

# O Movimento dos Dois Corpos

Ana Paula da Cunha Melo Silva Rangel

2001

Ana Paula da Cunha Melo Silva Rangel

# O movimento dos dois corpos



Departamento de Matemática Aplicada  
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto  
Fevereiro / 2001

Ana Paula da Cunha Melo Silva Rangel

# O movimento dos dois corpos



*Dissertação submetida à Faculdade de Ciências da Universidade do Porto  
para obtenção do grau de Mestre em Ensino da Astronomia*

Departamento de Matemática Aplicada  
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto  
Fevereiro / 2001

## Resumo

O movimento dos corpos celestes e, em particular, o movimento dos planetas foi um dos problemas fundamentais da Dinâmica, que intrigou o homem desde o início da civilização.

Antes da invenção do telescópio, as órbitas e as posições dos planetas não podiam ser exactamente determinadas. O início da compreensão dos movimentos planetários começou com Galileu, Tycho Brahe e Kepler que, em conjunto e mais tarde com a preciosa contribuição de Newton, varreram por completo a noção grega de um Universo geocêntrico e estabeleceram o modelo actual do Sistema Solar. A lei de gravitação universal de Newton é a base da Mecânica Celeste e da Astrodinâmica.

Este trabalho tem como objectivo resolver o problema dos dois corpos, isto é, "*Dadas, num dado instante, a posição e a velocidade de dois corpos massivos, que se movem devido apenas à atracção gravitacional mútua e cujas massas são conhecidas, quais serão as suas posições e velocidades para um outro instante qualquer de tempo, passado ou futuro?*."

Após uma breve síntese histórica da evolução do conhecimento do homem sobre os movimentos dos planetas e dos seus satélites, um dos mais interessantes na história da Ciência, são deduzidas as equações do movimento de dois corpos, cuja solução é uma secção cónica. Ao obter esta solução generalizamos a primeira lei de Kepler, uma vez que uma secção cónica pode ser não só uma elipse, mas uma parábola ou uma hipérbole. A partir da solução do problema dos dois corpos, deduziram-se algumas relações importantes para o estudo da dinâmica do movimento dos corpos e definiram-se os elementos orbitais, que caracterizam o tipo, a dimensão e a orientação da órbita. Como se verá, as soluções encontradas podem ser usadas no estudo dos movimentos dos planetas em torno do Sol. Embora o movimento dos planetas possa ser perturbado pelos planetas próximos, a trajectória, em primeira aproximação, é muito próxima duma secção cónica.

Apresentam-se dois algoritmos que permitem determinar, os vectores posição e velocidade de um corpo (cujo movimento dependa apenas da força gravitacional de um segundo corpo próximo), num dado instante, conhecidos os elementos orbitais e vice-versa. Foi elaborado um programa, apenas para a órbita elíptica, utilizando o algoritmo acima referido.

Finalmente, apresenta-se uma ficha de trabalho e a sua resolução, bem como algumas experiências divertidas relativas ao problema em estudo.

# Abstract

The motion of celestial bodies, and particularly the planets motions is a fundamental problem in dynamic since the beginning of civilization.

Before the telescope invention, the positions and orbits of planets were not well known. A better understanding of this subject happened with Galileu, Tycho Brahe and Kepler, and latter a complete explanation of the planets motions was given by Newton. The universal law of gravitation from Newton swept away the conception of geocentric universe believed since the greeks.

The main goal of this work is to solve the two body problem. Knowing the positions and velocities of two bodies of given masses, which movements is due only to the gravitational forces, one find the positions and velocities at a given time, past or future.

Initially, it's given a historical resume of evolution of man knowledge on planets motions and satellites. The equations of two body motion are solved using the law of gravitation, the final solution is a conic section. Using the above solution, some important relations are determined, related to the dynamic and orbital elements, characterizing the class, dimension and orientation of orbit in analysis. These equations can be used to study the planet motion around the Sun. Although the motion of planets are perturbed by the nearest planets, in a first approximation one can assume the planets orbits as well described by a conic section.

Two algorithms are presented to solve the two body problem. In the first case, the position and velocity is determined when the orbital elements are known, and in the second case the inverse problem is solved. Using the above algorithm, a program has been done for the case of an elliptical orbit.

Finally, some examples for homework are given, with exercises and related solutions and a few practical experiences related to the problem.

## Résumé

Le mouvement des corps célestes et en particulier, le mouvement des planètes est un des problèmes fondamentaux en Dynamique, qui a intrigué l'homme dès le début de la civilisation. Avant l'invention du télescope, les orbites et positions des planètes n'étaient pas déterminées avec une bonne précision. La situation sera très différente avec Galilée, Tycho Brahe et Kepler, et plus tard Newton, qui ont complètement transformé la compréhension de l'univers géocentrique des grecs et ont établi l'actuel modèle du système solaire. La loi de gravitation Universelle est la base de la Mécanique Céleste et de l'Astrodynamique.

L'objectif de ce travail est la résolution du problème des deux corps, qui peut être énoncé de cette forme: Sachant la position et vitesse de deux masses à un instant donné et supposant que le mouvement des deux masses dépend exclusivement de la force gravitationnelle, quelle sera la position et vitesse des deux masses en un instant quelconque, passé ou future.

Ce travail commence par résumer l'évolution du savoir de l'homme à propos du mouvement des planètes et des satellites. Les équations du mouvement des deux corps sont déduites, la solution est une figure conique. De cette solution on peut obtenir d'importantes relations pour l'étude de la dynamique et définition des éléments orbitaux, qui caractérisent la classe, la dimension et l'orientation de l'orbite. Ces équations peuvent être utilisées pour représenter le mouvement des planètes autour du soleil. Le mouvement des planètes est perturbé par les autres planètes proches, mais en première approximation la trajectoire des planètes autour du soleil est très proche d'une section conique.

On présente deux algorithmes pour résoudre et déterminer la position et vitesse d'un corps, connu les éléments orbitaux et vice-versa. Pour l'orbite elliptique un programme a été élaboré en IDL, suivant l'algorithme présenté auparavant.

Pour terminer on présente des exercices et respectives résolutions et quelques expériences amusantes liées au problème.

Ao Filipe

Aos meus pais

À Rita e ao Nuno

# Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador Prof. Doutor João Lima, todo o apoio e interesse manifestados durante a realização deste trabalho.

Agradeço ao Centro de Astrofísica da Universidade do Porto pelas facilidades concedidas.

Ao Morais pela sua amizade e camaradagem.

Ao prof. Coelho Pires por me ter dispensado da correcção dos exames nacionais, da 2<sup>a</sup> Chamada, do 12<sup>o</sup> de Matemática.

Quero manifestar o meu apreço a todas as pessoas que de algum modo partilharam comigo este trabalho.

Um agradecimento muito especial ao Filipe pelo seu apoio e pela ajuda nas referências cruzadas.

# Prefácio

## 1 - Apresentação

O trabalho **O movimento dos dois corpos** destina-se a alunos do Ensino Secundário do Agrupamento 1.

## 2 - Estrutura do trabalho

O presente trabalho encontra-se dividido em sete capítulos principais, estando cada capítulo, por sua vez, dividido em várias subsecções. Além disso, é apresentada uma secção com algumas notas suplementares, um apêndice e uma listagem de constantes.

Os capítulos são:

### Capítulo 1 - Perspectiva histórica

Neste capítulo é feita uma breve perspectiva histórico-cultural sobre os esforços feitos, desde os tempos ancestrais, para explicar o movimento dos planetas e dos seu satélites.

Optou-se por iniciar o trabalho com uma perspectiva histórica, pois um trabalho com uma perspectiva histórica humaniza o estudo do assunto, mostrando a Astronomia como uma ciência em construção. Proporciona também excelentes oportunidades para pesquisa de documentos.

A informação sobre a génese e o percurso de um conceito ao longo dos tempos e a sua relação com o progresso da humanidade pode fomentar, ou aumentar, o interesse pelo tema em estudo, ao mesmo tempo que constitui uma fonte de cultura. Além disso, permite fazer conexões com outras disciplinas.

### Capítulo 2 - Problema dos dois corpos

Usando as leis do movimento e a lei de gravitação de Newton e, recorrendo à matemática e a alguns conceitos físicos deduzem-se algumas relações bastante importantes para o estudo da dinâmica do movimento de dois corpos massivos e, definem-se os elementos orbitais que caracterizam o tipo, a dimensão e a orientação da órbita no espaço. Além disso, são verificadas as segunda e terceira leis de Kepler.

### Capítulo 3 - Problema dos N corpos

Uma grande variedade de problemas práticos do movimento orbital são considerados como um problema de dois corpos. Isto seria verdade se admíttessemos que o movimento de um planeta, em torno do Sol não fosse afectado por outros planetas e corpos

celestes. Por outras palavras, a órbita dos planetas seria uma elipse perfeita se não houvesse outras forças agindo sobre o planeta, além daquela devida ao Sol.

A presença de outros corpos provocam perturbações na órbita de um planeta. Contudo, tais perturbações originam pequeníssimas variações nos elementos orbitais que, podemos dizer, numa boa aproximação, que a órbita de um planeta em torno do Sol ou de um satélite em torno do seu primário, é um problema dos dois corpos.

## Capítulo 4 - Determinação da posição e da velocidade numa órbita

Na primeira parte deste capítulo são deduzidas as expressões que permitem determinar a posição e velocidade de um corpo na sua órbita no espaço, conhecidos os elementos orbitais. Para isso, é determinada, previamente, a relação entre dois referenciais - o referencial ligado à órbita e o referencial no espaço - usando a trigonometria esférica.

Na segunda parte, são determinadas as expressões algébricas que nos permitem determinar os elementos orbitais dados os vectores posição e velocidade do corpo no espaço.

A maioria das equações foi deduzida no capítulo 2.

**Nota:** Na primeira parte, ao deduzirmos as expressões para os vectores posição e velocidade, teria sido mais simples caso tivessemos utilizado Rotações e Matrizes em vez da Trigonometria Esférica. Mas para um aluno do Ensino Secundário torna-se mais simples esta última, uma vez que já possui conhecimentos sobre Geometria no espaço e Trigonometria.

## Capítulo 5 - Algoritmos

Neste capítulo são apresentados dois algoritmos que permitem determinar a posição e velocidade numa órbita elíptica dados os elementos orbitais e vice-versa. Todas as expressões usadas foram deduzidas nos capítulos precedentes, em particular, no segundo e no quarto capítulo.

Optou-se por apresentar os algoritmos, pois com os algoritmos cada aluno poderá fazer o seu próprio programa usando a "linguagem" que conhece e sabe, tendo apenas de seguir todos os passos dados em cada um dos algoritmos apresentados.

A título de exemplo, são apresentados dois programas em IDL, apenas para a órbita elíptica, os quais foram testados para dois cometas, o cometa *Faye* e o cometa *Hale-Bopp*.

## Capítulo 6 - Ficha de trabalho e actividades

Neste capítulo é apresentada uma ficha de trabalho constituída por um conjunto de exercícios sobre o Problema dos dois corpos. A selecção dos exercícios teve como

principal objectivo criar condições que permitam ao estudante consolidar e aprofundar os conhecimentos relativos ao Problema dos dois corpos e, simultaneamente, promover a sua realização individual e a sua autonomia. Para atingir estes objectivos, as questões propostas pretendem desenvolver o raciocínio, o espírito crítico, o rigor, a memória, hábitos de trabalho e a capacidade de resolver problemas.

É apresentada, também, uma resolução dos exercícios, de forma clara e rigorosa, não sendo, todavia, tais resoluções únicas, uma vez que há certamente outros processos de responder às questões, eventualmente, mais fáceis e originais.

Ao facultar a resolução dos exercícios ao estudante pretende-se que ele entenda a sua estrutura, compreenda os motivos porque se realizaram certas "operações", saiba interpretar os resultados obtidos e possa resolver, com êxito, outras situações.

Além da ficha de trabalho e sua resolução, também se apresenta um conjunto de actividades experimentais a serem realizadas pelos alunos na sala de aula ou em casa, sózinho ou com os colegas e/ou amigos.

## Capítulo 7 - Conclusão

Neste capítulo é feita uma breve síntese do que foi feito neste trabalho.

## Notas suplementares

Nestas notas são apresentadas alguns tópicos de Matemática, que são usados no texto, e que não fazem parte dos curriculos do Ensino Secundário.

Demonstrações e uma discussão da maioria das fórmulas podem ser encontradas em qualquer texto de Matemática como, por exemplo, *Lições de Cálculo Diferencial e Integral* da Fundação Calouste Gulbenkian.

## Apêndice

Neste apêndice apresentam-se alguns cálculos elementares que são necessários em vários capítulos e/ou subcapítulos como, por exemplo, a expressão das coordenadas do vector velocidade em coordenadas polares. Em alguns casos foram introduzidas algumas notas matemáticas no próprio texto.

Demonstrações e uma discussão da maioria das fórmulas podem ser encontradas em qualquer manual de Matemática do Ensino Secundário como, por exemplo, os manuais de Matemática da Porto Editora.

## **Anexos**

Nos anexos são apresentados materiais de auxílio, como por exemplo, os programas para determinar a posição e velocidade de um corpo em torno de outro, em órbita elíptica, conhecidos os elementos orbitais e vice-versa.

## **3 - Conexões com outras disciplinas**

O tema - O movimento dos dois corpos - é um tema excelente para articular e relacionar várias disciplinas do Ensino Secundário.

### **3.1 - História e Filosofia**

### **3.2 - Ciências da Terra e da Vida**

### **3.3 - Física**

### **3.4 - Matemática**

# Índice

<b>1</b>	<b>Perspectiva histórica</b>	<b>1</b>
1.1	O 1 <sup>o</sup> modelo geocêntrico . . . . .	2
1.2	Uma solução com centro no Sol . . . . .	3
1.3	O sistema geocêntrico de Ptolomeu . . . . .	4
1.4	O sistema heliocêntrico de Copérnico . . . . .	7
1.5	Tycho Brahe . . . . .	9
1.6	A obra de Kepler . . . . .	11
1.7	A obra de Galileu . . . . .	17
1.8	A obra de Newton . . . . .	19
<b>2</b>	<b>O problema dos dois corpos</b>	<b>32</b>
2.1	Equações do movimento . . . . .	32
2.2	A solução da equação de movimento . . . . .	36
2.2.1	Conservação do momento cinético . . . . .	36
2.2.2	Lei das áreas . . . . .	37
2.2.3	Conservação da Energia . . . . .	40
2.2.4	Equação da órbita . . . . .	41
2.3	Órbita Elíptica . . . . .	46
2.3.1	Caracterização da elipse: . . . . .	46
2.3.2	Aplicação da órbita elíptica ao Sistema Solar: . . . . .	50
2.3.3	Período da órbita: . . . . .	51
2.3.4	Medição da massa de um planeta: . . . . .	53

2.3.5	Velocidade numa órbita elíptica: . . . . .	54
2.3.6	Órbitas co-periódicas: . . . . .	58
2.3.7	Posição de um corpo na órbita: . . . . .	63
2.3.7.1	Anomalias verdadeira, excentrica e média : . . . . .	63
2.3.7.2	Relação entre as anomalias verdadeira, excentrica e média : . . . . .	65
2.4	Órbita Parabólica . . . . .	73
2.4.1	Caracterização da parábola: . . . . .	73
2.4.2	Velocidade numa órbita parabólica: . . . . .	74
2.4.3	Posição na órbita parabólica: . . . . .	76
2.5	Órbita Hiperbólica . . . . .	80
2.5.1	Caracterização da hipérbole: . . . . .	80
2.5.2	Velocidade numa órbita hiperbólica: . . . . .	85
2.5.3	Posição numa órbita hiperbólica: . . . . .	87
2.6	Órbita no espaço . . . . .	93
<b>3</b>	<b>Problema dos N-Corpos e Pertubações</b>	<b>96</b>
3.1	Problema dos N-Corpos . . . . .	97
3.1.1	Equações de movimento . . . . .	97
3.1.2	As 10 constantes de integração e os seus significados: . . . . .	98
3.2	Teoria das perturbações . . . . .	104
<b>4</b>	<b>Determinação da posição e velocidade numa órbita</b>	<b>107</b>
4.1	Determinação de $\vec{r}$ e $\vec{V}$ conhecidos os elementos orbitais . . . . .	107
4.1.1	Determinação do vector posição: . . . . .	112
4.1.2	Determinação do vector velocidade: . . . . .	115
4.2	Determinação dos elementos orbitais . . . . .	119
<b>5</b>	<b>Algorítmos</b>	<b>129</b>
5.1	Algoritmo 1 . . . . .	129

5.2	Algoritmo 2 . . . . .	133
5.3	Programas e Aplicações . . . . .	138
<b>6</b>	<b>Actividades</b>	<b>141</b>
6.1	Ficha de Trabalho . . . . .	142
6.2	Resolução da Ficha de Trabalho . . . . .	147
6.3	Actividades experimentais . . . . .	168
<b>7</b>	<b>Conclusão</b>	<b>175</b>

# Capítulo 1

## Perspectiva histórica

Um dos problemas fundamentais da Dinâmica, que tem intrigado o homem desde o início da civilização, é o do movimento dos corpos celestes e, em particular, o movimento dos planetas.

As posições das estrelas já eram exacta e perfeitamente conhecidas antes da invenção do telescópio. Mas as órbitas e posições dos planetas, ou *astros errantes*, como antigamente lhes chamavam, não podiam ser exactamente determinadas e, por isso não podiam ser inscritas num astrolábio ou indicadas num mapa estelar. A compreensão desta situação surgiu surgiu com a obra revolucionária de Galileu, Tycho e Kepler, que, em conjunto com a contribuição de Newton, varreu por completo a noção grega de um Universo finito e geocêntrico e estabeleceu o modelo actual do sistema solar.

Kepler, servindo-se de informações obtidas por Tycho, demonstrou que os planetas, incluindo a Terra, não se moviam em círculos, como haviam declarado os seguidores de Ptolomeu, mas em elipses. Desta suposição fez derivar as suas leis do movimento planetário. Contudo, estas leis são empíricas, isto é, elas descrevem o fenómeno sem explicar porque ocorrem.

Em 1687, Newton defendeu a existência de uma força universal da gravidade. Explicou que a gravidade não só atrai todos os corpos para a Terra, como também existe entre o Sol e os planetas, entre a Terra e a Lua e, na realidade, entre quaisquer duas massas. Os gregos tinham simplificado a mecânica celeste segundo a simples doutrina de que a matéria comporta-se segundo a Natureza. Newton conseguiu formular em termos matemáticos as leis básicas do movimento, verificar matematicamente as leis de Kepler, e aplicá-las às órbitas dos planetas e seus satélites, tudo isto através de uma lei da atracção gravitacional. Esta lei fundamental declara que a força gravitacional entre dois corpos é proporcional ao produto das suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre ambos. A mesma lei serve para as órbitas dos satélites e sondas espaciais de fabrico humano.

## 1.1 O 1º modelo geocêntrico

No mundo aristotélico ( Séc. IV a.C. ), toda a matéria era constituída por quatro elementos: terra, água, ar e fogo. Cada elemento tinha o seu lugar natural - a terra, rodeada por água, no centro do universo, e seguidamente o ar e o fogo, em esferas ascendentes. O movimento natural resultava de um retorno dos elementos aos seus lugares naturais. Assim, os corpos terrestres, predominantemente pesados, tendiam a cair, ao passo que as bolhas se elevavam na água e o fumo se erguia no ar. Todos os outros movimentos eram violentos, exigindo uma causa próxima.

Fora das esferas da terra, água, ar e fogo, os corpos celestes giravam nas próprias esferas de cristal. As esferas celestes, onde apenas era permitida a perfeição do movimento circular, eram serenas, harmoniosas e eternas. Apenas, em baixo, na terra, havia mudança, morte e decomposição.

Mas mesmos nos céus serenos do cosmos aristotélico havia alguns problemas. O Sol, a Lua e as estrelas executavam os seus movimentos de uma forma bastante fiel, na maior parte, mas tal harmonia era perturbada, contudo, por dois tipos de corpos celestes. Um deles surgia muito raramente: eram os cometas. Os gregos julgavam tratar-se de meteoros originados, na região sublunar, pela fricção das camadas de ar e fogo, os elementos aristotélicos que rodeavam a terra. Os outros astros eram vistos todas as noites. Surgiam em locais muitas vezes imprevisíveis, de quando em quando, caminhando mesmo para trás, em movimento retrógrado, pondo à prova a paciência dos astrónomos de então. Deram-lhes o nome de PLANETAS, que em grego significa vagabundo, errante. Naquele tempo apenas eram conhecidos cinco planetas: Mercúrio, Vénus, Marte, Júpiter e Saturno, cujos movimentos eram difíceis de explicar.

A primeira hipótese a respeito do movimento planetário era a de que os planetas acima descreviam círculos concêntricos, tendo a Terra como o centro comum, como se ilustra na figura 1.1. A esfera de Saturno foi suposta ser a maior e a mais próxima das estrelas, já que ele é o que se move mais lentamente. Por dentro desta estariam as esferas que transportariam Júpiter e Marte, de movimentos mais rápidos. Acreditava-se que estes três planetas estariam para lá da esfera correspondente ao Sol. Vénus, Mercúrio e a Lua foram colocados entre o Sol e a Terra.

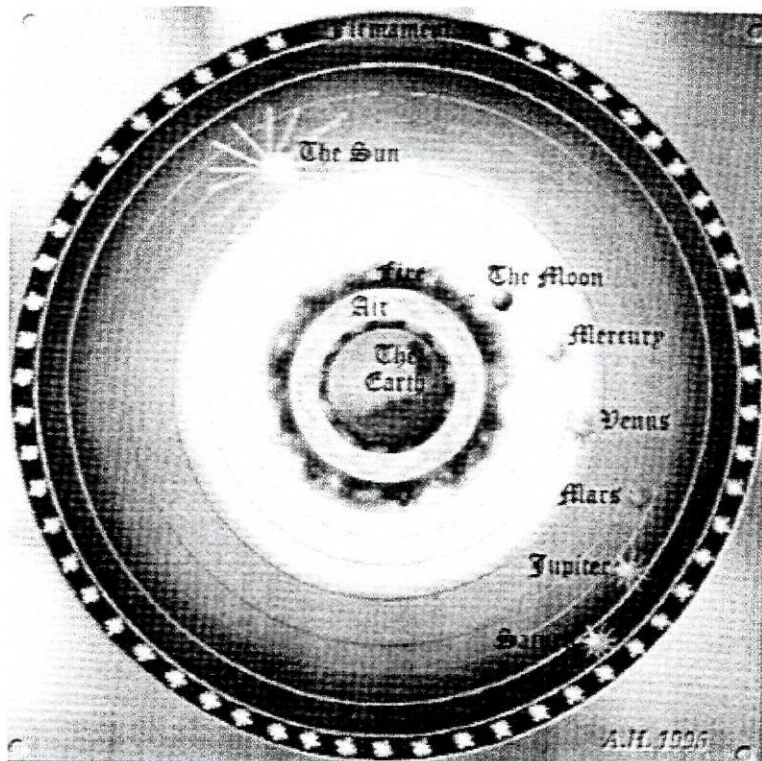


Figura 1.1: O Universo geocêntrico grego

Um tal sistema imaginário de camadas ou esferas transparentes constituía uma "máquina", capaz de reproduzir os movimentos gerais dos objectos celestes. Novas esferas eram acrescentadas ao modelo, se observações adicionais revelassem outras variações cíclicas, de modo a efectuar os necessários ajustamentos.

Eudócio ( 406 - 355 a.C. ) concluiu que um conjunto de 36 esferas era capaz de reproduzir todo o padrão geral dos movimentos. Mais tarde foram acrescentadas outras 29 esferas por Aristóteles.

## 1.2 Uma solução com centro no Sol

No entanto, mesmo Aristóteles sabia que o seu sistema não conseguia reproduzir as posições observadas dos corpos celestes.

No século IV a.C., um modelo radicalmente diferente do aristotélico foi apresentado por Aristarco de Samos ( 310 - 230 ac ). Aristarco defendia a hipótese de um Universo heliocêntrico, isto é, sugeriu que uma interpretação mais simples dos corpos celestes

poderia resultar de se considerar o Sol no centro, com os planetas, a Terra e as estrelas movendo-se à sua volta. Desapareceriam assim todas as esferas concêntricas interligadas. A hipótese heliocêntrica, que também usava movimentos circulares uniformes, apresentava uma vantagem adicional: explicava o facto de os planetas serem mais brilhantes durante o seu movimento retrógrado, já que era precisamente nessa altura que eles estavam mais próximos da Terra.

Contudo, a proposta de Aristarco foi desprezada durante a antiguidade, por várias razões e, uma delas era a de que uma Terra móvel era inaceitável. Contradizia as doutrinas filosóficas de que a composição da Terra era diferente da dos corpos celestes e de que o seu lugar natural, tanto física como teologicamente, era o centro do universo. Além disso, esta nova concepção do sistema solar contradizia o senso comum e as observações vulgares: era evidente que a Terra estava em repouso e não numa corrida desenfreada através do espaço.

Aristarco também foi criticado por não ter desenvolvido permonorizadamente o seu sistema e por não o ter utilizado para a previsão de posições planetárias.

O sistema geocêntrico e heliocêntrico constituíram duas maneiras diferentes de tentar explicar as mesmas observações. Mas este último exigia uma tão drástica alteração da imagem do homem no universo que acabou por ter uma reduzida influência no pensamento grego.

### **1.3 O sistema geocêntrico de Ptolomeu**

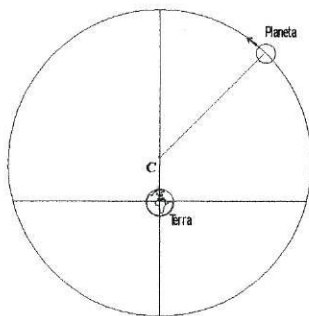
Desprezando o modelo heliocêntrico sugerido por Aristarco, os gregos continuaram a desenvolver a sua teoria planetária na base do sistema geocêntrico. Como foi visto, faltava rigor à primeira das soluções encontradas, aquela que assentava nas esferas concêntricas.

Vários astrónomos gregos fizeram importantes contribuições, que culminaram na teoria geocêntrica de Cláudio Ptolomeu de Alexandria, por volta de 150 anos antes de Cristo.

Para fazer concordar as previsões baseadas no seu modelo com as observações dos movimentos dos planetas, relativamente à Terra, Ptolomeu desenvolveu uma teoria

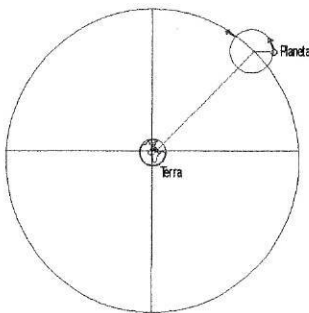
geocêntrica melhorada, tendo introduzido três artifícios, que foram o *excêntrico*, o *epiciclo* e o *equanto*.

Embora Ptolomeu acreditasse que a Terra estivesse no centro do universo, não continuou a insistir em que ela fosse o centro geométrico de todos os círculos perfeitos. Propôs, pelo contrário, que o centro,  $C$ , estivesse afastado da Terra, numa posição *excêntrica*( figura 1.2 ). Assim, o movimento, que seria realmente uniforme em torno do centro  $C$ , não parecia uniforme quando observado da Terra.



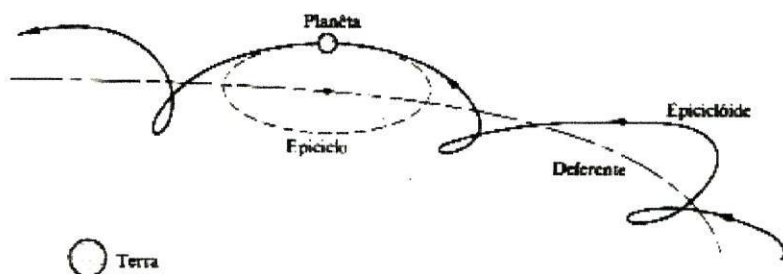
**Figura 1.2:** Esquema representando o excêntrico,  $C$ , centro geométrico do Universo geocêntrico.

No entanto, o excêntrico não explicava o movimento retrógrado dos planetas. Para isso, Ptolomeu concebeu um outro artifício - o *epiciclo*. No caso mais simples, admitia que o planeta descrevia, com velocidade uniforme, um círculo chamado de epiciclo, cujo centro, por sua vez, movia-se num círculo maior, concêntrico com a Terra, chamado de *deferente* ( figura 1.3 ).



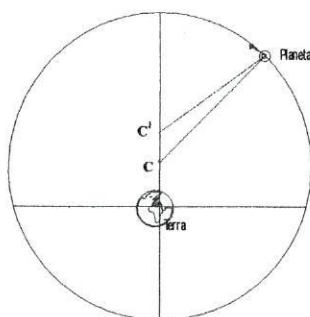
**Figura 1.3:** O planeta descreve, com movimento uniforme, uma circunferência - o epiciclo - cujo centro, por sua vez, se move numa circunferência maior, em volta da Terra, chamada deferente.

A trajetória resultante do planeta era, assim, um *Epiciclóide* ( figura 1.4 ).



**Figura 1.4:** A trajetória resultante do planeta  $P$  é um epiciclóide.

Com o sistema de epiciclos e deferentes, Ptolomeu explicava não só o movimento retrógrado como também o maior brilho dos planetas durante esse movimento. Mas Ptolomeu, para explicar o facto, já conhecido na época, de os planetas se moverem umas vezes mais rapidamente e outras vezes mais lentamente, introduziu um terceiro artifício geométrico, a que chamou o *equanto*, resultante de uma modificação do excêntrico( figura 1.5 ).



**Figura 1.5:** O equanto,  $C'$ , é um ponto situado no mesmo diâmetro da Terra e a igual distância do centro,  $C$ .

Em face de hipóteses tão complicadas à partida, poder-se-à perguntar:

*"Porque motivo o sistema geocêntrico de Ptolomeu perdurou mais de treze séculos?"*

Entre outros motivos, e em primeiro lugar, porque estava conforme o senso comum e com as opções ideológicas da maioria dos homens desse tempo: por um lado, a Terra em repouso no centro de um universo finito e, por outro lado, os movimentos circulares e, por isso, "perfeitos" dos astros. Em segundo lugar, porque permitia prever os movimentos celestes com precisão suficiente para aquela época. E, em terceiro lugar, porque era um sistema flexível: permitia facilmente introduzir correcções, novos

epíclis e equantes, à medida que ia aumentando a precisão das observações.

## 1.4 O sistema heliocêntrico de Copérnico

Submetido ao confronto com os dados de observação dos astros, que tinham cada vez mais precisão, o sistema ptolomaico viu-se obrigado a introduzir sucessivamente movimentos circulares atrás de movimentos circulares, esferas atrás de esferas ...

No século XV utilizavam-se mais de 80 movimentos simultâneos para descrever, tal como então eram conhecidos, os movimentos dos astros e, mesmo assim, as previsões do modelo mostravam-se pouco correctas. A este respeito, conta-se que o rei de Castela e Leão, Afonso X, o Sábio ( 1221 - 1284 ), ao tomar conhecimento do modelo de Ptolomeu, teria comentado: *"Se Deus me tivesse pedido conselho ao forjar o mundo, o resultado não teria sido tão complicado!"*.

Guiado pela busca do simples e do harmónico e movido por uma certa heliolatria, que transparece em toda a sua obra, o Cónego e Astrónomo polaco Nicolau Copérnico ( 1473 - 1543 ) propôs que a descrição do movimento dos planetas, incluindo a Terra, fosse feita relativamente ao Sol. Admitia que este astro se encontrava no centro da esfera das estrelas e daí iluminava todos os planetas então conhecidos, pela seguinte ordem: Mercúrio, Vénus, Terra, Marte, Júpiter e Saturno. Na periferia do universo estaria a esfera imensa e imóvel das estrelas fixas ( figura 1.6 ).

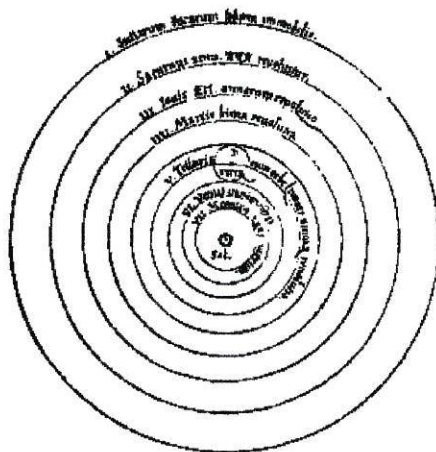


Figura 1.6: Diagrama do sistema heliocêntrico de Copérnico.

Partindo deste cenário heliocêntrico mais simples, Copérnico dedicou então o resto da sua vida ao cálculo de órbitas e à construção do modelo heliocêntrico.

O grande trabalho de Copérnico - *De Revolutionibus*, onde se encontra a síntese dos resultados de toda a sua investigação, foi publicada em 1543, pouco antes da sua morte no mesmo ano. Neste trabalho, Copérnico expõe e comenta as suas evidências acerca da forma como o sistema solar se encontra estruturado.

O sistema de Copérnico tornava possível e fácil de determinar as distâncias relativas dos diferentes planetas ao Sol e, a partir destas, determinar os respectivos períodos de revolução em torno do Sol, bem como permitia o cálculo das órbitas de cada planeta relativamente à dimensão da órbita da Terra.

No entanto, o sonho de Copérnico de construir um universo mais simples não foi completado e a maioria dos astrónomos não ficaram inicialmente convencidos. Quanto mais Copérnico trabalhava no sentido de aperfeiçoar o sistema heliocêntrico e de o tornar compatível com as observações, maior se tornava o número de ciclos necessários. Pelo simples facto de Copérnico não utilizar os equantos, necessitava de utilizar mais círculos do que nunca e continuava incapaz de obter maior precisão do que Ptolomeu.

Pode dizer-se que, apesar de tudo, a maior importância deste sistema é de ordem histórica e filosófica: tratava-se de uma "machadada" na concepção tradicional do universo, pois a Terra saía do centro deste e movia-se... Era o dar início a uma revolução científica, e sobretudo intelectual, que teve repercussões inicialmente impensáveis.

Copérnico é hoje recordado não tanto pelos pormenores da sua teoria, mas por ter desafiado o quadro existente do universo. À medida que o sistema de Copérnico foi gradualmente sendo aceite, as pessoas foram necessariamente aceitando a ideia de que a Terra era apenas mais um entre vários planetas que circulavam em torno do Sol.

Em 1576, o astrónomo e matemático Thomas Diggs ( 1543 - 1595 ) publica o seu principal trabalho - *Uma Descrição Perfeita das Órbitas Celestes*, onde comenta o sistema de Copérnico e introduz um novo desenvolvimento muito importante. Ele removeu a esfera exterior das estrelas fixas, no modelo heliocêntrico, e distribuiu-as numa região não limitada ( figura 1.7 ).

Assim, 33 anos após a morte de Copérnico, o sistema heliocêntrico eliminou o seu limite exterior.

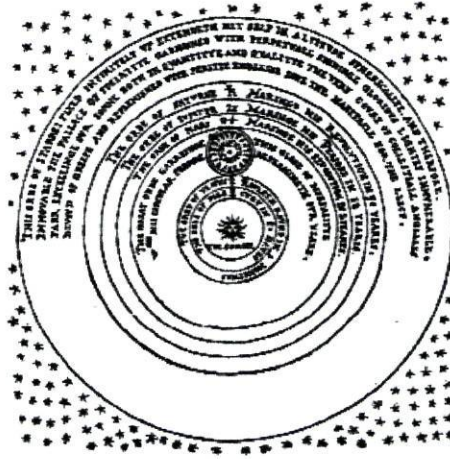


Figura 1.7: O universo infinito de Thomas Digges.

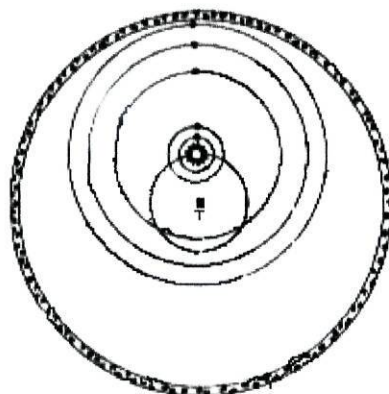
## 1.5 Tycho Brahe

Tycho Brahe ( 1546 - 1601 ) era um nobre dinamarquês que, ainda rapaz, aprendeu, para seu espanto, que era possível prever eventos no céu, como o eclipse Solar de 21 de Agosto de 1560. Posteriormente, para sua maior estupefacção ainda, enquanto observava uma conjunção de Júpiter e Saturno em Agosto de 1563, descobriu que as tabelas astronómicas, incluindo as de Copérnico, apresentavam desvios de vários dias - presumivelmente por falta de dados astronómicos precisos.

Foram estas imprecisões que provocaram um ponto de viragem na sua carreira. Concluiu rapidamente que seria necessário recolher, durante muitos anos, novas observações astronómicas com a máxima precisão possível, antes de poder ser criada uma teoria satisfatória do movimento planetário.

Durante cerca de 20 anos, Tycho e os seus colaboradores realizaram um número impressionante de observações, determinando as coordenadas dos astros com erros inferiores a 2 minutos de arco ( notável para a época ! ). Do ponto de vista teórico, Tycho era conservador e tentava conciliar os dois sistemas, geocêntrico e heliocêntrico. Construiu, ele próprio, um modelo que se representa esquematicamente na figura 1.8.

Tal sistema era uma solução de compromisso que, no seu entender, reunia os melhores aspectos dos sistemas de Ptolomeu e de Copérnico. No universo de Tycho todos os planetas orbitavam em torno do Sol, o qual, conjuntamente com os planetas, girava em torno da Terra, que voltava a ser o centro do universo.



**Figura 1.8:** O sistema de compromisso de Tycho Brahe.

Contemporâneo de Tycho, o filósofo italiano Giordano Bruno ( 1546 - 1600 ) era a sua antítese: revolucionário por instinto, afirmava que o universo é infinito e que a Via Láctea é formada por inúmeros sóis não havendo centro em parte alguma! Esta admirável, mas pouco fundamentada, antecipação de vários séculos valeu-lhe ser preso. Foi condenado à morte e queimado na fogueira em 1600.

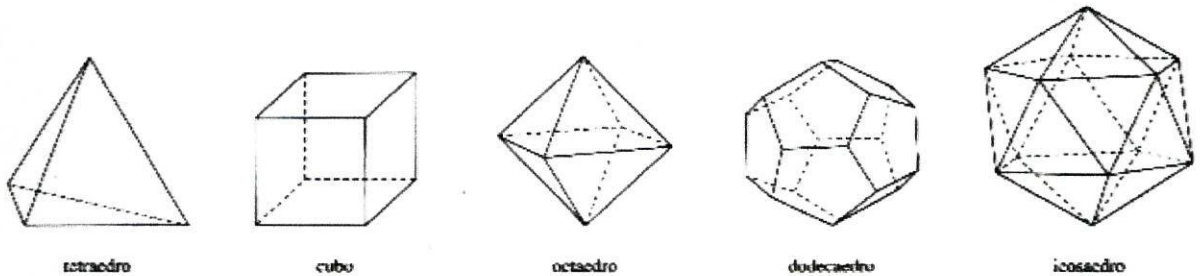
Todos os modelos sobre movimentos planetários desenvolvidos até à época de Tycho tinham tido como único objectivo a obtenção de um processo pelo qual pudessem ser previstas, de uma forma razoavelmente precisa, as posições dos planetas. No entanto, não existia qualquer explicação para as causas do movimento, permanecendo de pé a questão sobre se as órbitas propostas para os planetas nos vários sistemas eram na verdade trajectórias de objectos reais no espaço, ou apenas esquemas imaginários, convenientes para se efectuarem os cálculos necessários.

O primeiro passo para a resolução deste problema foi dado por Kepler.

## 1.6 A obra de Kepler

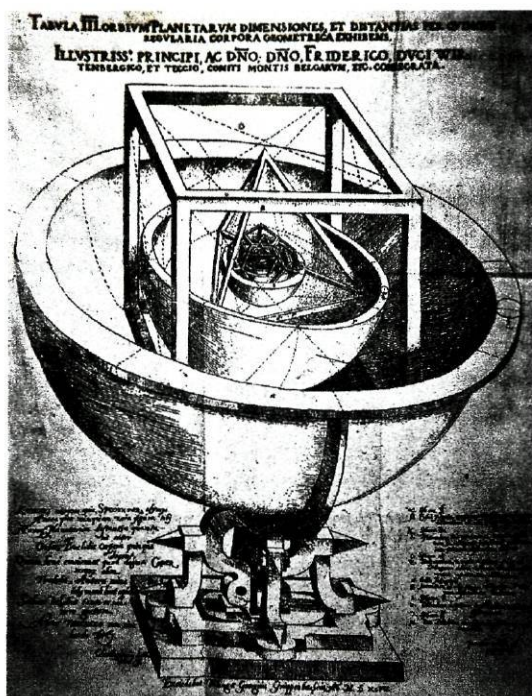
De pequena estatura, saúde delicada e pobre, a inteligência de Johannes Kepler ( 1571 - 1630 ) granjeou-lhe uma bolsa de estudos que lhe permitiu frequentar a universidade. Após a obtenção dos graus de bacharel e de mestre foi ensinar matemática num liceu de uma cidade austríaca.

Segundo a lenda, um dia, no Verão de 1595, Kepler dava uma lição de geometria a uma turma de adolescentes aborrecidos, mas a sua mente esquadrihava os dados das tabelas astronómicas de Copérnico. Inscrevendo círculos no interior e no exterior de um triângulo equilátero, compreendeu subitamente que a razão dos diâmetros dos dois círculos era praticamente a razão dos diâmetros das órbitas de Júpiter e Saturno. Rapidamente concebeu um modelo em que as seis esferas invisíveis que regulavam as órbitas dos seis planetas então conhecidos se ajustavam dentro e fora de cada um dos cinco *sólidos perfeitos* da antiguidade, tetraedro ( formado por 4 triângulos equiláteros ), cubo ( formado por 6 quadrados ), octaedro ( formado por 8 triângulos equiláteros ), dodecaedro ( formado por 12 pentágonos ) e icosaedro ( formado por 20 triângulos equiláteros ), que se representam na figura 1.9, cada um encaixado dentro do seguinte.



**Figura 1.9:** Platão ( 427 - 347 a.C. ) foi quem descobriu e demonstrou que existem apenas cinco poliedros regulares convexos ( poliedros que se encontram todos para o mesmo lado em relação ao plano de qualquer uma das suas faces ) chamados de sólidos perfeitos: tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro.

À custa de várias tentativas, Kepler encontrou uma maneira de combinar os sólidos de modo a que as esferas reproduzissem as distâncias reais entre as órbitas planetárias. O modelo de Kepler explicava simultaneamente porque havia seis, e apenas seis planetas e apontava valores para o espaçamento entre os planetas ( figura 1.10 ).



**Figura 1.10:** Um modelo da explicação dada por Kepler para o espaçamento das órbitas planetárias, por meio dos sólidos geométricos regulares.

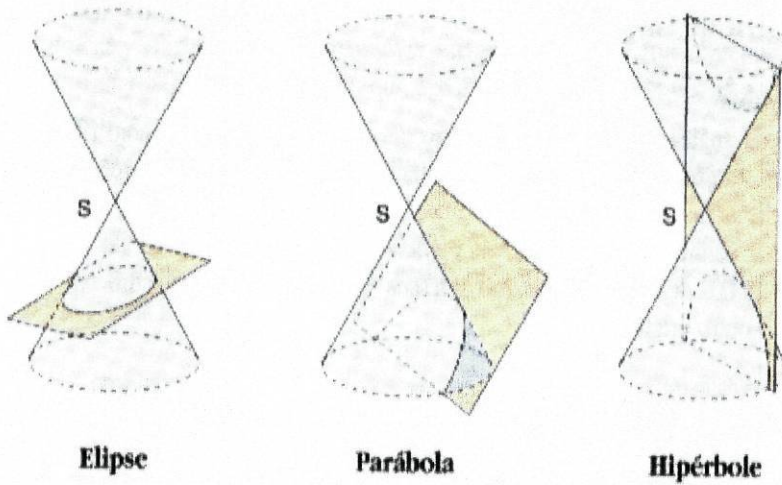
Em 1596 publicou a sua inspiração no livro *Mistério da Cosmografia*, que chamou sobre ele a atenção de grandes cientistas, como Galileu e Tycho.

Tycho não ficou nada encantado com os pontos de vista copernicanos de Kepler, mas ficou impressionado com o seu talento matemático. Convidou Kepler a ser um dos seus assistentes no seu novo observatório em Praga, em 1600. Aí foi dada a Kepler a tarefa de determinar em todo o pormenor a órbita de Marte.

A maior luta de Kepler foi a sua tentativa de encontrar uma órbita do planeta Marte que fosse coerente com as observações de Tycho. A órbita da Terra poderia ser bastante bem descrita por um círculo com o Sol ligeiramente deslocado do centro. Mas não a órbita de Marte. Tentou inúmeras vezes, mas nenhum círculo se ajustava. Foi então que concluiu que, afinal, a órbita de Marte não era um círculo, mas sim uma elipse com o Sol num dos focos.

A elipse é uma curva geométrica fechada conhecida desde a antiguidade. Apolónio de Perga ( 262 - 190 a.C. ) mostrou que a intersecção de um plano com um cone produzia duas curvas fechadas, o círculo e a elipse, e duas curvas abertas, a parábola

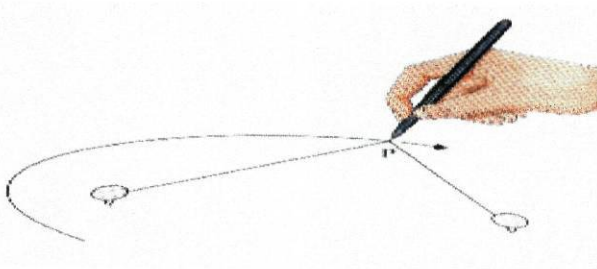
e a hipérbole ( figura 1.11 ). No seu conjunto, estas figuras designam-se por secções cónicas.



**Figura 1.11:** As cónicas como secções produzidas numa mesma superfície cónica, dependendo a natureza da cónica apenas da inclinação do plano secante relativamente às geratrizes da superfície cónica.

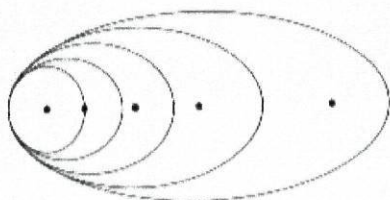
As elipses, em particular, podem ter formas muito variadas. E têm muitas propriedades interessantes. Por exemplo, pode-se desenhar uma elipse com o auxílio de um pedaço de cordel com as duas pontas amarradas uma à outra, colocado de maneira a abraçar simultaneamente a ponta do lápis e duas pequenas taxas espetadas na folha de papel, nos pontos,  $F_1$  e  $F_2$ , como se mostra na figura 1.12.

Chama-se a cada um dos pontos,  $F_1$  e  $F_2$ , um foco da elipse. Quanto maior for a distância entre  $F_1$  e  $F_2$ , mais achatada, ou "excêntrica", é a elipse; pelo contrário,



**Figura 1.12:** Processo usado para construir uma elipse: numa folha de papel espetam-se duas taxas a uma certa distância e atando em cada taxa uma das extremidades de um fio de comprimento superior à distância entre as taxas. Em seguida, deslocando um lápis como o desenho sugere, sempre com o fio esticado, obtém-se o desenho de uma elipse.

esta vai-se tornando cada vez mais circular, à medida que diminui a distância entre  $F_1$  e  $F_2$ . O maior diâmetro da elipse é chamado de *eixo maior*. O quociente da distância  $\overline{F_1F_2}$  pelo eixo maior da elipse dá uma medida da excentricidade da elipse. Chamando  $2c$  à distância entre os dois focos,  $2a$  ao comprimento do eixo maior da elipse, a excentricidade,  $e$ , é definida por  $e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$ . É fácil de ver que a circunferência é um caso particular da elipse, em que  $e = 0$  e que a maior excentricidade possível é de  $e = 1$  ( figura 1.13 ).



**Figura 1.13:** Representação de várias elipses que, da esquerda para a direita, mais se afastam da forma da circunferência, ou seja, apresentam uma excentricidade cada vez maior ( de 0 a 1 ).

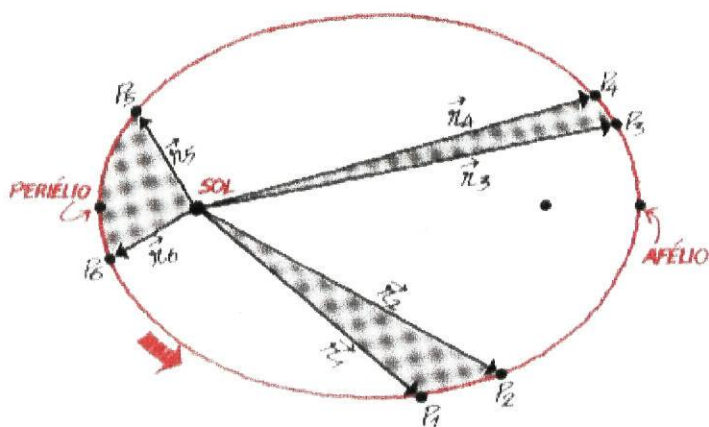
A descoberta de Kepler de que a órbita de Marte tem a forma de uma elipse é, por si só, notável. Mas ele também mostrou que o Sol ocupava a posição de um dos seus focos, estando o outro foco desocupado. Em 1609 publicou o seu livro *Astronomia Nova*, onde apresentou estes resultados, além de outros assuntos.

