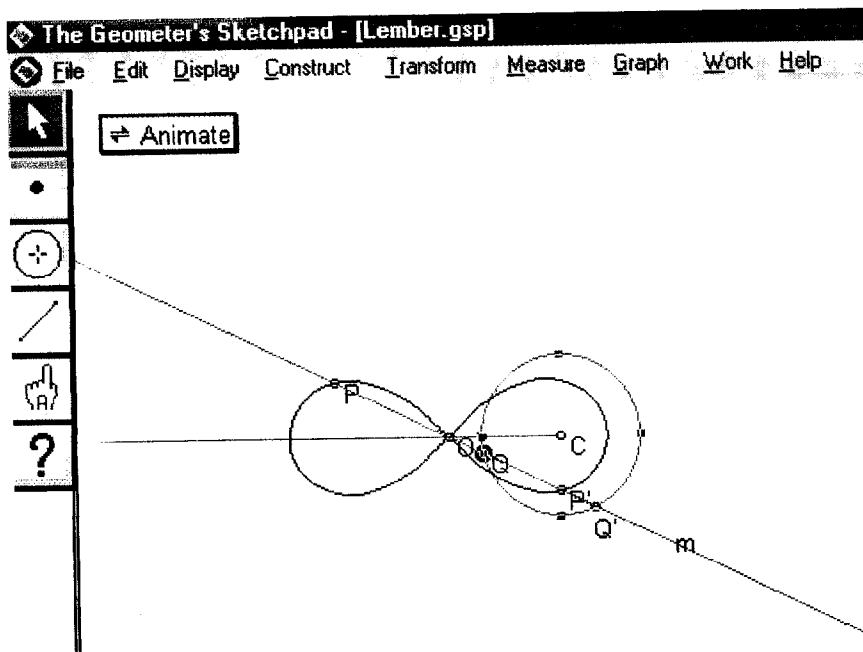
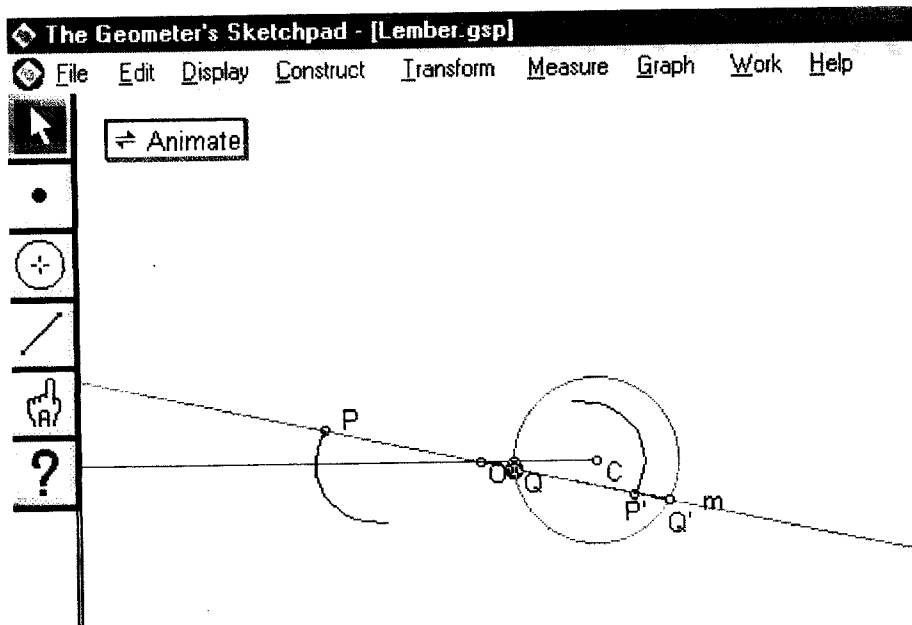
Given:

- Point B
- Point C
- Point C

Steps:

1. Let r = Segment between Point B and Point C (hidden).
2. Let $[A']$ = Image of Point C translated by vector $C \rightarrow B$.
3. Let $[B']$ = Image of Point B translated by vector $C \rightarrow B$ (hidden).
4. Let $[l]$ = Ray between Point C and Point $[A']$ (blue).
5. Let $[c1]$ = Circle centered at Point C with radius length r (blue).
6. Let $[D]$ = Midpoint of Segment r (hidden).
7. Let $[m]$ = Perpendicular to Segment r through Midpoint $[D]$ (hidden).
8. Let $[n]$ = Parallel to Line $[m]$ through Point B (hidden).
9. Let $[c2]$ = Circle centered at Point B with radius length r (hidden).
10. Let $[E]$ = Intersection of Circle $[c2]$ and Line $[n]$ (hidden).
11. Let $[F]$ = Intersection of Circle $[c2]$ and Line $[n]$ (hidden).
12. Let $[o]$ = Segment between Point B and Point $[F]$ (hidden).
13. Let r' = Segment between Point $[F]$ and Point C (hidden).
14. Let $[c3]$ = Circle centered at Point C with radius length r' (hidden).
15. Let O = Intersection of Circle $[c3]$ and Ray $[l]$.
16. Let Q = Random point on Circle $[c1]$.
17. Let m = Line between Point Q and Point O (blue).
18. Let Q' = Intersection of Circle $[c1]$ and Line m .
19. Let $[J]$ = Intersection of Circle $[c1]$ and Line m .
20. Let $[r]$ = Segment between Point Q' and Point Q .
21. Let $[c4]$ = Circle centered at Point O with radius length $[r]$ (hidden).
22. Let P' = Intersection of Circle $[c4]$ and Line m (traced).
23. Let P = Intersection of Circle $[c4]$ and Line m (traced).





Consideremos agora o caso da *lemniscata de Geron*. Tal como a de Bernoulli, esta é uma das *lemniscatas* que também mais adiante, nos capítulos 3 e 4, veremos como foi abordada por vários matemáticos, entre eles os candidatos a prémio no concurso de 1896 da Academia de Ciências de Madrid.

Segundo o *Catálogo General de Curvas* de Joaquin Vargas y Aguirre, esta curva foi estudada por Geron, no seu *Cours de géométrie analytique*, e ganhou o nome por que é conhecida graças a Gabriel-Marie, *Exercices de géométrie descriptive* (ver capítulo 4). De acordo com esta obra, a *lemniscata de Geron*, que também tem a forma de oito, é um caso particular da parábola virtual¹²

$$(x^2 - by)^2 = a^2(x^2 - y^2)$$

em que $b = 0$, resultando assim que a sua equação cartesiana é

$$a^2 y^2 = x^2(a^2 - x^2).$$

J. Dennis Lawrence, no livro *A Catalog of Special Plane Curves*, acrescenta as suas equações polar

$$r^2 = a^2 \sec^4(\theta) \cos(2\theta)$$

e paramétricas

$$\begin{cases} x = a \cos(t) \\ y = a \sin(t) \cos(t) \end{cases}, \quad -\pi < t < \pi.$$

Na obra *Estudio y Representación de Curvas Planas* de José Carrasco Duaso, datada de 1946, ocorre o nome de *lemniscata de Geron* como resultado da pesquisa da curva como hiperbolismo de um círculo. No capítulo relativo às curvas notáveis, José Carrasco Duaso refere a *lemniscata* e salienta as de Bernoulli e de Geron, dando as equações cartesianas de cada uma delas.

Basset, na obra acima citada, refere que a *lemniscata de Geron* por várias vezes foi confundida com a *lemniscata de Bernoulli* por ambas terem a forma de oito. Refere depois o processo de construção abaixo, concluindo que o ponto resultante dá o lugar procurado, cuja equação é

$$x^4 = a^2(x^2 - y^2).$$

Acrescenta depois que também esta curva possui um biflcnode na origem e um tacnode¹³ no infinito, pertencendo por isso à espécie VII (segundo classificação por ele próprio feita em

¹² Curva unicursal estudada por G. de St. Vincent.

¹³ Tacnode é um ponto duplo no qual duas curvas osculadoras são tangentes.

capítulos anteriores) e para o provar o autor transforma a equação acima em coordenadas trilineares, obtendo

$$\gamma^4 = a^2(\gamma^2 - \alpha^2)\beta^2.$$

Vejamos agora o método de construção da *lemniscata de Geroni* que se encontra descrito na obra *An Elementary Treatise on Cubic and Quartic Curves* de A. Basset:

- Seja P um ponto qualquer de uma circunferência de centro O e raio α ;
- Traçar [PM] perpendicular a qualquer diâmetro [CA], e [PN] perpendicular à tangente à circunferência em A;
- Unir C com N;
- Da intersecção de [CN] com [PM] obtemos o ponto Q da curva em questão.

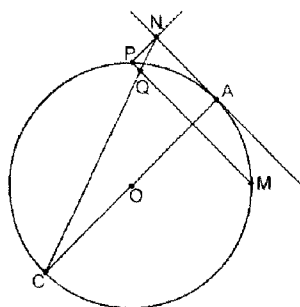
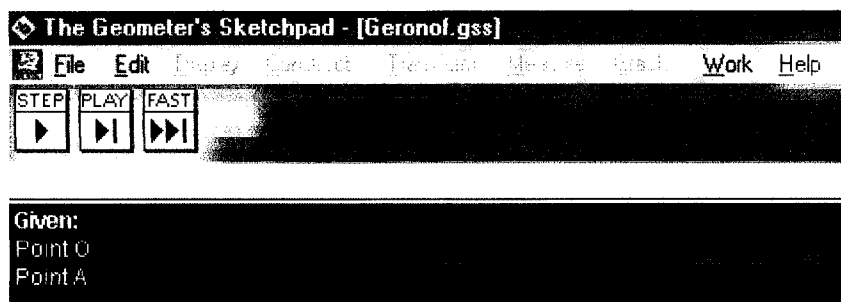


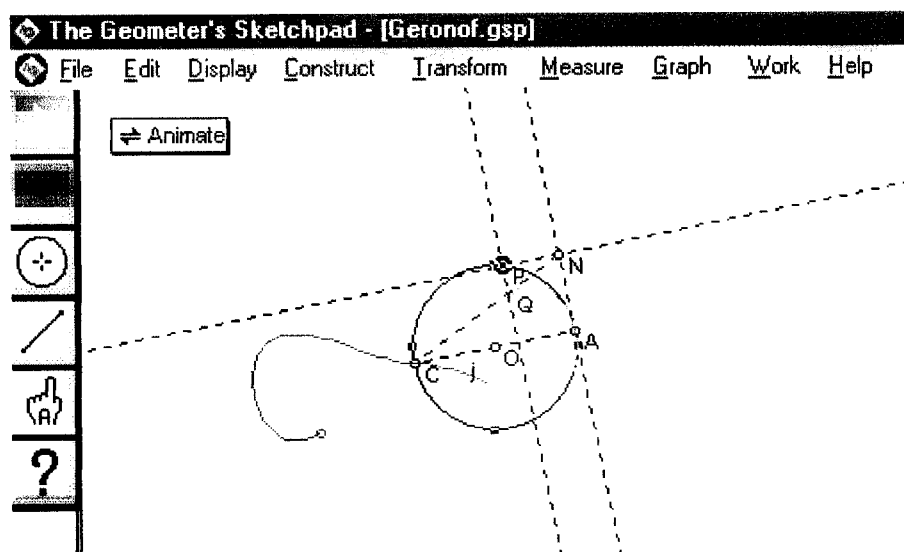
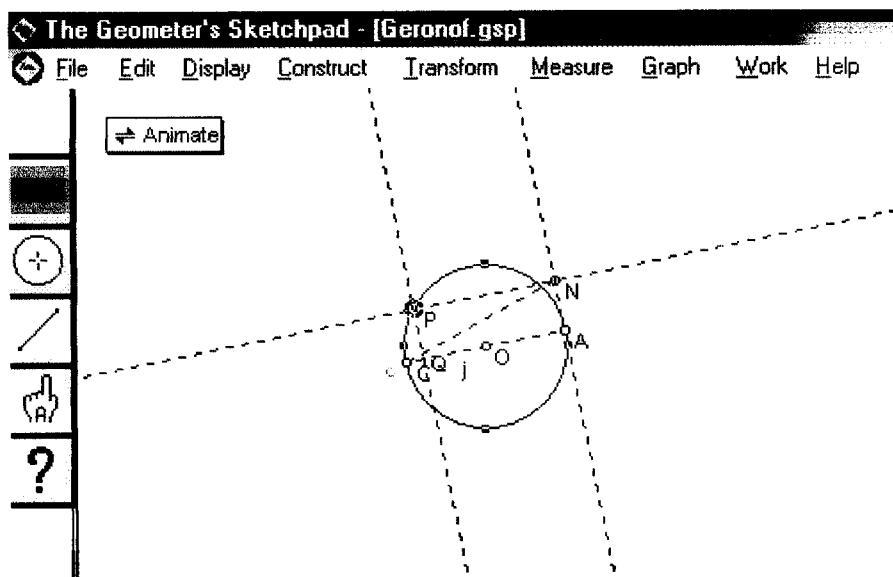
Fig. 1.5

Também esta curva pode ser obtida utilizando o software *The Geometer's Sketchpad* do seguinte modo:



Steps:

1. Let [j] = Segment between Point O and Point A (dashed).
2. Let [c1] = Circle with center at Point O passing through Point A.
3. Let C = Image of Point O translated by vector $A \rightarrow O$.
4. Let [k] = Segment between Point O and Point C (dashed).
5. Let P = Random point on Circle [c1].
6. Let [l] = Perpendicular to Segment [j] through Point P (dashed).
7. Let [m] = Perpendicular to Segment [j] through Point A (dashed).
8. Let [n] = Perpendicular to Line [m] through Point P (dashed).
9. Let N = Intersection of Line [n] and Line [m].
10. Let [o] = Segment between Point N and Point C (dashed).
11. Let Q = Intersection of Segment [o] and Line [l] (magenta, traced).
12. Let [C'] = Image of Point C translated by vector $Q \rightarrow C$ (magenta, traced).
13. Select P and [c1].



2. Gomes Teixeira – Vida e Obra

Francisco Gomes Teixeira foi dos matemáticos mais proeminentes do nosso país.

Quando o nosso interesse é saber algo sobre este matemático português, vários são os locais onde podemos saciar a nossa curiosidade. Quer utilizemos a Internet quer recorramos aos livros, sempre descobrimos algo a seu respeito. Encontramos artigos “Sobre Gomes Teixeira”, entre outras, em publicações como a *Gazeta de Matemática*¹⁴; *Anais da Faculdade de Ciências*; *Revista Matemática Hispano Americana* (volume 2, nº 8 de 1933); *Archives Internationales d'Histoire des Sciences*¹⁵; *The mathematical Gazette*; *O Occidente*.¹⁶ Contudo as fontes mais completas sobre a vida e obra de Gomes Teixeira são, sem dúvida, as suas duas biografias da autoria de Henrique Vilhena e de Rodolfo Guimarães.

Francisco Gomes Teixeira, filho de Manuel Gomes Teixeira e de Maria Madalena Machado, nasceu a 28 de Janeiro 1851 numa casa modesta da aldeia de S. Cosmado do concelho de Armamar, distrito de Viseu. Frequentou a escola oficial da sua terra natal, seguindo depois para Lamego, a fim de continuar, num colégio religioso, os seus estudos secundários. Em Lamego, ficou hospedado em casa de seu primo, o médico Francisco Maria de Carvalho.

Francisco Maria de Carvalho viria a ter uma grande influência na vida de Gomes Teixeira, interferindo junto do pai para que este o mandasse formar em Matemática, em vez do sacerdócio. Interrogado Gomes Teixeira «*pelo pai, e dada a sua indiferença no caso, tirou-se à sorte – entre a carreira eclesiástica e a da matemática – que decidiu por esta última*» (Henrique Vilhena).

Gomes Teixeira frequentou as disciplinas destinadas à carreira eclesiástica por vontade do pai, que desejava que se formasse em Teologia. Com este propósito, ia anualmente a Coimbra preparar-se noutra colégio para as disciplinas de acesso à Universidade, sendo Geometria um dos exames a que se submeteu, e no qual viria a ser aprovado com distinção por um exigentíssimo lente de Matemática da Universidade.

Nos seus estudos secundários, Gomes Teixeira mostrou interesse tanto por disciplinas ligadas às ciências como às letras, chegando mesmo a dizer, numa entrevista a Tomaz Pessoa a 17 de Março de 1925 para o Diário de Notícias:

¹⁴ Artigo de Luis Freire da Universidade do Recife publicado no n.º 50 de Março de 1951.

¹⁵ Publicação de 1 Outubro de 1947 onde se encontra referido que Gomes Teixeira era membro correspondente n.º 63 da Académie Internationale d'Histoire des Sciences.

¹⁶ “Revista ilustrada de Portugal e do estrangeiro” de 20 de Outubro de 1899.

“Fiz um curso liceal completo (ciências e letras) em que não faltou o estudo desenvolvido das humanidades. Atraiu-me nessa distante mocidade a literatura latina, sobretudo Virgílio, que estudei com verdadeira paixão. Também me atraía a literatura portuguesa, especialmente os nossos clássicos. Li os Lusíadas umas poucas de vezes. (...) Tinha um especial interesse pela história, sobretudo pela história de Portugal.”

Em relação às ciências, afirmou:

“A que mais chamou a minha atenção foi a Física, por explicar fenómenos que via diariamente. Às matemáticas não tinha afecto nem aversão. Estudei-as e bem, apenas para cumprir o meu dever escolar.” (Henrique Vilhena, p. 113).

Em Outubro de 1869 matriculou-se na Universidade de Coimbra, frequentando a cadeira de Álgebra e Geometria Analítica, regida pelo Dr. Torres Coelho. Na entrevista acima referida disse:

“(...) fui para a Universidade de Coimbra com o plano de, se pudesse vencer o curso de Matemática, seguir a Engenharia militar. Um dos meus professores, o Dr. Torres Coelho, depois de me chamar duas vezes à lição, foi dizer ao Dr. Filipe de Quental, em casa de quem eu estava hospedado, que lhe parecia ser eu o melhor aluno do curso. Sabedor disso, senti-me estimulado. Esse facto decidiu das minhas predilecções definitivas. Consagrei-me desde então, com absoluto exclusivismo, às matemáticas.”

Em 1870 e 1871 matriculou-se respectivamente nos 2º e 3º anos, tendo durante o seu 3º ano escrito o seu primeiro trabalho, *Desenvolvimento das funções em fracções contínuas*, onde expôs um método que permite obter resultados mais rapidamente convergentes na determinação das raízes de equações¹⁷ do que os métodos de Newton e Lagrange.

Os anos de 1872 e 1873 corresponderam aos 4º e 5º anos do curso de Gomes Teixeira. De referir que em todos os anos do seu curso ele foi o único aluno a alcançar a distinção classificativa de “Prémio”¹⁸ e “Partido”¹⁹ em várias cadeiras. O ano de 1874 correspondeu à

¹⁷ Não se encontra explícito de que tipo de equações se tratava, em nenhuma das biografias (de Rodolfo Guimarães ou Henrique Vilhena) mas na p. 120 da primeira obra, lê-se que “apresenta fórmulas para desenvolver as funções em fracções contínuas; transforma em seguida estas em fracções ordinárias, e aplica as fracções contínuas ao cálculo integral e à determinação das raízes das equações, observando que por este método se obtêm resultados mais convergentes do que pelos métodos de Newton e de Lagrange”.

¹⁸ Segunda melhor classificação alcançável numa cadeira.

¹⁹ Melhor classificação alcançável numa cadeira.

conclusão do curso, com a informação «Muito bom por unanimidade, com 20 valores», classificação esta que tinha sido atribuída anteriormente apenas três vezes. Ainda no ano de 1874, Gomes Teixeira iniciou o Doutoramento²⁰, obtendo a 18 de Julho de 1875, com 24 anos e meio, a classificação «Muito bom por unanimidade, com 20 valores», constituindo um facto inédito, pois jamais havia sido conferida esta classificação simultaneamente nos dois actos de conclusões magnas. Passado um ano, a 30 de Julho, a Academia de Ciências de Lisboa elegeu-o sócio correspondente²¹ e, nesse mesmo ano, a 20 de Dezembro, Gomes Teixeira ocupou a vaga aberta no quadro da Faculdade de Matemática da Universidade de Coimbra como lente substituto, após ter apresentado em concurso a dissertação *Sobre o emprego dos eixos oblíquos na mecânica analítica*. Tinha então apenas 25 anos. Com o objectivo de projectar os matemáticos portugueses no estrangeiro, Gomes Teixeira fundou em 1877 o *Jornal de Ciências Matemáticas e Astronómicas*. Foi publicado em Coimbra²² durante 28 anos em 15 volumes, sendo na altura a única publicação em Portugal dedicada exclusivamente às matemáticas e tendo como colaboradores vários matemáticos portugueses como Schiappa Monteiro, Craveiro Lopes, Rocha Peixoto, Rodolfo Guimarães e estrangeiros como Carlos Hermite e Gino Loria, apenas para nomear alguns. A publicação referida foi mais tarde continuada, sob a direcção de Gomes Teixeira, pelos *Annaes Científicos da Academia Politécnica do Porto* (1905) que, por sua vez, deram lugar aos *Anais da Faculdade de Ciências do Porto*, dirigidos por Gomes Teixeira até 1932.

Em 1878, mais precisamente a 14 de Julho, foi nomeado 3º astrónomo de 1ª classe do Observatório Astronómico da Ajuda (Lisboa), vindo a ser exonerado desse cargo, a seu pedido, a 28 de Novembro do mesmo ano. No ano seguinte foi eleito deputado, frequentando a Câmara dos Deputados em 1878, 1883 e 1884; contudo, como ele próprio confessaria em notas autobiográficas, tal experiência não foi muito do seu interesse. Foi promovido a professor catedrático em Fevereiro de 1880, leccionando a cadeira de Análise.

Em 1884, por razões familiares, segundo indica o Doutor Gonçalo de Almeida Garrett na *Homenagem Da Câmara Dos Dignos Pares Do Reino ao Doutor Gomes Teixeira*, este solicitou a sua transferência para a Academia Politécnica do Porto, onde ficou responsável pela regência da cadeira de Análise, como acontecia em Coimbra. Mais tarde, Gomes Teixeira exerceu o cargo de director da Academia Politécnica até 1911, ano em que esta

²⁰ Com a tese *A integração das equações às derivadas parciais de 2º grau*.

²¹ Por proposta do amigo Daniel da Silva.

²² De acordo com a publicação *O Tripeiro* seria editado pela Imprensa da Universidade, por portaria do Ministro do Reino, José Luciano de Castro.

instituição foi transformada em Universidade do Porto, sendo Gomes Teixeira dela nomeado o primeiro Reitor.

No ano de 1884, tomou posse da cadeira de Cálculo Integral e Diferencial e, em 1887, publicou a 1ª edição do *Curso de Análise Infinitesimal, Cálculo Diferencial*²³, tendo esta obra sido apresentada a concurso da Academia Politécnica do Porto como candidata ao prémio D. Luiz I, juntamente com mais cinco trabalhos. Receberia tal prémio em 1888, deixando esta atribuição inconformado Schiappa Monteiro, também concorrente ao prémio, o qual viria a protestar publicamente no Jornal *O Tempo*, apontando alguns defeitos ao trabalho apresentado por Gomes Teixeira. Um ano mais tarde, este viu editada a sua obra *Curso de Análise Infinitesimal, Cálculo Integral*, 1ª parte (e cuja 2ª parte seria editada apenas em 1892) e, ainda neste mesmo ano, foi eleito sócio correspondente da Academia Real das Ciências de Madrid. Mais tarde, em 1895, editou o trabalho *Sobre o desenvolvimento das funções em série*, que levou a concurso aberto pela Academia Real das Ciências de Madrid em 1893. Contudo, em virtude de Gomes Teixeira o ter apresentado em língua portuguesa e de ter sido condição desta Academia o trabalho estar escrito em castelhano ou em latim, dos dois prémios atribuídos, diploma e medalha, ele não receberia esta última pela razão referida. Pela importância e originalidade demonstradas, o trabalho viria a ser publicado nas Memórias desta Academia.

Em 1897, Gomes Teixeira apresentou o *Tratado das curvas especiais notáveis, tanto planas como torsas*, como candidato a concurso aberto em 1896 pela mesma Academia. Foram também candidatos Gino Loria, geómetra e historiador matemático, e D. Joaquim de Vargas y Aguirre. Em vez de um, foram atribuídos dois prémios iguais, um a Gomes Teixeira e outro a Gino Loria, prémio esse que constava de 1500 pesetas, medalha de ouro e diploma, sendo este datado de 20 de Abril desse ano. Será curioso referir que Gomes Teixeira não esteve presente na cerimónia de entrega do prémio por modéstia, fazendo-se representar pelo Doutor José Carracido, notável professor de Química da Universidade Central de Madrid.

Em 1902, saiu uma portaria que determinava a publicação de todos os trabalhos matemáticos de Gomes Teixeira, sendo em 1904 publicado o volume I das já referidas *Obras sobre Matemática*. O seu *Tratado* viria a ser consideravelmente aperfeiçoado, aumentado e completado com um Apêndice “*Sobre os problemas célebres da geometria elementar não resolúveis com régua e compasso*”, que teria mais tarde uma edição em

²³ O Tripeiro refere o prof. Pierpont da Universidade de Yale que terá afirmado que não fosse a língua portuguesa pouco conhecida na América, teria o livro de Gomes Teixeira sido adoptado em todas as Universidades do país, por nitidamente ser superior aos tratados por onde estudavam os alunos americanos.

língua francesa. O *Tratado das curvas especiais notáveis, tanto planas como torsas* acabou por ocupar por inteiro três volumes das *Obras sobre Matemática*.

Em 1917, recebeu da Academia de Ciências de Paris o prémio Binoux, pela mesma obra, por proposta do Prof. Appell.

Foi em 1918 proposto e nomeado reitor honorário da Universidade do Porto e, três anos mais tarde, a Academia Portuense promoveu-lhe uma homenagem na Universidade, aquando da recondução de Gomes Teixeira na sua cadeira, sem limite de idade, feita pelo Governo (tinha então 70 anos).

A Gomes Teixeira seriam atribuídos os graus de Doutor *honoris causa* pelas Universidades de Madrid, Toulouse e Santiago do Chile, e os prémios constantes da lista anexa.

Na última fase da sua vida, já com 75 anos de idade, Gomes Teixeira orientou a sua actividade para conferências em Portugal e no estrangeiro, sobre temas relacionados com a Matemática e a História da Matemática e, posteriormente, sobre temas de carácter místico-filosófico.

Gomes Teixeira, na entrevista que atrás referimos, descreveu o seu percurso matemático do seguinte modo:

«Em matemática, segui na minha vida uma evolução. Primeiro enveredei pela Análise, a parte mais abstracta. Mais tarde, quando o meu espírito começou a cansar-se com grandes esforços, passei à Geometria. Por fim, quando já a Geometria me fatigava também, voltei às minhas predilecções da juventude, aos estudos históricos. Esta última transição coincidiu com a guerra e com a diminuição de relações com os meios científicos estrangeiros.»

Em 1929, e em virtude de uma nova lei de limite de idade no exercício dos cargos públicos, teve de deixar a cátedra, mas o governo nomeou-o director honorário do Instituto de Investigação de História das Matemáticas, de que era até então director.

Gomes Teixeira ainda realizou entre 12 e 19 de Abril de 1932 conferências sobre a História das Matemáticas em Portugal, sendo a sua obra com este título a sua derradeira.

No Porto, morou na rua Costa Cabral. Na Universidade, depois de dar as suas aulas e fazer os seus trabalhos, punha em dia a sua correspondência que trocava com os maiores matemáticos do seu tempo. Sendo metódico, arquivou e catalogou nada menos que 2500 cartas e documentos que legou à Universidade de Coimbra onde hoje podem ser consultados.

Faleceu na cidade do Porto a 8 de Fevereiro de 1933. Esteve em câmara ardente no salão

da Biblioteca da Faculdade de Ciências do Porto, sendo os seus restos mortais depois trasladados para a sua terra natal. Com as autorizações necessárias, civis e eclesiásticas, foi sepultado na Igreja de S. Cosmado, como era sua vontade.

Para que a sua memória não seja perdida *“foram colocados nos três pontos cardeais da sua vida, três bustos de bronze, iguais (...) de Teixeira Lopes: um em Coimbra, na grande sala onde ensinou e que ainda hoje tem o seu nome, outro no Porto, na escadaria do edifício a que chamamos Universidade (...) e por fim o terceiro no seu S. Cosmado, em frente da igreja onde repousa.”* (de *O Tripeiro*)

Anexo Biográfico

Foram vários os cargos, condecorações, títulos honoríficos e homenagens que Gomes Teixeira obteve:

Como aluno...

1870 - Prémio na cadeira universitária de Álgebra e Geometria Analítica;

1871 - Partido em Cálculo;

1872 - Partido em Mecânica e Geometria Descritiva;

1873 - Prémio em Astronomia e Geodesia;

1874 - Prémio em Mecânica Celeste e Física Matemática; Obtém, no curso, a classificação final de Muito Bom, por unanimidade, com 20 valores; Licenciado em Matemática;

1875 - Doutor em Matemática pela Universidade de Coimbra, com a classificação de Muito Bom, por unanimidade, com 20 valores.

Como matemático...

e professor em Coimbra...

1876 - Professor Substituto da Faculdade de Matemática da Universidade de Coimbra e é nomeado Sócio correspondente da Academia Real das Ciências de Lisboa;

1878 - Exerce o cargo de 3º Astrónomo de 1ª classe do Observatório Astronómico da Ajuda;

1879 - Professor catedrático da Faculdade de Matemática (Coimbra);

professor no Porto ...

1883 - Professor Catedrático da Academia Politécnica do Porto; Director da Academia Politécnica;

1888 - Recebe Prémio de D. Luiz I, da Academia Real das Ciências de Lisboa;

1889 - Torna-se Vogal da Comissão Permanente para execução das resoluções do Congresso Internacional de Bibliografia das Ciências Matemáticas;

1889 - Sócio Correspondente da Academia Real das Ciências de Madrid;

1895 - Obtém um prémio, fora de concurso, da Academia Real das Ciências de Madrid, com o trabalho *Sobre o desenvolvimento das funções em série*;

1900 - Ganha, em concurso, o Prémio da Academia das Ciências de Madrid, com o trabalho *Tratado das curvas especiais notáveis, tanto planas como torsas*.

1907 - Sócio Efectivo da Academia Real das Ciências de Lisboa;

1908 - Sócio Emérito da Academia das Ciências de Lisboa, bem como vogal do Conselho Superior da Instrução Pública;

1910 - Exerce uma missão oficial de estudo no estrangeiro, com outros professores;

1911 - É nomeado Reitor da Universidade do Porto;

1912 - Representa o Governo Português no Congresso Internacional de Matemática, em Cambridge, Inglaterra;

1917 - Obtém o Prémio Binoux, de História das Ciências, atribuído pela Academia das Ciências de Paris; é eleito Presidente da Associação Portuguesa para o Progresso das Ciências;

1917 - Representa a Universidade do Porto e a Associação Portuguesa para o Progresso das Ciências, no congresso de Sevilha;

1918 - É nomeado Reitor honorário da Universidade do Porto;

1919 - Ganha a Grã-cruz de Afonso XII;

1919 - Representa a Universidade do Porto e a Associação Portuguesa para o Progresso das Ciências no Congresso de Bilbao das Associações Espanhola e Portuguesa para o Progresso das Ciências;

1921 - É homenageado pela Academia Portuense e preside ao Congresso do Porto, das Associações Espanhola e Portuguesa para o Progresso das Ciências;

1922 - Obtém o grau de Doutor *honoris causa* pela Universidade Central de Madrid; é mais uma vez homenageado, pela Faculdade Técnica da Universidade do Porto;

1922 - Sócio honorário da Associação dos Jornalistas e Homens de Letras do Porto, bem como da Associação dos Engenheiros Portugueses e do Centro Comercial do Porto;

1923 - Obtém o grau de Doutor *honoris causa*, desta vez pela Universidade de Toulouse; Torna-se membro da Junta Orientadora dos Estudos;

1923 – Participa no Congresso de Salamanca das Associações Espanhola e Portuguesa para o Progresso das Ciências, onde faz conferência sobre o poder e beleza das Matemáticas;

1925 - É convidado pela Academia Pontificia dos Novos Linceus²⁴ a assistir e a apresentar uma conferência na semana académica; obtém a Comenda de S. Gregório Magno;

1925 – Participa no Congresso de Coimbra, novamente como representante das instituições já referidas em relação aos congressos de Sevilha (1917) e de Bilbau (1919);

1926 - Está presente no Congresso de Cadiz, onde mais uma vez está em representação da Associação Portuguesa para o Progresso das Ciências e da Universidade do Porto;

1926 - Torna-se Sócio honorário da Associação Académica do Porto;

1929 - Director honorário do Instituto de Investigação de História das Matemáticas, da Universidade do Porto.

Instituições e Academias a que pertenceu

- Comissão de Intercâmbio Universitário Franco-português;
- Secção Portuguesa do Instituto de Cooperação Intelectual da Sociedade das Nações.

Cargos e funções que ocupou:

- Vogal da «Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique», «Comité Permanent International du Répertoire Bibliographique des Sciences Mathématiques» (em relação ao mesmo congresso acima citado de 1889), «Comité de Patronage de l'Enseignement Mathématique»;
- Presidente do Núcleo Portuense da Associação Internacional de História das Ciências;
- Colaborador do «Internacional Catalogue of Scientific Literature»;
- Vereador da Câmara Municipal do Porto e provedor da Misericórdia portuense.

²⁴ Trata-se de uma Academia italiana «Accademia delle Scienze Nuovi Lincei» da qual G.T. fazia parte, encontrando-se o seu bilhete de identificação como membro no Museu da Academia de Ciências «unus ex XL Lincaes».

Honras com que foi distinguido:

- Agraciado com a Carta de Conselho por D. Luiz I e com a Grã-cruz de Santiago por D. Carlos I (ministro João Franco), requer dispensa de aceitar, segundo informa em sua folha de cadastro na Academia das Ciências de Lisboa;
- Agraciado com a Grã-cruz de Isabel a Católica.

Foi membro da:

- Academia de Ciências de Praga;
- Academia Imperial das Ciências de Halle;
- Academia Real das Ciências e Artes de Barcelona;
- Circolo Matematico de Palermo²⁵;
- Sociedade Real das Ciências de Liège;
- Sociedade Científica de Bruxelas;
- Sociedade Nacional das Ciências Naturais e Matemáticas de Cherburgo;
- Sociedade António Alzate do México;
- Sociedade de Matemática de Madrid;
- Sociedade de Matemática de Cracóvia;
- Sociedade de Matemática de Moscovo;
- Sociedade Boémia das Ciências, de Praga;

e membro honorário da:

- Faculdade de Ciências de Lima (Perú);
- Sociedade Martins Sarmento, de Guimarães;
- Associação Espanhola para o Progresso das Ciências;
- Sociedade das Ciências Físicas e Naturais de Bordéus;
- Instituto de Coimbra.

²⁵ Publicação italiana.

Trabalhos da responsabilidade de Francisco Gomes Teixeira²⁶

Segundo a ordem cronológica²⁷:

1. *Desenvolvimento das funções em fracções continuas*. Coimbra 1871. (Frequentava G. T. o 3º ano do seu curso universitário)
2. Aplicação das fracções contínuas à determinação das raízes das equações. *Jorn. de Ciênc. matem., fis. e nat.*, Lisboa, IV, 1872-1873.
3. Integração das equações às derivadas parciais de 2ª ordem. Dissertação inaugural. Coimbra, Impr. da Universidade, 1875. É ded. «À Ilustrada Faculdade de Matemática da Universidade de Coimbra». Na colecção *Obras sobre Matemática*, de G. T., IV, vol. II, 1906, 99-156²⁸.
4. Sobre o emprego dos eixos coordenados oblíquos na mecânica analítica. Dissertação apresentada à Faculdade de Matemática da Universidade de Coimbra para o concurso a um lugar de lente da mesma Faculdade. Coimbra, 1876. – *Obr. s. Mat.*, VI, vol. II, 1906, 177-211.
5. Fundação do *Jornal de Ciências matemáticas e astronómicas*. Vol. I, Coimbra, Impr. da Universidade, 1877. – Logo aí vem a apresentação da publicação e se lhe abrem duas secções, uma destinada às Matemáticas superiores e outra às elementares, ensinadas na instrução secundária, e se diz esperar que a esta última concorram os professores dos liceus. Em breve se dedicou apenas contudo às Matemáticas superiores. – Esta publicação prosseguiu até 1905: seu vol. XV, 1902-1905.
6. Sur la décomposition des fractions rationnelles. *Jorn. de C. mat. e astr.*, I, II, 1877, 1878 (-1880), respectiv. 5-12, 17-24, 33-37, 49-56, 87-101, 113-116, 33-41. – *Obr. s. Mat.*, II, 1906, 11-42.
7. Notícia sobre Saturno, *Jorn. de C. mat. e astr.*, I, 13-16, 25-32, 41-48, 63-64, 90-93.

²⁶ Transcrito da obra *O Professor Doutor Francisco Gomes Teixeira (Elogio, notas, notas de Biografia, Bibliografia, Documentos)* de Henrique de Vilhena.

²⁷ Em nota Henrique Vilhena explica «Esta Bibliografia foi organizada com os elementos tirados primeiramente da compulsa dos numerosos trabalhos de G. T., e em seguida da *Biografia de F. G. T.*, de Rodolfo Guimarães (*Hist. e Mem. da Acad. d. C. de Lisboa*, n. sér., 2ª el., XII, parte 2ª, 119-149, Lisb., 1914), e da bibliografia publicada nos *An. da Fac. de Ciênc. do Porto*, XVIII, n. 1, 1933, 23-32. Finalmente, com os elementos trazidos pela leitura de muitos e muitos números de periódicos aos quais nos referimos em nota no começo das «Notas de biografia». Assim se conseguiu, de tudo, apontar quantidade grande de espécies (dizendo em sentido lato) que não vinham nas duas (de Rod. Guimarães, e dos *An. da F. de C. do Porto*), que eram as mais extensas.» e acrescenta «É natural que haja nas páginas que se seguem alguns lapsos de números relativos às publicações, ou nos nomes dos autores e tít. de publ. e trab. - difíceis de evitar; fundar-se-ão por vezes nesses mesmos lapsos, possíveis, nos elementos informativos.»

²⁸ Em nota Vilhena explicita a notação utilizada «Nesta e cit. Subsequentes (das *Obr. s. Mat.*), os n.º s romanos em corpo menor referem-se a capítulos já dentro dos volumes, os quais se apontam em corpo maior.»

8. Questão proposta. Id., 96. – Abre G. T. no seu *Jornal* uma secção de questões a resolver, sob aquele título. Aí vão colaborando Pereira Caldas, Alfr. Schiappa Monteiro, C. H. d'A. Craveiro Lopes, P. Amorim Vianna, A. Zeferino Cândido, L. I. Woodhouse, G. Bellavitis (Pádua), Birger Hansted (Copenhague). Nos vols. III e IV, 1881, 1882, Pedro Gomes Teixeira, A. Schiappa Monteiro, Birger Hansted e Martins da Silva.
9. Noções elementares sobre a teoria dos determinantes, Id., 138-141. Parece não terem tido seguimento.
10. Sobre a integração das equações às derivadas parciais lineares de segunda ordem. Id., II, 138-153.
11. Notícia sobre Bellavitis. Id., 189-191. – Está datada de Novembro, 1880.
12. Sur le nombre des fonctions arbitraires des intégrales des équations aux dérivées partielles. *Mém. de la Soc. de Sc. Phys. et Nat.*, Bordéus, 2^a sér., II, 1878, 315-321. – *Obr. s. Mat.*, V – «Três art. s. as equações às derivadas parciais», – II, 1906, 157-176.
13. Sur les dérivées d'ordre quelconque. *Giorn. di Mat.*, Nápoles, XVIII, 1880. – *Obr. s. Mat.*, VI, I, 1904, 209-218.
14. Sur le développement des fonctions implicites en série. *Jorn. de C. mat., fis. e nat.*, Lisboa, 1^a sér., VII, 1879-1880, 247-254. – *Journ. de Math. pures et appl.*, fund. p. Liouville, Paris, 3^a sér., VII, 1881, 278-292. – *Obr. s. Mat.*, VII, I, 1904, 219-226.
15. Prelecção sobre a origem e sobre os princípios do cálculo infinitesimal, feita aos alunos da Universidade de Coimbra. *Jorn. de C. mat. e astr.*, III, 1881, 21-45. – Aí cita:
16. Sur les principes du calcul infinitésimal. *Mém. de la Soc. d. Sc. Phys. et Nat.*, Bordéus, 2^a sér., IV.
17. Sobre a história do nonius. *Jorn. de C. nat. e astr.*, III, 1881, 73.
18. Bibliografia. Id., 154-156: sobre P. Mansion, «Notes sur l'équation aux dérivées partielles»; Ph. Gilbert, «Sur une propriété de la fonction de Poisson et sur la méthode de Jacobi pour l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre»; L. Porfirio da Motta Pegado, «Estudo sobre o deslocamento de um sólido invariável no espaço», Lisb., 1881; G. A. de Brito Capello, «Observações sobre o magnetismo terrestre na ilha de S. Tomé», S. Tomé, 1881.
19. Sobre a multiplicação dos determinantes. Id., 185-186.
20. Bibliografia. Id., 190-191: s. P. Mansion, «Sur l'évolution approchée des aires planes», 1881.
21. Note sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre. *Bull. de la Soc. Math. de France*, Paris, XVII, 1881. – *Obr. s. Mat.*, XI, I, 1904, 273-281.

22. Sur l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du second ordre. *C.-r. d. s. de l'Acad. d. Sc. de Paris*, XCIII, 1881, 702-703. – *Obr. s. Mat.*, V – «Três art. s. as equações às derivadas parciais», – II, 1906, 157-176.
23. Bibliografia. *Jorn. de C. mat. e astr.*, IV, 1872, 62-64: s. Joaq. Gomes da Silva, «Mélanges de calcul intégral», Leipzig, 1882.
24. Bibliografia. Id., 91-94: s. E. Nestore-Legnazzi, «Commemor. del Conte Giusto Bellavitis», Padova; E. N. Legnazzi, «Aggiunte illustrative alla commemor. del prof. Conte G. Bellavitis», Padova, 1881; «A somadora Mesnier», Porto, 1881; Raul Mesnier, «O Aritmotecno», Porto, 1882; G. Stephanos, «Sur quelques propriétés du système de trois figures égales situées dans un même plan».
25. Bibliografia. Id., 119-120: s. H. F. Barros, «Elementos de trigonometria rectilínea», Lisboa, 1882; F. A. de Brito Limpo, «Algumas palavras sobre a necessidade de determinação directa da longitude geográfica de um dos nossos Observatórios pelos processos eléctricos», Lisb., 1882; Marcus Baker, «Alhazen's problem». – Não tem a rubrica de G.T., talvez pelo diminuto das notícias.
26. Bibliografia. Id., 185-189: s. M. da Terra Pereira Vianna, «Influência das cargas em movimento sobre as vigas rectas», Lisb., 1882; Ch. Hermite, «Cours professé à la Faculté des Sciences de Paris pendant le 2^e semestre de 1881 à 1882. Rédigé par M. Andoyer». Livr. A. Hermann, 1882; H. Brocard, «Étude d'un nouveau cercle du plan du triangle»; F. Frenet, «Recueil d'exercices sur le calcul infinitésimal», 1^a ed., Paris, 1882; P. Mansion, «Introduction à la théorie des déterminants», 2^a ed., Gand, 1882.
27. Sur l'intégration d'une classe d'équations aux dérivées partielles du deuxième ordre. *Bull. de l'Acad. R. de Belgique*, Bruxelles, 3^a sér., III, 1882, 486-488. *Obr. s. Mat.*, V, II, 1906, 157-176.
28. Sur une formule d'interpolation. *Mém. de la Soc. R. d. Sc. de Liège*, 2^a sér., X, 1883, I-7. – *Obr. s. Mat.*, III – «Vários artigos sobre diversas questões de análise», – II, 1906, 42-98.
29. Sur la théorie des imaginaires. *Ann. de la Soc. Scient. de Bruxelles*, VII, 1883, 417-427.
30. Bibliografia. *Jorn. de C. mat. e astr.*, V, 1883 (-1884), 24-26: s. C. Le Paige, «Essais de géometrie supérieure du troisième ordre», Bruxelles, 1882; D. G. Vicuña, «Introducción a la teoria matemática de la electricidad», Madrid, 1883; H. G. Zeuthen, «Sur un groupe de théorèmes et formules de la géométrie énumérative»; Soc. Geogr. de Lisb., «A questão do meridiano universal», Lisb., 1883.

31. Bibliografia. Id., 71-73 (sem firma): s. D. G. Vicuña, D. J. Echegaray, «Discursos leídos ante la Real Academia de Ciencias», Madrid, 1883; J. A. Martins da Silva, «Sobre os sistemas hamiltoniano e canónico», Lisb., 1883; D. M. Benitez y Parodi, «Recuerdos de la Universidad de Coimbra», Madrid, 1883; J. Houël, «Études sur les méthodes d'enseignement dans les mathématiques», Paris, 1883; C. le Paige, «Sur les surfaces du troisième ordre», Estolcomo, 1883.
32. Bibliografia. Id., 120-124 (sem firma): s. A. F. da Costa Lima, «Estudo sobre a teoria matemática da elasticidade, Membranas vibrantes», Lisb., 1883; F. A. de Brito Limpo, «Instruções para o exercício dos nivelamentos geométricos de precisão», Lisb., 1883; G. Paxton Young, «Principles of the solution of equations of the higher degrees», Baltimore, 1883; «Resolution of solvable equations of the fifth degree», id.; A. Marre, «Huit lettres inédites du P. Claude Jaquemet», Roma, 1883; H. Narducci, «Sur un manuscrit du Vatican», Paris, 1883; J.A. Serrasqueiro, «Tratado elementar de aritmética», 2ª ed., Coimbra, 1882; «Tratado de geometria elementar», id.; «Tratado de álgebra elementar», id., 1883; «Tratado elementar de trigonometria rectilínea», 5ª ed., id., 1882; H. Barros, «Esboço da teoria termodinâmica», Lisb., 1883. A. d'Arzilla Fonseca, «Princípios elementares do cálculo de quaterniões», Coimbra, 1884; J. Bruno de Cabedo, «Integração das equações canónicas do movimento», Coimbra, 1884; H. Teixeira Bastos, «Unidades eléctricas», Coimbra, 1884; (sem autor design. no tít.) «Observações feitas no Observatório Astronómico da Universidade de Coimbra», Coimbra, 1882.
33. Solução da questão proposta n.º 23. Id., 185-186. – É a questão proposta em IV, 191, pelo próprio G.T.: somar a série $\sum_{0}^{\infty} \frac{2^i x}{e^{2^i \cdot x} + 1}$.
34. Bibliografia. Id., 187-191: s. M. d'Ocagne, «Sur un algorithme algébrique» (*Nouv. Ann. de Math.*, 3ª sér., II); «Théorie élémentaire des séries récurrentes» (id., III); L. Cordeiro, «De como navegavam os portugueses no começo do século XVI» (*Bol. da Soc. de Geogr. de Lisb.*, IV, 1883); L. Woodhouse, «Da integração das equações diferenciais da dinâmica», Porto, 1883; Roberto Mendes, «Resistência dos arcos metálicos», Porto, 1883; J. M. Rodrigues, «Memória sobre a teoria da balística» (*Mem. da Acad. R. d. C. de Lisboa*, 1884); J. A. Albuquerque, «Primeiros princípios da teoria dos determinantes», Paris, 1884; M. A. Gonçalves, «Equilíbrio eléctrico nos condutores», Porto, 1884; L. F. Marrecas Ferreira, «Nota sobre uma questão de hidráulica» (*Rev. d'Obr. públ.*, XV, 1884).

35. Bibliografia. *Jorn. de C. mat. e astr.*, VI, 1885, 29-32: s. O. Verger, «Introduzione all'algebra», Turim; M. D'Ocagne, «Coordonnées parallèles et axiales», Paris, Gauthier-Villars, 1885; E. Cesàro, «Intorno a taluna funzione isobariche»; «Dérivées des fonctions de fonctions»; «Note sur le calcul isobarique»; J. M. Rodrigues, «Desenvolvimento de funções algébricas» (*Rev. cient. da Soc. Aten.*, Porto, I, 1885); A. Schiappa Monteiro, «Solution d'un problème de géométrie élémentaire» (*Rev. cient. da Soc. Aten.*, Porto, id.).
36. Introdução à teoria das funções. Cap. I. Teoria dos imaginários e regras para o seu cálculo. Id., 33-80. Cap. II. Princípios gerais da teoria das funções. Funções algébricas, logaritmos, etc. Id., 129-168.
37. Bibliografia. Id., 99-102: s. D. Besso, «Sul prodotto di due soluzioni di due equazioni differenziali-lineari omogenea de seconde ordine», Roma, 1884; «Sul'equazione del quinto grado», id.; «Sopra una classe di equazione trinomia», id.; G. Paxton Young, «Solution of solvable irreducible quintic equations without the aid of a revolvent sextic» (*Amer. Journ. of Math.*, VII); A. d'Arzila Fonseca, «Aplicação dos quaterniões à mecânica», Coimbra, 1885; Brito Limpo, «Sobre as refrações terrestres» (*Rev. cient.*, I, 1885); A. Marre, «Lettre à Mr. le Président de l'Académie des Sciences de Lisbonne» (*Jorn. de C. mat., fis. e nat.*, nº 38, 1884); J. M. Rodrigues, «Teoria de la balística», Madrid, 1884; J. A. Serrasqueiro, «Tratado de geometria elementar», 3ª ed., Coimbra, 1884; «Tratado elementar de aritmética», 6ª ed., id., 1885; F. M. Costa Lobo, «Resolução das equações indeterminadas», Coimbra, 1885; A. Schiappa Monteiro, «Sur un théorème relatif à la théorie des nombres» (*Rev. cient.*, I, 1885).
38. J. A. Martins da Silva. Id., 194-196.
39. Bibliografia. Id., 197-199: s. P. Arnaut de Menezes, «Cargas adicionais nas pontes metálicas para estradas» (*Rev. de Obr. Publ.*, XVI); R. B. Martins Pereira, «La rotation et le mouvement curviligne», Lisb., 1885; G. Loria, «Ricerche intorno alla geometria della sfera» (*Mem. d. R. Accad. d. Sc. di Torino*, XXXVI). – Citação de títulos de trab. de G. Loria, A. Bieler, E. Cesàro, H. Le Pont, M. d'Ocagne e P. Mansion.
40. Sobre a expressão $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. *Rev. c. da Soc. Aten.*, Porto, I, 1885, 97-98.
41. Sur la determination de la partie algébrique de l'intégrale des fonctions rationnelles. *Rendic. d. R. Accad. d. Lincei*. Roma, 4ª sér., I, 1885, 187-188. – *Obr. s. Mat.*, XIV – «Div. art. s. anal. infinit.», – I, 1904, 375-398.
42. Sur l'intégrale $\int e^{\omega x} f(x) dx$. Id., 278-280. – *Obr. s. Mat.*, id.

