
FCUP
Dep. Matemática Pura

**Métodos geométricos em teoria
das equações diferenciais**

Tese de Mestrado

Mestrado em Matemática - Fundamentos e Aplicações

Ano lectivo de 2001/02

Mário Alexandre Duarte Magalhães
Porto, Portugal



Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

Mário Alexandre Duarte Magalhães

Métodos geométricos em teoria das equações diferenciais

Dissertação apresentada à Faculdade de Ciências da Universidade do Porto para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática – Fundamentos e Aplicações, realizado sob a orientação científica do Professor Doutor João Nuno Tavares, Professor Associado do Departamento de Matemática Pura da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto.

ÍNDICE

1	Introdução	3
2	Simetrias clássicas das equações diferenciais	5
2.1	Espaço de Jactos $J^k(\pi)$	5
2.2	A distribuição de Cartan	6
2.3	Variedades integrais da distribuição de Cartan	12
2.4	Transformações de Lie	16
2.5	Campos de Lie	21
2.6	Simetrias clássicas	26
2.7	Cálculo das simetrias da equação de Burgers	28
3	Geometria Formal e Simetrias Generalizadas das Equações Diferenciais	32
3.1	Os espaços de jactos infinitos $J^\infty(\pi)$	32
3.1.1	Campos de vectores	33
3.1.2	Formas Diferenciais	36
3.1.3	A distribuição de Cartan em $J^\infty(\pi)$	36
3.2	Um exemplo	38
3.2.1	O bicomplexo variacional de \mathcal{E}_1	39
3.2.2	A \mathcal{C} -sucessão espectral	41
3.2.3	Campos de vectores. Simetrias	44
3.3	O bicomplexo variacional livre. Exemplos	47
3.4	O prolongamento infinito de uma equação diferencial	52
3.5	Simetrias Generalizadas	56
3.5.1	Cálculo de $\text{Sim}(E)$. Simetrias da equação trivial	57
3.5.2	Cálculo de Cartan aplicado às simetrias	59
3.5.3	Automorfismos de fibrados	61
3.5.4	Transformações de contacto	62
3.5.5	Descrição de $\text{Sim}(\mathcal{R})$	65
3.5.6	Campos de contacto em equações diferenciais	67
4	Sucessões Espectrais	73
4.1	Conceitos de álgebra homológica	73
4.2	Sucessões espectrais	76
4.3	Pares exactos	77

4.4	Complexos filtrados	80
4.5	Bicomplexos	84

Capítulo 1

Introdução

O objectivo desta tese é descrever alguns dos métodos geométricos relativamente recentes para estudar equações diferenciais de qualquer ordem, sejam elas equações ordinárias (ODE's) ou equações às derivadas parciais (PDE's).

Começamos por introduzir os espaços de jactos de fibrados vectoriais que, munidos de um certo sistema de coordenadas, constituirão a variedade ambiente na qual as equações diferenciais vão existir. Consideraremos ainda uma estrutura geométrica adicional dada por uma distribuição (no sentido de Frobenius) denominada distribuição de Cartan. Esta estrutura, também denominada por estrutura de contacto, é de grande importância no estudo das equações diferenciais quando estas são tomadas como superfícies de um certo espaço de jactos, pois permite-nos definir as suas soluções como variedades integrais da distribuição de Cartan contidas na respectiva equação, ou equivalentemente, como variedades integrais da distribuição de Cartan induzida na equação na qual, em cada ponto, tomamos a interseção do respectivo plano de Cartan com o plano tangente à superfície da equação. Destas soluções, as que se projectam difeomorficamente sobre o espaço de jactos são, efectivamente, soluções da equação diferencial dada, no sentido usual. No entanto, podem haver mais soluções, sendo estas denominadas por soluções generalizadas da equação diferencial, das quais iremos ver um exemplo. Consideraremos ainda difeomorfismos do espaço de jactos que preservam a estrutura de contacto, denominados transformações de Lie, e a sua versão infinitesimal, dada por campos de vectores cujo fluxo (local) é constituído por transformações de Lie, denominados por campos de Lie. Por definição, se estas transformações (finitas ou infinitesimais) enviam uma equação diferencial \mathcal{E} nela própria, então enviam soluções de \mathcal{E} (no sentido mais geral) em soluções de \mathcal{E} e, por isso, designar-se-ão por simetrias (finitas ou infinitesimais, respectivamente) da equação \mathcal{E} . O interesse de encontrar simetrias de uma equação diferencial consiste no facto de, por vezes, tal permitir reduzir uma equação de um certo grau a uma outra equação de grau inferior, e, por outro lado, permite-nos encontrar famílias de soluções da equação dada a partir de apenas uma solução, simplesmente fazendo actuar a simetria sobre essa equação. Veremos o exemplo da equação de Burgers, dada por $u_t = uu_x + u_{xx}$, relativamente ao qual determinaremos as simetrias através da correspondência entre campos de Lie e determinadas secções do espaço de jactos, chamadas secções geradoras. Considerando secções arbitrárias, obteremos as simetrias generalizadas, estudadas no capítulo seguinte.