A sua importante descoberta é hoje chamada de **Primeira lei de Kepler** ou de **Lei das elipses**, que pode ser formulada da seguinte maneira:

*A órbita de um planeta em torno do Sol é uma elipse com o Sol num dos focos”.*

Esta lei dá-nos todas as posições possíveis que cada planeta pode ocupar, conhecidos que sejam as dimensões e a excentricidade da elipse correspondente à sua órbita. Esta lei, contudo, não nos diz quando é que o planeta está num determinado ponto da sua elipse, ou quão rapidamente ele se move num determinado instante.

Também no seu livro *Astronomia Nova* Kepler refere que um planeta se move mais depressa quando se encontra na parte da sua órbita mais próxima do Sol e se move mais devagar quando se encontra na parte mais afastada. Além disso, a redução da velocidade de um planeta é regulada por uma lei mais peculiar: uma linha tirada do



**Figura 1.14:** Se, em intervalos de tempo iguais, o planeta se move de  $P_1$  para  $P_2$ , de  $P_3$  para  $P_4$  e de  $P_5$  para  $P_6$ , então as áreas tracejadas, são iguais.

Sol para o planeta varre áreas iguais em tempos iguais, como se ilustra na figura 1.14.

Esta asserção ficou conhecida como a **Segunda lei de Kepler** ou a **Lei das áreas**, que na sua forma geral diz:

*"A linha que une o Sol ao planeta em movimento varre áreas que são proporcionais aos intervalos de tempo".*

Esta lei não específica, todavia, a forma da órbita, mas descreve a velocidade angular, à medida que vai variando a distância ao Sol.

Estas duas leis, a primeira e a segunda leis de Kepler, complectam-se uma à outra. Elas descrevem o movimento de um único planeta na sua órbita, pois conhecidas que sejam a dimensão e a excentricidade da órbita ( e um ponto de partida ), poderemos determinar quer a posição quer a velocidade angular de um dado planeta em qualquer instante, passado ou futuro.

Mas, Kepler estava convencido que as órbitas e velocidades observadas não eram acidentais. Deveria existir alguma espécie de regularidade a ligar todos os movimentos do sistema solar. Ela passou anos a examinar imensas combinações diferentes de factores, numa busca, por tentativas, de uma terceira lei que relacionasse todas as órbitas planetárias.

Em 1619, Kepler publica outro livro, intitulado *Harmonia do Mundo*, onde enuncia a sua terceira lei. Esta lei é hoje conhecida como a **terceira lei de Kepler** ou a **Lei harmónica**. A lei afirma que:

*”Os quadrados dos períodos das órbitas dos planetas são proporcionais aos cubos das suas distâncias médias ao Sol”.*

Chamando  $T$  ao período e  $R_m$  à distância média, esta lei pode ser expressa da seguinte maneira:

$$\frac{T^2}{R_m^3} = K$$

Onde  $K$  é uma constante.

Como  $K$  tem o mesmo valor para todos os planetas do sistema solar, se considerarmos o planeta Terra, cujo período,  $T$ , é de um ano e cuja distância média ao Sol,  $R_m$ , é de uma unidade astronómica, 1 u.a., então o valor de  $K$  é  $1 \text{ ano}^2 / (\text{u.a.})^3$ .

No conjunto, estas três leis do movimento planetário são o maior contributo de Kepler, pois podem ser determinadas todas as posições, passadas e futuras, de cada planeta e de cada cometa, de uma maneira mais simples e mais precisa do que com toda a parafernália de artifícios geométricos em que assentavam as teorias planetárias de Ptolomeu, Copérnico ou Tycho.

Em 1627, Kepler publicou, finalmente, um conjunto de tabelas astronómicas, denominadas *Tabelas Rudolfinas*, em honra do Imperador Rudolfo II, patrono de Tycho e de Kepler. Nestas tabelas, Kepler combinou as observações de Tycho com as três leis, de modo a permitir cálculos precisos das posições planetárias em qualquer instante, passado ou futuro, tornando a astronomia cem vezes mais precisa do que alguma vez havia sido. Independentemente da sua utilidade astronómica, estas tabelas também foram importantes por uma outra razão. Nelas introduziu, pela primeira vez, a utilização dos logaritmos para fazer cálculos rápidos ( Convém referir que os logaritmos haviam sido descobertos poucos anos antes, em 1614, por Napier, na Escócia ).

Pode dizer-se que Kepler foi além da observação e da descrição matemática, procu-

rando explicar o movimento nos céus pela acção de forças físicas. Embora ele não compreendesse correctamente a natureza dessas forças, o seu trabalho ilustra uma enorme mudança atitude. O trabalho de Kepler é um exemplo de uma atitude tipicamente científica.

## 1.7 A obra de Galileu

Enquanto Kepler fazia rápidos progressos na Europa Central, um físico italiano fazia também importantes descobertas observacionais no Sul da Europa. Galileu Galilei ( 1564 - 1642 ) não inventou o telescópio, mas foi dos primeiros a apontar um destes novos instrumentos para o céu e a publicar as suas observações.

Para descobrir como o mundo realmente funciona, Galileu concebeu a ideia de fazer experiências cujos resultados pudessem ser analisados através da Matemática. Esta ideia haveria de modificar para sempre o curso da história da humanidade.

Galileu utilizou o seu telescópio para fazer várias descobertas, todas elas de primordial importância.

Primeiro, Galileu apontou o seu telescópio para a Lua, observando cadeias de montanhas e profundos vales. Galileu não se deteve com esta simples observação, tão contrária à ideia aristotélica de perfeição celeste.

A seguir, olhou para as estrelas. Através do telescópio, via-se que a Via Láctea consistia de milhares de estrelas muito ténues. Esta observação era contrária ao velho argumento de que as estrelas tinham sido criadas para que os homens pudessem ver à noite.

Depois, Galileu descobriu quatro satélites de Júpiter. Tinha ele ali, defronte dos seus olhos, um sistema solar em miniatura, com o seu próprio centro de revolução. O que ele viu contradizia frontalmente a noção aristotélica de que a Terra estava no centro do universo e constituía o seu centro principal de revolução.

De todas as descobertas de Galileu, a dos satélites de Júpiter foi a que provocou maior agitação. Mas Galileu continuou a usar o seu telescópio com resultados notáveis. Conseguiu observar manchas solares, projectando a imagem do Sol num painel. Descobriu

também que Vénus mostrava todas as fases, tal como o faz a Lua. Portanto, Vénus deveria mover-se em torno do Sol, como acreditavam Copérnico e Tycho, em vez de permanecer sempre entre a Terra e o Sol, como supunham os astrónomos ptolomaicos.

Com a ajuda do seu telescópio, Galileu recolheu um impressionante conjunto de novas informações sobre os céus - todas elas parecendo contradizer as hipóteses básicas do esquema universal ptolomaico. Os argumentos de Galileu a favor do sistema de Copérnico, tal como são apresentados em *Os Dois Grandes Sistemas Universais*, são na sua maior parte os apresentados por Copérnico. Estranhamente Galileu não fez uso das leis de Kepler. Todavia, as observações de Galileu forneciam nova evidência às leis de Kepler.

Galileu descobriu, também, a lei da queda dos graves. Descobriu que dado o dobro do tempo, uma bola, num plano inclinado, percorria quatro vezes a mesma distância. Este resultado não se alterava quando a inclinação da rampa era modificada, pelo que, assumiu que o mesmo seria verdadeiro se o plano inclinado fosse vertical. Para tal acrescentou a análise matemática. Galileu quebrou, pelo menos, alguns dos limites do pensamento aristotélico. Ele imaginou um vácuo e compreendeu que no vácuo a aceleração da queda de um grave não dependeria do seu peso; só a resistência do ar faz com que os corpos mais leves caiam mais devagar do que os pesados. Concluiu, também, que o estado natural de um objecto em movimento horizontal é manter sempre esse movimento horizontal com velocidade constante. Esta ideia constituiu um afastamento radical relativamente à filosofia de Aristóteles e transformar-se-ia na primeira lei de Newton - a lei da inércia. Combinando o movimento horizontal com o vertical e recorrendo à matemática, Galileu mostrou que a trajectória de qualquer projectil perto da superfície da Terra era uma parábola.

A sua descoberta de que a inércia ( tendência de um corpo para se manter em movimento com velocidade constante na horizontal ) combinada com a gravidade ( representada pela sua lei da queda dos graves ) produz trajectórias parabólicas nas proximidades da superfície da Terra foi o ponto de partida para Isaac Newton, mais tarde, mostrar como o universo trabalha.

## 1.8 A obra de Newton

Isaac Newton nasceu no dia de Natal de 1642 numa pequena vila inglesa, Woolsthorpe. Entrou em 1661 na universidade e em 1665 Newton, então com quase 23 anos de idade, retirou-se para a sua terra natal, fugindo aos efeitos da grande epidemia de Peste Negra que tinha obrigado ao encerramento temporário da Universidade de Cambridge, que ele frequentava. Pensa-se que fez muitas das suas importantes descobertas durante os dois anos que aí passou, mas o mundo só ouviria falar delas bastante mais tarde.

A mais importante das numerosas obras de Newton foi a formulação de um conjunto de princípios dinâmicos que viriam a substituir a cosmovisão aristotélica. Em 1687, quando publicou a sua maior obra, os "*Principia*", enunciou as três leis, acrescidas de um conjunto de definições e corolários. A primeira lei é o chamado *Principio da Inércia*, herdado de Galileu e Descartes.

### *Primeira Lei*

*"Todo o corpo permanece em estado de repouso ou em movimento uniforme em linha recta, a menos que seja obrigado a mudar esse estado devido a forças que sobre ele actuem".*

A *Segunda Lei de Newton*, a verdadeira chave mestra da sua dinâmica, diz o que acontece a um corpo quando sobre ele actuam forças.

### *Segunda Lei*

*"A alteração do movimento é proporcional à força imprimida e faz-se na direcção e no sentido da força".*

Nos *Principia*, Newton definiu quantidade de movimento como o produto da velocidade pela quantidade de matéria. Muito depois da morte de Newton, a segunda lei foi sintetizada na equação  $\vec{F} = m \times \vec{a}$ , ou seja, a força é igual à massa vezes a aceleração. No entanto, Newton nunca a expressou desta forma.

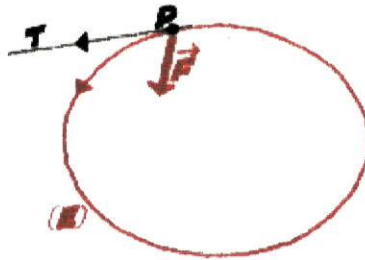
A terceira lei designa-se por *Lei da Acção e da Reacção*.

### *Terceira Lei*

*"Toda a acção tem uma reacção igual e oposta; ou as acções mútuas de dois corpos um sobre o outro são sempre iguais e dirigidas às partes contrárias".*

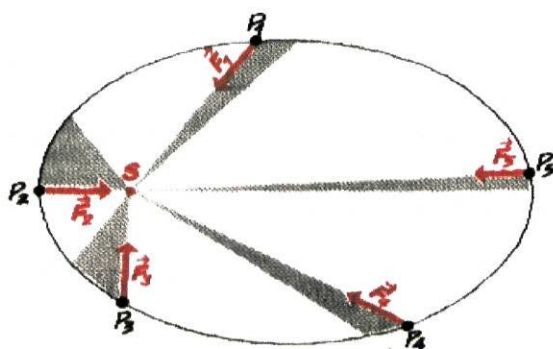
De acordo com esta terceira lei, toda a força devida a uma porção de um planeta que actua sobre uma segunda porção é exactamente equilibrada por uma força igual e oposta devida à segunda porção que actua sobre a primeira. O resultado é que a natureza do planeta pode ser completamente ignorada no cálculo da sua órbita em torno do Sol. O planeta comporta-se exactamente como se a sua massa estivesse concentrada num ponto geométrico localizado no seu centro.

A comparação da lei das órbitas dos planetas, anteriormente estabelecida por Kepler, com a lei da Inércia, permite inferir que, se um planeta descreve uma órbita elíptica é porque nele actua uma força ( figura 1.15 ).



**Figura 1.15:** Se o planeta não estivesse actuado por qualquer força, seguiria em linha recta com velocidade constante, segundo a direcção  $PT$ , de acordo com a Lei da Inércia. Ora, o planeta descreve a trajectória elíptica (  $E$  ), segundo a lei das órbitas. Nestas condições é actuado por uma força.

Para saber qual a direcção dessa força, Newton utilizou a análise geométrica. Essa análise revelou-lhe que um corpo qualquer actuado por uma força central, isto é, por uma força que está sempre dirigida para o mesmo ponto  $S$  deverá mover-se de acordo com a lei das áreas de Kepler. No caso do corpo  $P$  em questão ser um planeta, as referidas áreas são varridas pelo vector posição do planeta em relação ao Sol,  $S$ , isto é, segundo a lei das áreas de Kepler, como se ilustra na figura 1.16.

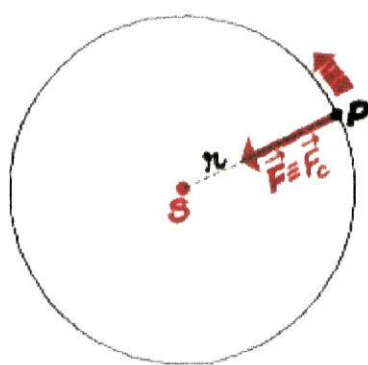


**Figura 1.16:** Se a força que actua sobre  $P$ , nas suas posições sucessivas, estiver sempre dirigida para o mesmo ponto  $S$ , o vector posição de  $P$ , em relação a  $S$ , varre áreas iguais em tempos iguais.

Conclui-se, assim, que o Sol está na posição  $S$ , para onde aponta permanentemente a força aplicada no planeta. Deste modo, Newton concluiu que o Sol era a "fonte" da força central que actua nos planetas.

Imediatamente surgiu a pergunta: " Qual é a natureza da força central? E a que lei obedece?"

Nos seus primeiros estudos, Newton considerou, por simplicidade, que as órbitas dos planetas eram circulares ( boa aproximação, se atendermos aos valores das excentricidades das suas órbitas ). Newton considerou um planeta  $P$ , de massa  $m$ , a descrever uma órbita circular, de raio  $r$ , em volta do Sol, como se mostra na figura 1.17.



**Figura 1.17:** A força que o Sol  $S$  exerce no planeta  $P$ , de massa  $m$  é  $F = K_s \frac{m}{r^2}$  dependendo a constante  $K_s$  apenas do Sol.

O módulo da aceleração centrípeta do planeta,  $a_c$ , em função do raio  $r$  é:

$$a_c = \frac{v^2}{r^2}$$

Como o módulo da velocidade circular,  $v_c$ , é:

$$v_c = \frac{2 \pi r}{T}$$

sendo  $T$  o período de revolução do planeta, vem:

$$a_c = \frac{4 \pi^2 r}{T^2}$$

Como Kepler afirmou na sua lei dos períodos, existe uma relação definida entre os períodos orbitais dos planetas e as suas distâncias médias em relação ao Sol:

$$\frac{T^2}{R_{med}^3} = K$$

sendo  $K$  uma constante que só depende do Sol e não dos planetas, pois tem o mesmo valor para todos estes.

Para órbitas circulares,  $R_{med}$  é muito simplesmente  $r$ . Introduzindo a relação  $T^2 = K r^3$  na expressão da aceleração, vem:

$$a_c = \frac{4 \pi r^2}{K r^3} = \frac{4 \pi^2}{K} \frac{1}{r^2}$$

Atendendo a que  $\frac{4 \pi r^2}{K} = K_s$  é constante, podemos escrever simplesmente,

$$a_c \propto \frac{1}{r^2}$$

Se a segunda lei de Newton,  $\vec{F} = m \vec{a}$ , for válida para os planetas, tal como o é para os corpos na Terra, então deverá existir uma força centrípeta,  $\vec{F}_c$ , actuando sobre o planeta:

$$F_c = K_s \frac{m}{r^2}$$

Por este processo Newton pode concluir que a força exercida sobre qualquer um dos planetas era:

- directamente proporcional à massa do planeta;
- inversamente proporcional ao quadrado da distância do planeta ao Sol;
- dependente de uma constante,  $K_s$ , que só diz respeito ao Sol.

A grande questão, porém, subsistia:

*Seria esta força de natureza universal? Seria, por exemplo, da mesma natureza da que actua na Lua e em todos os outros corpos terrestres e celestes?*

A resposta afirmativa que Newton propôs para a questão acabada de formular constitui um dos exemplos mais significativos do que é a intuição incomum dos grandes cientistas e de como ela conduz à indução científica baseada em determinados princípios metodológicos.

Newton começou a pensar na força planetária durante os anos em que esteve recolhido na sua terra natal, por ocasião da Peste Negra. Refere a lenda que, recolhido à sombra de uma macieira, se entregava à meditação sobre a natureza da gravidade, quando, ao observar a queda de uma maçã da árvore, teve a inspiração genial de que a gravidade, que obrigava a maçã a cair, se estenderia até à Lua e a todos os demais corpos do Universo.

No caminho para a grande síntese, Newton começou por testar a sua hipótese de que a força de gravidade terrestre, que atrai uma simples maçã, se estende até à Lua, determinando a gravitação desta em volta da Terra. Dos dados de que dispunha, Newton sabia que a distância entre os centros da Terra e da Lua era cerca de 60 raios terrestres. Sabia-se, também, desde há muito, que a aceleração gravitacional à superfície terrestre era cerca de  $6,80 \text{ m/s}^2$ . Sendo a força de gravitação com que a Terra atrai um corpo terrestre da mesma natureza daquela com que atrai a Lua e

sendo, além disso, da mesma natureza que o Sol exerce sobre os planetas, deveria, todas elas obedecer à lei do inverso-quadrática anteriormente estabelecida:

$$F = K \frac{m}{r^2}$$

em que  $K$  representa uma constante que só depende do astro director.

Obedecendo, então, a força de gravitação sobre a Lua à mesma expressão -  $F = K_T \frac{m}{r^2}$  ( $m$  representa a massa do corpo atraído e  $K_T$  uma constante que só depende da Terra) - a aceleração desses corpos deveria ser inversamente proporcional ao quadrado da distância, pois:

$$a = \frac{F}{m} = K_T \frac{1}{r^2}$$

Quer isto dizer que a aceleração da Lua para a Terra, à distância  $r_L = 60 r_T$  deveria ser apenas  $\frac{1}{60^2} = \frac{1}{3600}$  da de um corpo qualquer à superfície da Terra, ou seja,

$$a_L = \frac{1}{3600} g = \frac{1}{3600} \times 9,80 = 2,72 \times 10^{-3} m.s^{-2}$$

Para saber se realmente seria assim, Newton partiu do conhecimento de que o período orbital da Lua era, muito aproximadamente, 27,3 dias. Considerou a órbita da Lua circular e calculou, do modo que se segue, a sua aceleração centrípeta para a Terra.

$$a_L = \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 r_L = \frac{4\pi^2}{(2,36 \times 10^6)^2} \times 3,822 \times 10^8 = 2,71 \times 10^{-3} m.s^{-2}$$

A coincidência dos valores, o anterior (previsto) com este (observado), levou-o a concluir que *a força que mantém a Lua na sua órbita é exactamente da mesma natureza da que a Terra exerce sobre os corpos terrestres e da que o Sol exerce sobre os planetas.*

Era um autêntico triunfo: a mesma gravidade que faz cair uma maçã da árvore mantém também a Lua na sua órbita. Esta afirmação é a primeira parte daquilo que é conhecido

pelo nome de Lei da Gravitação Universal: *cada objecto do universo atrai qualquer outro objecto com uma força gravitacional.*

Mas Newton não se ficou pela afirmação da existência de uma força gravitacional entre os planetas e o Sol. Afirmou além disso que essa força tinha exactamente a intensidade necessária para explicar completamente o movimento de todos os planetas.

A afirmação geral de que as forças gravitacionais existem por toda a parte deve agora ser transformada numa lei quantitativa, que forneça uma expressão quer para a intensidade quer para a direcção e sentido das forças que dois objectos quaisquer exercem um sobre o outro. Assim, Newton teve que especificar quais os factores quantitativos que determinam as intensidades dessas forças mútuas. Teve de mostrar como elas poderiam ser medidas, directa ou indirectamente.

O primeiro exemplo consistia na definição precisa da distância  $r$ . A força gravitacional exercida por um corpo esférico era a mesma que ocorreria se toda a sua massa estivesse concentrada no seu centro. Reciprocamente, a força gravitacional exercida sobre um corpo esférico por um outro corpo é a mesma que ocorreria se toda a sua massa estivesse concentrada no seu centro. Consequentemente, a distância  $r$  referida na Lei da Gravitação é a distância entre os centros. Assim, conceptualmente, podemos substituir os objectos por *pontos-de-massa*.

Acreditando firmemente na universalidade das leis e admitindo que nenhum corpo exerce uma força sobre outro sem que este reaja, exercendo também uma força de igual intensidade sobre o primeiro - Lei da Acção-Reacção, Newton postulou que *dois corpos quaisquer se atraem gravitacionalmente, sendo a força gravitacional que actua em qualquer um deles proporcional à sua massa*, tal como sucede nos corpos terrestres, a Lua e os planetas.

Considerando, então, dois corpos quaisquer de massas,  $m_1$  e  $m_2$ , como se mostra na figura 1.18.

verifica-se que:

- a força com que o corpo de massa  $m_2$  atrai o corpo de massa  $m_1$  é:

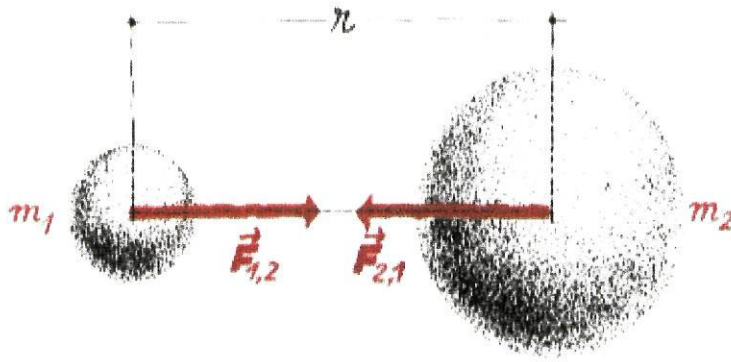


Figura 1.18: Interação gravitacional entre duas massas.

$$F_{1,2} \propto \frac{m_1}{r^2}$$

- a força com que o corpo de massa  $m_1$  atrai o corpo de massa  $m_2$  é:

$$F_{2,1} \propto \frac{m_2}{r^2}$$

Pela Lei da Acção-Reacção, tem-se:

$$F_{1,2} = F_{2,1} = F_g$$

Portanto, pelas propriedades das proporções verifica-se a relação:

$$F_g \propto \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Esta expressão de proporcionalidade pode ser escrita como uma equação, desde que se introduza uma constante de proporcionalidade,  $G$ . Obtemos assim, finalmente, a expressão:

$$F_g = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

que traduz a **Lei de Atracção Universal**: *a força atractiva gravitacional entre dois corpos, quaisquer, do Universo é directamente proporcional ao produto das suas massas*

e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre eles.

A constante de proporcionalidade  $G$  designa-se por *constante de gravitação universal*.

O valor da constante gravitacional,  $G$ , foi determinado pela primeira vez pelo próprio Newton. Ele conhecia o valor aproximado do raio médio da Terra. O seu valor actualmente aceite, não muito diferente daquele com que ele trabalhou, é:

$$r = 6,37 \times 10^6 \text{ m}$$

Tomou, por estimativa, para a densidade da Terra o valor 5.0, muito razoável, se o compararmos com o valor hoje aceite: 5,52. Começou por calcular o volume da Terra, considerando-a como uma esfera de raio igual ao seu raio médio. Utilizando os valores actuais, obtemos:

$$\begin{aligned} V &= \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \times 3,142 \times (6,37 \times 10^6)^3 \\ &= 1,083 \times 10^{21} \text{ m}^3 \end{aligned}$$

A seguir calculou a massa da Terra. Com os valores actuais, temos:

$$\begin{aligned} m_T &= \rho \times V = 5,52 \times 10^3 \text{ kgm}^{-3} \times 1,083 \times 10^{21} \text{ m}^3 \\ &= 5,98 \times 10^{24} \text{ kg} \end{aligned}$$

Aplicando a sua lei fundamental a um corpo qualquer, de massa  $m$ , em queda livre junto à superfície da Terra, pôde escrever:

$$F_g = m g$$

onde  $g$  é a aceleração da gravidade e  $F_g$  pode ser identificada com a força atractiva exercida sobre o corpo de massa  $m$ :

$$m g = G \frac{m_T m}{r^2}$$

e daqui resulta:

$$G = \frac{g r^2}{m_T}$$

Substituindo os valores, vem, por fim:

$$\begin{aligned} G &= \frac{9,80 m \cdot s^{-2} \times (6,37 \times 10^6 m)^2}{5,98 \times 10^{24} kg} \\ &= 6,65 \times 10^{-11} m^3 \cdot s^{-2} \cdot kg^{-1} \end{aligned}$$

Este valor é da mesma ordem de grandeza daquele que Newton propôs (  $10^{-10}$  ) e é muito próximo do valor actualmente aceite:

$$G = 6,670 \times 10^{-11} N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$$

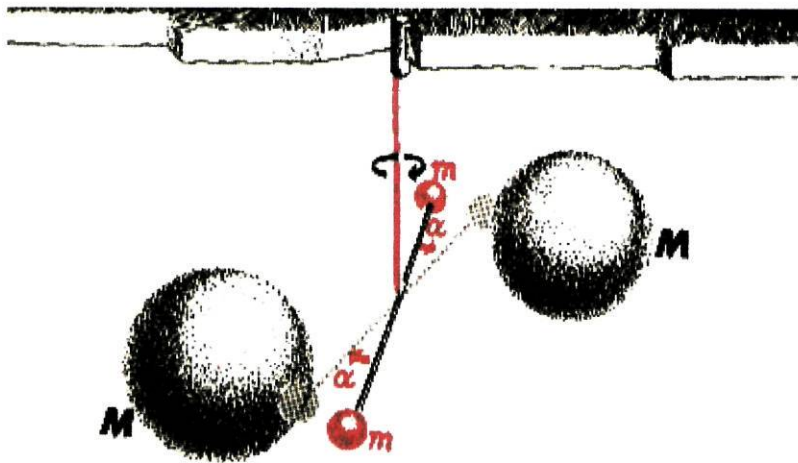
As primeiras medições experimentais de  $G$  foram efectuadas por Maskelyne ( - ), em 1774 ( 47 anos após a morte de Newton ). Baseou-se no facto de que, na proximidade de uma montanha, a enorme massa desta faz desviar um pêndulo.

Porém, a verificação experimental decisiva da Lei da Gravitação Universal, acompanhada da primeira medição rigorosa de  $G$ , deve-se ao físico britânico Henry Cavendish ( 1731 - 1797 ). Cavendish construiu uma enorme balança de torção, muito sensível, cujo esquema de funcionamento está representada na figura 1.19.

As duas esferas grandes, de massa  $M$ , conhecida atraem as esferas pequenas, de massa  $m$ , também conhecida, que estão fixas nas extremidades de uma barra suspensa de um fio comprido e fino. Medindo a distância  $r$  entre as massas  $m$  e  $M$ , quando ocorre o equilíbrio, e conhecendo, por experiências de calibração, o valor,  $F$ , das forças atractivas que produzem a torção verificada, calcula-se  $G$  pela expressão:

$$G = \frac{F \times r^2}{M \times m}$$

A figura 1.20 mostra uma vista lateral do aparelho com o qual Cavendish obteve o valor  $6,66 \times 10^{-11} N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$ , com erro inferior a 0,15% do valor hoje aceite.



**Figura 1.19:** Diagrama esquemático do dispositivo utilizado por Cavendish para a determinação do valor de  $G$ . As esferas grandes, de massa  $M$ , atraem as esferas pequenas, de massa  $m$ , torcendo o fio de suspensão.

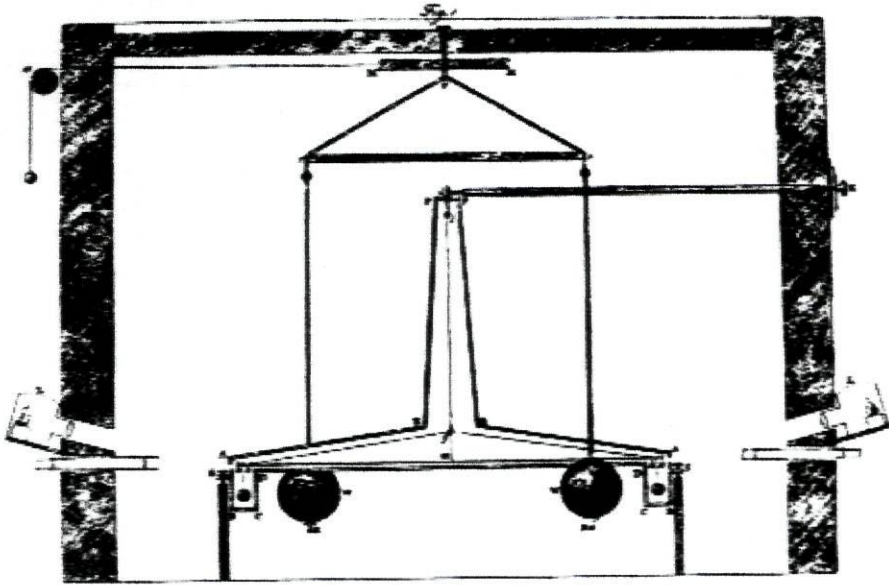
A concordância entre este valor experimental e o valor teórico obtido por Newton constitui mais uma das brilhantes confirmações que a experiência conferiu à sua lei.

É evidente que a gravitação é uma força fraca, que se torna importante apenas quando pelo menos uma das massas é muito grande.

Suponhamos que é aplicável o mesmo valor de  $G$  a todas as interações gravitacionais. Poderemos então calcular os valores das massas dos planetas, a partir dos valores conhecidos de  $\frac{T^2}{R^3}$  relativos aos seus satélites.

Note-se que a soma das massas de todos os planetas pouco excede a milésima parte da massa do sistema solar. A maior parte da massa reside, de longe, do Sol. Por esta razão, o Sol domina o movimento dos planetas, comportando-se como um objecto praticamente fixo, de massa quase infinita.

Newton não se deteve com as demonstrações descritas até aqui. Ele mostrou, nos *Principia*, que a sua Lei de Gravitação Universal poderia também explicar interações gravitacionais mais complicadas, tais como as marés e o estranho trajecto dos cometas através dos céus. Newton também aplicou a sua lei para investigar as causas do movimento um tanto irregular da Lua e mostrou que estas irregularidades eram explicáveis pelas forças gravitacionais actuanes sobre a Lua. Investigou as variações da gravidade com a latitude, devidas à rotação e à não esfericidade da Terra. Newton investigou



**Figura 1.20:** Desenho original do aparelho usado por Cavendish para medir a constante de gravitação Universal. O dispositivo estava fechado numa caixa estanque, para evitar perturbações devidas a correntes de ar. Cavendish observou a deflexão do ponteiro da balança do exterior, com a ajuda de telescópios.

muitos outros problemas que não é possível considerar aqui!

Em suma, Newton criou toda uma perspectiva quantitativa para o estudo do movimento da Astronomia. Aplicou o seu princípio de gravitação a uma imensa gama de problemas terrestres e celestes, o que fez com que a teoria se tornasse cada vez mais vastamente aceite. A teoria de Newton tem sido o principal instrumento na resolução de novos problemas de movimento do sistema solar. Por exemplo, o movimento dos satélites artificiais e das sondas espaciais pôde ser exactamente calculado na base da suposição de que, em cada instante, actua sobre eles uma força gravitacional que obedece à Lei da Gravitação Universal de Newton.

A obra de Newton, após a sua morte ( 1727 ), teve vários aperfeiçoamentos e desenvolvimentos, devido principalmente a Lagrange ( 1736 - 1813 ) e a Laplace ( 1794 - 1827 ). Os progressos entretanto ocorridos na precisão das observações permitiram verificar que a órbita do planeta Úrano, descoberto em 1781 por William Herschel ( 1738 - 18- ), não estava completamente de acordo com as previsões teóricas. A confiança no valor da Ciência era tão grande que não se pôs, sequer, a hipótese de as leis de Newton estarem erradas. Pensou-se, pelo contrário, que essa diferença entre as posições calculadas

e as posições observadas seria devido à influência gravitacional de um outro planeta ( absolutamente desconhecido ), movendo-se para além de Úrano. Leverrier ( 1811 - 1877 ) e Adams ( 1817 - 1892 ), trabalhando independentemente, calcularam a posição onde esse planeta deveria estar, de modo a produzir as perturbações observadas na órbita de Úrano, posição essa que os telescópios confirmaram, com notável rigor em 1846. Foi assim descoberto o planeta Neptuno. Muito mais tarde, por um método semelhante, com base nas irregularidades observadas na órbita de Neptuno, Clyde Tombang ( n.1906 ) viria a descobrir, em 1930, o planeta Plutão.

Uma teoria nunca poderá ser completamente provada; mas ela torna-se mais e mais aceitável à medida que se for descobrindo a sua utilidade sobre uma gama cada vez mais vasta de problemas. Nenhuma outra teoria suportou melhor este teste que a teoria da Gravitação Universal de Newton, aplicada ao sistema planetário. Depois de Newton, foi necessário quase um século para que os físicos e astrónomos compreendessem, verificassem e entendessem o seu trabalho, na aplicação aos problemas do movimento planetário.

Sabemos hoje que a mecânica newtoniana é válida dentro de um campo bem definido da nossa ciência. Por exemplo, embora as forças interiores a uma dada galáxia pareçam ser newtonianas, isso poderá já não ser verdade para as forças actantes entre uma galáxia e outra. Mesmo dentro do sistema solar, há várias pequenas discrepâncias entre as previsões e as observações.

Tais dificuldades não devem ser apressadamente atribuídas a pequenas imperfeições. A Lei da Gravitação Universal aplica-se com um rigor fora de questão a todos os outros movimentos planetários. No entanto, poderá acontecer que as hipóteses básicas da teoria a tornem muito limitada, como aconteceu com o sistema de epiciclos de Ptolomeu.

# Capítulo 2

## O problema dos dois corpos

O principal objectivo da Mecânica Celesta Clássica foi o de explicar e prever os movimentos dos planetas e dos seus satélites. Vários modelos empíricos, como o dos Epiciclos e as leis de Kepler, foram utilizados para descrever tais movimentos. Mas, nenhum destes modelos explicava o porquê de os planetas se moverem da forma como o fazem.

Foi apenas em 1680, que uma simples explicação foi encontrada para explicar o porquê de todos estes movimentos - a Lei de Gravitação Universal de Newton.

Neste capítulo serão deduzidas algumas propriedades do movimento orbital. A Física necessária é muito simples pois basta usar as leis de Newton.

Este capítulo é matematicamente mais "pesado" do que os restantes capítulos. Usar-se-á o cálculo vectorial e o cálculo diferencial para deduzir as equações. No entanto, tais cálculos matemáticos podem ser facilmente entendidos uma vez que é usada uma matemática muito elementar.

Um resumo muito simples do cálculo vectorial e do cálculo diferencial é apresentado nas notas suplementares.

### 2.1 Equações do movimento

Consideremos dois corpos de massas conhecidas,  $m_1$  e  $m_2$ , situados num dado instante nos pontos  $P_1$  e  $P_2$ , respectivamente, que estão submetidos apenas à mútua interacção, isto é, não existem forças externas agindo sobre eles ( figura 2.1 ).

Supomos que os corpos são esféricos e que as suas massas estão concentradas no seus centros ( isto é, os corpos são substituídos por pontos de massa ).

Sejam  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$  as forças de atracção mútua dos corpos.

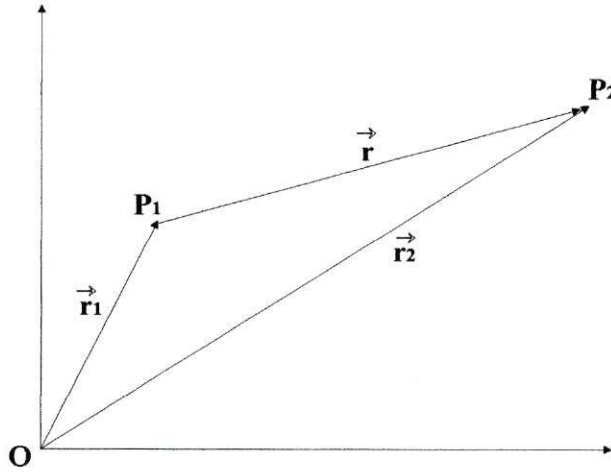


Figura 2.1: O problema dos dois corpos

Pela terceira lei de Newton, temos que:

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \quad (2.1)$$

Sendo:

$$\vec{F}_1 = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \quad (2.2)$$

e

$$\vec{F}_2 = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \quad (2.3)$$

Somando membro a membro as equações ( 2.2 ) e ( 2.3 ), obtém-se:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0} \quad (2.4)$$

Mas, pela segunda lei de Newton:

$$\vec{F}_1 = m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} \quad \text{e} \quad \vec{F}_2 = m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2}$$

Então, a equação ( 2.4 ) vem:

$$m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = \vec{0}$$

$$\frac{d}{dt} \left[ m_1 \frac{d \vec{r}_1}{dt} + m_2 \frac{d \vec{r}_2}{dt} \right] = \vec{0}$$

Considerando que as massas  $m_1$  e  $m_2$  são constantes e integrando a equação obtém-se:

$$m_1 \frac{d \vec{r}_1}{dt} + m_2 \frac{d \vec{r}_2}{dt} = \vec{c}_1 \quad (2.5)$$

$$\frac{d}{dt} [ m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 ] = \vec{c}_1 \quad (2.6)$$

Integrando novamente, tem-se:

$$m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = \vec{c}_1 t + \vec{c}_2 \quad (2.7)$$

sendo  $\vec{c}_1$  e  $\vec{c}_2$  dois vectores constantes.

Sendo  $\vec{R}$  o vector posição do centro de massa dos dois corpos de massas  $m_1$  e  $m_2$  então, por definição:

$$M \vec{R} = m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 \quad (2.8)$$

sendo  $M = m_1 + m_2$

Derivando a expressão ( 2.8 ) obtemos:

$$M \frac{d \vec{R}}{dt} = m_1 \frac{d \vec{r}_1}{dt} + m_2 \frac{d \vec{r}_2}{dt}$$

Logo as equações ( 2.5 ) e ( 2.7 ) podem ser escritas como:

$$M \frac{d \vec{R}}{dt} = \vec{c}_1$$

$$M \vec{R} = \vec{c}_1 t + \vec{c}_2$$

Estas relações mostram que o centro de massa do sistema move-se com movimento rectilíneo e uniforme ( velocidade constante ).

Substituindo nas equações ( 2.2 ) e ( 2.3 )  $\vec{F}_i$  por  $m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2}$  estas podem ser escritas como:

$$\frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = G \frac{m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} = G \frac{m_2}{r^3} \vec{r} \quad (2.9)$$

$$\frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = -G \frac{m_1}{r^3} \vec{r} \quad (2.10)$$

Subtraíndo membro a membro as equações ( 2.9 ) e ( 2.10 ), obtém-se:

$$\frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} - \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = G \frac{(m_1 + m_2)}{r^3} \vec{r} \Leftrightarrow$$

Mas,  $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = -(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2}{dt^2} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = G \frac{(m_1 + m_2)}{r^3} \vec{r} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = G \frac{(m_1 + m_2)}{r^3} \vec{r} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + G \frac{(m_1 + m_2)}{r^3} \vec{r} = \vec{0}$$

Fazendo  $\mu = G (m_1 + m_2)$  vem:

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + \frac{\mu}{r^3} \vec{r} = \vec{0} \quad (2.11)$$

A solução da equação ( 2.11 ) dá-nos a órbita relativa do corpo  $P_2$  em torno de  $P_1$ .

## 2.2 A solução da equação de movimento

A equação do movimento 2.11 é uma equação vectorial de segunda ordem. Portanto, são necessárias seis constantes de integração para se obter a solução completa.

Em princípio, a solução deverá dar o vector posição,  $\vec{r}$  em função do tempo,  $\vec{r} = \vec{r}(t)$ . Infelizmente, na prática, as coisas não são assim tão simples. De facto, não há nenhuma forma de exprimir o vector posição como função do tempo através de expressões finitas de funções familiares elementares, além disso, há várias formas de resolver a equação de movimento. Uma destas formas envolve certas quantidades físicas que iremos deduzir em seguida.

### 2.2.1 Conservação do momento cinético

Vamos começar por mostrar que o momento cinético ou momento angular por unidade de massa,  $\vec{h}$ , é um vector constante.

Para isso, vamos considerar o produto vectorial de  $\vec{r}$  com ambos os membros da equação ( 2.11 ):

$$\vec{r} \times \left( \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + \frac{\mu}{r^3} \vec{r} \right) = \vec{0} \Leftrightarrow$$

Aplicando as propriedades de produto vectorial de vectores (ver notas suplementares), tem-se:

$$\Leftrightarrow \vec{r} \times \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + \frac{\mu}{r^3} \vec{r} \times \vec{r} = \vec{0} \Leftrightarrow$$

Como  $\vec{r} \times \vec{r} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \vec{r} \times \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{0} \Leftrightarrow$$

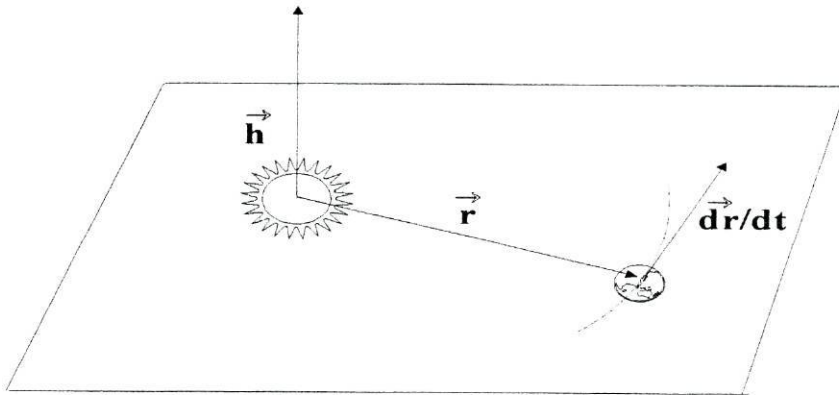
$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left[ \vec{r} \times \frac{d \vec{r}}{dt} \right] = \vec{0}$$

Integrando, obtém-se:

$$\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{h} \quad (2.12)$$

sendo  $\vec{h}$  um vector constante, que chamamos de momento cinético.

Uma vez que  $\vec{h}$  é um vector constante, então ele tem sempre a mesma direcção em qualquer instante. Logo o movimento de um dos corpos em torno do outro faz-se sempre num mesmo plano perpendicular à direcção de  $\vec{h}$  ( figura 2.2 ).



**Figura 2.2:** O vector  $\vec{h}$  é perpendicular aos vectores posição e velocidade da partícula. Como  $\vec{h}$  é um vector constante, o movimento da partícula faz-se sempre no mesmo plano perpendicular a  $\vec{h}$ .

### 2.2.2 Lei das áreas

Num referencial ortonormado  $(P_1, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  o vector posição  $\vec{r}$  tem coordenadas cartesianas:

$$\vec{r} = (x, y, z) \text{ com } z \text{ constante.}$$

Consideremos então no plano  $z = \text{const.}$  um referencial bidimensional  $(P_1, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$  ( figura 2.3 ).

O vector posição,  $\vec{r}$ , e o vector velocidade,  $\frac{d\vec{r}}{dt}$ , podem ser escritos em coordenadas cartesianas :

$$\vec{r} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y$$

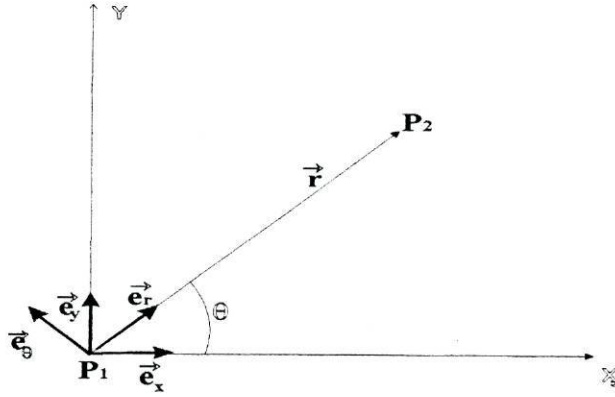


Figura 2.3: Referencial o.n. representando a base de vectores  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$  e  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \vec{e}_x + \frac{dy}{dt} \vec{e}_y$$

Ou em coordenadas coordenadas polares,  $(r, \theta)$  ( ver apêndice ):

$$\vec{r} = r \vec{e}_r$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt} \vec{e}_r + r \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_\theta \quad (2.13)$$

Escrevendo a equação ( 2.12 ) em coordenadas polares, obtém-se:

$$\begin{aligned} (r \vec{e}_r) \times \left( \frac{dr}{dt} \vec{e}_r + r \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_\theta \right) &= \vec{h} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left( r \frac{dr}{dt} \right) (\vec{e}_r \times \vec{e}_r) + r^2 \frac{d\theta}{dt} (\vec{e}_r \times \vec{e}_\theta) &= \vec{h} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 0 + r^2 \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_z &= \vec{h} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

Portanto:

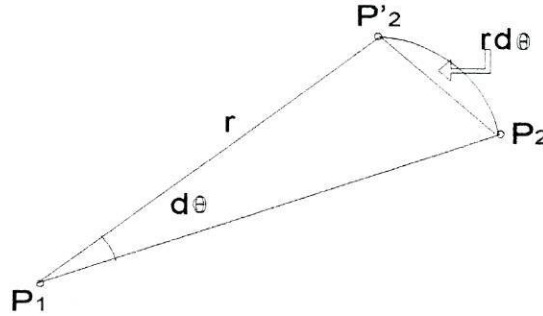
$$r^2 \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_z = \vec{h}$$

sendo  $\vec{e}_z$  um vector unitário perpendicular aos vectores  $\vec{e}_r$  e  $\vec{e}_\theta$ , isto é, ao plano da órbita.

Podemos escrever que:

$$h = r^2 \frac{d\theta}{dt} \quad (2.14)$$

Consideremos agora o movimento de um corpo  $P_2$  em torno de um corpo  $P_1$ . A posição de  $P_2$  é determinada em dois instantes muito próximos,  $dt$ , correspondentes às posições  $P_2$  e  $P'_2$  como se representa na figura 2.4.



**Figura 2.4:** Movimento de um corpo  $P_2$  em torno de um corpo  $P_1$  durante um intervalo de tempo  $dt$  muito pequeno.

$d\theta$  representa o ângulo entre as duas posições quando observadas do ponto  $P_1$ . A área varrida pelo corpo  $P_2$  ( região sombreada ) é determinada da seguinte forma:

Porque  $d\theta$  é muito pequeno então podem ser usadas as seguintes aproximações:

$$\sin ( d\theta ) \approx d\theta$$

$$\widehat{P_2P'_2} \approx \overline{P_2P'_2}$$

$$\text{Logo, } \widehat{P_2P'_2} \approx r d\theta$$

A área da região sombreada é:

$$dA = \frac{1}{2} r \cdot r d\theta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} \Leftrightarrow$$

$$\text{Como } h = r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} h \implies$$

Integrando:

$$\int \frac{dA}{dt} dt = \int \frac{1}{2} h dt \implies$$

$$\int dA = \frac{1}{2} h \int dt \implies$$

$$A = \frac{1}{2} h \Delta t + A_o$$

sendo  $A_o$  a área varrida aquando o início da contagem do tempo  $\Delta t$ .

$A - A_o$  representa a área varrida pelo corpo  $P_2$  no seu movimento em torno de  $P_1$  durante o intervalo de tempo  $\Delta t$ .

O resultado obtido traduz rigorosamente a segunda lei de Kepler ( lei das áreas ) na sua forma matemática.

### 2.2.3 Conservação da Energia

Se considerarmos o produto escalar de  $\frac{d\vec{r}}{dt}$  com a equação ( 2.11 ), obtemos:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \left( \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + \frac{\mu}{r^3} \vec{r} \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left( \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \right) + \frac{\mu}{r^3} \left( \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \vec{r} \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{d\vec{r}}{dt} \right)^2 - \frac{\mu}{r} \right] = 0$$

Integrando:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{d\vec{r}}{dt} \right)^2 - \frac{\mu}{r} = E \quad (const.)$$

Mas  $\left( \frac{d\vec{r}}{dt} \right)^2 = V^2$

sendo  $V$  a velocidade do corpo de massa  $m_2$  em relação ao corpo de massa  $m_1$ .

Portanto:

$$\frac{1}{2} V^2 - \frac{\mu}{r} = E \quad (2.15)$$

Esta é a equação de Conservação de Energia do sistema. O termo  $\frac{1}{2} V^2$  está relacionado com a energia cinética e o outro termo,  $-\frac{\mu}{r}$ , está relacionado com a energia potencial.

O sistema está isolado e, portanto, a energia total deste tem de se manter constante.