43. Sur le développement des fonctions satisfaisant à une équation différentielle. *Ann. sc. de l'Éc. Norm. Sup. de Paris*, 3^a sér., II, 1885, 321-324. – *Obr. s. Mat.*, III – «Vár. art. s. div. quest. de anál.», – II, 1906, 42-98.
44. Sur l'interpolation au moyen des fonctions circulaires. *Nouv. Ann. de Math.*, Paris, 3^a sér., IV, 1885, 354-359. – *Obr. s. Mat.*, id.
45. Ueber einen Satz der Zahlentheorie. *Arch. d. Math. u. Phys.*, Berlim, 2^a sér., II, III, 1885, 265-268.
46. Note sur les nombres de Bernoulli. *Amer. Journ. of Math.*, Baltimore, VII, 1885. – *Obr. s. Mat.*, VII, II, 1906, 213-221.
47. Bibliografia. *Jorn. de C. mat. e astr.*, VII, 1886, 13-18: s. F.M. Costa Lobo, «Estudo de algumas equações de congruência e indeterminadas», Coimbra, 1885; Brito Limpo, «Sobre os nivelamentos aplicados à geodesia», Porto, 1882; Duarte Leite, «Integração das diferenciais algébricas», Porto, 1886; Ch. Hermite, «Sur quelques applications des fonctions elliptiques», Paris, 1885; E. Cesàro, «Excursions arithmétiques à l'infini» (*Ann. di Mat.*, XIII); Ch. Le Paige, «Correspondance de René François de Sluse» (*Bul. de Bibl. e di St. d. Sc. mat.*, de B. Boncompagni, XVII); G.M. Rodrigues, «Teoria da retrogradação das trajetórias», Lisboa, 1885; «Movimento do sólido livre» (*Jorn. da Acad. d. C. de Lisb.*, XLI); Ticho Brahe, «Triangulorum planorum et sphericorum praxis arithmetica», 1591; Davide Besso, «Periodico di Matematica per l'Insegnamento secundario», Roma. – Cit. de títulos de trab. de Ch. Le Paige, H. Le Pont e M. Lerch. Três linhas sobre um de Lerch.
48. Bibliografia. Id., 40: os títulos de cinco trab., respectivamente de Gino Loria, E. Cesàro, M. Lerch, F. Casorati e A. A. de Pina Vidal.
49. Bibliografia. Id., 78; id. de três trab. de E. Cesàro, um de A. Marre, sete de M. d'Ocagne e um de Mansion. – Não tem a rubrica G.T.
50. Bibliografia. Id., 106-110: s. A. Tartinville, «Théorie des équations et des inéquations», Paris, 1886; R. Guimarães, «Fórmulas gerais para calcular a área lateral do tronco de cone circular recto» (*Instituto*, Coimbra, 1886); J. M. Rodrigues, «Introdução à teoria da balística» (*Rev. d. C. milit.*, 1886); «Integração das equações da balística», id.; J. M. Braz de Sá, «Novas noções sobre os números», Porto, 1886; D. R. G. de Galdeano, «Tratado de aritmética», Toledo, 1884; «Problemas de aritmética e álgebra», id., 1885. – Cit. de títulos de nove trab. de E. Cesàro (sobre um dos quais duas linhas), um de Dav. Besso, um de G. Loria, e dois de M. d'Ocagne.

51. Bibliografia. Id., 141-144: s. J. A. Serrasqueiro, «Tratado de geometria elementar», 4ª ed., Coimbra, 1886; «Tratado elementar de aritmética», 7ª ed., id.; «Elementos de álgebra», id.; L. P. da Motta Pegado, «Tratado elementar de aritmética», 4ª ed., Lisboa, 1886; Aarão F. de Lacerda, «Equações gerais de termodinâmica», Coimbra, 1886; E. N. Legnazzi, «Del catasto romano e di alcuni strumenti antichi di geodesia», Pádua, 1886; Gino Loria, «Studi nella teoria delle coordinate triangolari ed sulla geometria analitica di un piano nello spazio» (*Giorn. de Battaglini*, XXIV). Cit. de tit. de um trab. de Novarese, um de G. Loria, dois de E. Cesàro.
52. Aplicações da fórmula que dá as derivadas de ordem a qualquer das funções de funções». Id., 150-165.
53. Bibliografia. Id., 166-170: s. «Ligação do Observatório Astronómico de Lisboa com a triangulação fundamental», Lisboa, 1886; G. Guccia, «Formole analitiche di alcune trasformazioni cremoniane delle figure piane» (*R. d. Circ. Mat. di Palermo*, I); «Teoremi sulle trasformazioni cremoniane nel piano» (id.); «Generalizzazione di un teorema di Noether» (id.); M. d'Ocagne, «Étude géométrique sur l'ellipse», Paris, 1886; J. Deruyts, «Sur une classe de polynômes analogues aux fonctions de Legendre» (*Mém. de la Soc. R. d. Sc. de Liège*, XIV); Fr. Engel, «Ueber di Definitionen gleichungen d. continuirlichen Transformationsgruppen», Leipzig, 1886; «Zur Theorie der Beruehrungstransformationen» (*Math. Annalen.*, XXII). – Cit. de tit. de três trab. de M. d'Ocagne, três de E. Guccia, dois de F. Engel, um de J. Deruyts, um de M. Lerch e um de G. Enestroem. – Não tem a rubrica de G.T.
54. Deuxième note sur le développement des fonctions satisfaisant à une équation différentielle. *Ann. Sc. de l'Éc. Norm. Sup. de Paris*, 3ª sér., III, 1886. – *Obr. s. Mat.*, III – «Vár. art. s. div. quest. de anál.», – II, 1906, 42-98.
55. Sur le théorème d'Eisenstein. Id., 389-390. – *Cassopis*, Praga, XXI, 1892, 100-102.
56. Sur une formule d'analyse. *Nouv. Ann. de Math.*, Paris, 3ª sér., V, 1886, 36-39. – *Obr. s. Mat.*, XIII – «Div. art. s. anál. mat.», – II, 1906, 359-404.
57. Sur une limite relative aux polynômes de Legendre. Extr. d'une lettre adr. à M. Lerch à Prague. Prés. à la s. du 15 janvier 1886. *C.-r. d. s. de la Soc. R. d. Sc. de Bohême*, 30 oct. 1885 (2 pgs.) – Por menção da *Biogr. de F. G. T.* de R. Guimarães e da Bibliografia dos *An. da Fac. de C. do Porto*, XVIII, 1933, n. I: mesma public., Praga, 1886, 19-20.
58. Ueber der Eisenstein schan Satz. *Arch. d. Math. u. Phys.*, Leipzig, 2ª sér., III, 1886, 315-317.

59. Curso de análise infinitesimal. Cálculo diferencial. Porto, tip. Ocidental, 1887, 356 págs., mais duas de *Erratas*. Form. 8º gr. - Teve mais duas ed. (2ª e 3ª) em 1890 e 1896. A 4ª ed. ocupa todo o III, 1906, das *Obr. s. Mat.* Obra premiada pela Academia de Ciências de Lisboa, prémio instit. por El-Rei d. Luiz I.
60. Sur un théorème de M. Hermite relatif à l'interpolation. *Journ. f. d. reine u. angewandte Math.*, Gegr. von Crelle, Berlin, C, 1887, 80-84. – *Obr. s. Mat.*, III – «Vár. art. s. div. quest. de anál.», II, 1906, 42-98.
61. Extrait d'une lettre à M. Jules Tannery. *Bull. d. Sc. math.*, Paris, 2ª sér., XI, I, 1887, 193-194. – *Obr. s. Mat.*, - XIII - «Div. art. s. anál. mat.», – II, 1906, 359-404.
62. Exemples de fonctions à espaces lacunaires. *Nouv. Ann. de Math.*, Paris, 3ª sér., VI, 1887, 43-45.
63. Sobre o desenvolvimento em série das funções de variáveis imaginárias. *Jorn. de C. mat. e astr.*, VIII (1887-1888), 17-24.
64. Bibliografia. Id., 25-29: s. H. M. de Figueiredo, «Superfícies de Riemann», Coimbra, 1887; V. F. Larangeira, «O impulso das terras», Porto, 1887; R. d'Engelhardt, «Observations astronomiques», Dresde, 1886; M. Lerch, «Contributions à la théorie des fonctions (*C.-r. d. s. de la Soc. d. Sc. de Bohème*, 1886); E. Cesàro, «Media ed assintotiche expressioni in aritmetica» (*Giorn. di Mat.*, de Battaglini, XXV). - Cit. de tit. de um trab. de M. d'Ocagne, um de Fred. Amodeo e dois de E. Cesàro.
65. Bibliografia. Id., 46-50: s. A. Schiappa Monteiro, «Sur la génération du conoide circonscript à une courbe plane au moyen de courbes du même ordre de celle-ci» (*Jorn. da Acad. d. C. de Lisboa*, 1887); F. A. de Brito Limpo, «Apontamentos para facilitar a leitura das cartas corográficas e topográficas», Lisboa, 1887; G. Guccia, «Sulle superficie algebriche le cui sezioni piane sono unicursali» (*Rendic. d. Circ. Mat. d. Palermo*, I); «Sulla reduzioni dei sistemi lineari di curve ellitiche e sopra un teorema generale delle curve algebriche di genere» (id.); A. Rémont, «Résumé de géométrie analytique á deux et á trois dimension», Paris, 1887; G. de Longchamps, «Une conique remarquable du plan d'un triangle» (*Ass. Franc. p. l'Avanc. d. Sc.*, 1886); M. d'Ocagne, «Sur une classe de nombres remarquables» (*Amer. Journ. of Math.*, IX). – 3 linhas s. um trab. de R. Guimarães, 5 s. um de J. A. Serrasqueiro e ainda outras cinco s. outros do mesmo (livros para o ensino secund.); 4 s. um de J. M. Rodrigues; cit. de tit. de trab. de Gino Loria, Lerch, M. d' Ocagne, M. R. Perrier, G. de Longchamps.
66. Bibliografia. Id., 74-80.: s. dois livros de J. A. Serrasqueiro e um de Diogo Nunes, para o ensino secund. e normal; Val. Balbin, «Elementos de calcul de los cuaterniones», Buenos

- Aires, 1887; G. Loria, «Il passato e il presente delle principali teorie geometriche» (*Mem. d. Accad. d. Sc. di Torino*, XXXVIII); C. Le Paige, «René Francois de Sluse» (*Ciel. et Terre*, 2^a sér., II, 1887); G. Paxton Young, «Forms, necessary and sufficient, of the roats of pure uni-serial Abelian equations» (*Amer. Journ. of Math.*, IX). – Pequenas notícias de quatro trab. respectiv. de Le Paige, A. del Re., F. Gerbaldi, Lerch; tit. de três de M. d'Ocagne, quatro de E. Cesàro, um de Lerch, um de E. B. Guccia, três de A. del Re., um de Le Paige, um de F. Engel e um de L. Kronecker.
67. Extractos das publicações recentes. Id., 89-96. (Sem firma). I, Inversão das derivações (no fim, cit. de um trab. de P. Mansion; II, Sobre o limite da expressão $\sqrt[q]{q} - 1$ (cit. de Escary); III, Teorema sobre determinantes (id. de Marcolongo); IV, Teoremas de aritmética (id. de A. Lugli); V, Sobre a corda focal da parábola (id. de Graves); VI, Sobre uma propriedade da esfera (id. de M. d'Ocagne); VII, Passagem de Vénus pelo disco do Sol em 1882 (alude ao result. obt. pela comissão brasileira, e uma das comissões inglesas).
68. Bibliografia. Id., 109-115: s. G. de Longchamps, «Cours de mathématiques spéciales», Paris, 1886; G. Paxton Young. «Solvable quintic equations with commensurable coefficients» (*Amer. Journ. of Math.*, X); Ed. Weyr, «Sur la réalisation des systèmes associatifs de quantités complexes à l'aide des matrices» (*Bull. de la Soc. R. d. Sc. de Bohème*, Praga, 1887); M. d'Ocagne, «Les coordonnées parallèles de points» (*Nouv. Ann. de Math.*, 3^a sér., VI). – Algumas linhas sobre novas ed. de livros para o ensino secund. de Serrasqueiro, s. um trab. de Longchamps, um de Le Pont, dois de Lerch, um de Cesàro e um de V. Janet; tit. de trab. de Longchamps, Del Re, Cesàro, Guccia e M. d'Ocagne.
69. Extractos das publicações recentes. Id., 116-119. (Sem firma). I, Sobre a convergência das séries (*Nouv. Ann. de Math.*, 1888); II, Teoremas de trigonometria (cit. de M. C. A. Laisant, «Théorème de trigonométrie» (*Bull. de la Soc. Math. de France*, XV).
70. Sobre a derivação das funções compostas. Id., 120-131.
71. Bibliografia. Id., 125-136: s. R. R. de Sousa Pinto, «Estudos instrumentais no Observatório Astronómico da Universidade de Coimbra», 1887; «Suplemento ao cálculo das efemérides astronómicas», Coimbra; A. Schiappa Monteiro, «Note sur le triangle isoscèle» (*Jorn. da Acad. d. C. de Lisboa*, 1887); M. David, «Développement des fonctions implicites» (*Journ. de l'Éc. Polytec. de Paris*, 1887); H. G. Zeuthen, «Sur la détermination d'une courbe algébrique par des points donnés» (*Math. Annalen*, XXXI); S. Pincherle, «Sur la nature arithmétique des coefficients des séries intégrales des équations différentielles linéaires» (*Journ. f. d. reine u. angewandte Math.*, 103); A.

- Marre, «Théorème du carré de l'hypothénuse» (*Bul. de Bibliogr. e di St. d. Sc. mat. e fis.*, XX). - Alg. linhas s. um trab. de Lerch; tit. de trab. de David, Lerch, Pirzeti, Piuma, Loria, Morera e Perroni.
72. Extractos das publicações recentes. Id., 157-160. (Sem firma). I, Sobre a convergência das séries (cit. de J. L. Jensen, «Sur un théorème general de convergence», *C - r. de l'Acad. d. Sc. de Paris*, 1888); II, Sobre um teorema de Tchébychew (id. de G. d'Arone, «Intorno ad un teorema de Tchébychew», *Giorn. di Mat.*, de Battaglini, XXVI); III, Uma propriedade da transversal do triângulo (id. de H. Plamenewsky, «Une propriété nouvelle de la transversale du triangle», *Journ. de Math. spéc.*, 1888).
73. Sur la reduction des intégrales hyperelliptiques. Extr. d'une lettre adr. à M. Lerch. Id., 164-170. - *Sitz. d. Kgl. Boehmischen Gesell. d. Wissensch.*, Praga, 1888, 222-227. - *Obr. s. Mat.*, III - «Vár. art. s. div. quest. de anál.», - II, 1906, 42-98.
74. Bibliografia. Id., 183-191: s. Henrique de Figueiredo, «Curvas planas algébricas», Coimbra, 1888; E. Cesàro, «Forme poliedriche regolari e semiregolari in tutti gli spazii» (*Mem. da Acad. R. d. C. de Lisb.*, 1888); A. Casorati, «Sopra le coupures del sig. Hermite e Querschnitte e le superficie di Riemann ed i concetti d'integrazione si reale che complessa»; F. Amoretti e C. Morales, «Teoria elemental de las determinantes», Buenos Aires, 1888; Ph. Gilbert, «Sur la convergence des intégrales à limites infinies» (*Bull. d. Sc. math.*, 2ª sér., XII); D. G. Archilla y Espejo, e D. G. Vicuna, «Discursos leídos ante la Real Academia de Ciencias», Madrid, 1888; G. Tarry, «Essai sur la géométrie des figures imaginaires» (*Ass. Fr. p. l'Avanc. d. Sc.*, 1887); M. Lerch, «Sur une formule d'arithmétique» (*Bull. d. Sc. math.*, 2ª sér., XII); «Théorèmes d'arithmétique» (id.); Rod. Guimarães, «Semelhança e rectificação dos arcos elípticos», Porto, 1887. - Alg. linhas s. um trab. de M. d'Ocagne, um de Ed. Weyr; tit. de trab. de Lerch, M. d'Ocagne e Pincherle.
75. Démonstration d'une formule de Waring, *Nouv. Ann. de Math.*, Paris, 3ª sér., VII, 1888, 382-384. - *Obr. s. Mat.*, XIV - «Div. art. de anál. infinit.», - I, 1906, 375-396.
76. Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite. *Bull. d. Sc. math.*, Paris, 2ª sér., XII, 1888, 228-231. - *Obr. s. Mat.*, XIII - «Div. art. s. anál. mat.», - II, 1906, 359-404. - Rodolfo Guimarães, em sua *Biografia de F. G. T.*, cita ainda outra carta com o mesmo endereço, publ. no mesmo period. francês, mesmo vol., 272-276.
77. Curso de análise infinitesimal. Cálculo integral, I.ª p., 1889; 2.ª p., 1892. - Teve mais duas ed. (2ª em 1893). A 3ª ocupa todo o VI, 1912, das *Obr. s. Mat.*

78. Carta dirigida ao presidente da secção de matemática da Academia Real das Ciências de Lisboa. Porto, 1889.
79. Sur le développement des fonctions implicites. *Journ. de Math. pures et appl.*, f. p. Liouville, 4^a sér., 1889, Paris, V, 67-71. – *Obr. s. Mat.*, VIII, I, 1904, 226-236.
80. Sur l'intégrale $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$. Extr. d'une lettre adr. à M. Weyr. *Sitz d. Kgl. Boehmischen Gesell. d. Wissensch.*, Praga, 1889, 118-120. – *Obr. s. Mat.*, XIII – «Div. art. s. anál. mat.», – II, 1906, 359-404.
81. Extrait d'une lettre adressée à M. J. Tannery. *Bull. d. Sc. math.*, Paris, 2^a sér., XIII, p. I, 1889, 111-112.
82. Bibliografia. *Jorn. de C. mat. e astr.*, IX, 1889 (1890), 12-19: s. J. Pedro Teixeira, «Estudo sobre funções duplamente periódicas», Coimbra, 1888; L. Viglione, «Lecciones de geometria analítica», Buenos Aires, 1888; D. Bucas e R. Escandón, «Teoria elemental de las determinantes», 1888; Z. G. de Galdeano, «Crítica y sintesis del algebra», Toledo, 1883; Lerch, «Sur une méthode pour obtenir le développement en série trigonométrique de quelques fonctions elliptiques» (*Acta math.*, XII); L. Niesen, «Sur l'aspect physique de la planète Mars» (*Bull. de l'Acad. R. d. Belgique*, 1888); Ch. Hermite, «Remarques sur la décomposition en éléments simples des fonctions doublement periodiques» (*Ann. de la Fac. d. Sc. de Toulouse*, II); H. G. Zeuthen, «Note sur l'usage des coordonnées dans l'antiquité et sur l'invention de cet instrument» (*Bull. de l'Acad. Danoise d. Sc.*, 1888); G. Loria, «Notizie storiche sulla geometria numerativa» (*Bibl. math.*, de G. Enestroem, 1888). – Alg. linhas sobre um trab. de E. Cesàro, outro de S. Pincherle, outro de G. Longchamps; tit. de trab. de Gutzmer, Cesàro, Loria, Hermite e Guccia.
83. Extractos das últimas publicações. Id., 20-25. (Sem firma): I, Sobre um desenvolvimento em série $\frac{1}{\cos x}$ (cit. Ed. Weyr, «Ext. d'une lettre à M. Hermite», *Bull. d. Sc. math.*); II, Uma questão de máximos e mínimos (ref. a Ch. Bioche, «Sur les minimas des sommes», etc., *Nouv. Ann. de Math.*, 1888); III, Sobre uma fórmula de Raabe (ref. a Lerch, «Démonstration élémentaire d'une formule de Raabe», *Giorn.*, de Battaglini, XXVI); IV, Valor do integral $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$ (ref. a Méray, «Valeur de l'intégrale, etc.», *Bull. de Sc. math.*, 2^a sér., XII); V, Definição geométrica das funções elípticas (ref. a G. Peano, «Definizione geometrica della funzioni ellitiche», *Giorn. di Math.*, de Battaglini).

84. Alguns pontos da teoria dos integrais definidos. Fragmentos de um curso de análise. Id., 39-50.
85. Bibliografia. Id., 51-59: s. F. P. Horta, «Estudo elementar dos determinantes seguido de uma parte complementar relativa principalmente aos determinantes funcionais», Lisboa, 1889; J. C. Medeiros, «Processo geral de Clairaut para achar o valor aproximado inicial das raízes da equação de 3º grau no caso irreduzível» (*Inst.*, Coimbra, XXXVI); M. d'Ocagne, «Sur certaines courbes qu'on peut adjoindre aux courbes planes pour l'étude de leurs propriétés infinitésimales» (*Jorn. da Acad. de C. de Lisb.*, XII); J. Peano, «Arithmetices principio nova methodo exposita», *Augusta Taurinorum*, 1889; J. Casery, «Tratado de geometria analítica» (trad. do ingl. p. o espanhol, por V. Baldin), Buenos Aires, 1888; J. Schlatke, «Elementos de estática gráfica», (trad. do alem. p. o espanhol, por V. Baldin); V. Retali, «Ricerche sopra l'immaginario in geometria» (*Mem. d. R. Accad. di Bologna*, sér. 4ª, IX). – Mais menções sobre trab. de A. Rebière, A. Tartinville, G. Loria, A. Bassani, Ed. Weyr; tit. de trab. de F. Folie & L. Niesten, A. Bassani, S. Pincherle, G. Loria, C. B. Guccia; id. de dois n.º s de *Ann. de la Licence és Sc.*, Paris.
86. Bibliografia. Id., 93-96: s. Mansfield Merriman, «Método de los cuadrados minimos» (trad. do ingl. p. o espanhol, por V. Baldin), Buenos Aires, 1889; G. Loria, «I poligoni di Poncelet», Turim, 1889; F. Casorati, «Nuova definizione della curvatura delle superficie», *Rendic. d. R. Istit. Lomb.*, sér. 2ª, XXVI); Y. Ptaszychi, «Extr. d'une lettre adr. à M. Hermite» (*Bull. d. Sc. math.*, XII, 1888).
87. Sobre o integral $\int_0^{\pi} \cotg(x - \alpha) dx$. Id., 113-116. – *Nouv. Ann. de Math.*, Paris, 3ª sér., VIII, 1889, 120-122. – *Obr. s. Mat.*, XIV – «Div. art. s. anál. infinit.», – I, 1904, 375-396.
88. Bibliografia. Id., 117-128: s. os *Ann. do Obs. Astron. do Rio de Janeiro*, III, 1888; G. de Longchamps, «Algèbre», 2ª ed., Paris, 1889., «Supplément», Paris, 1890; «Les fonctions pseudo et hyper-Bernoulliennes», etc. (Mém. couron de l'Acad. R. de Belgique, LII); G. Peano, «I principii di geometria logicamente esposti», Turim, 1889; B. J. Clasen, «Sur une nouvelle méthode de résolution des équations linéaires et sur l'application de cette méthode au calcul des déterminants», Paris, 1889; M. Lerch. «Introduction à une théorie élémentaire des intégrales elliptiques» (*An. Sc. de l'Éc. Norm. Sup.*, Paris, 3ª sér., VI, 1889); P. Appell, «Sur les invariants de quelques équations différentielles», *Journ d. Math.*, 4ª sér., V). – Alg. linhas sobre trab. de G. W. Johnson, J. A. Serrasqueiro, G. Lalbaletrier, Lerch, J. Ptaszychi, Pincherle, e s. um opúsculo: «Inauguration de la nouvelle Sorbonne», Paris, 1889; tit. de trab. de Loria, Enestroem, Weyr, Guccia,

- Schoute, Humbert, Zeuthen, Longchamps, Engel, Lerch, Pincherle, Pelz, Cesàro, Burmester; cit. deste outro tit.: «Notice sur les trav. scient. et littér. de Aristide Marre», Roma, 1889.
89. Aplicações de uma fórmula que dá as derivadas de qualquer ordem das funções de funções. Id., 137-142.
 90. Congresso internacional de Bibliografia das Ciências matemáticas. (Sem firma). Id., 143-146.
 91. Bibliografia. Id., 147-154: s. G. de Longchamps, «Essai sur la géométrie de la règle et de l'équerre», Paris 1890; Ch. Hermite, «Sur les polynomes de Legendre» (*Rendic. d. Circ. Mat. de Palermo*, IV). – «Memória sobre a determinação das coordenadas geográficas do Observatório do Castelo de S. Jorge, em Lisboa», 1890. – Menções sobre trab. de Neuberg, Enestroem, Schoute, Bentabal y Ureta, G. Tarry, Peano, G. Pirondini e Em. Vigarié; tit. de trab. de H. Burkhardt, Schoute, Peano e Enestroem.
 92. Extractos das publicações recentes. Id., 155-160. (Sem firma). I, Resto da fórmula de Taylor (ref. a G. Peano, «Une nouvelle formule du reste dans la formule de Taylor», *Mathesis*, IX); II, Sobre o desenvolvimento das funções em série (ref. a J. Bruno de Cabedo, «Sur le développement des fonctions en série», *Mathesis*, X); III, Rectificação aproximada de um arco de círculo (ref. a J. E. Pellet, «Rectification approximative de l'arc de cercle», *Journ. de Math. spéc.*, 1890); IV, Sobre um teorema de Cauchy (ref. a Alberto La Moestra, «Sopra un teorema de Cauchy», *Giorn. di Mat.*, XXVIII).
 93. Note sur l'integration des équations aux dérivées partielles du second ordre. Id., 163-172. – Fora publ., primeiro em o *Bull. de la Soc. Math. de France*, Paris, XVII, 1889, 125-142. – *Obr. s. Mat.*, XI, I, 273-281. Aí mesmo contudo se consigna ter sido a primeira publicação em 1881, lapso talvez.
 94. Bibliografia. Id., 177-184: s. G. Loria, «Il periodo aureo della geometria greca» (*Mem. della R. Accad. d. Sc. di Torino*, 2ª sér., XL, 1890); S. Pincherle, «Saggio di una generalizzazione delle frazioni continue algebriche» (*Mem. d. R. Accad. d. Sc. dell'Istit. di Bologna*, 1890); B. d'Engelhardt, «Observations astronomiques», 2ª p., Dresde, 1890. – Menções s. trab. de R. de Sousa Pinto, R. Marcolongo, G. Vivanti, e s. o opúsculo: «Coordenadas geográficas dos pontos geodésicos de primeira ordem», Lisb., 1989.
 95. Extractos das publicações recentes. Id., 185-190. (Sem firma). I, Sobre a inversão das derivadas parciais (ref. a G. Peano, «Sur l'inversion des dérivations partielles», *Mathesis*, X); II, Sobre o caso duvidoso relativo a certos caracteres de convergência das séries (ref. a G. Fouret, «Remarque sur le cas relatif à certains caractères de convergence des séries»,

Nouv. Ann. de Math., 1890); III, Trissectriz de Maclaurin (ref. espec. a um art. de Longchamps, mas também a trab. de J. de Almeida Lima, Schoute, Habich e ainda a très de Longchamps.

96. Extr. d'une lettre adressée à M. Hermite. *Bull. d. Sc. Math.*, Paris, 2^a sér., 1890, XIV, p. I, 200-208. – *Obr. s. Mat.*, IV, I, 1904, 163-177.
97. Extension d'un théorème de Jacobi. Extr. d'une lettre adr. à M. Lerch. *Monatshefte f. Math. u. Phys.*, Viena, 1890, I, 481-484. – *El Progr. mat.*, Saragossa, 1^a sér., I, 1891, 121-125. – *Obr. s. Mat.*, XIV – «Div. art. s. anál. infinit.», – I, 1904, 374-398.
98. Sur les écrits d'histoire des mathématiques publiés en Portugal. *Bibl. math.*, Estocolmo, 1890, 91-92.
99. Démontrer l'identité suivante:

$$\frac{m^p}{m!p!} = S \frac{1}{\alpha!\beta!\dots\lambda!(2!)^\gamma(3!)^\delta\dots(p!)^\lambda}$$

le signe S portant sur toutes les valeurs entières positives ou nulles, des quantités $\alpha, \beta, \dots, \lambda$ que vérifient les deux équations simultanées $\alpha + \beta + \dots + \lambda = m$, $\beta + 2\lambda + \dots + p\lambda = p$. *Mathesis*, Gand, 2^a sér., I, 1891, 143-144.

100. Sobre a representação da função $\log T(x)$ por um integral definido. *El Progr. mat.*, Saragoça, X, 1891, 185-187. – *Obr. s. Mat.*, XIII – «Div. art. s. anál. mat.», – II, 1906, 358-404.
101. Sur la formule de Stirling. Extr. d'une lettre adr. à M. Rouché. *Nouv. Ann. de Math.*, Paris, 3^a sér., X, 1891, 312-317. – *Obr. s. Mat.*, III – «Vár. art. s. div. quest. de anál.», – II, 1906, 42-98.
102. Bibliografia. *Jorn. de C. mat. e astr.*, X, 1891 (1892), 18-26: s. Abel Suchon, «Traité d'astronomie théorique», Paris, 1891; E. Dessenon, «Cours de trigonométrie rectiligne», Paris, 1891. – Menções s. trab. de F. Casorati, G. Peano, H. Vuibert, Ed. Weyr, H. Burkhardt, F. da Ponte Horta, J. A. Serrasqueiro, E. Mosnat, Motta Pegado, John Cavey, V. Retali, H. A. Newton, e F. Gerbaldi; tit. de trab. de F. Engel, M. d'Ocagne, G. Loria, G. Pirodini, Burkhardt, F. Rogel, Lerch, Marcolongo e Pincherle.
103. Sobre o desenvolvimento das funções em série ordenada segundo as potências dos senos e cossenos. (O assunto deste art. fora comunic. em carta ao sr. Hermite, publ. no *Bull. d. Sc. math.*, 2^a sér., XIV, 1890, e *Obr. s. Mat.*, v. acima, n.º 95). Id., 35-47.
104. Bibliografia. Id., 48-56: s. Z. G. de Galdeano, «Tratado de álgebra con arreglo á las teorías modernas», Toledo, 1884; «Geometria elemental», 2^a ed., id., 1888. – Menções a

- outro de Galdeano, e a trab. de José Pedro Teixeira, José Alves Bonifácio, A. Macé de Lépinay, Ch. Hermite, G. Peano, S. Pincherle, P. Appell, A. Gutzmer; tit. de trab. de Cesàro, Pincherle, G. Loria, Williot, Longchamps, Vivanti, Peano, Zeuthen, Studnicka, Engel e Schoute.
105. Bibliografia. Id., 72-80: s. B. Niewenglowski, «Cours d'algèbre», Paris, 1891; S. Pincherle, «Una nuova estensione delle funzioni sferiche», *Mem. d. R. Accad. d. Sc. di Bologna*, 5ª sér., I; E. de Kerbedz, «Sophie de Kovalewski», *Rendic. d. Circ. Mat. di Palermo*, 1891. – Menções s. trab. de C. Juel, G. Loria, G. Peano, A. Del Re, H. Bentabal y Ureta; tit. de trab. de C. Juel, Pincherle, Cesàro, Longchamps, P. Mansion, A. Favaro e Del Re.
106. Bibliografia. Id., 106-112: s. E. Picard, «Traité d'analyse», Paris, I, 1891; G. Lazzeri e A. Bassini, «Elementi di geometria», Livorno, 1891; Johann G. Hagen, «Synopsis der Hoeheren Mathematik», Berlim, I, 1891. – Menções s. trab. de Ch. Hermite e G. Pirondini; tit. de trab. de Pirondini, Marcolongo, Del Re, Vivanti, I. L. Gensen, Enestroem e Loria.
107. Bibliografia. Id., 141-149: s. M. d'Ocagne, «Nomographie. Les calculs usuels effectués au moyen des abaqués», Paris, 1891. – Menções s. trab. de W. Herkness, G. Floquet, G. Loria, G. de Longchamps, V. Reina, T. W. Backhouse, G. Pirondini, L. Kronecker, L. Niesten, J. Durán Loriga, G. Bigourdan, Rod. Guimarães, F. Engel e S. Lie; e a um vol. do *Ann. p. l'an., 1892 publ. p. le Bur. d. Longit.*, Paris. Tit. de trab. de Serrasqueiro, Reina e Vivanti.
108. Notas sobre a teoria das funções elípticas. Id., 150-184.
109. Bibliografia. Id., 187-191: s. J. de Mendizábal Tamborrel, «Tables de logarithmes à huit décimales des nombres de 1 à 125000, et des fonctions goniométriques», etc., Paris, 1891; Henri Padé, «Premières leçons d'algèbre élémentaire», Paris, Gauthier-Villars, 1892. – Menções a trab. de John Gray, Lerch, Loria; tit. de um trab. de Lerch.
110. Sur la fonction $p(u)$. Extr. d'une lettre adr. à M. Hermite. *Bull. d. Sc. math.*, Paris, 2ª sér., XVI, p. I, 1892, 76-80. – *Obr. s. Mat.*, III – «Vár. art. s. div. quest. de anál.». – II, 1906, 42-92.
111. Remarques sur l'emploi de la fonction $p(u)$ dans la théorie des fonctions elliptiques. Extr. d'une lettre adr. à M. Lerch. *Sitz. d. Kgl. Boemischen Gesell. d. Wissensch.*, Praga, 1892, 182-184. – *Obr. s. Mat.*, XIII – «Div. art. de anál. mat.», II, 1906, 358-404.
112. Sobre la decomposición de las funciones elípticas $sn.u$, $cn.u$, $dn.u$, en serie de fracciones simples. *El Progr. mat.*, Saragoça, 1ª sér., II, 1892, 65-68.

113. Sobre el desarrollo de $p(u)$ en serie de fracciones simples. Id., 207-212.
114. Bibliografia. *Jorn. d. C. mat. e astr.*, XI, 1892 (1894), 5-8: menções s. trab. de L. C. Almeida, E. Mosnat, Ed. Weyr, R. Guimarães, G. de Longchamps, P. Günther; tit. de trab. de Weyr, Vivanti, Burkhardt, L. Koenigsberger, J. Bergbohm, R. Mehmke e Serrasqueiro.
115. Bibliografia. Id., 59-64: s. C. A. Laisant e E. Perrin, «Premiers principes d'algèbre», Paris, 1892. – Menções s. trab. de G. Loria, Alb. Winterhalter, H. Burkhardt, A. Gutzmer, E. Lemoine, R. Guimarães, Harold Jacoby, G. Vivanti; tit. de trab. de Zeuthen, Peano, Pirondini, Asaph Hall, Pincherle, Gutzmer, G. Veronese.
116. N. J. Lobatcheffsky. Id., 116. (Nota, sem firma, refer. ao centenário do nascimento de N. J. L. que ocorrera em Out., 1892).
117. Bibliografia. Id., 119-128: s. A. Faifofer, «Elementi di geometria», 8ª ed., Veneza, 1891; Humbert, «Traité d'arithmétique», Paris, Nony, 1893. – Menções s. trab. de Painlevé, Ch. J. de La Vallée Poussin, P. Pizzetti, G. Fontené, A. Macfarlane, S. Pincherle, C. A. Laisant, E. Lampe, Dav. Besso, e a duas publicações; tit. de trab. de Merriman, Gutzmer, Pirondini, Lerch, Hermite, Burkhardt, Vivanti, F. Giudice, D. André, R. Guimarães e Guccia.
118. Bibliografia. Id., 153-160: s. A. R. Farsyth, «Theory of functions of a complexe variable», Cambridge, 1893; J. Tannery e J. Molk, «Eléments de la théorie des fonctions elliptiques», Paris, G.-Villars, I, 1893; G. Lazzeri, «Tratatto di geometria analitica», Livorno, 1893. – Menções a trab. de M. G. de Longchamps, E. Lucas, R. Bettazzi, M. Mansion, E. Carvallo, E. Lemoine e uma publicação.
119. Bibliografia. Id., 189-191: menções s. trab. de A. Rebière, Ed. Weyr, G. Vivanti, A. Harwitz e G. Loria; tit. de trab. de Mansion, J. Deruytz, Marcolongo, Pirondini, Lemoine, Lerch e A. Macfarlane.
120. Extr. d'une lettre adressée à M. Hermite. *Bull. d. Sc. math.*, Paris, 2ª sér., XVII, p. II, 1893, 29-32. – *Obr. s. Mat.*, III – «Vár. art. s. div. quest. de anál.», – II, 1906, 42-98.
121. Bibliografia. *Jorn. de C. mat. e astr.*, XII, 1894 (1896), 11-18: s. G. Peano, «Lezioni di analisi infinitesimale», Turim, 1893. – Menções a trab. de M. d'Ocagne, Ch. de La Vallée Poussin, P. Pizzetti, G. B. Guccia, J. A. Serrasqueiro, S. Pincherle, L. C. Almeida, J. Bruno de Cabedo, G. Loria, J. P. Teixeira, L. Grilhières e a duas publicações; tit. de trab. de La Vallée Poussin, M. d'Ocagne, Mansion, R. Guimarães, Lerch e Vivanti.
122. Bibliografia. Id., 51-64: s. E. Cesàro, «Corso di analisi algebrica con introduzione al calcolo infinitesimale», Turim, Bocca, 1894; G. Papelier, «Leçons sur les coordonnés

- tangentielles», Paris, Nony, 1894; C. Burali-Forti, «Logica mathematica», Milão, Hoepli, 1884; M. d'Ocagne, «Le calcul simplifié par les procédés mécaniques et graphiques», Paris, G.-Villars, 1894. – Menções s. trab. de A. Rebière, G. Vivanti, F. Canu, C. A. Laisant, G. Arnoux, R. Guimarães, Jorge F. d'Avillez, A. Macfarlane, E. Mosnat, Ch. Hermite, S. Pincherle, E. Picard e a um opúsculo de homenagem a Hermite; tit. de trab. de Marcolongo, Lemoine, Loria, P. Günther, Lerch, Lampe, D. André, Pizzetti, Guccia, G. Cantor, Cesàro, Burali-Forti, M. d'Ocagne, Vivanti e Laisant.
123. Bibliografia. Id., 83-96: s. E. Picard, «Traité d'analyse», Paris, G.-Villars, II, 1893; Ch. Méry, «Leçons nouvelles sur l'analyse infinitésimale», Paris, G.-Villars, 1894; Ch. Henry, «Abrégé de la théorie des fonctions elliptiques», Paris, Nony, 1895; E. Pascal, «Lezioni di calcolo infinitesimale», Milão, Hoepli, 1895; G. Maupin, «Questions d'algèbre», Paris, 1895; B. Niewenglowski, «Cours de géométrie analytique», Paris, G.-Villars, I, 1894; Z. G. de Galdeano, «Geometria general», Saragossa, 1895; V. Balbin, «Tratado de estereometria geometrica», Buenos Aires, 1895. – Menções ainda a trab. de Balbin, Ch. Brisse, F. Castellano, X. Antomari e Laisant.
124. Bibliografia. Id., 118-128: s. F. Porro, «Astronomia sferica elementarmente exposta», Roma, 1894; Lia Predella, «Sulle soluzioni singolari delle equazioni differenziali ordinarie di 1ª ordine», *Giorn. di Math.*, XXXIII. – Menções s. trab. de E. Lucas, J. G. Hagen, D. F. G. Areis, S. Pincherle, R. Perrin, E. Picard, M. d'Ocagne, E. Pascal e a duas publicações; tit. de trab. de Pincherle, E. Guallart, Lerch, Besso, Peano, Weyr, Deruytz, D. André, Carvallo, Cesàro, Enestroem, Zeuthen, Picard, Z. G. de Galdeano, Guccia, R. Guimarães e Mansion.
125. Bibliografia. Id., 141-160: s. H. Faye, «Sur l'origine du monde, théories cosmogoniques des anciens et des modernes», 3ª ed., Paris, G.-Villars, 1896; H. Vogt, «Leçons sur la résolution algébrique des équations», Paris, Nony, 1895; B. Niewenglowski, «Cours de géométrie analytique», Paris, G.-Villars, II, 1895; G. Papelier, «Leçons sur les coordonnées tangentiels», Paris, Nony, II, 1895. – Menções ainda, não curtas, a trab. de G. Pesci, C. A. Laisant, Ed. Brahy, B. d'Engelhardt, A. da Silva Basto e A. dos Santos Lucas; menções ainda a trab. de H. Laurent, A. Cabreira, Z. G. de Galdeano, E. Guallart Elias, A. R. Forsyth, A. Bassani, E. Mc. Clintock, R. Marcolongo, S. Pincherle e a duas publicações e a um estatuto de sociedade astron.; tit. de trab. de Lerch, Gutzmer, d'Ocagne, Laisant, Pirondini, E. Pascal, Carvallo, Lemoine, Burali-Forti, G. Pesci, Vivanti, Macfarlane, Besso, Guccia, Peano e Loria.

126. Bibliografia. Id., 175-190: s. F. Klein, «Leçons sur certaines questions de géométrie élémentaire», redact. fr. p. J. Griss, Paris, Nony, 1896; E. Goursat, «Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du seconde ordre», Paris, A. Hermann, I, 1896; P. Painlevé, «Leçons sur le frottement», Paris, Hermann, 1895; Ch. Meray, «Leçons nouvelles sur l'analyse infinitésimal et ses applications géométriques», Paris, G.-Villars, 2^o partie, 1895; E. Pascal, «Teoria delle funzioni ellitiche», Milão, Hoepli, 1896; E. Rouché e Ch. de Comberouse, «Leçons de géométrie», Paris, G.-Villars, 1^a p., 1896. – «Solutions détaillées des exercices et problèmes énoncés dans les leçons de géométrie», Paris, G.-Villars, 1^a p., 1896 – Menções ainda a trab. de E. Carvallo, E. Picard, L. F. Marrecas Ferreira, C. A. Laisant, G. Lazzeri, M. d'Ocagne, P. Mansion, J. L. V. Jensen, J. M. Colaw, Stouff, S. Pincherle e A. Botelho; tit. de trab. de Pincherle, E. Pascal, Gerbaldi, Guldborg, Carvallo, Bettazi, G. Veronese, A. Bossi, Burali-Forti, F. Klein e G. Cantor.
127. Sur le développement des fonctions de x^k en série ordonnée suivant les puissances du sinus de la variable. *Nouv. Ann. de Math.*, Paris, 3^a sér., XV. (Rod. Guimarães, lug. cit., refere-o ao CXVI – lapso sem dúvida, – 260-274). – *Obr. s. Math.*, XIV – «Div. art. s. anal. infinit.», – I, 1904, 375-376.
128. Sur le développement des fonctions em série ordonnée suivant les puissances des sinus et des cosinus de la variable. *Journ. f. d. reine u. angew. Math.*, Berlim, CXVI, 1896, 14-32. – *Obr. s. Mat.*, II, I, 1904, 103-125.
129. Sur les séries ordonnées suivant les puissances d'une fonction donnée. *Journ. f. d. reine u. angew. Math.*, Berlim, CXVI, 1896 (seg. G. T. em *Obr. s. Math.* – Rod. Guimarães, ob. cit., refere-o ao vol. CXXII, 1900, 97-123). – *Obr. s. Math.*, III, I, 1904, 127-161.
130. Sobre o desenvolvimento das funções em série. *Mem. de la R. Acad. de Sc. Ex., Fis. e Nat. de Madrid*, XVIII. p. I, 1897, 1-116. (Esta memória foi premiada pela Acad. R. das C. de Madrid. Apresentada em concurso aberto em 1893, recebeu aquela distinção em 1895. No cit. opúsc. de Rod. Guimarães, vêm mais informações sobre o facto). – *Obrs. s. Mat.*, I, I, 1904, 1-102.
131. Sur les courbes parallèles à l'ellipse. *Mém. de l'Acad. R. de Belgique*, Bruxelas, LVIII, 1898, 1-39. (Na ob. cit. de Rod. Guimarães vem LIII, 1895-1898). – *Obr. s. Mat.*, V, I, 1904, 179-208.
132. Sur l'enveloppe d'une droite de longueur donnée s'appuyant sur deux droites. *Interméd. d. Math.*, Paris, V, 1898, 162-163. – *Obr. s. Mat.*, XII – «Div. art. s. geom. anal. pl.», – I, 1904, 283-315.

133. Bibliografia, *Jorn. de C. mat. e astr.*, XIII, 1897 (1899), 22-32: s. G. Darboux, «Leçons sur la théorie générale des surfaces et sur les applications géométriques du calcul infinitésimal», Paris, G.-Villars; G. Loria, «Il passato ed il presente delle principale teorie geometriche», Turim, C. Clausen, 1896; A. Capelli, «Lezioni di algebra complementare», Nápoles, Palermo, 1895; Observat. Astron. de Lisb., «Observations méridiennes de la planète Mars pendant l'apparition de 1892», Lisb., 1895. – Menções s. trab. de H. G. Zeuthen, C. A. Laisant, M. Lerch; tit. de trab. de Burkhardt, E. Pascal, Buralli-Forti, E. Carvallo e E. Lenoble.
134. Congresso internacional dos matemáticos em Zurich, 1897. Id., 47-48. (Sem firma). (Poucas palavras apresentando a circular em francês, distribuída pela comissão preparatória do Congresso).
135. Bibliografia. Id., 52-64: s. E. Picard, «Traité d'analyse», Paris, G.-Villars, IV, 1896; C. de Freycinet, «Essais sur la philosophie des sciences», Paris, G.-Villars, 1896; M. d'Ocagne, «Cours de géométrie descriptive et de géométrie infinitésimal», Paris, G.-Villars, 1896; Niewenglowski, «Cours de géométrie analytique», Paris, G.-Villars, III, 1890; E. Pascal, «I determinanti theoria ed applicazioni», Milão, Hoepli, 1879; X. Antonari, «Cours de géométrie descriptive», Paris, Nony, 1897. – Menções a trab. de Demartres, X. Antomari, J. Tannery, e J. Molk, Lucien Lévy, J. F. d'Avillez, A. Gutzmer; tit. de trab. de A. Capelli, R. Marcolongo, Lerch, E. Lampe, Alf. Guldberg, Peano, G. Vailati, G. Maupin, Burkhardt.
136. Bibliografia. Id., 68-76: s. E. Pascal, «Calcolo delle variazioni e calcolo delle differenze finite», Milão, Hoepli, 1897; B. Buillaud, «Cours d'astronomie», Paris, G.-Villars, 1895-1896. – «Oeuvres mathématiques de Evariste Galois», Paris, G.-Villars, 1897. – «In Memorium N. I. Lobatschevskii», Kasan, 1897. – Menções s. trab. de P. Mansion, E. Vivanti, A. Gutzmer e a uma publ. perman.; tit. de trab. de J. Deruytz, Pirondini, Buralli-Forti, Lazzeri, H. Faye, Hermite, Lampe, Longchamps, Peano, G. Loria, Lerch, Vailati, Cesàro e Macfarlane.
137. Bibliografia. Id., 121-128: menções a trab. de J. Petersen, W. Fr. Meyer, H. Burkhardt, Ch. Méray, N. Cor e J. Riemann, E. Cesàro, Z. G. de Galdeano, L. Raffy, C. Wessel.
138. Bibliografia. Id., 134-160: s. C. A. Laisant, «La mathématique, Philosophie, Enseignement», Paris, G. Carré e G. Naud, 1898. – Menções s. trab. de L. Lévy, E. Pascal, J. D. Souto Rodrigues, C. Buralli-Forti, G. Fontené, P. Mansion, W. Rouse Ball, C. Juel, E. Villié, J. Mendizábal y Tamborrel, R. Bettazi, G. Pirondini, V. R. Prosper, P. Günther, A. Capelli, R. Marcolongo, G. Vailati, M. d'Ocagne, A. Cabreira, L. F.

- Marrecas Ferreira, L. Colonel R. du Ligondès, O. Stone, V. Reina, V. Reina e Cicconetti, L. Lorenz, N. Charruit, G. Loria, R. Ball, Rod. Guimarães, J. F. d'Avillez e a uma publicação; tít. de trab. de Pirondini e de mais 25 autores, alguns deles com mais de um.
139. Bibliografia. Id., 167-191: menções a trab. de P. Appell, E. Borel, H. Weber, Ch. Méray, E. Cesàro, J. Tannery e J. Molk, G. Oltramare, Marco Nasso, Sidónio B. C. da Silva Paes, G. de Longchamps, Guichard, P. Mansion, Ch. André, E. Blim e M. Rollet de l'Isle, F. Rudio, G. Maupin, A. Angot, W. de Fonvielle, C. A. de Laisant e H. Fehr, A. R. Forsyth, Alf. Guldberg, G. Vailati, E. Pascal, J. Duran Loriga, Rod. Guimarães, A. Cabreira e a uma publ. francesa; tít. de trab. de Peano e mais sete autores, alguns deles com mais de um.
140. Sobre una curva notable. *El Progr. mat.*, Saragossa, 2ª sér., I, 1899, 161-164. – *Obr. s. Mat.*, XII – «Div. art. s. geom. pl.», – I, 1904, 283-315.
141. Tratado de las curvas especiales notables, tanto planas como alabeadas. (Obra apres., pelo facto da questão proposta em 1892 e 1895, à Academia R. das C. de Madrid, em 1897, e coroada por esta Acad, em 1899). *Mem. da Acad. R. d. C. de Madrid*, 1900-1905. – *Obr. s. Mat.*, com o tít. – «Traité des courbes spéciales remarquables, planes et gauches», – IV, 1908, I – 401 (vol. inteiro), V, 1909, I – 497 (vol. int.), VII, 1915-1924, incluído num Apêndice. Esta nova ed. encontra-se muito aumentada, como aí mesmo se diz: «Trad. de l'espagnol, revue et très augmenté».
142. Sobre los focos de las espiricas de Perseo. *El Progr. mat.*, Saragossa, 2ª sér., II, 1900, 306-310. – *Obr. s. Mat.*, XII, I, 1904, 283-315.
143. Évaluation directe de l'aire de la développée de l'ellipse. *L'Interméd. d. Math.*, Paris, VII, 1900, 20-21. – *Obr. s. Mat.*, XII, I, 1904, 283-315.
144. Sur la réctification des courbes parallèles à une courbe donnée. *L'Interméd. d. Math.*, Paris, VII, 1900. – *Obr. s. Mat.*, XII, I, 1904, 283-315.
145. Sur les foyers du limaçon de Pascal. *L'Interméd. d. Math.*, Paris, VII, 1900. – *Obrs. s. Mat.*, XII, I, 1904, 283-315.
146. Si une courbe est carrable et rectifiable, ses courbes parallèles le sont elles aussi? *L'Interméd. d. Math.*, Paris, VII, 1900, 247. – *Obr. s. Mat.*, XII, I, 1904, 283-315.
147. Notícia biográfica sobre F. da Ponte Horta. *Jorn. de C. mat. e astr.*, XIV, 1900 (1901), 3-9.
148. Bibliografia. Id., 10-16: menções s. trab. de M. d'Ocagne, E. Lebon, E. Duporcq, H. Pinet; tít. de trab. de Pirondini e mais onze autores.

149. Bibliografia. Id., 49-64: menções a trab. de E. Torroja, E. Cahen, E. Borel, H. Burkhardt, P. Mansion, P. Barbarin, Tannenberg, E. Fourrey, Fitz Patrick e Chevrel, F. Tisserand, A. dos Santos Lucas, Mémain, A. Mendes de Almeida e Rod. Guimarães, E. Guallart e a dois catál. de estrelas do Observat. Nav. dos E.U.A., Washington.
150. Bibliografia. Id., 82-96: menções s. trab. de H. Andoyer, L. P. da Motta Pegado, H. Brocard, H. Fehr, S. Ortu Carboni, S. Stéphanos, E. Pascal, Ch. André, C. de Freycinet, W. F. Wislicenus, Rod. Guimarães, Mittag-Leffler, E. Lampe. C. Juel, J. Duran Loriga, A. Tarrazona.
151. Bibliografia. Id., 109-116: menções a trab. de s. Pincherle, G. Lazzeri, A. Capelli, Lemoine, E. Lampe, Alf. Guldberg, P. Puiseux, e a duas publ. periódicas; tit. de trab. de Jensen e de mais quinze autores, alguns com mais de um.
152. Bibliografia. Id., 184-191: menções s. trab. de S. Pincherle, Lia Predella, A. Mendes de Almeida e Rod. Guimarães, C. Alasia, G. Loria e a uma publ. periód. de Saragossa e outra de Leipzig; tit. de trab. de A. Palmstrom e de mais doze autores, alguns com mais de um.
153. Sobre uma propriedade de los focos de los óvalos de Cassini. *Rev. trim. de Mat.*, Saragossa, I, 1901, 84-86. – *Obr. s. Mat.*, XII – «Div. art. s. geom. anal. pl.», – I, 1904, 283-315.
154. Sur la tétracuspide de Bellavitis. *Mathesis*, Gand, 3ª sér., XXI. 1901, 217-219. – *Obr. s. Mat.*, XII, I, 1904, 283-315.
155. Apontamentos biográficos sobre Daniel Augusto da Silva. *Bol. da Dir. Ger. da Instr. Públ.*, Lisboa, I, 1902, 829-840. (Datado de Outubro, 1902, Porto). – *Obr. s. Mat.*, X, I, 1904, 259-272.
156. Sur la courbe équipotentielle. *Arch. d. Math. u. Phys.*, Leipzig, 3ª sér., III, 1902, 132-135. – *Obr. s. Mat.*, XII – «Div. art. s. geom. anal. pl.», – I, 1904, 283-315.
157. Sur une propriété des ovales de Descartes. *Mathesis*, Gand, 3ª sér., XXII, 1902, 135-137. – *Obr. s. Mat.*, XII, I, 1904, 283-315.
158. Bibliografia. *Jorn. d. C. mat. e astr.*, XV, 1902 (1905), 25-32: menções a trab. de B. W. Russel, M. Godefroy, E. Borel, Z. G. de Galdeano, R. Marcolongo, H. Vogt, F. Michel, G. Pesci, P. Ripa, V. Larangeira; tit. de uma reun. de Congresso.
159. Bibliografia. Id., 38-46; menções s. trab. de C. C. Dassen, G. Loria, Ch. Wolf, G. Vivanti, Mittag-Leffler, Duran Loriga e a uma publ.; tit. de trab. de E. Pascal e mais quinze autores, alguns com mais de um.
160. Terceiro Congresso Internacional dos Matemáticos. Id., 85. (Pequena notícia, sem firma).