Neste capítulo, começaremos por definir o espaço de jactos infinitos de um fibrado vectorial como sendo o limite inverso do sistema formado pelos espaços de jactos finitos. Sobre este espaço de dimensão infinita, iremos definir os conceitos básicos de geometria diferencial, nomeadamente

os conceitos de campo de vectores, de distribuição, de forma diferencial, de derivada exterior, de produto interior e de derivada de Lie. Veremos ainda que podemos munir estes espaço de uma estrutura de contacto dada pela distribuição de Cartan, sendo esta agora uma distribuição involutiva, ao contrário do que sucede nos espaços de jactos de dimensão finita. Neste espaço, iremos considerar não apenas as equações, mas também o seu prolongamento infinito, obtido derivando sucessivamente a equação dada relativamente às variáveis independentes. Assim, iremos descrever algumas equações conhecidas e o seu respectivo prolongamento infinito. Relativamente à equação de Burgers, vamos determinar o espaço das suas simetrias generalizadas, considerando o isomorfismo que existe entre este espaço e o núcleo de um certo operador diferencial, denominado operador de linearização universal, quando restricto à respectiva equação.

Finalmente, no último capítulo descreveremos de forma detalhada certos conceitos de álgebra homológica (tais como complexos diferenciais, homotopias, sucessões espectrais, pares exactos, complexos filtrados e bicomplexos) que podem ser aplicados ao estudo das equações diferenciais, nomeadamente através de vários exemplos introduzidos no capítulo anterior. Estes exemplos evidenciam a vantagem da utilização da álgebra homológica ao permitir, por exemplo, descrever conceitos relativos a equações diferenciais, tais como integrais primeiros, invariantes integrais relativos e invariantes integrais absolutos de um certo grau, como sendo termos da sucessão espectral associada a uma determinada equação diferencial. A maneira como podemos associar uma sucessão espectral a uma determinada equação diferencial é também exibida, utilizando para isso a decomposição do espaço tangente ao espaço de fases associado ao correspondente sistema de equações de Pfaff no espaço de vectores verticais (tangentes às fibras do respectivo fibrado) e no espaço de vectores horizontais, gerado pelos operadores de derivação total. Esta estrutura quasi-produto permite-nos separar a derivada exterior em duas componentes, uma vertical e a outra horizontal, e desta forma obter um bicomplexo variacional, cuja filtração por colunas permite obter uma sucessão espectral chamada a \mathcal{C} -sucessão espectral de Vinogradov do sistema.

Capítulo 2

Simetrias clássicas das equações diferenciais

2.1 Espaço de Jactos $J^k(\pi)$

Seja $\pi : E \rightarrow M$ um fibrado vectorial de rank (i.e., dimensão da fibra) m , onde M é uma variedade de dimensão n . Fixemos um ponto $x \in M$ e seja U um aberto de M , que contem x , tal que $\pi^{-1}(U) \cong U \times \mathbb{R}^m$ (como o fibrado é localmente trivial um tal aberto existe sempre). Sejam (x^i, u^α) coordenadas trivializadoras em $\pi^{-1}(U)$. Um secção local $s : U \rightarrow E$ é então representada por uma função vectorial $\mathbf{s} : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\mathbf{s}(x^i) = (u^\alpha(x^i) = s^\alpha(x^i))$. Definamos agora, para cada $k \in \mathbb{N}_0$, a seguinte relação de equivalência:

▷ **Definição 2.1.1 (Tangência de ordem k)** ... Duas secções locais s_1 e s_2 , dizem-se tangentes até à ordem k , no ponto $x \in M$, se e só se as derivadas parciais das suas representações locais $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2 : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, calculadas em $x \in M$, coincidem até à ordem k .

◁.

É fácil (mas fastidioso) mostrar que esta definição não depende das representações locais escolhidas, e que a relação de tangência de ordem k , calculada em $x \in M$, é uma relação de equivalência. A correspondente classe de equivalência de uma secção s , para esta relação de tangência de ordem k , calculada em $x \in M$, nota-se por $[s]_x^k$, enquanto que o conjunto de todas as classes de equivalência é notado por J_x^k . A J_x^k chama-se o **espaço dos k -jactos** do fibrado $\pi : E \rightarrow M$, no ponto x . O espaço de k -jactos do fibrado π , $J^k(\pi)$, é definido por:

$$J^k(\pi) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{x \in M} J_x^k$$

Existe uma projecção natural $\pi_k : J^k(\pi) \rightarrow M$, definida por $\pi_k([s]_x^k) = x$, $x \in M$. Quando $k = 0$, $J^0(\pi) = \cup_{x \in M} E_x = E$.