#### 2.2.4 Equação da órbita

Observando novamente a figura 2.3, vamos determinar as componentes do vector aceleração no referencial  $(P_1, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$

Como já tínhamos visto,

$$\vec{V} = \frac{dx}{dt} \vec{e}_x + \frac{dy}{dt} \vec{e}_y$$

As coordenadas cartesianas e polares estão relacionadas da seguinte maneira:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

com:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{dr}{dt} \cos \theta - r \sin \theta \frac{d\theta}{dt} \\ \frac{dy}{dt} = \frac{dr}{dt} \sin \theta + r \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \end{cases}$$

$$\text{Mas } \vec{a} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2 x}{dt^2} \vec{e}_x + \frac{d^2 y}{dt^2} \vec{e}_y$$

Derivando novamente:

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2r}{dt^2} \cos \theta - 2 \sin \theta \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2\theta}{dt^2} \sin \theta - r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \cos \theta \\ \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2r}{dt^2} \sin \theta + 2 \cos \theta \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2\theta}{dt^2} \cos \theta - r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \sin \theta \end{cases}$$

Escrevendo  $\vec{a}$  em função das suas componentes segundo os vectores  $\vec{e}_r$  e  $\vec{e}_\theta$ , obtém-se:

$$\vec{a} = a_r \vec{e}_r + a_\theta \vec{e}_\theta$$

sendo:

$$\begin{cases} a_r = \frac{d^2r}{dt^2} - r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \\ a_\theta = \left( 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2\theta}{dt^2} \right) = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left( r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) \end{cases}$$

Assim, a equação ( 2.11 ) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{d^2r}{dt^2} - r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] \vec{e}_r + \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left( r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) \right] \vec{e}_\theta + \frac{\mu}{r^3} r \vec{e}_r = \vec{0} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & \left[ \frac{d^2r}{dt^2} - r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \frac{\mu}{r^3} r \right] \vec{e}_r + \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left( r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) \right] \vec{e}_\theta = \vec{0} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = -\frac{\mu}{r^2} \quad (2.16)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left( r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) = 0 \quad (2.17)$$

Integrando a equação ( 2.17 ), obtemos o momento angular  $h$ :

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = h \quad (2.18)$$

Se fizermos as seguintes mudanças de variável:

$$\begin{cases} t = \theta \\ u = \frac{1}{r} \end{cases}$$

cujas derivadas são:

$$\begin{cases} dt = d\theta \\ \frac{dr}{dt} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} \end{cases}$$

E se tivermos em conta que  $h = r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{u^2} \frac{d\theta}{dt}$

Então,  $\frac{d\theta}{dt} = u^2 h$

Logo:

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{1}{u^2} u^2 h \frac{du}{d\theta} = -h \frac{du}{d\theta}$$

Pelo que:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -h \frac{d^2 u}{d\theta dt} = -h \frac{d^2 u}{d\theta^2} \frac{d\theta}{dt} = -h^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2}$$

Substituindo na equação ( 2.16 )

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = -\frac{\mu}{r^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -h^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2} + \mu u^2 - \frac{r^2}{r} \frac{d\theta}{dt} \frac{d\theta}{dt} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -h^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2} + \mu u^2 - r^4 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \frac{1}{r^3} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -h^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2} + \mu u^2 - h^2 u^3 = 0 \Leftrightarrow$$

Dividindo ambos os membros por  $-h^2 u^2$ , obtemos:

$$\Leftrightarrow \frac{d^2 u}{d\theta^2} - \frac{\mu}{h^2} + u = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{\mu}{h^2}$$

A solução geral desta equação é:

$$u = \frac{\mu}{h^2} + A \cos(\theta - \theta_o) \quad (2.19)$$

sendo  $A$  e  $\theta_o$  duas constantes de integração.

Introduzindo novamente a variável  $r$ , obtemos:

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu}{h^2} + A \cos(\theta - \theta_o) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{1}{\frac{\mu}{h^2} + A \cos(\theta - \theta_o)} \Leftrightarrow$$

Multiplicando ambos os termos da fracção por  $\frac{h^2}{\mu}$ :

$$\Leftrightarrow r = \frac{\frac{h^2}{\mu}}{1 + \frac{A h^2}{\mu} \cos(\theta - \theta_o)}$$

E fazendo:

$$\left\{ \begin{array}{l} p = \frac{h^2}{\mu} \\ e = \frac{A h^2}{\mu} \end{array} \right.$$

Vem:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \theta_o)} \quad (2.20)$$

Obtivemos a equação polar de uma cónica ( ver notas suplementares ).

Portanto, a solução do problema dos dois corpos é uma secção cónica.

A órbita de um corpo em torno de outro está relacionada com as condições iniciais que determinam  $A$  e  $h$ . O tipo de cónica depende do valor da constante,  $e$ , denominada de excentricidade da cónica.

Se:

- $0 \leq e < 1$  a órbita é uma ELIPSE
- $e = 1$  a órbita é uma PARÁBOLA
- $e > 1$  a órbita é uma HIPÉRBOLE

No caso em que a excentricidade é nula, temos um caso particular da elipse - CIRCUNFERÊNCIA.

## 2.3 Órbita Elíptica

### 2.3.1 Caracterização da elipse:

Antes de iniciar o estudo da órbita elíptica, vamos caracterizar este tipo de órbita em termos matemáticos.

Elipse é o conjunto dos pontos do plano tais que a soma das distâncias a dois pontos fixos - os focos - é constante e maior que a distância entre eles ( figura 2.5 ).

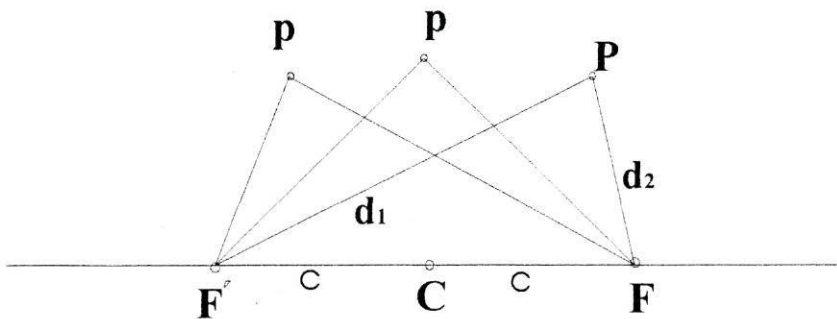


Figura 2.5:  $P \in Elipse \Leftrightarrow d_1 + d_2 = 2a \wedge a > c$  sendo  $c$  a semi-distância focal.

Mas também podemos definir elipse como sendo o lugar geométrico de um ponto  $P$  que se move de tal forma que o quociente entre a sua distância a um ponto fixo - o foco - e a distância a uma recta - a directriz - é uma constante que varia entre 0 e 1 ( figura 2.6 ).

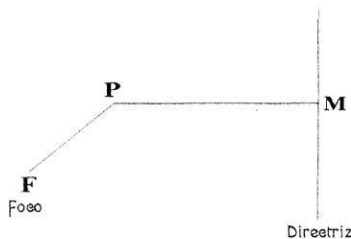
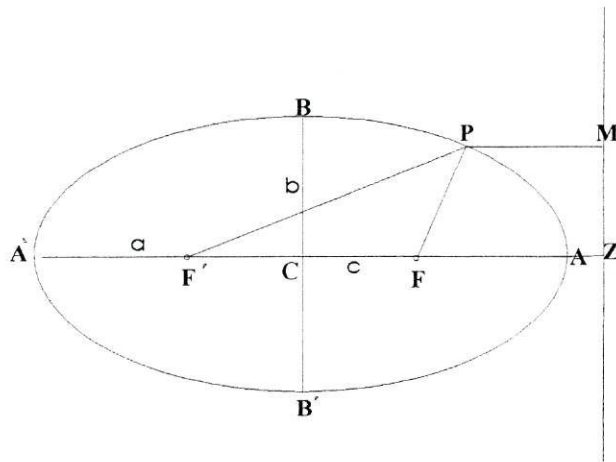


Figura 2.6:  $P \in Elipse \Leftrightarrow \frac{PF}{PM} = e \wedge e < 1$

A elipse pode ser caracterizada pelos seguintes elementos ( figura 2.7 ) :

- Os focos,  $F$  e  $F'$ .
- A directriz,  $MZ$

- O centro,  $C$ .
- Os vértices  $A$ ,  $A'$ ,  $B$  e  $B'$ .
- O eixo maior,  $[AA']$  de comprimento  $2a$ .
- O eixo menor,  $[BB']$  de comprimento  $2b$ .
- A semi-distância focal,  $\overline{CF} = \overline{CF'} = c$ .
- A excentricidade  $e = \frac{c}{a}$ .



**Figura 2.7:** Os elementos da elipse

Na realidade alguns dos elementos introduzidos anteriormente, como  $a$ ,  $b$  e  $c$  estão interligados.

Para determinarmos a relação entre esses elementos, vamos considerar que o ponto  $P$  está no vértice  $B$ , ( figura 2.8 ).

Como vimos anteriormente, por definição de elipse, a soma das distâncias do ponto  $P$  aos focos  $F$  e  $F'$  é constante e igual ao comprimento do eixo maior, ou seja:

$$\overline{FP} + \overline{F'P} = 2a$$

Mas  $\overline{FP} = \overline{F'P}$  pelo que  $2\overline{FP} = 2a \Leftrightarrow \overline{FP} = a$

Considerando o triângulo  $[PCF]$ , retângulo em  $C$ , pelo teorema de Pitágoras, tem-se que:

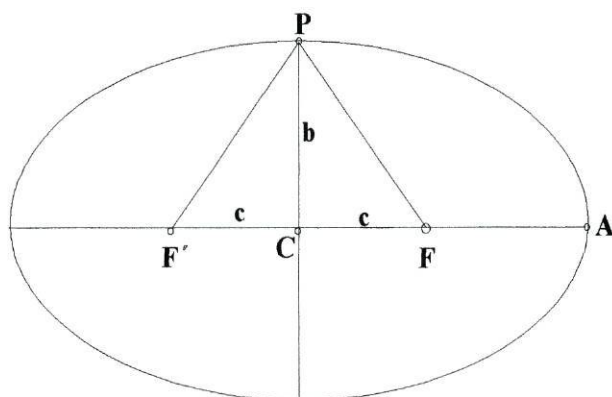


Figura 2.8: O ponto  $P$  está situado no vértice  $B$  da elipse

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Ou seja:

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$c$  e  $b$  poderão ser expressos em função da excentricidade e do semi-eixo maior, pois por definição de excentricidade:

$$e = \frac{c}{a} \Leftrightarrow c = a e$$

E pela relação  $c^2 = a^2 - b^2$ , então:

$$b^2 = a^2 - c^2 \Leftrightarrow b^2 = a^2 - a^2 e^2 \Leftrightarrow b = a \sqrt{1 - e^2}$$

Ou seja, os elementos que caracterizam uma elipse resumem-se a dois, o semi-eixo maior  $a$  e a excentricidade  $e$ .

Como vimos na secção 2.2.3, a equação de uma elipse em coordenadas polares é:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos f} \tag{2.21}$$

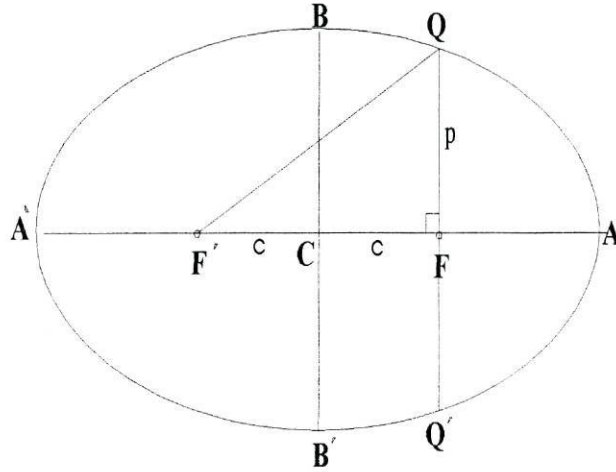
com  $e < 1$  e  $f$  representa o ângulo medido desde o ponto mais próximo do foco,  $A$ , até  $P$  e é chamada de anomalia verdadeira.

Como a elipse é caracterizada pelo semi-eixo maior e a excentricidade, então  $p$  terá

de depender desses dois parâmetros.

Consideremos os pontos da elipse,  $Q$  e  $Q'$ , tais que:

$[QQ']$  é o segmento de recta perpendicular ao eixo maior e que contém o foco  $F$ , como se ilustra na figura 2.9:



**Figura 2.9:**  $Q$  e  $Q'$  são dois pontos da elipse, tais que  $QQ'$  é perpendicular ao semi-eixo maior e  $F$  é o ponto médio de  $[QQ']$ .

Como  $Q \in$  elipse então:

$$\overline{QF} + \overline{QF'} = 2a \text{ e } \overline{QF} = p \text{ (quando } f = \frac{\pi}{2} \text{)}$$

Pelo que  $\overline{QF'} = 2a - p$

Mas, por outro lado, considerando o triângulo rectângulo em  $F$ , pelo teorema de Pitágoras:

$$\overline{QF'}^2 = \overline{FF'}^2 + \overline{QF}^2$$

Então:

$$\begin{aligned} (2a - p)^2 &= (2c)^2 + p^2 \Leftrightarrow 4a^2 + p^2 - 4ap = 4c^2 + p^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 4ap &= 4a^2 - 4c^2 \Leftrightarrow ap = a^2 - c^2 \Leftrightarrow p = a - \frac{c^2}{a} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

Como  $c = ae$

$$\Leftrightarrow p = a - \frac{e^2 a^2}{a} = p = a - e^2 a^2 \Leftrightarrow$$

$$p = a(1 - e^2) \quad (2.22)$$

Assim, a equação 2.21 pode ser escrita como:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos f}$$

Em coordenadas cartesianas ( ver apêndice ) a equação da elipse é:

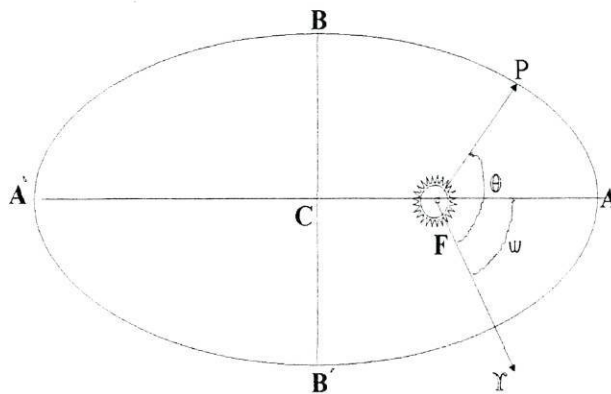
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

### 2.3.2 Aplicação da órbita elíptica ao Sistema Solar:

Apliquemos a solução do problema dos dois corpos ao movimento orbital no sistema solar.

Consideremos que um corpo  $P$  se move em torno do Sol, que se encontra no foco  $F$ .

Suponhamos que o plano orbital coincide com o plano da eclíptica e que a direcção de referência é a direcção do ponto vernal,  $\Upsilon$ , como se mostra na figura 2.10.



**Figura 2.10:** Movimento do corpo  $P$  em torno do Sol, colocado num dos focos,  $F$ .

- $P \hat{F} \Upsilon = \theta$
- $A \hat{F} \Upsilon = \omega$

A anomalia verdadeira é portanto,  $f = \theta - \omega$ , e a equação 2.21 toma a seguinte forma:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \omega)} \quad (2.23)$$

Quando o corpo  $P$  está:

- no ponto mais próximo do Sol ( pericentro da órbita ), tem-se que:

$$\theta = \omega \Rightarrow \theta - \omega = 0 \Rightarrow \cos(\theta - \omega) = 1$$

Pelo que:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e} = a(1 - e) \quad (2.24)$$

- no ponto mais afastado do Sol ( apocentro da órbita ), tem-se que:

$$\theta = 180^\circ + \omega \Rightarrow \theta - \omega = 180^\circ \Rightarrow \cos(\theta - \omega) = -1$$

Pelo que:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e} = a(1 + e) \quad (2.25)$$

As distâncias mínima e máxima a que o corpo  $P$  fica do Sol depende portanto do semi-eixo maior e da excentricidade da órbita.

### 2.3.3 Período da órbita:

Como vimos na secção 2.2.2, numa órbita elíptica o corpo  $P$  varre áreas iguais em tempos iguais ( 2ª lei de Kepler ). Consideremos que uma volta completa do corpo

$P$  em torno de  $F$  demora um tempo  $T$ . A área varrida nesse intervalo de tempo é a área da elipse,  $\pi a b$ .

Assim:

$$\frac{2\pi ab}{T} = h$$

Substituindo  $b$  por  $a\sqrt{1-e^2}$ , obtém-se:

$$2\pi a^2 \sqrt{1-e^2} = hT$$

Como já se tinha visto,  $p = \frac{h^2}{\mu}$ , ou seja,  $h = \sqrt{\mu a (1-e^2)}$

onde  $\mu = G\sqrt{m_1 + m_2}$  valor este que pode ser obtido através da observação.

Substituindo  $h$ , obtém-se:

$$2\pi a^2 \sqrt{1-e^2} = \sqrt{\mu a (1-e^2)} T \Leftrightarrow T = \frac{2\pi a^2 \sqrt{1-e^2}}{\sqrt{\mu a (1-e^2)}} = \frac{2\pi a^2}{\sqrt{\mu a}}$$

$$\Leftrightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{a^4}{\mu a}} \Leftrightarrow$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \tag{2.26}$$

Esta relação é bastante importante uma vez que nos mostra que o período orbital  $T$  depende apenas dos valores do comprimento do semi-eixo maior e das somas das massas dos corpos.

Esta relação deduzida a partir das leis de Newton, tinha sido anteriormente verificada por Kepler através da observação ( 3ª lei de Kepler ) e enunciada da seguinte forma: *A razão entre o cubo do semi-eixo maior da órbita e o quadrado do período é constante.*

Para mostrar essa relação, vamos considerar um planeta de massa  $m$ , em órbita com um período  $T_1$  e semi-eixo maior  $a_1$ , em torno do Sol, cuja massa é  $M_s$ .

Da equação 2.26 vem:

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{a_1^3}{\mu}} \Leftrightarrow T_1^2 = 4\pi^2 \frac{a_1^3}{\mu} \Leftrightarrow \mu = \frac{4\pi^2 a_1^3}{T_1^2} \Leftrightarrow$$

$$G(M_S + m_1) = \frac{4\pi^2 a_1^3}{T_1^2} \quad (2.27)$$

Para outro planeta de massa  $m_2$  numa órbita de período  $T_2$  e semi-eixo maior  $a_2$ , tem-se:

$$G(M_S + m_2) = \frac{4\pi^2 a_2^3}{T_2^2} \quad (2.28)$$

Dividindo membro a membro as equações 2.27 e 2.28, tem-se:

$$\frac{G(M_S + m_1)}{G(M_S + m_2)} = \frac{4\pi^2 a_1^3 T_2^2}{4\pi^2 a_2^3 T_1^2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{M_S + m_1}{M_S + m_2} = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3 \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 \quad (2.29)$$

A equação 2.29 traduz matematicamente a terceira lei de Kepler. Com efeito, para o planeta Júpiter, o planeta mais massivo,  $\frac{m}{M_S} \sim 10^{-3}$ , pelo que o primeiro membro da equação 2.29 é muito próximo da unidade. Portanto de acordo com a observação feita por Kepler.

### 2.3.4 Medição da massa de um planeta:

A relação 2.26, como se verá de seguida, pode ser de grande utilidade para estimar a massa de planetas, quando estes possuem um satélite cuja órbita é conhecida.

Suponhamos que a equação 2.27 diz respeito à órbita da Terra em torno do Sol, sendo a massa da Terra  $m_T$ . Consideremos a órbita da Lua (satélite da Terra), em torno da Terra com um período orbital  $T'$  e o semi-eixo maior orbital  $a'$ .

Representemos a massa do satélite por  $m'$ . Esta dedução é válida qualquer que seja o satélite, artificial ou não.

Temos assim a relação:

$$G(m_T + m') = \frac{4\pi^2 (a')^3}{(T')^2}$$

Então:

$$\frac{m_T + m'}{M_S + m_T} = \left( \frac{a'}{a_1} \right)^3 \left( \frac{T_1}{T'} \right)^2 \quad (2.30)$$

A massa do satélite,  $m'$ , pode ser desprezada em relação à massa da Terra,  $m_T$ , bem como a massa da Terra relativamente à massa do Sol,  $M_S$ , pois:

$$m' \ll m_T \wedge m_T \ll M_S$$

Assim podemos escrever:

$$\frac{m_T}{M_S} = \left( \frac{a'}{a_1} \right)^3 \left( \frac{T_1}{T'} \right)^2 \quad (2.31)$$

A quantidade do segundo membro da equação pode ser medida, pelo que a massa da Terra em função da massa do Sol pode ser determinada. De forma análoga se determina a massa de planetas que tenham satélites.

Apenas dois planetas do sistema solar não têm satélites: Mercúrio e Vénus. As suas massas foram determinadas pela primeira vez de forma indirecta através da perturbação na órbita dos outros planetas.

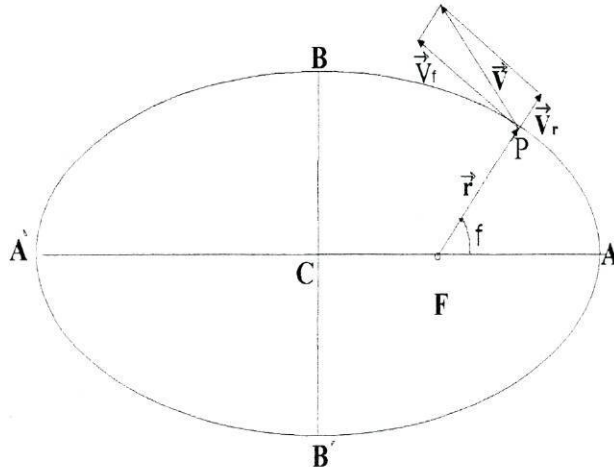
As massas quer de Vénus quer de Mercúrio foram, nos últimos anos, medidas com maior precisão através da observação da distorção das órbitas de sondas, devido ao campo gravitacional dos planetas.

### 2.3.5 Velocidade numa órbita elíptica:

Nesta secção vamos determinar a velocidade de um corpo em órbita elíptica em função dos elementos que a caracterizam.

Seja  $V$  a velocidade de um corpo situado no ponto  $P$  da sua órbita, onde  $\overline{FP} = r$ .

Esta velocidade cuja direcção é tangente à elipse no ponto  $P$ , tem como componentes  $V_r = \frac{dr}{dt}$  ao longo da direcção do vector posição e  $V_f = r \frac{df}{dt}$  segundo a perpendicular ao vector posição  $\vec{r}$  ( como se ilustra na figura 2.11 ).



**Figura 2.11:** O vector velocidade  $\vec{V}$  decomposto segundo as suas componentes  $\vec{V}_r$  e  $\vec{V}_f$ , segundo as direcções do vector posição e da sua perpendicular, respectivamente.

O vector velocidade pode ser escrito como:

$$\vec{V} = \vec{V}_r + \vec{V}_f$$

E a velocidade  $V$  é dada por:

$$V^2 = V_r^2 + V_f^2$$

Ou seja:

$$V^2 = \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left( \frac{df}{dt} \right)^2 \quad (2.32)$$

Sendo ( nota em apêndice ):

$$\frac{dr}{dt} = \frac{h}{p} e \sin f \quad (2.33)$$

e

$$r \frac{df}{dt} = \frac{h}{p} (1 + e \cos f) \quad (2.34)$$

Substituindo as equações 2.33 e 2.34 na equação 2.32, obtém-se:

$$V^2 = \left( \frac{h}{p} \right)^2 (e^2 + 1 + 2e \cos f) \Leftrightarrow$$

Escrevendo  $V^2$  em função de  $1 - e^2$

$$\Leftrightarrow V^2 = \left( \frac{h}{p} \right)^2 [2e \cos f + (1 - e^2) - (1 - e^2) + 1 + e^2] \Leftrightarrow$$

$$V^2 = \left( \frac{h}{p} \right)^2 [2 + 2e \cos f - (1 - e^2)] \quad (2.35)$$

Usando a equação 2.21, tem-se que:

$$1 + e \cos f = \frac{p}{r}$$

Substituindo na equação 2.35, obtém-se:

$$\begin{aligned} V^2 &= \left( \frac{h}{p} \right)^2 \left[ 2 \frac{p}{r} - (1 - e^2) \right] = 2 \frac{h^2}{p^2} \frac{p}{r} - 2 \frac{p}{r} - \left( \frac{h}{p} \right)^2 (1 - e^2) = \\ &= \frac{2 h^2}{r p} - \left( \frac{h}{p} \right)^2 (1 - e^2) = \frac{2 h^2}{r p} - \frac{h^2}{p} \frac{1 - e^2}{p} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\text{Mas } \frac{h^2}{p} = \mu \text{ e } 1 - e^2 = \frac{p}{a}$$

Então:

$$\Leftrightarrow V^2 = \frac{2 \mu}{r} - \frac{\mu}{a} \Leftrightarrow$$

Ou seja:

$$\Leftrightarrow V^2 = \mu \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) \quad (2.36)$$

A velocidade de um corpo em órbita elíptica depende da sua posição na órbita,  $r$ , das

massa dos corpos e do semi-eixo maior da respectiva órbita.

A expressão anterior mostra que quanto menor for  $r$  ( os corpos estão próximos ) maior é a velocidade e vice-versa. Esta variação em velocidade já era esperada pela lei das áreas. Se o corpo em órbita varre áreas iguais em tempos iguais então terá de acelerar quando se aproxima dos focos.

As velocidades máxima e mínima na órbita elíptica ocorrem no pericentro e apocentro. A velocidade em cada um destes pontos é facilmente determinada usando a expressão 2.36.

- No Pericentro,  $r = a(1 - e)$ , pelo que a velocidade do corpo é:

$$V_p^2 = \mu \left( \frac{2}{a(1 - e)} - \frac{1}{a} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V_p^2 = \frac{\mu}{a} \frac{1 + e}{1 - e}$$

- No Apocentro,  $r = a(1 + e)$ , pelo que a velocidade do corpo é:

$$V_a^2 = \mu \left( \frac{2}{a(1 + e)} - \frac{1}{a} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V_a^2 = \frac{\mu}{a} \frac{1 - e}{1 + e}$$

Se fizermos o produto de  $V_a^2$  por  $V_p^2$  tem-se.

$$V_a^2 V_p^2 = \left( \frac{\mu}{a} \right)^2 \frac{1 - e}{1 + e} \times \frac{1 + e}{1 - e} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (V_a V_p)^2 = \left( \frac{\mu}{a} \right)^2 \Rightarrow$$

$$V_a V_p = \frac{\mu}{a} = \text{constante}$$

Para o caso da órbita circular ( $e = 0$ ), a velocidade é constante em toda a órbita pois  $r$  é fixo e é igual a  $\sqrt{\frac{\mu}{a}}$ , onde neste caso  $a$  representa o raio da órbita circular.

Se resolvermos a equação 2.36 em ordem a  $a$ :

$$\begin{aligned}
 V^2 &= \mu \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) = \frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \frac{\mu}{a} &= \frac{2\mu}{r} - V^2 \Leftrightarrow \frac{a}{\mu} = \frac{1}{\frac{2\mu}{r} - V^2} \Leftrightarrow \\
 a &= \frac{\mu}{\frac{2\mu}{r} - V^2} \tag{2.37}
 \end{aligned}$$

Esta relação mostra que o comprimento do semi-eixo maior é função de  $r$  e de  $V^2$ . Assim, se um corpo de massa  $m_1$  é projectado a uma determinada distância  $r$  relativamente a outro corpo de massa  $m_2$  com velocidade  $V$ , o comprimento de semi-eixo maior  $a$ , é independente da direcção da projecção dependendo unicamente da velocidade escalar, isto é, da magnitude da velocidade.

### 2.3.6 Órbitas co-periódicas:

Como já tínhamos visto,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$$

Então, usando a equação 2.37:

$$\begin{aligned}
 T &= 2\pi \sqrt{\frac{\mu^3}{\mu \left( \frac{2\mu}{r} - V^2 \right)^3}} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow T &= 2\pi \mu \sqrt{\frac{1}{\left( \frac{2\mu}{r} - V^2 \right)^3}} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow T &= 2\pi \mu \sqrt{\left( \frac{2\mu}{r} - V^2 \right)^{-3}} \Leftrightarrow \\
 T &= 2\pi \mu \left[ \left( \frac{2\mu}{r} \right) - V^2 \right]^{-\frac{3}{2}} \tag{2.38}
 \end{aligned}$$

As equações 2.26 e 2.38 fornecem-nos algumas propriedades interessantes do movimento elíptico.

Foi visto que o semi-eixo maior é uma função do vector posição e do quadrado da velocidade. Se, porém, um corpo de massa  $m_1$  é projectado a uma distância  $r$  de um outro corpo de massa  $m_2$  com velocidade  $V$ , o semi-eixo maior da sua órbita é independente da direcção da projecção e depende apenas da magnitude da velocidade.

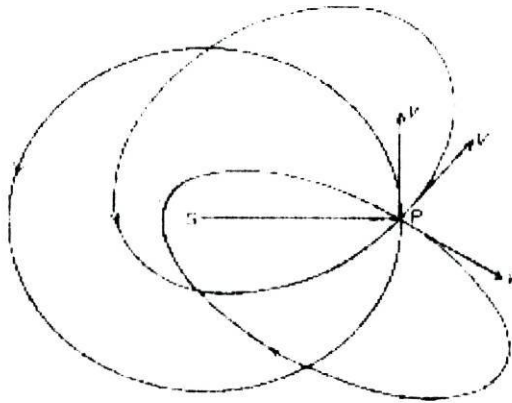


Figura 2.12: Órbitas co-periódicas

Na figura 2.12 todas as órbitas representadas têm:

- o mesmo vector posição  $\vec{FP}$
- a mesma velocidade escalar inicial

Apenas as direcções das projecções são diferentes. Todas as órbitas têm o mesmo semi-eixo maior,  $a$ , dado por 2.37.

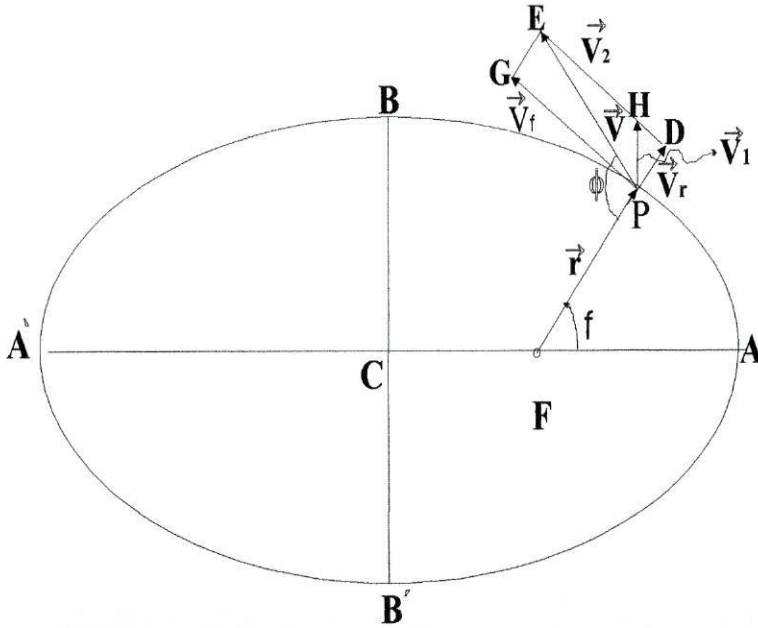
Assim, uma vez que  $a$  é sempre o mesmo para qualquer uma das órbitas, então os períodos destas órbitas deverão ser iguais.

Note-se que as órbitas são diferentes na forma e podem não estar no mesmo plano.

Como já foi referido, o vector velocidade de um corpo pode ser decomposto segundo duas componentes: uma com a direcção perpendicular ao vector posição,  $\vec{V}_f$ , e outra

com a mesma direcção do vector posição  $\vec{V}_r$ .

Mas, por vezes, é útil decompor o vector velocidade de um corpo segundo outras duas componentes, ambas constantes em magnitude. Uma com a direcção perpendicular ao eixo maior,  $\vec{V}_1$ , direcção esta que é sempre constante, e outra com a direcção perpendicular ao vector posição  $\vec{V}_2$ , que irá variar consoante a posição do corpo na sua trajectória.



**Figura 2.13:** Decomposição de  $\vec{V}$  segundo a direcção perpendicular ao eixo maior e a direcção perpendicular ao vector posição.

Na figura 2.13 é representado o vector velocidade decomposto segundo as suas componentes  $\vec{V}_2$  e  $\vec{V}_1$  e segundo as componentes  $\vec{V}_f$  e  $\vec{V}_r$ .

O vector  $\vec{V}$  pode ser escrito como  $\vec{V} = \vec{V}_r + \vec{V}_f$ , sendo  $V_r = \frac{dr}{dt}$  e  $V_f = r \frac{df}{dt}$

Reparemos que:

$$\overrightarrow{DH} + \overrightarrow{HE} = \overrightarrow{DE}$$

Mas  $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{PG}$

Portanto:

$$\overrightarrow{DH} + \overrightarrow{HE} = \overrightarrow{PG} \Leftrightarrow \overrightarrow{HE} = \overrightarrow{PG} - \overrightarrow{DH} \Rightarrow \|\overrightarrow{HE}\| = \|\overrightarrow{PG}\| - \|\overrightarrow{DH}\|, \text{ uma vez que os vectores são colineares.}$$

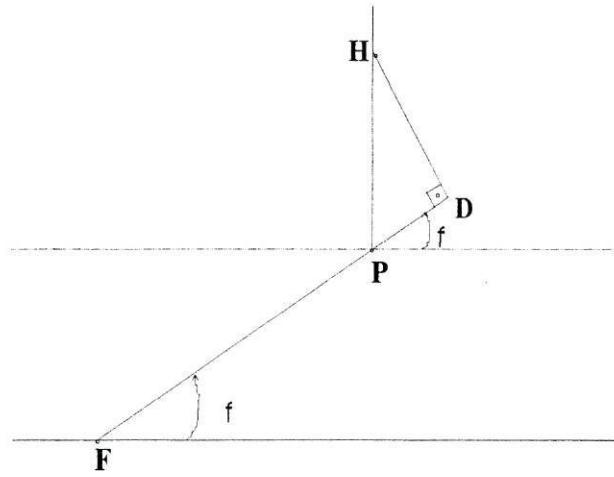


Figura 2.14: Ampliação de parte do gráfico 2.13.

Mas  $\|\vec{PG}\| = V_f = r \frac{df}{dt}$  e  $\|\vec{DH}\| = \overline{DH}$ .

$$D\hat{P}H = \frac{\pi}{2} - f \text{ e } \overline{PD} = V_r = \frac{dr}{dt}$$

Assim:

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - f\right) = \frac{\overline{DH}}{\overline{PD}} \Leftrightarrow \cot f = \frac{\overline{DH}}{dr/dt} \Leftrightarrow \overline{DH} = \frac{dr}{dt} \cot f$$

Logo:

$$\overline{HE} = r \frac{df}{dt} - \frac{dr}{dt} \cot f$$

Usando as equações 2.33 e 2.34, obtém-se:

$$\begin{aligned} \overline{HE} &= \frac{h}{p} (1 + e \cos f) - \frac{h}{p} e \sin f \times \cot f = \frac{h}{p} \left( 1 + e \cos f - e \sin f \frac{\cos f}{\sin f} \right) = \\ &= \overline{HE} = \frac{h}{p} (1 + e \cos f - e \cos f) \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\overline{HE} = \frac{h}{p} \tag{2.39}$$

Em relação ao  $\overline{PH}$ , da figura 2.14, observamos que:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - f\right) = \frac{\overline{PD}}{\overline{PH}} \Leftrightarrow \sin f = \frac{dr/dt}{\overline{PH}} \Leftrightarrow \overline{PH} = \frac{dr/dt}{\sin f} = \frac{dr}{dt} \csc f$$

Usando a equação ( 2.33 ), vem:

$$\overline{PH} = \frac{h}{p} e \sin f \frac{1}{\sin f} \Leftrightarrow$$

$$\overline{PH} = \frac{e h}{p} \quad (2.40)$$

Portanto:

$$\begin{cases} V_1 = \overline{PH} \\ V_2 = \overline{HE} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} V_1 = \frac{e h}{p} \\ V_2 = \frac{h}{p} \end{cases}$$

No caso de uma órbita circular, a excentricidade é nula, isto é,  $e = 0$ . Portanto:

$$\begin{cases} V_1 = 0 \\ V_2 = \frac{h}{p} \end{cases}$$

Apenas a componente segundo a direcção perpendicular ao vector posição é diferente de zero. É a chamada velocidade circular, cuja magnitude se representa por  $V_c$  e é igual a  $\frac{h}{p}$ .

Mas:

$$\frac{h}{p} = \frac{\mu}{h} \Leftrightarrow h^2 = p \mu$$

Usando a equação ( 2.22 ), então:

$$h^2 = \mu a ( 1 - e^2 )$$

Se  $e = 0$ , então  $h^2 = \mu a \Rightarrow h = \sqrt{\mu a}$  e  $p = a$

$$\text{Logo } V_c = \frac{\sqrt{\mu a}}{a} = \sqrt{\frac{\mu}{a}}$$

Isto é:

$$V_c = \frac{\sqrt{\mu}}{a} \quad (2.41)$$

Sendo  $a$  o raio da órbita circular, uma vez que  $F \equiv C$ .

### 2.3.7 Posição de um corpo na órbita:

Até agora foram estabelecidas algumas relações importantes para o estudo da dinâmica do movimento orbital.

Vejam agora, como posicionar o planeta na sua órbita para um dado instante. Para tal, é necessário conhecermos o vector posição em função do tempo.

Vimos que a equação da órbita é dada por :

$$r = \frac{p}{1 + e \cos f} , \text{ com } p = a(1 - e^2)$$

A variável nesta equação é um ângulo,  $f$ , medido a partir do pericentro.

Pela segunda Lei de Kepler, verifica-se que  $f$  não varia sempre na mesma proporção com o tempo. Assim, é necessário saber algo mais, antes de se determinar o vector posição como função do tempo.

#### 2.3.7.1 Anomalias verdadeira, excentrica e média :

Na determinação da variação da anomalia verdadeira com o tempo, vamos introduzir duas novas anomalias, a média e a excentrica.

A anomalia média representa o ângulo associado à posição do corpo relativamente ao pericentro, supondo que na sua trajectória elíptica o corpo tem um movimento uniforme, ou seja, a anomalia média aumenta de forma linear com o tempo ( velocidade angular constante ).

Consideremos portanto um corpo  $P$  descrevendo um movimento uniforme numa órbita elíptica em torno de  $F$ .

Vamos supor que uma volta completa (  $2\pi$  radianos ) é completada num período orbital  $T$ .

Assim, a velocidade angular,  $\eta$ , é dada por:

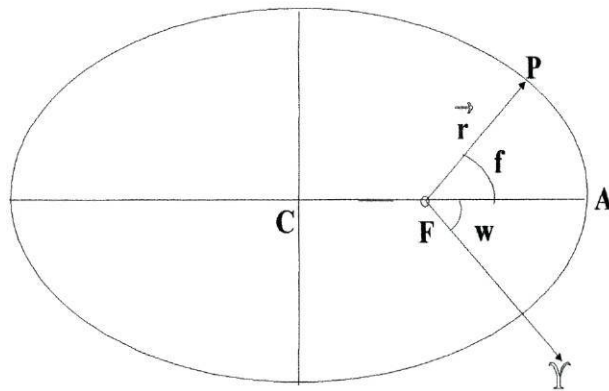
$$\eta = \frac{2\pi}{T} \quad (2.42)$$

Mas, pela lei das áreas, vimos que  $\frac{2\pi a^2 (1 - e^2)^{\frac{1}{2}}}{T} = h \Leftrightarrow T = \frac{2\pi a^2 \sqrt{1 - e^2}}{h}$

Substituindo esta relação na equação 2.42, obtém-se:

$$\eta = \frac{h}{a^2 \sqrt{1 - e^2}} \quad (2.43)$$

A contagem do tempo inicia-se quando o corpo se encontra no eixo  $\Upsilon$ . O intervalo até  $P$  passar pelo pericentro é representado por  $\tau$ .



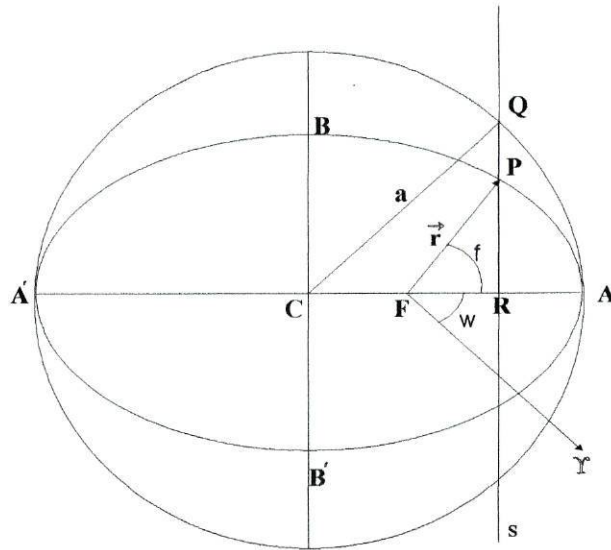
**Figura 2.15:** A contagem do tempo de um corpo  $P$  na sua órbita, inicia-se quando o corpo se encontra no eixo  $\Upsilon$ .

Considerando  $\tau$  o tempo de passagem no pericentro (figura 2.15), o ângulo varrido pelo vector posição que roda em torno do foco  $F$ , com velocidade angular média,  $\eta$ , no intervalo  $t - \tau$  é dado por:

$$M = \eta (t - \tau) \quad (2.44)$$

O ângulo  $M$  assim definido é designado por *anomalia média*. Notemos que nesse intervalo de tempo o vector posição varreu, na realidade, o ângulo  $f$ , anomalia verdadeira.

Para introduzir a anomalia excentrica, consideremos uma circunferência de diâmetro  $[A A']$ , concêntrica com a elipse anterior, como se mostra na figura 2.16. Nessa figura foi traçada a recta  $s$  que contém  $P$  e é perpendicular ao eixo maior da elipse  $[A A']$ .



**Figura 2.16:** Definição de anomalia excentrica,  $E$ .

Esta recta  $s$  intersecta o eixo maior  $[A A']$  no ponto  $R$  e a circunferência no ponto  $Q$ . Ao ângulo  $\widehat{ACQ}$ , normalmente representado por  $E$ , é designado por *anomalia excentrica*.

As três anomalias são geralmente diferentes, sendo iguais apenas em dois pontos da órbita elíptica, no apocentro e pericentro ( $0$  e  $\pi$  radianos). Contudo, elas estão relacionadas, e é essa relação que permite obter a variação da anomalia verdadeira com o tempo.

### 2.3.7.2 Relação entre as anomalias verdadeira, excentrica e média :

- **Relação entre as anomalias verdadeira e excentrica**

Na determinação da relação entre as anomalias verdadeira e excentrica vamos retomar a figura 2.16.

Considerarmos os vectores  $\vec{i}$  e  $\vec{j}$ , paralelos aos eixos maior e menor da elipse, respectivamente. Podemos escrever o vector posição como:

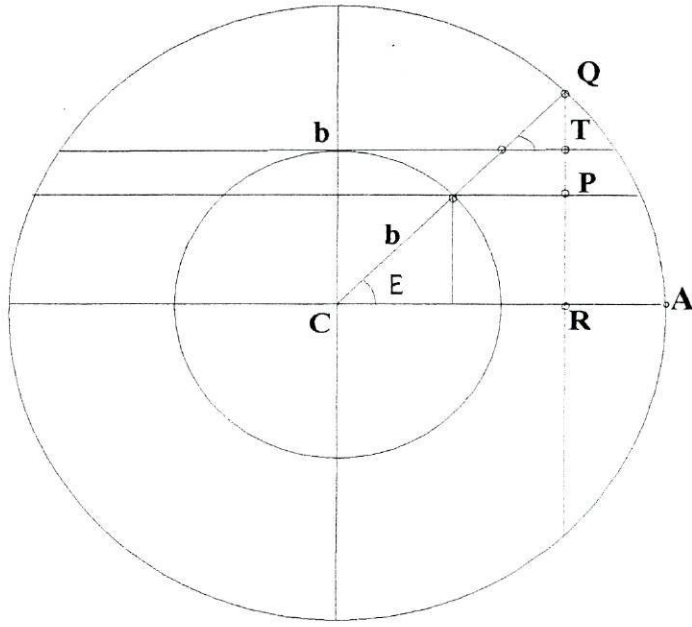


Figura 2.17: Figura ilustrativa de uma propriedade da elipse.

$$\vec{r} = \overline{FR} \vec{i} + \overline{RP} \vec{j},$$

sendo  $\overline{FR} = r \cos f$  e  $\overline{RP} = r \sin f$ .

Mas, por outro lado,

$$\overline{FR} = \overline{CR} - \overline{CF} = a \cos E - a e = a (\cos E - e)$$

e por uma propriedade das elipses ( figura 2.17 )

$$\overline{RP} = b \sin E$$

Pelo que:

$$\begin{cases} r \cos f = a (\cos E - e) \\ r \sin f = b \sin E \end{cases}$$

$$\text{Ou seja } \vec{r} = [a (\cos E - e)] \vec{i} + (b \sin E) \vec{j}.$$

Então:

$$r^2 = \|\vec{r}\|^2 = [a (\cos E - e)]^2 + (b \sin E)^2 =$$

$$\begin{aligned}
&= a^2 (\cos^2 E + e^2 - 2e \cos E) + b^2 \sin^2 E = \\
&= a^2 \cos^2 E + a^2 e^2 - 2a^2 e \cos E + b^2 \sin^2 E
\end{aligned}$$

Mas  $b^2 = a^2 - (ae)^2 = a^2(1 - e^2)$

Assim:

$$r^2 = a^2 (\cos^2 E + e^2 - 2e^2 \cos E + \sin^2 E - e^2 \sin^2 E)$$

Como  $\cos^2 E + \sin^2 E = 1$

$$\begin{aligned}
r^2 &= a^2 (1 + e^2 - 2e^2 \cos E - e^2 \sin^2 E) = a^2 [1 - 2e^2 \cos E + e^2 (1 - \sin^2 E)] = \\
&= a^2 (1 + e^2 \cos^2 E - 2e^2 \cos E) = a^2 (1 - e \cos E)^2 \Leftrightarrow
\end{aligned}$$

$$r = a(1 - e \cos E) \tag{2.45}$$

Mas  $\cos f$  pode ser expresso em função de  $\sin^2 \frac{f}{2}$  ou de  $\cos^2 \frac{f}{2}$

▷ Exprimindo  $\cos f$  em função de  $\sin^2 \frac{f}{2}$ :

$$\cos f = 1 - 2 \sin^2 \frac{f}{2}$$

Assim:

$$r \cos f = r \left( 1 - 2 \sin^2 \frac{f}{2} \right) = r - 2r \sin^2 \frac{f}{2}$$

Ou seja:

$$2r \sin^2 \frac{f}{2} = r - r \cos f$$

Usando a equação 2.45 e a relação  $r \cos f = a(\cos E - e)$ , obtém-se:

$$\begin{aligned}
2r \sin^2 \frac{f}{2} &= a(1 - e \cos E) - a(\cos E - e) = a(1 - e \cos E - \cos E + e) = \\
&= a[(1 + e) - (1 + e) \cos E] = a(1 + e)(1 - \cos E)
\end{aligned}$$

Mas  $1 - \cos E = 2 \sin^2 \frac{E}{2}$

Assim:

$$2r \sin^2 \frac{f}{2} = a(1+e) 2 \sin^2 \frac{E}{2} \quad (2.46)$$

▷ Expressando  $\cos f$  em função de  $\cos^2 \frac{f}{2}$ ,

$$\cos f = 2 \cos^2 \frac{f}{2} - 1$$

Assim:

$$r \cos f = 2r \cos^2 \frac{f}{2} - r$$

Pelo que:

$$\begin{aligned} 2r \cos^2 \frac{f}{2} &= r \cos f + r = a(\cos E - e) + a(1 - e \cos E) \\ &= a[(1 - e) + (1 - e) \cos E] = \\ &= a(1 - e)(1 + \cos E) = \\ &= a(1 - e) \left(1 + 2 \cos^2 \frac{E}{2} - 1\right) = \\ &= a(1 - e) 2 \cos^2 \frac{E}{2} \end{aligned}$$

Assim:

$$2r \cos^2 \frac{f}{2} = a(1 - e) 2 \cos^2 \frac{E}{2} \quad (2.47)$$

Dividindo membro a membro as equações 2.46 e 2.47, obtém-se:

$$\frac{2r \sin^2 \frac{f}{2}}{2r \cos^2 \frac{f}{2}} = \frac{a(1+e) 2 \sin^2 \frac{E}{2}}{a(1-e) 2 \cos^2 \frac{E}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\tan^2 \frac{f}{2} = \frac{1+e}{1-e} \tan^2 \frac{E}{2}$$

Como  $\tan \frac{f}{2}$  tem o mesmo sinal que  $\tan \frac{E}{2}$ , então:

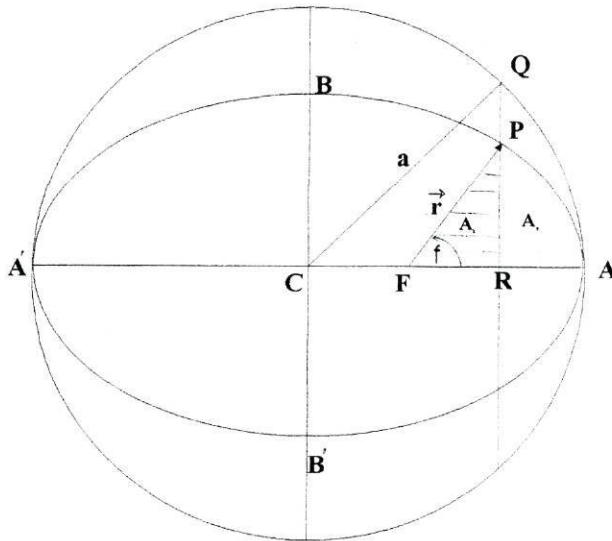
$$\tan \frac{f}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2} \quad (2.48)$$

Obtém-se assim a relação entre as anomalias verdadeira e excentrica.

- **Relação entre as anomalias excentrica e média**

Uma equação muito importante, chamada de *Equação de Kepler*, relaciona estas duas anomalias. Vamos, pois, deduzi-la.