161. Bibliografia. Id., 86-96: menções a trab. de C. Alasia, E. Pascal, G. Peano, J. Tannery e J. Molk, Alfr. Capelli, G. Robin, T. W. Backhouse, Fr. Nysl e J. Jan Frie, e a uma publ., um C.-r. de Congr. e um livro *J. Bolyai in memor.*; tit. de trab. de E. Pascal e de mais dezassete aut., alguns com mais de um.
162. Terceiro Congresso Científico Latino-americano. Id., 131. (Pequena nota, sem firma).
163. Bibliografia. Id., 132-144: menções s. trab. de G. Loria, R. Marcolongo, H. Lebesgue, E. Borel, J. Tannery e J. Molk, H.G. Zeuthen, G. Vivanti, G. Papelier, Stoffaes, P. Constan, H. Dulac, G. Comberiac, M. de Montcheuil, E. Cesàro, A. Macfarlane, R. Bettazi e a uma publ.
164. Campos Rodrigues. Id., 181-182. (Sem firma, art. a propósito do prémio Valz conferido a C.R., direct. do Observat. Astr. de Lisb., pela Acad. d. C. de Paris, Set., 1904.)
165. Bibliografia. Id., 183-191: menções a trab. de E. Coursat, O. Bolza, M. Godefroy, E. Torroja y Caballé, E. Mach, Castelnuovo, Clairin, J. A. de Séguier, L. Lorenz, M. G. Bigourdan e às obr. de Laguerre, II, Paris, G.-Villars, 1905.
166. Sur le développement des fonctions doublement périodiques de second espèce en série trigonométrique. *Journ. f. d. reine u. angew. Math.*, Berlim, CXXV, 1903, 301-318. – *Obr. s. Mat.*, IX, I, 1904, 237-257.
167. Sur la convergence des formules d'interpolation de Lagrange, de Gauss, etc. *Journ f. d. reine u. angew. Math.*, Berlim, CXXVI, 1903, 116-162. – *Obr. s. Mat.*, XIII, I, 317-374.
168. Sobre la teoria de logaritmos. *Gac. de Mat. elem.*, Madrid, I, 1903, 222-226. – *Obr. s. Mat.*, III – «Vár. art. s. div. quest. de anál.», – II, 1906, 42-98.
169. Remarques sur un travail publié par N. Bougaiev. Extr. d'une lettre adr. au prof. A. Vassilief. *Bull. de la Soc. Phys. – math. de Kasan*, 2^a sér., XIII, 74-78. – *Obr. s. Mat.*, III, II, 1906.
170. Note sur deux travaux d'Abel relatifs à l'intégration des différences finies. *Acta math.*, Estocolmo, XXVIII, 1904, 235-242. – *Obr. s. Mat.*, I, II, 1906, 1-10.
171. Sur une formule trigonométrique d'interpolation. *L'Enseign. math.*, Genebra, VI, 1904, 214-218. – *Obr. s. Mat.*, III, – «Vár. art. s. div. quest. de anál.», – II, 1906, 42-98.
172. Sur la serie de Lagrange et ses applications. *Mém. de l' Acad. R. de Belgique*, Bruxelas, I, ciênc., 1904, 1-29. – *Obr. s. Mat.*, VIII, II, 1906, 223-252.
173. Sur la theorie des cubiques circulaires et des quartiques bicirculaires. *Ann. di Mat.*, Milão, 3^a sér., XI, 1904, 9-28. – *Obr. s. Mat.*, IX, II, 1906, 253-274.
174. Sur un problème de Gauss et une classe particulière de fonctions symétriques. *Giorn. di Mat.*, Nápoles, XLII, 1904, 337-338. – *Obr. s. Mat.*, X, II, 1906, 275-320.

175. On the rectification of Booth's logarithmic ellipse and logarithmic hiperbola. *The Quaterly Journ. of p. a. appl. Math.*, Londres, XXXVI, 1904, 56-60. – *Obr. s. Mat.*, XII – «Alg. art. s. div. quest. de geom. anal.», – II, 1906, 337-358.
176. Nota sull'applicazione del teorema di Fagnano agli archi della lumaca di Pascal e delle sinusoide. *Period. di Mat. p. l'Insign. second.*, Livorno, XIX, 1904, 275-277. – *Obr. s. Mat.*, XII, II, 1906, 337-358.
177. Sobre una propiedad de las cubicas circulares. *Rev. trim. de Mat.*, Saragossa, IV, 1904, 214-215. – *Obr. s. Mat.*, XII, II, 1906, 337-358.
178. Sobre una equación lineal indeterminada. *Gac. de Mat. elem.*, Madrid, II, 1904, 68-70, 94-96. – *Obr. s. Mat.*, XIII, – «Div. art. s. anál. mat.», – II, 1906, 358-404.
179. De algunas series que pueden somarse por los métodos elementales. *Gac. de Mat. elem.*, Madrid, II, 1904, 152-155. – *Obr. s. Mat.*, XIII, II, 1906, 358-404.
180. Sur les fonctions *alef* de Wronski. *Prace Mat. Fizy*, Varsóvia, XV, 1904, 199-201.
181. Obras sobre Matemática. Publicadas por ordem do Governo português. Coimbra, Impr. da Univ., I, 1904. (Abre por um pref. em que G. T. consigna a portaria de 8 de Fev. de 1902, assin. pelo presid. do Conselho de ministros e ministro dos Negócios do Reino, E. R. Hintz Ribeiro, na qual se determina a publ. em volumes das suas obras sobre Matemática). É a ed. em 4º gr. e tem este 1º vol. VIII pgs., 412 pgs. – O vol. II sai em 1906, 424 pgs. – III id., 369 pgs. e uma de Err. – IV, 1908, XI pgs., 401 pgs., uma de Err. – V, 1909, 497 pgs. – VI, 1912, 542 pgs. – VII, 1915, VIII pgs., 424 pgs. e uma de Err. – O III está integralmente ocupado pelo «Curso de análise infinitesimal, Cálculo diferencial», 4ª ed. – O IV pelo «Traité des courbes spéciales remarquables planes et gauches», t. I – O V id., t. II. – O VI pelo «Curso de análise infinitesimal, Cálculo integral». – O VII pelo «Tr. des courbes spéc. remarq. pl. et g.», t. III (Suplem.), e por um Apêndice: «Sur les problèmes célèbres de la géométrie élémentaire non résolubles avec la règle et le compas» (281-412).
182. Sur le nombres des tangentes qu'on peut mener à une courbe par un point situé sur la courbe. *L'Enseign. math.*, Paris, VII, 1905, 138-141. – *Obr. s. Mat.*, XII, – «Alg. art. s. div. quest. de geom. anal.», – II, 1906, 337-358.
183. Sur une formule pour le calcul numérique des logarithmes. *Nouv. Ann. de Math.*, Paris, 4ª sér., V, 1905, 36-45. – *Obra. s. Mat.*, XIII – «Div. art. s. anál. mat.», – II, 1906, 359-404.
184. Sur quelques intégrales définies. *Arch. f. Math. u. Phys.*, Berlim, 3ª sér., IX, 1905, 3-33. – *Obr. s. Mat.*, XIII, II, 1906.

185. Sur les démonstrations de deux formules pour le calcul des nombres de Bernoulli. *L'Enseign. math.*, Paris, VII, 1905, 442-446. – *Obr. s. Mat.*, XIII, II, 1906.
186. Sur une fonction numérique. *L'Interméd. d. Math.*, Paris, XII, 1905, 69-70. – *Obr. s. Mat.*, XIII, II, 1906.
187. Fundação dos *Anais científicos da Academia Politécnica do Porto*. Publ. s. a direc. de G. T., Coimbra, Impr. da Univ. (Abrindo o vol. I, G. T. diz que vêm continuar, na parte referente às Matemáticas, o *Jornal de Ciências matemáticas e astronómicas*). Vol. I, 1905-1906.
188. Sobre uma questão entre Monteiro da Rocha e Anastácio da Cunha. *An. c. da Acad. Politéc. do Porto.*, I, 1905-1906, 7-15.
189. Bibliografia. Id., 133-136: s. a «Correspondance d'Hermite et de Stieltjes, publ. p. les soins de B. Baillaud et H. Bourget», Paris, Gauthier-Villars, 1905-1906; C. Hermite, «Oeuvres», Paris, G.-Villars, I, 1905. – Menções s. trab. de G. Darboux, E. Borel e R. Baire.
190. Bibliografia. Id., 194-200: s. a «Visite de Sa Magesté Charles I, Roi du Portugal et des Algarves, et de M. le Président de la République française au Musée National d'Histoire Naturelle, le 24 novembre 1905», Paris, 1906; L. Oct. de Toledo, «Elementos de aritmética universal», Madrid, I, 1903; «Tratado de álgebra», id., 1905, Z. G. de Galdeano, «Tratado de analisis matematica», Saragossa; C. A. Laisant, «Initiation mathématique», Paris, 1906; e s. *Verh. d. drit. internat. Math.-Congr. i. Heidelberg*, Leipzig, 1905; R. Marcolongo, «Mecanica razionale», Milão, Hoepli, 1905.
191. Bibliografia. Id., 259-260: s. Ch. Lucas de Pesloüan, «N. H. Abel, sa vie et son oeuvre», Paris, G.-Villars, 1906; Rob. Bonola, «La geometria non-euclidea», Bolonha, 1906.
192. Sur quelques applications des séries ordonnées suivant les puissances du sinus, *Journ. f. d. reine u. angew. Math.*, Berlim, CXXXI, 1906. – *Obr. s. Mat.*, XI, II, 1906, 320-335.
193. Sur les transformations linéaires. *Mathesis*, Gand, XXVI, 1906 – *Obr. s. Mat.*, XII – «Alg. art. s. div. quest. de geom. anal.», – II, 1906, 337-358.
194. Sur quelques propriétés des cubiques. Extr. d'une lettre adr. à Ch. Hermite. *Nieuw Arch. v. wiskunde nitgeg. d. h. Wiscundig Genoostschap.*, Amesterdão, 2ª sér., 1906, 247-248. – *Obr. s. Mat.*, XII, II, 1906.
195. Sur deux manières de construire les spiriques de Perseus. *Arch. d. Math. u. Phys.*, Leipzig, 3ª sér., XI, 1906, 64-71. – *Obr. s. Mat.*, XIV – «Dois art. s. geom. anal.», – II, 1906, 405-420.

196. Sur une propriété de la strophoïde et sur les cubiques qui coïncident avec leurs cissoïdales. *Nouv. Ann. de Math.*, Paris, 4^a sér., VI, 1906, 337-343. – *Obr. s. Mat.*, XIV, II, 1906.
197. Sobre os hiperbolismos das cônicas. *Ann. c. da Acad. Politéc. do Porto*, II, 1907, 119-126.
198. Bibliografia. Id., 127: s. E. Coursat, «Cours d'analyse mathématique», Paris, G.-Villars, II, 1905.
199. Sobre as espíricas de Perseo. Id., 160-165.
200. Bibliografia. Id., 184-187: s. H. Lebesgue, «Leçons sur les séries trigonométriques», Paris, G.-Villars, 1906; L. Oct. de Toledo, «Introducción al estudio de las funciones de variable complexa», Madrid, 1907. – Menções ainda a trab. de H. Maudart, P. Appell e P. Duhem.
201. Sobre a construção do círculo osculador das cúbicas circulares e das quárticas bicirculares. Id., 198-211.
202. Bibliografia. Id., 248-251: menções a trab. de R. Baire, G. Fezzari, M. d'Ocagne.
203. Visita de Sua Magestade El-Rei o Senhor D. Manuel II à Academia Politécnica do Porto. Alocução pronunciada pelo Dr. Francisco Gomes Teixeira, director da Academia. Id., IV, 1908 (1909), 5-7.
204. Notas sobre duas curvas esféricas particulares. Id., 28-35.
205. Demonstração de um teorema de Liouville sobre as linhas geodésicas do elipsoide. Id., 132-134.
206. Bibliografia. Id., 241-251: menções s. trab. de L. Couturat, A. Maroger, L. Lelègue, Edm. Maillet, R. d'Adhémar, P. Boutroux, J. Juhel-Rénoy, E. Borel, G. Loria, H. B. Fine, E. Fabry, C. Fassbinder, E. Nannei, G. Lemaire, G. Papelier, J. Pionchon, J. Ruiz-Castizo, H. Poincaré, E. Cosserat e F. Cosserat, L. Lecornu, O. de Alencar Silva, P. Rozé, L. Puiseux, e ao H. das «Oeuvres de Ch. Hermite», Paris, G.-Villars, 1908, e ao «Festschrift til H. G. Zeuthen», Copenhagen, 1908.
207. Réponse à la question 3.507 (T. Lemoyne). *L'Interméd. d. Math.*, Paris, XVI, 1909, 95.
208. Réponse à la question 3.551 (T. Lemoyne). Id., 240.
209. Réponse à la question 3.581 (G. Espanet). Id., 287-288.
210. Sobre as integrais de Fresnel. *An. cient. da Acad. Politéc. do Porto*, V, 1910, 69-72.
211. Sobre o método de Gauss para o cálculo aproximado dos integrais definidos. Id., 220-223.

212. Réponse à la question 3.632 (T. Lemoine). *L'Interméd. d. Math.*, Paris, XVII, 1910, 117-118.
213. Réponse à la question 3.658 (Piepus). Id., 142-143.
214. Notas de viagem. Cartas. *O Comércio do Porto*, 24, 27 de Maio, 1910, 1, 3, 5, 9, 18, 23, 24 e 30 de Junho, id., 3, 8, 15 e 20 de Julho, id. – São dirigidas ao Dr. Bento Carqueja, director do *C. do Porto*.
215. Algumas propriedades das curvas notáveis. *Jorn. de C. mat., fis. e nat.*, Lisboa, 2ª sér., VII, 1910, 302-308.
216. Sur la développée de la parabole du second ordre. *L'Interméd. d. Math.*, Paris, XVII, 1910. – Ampl. em *Obr. s. Mat.*, VII, 1915, 24-26 (no t. III do «Tr. d. courbes», etc.).
217. Note on Professor Namiengar Paper. *Proceed. of Edinb. Math. Soc.*, XXIX, 1910-1911.
218. Bibliografia. *An. c. da Acad. Politéc. do Porto*, VI, 1911, 58-62, 63-64: s. Ern. Lebon, «Savants du jour», Paris, G.-Villars; J. Tannery, «Introduction à la théorie des fonctions d'une variable réelle», 2ª ed., 2. vol., Paris, Hermann, 1904-1910; G. Castelnuovo, «Lezioni di geometria analitica», 12ª ed., Roma, 1909. – Ainda menções a trab. de Desiré André, Edg. Ciani, Appell e Danthéville, E. Belot, Ed. Barbette, A. Claude e L. Driencourt.
219. Bibliografia. Id., 126-128: s. Rod. Guimarães, «As matemáticas em Portugal», Coimbra, 1909; Oscar Bolza. «Vorlesungen ueber Variationsrechnung», Leipzig, Teubner, 1909.
220. Relatório da Comissão redactora dos «Anais Científicos da Academia Politécnica do Porto», apresentado ao Conselho académico. Id., ao fim do vol., ocupando 3 pgs. (Assinado por G. T., A. J. Ferreira da Silva, L. Woodhouse, Bento Carqueja, e A. de Sousa Pinto. Não terá sido escrito por G. T.).
221. Sobre une nueva propiedad de las cisoides y una generalización de estas curvas. *Rev. de la Soc. Mat. Españ.*, Madrid, I, 1911-1912, 156-162. – Trad. franc. em *Obr. s. Mat.*, VII, 1915, 1-12 (no «Tr. d. courbes», etc.).
222. Note on recherches of Maclaurin on circular cubics. *Proceed. of Edinb. Math. Soc.*, XXX, 1911-1912. – Trad. franc. em *Obr. s. Mat.*, VII, 1915, 13-20 («Tr. d. c.», etc.).
223. Bibliografia. *An. c. da Acad. Politéc. do Porto*, VII, 1912, 124-128: menções a trab. de G. Loria, E. Stoffaës, G. Buce Halsted, J. Sommer, D. Hilbert, Ch. Riquier, Burali-Forti e R. Marcolongo, D. Gautier, Carvallo, Delambre e a uma publ. espanhola.
224. Sobre o folium de Descartes e sobre a construção de uma classe de cúbricas unicursais. Id., 186-189. – *Obr. s. Mat.*, VII, 1915, 20-24.

225. Bibliografia. Id., 190-192: menções a trab. de G. Darboux, F. Lalesco, H. B. Heywood e M. Fréchet, C. Burali-Forti e R. Marcolongo, R. Bricard, J. M. Torroja, P. J. Richard, Th. Caronnet.
226. Sobre algunas propiedades de las cubicas. *Rev. de la Soc. Mat. Españ.*, Madrid, II, 1912-1913, 5-12. – *Obr. s. Mat.*, VII, 1915, 29-35 (in «Tr. d. courbes», etc.).
227. Sur une propriété de la lemniscate de Bernoulli, *Atti d. Pontif. Accad. Rom. d. Nouvi. Lincei*, Roma, LXV, 1912. – *Obr. s. Mat.*, VII, 1915, 35-38 (in «Tr. d. c.», etc.).
228. Sur la spirale logarithmique. *L'Interm. d. Math.*, Paris, XIX, 1912. – *Obr. s. Mat.*, VII, 1915, 97-107.
229. Sur les courbes semblables à leurs courbes parallèles. *L'Interm. d. Math.* Paris, XIX, 1912.
230. Sur les trajectoires des paraboles, des hyperboles et de leurs courbes inverses. *Giorn. di Mat.*, Nápoles, I, 1912. – *Obr. s. Mat.*, VII, 1915, 147-168 (in «Tr. d. c.», etc.).
231. Sobre la teoria de las ruletas. *Rev. de la Soc. Mat. Españ.*, Madrid, II, 1912-1913. – *Obr. s. Mat.*, VII, 1915, 90-92. («Roulettes» in «Tr. d. c.», etc.).
232. Pequenas notas sobre a geometria das curvas especiais. *An. c. da Acad. Politéc. do Porto*, VIII, 1913, 121-124.
233. Pieter Hendrik Schoute. Id., 125.
234. Bibliografia. Id., 126-127. (Sem firma). – Menções a trab. de Yoshio Mikami, G. Vivanti, G. Demartres e G. Lebon.
235. A unificação das notações e terminologia da teoria do potencial e da teoria da elasticidade. Id., 128. (Sem firma).
236. Sobre as tangentes à astroide. Id., 220-225. – *Obr. s. Mat.*, VII, 1915, 61-65 (in «Tr. d. c.»).
237. Sur les développoides de l'ellipse. *Nouv. An. de Math.*, Paris, 4^a sér., XIII, 1913, III. – *Obr. s. Mat.*, VII, 1915, 65-69 (in «Tr. d. c.»).
238. Sur une intégrale définie. *Arch. d. Math. u. Phys.*, Leipzig, 3^a sér., XXI, 1913, 248.
239. Extrait d'une lettre adressée à M. Haton de la Goupillière. *Journ. de Math. p. et appl.*, 6^a sér., IX, 1913. – *Obr. s. Mat.*, VII, 1915, 243-244. (in «Tr. d. c. »).
240. Sobre uma propriedade das curvas ciclóides. *Rev. da Univ. de Coimbra*, II, 1913. – *Obr. s. Mat.*, VII, 1915, 175-176. (in «Tr. d. c. »).
241. Sur les courbes à développée intermédiaire circulaire. *Monatshefte f. Math. u. Phys.*, Viena, XXIV, 1913, 347. – *Obr. s. Mat.*, VII, 1915, 177-184. (in «Tr. d. c. »).

242. Sur les roulettes circulaires. *Nouv. Ann. de Math.*, 4^a sér., XIII, 1913. – *Obr. s. Mat.*, VII, 1915, 239-243. (in «Tr. d. c.»).
243. Sur les courbes représentées par l'équation $\rho e^{n\theta} \sin m\theta = c$. *Rendic. d. Circ. Mat. di Palermo*, XXXVII, 1914. – *Obr. s. Mat.*, VII, 1915, 219-224 (in «Tr. d. c. »).
244. Sur les courbes orbiformes d'Euler et sur une généralisation de ces courbes. *Arch. d. Mat. u. Phys.*, Leipzig, 1914. – *Obr. s. Mat.*, VII, 1915, 230-237. (in «Tr. d. c. »).
245. Sur les courbes isoptiques et les polaires. *Nouv. Ann. de Math.*, Paris, 4^a sér., XIV, 1914. – *Obr. s. Mat.*, VII, 1915, 248-252.
246. Sur une problème de la théorie des courbes. *L'Interm. d. Math.*, Paris, 1914. – *Obr. s. Mat.*, VII, 1915, 256-257. (in «Tr. d. c. »).
247. Sobre las lineas geodesicas del helicoido de plano director. *Rev. de la Soc. Mat. Españ.*, Madrid, III, 1914. – *Obr. s. Mat.*, VII, 1915, 259-268 (in «Tr. d. c. »).
248. Traité des courbes spéciales remarquables planes et gauches, t.III, (Supplément). *Obr. s. Mat.*, VII, 1915, pgs. V-VIII, 1-279. – G. T., na Introdução, diz: «parmi les pièces qui forment ce volume, on trouve les reproductions de quelques travaux sur les courbes spéciales qui nous avons inserées en divers recueils scientifiques après la publication de l'ouvrage mentionné». (Refer. aos t. I e II do «Traité»). São trab. de 1911 a 1914, mencionados em seu lugar na presente Bibliogr.
249. Sur les problèmes célèbres de la géométrie élémentaire non résolubles avec la règle et le compas. *Obr. s. Mat.*, VII, 1915, 281-412. Como «Apêndice».
250. Sobre os arcos das parábolas e hipérboles. *An. c. da Acad. Politéc. do Porto*, X, 1915, 11-19. – *Obr. s. Mat.*, VII, 1915, 139-147. (in «Tr. d. c.»).
251. Geminiano Pirondini. Id., 125-126.
252. Bibliografia. Id., 127-128: menções s. trab. de A. Padoa, Y. Mikami, E. Fabry.
253. L. Orlando. Id., XI, 1916, 123-124.
254. Bibliografia. Id., 185-189: s. Léon Lecornu, «Cours de mécanique professé à l'École Polytechnique», Paris, G.-Villars, I, 1914; II, 1915. – Ainda menções a trab. de R. Montessus, R. P. Richardson, e Ed. H. Landis, R. C. Archibald, L. O. de Toledo, L. Zoretti, G. Bigourdan e a uma publicação.
255. Sobre a construção des tangentes à cissoide oblíqua que passam por um ponto exterior à curva. Id., XII, 1917-1918, 14-17.
256. Bibliografia. Id., 53-60: s. J. Rey Pastor, «Fundamentos de la geometria proyectiva superior», Madrid, 1916; «Introducción a la matemática superior», Madrid, 1916; Pietro Burgatti, «Lezioni di meccanica razionale», Bolonha, N. Zanichelli; «Oeuvres de G. H.

- Halphen», publ. p. l. soins de C. Jordan, H. Poincaré, E. Picard, Paris, G.-Villars, I, 1916; P. Brouther, «Les principes de l'analyse mathématique», Paris, Hermann et Fils, I, 1914; «Scientia», Rev. Intern. de síntese cient. – Menções ainda s. trab. de L. Braude, Maxime Bôcher, R. Montessus de Ballore, E. Désortaux.
257. Alocução. Na abertura do congresso de Sevilha promovido pela Associação Espanhola para o Progresso das Ciências (6-11, V, 1917). No art. «Congr. de Sevilha», etc., de Aarão Ferreira de Lacerda. A alocução designa-se aí de «pronunciada pelo reitor da Universidade do Porto». Id., 136-137. – No *Jorn de Not.*, Porto, 11 de Maio de 1917, vem transcrita parte do discurso de G. T.
258. Discurso. Na sessão de encerramento. No mesmo art. Design. de «lido pelo reitor da Universidade do Porto». Id., 140-143. Vem trecho final deste discurso no *Diár. de Not.*, Lisboa, 19 de Maio de 1917, «Congresso de Sevilha».
259. Identidade das curvas definidas pela equação bipolar $\rho^2 + \rho_1^2 + h\rho\rho_1 = K.I$. Comun. na 1ª secção do acima cit. congresso. Id., 202-203. – Diz-se aí apenas o tít. e refere-se uma alocução com que G. T. abriu a secção.
260. Discurso proferido por G. T. na visita do presidente da República, Dr. Sidónio Paes, à Universidade do Porto, em Janeiro de 1918. *O Com. do Porto*, 17 de Janeiro de 1918.
261. Sobre a identidade das curvas de Perseo e das curvas de Siebeck. Comun. f. no congresso de Sevilha, da Ass. E. p. o Progr. das C., 1917. *An. c. da Acad. Politécn. do Porto*, XIII, 1918-1919, 87-90.
262. Bibliografia. Id., 124-128. (Sem firma). – S. «Oeuvres de Charles Hermite» publiées sous les auspices de l'Académie des Sciences, p. Émile Picard, Paris, G.-Villars; L. Lecornu, «Cours de mécanique professé à l'École Polytechnique», Paris, G.-Villars, III, 1918. – Menções ainda s. trab. de M. d'Ocagne, G. Loria, Em. Belot e às «Oeuvres de G. H. Halphen, publ. p. l. soins de C. Jordan, H. Poincaré, E. Picard», Paris, G.-Villars, II, 1918.
263. Sur les cubiques circulaires. Id., 196-209. (É a reprod. de três art. publ. nos *Nouv. Ann. de Math.*, Paris, 1916, 1917).
264. Elogio histórico de Daniel Augusto da Silva, lido na sessão pública de 2 de Junho de 1918 da Academia das Ciências de Lisboa. *Hist. e Mem. da Acad. d. C. de Lisboa*, n. sér., 1ª el., VIII, nº1, Coimbra, Impr. da Univ., 1920. – Lido também no congresso das Ass. Esp. e Port. para o Progr. d. Cienc., de Bilbao, Setembro de 1919.

265. Discurso profer. na sessão de abertura do congresso de Bilbao, das Ass. Esp. e Port. p. o Progr. d. Cienc.. *O Comércio do Porto*, 14 de Setembro de 1919. – *O Norte*, Porto, 15 de Setembro de 1919. – *A Época*, Lisboa, 16 de Set., 1919.
266. Discurso de agradecimento na sessão de homenagem promovida pela academia portuense em 1 de Junho de 1921, pelo motivo da jubilação de G. T.. *Jorn. do Norte*, Porto, 2 de Junho de 1921.
267. Discurso profer. na sessão solene do seu doutoramento pela Universidade Central de Madrid. *O Com. do Porto*, 21 de Maio, 1922. *O Prim. de Janeiro*, Porto, 23 de Maio de 1922. Também: Bento Carqueja, «Douturam. hon. causa do Prof. Francisco Gomes Teixeira na Universidade Centr. de Madrid, Notícia», Coimbra, Impr. da Univ., 1923.
268. Les Mathématiques au Portugal. *L'Enseign. math.*, 23º a., n.ºs 3-4, 1923, 137-142. (Resumo das confer. f. em Maio, 1923, nas Fac. de Ciências de Paris e de Toulouse. Notas colhidas por M. A. Buhl). Segue-se no mesmo folheto que é o extr. da revista. cit., «Chronique» tratando da Amizade franco-portuguesa (assin. por Buhl) e «Congressos para o Progresso das Ciências em Espanha e Portugal»; mesma revista e n.º, 213-217.
269. «O elogio dos números», parte transcrita do A., de seu discurso ou conferência na Academia das Ciências de Lisboa, em 24 de Março de 1923. Também falou sobre Monteiro da Rocha. *O Século*, Lisb., 25 de Março, 1923.
270. Discurso na sessão inaugural do congresso das Associações Espanhola e Portuguesa para o Progresso das Ciências, efectuado em Salamanca, na 2ª quinzena de Junho de 1923. *El Adelanto*, Salamanca, 20 de Junho de 1923.
271. Pequeno discurso de agradecimento aquando da entrega das insígnias da Legião de Honra pelo ministro da França, no Consulado francês do Porto, em 21 de Julho de 1923. V., por ex., *Jorn. do Norte*, Porto, 22 de Julho, 1923. – *O Prim. de Janeiro*, Porto, 22 de Julho.
272. Bibliografia. *An. cient. da Acad. Politéc. do Porto*, XIV, 1920 (1926), 186-189: s. «Opere di Evangelisto Torricelli», edite da Gino Loria e Giuseppe Vassura, Florença, 1919. – Menções ainda a trab. de S. Gunguli, e E. Turrière.
273. Conferência sobre S. Tomaz de Aquino. Efect. a 26 de Maio, 1924, na Liga Naval, Lisboa. Comemoração do centenário tomista. *O Dia*, Lisboa, 27 de Maio de 1924, alguns períodos de G. T. – *Corr. da Manhã*, id., id. – *A Época*, id., 29 de Maio, alguns trechos. – *V. Panegir. e confer.*, de G. T., 1925.
274. Homenagem aos heróis. *O Prim. de Jan.*, Porto, 16 de Dezembro de 1924. – Pequeno art. na homenagem do periódico a Sacadura Cabral, desaparecido em 15.

275. Discurso na sessão inaugural, 14 de Junho, 1925, do Congresso Luso-espanhol para o Progr. das Ciências, em Coimbra. Pode-se ver a ideia do disc. e vários trechos do próprio A. no *Comércio do Porto*, 16 de Junho de 1925. Vem, na íntegra, em *A Época*, Lisb., 15 de Julho, 1925.
276. Trechos de G. T. de relato de sua viagem a Roma para efectuar sua conferência na Academia Pontificia dos Novos Linceos. Vêem-se no artigo respectivo de *O Século*, Lisb., 2 de Junho, 1925.
277. *Panegíricos e conferências*. Academia das Ciências de Lisboa. Coimbra, Impr. da Univ., 1925. Pgs. XI, pgs. 313, Índice e «Errata», 8º fr. – Contém os elogios históricos de Pedro Nunes, José Monteiro da Rocha, José Anastácio da Cunha e Daniel Augusto da Silva. E conferências sobre quatro mulheres célebres na história das matemáticas, a astronomia na obra de S. Tomaz de Aquino, o poder e a beleza das matemáticas, e sobre a colaboração dos espanhóis e portugueses nas navegações dos séculos XV e XVI. – O elogio de Daniel Augusto da Silva tem espécie bibliográfica particular, já cit. A confer. «Sobre quatro mulheres célebres na história das matemáticas», foi lida nas Univ. de Coimbra e Porto e na Sociedade Martins Sarmento, de Guimarães. A «Sobre a astronomia na obra de S. Tomaz de Aquino», pronunciada em Lisboa (26 de Maio de 1624) e no Porto, foi presidida respectivamente pelo cardinal patriarca de Lisboa, D. António Mendes Bello, e bispo do Porto, D. António Barbosa Leão. A «Sobre o poder e a beleza das matemáticas» no Congresso Luso-espanhol de Salamanca, 1923, e Universidade do Porto, Janeiro de 1925. A «Sobre a colaboração espanhola e portuguesa nas grandes navegações dos séculos XV e XVI», em discurso inaugural do Congresso Luso-espanhol, Porto, 1921. Sobre José Anastácio da Cunha fala G. T. no congresso de Coimbra, Luso-espanhol, 1925.
278. *Santuários de montanha*. Impressões de viagens. Lisboa, livr. Clássica Editora, 1926. 237 pgs. e mais uma de Índice 8º fr.
279. Discurso profer. na sessão solene da Sociedade de Geografia de Lisboa, em 6 de Fevereiro de 1926, comemorativa do 4º aniversário da eleição de Pio XI. *Novidades*, Lisboa, 7 de Fevereiro de 1926. – *A Época*, Lisboa, 7 de Fev. – O cap. IX dos *Santuários de mont.* versa o assunto tratado nessa alocução ou conferência.
280. Alocução ou discurso, intitulados de «Discurso notável», de agradecimento e despedida do congresso de Cadiz, das Associações Espanh. e Port. para o Progr. das Ciências, 5-16 de Maio de 1927. *O Com. do Porto*, 17 de Maio, 1927.

281. S. Francisco e a Eucaristia. Conferência no 2º Congresso Eucarístico Nacional. *A Voz*, Lisboa, 13 de Junho de 1927.
282. Bibliografia. *An. c. da Acad. Politéc. do Porto*, XV, 1927 (1930), 61-63: menções s. trab. de G. H. Halphen, P.^e Emiliano de Echauguibel, M. Lecat, Ch. Tweedie, P. Lévy, P. Painlevé.
283. Apoteose de S. Francisco de Assis. Sua vida e obra. Lisboa, livr. Clássica Editora, 1928. 4 pgs. de pref., 269 de texto, uma de «Errata», uma de Índ., 8 peq. figs. fora do texto. — Em 7 de Março de 1927, pronunciara uma confer. na Liga Naval de Lisboa comemor. o VII centen. de S. Francisco de Assis sujeita ao título: «A ciência e a humildade dos Franciscanos». V., por ex., *Diár. de Not.*, Lisboa, 8 de Março.
284. Sobre as quárticas com pontos duplos coincidentes. Comunicação à Academia das Ciências de Lisboa, lida pelo sr. Mira Fernandes. *Bol. da Acad. de C. de Lisboa*, n. sér., II, Jan. 1930. Coimbra, Impr. da Univ., 1930.
285. Uma santa e uma sábia. Clara de Assis e Sofia Kovalewski. Lisboa, livr. Clássica Editora, 1930, 4. pgs. de pref., 340 pgs., duas de Índice.
286. Santo António de Lisboa, história, tradição e lenda. Lisboa, livr. Cláss. Edit., 1931. XV pgs. de pref., 277 pgs., uma de Índ., uma de «Errata», figs. fora do texto. 8º peq.
287. História das matemáticas em Portugal. Academia das Ciências de Lisboa, Biblioteca de Altos Estudos. Liç. profer. de 12 a 19 de Abril de 1932. Lisboa, 1934. (Esta ed. foi revista pelo A. até à pg. 96, e em seguida pelo Prof. Aníbal Scipião de Carvalho, que escreve uma «Advertência prévia». 300 pgs., 8º peq.)

3. A lemniscata no Tratado das Curvas de Gomes Teixeira

Este capítulo tem como objectivo o estudo da *lemniscata*, conforme é apresentado nas edições castelhana de 1897, posteriormente francesa, em 1904, da obra *Tratado das curvas especiais notáveis*, indicando em cada proposição (para os vários assuntos tratados) a qual das edições nos referimos. Existem outras edições desta obra, respectivamente de 1974, publicada pela Editora Chelsea e, mais recentemente, uma edição francesa editada por Jacques Gabay em 1995, mas que não apresentam alterações relativamente à edição francesa, a mais completa das duas edições acima mencionadas.

A primeira edição reduz-se a um único volume, enquanto a segunda é exposta em três volumes incluídos nas *Obras Sobre Matemática* de Francisco Gomes Teixeira mandadas publicar pelo Governo Português.²⁹ No prefácio da primeira edição, o matemático refere que

“(...) a colecção de curvas com nome especial que se propõe estudar não está completa. Devido ao tempo, não pudemos considerar algumas que conhecemos (...)”

Acrescenta depois que julga não ter omitido nenhuma das curvas realmente importantes quer pela sua teoria, quer pelas suas aplicações ou história. Refere ainda que, no caso de o seu trabalho merecer aprovação, publicaria um suplemento com algumas das curvas em falta, como viria a acontecer.

A segunda edição é o resultado de uma revisão e aumento relativamente à primeira, com novas curvas que não tinham sido ainda estudadas e acrescentos à teoria de parte das curvas consideradas no primeiro estudo.

O primeiro destes volumes é dedicado ao estudo das curvas algébricas planas, entre as quais as curvas notáveis de terceira ordem, a cissóide, a estrofóide, as cúbicas de Rolle, de Agnesi, de Descartes, de Newton e de Chasles; e as curvas especiais de quarta ordem, as espíricas de Perseus, as cassinianas, a cardióide, a concóide de Nicomede. Estuda depois as curvas especiais de sexta ordem ou de ordem superior: astróide, concóide, as rosáceas.

Trata depois, no segundo volume, as curvas transcendentais, entre as quais a ciclóide, a epicyclóide e a hipociclóide, a sinusóide, a espiral. Gomes Teixeira entre as curvas torsas estuda as cíclicas esféricas, a janela de Viviani, as curvas tetraedrais e depois as transcendentais, tais como por exemplo a curva de Bertrand e as hélices.

No tomo III, o matemático português trata algumas curvas algébricas como a concóide de Dürer e estuda mais algumas propriedades das curvas estudadas nos volumes anteriores. Entre as curvas transcendentais dedica-se entre outras à espiral logarítmica e mais adiante a algumas

²⁹ Volumes quarto e quinto e ainda um Suplemento que corresponde ao sétimo volume.

questões de geometria geral. A terminar este volume e o tratado, debruça-se sobre alguns problemas da Geometria Elementar não resolúveis com régua e compasso.

Tal como indica no prefácio da terceira edição, estuda a forma, a construção, a rectificação e quadratura, as propriedades e a história de cada curva; considera a relação de cada curva com as outras; indica os problemas onde as curvas estudadas surgem.

Na obra mencionada, Gomes Teixeira começa por apresentar a *lemniscata* como sendo a curva obtida pela intersecção de um toro com um plano, distinguindo entre *lemniscata elíptica* e *hiperbólica*. Em seguida, trata com mais pormenor estes dois tipos de *lemniscatas*, referindo as suas equações cartesiana e polar, a sua forma e construção, os pontos de intersecção com os eixos coordenados, os focos, as rectas tangentes, a rectificação e a área.

Estuda depois mais detalhadamente a *lemniscata de Bernoulli*, pertencente à família das *lemniscatas hiperbólicas*, da qual indica várias propriedades e um método de construção. Devemos observar que aqui se detecta algumas diferenças na edição francesa em comparação com a castelhana.

Um outro tipo de *lemniscata* por ele tratada separadamente é a *lemniscata* de Geronio, que corresponde a um caso particular da família das parábolas virtuais. É-lhe dado no entanto um menor relevo do que à *lemniscata de Bernoulli*.

Por fim, e ainda com um pouco menos de destaque do que o dado às curvas anteriores, encontramos algumas curvas da família das curvas *cíclicas esféricas*: a curva de Viviani, a qual apesar de não ser apelidada de *lemniscata* tem a forma de um oito pela qual estas curvas são caracterizadas, e ainda as *lemniscatas esféricas* de Eudoxo e de W. Roberts.

3.1 Espíricas – lemniscatas Elípticas e lemniscatas Hiperbólicas

(121)³⁰ Gomes Teixeira na sua proposição (106) (*Tratado de las Curvas Especiales Notables*, p. 102) define as *lemniscatas* como um tipo de espíricas³¹ representáveis por uma das equações

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 y^2 + b^2 x^2$$

onde $a^2 = 4lc$, $b^2 = 4l(l+c)$ e $l+c = R$ ou

$$(x^2 + y^2)^2 = b^2 x^2 - a^2 y^2,$$

onde $a^2 = 4lc$, $b^2 = 4l(l-c)$ e $l-c = R$.

A primeira equação representa as curvas inversas e as podarias³² centrais da elipse; a segunda representa as inversas e as podarias centrais da hipérbole. Segundo Gomes Teixeira, é por este motivo que J. Booth ([5]) chamou às primeiras de *lemniscatas elípticas* e às segundas de *lemniscatas hiperbólicas*. Comparando as equações acima referidas com as indicadas por Gino Loria, encontramos ligeiras diferenças como veremos ao longo deste capítulo e do que se segue.

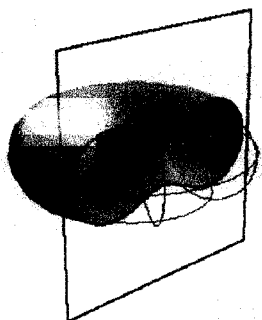


Fig. 3.1

Consideremos uma curva cuja equação é do primeiro tipo e $b > a$. É então possível determinar o toro e a posição do plano paralelo ao seu eixo cuja intersecção é a *lemniscata elíptica* dada através das fórmulas

$$R = l + c$$

$$l = \frac{1}{2} \sqrt{b^2 - a^2}$$

³⁰ A ocorrência de um certo número entre parêntesis diz respeito à mesma proposição apresentada e numerada por Gomes Teixeira na versão castelhana do seu *Tratado das curvas* e, caso se encontre entre dois parêntesis, diz respeito à mesma numeração mas na obra reeditada em Francês de 1908.

³¹ Espíricas - curvas obtidas pela intersecção de um toro com um plano cuja equação (considerando o centro do toro como origem das coordenadas, o eixo dos yy como eixo do toro e o plano em causa paralelo a este eixo, isto é, da forma $z = c$) é

dada por $(l \pm \sqrt{x^2 + c^2})^2 = R^2 - y^2$ ou $(x^2 + y^2 + l^2 + c^2 - R^2)^2 = 4l^2(x^2 + c^2)$, onde R representa o raio do círculo gerador

do toro e l designa a distância do centro do círculo gerador ao eixo da superfície.

³² A podaria de uma curva plana em relação a um ponto da curva é o lugar geométrico das projecções ortogonais do ponto sobre as tangentes à curva.

$$c = \frac{a^2}{4l}.$$

A mesma questão resolve-se, de modo análogo, no caso da *lemniscata hiperbólica*, por meio das fórmulas

$$R = l - c$$

$$l = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + a^2}$$

$$c = \frac{a^2}{4l}.$$

No primeiro destes casos, o toro será fechado, e no segundo aberto, sendo em ambos os casos o plano secante, tangente ao toro.

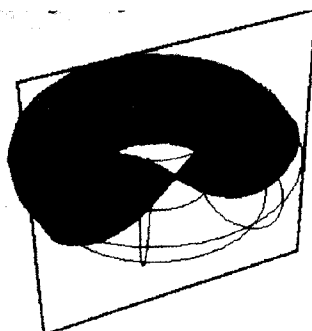


Fig. 3.2

(122) Também é possível obter uma *lemniscata* procurando as curvas que satisfazem a condição ([5]):

$$\rho^2 \rho_1^2 = e^4 \pm f^2 r^2,$$

onde ρ , ρ_1 e r representam as distâncias de qualquer dos seus pontos a três pontos fixos F, F' e O situados numa mesma recta e tais que a distância de F e F' a O seja igual a $2e$; f designa uma constante (Fig. 3.3).³³

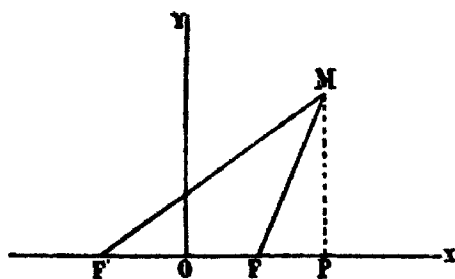


Fig. 3.3

Tomando o ponto O como origem das coordenadas e a recta FF' como eixo das abcissas, vem

³³ Na edição francesa, esta figura está errada, não surgindo sequer os pontos F e F' referidos.

$$\rho^2 = y^2 + (x - e)^2,$$

$$\rho_1^2 = y^2 + (x + e)^2$$

e

$$r^2 = x^2 + y^2,$$

e a equação cartesiana das curvas consideradas será

$$(x^2 + y^2)^2 = (f^2 + 2e^2)x^2 + (f^2 - 2e^2)y^2,$$

muito semelhante à indicada por Gino Loria para a *lemniscata de Booth*.

Esta equação representa, quando $f^2 > 2e^2$, uma *lemniscata elíptica* com parâmetros

$$a^2 = f^2 - 2e^2 \text{ e } b^2 = f^2 + 2e^2,$$

e, quando $f^2 < 2e^2$, uma *lemniscata hiperbólica* com parâmetros

$$b^2 = f^2 + 2e^2 \text{ e } a^2 = 2e^2 - f^2.$$

Esta distinção é também feita por Gino Loria, embora de modo mais detalhado.

Vejamos, nas secções seguintes, cada uma destas *lemniscatas* separadamente.

3.1.1. lemniscata elíptica

Gomes Teixeira estuda ao pormenor a *lemniscata elíptica* na obra o *Tratado das Curvas*.

(123) Considerando um referencial tal que esta curva é simétrica relativamente aos eixos coordenados, a *lemniscata elíptica* tem como equação

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 y^2 + b^2 x^2$$

e corta o eixo das abcissas nos pontos $(\pm b, 0)$ e o das ordenadas nos pontos $(0, \pm a)$. Esta curva tem ainda as seguintes características: o centro da curva é um ponto isolado e duplo, que coincide com a origem das coordenadas; não possui ramos infinitos reais; e qualquer recta traçada pela origem das coordenadas a corta em dois pontos diferentes do ponto isolado O (Fig.3.4).

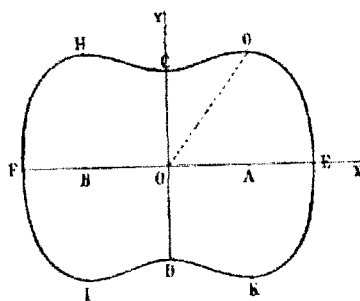


Fig.3.4

Os pontos da figura acima possuem propriedades que veremos de seguida.

A equação³⁴

$$y' = \frac{[b^2 - 2(x^2 + y^2)]x}{[2(x^2 + y^2) - a^2]y}$$

mostra que as tangentes nos pontos C e D são paralelas ao eixo das abcissas e que as tangentes nos pontos E e F são analogamente paralelas, mas agora ao eixo das ordenadas.

(124) Determinando os pontos da curva tais que

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{2}a^2$$

obtêm-se quatro soluções imaginárias, logo não existem outros pontos onde a tangente seja paralela ao eixo das ordenadas além dos já encontrados

$$(\pm b, 0)$$

ou seja, os pontos E e F.

Por outro lado, a tangente é paralela ao eixo das abcissas nos pontos C e D e em quatro outros pontos de intersecção da curva com a circunferência

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{2}b^2,$$

isto é, os pontos que são determinados pelas equações

$$x^2 = \frac{b^2(b^2 - 2a^2)}{4(b^2 - a^2)} \text{ e } y^2 = \frac{b^4}{4(b^2 - a^2)} \quad .^{35}$$

³⁴ Esta equação é obtida a partir da equação da curva $(x^2 + y^2)^2 = a^2y^2 + b^2x^2$, por derivação implícita:
 $2(x^2 + y^2)(2x + 2yy') = 2a^2yy' + 2b^2x \dots$

³⁵ Estas equações são obtidas através da resolução do sistema
$$\begin{cases} (x^2 + y^2)^2 = a^2y^2 + b^2x^2 \\ x^2 + y^2 = \frac{1}{2}b^2 \end{cases}$$

Assim, estes pontos são reais e distintos (G, H, I e K na Fig. 3.4) quando $b^2 > 2a^2$, imaginários quando $b^2 < 2a^2$ (caso em que a *lemniscata* se assemelha a uma elipse), e coincidentes com C e D quando $b^2 = 2a^2$ (corresponde a $x = 0$).

Substituindo, na equação da *lemniscata* considerada, $y = \pm a$, nota-se que cada uma das tangentes nos pontos C e D intersecta esta curva em dois outros pontos, cujas abcissas são $\pm \sqrt{b^2 - 2a^2}$, e que estes pontos são reais no primeiro caso, imaginários no segundo e coincidentes com C e D no terceiro caso.

(125) Como já referimos, a curva possui um *ponto duplo* na origem das coordenadas e admite ainda dois outros pontos duplos no infinito. Podemos ainda referir que esta curva pertence à categoria das *unicursais*³⁶. De facto, fazendo $y = tx$ na equação da curva e depois

$$\sqrt{a^2 t^2 + b^2} = at + z,$$

obtemos

$$x = \frac{2a^2 z(z^2 + b^2)}{z^4 + 2(2a^2 - b^2)z^2 + b^4}, \quad y = \frac{a(z^2 + b^2)(b^2 - z^2)}{z^4 + 2(2a^2 - b^2)z^2 + b^4}$$

que determina x e y como funções racionais de z .

(126) A equação polar da *lemniscata elíptica* é

$$\rho = \sqrt{a^2 \sin^2(\theta) + b^2 \cos^2(\theta)}.$$

Partindo desta equação, encontra-se para o raio de curvatura a fórmula

$$R = \frac{[(a^2 + b^2)\rho^2 - a^2 b^2]^{\frac{3}{2}}}{[2(a^2 + b^2)\rho^2 - 3a^2 b^2]\rho},$$

que nos mostra que a curva tem *dois pontos de inflexão* reunidos no seu ponto isolado, e quatro outros coincidentes com os pontos de intersecção da curva com a circunferência de raio

$$\rho = \sqrt{\frac{3a^2 b^2}{2(a^2 + b^2)}},$$

e cujo centro é a origem das coordenadas. Os valores que θ toma nestes pontos são dados pela igualdade

³⁶ Significa que x e y são funções racionais de uma variável z .

$$\text{sen}^2(\theta) = \frac{b^2(2b^2 - a^2)}{2(b^4 - a^4)},$$

mostrando que tais valores são reais se $b^2 > 2a^2$, tendo a curva quatro pontos de inflexão (Fig. 3.4), o mesmo não acontecendo se $b^2 < 2a^2$, caso em que não terá nenhum ponto de inflexão.

(127) Os focos³⁷ regulares da *lemniscata elíptica* determinam-se imediatamente pelas fórmulas do ponto (110)³⁸ do *Tratado das Curvas* (edição em Castelhana), substituindo R e c pelos valores

$$R = \frac{b^2}{2\sqrt{b^2 - a^2}} \quad \text{e} \quad c = \frac{a^2}{2\sqrt{b^2 - a^2}}$$

que resultam das igualdades anteriormente estabelecidas

$$R = l + c, \quad l = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - a^2} \quad \text{e} \quad c = \frac{a^2}{4l}.$$

Donde se conclui que a curva possui quatro *focos regulares*, determinados pelas intersecções das rectas

$$\pm\sqrt{b^2 - a^2}(y + ix) + ab = 0 \quad \text{e} \quad \pm\sqrt{b^2 - a^2}(y - ix) + ab = 0.$$

Dois dos focos são imaginários, e dois são reais, definidos pelas coordenadas

$$x = 0 \quad \text{e} \quad y = \pm \frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2}}.$$

Tem, além disso, dois outros *focos singulares* reais, cujas coordenadas são³⁹

³⁷ Teixeira define no início desta sua obra focos de uma curva como sendo os pontos nos quais se podem traçar duas tangentes à curva, cujos coeficientes angulares sejam $+i$ e $-i$. Quando uma das tangentes ou as duas intersecta(m) a curva no infinito chama-se ao foco correspondente singular, sendo regular no caso da distância dos focos aos pontos de contacto da tangente com a curva ser finita.