Observemos a figura 2.18:



**Figura 2.18:** A área varrida pelo vector posição de um corpo  $P$ , na sua órbita elíptica, durante o intervalo  $t - \tau$  é  $A_t = A_1 + A_2$ .

Representemos por  $A_t$  a área a tracejado.

Pela segunda lei de Kepler, o vector posição varre áreas iguais em intervalos de tempo iguais, logo verifica-se a seguinte igualdade:

$$\frac{A_t}{\text{Area da elipse}} = \frac{t - \tau}{T} \quad \text{sendo } T \text{ o período orbital}$$

$$\text{Então } A_t = \frac{t - \tau}{T} \times \text{Area da elipse}$$

Como a Área da elipse é  $\pi ab$  vem:

$$A_t = \frac{t - \tau}{T} \pi ab$$

$$\text{Mas } \frac{M}{2} = \frac{\pi (t - \tau)}{T}$$

Pelo que:

$$A_t = \frac{M}{2} ab \quad (2.49)$$

Podemos escrever  $A_t$  em função da área  $[FPR]$ ,  $A_1$ , e da área  $[RPA]$ ,  $A_2$ , como se ilustra na figura 2.18.

$$A_t = A_1 + A_2$$

$$A_1 = A_{[FPR]} = \frac{\overline{PR} \times \overline{FR}}{2} = \frac{r^2 \sin f \cos f}{2}$$

$$\begin{aligned} A_2 = A_{[PRA]} &= \frac{b}{a} A_{[RQA]} = \frac{b}{a} (A_{[CQA]} - A_{[CQR]}) = \frac{b}{a} \left( \frac{E a^2}{2} - \frac{a^2 \sin E \cos E}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{2} ab (E - \sin E \cos E) \end{aligned}$$

$$\text{Assim, } A_t = \frac{1}{2} r^2 \sin f \cos f + \frac{1}{2} ab (E - \sin E \cos E)$$

Mas:

$$\begin{cases} r \cos f = a (\cos E - e) \\ r \sin f = b \sin E \end{cases}$$

Então, substituindo na relação anterior:

$$\begin{aligned} A_t &= \frac{1}{2} ab \sin E (\cos E - e) + \frac{1}{2} ab (E - \sin E \cos E) = \\ &= \frac{1}{2} ab (\sin E \cos E - e \sin E + E - \sin E \cos E) = \frac{1}{2} ab (E - e \sin E) \end{aligned}$$

Logo:

$$\frac{1}{2} ab M = \frac{1}{2} ab (E - e \sin E) \Leftrightarrow$$

$$M = E - e \sin E \quad (2.50)$$

É a chamada *Equação de Kepler*, onde  $M = \frac{2\pi}{T} (t - \tau)$  e estabelece a relação entre a anomalia média e a excêntrica.

A relação entre as anomalias verdadeira e média é obtida usando as duas relações deduzidas anteriormente.

As três anomalias,  $f$ ,  $E$  e  $M$ , são iguais no caso de órbitas circulares, conforme as equações 2.48 e 2.50 tomando  $e = 0$ .

A forma como se processa a determinação da variação da anomalia verdadeira com o tempo é a seguinte:

Conhecido o período orbital,  $T$ , e o tempo que decorre desde a passagem no periélio,  $t - \tau$ , pela relação  $M = \frac{2\pi}{T} (t - \tau)$  determinamos  $M$ . A equação de Kepler, equação 2.50, permite determinar o valor de  $E$  quando conhecida a excentricidade da órbita.

Finalmente, o vector posição é dado por:

$$\vec{r} = a (\cos E - e) \vec{i} + b \sin E \vec{j}$$

Como as componentes de  $\vec{r}$  em função da anomalia verdadeira são  $r \cos f$  e  $r \sin f$ , vem que:

$$\cos f = \frac{a (\cos E - e)}{r} = \frac{a (\cos E - e)}{a (1 - e \cos E)} = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E} \quad (2.51)$$

$$\sin f = \frac{b \sin E}{r} = \frac{\sin (a \sqrt{1 - e^2})}{a (1 - e \cos E)} = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin E}{1 - e \cos E} \quad (2.52)$$

Estas relações permitem conhecer a anomalia verdadeira,  $f$ .

Agora já sabemos a posição no plano orbital. Mas nós podemos normalmente transformar estes resultados para outro sistema de referencia. Por exemplo, podemos estar interessados em conhecer a longitude e a latitude eclíptica, que mais tarde poderá ser usado para encontrar a ascensão recta e a declinação. Estas transformações estão na alçada da Astronomia Esférica.

## 2.4 Órbita Parabólica

### 2.4.1 Caracterização da parábola:

Em termos matemáticos pode-se definir a parábola como o conjunto de pontos do plano cuja distância a um ponto fixo - o foco - é igual à distância a uma recta que não contém esse ponto - a directriz ( figura 2.19 ).

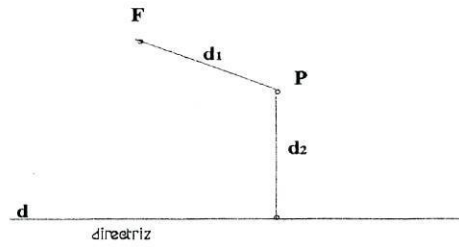


Figura 2.19: Um ponto  $P$  pertence à Parábola  $\mathcal{P}$  se e só se  $d_1 = d_2$ .

Em coordenadas cartesianas, a equação de uma parábola é:

$$y^2 = 2p x$$

e em coordenadas polares é:

$$r = \frac{p}{1 + \cos f} \quad (2.53)$$

sendo  $p$  o parâmetro da parábola e  $f$  a anomalia verdadeira.

Pode-se caracterizar a parábola como se ilustra na figura 2.20 através dos seguintes elementos:

- O foco, representado pelo ponto  $F$
- O vértice, representado pelo ponto  $A$
- A excentricidade,  $e = \frac{\overline{FP}}{\overline{PM}} = 1$
- O parâmetro da parábola,  $p$

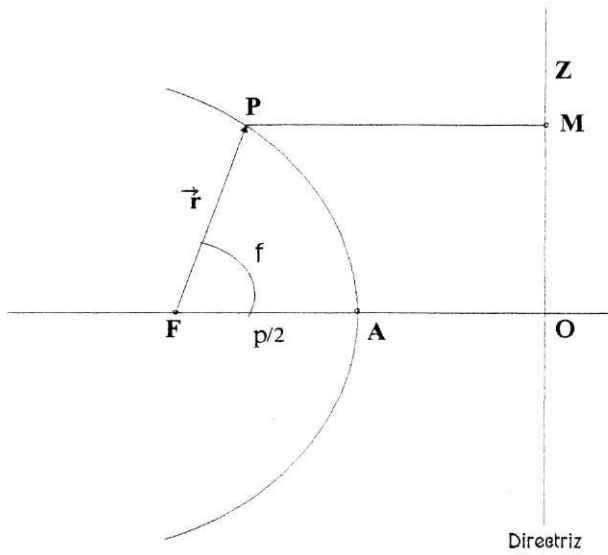


Figura 2.20: Os elementos que caracterizam uma parábola.

- A directriz, dada pela recta  $MO$

Quando o corpo  $P$  está situado no pericentro, isto é, quando  $f = 0$  então  $r = \frac{p}{2}$ . Ou seja, o parâmetro da parábola é o dobro da distância ao pericentro.

### 2.4.2 Velocidade numa órbita parabólica:

Como já foi referido, o vector velocidade de um corpo na sua órbita,  $\vec{V}$ , pode ser decomposto segundo duas componentes: uma com a direcção do vector posição e outra com a direcção perpendicular a este, como se ilustra na figura 2.21. Deste modo:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt} \vec{e}_r + r \frac{df}{dt} \vec{e}_f$$

Sendo o quadrado da velocidade escalar,  $V^2$ , dada por ( ver nota em apêndice ):

$$V^2 = \frac{h^2}{p^2} ( 1 + e^2 + 2e \cos f )$$

Numa órbita parabólica, a excentricidade é igual à unidade, isto é,  $e = 1$ , pelo que a equação anterior vem:

$$V^2 = 2 \frac{h^2}{p^2} ( 1 + \cos f ) =$$

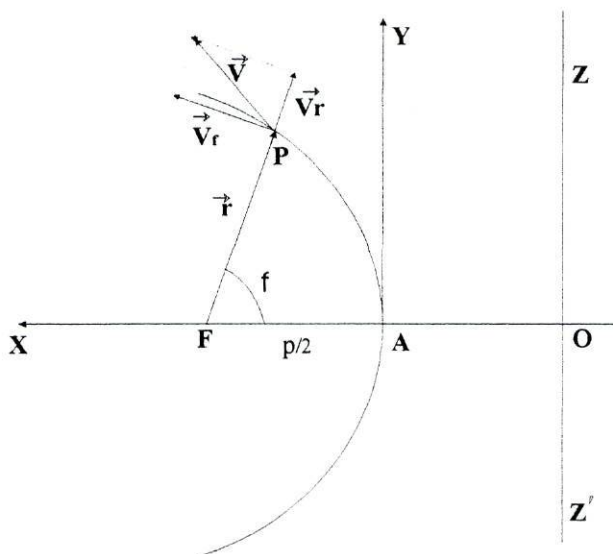


Figura 2.21: Velocidade numa órbita parabólica.

$$= 2 \frac{h^2}{p} \frac{1}{r} = \frac{2\mu}{r}$$

Ou seja:

$$V^2 = \frac{2\mu}{r} \quad (2.54)$$

sendo  $\mu = G(M + m)$

Se o corpo se mover numa órbita circular, de raio  $a$ , a sua velocidade será  $V_c^2 = \frac{\mu}{a}$ .

Mas caso o corpo se mova suficientemente rápido, ele poderá escapar ao campo gravitacional do corpo central, situado em  $F$ . ( Para se ser mais exacto, o campo estende-se até ao infinito, pelo que, na realidade, o corpo nunca escapa! ).

Se o corpo tiver uma velocidade mínima que o permita escapar, ele deverá perder a sua velocidade no infinito. A sua energia cinética será nula, pois  $V = 0$ , bem como a sua energia potencial, uma vez que a distância  $r$  é infinita. A distâncias infinitas, a energia total  $E$  é nula. Pela lei de conservação de energia, tem-se então:

$$\frac{1}{2} V^2 - \frac{\mu}{a} = 0$$

sendo  $a$  a distância inicial do corpo que se move com uma velocidade  $V$ .

A partir desta relação podemos deduzir a chamada velocidade de escape,  $V_{esc}$ :

$$V_{esc}^2 = \frac{2\mu}{a}$$

Se compararmos a velocidade de escape,  $V_{esc}$ , com a velocidade circular,  $V_c$ , verifica-se que:

$$V_{esc} = \sqrt{2} V_c$$

Por exemplo, a órbita da Terra é praticamente esférica e a velocidade orbital é  $V_c = 30 \text{ km/s}$ . Mas, para escapar à força gravitacional do Sol, uma nave espacial partindo de uma órbita terrestre necessita de uma velocidade  $V_{esc} \sim 42 \text{ km/s}$ . Se a nave espacial está inicialmente a orbitar a Terra, teremos de lhe dar um incremento à velocidade para que esta atinja os cerca de  $42 \text{ km/s}$  e escape da Terra, entrando em órbita parabólica.

### 2.4.3 Posição na órbita parabólica:

Para sabermos qual a posição de um corpo na sua órbita, necessitamos de saber como varia a anomalia verdadeira em função do tempo.

Como já vimos, a distância de um corpo na sua órbita ao corpo central é dada por:

$$r = \frac{p}{1 + \cos f}$$

sendo  $p$  o parâmetro da parábola.

Da trigonometria, sabemos que:

$$\cos f = \cos \left( 2 \frac{f}{2} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \cos^2 \frac{f}{2} - \sin^2 \frac{f}{2} = \\
&= 2 \cos^2 \frac{f}{2} - 1
\end{aligned}$$

Então, a condição anterior pode ser escrita como:

$$r = \frac{p}{2 \cos^2 \frac{f}{2}}$$

Mas:

$$1 + \tan^2 \frac{f}{2} = \frac{1}{\cos^2 \frac{f}{2}}$$

Pelo que:

$$r = \frac{p}{2} \left( 1 + \tan^2 \frac{f}{2} \right)$$

Como  $r^2 \frac{df}{dt} = h$  e  $h = \sqrt{p \mu}$

Então:

$$\left( \frac{p}{2} \right)^2 \frac{1}{\cos^4 \frac{f}{2}} \frac{df}{dt} = \sqrt{p \mu} \Leftrightarrow$$

$$\frac{p^2}{4} \left( \frac{1}{\cos^2 \frac{f}{2}} + \frac{\tan^2 \frac{f}{2}}{\cos^2 \frac{f}{2}} \right) \frac{df}{dt} = \sqrt{p \mu} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\cos^4 \frac{f}{2}} \frac{df}{dt} = 4 \sqrt{\frac{\mu}{p^3}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\cos^4 \frac{f}{2}} df = 4 \sqrt{\frac{\mu}{p^3}} dt \tag{2.55}$$

Se dividirmos por  $\cos^2 \frac{f}{2}$  ambos os membros da condição seguinte:

$$1 + \tan^2 \frac{f}{2} = \frac{1}{\cos^2 \frac{f}{2}}$$

obtemos:

$$\frac{1}{\cos^4 \frac{f}{2}} = \frac{1}{\cos^2 \frac{f}{2}} + \frac{\tan^2 \frac{f}{2}}{\cos^2 \frac{f}{2}}$$

Então, substituindo esta relação na equação ( 2.55 ), obtém-se:

$$\left( \frac{1}{\cos^2 \frac{f}{2}} + \frac{\tan^2 \frac{f}{2}}{\cos^2 \frac{f}{2}} \right) df = 4 \sqrt{\frac{\mu}{p^3}} dt \Leftrightarrow$$

Dividindo ambos os membros por 2 e integrando entre  $\tau$  e  $t$ , intervalo de tempo contado a partir da passagem do ponto  $P$  no pericentro, tem-se:

$$\int_0^f \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\cos^2 \frac{f}{2}} + \frac{\tan^2 \frac{f}{2}}{\cos^2 \frac{f}{2}} \right) df = \int_{\tau}^t 2 \sqrt{\frac{\mu}{p^3}} dt$$

Cuja solução é:

$$\tan \frac{f}{2} + \frac{1}{3} \tan^3 \frac{f}{2} = 2 \sqrt{\frac{\mu}{p^3}} (t - \tau) \quad (2.56)$$

Sendo  $\tau$  o tempo de passagem no periélio.

A equação 2.56 é chamada de Equação de Barker e permite calcular a anomalia verdadeira,  $f$  em função do tempo decorrido desde a passagem no pericentro. No caso da órbita parabólica, há uma relação directa entre a posição do corpo e o tempo.

Dados os elementos da órbita parabólica,  $p$  e  $\tau$ , com  $\mu$  e  $t$  conhecidos, determina-se  $f$  pela equação 2.56. Conhecido  $f$  determina-se  $r$  pela equação 2.53 e  $V$

pela equação 2.54.

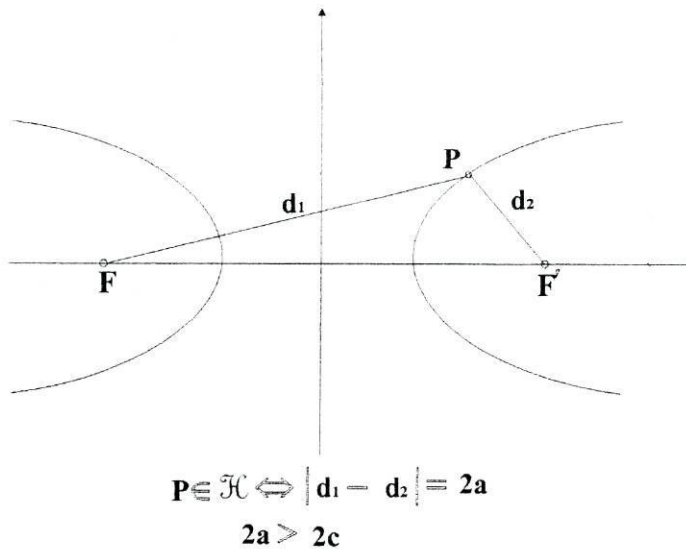
O problema inverso pode também ocorrer. Supondo que num dado instante  $t$  se conhece a posição  $\vec{r}$  e a velocidade  $V$  do corpo, se  $\mu$  for também conhecido é possível determinar os elementos da órbita parabólica. Esta questão será tratada mais à frente.

## 2.5 Órbita Hiperbólica

Na Astronomia o uso de órbitas hiperbólicas está confinado aos casos de alguns cometas e meteoros.

### 2.5.1 Caracterização da hipérbole:

Matematicamente, hipérbole é o conjunto dos pontos do plano cujo módulo da diferença das distâncias de um ponto qualquer a dois pontos fixos - os focos - é constante e maior que a distância entre eles ( figura 2.22 ).



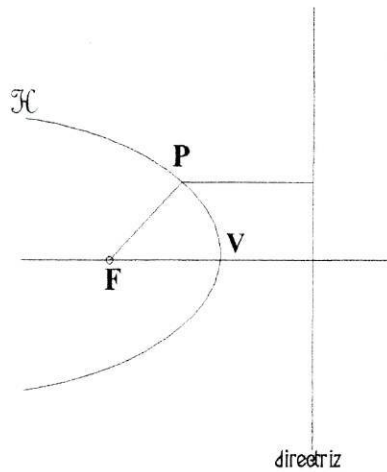
**Figura 2.22:** Um ponto  $P$  pertence à Hipérbole  $\mathcal{H}$  se e só se  $|d_1 - d_2| = 2a \wedge 2a > 2c$  sendo  $2c$  a distância focal, isto é, a distância entre os focos.

Podemos também definir hipérbole como sendo o conjunto dos pontos do plano cujo quociente entre a distância a um ponto fixo - foco - e a uma recta que não contém esse ponto - directriz - é constante ( maior que a unidade ) - figura 2.23.

Uma hipérbole pode ser caracterizada pelos seguintes elementos ( figura 2.24 ):

- Os focos, representados pelos pontos  $F$  e  $F'$ .
- A directriz, representada pela recta  $MZ$
- O centro, representado pelo ponto  $C$ .

- Os vértices, representados pelos pontos  $A$  e  $A'$ .
- O eixo transverso, representado pelo segmento  $[AA']$  de comprimento,  $2a$ .
- O eixo não transverso, representado pelo segmento  $[BB']$  de comprimento,  $2b$ .
- A semi-distância focal, ou seja, a distância entre o centro e um dos focos,  $\overline{CF} = c$ .
- A excentricidade, igual ao quociente  $e = \frac{c}{a}$ .



**Figura 2.23:** Definição de hipérbole

Em coordenadas cartesianas, a equação de uma hipérbole é:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (2.57)$$

E em coordenadas polares, a equação de uma hipérbole é:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos f} \quad (2.58)$$

sendo  $p$  o parâmetro da hipérbole e  $f$  a anomalia verdadeira.

Alguns dos elementos da hipérbole estão relacionados.

Para determinarmos a relação entre  $p$ ,  $a$  e  $c$ , consideremos os pontos da hipérbole,  $Q$  e  $Q'$ , tais que  $[QQ']$  é o segmento de recta perpendicular ao eixo

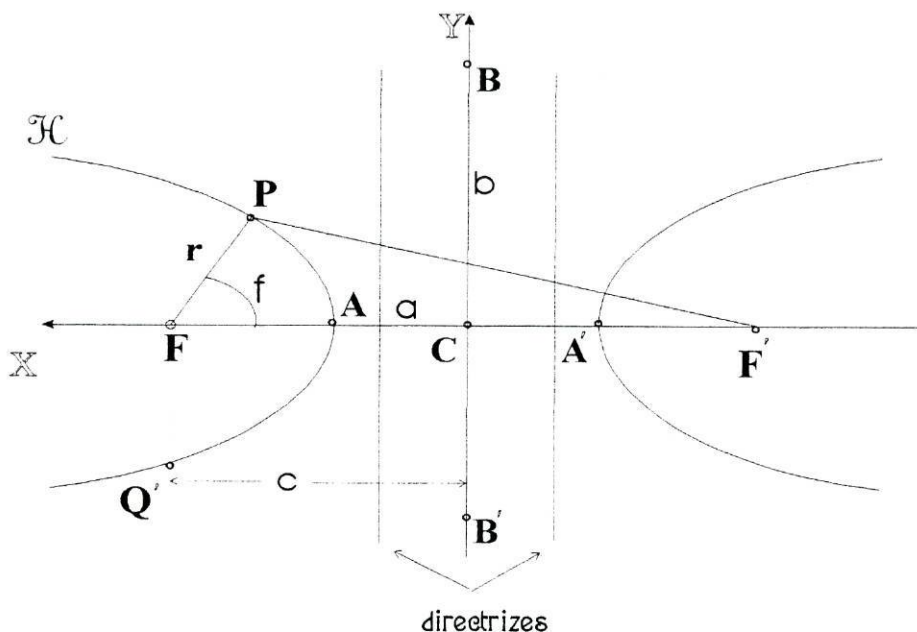


Figura 2.24: Os elementos da hipérbole

maior e que contém o foco  $F$ , como se ilustra na figura 2.25:

Como  $Q \in$  hipérbole então:

$$|\overline{QF} - \overline{QF'}| = 2a \text{ e } \overline{QF} = p \text{ ( notas suplementares S3 )}$$

Da figura 2.26,  $\overline{QF} < \overline{QF'}$ , portanto:

$$\overline{QF'} - \overline{QF} = 2a$$

Considerando o triângulo  $[ FQF' ]$ , retângulo em  $F$ , e aplicando o teorema de Pitágoras, tem-se que:

$$\overline{QF'} = \sqrt{\overline{QF}^2 + \overline{F'F}^2} = \sqrt{p^2 + 4c^2}$$

Então:

$$\begin{aligned} \sqrt{p^2 + 4c^2} - p &= 2a \Leftrightarrow \sqrt{p^2 + 4c^2} = 2a + p \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow p^2 + 4c^2 &= 4a^2 + p^2 + 4ap \Leftrightarrow p = \frac{c^2 - a^2}{a} \end{aligned}$$

Como  $c = ae$ , então:

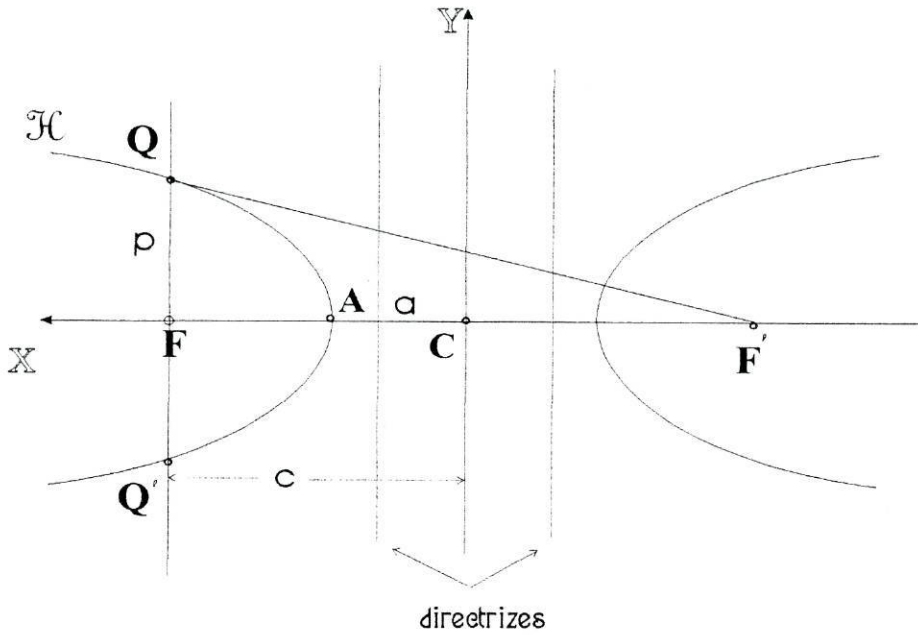


Figura 2.25:  $Q$  pertence à hipérbole se e só se  $|\overline{QF} - \overline{QF'}| = 2a$

$$p = \frac{a^2 (e^2 - 1)}{a}$$

Ou seja:

$$p = a (e^2 - 1) \quad (2.59)$$

Relativamente aos parâmetros  $a$ ,  $b$  e  $c$ , observemos novamente a figura 2.24.

$Q$  é um ponto da hipérbole de coordenadas  $(c, p)$ . Então as suas coordenadas satisfazem à equação ( 2.57 ), isto é:

$$\frac{c^2}{a^2} - \frac{p^2}{b^2} = 1$$

Resolvendo esta equação em ordem a  $b^2$ , tem-se que:

$$b^2 = \frac{a^2 p^2}{c^2 - a^2}$$

Usando a equação ( 2.59 ) e a definição de excentricidade:

$$b^2 = c^2 - a^2$$

Ou seja, numa hipérbole,

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Substituindo ( 2.59 ) na equação ( 2.58 ), obtemos:

$$r = \frac{a ( e^2 - 1 )}{1 + e \cos f}$$

Uma hipérbole tem dois ramos, mas apenas vamos considerar um deles, pois dada uma partícula ela irá percorrer unicamente um dos ramos.

- Quando a anomalia verdadeira é nula, isto é, quando  $f = 0$ , tem-se que;

$$r = \frac{p}{1 + e} = \frac{a ( e^2 - 1 )}{1 + e}$$

ou seja,

$$r = a ( e - 1 ) \quad (2.60)$$

Obtivemos a distância ao pericentro.

- Quando  $r$  tende para infinito, então  $1 + e \cos f$  tende para zero, ou seja, no limite tem-se que:

$$1 + e \cos f = 0 \quad (2.61)$$

Considerando que  $f_o$  é o valor de  $f$  quando  $r$  tende para infinito, tem-se que:

$$1 + e \cos f_o = 0 \Leftrightarrow \cos f_o = -\frac{1}{e}$$

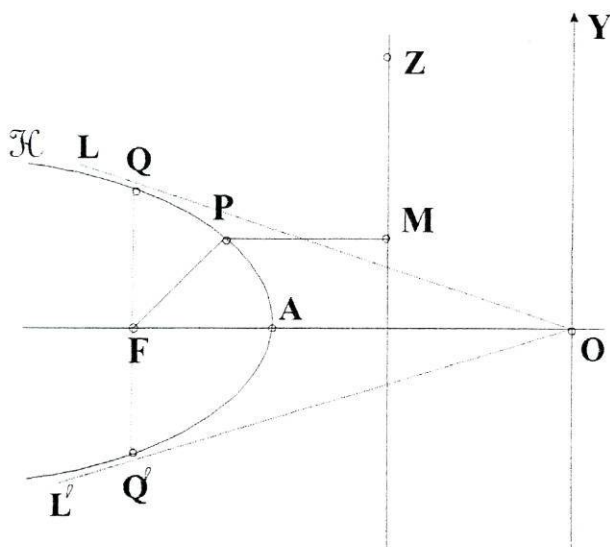
isto é:

$$f_o = \arccos \left( -\frac{1}{e} \right) \quad (2.62)$$

Quer isto dizer que a anomalia verdadeira apenas pode variar entre  $-\pi + \arccos\left(\frac{1}{e}\right)$  e  $\pi - \arccos\left(\frac{1}{e}\right)$ .

Para estes valores limites as rectas  $OL$  e  $OL'$  tendem para as tangentes à hipérbole, ou seja, serão assíntotas à hipérbole ( figura 2.26 ).

Os ângulos  $FOL$  e  $FOL'$  têm magnitudes igual a  $\pi - \arccos\left(\frac{1}{e}\right)$ .



**Figura 2.26:** Para os valores limites da anomalia verdadeira, as rectas  $OL$  e  $OL'$  são assíntotas da hipérbole.

### 2.5.2 Velocidade numa órbita hiperbólica:

No caso hiperbólico, o integral de área é dado por:

$$r^2 \cdot \frac{df}{dt} = h = \sqrt{\mu p} \quad (2.63)$$

e a velocidade  $V$  da partícula é:

$$V^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r \cdot \frac{df}{dt}\right)^2 \quad (2.64)$$

Sendo ( nota em apêndice ):

$$\frac{dr}{dt} = \frac{h}{p} e \sin f \quad (2.65)$$

e

$$r \frac{df}{dt} = \frac{h}{p} (1 + e \cos f) \quad (2.66)$$

Substituindo as equações 2.65 e 2.66 na equação 2.64, obtém-se:

$$= \left( \frac{h}{p} \right)^2 (1 + e^2 + 2e \cos f) =$$

Somando e subtraindo 1:

$$\begin{aligned} &= \left( \frac{h}{p} \right)^2 (1 + e^2 + 2e \cos f + 1 - 1) = \\ &= \left( \frac{h}{p} \right)^2 [2 + 2e \cos f + (e^2 - 1)] = \\ &= \frac{h^2}{p^2} 2(1 + e \cos f) + \left( \frac{h}{p} \right)^2 (e^2 - 1) = \\ &= \frac{2h^2}{p} \frac{1}{r} + \frac{h^2}{p^2} (e^2 - 1) \end{aligned}$$

Mas  $h = \sqrt{\mu p}$ , pelo que:

$$V^2 = \frac{2\mu p}{p} \frac{1}{r} + \frac{\mu p}{p^2} (e^2 - 1) = \frac{2\mu}{r} + \frac{\mu}{p} (e^2 - 1) =$$

Como  $p = a(e^2 - 1)$ :

$$= \frac{2\mu}{r} + \frac{\mu(e^2 - 1)}{a(e^2 - 1)} = \frac{2\mu}{r} + \frac{\mu}{a}$$

Ou seja

$$V^2 = \mu \left( \frac{2}{r} + \frac{1}{a} \right) \quad (2.67)$$

No pericentro,  $r = a(e - 1)$ , pelo que a velocidade é:

$$\begin{aligned} V_p^2 &= \mu \left( \frac{2}{a(e-1)} + \frac{1}{a} \right) = \\ &= \frac{\mu}{a} \frac{2+e-1}{e-1} \end{aligned}$$

Ou seja:

$$V_p^2 = \frac{\mu}{a} \left( \frac{1+e}{e-1} \right) \quad (2.68)$$

Quando  $r$  tende para infinito,  $V^2$  tende para  $\frac{\mu}{a}$ . Isto significa que, quando o corpo tende para o infinito, a sua velocidade tende para uma velocidade não nula.

A velocidade numa órbita hiperbólica pode ser decomposta segundo duas componentes, uma perpendicular ao vector posição  $\frac{h}{p}$ , e outra perpendicular ao eixo dos  $xx$ ,  $\frac{e h}{p}$ . Isto resulta imediatamente do facto de que a equação quer para a órbita elíptica, quer para a órbita parabólica é:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos f}$$

pelo que a análise efectuada na secção relativa à órbita elíptica se mantém.

### 2.5.3 Posição numa órbita hiperbólica:

Consideremos que  $\nu$  é a quantidade definida do seguinte modo:

$$\nu^2 a^3 = \mu \quad (2.69)$$

Da equação 2.58 e 2.59:

$$r = \frac{a(e^2 - 1)}{1 + e \cos f} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r + r e \cos f = a(e^2 - 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r e \cos f = a(e^2 - 1) - r \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos f = \frac{a(e^2 - 1)}{e r} - \frac{1}{e}$$

Derivando a equação em ordem a  $r$ :

$$-\sin f \frac{df}{dr} = \frac{a(e^2 - 1)}{e} \times \left(-\frac{1}{r^2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{df}{dr} = \frac{a(e^2 - 1)}{e r^2} \times \frac{1}{\sin f} \Leftrightarrow$$

Mas:

$$\begin{aligned} \sin f &= \sqrt{1 - \cos^2 f} = \\ &= \frac{\sqrt{e^2 r^2 - [a(e^2 - 1) - r]^2}}{e r} = \\ &= \frac{1}{e r} \sqrt{(e^2 - 1)r^2 + (e^2 - 1)[2ar - a^2(e^2 - 1)]} = \\ &= \frac{1}{e r} \sqrt{(e^2 - 1)[r^2 + 2ar - a^2(e^2 - 1)]} = \\ &= \frac{1}{e r} \sqrt{e^2 - 1} \sqrt{r^2 + 2ar + a^2 - a^2 e^2} = \\ &= \frac{1}{e r} \sqrt{e^2 - 1} \sqrt{(a + r)^2 - a^2 e^2} \end{aligned}$$

Pelo que:

$$\frac{df}{dr} = \frac{a(e^2 - 1)}{e r^2} \times \frac{e r}{\sqrt{e^2 - 1} \sqrt{(a + r)^2 - a^2 e^2}}$$

Ou seja:

$$\frac{df}{dr} = \frac{a \sqrt{e^2 - 1}}{r \sqrt{(a+r)^2 - a^2 e^2}} \quad (2.70)$$

Das equações 2.63 e 2.69, obtem-se:

$$r^2 \frac{df}{dt} = \nu a \sqrt{a p}$$

Assim:

$$\begin{aligned} \frac{df}{dr} &= \frac{df}{dt} \cdot \frac{dt}{dr} = \\ &= \frac{\nu a \sqrt{a p}}{r^2} \cdot \frac{dt}{dr} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \nu \frac{dt}{dr} &= \frac{df}{dr} \frac{r^2}{a \sqrt{a p}} = \\ &= \frac{a \sqrt{e^2 - 1}}{r \sqrt{(a+r)^2 - a^2 e^2}} \frac{r^2}{a \sqrt{a p}} = \\ &= \frac{r \sqrt{e^2 - 1}}{\sqrt{a p} [(a+r)^2 - a^2 e^2]} = \\ &= \frac{r \sqrt{e^2 - 1}}{\sqrt{a p} \sqrt{(a+r)^2 - a^2 e^2}} = \\ &= \frac{r \sqrt{e^2 - 1}}{\sqrt{a^2 (e^2 - 1)} \sqrt{(a+r)^2 - a^2 e^2}} \end{aligned}$$

Ou seja:

$$\nu \frac{dt}{dr} = \frac{r}{a \sqrt{(a+r)^2 - a^2 e^2}} \quad (2.71)$$

Define-se a variável  $F$ , análoga à anomalia excêntrica,  $E$ , na órbita elíptica, através da seguinte relação:

$$r = a ( e \cosh F - 1 ) \quad (2.72)$$

Então:

$$r = a e \cosh F - a \Leftrightarrow \cosh F = \frac{a+r}{a e}$$

$$\text{Mas } \nu \frac{dt}{dF} = \nu \frac{dt}{dr} \frac{dr}{dF}$$

$$\text{Ora, } \frac{dr}{dF} = \frac{d}{dF} [ a ( e \cosh F - 1 ) ] = a e \sinh F$$

Usando a equação 2.71, tem-se:

$$\nu \frac{dt}{dF} = \frac{r}{a \sqrt{(a+r)^2 - a^2 e^2}} a e \sinh F$$

$$\text{Mas } \cosh^2 F - \sinh^2 F = 1 \Leftrightarrow \sinh F = \sqrt{\cosh^2 F - 1} = \sqrt{\frac{(a+r)^2 - a^2 e^2}{a^2 e^2}}$$

Pelo que:

$$\nu \frac{dt}{dF} = \frac{r}{\sqrt{(a+r)^2 - a^2 e^2}} \times e \times \frac{\sqrt{(a+r)^2 - a^2 e^2}}{a e} = \frac{r}{a}$$

$$\nu \frac{dt}{dF} = e \cosh F - 1 \quad (2.73)$$

Integrando a equação ( 2.73 ) obtem-se a relação:

$$e \sinh F - F = M = \nu ( t - \tau ) \quad (2.74)$$

que é análoga à equação de Kepler.

A solução da equação ( 2.74 ) traz-nos problemas semelhantes áqueles que nos surgem na resolução da equação de Kepler no movimento elíptico. O primeiro problema será

o de encontrar um valor aproximado de  $F$ . Existem vários métodos. Um método, por exemplo, consiste em traçar as rectas:

$$y_1 = \frac{M + F}{e} \quad e \quad y_2 = \sinh F$$

e o ponto de intersecção destas rectas fornece-nos um valor aproximado de  $F$  para um dado  $M$ .

Por exemplo, usando as equações ( 2.58 ) e ( 2.72 ), tem-se:

$$\frac{a ( e^2 - 1 )}{1 + e \cos f} = a ( e \cosh F - 1 ) \quad (2.75)$$

$$e \cosh F = 1 + \frac{e^2 - 1}{1 + e \cos f} = \frac{e ( \cos f + e )}{1 + e \cos f} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cosh F = \frac{\cos f + e}{1 + e \cos f}$$

Usando as fórmulas trigonométricas:

$$\cos f = \frac{1 - \tan^2 \left( \frac{f}{2} \right)}{1 + \tan^2 \left( \frac{f}{2} \right)} \quad e \quad \cosh F = \frac{1 + \tanh^2 \left( \frac{F}{2} \right)}{1 - \tanh^2 \left( \frac{F}{2} \right)}$$

tem-se que:

$$\begin{aligned} \frac{1 + \tanh^2 \left( \frac{F}{2} \right)}{1 - \tanh^2 \left( \frac{F}{2} \right)} &= \frac{1 - \tan^2 \left( \frac{f}{2} \right) + e \left[ 1 + \tan^2 \left( \frac{f}{2} \right) \right]}{1 + \tan^2 \left( \frac{f}{2} \right) + e \left[ 1 - \tan^2 \left( \frac{f}{2} \right) \right]} = \\ &= \frac{(1 + e) + (e - 1) \tan^2 \left( \frac{f}{2} \right)}{(1 + e) - (e - 1) \tan^2 \left( \frac{f}{2} \right)} \end{aligned}$$

Isto é:

$$\begin{aligned}
& (1+e) + (1+e) \tanh^2 \left( \frac{F}{2} \right) - (e-1) \tan^2 \left( \frac{f}{2} \right) - (e-1) \tanh^2 \left( \frac{F}{2} \right) \tan^2 \left( \frac{f}{2} \right) = \\
& = (1+e) + (e-1) \tan^2 \left( \frac{f}{2} \right) - (1+e) \tanh^2 \left( \frac{F}{2} \right) - (e-1) \tanh^2 \left( \frac{F}{2} \right) \tan^2 \left( \frac{f}{2} \right) \Leftrightarrow
\end{aligned}$$

Ou seja:

$$2(1+e) \tanh^2 \left( \frac{F}{2} \right) = 2(e-1) \tan^2 \left( \frac{f}{2} \right) \Leftrightarrow$$

$$\tan^2 \left( \frac{f}{2} \right) = \frac{e+1}{e-1} \tanh^2 \left( \frac{F}{2} \right)$$

Como  $\tan \left( \frac{f}{2} \right)$  e  $\tanh \left( \frac{F}{2} \right)$  têm o mesmo sinal,

Tem-se que:

$$\tan \left( \frac{f}{2} \right) = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} \tanh \left( \frac{F}{2} \right) \quad (2.76)$$

Esta equação, 2.76, e as equações 2.58 e 2.67 podem ser usadas para saber qual a posição e velocidade do corpo na sua órbita hiperbólica, em qualquer instante, conhecidos os elementos  $a$ ,  $e$  e  $\tau$ , ou então, para encontrar estes elementos, conhecidas a posição e velocidade do corpo em dado instante.

## 2.6 Órbita no espaço

Até agora não foi considerada a orientação da órbita no espaço. Apenas foram estabelecidas algumas relações importantes para o estudo da dinâmica do movimento orbital.

Vimos anteriormente que o movimento de um corpo em torno de outro é uma secção cónica que permanece sempre num mesmo plano. Para conhecer o movimento é portanto necessário saber qual a orientação do plano no espaço. Dois ângulos são suficientes para orientar o plano da órbita relativamente ao plano de referência, denominados de *inclinação* e *longitude do nodo ascendente*. É contudo necessário um terceiro ângulo, *argumento do periélio*, para conhecer a orientação da cónica no plano ( figura 2.27 ).

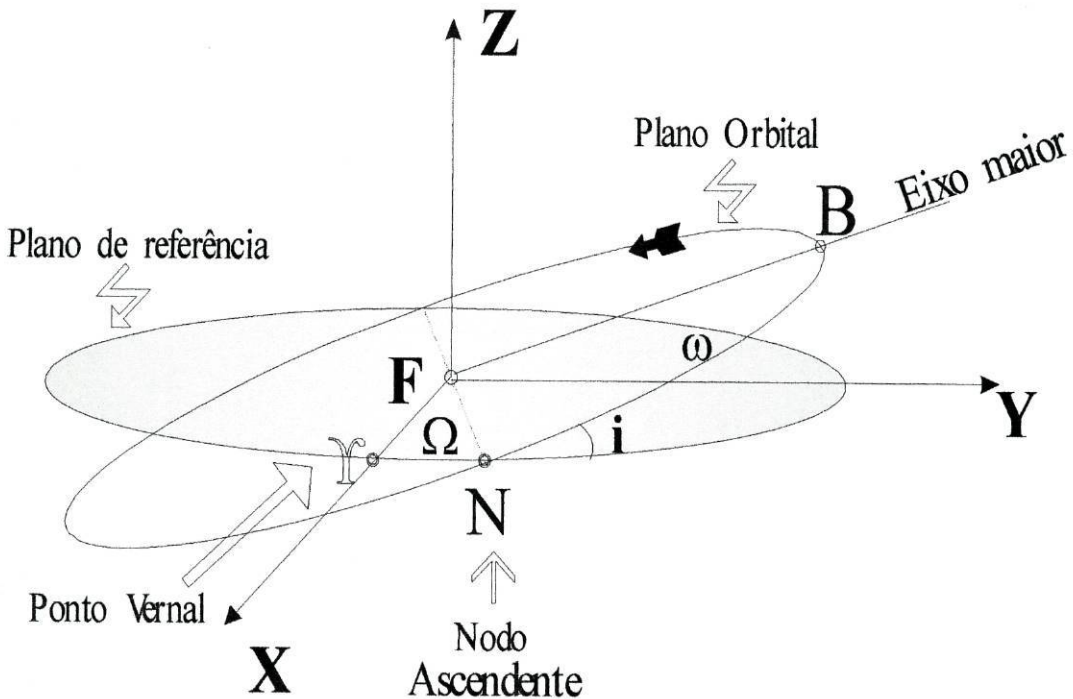


Figura 2.27: A orientação do plano da órbita de um corpo em torno de outro, no espaço, é feita pelos elementos orbitais  $\Omega$ ,  $w$  e  $i$ .

A *inclinação*,  $i$ , dá-nos a obliquidade do plano orbital em relação a um plano de referência. Para corpos no sistema solar, o plano de referência é a Eclíptica, que é o plano no qual a Terra executa o seu movimento em torno do Sol. Os pontos de intersecção da Eclíptica com o plano orbital designam-se por nodos. Quando o corpo

se movimenta de sul para norte o ponto de intersecção chama-se de nodo ascendente e, quando o corpo se movimenta de norte para sul, é o nodo descendente. O ponto onde o Equador Celeste intersecta a Eclíptica é designado por primeiro ponto de Aires ou ponto vernal e representa-se pela letra  $\Upsilon$ .

O ângulo  $\Upsilon FN$  é a *longitude do nodo ascendente*, representado pela letra  $\Omega$ . Este ângulo indica-nos onde um corpo cruza a Eclíptica no seu movimento de sul para norte. ( É medido no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio, desde o equinócio vernal ).

O ângulo  $NFB$  é o *argumento do periélio* e representa-se pela letra  $\omega$ . Dá-nos a direcção do periélio medido desde o nodo ascendente e na direcção do movimento. Muitas vezes, outro ângulo é usado em vez do  $\omega$ . É a *longitude do periélio*,  $\tilde{\omega}$ , que se define como:

$$\tilde{\omega} = \Omega + \omega$$

É um ângulo muito peculiar, uma vez que parte é medido na Eclíptica e outra parte no plano orbital.

Para definirmos, sem qualquer ambiguidade, uma órbita no espaço, necessitamos de um último parâmetro, que define a posição do corpo na sua órbita num dado instante de tempo. É o *tempo de passagem no pericentro*,  $\tau$ .

Em suma, são seis os elementos necessários para definir completamente a órbita no espaço de um corpo em torno de outro. São os chamados *elementos orbitais*.

Os seis elementos orbitais são:

- semi-eixo maior,  $a$
- excentricidade,  $e$
- inclinação,  $i$
- longitude do nodo ascendente,  $\Omega$

- argumento do periélio,  $\omega$
- tempo de passagem no pericentro,  $\tau$

Os dois primeiros elementos definem as dimensões e tipo de órbita, enquanto que os três seguintes definem a orientação da órbita relativamente à eclíptica. O sexto elemento dá-nos um tempo de referência para situar o corpo na sua órbita em qualquer outro instante de tempo.

No caso particular do sistema solar, assumimos que cada corpo ( planeta ) forma um sistema de dois corpos com o outro corpo ( Sol ). Na realidade, os planetas interferem uns com os outros, perturbando as suas órbitas ( como será visto no capítulo III ). Contudo, as suas órbitas não se desviam muito de uma secção cónica e, portanto, podemos usar os elementos orbitais para descrever completamente e sem qualquer ambiguidade, as suas órbitas.

## Capítulo 3

# Problema dos N-Corpos e Perturbações

Newton formulou e resolveu o problema dos dois corpos em que duas partículas massivas se movem em órbitas devido à atracção gravitacional mútua. O seu sucesso foi devido essencialmente a duas felizes circunstâncias. A primeira, é que a atracção gravitacional mútua dos planetas é pequena quando comparada com a força de atracção do Sol em relação a cada planeta, ou seja, devido ao facto de todas as massas planetárias serem relativamente pequenas quando comparadas com a massa solar, acontecendo o mesmo com as massas dos satélites em relação às dos seus primários. A segunda feliz circunstância, é que os diâmetros dos planetas são pequenos quando comparados com as suas distâncias entre si, quer como com as suas distâncias ao Sol. Por tal razão podemos dizer que, numa boa aproximação, a órbita de um planeta em torno do Sol é um problema de dois corpos, entre cada planeta e o Sol.

No entanto, Newton apercebeu-se que a força de atracção dos outros planetas deveria ser tomada em consideração para que se pudesse fazer uma descrição mais rigorosa e precisa da órbita do planeta. Afinal, o problema era um problema de N-corpos e Newton foi o primeiro a formulá-lo.

O problema dos N-corpos pode ser enunciado da seguinte forma:

*Dados, num dado instante, a posição e velocidade de três ou mais corpos massivos, que se movem devido às suas forças de atracção mútua e cujas massas são conhecidas, quais serão as suas posições e velocidades para um outro instante qualquer de tempo, passado ou futuro?*

## 3.1 Problema dos N-Corpos

### 3.1.1 Equações de movimento

A formulação do problema é semelhante à dada anteriormente para o problema dos dois corpos. A grande diferença é que para um número superior a dois corpos não há solução analítica ( exceto no caso restrito do problema dos três corpos em que a massa de um dos corpos é desprezável em relação à massa dos outros dois corpos ).

Consideremos  $N$  corpos de massas conhecidas,  $m_1, m_2, \dots, m_N$ , que se movem por acção das suas forças de atracção mútua.

Supondo que para um dado instante de tempo são conhecidos os vectores de posição e velocidade, vejamos quais serão as posições e velocidade em qualquer outro instante de tempo.

Consideremos num referencial o.n.  $(Oxyz)$  inercial,  $N$  corpos de massas conhecidas,  $m_i$ , situados, num dado instante, nos pontos  $P_i$  com  $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ , respectivamente, como se representa na figura 3.1.

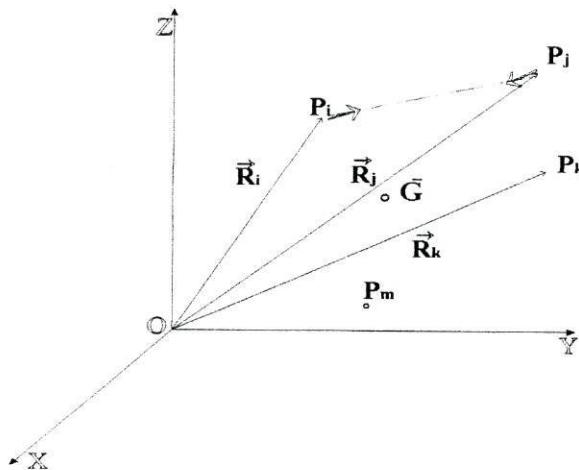


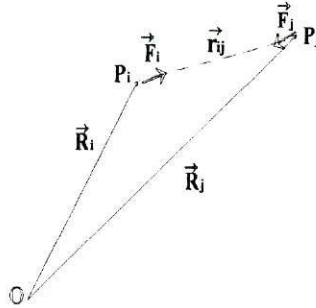
Figura 3.1: Problema dos N-corpos

Sejam  $\vec{R}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  os vectores posição de cada um dos corpos ( $\vec{R}_i = \overrightarrow{OP_i}$ ) e  $\vec{r}_{ij}$  o vector posição do corpo  $j$  relativamente ao corpo  $i$ .

Do cálculo vectorial:

$$\vec{r}_{ij} = \vec{R}_j - \vec{R}_i, \quad j \neq i, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.1)$$

O vector  $\vec{r}_{ij}$  tem a direcção e sentido de  $\overrightarrow{P_i P_j}$  (figura 3.2).



**Figura 3.2:** O vector  $\vec{r}_{ij}$  tem a mesma direcção e o mesmo sentido que o vector  $\overrightarrow{P_i P_j}$

A força exercida sobre o corpo de massa  $m_i$  pelos restantes é:

$$\vec{F}_i = G \sum_{j=1}^N \frac{m_i \cdot m_j}{r_{ij}^3} \vec{r}_{ij}, \quad j \neq i, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.2)$$

Por outro lado, pela terceira Lei de Newton:

$$\vec{F}_i = m_i \frac{d^2 \vec{R}_i}{dt^2} \quad (3.3)$$

Logo,

$$m_i \frac{d^2 \vec{R}_i}{dt^2} = G \sum_{j=1}^N \frac{m_i \cdot m_j}{r_{ij}^3} \vec{F}_{ij}, \quad j \neq i, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.4)$$

O conjunto de equações de 3.4 são as chamadas *Equações de Movimento*, sendo  $G$  a constante de gravitação.

### 3.1.2 As 10 constantes de integração e os seus significados:

Se adicionarmos as equações 3.4 e usarmos o facto de que  $\vec{r}_{ij} = -\vec{r}_{ji}$ , obtém-se:

$$\sum_{i=1}^N m_i \cdot \frac{d^2 \vec{R}_i}{dt^2} = \vec{0} \quad (3.5)$$

Integrando uma vez, obtém-se:

$$\sum_{i=1}^N m_i \cdot \frac{d \vec{R}_i}{dt} = \vec{a} \quad (3.6)$$

E integrando novamente:

$$\sum_{i=1}^N m_i \cdot \vec{R}_i = \vec{a} t + \vec{b} \quad (3.7)$$

sendo  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  vectores constantes.

seja  $\vec{G}$  o centro de massa do sistema, cujo vector posição é  $\vec{R}$ . Por definição:

$$M \vec{R} = \sum_{i=1}^N m_i \cdot \vec{R}_i \quad (3.8)$$

sendo  $\sum_{i=1}^N m_i = M$

Substituindo nas equações ( 3.6 ) e ( 3.7 ), obtém-se:

$$M \vec{R} = \vec{a} t + \vec{b}$$

Ou seja,

$$\vec{R} = \frac{\vec{a} t + \vec{b}}{M} \quad (3.9)$$

e

$$\frac{d \vec{R}}{dt} = \frac{\vec{a}}{M} \quad (3.10)$$

Destas relações podemos observar que o centro de massa do sistema exibe um movimento inercial rectilíneo com velocidade constante.

Se os vectores  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  forem expressos num referencial cartesiano tridimensional e inercial, as equações ( 3.9 ) e ( 3.10 ) fornecem-nos seis constantes de integração:  $a_x$ ,  $a_y$ ,  $a_z$ ,  $b_x$ ,  $b_y$  e  $b_z$ .

Considerando o produto vectorial entre  $\vec{R}_i$  e  $\frac{d^2 \vec{R}_i}{dt^2}$  para cada uma das equações de ( 3.4 ) e depois somando, obtém-se:

$$\sum_{i=1}^N m_i \cdot \vec{R}_i \times \frac{d^2 \vec{R}_i}{dt^2} = G \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3} \vec{R}_i \times \vec{r}_{ij}, \quad i \neq j \quad (3.11)$$

Mas  $\vec{R}_i \times \vec{r}_{ij} = \vec{R}_i \times (\vec{R}_j - \vec{R}_i) =$

Usando as propriedades do produto vectorial ( ver apêndice ):

$$= \vec{R}_i \times \vec{R}_j - \vec{R}_i \times \vec{R}_i = \vec{R}_i \times \vec{R}_j = -\vec{R}_j \times \vec{R}_i$$

pelo que o segundo membro da equação ( 3.11 ) vai ser igual ao vector nulo,  $\vec{0}$ , pois reduz-se a pares de vectores nulos, isto é,

$$G \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3} \vec{R}_i \times \vec{R}_j - G \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3} (-\vec{R}_j \times \vec{R}_i) = \vec{0}, \quad i \neq j$$

Obtendo-se:

$$\sum_{i=1}^N m_i \cdot \vec{R}_i \times \frac{d^2 \vec{R}_i}{dt^2} = \vec{0} \quad (3.12)$$

que é equivalente a:

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^N m_i \vec{R}_i \times \frac{d \vec{R}_i}{dt} \right) = \vec{0}$$

Integrando, obtém-se:

$$\sum_{i=1}^N m_i \cdot \vec{R}_i \times \frac{d \vec{R}_i}{dt} = \vec{C} \quad (3.13)$$

sendo  $\vec{C}$  um vector constante.

A equação ( 3.13 ) diz-nos que a soma dos movimentos do "momenta" ou "momenta angular" das massas do sistema é constante. O vector constante  $\vec{C}$  define um plano chamado de plano invariável de Laplace. Presentemente, no caso do Sistema Solar, tal plano está inclinado cerca de um a meio grau relativamente ao plano da eclíptica e varia entre o plano orbital de Júpiter e de Saturno, os dois planetas mais massivos do sistema solar.

Se a relação ( 3.13 ) for resolvida em relação a um referencial tridimensional cartesiano inercial, (  $O x y z$  ), poder-se-à obter os três seguintes "integrais de área":

$$\sum_{i=1}^N m_i \left( x_i \frac{d y_i}{dt} - y_i \frac{d x_i}{dt} \right) = c_x$$

$$\sum_{i=1}^N m_i \left( y_i \frac{d z_i}{dt} - z_i \frac{d y_i}{dt} \right) = c_y$$

$$\sum_{i=1}^N m_i \left( z_i \frac{d x_i}{dt} - x_i \frac{d z_i}{dt} \right) = c_z$$

sendo  $\vec{C} = c_x \vec{e}_x + c_y \vec{e}_y + c_z \vec{e}_z$  e  $C^2 = c_x^2 + c_y^2 + c_z^2$

Estas condições fornecem-nos mais três constantes de integração,  $c_x$ ,  $c_y$  e  $c_z$ , para além das seis que já tínhamos obtido,  $a_x$ ,  $a_y$ ,  $a_z$ ,  $b_x$ ,  $b_y$  e  $b_z$ .

Assim os somatórios dos momentos angulares das  $N$  massas em relação a cada um dos eixos do referencial são constantes.

A décima constante de integração é obtida considerando o produto escalar de  $\frac{d \vec{R}_i}{dt}$  com a equação ( 3.4 ), para uma massa  $m_i$  e somando, depois, para todas as massas.

Então:

$$\sum_{i=1}^N m_i \frac{d \vec{R}_i}{dt} \cdot \frac{d^2 \vec{R}_i}{dt^2} = G \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3} \frac{d \vec{R}_i}{dt} \cdot \vec{r}_{ij} , \quad i \neq j \quad (3.14)$$

Mas:

$$\frac{d \vec{R}_i}{dt} \cdot \vec{r}_{ij} = \frac{d \vec{R}_i}{dt} \cdot (\vec{R}_j - \vec{R}_i) \quad (3.15)$$

e

$$\frac{d \vec{R}_j}{dt} \cdot \vec{r}_{ji} = \frac{d \vec{R}_j}{dt} \cdot (\vec{R}_i - \vec{R}_j) \quad (3.16)$$

Somando as equações 3.15 e 3.16, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{d \vec{R}_i}{dt} \cdot \vec{r}_{ij} + \frac{d \vec{R}_j}{dt} \cdot \vec{r}_{ji} &= \frac{d \vec{R}_i}{dt} \cdot (\vec{R}_j - \vec{R}_i) + \frac{d \vec{R}_j}{dt} \cdot (\vec{R}_i - \vec{R}_j) = \\ &= \frac{d \vec{R}_i}{dt} \cdot (\vec{R}_j - \vec{R}_i) - \frac{d \vec{R}_j}{dt} \cdot (\vec{R}_j - \vec{R}_i) = \\ &= - \left( \frac{d \vec{R}_j}{dt} - \frac{d \vec{R}_i}{dt} \right) \cdot (\vec{R}_j - \vec{R}_i) \\ &= - \frac{d F_{ij}}{dt} \cdot \vec{r}_{ij} \end{aligned}$$

Como  $\vec{r}_{ij} = \vec{R}_j - \vec{R}_i$ , se integrarmos a equação ( 3.14 ):

$$\sum_{i=1}^N m_i \frac{d \vec{R}_i}{dt} \cdot \frac{d^2 \vec{R}_i}{dt^2} = G \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3} \frac{d \vec{R}_i}{dt} \cdot \vec{r}_{ij} , \quad i \neq j$$

Obtém-se, assim:

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \frac{d \vec{R}_i}{dt} \cdot \frac{d \vec{R}_i}{dt} - \frac{1}{2} G \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{m_i m_j}{r_{ij}} = E , \quad i \neq j \quad (3.17)$$

Se a velocidade da massa  $i$  é  $v_i$ , então:

$$v_i^2 = \frac{d \vec{R}_i}{dt} \cdot \frac{d \vec{R}_i}{dt}$$

Fazendo: 
$$U = \frac{1}{2} G \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{m_i m_j}{r_{ij}}$$

A equação 3.17 vem:

$$T - U = E \tag{3.18}$$

sendo 
$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_i^2$$

$T$  é a energia cinética do sistema, enquanto que  $-U$  é a energia potencial.

A equação 3.18 diz-nos que a energia total do sistema de  $N$  partículas é constante e igual a  $E$ . Contudo, nem a energia cinética nem a energia potencial totais do sistema são constantes. Sistemas com energia total constante são chamados de Sistemas Conservativos.

A energia total  $E$  é a décima constante de integração.

Mais nenhum integral foi descoberto até agora. Com efeito, Bruns e Poincaré provaram que, para além dos integrais de energia, de área e do centro de massa, mais nenhum outro integral, do problema dos N-corpos, existe de forma a dar-nos equações que envolvam apenas funções algébricas ou integrais das coordenadas e velocidades das partículas, válidas para todas as massas e que satisfaçam as equações do movimento.

Em suma, podemos afirmar a partir apenas das dez constantes de integração conhecidas das equações diferenciais e referidas ao centro de massa do sistema, à energia total do sistema e ao seu momento angular, e sem nada dizer acerca das trajectórias individuais das partículas, que:

- ( a ) o centro de massa do sistema tem movimento rectilíneo e uniforme, isto é, move-se segunda uma linha recta com uma velocidade fixa;
- ( b ) a energia total do sistema ( soma das energias cinética e potencial de todas as partículas ) é constante;
- ( c ) o momento angular total do sistema também é constante.

## 3.2 Teoria das perturbações

Como já foi referido, devido à atracção mútua dos planetas ser muito menor que a atracção do Sol sobre eles, as órbitas dos planetas, numa primeira aproximação, são elipses com o Sol a ocupar um dos seus focos. Esta aproximação a um problema dos dois corpos foi o ponto de partida de muitas tentativas para obter teorias do movimento dos planetas.

Os elementos orbitais de um planeta descrevem não só a forma, dimensão e orientação da órbita, como também nos fornecem informações sobre a posição e velocidade do planeta em qualquer instante de tempo. Mas estes elementos variam se a órbita do planeta for perturbada.

Existem dois tipos de perturbações: *periódicas* e *seculares*. Qualquer perturbação que se repita com um dado período de revolução é designada de *perturbação periódica* e é usualmente o resultado de configurações similares dos corpos envolvidos que se repetem. Uma perturbação periódica, de pequeno período, é muitas vezes "limitada" por um comportamento ciclico de período mais longo - *perturbações de período longo*.

Uma *perturbação secular* origina alterações proporcionais no tempo. Por exemplo, o avanço do periélio ou o retrocesso do nodo ascendente de uma órbita planetária. Em muitos casos é difícil distinguir entre perturbações de longo período e perturbações seculares, uma vez que o tempo de observação é pequeno quando comparado com o período longo que se "suspeita".

Através de complicados e tediosos cálculos matemáticos é possível obter expressões analíticas que nos traduzem as alterações nos elementos orbitais. Tais fórmulas são longas expressões de somas de senos e cossenos mais os termos seculares. A parte periódica da fórmula para cada elemento deverá conter centenas de funções trigonométricas do tempo. Os termos seculares não são termos periódicos, mas originam alterações proporcionais ao tempo e ocorrem em todos os elementos, incluindo no semi-eixo maior. Tal expressão analítica, válida para um dado período de tempo, é chamada de *perturbação geral*.

Para fixar ideias, vejamos, por exemplo, o comportamento de um dos elementos

orbitais,  $\omega$ .

$\omega$  pode ser escrito como:

$$\omega = \omega_0 + \lambda t + b \sin t + B \sin \frac{t}{A}$$

sendo  $t$  o tempo e  $\lambda$ ,  $b$ ,  $B$  e  $A$  constantes, com  $A \gg 1$ .

O termo  $\lambda t$  é um termo secular que aumenta com o tempo;  $b \sin t$  é um termo de período curto, uma vez que o argumento  $t$  irá dar origem a uma variação rápida do tipo  $B \sin \frac{t}{A}$  é um termo de período longo, uma vez que o seu argumento,  $\frac{t}{A}$  irá fazer com que o ciclo ocorra muito mais lentamente do que o causado pelo termo de período curto. A quantidade  $\omega_0$  é simplesmente o valor de  $\omega$  quando  $t = 0$ .

A figura 3.3 mostra-nos o comportamento de  $\omega$  no decorrer do tempo.

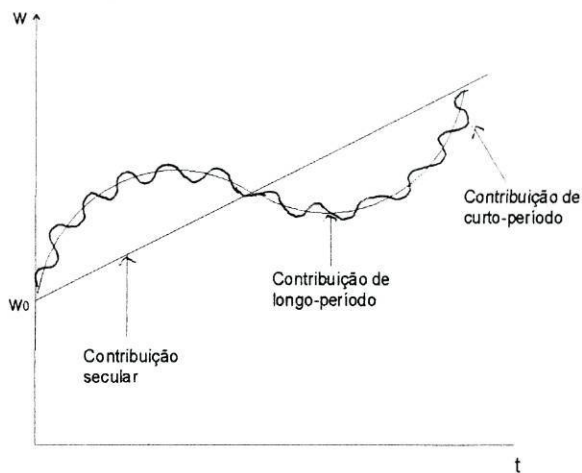


Figura 3.3: Comportamento típico do argumento no periélio,  $w$

É de lembrar que, de facto, existem muitos termos de longo e curto período nas expressões para as alterações de longo-termo nos elementos orbitais planetários.

A *Teoria Geral das Perturbações* é um método para resolver o problema dos N-corpos, que pode também ser aplicado a sistemas de satélites, a asteroides perturbados por Júpiter, o mais massivo dos planetas, e às órbitas dos satélites artificiais. É, de facto, uma poderosa ferramenta na astrodinâmica, uma vez que as expressões analíticas exibem claramente as várias forças em acção.

Uma diferente aproximação do problema dos N-corpos é a *Teoria Especial de Per-*

*turbações*. Esta teoria envolve vários passos de integração numérica das equações diferenciais do movimento, desde a época inicial até à época cujas posições dos corpos se pretendem determinar. Cada passo de integração numérica consiste no cálculo das posições, velocidades e da força gravitacional de atracção mútua dos corpos, em diferentes instantes,  $t_1$  e  $t_2$ , sendo  $t_2 - t_1$  um intervalo de tempo pequeno, de algumas horas ou de alguns dias, dependendo do problema. As novas posições fornecem-nos novos valores da força de atracção mútua gravitacional, pelo que é necessário repetir tudo para um outro instante  $t_3$ .

A maior vantagem deste método é que ele pode ser aplicado a qualquer problema que envolva um número qualquer de corpos. Nos nossos dias, quer na mecânica celeste, quer na astrodinâmica, a Teoria Especial de Perturbações é aplicada a todo o tipo de problemas. Em astrodinâmica, em particular, a solução que se pretende requer períodos de tempo relativamente curtos, que só os computadores de alta velocidade, com programas devidamente adequados, nos podem dar a resposta.

A maior desvantagem deste método é que raramente nos dá uma fórmula geral. É necessário calcular a posição dos corpos em todos os passos intermédios para chegar à configuração final. Outra desvantagem é a acumulação de erros de arredondamento. Durante o trabalho numérico, para cada passo, são feitos longos cálculos, onde milhões de operações são efectuadas. Em cada operação são feitos arredondamentos e, portanto, no fim, obtemos erros elevados e a resposta pode não ter qualquer significado.

## Capítulo 4

# Determinação da posição e velocidade numa órbita

Neste capítulo pretende-se resolver dois tipos de problemas: determinar a posição e velocidade de um corpo na sua órbita no espaço, conhecidos os elementos orbitais e vice-versa.

Para resolver o primeiro problema, determinar a posição e velocidade, temos de determinar a relação entre dois referenciais- um ligado à órbita do corpo e outro no espaço - usando trigonometria esférica. As expressões para a posição e velocidade na órbita do corpo foram deduzidas no capítulo 2.

### 4.1 Determinação de $\vec{r}$ e $\vec{V}$ conhecidos os elementos orbitais

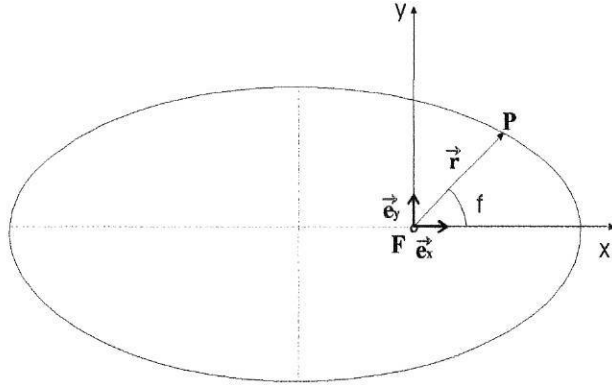
Consideremos um referencial o.n.  $(F, (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z))$  ligado à órbita de um corpo  $P$  que se move em torno de outro, situado em  $F$  (figura 4.1).

Os eixos  $xx$  e  $yy$  estão no plano da órbita, tendo o primeiro a direcção do eixo maior e apontando para o pericentro e o segundo perpendicular a este.

Sejam  $(x, y, z)$  as coordenadas do vector posição,  $\vec{r}$ , neste referencial.

Assim:

$$\vec{r} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z$$



**Figura 4.1:** Referencial o.n.  $(F, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$  de um corpo  $P$  que se move em torno de outro, situado em  $F$ .

Como foi visto no capítulo 2, a órbita de  $P$  faz-se sempre num mesmo plano, o plano orbital, pelo que  $z = constante = 0$

Sendo  $f$  a anomalia verdadeira, as coordenadas de  $\vec{r}$ , neste sistema de referência, são:

$$\begin{cases} x = r \cos f & (4.1) \\ y = r \sin f & (4.2) \\ z = 0 \end{cases}$$

Mas o que se pretende são as coordenadas do vector posição no espaço. Para tal, consideremos um outro referencial o.n.,  $(F, X, Y, Z)$  (figura 4.2), em que:

- O eixo do  $XX$  aponta na direcção do ponto vernal;
- O eixo dos  $YY$  é perpendicular ao eixo dos  $XX$  e está no plano de referência.
- O eixo dos  $ZZ$  aponta na direcção do PNC.

Neste novo referencial, tem-se que:

$$\vec{r} = X \vec{e}_1 + Y \vec{e}_2 + Z \vec{e}_3$$

sendo  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$  e  $\vec{e}_3$  vectores unitários com a direcção dos eixos coordenados,  $X$ ,  $Y$  e  $Z$ , respectivamente.

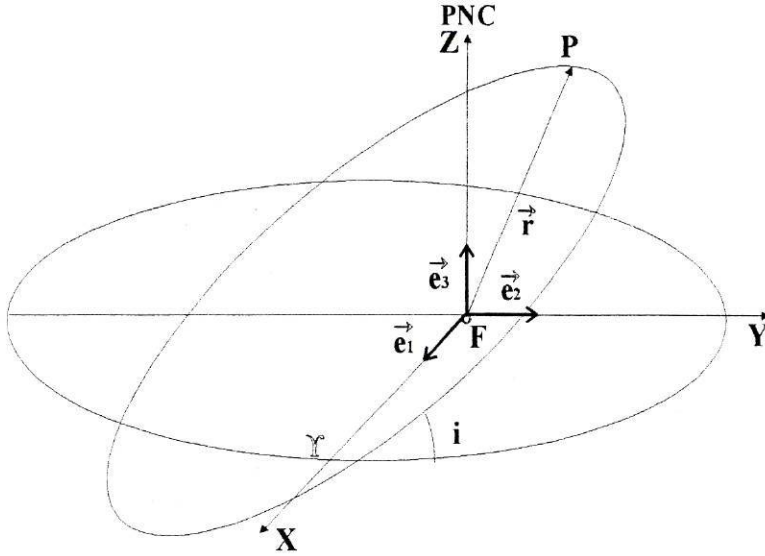


Figura 4.2: Referencial o.n.  $(F, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  no espaço.

As coordenadas do vector posição,  $X$ ,  $Y$  e  $Z$ , não são mais do que as projecções do vector posição,  $\vec{r}$ , sobre cada um dos vectores unitários,  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$  e  $\vec{e}_3$ .

As relações entre estas coordenadas,  $X$ ,  $Y$  e  $Z$ , e as coordenadas relativas ao referencial ligado à órbita,  $x$ ,  $y$  e  $z$  são, portanto:

$$X = Proj_{\vec{e}_1} \vec{r} = Proj_{\vec{e}_1} \vec{x} + Proj_{\vec{e}_1} \vec{y} = \cos(\hat{\vec{x}} \vec{e}_1) x + \cos(\hat{\vec{y}} \vec{e}_1) y \quad (4.3)$$

$$Y = Proj_{\vec{e}_2} \vec{r} = Proj_{\vec{e}_2} \vec{x} + Proj_{\vec{e}_2} \vec{y} = \cos(\hat{\vec{x}} \vec{e}_2) x + \cos(\hat{\vec{y}} \vec{e}_2) y \quad (4.4)$$

$$Z = Proj_{\vec{e}_3} \vec{r} = Proj_{\vec{e}_3} \vec{x} + Proj_{\vec{e}_3} \vec{y} = \cos(\hat{\vec{x}} \vec{e}_3) x + \cos(\hat{\vec{y}} \vec{e}_3) y \quad (4.5)$$

Usando trigonometria esférica ( notas suplementares ) e a lei dos cossenos, podemos facilmente determinar os cossenos que surgem nas relações anteriores.

Observemos a figura 4.3. Podemos definir vários triângulos esféricos.

- Consideremos o triângulo esférico  $A \Upsilon N$  ( figura 4.4 ):

$$\begin{aligned} \cos(\hat{\vec{x}} \vec{e}_1) &= \cos(\alpha_1) = \cos \Omega \cos w + \sin \Omega \sin w \cos(180^\circ - i) = \\ &= \cos \Omega \cos w - \sin \Omega \sin w \cos i \end{aligned}$$

- Consideremos o triângulo esférico  $B \Upsilon N$  ( figura 4.5 ):

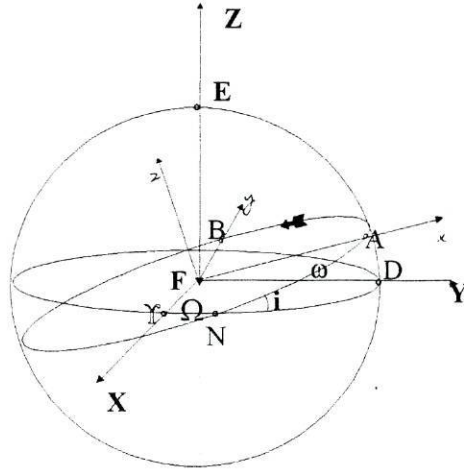


Figura 4.3: Planos orbital e espacial de um corpo em torno de outro.

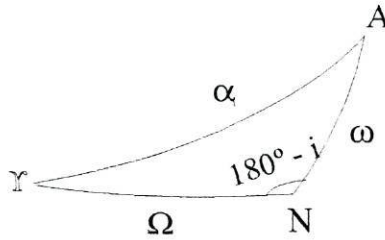


Figura 4.4: Triângulo esférico  $A \Upsilon N$ .

$$\begin{aligned}
 \cos(\hat{y} \cdot \hat{e}_1) &= \cos(\beta_1) = \\
 &= \cos \Omega \cos(90^\circ + w) + \sin \Omega \sin(90^\circ + w) \cos(180^\circ - i) = \\
 &= -\cos \Omega \sin w - \sin \Omega \cos w \cos i
 \end{aligned}$$

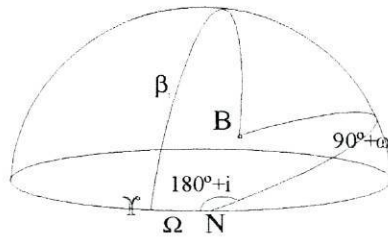


Figura 4.5: Triângulo esférico  $B \Upsilon N$ .

- Consideremos o triângulo esférico  $A D N$  (figura 4.6):

$$\begin{aligned}
 \cos(\hat{x} \cdot \hat{e}_2) &= \cos(\alpha_2) = \cos(90^\circ - \Omega) \cos w + \sin(90^\circ - \Omega) \sin w \cos i = \\
 &= \sin \Omega \cos w + \cos \Omega \sin w \cos i
 \end{aligned}$$

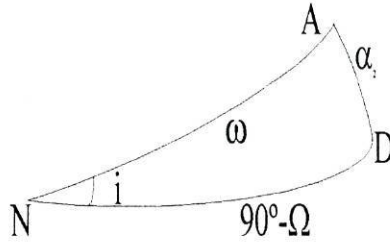


Figura 4.6: Triângulo esférico  $A D N$ .

- Consideremos o triângulo esférico  $B D N$  ( figura 4.7 ):

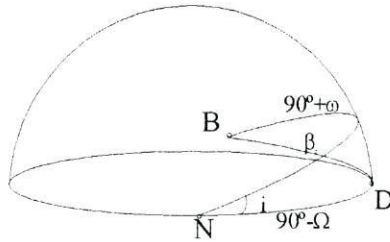


Figura 4.7: Triângulo esférico  $B D N$ .

$$\begin{aligned} \cos (\hat{y} \vec{e}_2) &= \cos (\beta_2) = \\ &= \cos (90^\circ - \Omega) \cos (90^\circ + w) + \sin (90^\circ - \Omega) \sin (90^\circ + w) \cos i = \\ &= -\sin \Omega \sin w + \cos \Omega \cos w \cos i \end{aligned}$$

- Consideremos o triângulo esférico  $E A N$  ( figura 4.8 ):

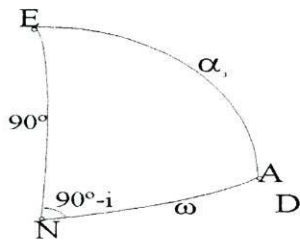


Figura 4.8: Triângulo esférico  $E A N$ .

$$\begin{aligned} \cos (\hat{x} \vec{e}_3) &= \cos (\alpha_3) = \cos 90^\circ \cos w + \sin 90^\circ \sin w \cos (90^\circ - i) = \\ &= \sin w \sin i \end{aligned}$$

- Consideremos o triângulo esférico  $E B N$  ( figura 4.9 ):

$$\begin{aligned} \cos (\hat{y} \vec{e}_3) &= \cos (\beta_3) \\ &= \cos 90^\circ \cos (90^\circ + w) + \sin 90^\circ \sin (90^\circ + w) \cos (90^\circ - i) = \end{aligned}$$

$$= \cos w \sin i$$

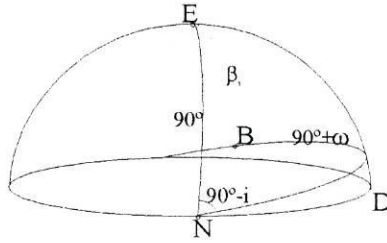


Figura 4.9: Triângulo esférico  $E B N$ .

#### 4.1.1 Determinação do vector posição:

Substituindo as expressões dos cossenos directores nas equações ( 4.3 ), ( 4.4 ) e ( 4.5 ), obtém-se:

$$\begin{cases} X = r \cos f ( \cos \Omega \cos w - \sin \Omega \sin w \cos i ) \\ \quad - r \sin f ( \cos \Omega \sin w + \sin \Omega \cos w \cos i ) \end{cases} \quad ( 4.6 )$$

$$\begin{cases} Y = r \cos f ( \sin \Omega \cos w + \cos \Omega \sin w \cos i ) \\ \quad + r \sin f ( - \sin \Omega \sin w + \cos \Omega \cos w \cos i ) \end{cases} \quad ( 4.7 )$$

$$\begin{cases} Z = r ( \cos f \sin w \sin i + \sin f \cos w \sin i ) \end{cases} \quad ( 4.8 )$$

Estas expressões vêm em função de alguns elementos orbitais ( que conhecemos ) e da anomalia verdadeira,  $f$ , que desconhecemos. Portanto, teremos de exprimir  $f$  em função dos dados do problema, que vai depender do tipo de órbita.

- No caso da **órbita elíptica**, em que  $e < 1$ , podemos exprimir  $f$  em função da anomalia excêntrica,  $E$ . Mas primeiro teremos de saber o valor de  $E$ .

A partir da Equação de Kepler, e das seguintes relações:

$$M = \eta ( t - \tau )$$

$$\eta = \frac{2 \pi}{T}$$

$$T = 2 \pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$$

obtemos:

$$E - e \sin E = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} (t - \tau) = M \quad (4.1)$$

A resolução desta equação permite-nos determinar o valor da anomalia excêntrica. Esta equação não tem solução analítica, sendo necessário recorrer à resolução numérica.

Para exprimirmos  $f$  em função de  $E$ , usam-se as relações já obtidas no capítulo 2.2:

$$\begin{cases} r \cos f = a (\cos E - e) & (4.10) \\ r \sin f = a \sqrt{1 - e^2} \sin E & (4.11) \end{cases}$$

Assim, numa órbita elíptica, as coordenadas do vector posição são:

$$\begin{cases} X = a (\cos E - e) (\cos \Omega \cos w - \sin \Omega \sin w \cos i) \\ \quad - a \sqrt{1 - e^2} \sin E (\cos \Omega \sin w + \sin \Omega \cos w \cos i) & (4.12) \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y = a (\cos E - e) (\sin \Omega \cos w + \cos \Omega \cos w \cos i) \\ \quad + a \sqrt{1 - e^2} \sin E (-\sin \Omega \sin w + \cos \Omega \cos w \cos i) & (4.13) \end{cases}$$

$$\begin{cases} Z = a (\cos E - e) \sin w \sin i + a \sqrt{1 - e^2} \sin E \cos w \sin i & (4.14) \end{cases}$$

sendo  $E$  determinado a partir da resolução da equação (4.9).

- No caso da **órbita parabólica**, em que  $e = 1$ , conseguimos determinar  $f$  a partir da Equação de Barker, obtida no capítulo 2.3:

$$\tan \frac{f}{2} + \frac{1}{3} \tan^3 \frac{f}{2} = 2 \sqrt{\frac{\mu}{p^3}} (t - \tau)$$

Resolvendo esta equação obtemos o valor da anomalia verdadeira.

Em relação a  $r$ , este é determinado usando a equação polar da parábola:

$$r = \frac{p}{1 + \cos f}$$

sendo  $p$  o parâmetro da parábola, que é dado.

$X$ ,  $Y$  e  $Z$  são neste caso determinados directamente pelas equações ( 4.6 ), ( 4.7 ) e ( 4.8 ).

- No caso da **órbita hiperbólica**, em que  $e > 1$ , temos de exprimir  $f$  em função de  $F$ , isto é, do análogo à anomalia excêntrica, na órbita elíptica.

A partir da equação ( 3.67 ) e das seguintes relações:

$$M = \nu ( t - \tau )$$

$$\nu = \frac{2 \pi}{T}$$

$$T = 2 \pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$$

obtemos:

$$e \sinh F - F = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} ( t - \tau ) \quad ( 4.15 )$$

A resolução desta equação permite-nos determinar o valor de  $F$  a partir dos dados conhecidos.

Para escrevermos  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  em função de  $F$ , relembremos que, como foi visto no capítulo 2.4:

$$\cosh F = \frac{\cos f + e}{1 + e \cos f} \Leftrightarrow \cos f = \frac{e - \cosh F}{e \cosh F - 1}$$

Em relação ao  $\sin f$ , temos que:

$$\sin f = 2 \sin \frac{f}{2} \cos \frac{f}{2} = 2 \tan \frac{f}{2} \cos^2 \frac{f}{2}$$

Mas sabemos do capítulo 2.4 que:

$$\tan \frac{f}{2} = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} \tanh \frac{F}{2}$$

E que:

$$\cos^2 \frac{f}{2} = \frac{1 + \cos f}{2}$$

Assim:

$$\begin{aligned} \sin f &= 2 \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} \frac{1 + \frac{e - \cosh F}{e \cosh F - 1}}{2} \tanh \frac{F}{2} \\ &= \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} \frac{(e-1)(\cosh F + 1)}{e \cosh F - 1} \tanh \frac{F}{2} \end{aligned}$$

Ou seja:

$$\cos f = \frac{e - \cosh F}{e \cosh F - 1} \quad (4.16)$$

$$\sin f = \sqrt{e^2 - 1} \frac{\cosh F + 1}{e \cosh F - 1} \tanh \frac{F}{2} \quad (4.17)$$

Em relação a  $r$ , da equação ( 2.72 ), sabemos que:

$$r = a ( e \cosh F - 1 )$$

Logo:

$$\begin{cases} r \cos f = a ( e - \cosh F ) & (4.18) \\ r \sin f = a ( \cosh F + 1 ) \sqrt{e^2 - 1} \tanh \frac{F}{2} & (4.19) \end{cases}$$

Substituindo as equações ( 4.18 ) e ( 4.19 ) nas equações ( 4.6 ) , ( 4.7 ) e ( 4.8 ) , obtém-se as coordenadas do vector posição para a órbita hiperbólica, sendo  $F$  determinado a partir da resolução da equação ( 4.15 ).

### 4.1.2 Determinação do vector velocidade:

Em relação às coordenadas do vector velocidade:

▷ No referencial ligado à órbita:

$$\vec{V} = \vec{V}_x + \vec{V}_y = \frac{dx}{dt} \vec{e}_x + \frac{dy}{dt} \vec{e}_y$$

▷ No referencial espacial:

$$\vec{V} = \vec{V}_X + \vec{V}_Y + \vec{V}_Z = V_X \vec{e}_1 + V_Y \vec{e}_2 + V_Z \vec{e}_3$$

sendo:

$$\left\{ \begin{array}{l} V_X = \cos(\alpha_1) \frac{dx}{dt} + \cos(\beta_1) \frac{dy}{dt} \end{array} \right. \quad (4.20)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V_Y = \cos(\alpha_2) \frac{dx}{dt} + \cos(\beta_2) \frac{dy}{dt} \end{array} \right. \quad (4.21)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V_Z = \cos(\alpha_3) \frac{dx}{dt} + \cos(\beta_3) \frac{dy}{dt} \end{array} \right. \quad (4.22)$$

Derivando as equações (4.1) e (4.2):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = \frac{dr}{dt} \cos f - r \sin f \frac{df}{dt} \end{array} \right. \quad (4.23)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy}{dt} = \frac{dr}{dt} \sin f + r \cos f \frac{df}{dt} \end{array} \right. \quad (4.24)$$

Mas (notas em apêndice):

$$r \frac{df}{dt} = \frac{h}{r}, \quad \frac{dr}{dt} = \frac{h e}{p} \sin f \quad \text{e} \quad \frac{e h}{p} = \mu$$

pelo que:

$$r \frac{df}{dt} = \frac{\sqrt{\mu p}}{r}$$

e

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin f$$

Então as equações (4.23) e (4.24), vêm:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin f \cos f - \frac{\sqrt{\mu p}}{r} \sin f \\ \frac{dy}{dt} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin f + \frac{\sqrt{\mu p}}{r} \cos f \end{cases}$$

Simplificando:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\sqrt{\frac{\mu}{p}} \sin f & (4.25) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} (e + \cos f) & (4.26) \end{cases}$$

sendo:

$$p = \begin{cases} a(1 - e^2) & \text{se } e < 1 \\ a(e^2 - 1) & \text{se } e > 1 \\ \text{Valor dado} & \text{se } e = 1 \end{cases}$$

De forma análoga ao que foi feito em relação ao vector posição teremos de exprimir  $f$  em função de  $E$  ou  $F$ , consoante a órbita é elíptica ou hiperbólica.

• Se a órbita é elíptica:

Das equações ( 4.10 ) e ( 4.11 ), temos que:

$$\begin{cases} \cos f = \frac{a(\cos E - e)}{r} \\ \sin f = \frac{a\sqrt{1 - e^2} \sin E}{r} \end{cases}$$

e

$$r = a(1 - e \cos E) \quad \text{e} \quad p = a(1 - e^2)$$

Assim, na órbita elíptica, as equações ( 4.25 ) e ( 4.26 ) vêm:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\sqrt{\mu a} \frac{\sin E}{a(1 - e \cos E)} \\ \frac{dy}{dt} = \sqrt{\frac{\mu}{a(1 - e^2)}} \left( e + \frac{a(\cos E - e)}{a(1 - e \cos E)} \right) \end{cases}$$

Simplificando:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\sqrt{\frac{\mu}{a}} \frac{\sin E}{(1 - e \cos E)} \end{cases} \quad (4.27)$$

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = \sqrt{\frac{\mu}{a}} \sqrt{1 - e^2} \frac{\cos E}{1 - e \cos E} \end{cases} \quad (4.28)$$

Sendo  $E$  determinada a partir da equação (4.9).

Substituindo as equações (4.27) e (4.28) nas equações (4.20), (4.21) e (4.22), obtém-se as coordenadas do vector velocidade numa órbita elíptica.

- Se a órbita é parabólica:

A anomalia verdadeira,  $f$ , é determinada a partir da resolução da equação de Barker.

Substituindo nas equações (4.25) e (4.26) obtemos  $\frac{dx}{dt}$  e  $\frac{dy}{dt}$  pelo que as equações (4.20), (4.21) e (4.22) nos permitem determinar  $V_X$ ,  $V_Y$  e  $V_Z$ .

- Se a órbita é hiperbólica:

O  $\cos f$  e o  $\sin f$  são determinados a partir das equações (4.16) e (4.17), pelo que:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\sqrt{\frac{\mu}{a}} \frac{\cosh F + 1}{e \cosh F - 1} \tanh \frac{F}{2} \end{cases} \quad (4.29)$$

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = \sqrt{\frac{\mu}{a(e^2 - 1)}} \left( e + \frac{e - \cosh F}{e \cosh F - 1} \right) \end{cases} \quad (4.30)$$

Sendo  $F$  determinada a partir da equação (4.15).

Substituindo as equações ( 4.29 ) e ( 4.30 ) nas equações ( 4.20 ) , ( 4.21 ) e ( 4.22 ) , obtém-se as coordenadas do vector velocidade numa órbita hiperbólica.

## 4.2 Determinação dos elementos orbitais

Nesta secção vamos tratar do problema inverso.

Suponhamos que se conhecem, para um dado instante de tempo  $t$ , as coordenadas:

$$\vec{r} = ( X , Y , Z ) \quad \text{e} \quad \vec{V} = ( V_X , V_Y , V_Z )$$

Os elementos orbitais,  $a$  ,  $e$  ,  $i$  ,  $\Omega$  ,  $w$  e  $\tau$  podem ser determinados, a partir das coordenadas dos vectores posição e velocidade, para um dado instante de tempo.

Os valores de  $r$  e  $V$  podem ser determinados a partir de:

$$r = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \quad \text{e} \quad V = \sqrt{V_X^2 + V_Y^2 + V_Z^2}$$

O vector  $\vec{h}$  dá-nos a orientação do plano da órbita e é obtido através da relação sabemos que  $\vec{h} = \vec{r} \times \vec{V} = ( h_X , h_Y , h_Z )$ .

$$\text{Então, } h = \| \vec{h} \| = \sqrt{h_X^2 + h_Y^2 + h_Z^2}$$

sendo:

$$\begin{cases} h_X = Y V_Z - Z V_Y \\ h_Y = Z V_X - X V_Z \\ h_Z = X V_Y - Y V_X \end{cases}$$

- Em relação ao elemento orbital,  $a$ :

Caso a órbita seja elíptica, partindo da equação ( 2.37 ) e resolvendo em ordem a  $a$ , obtém-se:

$$a = \frac{r \mu}{2\mu - r V^2}$$

Caso a órbita seja hiperbólica, partindo da equação ( 2.60 ) e resolvendo em ordem a  $a$ , obtém-se:

$$a = \frac{r \mu}{-2\mu + r V^2}$$

- Relativamente à excentricidade,  $e$ , partindo da relação  $p = \frac{h^2}{\mu}$ , tem-se que:

Caso a órbita seja elíptica, o valor de  $p$  é dado pela expressão  $p = a ( 1 - e^2 )$ , e, portanto:

$$a ( 1 - e^2 ) = \frac{h^2}{\mu}$$

Ou seja:

$$e = \sqrt{1 - \frac{h^2}{\mu a}}$$

Caso a órbita seja hiperbólica, o valor de  $p$  é dado pela expressão  $p = a ( e^2 - 1 )$ , e, portanto:

$$a ( e^2 - 1 ) = \frac{h^2}{\mu}$$

Ou seja:

$$e = \sqrt{1 + \frac{h^2}{\mu a}}$$

- Para determinarmos o valor da inclinação,  $i$ , usamos a relação:

$$h_Z = h \cos i \Leftrightarrow \cos i = \frac{h_Z}{h}$$

Então o valor da inclinação é determinado a partir da seguinte relação:

$$i = \arccos \frac{h_Z}{h}$$

- Para calcular a longitude do nodo ascendente,  $\Omega$ , determinamos, primeiro, o seno e o cosseno de  $\Omega$ , pois este ângulo varia entre  $0^\circ$  e  $360^\circ$ .

Caso a cota do vector  $\vec{h}$  seja positiva, isto é,  $h_Z > 0$ , então:

$$h_X = h \sin \Omega \sin i$$

e

$$h_Y = -h \cos \Omega \sin i$$

Assim:

$$\sin \Omega = \frac{h_X}{h} \frac{1}{\sin i}$$

e

$$\cos \Omega = -\frac{h_Y}{h} \frac{1}{\sin i}$$

Caso a cota do vector  $\vec{h}$  seja negativa, isto é,  $h_Z < 0$ , então:

$$h_X = -h \sin \Omega \sin i$$

e

$$h_Y = h \cos \Omega \sin i$$

Pelo que:

$$\sin \Omega = -\frac{h_X}{h} \frac{1}{\sin i}$$

e

$$\cos \Omega = \frac{h_Y}{h} \frac{1}{\sin i}$$

Conhecendo o seno e o cosseno de  $\Omega$ , sabemos em que quadrante ele está.

Se:

1)  $\sin \Omega > 0 \wedge \cos \Omega > 0$  então  $0^\circ < \Omega < 90^\circ$

2)  $\sin \Omega > 0 \wedge \cos \Omega < 0$  então  $90^\circ < \Omega < 180^\circ$

3)  $\sin \Omega < 0 \wedge \cos \Omega < 0$  então  $180^\circ < \Omega < 270^\circ$

4)  $\sin \Omega < 0 \wedge \cos \Omega > 0$  então  $270^\circ < \Omega < 360^\circ$

Portanto  $\Omega$  pode ser determinado através de:

$$\Omega = \arccos \left( \pm \frac{h_Y}{h} \frac{1}{\sin i} \right) \text{ caso } h_X > 0$$

ou por:

$$\Omega = 360^\circ - \arccos \left( \pm \frac{h_Y}{h} \frac{1}{\sin i} \right) \text{ caso } h_X < 0$$

- O cálculo da anomalia verdadeira,  $f$ , é feito através do seu seno e cosseno.

Da equação  $r = \frac{p}{1 + e \cos f}$ , tem-se que:

$$\cos f = \frac{1}{e} \left( \frac{p}{r} - 1 \right)$$

e da equação  $V_r = \frac{h}{p} e \sin f$  tem-se que:

$$\sin f = \frac{V_r p}{e h}$$

sendo:

$p = a(1 - e^2)$  se a órbita é elíptica ou  $p = a(e^2 - 1)$  se a órbita é hiperbólica.

e

$$V_r = \vec{V} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = \frac{X V_X + Y V_Y + Z V_Z}{r}$$

Conhecendo o seno e o cosseno de  $f$ , sabemos em que quadrante ele está.

Se:

1)  $\sin f > 0 \wedge \cos f > 0$  então  $0^\circ < f < 90^\circ$

2)  $\sin f > 0 \wedge \cos f < 0$  então  $90^\circ < f < 180^\circ$

3)  $\sin f < 0 \wedge \cos f < 0$  então  $180^\circ < f < 270^\circ$

4)  $\sin f < 0 \wedge \cos f > 0$  então  $270^\circ < f < 360^\circ$

Então,  $f$  pode ser determinado através de:

$$f = \arccos(\cos f) \text{ caso } \sin f > 0$$

ou por:

$$f = 360^\circ - \arccos(\cos f) \text{ caso } \sin f < 0$$

- Para determinarmos  $w$ , primeiro temos de calcular  $w + f$ .

Como vimos na secção 4.1, as coordenadas do vector posição, expressas em função de alguns elementos orbitais e da anomalia verdadeira são:

$$\left\{ \begin{array}{l} X = r \cos f ( \cos \Omega \cos w - \sin \Omega \sin w \cos i ) \\ \quad - r \sin f ( \cos \Omega \sin w + \sin \Omega \cos w \cos i ) \\ Y = r \cos f ( \sin \Omega \cos w + \cos \Omega \sin w \cos i ) \\ \quad + r \sin f ( - \sin \Omega \sin w + \cos \Omega \cos w \cos i ) \\ Z = r ( \cos f \sin w \sin i + \sin f \cos w \sin i ) \end{array} \right.$$

Estas expressões podem tomar outro aspecto, usando fórmulas trigonométricas. Assim:

$$\left\{ \begin{array}{l} X = r \cos f \cos \Omega \cos w - r \cos f \sin \Omega \sin w \cos i \\ \quad - r \sin f \cos \Omega \sin w - r \sin f \sin \Omega \cos w \cos i \\ Y = r \cos f \sin \Omega \cos w + r \cos f \cos \Omega \sin w \cos i \\ \quad - r \sin f \sin \Omega \sin w + r \sin f \cos \Omega \cos w \cos i \\ Z = r \sin i ( \cos f \sin w + \sin f \cos w ) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} X = r \cos \Omega ( \cos f \cos w - \sin f \sin w ) \\ \quad - r \sin \Omega \cos i ( \cos f \sin w + \sin f \cos w ) \\ Y = r \sin \Omega ( \cos f \cos w - \sin f \sin w ) \\ \quad + r \cos \Omega \cos i ( \cos f \sin w + \sin f \cos w ) \\ Z = r \sin i \sin ( w + f ) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} X = r \cos \Omega \cos ( w + f ) - r \sin \Omega \cos i \sin ( w + f ) \\ Y = r \sin \Omega \cos ( w + f ) + r \cos \Omega \cos i \sin ( w + f ) \\ Z = r \sin i \sin ( w + f ) \end{array} \right.$$

Ou seja:

$$\left\{ \begin{array}{l} X = r [ \cos \Omega \cos ( w + f ) - \sin \Omega \cos i \sin ( w + f ) ] \\ Y = r [ \sin \Omega \cos ( w + f ) + \cos \Omega \cos i \sin ( w + f ) ] \\ Z = r \sin i \sin ( w + f ) \end{array} \right.$$

Para determinarmos a expressão do  $\cos ( w + f )$ , vamos usar apenas as duas primeiras expressões, multiplicando por  $\cos \Omega$  a primeira e a segunda por  $\sin \Omega$  e, depois, somá-las membro a membro, obtendo-se:

$$X \cos \Omega + Y \sin \omega = r \cos (w + f)$$

Ou seja:

$$\cos (w + f) = \frac{1}{r} (X \cos \Omega + Y \sin \Omega)$$

Para determinarmos a expressão do  $\sin (w + f)$ , vamos usar apenas as duas primeiras expressões, multiplicando por  $-\sin \Omega$  a primeira e a segunda por  $\cos \Omega$  e, depois, somá-las membro a membro, obtendo-se:

$$-X \sin \Omega + Y \cos \omega = r \sin (w + f) \cos i$$

No caso de  $i = 0$  então:

$$\sin (w + f) = \frac{1}{r} (Y \cos \Omega - X \sin \Omega)$$

No caso de  $i \neq 0$ , usando a terceira relação, tem-se:

$$\sin (w + f) = \frac{Z}{r} \frac{1}{\sin i}$$

Então,  $w$  pode ser determinado através de:

$$w = \arccos (\cos(w + f)) - f \text{ caso } \sin (w + f) > 0$$

ou por:

$$w = 360^\circ - \arccos (\cos(w + f)) - f \text{ caso } \sin (w + f) < 0$$

- Por último, para determinar o tempo de passagem no pericentro  $\tau$ , primeiro precisamos de saber o tipo de órbita, isto é, o valor da excentricidade.