³⁸ (110) Se $l = R - c$, as equações das rectas secantes à curva em dois pontos coincidentes, e que tenham por coeficientes angulares i ou $-i$, reduzem-se a:

$$y = ix, \quad y = ix \pm 2\sqrt{Rc} \quad \text{ou}$$

$$y = -ix, \quad y = -ix \pm 2\sqrt{Rc},$$

As rectas $y = ix$ e $y = -ix$ passam pelo ponto duplo, por isso têm dois pontos comuns com a curva, sem ser a esta tangente, e portanto tais rectas não determinam nenhum foco. Por outro lado, as outras rectas cortam a curva em quatro pontos distintos e determinam quatro focos regulares, dos quais dois são reais, definidos pelas coordenadas

$$[x = 0, y = \pm 2\sqrt{Rc}].$$

Do mesmo modo se conclui que, sendo $l = R + c$, a curva possui também quatro focos e, entre eles, dois reais cujas coordenadas são

$$[x = \pm 2\sqrt{Rc}, y = 0].$$

³⁹ Em (109) mostra que, dos quatro focos singulares que as espíricas possuem, dois são reais e tais que $(x = \pm l, y = 0)$ e os outros dois imaginários da forma $(x = 0, y = \pm il)$.

$$x = \pm \frac{1}{2} \sqrt{b^2 - a^2} \text{ e } y = 0,$$

coincidindo com os pontos F e F' da Fig. 3.3.

(128) A lemniscata elíptica é a podaria da elipse,

$$a^2 x^2 + b^2 y^2 = a^2 b^2,$$

relativamente ao centro [25].

Com efeito, representando por X e Y as coordenadas de um ponto qualquer do plano as equações da tangente à elipse no ponto (x,y) da curva e da perpendicular a esta tangente que contém o centro são

$$b^2 yY + a^2 xX = a^2 b^2 \text{ e } a^2 xY = b^2 yX,$$

às quais satisfazem os valores de x e y respectivamente

$$x = \frac{b^2 X}{X^2 + Y^2} \text{ e } y = \frac{a^2 Y}{X^2 + Y^2},$$

que, substituídos na equação da elipse, a transformam na equação da *lemniscata elíptica*

$$b^2 X^2 + a^2 Y^2 = (X^2 + Y^2)^2.$$

(129) Entre a elipse e a *lemniscata elíptica* existe uma outra relação, não menos notável que a anterior, e que passamos a demonstrar.

Aplicando à equação da elipse

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$$

a inversão definida pelas expressões

$$x = \frac{abX}{X^2 + Y^2} \text{ e } y = \frac{abY}{X^2 + Y^2},$$

encontra-se precisamente a equação da *lemniscata elíptica*.

Os focos reais regulares da *lemniscata elíptica* correspondem, nesta transformação, aos focos da elipse, da qual a *lemniscata* é inversa. Tendo em conta ((29)), se r_0 , r_1 e r_2 representarem as distâncias de um ponto qualquer da *lemniscata* respectivamente ao seu centro e aos seus focos reais regulares, tem-se

$$\sqrt{b^2 - a^2} (r_1 + r_2) = 2br_0.$$

(130) ((194))⁴⁰ Gomes Teixeira acrescenta neste ponto a dedução da equação desta curva em coordenadas tangenciais.

Relembremos que a equação da tangente a esta *lemniscata* é

$$y[2(x^2 + y^2) - a^2](Y - y) = x[b^2 - 2(x^2 + y^2)](X - x)$$

e pode ser escrita da seguinte maneira

$$uY + vX + 1 = 0,$$

onde

$$u = \frac{[a^2 - 2(x^2 + y^2)]y}{(x^2 + y^2)^2}, v = \frac{[b^2 - 2(x^2 + y^2)]x}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Escrevendo $x^2 + y^2 = r^2$, a equação anterior juntamente com a equação da curva permitem concluir que

$$x^2 = \frac{r^2(r^2 - a^2)}{b^2 - a^2}, y^2 = \frac{r^2(b^2 - r^2)}{b^2 - a^2},$$

logo as expressões de u^2 e de v^2 podem ser reduzidas à forma

$$u^2 = \frac{(2r^2 - a^2)^2(b^2 - r^2)}{(b^2 - a^2)r^6}, v^2 = \frac{(b^2 - 2r^2)^2(r^2 - a^2)}{(b^2 - a^2)r^6},$$

donde resulta

$$(a^2v^2 + b^2u^2 + 4)r^4 = 4(a^2 + b^2)r^2 - 3a^2b^2, \\ (u^2 + v^2)r^6 = (a^2 + b^2)r^2 - a^2b^2.$$

Eliminando r nestas equações, obtemos a equação em coordenadas tangenciais da *lemniscata elíptica* ([5]):

$$a^2b^2(a^2v^2 + b^2u^2 + 4)^3 - (a^2 + b^2)^2(a^2v^2 + b^2u^2 + 4)^2 - \\ - 18a^2b^2(u^2 + v^2)(a^2v^2 + b^2u^2 + 4) + 16(a^2 + b^2)(u^2 + v^2) + \\ + 27a^4b^4(u^2 + v^2)^2 = 0. \quad 41$$

(131) É possível, por meio da equação anterior, encontrar os focos da curva considerada.

Notemos, para isso, que a recta representada pela equação

⁴⁰ Neste ponto as duas edições (130) e ((194)) diferem ligeiramente apresentando contudo coincidências a nível do conteúdo. Aqui descrevemos a edição francesa.

⁴¹ Julgamos haver aqui um engano, pois feitas as contas deu-nos

$$a^2b^2(a^2v^2 + b^2u^2 + 4)^3 - (a^2 + b^2)^2(a^2v^2 + b^2u^2 + 4)^2 - \\ - 18a^2b^2(a^2 + b^2)(u^2 + v^2)(a^2v^2 + b^2u^2 + 4) + 16(a^2 + b^2)^3(u^2 + v^2) + \\ + 27a^4b^4(u^2 + v^2)^2 = 0.$$

$$uY + vX + 1 = 0$$

é tangente a esta curva e tem por coeficiente angular $\pm i$, quando u e v satisfazem à equação tangencial da curva e à condição $v = \pm iu$. Substituindo nesta equação v por $\pm iu$, e separando os termos reais dos imaginários, obtém-se

$$(b^2 - a^2)u^2 + 4 = 0 \quad \text{e} \quad a^2b^2(4 - a^2u^2 + b^2u^2) - (a^2 + b^2)^2 = 0.$$

Aos valores de u dados pela primeira destas equações e aos valores de v deduzidos da relação $v = \pm iu$ correspondem as rectas representadas pelas equações

$$2Y \pm i(2X \pm \sqrt{b^2 - a^2}) = 0,$$

que coincidem com as assíntotas da curva e determinam pelas suas intersecções os *focos singulares* da mesma.

Aos valores de u e v dados pela segunda equação e por $v = \pm iu$ correspondem as rectas representadas pelas equações

$$\pm \sqrt{b^2 - a^2}(Y \pm iX) + ab = 0,$$

que determinam pelas suas intersecções os *focos regulares* da *lemniscata*.

(132) Para rectificar a *lemniscata elíptica*, Gomes Teixeira considera a fórmula

$$\frac{ds^2}{d\theta^2} = \frac{a^4 \sin^2(\theta) + b^4 \cos^2(\theta)}{a^2 \sin^2(\theta) + b^2 \cos^2(\theta)}.$$

Tomando $\theta = \frac{\pi}{2} - \omega$,

$$\frac{ds^2}{d\omega^2} = \frac{a^4 \cos^2(\omega) + b^4 \sin^2(\omega)}{a^2 \cos^2(\omega) + b^2 \sin^2(\omega)}.$$

Fazendo agora

$$\operatorname{tg}(\omega) = \frac{a^2}{b^2} \operatorname{tg}(\lambda),$$

e de seguida

$$d\omega = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{b^4 d\lambda}{a^4 \sin^2(\lambda) + b^4 \cos^2(\lambda)},$$

obtém-se a equação

$$ds = \frac{a^3}{b^2} \cdot \frac{d\lambda}{\left[1 - \frac{b^4 - a^4}{b^4} \sin^2(\lambda)\right] \sqrt{1 - \frac{b^2 - a^2}{b^2} \sin^2(\lambda)}},$$

a qual mostra que o valor procurado para o comprimento de arco desta *lemniscata* depende de um integral elíptico de *terceira espécie* ([5]).⁴²

(133) A área limitada pela *lemniscata elíptica* obtém-se por meio da fórmula

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a^2 \sin^2(\theta) + b^2 \cos^2(\theta)) d\theta = \frac{a^2 + b^2}{2} \pi ,$$

sendo igual a metade da soma das áreas de dois círculos de raios respectivamente iguais aos semi-eixos da curva.

3.1.2. Lemniscata hiperbólica

(134) Neste ponto Gomes Teixeira considera a *lemniscata hiperbólica*, curva cuja equação é

$$(x^2 + y^2)^2 = b^2 x^2 - a^2 y^2 .$$

Comparando esta equação com a da *lemniscata elíptica*, concluímos que as fórmulas referentes à *lemniscata hiperbólica* podem ser deduzidas das aplicáveis à *lemniscata elíptica*, substituindo a^2 por $-a^2$.

A *lemniscata hiperbólica* tem a forma indicada na Fig. 3.5,

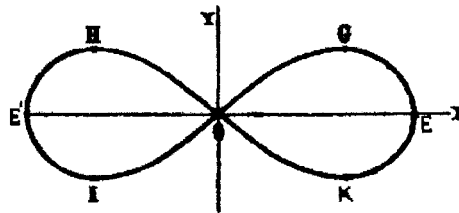


Fig. 3.5

apresentando-se simétrica relativamente aos eixos coordenados. Esta curva intersecta o eixo das abcissas em dois pontos E e E' cujas coordenadas são $(\pm b, 0)$; as rectas que passam na origem intersectam a curva neste ponto, que é duplo, e em dois outros pontos reais, equidistantes de O; a *lemniscata* tem duas inflexões em O e as tangentes formam com o eixo

das abcissas dois ângulos ω e $-\omega$ determinados pela equação $\operatorname{tg}(\omega) = \pm \frac{b}{a}$.

Através da igualdade

⁴² Ver anexo 3.2.

$$y[2(x^2 + y^2) + a^2]y' = x[b^2 - 2(x^2 + y^2)] ,$$

conclui-se que as tangentes são paralelas ao eixo das ordenadas nos pontos E e E' e que são paralelas ao eixo das abscissas nos pontos G, H, I e K onde a curva é cortada pela circunferência correspondente à equação

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{2}b^2 .$$

As coordenadas destes pontos são dadas pelas equações

$$x^2 = \frac{b^2(b^2 + 2a^2)}{4(a^2 + b^2)} , \quad y^2 = \frac{b^4}{4(a^2 + b^2)} .$$

A expressão do raio de curvatura em coordenadas polares é

$$R = \frac{[(b^2 - a^2)\rho^2 + a^2b^2]^{\frac{3}{2}}}{[2(b^2 - a^2)\rho^2 + 3a^2b^2]\rho}$$

e, tendo em conta a equação polar da curva, concluímos que a *lemniscata hiperbólica* tem dois pontos de inflexão reais em O e quatro pontos de inflexão imaginários que tendem para o infinito quando b tende para a .

Além do ponto duplo na origem do referencial, a *lemniscata hiperbólica*, tal como a *lemniscata elíptica*, tem dois *pontos duplos no infinito*. As expressões das suas coordenadas x e y em função racional de z podem ser obtidas pelas fórmulas de (125) substituindo a^2 por $-a^2$; mas as fórmulas que se obtêm deste modo contêm coeficientes imaginários, e por isso Gomes Teixeira opta por empregar outras expressões que se obtêm substituindo $y = tx$ na equação da curva e de seguida $\sqrt{b^2 - a^2t^2} = (b + at)z$, resultando

$$x = \frac{2ba^2z(1 + z^2)}{(a^2 + b^2)z^4 + 2(a^2 - b^2)z^2 + a^2 + b^2} ,$$

$$y = \frac{2b^2az(1 - z^2)}{(a^2 + b^2)z^4 + 2(a^2 - b^2)z^2 + a^2 + b^2} .$$

(135) Para rectificar a *lemniscata hiperbólica*, o ponto de partida é a equação polar desta curva

$$\rho^2 = b^2 \cos^2(\theta) - a^2 \sin^2(\theta) ,$$

donde se deduz

$$\frac{ds^2}{d\theta^2} = \frac{a^4 \sin^2(\theta) + b^4 \cos^2(\theta)}{b^2 \cos^2(\theta) - a^2 \sin^2(\theta)} ,$$

substituindo agora θ por uma variável ω relacionada com θ pela relação ([5]):

$$\text{sen}^2(\theta) = \frac{b^4 \text{sen}^2(\omega)}{a^2 b^2 + b^4 \text{sen}^2(\omega) + a^4 \cos^2(\omega)}$$

conclui-se que

$$\frac{ds}{d\theta} = \frac{b}{\cos(\omega)}, \quad \frac{d\theta}{d\omega} = \frac{b^2 a (a^2 + b^2) \cos(\omega)}{(a^2 b^2 + b^4 \text{sen}^2(\omega) + a^4 \cos^2(\omega)) \sqrt{b^2 + a^2 \cos^2(\omega)}},$$

e, de seguida,

$$ds = \frac{b^3}{a \sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \frac{d\omega}{\left[1 + \frac{b^2 - a^2}{a^2} \text{sen}^2(\omega) \right] \sqrt{1 - \frac{a^2}{a^2 + b^2} \text{sen}^2(\omega)}}.$$

A rectificação dos arcos de lemniscatas hiperbólicas dependem de um integral elíptico de terceira espécie, quando $b \neq a$, e de um integral elíptico de primeira espécie, quando $a = b$ ([5])⁴³.

(136) A área limitada por metade da curva na Fig. 3.5 correspondente a OKEGO é dada pela fórmula

$$A = \frac{1}{2} \int_{-\theta_1}^{\theta_1} (b^2 \cos^2(\theta) - a^2 \text{sen}^2(\theta)) d\theta = \frac{b^2 - a^2}{2} \theta_1 + \frac{a^2 + b^2}{4} \text{sen}(2\theta),$$

onde $\theta_1 = \text{arctg}\left(\frac{b}{a}\right)$. Assim

$$A = \frac{b^2 - a^2}{2} \text{arctg}\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{1}{2} ab.$$

(137) A *lemniscata hiperbólica* é a *podaria* central e a curva *inversa* da hipérbole representada pela equação

$$b^2 y^2 - a^2 x^2 = -a^2 b^2,$$

com relação ao centro; as assíntotas desta hipérbole formam um ângulo igual ao definido pelas tangentes à *lemniscata* no seu centro.

(138) Substituindo a^2 por $-a^2$ nas equações encontradas em (127) e (130), obtêm-se as coordenadas dos focos da *lemniscata hiperbólica* e a equação tangencial desta curva. Temos então que as coordenadas dos *seus focos regulares* são

⁴³ Ver anexo 3.2.

$$x = \pm \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad y = 0^{44}$$

e que as coordenadas dos seus *focos singulares* são

$$x = \pm \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2}, \quad y = 0,$$

coincidindo estes últimos pontos com os pontos F e F' da Fig. 3.3.

As distâncias r_0 , r_1 e r_2 de um ponto qualquer da curva respectivamente ao seu centro e aos seus focos regulares reais satisfazem à condição

$$\sqrt{a^2 + b^2} (r_1 + r_2) = 2br_0.$$

As *lemniscatas elíptica e hiperbólica* podem ser construídas pelo método abaixo descrito e que se encontra apenas na versão francesa ((204)), estando na versão castelhana (149) um método que permite obter apenas a *lemniscata de Bernoulli* (talvez primeiramente conhecido de Gomes Teixeira) e que veremos mais adiante neste capítulo.

Considere-se um círculo de centro C e raio igual a $\frac{1}{2}b$ e um ponto O, situado no mesmo plano do círculo, cuja distância a C seja igual a um dos valores $\frac{1}{2}\sqrt{b^2 \pm a^2}$. Considere-se, em seguida, sobre cada uma das rectas [OP] que passam por O e um ponto qualquer P, dois segmentos [OM] e [OM'] iguais à corda compreendida entre os pontos P e Q, pontos onde esta recta corta o círculo. O lugar geométrico dos pontos M e M' que se obtém desta maneira é uma *lemniscata hiperbólica* se a distância de O a C é $\frac{1}{2}\sqrt{b^2 + a^2}$, e uma *lemniscata elíptica* se a distância é $\frac{1}{2}\sqrt{b^2 - a^2}$.

Com efeito, se considerarmos como origem das coordenadas o ponto O e por eixo a recta que passa por O e pelo centro C do círculo, a equação polar do círculo é

$$\rho_1^2 - \sqrt{b^2 \pm a^2} \rho_1 \cos \theta \pm \frac{1}{4}a^2 = 0.$$

Assim, esta equação fornece para $\overline{OP}$ e $\overline{OQ}$ os valores:

$$\overline{OP} = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 \pm a^2} \cos \theta + \frac{1}{2}\sqrt{(b^2 \pm a^2) \cos^2 \theta \mp a^2},$$

⁴⁴ Em (127) tem-se $x = 0$, $y = \pm \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

$$\overline{OQ} = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 \pm a^2} \cos \theta - \frac{1}{2}\sqrt{(b^2 \pm a^2)\cos^2 \theta \pm a^2}^{45},$$

donde resulta

$$\overline{OM}^2 = (\overline{OP} - \overline{OQ})^2 = b^2 \cos^2 \theta \mp a^2 \sin^2 \theta.$$

Convém referir que o ponto O está no interior do círculo, no caso da *lemniscata elíptica*, e no exterior, no caso da *lemniscata hiperbólica*, e que esta forma de construir tais curvas leva a considerar as *lemniscatas* como cissoides de dois círculos coincidentes.

3.2 A lemniscata de Bernoulli

No ponto que se segue Gomes Teixeira refere que entre as *lemniscatas hiperbólicas* existe uma que recebeu nome especial: a correspondente ao caso $a = b$, denominada *lemniscata de Bernoulli* por ter sido pela primeira vez tratada por um dos geómetras com este nome, Jacob Bernoulli, ao resolver um problema de Leibniz: *determinar a curva descrita por um ponto grave que se aproxima uniformemente de um ponto fixo dado* ([3], [4]).

As principais propriedades desta curva foram depois descobertas por Fagnano em 1750 ([10]), por métodos geométricos; e em seguida por Euler, por método analítico ([9]).

(140) A equação da *lemniscata de Bernoulli* em coordenadas cartesianas indicada por Gomes Teixeira é

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$$

e, em coordenadas polares,

$$\rho^2 = a^2 \cos(2\theta),$$

sendo muito semelhantes às apresentadas por Gino Loria.

É possível por meio das equações da secção anterior deduzir, fazendo a substituição $b = a$, as seguintes propriedades da *lemniscata de Bernoulli*.

A curva tem, como todas as *lemniscatas hiperbólicas*, a forma assinalada na Fig. 3.6, na qual $\overline{OE} = a$.

⁴⁵ Julgamos que seja $\overline{OQ} = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 \pm a^2} \cos \theta - \frac{1}{2}\sqrt{(b^2 \pm a^2)\cos^2 \theta \mp a^2}$.

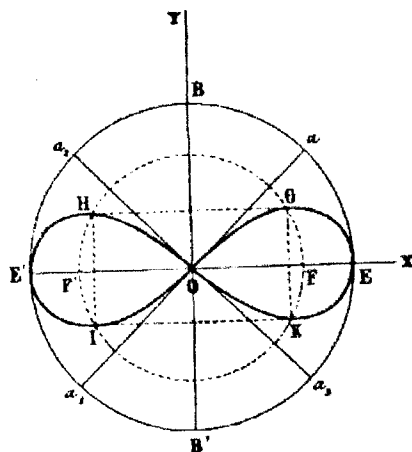


Fig. 3.6

A *lemniscata de Bernoulli* tem um ponto duplo e duas inflexões em O, e os ângulos formados pelas tangentes neste ponto com o eixo das abscissas são iguais a $\frac{\pi}{4}$ e $-\frac{\pi}{4}$; tem ainda dois pontos duplos no infinito e, em cada um, duas inflexões. Tais observações são também feitas por Gino Loria.

Substituindo

$$f = 0 \text{ e } a^2 = 2e^2$$

na igualdade

$$\rho^2 \rho_1^2 = e^4 \pm f^2 r^2 \quad ((1) \text{ de } (122)),$$

obtemos a equação

$$\rho \rho_1 = \frac{1}{2} a^2,$$

donde resulta que existem no plano da *lemniscata* considerada dois pontos F e F' (Fig. 3.6) tais que o produto das distâncias dum ponto qualquer da curva a estes dois pontos é constante, e que, por conseguinte, esta é, como já vimos no primeiro capítulo, uma *curva de Cassini*. Os pontos F e F' são, simultaneamente, os *focos regulares* e os *focos singulares* da curva, e as suas coordenadas são $\left(\pm \frac{1}{2} a\sqrt{2}, 0\right)$.

Os pontos G, H, I e K, onde o valor absoluto de y é máximo estão situados num círculo de centro em O e raio $\frac{1}{2} a\sqrt{2}$; assim, os pontos onde o valor absoluto das ordenadas é máximo e os focos da curva estão situados sobre a circunferência de um mesmo círculo. As coordenadas dos pontos G, H, I e K são

$$\left(\pm \frac{1}{4} a\sqrt{6}, \pm \frac{1}{4} a\sqrt{2}\right).$$

A *lemniscata de Bernoulli* é a *podaria* da hipérbole equilátera representada pela equação

$$x^2 - y^2 = a^2,$$

em relação ao seu centro; ela é também a curva *inversa* desta hipérbole em relação ao mesmo centro, tal como também indica Loria.

(141) É possível ver, por meio da equação polar da curva, que o ângulo V formado pela tangente a um ponto dado com o vector posição deste ponto é determinado pela fórmula

$$\operatorname{tg}(V) = -\frac{\rho d\theta}{d\rho} = \cot g(2\theta),$$

e, por conseguinte,

$$V = \frac{\pi}{2} - 2\theta.$$

⁴⁶Esta relação permite construir por um procedimento simples as tangentes à curva considerada.

Pode-se ainda obter por meio desta igualdade a equação da podaria da *lemniscata de Bernoulli* em relação ao seu centro. Com efeito, representando por (ρ', θ') as coordenadas do ponto desta podaria que corresponde ao ponto (ρ, θ) da *lemniscata*, encontramos

$$\theta' = \theta + \frac{\pi}{2} - V = 3\theta, \quad \rho' = \rho \operatorname{sen}(V) = a \cos^{\frac{3}{2}}(2\theta)$$

e, de seguida,

$$\rho' = a \cos^{\frac{3}{2}}\left(\frac{2}{3}\theta'\right);$$

a podaria da *lemniscata de Bernoulli* pertence portanto a uma classe de curvas chamadas *espirais sinusoidais*.

(142) O raio de curvatura da *lemniscata de Bernoulli* tem por expressão

$$R = \frac{a^2}{3\rho},$$

donde se deduz, tendo em conta a relação $\operatorname{sen}(V) = \cos(2\theta) = \frac{\rho^2}{a^2}$,

$$\rho = 3R \operatorname{sen}(V).$$

Portanto,

⁴⁶ Presente na versão francesa (de 1908).

o raio vector de um ponto qualquer da curva é igual a três vezes a projecção sobre este vector do segmento de recta compreendido entre o ponto e o centro de curvatura correspondente ao mesmo ponto.

Resulta do enunciado uma maneira de determinar os centros de curvatura da *lemniscata* considerada.

(143) A *lemniscata de Bernoulli* é uma curva unicursal pois as suas coordenadas x e y podem ser expressas em função racional de uma variável independente z pelas relações

$$x = a \frac{z^3 + z}{z^4 + 1}, \quad y = a \frac{z - z^3}{z^4 + 1} \quad 47.$$

Estas relações foram empregues por Em. Weyr no estudo desta curva num trabalho intitulado *Die Lemniscate in rationaler Behandlung* ([27]), e permitem deduzir algumas propriedades desta quártica.

Substituindo os valores de x e y na equação

$$(Y - y)dx = (X - x)dy,$$

obtemos a equação das tangentes à quártica considerada:

$$(1 - z^2)(z^4 + 4z^2 + 1)Y - (1 + z^2)(z^4 - 4z^2 + 1)X = 4az^3.$$

Assim, se determinarmos as tangentes à *lemniscata* por um ponto (α, β) , os valores que z toma nos pontos de contacto são determinados pela equação

$$(1) \quad (\beta + \alpha)z^6 + 3(\beta - \alpha)z^4 + 4az^3 - 3(\beta + \alpha)z^2 - (\beta - \alpha) = 0,$$

que tem seis raízes, às quais correspondem as seis tangentes, reais ou imaginárias, distintas ou coincidentes, que passam pelo ponto dado.

Vejamos qual é a condição que deve ser verificada para que quatro destes pontos de contacto estejam situados sobre uma mesma recta.

A recta representada pela equação

$$ux + vy + 1 = 0$$

corta a curva em quatro pontos, correspondentes aos valores de z dados pela equação

$$(2) \quad z^4 + a(u - v)z^3 + a(u + v)z + 1 = 0.$$

Assim, os quatro pontos de contacto considerados estão situados sobre uma mesma recta se as raízes desta equação satisfazem a (1), ou, por consequência, se o resto da divisão do

⁴⁷ Basta, na equação da curva, pôr $y = tx$ e depois $\sqrt{1 - t^2} = (1 + t)z$.

primeiro membro de (1) pelo primeiro membro de (2) é identicamente nulo. Ora este resto tem por expressão

$$\left\{ \left[\frac{4a}{\beta + \alpha} - a(u + v) - 3 \frac{\beta - \alpha}{\beta + \alpha} a(u - v) - a^3(u - v)^3 \right] z^3 + \left[a^2(u^2 - v^2) - 4 \right] z^2 + \left[a(u - v) - 3 \frac{\beta - \alpha}{\beta + \alpha} a(u + v) - a^3(u - v)^2(u + v) \right] z + \left[4 \frac{\beta - \alpha}{\beta + \alpha} + a^2(u - v)^2 \right] \right\} (\beta + \alpha)$$

sendo portanto as condições procuradas

$$\frac{4}{\beta + \alpha} - (u + v) - 3 \frac{\beta - \alpha}{\beta + \alpha} (u - v) - a^2(u - v)^3 = 0,$$

$$a^2(u^2 - v^2) - 4 = 0,$$

$$u - v - 3 \frac{\beta - \alpha}{\beta + \alpha} (u + v) - a^2(u - v)^2(u + v) = 0,$$

$$4 \frac{\beta - \alpha}{\beta + \alpha} + a^2(u - v)^2 = 0,$$

ou, eliminando $(u - v)^2$ da primeira e da terceira igualdades por meio da última,

$$\frac{4}{\beta + \alpha} - (u + v) + \frac{\beta - \alpha}{\beta + \alpha} (u - v) = 0^{48}, \quad a^2(u^2 - v^2) = 4,$$

$$u - v + \frac{\beta - \alpha}{\beta + \alpha} (u + v) = 0, \quad 4 \frac{\beta - \alpha}{\beta + \alpha} + a^2(u - v)^2 = 0.$$

Da primeira e terceira destas equações obtém-se

$$(3) \quad u + v = \frac{2(\beta + \alpha)}{\beta^2 + \alpha^2}, \quad u - v = -\frac{2(\beta - \alpha)}{\beta^2 + \alpha^2},$$

e, substituindo os valores de $u - v$ e de $u + v$ na terceira e quarta, verifica-se que estas duas equações não são distintas, deduzindo a equação:

$$(\beta^2 + \alpha^2)^2 = a^2(\alpha^2 - \beta^2),$$

donde resulta que o ponto (α, β) deve pertencer à *lemniscata* considerada.

Assim,

o ponto para o qual as quatro tangentes à lemniscata de Bernoulli têm como pontos de contacto com a curva pontos colineares, pertence à própria lemniscata.

⁴⁸ Gomes Teixeira indica $\frac{4}{\beta + \alpha} - (u + v) + \frac{\beta - \alpha}{\beta + \alpha} (u^2 - v) = 0$ na versão francesa, mas a castelhana está correcta.

Este teorema foi enunciado por Em. Weyr num trabalho mencionado mais tarde por M. Schoute e do qual uma demonstração geométrica se encontra nos *Verslagen de l'Académie de Sciences d'Amsterdam*.

A equação

$$a^2(u^2 - v^2) = 4,$$

que resulta das igualdades (3), representa em coordenadas tangenciais, uma curva da qual se obtém a equação cartesiana eliminando u, v e $\frac{dv}{du}$ entre esta equação e as duas seguintes:

$$ux + vy + 1 = 0$$

$$x + y \frac{dv}{du} = 0, \quad u - v \frac{dv}{du} = 0,$$

donde resulta

$$x^2 - y^2 = \frac{1}{4}a^2.$$

Temos portanto o seguinte teorema, atribuído também a E. Weyr ([27]):

A envolvente da recta que passa pelos quatro pontos de contacto das tangentes à lemniscata de Bernoulli com respeito a um ponto variável da curva, é uma hipérbole equilátera.

A versão francesa desta obra acrescenta que a equação da recta que passa pelos pontos de contacto das tangentes consideradas é

$$2\alpha x + 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2 = 0.$$

Gomes Teixeira afirma também, embora julguemos erradamente, que esta recta passa também pelos pontos de intersecção das paralelas às assíntotas traçadas pelo nó real e pelo ponto $(-\alpha, -\beta)$.

(144) As condições para que os pontos de contacto das tangentes pelo ponto (α, β) à *lemniscata* estejam situados sobre uma cónica podem ser determinadas por um método análogo ao que foi empregue na questão anterior. Supondo que a equação da cónica é

$$ux^2 + vy^2 + wxy + hx + ky + 1 = 0,$$

os valores que z toma nos pontos onde esta cónica corta a *lemniscata* satisfazem a equação

$$z^8 + Az^7 + Bz^6 + Cz^5 + Dz^4 + Az^3 + Ez^2 + Cz + 1 = 0,$$

onde

$$A = a(h - k), \quad B = (u + v - w)a^2, \quad C = (h + k)a, \\ D = 2(a^2u - a^2v + 1), \quad E = a(u + v + w).^{49}$$

Obtém-se deste modo as condições para que os pontos de contacto das tangentes à *lemniscata* por um ponto arbitrário (α, β) estejam situados numa dada cónica. Assim considera-se o resto da divisão do primeiro membro da última equação pelo primeiro membro da equação (1) como sendo identicamente nulo; essas condições são portanto as seguintes:

$$C - L - 3AK = 0, \quad D + 3 - AL - 3K(B - 3K) = 0, \\ 4A - L(B - 3K) = 0, \quad E + K + 3(B - 3K) = 0, \quad C + AK = 0, \quad 1 + (B - 3K)K = 0$$

onde

$$K = \frac{\beta - \alpha}{\beta + \alpha}, \quad L = \frac{4a}{\beta + \alpha}.$$

Eliminando C na primeira destas equações através da quinta, e $B - 3K$ da terceira por meio da última, obtemos o mesmo resultado; consequentemente, uma destas equações não é distinta das outras.

A primeira e a quinta das equações determinam os valores de C e de A ; em seguida, as relações $A = a(h - k)$ e $C = (h + k)a$ determinam h e k . As segunda, quarta e sexta equações fornecem os valores B , D e E , e as relações que ligam estas quantidades a u , v e w referidas acima, determinam os valores destes três coeficientes da equação da cónica.

De tudo o que foi referido, conclui-se o seguinte teorema atribuído a M. Schoute, que o apresentou num trabalho intitulado “*Notiz über die Lemniscate*”, incluído nos *Sitzungsber. der K. Akad. der Wissenschaften von Wien*, 1883, p. 1252:

Os seis pontos de contacto das tangentes à lemniscata de Bernoulli por um ponto exterior à curva estão situados numa cónica determinável.

(145) Fazendo $a = b$ na equação tangencial⁵⁰ da *lemniscata hiperbólica*, obtemos a equação tangencial da *lemniscata de Bernoulli*:

$$27a^4(u^2 + v^2)^2 = [4 + a^2(u^2 - v^2)]^3.^{51}$$

⁴⁹ Feitos os cálculos obtemos $E = a^2(u + v + w)$.

⁵⁰ Julgamos haver aqui um engano uma vez que Gomes Teixeira não refere a equação tangencial em nenhuma das versões.

⁵¹ Esta expressão é obtida substituindo a^2 por $-a^2$ e b por a na expressão da nota 14 de (130)

(146) Analogamente se conclui⁵², que a área limitada por um ramo da *lemniscata de Bernoulli* é igual a $\frac{1}{2}a^2$. A expressão fornecida por Gino Loria (cap4 p. 119) é

$4\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} 2a^2 \cos(2\varphi)d\varphi = [2a^2 \sin(2\varphi)]_0^{\pi/4} = 2a^2$. O comprimento dos arcos da mesma curva é determinado pela fórmula

$$s = a \int_0^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos(2\theta)}} = \frac{1}{2}a\sqrt{2} \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2(\varphi)}},$$

onde φ representa uma quantidade determinada pela relação

$$\sin^2(\theta) = \frac{1}{2}\sin^2(\varphi).$$

O comprimento dos arcos da lemniscata de Bernoulli depende portanto de um integral elíptico de primeira espécie ([11])

⁵³Aplicando os teoremas da teoria dos integrais elípticos à expressão dos arcos da *lemniscata de Bernoulli*, encontramos algumas propriedades importantes destes arcos, das quais Gomes Teixeira indica sucintamente algumas.

O teorema da adição⁵⁴ dos integrais elípticos de primeira espécie⁵⁵ permite concluir que se s_1 , s_2 e s_3 representam os comprimentos de três arcos da curva compreendidos entre o vértice E e os pontos do arco [EGO] (Fig.3.6) onde a amplitude φ toma os valores φ_1 , φ_2 e β , então s_1 , s_2 e s_3 satisfazem à condição

$$s_3 = s_1 \pm s_2,$$

quando

$$\cos(\beta) = \cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2) \mp \sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2)\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2(\beta)}.$$

Portanto é possível determinar algebricamente, por meio desta última fórmula, um arco da *lemniscata de Bernoulli* cujo comprimento seja igual à soma ou à diferença de dois arcos dados da mesma curva.

Supondo, em particular, que $\varphi_1 = \varphi_2$, encontramos

$$s_3 = 2s_1, \quad \cos(\beta) = \cos^2(\varphi_1) - \sin^2(\varphi_1)\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2(\beta)}$$

⁵² Fazer em (136) $a = b$.

⁵³ Na versão francesa está no mesmo ponto ((211)) e na castelhana no ponto (148).

⁵⁴ Ver anexo 3.2.

⁵⁵ Ver anexo 3.2.

e podemos, portanto, determinar algebricamente a amplitude φ_1 de um arco da *lemniscata* de modo que o comprimento seja igual a metade do comprimento de um outro arco dado, cuja amplitude seja portanto igual a β .

Um caso particular interessante deste problema consiste em dividir o quarto [OGE] da curva em duas partes iguais. Fazendo agora $\beta = \frac{\pi}{2}$, a amplitude φ_1 do arco procurado é dada pela fórmula $tg(\varphi_1) = \sqrt[4]{2}$. Representando por θ_1 e ρ_1 as coordenadas polares do ponto que divide em duas partes iguais o arco [OGE] considerado, e tendo em conta a relação $2\text{sen}^2(\theta_1) = \text{sen}^2(\varphi_1)$, obtém-se

$$\text{sen}^2(\theta_1) = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}, \quad \cos^2(\theta_1) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

e, por conseguinte,

$$\rho_1^2 = a^2 \cos(2\theta_1) = (\sqrt{2} - 1)a^2;$$

portanto o valor da abcissa procurada x_1 do ponto (θ_1, ρ_1) é

$$x_1 = \rho_1 \cos(\theta_1) = a\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}}.$$

Este resultado foi obtido pela primeira vez por Fagnano; este eminente géometra também demonstrou que a curva considerada pode ser dividida utilizando régua e compasso, em 2^m , $3 \cdot 2^m$ e $5 \cdot 2^m$ partes iguais, sendo m um número inteiro positivo, conforme referiremos no capítulo 4.

(147) Como já referimos, a *lemniscata de Bernoulli* é a podaria da hipérbole equilátera

$$x^2 - y^2 = a^2$$

relativamente ao centro. Existem outras relações notáveis entre estas duas curvas que Gomes Teixeira afirma serem enunciadas por Charpentier referindo as seguintes:

1ª- Entre as coordenadas da *lemniscata*, X e Y e da hipérbole x e y existem as relações

$$x = \frac{a^2 X}{X^2 + Y^2}, \quad y = -\frac{a^2 Y}{X^2 + Y^2},$$

que se deduzem das encontradas em (128) trocando a^2 por $-a^2$ e fazendo $b = a$. A equação que se deduz é

$$(1) \quad (x^2 + y^2)(X^2 + Y^2) = a^4.$$

Logo o produto das distâncias do centro da *lemniscata* a qualquer ponto da hipérbole e ao ponto correspondente da *lemniscata* é constante.

2ª- Representando por ρ e ρ_1 os raios vectores da *lemniscata* e da hipérbole, tem-se

$$\rho = a\sqrt{\cos(2\theta)} \quad \text{e} \quad \rho_1 = \frac{a}{\sqrt{\cos(2\theta)}};$$

donde se deduz a igualdade

$$(2) \quad \rho\rho_1 = a^2.$$

Logo o produto dos raios vectores da *lemniscata* e da hipérbole, que formam o mesmo ângulo com o eixo polar, é constante.

3ª- Das equações (1) e (2) deduz-se a igualdade

$$\rho_1^2 = X^2 + Y^2.$$

Isto significa que um ponto qualquer da hipérbole e o correspondente ponto da *lemniscata* estão em duas rectas simétricas em relação ao eixo real da hipérbole.

(149)⁵⁶ A *lemniscata de Bernoulli* possui muitas outras propriedades, cuja detalhada exposição seria quase interminável. Entre elas Gomes Teixeira decide mencionar a que serviu de base a um procedimento muito simples para construir a curva.

Considerando um ponto O e um circunferência tal que as suas tangentes traçadas a partir de O formem um ângulo recto. Traçando depois por O uma secante qualquer [OP] à circunferência e tomando sobre esta secante [OM] $\cong$ [OM'], igual à corda [QP] da circunferência que a mesma secante determina. Obtém-se assim dois pontos equidistantes de O que pertencem à *lemniscata* definida pela equação

$$\rho^2 = a^2 \cos(2\theta),$$

na qual a representa o diâmetro da circunferência.

⁵⁶ Como já referimos em (138), este ponto não consta na versão francesa, tendo sido substituído por um processo semelhante que permite obter a *lemniscata elíptica* e a *lemniscata hiperbólica*.

percorrer um ponto sobre um plano, partindo da origem O sem velocidade inicial, para chegar a um outro ponto A no mesmo tempo que gastava a percorrer a corda [OA]. A curva que é solução do problema é uma *lemniscata de Bernoulli* que tem o centro no ponto O, e cujo eixo forma um ângulo de 45° com a vertical, como se pode ver no *Traité de Mécanique* ([7]) de M. Collignon e na *Meccanica razionale* ([18]) de M. Marcolongo. Devemos acrescentar que depois de uma reformulação que se deve a M. Marcolongo, este problema foi considerado pela primeira vez em 1780 na *Racolta ferrarese di opusculi scientifici* por Bonatti, que obteve a equação da trajectória e determinou a sua forma; mais tarde, Malfatti resolveu a mesma questão por meio de métodos da geometria clássica na obra *Della curva cassiniana* (1781), onde demonstrou que a curva procurada pertence à classe das curvas de Cassini; e, por fim, o mesmo problema foi estudado por Saladini em 1806 nas *Mémoires de l'Institut de Bologne*, onde demonstrou a identificação desta cassiniana com a *lemniscata de Bernoulli*.

Uma outra aplicação da *lemniscata*, de natureza diferente da anterior, e que é também mencionada, está relacionada com a Geometria de massas, onde esta curva foi empregue por Haton de La Goupillière, na sua Tese: *Sur une théorie nouvelle de la Géométrie des masses* ([11]), sob o nome de *lemniscata equilátera*.

No último volume, de 1906, das *Obras sobre Matemática* de Gomes Teixeira, mandado publicar pelo Governo Português, encontra-se ainda uma outra propriedade da *lemniscata de Bernoulli* com o título *Sobre uma propriedade da lemniscata de Bernoulli*⁵⁸.

Consideremos a *lemniscata* representada pelas equações (*Traité*, t. I, p. 191)

$$x = a \frac{z^3 + z}{z^4 + 1}, \quad y = a \frac{z - z^3}{z^4 + 1},$$

e o círculo⁵⁹ de equação

$$x^2 + y^2 - 2x_1x - 2y_1y = 0,$$

que passa pelo ponto duplo real da *lemniscata* e tem por centro o ponto (x_1, y_1) . Este círculo intersecta a *lemniscata* nos pontos circulares do infinito, no ponto duplo mencionado e em dois outros pontos M_1 e M_2 . Assim, iremos procurar a linha que o ponto (x_1, y_1) deve

percorrer para que $\left(\frac{ds}{dx_1}\right)^2$ tenha o mesmo valor nos pontos M_1 e M_2 , onde s designa os arcos

da *lemniscata*.

⁵⁸ Reprodução de uma nota que foi inserida nos *Atti della Pontificia Accademia Romana dei Nouvi Lincei* (Roma, t. LXI, 1912).

⁵⁹ Gomes Teixeira trata aqui por círculo o que agora denominamos por circunferência.

Os valores que z toma nos pontos M_1 e M_2 são determinados pela equação

$$(x_1 - y_1)z^2 - az + x_1 + y_1 = 0,$$

que dá

$$z = \frac{a \pm \sqrt{M}}{2(x_1 - y_1)},$$

onde

$$M = a^2 - 4(x_1^2 - y_1^2).$$

Temos portanto

$$\frac{ds}{dx_1} = \pm \frac{(a^2 - 4x_1^2 + 4x_1y_1)y_1' - a^2 - 4y_1^2 + 4x_1y_1 \mp a(1 - y_1')\sqrt{M}}{2(X_1 - Y_1)^2 \sqrt{M}},$$

e também

$$z^4 + 1 = \frac{a^4 - 4a^2(x_1^2 - y_1^2) - 8x_1y_1(x_1^2 + y_1^2) + 8x_1^2y_1^2 + 4(x_1^4 + y_1^4)}{2(x_1 - y_1)^4} \pm \frac{a[a^2 - 2(x_1^2 - y_1^2)]}{2(x_1 - y_1)^4} \sqrt{M}$$

e

$$ds = a\sqrt{2} \frac{dz}{\sqrt{z^4 + 1}}.$$

Portanto

$$\left(\frac{ds}{dx_1}\right)^2 = \left(\frac{ds}{dz}\right)^2 \left(\frac{dz}{dx_1}\right)^2 = \frac{2a^2}{1 + z^4} \left(\frac{dz}{dx_1}\right)^2 = \frac{1}{M} \cdot \frac{P \pm Q\sqrt{M}}{P_1 \pm Q_1\sqrt{M}},$$

onde

$$P = [(a^2 - 4x_1^2 + 4x_1y_1)y_1' - a^2 - 4y_1^2 + 4x_1y_1]^2 + a^2(1 - y_1')^2[a^2 - 4(x_1^2 - y_1^2)],$$

$$Q = -2a(1 - y_1')[(a^2 - 4x_1^2 + 4x_1y_1)y_1' - a^2 - 4y_1^2 + 4x_1y_1],$$

$$P_1 = a^4 - 4a^2(x_1^2 - y_1^2) - 8x_1y_1(x_1^2 + y_1^2) + 8x_1^2y_1^2 + 4(x_1^4 + y_1^4),$$

$$Q_1 = a[a^2 - 2(x_1^2 - y_1^2)].$$

Assim, podemos substituir a expressão de $\left(\frac{ds}{dx_1}\right)^2$ sob a forma

$$\left(\frac{ds}{dx_1}\right)^2 = \frac{1}{M} \cdot \frac{PP_1 - QQ_1 \pm (QP_1 - PQ_1)\sqrt{M}}{P_1^2 - MQ_1^2}.$$

Logo a condição para que $\left(\frac{ds}{dx_1}\right)^2$ tome o mesmo valor para os dois pontos de intersecção

da *lemniscata* com o círculo considerado é $\overline{QP_1} - \overline{PQ_1} = 0$.

Substituindo nesta equação P, Q, P₁, Q₁ pelas expressões correspondentes, obtemos, por meio de um cálculo que não iremos reproduzir aqui, a seguinte equação

$$(y_1 - x_1)^4 \left[x_1 y_1 y_1'^2 + \left(x_1^2 - y_1^2 - \frac{1}{2} a^2 \right) y_1' - x_1 y_1 \right] = 0,$$

donde

$$y_1 = x_1, \quad x_1 y_1 y_1'^2 + \left(x_1^2 - y_1^2 - \frac{1}{2} a^2 \right) y_1' - x_1 y_1 = 0.$$

A recta correspondente à primeira equação não satisfaz a questão. Se o centro do círculo pertence a esta recta, este círculo é tangente à *lemniscata* no ponto duplo real, e um dos pontos M₁ ou M₂ coincide com este, e não se desloca quando o círculo varia.

E a segunda equação coincide com a equação das cónicas cujos focos reais são os pontos $\left(\pm \frac{1}{2} a\sqrt{2}, 0\right)$. Portanto a condição necessária e suficiente para que $\left(\frac{ds}{dx_1}\right)^2$ tome o mesmo valor nos pontos M₁ e M₂, é que o centro do círculo descreva uma cónica cujos focos reais sejam os pontos $\left(\pm \frac{1}{2} a\sqrt{2}, 0\right)$. Assim, designando por s' e s'' os valores que s toma nos pontos M₁ e M₂ temos

$$\frac{ds'}{dx_1} = \pm \frac{ds''}{dx_1}$$

e, consequentemente, se s' e s'' variam no mesmo sentido,

$$s' - s'_1 = s'' - s''_1,$$

e, quando s' e s'' variam em sentidos contrários,

$$s' - s'_1 = s''_1 - s'',$$

onde s'_1 e s''_1 designam os valores de s nas posições iniciais dos pontos M₁ e M₂.

Portanto temos o seguinte teorema:

Se o centro de um círculo que passa pelo ponto duplo real de uma lemniscata de Bernoulli percorre uma cónica cujos focos reais são $\left(\pm \frac{1}{2} a\sqrt{2}, 0\right)$, isto é os focos da lemniscata (l.c., p. 190), então os arcos descritos pelos pontos variáveis M₁ e M₂, onde o círculo corta esta última curva são em cada instante iguais.

Podemos, segundo Gomes Teixeira, ver no *Cours d'Analyse* de M. Humbert ([13]) uma outra demonstração deste teorema, baseada na propriedade de que goza a *lemniscata de Bernoulli* de ser a inversa de uma hipérbole equilátera. A demonstração que acabamos de dar obriga a um cálculo um pouco longo, mas daqui resulta a seguinte proposição: *as cónicas cujos focos são os focos da lemniscata $\left(\pm \frac{1}{2}a\sqrt{2}, 0\right)$ são as únicas curvas que gozam da propriedade enunciada no teorema precedente.*

Ao longo da obra de Gomes Teixeira encontra-se ainda referências à lemniscata de Bernoulli nos estudos das curvas cruciforme e puntiforme, curva de Watt, curva isócrona paracêntrica, espiral sinusoidal e curvas de Serret.

3.3. Lemniscata de Geronio

A *lemniscata* de Geronio surge nesta obra de Gomes Teixeira como caso particular de *parábola virtualis*. Esta classe de curvas é tratada no ponto 282 da versão em francês da sua obra e 645 da 1ª edição em castelhano.

((282)) As curvas de quarta ordem representadas por uma equação da forma

$$x = \sqrt{ax + b} + \sqrt{a_1x + b_1}$$

foram consideradas por Grégoire de St. Vincent, na sua obra *Opus geometricum*, por volta de 1647, de quem receberam o nome de *parábola virtualis* ([26]).

Entre estas curvas está compreendida uma quártica definida pela equação

$$(1) \quad x = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 2(b+c)y} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 2(b-c)y},$$

onde $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ ou

$$(2) \quad (x^2 - by)^2 = a^2(x^2 - y^2).$$

Esta equação foi considerada por Cramer na sua célebre *Introduction à l'Analyse des lignes courbes* ([8]), na qual é mencionada pela designação de *besace*. Teixeira acrescenta ainda que a esta curva se “ligam” outras parábolas virtuais com algum interesse histórico de que adiante falará.

Da primeira destas equações resulta que as cordas desta quártica paralelas ao eixo das abcissas são cortadas em duas partes iguais pelas parábolas ordinárias transformando a segunda equação na forma

$$(3) \quad y = \frac{bx^2}{a^2 + b^2} \pm \frac{ax}{a^2 + b^2} \sqrt{a^2 + b^2 - x^2}$$

vê-se que a parábola de equação

$$y = \frac{bx^2}{a^2 + b^2}$$

passa pelos pontos médios das cordas paralelas ao eixo das ordenadas.

((283)) A *besace* é o anti-hiperbolismo da cónica representada pela equação

$$a^2 X^2 + (a^2 + b^2) Y^2 - 2ab XY = a^4,$$

uma vez que esta se obtém substituindo na equação da primeira curva

$$y = \frac{XY}{a}, \quad x = X.$$

Daqui resulta uma maneira de construir a quártica considerada e suas tangentes, derivando cada um dos seus pontos e cada uma das suas tangentes pelo método exposto no ((114))⁶⁰. Porém, se pretendermos obter simplesmente os pontos da quártica, podemos empregar um procedimento bem mais fácil, dado por Cramer na obra já mencionada.

Consideremos um ponto de coordenadas $\left(\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}b\right)$ e tracemos uma circunferência tendo este ponto como centro e passando pela origem do referencial (Fig.3.8). Tracemos por O uma recta qualquer [OL] e pelo ponto L uma outra [LN], paralela ao eixo das abcissas. Consideremos sobre esta recta um ponto M tal que o segmento [NM] seja igual a [OL]. O lugar geométrico descrito pelo ponto M quando a direcção de [OL] varia é a *besace* representada pela equação (2).

Com efeito, a equação da circunferência considerada é

$$X^2 + Y^2 - aX - bY = 0$$

e, representando por (x, y) as coordenadas do ponto M,

$$\overline{OL}^2 = X^2 + Y^2 = \overline{NM}^2 = x^2, \quad y = Y;$$

ora, eliminando X e Y entre estas equações e a do círculo, obtém-se uma equação coincidente com a equação (2).

⁶⁰ Anexo 3.1.1.

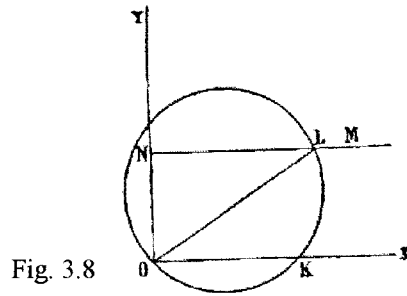


Fig. 3.8

(201) e ((284))⁶¹ A equação (1) revela que o eixo das ordenadas é também eixo de simetria da curva.

Resolvendo a equação em ordem a y resulta

$$y = \frac{bx^2}{a^2 + b^2} \pm \frac{ax}{a^2 + b^2} \sqrt{a^2 + b^2 - x^2},$$

e portanto

$$y' = \frac{2bx}{a^2 + b^2} \pm \frac{a(a^2 + b^2 - 2x^2)}{(a^2 + b^2)\sqrt{a^2 + b^2 - x^2}}.$$

Assim, estabelecem-se as seguintes conclusões:

1º A curva é simétrica em relação ao eixo das ordenadas e tem um nó na origem das coordenadas, onde as tangentes formam com este eixo ângulos ω determinado pela equação

$$\operatorname{tg}(\omega) = \pm \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

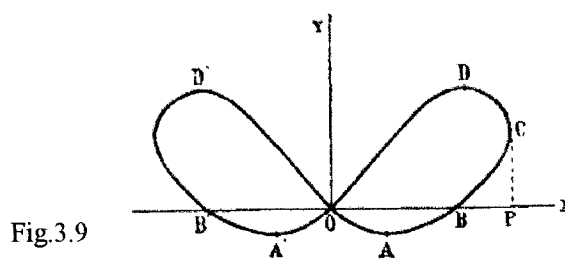


Fig. 3.9

Vemos ainda, por meio do método indicado em ((85))⁶², que a mesma curva tem dois pontos duplos no infinito; fazendo, na equação (2), a substituição $x = \frac{X}{Y}$ e $y = \frac{1}{Y}$ obtém-se

$$(X^2 - bY)^2 = a^2 Y^2 (X^2 - 1),$$

⁶¹ Trata-se de parte de cada uma das obras, uma vez que diferem algo entre elas.