- Se  $e < 1$ , ou seja, se a órbita é elíptica, a partir das equações:

$$M = \frac{2\pi (t - \tau)}{T}$$

$$M = E - e \sin E$$

$$e T = \frac{2\pi \mu}{\sqrt{\left(\frac{2\mu}{r} - V^2\right)^3}}$$

Obtém-se:

$$\tau = t - \frac{\mu (E - e \sin E)}{\sqrt{\left(\frac{2\mu}{r} - V^2\right)^3}}$$

sendo o valor de  $E$  determinado a partir de:

$$r = a(1 - e \cos E) \Leftrightarrow \cos E = \frac{1}{e} - \frac{r}{ae}$$

Ou seja:

$$E = \arccos\left(\frac{1}{e} - \frac{r}{ae}\right) \text{ e } E \text{ pertence ao mesmo quadrante que } f.$$

- Se  $e > 1$ , ou seja, se a órbita é hiperbólica, então a partir das equações:

$$e \sinh F - F = \nu (t - \tau)$$

$$\nu = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$$

Obtém-se:

$$\tau = t - \frac{e \sinh F - F}{\sqrt{\frac{\mu}{a^3}}}$$

sendo  $F$  determinado a partir de:

$$r = a(e \cosh F - 1) \Leftrightarrow \cosh F = \frac{r + a}{ae}$$

Ou seja:

$$F = \operatorname{arccosh} \frac{a+r}{ae} \text{ e } F \text{ pertence ao mesmo quadrante que } f.$$

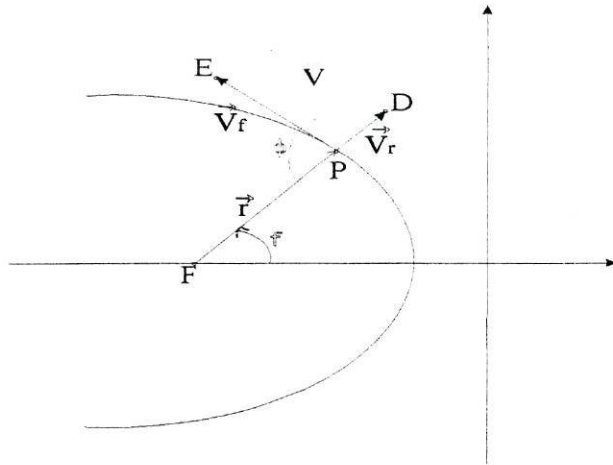
• Se  $e = 1$ , ou seja, se a órbita é parabólica, então a partir da equação:

$$\tan \frac{f}{2} + \frac{1}{3} \tan^3 \frac{f}{2} = 2 \sqrt{\frac{\mu}{p^3}} (t - \tau)$$

Ou seja:

$$\tau = t - \frac{2p^3}{\mu} \left( \tan \frac{f}{2} + \frac{1}{3} \tan^3 \frac{f}{2} \right)$$

Para determinarmos o valor do parâmetro da parábola,  $p$ , observemos a figura 4.10



**Figura 4.10:** Vector velocidade numa órbita parabólica. O ângulo formado pelos vectores posição e velocidade é o ângulo suplementar de  $\phi$ .

Define-se o ângulo  $\phi$  como sendo o ângulo suplementar do ângulo formado pelos vectores posição e velocidade, isto é,  $\phi = 180^\circ - \widehat{rV}$ .

Da figura 4.10 tem-se que o ângulo  $\phi$  pode ser expresso da seguinte forma:

$$\phi = 90^\circ + \widehat{EPD}.$$

Mas  $\cos(\widehat{EPD}) = \frac{V_f}{V}$ , sendo:

$$V_f = r \frac{df}{dt} = \frac{h}{r} = \sqrt{\frac{\mu p}{r^2}}$$

e

$$V = \sqrt{\frac{2\mu}{r}}$$

Assim:

$$\cos (E\hat{P}D) = \sqrt{\frac{p}{2r}}$$

$$\text{Mas, } \sin \phi = \sin (90^\circ + E\hat{P}D) = \cos (E\hat{P}D) = \sqrt{\frac{p}{2r}}$$

Logo:

$$\sin^2 \phi = \frac{p}{2r} \Leftrightarrow p = 2r \sin^2 \phi = 2r (1 - \cos^2 \phi)$$

Como  $\phi = 180^\circ - \hat{r}\hat{V}$  então:

$$\cos^2 \phi = (-\cos \hat{r}\hat{V})^2 = \frac{(\hat{r} \cdot \hat{V})^2}{\|\hat{r}\|^2 \|\hat{V}\|^2} = \frac{(X V_X + Y V_Y + Z V_Z)^2}{(r V)^2}$$

Portanto:

$$p = 2r \left( 1 - \frac{(X V_X + Y V_Y + Z V_Z)^2}{r^2 V^2} \right)$$

# Capítulo 5

## Algoritmos

### 5.1 Algoritmo 1

**OBJECTIVO:** Determinação dos vectores posição e velocidade de um corpo em órbita elíptica conhecidos os elementos orbitais.

( 1 ) Introdução das constantes:

- Constante de Gravitação  $G$ , no sistema CGS:

$$G = 6.672 \times 10^{-8} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$$

- Massa do Sol ( em gramas ):

$$MSol = 1.989 \times 10^{33}$$

- Massa da Terra ( em gramas ):

$$MTerra = 5.9742 \times 10^{27}$$

( 2 ) Introdução dos dados:

- Semi-eixo maior,  $a$  ( em u.a. ).
- Excentricidade, *exc.*

- Inclinação da órbita,  $I$  ( em graus ).
- Longitude do nodo ascendente,  $\Omega$  ( em graus ).
- Argumento do periélio,  $w$  ( em graus ).
- Anomalia média,  $M$ .
- Massa ( em gramas ), massa do corpo situado no foco ( primário ).

**( 3 ) Redução das unidades:**

- Conversão de u.a. para centímetros:

$$ua = 1.496e13$$

- Passagem do  $a$  de u.a. para centímetros:

$$a = a \times ua$$

- Passagem dos ângulos  $I$ ,  $\Omega$  e  $w$  para radianos:

$$I = I \frac{\pi}{180^\circ}$$

$$\Omega = \Omega \frac{\pi}{180^\circ}$$

$$w = w \frac{\pi}{180^\circ}$$

**( 4 ) Determinação do  $\mu$ :**

- $\mu = G \times massa$

Supõe-se que a massa do primário é muito superior à massa do secundário, pelo que esta é desprezável em relação à primeira.

**( 5 ) Determinação dos cossenos directores**

$$( \cos 1 , \cos 2 , \cos 3 , \cos 4 , \cos 5 , \cos 6 )$$

- $\cos 1 = \cos (\Omega) \cos (w) - \sin (\Omega) \sin (w) \cos (I)$
- $\cos 2 = -\cos (\Omega) \sin (w) - \sin (\Omega) \cos (w) \cos (I)$
- $\cos 3 = \sin (\Omega) \cos (w) + \cos (\Omega) \sin (w) \cos (I)$
- $\cos 4 = -\sin (\Omega) \sin (w) + \cos (\Omega) \cos (w) \cos (I)$
- $\cos 5 = \sin (\Omega) \sin (I)$
- $\cos 6 = \cos (w) \sin (I)$

**( 6 ) Determinação da anomalia excêntrica,  $E$ .**

A anomalia excêntrica  $E$ , é determinada a partir da equação:

$$E - exc \sin E = M$$

Como esta equação não tem solução analítica, é necessário recorrer à sua resolução numérica. Por exemplo, poder-se-à utilizar o método da bissecção, isto é, vai-se reduzindo sucessivamente o intervalo que contém a raiz, a metade.

**( 7 ) Determinação das coordenadas do vector posição (  $XX$ ,  $YY$ ,  $ZZ$  ) e do vector velocidade no espaço (  $VXX$ ,  $VYY$ ,  $VZZ$  ):**

( 7.1 ) Determinação das coordenadas dos vectores posição e velocidade no plano da órbita:

- $x = a ( \cos E - exc )$
- $y = a \sqrt{1 - exc^2} \sin E$
- $V_x = -\sqrt{\frac{\mu}{a}} \frac{\sin E}{1 - exc \cos E}$
- $V_y = \sqrt{\frac{\mu (1 - exc^2)}{a}} \frac{\cos E}{1 - exc \cos E}$

( 7.2 ) Determinação das coordenadas do vector posição (  $XX$ ,  $YY$ ,  $ZZ$  ) e do vector velocidade (  $VXX$ ,  $VYY$ ,  $VZZ$  ) no espaço:

- $XX = x \cos 1 + y \cos 2$
- $YY = x \cos 3 + y \cos 4$
- $ZZ = x \cos 5 + y \cos 6$
- $VXX = Vx \cos 1 + Vy \cos 2$
- $VYY = Vx \cos 3 + Vy \cos 4$
- $VZZ = Vx \cos 5 + Vy \cos 6$

( 7.3 ) Conversão das coordenadas do vector posição de centímetros para u.a. e do vector velocidade de  $cm/s$  para  $km/s$ :

- $XX = XX \frac{XX}{ua}$
- $YY = YY \frac{YY}{ua}$
- $ZZ = ZZ \frac{ZZ}{ua}$
- $VXX = VXX \times 10^{-5}$
- $VYY = VYY \times 10^{-5}$
- $VZZ = VZZ \times 10^{-5}$

( 8 ) Determinação da distância ao corpo  $d$  e da velocidade escalar  $V$ :

- $d = \sqrt{XX^2 + YY^2 + ZZ^2}$
- $V = \sqrt{VXX^2 + VYY^2 + VZZ^2}$

( 9 ) Determinação do período ( em anos ):

$$periodo = \frac{2 \pi a \sqrt{\frac{a}{\mu}}}{365,25 \times 24 \times 3600}$$

( 10 ) Variáveis de saída:

- $r = ( XX , YY , ZZ )$
- $VV = ( VXX , VYY , VZZ )$
- $d$
- $V$
- *periodo*

## 5.2 Algoritmo 2

**OBJECTIVO:** Determinação dos elementos orbitais conhecidos os vectores posição e velocidade de um corpo em órbita elíptica.

( 1 ) Introdução das constantes:

- Constante de Gravitação  $G$ , no sistema CGS:

$$G = 6.672 \times 10^{-8} Nm^2/kg^2$$

- Massa do Sol ( em gramas ):

$$MSol = 1.989 \times 10^{33}$$

- Massa da Terra ( em gramas ):

$$MTerra = 5.9742 \times 10^{27}$$

( 2 ) Introdução dos dados:

- Coordenadas do vector posição  $\vec{r} = ( X , Y , Z )$ :

$$X , Y e Z$$

- Coordenadas do vector velocidade  $\vec{V} = ( V1 , V2 , V3 )$ :

### V1 , V2 e V3

- Massa ( em gramas ), massa do corpo situado no foco ( primário ).
- Tempo ( Ano , Mês , Dia , Hora )

$tempo(0)$  ,  $tempo(1)$  ,  $tempo(2)$  e  $tempo(3)$

A data é transformada em dias julianos ( JD ), cuja contagem do tempo se inicia em - 4712,e é calculada através da seguinte relação.

$$JD = Int( 365.25 ( Ano + 4716 )) + Int( 30.6001 ( Mes + 1 )) + Dia + B - 1524.5$$

Sendo  $B$  determinado a partir de:

$$B = 2 - A + Int\left(\frac{A}{4}\right) \text{ e } A = Int\left(\frac{Ano}{100}\right)$$

Se  $Mês = 1$  ou  $Mês = 2$ , então  $Ano = Ano - 1$  e  $Mês = Mês + 12$ .

Se  $Mês > 2$  então o Ano e o Mês não são alterados.

O número 30.6 ( em vez de 30.6001 ) daria o resultado correcto, mas o número 30.6001 é usado de forma a que se obtenha sempre a parte inteira correcta. Por exemplo,  $5 \times 30.6$  dá o resultado correcto, isto é, 153. Contudo, a maioria dos computadores não representa, 30.6 de forma exacta e poderá acontecer que apresente o resultado 152.9999998, cuja parte inteira é 152. O cálculo de JD estaria incorrecto.

### ( 3 ) Determinação:

- de  $\mu$ :

$$\mu = G \times massa$$

Supõe-se que a massa do primário é muito superior à massa do secundário, pelo que esta é desprezável em relação à primeira.

- da distância ao corpo,  $d$ .

$$d = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

- da velocidade escalar,  $V$ :

$$V = \sqrt{V1^2 + V2^2 + V3^2}$$

- das coordenadas do vector momento angular,  $\vec{h} = (h1, h2, h3)$ :

$$h1 = Y V3 - Z V2$$

$$h2 = Z V1 - X V3$$

$$h3 = X V2 - Y V1$$

- do momento angular,  $h$ :

$$h = \sqrt{h1^2 + h2^2 + h3^2}$$

#### ( 4 ) Determinação dos elementos orbitais:

- Semi-eixo maior,  $a$ :

$$a = \frac{d \times \mu}{2 \mu - d V^2}$$

- Excentricidade,  $exc$ :

$$exc = \sqrt{1 - \frac{h^2}{\mu \times a}}$$

- Inclinação da órbita,  $I$ :

$$I = \arccos \left( \frac{h3}{h} \right)$$

- Longitude do nodo ascendente,  $\Omega$ :

( a ) Determinação do seno e do cosseno de  $\Omega$ :

Se  $h3 > 0$  então:

$$\sin (\Omega) = \frac{h1}{h \sin (I)}$$

$$\cos(\Omega) = -\frac{h_2}{h \sin(I)}$$

Se  $h_3 < 0$  então:

$$\sin(\Omega) = -\frac{h_1}{h \sin(I)}$$

$$\cos(\Omega) = \frac{h_2}{h \sin(I)}$$

( b ) Determinação de  $\Omega$ :

Se  $\sin(\Omega) > 0$  então:

$$\Omega = \arccos(\cos \Omega)$$

Se  $\sin(\Omega) < 0$  então:

$$\Omega = 2\pi - \arccos(\cos \Omega)$$

• Anomalia verdadeira,  $f$ :

( a ) Determinação da velocidade radial,  $V_r$ :

$$V_r = \frac{X V_1 + Y V_2 + Z V_3}{d}$$

( b ) Determinação do seno e cosseno de  $f$ :

$$\cos f = \frac{1}{exc} \left( \frac{a(1 - exc^2)}{d} - 1 \right)$$

$$\sin f = \frac{V_r \times a(1 - exc^2)}{exc \times h}$$

( c ) Determinação de  $f$ :

Se  $\sin f > 0$  então:

$$f = \arccos(\cos f)$$

Se  $\sin f < 0$  então:

$$f = 2\pi - \arccos(\cos f)$$

- Argumento do periélio,  $w$ :

( a ) Determinação do seno e cosseno de  $w + f$ :

$$\cos (w + f) = \frac{X \cos \Omega + Y \sin \Omega}{d}$$

$$\text{Se } I = 0 \text{ então } \sin (w + f) = \frac{Y \cos \Omega - X \sin \Omega}{d}$$

$$\text{Se } I \neq 0 \text{ então } \sin (w + f) = \frac{Z}{d \sin I}$$

( b ) Determinação de  $w$ :

Se  $\sin (w + f) > 0$  então:

$$w = \arccos (\cos (w + f)) - f$$

Se  $\sin (w + f) < 0$  então:

$$w = 2 \pi - \arccos (\cos (w + f)) - f$$

- Tempo de passagem no pericentro,  $\tau$ :

( a ) Determinação da anomalia excêntrica  $E$ :

Se  $\sin f > 0$  então:

$$E = \arccos \left( \frac{1}{exc} - \frac{d}{a \times exc} \right)$$

Se  $\sin f < 0$  então:

$$E = 2 \pi - \arccos \left( \frac{1}{exc} - \frac{d}{a \times exc} \right)$$

( b ) Determinação de  $\tau$  em dias julianos:

$$\tau = JD - \frac{\mu (E - exc \sin E)}{\sqrt{\left(\frac{2\mu}{d} - V^2\right)^3}} \frac{1}{24 \times 3600}$$

( 5 ) Conversão de  $\tau$  em data do calendário gregoriano:

Ver exemplo apresentado deste cálculo no livro *Astronomical Algorithms* de Jean Meeus

( folhas em anexo ).

( 6 ) Conversão dos ângulos  $I$  ,  $\Omega$  e  $w$  de radianos para graus:

$$I = I \times \frac{180^\circ}{\pi}$$

$$\Omega = \Omega \times \frac{180^\circ}{\pi}$$

$$w = w \times \frac{180^\circ}{\pi}$$

( 7 ) Variáveis de saída:

- $a$
- $exc$
- $I$
- $\Omega$
- $w$
- $\tau$

### 5.3 Programas e Aplicações

Os programas referentes aos algoritmos anteriores estão em anexo com os nomes **programa 1** e **programa 2**. Os programas foram feitos em IDL (Interactive Data Language) e devem ser tomados apenas como um exemplo. No **programa 1** são determinadas as posições e velocidades de objectos em órbita elíptica em torno do Sol quando conhecidos os elementos orbitais. Neste exemplo as coordenadas encontradas estão no referencial eclíptico. Através de uma mudança de coordenadas é possível passar para outro referencial como o equatorial ou mesmo o horizontal. Este último permitiria ao observador conhecer a posição e a evolução do objecto no céu durante a noite. Este problema não está, no entanto, no âmbito deste trabalho.

Para testar o programa foi usada uma tabela com os elementos orbitais de cometas

(ver tabela em anexo), tendo sido determinada a posição eclíptica e a velocidade do cometa aquando da sua passagem pelo periélio. Note-se, no entanto, que essas coordenadas podem ser obtidas para qualquer outro instante, tendo contudo de se determinar primeiro a anomalia média para esse instante.

Na tabela 5.1 estão reproduzidos os elementos orbitais de dois cometas tomados da tabela apresentada em anexo. Na escolha foi considerado um cometa com pequena excentricidade e outro com excentricidade próxima de 1.

**Tabela 5.1:** Elementos orbitais dos cometas Faye e Hale-Bopp, e data das suas passagens no periélio

	Faye	Hale-Bopp
exc	0.567945	0.994941
$a$	$1.659055/(1-exc)$	$0.917329/(1-exc)$
$I$	9.0463	89.4431
$\Omega$	199.3452	282.2408
$w$	205.0404	130.6269
anomalia media	0.0	0.0
data	6 Maio 1999, 1.92h	31 Marco 1997, 16.04h

Os resultados obtidos com o **programa 1** estão indicados na Tabela 5.2. As variáveis usadas são as mesmas das apresentadas no algoritmo.

**Tabela 5.2:** Vectores posição e velocidade dos cometas obtidos com o programa1. As distâncias estão em unidades astronómicas e as velocidades em  $\text{kms}^{-1}$ . O período está em anos

	Faye	Hale-Bopp
XX	1.1885355	-0.12002736
YY	1.1522422	0.58515634
ZZ	-0.11040994	0.69618819
VXX	-20.145041	-7.3394398
VYY	20.384334	32.518506
VZZ	-4.1246742	-28.597648
distancia	1.6590566	0.91732900
velocidade	28.954389	43.922046
Periodo	7.52508	2441.84

Para testar os resultados obtidos, o melhor é resolver o problema inverso **algoritmo 2** tomando os dados da tabela anterior. O programa correspondente a esse algoritmo

tem o nome de **programa 2** (ver anexo). Os resultados obtidos com o **programa 2** são apresentados na Tabela 5.3. A data corresponde à passagem do cometa no periélio.

**Tabela 5.3:** Elementos orbitais recuperados usando as coordenadas referidas na tabela anterior

	Faye	Hale-Bopp
exc	0.56794506	0.99494511
$a$	3.8399210	181.47321
$I$	9.0463076	89.443100
$\Omega$	199.34534	282.24084
$w$	-154.95972	-229.15102
data (ano,mes,dia,hora)	1999.,5.,6.,2.3	1997.,3.,31.,16.04

Comparando as tabelas 5.1 e 5.3 pode-se concluir que o programa funciona de forma correcta. Há pequenas diferenças que ocorrem e que estão relacionados com a precisão da máquina em que é corrido o programa. As dificuldades aumentam para excentricidades próximas de 1, pelo que, neste caso, talvez fosse preferível aproximar a órbita a uma órbita parabólica. Quando a excentricidade é próxima de 1, a determinação do semi-eixo maior está sujeita a maiores erros. Embora isso pouco afecte os restantes elementos orbitais, verifica-se que pode originar grandes diferenças no período da órbita. O caso de Hale-Bopp é disso um bom exemplo. Embora consigamos recuperar os elementos orbitais, temos uma pequena diferença no semi-eixo maior (cerca de 0.1ua). Em relação ao cálculo do período da órbita verifica-se que esse pequeno erro é importante, pois obtemos uma diferença de cerca de 4 anos. Porém, em termos relativos o erro continua a ser pequeno, pois o período do cometa Hale-Bopp é cerca de 2442 anos.

# Capítulo 6

## Actividades

Neste capítulo é apresentada uma ficha de trabalho constituída por um conjunto de exercícios sobre o Problema dos dois corpos. A selecção dos exercícios teve como principal objectivo criar condições que permitam ao estudante consolidar e aprofundar os conhecimentos relativos ao Problema dos dois corpos e, simultaneamente, promover a sua realização individual e autonomia.

É apresentada, também, uma resolução dos exercícios, de forma clara e rigorosa, não sendo, todavia, tais resoluções únicas, uma vez que há certamente outros processos de responder às questões, eventualmente, mais fáceis e originais.

Por último, apresentam-se 5 actividades experimentais relacionadas com o tema em questão. Cada experiência contém:

- O objectivo básico da experiência a realizar
- A lista de materiais necessários para a realização da experiência
- O procedimento, isto é, a sequência das instruções dos vários passos da experiência e respectiva ilustração;
- Uma explicação dos resultados;
- O porquê, onde é dada uma explicação dos resultados em termos acessíveis, fornecendo uma informação em termos científicos.

## 6.1 Ficha de Trabalho

### Problema dos dois corpos

---

1. A órbita de um satélite terrestre é representada pela equação:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

sendo os eixos de simetria da elipse os eixos  $Ox$  e  $Oy$  e tomando para unidade de distância o raio equatorial da Terra.

Determine:

- (a) O comprimento do semi-eixo maior e a excentricidade da órbita.
- (b) A distância do satélite ao centro da Terra, em função da anomalia verdadeira.
- (c) O período de revolução.
- (d) A velocidade radial do satélite quando a anomalia verdadeira é  $60^\circ$ .
- (e) A velocidade de escape à superfície da Terra.

**Considere:**  $G = 6.672 \times 10^{-8} \text{ cm}^2 \text{ g}^{-1} \text{ s}^{-2}$  ,  $M_\Theta = 5.9742 \times 10^{27} \text{ g}$  e  $R_\Theta = 6378 \text{ km}$

2. Sendo  $a$  o comprimento do semi-eixo maior e  $e$  a excentricidade da órbita de um satélite artificial da Terra, mostre que as distâncias do Perigeu e do Apogeu são as raízes da equação:

$$x^2 - 2ax + a^2 (1 - e^2) = 0$$

3. Um cometa move-se numa órbita elíptica de excentricidade 0.985.

Compare a sua velocidade no periélio e no afélio.

4. O satélite artificial terrestre "Explorer I" tinha, no perigeu a velocidade de  $\dot{2}9\ 600$  km/h quando a sua distância à superfície da Terra era de 360 km. Determine a sua velocidade no apogeu, sabendo que então se encontrava a uma distância de  $\dot{2}\ 500$  km. Qual a razão entre as correspondentes velocidades angulares?

**NOTA:** Considere a Terra esférica e com raio igual a 6 378 km.

5. Pretende-se enviar uma sonda da Terra para Marte numa órbita heliocêntrica que no periélio e no afélio seja tangente, respectivamente, à órbita da Terra e de Marte. Considerando que as órbitas dos planetas são circulares e sabendo que Marte completa uma revolução em torno do Sol em 686.98 dias, determine:

- (a) O semi-eixo maior, em unidades astronómicas, e a excentricidade da órbita.  
(b) O acréscimo de velocidade que foi dado ao satélite aquando do seu lançamento.  
(c) O tempo que o satélite demora a chegar à órbita de Marte.

**Considere:**  $G = 6.672 \times 10^{-8} \text{ cm}^2 \text{ g}^{-1} \text{ s}^{-2}$  ,  $M_{\odot} = 1.989 \times 10^{33} \text{ g}$

6. Determine a excentricidade da órbita do cometa "Haneda-Campos", sabendo que o seu período de revolução em torno do Sol é de 5.97 anos e a sua distância ao Sol no periélio é de 1.101 u.a.

**Considere:**  $G = 6.672 \times 10^{-8} \text{ cm}^2 \text{ g}^{-1} \text{ s}^{-2}$  ,  $M_{\odot} = 1.989 \times 10^{33} \text{ g}$

7. No Clube de Astronomia da escola da Rita foi pedido aos alunos para que escrevessem uma pequena história relacionada com a Astronomia. A Rita decidiu escrever uma sobre um cometa imaginário, o "Cometinha". Na sua história, ela descreve o seu cometa como tendo um período de revolução em torno do Sol de 2 anos e cuja distância máxima ao Sol é de  $820 \times 10^6$  km.

O Nuno, ao lê a história da Rita, comentou que o "Cometinha" nunca poderia ser real. Terá razão o Nuno?

**Considere:**  $G = 6.672 \times 10^{-8} \text{ cm}^2 \text{ g}^{-1} \text{ s}^{-2}$  ,  $M_{\odot} = 1.989 \times 10^{33} \text{ g}$

8. O cometa "Spitaler" possui uma órbita elíptica em torno do Sol, no plano da eclíptica, passando no afélio a uma distância de 5.06 u.a. do Sol e com uma velocidade de 34 685 km/h.

Determine:

- (a) A excentricidade da órbita do cometa.
- (b) O período de revolução em torno do Sol.

**Considere:**  $G = 6.672 \times 10^{-8} \text{ cm}^2 \text{ g}^{-1} \text{ s}^{-2}$  ,  $M_{\odot} = 1.989 \times 10^{33} \text{ g}$

9. Uma sonda em movimento em torno do Sol tem uma órbita que no periélio é tangente à órbita da Terra e que no afélio é tangente à órbita de um planeta cujo período de revolução é  $x$  anos. Desprezando os efeitos gravitacionais dos planetas e considerando as órbitas dos planetas circulares, mostre que o tempo que o satélite leva a passar da órbita da Terra para a órbita do planeta exterior é:

$$t = \frac{(1 + x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}}{2^{\frac{5}{2}}} \text{ anos}$$

10. A excentricidade da órbita elíptica de um satélite artificial terrestre é 0.2 e a distância da superfície da Terra ao satélite quando este se encontra no perigeu é 1 800 km.

- (a) Calcule o período de rotação do satélite.
- (b) Determine a massa do Sol.

**Considere:**  $G = 6.672 \times 10^{-8} \text{ cm}^2 \text{ g}^{-1} \text{ s}^{-2}$  ,  $M_{\oplus} = 5.9742 \times 10^{27} \text{ g}$  e  $R_{\oplus} = 6378 \text{ km}$

11. Um satélite artificial é colocado em órbita a 500 km da superfície da Terra e ejectado a uma velocidade  $V$ .
- Mostre que o período do satélite não depende da direcção da sua velocidade.
  - Qual deverá ser a velocidade de ejeção para que o seu período orbital seja de 12 horas?
  - Considere que o ponto de partida está a  $30^\circ$  do pericentro da órbita elíptica do satélite.
    - Qual é a excentricidade da órbita?
    - Qual a direcção da velocidade nesse ponto?
  - Mostre que a variação do período de revolução do satélite, quando o semi-eixo maior da sua órbita sofre um pequeno acréscimo,  $\Delta a$ , é:

$$\Delta T = \frac{3 T \Delta a}{2a}$$

**Considere:**  $G = 6.672 \times 10^{-8} \text{ cm}^2 \text{ g}^{-1} \text{ s}^{-2}$  ,  $M_{\oplus} = 5.9742 \times 10^{27} \text{ g}$  e  $R_{\oplus} = 6378 \text{ km}$

12. Sejam  $a$  e  $e$ , respectivamente, o semi-eixo maior e a excentricidade da órbita elíptica de um satélite artificial terrestre em torno da Terra.
- Determine os pontos da órbita do satélite para os quais é máximo o valor da componente radial da velocidade do satélite. Calcule essa velocidade tomando  $a = 10000 \text{ km}$  e  $e = 0.2$ .
  - Mostre que a variação do período de revolução do satélite quando a velocidade sofre um pequeno acréscimo  $\Delta V$  é:

$$\Delta T = 3 V \Delta V \sqrt[3]{\frac{T^5}{(2 \mu \pi)^2}}$$

13. Os planetas Terra e Marte possuem períodos siderais de 365.25 e 686.99 dias, respectivamente.

(a) Determine o semi-eixo maior da órbita de Marte em torno do Sol.

(b) Estime o valor da massa de Marte, sabendo que Deimos, um dos satélites de Marte, possui um período orbital de 1.262 dias e semi-eixo maior igual a  $23.48 \times 10^3$  km.

**Considere:**  $G = 6.672 \times 10^{-8} \text{ cm}^2 \text{ g}^{-1} \text{ s}^{-2}$ ,  $a_{\oplus} = 1 \text{ u.a.}$  e  $T_{\oplus} = 1 \text{ ano}$

14. A excentricidade da órbita de Mercúrio é 0.2 e o seu semi-eixo maior tem comprimento 0.4 u.a. Supondo que a órbita da Terra é circular e desprezando o ângulo dos dois planos orbitais, determine, em km, a maior e a menor distância entre a Terra e Marte.

## 6.2 Resolução da Ficha de Trabalho

### Problema dos dois corpos

---

**Nota:** Nesta resolução irão ser usados os símbolos  $\odot$  e  $\ominus$  que se referem, respectivamente, ao Sol e à Terra.

1. A órbita de um satélite terrestre é representada pela equação:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

- (a) Sejam  $a$  e  $e$  comprimento do semi-eixo maior e a excentricidade da órbita, respectivamente.

Da equação da órbita tem-se que:

$$a_1^2 = 9 \text{ e } b_1^2 = 4$$

Ou seja

$$a_1 = 3 \text{ e } b_1 = 2$$

$$\text{Ora, } a = a_1 \times R_{\ominus} = 3 \times 6378 = 19134 \text{ km.}$$

$$e = \frac{c}{a} \text{ sendo } c = c_1 \times R_{\ominus} \text{ e } c_1^2 = a_1^2 - b_1^2 = 5$$

$$\text{Logo } e = \frac{\sqrt{5}}{3} \sim 0.745$$

- (b) A distância do satélite ao centro da Terra, em função da anomalia verdadeira,  $f$ , é dada pela expressão:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos f}$$

Substituindo  $a$  e  $e$  pelos valores obtidos na alínea anterior, tem-se que:

$$r = \frac{19134 \times (1 - 0.745^2)}{1 + 0.745 \cos f} = \frac{8514.15}{1 + 0.745 \cos f} \text{ km}$$

(c) Seja  $T$  o período de revolução do satélite:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \quad (1.1)$$

com  $\mu = G(M_{\Theta} + m_s)$ . Como  $m_s \ll M_{\Theta}$  então  $\mu \sim G M_{\Theta}$  em que  $m_s$  representa a massa do satélite.

Assim substituindo em (1.1) os valores:

$a = 19134 \times 10^5 \text{ cm}$  e  $\mu = 3.9859 \times 10^{20} \text{ cm}^3 \cdot \text{s}^{-2}$  vem:

$$T = 26340.58 \text{ s} = 7.317 \text{ h}$$

(d) Seja  $V_r$  a velocidade radial do satélite:

$$V_r = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\mu p} e \sin f \quad (1.2)$$

sendo  $p = a(1 - e^2)$  e  $f$  a anomalia verdadeira.

Fazendo em (1.2):

$$a = 18134 \times 10^5 \text{ cm}$$

$$\mu = 3.9859 \times 10^{20} \text{ cm}^3 \cdot \text{s}^{-2}$$

$$e = 0.745$$

$$f = 60^\circ$$

obtém-se:

$$V_r = 441447.86 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$$

(e) Seja  $V_e$  a velocidade de escape à superfície da Terra.

$$V_e = \sqrt{2 \frac{\mu}{R_{\Theta}}} \quad (1.3)$$

Substituindo em (1.3) os valores:

$$\mu = 3.9859 \times 10^{20} \text{ cm}^3 \cdot \text{s}^{-2}$$

$$R_{\Theta} = 6378 \times 10^5 \text{ cm}$$

obtém-se:

$$V_e = 1117984.91 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$$

2.

- Por um lado, as raízes da equação:

$$x^2 - 2ax + a^2 (1 - e^2) = 0$$

são:

$$x = a \pm \sqrt{a^2 - a^2 (1 - e^2)} = a \pm \sqrt{a^2 e^2} \Leftrightarrow$$

$$x = a(1 - e) \vee x = a(1 + e)$$

- Por outro lado, considerando que as distâncias no perigeu e no apogeu são, respectivamente,  $r_P$  e  $r_A$  (figura 6.1):

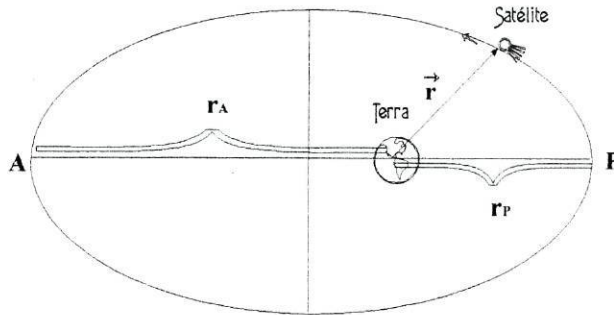


Figura 6.1: Esquema ilustrativo do exercício 2.

Temos que:

$$\text{No perigeu, } r_P = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos 0^\circ} = a(1 - e)$$

$$\text{No apogeu, } r_A = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos 180^\circ} = a(1 + e)$$

Portanto, as raízes da equação dada são as distâncias no apogeu e no perigeu, como se pretendia provar.

3. Consideremos que  $e$  é a excentricidade do cometa,  $V_P$  e  $V_A$  são as velocidades no periélio e no afélio, respectivamente.

$$\text{Sabe-se que } V^2 = \mu \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

- No afélio,  $r_A = a(1 + e)$

$$\text{Portanto } V_A^2 = \mu \left( \frac{2}{a(1 + e)} - \frac{1}{a} \right) = \frac{\mu}{a} \frac{1 - e}{1 + e}$$

- No periélio,  $r_P = a(1 - e)$

$$\text{Portanto } V_P^2 = \mu \left( \frac{2}{a(1 - e)} - \frac{1}{a} \right) = \frac{\mu}{a} \frac{1 + e}{1 - e}$$

Assim:

$$\left( \frac{V_P}{V_A} \right)^2 = \left( \frac{1 + e}{1 - e} \right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{V_P}{V_A} = \frac{1 + e}{1 - e}$$

$$V_P = \frac{1 + e}{1 - e} V_A$$

Como  $e = 0.985$ , tem-se que:

$$V_P = 132, (3) V_A$$

4. Sejam ( figura 6.2 ):

$V_P$  e  $V_A$  as velocidades no perigeu e no apogeu, respectivamente

$r_P$  e  $r_A$  as distâncias no perigeu e apogeu, respectivamente

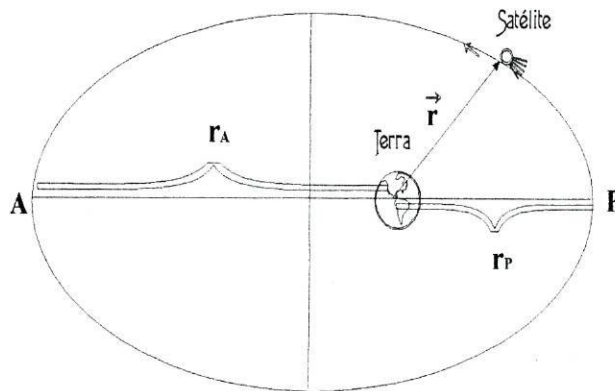


Figura 6.2: Esquema ilustrativo do exercício 4.

$$r_P = a(1 - e) \text{ e } r_A = a(1 + e)$$

$$\text{Logo } V_P^2 = \frac{\mu}{a} \frac{1 + e}{1 - e} \text{ e } V_A^2 = \frac{\mu}{a} \frac{1 - e}{1 + e}$$

$$\left( \frac{V_P}{V_A} \right)^2 = \left( \frac{1 + e}{1 - e} \right)^2 \Leftrightarrow \frac{V_P}{V_A} = \frac{1 + e}{1 - e} \Leftrightarrow V_A = \frac{1 - e}{1 + e} V_P$$

$$\text{Mas } \frac{r_P}{r_A} = \frac{1 - e}{1 + e}$$

Portanto  $V_A = \frac{r_P}{r_A} V_P$

Como:

$$r_P = 360 + 6378 = 6738 \text{ km}$$

$$r_A = 2500 + 6378 = 8878 \text{ km}$$

$$V_P = 29600 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$$

Tem-se que:

$$V_A = 22465.06 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$$

5. Dados do problema:

Período de Marte:  $T_M = 686.98 \text{ dias} = 686.98 \times 24 \times 3600 \text{ s}$

Período da Terra:  $T_\Theta = 1 \text{ ano} = 365.25 \times 24 \times 3600 \text{ s}$

Semi-eixo maior da Terra:  $a_\Theta = 1 \text{ u.a.} = 1.496 \times 10^{13} \text{ cm}$

Constante de gravitação:  $G = 6.672 \times 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{ g}^{-1} \text{ s}^{-2}$

Massa do Sol:  $M_\odot = 1.989 \times 10^{33} \text{ g}$

o esquema ilustrativo deste problema é o que se apresenta na figura 6.3:

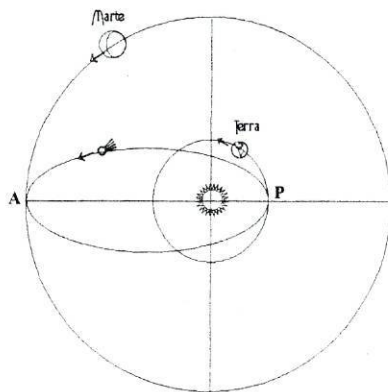


Figura 6.3: Esquema ilustrativo do exercício 5.

(a) Sejam  $a$  o semi-eixo maior,  $e$  a excentricidade da órbita e  $a_M$  o semi-eixo maior de Marte.

$$2a = a_M + a_\Theta \Leftrightarrow a = \frac{a_M + a_T}{2}$$

O período de revolução de Marte é :

$$T_M = 2 \pi \sqrt{\frac{a_M^3}{\mu}} \Leftrightarrow T_M^2 = 4 \pi^2 \frac{a_M^3}{\mu}$$

sendo  $\mu = G M_{\odot}$  pois  $M_M \ll M_{\odot}$

Resolvendo a equação anterior em ordem a  $a_M$ , obtém-se:

$$a_M = \sqrt[3]{\frac{\mu T_M^2}{4 \pi^2}}$$

$$\text{Então } a_M = 2.279 \times 10^{13} \text{ cm} = \frac{2.279 \times 10^{13}}{1.496 \times 10^{13}} \text{ u.a.} = 1.525 \text{ u.a.}$$

Logo, o semi-eixo maior da órbita é:

$$a = \frac{1.525 + 1}{2} = 1.262 \text{ u.a.}$$

Em relação à excentricidade, tem-se que:

$$a_{\Theta} = a (1 - e) \Leftrightarrow e = 1 - \frac{a_{\Theta}}{a}$$

Logo, a excentricidade da órbita é:

$$e = 0.208$$

- (b) Seja  $\Delta V$  o acréscimo de velocidade que foi dado ao satélite aquando o seu lançamento.

$$\text{Ora } \Delta V = V_P - V_c$$

sendo  $V_P$  e  $V_c$  as velocidades no periélio e circular, respectivamente.

Sabemos que:

$$V^2 = \mu \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

Logo:

$$V_c^2 = \mu \left( \frac{2}{a_{\Theta}} - \frac{1}{a_{\Theta}} \right) = \frac{\mu}{a_{\Theta}} \quad (5.1)$$

$$V_P^2 = \mu \left( \frac{2}{a(1-e)} - \frac{1}{a} \right) = \frac{\mu}{a} \frac{1+e}{1-e} \quad (5.2)$$

Dividindo (5.2) por (5.1):

$$\frac{V_P^2}{V_c^2} = \frac{a_\Theta}{a} \frac{1+e}{1-e} \Leftrightarrow \frac{V_P}{V_c} = \sqrt{\frac{a_\Theta}{a} \frac{1+e}{1-e}}$$

Portanto:

$$V_P = \sqrt{\frac{a_\Theta}{a} \frac{1+e}{1-e}} V_c$$

Substituindo pelos valores dados:

$$V_P = \sqrt{\frac{1}{1.262} \cdot \frac{1.208}{0.792}} V_c = 1.09 V_c$$

e

$$V_c = \frac{G M_\odot}{a_T} = \frac{1.327 \times 10^{26}}{1.496 \times 10^{13}} = 8.870 \times 10^{12} \text{ cm s}^{-1}$$

Logo:

$$\Delta V = 7.983 \times 10^{11} \text{ cm s}^{-1}$$

(c) Seja  $t$  o tempo que o satélite demora a chegar à órbita de Marte:

$$t = \frac{T}{2} = \pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$$

Ou seja

$$t = \pi \sqrt{\frac{(1.262 \times 1.495 \times 10^{13})^3}{1.327 \times 10^{26}}} = 22349367.28 \text{ s} = 258.67 \text{ dias}$$

6. Seja  $e$  a excentricidade da órbita do cometa "Haneda-Campos".

O período de revolução em torno do Sol é  $T = 5.97$  anos

A distância ao Sol no periélio é  $r_P = 1.101 \text{ u.a.}$

Sabemos que :

$$r_P = a(1-e) \Leftrightarrow e = 1 - \frac{r_P}{a} \quad (6.1)$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \quad (6.2)$$

sendo  $\mu \sim G M_\odot$  pois  $M_\odot \gg M_{\text{cometa}}$

Resolvendo a equação (6.1) em ordem a  $a$ , tem-se:

$$a = \sqrt[3]{\frac{\mu T^2}{4 \pi^2}} \quad (6.3)$$

Substituindo ( 6.3 ) na equação ( 6.1 ), obtem-se:

$$e = 1 - \frac{r_P}{\sqrt[3]{\frac{\mu T^2}{4 \pi^2}}}$$

Fazendo:

$$\mu = G M_{\odot} = 1.327 \times 10^{26} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-2}$$

$$r_P = 1.101 \times 1.496 \times 10^{13} \text{ cm}$$

$$T = 5.97 \times 365.25 \times 24 \times 3600 \text{ s}$$

Vem:

$$e = 0.665$$

7. Dados do problema:

$$T = 2 \text{ anos}$$

$$r_A = 820 \times 10^6 \text{ km}$$

$$T = 2 \pi \sqrt{a^3 \mu} \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{\frac{\mu T^2}{4 \pi^2}} \quad (7.1)$$

sendo  $\mu \sim G M_{\odot}$  pois  $M_{\odot} \gg M_{\text{cometa}}$

$$r_A = a(1+e) \Leftrightarrow e = \frac{r_A}{a} - 1$$

Substituindo  $a$  por ( 7.1 ), obtem-se:

$$e = \frac{r_A}{\sqrt[3]{\frac{\mu T^2}{4 \pi^2}}} - 1$$

Fazendo:

$$T = 2 \times 365.25 \times 24 \times 3600 \text{ s}$$

$$\mu = 1.327 \times 10^{26} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-2}$$

$$r_A = 820 \times 10^{11} \text{ cm}$$

Obtém-se:

$$e = 2.45$$

Como a excentricidade é maior que a unidade, a órbita do cometa é hiperbólica. Logo não tem sentido falar em período de revolução. O Nuno tem razão. O "cometinha" nunca poderá ser real.

8. Dados do problema:

Distância no afélio:  $r_A = 5.06 \text{ u.a.}$

Velocidade no afélio:  $V_A = 34685 \text{ km h}^{-1}$

O esquema ilustrativo deste problema é o que se apresenta na figura 6.4:

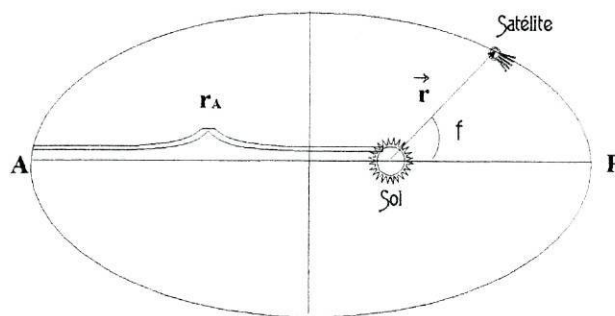


Figura 6.4: Esquema ilustrativo do exercício 8.

(a) Seja  $e$  a excentricidade da órbita do cometa

$$V^2 = \mu \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

No afélio tem-se que:

$$r_A = a(1 + e) \Leftrightarrow a = \frac{r_A}{1 + e}$$

$$V_A^2 = \mu \left( \frac{1}{r_A} - \frac{1}{a} \right) = \mu \left( \frac{2}{r_A} - \frac{1 + e}{r_A} \right) = \frac{\mu}{r_A} (1 - e)$$

Pelo que:

$$e = 1 - \frac{r_A V_A^2}{\mu}$$

Substituindo pelos dados do problema, tem-se:

$$e = 0.471$$

(b) Seja  $T$  o período de revolução do cometa em torno do Sol.

Sabemos que:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$$

sendo  $\mu \sim G M_{\odot}$ , pois  $M_{\odot} \gg M_{plan}$

Vimos que  $a = \frac{r_A}{1+e}$ , portanto:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r_A^3}{\mu(1+e)}}$$

Substituindo pelos dados do problema:

$$T = 201341229 \text{ s} = 6.38 \text{ anos}$$

9. Dados do problema:

Período do planeta:  $T_{plan} = x \text{ anos}$

Período da Terra:  $T_{\Theta} = 1 \text{ ano}$

Semi-eixo maior da Terra:  $a_{\Theta} = 1 \text{ u.a.}$

O esquema ilustrativo deste problema é o que se apresenta na figura 6.5:

Como  $M_{plan} \ll M_{\odot}$ ,  $M_{\Theta} \ll M_{\odot}$  e  $M_{sat} \ll M_{\odot}$

Então  $\mu_{plan} = \mu_{\Theta} = \mu_{sat} = \mu = G M_{\odot}$

O tempo que o satélite leva a passar da órbita da Terra para a órbita do planeta

$$\text{é } t = \frac{T_{sat}}{2} = \pi \sqrt{\frac{a_{sat}^3}{\mu}}$$

Mas:

$$a_{sat} = \frac{a_{plan} + a_{\Theta}}{2} = \frac{a_{plan}}{a_{\Theta}} + 1 a_{\Theta}$$

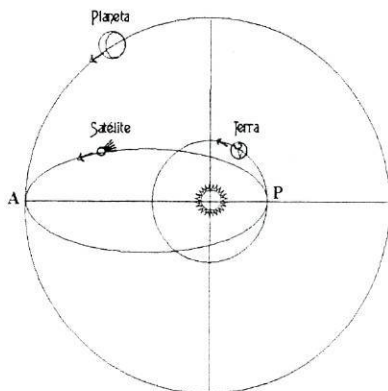


Figura 6.5: Esquema ilustrativo do exercício 9.

Sabemos que  $T^2 = 4 \pi^2 \frac{a^3}{\mu}$

Assim:

$$\left( \frac{T_{plan}}{T_{\Theta}} \right)^2 = \left( \frac{a_{plan}}{a_{\Theta}} \right)^3 \Leftrightarrow \frac{a_{plan}}{a_{\Theta}} = \left( \frac{T_{plan}}{T_{\Theta}} \right)^{2/3}$$

Pelo que:

$$a_{sat} = \frac{\left( \frac{T_{plan}}{T_{\Theta}} \right)^{2/3} + 1}{2} a_{\Theta}$$

Substituindo pelos dados do problema:

$$a_{sat} = x^{2/3} + 1 \text{ u.a.}$$

Então:

$$t = \pi \sqrt{\frac{(1 + x^{2/3})^3}{2^3 \mu}}$$

$$\text{Mas } T_{\Theta} = 2 \pi \sqrt{\frac{a_{\Theta}^3}{\mu}} \Leftrightarrow 1 = 2 \pi \sqrt{\frac{1}{\mu}} \Leftrightarrow \frac{1}{4 \pi^2} = \frac{1}{\mu} \Leftrightarrow \mu = 4 \pi^2$$

Logo

$$t = \frac{\pi}{2 \pi} \frac{(1 + x^{2/3})^{3/2}}{2^{3/2}}$$

Ou seja:

$$t = \frac{(1 + x^{2/3})^{3/2}}{2^{5/2}} \text{ anos}$$

10. Dados do problema:

Excentricidade da órbita do satélite:  $e = 0.2$

Distância da superfície da Terra ao satélite no perigeu:  $d = 1800 \text{ km} = 1.8 \times 10^8 \text{ cm}$

(a) Seja  $T$  o período de rotação do satélite.

$$T = 2 \pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$$

sendo  $\mu = G M_{\Theta}$  pois  $M_{\Theta} \gg M_{sat}$

A distância do perigeu é  $r_p = d + R_{\Theta} = 8.178 \times 10^8 \text{ cm}$

Sabemos que:

$$r_p = a(1 - e) \Leftrightarrow a = \frac{r_p}{1 - e} = \frac{8.178 \times 10^8}{0.8} = 10.2225 \times 10^8 \text{ cm}$$

Portanto:

$$T = 2 \pi \sqrt{\frac{10.2225 \times 10^8}{3.9872 \times 10^{20}}} = 10284.46 \text{ s} = 2.86 \text{ h}$$

(b) Sabemos que:

$$T = 2 \pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \Leftrightarrow \mu = 4 \pi^2 \frac{a^3}{T^2}$$

Para o sistema Terra-satélite, temos:

$$G (M_{\Theta} + m_{sat}) = 4 \pi^2 \frac{a^3}{T^2} \quad (10.1)$$

Para o sistema Sol-Terra, temos:

$$G (M_{\Theta} + M_{\odot}) = 4 \pi^2 \frac{a_{\Theta}^3}{T_{\Theta}^2} \quad (10.2)$$

Como  $M_{\Theta} \ll M_{\odot} \wedge m_{sat} \ll M_{\Theta}$

Então:

$$G (M_{\Theta} + M_{\odot}) \sim G M_{\odot} \wedge G (M_{\Theta} + m_{sat}) \sim G M_{\Theta}$$

Assim:

$$\frac{G M_{\odot}}{G M_{\Theta}} = \frac{4 \pi^2 a_{\Theta}^3 T^2}{4 \pi^2 a^3 T_{\Theta}^2} \Leftrightarrow \frac{M_{\odot}}{M_{\Theta}} = \left(\frac{a_{\Theta}}{a}\right)^3 \left(\frac{T}{T_{\Theta}}\right)^2$$

Portanto:

$$M_{\odot} = \left(\frac{a_{\Theta}}{a}\right)^3 \left(\frac{T}{T_{\Theta}}\right)^2 M_{\Theta}$$

Substituindo pelos dados do problema:

$$M_{\odot} = \left( \frac{1.495 \times 10^{13}}{10.2225 \times 10^8} \right)^3 \left( \frac{2.86}{8766} \right)^2 M_{\oplus}$$

Obtém-se o valor da massa do Sol:

$$M_{\odot} = 1.9897 \times 10^{33} \text{ g}$$

11. Dados do problema:

Distância da superfície da Terra ao satélite:  $d = 500 \text{ km} = 5 \times 10^7 \text{ cm}$

(a) Seja  $T$  o período do satélite.