⁶² Anexo 3.1.2.

que representa uma curva com um ponto duplo na origem, onde é intersectada pelo eixo das abcissas em quatro pontos coincidentes. Procurando o primeiro termo do desenvolvimento de Y segundo as potências de X, deduz-se que as parábolas imaginárias definidas pela equação

$$Y = \frac{b \pm ia}{a^2 + b^2} X^2$$

representam aproximadamente esta última curva na vizinhança da origem das coordenadas, e que aos dois pontos coincidentes onde estas parábolas se intersectam correspondem dois pontos duplos coincidentes da última quártica, situados na origem das coordenadas e, por conseguinte, dois pontos duplos coincidentes da *besace*, situados no infinito.

2º As paralelas ao eixo das ordenadas que passam pelos pontos do eixo das abcissas entre a origem e o ponto P, onde $x = \sqrt{a^2 + b^2}$, intersectam a curva em dois pontos reais. Um destes pontos está situado acima e outro abaixo do eixo das abcissas, quando a sua abcissa está compreendida entre 0 e a , e estão situados ambos acima deste eixo quando a sua abcissa varia entre a e $\sqrt{a^2 + b^2}$. No ponto C, onde as coordenadas são $(\sqrt{a^2 + b^2}, 0)$, a paralela ao eixo das ordenadas coincide com a tangente.

3º Existem quatro pontos A, D, A' e D' onde a tangente é paralela ao eixo das abcissas. As coordenadas destes pontos podem ser determinadas pelas equações (2) e

$$2by + a^2 - 2x^2 = 0,$$

donde resulta

$$x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{a^2 + b^2 \pm b\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad y = \frac{b \pm \sqrt{a^2 + b^2}}{2}.$$

4º A determinação dos pontos de inflexão da curva depende da resolução de uma equação de terceiro grau. Derivando em relação a x a expressão de y' obtida anteriormente, vem

$$y'' = \frac{2b}{a^2 + b^2} \mp \frac{ax}{a^2 + b^2} \cdot \frac{3(a^2 + b^2) - 2x^2}{(a^2 + b^2 - x^2)^2},$$

donde se pode concluir que as abcissas dos pontos procurados são determinadas pela equação

$$4b^2(a^2 + b^2 - x^2)^3 = a^2x^2[3(a^2 + b^2) - 2x^2],^{63}$$

que é do 3º grau relativamente a x^2 . Obtém-se seis valores para x , sendo dois a dois simétricos; a cada um destes valores correspondem dois valores de y , determinados pela equação (2): um representa a ordenada do ponto de inflexão e o outro representa a ordenada do segundo ponto da curva que tem a mesma abcissa que este.

⁶³ Encontra-se aqui um “engano” de Gomes Teixeira: deveria ser $4b^2(a^2 + b^2 - x^2)^3 = a^2x^2[3(a^2 + b^2) - 2x^2]^2$.

((285)) A *besace* é uma quártica unicursal. Substituindo na equação (2)

$$x = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1},$$

encontramos

$$y = \frac{b(t^2 - 1)^2 \pm 2at(t^2 - 1)}{(t^2 + 1)^2}.$$

((286)) Para determinar o valor A da área limitada por um dos ramos da *besace*, podemos aplicar a fórmula

$$A = \int_0^c \frac{bx^2 + ax\sqrt{c^2 - x^2}}{c^2} dx - \int_0^c \frac{bx^2 - ax\sqrt{c^2 - x^2}}{c^2} dx,$$

onde $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, donde resulta

$$A = \frac{1}{2} a \sqrt{a^2 + b^2}.^{64}$$

Constata-se que esta área é igual à área do rectângulo cujos lados são iguais às abcissas dos pontos B e C.

((287)) Se na equação (2) se fizer $b = 0$, obtém-se

$$(4) \quad a^2 y^2 = x^2 (a^2 - x^2)$$

que corresponde à uma *parábola virtual* especial chamada por Gabriel Marie ([19]) de *lemniscata de Geron*, por ter sido considerada por este matemático no seu *Cours de Géométrie Analytique*. M. Aubry ([2]) designou a mesma curva pelo nome de *oito*, devido à sua forma, representada na Fig. 3.9, sendo, de acordo com Gomes Teixeira, esta denominação mais justa uma vez que esta quártica foi a primeira das *parábolas virtuais* estudadas por Grégoire de St. Vincent na obra anteriormente citada e está entre as curvas reencontradas por Wallis através do corte por um plano de um conóide especial de nome *conocuneus*⁶⁵.

⁶⁴ Devia ser $A = \frac{2}{3} a \sqrt{a^2 + b^2}$.

⁶⁵ Ver anexo 3.3.

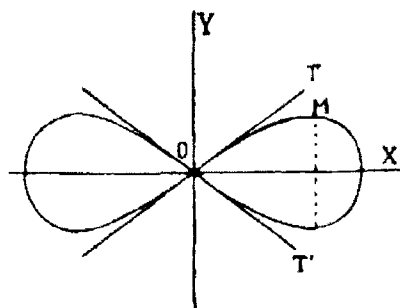


Fig. 3.10

Esta curva pode ser construída por um dos métodos indicados em ((283)). O primeiro destes métodos é de aplicação fácil neste caso particular, em que a cônica da qual a quártica considerada é um anti-hiperbolismo se reduz à circunferência de equação

$$X^2 + Y^2 = a^2.$$

((288)) A curva considerada tem a forma indicada na Fig. 3.10. Esta curva é simétrica em relação aos dois eixos de coordenadas e tem um nó na origem, onde se situam dois pontos de inflexão, formando as tangentes nestes pontos ângulos de 45° com os eixos coordenados; possui ainda quatro outros pontos de inflexão imaginários, correspondentes às abscissas $\pm a\sqrt{\frac{3}{2}}$. As coordenadas dos pontos onde as tangentes são paralelas ao eixo das ordenadas são $(\pm a, 0)$ e as coordenadas dos pontos onde as tangentes são paralelas ao eixo das abscissas são $(\pm \frac{1}{2}a\sqrt{2}, \pm \frac{1}{2}a)$.

((289)) Pode-se ainda associar à curva que temos vindo a tratar a quártica representada pela equação

$$(5) \quad a^2 y^2 = x^2 (e^2 - x^2),$$

da qual a equação (4), isto é, a lemniscata de Geronio, é um caso particular. Segundo Gomes Teixeira esta curva aparece na correspondência de Huygens com Sluse com a designação de *primeira parábola virtual de St. Vincent*, uma vez que a sua teoria é uma generalização imediata da teoria da curva representada pela equação (4), que é a primeira das parábolas virtuais especiais estudadas por St. Vincent na obra já mencionada. Entre as cartas dos dois geómetras que dizem respeito a esta quártica, é de referir uma de Sluse a Huygens de 19 de Outubro de 1657 ([14]), onde é dada a quadratura desta curva, e a resposta de Huygens a esta carta de 2 de Novembro do mesmo ano ([14]) onde este geómetra afirma que a solução do

problema é uma consequência evidente da definição da curva como parábola virtual e que foi explicitamente indicada por Grégoire de St. Vincent na sua obra.

A *parábola virtual* mencionada pode ser facilmente construída, assim como as suas tangentes, uma vez que é o anti-hiperbolismo da circunferência $x^2 + y^2 = e^2$ em relação à recta $x = a$. Devido à sua forma pode-se designá-la pelo nome de *oito*, embora dando a esta palavra um significado mais geral que o atribuído em ((287)).

Na correspondência entre Huygens e Leibniz surge, a propósito do problema que tem por fim determinar a curva cuja sub-tangente⁶⁶ é igual a $2y - \frac{x^2}{2y}$, uma quártica cuja equação é um caso particular da anterior. A equação de tal curva é

$$2a^2 y^2 = x^2(a^2 - x^2).$$

Gomes Teixeira afirma ser possível ver no tomo IX das *Oeuvres de Huygens* as cartas destes dois grandes géometras a respeito desta curva e duma outra de sexta ordem cuja sub-tangente difere da anterior apenas no sinal, e alguns fragmentos deixados por Huygens sobre o mesmo assunto e sobre a curva de equação

$$2a^2 y^2 = x^2(a^2 + x^2),$$

cujas sub-tangente é igual à da quártica anterior.

3.4. As lemniscatas pertencentes às Curvas Cíclicas Esféricas

3.4.1 Curva de Viviani - Uma Curva em Forma de Oito

Outra *lemniscata* referida por Gomes Teixeira no seu *Traité des courbes spéciales remarquables* é a *curva de Viviani*. Esta curva obtém-se através da intersecção de um cilindro com uma esfera, como se pode observar pelas figuras abaixo.

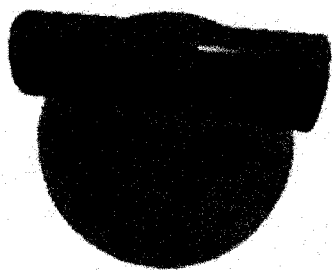


Fig. 3.11a

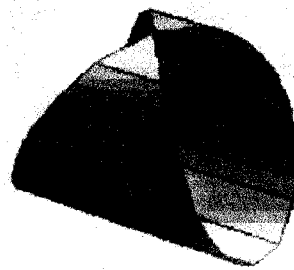


Fig. 3.11b

⁶⁶ A sub-tangente a uma curva num ponto é a projecção sobre o eixo dos xx do segmento de recta da tangente nesse ponto compreendido entre o ponto de tangência e a intersecção da tangente com o eixo dos xx .

((701)) Viviani, aluno de Galileu, propôs aos geómetras, em 1692, o seguinte problema:

“Construir sobre uma cúpula hemisférica quatro janelas iguais, tais que a restante superfície da cúpula seja absolutamente quadrável.”⁶⁷

Sendo este um problema indeterminado, foram várias as soluções obtidas, tendo sido resolvido por Leibniz ([16]), Jacques Bernoulli ([4]), e Wallis ([27]), entre outros⁶⁸.

Na solução de Viviani publicada em *Formazione e misura di tutti i cieli, con la structura e quadratura esatta d'un novo ciclo ammirabile* (Firenze, 1692), a curva em causa resulta da intersecção de uma esfera com um cilindro de revolução que passa pelo centro da esfera e é tangente a esta superfície tendo raio igual a metade do da esfera coincidindo com uma das soluções dadas por Jacques Bernoulli⁶⁹. Por esta razão, esta curva chama-se *curva de Viviani*⁷⁰. No entanto, Viviani refere que vários anos antes já havia sido considerada por Roberval no seu *Traité des Indivisibles*, e por Laloubère na sua *Veterum Geometria promota*. Segundo Teixeira nem Viviani nem Bernoulli demonstraram a sua solução, tendo sido dada por Guido Grandi em 1699 na obra *Geometrica divinatio Vivianearum problematum*. É também possível encontrar uma demonstração num escrito de Huygens que foi publicado nas suas *Oeuvres* ([14]).

Paul Tannery julga ser possível que a curva de Viviani coincida com a linha chamada *paradoxus de Menelaus*, da qual se encontra uma breve referência nas *Coleções de Pappus* e, como veremos, pertence a uma classe de curvas tratadas por Eudoxo, chamadas hipópedas.

((702)) Considerando como origem do referencial o centro O da esfera, para eixo do xx a tangente no ponto O à base OBQ do cilindro, para eixo dos yy a recta que passa por O e por B, onde a esfera é tangente ao cilindro, e para eixo dos zz a geratriz do cilindro por O, as equações de curva são:

$$(1) \quad x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \quad \text{e} \quad x^2 + y^2 - ay = 0^{71},$$

onde a representa o raio da esfera. Representando por θ o ângulo que o vector posição de um ponto qualquer da curva faz com o plano xOy e φ o ângulo que a projecção deste vector sobre o plano xOy faz com Oy , obtém-se em coordenadas esféricas:

$$x = a \sin(\varphi) \cos(\theta), \quad y = a \cos(\varphi) \cos(\theta), \quad z = a \sin(\theta)$$

⁶⁷ Na versão castelhana encontra-se “Determinar sobre um hemisfério uma curva fechada tal que se na superfície total do hemisfério se prescinda da que é limitada por tal curva, resulta numa outra superfície exactamente quadrável.”

⁶⁸ Na versão castelhana acrescenta que a espiral de Pappus (tratada antes desta curva nesta obra) também resolve o problema.

⁶⁹ A primeira versão indica dois cilindros de iguais bases circulares e não apenas um.

⁷⁰ Ou Janela de Viviani.

⁷¹ Na castelhana encontra-se $x^2 + y^2 \pm ay = 0$.

e, por meio da segunda equação de (1), $\theta = \varphi$. Logo, *em todo o ponto de uma curva de Viviani, a longitude é igual à latitude* (J. Bernoulli). Tem-se assim, das fórmulas anteriores

$$x = a \operatorname{sen}(\varphi) \cos(\varphi), \quad y = a \cos(\varphi) \cos(\varphi), \quad z = a \operatorname{sen}(\varphi)$$

e, substituindo

$$\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\varphi\right) = t,$$

obtém-se

$$x = 2at \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}$$

$$y = a \frac{(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2}$$

$$z = a \frac{2t}{1+t^2};$$

portanto a *curva de Viviani* é uma linha unicursal de 4ª ordem. Eliminando x , y e z entre estas e a equação

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

obtém-se uma outra equação donde resulta que os valores de t nos quatro pontos de intersecção do plano com a curva verificam a condição

$$t_1 t_2 t_3 t_4 = -1^{72}.$$

Conclui-se, por meio desta relação, que o plano osculador da curva considerada no ponto onde a longitude é igual a φ e que corta esta linha num ponto de longitude φ_1 é dado pela equação

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) = -\cot g^3\left(\frac{\varphi}{2}\right).$$

A *curva de Viviani* tem a forma de um oito descrito na superfície da esfera, é simétrica relativamente aos planos xOz e xOy , tem um ponto duplo em B e é tangente ao plano xOz em dois pontos situados sobre o eixo dos zz que são os vértices.

((703)) Vejamos agora como resolver o problema de Viviani através da curva que acabamos de definir.

⁷² Julgamos que devia ser $t_1 t_2 t_3 t_4 = 1$.

Intersectemos a esfera com dois cilindros iguais tendo por bases os círculos [OBQ] e [OAN] de raio igual a $\frac{1}{2}a$, situados sobre o plano de um círculo máximo da esfera e tangentes a esta nos pontos A e B da recta AB. Procuremos a área S da parte de um dos hemisférios separados pelo círculo [ACBD] que se projecta sobre [ANOQBCA].

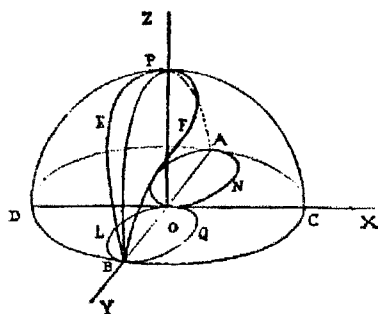


Fig.3.12

Representando por A a figura [OQBCO], temos

$$S = 2a \iint_A \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2} dx dy = 2 \iint_A \frac{a}{z} dx dy \quad ^{73}$$

e, substituindo as variáveis x e y pelas ρ e φ relacionadas com as primeiras pelas equações $x = \rho \sin(\varphi)$, $y = \rho \cos(\varphi)$ obtém-se

$$S = 2a \iint_A \frac{\rho d\rho d\varphi}{\sqrt{a^2 - \rho^2}}.$$

Observando que a equação do arco OQB é $\rho = a \cos(\varphi)$, que a equação do arco BC é $\rho = a$, e tendo em conta a igualdade

$$\int_{a \cos(\varphi)}^a \frac{\rho d\rho}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} = a \sin(\varphi),$$

encontramos

$$S = 2a \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{a \cos(\varphi)}^a \frac{\rho d\rho}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} = 2a^2.$$

Supondo que a base da cúpula hemisférica considerada por Viviani está situada no plano yOz e que o vértice é o ponto C, deduz-se que se esta cúpula tem quatro janelas cujos contornos se

⁷³ Julgamos que seja $S = 2 \iint_A \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2} dx dy = 2 \iint_A \frac{a}{z} dx dy$.

projectam sobre os semicírculos [BQO] e [ANO], a área da parte da cúpula compreendida entre o vértice e as janelas é igual a $4a^2$.

((704)) A parte da superfície do cilindro que figura na definição da curva de Viviani, compreendida entre o plano xOy e a superfície da esfera, é também absolutamente quadrável. Para demonstrar esta proposição, Gomes Teixeira lembra o seguinte teorema atribuído a Roberval e demonstrado num outro ponto desta obra:

Se “desdobrarmos” o cilindro que contém a curva de Viviani num plano, esta curva transforma-se numa sinusóide, representada pela equação

$$Y = a \operatorname{sen}\left(\frac{X}{a}\right).$$

A área da parte do cilindro compreendida entre a curva de Viviani e o plano xOy é igual à área do espaço compreendido entre o arco desta sinusóide correspondente aos valores que X toma entre 0 e $a\pi$ e a corda. Assim, esta área é igual $2a^2$.

((705)) Procuremos agora as equações da projecção da curva de Viviani sobre o plano que passa pelos vértices e que faz um ângulo ω com o plano xOz .

Relacionando a curva com três novos eixos coordenados OX_1 , OY_1 e OZ_1 , passando pelo centro O da esfera, tais que OZ_1 coincide com Oz , que OX_1 coincide com a intersecção entre o plano dado e o plano xOy e que OY_1 seja perpendicular ao plano X_1OZ_1 , as equações desta curva são

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = a^2, \quad x_1^2 + y_1^2 - a(x_1 \operatorname{sen}(\omega) + y_1 \cos(\omega)) = 0.$$

A equação da projecção da mesma curva sobre o plano x_1Oz_1 é portanto

$$a^2 \cos^2(\omega)(x_1^2 + z_1^2) + (a^2 - z_1^2 - ax_1 \operatorname{sen}(\omega))^2 = a^4 \cos^2(\omega),$$

onde, considerando a origem de coordenadas no ponto $(a \operatorname{sen}(\omega), 0, 0)$,

$$(z_1^2 + ax_1 \operatorname{sen}(\omega))^2 = a^2 \cos^2(\omega)(z_1^2 - x_1^2).$$

Assim a projecção desta curva sobre os planos que passam pelos vértices são besaces.

Fazendo na equação anterior $\omega = 0$ e $\omega = \frac{\pi}{2}$, tem-se que a projecção da curva de Viviani sobre o plano xOz é um oito ((287)), e que a projecção da mesma curva sobre o plano yOz é uma parábola. Da primeira proposição resulta que as tangentes à curva de Viviani no ponto duplo são perpendiculares entre si.

É também possível observar que as projecções da curva de Viviani sobre os planos que passam pelo centro da esfera e pelo ponto duplo da curva são representadas pela equação

$$(y_2^2 \sin^2(\omega) - z_2^2 \cos(2\omega) + a^2 \cos^2(\omega) - ay_2)^2 = z_2^2 (a^2 - y_2^2 - z_2^2) \sin^2(2\omega),$$

onde ω representa o ângulo que o plano considerado faz com o plano xOy , ou, considerando a origem no ponto duplo,

$$(y_2^2 \sin^2(\omega) - ay_2 \cos(2\omega) - z_2^2 \cos(2\omega))^2 + z_2^2 (y_2^2 + z_2^2 + 2ay_2) \sin^2(2\omega) = 0,$$

ou

$$(z_2^2 + y_2^2 \sin^2(\omega) - ay_2 \cos(2\omega))^2 = -4az_2^2 y_2 \cos^2(\omega),$$

e finalmente

$$z_2 = -\cos(\omega)\sqrt{-ay_2} + \sin(\omega)\sqrt{-y_2^2 - ay_2}.$$

Assim, as projecções da curva de Viviani sobre os planos que passam pelo centro da esfera e pelo ponto duplo são parábolas virtuais ((282)), quando ω é diferente de 0 e de $\frac{\pi}{2}$.

Gomes Teixeira acrescenta que estas proposições lhe foram indicadas por M. Gabriel Marie e as suas demonstrações se encontram na obra *Exercices de Géométrie Descriptive* deste autor.

((706)) Neste ponto, o autor preocupa-se em lembrar algumas noções de Geometria Analítica. Assim lembra a noção de projecção estereográfica duma curva esférica sobre um plano que passa pelo centro como a perspectiva desta curva vista através de um ponto de intersecção da esfera com a perpendicular ao plano considerado, traçado pelo centro da esfera. Lembra também a noção de transformação por raios vectores recíprocos no espaço como sendo definida pelas equações

$$(2) \quad x = \frac{k^2 x_1}{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}, \quad y = \frac{k^2 y_1}{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}, \quad z = \frac{k^2 z_1}{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2},$$

onde $rr_1 = k^2$. Resulta que a transformação estereográfica é uma transformação por raios vectores recíprocos particular. Com efeito, se considerarmos um ponto P da esfera para centro de inversão e para origem das coordenadas e a recta que passa por P e pelo centro O da esfera para eixo dos xx , e se fizermos $k = a\sqrt{2}$, a equação da esfera

$$(x - a)^2 + y^2 + z^2 = a^2,$$

transforma-se na equação $x_1 = a$, que representa um plano (P) perpendicular à recta OP no centro O da esfera; e o ponto M_1 , correspondente a um ponto qualquer M da esfera, coincide com a intersecção deste plano com a recta PM.

((707)) Depois de, no ponto anterior, lembrar ainda algumas propriedades da transformação estereográfica que não apresentaremos aqui, Teixeira procura neste ponto a transformada estereográfica da curva de Viviani representada pela equação (1), quando se considera como centro de inversão o ponto B de coordenadas $(0, a, 0)$, e quando o módulo tem valor $a\sqrt{2}$.

Considerando a origem no centro de inversão, as equações da curva de Viviani são

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ay = 0, \quad x^2 + y^2 + ay = 0,$$

e, aplicando a estas equações a transformação definida pelas equações (2) e fazendo $k = a\sqrt{2}$, obtemos as equações da transformada desta curva

$$y_1 = -a, \quad 2a(x_1^2 + y_1^2) + y_1(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) = 0.$$

Eliminando y_1 entre estas equações, obtém-se

$$z_1^2 - x_1^2 = a^2,$$

donde resulta que a projecção estereográfica da *curva de Viviani* sobre o plano xOz é a hipérbole equilátera representada por esta equação, quando o centro de inversão é o ponto duplo B da primeira curva.

Vê-se também que a projecção estereográfica da *curva de Viviani* sobre o plano xOz é a *lemniscata de Bernoulli* de equação

$$(x_1^2 + z_1^2)^2 = a^2(z_1^2 - x_1^2),$$

se o centro de inversão é o ponto A diametralmente oposto ao ponto duplo da curva.

A curva esférica que corresponde na transformação estereográfica à *lemniscata de Bernoulli* foi objecto de uma questão proposta por D'Arrest nos *Nouvelles Annales* (1855, p. 401). Esta questão foi resolvida na mesma publicação (1856, p. 53) por Delaire que fez notar a identidade da linha considerada com a curva de Viviani.

Obtém-se facilmente a equação da projecção estereográfica da *curva de Viviani* sobre o plano xOy , sendo o centro de inversão um dos vértices da curva.

Transportando a origem das coordenadas para o ponto $(0, 0, a)$ e aplicando as equações (2), onde se faz $k = a\sqrt{2}$, encontrámos as equações

$$z_1 = -a, \quad 2a(x_1^2 + y_1^2) - y_1(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) = 0,$$

donde eliminando z resulta

$$(3) \quad y_1(x_1^2 + y_1^2) - 2a(x_1^2 + y_1^2) + a^2 y_1 = 0.$$

Esta é a equação da curva procurada. Transportando a origem das coordenadas para o ponto B onde $x_1 = 0$, $y_1 = a$ a equação acima transforma-se em

$$y_1(y_1^2 + x_1^2) + a(y_1^2 - x_1^2) = 0.$$

Logo, a projecção estereográfica da curva de Viviani sobre o plano xOy é a estrofóide representada por esta equação, quando se considera um vértice da primeira curva para centro da inversão.

Baseando-nos nos teoremas que temos demonstrado, podemos deduzir de algumas propriedades da hipérbole, da estrofóide e da *lemniscata de Bernoulli* as propriedades correspondentes da *curva de Viviani*. Vejamos algumas:

1ª A *curva de Viviani* possui dois focos reais, que correspondem aos focos reais das curvas precedentes.

2ª A tangente num ponto qualquer da *curva de Viviani* é a bissectriz do ângulo dos círculos que passam respectivamente por este ponto, pelo centro de inversão e por cada um dos focos.

3ª As distâncias dum ponto qualquer da *curva de Viviani* aos focos e ao ponto A estão ligadas por uma relação linear homogénea.

((708)) A projecção central da *curva de Viviani* sobre o plano xOz , em que o centro se encontra sobre a recta que passa pelo ponto duplo e pelo centro da esfera, foi estudada por M. Gabriel Marie. Vejamos como se obtém a equação desta projecção.

Representemos por d a distância do centro da esfera ao centro de projecção. As equações duma recta qualquer passando por este ponto são

$$x = h(y - d), \quad z = l(y - d),$$

e a condição para que esta recta intersecte a *curva de Viviani* é

$$(ah^2 + a - dl^2)^2 = a(ah^2 + al^2 + a - 2dl^2).$$

Eliminando h e l entre estas três equações encontrámos

$$\left[ax^2 + a(y - d)^2 - dz^2 \right]^2 = a(y - d)^2 \left[ax^2 + a(y - d)^2 + az^2 - 2dz^2 \right],$$

que representa o cone que tem como vértice o centro da projecção e por directriz a *curva de Viviani*. Fazendo nesta equação $y = 0$, obtemos a equação da projecção considerada

$$(ax^2 - dz^2)^2 = a^2 d^2 (z^2 - x^2).$$

Fazendo $d = a$ e $d = -a$, reencontra-se duas proposições tratadas em ((707)).

((709)) Consideremos um dos vértices P da *curva de Viviani*, e designemos por S uma esfera de raio a_1 , concêntrica àquela em que é traçada a curva. Tracemos pelo centro O das esferas uma recta que intersecte a curva num ponto qualquer A, e designemos por A' um dos pontos em que a recta corta a esfera S. As rectas que passam respectivamente por P e por cada

um dos pontos A e A' determinam sobre o plano xOy dois pontos A₁ e A'₁. O primeiro destes pontos descreve uma estrofóide recta quando A percorre a *curva de Viviani*; iremos procurar a equação do lugar descrito pelo outro ponto. As coordenadas esféricas dos pontos A e A' são

$$(a \operatorname{sen}(\varphi) \cos(\theta), a \cos(\varphi) \cos(\theta), a \operatorname{sen}(\theta)), (a_1 \operatorname{sen}(\varphi) \cos(\theta), a_1 \cos(\varphi) \cos(\theta), a_1 \operatorname{sen}(\theta)).$$

Assim, as equações da recta OA são

$$\frac{Y}{a \cos(\varphi) \cos(\theta)} = \frac{X}{a \operatorname{sen}(\varphi) \cos(\theta)} = \frac{Z - a}{a(\operatorname{sen}(\theta) - 1)},$$

e as coordenadas do ponto A₁ são

$$Y = \frac{a \cos(\varphi) \cos(\theta)}{1 - \operatorname{sen}(\theta)} \text{ e } X = \frac{a \operatorname{sen}(\varphi) \cos(\theta)}{1 - \operatorname{sen}(\theta)}.$$

A distância ρ do ponto (X, Y) ao ponto O é determinada pela equação

$$\rho = \frac{a \cos(\theta)}{1 - \operatorname{sen}(\theta)}.$$

Do mesmo modo, a distância do ponto A₁ ao centro O é expressa por

$$\rho_1 = \frac{a_1 \cos(\theta)}{a - a_1 \operatorname{sen}(\theta)} \quad ^{74}.$$

Assim

$$\frac{\rho_1}{\rho} = \frac{a_1^2 (1 - \operatorname{sen}(\theta))}{a(a - a_1 \operatorname{sen}(\theta))} \quad ^{75}.$$

Mas

$$\operatorname{sen}(\theta) = \frac{\rho^2 \pm a^2}{\rho^2 + a^2},$$

e portanto

$$\frac{\rho_1}{\rho} = \frac{2a_1^2 a}{a_1(a^2 - \rho^2) + a(a^2 + \rho^2)}.$$

Como o lugar de A₁ é a estrofóide representada pela equação (3), e a equação polar desta linha é

$$\rho = \frac{a}{\cos(\theta')} (1 - \operatorname{sen}(\theta')),$$

vem

⁷⁴ Julgamos que seja $\rho_1 = \frac{aa_1 \cos(\theta)}{a - a_1 \operatorname{sen}(\theta)}$.

⁷⁵ Os cálculos deram $\frac{\rho_1}{\rho} = \frac{a_1(1 - \operatorname{sen}(\theta))}{a(a - a_1 \operatorname{sen}(\theta))}$.

$$\rho_1 = \frac{aa_1 \cos(\theta')}{a + a_1 \sin(\theta')},^{76}$$

equação do lugar A_1' .

A curva correspondente a esta equação foi estudada por Poncelet, sob o nome de *capricorne*, nas *Applications d'Analyse et de Géométrie*. Esta relação entre esta linha e a *curva de Viviani* foi obtida por M. Cappello no *Giornale di Matematiche* (1908).

Gomes Teixeira inicia a secção das curvas ciclo cilíndricas com as cassinianas esféricas:

((710)) A *curva de Viviani* é um caso particular da linha definida pelas equações

$$(1) \quad x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad (y - b)^2 + x^2 = b^2,$$

que representa o lugar geométrico dos pontos da superfície de um cilindro de revolução equidistantes de um ponto desta superfície. A esta curva chama-se *ciclo-cilíndrica*, da qual a *curva de Viviani* corresponde ao caso

$$a = 2b.$$

A curva ciclo-cilíndrica é simétrica relativamente aos planos yOz e xOy e é composta por duas ovais quando $a < 2b$. A equação da curva em coordenadas esféricas é $a \cos(\theta) = 2b \cos(\varphi)$, onde θ e φ tendo o mesmo significado que em ((702)).

Em ((711)) Teixeira dedica-se à representação desta curva através, entre outras, das equações

$$x^2 + z^2 + (y + b)^2 = a^2, \quad x^2 + y^2 = b^2$$

e ao cálculo da área do segmento do cilindro compreendido entre a curva e o plano xOy (após planificar “desdobrando” o cilindro).

No ponto ((713)) trata a inversão e a equação bipolar desta curva, bem como algumas das suas propriedades que têm alguma correspondência com as pertencentes à curva de Cassini. Ainda neste ponto conclui que as curvas ciclo-cilíndricas pertencem à classe das linhas esféricas definidas pela equação

$$r_1 r_2 = k R_1 R_2$$

onde r_1, r_2 representam as distâncias dum ponto qualquer da curva a dois polos situados sobre a esfera, R_1 e R_2 as distâncias do mesmo ponto a dois outros, e k corresponde a uma constante. Laguerre apelida estas linhas de cassinianas esféricas (1868) no *Bulletin de la Société philomatique (Oeuvres, t.II)*.

⁷⁶ Na realidade deu-nos $\rho_1 = \frac{a_1^2 \cos(\theta')}{a + a_1 \sin(\theta')}$.

3.4.2 A lemniscata Esférica de Eudoxo ou Hipópeda

A *hipópeda* é a curva que resulta da intersecção de um cilindro de revolução com uma esfera tangente. A *curva de Viviani* é portanto um caso particular da *hipópeda*, correspondendo ao caso em que o raio da esfera é o dobro do raio da base do cilindro.

A hipópeda é uma curva considerada por Eudoxo de Cnido, discípulo de Platão que é autor do mais antigo sistema astronómico conhecido, tendo as *hipópedas* nesse seu sistema um papel fundamental, como observa Schiapparelli na obra “*Le sfere omocentriche di Eudosso, di Callipo e di Aristotele*” de 1875.

Considerando como origem das coordenadas o centro O da esfera, para eixo dos yy a recta que passa por O e pelo ponto de contacto do cilindro com a esfera, para eixo dos zz a recta paralela à geratriz do cilindro pelo ponto O, e para eixo dos xx a perpendicular ao plano zOy por este ponto, obtém-se para equação da *hipópeda*:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad x^2 + (y - b)^2 = (a - b)^2,$$

sendo a o raio da esfera e b a distância do centro da esfera ao eixo do cilindro. Admite-se que $b > 0$ e $a > b$.

O nome de *lemniscata esférica* dado à *hipópeda* deve-se a Schiaparelli devido ao facto de ter a forma de um oito descrito sobre a superfície da esfera. Os planos xOy e zOy são planos de simetria da curva e o ponto duplo coincide com o ponto de contacto da esfera com o cilindro. Os dois vértices da curva têm por coordenadas $(0, a - 2b, 0)^{77}$.

((715)) Enunciemos algumas propriedades da *hipópeda*:

1ª A projecção desta curva no plano yOz é a parábola de equação

$$z^2 + 2by - 2ab = 0$$

e a projecção da mesma curva no plano xOz é representada pela equação

$$z^2 [4(a - b)b - z^2] = 4b^2 x^2,$$

que é a de uma parábola virtual considerada em ((287)).

2ª A projecção estereográfica da curva, em relação ao ponto de inversão $(0, -a, 0)$, é representada pela equação

⁷⁷ Julgamos que devia ser $(0, a - 2b, \pm \sqrt{a^2 - b^2})$.

$$b(x^2 + z^2)^2 = a^2(a-b)z^2 - a^2bx^2,$$

que é a da espírica de Perseus, já referida sob o nome de *lemniscata hiperbólica* ((198)).

A projecção estereográfica da *hipópeda*, relativamente ao ponto de inversão $(0, a, 0)$, é a hipérbole definida pela equação

$$(a-b)z^2 - bx^2 = ab^2.$$

Portanto, as *hipópedas* possuem dois focos reais, e as distâncias a estes pontos e ao ponto $(0, a, 0)$ estão ligadas por uma relação linear homogénea.

((716)) O valor A da área cilíndrica compreendida entre a *hipópeda* e o plano xOy pode ser calculado pela fórmula

$$A = 2 \int_{2b-a}^a \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \cdot \frac{ds}{dy} dy,$$

onde s representa o comprimento dos arcos da circunferência da base do cilindro.

Substituindo x e $\frac{ds}{dy}$ pelos valores dados pela equação do cilindro e por

$$\frac{ds^2}{dy^2} = \frac{(a-b)^2}{x^2},$$

obtém-se o resultado

$$A = 2(a-b) \int_{2b-a}^a \frac{\sqrt{2b(a-y)}}{\sqrt{(a-b)^2 - (y-b)^2}} dy = 8(a-b) \sqrt{b(a-b)}.$$

Substituindo $b = \frac{1}{2}a$, encontramos o teorema de Roberval, tendo sido o caso geral referido por Montucla em *L'histoire des mathématiques* ([21]).

3.4.3. A lemniscata Esférica de Roberts⁷⁸

Francisco Gomes Teixeira trata ainda um outro tipo de *lemniscata* que ele apelida de *lemniscata esférica* de Roberts e que resulta da intersecção de uma esfera com um cilindro, estando a curva em causa descrita na superfície da esfera. Como se trata de um caso particular de uma família de curvas chamadas *elipses esféricas*, temos a necessidade de descrever estas segundas para melhor entender a curva do nosso interesse.

⁷⁸ Esta curva não surge na 1ª versão desta obra.

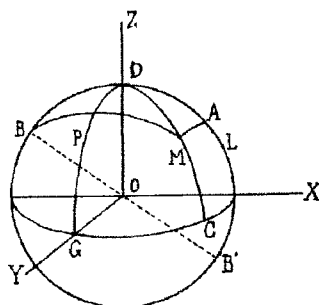


Fig. 3.13

((717)) Sejam A e B (Fig. 3.13) dois pontos fixos de um círculo máximo da esfera e M um ponto que se desloca sobre a mesma superfície de modo que

$$(1) \quad MA + MB = 2c,$$

onde $2c$ representa um arco DABD constante, superior ao arco BA. Sejam ainda MA e MB arcos de dois círculos máximos da esfera. O lugar descrito por M é uma oval, simétrica relativamente ao plano do círculo máximo que passa por A e B e ao plano do círculo máximo [GPD] perpendicular ao primeiro no ponto médio do arco AB. Esta oval intersecta o arco DA num ponto L tal que

$$DL = \frac{1}{2}(AL + BL) = c,$$

e intersecta o arco DG num ponto P tal que $PA = PB = c$. Vejamos como determinar a equação da linha que acabamos de descrever. Considere-se o plano que contém o círculo máximo que passa pelos pontos A e B coincide com o plano xOz , o plano do círculo máximo [DPG] com o plano yOz e o plano perpendicular a OD no centro O da esfera com xOy . Designe-se por φ a longitude ADC e por θ a co-latidade DM do ponto M. Representando por d o arco AD e aplicando o teorema fundamental da Trigonometria Esférica obtém-se

$$\cos(MA) = \cos(\theta)\cos(d) + \sin(\theta)\sin(d)\cos(\varphi)$$

$$\cos(MB) = \cos(\theta)\cos(d) - \sin(\theta)\sin(d)\cos(\varphi)$$

donde

$$\cos\left(\frac{MB - MA}{2}\right)\cos\left(\frac{MB + MA}{2}\right) = \frac{1}{2}(\cos(MB) + \cos(MA)) = \cos(\theta)\cos(d)$$

$$\sin\left(\frac{MB - MA}{2}\right)\sin\left(\frac{MB + MA}{2}\right) = \frac{1}{2}(\cos(MA) - \cos(MB)) = \sin(\theta)\sin(d)\cos(\varphi).$$

Resulta desta equação e de (1) a igualdade

$$(2) \quad \frac{\cos^2(\theta)\cos^2(d)}{\cos^2(c)} + \frac{\sin^2(\theta)\sin^2(d)\cos^2(\varphi)}{\sin^2(c)} = 1$$

que é a equação em coordenadas esféricas do lugar descrito por M.

Podemos dar à equação (2) uma outra forma onde figure o arco DP, que designaremos por b em substituição da constante d . Fazendo na equação acima a substituição $\varphi = \frac{\pi}{2}$ e $\theta = b$ obtém-se

$$\frac{\cos^2(b)\cos^2(d)}{\cos^2(c)} = 1$$

e, eliminando d por meio da relação acima,

$$(3) \quad \sin^2(\theta) \left[\frac{\cos^2(\varphi)}{\sin^2(c)} + \frac{\sin^2(\varphi)}{\sin^2(b)} \right] = 1.$$

Uma das equações da curva em coordenadas cartesianas é a da esfera, resultando a outra de fazer na equação precedente a substituição $x = a \sin \theta \cos \varphi$, $y = a \sin \theta \sin \varphi$ (lembre-se que a representa o raio da esfera), obtendo-se

$$\frac{x^2}{\sin^2(c)} + \frac{y^2}{\sin^2(b)} = a^2.$$

Vê-se portanto que a linha considerada resulta da intersecção da esfera com o cilindro de base elíptica representado pela equação acima.

A linha definida pela equação (1) e a linha simétrica desta relativamente ao plano xOy são dois ramos da curva algébrica de 4ª ordem que resulta da intersecção da esfera pelo cilindro considerado. A esta curva chama-se *elipse esférica*.

((718)) A *elipse esférica* resulta também da intersecção de uma esfera com um cone de segunda ordem cujo vértice corresponde ao centro da esfera e cujos eixos passam pelo centro da elipse.

As equações da recta que passa pelo ponto M da curva e pelo centro da esfera são

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z}{z},$$

e, eliminando x , y e z entre estas equações, a da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, e a equação

$$\frac{x^2}{\sin^2(c)} + \frac{y^2}{\sin^2(b)} = a^2,$$

obtém-se

$$\frac{X^2}{\operatorname{tg}^2(c)} + \frac{Y^2}{\operatorname{tg}^2(b)} = Z^2,$$

que representa um cone recto de base elíptica.

A intersecção deste cone com o plano tangente à esfera no ponto D é determinada pelas equações

$$Z = a, \quad \frac{X^2}{\operatorname{tg}^2(c)} + \frac{Y^2}{\operatorname{tg}^2(b)} = a^2.$$

Gomes Teixeira considera depois o caso de M verificar a condição $MB - MA = 2c$ e no ponto seguinte trata a projecção estereográfica desta curva.

Como já fez no caso das outras curvas, dedica ainda atenção ao cálculo da área ((721)), comprimento de arco((722)) e dedica o ponto ((723)) ao tratamento histórico da *ellipse esférica*. Refere, entre outros, os nomes de Fuss, Schubert, Chasles.

((724)) A *ellipse esférica* é um caso particular das curvas que resultam da intersecção duma esfera com um cone de 2ª ordem, em que um dos eixos contém o centro da esfera. Estas curvas foram estudadas por W. Roberts no *Journal de Liouville* ([20]), onde se ocupa, entre outros problemas, da rectificação dos seus arcos e da quadratura das áreas.

Considerando para origem das coordenadas o centro da esfera, para eixo dos zz o eixo do cone que passa pelo centro da esfera, e para planos xOz e yOz os planos que passam por este eixo e pelos dois outros eixos do cone, tem-se duas situações diferentes consoante o eixo do cone que passa pelo centro da esfera seja interior ou exterior ao próprio cone.

Assim, no primeiro caso as equações da curva considerada são

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad \frac{x^2}{\operatorname{tg}^2(c)} + \frac{y^2}{\operatorname{tg}^2(b)} = (z - z')^2,$$

onde z' é a distância do vértice do cone ao centro da esfera. Se o eixo do cone que passa pelo centro da esfera é exterior ao cone, as equações da curva são

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad x^2 \operatorname{tg}^2(c) - y^2 \frac{\operatorname{tg}^2(c)}{\operatorname{tg}^2(b)} = (z - z')^2.$$

A rectificação destas curvas depende nos dois casos de dois integrais elípticos de 3ª espécie, excepto quando

$$z' = 0, \quad z' = a \quad \text{ou} \quad z'^2 = a^2 \frac{\cotg^2(c) - \cotg^2(b)}{\cos^2(c) \cotg^2(c)}.$$

Nos dois primeiros casos, a rectificação da curva depende de um só integral elíptico, e podemos mesmo representar todos os integrais elípticos de 1ª, 2ª e 3ª espécie pelos arcos das curvas correspondentes ao segundo caso.

Se z' verifica a terceira condição e o eixo do cone que passa pelo centro da esfera é exterior ao cone, a rectificação da curva depende de dois integrais elípticos de 1ª espécie. Neste caso, a curva considerada é o lugar geométrico dos pontos M que se deslocam de tal maneira que, em todas as posições,

$$\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\widehat{MOA}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\widehat{MOB}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}c\right),$$

onde O designa o centro da esfera, A e B dois pontos fixos da sua superfície e c um ângulo constante. Como

$$MA = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\widehat{MOA}\right), \quad MB = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\widehat{MOB}\right),$$

temos $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = \text{constante}$, e a curva corresponde a uma *cassiniana esférica* (ver ((713))).

Se z' verifica simultaneamente as duas condições anteriores, a curva tem a forma de um oito descrito sobre a superfície da esfera. Os arcos desta linha, que se pode apelidar de *lemniscata de W. Roberts*⁷⁹, dependem de um integral elíptico de 1ª espécie.

Vejamos, no próximo capítulo, outros tratamentos da *lemniscata*.

⁷⁹ Na edição espanhola, apesar de tratar as elipses esféricas, Gomes Teixeira não chega a referir esta lemniscata.

Bibliografia de Gomes Teixeira para este capítulo⁸⁰

- [1] Abel; *Oeuvres*, 1881, t. I, p. 361.
- [2] Aubry, M.; *Journal de mathématiques spéciales*, 1895, p. 267.
- [3] Bernoulli, J.; *Acta Eruditorum*, 1694, p. 336.
- [4] Bernoulli, J.; *Opera*, t. I, p. 609; 512.
- [5] Booth, J.; *A Treatise on Some New Geometrical Methods*, London, 1977, t. II, p. 163; t. I, p. 196; t. II, p. 164; t. I, p. 145.
- [6] Cappello, M.; *Giornale di Matematiche*, 1908, p. 213.
- [7] Collignon, M.; *Traité de Mécanique*, 1882, t. III, p. 104.
- [8] Cramer; *Introduction à l'analyse des lignes courbes*, Genève, 1750, p. 451.
- [9] Euler; *Mem. Acad. Petrop.*, t. V, p. 351.
- [10] Fagnano; *Produzione Matematica*, 1750, t. II, p. 317.
- [11] Gauss; *Werke*, t. III, p. 404.
- [12] Haton de La Goupillière; *Sur une théorie nouvelle de la géométrie des masses*, Paris, 1857.
- [13] Humbert, M.; *Cours d'Analyse*, t. II, p. 248.
- [14] Huygens; *Oeuvres*, t. II, p. 70; t. X, p. 336.

⁸⁰ Ordem alfabética de autores.

- [15] Kiepert; *Journal de Crelle*⁸¹, t. CXXV, p. 255
- [16] Leibniz; *Opera*, 1768, t. III, p. 267.
- [17] Liouville; *Journal de mathématiques*, 1843, p. 507.
- [18] Marcolongo, M.; *Meccanica Razionale*, 1905, t. II, p. 81.
- [19] Marie, G.; *Exercices de géometrie descriptive*.
- [20] Mathews; *Proceedings of the London Mathematical Society*, t. XXVII, p. 367.
- [21] Montucla; *L'histoire des mathématiques*, t. III, p. 101.
- [22] Roberts, W.; *Journal de Liouville*, 1843, p. 263; 1845, p. 155; 1845, p. 279.
- [23] Schoute, M.; “Notiz über die Lemniscate”, em *Sitzungsber. der K. Akad. der Wissenschaften von Wien*, 1883, p. 1252.
- [24] Schwering; *Journal de Crelle*, t. CVII e CX.
- [25] Serret; *Journal des Mathématiques Pures et Appliquées*, 1843, p. 497.
- [26] St. Vincent, G.; *Opus Geometricum*, 1647.
- [27] Wallis; *Opera*, t. II, p. 475.
- [28] Wyer, E.; “Die Lemniscate in Rationaler Behandlung”, em *Abhandl. der K. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften*, Praga, 1873.

⁸¹ De verdadeiro nome *Journal für die reine und angewandte mathematik*.

4. Outras abordagens da *lemniscata*

O estudo do matemático português Francisco Gomes Teixeira, com a obra *Tratado das curvas especiais notáveis planas e torsas*, foi tratado no capítulo anterior; vejamos agora os estudos do geômetra italiano Gino Loria, com a obra *Las Curvas Planas Particulares Algebraicas y Transcendentes. Teoria e Historia*; e o do espanhol Joaquim de Vargas y Aguirre com *Catálogo General de Curvas*. É possível observar, entre outras, nas obras acima referidas que a curva *lemniscata* foi tratada por vários geômetras ao longo do tempo, tendo sido o seu estudo de grande relevância para o avanço da matemática e particularmente da geometria.

Sendo este estudo histórico o objectivo dessas mesmas obras, em particular a do matemático português objecto principal do nosso estudo, poderia parecer despropositado nesta tese a inclusão de um capítulo reservado ao estudo histórico da *lemniscata*. No entanto, julgamos interessante ocupar este espaço com abordagens desta curva contemporâneas e posteriores a Gomes Teixeira, incluindo ainda mais uma aplicação das novas tecnologias agora ao nosso dispor.

4.1 Gino Loria

Gino Loria nasceu em 19 de Maio de 1862 em Montova e faleceu em 1954.

Foi professor emérito de Geometria Superior na Universidade de Génova. A *Académie Internationale d'Histoire des Sciences* nomeou-o em 6 de Novembro e desempenhou o cargo de presidente desta Academia entre 20 e 25 de Maio de 1929.

Tal como Gomes Teixeira o seu interesse não se limitou ao estudo das curvas tendo também publicado outros, trabalhos sobre Geometria e História da Matemática.

O tratado de Gino Loria teve também publicação em alemão “*Spezielle Algebraische und Transcendente Ebene Kurven. Theorie und Geschichte*”, em 1902 e 1925, e em italiano “*Curve Piane Speciali Algebriche e Transcendenti. Teoria e storia volume I - Curve algebriche con 122 figure illustrative intercalate nel testo*” foi o título do primeiro volume publicado em 1930. Segundo B. H. Brown na revista *American Mathematical Monthly*, a segunda edição alemã é dos livros mais usados em geometria, e ainda de acordo com a mesma referência, a edição italiana encontra-se dividida em cinco livros cujos títulos são:

Libro I: *Luoghi piani e luoghi solidi*;

Libro II: *Curve del terz'ordine*;

Libro III: *Curve del quart'ordine*;

Libre IV: *Curve algebriche particolari di un ordine determinato superiore a quattro*;

Libre V: *Curve algebriche particolari di ordine qualunque*.

Segundo esta fonte as reedições não sofreram, em geral, alteração em relação à edição anterior, excepto o facto de na edição italiana, tal como o título indica, as figuras surgirem inseridas no texto, enquanto que nas anteriores edições se encontravam todas no fim. O crítico referido⁸² aponta que ao longo do texto surgem por vezes erros e que algumas referências numéricas não são muito correctas, incluindo algumas referências que carecem de confirmação por quem as utilize⁸³.

Da obra acima citada deste géometra italiano estudamos, a que julgamos ser, a primeira edição manuscrita em castelhano. Neste trabalho é possível encontrar várias curvas da família das *lemniscatas*. Assim, por simples observação do índice alfabético, encontrámos as seguintes: *lemniscata de Bernoulli*, *lemniscata de Booth*, *lemniscata de Gerono*, *lemniscata elíptica de Booth*, *lemniscata elíptica de Serret*, *lemniscata geral*, *lemniscata hiperbólica* de J. Booth, *lemniscata hiperbólica de Serret*, *lemniscata logarítmica*, *lemniscatas superiores irregulares* e *lemniscatas superiores regulares*. Encontra-se ainda referida a *lemniscatriz*.

Quando percorremos a obra de Gino Loria, a primeira *lemniscata* encontrada está no capítulo III, dedicado às quárticas planas de 4ª ordem, secção 10 sobre as *Parábolas virtuais* de Grégoire de St.-Vincent, ou seja, no ponto 73. Trata-se da *lemniscata de Gerono*. Aqui, Gino Loria refere várias construções e deduz a partir delas as equações das curvas correspondentes, estudando a *lemniscata de Gerono* apenas no fim desta secção. Assim, Gino Loria refere que a primeira das construções apresentadas se encontra em vários tratados e descreve: Dado um círculo de raio a e centro O e um seu diâmetro $[AB]$, a partir dum ponto qualquer da circunferência baixa-se $[MN]$ perpendicularmente a $[AB]$, e $[NQ]$ perpendicularmente a $[OM]$. Toma-se, sobre $[MN]$, $\overline{NP} = \overline{NQ}$, e o lugar do ponto P de equação $a^2y^2 + x^4 = a^2x^2$ é a curva procurada.

Gino Loria refere que Maynaus e Schlom observam ser esta uma curva conhecida, acrescentando o segundo deles que ela se encontra na *Geométrie Analytique* de Gerono, sendo por esta razão que Gabriel Marie, nos seus *Exercices de Géométrie Descriptive*, propõe o nome de *lemniscata de Gerono*, associando-a a várias questões da Geometria Descritiva, bem como ao conhecido problema de Viviani já aqui tratado.

⁸² Refira-se que este artigo é uma crítica ao primeiro volume da edição italiana desta obra.

⁸³ O mesmo defeito é apontado por C. H. Sisam relativamente ao segundo volume da publicação alemã.

Mais adiante, G. Loria refere S. Schoute, que salienta esta linha curva na sua investigação *Sur la construction des courbes unicursales par points e par tangents*, e ainda S. Aubry, que chama a dita *curva de oito* no artigo *De l'usage des figures de l'espace pour la definition et la transformation de certaines courbes*. Por fim, o autor cita a afirmação de Monferrier segundo a qual $ay = x\sqrt{a^2 - x^2}$ é a equação de uma *lemniscata* (sendo também uma parábola virtual).

Ainda no capítulo III, mas no ponto 90, na secção 17, dedicada à *oval de Cassini*, o autor refere uma quártica particular estudada por vários géometras e que é por alguns “hoje chamada elipse ou oval de Cassini, por outros cassiniana ou cassinoidea e por Steiner, *lemniscata geral*”. Em seguida, Gino Loria relaciona esta curva com o estudo de Domenico Cassini sobre o movimento dos planetas; deduz a equação da curva de Cassini, apontando as suas simetrias, tendo o cuidado de salientar que, dos três casos particulares em que a curva assume diferentes formas, o caso intermédio será tratado na secção seguinte.

Assim, as equações da curva de Cassini são

$$\sqrt{(x-a)^2 + y^2} \sqrt{(x+a)^2 + y^2} = b^2$$

ou

$$(1) \quad (x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) + a^4 - b^4 = 0$$

onde $2a$ é a distância entre os focos, sendo a recta que os contém considerada como eixo dos xx , e o ponto médio do segmento de recta que os une a origem. Quanto a b^2 , representa a área do rectângulo definida pelos raios vectores.

Os três casos distintos correspondem a $b^2 > a^2$, $b^2 < a^2$ e $b^2 = a^2$. Em nota, Loria distingue que no caso $a > b$, a curva é chamada por Serret de *lemniscata elíptica* e, sendo $a < b$, de *lemniscata hiperbólica*. Mais adiante, Loria trata as tangentes a esta curva e a construção destas rectas, bem como da normal. Estuda ainda a equação polar (1') e o raio de curvatura das ovais de Cassini. A expressão apresentada para o raio de curvatura é

$$R = \frac{2b^2 \rho^3}{a^4 - b^4 + 3\rho^4}$$

e usando (1) obtém

$$(1') \quad \rho^4 - 2a^2 \rho^2 \cos(2\varphi) + a^4 - b^4 = 0$$

e conclui

$$R = \frac{b^2 \rho}{\rho^2 + a^2 \cos(2\varphi)}.$$

O autor apresenta também a equação que permite determinar os pontos de inflexão como sendo

$$\rho^2 + a^2 \cos(2\varphi) = 0,$$

fornecendo assim o lugar geométrico dos pontos de inflexão das ovais de Cassini que tem os mesmos focos, acrescentando que representa uma *lemniscata de Bernoulli*, uma vez ser esta a curva que representa o lugar geométrico dos pontos de inflexão das ovais confocais. Mais adiante, enuncia o teorema:

o lugar geométrico dos pontos de contacto das tangentes conduzidas às ovais de Cassini confocais é uma lemniscata.

No ponto (92) da mesma secção, Gino Loria estuda o comportamento desta curva no infinito, os pontos ciclicos e os focos.

Como seria de esperar, a apresentação mais detalhada é feita para a *lemniscata de Bernoulli* na secção 18 do mesmo capítulo III, dedicada às quárticas que têm três nós de inflexão, mais especificamente no ponto 93.

Gino Loria afirma que as equações (1) e (1') se transformam em

$$(2) \quad (x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0$$

$$(2') \quad \rho^2 - 2a^2 \cos(2\varphi) = 0,$$

representando a curva estudada por Jacob Bernoulli durante as suas investigações sobre o problema da isócrona paracêntrica⁸⁴, uma vez que para resolver esta questão empregou uma «curva de 4º grau cuja equação é dada por

$$xx + yy = a\sqrt{xx - yy},$$

qualquer que seja a , e que tem a forma de oito, lemnisci, d'un noeud de Ruban Gallis».

É curioso notar que Loria não sugere a ligação desta *lemniscata* como caso particular das *lemniscatas* hiperbólicas, como faz Gomes Teixeira (ver sub-capítulo 3.2 p.69).

Segundo este matemático, o nome *lemniscata*, proposto por Jacob Bernoulli, havia já sido empregue por Fagnano nos seus célebres estudos sobre a rectificação desta curva, os quais deram mais tarde origem à teoria das funções elípticas. Gino Loria recorda que Fagnano se dedicou à divisão em n partes iguais da *lemniscata* sendo n um número inteiro positivo da forma $2 \cdot 2^m$, $3 \cdot 2^m$ ou $5 \cdot 2^m$, tal como refere Gomes Teixeira (ver capítulo 3).

Loria observa ainda que a *lemniscata* é quadrável; a partir de (2), obtém-se a seguinte expressão para a superfície total da curva:

⁸⁴ No ponto (254), Gino Loria lembra a proposta feita por Leibniz aos matemáticos em 1687, da descoberta de uma curva plana tal que um ponto (corpo) caindo sobre a curva desde uma altura conhecida se aproxima de um ponto fixo de modo que a sua distância a este seja proporcional ao tempo. A solução foi encontrada pelo próprio Leibniz e pelos Bernoulli:

$$\frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{dy}{\sqrt{a^2 y - y^3}}.$$

$$4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2a^2 \cos(2\varphi) d\varphi = 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d(\sin(2\varphi)) = 2a^2,$$

sendo assim igual ao quadrado cujo lado é a longitude de cada folha, contradizendo a afirmação de Tschirnaus segundo a qual a quadratura de tal curva seria impossível. Em seguida, Gino Loria afirma que a *lemniscata*, além de dois pontos de inflexão correspondentes aos pontos cíclicos⁸⁵, possui um ponto cujas tangentes são as bissectrizes dos ângulos formados pelos eixos de simetria, sendo por isso uma quártica com três nós de inflexão; escolhendo então estas bissectrizes como eixos coordenados, em vez da equação (1), obtém-se

$$(3) \quad (x^2 + y^2)^2 - 4a^2 xy = 0.$$

Tendo em conta a observação de S. Serret de que a equação (1) se pode substituir por

$$(4) \quad x = a\sqrt{2} \frac{\lambda + \lambda^3}{1 + \lambda^4} \quad \text{e} \quad y = a\sqrt{2} \frac{\lambda - \lambda^3}{1 + \lambda^4},$$

o autor fornece a seguinte representação paramétrica para a equação (3):

$$(5) \quad x = \frac{2a\lambda}{1 + \lambda^4}, \quad y = \frac{2a\lambda^2}{1 + \lambda^4}.$$

Note-se que as expressões (4) são muito semelhantes às indicadas por Gomes Teixeira no ponto (143).

$$x = a \frac{z^3 + z}{z^4 + 1}, \quad y = a \frac{z - z^3}{z^4 + 1}$$

utilizando para a curva a expressão, ligeiramente diferente,

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2).$$

Gino Loria faz notar que a equação (1) pode ser obtida eliminando ρ nas equações

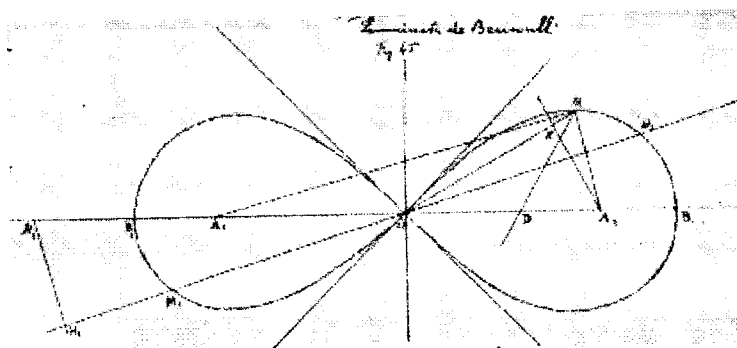
$$x^2 + y^2 = \rho^2, \quad \frac{2x^2}{\rho^2} - \frac{2y^2}{2a^2 - \rho^2} = 1$$

para concluir que toda a *lemniscata* se pode considerar como lugar geométrico dos pontos de intersecção de uma série de cónicas homofocais e de um lugar (feixe) projectivo de círculos concêntricos. O autor refere também a propriedade de cada *lemniscata* se poder obter a partir de uma hipérbole equilátera por meio de uma inversão nessa curva cujo pólo se encontra no centro de uma curva, bastando para isso considerar o centro como O com potência R^2 sobre a hipérbole $x^2 - y^2 = k^2$ e exigindo que as constantes R e k satisfaçam a condição

$$R^4 = 2a^2 k^2.$$

⁸⁵ Loria na p. 4 do seu tratado atribui a Poncelet a definição de pontos cíclicos do plano como sendo dois pontos do infinito pelos quais passam todos os círculos desse plano.

Fig. 4.1



Para concluir o ponto em causa, este matemático utiliza a equação (2) para demonstrar um teorema enunciado por Steiner:

Sejam B_1 e B_2 as extremidades do eixo de uma lemniscata cujos focos são A_1 e A_2 , se A'_1 e A'_2 forem pontos conjugados harmónicos de A_1 e A_2 em relação a B_1 e B_2 então

$$\overline{OA'_1} = \overline{OA'_2} = 2a.$$

Se uma transversal r conduzida por O faz com o eixo um ângulo φ e corta a lemniscata nos pontos M_1 e M_2 , sendo H_1 e H_2 as projecções ortogonais de A'_1 e A'_2 sobre r , temos

$$\overline{H_1M_1} \cdot \overline{H_1M_2} = \overline{OH_1}^2 - \overline{OM_1}^2 = (2a \cos(\varphi))^2 - 2a^2 \cos(2\varphi) = 2a^2,$$

logo a área do rectângulo $[H_1M_1M_2H_2]$, $\overline{H_1M_1} \cdot \overline{H_1M_2}$, é constante e igual à superfície de uma curva, como já tinha mostrado Steiner.

Mais adiante, no ponto (94), Gino Loria expõe uma aplicação das equações paramétricas (4). Tal como fez Gomes Teixeira (ver cap3), Loria estuda a equação da tangente a esta curva. Assim, observemos que os pontos (λ) ⁸⁶ e $(-\lambda)$ são simétricos relativamente ao eixo focal⁸⁷ da lemniscata, e consideremos a recta (diâmetro) que faz com este eixo um ângulo δ tal que

$$\operatorname{tg}(\delta) = \frac{1 + \lambda^2}{1 - \lambda^2},^{88}$$

ou

$$(6) \quad \lambda^2 = \frac{1 - \operatorname{tg}(\delta)}{1 + \operatorname{tg}(\delta)}.$$

⁸⁶ O ponto (λ) corresponde a (x, y) onde $x = a\sqrt{2} \frac{\lambda + \lambda^3}{1 + \lambda^4}$, $y = a\sqrt{2} \frac{\lambda - \lambda^3}{1 + \lambda^4}$.

⁸⁷ Julgamos haver um engano, que seja simétricos em relação ao centro.

⁸⁸ Na realidade tem-se $\operatorname{tg}(\delta) = \frac{1 - \lambda^2}{1 + \lambda^2}$.

A corda da *lemniscata* que une os pontos (μ) e (ν) tem equação

$$(7) \quad (1 + \mu\nu)[(\mu + \nu)^2 - (1 + \mu^2\nu^2)]x + (1 - \mu\nu)[(\mu + \nu)^2 + (1 + \mu^2\nu^2)]y = 2\sqrt{2}a\mu\nu(\mu + \nu),$$

sendo a tangente no ponto λ dada por

$$(8) \quad (1 + \lambda^2)(4\lambda^2 - 1 - \lambda^4)x + (1 - \lambda^2)(4\lambda^2 + 1 + \lambda^4)y = 4\sqrt{2}a\lambda^3$$

(análoga à obtida por Gomes Teixeira no ponto (143)). Tendo em conta que esta é uma equação de sexto grau em λ , conclui-se que a *lemniscata* é uma curva de 6ª classe de acordo com as fórmulas de Plücker.

A mesma equação (8) revela que as seis tangentes à *lemniscata*, paralelas a uma dada direcção, se encontram por meio da equação

$$\frac{(1 + \lambda^2)(4\lambda^2 - 1 - \lambda^4)}{(1 - \lambda^2)(4\lambda^2 + 1 + \lambda^4)} = \text{const.}$$

e que os pontos de contacto se situam sobre três diâmetros; substituindo nesta equação λ^2 pelo valor de (6), obtém-se

$$\frac{1 - 3\text{tg}^2(\delta)}{3\text{tg}(\delta) - \text{tg}^3(\delta)} = \text{const.},$$

isto é,

$$\text{tg}(3\delta) = \text{const.}$$

Considerando δ_0 como uma das raízes desta equação, as outras serão $\delta_0 + \frac{\pi}{3}$ e $\delta_0 + \frac{2\pi}{3}$

obtemos assim a seguinte proposição:

a lemniscata possui seis tangentes paralelas a uma dada direcção cujos pontos de contacto se encontram sobre três diâmetros que fazem entre si ângulos de $\frac{\pi}{3}$.

Gino Loria faz também referência à seguinte propriedade: tendo em conta a equação (4) os pontos (λ_1) , (λ_2) e (λ_3) da *lemniscata* são colineares se entre os seus parâmetros existir a relação

$$(9) \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_1\lambda_2\lambda_3(\lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 + \lambda_1\lambda_2) = 0.$$

Por outro lado, os pontos (λ_1) , (λ_2) , (λ_3) e (λ_4) pertencem à mesma circunferência quando se tem

$$(10) \quad \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 = 1.$$

Neste último caso, diremos que os pontos formam uma cadeia. A equação (10) permite ver que se (λ_1) , (λ_2) , (λ_3) e (λ_4) pertencem a uma cadeia, o mesmo sucede com

$(-\lambda_1)(-\lambda_2)(\lambda_3)(\lambda_4)$, $(\lambda_1)(\lambda_2)(-\lambda_3)(-\lambda_4)$, $(-\lambda_1)(\lambda_2)(-\lambda_3)(\lambda_4)$, $(\lambda_1)(-\lambda_2)(\lambda_3)(-\lambda_4)$, $(-\lambda_1)(\lambda_2)(\lambda_3)(-\lambda_4)$, $(\lambda_1)(-\lambda_2)(-\lambda_3)(\lambda_4)$ e $(-\lambda_1)(-\lambda_2)(-\lambda_3)(-\lambda_4)$; logo, se quatro pontos formam uma cadeia, então o mesmo acontece com dois deles, juntamente com os simétricos dos outros em relação ao eixo, e ainda com os quatro simétricos relativamente ao centro. Fazendo em (9) $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \xi$, obtemos

$$(11) \quad \lambda + 2\xi + \lambda\xi^2(\xi^2 + 2\lambda\xi) = 0,$$

e as quatro raízes ξ desta equação determinam os pontos de contacto (ξ_1) , (ξ_2) , (ξ_3) e (ξ_4) das tangentes à *lemniscata* conduzidas pelo seu ponto (λ) . Usando a equação (11), deduz-se:

$$\begin{aligned} \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 &= -2\lambda \\ \xi_1\xi_2 + \xi_3\xi_4 + \xi_1\xi_3 + \xi_4\xi_2 + \xi_1\xi_4 + \xi_2\xi_3 &= 0 \\ \xi_2\xi_3\xi_4 + \xi_1\xi_3\xi_4 + \xi_1\xi_2\xi_4 + \xi_1\xi_2\xi_3 &= -\frac{2}{\lambda} \\ \xi_1\xi_2\xi_3\xi_4 &= 1. \end{aligned}$$

E, eliminando ξ_4 , obtemos $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_1\xi_2\xi_3(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3) = 0$ ⁸⁹, concluindo assim que os pontos (ξ_1) , (ξ_2) , (ξ_3) são colineares o mesmo acontecendo com (ξ_1) , (ξ_2) , (ξ_4) e, consequentemente os pontos (ξ_1) , (ξ_2) , (ξ_3) e (ξ_4) são também colineares. Temos então que os pontos de contacto das quatro tangentes a uma *lemniscata* que passam por um determinado ponto são colineares, pertencendo à recta r , de equação:

$$(12) \quad (1 + \lambda^2)x + (1 - \lambda^2)y + a\sqrt{2}\lambda = 0.$$

A recta simétrica a r relativamente à origem é dada pela equação

$$(1 + \lambda^2)x + (1 - \lambda^2)y - a\sqrt{2}\lambda = 0,$$

sendo esta a recta perpendicular à recta $O(\lambda)$ ⁹⁰ no seu ponto médio. Deste modo obtém-se uma construção simples dos pontos de contacto das tangentes a uma *lemniscata* por um dado ponto.

Vejamos mais uma observação relativa à envolvente de todas as rectas (12) definidas pelos quatro pontos de contacto das quatro tangentes à curva que passam por um determinado ponto. A envolvente é a hipérbole equilátera

$$(13) \quad x^2 - y^2 = \frac{a^2}{2}.$$

⁸⁹ Devia ser $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_1\xi_2\xi_3(\xi_1\xi_2 + \xi_2\xi_3 + \xi_1\xi_3) = 0$.

⁹⁰ Recta por O e λ .

O círculo osculador à *lemniscata* no ponto (λ) intersecta a curva num ponto, (μ) , a que se chama satélite de (λ) . Aplicando a (10), temos

$$(14) \quad \lambda^3 \mu = 1.$$

Observamos que os pontos satélites de uma cadeia formam uma segunda cadeia. A recta que une o ponto (λ) ao seu ponto satélite (μ) tem equação

$$(15) \quad (\lambda^6 + 1)x + (\lambda^6 - 1)y - 2a\sqrt{2}\lambda^3 = 0,$$

sendo também esta a equação que se obtém para a representação analítica da perpendicular levantada no ponto (μ) ao raio vector $O(\mu)$, logo o ângulo que $O(\mu)$ faz com $(\lambda)(\mu)$ é recto. Assim, a *lemniscata* é a podaria do ponto O em relação à envolvente da recta (15), isto é, da hipérbole equilátera

$$(16) \quad x^2 - y^2 = 2a^2.$$

A equação (14) revela que por cada ponto (μ) da *lemniscata* passam três círculos osculadores. Considerando (λ_1) , (λ_2) , (λ_3) os seus pontos de osculação, temos:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$$

$$\lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1 + \lambda_1 \lambda_2 = 0$$

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \frac{1}{\mu},$$

logo a equação (9) é satisfeita. A recta que contém os pontos (λ_1) , (λ_2) , (λ_3) tem equação

$$(1 + \mu^2)x + (1 - \mu^2)y - 2\sqrt{2}a\mu = 0.$$

Ora esta representa a perpendicular no ponto (μ) ao correspondente raio vector, logo é verdadeira a seguinte proposição:

Por cada ponto da lemniscata podem conduzir-se três círculos osculadores; os pontos de osculação encontram-se sobre a perpendicular levantada nesse ponto ao respectivo raio vector.

Loria refere a utilidade das representações paramétricas de (4) e a existência de um artifício analítico cuja aplicação é conveniente em muitos casos. Consideremos os focos A_1 e A_2 como pólos de um sistema de coordenadas bipolares ρ_1 , ρ_2 ; sendo $\rho_1 \rho_2 = a^2$ a equação da *lemniscata*, podemos escrever

$$(17) \quad \rho_1 = ae^n, \quad \rho_2 = ae^{-n},$$

onde n é um parâmetro arbitrário e, utilizando funções hiperbólicas,

$$(17') \quad \rho_1 = a(\cosh(n) + \sinh(n)), \quad \rho_2 = a(\cosh(n) - \sinh(n)).$$

Vejamos uma aplicação destas equações. Tracemos a bissectriz $[MD]$ do ângulo M do triângulo $[A_1MA_2]$. Teremos então

$$\overline{A_1D} + \overline{A_2D} = 2a, \quad \frac{\overline{A_1D}}{\overline{A_2D}} = \frac{\rho_1}{\rho_2},$$

logo, aplicando (17),

$$\overline{A_1D} = a(1 + \operatorname{tgh}(n)), \quad \overline{A_2D} = a(1 - \operatorname{tgh}(n)), \quad \overline{OD} = a \operatorname{tgh}(n).$$

Além disso, temos

$$\overline{A_1M} \cdot \overline{A_2M} = \overline{MD}^2 + \overline{A_1D} \cdot \overline{A_2D},$$

logo

$$a^2 = \overline{MD}^2 + a^2(1 - \operatorname{tgh}^2(n)),$$

isto é,

$$\overline{MD} = a \operatorname{tgh}(n).$$

Conclui-se assim que $\overline{MD} = \overline{OD}$ e, por conseguinte, é válida a seguinte proposição:

Numa lemniscata, os raios vectores de um ponto qualquer e o segmento que une os focos constituem um triângulo que possui a propriedade de a longitude da bissectriz do ângulo formado pelos raios vectores ser igual à distância do seu pé até ao centro da curva.

Para obter uma outra aplicação das funções hiperbólicas, na equação polar (2') façamos

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \operatorname{tgh}\left(\frac{n}{2}\right).$$

Então a área A de um sector da curva terá a seguinte expressão

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{\varphi} \rho^2 d\varphi = \frac{a^2}{2} \int_0^n \frac{2 - \cosh^2(n)}{\cosh^3(n)} dn = n^2 \int_0^n \frac{dn}{\cosh^3(n)} - \frac{a^2}{2} \int_0^n \frac{dn}{\cosh(n)} = \frac{a^2 \operatorname{senh}(n)}{\cosh^2(n)}.$$

Baixando A_2K perpendicularmente a OM , obtemos um triângulo $[OA_2K]$ cuja área T é dada por

$$T = \frac{1}{2} \overline{OK} \cdot \overline{A_2K} = \frac{a^2 \operatorname{sen}(\varphi) \cos(\varphi)}{2} = \frac{a^2 \operatorname{senh}(n)}{2 \cosh^2(n)},$$

logo $T = \frac{1}{2} A$, isto é, a perpendicular baixada desde um foco da *lemniscata* sobre um raio

vector divide em duas partes iguais o sector fechado por este raio vector, o eixo e a curva.

Terminando a secção, Loria refere duas construções práticas da *lemniscata de Bernoulli* que se obtêm considerando primeiro esta curva como caso particular da *lemniscata de Booth*

ponto (97) ou da curva de Watt ponto (105), depois tendo em conta ponto (143) uma notável expressão para o perímetro da *lemniscata* e também que «a curva plana cujos arcos medidos desde um ponto fixo são descritos por um móvel inicialmente em repouso ao mesmo tempo que as cordas correspondentes, é uma *lemniscata* cujo centro se encontra na origem do movimento e cujo eixo faz com a vertical um ângulo de 45°. Esta interessante propriedade mecânica da *lemniscata* que já aqui falamos foi, de acordo com Loria, descoberta por N. Fuss e demonstrada mais tarde de forma mais simples por A. Serret⁹¹.

Gino Loria refere ainda duas curvas, a *kohlenspitzcurve* e a *krenzcurve*, que em determinadas condições se assemelham à *lemniscata*.⁹²

Assim, no capítulo 19 reservado às “Quárticas que têm três nós de inflexão: a *krenzcurve* e a *Kohlenspitzcurve*”, ponto (96), Loria considera a transformação plana quadrática cujos pontos fundamentais são os pontos A_1 , A_2 e A_3 de um sistema de coordenadas homogêneas, representada analiticamente por

$$(1) \quad \rho x'_i = \frac{k_i}{x_i} (i = 1, 2, 3);$$

aplicando-a à cônica T' de equação

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ij} x'_i x'_j = 0$$

obtem a curva T de equação

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{k_i k_j a_{ij}}{x_i x_j} = 0.$$

A curva T é uma quártica unicursal que tem A_1 , A_2 e A_3 como pontos duplos. Se T' é tangente a um lado do triângulo $[A_1 A_2 A_3]$, então um ponto duplo de T torna-se um retrocesso; logo se T' é tangente a todos os lados deste triângulo, T é uma quártica com três retrocessos. Supondo que o triângulo $[A_1 A_2 A_3]$ é auto-recíproco em relação a T' , os três pontos singulares de T são nós de inflexão e T é uma curva análoga à *lemniscata de Bernoulli*. Neste caso, a cônica T' tem equação

$$a_1 x_1'^2 + a_2 x_2'^2 + a_3 x_3'^2 = 0$$

logo T tem equação

⁹¹ O. Basset observou que também se obtém uma *lemniscata* supondo que um ponto móvel, em vez de ser pesado, seja atraído para um ponto fixo do plano da curva por uma força proporcional à distância.

⁹² Também Gomes Teixeira estuda estas curvas denominando-as de puntiforme e cruciforme, respectivamente e referindo apenas a *lemniscata de Bernoulli* como sendo uma perspectiva destas curvas.

$$(2) \quad \frac{a_1 k_1^2}{x_1^2} + \frac{a_2 k_2^2}{x_2^2} + \frac{a_3 k_3^2}{x_3^2} = 0;$$

Os pares de tangentes nos pontos singulares têm equações

$$(3) \quad \frac{x_2}{k_2 \sqrt{a_2}} \pm \frac{x_3}{k_3 \sqrt{-a_3}} = 0, \quad \frac{x_3}{k_3 \sqrt{a_3}} \pm \frac{x_1}{k_1 \sqrt{-a_1}} = 0, \quad \frac{x_1}{k_1 \sqrt{a_1}} \pm \frac{x_2}{k_2 \sqrt{-a_2}} = 0,$$

logo as tangentes no ponto A_i são conjugadas harmónicas em relação aos lados do triângulo fundamental que passa por A_i . Se todos os pontos A_i são reais, para que T tenha uma equação com coeficientes reais, uma das constantes a_i deve ser negativa. Se por exemplo a_1 é negativa, então o ponto A_1 é isolado e os outros são nós. Projectando esta curva de modo que um lado do triângulo fundamental esteja no infinito, obtém-se uma curva que tem formas diferentes conforme o dito lado contenha ou não o ponto isolado. Na primeira hipótese a projecção tem uma equação da forma

$$(4) \quad \frac{a^2}{x^2} - \frac{b^2}{y^2} = 1,$$

é uma curva que tem como pontos duplos de inflexão a origem e o ponto no infinito de Oy e como ponto isolado o ponto no infinito de Ox ; cada um dos seus pontos reais pertence à faixa do plano limitada pelas rectas $x = \pm a$. Se os eixos são ortogonais, a sua forma é semelhante à figura formada pelos filamentos de uma lâmpada eléctrica; explicando-se assim o seu nome *kohlenspitzcurve* proposto por Schoute.

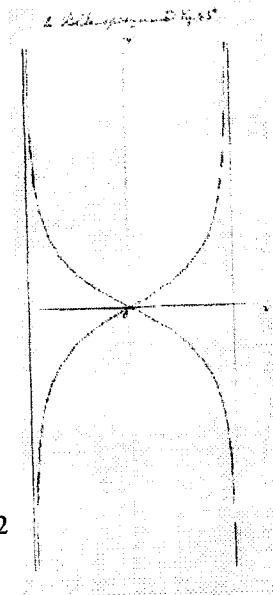


Fig. 4.2

Se agora a curva tem equação

$$(5) \quad \frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} = 1,$$

os pontos no infinito dos eixos são pontos duplos de inflexão desta curva e a origem é um ponto isolado. Todos os pontos reais da curva são exteriores à faixa $x = \pm a$, $y = \pm b$, estando estes pontos distribuídos sobre quatro ramos hiperbólicos que formam uma cruz, daí a explicação do nome krenzcurve inventado por Schoute.

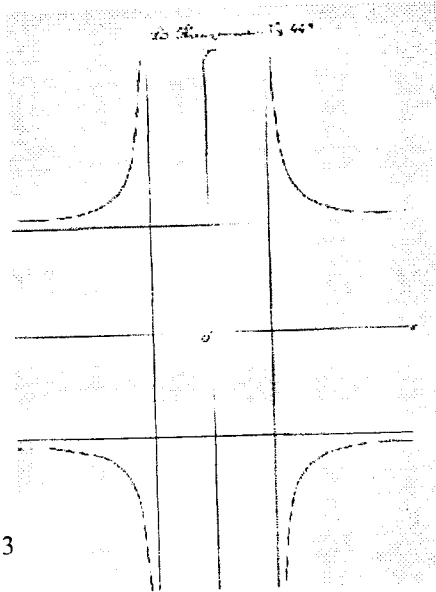


Fig. 4.3

Gino Loria acrescenta a curiosidade de esta curva ser já conhecida muito antes, tendo Terquem proposto uma questão a seu respeito em 1847, e além disso, ser esta também a curva estudada por *de la Gommerie* sob o nome *trinodale harmónico*. O matemático italiano acha estranho que os franceses prefiram o nome alemão ao nome proposto pelo matemático francês.

Substituindo em (4)

$$(6) \quad x = a \cos(\varphi), \quad y = b \cotg(\varphi)$$

e em (5)

$$(7) \quad x = \frac{a}{\cos(\varphi)}, \quad y = \frac{b}{\sin(\varphi)}$$

e substituindo também $\lambda = \operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2}\right)$, obtém-se a representação das coordenadas dos pontos da curva por funções racionais de um parâmetro.

A curva (2) pode ainda ser real se A_2 e A_3 forem números complexos conjugados.

Fazendo

$$a_1 = 1, a_2 = m + ni, a_3 = m - ni, \frac{x_2}{x_1} = x + iy, \frac{x_3}{x_1} = x - iy$$

a equação (2) fica

$$(x^2 + y^2)^2 + 2m(x^2 - y^2) - 4mxy = 0,$$

e a curva correspondente assemelha-se à *lemniscata de Bernoulli* e torna-se mesmo nesta curva se os eixos forem ortogonais e $n = 0$.

De seguida, no ponto (97), Gino Loria atribui, importância à *lemniscata de Booth*, apresentando a construção que passamos a citar:

Dados dois pontos F_1 e F_2 considere-se o segmento $\overline{F_1F_2}$ de modo que tenha o ponto O como centro ⁹³ e $2c$ como longitude ⁹⁴; seja ainda dada uma constante f ; o lugar geométrico dos pontos M tais que se tenha

$$(1) \quad \overline{MF_1}^2 \cdot \overline{MF_2}^2 = c^4 \pm f^2 \cdot \overline{OM}^2$$

é uma curva estudada por J. Booth e chamada de lemniscata por ter forma semelhante à curva que tem este nome.

Tomando O como origem e $\overline{F_1F_2}$ como eixo dos xx , a equação (1) transforma-se na equação

$$(2) \quad (x^2 + y^2)^2 = (\pm f^2 + 2c^2)x^2 + (\pm f^2 - 2c^2)y^2,$$

muito semelhante à indicada por Gomes Teixeira (capítulo 3). Assim se conclui que as *lemniscatas* de Booth são quárticas que possuem dois eixos de simetria e três pontos duplos, mais precisamente, os pontos cíclicos e o ponto O.

Para fazer a discussão adequada da equação (2), Loria considera vários casos para $\pm f^2$, começando por considerar $+f^2$ e depois $-f^2$.

a) Considerando $f^2 > 2c^2$, e pondo $f^2 + 2c^2 = a^2$, $f^2 - 2c^2 = b^2$ em vez da equação (2), obtemos

$$(3) \quad (x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2 \text{ onde } a^2 > b^2,$$

que representa uma curva chamada por Booth de *lemniscata elíptica*.

b) Se $f^2 = 2c^2$, a *lemniscata* divide-se nos dois círculos $x^2 + y^2 = \pm 2cx$.

c) Se $f^2 < 2c^2$, e pondo $2c^2 + f^2 = a^2$, $2c^2 - f^2 = b^2$ em vez de (2), obtemos

$$(4) \quad (x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 - b^2y^2 \text{ onde } a^2 > b^2,$$

⁹³ Julgamos que Loria se refere ao ponto médio.

⁹⁴ Leia-se comprimento do segmento.

que representa uma *lemniscata hiperbólica* de Booth.

Na segunda hipótese, para que a curva seja real, deve ter-se $2c^2 - f^2 > 0$; fazendo $2c^2 - f^2 = a^2$ e $2c^2 + f^2 = b^2$, obtém-se a equação

$$(5) \quad (x^2 + y^2)^2 = a^2 x^2 - b^2 y^2 \text{ onde } a^2 < b^2,$$

que representa uma outra *lemniscata hiperbólica* de Booth, em particular uma hiperbólica equilátera.

Finalmente, no caso de $f = 0$, a equação (2) fica

$$(6) \quad (x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) = 0,$$

a curva corresponde a uma *lemniscata de Bernoulli*.

As equações (3), (4), (5) mostram que o centro de uma *lemniscata de Booth* é um ponto isolado se esta é elíptica, mas é um nó se se tratar de uma *lemniscata hiperbólica*. Além disso, as tangentes nos pontos cíclicos têm como equações

$$x + iy = \pm c, \quad x - iy = \pm c;$$

por conseguinte, os pontos fixos F_1 e F_2 serão focos extraordinários para todas as *lemniscatas* de Booth.

O matemático italiano observa ainda que as equações (3), (4), (5) se podem obter eliminando k nas equações

$$a^2 x^2 \pm b^2 y^2 = k^2 z^2, \quad x^2 + y^2 = kz;$$

logo, temos que as *lemniscatas de Booth* se podem obter como projecções ortogonais da intersecção de um paraboloide com um cone quádrico que têm o mesmo eixo e o mesmo vértice, desde que o plano de projecção seja perpendicular ao eixo.

Uma segunda construção estereométrica⁹⁵ destas curvas obtém-se observando que são espíricas particulares, associação esta também notada por Gomes Teixeira, como vimos no capítulo 3. Loria aplica as fórmulas das espíricas, e conclui:

A *lemniscata elíptica* (3) é a secção obtida da espírica gerada pela rotação do círculo de raio $\frac{a^2}{2\sqrt{a^2 - b^2}}$ em torno de um eixo cuja distância ao centro é $\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{2}$, por um plano cuja distância ao eixo de rotação da espírica é $\frac{b^2}{2\sqrt{a^2 - b^2}}$, e a *lemniscata hiperbólica* (3) ou (4) é

⁹⁵ Estereometria: aplicação da geometria à medida de volumes.

a secção obtida da espírica (aberta) resultante da rotação do círculo de raio $\frac{a^2}{2\sqrt{a^2+b^2}}$ em torno do eixo cuja distância ao centro do círculo é $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$ por um plano cuja distância ao eixo de rotação da espírica é $\frac{b^2}{2\sqrt{a^2+b^2}}$.

As *lemniscatas* de J. Booth podem ainda ser construídas sem a utilização do plano pelo seguinte procedimento, já visto no capítulo 1 em relação à *lemniscata de Bernoulli*: sendo dados um círculo de centro C e raio r e um ponto O, sobre cada transversal conduzida por O toma-se um segmento $\overline{OP}$ igual à corda interceptada pelo círculo sobre a transversal. O lugar geométrico do ponto P é uma *lemniscata de Booth*.

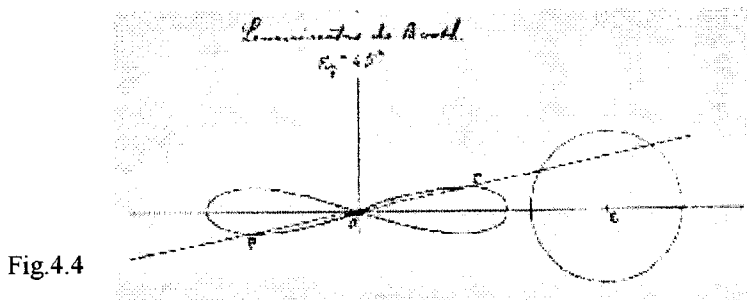


Fig.4.4

Tomando O como polo, $[OC]$ como eixo polar e d como a distância $\overline{OC}$, a equação polar do lugar procurado é evidentemente

$$(7) \quad \rho = 2\sqrt{r^2 - d^2 \sin^2(\varphi)}$$

e, por conseguinte, tem a equação cartesiana

$$(8) \quad (x^2 + y^2)^2 = 4\{r^2 x^2 + (r^2 - d^2)y^2\}.$$

Comparando esta equação com as equações (3), (4), (5) observa-se que o lugar geométrico do ponto P é uma *lemniscata elíptica* ou hiperbólica, consoante o ponto O seja exterior ou interior ao círculo dado. Considerando $d = r\sqrt{2}$, como as tangentes ao círculo que passam em O são perpendiculares entre si, obtém-se uma *lemniscata de Bernoulli*. Encontra-se assim uma construção cómoda desta curva, atribuída a Maclaurin, e que já conhecíamos do capítulo 1.

A rectificação das *lemniscatas* elípticas e hiperbólicas faz-se por meio de integrais elípticos, e foi por este motivo que J. Booth as estudou. Mas deve notar-se que, independentemente deste géometra, e do mesmo ponto de vista, a *lemniscata hiperbólica* foi

considerada por Tartolini, que abordou a divisão em duas e em três partes iguais do quadrante desta curva. Tartolini notou que existem arcos da curva cuja diferença é igual a um arco de círculo. O geômetra acima citado considerou as curvas (4) e (5) como generalizações da *lemniscata de Bernoulli*, uma vez que enquanto esta é a podaria de uma hipérbole equilátera, as curvas (4) e (5) são podarias de uma hipérbole qualquer em relação ao centro (esta propriedade será exposta em anexo ((269))).⁹⁶

Uma outra *lemniscata* referida por Gino Loria no ponto (140) é a *lemniscata* superior ou cassinoidea.

Sejam duas variáveis complexas $z = x + iy$, $Z = X + iY$ relacionadas pela expressão

$$(1) \quad Z = f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n.$$

Se considerarmos estas duas variáveis sobre dois planos π_z e π_Z , teremos entre estes planos uma transformação isogonal⁹⁷. No plano π_Z , consideremos uma recta qualquer

$$(2) \quad \frac{Y - b}{X - a} = \operatorname{tg}(\gamma).$$

Transformando esta equação na forma

$$\gamma = \operatorname{arctg}\left(\frac{Y - b}{X - a}\right),$$

e aplicando ao segundo membro a fórmula

$$\operatorname{arctg}(\xi) = \frac{1}{2i} \log \frac{i - \xi}{i + \xi},$$

designando por c o número complexo $a + ib$ e o conjugado de ξ por $\bar{\xi}$, obtemos então

$$(3) \quad \gamma = \frac{1}{2i} \log \frac{f(z) - c}{\overline{f(z) - c}}.$$

Sejam $c_1, c_2, \dots, c_n$ as raízes da equação $f(z) = c$, então

$$f(z) - c = (z - c_1)(z - c_2) \dots (z - c_n),$$

e

$$\overline{f(z) - c} = (\bar{z} - \bar{c}_1)(\bar{z} - \bar{c}_2) \dots (\bar{z} - \bar{c}_n).$$

A equação (3) fica transformada em

$$\gamma = \frac{1}{2i} \log \prod_{k=1}^{k=n} \frac{z - c_k}{\bar{z} - \bar{c}_k},$$

⁹⁶ Veja-se anexo 4.1.

⁹⁷ Transformação conforme.

ou ainda

$$\gamma = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{2i} \log \frac{z - c_k}{z - \bar{c}_k}.$$

Aplicando ao segundo membro a fórmula acima citada $\frac{1}{2i} \log \frac{i - \xi}{i + \xi} = \text{arctg}(\xi)$,

conclui-se que

$$(4) \quad \gamma = \sum_{k=1}^{k=n} \text{arctg} \left(\frac{y - b_k}{x - a_k} \right).$$

Ora, considerando n pontos $P_k(a_k, b_k)$, sendo $\varphi_k = \text{arctg} \left(\frac{y - b_k}{x - a_k} \right)$ o ângulo definido pela recta que une o ponto $M(x, y)$ ao ponto P_k com o eixo Ox , deduz-se que a equação (4) é equivalente a

$$(5) \quad \gamma = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n.$$

Assim, apelidando de orientação de um sistema de rectas a soma dos ângulos formados entre cada uma delas e uma recta fixa, podemos afirmar:

Na transformação isogonal determinada pela equação (1), às rectas do plano π_z correspondem, no plano π_z curvas de ordem n ; uma dessas rectas é o lugar geométrico de um ponto que é unido a n pontos fixos por um sistema de n rectas cuja orientação é constante.

Estas curvas chamam-se, segundo Holmuller, hipérboles irregulares de ordem n , sendo regulares se os pontos $P_1, P_2, \dots, P_n$ forem vértices de um polígono regular, isto é, se as constantes $a_1, a_2, \dots, a_n$ forem todas iguais a zero.

Os pontos fixos $P_1, P_2, \dots, P_n$ são determinados pela equação

$$(6) \quad f(z) = c;$$

mas a recta (2) pode ainda ser determinada através da equação

$$(2') \quad \frac{X - (b + d \sin(\gamma))}{Y - (a + d \cos(\gamma))} = \text{tg}(\gamma),$$

onde d é uma constante arbitrária. Por um raciocínio análogo ao de (2), resultam valores semelhantes, encontrando-se em vez de (6) a seguinte equação

$$(6') \quad f(z) = c + de^{ij},$$

e, em lugar dos n pontos fixos, $P_1, P_2, \dots, P_n$ os outros pontos $P_1^{(d)}, P_2^{(d)}, \dots, P_n^{(d)}$. Assim, nota-se que as hipérboles acima definidas admitem infinitas definições análogas que

correspondem a diferentes conjuntos de n pontos fixos $P_1^{(d)}, P_2^{(d)}, \dots, P_n^{(d)}$, cujo centro de gravidade é sempre o mesmo, e a orientação do sistema de n rectas é também a mesma, qualquer que seja o conjunto de pontos fixos que se considere.

A transformação (1) leva ainda a uma segunda classe importante de curvas. Com efeito, consideremos no plano π_z o círculo cujo centro é o ponto (a, b) e o raio é R . A sua equação é

$$(8) \quad (X - a)^2 + (Y - b)^2 = R^2,$$

ou

$$[(X + iY) - (a + ib)][(X - iY) - (a - ib)] = R^2,$$

isto é

$$(Z - c)(\bar{Z} - \bar{c}) = R^2.$$

Aplicando a transformação em causa, obtém-se a seguinte representação analítica

$$[f(z) - c][\overline{f(z) - c}] = R^2;$$

que pode escrever-se na forma

$$\prod_{k=1}^{k=n} (z - c_k)(\bar{z} - \bar{c}_k) = R^2$$

ou

$$(9) \quad \prod_{k=1}^{k=n} \sqrt{(x - a_k)^2 + (y - b_k)^2} = R.$$

Podemos assim concluir que

na transformação isogonal determinada pela equação (1), aos círculos do plano π_z correspondem no plano π_z , curvas de ordem $2n$, correspondendo a uma delas o lugar geométrico dos pontos cujo produto das distâncias a n pontos fixos é constante.

Se $n = 2$, estas curvas são ovais de Cassini (ponto 90) ou *lemniscatas* de Bernoulli (ponto 93). Em geral têm o nome de cassinoideas com n focos, segundo W. Roberts, ou, segundo Holmüller, de *lemniscatas de ordem superior regulares* se $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$, ou *lemniscatas de ordem superior irregulares* no caso geral.

Se, em vez da equação (1), considerarmos a seguinte

$$Z = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$

onde φ e ψ são polinómios de grau μ e ν que não têm factores comuns, obtém-se em vez das curvas anteriormente definidas, as curvas caracterizadas pelas seguintes equações

$$(\varphi_1' + \varphi_2' + \dots + \varphi_\mu') - (\varphi_1'' + \varphi_2'' + \dots + \varphi_\nu'') = \gamma$$

$$\frac{d_1' d_2' \dots d_\mu'}{d_1'' d_2'' \dots d_\nu''} = R.$$

A estas novas curvas Holmüller estendeu o nome de hipérboles e *lemniscatas superiores*. Mas já anteriormente esta curva havia sido estudada por Darboux, tendo descoberto algumas das suas propriedades notáveis. O caso particular em que os pontos fixos são os vértices de dois polígonos regulares que têm o mesmo centro e o mesmo número de lados havia sido encontrado por A. Genochi que, aplicando um método de transformação geométrica imaginado em 1842 por W. Roberts, formulou algumas proposições.

As últimas *lemniscatas* referidas por Gino Loria são a *lemniscata logarítmica* e a *lemniscatriz*, no capítulo VI dedicado às Curvas transcendentais, sub-capítulo 22, ponto 234.

A *lemniscata logarítmica* tem equação

$$(1) \quad y^2 = x^2 \log \frac{a^2}{x^2},$$

e a sua descoberta e determinação de forma deve-se a O. Schlömilch, bem como a construção da tangente e do centro de curvatura num ponto qualquer.

Já a *lemniscatriz* tem equação

$$(2) \quad \operatorname{sen}(iy) = i \cos(x),$$

escrevendo-se também na forma

$$(3) \quad y = \log \left\{ \cos(x) + \sqrt{1 + \cos^2(x)} \right\}.$$

Esta curva foi encontrada por E. Orkinghaus nas suas investigações sobre a *lemniscata*. A equação (3) pode ser transformada na

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\operatorname{sen}(x)}{\sqrt{1 + \cos^2(x)}}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2 \cos(x)}{\sqrt{(1 + \cos^2(x))^3}},$$

em que todos os pontos

$$x = k\pi, \quad y = \log(\sqrt{2} + 1) \quad (k \text{ inteiro})$$

são pontos de culminação⁹⁸ da *lemniscatriz*, e todos os pontos

$$x = (2k + 1)\frac{\pi}{2}, \quad y = 0 \quad (k \text{ inteiro})$$

são pontos de inflexão, sendo as tangentes correspondentes todas paralelas à bissectriz do ângulo definido pela semi-recta positiva de Ox com a negativa de Oy. Se R é o raio de curvatura e s o arco da lemniscatriz, por (3) conclui-se que

⁹⁸ Entenda-se pontos extremos.

$$\frac{ds}{dx} = \frac{\sqrt{2}}{1 + \cos^2(x)}, \quad R = \frac{\sqrt{2}}{\cos(x)}.$$

Como

$$x = \arccos\left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right),$$

obtemos

$$dx = \frac{\sqrt{2}dR}{R\sqrt{R^2 - 2}},$$

e a igualdade $\frac{ds}{dx} = \frac{\sqrt{2}}{1 + \cos^2(x)}$ pode escrever-se

$$(4) \quad s = 2 \int \frac{dR}{\sqrt{R^4 - 4}},$$

sendo esta a equação intrínseca da *lemniscatriz*.

Escrevendo na forma

$$s = \int \frac{dR}{\sqrt{\left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right)^4 - 1}},$$

vê-se a analogia da lemniscatriz com a espiral sinusoidal de índice 2, cuja equação intrínseca é

$$s = 3 \int \frac{dR}{\sqrt{\left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right)^4 - 1}}.$$

4.2 Joaquin de Vargas y Aguirre

De Joaquin Vargas y Aguirre pouco sabemos, apesar de todas as tentativas para encontrar algo mais a seu respeito. Apenas sabemos o que nos é indicado na capa da obra por nós estudada. Foi “*arquitecto, Licenciado em Ciências Exactas, Académico correspondente de las Reales Academias de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales y de San Fernando*”.

Joaquin de Vargas y Aguirre, na sua obra *Catálogo General de Curvas*, publicada pela Imprensa de la *Gaceta de Madrid* em 1908, dispõe de modo alfabético e sintético cada uma das curvas nela tratadas, em particular a “*Lemniscata ó lenticular*”. O autor não se dedicou

apenas às curvas, incluindo também nesta obra definições de conceitos ligados às curvas como arco, involuta, podarias entre muitos outros.

Para cada curva, o matemático espanhol, distingue várias secções, entre as quais definição, classificação, história, equação, forma, propriedades, traçado, aplicações e por fim estuda outras curvas também pertencentes à família, neste caso *lemniscata*. Esta obra apresenta assim uma estrutura em tudo diferente das duas antes referidas, quer no critério escolhido para ordenar as curvas, aqui alfabético e nas duas anteriores consoante o grau da curva, quer no tratamento dado a cada uma delas.

Nesta obra, a *lemniscata* é definida, analogamente ao que vimos em secções anteriores, como o lugar geométrico dos pontos em que as distâncias a dois pontos fixos é constante e igual ao quadrado de metade da distância entre esses pontos. Segue-se a classificação como um caso particular da cassinoidea, orientando o leitor para a secção dedicada a esta curva (também tratada por Gino Loria, como vimos). Este matemático distingue entre *lemniscata hiperbólica*, *lemniscata parabólica* e *lemniscata elíptica* consoante em

$$r^4 - 2c^2 r^2 \cos(2t) + c^4 = a^4$$

se tenha $\frac{c}{a}$ maior, igual ou menor que 1.

De seguida Aguirre faz um breve resumo histórico, referindo Fagnano como o primeiro matemático que se ocupou da *lemniscata*, na sua obra *Prodizioni mathematiche* (Pesaro, 1750). Refere também Euler, a quem atribui alguma teoria analítica sobre esta curva (*M. de Petersbourg*, tomo V, 1751, p. 52) e Sturm, que descobriu a expressão da sua área (*Ann. Mathem. de Gergonne*). Acrescenta que Bernoulli a estudou, bem como Serret no *Journal Liouville* (tomo VIII, p. 499) e na sua obra *Mémoire sur les propriétés de la lemniscate et des courbes elliptiques de premiere classe*. Menciona também os trabalhos de Fuss (*Mémoires de la Académie des sciences de Saint Petersbourg*, 1824); de D'André (*Nou. Ann.*, tomo V, p. 331); de Bonnet (P. Ossian, *Sur les propriétés de la lemniscate et sur les omblics des surfaces*, 1845) e de Bergery (*Geométrie des courbes appliquées à l'industrie*).

Vargas considera dois pontos fixos F e F' tais que $\overline{FF'} = 2a$ e um ponto M da curva tal que $\overline{MF} = \rho$, $\overline{MF'} = \rho'$ e $\rho\rho' = a^2$. Assumindo o eixo $[FF']$ e a sua perpendicular pelo ponto médio como eixos coordenados, obtém a equação

$$(y^2 + x^2 + c^2)^2 - 4a^2 x^2 = a^4$$

donde deduz

$$y^2 = a\sqrt{4x^2 + a^2} - (x^2 + a^2).$$

lemniscatas duplas, *lemniscatas flechadas* e *lemniscatas* simples, podendo-se na obra de Lamé acima referida conhecer ainda o traçado destas linhas.

No que diz respeito à *lemniscata de Geron*, Vargas apenas refere ser um caso particular da *parábola virtual* e representa-a pela equação $a^2 y^2 = x^2 (a^2 - x^2)$, semelhante à dada por Gino Loria, e refere a obra deste matemático onde consta tal estudo.

As *lemniscatas esféricas ou hipópedas* são referidas como curvas que resultam da intersecção de um cilindro de base circular com uma esfera, que lhe é tangente interiormente. Acrescenta que o seu nome se deve a Schiapparelli, que as utilizou para representar as trajectórias do movimento dos planetas. Dá ainda as suas equações $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $(z - b)^2 + y^2 = (a - b)^2$ e propõe a consulta da obra *Sfere omocentriche* de Schiapparelli.

Encontra-se também nesta obra uma curva chamada de *Ocho*, cujas equações cartesiana e polares são respectivamente

$$y^4 = y^2 - x^2$$

e

$$r = \frac{a\sqrt{\cos(2\theta)}}{\cos^2(\theta)}.$$

Refere ainda que este nome foi atribuído por Aubry, que a estudou no *Journal de Mathématiques Spéciales*, e que a sua construção e semelhança com a *lemniscata* pode ser estudada através dos trabalhos de Barisien.

Praticamente no fim desta obra encontra-se a *curva de Viviani*. Vargas y Aguirre define esta curva como o lugar dos pontos da esfera tal que “*los crecimientos son iguales en longitud y latitud*” e refere o nome de John Bernoulli. Na secção relativa à história desta curva refere o problema proposto por Viviani que já descrevemos no capítulo 3 e quem o resolveu, Leibniz e John Bernoulli⁹⁹. Aponta também que esta curva parece coincidir com a curva chamada *Paradoxos de Menelaus*. Quanto às propriedades desta curva, refere que é anti-estereográfica da *lemniscata* e da *estrofóide*; a superfície lateral dos cilindros de Viviani na esfera é quadrável, e também que a projecção estereográfica desta curva é uma *lemniscata*.

Vejamos agora o tratamento dado à *lemniscata* noutras obras.

⁹⁹ É curioso notar que Gomes Teixeira refere Jacques Bernoulli e não John Bernoulli, contudo é talvez mais certo como refere Katz que escreve Os Bernoulli.

4.3 Outras obras...

Uma obra de algum interesse para o estudo da curva *lemniscata* é *Curvis Lemniscatis*, de Gerhardus Christophorus Hermannus Vechtman, publicada em 1843, uma vez ser à primeira vista uma obra exclusivamente dedicada ao estudo da *lemniscata*, dado ao seu título, mas que na realidade versa as curvas de Cassini, das quais a *lemniscata* é um caso particular. Trata-se de uma *Dissertação Inaugural Filosófica sobre as Curvas Lemniscatas apresentada na Augusta Geórgia com a autoridade e o consenso da Altíssima ordem dos Filósofos, para obter legalmente as elevadas honras na Filosofia*.