Sabemos que:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \quad \text{e} \quad V^2 = \mu \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

sendo  $\mu \sim G M_{\oplus}$  pois  $m_{sat} \ll M_{\oplus}$

Das relações anteriores, temos que:

$$a = \frac{1}{\mu \left( \frac{2}{r} - \frac{V^2}{\mu} \right)}$$

Portanto, o período do satélite é:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{1}{\left( \frac{2}{r} - \frac{V^2}{\mu} \right)^3}}$$

Pela relação anterior, pode-se concluir que o período do satélite,  $T$ , depende apenas do quadrado da sua velocidade. Logo é independente da direcção.

(b) Sejam:

$V$  a velocidade de ejeção

$$T = 12 \text{ h} = 43200 \text{ s}$$

Sabemos que:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$$

sendo  $\mu \sim G M_{\Theta}$  pois  $m_{sat} \ll M_{\Theta}$

Da relação anterior, temos que:

$$a = \sqrt[3]{\mu \left( \frac{T}{2\pi} \right)^2}$$

Assim:

$$V^2 = \mu \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) = \mu \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{\sqrt[3]{\mu \left( \frac{T}{2\pi} \right)^2}} \right)$$

Ora  $r = R_{\Theta} + d = 6.878 \times 10^8 \text{ cm}$

Substituindo pelos dados do problema, obtém-se:

$$V^2 = 3.987 \times 10^{20} \left( \frac{2}{6.878 \times 10^8} - \frac{1}{\sqrt[3]{3.987 \times 10^{20} \left( \frac{43200}{2\pi} \right)^2}} \right) =$$

$$10^{12} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-2}$$

Logo:

$$V = 10^6 \text{ cm s}^{-1} = 10 \text{ km h}^{-1}$$

O satélite deverá ser ejectado com uma velocidade de, aproximadamente,  $10 \text{ km h}^{-1}$  para que o seu período seja de  $12 \text{ h}$ .

(c) O esquema ilustrativo deste problema é o que se apresenta na figura 6.6:

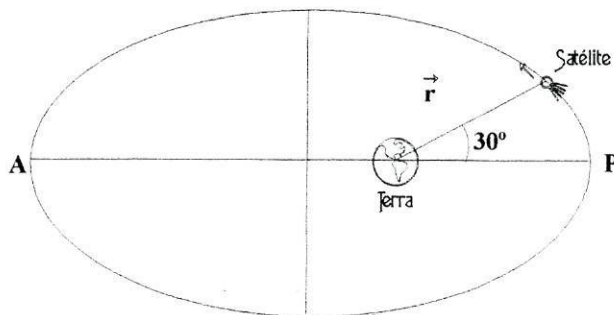


Figura 6.6: Esquema ilustrativo do exercício 11-c.

Anomalia verdadeira:  $f = 30^\circ$

i.  $e = ?$

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos f} \Leftrightarrow a e^2 + r \cos f e + r - a = 0$$

Trata-se de uma equação completa do segundo grau em  $e$ . Aplicando a fórmula resolvente, tem-se:

$$e = \frac{-r \cos f \pm \sqrt{(r \cos f)^2 - 4a(1 - a)}}{2a}$$

Substituindo pelos valores.

$$r = 6.878 \times 10^8 \text{ cm}$$

$$f = 30^\circ$$

$$a = \sqrt[3]{\frac{\mu T^2}{4\pi^2}} = 2.661 \times 10^9 \text{ cm}$$

Obtém-se:

$$e = \frac{-0.5975 \times 10^9 \pm 5.355 \times 10^9}{5.322 \times 10^9}$$

Como  $e > 0$ , apenas nos interessa a solução positiva, pelo que:

$$e = 0.894$$

ii. Seja  $\theta$  a direcção da velocidade nesse ponto.

Esquemáticamente ( figura 6.7 ):

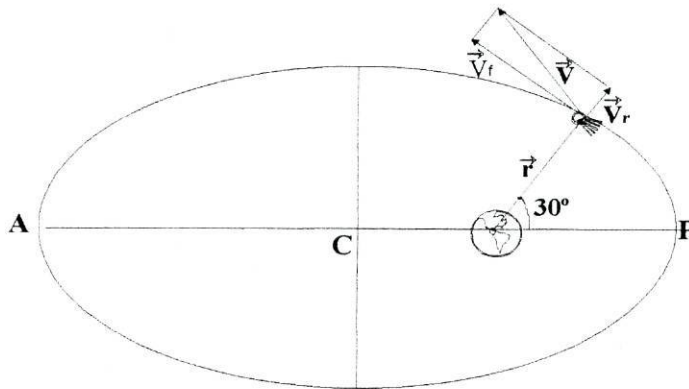


Figura 6.7: Esquema ilustrativo do exercício 11-cii.

Da figura 6.7:

$$\sin \theta = \frac{V_r}{V} \Leftrightarrow \theta = \arcsin \frac{V_r}{V}$$

Precisamos de conhecer a velocidade radial do satélite,  $V_r$ .

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt} \vec{e}_r + r \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_\theta$$

Então:

$$V_r = \frac{dr}{dt} = \frac{h}{p} e \sin f \quad e \quad h^2 = \mu p$$

Portanto:

$$V_r = \frac{\sqrt{\mu p}}{p} e \sin f = \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin f \quad \text{sendo } p = a(1 - e^2)$$

Substituindo pelos dados do problema:

$$V_r = \sqrt{\frac{3.987 \times 10^{20}}{2.661 \times 10^9 (1 - 0.894^2)}} 0.894 \sin 30^\circ = 3.862 \times 10^5 \text{ cm s}^{-1}$$

Logo:

$$\theta = (22.72)^\circ$$

(d) Acréscimo do semi-eixo maior  $\Delta a$

Acréscimo do período  $\Delta T$

Sabemos que:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \Leftrightarrow T^2 = 4\pi^2 \frac{a^3}{\mu}$$

Derivando:

$$2T \Delta T = \frac{4\pi^2}{\mu} 3a^2 \Delta a \Leftrightarrow \Delta T = \frac{4\pi^2}{\mu} \frac{3a^2}{2T} \Delta a = \left( \frac{4\pi^2}{\mu} a^3 \right) \frac{3}{2aT} \Delta a$$

Ou seja:

$$\Delta T = \frac{3T}{2a} \Delta a$$

12. Sejam  $a$  e  $e$ , respectivamente, o semi-eixo maior e a excentricidade da órbita elíptica de um satélite artificial terrestre em torno da Terra.

(a) Dados do problema:

$$a = 10000 \text{ km}$$

$$e = 0.2$$

Sabemos que a velocidade radial,  $V_r$  é dada pela expressão:

$$V_r = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin f = \frac{h}{p} e \sin f$$

Para determinar os pontos da órbita do satélite para os quais é máximo o valor da componente radial da velocidade do satélite, vamos calcular os zeros da derivada da velocidade:

$$\frac{dV_r}{dt} = \frac{h}{p} e \cos f \frac{df}{dt} = 0$$

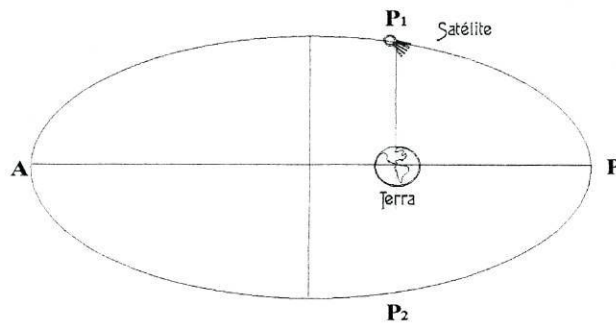
Mas  $r^2 \frac{df}{dt} = h$

Pelo que:

$$\frac{df}{dr} = \frac{h}{r^2} \Leftrightarrow \frac{h}{p} e \frac{h}{r^2} \cos f = 0 \Leftrightarrow \cos f = 0$$

Logo:

$$f = \frac{\pi}{2} \vee f = \frac{3\pi}{2}$$



**Figura 6.8:** Esquema ilustrativo do exercício 12.

Em  $P_1$  e em  $P_2$  o valor de  $r$  é  $r = a(1 - e^2)$  ( figura 6.8 ).

Determinemos o valor da velocidade radial nos pontos anteriores.

As velocidades radiais em  $P_1$  e em  $P_2$  são iguais em módulo mas de sentidos contrários. Assim:

$$|V_r| = \sqrt{\frac{\mu}{p}} e = \sqrt{\frac{\mu}{a(1 - e^2)}}$$

Substituindo pelos dados do problema, obtém-se:

$$|V_r| = 128873 \text{ cm s}^{-1} = 1.29 \text{ km s}^{-1}$$

(b) Acréscimo da velocidade:  $\Delta V$

Acréscimo do período:  $\Delta T$

Sabemos que:

$$V^2 = \mu \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

Derivando:

$$2 V \Delta V = \mu \frac{1}{a^2} \Delta a \Leftrightarrow \Delta a = \frac{2V a^2}{\mu} \Delta V$$

$$\text{Mas } T^2 = 4 \pi^2 \frac{a^3}{\mu}$$

Derivando:

$$2 T \Delta T = 4 \pi^2 \frac{3a^2}{\mu} \Delta a \Leftrightarrow \Delta T = \frac{3T}{2a} \Delta a$$

Substituindo  $\Delta a$

$$\Delta T = 3 T V \frac{a}{\mu} \Delta V$$

$$\text{Como } a^3 = \frac{T^2 \mu}{4 \pi^2} \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{\frac{T^2 \mu}{4 \pi^2}}$$

Então:

$$\Delta T = 3 V \Delta V \sqrt[3]{\frac{T^2 \mu}{4 \pi^2} \frac{T^3}{\mu^3}}$$

Ou seja:

$$\Delta T = 3 V \Delta V \sqrt[3]{\frac{T^5}{(2 \pi \mu)^2}}$$

13. Dados do problema:

$$\text{Período da Terra: } T_{\oplus} = 365.25 \text{ dias}$$

$$\text{Período de Marte: } T_M = 686.99 \text{ dias}$$

(a) Seja  $a_M$  o semi-eixo maior da órbita de Marte em torno do Sol.

O período de revolução de Marte é:

$$T_M = 2 \pi \sqrt{\frac{a_M^3}{\mu}}$$

sendo  $\mu = G M_{\odot}$  pois  $M_M \ll M_{\odot}$ .

O período de revolução da Terra é:

$$T_{\Theta} = 2 \pi \sqrt{\frac{a_{\Theta}^3}{\mu}}$$

sendo  $\mu = G M_{\odot}$  pois  $M_{\Theta} \ll M_{\odot}$

Elevando ao quadrado ambas as relações e, depois dividindo uma pela outra, obtém-se:

$$\left(\frac{T_M}{T_{\Theta}}\right)^2 = \left(\frac{a_M}{a_{\Theta}}\right)^3 \Leftrightarrow a_M = a_{\Theta} \sqrt[3]{\left(\frac{T_M}{T_{\Theta}}\right)^2}$$

Como  $a_{\Theta} = 1 \text{ u.a.}$  e substituindo pelos dados do problema:

$$a_M = 1.524 \text{ u.a.}$$

(b) Dados do problema:

Período orbital de Deimos:  $T = 1.262 \text{ dias}$

Semi-eixo maior de Deimos:  $a = 23.48 \times 10^3 \text{ km} = 23.48 \times 10^8 \text{ cm}$

O período de revolução de Deimos é:

$$T = 2 \pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \Leftrightarrow T^2 = 4 \pi^2 \frac{a^3}{\mu}$$

sendo  $\mu = G M_M$  pois  $M_{\text{Deimos}} \ll M_M$

O período de revolução de Marte é:

$$T_M = 2 \pi \sqrt{\frac{a_M^3}{\mu_M}} \Leftrightarrow T_M^2 = 4 \pi^2 \frac{a_M^3}{\mu_M}$$

sendo  $\mu_M = G M_{\odot}$  pois  $M_M \ll M_{\odot}$

Dividindo uma relação pela outra:

$$\left(\frac{T}{T_M}\right)^2 = \left(\frac{a}{a_M}\right)^3 \frac{\mu_M}{\mu} \Leftrightarrow \frac{M_M}{M_{\odot}} = \left(\frac{T_M}{T}\right)^2 \left(\frac{a}{a_M}\right)^3$$

Ou seja:

$$M_M = M_{\odot} \left(\frac{T_M}{T}\right)^2 \left(\frac{a}{a_M}\right)^3$$

Mas não nos é dada a massa do Sol. Para determinarmos  $M_{\odot}$  vamos recorrer ao sistema Sol-Terra:

O período de revolução da Terra em torno do Sol é:

$$T_{\Theta} = 2 \pi \sqrt{\frac{a_{\Theta}^3}{\mu_{\Theta}}} \Leftrightarrow T_{\Theta}^2 = 4 \pi^2 \frac{a_{\Theta}^3}{\mu_{\Theta}}$$

sendo  $\mu_{\Theta} = G M_{\odot}$  pois  $M_{\Theta} \ll M_{\odot}$

Como:

$$T_{\Theta} = 1 \text{ ano} = 31557600 \text{ s}$$

$$a_{\Theta} = 1 \text{ u.a.} = 1.495 \times 10^{13} \text{ cm}$$

Então:

$$M_{\odot} = \frac{4 \pi^2 a_{\Theta}^3}{G T_{\Theta}^2} = 1.985 \times 10^{33} \text{ g}$$

Logo:

$$M_M = 6.439 \times 10^{26} \text{ g}$$

14. Dados do problema:

Excentricidade da órbita de Mercúrio:  $e = 0.2$

Semi-eixo maior da órbita de Mercúrio:  $a = 0.4 \text{ u.a.} = 0.4 \times 1.496 \times 10^{13} \text{ cm}$

Semi-eixo maior da Terra:  $a_{\Theta} = 1 \text{ u.a.} = 1.496 \times 10^{13} \text{ cm}$

Sejam  $d_M$  e  $d_m$  as distâncias máxima e mínima, respectivamente, entre a Terra e Mercúrio ( figura 6.9 ).

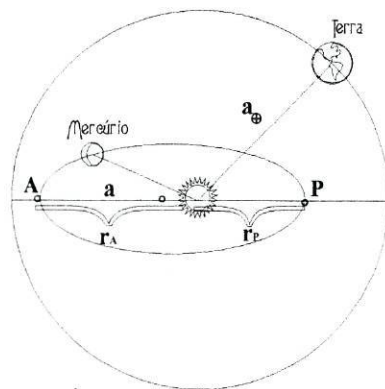


Figura 6.9: Esquema ilustrativo do exercício 14.

$$d_m = a_{\Theta} - r_A = a_{\Theta} - a(1 + e)$$

$$d_M = a_\Theta - r_P = a_\Theta - a(1 - e)$$

em que  $r_A$  e  $r_P$  representam as distâncias ao afélio e ao periélio, respectivamente, da órbita de Mercúrio.

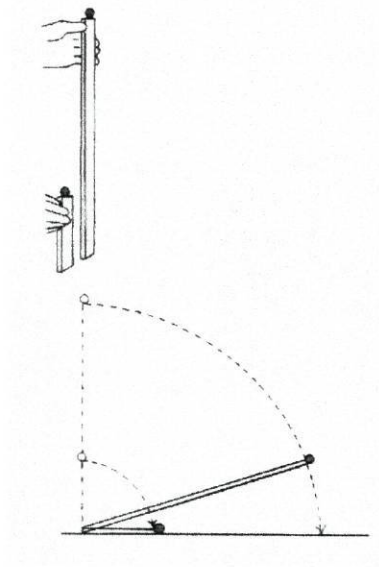
Substituindo pelos dados do problema, obtém-se:

$$d_m = 7.7792 \times 10^7 \text{ km} \quad e \quad d_M = 1.017 \times 10^8 \text{ km}$$

## 6.3 Actividades experimentais

### Experiência 1: Quanto mais curto, melhor

**Objectivo:** Determinar como a distância afecta o período de revolução de um planeta.



**Figura 6.10:** Figura alusiva à experiência 1

**Materiais:** Duas régua de comprimento diferente e plasticina.

#### **Procedimento:**

- Coloque uma bola de plástico ( forma de uma noz ) na extremidade de cada régua.
- Segure as régua verticalmente, lado a lado, sem deixar cair as bolas de plasticina.
- Largue ambas as régua ao mesmo tempo.

**Resultado:** A régua mais curta choca com o solo primeiro.

**Porquê?:** A bola de plasticina da régua mais comprida encontra-se no solo a uma distância maior do centro ( a outra extremidade da régua ) que a outra bola. Esta situação é, pois, semelhante ao movimento dos planetas, que estão continuamente a rodar à volta do Sol. O planeta Mercúrio, que está mais próximo do Sol ( 57.96 milhões de km ), demora apenas 88 dias ( terrestres ) a efectuar uma volta completa em torno

do Sol, enquanto que o planeta Plutão que está a uma distância de 2.305 milhões de quilómetros do Sol, necessita de 248 anos ( terrestres ) para completar o seu período de translacção ( tempo de movimento à volta do Sol ).

## Experiência 2: Curvas e mais curvas

**Objectivo:** Demonstrar o efeito de forças no movimento orbital.

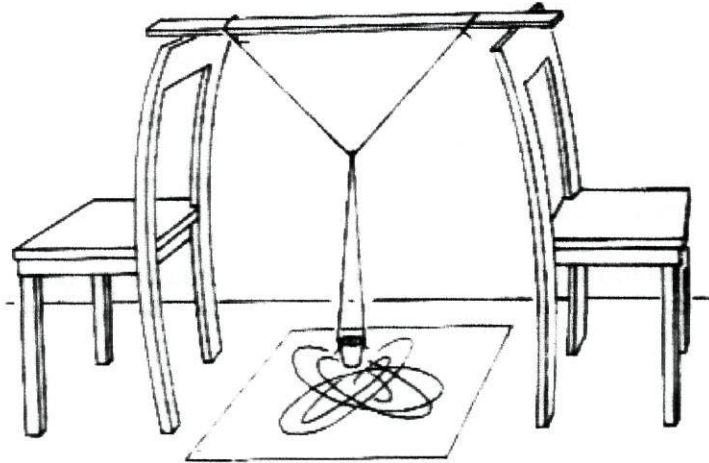


Figura 6.11: Figura alusiva à experiência 2

### Materiais:

- Lápis
- Duas cadeiras
- Régua
- Fio
- Copo pequeno de papel
- Fita-cola
- Tesoura
- Sal da cozinha
- Papel de cartolina de cor escura

### Procedimento:

- Separe as duas cadeiras e fixe com fita-cola as extremidades da régua na parte superior das costas de cada cadeira.

- Corte dois pedaços de fio com um metro de comprimento.
- Ate ambas as pontas de um dos pedaços do fio à régua de modo a formar apoio em V. Fixe as pontas do fio com fita-cola.
- Coloque o segundo pedaço de fio em V e fixe cada uma das pontas ao bordo do copo de papel de modo que o copo fique a uma altura aproximadamente de 10 centímetros do solo.
- Coloque o papel de cartolina sobre o copo suspenso.
- Encha o copo com sal da cozinha.
- Com a ponta do lápis faça alguns furos na base do copo de papel.
- Empurre o copo e liberte-o de modo que ele balance.

**Resultado:** O sal ao cair traça na cartolina várias curvas diferentes enquanto o copo balança.

**Porquê?:** O copo traça várias trajectórias em consequência das forças que actuam sobre ele. Quando liberto, o copo, que possui algum movimento pendular ( para trás e para a frente ) rectilíneo, é puxado pelo apoio em V noutra direcção e é sujeito sempre ao efeito da aceleração da gravidade. Os planetas, tal como o copo, têm várias forças diferentes actuando sobre eles. Cada planeta roda sobre si, é animado de velocidade linear e é atraído por outros planetas e pela(s) sua(s) própria(s) lua(s), mas a força que prevalece provém da atracção do Sol. A combinação de todas estas forças obrigam o planeta a ter uma trajectória elíptica ( órbita ) em torno do Sol.

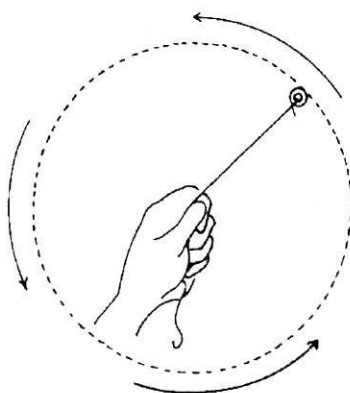
### Experiência 3: Mais ou menos veloz

**Objectivo:** Determinar o efeito da distância na velocidade orbital dos planetas.

**Materiais:** Uma anilha e fio

**Procedimento:**

- Ate a anilha na ponta de um pedaço de fio com um metro de comprimento.
- Segure na ponta do fio e estenda o braço.
- Rode o braço de modo que a anilha se desloque num movimento circular em torno do seu corpo.
- Rode a anilha a menor velocidade possível para que o fio se mantenha sempre distendido.



**Figura 6.12:** Figura alusiva à experiência 3

- Segure agora o fio pelo meio e rode à menor velocidade possível para manter o cordel esticado.
- Segure no fio a aproximadamente 25 centímetros da anilha e repita o passo anterior.

**NOTA:** Esta experiência deverá ser executada numa área exterior aberta, longe de outras pessoas.

**Resultados:** À medida que o comprimento do fio vai decrescendo, a anilha tem de rodar mais vezes para que o fio se mantenha esticado.

**Porquê?:** A anilha parece deslocar-se lentamente na sua trajetória circular quando presa num fio grande, enquanto que num fio mais curto, ela roda velozmente. Estas diferenças de velocidade ( menor e maior ) é também real para os planetas consoante a sua distância ao Sol. À medida que a distância do Sol aumenta, a atracção do Sol, chamada gravidade, diminui. Mercúrio, o planeta mais próximo do Sol tem a maior velocidade orbital e Plutão, o mais afastado, tem a velocidade orbital mais lenta.

**NOTA:** Rodar a anilha ligada a um fio não é uma boa simulação verídica de como os planetas gravitam em torno do Sol, pois os planetas não estão ligados ao Sol por um fio.

## Experiência 4: Sempre em círculo?

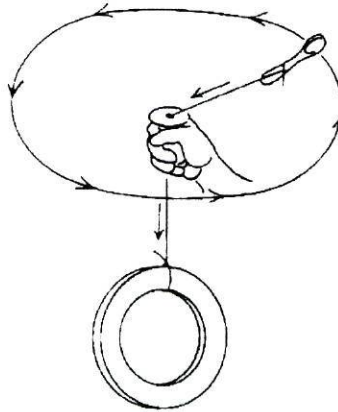


Figura 6.13: Figura alusiva à experiência 4

### Materiais:

- Rolo de fita-adesiva
- Colher de metal
- Carrinho de linhas
- Fio
- Fita métrica

### Procedimento:

- Corte um fio com um metro de comprimento.
- Ate uma ponta do fio ao rolo de fita-adesiva.
- Faça passar a outra ponta do fio por entre o buraco do carrinho de linhas.
- Ate a ponta livre do fio ( que passou pelo buraco do carrinho de linhas ) à colher.
- Segure o rolo de fita-adesiva com uma mão e o carrinho de linhas com a outra.
- Agite o carrinho de linhas de modo a que este comece a descrever uma trajetória horizontal circular por cima da sua cabeça.
- Liberte o rolo de fita-adesiva, de modo que este fique livremente suspenso por si próprio.
- Mantenha a colher a girar, fazendo mover continuamente o carrinho de linhas numa trajetória circular.

- Observe o movimento do rolo de fita-adesiva.

**Resultados:** A colher gira numa trajectória circular, apenas com a ajuda do peso do rolo de fita-adesiva. Saliente-se também a importância do fio, pois é através dele que este facto se verifica.

**Porquê?:** O rolo de fita-adesiva puxa o fio gerando-se uma força interior que mantém a colher na sua trajectória circular. Esta força que se desloca em direcção ao centro é chamada *força centrípeta*; a palavra centrípeta significa algo que seja direccionado para o centro. Se a força que se gera através do fio fosse removida, a colher descreveria um movimento em linha recta. Qualquer objecto que se desloque numa trajectória circular, seja ele uma colher ou um satélite, possui uma força centrípeta que mantém esse mesmo em movimento. As luas que se movimentam à volta dos planetas e os planetas que descrevem órbitas à volta do Sol, todos eles são atraídos em direcção ao corpo celeste em torno do qual circulam. A sua velocidade impede-os de se aproximarem demasiado desse corpo, e a força centrípeta, que actua no corpo móvel, impede-o que se desloque livremente no espaço.

## Experiência 5: Será que consegue escapar?

**Objectivo:** Demonstrar a velocidade de escape.

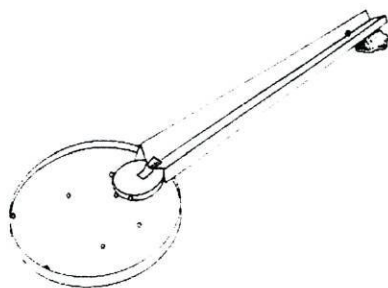


Figura 6.14: Figura alusiva à experiência 5

### Materiais:

- Íman ( qualquer forma e tamanho )
- Pequenas balas esféricas de pistola de ar
- Prato de plástico ( prato de vaso de uma planta )
- Papel de cartão
- Tesoura
- Plasticina

- Papel celofane.

### Procedimento:

- Corte um rectângulo de cartão, de dimensões  $30\text{ cm} \times 10\text{ cm}$ .
- Dobre o cartão de modo a formar a letra M.
- Alargue a parte central da letra M ( estamos a tentar fazer uma calha ).
- Coloque o íman no prato de plástico e sobre ele uma das extremidades da calha.
- Coloque um pedaço de plasticina sobre a outra extremidade da calha, de modo a formar um declive.
- Coloque a bala na extremidade mais alta da calha e liberte-a.
- Aumente o declive da calha adicionando mais plasticina à já existente.
- Liberte outra bala da extremidade mais alta da calha.
- Continue a aumentar o declive até que a bala não fique agarrada ao íman.

**Resultados:** As balas rolam e ficam agarradas ao íman quando o declive da calha não é muito grande. À medida que se aumenta o declive, as balas passam lentamente quando contactam o íman, mas ultrapassam-no ficando dentro do prato.

**Porquê?:** As balas possuem uma quantidade de movimento porque têm velocidade e massa. A quantidade de movimento é o produto da massa de um objecto pela sua velocidade. Aumentando o declive da calha, aumenta-se a velocidade da bala, e consequentemente a sua quantidade de movimento. À medida que a quantidade de movimento aumenta, torna-se mais difícil a bala ser parada pelo íman. A velocidade necessária para que a bala se liberte da força atractiva do íman designa-se por *velocidade de escape*. De modo idêntico pode ser calculada a velocidade de escape dos foguetões para se libertarem da força gravítica da Terra. A velocidade de escape é cerca de 40 000 km por hora.

# Capítulo 7

## Conclusão

A curiosidade despertada pelo céu nocturno tem fascinado e desafiado a imaginação da humanidade ao longo da sua história.

A Astronomia surgiu a partir dos esforços feitos por sucessivas gerações de pessoas que procuraram, ao longo dos séculos, interpretar o espectáculo maravilhoso e intrigante que o céu lhes proporcionava.

Um dos problemas fundamentais da Dinâmica, que tem intrigado o homem desde o início da civilização, é o do movimento dos corpos celestes e, em particular, o movimento dos planetas. Talvez um dos processos mais interessantes na história da Ciência seja o da evolução do nosso conhecimento sobre o movimento planetário.

Os gregos que consideravam o homem como o centro do Universo, admitiram que a Terra ocupava o centro geométrico do Universo e os corpos celestes moviam-se em torno dela. Tal consistia o denominado sistema geocêntrico . Embora houvesse um astrónomo grego, Aristarco de Samos ( 310 - 230 a.C. ), que defendia a hipótese de um universo heliocêntrico, o sistema geocêntrico do Universo vingou durante mais de 13 séculos, aperfeiçoado pelo grande astrónomo Cláudio Ptolomeu de Alexandria ( 100 - 170 d.C. ).

No século XVI, Copérnico ( 1473 - 1543 ) propôs um sistema do Universo, tendo o Sol no centro e a Terra a mover-se, tal como os outros planetas, em torno dele - sistema heliocêntrico. Observações posteriores de Tycho Brahe ( 1546 - 1601 ) e de Galileo ( 1564 - 1642 ) mostraram incoerências no modelo geocêntrico e permitiram o estabelecimento do modelo correcto como aquele em que todos os planetas orbitam em torno do Sol.

Mais tarde, Kepler ( 1571 - 1630 ) descobriu as leis do movimento planetário, como consequência da sua cuidadosa análise das medidas astronómicas de Tycho. Tais leis inspiraram Isaac Newton ( 1642 - 1727 ), que formulou as leis básicas da dinâmica. A partir do estudo dos movimentos planetários, Newton criou uma descrição precisa e matemática da força de gravidade.

Mas talvez a maior contribuição de Newton foi a descoberta da interação gravitacional, isto é, a interação entre corpos, planetas ou partículas, que produz um movimento, que pode ser descrito pelas leis de Kepler.

As três leis de Newton são os princípios dinâmicos que substituem os "movimentos naturais" e os "movimentos violentos" da mecânica aristotélica.

Newton foi o primeiro a formular e a resolver o **problema dos dois corpos**, que consiste no seguinte: *Dadas, num dado instante, a posição e a velocidade de dois corpos massivos, que se movem devido apenas à atracção gravitacional mútua e cujas massas são conhecidas, quais serão as suas posições e velocidades para um outro instante qualquer de tempo, passado ou futuro?*

Newton provou que a solução deste problema é uma secção cónica. Ao obter esta solução, generalizou a primeira lei de Kepler, pois uma secção cónica pode ser não só uma elipse, mas uma parábola ou uma hipérbole.

Se compreendermos as três leis do movimento de Newton e a sua lei da gravitação, podemos entender melhor o movimento orbital. Tais leis permitiram e permitem aos astrónomos fazer previsões sobre o movimento de corpos celestes, usando o poder analítico da matemática. É assim possível calcular o tamanho, a forma e a orientação de um corpo em torno de outro a partir da observação das coordenadas dos vectores posição e velocidade.

A descoberta de Neptuno foi disso uma prova, validando as leis no sistema solar. As leis de Newton também nos fornecem a ferramenta matemática necessária para colocar satélites em órbita da Terra, para traçar as trajectórias de sondas espaciais no sistema solar, e para definir a velocidade com que um objecto deve escapar de um planeta ou até do próprio sistema solar.

As leis de Newton alteraram a Astronomia e a nossa visão sobre a natureza. Até Newton, o colapso da visão aristotélica deixara no seu rasto apenas rumores de confusão, sem a mais remota sugestão de como substituí-la. Então apareceu Newton e, subitamente, o mundo tornou-se de novo ordenado, previsível e compreensível. Newton concebeu como ele funcionava e a prova de que tinha razão foi a sua demonstração da lei das elipses de Kepler.

Durante mais de dois séculos após a publicação dos *Principia*, o universo manteve-se inabalável. Apenas nos começos do século 20, a física de Newton foi destronada em favor da relatividade e da mecânica quântica, tal como um par de séculos antes ela eliminara a de Aristóteles do centro do universo intelectual.

Mas a segunda revolução na Física foi profundamente diferente da primeira. A primeira revolução substituiu a doutrina aristotélica por outra totalmente diferente. A segunda revolução não destronou a física newtoniana no sentido de mostrar que ela está errada, pelo contrário, reafirmou a física newtoniana, explicando porque estava certa. Depois da segunda revolução ficamos a saber não só como as leis de Newton nos dão a medida exacta de como o mundo se comporta, mas também porque razão elas funcionam tão

bem.

É por esta razão que se continua a ensinar aos estudantes a resolver problemas recorrendo à física newtoniana. É também por esta razão que me propus a resolver o problema dos dois corpos. Newton fê-lo recorrendo a processos geométricos, neste trabalho o que faço é resolver o problema recorrendo à física newtoniana, a uma geometria elementar e ao poder analítico da Matemática, tudo ao alcance de um aluno do primeiro agrupamento do Ensino Secundário.

Usando as leis de movimento e a lei de gravitação de Newton, comecei por mostrar que a trajectória de um corpo em torno de outro, corpos estes apenas sujeitos à interacção mútua, é uma secção cónica, generalizando, desta forma, a primeira lei de Kepler. Seguidamente, caracterizei matematicamente cada uma das secções cónicas, defini os elementos orbitais que caracterizam o tipo, a dimensão e a orientação da órbita no espaço e deduzi algumas relações importantes entre os diversos elementos orbitais. Além disso, verifiquei a segunda e terceira leis de Kepler.

Pelo facto de actualmente não existirem sistemas puros de dois corpos no sistema solar, facto este que complica as previsões das posições, é feita uma referencia ao problema dos N-corpos e à Teoria das Perturbações. Por exemplo, no sistema solar, a Terra é dominada pelo Sol, mas também é influenciada por Júpiter bem como por todos os outros planetas. Como resultado a Terra não consegue manter uma órbita perfeitamente elíptica nem qualquer outro corpo do sistema solar. Se quisermos calcular a órbita correcta de um planeta, é necessário ter em conta estas pequenas forças, designadas de Perturbações Gravitacionais. No entanto, as leis de Newton continuam a ser válidas e, o que na prática se faz é, em primeiro lugar, determinar a órbita elíptica de um planeta considerando que ele está apenas sob a acção do Sol - Problema dos dois corpos - e, depois, calculam-se todas as acelerações provocadas pelos outros planetas, de forma a calcularmos de que forma o semi-eixo maior, a excentricidade, a inclinação da elíptica e as outras orientações orbitais variam com o tempo, permitindo-nos prever as posições planetárias no futuro.

Porém, numa primeira aproximação podemos considerar que o movimento dos planetas em torno do Sol é um problema dos dois corpos.

Após todos as demonstrações, deduções e explicações determinamos as expressões finais que nos permitem calcular as coordenadas do vectores posição e velocidade de um corpo na sua trajectória, conhecidos os elementos orbitais para qualquer tipo de órbita e vice-versa.

Fez-se um algoritmo, apenas para a órbita elíptica, bem como um programa em IDL. Relativamente às outras órbitas, parabólica e hiperbólica, propositadamente não foi feito nem o algoritmo nem o programa, para que seja o próprio estudante a fazê-lo como um exercício.

Para finalizar e porque este é um tema para ser tratado com os alunos do Ensino Secundário, por exemplo, no clube de Astronomia, na aula de matemática ou de

Física, é apresentada uma ficha de trabalho sobre o tema em questão de forma a que o estudante consolide aprofunde os seus conhecimentos sobre o assunto. Também se apresenta uma proposta de resolução da ficha de trabalho. Além da ficha de trabalho e sua resolução, também se apresenta um conjunto de actividades experimentais a serem realizadas pelos estudantes.

Como professora de Matemática, penso que este é um excelente tema para mostrar aos alunos que a Matemática não é uma ciência à parte, desligada da realidade. Como todo nós sabemos, a Matemática é uma das disciplinas que apresenta uma elevada percentagem de insucesso e, certamente, uma das causas do facto de a Matemática ser considerada tão "distante" e "inacessível" para muitos é o facto de, frequentemente, a sua abordagem não estar ligada a situações concretas, surgindo a ideia de que se encontra afastada da vida e que pertence unicamente ao domínio da pura abstracção.

Assim, o "problema dos dois corpos" apresenta um conjunto de problemas com significado real, sendo uma excelente oportunidade para os professores de matemática concretizarem os objectivos que presidem à implementação da Reformado Sistema Educativo, e em particular, da Área-Escola ( ou da futura Área-Projecto ), nomeadamente:

- *Concretização de saberes através de actividades e projectos multidisciplinares;*
- *articulação entre Escola e Meio;*
- *Formação pessoal e social do aluno.*

Ao mesmo tempo, o "problema dos dois corpos" visa proporcionar instrumentos a todos que têm conhecimentos de matemática que lhes permitam mobilizar num sentido operativo, o conhecimento, muitas vezes vago e difuso, de alguns dos mais importantes conceitos matemáticos leccionados no ensino secundário.

Com este tema, espero que na minha disciplina, Matemática, o aluno fique mais sensibilizado para uma visão da Matemática mais imaginativa e ligada ao real e motive ( espero! ) o estudante, e o desperte para a descoberta da Matemática em tudo o que o rodeia.

# Notas Suplementares

## S.1 - Noções elementares sobre determinantes

Um determinante é uma notação conveniente para se disporem grandezas que devem ser combinadas de certa forma simétrica.

- Um determinante de segunda ordem é um arranjo de  $2 \times 2$  de números, avaliados de acordo com a seguinte regra:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

Observemos que o que se faz é multiplicar os números dispostos nas diagonais:



e subtraír os resultados assim obtidos.

- Um determinante de terceira ordem é um arranjo de  $3 \times 3$  de números, avaliados de acordo com a seguinte regra:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

ou seja,

$$a_1 (b_2 c_3 - b_3 c_2) - a_2 (b_1 c_3 - b_3 c_1) + a_3 (b_1 c_2 - b_2 c_1)$$

## S.2 - Noções elementares sobre Produto Vectorial

### Definição

O produto vectorial ( ou externo ) de dois vectores,  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$ , é um vector,  $\vec{v}$  que:

- é perpendicular ao plano definido pelos vectores  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$ ;
- tem o sentido dado pela mão direita ou pela regra do triedro directo;
- tem como módulo ou medida o produto seguinte:

$$\| \vec{v}_1 \| \| \vec{v}_2 \| \text{sen} ( \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 )$$

O produto vectorial representa-se por  $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$  e lê-se  $\vec{v}_1$  externo  $\vec{v}_2$ .

- A regra da mão direita consiste no seguinte ( figura S.1 ):
- Estende-se o polegar na direcção e sentido de  $\vec{v}_1$ ;
- Esntendem-se os dedos médios na direcção e sentido de  $\vec{v}_2$ ;
- O vector  $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$  será perpendicular à palma da mão dirigido no sentido em que esta se desloca para dar uma palmada.

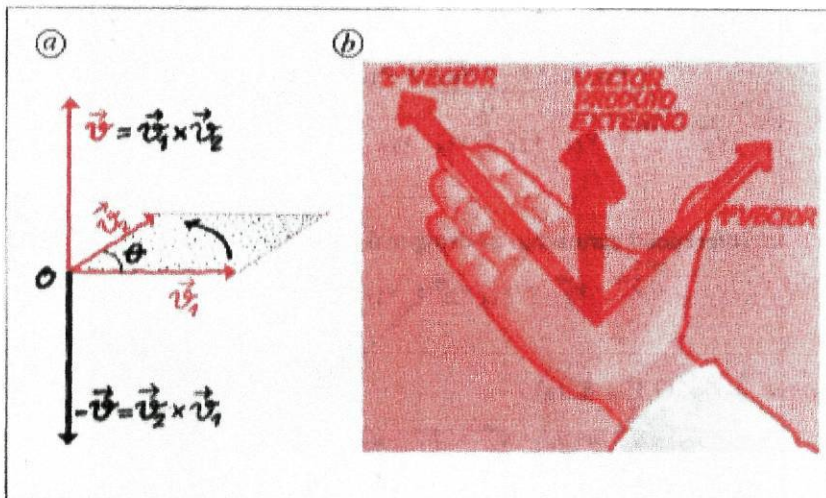


Fig. S.1: Regra da mão direita para determinar o sentido do produto vectorial de

dois vectores.

- A regra do triedro directo, que é idêntica, consiste no seguinte ( figura S.2 ):
- Orienta-se o polegar segundo o 1º vector do produto externo;
- Orienta-se o indicador segundo o 2º vector do produto externo;
- O dedo médio, colocado perpendicularmente ao plano dos outros dois, dá-nos a direcção e o sentido do vector  $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ .

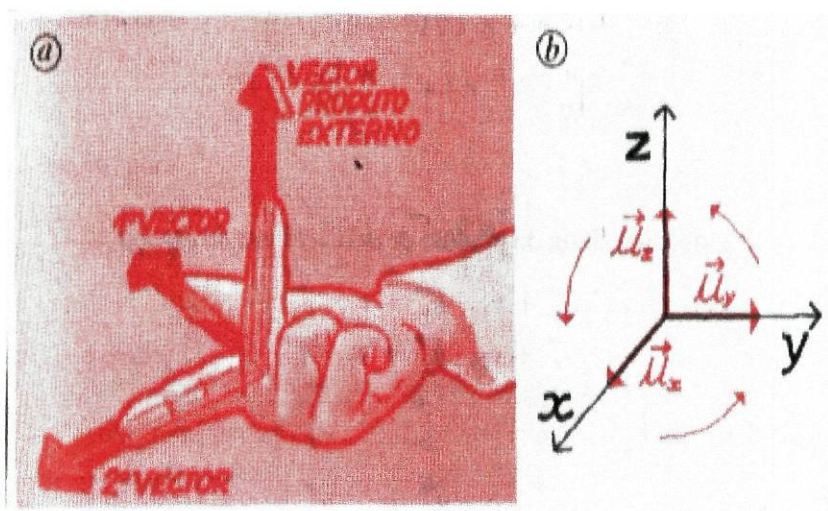


Fig. S.2:Regra do triedro directo para determinar o sentido do produto vectorial de dois vectores.

## Propriedades

Dados dois vectores,  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ , tem-se que:

- O produto vectorial não é comutativo, mas sim anti-comutativo, pois:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

- O produto vectorial goza da propriedade distributiva em relação à soma, ou seja:

$$\vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{c} \times \vec{a}) + (\vec{c} \times \vec{b})$$

## Produto vectorial e coordenadas

Seja o referencial o.n.  $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$

Os produtos vectoriais entre os vectores unitários,  $\vec{u}_x$ ,  $\vec{u}_y$  e  $\vec{u}_z$  são:

$$\vec{u}_x \times \vec{u}_y = -\vec{u}_y \times \vec{u}_x = \vec{u}_z$$

$$\vec{u}_y \times \vec{u}_z = -\vec{u}_z \times \vec{u}_y = \vec{u}_x$$

$$\vec{u}_z \times \vec{u}_x = -\vec{u}_x \times \vec{u}_z = \vec{u}_y$$

$$\vec{u}_x \times \vec{u}_x = -\vec{u}_y \times \vec{u}_y = \vec{u}_z \times \vec{u}_z = \vec{0}$$

Se escrevermos os vectores  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  em função das suas componentes:

$$\vec{a} = a_x \vec{u}_x + a_y \vec{u}_y + a_z \vec{u}_z$$

$$\vec{b} = b_x \vec{u}_x + b_y \vec{u}_y + b_z \vec{u}_z$$

vem:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (a_x b_x) (\vec{u}_x \times \vec{u}_x) + a_x b_y (\vec{u}_x \times \vec{u}_y) + a_x b_z (\vec{u}_x \times \vec{u}_z) + \\ &+ (a_y b_x) (\vec{u}_y \times \vec{u}_x) + a_y b_y (\vec{u}_y \times \vec{u}_y) + a_y b_z (\vec{u}_y \times \vec{u}_z) + \\ &+ (a_z b_x) (\vec{u}_z \times \vec{u}_x) + a_z b_y (\vec{u}_z \times \vec{u}_y) + a_z b_z (\vec{u}_z \times \vec{u}_z) = \end{aligned}$$

Aplicando as relações anteriores, obtém-se:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{u}_x (a_y b_z - a_z b_y) + \vec{u}_y (a_z b_x - a_x b_z) + \vec{u}_z (a_x b_y - a_y b_x)$$

Esta equação pode também ser representada, na forma mais compacta de determinante por:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \vec{u}_x \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \vec{u}_y \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \vec{u}_z \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{u}_x (a_y b_z - a_z b_y) + \vec{u}_y (a_z b_x - a_x b_z) + \vec{u}_z (a_x b_y - a_y b_x)$$

### S.3 - Equações das cónicas em coordenadas polares

Uma família importante de curvas é a das cónicas. Uma cónica é definida como uma curva gerada por um ponto que se move de tal modo que a razão da sua distância a um ponto fixo, chamado Foco, pela distância a uma linha, chamada Directriz, é constante. Dependendo do facto de essa constante ( chamada excentricidade ) ser menor, igual ou maior que um, há três espécies de cónicas: Elipse, Parábola e a Hipérbole.

Designando a excentricidade por  $e$ , o foco por  $F$  e a directriz por  $HM$ , tem-se ( figura S.3 ):

$$e = \frac{\overline{PF}}{\overline{PM}}$$

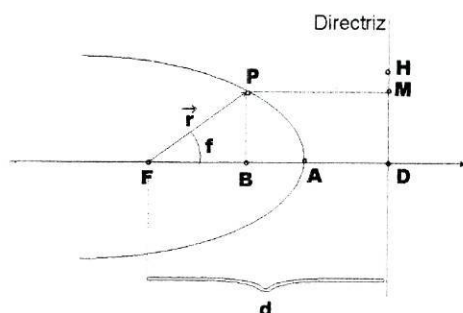


Fig. S.3: Definição de excentricidade

Fig. S.3

Seja  $r = \overline{FP}$  e  $\overline{FD} = d$

Portanto,  $e = \frac{r}{d - r \cos f}$

Resolvendo a condição anterior em ordem a  $r$ :

$$r = d e - r e \cos f \Leftrightarrow r + r e \cos f = d e \Leftrightarrow$$

$$r = \frac{d e}{1 + e \cos f}$$

Mas reparemos que ( figura S.4 ):

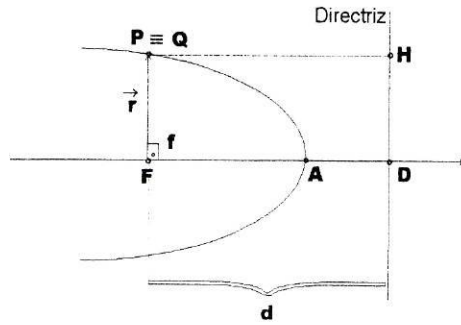


Fig. S.4: Se o corpo estiver situado em  $Q$ ,  $\overline{QH} = \overline{FD} = d$ .

Quando o ponto estiver em  $Q$  tem-se:

$$e = \frac{\overline{QF}}{\overline{QH}} \quad \text{e} \quad \overline{QH} = \overline{FD} = d$$

Fazendo  $\overline{QF} = p$ , obtém-se

$$e = \frac{p}{d} \Leftrightarrow p = d e$$

Logo:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos f}$$

## S.4 - Noções básicas de integração

### S.4.1 - Definições

**Definição 1:**

Diz-se que a função  $F(x)$  é uma primitiva da função  $f(x)$ , definida em  $I = [a, b]$ , se em qualquer elemento de  $I$  se tiver a igualdade:

$$F'(x) = f(x)$$

Verifica-se facilmente que se a função  $f(x)$  admite uma primitiva, esta última não é única.

Assim, conhecida uma primitiva qualquer  $F(x)$  da função  $f(x)$ , qualquer outra primitiva será da forma  $F(x) + C$ , em que  $C$  é uma constante.

### Definição 2:

Chama-se integral indefinido da função  $f(x)$ , que se representa por  $\int f(x) dx$ , a toda a expressão da forma  $F(x) + C$  em que  $F(x)$  é uma primitiva de  $f(x)$ .

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \quad \text{sendo } F'(x) = f(x)$$

Portanto, o integral indefinido representa uma família de funções;

$$y = F(x) + C$$

Mas, nem toda a função possui uma primitiva. Porém, toda a função contínua num intervalo  $I$ , possui uma primitiva e, por conseguinte, um integral indefinido.

O processo que permite encontrar a primitiva de uma função chama-se integração da função.

Da definição 2 resulta que:

- A derivada de um integral indefinido é igual à função a integrar, isto é,

$$\text{Se } F'(x) = f(x) \quad \text{então} \quad \left( \int f(x) dx \right)' = [F(x) + C]' = f(x)$$

- O diferencial de um integral indefinido é igual à expressão sob o sinal da soma, isto é,

$$d \left( \int f(x) dx \right) = f(x) dx$$

- O integral indefinido do diferencial duma certa função é igual à soma desta função e de uma constante arbitrária, isto é.

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

## S.4.2 - Alguns integrais

Antes de começar a exposição, muito resumida, dos diferentes métodos de integração, vejamos uma lista das primitivas de certas funções elementares.

A tabela seguinte pode ser obtida directamente a partir da definição 2.

$$1. \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad (\alpha \neq -1)$$

$$2. \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$$

$$3. \int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + C$$

$$4. \int \cos x dx = \operatorname{sen} x + C$$

$$5. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$6. \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x} = -\operatorname{cotg} x + C$$

$$7. \int \operatorname{tx} x dx = -\ln |\cos x| + C$$

$$8. \int \operatorname{cot} x x dx = \ln |\operatorname{sen} x| + C$$

$$9. \int e^x dx = e^x + C$$

$$10. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$11. \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$$

$$12. \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

$$13. \int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C$$

### S.4.3 - Algumas técnicas de integração

As propriedades enunciadas anteriormente, apesar de extremamente úteis e abrangentes, não são suficiente para a solução de vários problemas de cálculo de integrais.

Assim, vamos vêr algumas técnicas especiais de integração mais comuns.