O autor, na introdução, considera dados no mesmo plano dois pontos fixos A e B, aos quais se relaciona um terceiro ponto móvel P e questiona em que condições $AP \cdot BP$ é constante (igual a a^2). Acrescenta que tal questão leva a “um singular género de curvas de quarta ordem que se podem comparar com secções cónicas, pelo facto de se dividirem pelo menos em três espécies...”, mas que a todas chamará de *lemniscatas*, deduzindo-se assim a possibilidade de se referir às ovais de Cassini, essas sim divididas em três classes. Curiosamente, refere mais adiante que o estudo destas curvas dá um incremento à análise pura e ao estudo das “elípticas transcendentess”.

Vechtman opta então por apresentar dum modo resumido, os matemáticos que o antecederam no estudo destas curvas: Bernoulli que a encontrou e lhe deu o nome, surgindo a equação $xx + yy = a\sqrt{xx - yy}$, já vista neste capítulo quando nos referimos a Gino Loria, e uma referência à sua forma em oito; Fagnano, que segundo ele expôs a teoria das *lemniscatas* tratou sobretudo a divisão e multiplicação dos arcos desta curva, tal como também já referimos. Este autor observa que foram estas investigações de Fagnano que, depois de estudadas por Euler, levaram à formação da teoria das funções elípticas transcendentess.

Este matemático dedica a primeira secção ao tema “Das *lemniscatas* em geral”, onde se encontra as equações fundamentais das *lemniscatas*, entre as quais

$$y^4 + 2x^2y^2 + x^4 + 2c^2y^2 - 2c^2x^2 + c^4 - a^4 = 0.$$

Dedica-se, no ponto 2, à explicação mais completa destas equações e à sua diferenciação (ponto 6), e já o ponto 12 desta secção é dedicada ao esboço da *lemniscata*. Na segunda secção aborda a *lemniscata* propriamente dita (isto é, para $a = c$), suas equações, construção, tangentes e normais (primeiro no caso particular $a = c$ e depois no caso geral). Trata depois a quadratura, a divisão da área da *lemniscata*, a rectificação desta curva onde conclui que leva à

integração de uma função da forma $\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$, e a divisão do arco: bissecção (obtem $\sqrt{\sqrt{2}-1}$

como comprimento do raio vector no ponto em causa), trissecção e quadrissecção do quadrante e conclui com a soma numérica do arco do quadrante.

Percorrendo a obra *Exercices de Géométrie descriptive* de Gabriel Marie, cuja 4ª edição foi escrita em 1909, encontramos várias referências às *lemniscatas* de Bernoulli e de Gerono, algumas das quais veremos de seguida.

Gabriel Marie refere, na p. 64, a *lemniscata* como sendo a projecção vertical da curva de intersecção de um cilindro de revolução com uma esfera, tal como a hipópeda referida por Gino Loria e Gomes Teixeira (cap. 3). O cilindro de revolução ocupa a “posição vertical” e a esfera tem raio duplo do raio da base do cilindro. Em nota, apelida-a de *lemniscata de Gerono*, acrescentando que difere consideravelmente da *lemniscata de Bernoulli*. Mais adiante (p. 398) encontrámos o problema 404, cujo desenvolvimento se divide por três proposições 709, 710 e 711. Na primeira, apresenta o problema:

Determinar o meridiano da superficie de revolução produzida por uma ellipse situada num plano com inclinação de 45°; a ellipse projecta-se horizontalmente segundo um circulo; e ela roda em torno de um eixo vertical que passa por uma das extremidades do eixo da curva geratriz.

Após várias considerações, o autor conclui que a curva em causa é uma *lemniscata*.

No ponto 710, o autor acrescenta, em nota, que o nome de *lemniscata* foi atribuído às curvas em forma de oito, cujo centro é o ponto duplo. A curva particular que deu projecção a esta família de curvas é denominada *lemniscata de Bernoulli* e corresponde ao lugar dos pontos cujo produto das distâncias a dois pontos fixos iguala o quadrado da metade da distância destes dois últimos pontos.

No ponto seguinte, apresenta a equação da curva meridiana, obtendo

$$x^4 + a^2(z^2 - x^2) = 0.$$

A segunda parte deste ponto é sobre a *lemniscata de Gerono*, revelando que por várias vezes nesta obra se irá encontrar a curva correspondente à equação indicada, em particular relacionada com o problema de Viviani. É também neste ponto que se encontra a referência a Gerono, baptizando aqui a curva tratada com o nome deste matemático em sua honra, uma vez que ele a indicou no seu *Cours de Géométrie analytique*. No problema 404-I, encontramos uma curva também referida por Gomes Teixeira, a besace, da qual a *lemniscata de Gerono* é um caso particular. Referindo que a construção é análoga à anteriormente apresentada, o autor acrescenta que esta curva se deve em primeiro lugar a Grégoire de St.

Vincent, depois a Cramer e Roberval. Encontramos também a *lemniscata de Gerono* em resposta ao problema 612 ponto 1095: *Determinar a intersecção de um cilindro parabólico vertical com um cilindro circular horizontal; os dois cilindros admitem um mesmo plano tangente contendo a geratriz rectilínea que passa pelo vértice da parábola.*

Mais adiante, deparamo-nos com as condições necessárias para obter uma projecção horizontal da curva

$$x^4 + a^2(y^2 - x^2) = 0,$$

reconhecendo-se aqui a *lemniscata de Gerono*, e acrescentando que na projecção de perfil se obtém igualmente uma *lemniscata*.

No problema 647 encontra-se ao longo de vários pontos (a partir do 1153) a discussão do problema de Viviani, apontando a lemniscata de Gerono como sendo uma das projecções desta curva.

Sobre a lemniscata de Bernoulli surgem várias referências, entre as quais nos pontos 1209 (onde também refere a hipópeda e a lemniscata de Gerono) e 1230 (onde trata as espirais sinusoidais, da qual a curva em questão é, como sabemos, um caso particular).

4.4 Ainda outras abordagens

No *Jornal de Mathematica Elementar* números 167-173, Joaquim de Seixas Moita Gonçalves Calado explica como obter o gráfico de várias curvas através da sua equação com a utilização do software *Mathematica*.¹⁰⁰ Especifica que a versão utilizada é o *Mathematica 2.2*¹⁰¹ e, como bibliografia, indica a obra de Francisco Gomes Teixeira, *Traité des courbes spéciales remarquables planes et gauches*.

A publicação número 170 deste jornal contem a curva objecto deste estudo.

Assim, no tocante às *lemniscatas*, e tal como faz Gomes Teixeira na sua obra, aqui distingue-se primeiramente *lemniscata elíptica* e *hiperbólica* e só depois a *lemniscata de Bernoulli*.¹⁰²

As *lemniscatas* elíptica e hiperbólica têm, como vimos no capítulo 3, equações respectivamente

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 y^2 + b^2 x^2 \text{ e } (x^2 + y^2)^2 = b^2 x^2 - a^2 y^2$$

ou, em coordenadas polares,

¹⁰⁰ No anexo 4.3 indicamos como construir estas curvas utilizando o Software Scientific Workplace.

¹⁰¹ Utilizamos a versão Mathematica 3.0.

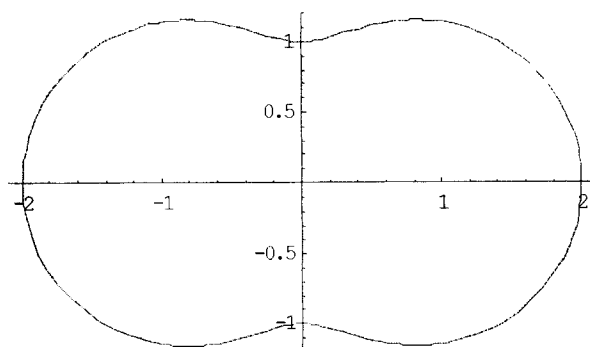
¹⁰² Veja-se no anexo 4.2 como obter o toro.

$$r = \pm\sqrt{a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t)} \quad \text{e} \quad r = \pm\sqrt{b^2 \cos^2(t) - a^2 \sin^2(t)}.$$

Joaquim Calado divide as *lemniscatas* elípticas em três casos e indica como construí-las:

Assim, como 1º caso considera $b^2 > 2a^2$, em particular o caso ($a=1$, $b=2$). Tem-se então

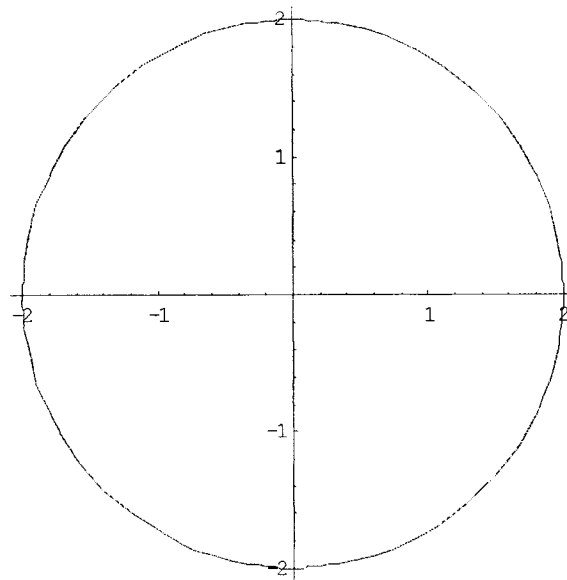
```
Needs["Graphics`Graphics`"]
r[t_]:=Sqrt[Sin[t]*Sin[t]+4*Cos[t]*Cos[t]];
s[t_]=-Sqrt[Sin[t]*Sin[t]+4*Cos[t]*Cos[t]];
pp1=PolarPlot[+Sqrt[Sin[t]*Sin[t]+4*Cos[t]*Cos[t]]];
pp2=PolarPlot[-Sqrt[Sin[t]*Sin[t]+4*Cos[t]*Cos[t]],
{t,0,2Pi}];
Show[pp1,pp2]
```



```
Show::gcomb : An error was encountered
in combining the graphics objects in Show[
PolarPlot[+√Sin[t] Sin[t] + 4 Cos[t] Cos[t] ], -Graphics-].
Show[PolarPlot[+√Sin[t] Sin[t] + 4 Cos[t] Cos[t] ],
- Graphics -]
```

Como 2º caso considera $b^2 < 2a^2$ ($a = 2$, $b = 2$) e obtém

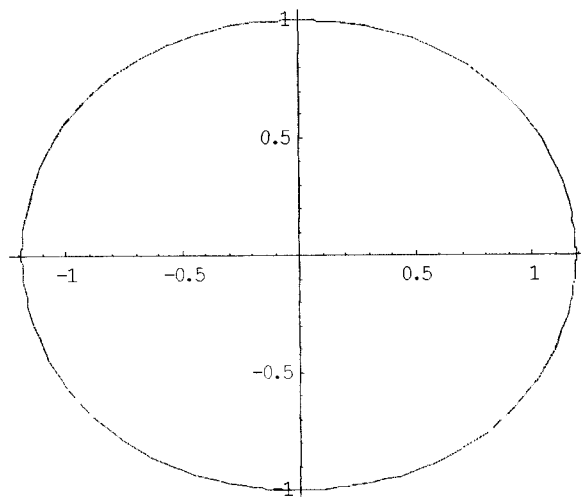
```
Needs["Graphics`Graphics`"]
r[t_]:=+Sqrt[4*Sin[t]*Sin[t]+4*Cos[t]*Cos[t]];
s[t_]:=-Sqrt[4*Sin[t]*Sin[t]+4*Cos[t]*Cos[t]];
pp1=PolarPlot[+Sqrt[4*Sin[t]*Sin[t]+4*Cos[t]*Cos[t]]];
pp2=PolarPlot[-Sqrt[4*Sin[t]*Sin[t]+4*Cos[t]*Cos[t]],
{t,0,2Pi});
Show[pp1,pp2]
```



```
Show::gcomb : An error was encountered
in combining the graphics objects in Show[
PolarPlot[+√ 4 Sin[t] Sin[t] + 4 Cos[t] Cos[t] ], - <<8>> -].
Show[PolarPlot[+√ 4 Sin[t] Sin[t] + 4 Cos[t] Cos[t] ],
- Graphics -]
```

Para 3º caso toma $b^2 = 2a^2$ particularizando com ($a = 1$, $b = 1.41$)

```
Needs["Graphics`Graphics`"]
r[t_]=+Sqrt[Sin[t]*Sin[t]+1.41*Cos[t]*Cos[t]];
s[t_]=-Sqrt[Sin[t]*Sin[t]+1.41*Cos[t]*Cos[t]];
pp1=PolarPlot[+Sqrt[Sin[t]*Sin[t]+1.41*Cos[t]*Cos[t]]];
pp2=PolarPlot[-Sqrt[Sin[t]*Sin[t]+1.41*Cos[t]*Cos[t]],
{t,0,2Pi}];
Show[pp1,pp2]
```



```
Show::gcomb : An error was
encountered in combining the graphics objects
in Show[PolarPlot[+ $\sqrt{\text{Sin}[t] \text{Sin}[t] + 1.41 \cos[t] \cos[t]}$ ], <<1>>].

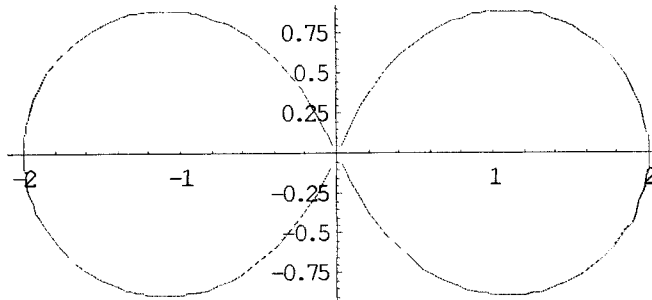
Show[PolarPlot[+ $\sqrt{\text{Sin}[t] \text{Sin}[t] + 1.41 \cos[t] \cos[t]}$ ],
- Graphics -]
```

Quanto à *lemniscata hiperbólica*, propõe a construção no caso particular $a = 1$ e $b = 2$:

```
Needs["Graphics`Graphics`"]
r[t_]:=+Sqrt[-Sin[t]*Sin[t]+4*Cos[t]*Cos[t]];
s[t_]=-Sqrt[-Sin[t]*Sin[t]+4*Cos[t]*Cos[t]];
pp1=PolarPlot[+Sqrt[-Sin[t]*Sin[t]+4*Cos[t]*Cos[t]]];
pp2=PolarPlot[-Sqrt[-Sin[t]*Sin[t]+4*Cos[t]*Cos[t]],
{t,0,2Pi}];
Show[pp1,pp2]
```

General::stop :

Further output of ParametricPlot::pptr will be suppressed during this calculation.



Show::gcomb : An error was

encountered in combining the graphics objects in

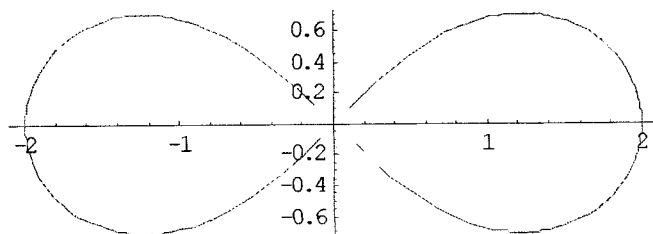
```
Show[PolarPlot[+ $\sqrt{-\sin[t] \sin[t] + 4 \cos[t] \cos[t]}$ ],
- <<8>> -].
```

```
Show[PolarPlot[+ $\sqrt{-\sin[t] \sin[t] + 4 \cos[t] \cos[t]}$ ],
- Graphics -]
```

No respeitante à *lemniscata de Bernoulli*, tal como já vimos, é um caso particular da *lemniscata hiperbólica* $(x^2 + y^2)^2 = b^2 x^2 - a^2 y^2$ quando $b = a$, cuja equação é $(x^2 + y^2)^2 = a(x^2 - y^2)$ ou, em coordenadas polares, $r = \pm a\sqrt{\cos(2t)}$.

```
Needs["Graphics`Graphics`"]
r[t_]:=2*Sqrt[Cos[2t]];
s[t_]=-2*Sqrt[Cos[2t]];
pp1=PolarPlot[2*Sqrt[Cos[2t]]];
pp2=PolarPlot[-2*Sqrt[Cos[2t]],
{t,0,2Pi}];
Show[pp1,pp2]
```

General::stop : Further output of ParametricPlot::pptr will be suppressed during this calculation.



Show::gcomb :

An error was encountered in combining the graphics objects in Show[PolarPlot[2 Sqrt[Cos[2 t]], -Graphics-].

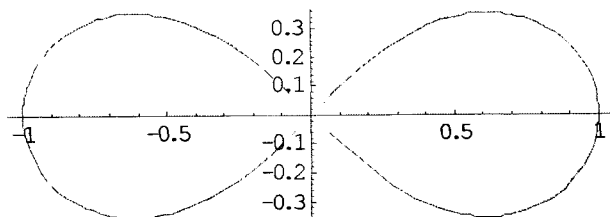
```
Show[PolarPlot[2 Sqrt[Cos[2 t]], -Graphics-]
```

Além deste processos descritos por Joaquim Calado também é possível obter esta curva através de coordenadas polares do modo abaixo

```
Needs["Graphics`Graphics`"]
PolarPlot[Sqrt[Cos[2t]],{t,0,2Pi}]
```

General::stop :

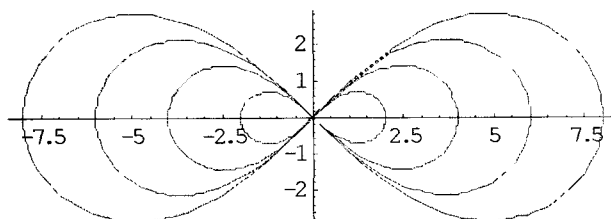
Further output of ParametricPlot::pptr will be suppressed during this calculation.



- Graphics -

ou ainda, usando a função *lemniscate [a][t]* do próprio programa, podemos traçar a família em que a toma os valores 2, 4, 6 e 8.

```
ParametricPlot[Table[
  lemniscate[a][t],
  {a,2,8,2}]]//Evaluate,
{t,0,2Pi},
AspectRatio->Automatic];
```

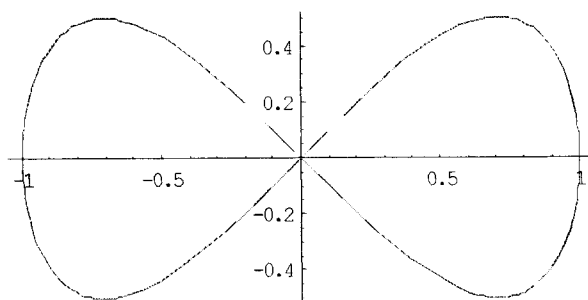


A *lemniscata de Geron* obtém-se muito simplesmente usando também a função *eight[t]* do próprio programa do seguinte modo:

```
ParametricPlot[
  eight[t],{t,0,2Pi},
  AspectRatio->Automatic];
```

ParametricPlot::ppcom :

Function eight[t] cannot be compiled; plotting
will proceed with the uncompiled function.



Quando a fonte de informação é a Internet¹⁰³, pesquisando curvas encontramos três importantes páginas

Famous curves index

Xah Lee: Special Plane Curves

e

¹⁰³ Estas consultas foram feitas, quase na totalidade, no fim de 1998, princípios de 1999, sendo possível estarem já com a acessibilidade alterada.

Em todos eles, a *curva do oito*, também denominada *lemniscata de Gerono*, aparece inicialmente apresentada na sua forma e só depois as suas equações cartesianas

$$x^4 = a^2(x^2 - y^2)$$

polar

$$r^4 = a^2 \sec^2(\theta) \cos(2\theta)$$

e paramétricas

$$\begin{cases} x = a \operatorname{sen}(t) \\ y = a \operatorname{sen}(t) \cos(t) \end{cases}$$

Por vezes, como acontece no endereço

<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/history/Java/Eight.html>,

o desenho da *lemniscata* aparece animado, tendo o visitante a possibilidade de ver variar a sua forma em função dos parâmetros dos quais esta curva depende.

Noutro endereço, <http://history.math.csusb.edu/Curves/Eight.html>, temos a possibilidade de estudar, entre outras, a sua evoluta, inversa e curva pedal da lemniscata.

Em <http://www.astro.virginia.edu/~eww6n/math/EightCurve.html>, encontramos referência à sua curvatura

$$K(t) = \frac{3\operatorname{sen}(t) + \operatorname{sen}(3t)}{[2\cos^2(t) + \cos^2(2t)]^{3/2}}$$

e ao seu ângulo tangencial

$$\Phi(t) = -\operatorname{tg}^{-1}[\cos(t)\sec(2t)];$$

É usual cada uma destas páginas terminar com referências a algumas obras e apontadores para outros sites relativos ao mesmo assunto.

No que diz respeito à *lemniscata de Bernoulli*, em

<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~hist.../historysearch.cgi?BIOGINDEX=lemniscat>

encontram-se algumas biografias associadas à *lemniscata*: Giovanni Fagnano, Giulio Fagnano, Cassini e, claro, Jacques Bernoulli.

Quando se procura a *lemniscata de Bernoulli*, são várias as páginas que encontramos. Por exemplo, em

http://www.best.com/~xah/SpecialPlaneCurves_dir/Lemnis.../lemniscateofBernoulli.htm

encontramos a descrição, bem como as várias equações desta curva. Surge depois a propriedade da *lemniscata* ser considerada como cissoide e a sua construção como tal, seguida da relação com a hipérbole rectangular; de seguida, considera-se a *lemniscata* como sendo obtida a partir de um toro, tratando depois a construção da tangente e da normal a um ponto da curva e a sua geração por uma applet.

Analogamente ao indicado para a *lemniscata de Geron*, é possível obter involutas, curvas pedal e inversa e evoluta da *lemniscata de Bernoulli*.

Na *Eric's home page* encontrámos a equação cartesiana

$$\left[(x-a)^2 + y^2 \right] \left[(x+a)^2 + y^2 \right] = a^4 ,$$

a equação polar

$$r^2 = a^2 \cos(2\theta) ;$$

as paramétricas

$$\begin{cases} x = \frac{a \cos(t)}{1 + \sin^2(t)} \\ y = \frac{a \sin(t) \cos(t)}{1 + \sin^2(t)} \end{cases} ;$$

e a equação bipolar

$$rr' = \frac{1}{2} a^2 .$$

Ainda neste site, refere-se que Jacques Bernoulli publicou um artigo em 1649, *Acta Eruditorum*, no qual ele apelida esta curva de *lemniscus*. Este matemático não podia saber que esta curva era um caso particular das ovais de Cassini descritas pelo matemático com este nome em 1680.

Refere-se que as propriedades gerais da *lemniscata* foram descobertas por G. Fagnano em 1750. As investigações de Gauss e Euler acerca do comprimento de arco de *lemniscata* conduziram ao estudo das funções elípticas.

Define-se depois a curvatura

$$K(t) = \frac{3\sqrt{2}\cos(t)}{\sqrt{3 - \cos(2t)}}$$

e o comprimento de arco que conduz à função *lemniscata*

$$L = \sqrt{2}ak\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{2^{3/2}\sqrt{\pi}}a ,$$

que é depois associada à constante de Gauss e à constante *lemniscata*.

Na página do Departamento de Educação Matemática da Universidade de Georgia, encontramos algumas explorações com a *lemniscata* fazendo variar os parâmetros existentes na equação das lemniscatas de Bernoulli e de Gerono, e também a proposta de comparação destas duas *lemniscatas* (<http://jwilson.coe.uga.edu/Texts/Folder/Lem/Lemniscates.html>).

Numa página de origem italiana (<http://www.museo.unimo.it/labmat/lemn.htm>), descobrimos um sistema articulado que permite obter a *lemniscata de Bernoulli*.

Existem páginas cujo assunto é especificamente a *lemniscata de Gerono* e outros que versam a *lemniscata de Bernoulli*. Outros há que abordam curvas em geral, superfícies e gráficos.

Em <http://mathworld.wolfram.com/Cylinder-SphereIntersection.html> encontramos a curva que resulta da intersecção de um cilindro com uma esfera, conhecida como curva de Viviani. As equações paramétricas desta curva (numa determinada posição) são, segundo este site,

$$\begin{cases} x = \pm\sqrt{2(R-r)(R-z)} \\ y = \pm\sqrt{(R-z)(2r-R-z)} \end{cases}$$

onde r e R representam respectivamente os raios do cilindro e da esfera de equações

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \text{ e } y^2 + [z - (R-r)]^2 = r^2.$$

Neste endereço encontra-se também o comprimento de arco e o cálculo da área da superfície desta curva.

Com a mesma homepage, encontra-se o página <http://mathworld.com/VivianiCurve.html> dedicado exclusivamente à curva de Viviani, composto por uma figura, equações paramétricas e expressões para a curvatura e torsão.

Em <http://www.ete.go.jp/ete/> encontramos a descrição de uma superfície que se parece com duas lágrimas com as suas pontas unidas, obtida pela rotação da *lemniscata de Gerono* em torno do eixo dos xx

$$x^4 - x^2 + y^2 + z^2 = 0.$$

Finalmente em <http://mathworld.wolfram.com/EightSurface.html> tem-se a superfície em oito resultante da rotação de uma lemniscata e cujas equações são

$$\begin{cases} x(u, v) = \cos(u)\sin(2v) \\ y(u, v) = \sin(u)\sin(2v) \\ z(u, v) = \sin(v) \end{cases}$$

para $u \in [0, 2\pi[$ e $v \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Como se pode concluir pela leitura desta dissertação, são vários os sítios onde podemos aprender algo sobre a curva lemniscata, quer através de livros, quer através deste nosso novo meio que é a Internet.

Anexos

Anexos ao capítulo 3

Anexo 3.1.1.

((114)) Neste ponto Gomes Teixeira trata o problema de como construir os pontos e tangentes duma curva (C) através dos pontos e tangentes de outra curva (C'), isto é, de como determinar (C), o hiperbolismo de (C').

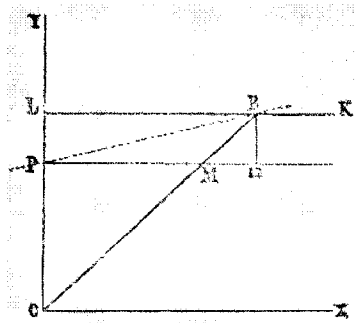


Fig. 1

Seja (Fig. 1) KL a recta representada pela equação $y = \overline{OL} = \alpha$, M e m^{104} dois pontos da recta MP paralela ao eixo OX e Bm paralela ao eixo OY. Os triângulos POM e LOB, por serem semelhantes, fornecem as relações

$$\frac{\overline{OP}}{\overline{OL}} = \frac{\overline{PM}}{\overline{LB}} = \frac{\overline{PM}}{\overline{Pm}},$$

pelas quais vemos que as coordenadas (x, y) e (X, Y) dos pontos m e M satisfazem a equação

$$X = \frac{xy}{\alpha}, \quad Y = y,$$

onde às coordenadas (x, y) de (C) correspondem a (X, Y) de (C').

Assim, sendo a curva (C) dada, obtemos o ponto M de (C') correspondente ao ponto m da primeira, traçando por m paralelas mB e mP aos eixos coordenados e traçando de seguida a recta OB, que intersecta Pm no ponto procurado. Reciprocamente, sendo dado M de (C'), obtém-se o ponto correspondente m de (C), traçando por B, onde OM corta LK, uma paralela a OY, e por M, uma paralela a OX.

Vejamos agora como obter a tangente a uma destas curvas através da tangente à outra.

As equações das tangentes a (C') no ponto M e a (C) no ponto m correspondente são, respectivamente,

$$X_1 - X = \frac{dX}{dy}(Y_1 - y)$$

¹⁰⁴ Note-se que é esta a notação usada por Gomes Teixeira.

e

$$X_1 - x = \frac{dx}{dy}(Y_1 - y)$$

e os coeficientes angulares destas equações satisfazem à condição

$$\alpha \frac{dX}{dy} = x + y \frac{dx}{dy}$$

que se obtém derivando a equação $X = \frac{xy}{\alpha}$ em ordem a y . Eliminando X , $\frac{dX}{dy}$ e $\frac{dx}{dy}$ entre

estas três equações obtemos

$$(y - \alpha)X_1 + xY_1 = xy,$$

igualdade que as coordenadas do ponto de intersecção das duas tangentes consideradas devem verificar. Esta equação representa uma recta que passa pelos pontos $(0, y)$ e (x, α) , isto é, pelos pontos P e B. Assim temos que o ponto onde as tangentes consideradas se cortam está situado na recta PB, deduzindo-se o teorema: *as tangentes a (C) e (C') nos pontos correspondentes m e M cortam a recta que passa pelas projecções de m sobre LK e sobre OY num mesmo ponto.*

No ponto ((118)), um pouco adiante, define-se como antihiperbolismos de cónicas as curvas cujos hiperbolismos são cónicas. Para a sua determinação faz-se uso das relações

$$X = \frac{\alpha x}{y}, \quad Y = y.$$

Anexo 3.1.2.

No ponto ((85)) encontramos o tratamento de “pontos especiais”. Aqui Gomes Teixeira relembra a designação de foco de uma curva dada por Plucker e apresentada em ((28)) como sendo o ponto pelo qual se pode traçar duas tangentes à curva cujos coeficientes angulares são i e $-i$. Quando os pontos de contacto destas tangentes estão situados no infinito, o foco diz-se singular e quando estes pontos estão situados a distância finita diz-se foco ordinário.

O autor apresenta depois a fórmula de Plucker para determinar a classe n de uma curva

$$n = m(m - 1) - 2\delta - 3\nu$$

onde m representa a ordem da curva, δ o número de nós e ν representa o número de pontos de retrocesso.

Gomes Teixeira recorda também que a relação

$$y = \frac{y_1}{x_1}, \quad x = \frac{1}{x_1}$$

transforma uma linha numa outra da mesma ordem tendo ambas propriedades comuns, como:

1ª se duas linhas têm um contacto de ordem ν , as suas transformadas têm um contacto da mesma ordem;

2ª A cada ponto múltiplo duma curva corresponde um ponto múltiplo da mesma natureza da sua transformada; as duas são portanto da mesma classe.

Esta transformação é frequentemente empregue para estudar os pontos das curvas situados no infinito.

Assim, se na equação

$$Y = iX + A$$

se fizer

$$Y = \frac{Y_1}{X_1}, \quad X = \frac{1}{X_1},$$

a transformada terá equação

$$Y_1 = i + AX_1,$$

que passa pelo ponto $(0, i)$ e, sendo a primeira recta tangente a uma curva C , a segunda será tangente à sua transformada C' . O número de tangentes à curva C' que passa pelo ponto $(0, i)$ é igual a n quando este ponto não pertence à curva, a $n - 1$ quando ele coincide com um ponto ordinário da curva, a $n - 2$ quando ele coincide com um ponto duplo, etc. Assim o número de tangentes a C cujo coeficiente angular é i é igual a n no primeiro caso, a $n - 1$ no segundo, a $n - 2$ no terceiro, etc.

Anexo 3.2.

Integrais elípticos

São vários os matemáticos que se debruçaram sobre os integrais indefinidos especiais chamados de integrais elípticos. De entre as obras onde se trata este assunto tem-se *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times* do matemático M. Kline, a *Abrégé d'histoire des Mathématiques 1700-1900* de Jean Dieudonné e ainda o interessante artigo que relaciona estes integrais com a lemniscata, *The Lemniscate and Fagnano's Contributions to Elliptic Integrals* de Raymond Ayoub, da publicação *Archives Histoire Exact Sciences*.

Contudo, tendo em conta que Gomes Teixeira também é aqui estudado, decidimos seguir as orientações deste matemático português, na obra *Curso de Analyse Infinitesimal – Calculo Integral* que constitui o volume sexto das suas *Obras*.

Encontramos estes integrais na quarta secção do primeiro capítulo desta obra. Gomes Teixeira chama integral elíptico ao integral

$$\int f(x, y) dx$$

onde y é função inteira de x de grau 3 ou 4 e $f(x, \sqrt{y})$ é uma função racional de x e $\sqrt{y}$.

Mais adiante refere que

“Sendo n um número ímpar, aos integrais

$$\int \frac{dx}{\sqrt{y}}, \int \frac{x dx}{\sqrt{y}}, \dots, \int \frac{x^{\frac{n-3}{2}} dx}{\sqrt{y}}$$

dá-se o nome de integrais de primeira espécie; aos integrais

$$\int \frac{x^{\frac{n-1}{2}} dx}{\sqrt{y}}, \dots, \int \frac{x^{n-2} dx}{\sqrt{y}}$$

dá-se o nome de integrais de segunda espécie; finalmente aos integrais da forma

$$\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{y}}$$

dá-se o nome de integrais de terceira espécie.”

Na secção seguinte refere que o integral

$$\int f(x, \sqrt{y}) dx$$

depende, quando y é de terceiro grau, de três integrais

$$\int \frac{dx}{\sqrt{y}}, \int \frac{x dx}{\sqrt{y}}, \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{y}}$$

o primeiro dos quais, segundo ele, daria origem à teoria das funções elípticas.

Acrescenta depois que todo o integral elíptico pode também depender dos três integrais

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \int \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}} dx \text{ e } \int \frac{dx}{(1+mx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Para simplificar faz

$$x = \text{sen}(\varphi) \text{ e } \sqrt{1-k^2 \text{sen}^2(\varphi)} = \Delta\varphi$$

obtendo

$$\int \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}, \int \Delta\varphi d\varphi, \int \frac{d\varphi}{(1+m \operatorname{sen}^2(\varphi))\Delta\varphi}$$

onde k^2 (que se chama módulo) representa uma constante menor do que um.

Gomes Teixeira, após supor que a variável φ está compreendida entre 0 e $\frac{\pi}{2}$, lembra as notações de Legendre

$$F(k, \varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}, \quad E(k, \varphi) = \int_0^\varphi \Delta\varphi d\varphi.$$

Finalmente lembramos o teorema da adição da função $F(k, \varphi)$, isto é o teorema da adição dos integrais elípticos de primeira espécie, descoberto por Euler que Gomes Teixeira descreve

“A soma de duas funções $F(k, \varphi)$ e $F(k, \psi)$ é uma função da mesma espécie $F(k, \zeta)$, onde ζ é determinado pela equação

$$\cos(\zeta) = \cos(\varphi)\cos(\psi) - \operatorname{sen}(\varphi)\operatorname{sen}(\psi)\Delta\zeta.”$$

Na obra *Mathematics and its History* de John Stillwell encontrámos um integral de primeira espécie particular, o integral

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}},$$

chamado de integral lemniscata e a seguinte fórmula para representar o teorema da adição para o integral lemniscata

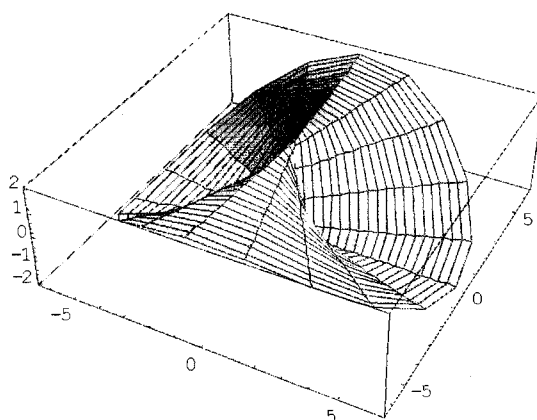
$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} + \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = \int_0^{\left(x\sqrt{1-y^4} + y\sqrt{1-x^4}\right)/(1+x^2y^2)} \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}.$$

Nesta como em outras obras encontra-se novas funções que foram definidas em torno da curva lemniscata como por exemplo a função seno lemniscata.

Anexo 3.3.

Conocuneus obtido utilizando o programa Mathematica 3.0.

```
ParametricPlot3D[{u Cos[v], u Sin[v], 2*(1-2*(Cos[v])^2)},  
{u,0,2Pi},{v,0,2Pi}]
```



- Graphics3D -

Anexos ao capítulo 4

Anexo 4.1.

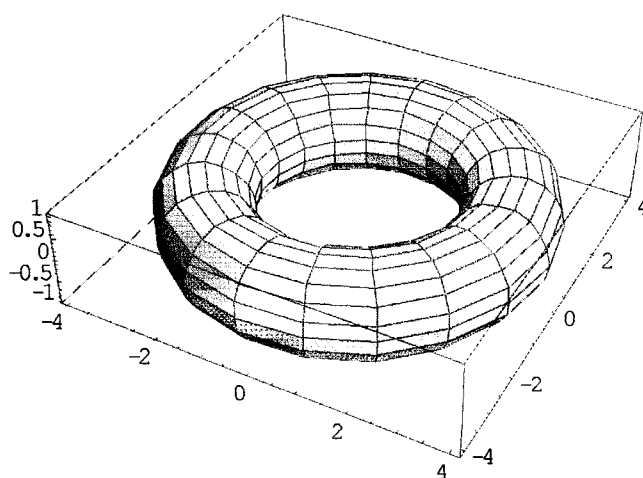
No ponto (269), Loria escreve:

Tendo a curva T a representação $y \cos(x) - x \sin(x) - f(x) = 0$, a podaria do ponto (x_0, y_0) em relação a T obtém-se eliminando x entre esta e a equação que se segue $(x - x_0) \cos(x) + (y - y_0) \sin(x) = 0$. De modo semelhante se obtém a podaria de uma curva conhecendo a sua equação cartesiana, da qual Gino Loria apresenta o exemplo para uma elipse.

Anexo 4.2.

No que diz respeito às espíricas de Perseus, Joaquim Calado começa por introduzir um programa que permite a obtenção da superfície de revolução chamada toro.

```
ParametricPlot3D[{Cos[t] × (3 + Cos[u]), Sin[t] × (3 +  
Cos[u]), Sin[u]}, {t, 0, 2Pi}, {u, 0, 2Pi}]
```



- Graphics3D -

Refere mais adiante que Gomes Teixeira indica na sua obra a equação

$$L \pm \sqrt{(x^2 + z^2)^2} = R^2 - y^2$$

para esta superfície, sendo o seu centro a origem das coordenadas e o seu eixo considerado como eixo dos y , R representando o raio das circunferências meridianas e L a distância dos centros dessas circunferências ao eixo da superfície.

Anexo 4.3

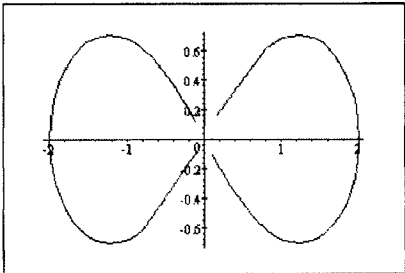
Scientific WorkPlace

File Edit Insert View Go Tag Typeset Tools Maple Window Help

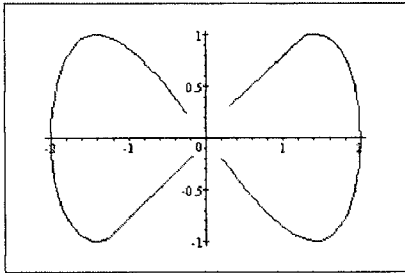
Um exemplo de como utilizar o Scientific Wokplace para desenhar as lemniscatas de Bernoulli e de Geron

Para obter as lemniscatas a partir das equações polares, escreve-se a expressão definidora da curva, por exemplo para a de Bernoulli, $r = \sqrt{a^2 \cos(2\theta)}$, particularizando os parâmetros, neste caso a .

Vejamos a curva que se obtém se $a=2$. A expressão agora é $r = \sqrt{4 \cos(2\theta)} = 2 \cos^{1/2} 2\theta$. Após ter a expressão selecciona-se na barra *Maple* a opção *Plot 2D* e desta barra, a hipótese *Polar*.



Para desenhar a lemniscata de Geron utilizamos a expressão $r = \sqrt{a^2 \cos^4(\theta) \cos(2\theta)}$ que para $a=2$ dá $r = \sqrt{2^2 \cos^4(\theta) \cos(2\theta)}$ e a imagem será



For Help, press F1

NUM WRITE

Scientific WorkPlace

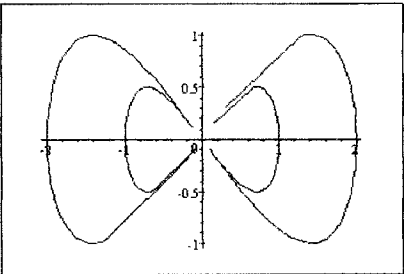
File Edit Insert View Go Lag Typeset Tools Maple Window Help

100%

π θ ∞ ϵ $+$ $\frac{1}{x}$ ∇ ∂ $\leq$ $\geq$ $<$ $\cap$ $\cup$ $\times$ $+$ $\pm$ $\circ$ $\cdot$

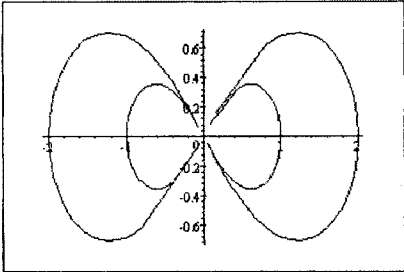
C:\5wp30\doc\Anexo lemniscatas de Bernoulli e Geron22.tex

Considerando no mesmo gráfico a lemniscata de Geron para $a=1$ e $a=2$ obtém-se as expressões $r=\sqrt[4]{1-\cos(2\theta)}$ e $r=\sqrt[4]{4-\cos(2\theta)}$ e a imagem abaixo

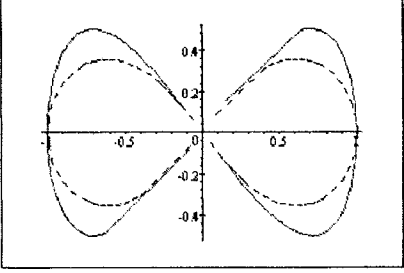


(depois de desenhar a primeira expressão seleciono só a expressão depois do sinal igual e transporto para cima do gráfico da primeira.)

Já a lemniscata de Bernoulli para $a=1$ e $a=2$ resulta $r=\sqrt{1-\cos(2\theta)}$ e $r=\sqrt{4-\cos(2\theta)}$.



Assumindo agora no mesmo gráfico os casos $a=1$ das lemniscatas de Bernoulli (a tracejado) e Geron (a cheio) obtemos $r=\sqrt{1-\cos(2\theta)}$ e $r=\sqrt[4]{1-\cos(2\theta)}$



For Help, press F1

NUM WRITE

Anexo de Biografias de alguns matemáticos referidos¹⁰⁵

Arquimedes. (287 a.c.-212 a.c.) Filho do astrónomo Phidias, crê-se que viveu parte da sua juventude em Alexandria, onde lhe creditam algumas invenções. Passou grande parte da sua vida em Siracusa onde foi, aquando da invasão, assassinado pelos Romanos, “depois de ter colocado a sua perícia técnica ao serviço dos defensores da cidade.” (p.93, *História Concisa das Matemáticas*, Dirk Struik)

Arquimedes escreveu nove tratados: *Sobre a Esfera e o Cilindro*, *Medição do Círculo*, *Quadratura da Parábola*, *Sobre Conóides e Esferóides*, *Sobre o equilíbrio dos planos*, *O contador de areia*, *Sobre Espirais*, *Sobre Corpos Flutuantes* (dois volumes)

(Katz, Struik)

Bernoulli, Jacques. (1654-1705) Primeiro filho da família de matemáticos suíços. Foi autodidacta em Matemática, tendo passado algum tempo em França, Holanda e Inglaterra onde tomou conhecimento de trabalhos de vários cientistas e matemáticos. De volta à sua terra natal, Basel, em 1687, estuda a edição de van Schooten da *Geometria* de Descartes. Foi escolhido para lente da Universidade de Basel, primeiro de física experimental e em 1687 como professor de Matemática, cargo que desempenhou até à sua morte.(Katz)

Obras (póstumas): *Ars Conjectandi* e *Opera Jacobi Bernoulli*, 2 vols (1744). Escreveu sobre –Teoria das probabilidades,

Bernoulli, John. (1667-1748) Irmão de Jacques Bernoulli, tentou em vão tornar-se um homem de negócios e estudar medicina, para seguir os desejos do pai. Estudou Matemática com o seu irmão Jacques e juntos analisaram os trabalhos de Leibniz aos quais rapidamente foram capazes de dar contributos. John Bernoulli desenvolveu as técnicas de Leibniz sobre cálculo com mais detalhe em vários artigos. Tal trabalho contribuiu para que lhe fosse oferecida a cadeira de Matemática na Universidade de Gröningen na Holanda, posição que ocupou até à morte do seu irmão, tendo-o sucedido na cadeira de Matemática em Basel em 1705. Aplicou o cálculo à determinação de comprimentos e áreas de curvas, deu contributos à

¹⁰⁵ Com o intuito de apresentar um breve resumo de cada uma das biografias dos matemáticos referidos, seleccionaram-se basicamente os acontecimentos de interesse para este trabalho não apontando todas as matérias estudadas nem todas as cidades onde viveram.

teoria das equações diferenciais, à Matemática ligada à navegação e à óptica. Por vezes John e seu irmão Jacques estariam em disputa pela primazia na resolução vários problemas. (Katz)

Bonnet, Pierre Ossian. (1819-1892) Nasceu em Montpellier, França e faleceu em Paris. Após estudar na Ecole Polytechnique e na Ecole des Ponts et des Chaussées, foi-lhe oferecido um lugar como engenheiro, que viria a recusar uma vez que se tinha decidido pela carreira do ensino e investigação Matemática. Escreveu em 1844 um trabalho sobre convergência de séries com termos positivos e em 1849 um outro sobre séries. Em 1844 inicia o seu trabalho em geometria diferencial. Foi eleito em 1862 para a Academia de Sciences para substituir Biot e em 1878 sucede a Le Verrier na Sorbonne. Bonnet deu importantes contributos à geometria diferencial ao introduzir a noção de curvatura geodésica. Uma fórmula para o integral da curvatura geodésica ao longo de uma curva fechada é conhecido pelo teorema Gauss-Bonnet. Publicou também trabalhos sobre cartografia, álgebra, mecânica racional, Física e Matemática.

(<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Bonnet.html>)

Cassini, Giovanni Domenico. (1625-1712) Nasceu em Perinaldo (Itália) e faleceu em Paris. Estudou num colégio Jesuíta e em 1650 tornou-se professor de astronomia na Universidade de Bolonha. O seu interesse estava para além da astronomia: era especialista em hidráulica e engenharia. Foi o primeiro a observar as quatro luas de Saturno. Em 1680 estuda a curva de Cassini quando aborda o movimento relativo da Terra e do Sol. A descoberta de que a *lemniscata de Bernoulli* é um caso particular desta curva apenas se faria 100 anos mais tarde.

(<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Cassini.html>)

Chasles, Michael. (1793-1880) Nasceu em Épernon (França) e faleceu em Paris. Chasles tornou-se professor na Ecole Polytechnique em Paris em 1841. Trabalhou em geometria projectiva e geometria algébrica. Escreveu *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie* (1837), o texto *Traité de géométrie* em 1852 e *Traité des sections coniques* em 1865.

Segundo Victor Katz estudou razão cruzada de quatro pontos numa linha sob o nome razão *anharmonica*.

(<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Chasles.html>)

Cramer, Gabriel. (1704-1752) Nasceu em Geneva (Suiça) e faleceu em Bagnols-sur-Cèze (França) Em 1722 doutorou-se, com apenas 18 anos, tendo a sua tese versado a teoria do som. Foi professor de geometria e mecânica na Academia de Clavin em Geneva. Trabalhou com John Bernoulli e publicou em 1750 *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques*.

(<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Cramer.html>)

Dandelin, Germinal Pierre. (1794-1847) Nasceu em Le Bourget (França) e faleceu em Bruxelas (Bélgica). Estudou em Ghent e em 1813 entrou para a Ecole Polytechnique de Paris. A influência Matemática de Dandelin foi Quetelet que era dois anos mais novo e o seu primeiro interesse foi a Geometria. Um seu importante teorema diz respeito à intersecção de um cone e a esfera nele inscrita com um plano, descoberta em 1822. Este teorema mostra que se um cone é intersectado por um plano resultando numa cónica, então os focos dessa cónica são os pontos onde este plano intersecta as esferas inscritas no cone. Dandelin trabalhou também em projecção estereográfica de um esfera num plano (1827), estática, álgebra e probabilidade. Este matemático forneceu um método para aproximar as raízes de uma equação algébrica, actualmente chamada método de Dandelin-Gräffe.

(<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Dandelin.html>)

Darboux, Jean Gaston. (1842-1917) Nasceu em Nimes, Gard, Languedoc (França) e faleceu em Paris. Estudou no Lycée de Nimes e Montpellier, na Ecole Polytechnique e na Ecole Normale Supérieure. Enquanto ainda estudante nesta última escola, escreveu um artigo sobre superfícies ortogonais.

Estudou os trabalhos de Lamé, Dupin e Bonnet sobre sistemas ortogonais de superfícies e generalizou resultados de Kummer dado um sistema definido por uma única equação, com várias propriedades interessantes. Estes resultados foram incluídos na tese de doutoramento de título *Sur les surfaces orthogonales*.

Ensinou no Collège de France, Lycée Louis le Grand, Ecole Normale Supérieure, foi substituto de Liouville na cadeira de mecânica racional na Sorbonne e de Chasles na cadeira de geometria superior.

Darboux deu importantes contributos à geometria diferencial e à análise. Num artigo, de 1870, sobre equações diferenciais de segunda ordem, introduz o integral agora conhecido por integral de Darboux. Escreveu sobre geometria infinitesimal e num dos volumes de *Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal* aborda a questão de uma superfície rolar numa outra superfície.

Darboux fez também investigação sobre teoria das funções, álgebra, cinemática e dinâmica. Pelo seu trabalho recebeu vários prémios e foi membro de diversas Academias.

(<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Darboux.html>)

Eudoxo. (408 a.c.-355 a.c.) Estudou medicina em Cnidos, uma ilha da costa da Ásia menor, durante a sua juventude. Numa visita a Atenas interessou-se, na Academia, pelas leituras sobre filosofia e Matemática e começou o seu estudo nestes assuntos. Mais tarde visitou o Egipto onde fez várias observações astronómicas e estudou o calendário egípcio. De volta à sua terra, abriu uma escola e conduziu a sua própria investigação. Eudoxo é conhecido não só pelo seu trabalho em geometria, mas também pelas suas aplicações da geometria esférica na astronomia. (Katz)

Este matemático escreveu *Espelho*, *Phaenomena* e *Sobre a velocidade*. Eudoxo deu importantes contributos à teoria da proporção, onde usando uma nova definição tornou possível comprimentos irracionais. Introduziu o método de exaustão nos seus trabalhos sobre integração e estudou o problema clássico da duplicação do cubo. Propôs o sistema das esferas homocêntricas como representação do movimento planetário e com ele deduziu uma curva em forma de oito de nome hipópeda.

(<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Eudoxus.html>)

Euler, Leonhard. (1707-1783) Nasceu em Basel (Suíça) e faleceu em St.Petersburg (Rússia). Aprendeu Matemática elementar com o pai, Paul Euler, que tinha estudado teologia na Universidade de Basel e aí havia recebido lições de Jacob Bernoulli. Enquanto a família estava em Riehen Leonhard foi enviado para Basel vivendo com a avó materna. A escola da cidade era muito pobre e o ensino da Matemática inexistente, mas como o seu interesse pela Matemática já tinha sido espicaçado pelo seu pai ele lê textos matemáticos e recebe aulas privadas deste tema. O pai de Euler envia-o em 1720 para Universidade de Basel com o

objectivo de o preparar para ministro, contudo a teologia não o entusiasma como a Matemática e, com a permissão de seu pai, muda para Matemática.

Em 1726 completa os seus estudos universitários e publica um pequeno artigo sobre curvas isócronas. Com a morte de Nicolaus Bernoulli, Euler ocupa a vaga em St.Petersbourg e ensina aplicações da Matemática e mecânica à fisiologia. Escreve sobre acústica e em 1730 torna-se professor de física na academia de St.Petersbourg. Em 1733 é escolhido para ocupar a cadeira de Matemática na mesma academia.