#### I - Integração por substituição

Consideremos o seguinte integral:

$$I_1 = \int f [g (x)] g' (x) dx$$

A regra prática a ser utilizada no cálculo de integrais deste tipo é a seguinte:

( 1º ) Fazemos uma mudança de variável:

$$u = g (x) \quad , \quad du = g' (x) dx$$

Ficando o integral  $I_1$ :

$$I_1 = \int f (u) du$$

( 2º ) Calculamos o integral  $I_1$

$$\int f (u) du = F (u) + C$$

( 3º ) Voltamos a substituir  $u$  por  $g (x)$ :

★ Vejamos um exemplo:

$$I_1 = \int \text{sen}^3 x \cos x dx$$

Se  $u = \text{sen } x$  então  $du = \cos x dx$

$$I_1 = \int u^3 du = \frac{u^4}{4} + C$$

Como  $u = \text{sen } x$ , vem:

$$I_1 = \frac{\text{sen}^4 x}{4} + C$$

## II - Integração por partes

Sejam  $f$  e  $g$  duas funções deriváveis.

Assim,

$$(f \times g)' = f'g + g'f$$

Integrando ambos os membros:

$$\int (f \times g)' = \int (f'g + g'f) \Leftrightarrow f \times g = \int f'g + \int g'f$$

Ou seja,

$$\int f g' = (f \times g) - \int f' g$$

É o que se chama a Fórmula de Integração por Partes. Utiliza-se geralmente esta fórmula para a integração das expressões que se podem escrever como o produto de dois factores,  $f$  e  $g'$ , tais que a procura da função  $g$  a partir do seu diferencial  $g'$  e do cálculo do integral  $\int (f'g)$ , constituem um problema mais simples que o cálculo directo do integral  $\int (g'f)$ .

A habilidade requerida para efectuar uma escolha judiciosa dos dois factores,  $f$  e  $g'$ , necessita uma certa experiência que se adquire pela prática.

★ vejamos um exemplo:

$$I_2 = \int x \text{sen } x \, dx$$

Façamos  $f(x) = x$  e  $g'(x) = \text{sen } x$

Então:

$$f'(x) = 1 \quad \text{e} \quad g(x) = -\text{cos } x$$

Assim:

$$I_2 = (-x \text{cos } x) + \int \text{cos } x \, dx = -x \text{cos } x + \text{sen } x + C$$

NOTA: quando determinamos  $g(x)$  podemos tomar uma constante arbitrária, visto que ela não figura no resultado final. Eis porque é preferível escolher esta constante igual a zero.

## S.5 - Funções Hiperbólicas

Funções hiperbólicas são funções que resultam de determinadas combinações das funções  $e^x$  e  $e^{-x}$ .

As funções  $\sinh$ ,  $\cosh$ ,  $\tanh$  e  $\coth$  são funções hiperbólicas e definem-se como:

- $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$  : Seno Hiperbólico
- $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$  : Cosseno Hiperbólico
- $\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$  : Tangente Hiperbólica
- $\coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$  : Cotangente Hiperbólica

As duas últimas designações exprimem uma certa analogia com as funções trigonométricas. Com efeito, para as funções hiperbólicas deduzem-se fórmulas perfeitamente análogas das relativas às funções trigonométricas; muitas vezes, a única diferença é que alguns termos se distinguem pelos sinais.

Assim:

- $\tanh x = \frac{1}{\coth x} = \frac{\sinh x}{\cosh x}$
- $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
- $(\sinh x)' = \cosh x$
- $(\cosh x)' = \sinh x$

As inversas das funções hiperbólicas representam-se escrevendo o símbolo  $ar$  (leia-se: *área*) antes do símbolo da função hiperbólica respectiva. Assim:

- $y = \sinh x \Leftrightarrow x = ar \sinh y$

- $y = \cosh x \Leftrightarrow x = \operatorname{ar} \cosh y$

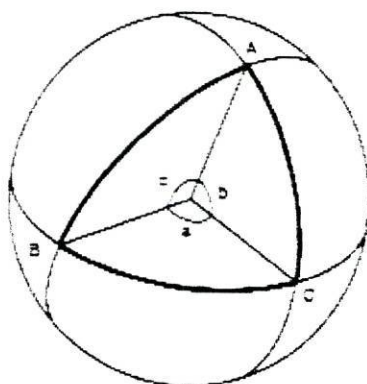
- $y = \tanh x \Leftrightarrow x = \operatorname{ar} \tanh y$

- $y = \operatorname{coth} x \Leftrightarrow x = \operatorname{ar} \operatorname{coth} y$

A designação de *área* para as inversas das funções hiperbólicas, correspondente à designação de *arco* para as inversas das funções trigonométricas, explica-se pelo facto de o argumento de uma função hiperbólica poder ser interpretado como a área duma figura plana.

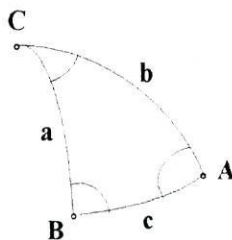
## S.6 - Trigonometria Esférica

Triângulo esférico é um triângulo definido por três pontos numa superfície esférica, tendo três arcos e três ângulos, como se pode ver na figura S.5.



**Figura S.5:** O triângulo esférico  $ABC$  é limitado por três arcos de grandes círculos,  $AB$ ,  $BC$  e  $AC$ . Os correspondentes ângulos ao centro são  $a$ ,  $b$  e  $c$ .

Consideremos o triângulo esférico da figura S.6:



**Figura S.6:** Triângulo esférico.

Num triângulo esférico:

- A soma dos ângulos internos é superior a  $180^\circ$ .

- Verifica-se a "Lei dos Senos":

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c} \quad : \text{ Lei dos Senos.}$$

- Verifica-se a Lei dos Cossenos:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B$$

$$\cos c = \cos b \cos a + \sin b \sin a \cos C$$

# Apêndice

## A.1 - Coordenadas cartesianas e coordenadas Polares

Consideremos dois referenciais o.n. com origem no mesmo ponto  $F$  e cujas bases são  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$  e  $(\vec{e}_r, \vec{e}_f)$ .

Os vectores unitários  $\vec{e}_x$  e  $\vec{e}_y$  têm as direcções dos eixos coordenados e os vectores  $\vec{e}_r$ ,  $\vec{e}_f$  têm as direcções paralela e perpendicular, respectivamente, ao vector  $\overrightarrow{FP} = \vec{r}$ , como se ilustra na figura A.1.

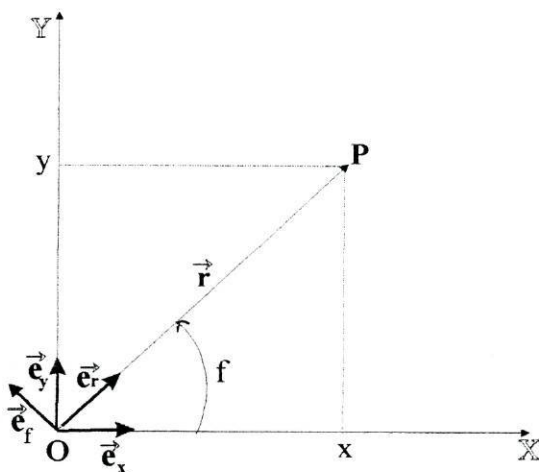


Figura A.1: Referenciais o.n.  $(F, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$  e  $(F, \vec{e}_r, \vec{e}_f)$ .

### A.1.1 - Os vectores $\vec{e}_r$ e $\vec{e}_f$ em função dos vectores $\vec{e}_x$ e $\vec{e}_y$

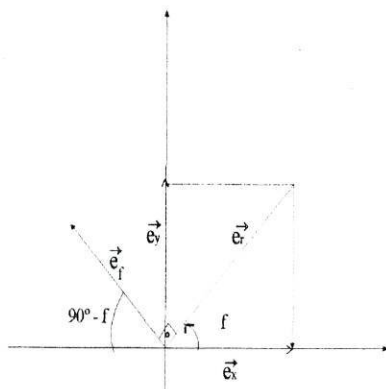


Figura A.2: Relação entre  $(F, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$  e  $(F, \vec{e}_r, \vec{e}_f)$ .

Observando a figura A.2, verifica-se que:

$$\begin{cases} \vec{e}_r = \cos f \vec{e}_x + \sin f \vec{e}_y \\ \vec{e}_f = -\cos \left( \frac{\pi}{2} - f \right) \vec{e}_x + \sin \left( \frac{\pi}{2} - f \right) \vec{e}_y \end{cases}$$

Isto é:

$$\begin{cases} \vec{e}_r = \cos f \vec{e}_x + \sin f \vec{e}_y & (\text{A.1}) \\ \vec{e}_f = -\sin f \vec{e}_x + \cos f \vec{e}_y & (\text{A.2}) \end{cases}$$

Os vectores  $\vec{e}_r$  e  $\vec{e}_f$  estão escritos em função dos vectores da base  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ .

### A.1.2 - Os vectores $\vec{e}_x$ e $\vec{e}_y$ em função dos vectores $\vec{e}_r$ e $\vec{e}_f$

A partir das relações anteriores e usando o Método de Adição Ordenada, podemos escrever os vectores  $\vec{e}_x$  e  $\vec{e}_y$  em função dos vectores  $\vec{e}_r$  e  $\vec{e}_f$ .

Assim:

$$\sin f \vec{e}_r = \sin f \cos f \vec{e}_x + \sin^2 f \vec{e}_y$$

$$\cos f \vec{e}_f = -\sin f \cos f \vec{e}_x + \cos^2 f \vec{e}_y$$

$$\sin f \vec{e}_r + \cos f \vec{e}_f = \vec{e}_y$$

e

$$\cos f \vec{e}_r = \cos^2 f \vec{e}_x + \sin f \cos f \vec{e}_y$$

$$-\sin f \vec{e}_f = \sin^2 f \vec{e}_x - \sin f \cos f \vec{e}_y$$

$$\cos f \vec{e}_r - \sin f \vec{e}_f = \vec{e}_x$$

Portanto:

$$\begin{cases} \vec{e}_x = \cos f \vec{e}_r - \sin f \vec{e}_f & (\text{A.3}) \\ \vec{e}_y = \sin f \vec{e}_r + \cos f \vec{e}_f & (\text{A.4}) \end{cases}$$

## A.2 - Relação entre coordenadas cartesianas e coordenadas polares do vector posição

Observemos novamente a figura A.1.

Designando o vector  $\overrightarrow{FP}$  por  $\vec{r}$ , ao qual chamamos vector posição podemos escreve-lo como combinação linear dos vectores da base do referencial  $(F, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ , ou seja:

$$\vec{r} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y \quad (\text{A.5})$$

Diz-se que o vector posição está escrito em coordenadas cartesianas.

Ou então podemos escreve-lo como combinação linear dos vectores da base do referencial  $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_f)$ , sendo  $\vec{e}_r$  e  $\vec{e}_f$  vectores com a direcção paralela e perpendicular, respectivamente ao vector posição,  $\vec{r}$ :

$$\vec{r} = r \vec{e}_r \quad (\text{A.6})$$

Diz-se que o vector posição está escrito em coordenadas polares

A relação entre as coordenadas cartesianas,  $(x, y)$ , e as coordenadas polares,  $(r, f)$ , é a seguinte:

$$\begin{cases} x = r \cos f \\ y = r \sin f \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

Assim, o vector posição  $\vec{r}$ , pode ser escrito como:

$$\vec{r} = r \cos f \vec{e}_x + r \sin f \vec{e}_y$$

### A.3 - Vector velocidade em coordenadas polares

Observemos a figura A.3. O vector velocidade  $\vec{V}$  é tangente à curva no ponto  $P$  e  $\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

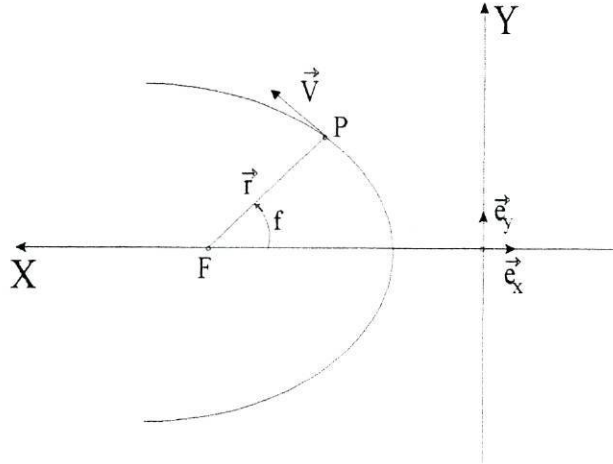


Figura A.3: Trajectória descrita por um ponto  $P$  na sua órbita.

Analogamente ao que foi feito com o vector posição o vector velocidade pode ser escrito em coordenadas cartesianas ou polares.

- Em coordenadas polares:

$$\vec{V} = \vec{V}_r + \vec{V}_f = V_r \vec{e}_r + V_f \vec{e}_f$$

- Em coordenadas cartesianas:

$$\vec{V} = \vec{V}_x + \vec{V}_y = V_x \vec{e}_x + V_y \vec{e}_y$$

sendo:

$$V_x = \frac{dx}{dt} \quad \text{e} \quad V_y = \frac{dy}{dt}$$

Derivando as equações ( A.7 ) e ( A.8 ), obtém-se:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dr}{dt} \cos f - r \sin f \frac{df}{dt}$$

$$V_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dr}{dt} \sin f + r \cos f \frac{df}{dt}$$

Portanto:

$$\vec{V} = \left( \frac{dr}{dt} \cos f - r \sin f \frac{df}{dt} \right) \vec{e}_x + \left( \frac{dr}{dt} \sin f + r \cos f \frac{df}{dt} \right) \vec{e}_y$$

Usando as relações ( A.3 ) e ( A.4 ):

$$\vec{V}_x = \left( \frac{dr}{dt} \cos f - r \sin f \frac{df}{dt} \right) ( \cos f \vec{e}_r - \sin f \vec{e}_f )$$

$$\vec{V}_y = \left( \frac{dr}{dt} \sin f + r \cos f \frac{df}{dt} \right) ( \sin f \vec{e}_r + \cos f \vec{e}_f )$$

Assim:

$$\vec{V} = \left( \frac{dr}{dt} \cos^2 f + \frac{dr}{dt} \sin^2 f \right) \vec{e}_r + \left( r \sin^2 f \frac{df}{dt} + r \cos^2 f \frac{df}{dt} \right) \vec{e}_f$$

Ou seja:

$$\vec{V} = \frac{dr}{dt} \vec{e}_r + r \frac{df}{dt} \vec{e}_f \quad ( A.9 )$$

Então as coordenadas polares do vector velocidade são:

$$V_r = \frac{dr}{dt} \quad ( A.10 )$$

$$V_f = r \frac{df}{dt} \quad ( A.11 )$$

## A.4 - Vector velocidade numa órbita

Nas notas suplementares, S.3, vimos que a equação de uma cónica em coordenadas polares é:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos f} \quad (\text{A.12})$$

sendo:

$p$  o parâmetro da cónica (  $p = \overline{QF}$  )

$e$  a excentricidade  $\left( \frac{\overline{PF}}{\overline{PM}} \right)$

$f$  o ângulo medido, no sentido anti-horário, como se ilustra na figura A.3.

A componente radial da velocidade,  $V_r$ , é dada pela equação ( A.11 ) e usando a relação ( A.12 ):

$$V_r = \frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{p}{1 + e \cos f} \right) = \frac{p e \sin f \frac{df}{dt}}{(1 + e \cos f)^2} = \frac{p^2}{(1 + e \cos f)^2} \cdot \frac{e}{p} \sin f \frac{df}{dt}$$

Introduzindo a variável  $r$ :

$$\frac{dr}{dt} = \frac{e}{p} \sin f r^2 \frac{df}{dt}$$

Designando  $r^2 \frac{df}{dt}$  por  $h$  ( no capítulo 2 veremos que esta constante tem um significado físico ), temos:

$$V_r = \frac{dr}{dt} = \frac{h e}{p} \sin f \quad (\text{A.13})$$

$$V_f = r \frac{df}{dt} = \frac{h}{r} = \frac{h}{p} (1 + e \cos f) \quad (\text{A.14})$$

Em coordenadas polares:

$$\vec{V} = \frac{h e}{p} \sin f \vec{e}_r + \frac{h}{p} (1 + e \cos f) \vec{e}_f$$

Sendo a velocidade escalar,  $V$ , dada por:

$$V^2 = V_r^2 + V_f^2 = \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + \left( r \frac{df}{dt} \right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V^2 = \left( \frac{h}{p} \right)^2 e^2 \sin^2 f + \left( \frac{h}{p} \right)^2 (1 + e \cos f)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V^2 = \left( \frac{h}{p} \right)^2 \left[ e^2 \sin^2 f + (1 + e \cos f)^2 \right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V^2 = \left( \frac{h}{p} \right)^2 \left[ e^2 \sin^2 f + 1 + e^2 \cos^2 f + 2e \cos f \right] \Leftrightarrow$$

Como  $e^2 \cos^2 f + e^2 \sin^2 f = e^2$

$$\Leftrightarrow V^2 = \left( \frac{h}{p} \right)^2 (e^2 + 1 + 2e \cos f)$$

Ou seja:

$$V^2 = \frac{h^2}{p^2} (1 + e^2 + 2e \cos f) \quad (\text{A.15})$$

# Anexo-1

## Listagem dos Programas

```

pro programa1,r,vv,d,v,periodo

; Programa para determinar a posição e velocidade de
; um objecto numa órbita elíptica quando conhecido os
; elementos orbitais.
;
;Variáveis de entrada
; a -- semi eixo maior da órbita [ua]
; exc -- excentricidade
; I -- Inclinação [graus]
; O -- Longitude do nodo ascendente [graus]
; w -- argumento do pericentro [graus]
; M -- anomalia média
; massa -- Massa do primário
;
;Variáveis de saída
; r -- vector posição [ua]
; vv -- vector velocidade [km/s]
; d -- distância entre primário e secundário (=sqrt(r*r)) [ua]
; v -- Velocidade do secundário (=sqrt(vv*vv)) [km/s]
; periodo -- periodo da órbita [anos]

common share1,exc,M

;----- Constantes -----
G=6.672e-8 ;cgs
Msol=1.989e33 ;gramas
Mterra=5.9742e27 ;gramas

;----- Constantes -----

;----- Introducao de dados -----

read,a,prompt='semi-eixo maior em ua'
read,exc,prompt='excentricidade da orbita'
read,I,prompt='Inclinacao em graus'
read,O,prompt='Longitude do nodo ascendente em graus'
read,w,prompt='argumento do pericentro em graus'
read,M,prompt='anomalia media'
read,masa,prompt='Massa sol=1, Massa Terra=2'

ua=1.496e13 ;u.a. em cm
a=a*ua ;em cm
I=I*pi/180
O=O*pi/180
w=w*pi/180

if (masa eq 1) then begin
masa=Msol
endif else begin
masa=Mterra
endif

;----- Introducao de dados -----

miu=G*masa ;Determinacao de miu

;Determinacao dos cossenos directores

cos1=cos(O)*cos(w)-sin(O)*sin(w)*cos(I)
cos2=-cos(O)*sin(w)-sin(O)*cos(w)*cos(I)
cos3=sin(O)*cos(w)+cos(O)*sin(w)*cos(I)
cos4=-sin(O)*sin(w)+cos(O)*cos(w)*cos(I)
cos5=sin(w)*sin(I)
cos6=cos(w)*sin(I)

E=fx_root([0,!pi,2*pi], 'funcao1',/double) ;Determinacao de E

;Posicao e velocidade do corpo no plano da orbita

x=a*(cos(E)-exc)
y=a*sqrt(1-exc*exc)*sin(E)

vx=-sqrt(miu/a)*sin(E)/(1-exc*cos(E))
vy=sqrt(miu*(1-exc*exc)/a)*cos(E)/(1-exc*cos(E))

;Determinacao da posicao e da velocidade no espaco

xx=x*cos1+y*cos2&xx=xx/ua ;u.a.
yy=x*cos3+y*cos4&yy=yy/ua ;u.a.
zz=x*cos5+y*cos6&zz=zz/ua ;u.a.

```

```
vxx=(vx*cos1+vy*cos2)/1.e5 ; km/s
vyy=(vx*cos3+vy*cos4)/1.e5 ; km/s
vzz=(vx*cos5+vy*cos6)/1.e5 ; km/s
```

```
;Variaveis de saida
```

```
r=[xx,yy,zz]
vv=[vxx,vyy,vzz]
```

```
d=sqrt(xx*xx+yy*yy+zz*zz) ;Determinacao da distancia ao corpo
v=sqrt(vxx*vxx+vyy*vyy+vzz*vzz) ;Determinacao da velocidade escalar
```

```
periodo=2*pi*a*sqrt(a/miu)/(365.25*24*3600) ;Período da órbita em anos
```

```
end
```

```
;-----Funcao para calculo de E -----
```

```
function funcao1,xx1
common share1,exc,M
return,xx1-exc*sin(xx1)-M
end
```

```
pro programa2.output,perodo
```

```
; Programa para determinar os elementos orbitais quando
; conhecidas a posição e velocidade do secundário numa
; órbita elíptica
;
; variáveis de entrada
; r -- vector posição
; v -- vector velocidade
; massa -- Massa do primário
; tempo=[ano,mês,dia,hora] -- Instante a que se referem os dados
;
; variáveis de saída
; ouput =[a,exc,I,O,w,taud]
; a -- semi eixo maior da órbita [ua]
; exc -- excentricidade
; I -- Inclinação [graus]
; O -- Longitude do nodo ascendente [graus]
; w -- argumento do pericentro [graus]
; taud=[ano,mês,dia,hora] -- instante passagem no pericentro
```

```
;----- Constantes -----
```

```
G=6.672e-8 ;cgs
Msol=1.989e33 ;gramas
Mterra=5.9742e27 ;gramas
```

```
;----- Constantes -----
```

```
;----- Introducao dos dados -----
```

```
read,x,y,z,prompt='Introduzir vector posicao [x,y,z] (em ua)'
read,v1,v2,v3,prompt='Introduzir vector velocidade [Vx,Vy,Vz] (em km/s)'
read,masa,prompt='Massa sol=1, Massa Terra=2'
read,tempo1,tempo2,tempo3,tempo4,prompt='[ano,mes,dia,hora], exemplo: [1999,02,16,4.23]'
```

```
;----- Conversao -----
```

```
r=[x,y,z]
v=[v1,v2,v3]
ua=1.496e13 ;unidades ast. em cm
v=v*1.e5 ;velocidade em cm/s
r=r*ua ;vector posicao em cm
```

```
if (masa eq 1) then begin
  massa=Msol
endif else begin
  massa=Mterra
endif
```

```
x=r(0)&y=r(1)&z=r(2)
v1=v(0)&v2=v(1)&v3=v(2)
```

```
;tempo em dias julianos
jdcnv,tempo1,tempo2,tempo3,tempo4,juldias
```

```
;----- Introducao dos dados -----
```

```
miu=G*masa ;Determinacao de miu
```

```
d=sqrt(total(r*r)) ;Determinacao da distancia ao objecto
vel=sqrt(total(v*v)) ;Determinacao do modulo da velocidade
```

```
;Determinacao do momento angular
```

```
h1=y*v3-z*v2&h1=h1/1e15
h2=z*v1-x*v3&h2=h2/1e15
h3=x*v2-y*v1&h3=h3/1e15
h=sqrt(h1*h1+h2*h2+h3*h3)*sqrt(1e30)&h=h/1e15 ;Modulo
```

```
d=d/1e13&miu=miu/1e13
a=d*miu/(2*miu-d*vel*vel)*1e13 ;Determinacao do semi-eixo maior
a=a/1e13
```

```
exc=sqrt(1-h*h/a/miu*1e4) ;Excentricidade
I=acos(h3/h) ;Inclinacao da orbita
```

```
;Determinacao de Omega - O
```

```
sinO=h1/h/sin(I) ;sin(Omega)
cosO=-h2/h/sin(I) ;cos(Omega)
```

```
; if h3 lt 0 then begin
;   sinO=-sinO
;   cosO=-cosO
;   endif
```

```
O=acos(cosO)
if sinO lt 0 then O=2*!pi-O
```

:Determinacao da anomalia verdadeira

```
x=x/1e13&y=y/1e13&z=z/1e13
cosf=1/exc*(a/d*(1-exc*exc)-1) ;cos(f)
if (cosf gt 1.) then cosf=round(cosf)
Vr=(x*v1+y*v2+z*v3)/d ;Velocidade radial
sinf=Vr*exc*a*(1-exc*exc)/h/1e2 ;sin(f)
```

```
f=acos(cosf)
if sinf lt 0 then f=2*!pi-f
```

:Determinacao de omega -w

```
coswf=(x*cos(O)+y*sin(O))/d ;cos(w+f)
sinwf=z/d/sin(I) ;sin(w+f) para I diferente de 0
```

```
w=acos(coswf)-f
if sinwf lt 0 then w=2*!pi-acos(coswf)-f
```

:Determinacao de tau

```
if exc lt 1 then begin ;orbita eliptica
  pp=1/exc-d/a/exc
  if (pp gt 1.) then pp=round(pp)
  E=acos(pp)
  if sinf lt 0 then E=2*!pi-E
  if (pp eq 1) then E=0
  periodo=2*!pi*sqrt(a^3/miu*1e26)/3600/24/365.25 ;periodo em anos
  tau=juldias-(E-exc*sin(E))/(sqrt(miu/a^3/1e26))/3600/24
```

```
daycnv.tau.ano.mes.dia.hora ;conversão de data juliana para calendário
endif
```

:Variaveis de saida

```
I=I*180/!pi
O=O*180/!pi
w=w*180/!pi
dia=[ano.mes.dia.hora]

output=[a/1.496,exc,I,O,w,dia]

end
```

## **Anexo-2**

**Exemplo para passar de dias julianos para  
data em calendário gregoriano**

The *Modified Julian Day* (MJD) sometimes appears in modern work, instance when mentioning orbital elements of artificial satellites. Contrary to the JD, the Modified Julian Day begins at Greenwich mean *midnight*. It is equal to

$$\text{MJD} = \text{JD} - 2400\,000.5$$

therefore  $\text{MJD} = 0.0$  corresponds to 1858 November 17 at 0<sup>h</sup> UT.

### Calculation of the Calendar Date from the JD

The following method is valid for positive as well as for negative years, but not for negative Julian Day numbers.

Add 0.5 to the JD, and let  $Z$  be the integer part, and  $F$  the fractional (decimal) part of the result.

If  $Z < 2299\,161$ , take  $A = Z$ .

If  $Z$  is equal to or larger than 2299 161, calculate

$$\alpha = \text{INT} \left( \frac{Z - 1867\,216.25}{36524.25} \right)$$

$$A = Z + 1 + \alpha - \text{INT} \left( \frac{\alpha}{4} \right)$$

Then calculate

$$B = A + 1524$$

$$C = \text{INT} \left( \frac{B - 122.1}{365.25} \right)$$

$$D = \text{INT}(365.25 C)$$

$$E = \text{INT} \left( \frac{B - D}{30.6001} \right)$$

The day of the month (with decimals) is then

$$B - D - \text{INT}(30.6001 E) + F$$

The month number  $m$  is

$$\begin{array}{ll} E - 1 & \text{if } E < 14 \\ E - 13 & \text{if } E = 14 \text{ or } 15 \end{array}$$

The year is

$$\begin{array}{ll} C - 4716 & \text{if } m > 2 \\ C - 4715 & \text{if } m = 1 \text{ or } 2 \end{array}$$

Contrary to what has been said earlier about formula (7.1), in formula for  $E$  the number 30.6001 may *not* be replaced by 30.6, even if the computer calculates exactly. Otherwise, one would obtain February 0 instead of January 31, or April 0 instead of March 31.

**Example 7.c** — Calculate the calendar date corresponding to JD 2436 116.31.

$$2436\ 116.31 + 0.5 = 2436\ 116.81$$

$$Z = 2436\ 116 \quad \text{and} \quad F = 0.81$$

Because  $Z > 2299\ 161$ , we have

$$\alpha = \text{INT} \left( \frac{2436\ 116 - 1867\ 216.25}{36524.25} \right) = 15$$

$$A = 2436\ 116 + 1 + 15 - \text{INT} \left( \frac{15}{4} \right) = 2436\ 129$$

Then we find

$$B = 2437\ 653 \quad C = 6673 \quad D = 2437\ 313 \quad E = 11$$

$$\text{day of month} = 4.81$$

$$\text{month } m = E - 1 = 10 \quad (\text{because } E < 14)$$

$$\text{year} = C - 4716 = 1957 \quad (\text{because } m > 2)$$

Hence, the required date is 1957 October 4.81.

*Exercise* : Calculate the calendar dates corresponding to JD = 1842 713.0 and JD = 1507 900.13.

Answers : 333 January 27.5 and -584 May 28.63.

### Time interval in days

The number of days between two calendar dates can be found by calculating the difference between their corresponding Julian Days.

**Example 7.d** — The periodic comet Halley passed through perihelion on 1910 April 20 and on 1986 February 9. What is the time interval between these two passages ?

$$1910 \text{ April } 20.0 \text{ corresponds to JD } 2418\ 781.5$$

$$1986 \text{ Febr. } 9.0 \text{ corresponds to JD } 2446\ 470.5$$

The difference is 27 689 days.

*Exercise* : Find the date exactly 10 000 days after 1991 July 11.

Answer : 2018 November 26.

## **Anexo-3**

**Tabela com os elementos orbitais de  
alguns cometas**

## NOTE TO VOYAGER II USERS:

The following table will link the symbols below with the names used in the Voyager II "Define New Orbit..." dialog for comets.

q	perihelion distance (astronomical units)
e	eccentricity (no units)
i	inclination of orbit to ecliptic (degrees)
Node	longitude of ascending node (degrees)
w	argument of perihelion (degrees)
L	mean anomaly (this is 0 at perihelion) (degrees)
Date	epoch of orbit
Equinox	reference equinox (usually 2000.0)

Save this page as plain text from your browser and use the table to input the orbital elements for the comets that you would like to plot and follow. If you have any question, consult your software manual or the Carina web site: <http://www.carinasoft.com>

Thanks to the IAU Minor Planet Center & Central Bureau for Astronomical Telegrams for providing this information.

Name	q	e	i	Node	w	L	T(Date)	I
Faye	1.659055	0.567945	9.0463	199.3452	205.0404	0.0	1999May6.0818	
d'Arrest	1.352496	0.612853	19.4973	138.9505	178.1244	0.0	2002Feb3.6032	
Pons-Winnecke	1.258800	0.633831	22.2843	93.4494	172.2776	0.0	2002May15.7829	
Tempel 1	1.500795	0.518631	10.5413	68.9671	178.9249	0.0	2000Jan2.5387	
Tempel 2	1.475252	0.524551	12.0106	118.0762	194.9824	0.0	1999Sep8.8760	
Wolf	2.412666	0.407371	27.5197	204.1198	162.3780	0.0	2000Nov21.1236	
Finlay	1.033962	0.710646	3.6750	41.9691	323.6339	0.0	2002Feb7.1478	
Holmes	2.165130	0.412728	19.1888	327.9382	23.4355	0.0	2000May11.9554	
Borrelly	1.358216	0.623792	30.3250	75.4247	353.3778	0.0	2001Sep14.7388	
Schaumasse	1.205005	0.704852	11.7515	79.8310	57.8731	0.0	2001May2.6570	
Neujmin 1	1.550495	0.775719	14.1902	347.0598	346.9453	0.0	2002Dec27.3388	
Schwassmann-Wachmann 1	5.720822	0.045497	9.3902	312.7338	49.3325	0.0	2004Jul15.4308	
Reinmuth 1	1.877948	0.501601	8.1304	119.7557	13.3265	0.0	2002Dec24.6281	
Schwassmann-Wachmann 2	3.407659	0.198465	4.5415	114.2244	18.3330	0.0	2002Jan17.9978	
Whipple	3.087960	0.259820	9.9299	182.4284	202.1128	0.0	2003Jul6.0621	
Forbes	1.425708	0.574793	7.2401	330.4251	314.5615	0.0	1999May8.6212	
Oterma	5.471959	0.245836	1.9424	331.5739	56.1996	0.0	2002Dec19.5495	
Tuttle-Giacobini-Kresak	1.052209	0.659343	9.2255	141.1055	62.1659	0.0	2001Jan6.9685	
Ashbrook-Jackson	2.305381	0.396108	12.5132	2.6020	348.8908	0.0	2001Jan6.5139	
Arend-Rigaux	1.367331	0.612100	18.2998	121.6688	330.6359	0.0	1998Jul13.1255	
Harrington	1.568127	0.561860	8.6562	119.1807	233.6041	0.0	2001Jun5.8881	
Van Biesbroeck	2.415031	0.551250	6.6114	149.0080	134.1577	0.0	2003Oct9.8948	
Kearns-Kwee	2.340546	0.476534	9.3499	313.0228	127.5423	0.0	1999Sep16.5407	
Shajn-Schaldach	2.330091	0.389427	6.0845	166.8809	216.6167	0.0	2001May8.9848	
Gunn	2.449031	0.317793	10.3850	68.4264	196.3028	0.0	2003May12.1421	
Churyumov-Gerasimenko	1.292799	0.631604	7.1210	50.9827	11.4028	0.0	2002Aug18.2530	
Kojima	2.003436	0.454531	6.5993	119.2975	1.9845	0.0	2000Sep14.8867	
Smirnova-Chernykh	3.545803	0.148454	6.6523	77.1571	86.6768	0.0	2001Jan15.7918	
Kohoutek	1.787289	0.496112	5.9101	269.6830	175.6861	0.0	2001Feb27.3307	
West-Kohoutek-Ikemura	1.596180	0.539761	30.4990	84.1238	0.0949	0.0	2000Jun1.2878	
Longmore	2.312061	0.358234	24.3992	15.0459	196.1983	0.0	2002Sep4.2568	
Gehrels 3	3.625875	0.128007	1.1273	239.7000	228.2997	0.0	2001Sep5.3590	
Giclas	1.846682	0.493052	7.2820	112.4765	276.4149	0.0	1999Aug24.9499	
Wild 3	2.310279	0.364441	15.4388	72.6128	179.1670	0.0	2001Jun18.6176	
Bus	2.180914	0.375095	2.5741	182.2060	24.1473	0.0	2000Dec29.7620	
Howell	1.394581	0.555230	4.3972	57.6160	234.6564	0.0	1998Sep27.8408	
Russell 2	2.289650	0.397879	12.0296	42.4869	249.2564	0.0	2002Mar23.0246	
Metcalf-Brewington	2.610866	0.456449	17.9864	186.4379	229.7137	0.0	2001Apr14.9848	
Ciffreo	1.713549	0.542309	13.0927	53.7219	358.0367	0.0	2000Apr18.3566	
Hartley 3	2.478306	0.314652	11.6888	287.7527	167.9365	0.0	2001Mar21.4039	
Spitaler	2.127265	0.423563	5.7762	14.5195	50.0568	0.0	2001Feb25.8474	
Maury	2.040537	0.520599	11.6858	176.7635	119.9424	0.0	2002Dec24.0481	
Wild 4	2.156857	0.378929	3.6321	21.5102	173.3026	0.0	2003Jan20.9802	
Helin-Roman-Alu 1	3.432214	0.207836	9.9654	70.8340	205.6354	0.0	1997Feb15.5739	
Parker-Hartley	3.041559	0.291848	5.1895	244.1504	181.2741	0.0	2005May22.5930	
Mrkos	1.465895	0.542832	31.3639	1.4449	181.2532	0.0	2002Jul27.0564	
Spacewatch	1.528963	0.511388	9.9806	153.2399	87.2812	0.0	2002Jan28.0514	
Shoemaker-Holt 1	3.051564	0.321848	4.3613	214.5016	210.5428	0.0	1997Nov21.7228	
Shoemaker-Levy 3	2.812809	0.248952	5.0104	303.6530	181.3431	0.0	1998Mar5.4099	
Mueller 2	2.417611	0.343440	7.3543	214.2706	179.9002	0.0	1997Nov22.6303	
Mueller 3	3.002953	0.287448	9.4169	137.7246	224.7298	0.0	1999Mar15.9946	
Shoemaker-Levy 2	1.867372	0.579517	4.6578	234.7527	141.9162	0.0	2000Feb5.5989	
Vaisala-Oterma	3.386507	0.247592	2.3337	242.4529	165.8202	0.0	1998Sep29.8414	
Ge-Wang	2.489202	0.500120	12.1663	176.9842	177.1036	0.0	1999Jun20.2059	
Kowal-Mrkos	2.546550	0.409175	4.6838	245.5005	320.5662	0.0	2000Jul1.7390	
Kushida	1.431228	0.628993	4.1188	245.6247	216.0311	0.0	2001Jun27.7065	
Shoemaker-Levy 5	1.988101	0.529347	11.7676	29.6724	6.1912	0.0	2000Aug16.9529	

Shoemaker-LINEAR	1.318735	0.666810	21.6190	55.3562	317.7294	0.0	2000Jul14.2732
Kushida-Muramatsu	2.752354	0.277506	2.3678	93.7535	347.5386	0.0	2001Apr29.6669
Anderson-LINEAR	1.693673	0.539522	3.6824	89.8007	6.7254	0.0	2001May1.9726
Helin	2.530838	0.565803	4.7169	143.5362	215.4107	0.0	2001Sep24.7175
Mueller 4	2.646964	0.388563	29.7472	145.3647	43.6779	0.0	2001Feb7.8663
Helin-Lawrence	3.109754	0.307054	9.8717	92.0139	163.7781	0.0	2002Dec22.9678
Hale-Bopp	0.917329	0.994941	89.4431	282.2408	130.6269	0.0	1997Mar31.6684
Meunier-Dupouy	3.052597	1.000649	91.2670	148.8879	122.7025	0.0	1998Mar10.2829
Lagerkvist-Carsenty	4.247019	0.364796	4.8349	63.1985	334.4620	0.0	1998Mar12.4945
Larsen	3.301537	0.330926	12.0889	234.8287	133.0883	0.0	1997Sep14.9594
LINEAR	2.135098	0.822873	109.7209	341.3952	236.3588	0.0	1998Nov16.4113
Mueller	3.412353	0.944772	35.6338	18.2245	165.1668	0.0	1998Aug31.7986
Larsen	5.764132	1.000953	113.4409	255.5560	20.7440	0.0	1998Jul15.9507
LINEAR	1.742520	0.996121	82.1815	333.3463	101.2928	0.0	1999Jan24.5308
Montani	5.978476	0.998446	91.5675	306.6416	9.1734	0.0	1998Oct6.7598
LONEOS-Tucker	1.885155	0.551046	17.7315	341.9355	30.1477	0.0	1998Oct6.0490
LINEAR	1.465885	0.999044	170.1525	153.3819	226.3258	0.0	1999Jun25.2742
Jager	2.133538	0.648844	19.1441	303.5004	180.9578	0.0	1999Mar10.3196
Spahr	3.846174	0.310180	31.5109	181.7281	251.9403	0.0	1999Feb27.7239
LINEAR	3.409051	0.242919	5.0302	159.2077	244.6645	0.0	1998Nov3.2824
LINEAR	4.918262	0.999347	129.1806	123.9050	6.9280	0.0	1998Oct6.6390
Li	2.522336	0.588287	24.3203	91.8138	319.1159	0.0	1998Dec17.9398
Korlevic-Juric	3.905096	0.135685	18.7172	5.9277	161.0104	0.0	1998Sep28.8930
Li	3.922325	0.760737	46.8625	127.8147	329.8568	0.0	1998Feb1.2037
Catalina	5.787313	0.999162	92.0372	20.0249	255.1531	0.0	2002Feb13.6243
Dalcanton	4.714179	0.997674	56.4215	210.2805	352.2837	0.0	1998Aug23.2541
LINEAR	4.037050	0.845455	76.2974	23.4676	135.9495	0.0	1998Jul31.7929
Lee	0.708575	0.999609	149.3573	162.6637	40.7107	0.0	1999Jul11.0619
LINEAR	3.500598	1.002534	115.8193	332.7344	101.8979	0.0	1999Aug18.0972
Skiff	7.109459	1.002257	86.4084	50.0454	127.1186	0.0	2000Apr5.7724
LINEAR	3.780400	1.000000	118.9108	264.4841	95.1591	0.0	1999Nov17.6088
LINEAR	3.710945	0.168845	13.7230	112.0152	131.9905	0.0	1999May10.7928
Ferris	5.289770	0.965071	82.2148	300.3421	4.5546	0.0	1999Apr10.3473
LINEAR	3.255527	1.001284	89.4737	106.3855	241.4917	0.0	2000Jul4.3935
LINEAR	4.201404	1.001522	52.7082	195.3893	164.6795	0.0	2000Apr24.6292
LINEAR	1.986293	0.974618	166.1088	140.4563	353.5218	0.0	2000Jan4.9207
LINEAR	5.504332	1.004325	156.9207	345.9191	90.4167	0.0	2000May23.4729
McNaught-Watson	6.466696	1.003807	65.8185	74.4672	223.4526	0.0	1997Nov21.6885
LINEAR	1.895700	0.900030	70.5493	11.8882	44.1505	0.0	1999Nov9.0393
LINEAR	0.764785	0.999618	149.3909	83.1927	151.0206	0.0	2000Jul26.1713
McNaught-Hartley	1.171717	0.999973	79.9736	182.4815	344.7581	0.0	2000Dec13.4704
LINEAR	3.037367	1.002161	111.0000	14.8833	104.6691	0.0	2000Nov24.4645
LINEAR	5.365996	0.996532	104.7536	223.5112	211.3488	0.0	2000Sep1.7992
Ferris	4.142650	0.999090	105.8174	58.2570	291.0919	0.0	1998Sep1.8400
Catalina-Skiff	4.915642	1.007944	51.9311	32.3007	77.4716	0.0	2001Oct28.1897
Catalina	2.945037	0.551155	15.5848	294.2941	186.7733	0.0	1999Oct25.3583
Korlevic	3.168019	0.316026	2.9798	290.5298	154.5849	0.0	2000Feb15.9985
LINEAR	2.773374	0.840357	14.8459	266.7255	151.3940	0.0	1999Aug6.6092
Catalina	3.286593	0.212481	5.0323	285.4554	161.8461	0.0	2000May1.6076
LINEAR	3.091180	1.000622	134.7868	188.8842	184.2856	0.0	2001Mar24.1114
Montani	9.743524	1.005052	24.5370	111.8309	14.3372	0.0	2000Jul14.6320
LINEAR	3.776036	1.000000	93.6545	284.9897	154.5683	0.0	1999Nov9.9344
LINEAR	6.830021	0.621480	15.9064	0.6367	126.1745	0.0	2000Jun15.3139
LINEAR	3.155683	0.998967	49.2077	18.9673	272.6545	0.0	2001Jun19.4783
LINEAR	2.297627	0.867110	156.9918	235.8874	117.6825	0.0	2000Mar8.6123
LINEAR	2.716730	0.809007	170.4791	328.3872	101.7505	0.0	2000Feb6.1533
LINEAR	3.636630	1.000000	118.2393	356.4441	78.7991	0.0	2000Jan28.8754
Ferris	2.542386	0.954766	98.7878	28.4368	147.2225	0.0	2000May11.3167
LINEAR	6.274911	1.001718	116.7915	260.2004	15.7651	0.0	1999Dec14.1900
LINEAR	2.437118	0.995322	25.6340	195.2599	106.8252	0.0	2000Oct11.3602
Koehn	5.922976	0.999919	148.1048	88.8851	55.2146	0.0	2000Jan28.2156
Spacewatch	2.167793	1.000000	152.4104	117.1050	256.2561	0.0	2001Aug5.0028
Skiff	2.514315	0.618816	21.0026	29.1374	308.4896	0.0	2000Jul14.8296
C/2000 S3	2.662682	0.772727	25.1597	41.1549	298.3033	0.0	2000Jul16.4292
LINEAR-Spacewatch	2.265372	0.681903	28.3258	174.6453	172.3258	0.0	2000Oct19.1028
LINEAR	3.541977	1.004735	75.2460	24.1865	76.2085	0.0	2002Apr30.4092
LINEAR	3.483828	1.009649	93.4909	65.2989	299.0205	0.0	2000Mar14.0661
Tichy	2.154702	0.431422	19.3665	24.4317	11.8420	0.0	2000Oct4.5752
Utsunomiya-Jones	0.321181	1.000000	160.1655	10.7660	51.5090	0.0	2000Dec26.5593
LINEAR	0.554822	1.000000	72.5615	237.8895	276.8168	0.0	2002Jan22.7771
Tubbiolo	7.972570	1.000000	137.9688	239.3975	181.8037	0.0	2001Feb3.3166
C/2000 Y2	2.784764	1.000000	12.0668	186.1050	325.5245	0.0	2001Mar18.5295
Scotti	4.050139	0.198688	2.2479	355.0961	89.4820	0.0	2000Nov7.7124
LINEAR	2.52385	1.000000	61.786	338.773	112.926	0.0	2000Sep25.951
LINEAR	0.77977	1.000000	36.576	295.145	295.293	0.0	2001May24.654
LINEAR	2.81871	1.000000	104.926	49.247	279.003	0.0	2000Sep2.743
NEAT	5.21621	1.000000	150.249	145.566	336.966	0.0	2001Jun6.094

## Índice de figuras

As figuras presentes neste trabalho foram retiradas de:

### Secção 1:

Figura 1.1 - Sebenta de História da Astronomia, *Paulo Maurício*

Figura 1.4 - Física-Vol.1, *Alonso Finn*

Figura 1.6 - Manual de Física 12 Ano, *Luís Silva e Jorge Valadares*, Didáctica Editora

Figura 1.7 - Sebenta de História da Astronomia, *Paulo Maurício*

Figura 1.8 - Projecto Física - Movimento nos céus, Fundação Calouste Gulbenkian

Figura 1.9 - MAT10-Vol.1, *Ana Cristina Martins et all*, Lisboa Editora

Figura 1.10 - A Lição esquecida de Feynman, *D.L.Goodstein e J.R.Goodstein*, Gradiva

Figura 1.11 - Infinito12-Parte1, Ana Maria Brito Jorge et all, Areal Editores

Figura 1.12 - MAT10-Vol.1, *Ana Cristina Martins et all*, Lisboa Editora

Figura 1.13 - MAT10-Vol.1, *Ana Cristina Martins et all*, Lisboa Editora

Figura 1.14 - Manual de Física 12 Ano, *Luís Silva e Jorge Valadares*, Didáctica Editora

Figura 1.15 - Manual de Física 12 Ano, *Luís Silva e Jorge Valadares*, Didáctica Editora

Figura 1.16 - Manual de Física 12 Ano, *Luís Silva e Jorge Valadares*, Didáctica Editora

Figura 1.17 - Manual de Física 12 Ano, *Luís Silva e Jorge Valadares*, Didáctica Editora

Figura 1.18 - Manual de Física 12 Ano, *Luís Silva e Jorge Valadares*, Didáctica Editora

Figura 1.19 - Manual de Física 12 Ano, *Luís Silva e Jorge Valadares*, Didáctica Editora

Figura 1.20 - Projecto Física - Movimento nos céus, Fundação Calouste Gulbenkian

### Secção 2:

Figura 2.12 - Orbital Motion

### Secção 6:

Figura 6.10 - Astronomia para jovens, *Janice VanCleave*, PublicaçõesDom Quixote

Figura 6.11 - Astronomia para jovens, *Janice VanCleave*, PublicaçõesDom Quixote

Figura 6.12 - Astronomia para jovens, *Janice VanCleave*, PublicaçõesDom Quixote

Figura 6.13 - Astronomia para jovens, *Janice VanCleave*, Publicações Dom Quixote

Figura 6.14 - Astronomia para jovens, *Janice VanCleave*, Publicações Dom Quixote

**Notas Suplementares:**

Figura S.1 - Manual de Física 12 Ano, *Luís Silva e Jorge Valadares*, Didáctica Editora

Figura S.2 - Manual de Física 12 Ano, *Luís Silva e Jorge Valadares*, Didáctica Editora

Figura S.5 -

# Bibliografia

- Lang, Kenneth R. ,*Astrophysical Data: Planets and Stars* - Springer-Verlag
- Swamy, K S Krishna, *Physics os Comets*
- Alonso & Finn, *Física - Volume I*, Editora Edgard Blücher,Lda
- Goodsteien, David L. & Goodsteis, Judith R.,*A lição esquecida de Feynman* - Gradiva
- Silva, Luís & Valadares, Jorge ,*Manual de Física - Campos e Ondas* - Didáctica Editora
- Fundação Calouste Gulbenkian, *Projecto Física - Unidade 2*
- Fundação Calouste Gulbenkian, *Lições de Cálculo Diferencial e Integral - Vol. I*
- Karttunen, H. et all, *Fundamental Astronomy*,Springer
- Zeilik, Michael, *The Evolving Universe*, John & Jonh, Inc.
- Seeds, Michael A., *Foundations of Astronomy*
- Hartmann, William K., *Astronomy: The Cosmic Journey*, Wadsworth Publishing Company
- Roy, *Orbital Motion*
- Roy, *Astronomy - Principles and Practice*
- Kaufmann, W., *Universe*, Freeman and Company
- Unsold, A. e Baschec, B., *The new Cosmos*
- Pasachoff, Jay M. and Percy, John R., *The teaching of Astronomy*
- Kaler, James B., *Astronomy!*, Harper Colins College Publishers
- Shirley, James H. & Fairbridge, Rhodes W., *Encyclopedia of Planetary Sciences*
- Oliveira, Ant Marmo e Silva, Agostinho, *Biblioteca da Matemática Moderna* - Tomo I, Editora Lisa, S.A.
- Vida e Ciência, *O Universo: O infinito mais próximo*, Círculo de Leitores
- Clark, Stuart, *A Astrofísica* - Círculo de Leitores
- VanCleave, Janice, *Astronomia para jovens*, Publicações Dom Quixote
- Feynman Richard, *O que é uma lei física?*, Gradiva

*The Physical Universe - An Introduction to Astronomy*

Meeus, Jean, *Astronomical Algorithms*, Willmann-Bell, Inc.

Thurston, H., *Early Astronomy*

Programa Oficial de Matemática do Ensino secundário - ME

Programa Oficial de Física do Ensino secundário - ME

Projectos Educativos no Ensino Secundário - ME

Modelação no Ensino da Matemática - APM