Estudou assuntos tão diversos como: teoria dos números, análise, equações diferenciais, cálculo de variações e mecânica racional. Recebe um convite e transfere-se para Berlim, em 1741 escrevendo cerca de 380 artigos durante os vinte cinco anos que lá vive sobre cálculo de variações; cálculo de órbitas planetárias; artilharia e balística; análise; construção de barcos e navegação; movimento da lua e cálculo diferencial.

Desde 1738 que os seus problemas de visão se revelaram ficando por volta de 1766 praticamente cego. Dada a sua magnífica memória Euler foi capaz de continuar a trabalhar em óptica, álgebra e movimento lunar. É espantoso observar que a partir do regresso a St.Petersbourg, com 59 anos de idade, Euler tenha produzido cerca de metade dos seus trabalhos. Claro que tendo em conta o seu problema, ele não o conseguiu sozinho tendo sido auxiliado pelos seus filhos Johann e Christph, dois colegas W.L.Krafft e A.J.Lexell e ainda pelo amigo N.Fuss.

Euler é considerado o mais prolífico escritor de Matemática de todos os tempos. Deu importantes contributos à geometria analítica moderna e trigonometria onde ele foi o primeiro a considerar *sen*, *cos*, etc como funções. Introduziu as funções *gama* e *beta*, as notações $f(x)$ para uma função, e para base natural de logaritmos, i para raiz quadrada de -1 , π para pi e $\sum$ para somatório, entre outras.

(<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Euler.html>)

Fagnano, Giovanni Francesco. (1715-1797) Filho de Giulio Fagnano, nasceu e faleceu em Sinigaglia, Itália. Giovanni continuou o trabalho de seu pai sobre o triângulo. Este matemático considerou a integração por partes do integral de $x^n \sin(x)$ e de $x^n \cos(x)$.

(http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Fagnano_Giovanni.html)

Fagnano, Giulio Carlo. (1682-1766) Nasceu e faleceu em Sinigaglia, Itália. Giulio propôs novos métodos para a resolução de equações de graus 2, 3 e 4. Considerou vários problemas envolvendo triângulos e desenvolveu o trabalho de Bombelli sobre números complexos. No seu estudo da rectificação da lemniscata, Giulio Fagnano introduziu transformações analíticas engenhosas que conduziram à fundação da teoria dos integrais elípticos e o seu trabalho conduziu às funções elípticas.

(http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Fagnano_Giulio.html)

Fuss, Nicolaus. (1755-1826) Nasceu em Basel (Suíça) e faleceu em St. Petersburg (Rússia). A maior parte dos seus artigos são soluções aos problemas propostos por Euler sobre geometria, trigonometria, séries, geometria diferencial e equações diferenciais. Os seus melhores artigos são sobre trigonometria esférica, tópico que ele tratou com A. J. Lexell e F. T. Schubert. Estudou também os problemas geométricos de Apolônio e Pappus. Fuss ganhou vários prémios entre os quais um da Academia francesa pelo trabalho *Recherche sur le dérangement d'une comète qui passe près d'une planète*. Deu vários contributos no campo da educação escrevendo vários livros de texto.

(<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Fuss.html>)

Gauss, Johan Carl Friedrich. (1777-1855) Nasceu em Brunswick e faleceu em Gottingen (Alemanha). Iniciou os seus estudos aos sete anos tendo desde logo espantado os seus professores pelo potencial demonstrado. Na academia descobriu independentemente a lei de Bode, o teorema binomial, a média aritmética-geométrica, a lei da reciprocidade quadrática e o teorema dos números primos. Descobriu a construção de um polígono regular de 17 lados com régua e compasso. Este foi o maior avanço neste campo desde a Matemática grega e foi publicada na secção VII do famoso trabalho de Gauss, *Disquisitiones Arithmeticae*. Todas as secções desta obra excepto a referida dizem respeito à teoria dos números. Publicou *Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis Solem ambientium*, em 1809, um tratado de dois volumes sobre o movimento dos corpos celestes. No primeiro volume trata equações diferenciais, secções cónicas e órbitas elípticas, enquanto o segundo, na sua maior parte, mostra como estimar e depois como refinar a estimação da órbita de planetas.

Por volta de 1816 publica *Disquisitiones generales circa seriem infinitam*, onde faz um tratamento rigoroso de séries e uma introdução da função hipergeométrica; em *Methodus*

nova integralium valores per approximationem inveniendi fez um ensaio prático sobre integração aproximada; *Bestimmung der Genauigkeit der Beobachtungen*; discute estimadores estatísticos e *Theoria attractionis corporum sphaeroidicorum ellipticorum homogeneorum methodus nova tractata*. Este último trabalho foi inspirado pelos problemas geodésicos e está relacionado basicamente com teoria potencial. Publica em 1822 um trabalho onde aborda a ideia de fazer corresponder uma superfície a outra de modo que as duas tenham semelhanças e um outro sobre estatística, sobre o método dos mínimos quadrados. Gauss interessou-se também pela questão da possível existência de geometrias não euclidianas e por geometria diferencial, tendo publicado vários artigos sobre este assunto dos quais *Disquisitiones generales circa superficies curva* é o mais conhecido.

Estudou também a teoria do magnetismo terrestre sobre a qual escreveu por volta de 1839 alguns artigos. Gauss trabalhou com Weber durante seis anos e juntos descobriram as leis Kirchhoff e construíram um telegrafo primitivo, entre outros resultados.

(<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Gauss.html>)

Genochi, Angelo. (1817-1889) Nasceu em Piacenza (Itália) e faleceu em Turim. Genochi estudou direito na Universidade de Piacenza apesar de ter a Matemática como assunto favorito. Depois de exercer advocacia durante alguns anos e se empenhar politicamente em alguns problemas durante a guerra do seu país com a Áustria, em 1859 ocupa a cadeira de Álgebra e Geometria Complementar em Turim. No ano seguinte muda-se para a cadeira de Análise Superior. Mais tarde ensinaria Introdução ao Cálculo e Cálculo Infinitesimal. Os temas que Genocchi mais trabalhou foram: teoria dos números, séries e cálculo integral. Escreveu, em parceria com Peano *Differential Calculus and Fundamentals of Integral Calculus*

(<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Genocchi.html>)

Grandi, Luigi Guido. (1671-1742) Nasceu em Cremona (Itália) e faleceu em Pisa. Frequentou um colégio de jesuítas e vários mosteiros. Em 1694 tornou-se professor de filosofia e teologia no mosteiro Camaldolese em Florença e mais tarde em Pisa. Ainda neste ano começou a interessar-se por Matemática e em 1707 tornou-se no matemático do Gran Duque da Toscana. Em 1714 foi indicado para professor de Matemática na Universidade de Pisa. Grandi fez vários trabalhos sobre geometria nos quais considerou a analogia entre o

círculo e a hipérbole equilátera. Considerou também curvas de dupla curvatura na esfera e a quadratura de partes de uma superfície esférica. Em 1701 tratou a loxodromia cônica. Publicou *Flores geometrici*, onde define a curva Clelia e escreveu sobre mecânica e astronomia.

(<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Grandi.html>)

Humbert, Marie Georges. (1859-1921) Nasceu e faleceu em Paris. Humbert ficou orfão quando era ainda muito jovem e foi educado pelos avós que o enviaram para o Oratorian College e mais tarde para o Collège Stanislas em Paris. Frequentou a Ecole Normale Supérieure, Ecole Polytechnique e estudou engenharia na Ecole des Mines. Em 1885 doutorou-se em Matemática com a tese *Sur les courbes de genre un*, trabalho este que constitui uma extensão ao trabalho de Clebsch sobre curvas. Escreveu também *Application de la théorie des fonctions fuchsiennes à l'étude des courbes algébriques*. Em 1893 foi eleito presidente da Sociedade de Matemática Francesa e, dois anos mais tarde, foi nomeado professor de análise na Ecole Polytechnique. Ocupou o lugar de Hermite na Académie des Sciences e continuou o estudo por ele iniciado sobre teoria dos números. Humbert ocupou, em 1912, no Collège de France, a cadeira de Jordan após a morte deste matemático, depois de ter sido seu assistente desde 1904. Ganhou prêmio da Académie des Sciences pelo seu trabalho em geometria sobre superfícies de Kummer usando funções abelianas. Humbert trabalhou também em funções hiper-elípticas.

(http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Humbert_Georges.html)

Huygens, Christian. (1629-1695) Nasceu e faleceu em Haia (Holanda). Huygens pertencia a uma família importante e seu pai, Constantin Huygens, sendo diplomata, levou a que Christian tivesse acesso ao topo dos círculos científicos da época. Teve aulas privadas até aos 16 anos, onde aprendeu geometria. A sua educação matemática foi influenciada por Descartes que ocasionalmente visitava a sua casa. Huygens estudou direito e Matemática na universidade de Leiden entre 1645 e 1647 e no College of Orange em Breda. Estudou um problema proposto por Mersenne sobre a forma de uma corda suspensa pelos seus extremos. Não tendo resolvido este problema, solucionou um relacionado que diz respeito ao modo de colocar pesos de modo que o formato que a corda tome seja parabólico.

As primeiras publicações de Huygens, em 1651 e 1654 lidavam com problemas matemáticos. A publicação de 1651 *Cyclometriae* mostrou a falácia em métodos propostos por Gregorius Sain-Vincent que afirmava ter quadrado o círculo. O trabalho de 1654 *De Circuli Magnitudine Inventa* foi uma obra sobre o mesmo tema, mais importante. Mais tarde interessou-se por lentes e pela construção de um telescópio e com ele na descoberta das luas de Saturno. Escreveu *De Ratiociniis in Aleae Ludo*, pequeno trabalho sobre cálculo de probabilidades, publicado em 1657. Construiu vários relógios pêndulo com o intuito de aperfeiçoar a medida do tempo. Num seu trabalho, colisão de corpos elásticos, demonstrou o erro de Descartes nas leis de impacto. Estudou também movimento circular, a teoria da gravidade de Descartes, a descida de corpos no vácuo, verticalmente e ao longo de curvas. Huygens definiu evolutas e involutas de curvas entre as quais a evoluta da cicloide e da parábola. Estudou ainda a refração dupla, a velocidade da luz, o problema da longitude e o relógio marítimo. Escreveu *Traité de la lumiere* sobre a teoria da luz por ondas.

(<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Huygens.html>)

Laguerre, Edmond Nicolas. (1834-1886) Nasceu e faleceu em Ver-le-Duc (França). Frequentou como aluno e professor a Ecole Polytechnique de Paris. O seu trabalho mais importante é na área da análise e geometria. O seu trabalho em geometria apesar de importante para a época, foi ultrapassado pela Teoria de Grupo de Lie e pelos trabalhos de Cayley e Klein. Laguerre estudou métodos de aproximação e é mais conhecido pelas funções especiais dos polinômios de Laguerre que são soluções das equações diferenciais de Laguerre.

(<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Laguerre.html>)

Lamé, Gabriel. (1795-1870) Nasceu em Tours (França) e faleceu em Paris. Foi estudante da Ecole Polytechnique. Publicou o seu primeiro artigo *Mémoire sur les intersections des lignes et des surfaces* em 1816-17. Estudou engenharia na Ecole des Mines em Paris onde escreveu o segundo trabalho sobre um método por ele inventado para calcular os ângulos entre faces de cristais. Lamé leccionou no Institut et Corps du Genie des Voies de Communication em St. Petersburg.

Escreveu artigos sobre análise, física, mecânica, química e engenharia. Em 1832, Lamé voltou para Paris e ocupou a cadeira de física da Ecole Polytechnique e mais tarde foi

escolhido para engenheiro chefe de minas, tendo-se envolvido na construção da auto-estrada de Paris a Versalhes.

Em 1843 aceita o lugar na Sorbonne em Física Matemática e Probabilidades ensinando esta cadeira a partir de 1851. Os seus trabalhos de engenharia conduziram-no ao estudo de vários tópicos entre os quais a teoria da elasticidade, e a teoria das coordenadas curvilíneas. Com este último tópico, Lamé transformou a equação de Laplace em coordenadas elipsoidais e assim separou as variáveis e resolveu a equação resultante. Estudou também o Último teorema de Fermat provando-o no caso $n = 7$, e debruçou-se ainda sobre questões na área de geometria diferencial e teoria dos números

(<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Lame.html>)

Leibniz, Gottfried Wilhelm von. (1646-1716) Nasceu em Liepzig e faleceu em Hanover (Alemanha). Aos sete anos entrou para a Nicolai School na sua terra natal. Além do que lhe era ensinado na escola, Leibniz estudou latim e grego e leu sobre metafísica e teologia. Em 1661 entrou para a universidade de Leipzig, estudando filosofia, retórica, latim, grego e hebreu e, mais pobremente ensinada, Matemática. Mais tarde aprendeu direito e estudou o movimento e colisões elásticas. Interessou-se pela construção de uma máquina de calcular e bastante mais tarde pelas bombas de água.

Em 1672 foi para Paris, onde estudou Matemática e física. Lendo, por sugestão de Christiaan Huygens, o trabalho de Sain-Vincent sobre séries fez ele próprio algumas descobertas sobre este assunto. Estudou mais tarde geometria infinitesimal e em 1675 escreveu um manuscrito onde usa a notação $\int f(x)$ pela primeira vez. No mesmo manuscrito surgiu a regra para a derivação de um produto e a conhecida expressão $d(x^n) = nx^{n-1}$ para n inteiro ou fraccionário. Empenhou-se também no desenvolvimento do sistema binário de aritmética que aperfeiçoaria em 1679 e publicaria apenas em 1701, e pelo desenvolvimento de métodos para resolver sistemas de equações lineares, encontrando assim os determinantes.

Em 1680 Leibniz aperfeiçoou o seu sistema metafísico da teoria do conhecimento tentando reduzir o raciocínio a uma álgebra do pensamento, publicando *Meditationes de Cognitione, Veritate et Ideis*. Em 1684 publicou detalhes sobre o seu cálculo diferencial em *Nova Methodus pro Maximis et Minimis, itemque Tangentibus...* em *Acta Eruditorum*, um jornal fundado em Leipzig dois anos antes.

Em 1686 publicou no mesmo jornal um artigo sobre cálculo integral onde ocorre impressa pela primeira vez $\int$. Uma outra obra de Leibniz de interesse matemático é o seu trabalho sobre dinâmica que havia iniciado em 1676 mas que a ele retornou em 1689. A maior parte da actividade Matemática de Leibniz nos últimos anos foi a disputa com Keill da prioridade da invenção do cálculo. Apesar de por vezes se encontrar bastante ocupado, Leibniz correspondia-se com colegas de toda a Europa.

(<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Leibniz.html>)

Lissajous, Jules Antoine. (1822-1880) Nasceu em Versalhes e faleceu em Plombières (França). Frequentou a Ecole Normale Supérieure em 1841 e tornou-se professor de Matemática, leccionando no Lycée Saint-Louis. A sua tese de doutoramento abordava barras vibratórias usando o método do modelo de areia de Chladni para determinar posições nodais. Em 1874 Lissajous tornou-se reitor da Academia em Cambéry e um ano mais tarde da Academia de Besançon. Este matemático interessava-se por ondas e desenvolveu um método óptico para estudar as vibrações.

(<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Lissajous.html>)

Malfatti, Gian Francesco. (1731-1807) Nasceu em Trento e faleceu em Ferrara, Itália. Estudou no College de San Francesco Saverio em Bolonha. Em 1754 Malfatti foi para Ferrara onde ensinou Matemática e física numa escola por ele criada; escreveu sobre equações de quinto grau e em 1802 forneceu a primeira solução para o problema conhecido por problema de Malfatti, que consiste em descrever num triângulo três circunferências que sejam mutuamente tangentes, cada uma das quais intersecta dois lados do triângulo. Bernoulli resolveu o problema para um triângulo isósceles e depois de Malfatti, foi resolvido por Steiner e Clebsch, este último recorrendo a funções elípticas.

Os seus artigos abordavam muitos outros assuntos além da geometria, desde as probabilidades à mecânica. Alguns dos seus trabalhos são: Problems and methods of mathematical analysis in the work of Gianfrancesco Malfatti, Contributions of Gianfrancesco Malfatti to combinatorial analysis and to the theory of finite difference equations, The work of Malfatti in the realm of mechanics, the geometrical research of Gianfrancesco Malfatti, gianfrancesco Malfatti and the theory of algebraic equations, and Gianfrancesco Malfatti and the support problem.

(<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Malfatti.html>)

Montucla, Jean Etienne. (1725-1799) Nasceu em Lyon e faleceu em Versalhes. Estudou no colégio jesuíta da sua terra natal. Mais tarde foi para Paris onde se tornou amigo de Diderot e d'Alembert. Por esta altura, escrevia na Gazette de Paris. Montucla escreveu vários livros sobre história da Matemática, o primeiro dos quais, em 1754, tratava o problema da quadratura do círculo. O seu outro grande trabalho de 1758, publicado em dois volumes, é dos mais estimados entre os antigos trabalhos de história da Matemática. Montucla melhorou e aumentou um livro de Jacques Ozanam sobre puzzles e recreações Matemáticas. O seu trabalho foi influente em popularizar os problemas de dissecção envolvendo o corte de figuras geométricas em peças que podem ser dispostas de modo a formar outras figuras geométricas.

(<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Montucla.html>)

Perseus. (segundo século a.c.) Existem apenas duas referências a Perseus que ocorrem no livro de Proclus, que no entanto não indicam o local onde nasceu e viveu. A primeira refere que Perseus está associado à descoberta das curvas espíricas do mesmo modo que Apolónio está com as cônicas. A segunda referência é retirada de Geminus e indica que Perseus escreveu um epigrama sobre a sua descoberta. O que pode ser deduzido com alguma certeza é que viveu antes de Geminus e, com menos certeza, que ele tenha sido posterior ao desenvolvimento das secções cônicas e a Euclides. As referências não são suficientemente detalhadas para se saber quais foram as descobertas de Perseus. Sabe-se que uma secção espírica é a obtida pelo corte de um plano numa superfície espírica e que esta se obtém pela rotação de um círculo em torno de um eixo de revolução. Existem três tipos diferentes de superfícies espíricas dependendo de o eixo de revolução ser interior, tangente ou exterior ao círculo. Dos vários casos resulta do primeiro uma oval, o segundo é uma transição do primeiro para o terceiro, do terceiro caso uma curva fechada e mais estreita no meio, do quarto caso a *hipopeda*, que foi estudada por Eudoxo e finalmente do quinto caso duas curvas fechadas posicionadas simetricamente. Considera-se apenas como resultando três curvas diferentes.

(<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Perseus.html>)

Plucker, Julius. (1801-1868) Nasceu em Duch of Berg (Alemanha) e faleceu em Bona. Plucker foi educado em Heidelberg, Berlim e Paris. Foi proposto para Bona em 1829 e tornou-se professor de Matemática em Halle em 1834, e passou dois anos em Bona. Este matemático deu importantes contributos à geometria analítica e à física. Começou a investigação em configurações geométricas associadas a linhas complexas. No seu trabalho em combinatória utilizou o sistema de Steiner. Em 1847 escolhe a física, aceitando a cadeira de física em Bona, trabalhando com magnetismo, electrónica e física atómica. Em 1865 volta para a Matemática, tendo sido Klein seu assistente entre 1866 e 1868. (<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Plucker.html>)

Poncelet, Jean Victor. (1788-1867) Nasceu em Lorraine (França) e faleceu em Paris. Foi aluno de Monge. O seu desenvolvimento do conceito de pólo e linhas polares associados com cónicas conduziram ao princípio da dualidade. Poncelet fez parte da companhia de Napoleão em 1812 e foi abandonado em Krasnoy e feito prisioneiro de guerra até 1814, ano em que voltou para França. Durante o tempo em que esteve preso estudou geometria projectiva e escreveu um tratado sobre geometria analítica *Applications d'analyse et de géométrie*, baseado no que tinha aprendido na Ecole Polytechnique, mas que apenas seria publicado 50 anos mais tarde. Entre 1815 e 1825 foi engenheiro militar em Metz e de 1825 a 1835 foi aí professor de mecânica. Poncelet foi um dos fundadores da moderna geometria projectiva, simultaneamente descoberta por Joseph Gergonne e Poncelet. Descobriu também pontos circulares no infinito. Publicou, em 1822, *Traité des propriétés projectives des figures*, que é um estudo das propriedades que são invariantes por uma projecção. Este trabalho contém ideias fundamentais de geometria projectiva como razão cruzada¹⁰⁶, perspectiva, involução e pontos circulares no infinito.

(<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Poncelet.html>)

Roberts, Samuel. (1827-1913) Nasceu em Lincolnshire (Inglaterra) e faleceu em Londres. Frequentou o Queen Elizabeth's Grammar School na sua terra natal, em 1844 entrou para o Manchester New College e no ano seguinte iniciou os seus estudos na Universidade de Londres. Graduou-se em Matemática 1847 e mais tarde estudou Direito, tornando-se

¹⁰⁶ Razão cruzada $[a, b, c, d] = \frac{(a-b)(c-d)}{(a-d)(c-b)}$

solicitador, em Lincoln, em 1853. Contudo, o seu amor à Matemática fê-lo desistir de Direito alguns anos depois e voltar a Londres para continuar aos seus estudos de Matemática pela segunda vez. Escreveu vários artigos em diversos temas como geometria plana e sólida, teoria dos números e sobre interpolação. Os seus trabalhos sobre geometria incluem artigos sobre superfícies e curvas paralelas. Em teoria dos números, interessou-se pela equação de Pellian e outros problemas semelhantes.

(<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Roberts.html>)

Roberval, Gilles Personne. (1602-1675) Nasceu em Senlis (França) e faleceu em Paris. Roberval começou a estudar Matemática aos 14 anos. Em adulto viajava muito por vários locais de França e subsistia ensinando Matemática enquanto discutia tópicos avançados com professores universitários das cidades que visitava. Nas suas viagens foi a Bordeaux e conheceu Fermat. A partir de 1632 foi professor de filosofia no Collège Gervais em Paris e em 1634 foi escolhido para a cadeira de Matemática de Ramus no Collège Royale. Em 1655 foi escolhido para a cadeira de Matemática de Gassendi, tendo leccionado ambas até ao fim da sua vida. Roberval desenvolveu poderosos métodos no estudo inicial de integração, escrevendo o *Traité des indivisibles*. Calculou o integral definido de $\sin x$, estudou a cicloide e calculou o comprimento de arco da espiral. O trabalho de Roberval foi importante pelas suas descobertas sobre curvas planas e pelo seu método para desenhar a tangente a uma curva, já antes sugerido por Torricelli. Este método transformou Roberval no fundador da geometria cinemática. Estudou também cartografia com Picard.

(<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Roberval.html>)

Saint-Vincent, Gregorius. (1584-1667) Nasceu em Bruges e faleceu em Ghent (Bélgica). Estudou num colégio jesuíta em Bruges indo, em 1601, para Douai (no norte de França) para estudar Matemática e Filosofia. Entrou para a Companhia de Jesus em 1607 tendo sido aluno de Clavius em Roma e em 1612 vai para Louvain para completar a sua formação em teologia. Em 1613 começa a ensinar grego, em várias cidades entre as quais Bruxelas. A partir de 1621 e por quatro anos ensina Matemática em Louvain. Depois de ter sido capelão em Praga, em 1632 vai para Ghent onde ensina no colégio jesuíta até à sua morte. O seu principal trabalho, de 1250 páginas, trata círculos, triângulos, séries geométricas, elipses, parábolas e hipérbolas. O seu livro aborda também o método da quadratura relacionado com o de Cavalieri mas por

ele descoberto independentemente. Ele fornece um método para quadrar o círculo que agora se vê como integração. Saint-Vincent integrou x^{-1} de uma forma geométrica que é agora reconhecida como função logarítmica.

(<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Sain-Vincent.html>)

Schlömilch, Oscar Xavier. (1823-1901) Ensinou em Jena e Dresden. As técnicas de Cauchy de análise tornaram-se conhecidas na Alemanha através dos livros de texto de Schlömilch. Em 1847 ele forneceu uma fórmula para o resto das séries de Taylor e em 1857 descobriu uma importante expansão em série para uma função arbitrária em termos de funções de Bessel.

(<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Schlomilch.html>)

Schoute, Pieter Hendrik. (1846-1923) Nasceu em Wormerveer e faleceu em Groningen (Holanda). Estudou engenharia civil no Polytechnique em Delft. Após a sua graduação foi para Leiden para fazer investigação em Matemática. Doutorou-se em 1870 com a tese *Homography applied to the theory of quadratic surfaces*. Entre 1871 e 1874 ensinou Matemática numa escola secundária em Nijmegen e em Haia até 1881. A partir deste ano e até à sua morte ensinou na Universidade de Groningen. Schoute estudou vários tópicos em geometria tais como curvas algébricas e quárticas. A partir de 1891 estudou geometria Euclidiana em mais de três dimensões, escrevendo 28 artigos, alguns dos quais com Alica Boole Stott, filha de George Boole. A colaboração com Stott investigando politopos regulares, levou à generalização do conceito de poliedro regular. Escreveu no *Nieuw Archief Wiskunde* e foi fundador editor da *Revue semestrielle des publications mathématique* desde 1893.

(<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Schoute.html>)

Schubert, Hermann Cäsar Hannibal. (1848-1911) Nasceu em Potsdam e faleceu em Hamburgo (Alemanha). Schubert estudou geometria enumerativa, ganhando em 1874 um prémio por ter resolvido a questão proposta por Zeuthen. A geometria enumerativa considera as partes da geometria algébrica que envolvem um número finito de soluções. Utilizando os métodos de Chasles, ele estabeleceu um sistema para resolver estes problemas a que chamou

o princípio de conservação do número. Em 1900 Hilbert solicitou-lhe uma demonstração que foi fornecida por Severi em 1912. Alguns dos seus resultados foram negligenciados ao longo dos tempos, por falta de rigor, mas recentemente muitos deles foram confirmados.

(<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Schubert.html>)

Serret, Joseph Alfred. (1819-1885) Nasceu em Paris e faleceu em Versalhes (França). Graduou-se na Ecole Polytechnique, em 1840, em Paris. Em 1861 tornou-se professor de mecânica celeste no Collège de France e dois anos mais tarde foi escolhido para a cadeira de cálculo diferencial e integral na Sorbonne. Serret deixou uma obra importante em geometria diferencial. As fórmulas fundamentais na teoria de curvas do espaço são as fórmulas Frenet-Serret. Em 1860 sucede a Poincaré na Académie de Sciences. Estudou também teoria dos números, cálculo e mecânica.

(<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Serret.html>)

Sluze, René François Walter de. (1622-1685) Nasceu em Visé e faleceu em Liège (Bélgica). Estudou na Universidade de Louvain entre 1638 e 1642. Foi para Roma onde fez o curso de direito pela University of Sapienza (Roma) em 1643. Mais tarde estudou vários assuntos entre os quais línguas, Matemática e astronomia. Entre 1650 e 1666 desempenhou vários cargos clericais. Sluze escreveu vários livros sobre Matemática, trabalhou em cálculo, estudou os trabalhos de Cavalieri e Torricelli, discutiu espirais, pontos de inflexão e a descoberta de meios geométricos e, em particular, estudou a equação da cicloide. Sluze ampliou os trabalhos de Descartes e Fermat desenhando tangentes e determinando pontos de inflexão de funções. A família de curvas $y^n = k(a-x)^p x^m$ para expoentes inteiros positivos são chamadas *pérolas de Sluze*. Ele não escrevia exclusivamente sobre Matemática, mas também sobre astronomia, física, história natural e temas históricos e teológicos relacionados com o seu trabalho na igreja.

(<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Sluze.html>)

Steiner, Jakob. (1796-1863) Nasceu em Utzendorf e faleceu em Berna (Suíça). Steiner aprendeu a ler e escrever apenas aos 14 anos de idade e foi para a escola somente aos 18, contra a vontade dos pais. Estudou nas Universidades de Heidelberg e Berlim, sobrevivendo

muito modestamente. Contribuiu desde cedo para o Journal de Crelle e desde 1834 até à sua morte ensinou na University of Berlin. Foi um dos matemáticos que mais contribuíram para o estudo da geometria projectiva. Descobriu a superfície de Steiner que tem uma infinidade dupla de secções cónicas. O teorema de Steiner afirma que os dois feixes pelos quais uma cónica é projectada a partir de dois dos seus pontos são projectivamente relacionados. Um outro resultado famoso é o teorema Poncelet-Steiner que mostra que apenas um dado círculo e uma recta são necessários para as construções Euclidianas. Ele não gostava de álgebra e análise e acreditava que o cálculo substitui o pensamento enquanto a geometria o estimula.

(<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Steiner.html>)

Sturm, Jacques Charles François. (1803-1855) Nasceu em Geneva (Suiça) e faleceu em Paris. Fez a primeira determinação aproximada da velocidade do som debaixo de água em 1826. Tornou-se cidadão francês em 1833 e trabalhou em Paris na Ecole Polytechnique onde se tornou professor em 1838. Em 1840 sucedeu a Poisson na cadeira de mecânica na Faculté des Sciences de Paris. Sturm é recordado pelo problema Sturm-Liouville, em equações diferenciais. Trabalhou em geometria infinitesimal, equações diferenciais, raízes de equações, geometria projectiva e geometria diferencial de curvas e superfícies. Estudou difusão de calor e um importante resultado seu é sobre o número de zeros de um polinómio num intervalo, em *Mémoire sur la résolution des équations numériques* (1829). Sturm fez também um trabalho importante sobre geometria óptica. Os seus livros *Cours d'analyse de l'Ecole Polytechnique* e *Cours de mécanique de l'Ecole Polytechnique* foram publicados postumamente.

(<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Sturm.html>)

Tannery, Paul. (1843-1904) Nasceu em Mantes-la-Jolie e faleceu em Seine-St Denis (França). Devido ao trabalho de seu pai, Delphin Tannery, ligado à construção de caminhos de ferro por várias localidades do país, Paul Tannery estudou em várias escolas. Estudou numa escola privada em Mantes, depois no Lycée de Le Mans e finalmente no de Caen. Apesar de orientado para um curso de ciências, interessava-se também por filosofia. Frequentou a Ecole Polytechnique, estudando ciências, Matemática, tecnologias e outros assuntos clássicos. Graduou-se nesta escola em 1863 e entrou na Ecole d'Application des Tabacs. Tannery passaria o resto da sua vida activa ligado à indústria do tabaco. Interessou-se por Matemática por influência do seu irmão Jules Tannery que era professor desta disciplina.

Em 1874 foi para Bordeaux onde começa a estudar história da Matemática em antigas civilizações. Em 1877 pede transferência para Le Havre mas não aguentando o isolamento acadêmico desta cidade pede transferência para Paris onde desenvolve o seu estudo sobre geometria grega. Os seus maiores contributos foram em história da Matemática grega e filosofia Matemática. Publicou um livro sobre história da ciência grega, em 1887, um de história da geometria grega, no mesmo ano, e uma história sobre astronomia antiga, em 1893. Tannery desempenhou um importante papel como editor de textos matemáticos. Editou o trabalho de Fermat em três volumes, entre 1891 e 1896, o trabalho de Diofanto, em dois volumes e as *Oeuvres de Descartes* em doze volumes.

(http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Tannery_Paul.html)

Tschirnhaus, Ehrenfried Walter von. (1651-1708) Nasceu em Kieslingswalde e faleceu em Dresden (Alemanha). Ainda aluno da escola, Tschirnhaus teve aulas privadas de Matemática. Entrou para a Universidade de Leiden em 1668 onde estudou Matemática, filosofia e medicina. Estudou a solução de equações no estudo de curvas e descobriu uma transformação que quando aplicada a uma equação de grau n fornece uma outra equação de grau n sem termos em x^{n-1} e x^{n-2} . Estudou também curvas *catacausticas* em 1682 estas sendo as envolutas de raios de luz emitidos por uma fonte luminosa depois de reflectida por uma dada curva. Existe uma espiral sinusoidal com o seu nome.

(<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Tschirnhaus.html>)

Viviani, Vincenzo. (1622-1703) Nasceu e faleceu em Florença (Itália). Estudou num colégio jesuíta tendo a sua inteligência sido notada desde muito cedo e por tal recebido uma bolsa de estudo da parte do Granduque Ferdinando de Medici para a compra de livros matemáticos. Foi aluno de Torricelli e discípulo de Galileu, tendo estudado física e geometria. Após a morte de Torricelli em 1647, Viviani foi escolhido para o substituir na Academia del Disegno em Florença. Em 1660 Viviani mediu, com Borelli, a velocidade do som calculando a diferença entre o clarão e o som de um canhão. Viviani determinou a tangente à cicloide mas não foi o primeiro a consegui-lo. Sendo basicamente engenheiro toda a sua vida, Viviani escreveu *Discorso intorno al diffendersi da'riempimenti e dalle corrosione de'fiumi* (1687). Em 1692 Viviani propôs o seguinte problema que suscitou muito interesse: Um hemisfério

tem quatro janelas iguais de tal tamanho que a superfície restante pode ser quadrável. Viviani deixou uma obra quase completa sobre resistência de sólidos, publicada por Grandi.

(<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Viviani.html>)

Wallis, John. (1616-1703) Nasceu em Ashford, Kent e faleceu em Oxford (Inglaterra). Frequentou a escola em Ashford e Tenterden. Em 1630 foi para Felsted onde aprendeu Latim, Grego e Hebreu. Depois foi para o Emmanuel College em Cambridge onde se interessou por Matemática. Como por essa altura não havia ninguém em Cambridge para orientar estudos em Matemática, o seu principal tópico de estudo tornou-se a divindade, tendo sido ordenado em 1640. Wallis tinha jeito para criptografia tendo sido indicado para a cadeira de Savilian, em geometria, em Oxford, em 1649, ocupando-a até ao fim da sua vida. Wallis fazia parte de um grupo interessado em ciência natural e experimental que se encontravam em Londres. Este grupo seria a Royal Society, da qual Wallis foi um dos fundadores. Este matemático contribuiu substancialmente para a origem do cálculo e foi o mais influente matemático inglês antes de Newton. No *Arithmetica infinitorum* (1656) Wallis avaliou o integral $\int (1-x^2)^n$ entre 0 e 1 para valores inteiros de n , construindo com o método de Cavalieri dos indivisíveis. Ele legou um método de interpolação numa tentativa de calcular o integral de $(1-x^2)^{1/2}$ entre 0 e 1. Usando o conceito de Kepler de continuidade, descobriu métodos para avaliar integrais que mais tarde foram usados por Newton no seu trabalho sobre o teorema binomial. Em *Arithmetica infinitorum*, Wallis estabeleceu a fórmula

$$\pi/2 = (2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 10 \dots) / (1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 9) \dots$$

Na obra *Tract on Conic Sections*, Wallis descreve as curvas que são obtidas como secções de um plano num cone como propriedades de coordenadas algébricas. Ele seguiu os métodos ao estilo do tratamento analítico de Descartes.

Wallis foi também um importante historiador de Matemática e no seu *Treatise on Algebra* tem imenso material histórico. Contudo, o feito mais importante no seu trabalho surgiu em 1685 aceitando raízes negativas em soluções complexas. Wallis introduziu o actual símbolo ∞ para representar o infinito. Wallis deixou também versões de alguns textos gregos de Ptolomeu, Aristarchus e Arquimedes. Os seus trabalhos não matemáticos incluem escritos religiosos, um livro sobre etimologia e gramática.

(<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Wallis.html>)

Wyer, Emil. (1848-1894) Ensinou em Praga e Viena depois de ter estudado em Viena e em Itália. Ele e seu irmão Eduard Wyer foram os principais membros da escola austríaca de geometria. Interessavam-se por geometria descritiva, depois por geometria projectiva e os seus interesses voltaram-se para métodos algébricos e sintéticos em geometria. Emil Wyer conduziu a escola de geometria em Viena ao longo de 1880 até à sua morte.

(<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Wyer.html>)

Bibliografia

- A. Mendes Correa (1933) *Annaes da Faculdade de Ciências do Porto* (Vol. XVIII, n.º 1, pp. 5-32). Porto: Imprensa Portuguesa.
- Appell, (1916) “Rapport de M. Appell sur les Travaux de M. F. Gomes Teixeira”. *Annaes Scientificos da Academia Polytechnica do Porto* (Vol. XI, pp. 126-128).
- Aubry, A. (1908) “Essai sur l’histoire de la géométrie des courbes”. *Annaes Scientificos da Academia Polytechnica*. (Vol. 3, pp. 65-112) Coimbra: Imprensa da Universidade.
- Ayoub, Raymond (1984) “The Lemniscate and Fagnano’s Contributions to Elliptic Integrals”. *Archives Histoire Exact Science* (29). (pp. 132-149).
- Basset, A. B. (1901). *An Elementary Treatise on Cubic and Quartic Curves*. Cambridge: Deighton, Bell.
- Beires, Rodrigo Sarmiento de. (1950-51). *Evocação da vida e da obra do Professor Gomes Teixeira*. Porto: Imprensa Portuguesa.
- Booth, James (1873). *A Treatise on some Geometrical Methods* (Vol. 1). London: Longmans.
- Booth, James (1877). *A Treatise on some Geometrical Methods* (Vol. 2). London: Longmans.
- Bos, Henk J. M. (1993) *Lectures in the History of Mathematics*, American Mathematical Society.
- Brown, B. H. (1930) “Curve piane speciali algebriche e trascendenti”. *American Mathematical Monthly* (n.º 37, pp. 255-256). New York.
- Cajori, Florian (1991). *A History of Mathematics* (5ª Ed). New York: Chelsea.
- Calado, Joaquim (1997) “O Computador e a Mathematica Elementar: O Uso do Software Mathematica na obtenção das curvas que Francisco Gomes Teixeira apresentou no seu

- Tratado de Curvas Notáveis Planas e Enviezadas”. *Jornal de Mathematica Elementar* (n.º 170, pp. 1-6).
- Carmo, Manfredo P. do. (1976) *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. New Jersey: Prentice Hall.
- Collignon, Edouard. (1882) *Traité de mécanique*. (2ª Ed.) (Vol. 3) Paris: Hachette.
- Courtand, Marc. (1940). *Sur les courbes gauches du troisième et du quatrième ordre en géométrie finie*. Paris: Hermann.
- Dieudonné, Jean. (1978) *Abrégé d’histoire des mathématiques 1700-1900*. Paris: Hermann.
- Duaso, José Carasco (1946) *Estudio y Representacion de Curvas Planas*. Madrid: Sociedad Anónima Española de Tradutores y Autores.
- Encyclopaedia Britannica (1971) (Vol. 6) Chicago: Encyclopaedia Britannica.
- Freire, Luis (1951) “Sobre Gomes Teixeira”. *Gazeta de Matemática*. (Ano XII n.º 47, pp. 109-111) Lisboa: Tipografia Matemática Lda.
- Gabriel-Marie, Frade. (1909) *Exercices de géométrie descriptive*. (4ª Ed.) Tours: Alfred Mame.
- Garret, Gonçalo Xavier de Almeida (1900). *Homenagem da Câmara dos Dignos Pares do Reino ao Doutor Gomes Teixeira*. Lisboa: Imprensa Nacional.
- Gray, Alfred & Cordero, Luis A. & Fernández, Marisa (1995) *Geometría diferencial de curvas y superficies con Mathematica*. Delaware: Addison-Wesley Iberoamericana.
- Grande Enciclopédia Portuguesa e Brasileira (195-) (Vol.12). Lisboa,Rio de Janeiro: Editorial Enciclopédia Limitada.

- Guimarães, Rodolfo. (1909). *Les Mathematiques en Portugal* (2ª Ed.). Coimbra: Universidade de Coimbra.
- Guimarães, Rodolfo. (1914) *Biografia de F. G. Teixeira, História e Memórias da Academia de Ciências de Lisboa* (2ª Edição) (XII e IV). Lisboa: Imprensa Nacional.
- Katz, Victor J. (1993) *A History of Mathematics*. New York: Harper Collins.
- Kline, Morris (1972). *Mathematical thought from ancient to modern times*. New York: Oxford University Press.
- Lawrence, J. Dennis. (1972) *A Catalog of Special Plane Curves*. New York: Dover publications.
- Leite, Duarte (1934) “Professor Dr. F. Gomes Teixeira”. *Anais da Faculdade de Ciências* (Vol.XVIII, n.º 1, pp. 193-207). Porto
- Lockwood, E. H. (1978). *A Book of Curves*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Loria, Gino. (1897) *Las Curvas planas particulares algébricas e transcendentess*. Teoria e História. Manuscrito.
- The Mathematical Gazette (1911), Revisão de obras, *Obras sobre Matemática* (nº5). London: Mathematical Association. (pp. 342-343).
- Mieli, Aldo. (Outubro de 1947) *Archives Internationales d'Histoire des Sciences* (n.º 1). (pp. 155, 189,198-199). Roma
- Monteiro, Alfredo Schiapppa (1889) Carta dirigida ao Ex.mo Sr. Director do Jornal O Tempo sobre a resposta do Sr. Dr. Francisco Gomes Teixeira às objecções feitas ao seu cálculo diferencial. Lisboa: Typ. do Jornal O Tempo.
- Morgado, José. (1995) *Para a História da Sociedade Portuguesa de Matemática*. Coimbra: Centro de Matemática da Universidade de Coimbra.

- Penteado, Manuel (1899) Dr. Francisco Gomes Teixeira. *O Occidente* (Ano 22, Vol. XXII, n.º 749, p. 230) Lisboa: Caetano Alberto da Silva.
- Phillips, A. W. (1878) “Link Work for the Lemniscate”. *American Journal of Mathematics I* (p. 386). Baltimore: John Hopkins. University Press
- Pinto, Sousa. (1937). Doutor Gomes Teixeira. Porto: Imprensa Portuguesa.
- Ribeiro, Adília & Torres, Helena (1998) “A lemniscata de Bernoulli”. *Educação e Matemática* (n.º 48, p. 31-33). Revista da Associação de Professores de Matemática.
- Salmon, George. (1884). *Traité de géométrie analytique: courbes planes*. Paris: Gauthier-Villars.
- Sisam, C. H. (1927) “Curve Sghembe Speciali Algebriche e Transcendenti” (p. 93) *American Mathematical Monthly* (n.º 34, pp. 451-452), New York.
- Sousa, Francisco de Almeida. (2000) “Os grandes vultos do Porto, O Professor Gomes Teixeira”. *O Tripeiro* (Janeiro de 2000, pp. 3-8). Porto: Associação Comercial do Porto.
- Stillwell, John. (1989) *Mathematics and Its History*. New York: Springer-Verlag.
- Taillé, Jean. (1953) *Courbes et surfaces*. Coleção *Que sais je* (n.º 564). Paris: Presses Universitaires de France.
- Teixeira, F. G. (1905) *Tratado de las Curvas Especiales Notables*. Madrid: Imprenta de la “Gaceta de Madrid”.
- Teixeira, F. G. (1908) “*Traité des courbes spéciales remarquables: planes et gauches*”. Tomo I. *Obras Sobre Matemática* (Vol. 4) Coimbra: Imprensa da Universidade.
- Teixeira, F. G. (1908) “*Traité des courbes spéciales remarquables: planes et gauches*”. Tomo II. *Obras Sobre Matemática* (Vol. 5) Coimbra: Imprensa da Universidade.

- Teixeira, F. G. (1912) “Curso de Analyse Infinitesimal” – Calculo Integral. (3ª Ed). *Obras Sobre Matemática* (Vol. 6) Coimbra: Imprensa da Universidade.
- Teixeira, F. G. (1971) *Traité des courbes spéciales remarquables: planes et gauches*. New York: Ed. Chelsea (Vol. 3).
- Toledo, Luis Octavio de. (1933) “El Dr. D. Francisco Gomes Teixeira”. *Revista Matemática Hispano-Americana* (Vol. 2, n.º 8, p. 49-55) Madrid: Instituto Jorge Juan.
- Vargas y Aguirre, Joaquin de.(1908). Catálogo general de curvas. Madrid: Imprensa de la “Gaceta de Madrid”.
- Vechtmann, Gerhard C.H. (1843) *Dissertatio inauguralis philosophica de curvis lemniscatis* Göttingae: Vandenhoeck & Ruprecht.
- Vilhena, Henrique de. (1935).O Professor Doutor Francisco Gomes Teixeira: elogio, notas, notas de biografia, bibliografia, documentos. Lisboa: Oficina Fernandes, imp1936.
- Weisstein, Eric W. (1999) *CRC Concise Encyclopedia of Mathematics*. CRC Press LLC.
- Yates, Robert C. (1974) *Curves and Their Properties*. S. L.: The National Council of Teachers of Mathematics.

Páginas da Internet consultados

http://cyclone.cs.clemson.edu/CSE/cpsc405/asg6/donnfeo/lem_bern.html

http://es.rice.edu/ES/humsoc/Galileo/Catalog/Files/bernouli_jak.html

http://es.rice.edu/ES/humsoc/Galileo/Catalog/Files/bernouli_joh.html

<http://history.math.csusb.edu/Curves/Eight.html>

<http://home.wxs.nl/~wassel70/quartic/quarticca.html>

<http://home.wxs.nl/~wassel70/quartic/quartich.html>

<http://home.wxs.nl/~wassel70/higher/higherm.html>

<http://mathworld.wolfram.com/LemniscateMandelbrotSet.html>

<http://mathworld.wolfram.com/SpiricSection.html>

<http://mathworld.wolfram.com/StandardTori.html>

<http://mathworld.wolfram.com/Torus.html>

<http://www.astro.virginia.edu/%/Eeww6n/math/EightCurve.html>

<http://www.astro.virginia.edu/%/Eeww6n/math/Lemniscate.html>

http://www.best.com/~xah/SpecialPlaneCurves_dir/CassinianOval_dir/cassinianOval.html

http://www.best.com/~xah/SpecialPlaneCurves_dir/Lemnis.../lemniscateOfBernoulli.htm

http://www.best.com/~xah/SpecialPlaneCurves_dir/Lemnisc.../lemniscateOfGerono.htm

<http://www.britannica.com/bcom/eb/article/4/0,5716,9734+1+9617,00.html>

<http://www.britannica.com/bcom/eb/article/5/0,5716,117155+2+109383,00.html>

<http://www.britannica.com/bcom/eb/article/6/0,5716,80996+1+78864,00.html>

<http://www.britannica.com/bcom/eb/article/7/0,5716,80997+1+78865,00.html>

<http://www.britannica.com/bcom/eb/article/8/0,5716,77988+1+75990,00.html>

<http://www.britannica.com/bcom/eb/article/4/0,5716,71874+1,00.html>

<http://www.cco.caltech.edu/~physl/java/physl/Efield/Efield.html>

<http://www.etl.go.jp/etl/linac/public/rsuzuki/e/povray/algebrc.txt>

<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathemmaticians/Bonnet.html>

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathemmaticians/Bernoulli_Johann.html

<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathemmaticians/Cassini.html>

<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathemmaticians/Dandelin.html>

<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathemmaticians/Darboux.html>

<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathemmaticians/Gauss.html>

<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathemmaticians/Grandi.html>

<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathemmaticians/Genocchi.html>

<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathemmaticians/Lame.html>

<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathemmaticians/Laguerre.html>

<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathemmaticians/Lissajous.html>

<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathemmaticians/Perseus.html>

<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathemmaticians/Plucker.html>

<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathemmaticians/Malfatti.html>

<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Schlomilch.html>

<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Serret.html>

<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Steiner.html>

<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Sturm.html>

<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Tschirnaus.html>

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Tannery_Paul.html

<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Weyr.html>

<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/Curves/Lemniscate.html>

<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/history/Java/Lemniscate.html>

<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/history/Java/Eight.html>

http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/history/Mathematicians/Bernoulli_Jacob.html

<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Chasles.html>

<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Cramer.html>

<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Eudoxos.html>

<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Euler.html>

http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Fagnano_Giovanni.html

http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Fagnano_Giulio.html

<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Fuss.html>

<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Huygens.html>

<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Leibniz.html>

<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Montucla.html>

<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Poncelet.html>

<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Roberts.html>

<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Roberval.html>

<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Sain-Vincent.html>

<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Schoute.html>

<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Schubert.html>

<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Sluze.html>

<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Viviani.html>

<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Wallis.html>

<http://www.math.ohio-state.edu/~fiedorow/math151/lemniscate.html>

<http://www.mirajan.demon.nl/curves/QuarticCurve/QuarticCurveL.htm>

<http://www.museo.unimo.it/labmat/lemn.htm>

<http://www.museo.unimo.it/pdinelli/b25.htm>

<http://www.public.usit.net/rsuzuk/e/povray/algebrc.txt>

<http://jwilson.coe.uga.edu/Texts.Folder/Lem/Lemniscates.html>

<http://neuronio.mat.uc.pt/crcmath/math/math/c/c584.htm>

Gomes Teixeira e a lemniscata

Errata

- p.10 linha 13 onde se lê $k = \frac{3\sqrt{2} \cos(t)}{\sqrt{3 - \cos(2t)}}$ deve ler-se $k = \frac{3\sqrt{\cos(2\omega)}}{a}$;
- p. 89 linha 20 onde se lê $\left(\frac{ds}{dx_1}\right)^2 = \frac{1}{M} \cdot \frac{PP_1 - QQ_1 \pm (QP_1 - PQ_1)\sqrt{M}}{P_1^2 - MQ_1^2}$ deve ler-se

$$\left(\frac{ds}{dx_1}\right)^2 = \frac{1}{M} \cdot \frac{PP_1 - QQ_1 M \pm (QP_1 - PQ_1)\sqrt{M}}{P_1^2 - MQ_1^2};$$
- p. 91 linha 15 onde está $x = \sqrt{ax+b} + \sqrt{a_1x+b_1}$ deve ser $x = \sqrt{ay+b} + \sqrt{a_1y+b_1}$;
- p. 99 linha 21 onde se lê xOz deve ler-se yOz ;
- p. 105 linha 11 onde está A_1 deve ser A'_1 ;
- p. 108 linha 5 onde se lê $(a-b)z^2 - bx^2 = ab^2$ deve ler-se $(a-b)z^2 - bx^2 = a^2b$;
- p. 108 linha 6 onde se lê "...distâncias a estes pontos..." deve ler-se "... distância do ponto descrito aos seus focos..." ;
- p.124 linha 19 onde está

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{\varphi} \rho^2 d\varphi = \frac{a^2}{2} \int_0^n \frac{2 - \cosh^2(n)}{\cosh^3(n)} dn = n^2 \int_0^n \frac{dn}{\cosh^3(n)} - \frac{a^2}{2} \int_0^n \frac{dn}{\cosh(n)} = \frac{a^2 \sinh(n)}{\cosh^2(n)}.$$

deveria estar

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{\varphi} \rho^2 d\varphi = \frac{a^2}{2} \int_0^n \frac{2 - \cosh^2(n)}{\cosh^3(n)} dn = a^2 \int_0^n \frac{dn}{\cosh^3(n)} - \frac{a^2}{2} \int_0^n \frac{dn}{\cosh(n)} = \frac{a^2 \sinh(n)}{\cosh^2(n)};$$

- p.71 retira-se a nota 41 uma vez que esta emenda consta na errata feita por Gomes Teixeira ao seu *Traité des courbes speciales remarquables planes et gauches*.

Lista de notas em falta

- p.75 linha 17 devia constar em nota que a expressão da hipérbole da qual a lemniscata hiperbólica é inversa relativamente ao centro é $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$;
- p.97 linha 8 onde se lê $2y - \frac{x^2}{2y}$ devia constar em nota que pelos cálculos feitos julgamos que deveria ser $-2y + \frac{x^2}{2y}$;

- p. 108 linha 1 onde se lê $b(x^2 + z^2)^2 = a^2(a-b)z^2 - a^2bx^2$ deveria constar em nota que não corresponde aos nossos cálculos $4b^2x^2 + z^4 + 4z^2b(b-a) = 0$;

- p. 135 linha 7 onde se lê $dx = \frac{\sqrt{2}dR}{R\sqrt{R^2 - 2}}$ devia constar em nota que os cálculos nos deram

$$dx = \frac{dR}{2\sqrt{2 - R^2}}.$$

- Na pág.107, após observação do Professor Doutor Craveiro de Carvalho acerca da definição de hipópeda, descreve-se abaixo uma mais ajustada que substitui a referida:

“Hipópeda é uma curva que resulta da intersecção de um cilindro com uma esfera a ele tangente, encontrando-se o cilindro no mesmo semi-espaço definido pelo plano perpendicular ao raio da esfera no ponto de tangência.”