Seja U um aberto de M , que contem x , tal que $\pi^{-1}(U) \cong U \times \mathbb{R}^m$, e (x^i, u^α) coordenadas trivializadoras em $\pi^{-1}(U)$. Em $\pi_k^{-1}(U) \subseteq J^k(\pi)$, definimos as coordenadas locais obtidas completando as coordenadas (x^i, u^α) com as coordenadas u_I^α , definidas por:

$$u_I^\alpha([s]_x^k) = \frac{\partial^{|I|} s^\alpha}{\partial (x^1)^{i_1} \dots \partial (x^n)^{i_n}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^{|I|} s^\alpha}{\partial x^I} \quad (2.1.1)$$

com $\alpha = 1, \dots, m$, $I = (i_1, i_2, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^n$, $|I| = \sum_{j=1}^n i_j \leq k$ e onde $[s]_x^k$ é o jacto de uma secção local $s : U \rightarrow E$, representada pela função vectorial $\mathbf{s} : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\mathbf{s}(x^i) = (u^\alpha(x^i) = s^\alpha(x^i))$. Às coordenadas locais $(x^i, u^\alpha, u_I^\alpha)$ chamamos **coordenadas adaptadas** em $\pi_k^{-1}(U) \subseteq J^k(\pi)$.

É possível mostrar que as cartas assim obtidas são C^∞ -compatíveis, o que mostra que $J^k(\pi)$ tem uma estrutura de variedade C^∞ , cuja dimensão é:

$$\dim J^k(\pi) = n + m \sum_{i=0}^k \binom{n+i-1}{n-1} = n + m \binom{n+k}{k}$$

Aliás, o espaço $J^k(\pi)$ pode ser considerado como um fibrado vectorial sobre M , com projecção $\pi_k : J^k(\pi) \rightarrow M$, dada por $\pi_k : \theta = [s]_x^k \mapsto x$, cuja fibra sobre $x \in M$ é $\pi_k^{-1}(x) = J_x^k$. Como caso particular, temos o espaço $J^0(\pi)$, cujos pontos são determinados, para cada $x \in M$, pelo valor que cada secção possui quando avaliada no ponto x . Logo, obtemos novamente o fibrado $\pi : E \rightarrow M$, ou seja, $J^0(\pi) = E$.

Considerando agora a sequência dos espaços $J^k(\pi)$, $k \in \mathbb{N}_0$, vemos que cada espaço $J^{k+1}(\pi)$ pode ser considerado como um fibrado sobre $J^k(\pi)$ através da aplicação $\pi_k^{k+1} : J^{k+1}(\pi) \rightarrow J^k(\pi)$ dada por $\pi_k^{k+1}([s]_x^{k+1}) = [s]_x^k$. Esta aplicação está bem definida, uma vez que a determinação das derivadas parciais de uma dada secção até à ordem $k+1$ implica, em particular, a determinação das suas derivadas parciais até à ordem k . Podemos também observar que $\pi_k \circ \pi_k^{k+1} = \pi_{k+1}$. Obtemos assim a seguinte torre de fibrados:

$$\begin{array}{ccc} J^{k+1}(\pi) & (x^i, u^\alpha, u_I^\alpha), & |I| \leq k+1 \\ \downarrow \pi_k^{k+1} & & \\ J^k(\pi) & (x^i, u^\alpha, u_I^\alpha), & |I| \leq k \\ \downarrow \pi_{k-1}^k & & \\ \vdots & & \vdots \\ \downarrow \pi_0^1 & & \\ J^0(\pi) = E & (x^i, u^\alpha) & \\ \downarrow \pi & & \\ M & (x^i) & \end{array} \tag{2.1.2}$$

2.2 A distribuição de Cartan

Vamos agora munir o espaço dos k -jactos $J^k(\pi)$, definido na secção anterior, de uma estrutura geométrica adicional, chamada **estrutura de contacto de ordem k** , de importância capital para o que se segue, e que é determinada através da chamada **distribuição de Cartan**.

Observemos, em primeiro lugar, que, para cada secção (local) $s : U \subseteq M \rightarrow E$, do fibrado π , podemos obter uma secção (local) $j_k s : U \subseteq M \rightarrow J^k(\pi)$, do fibrado π_k , definida por:

$$(j_k s)(x) = [s]_x^k$$

que será designada por **k -jacto da secção s** . O seu gráfico em $J^k(\pi)$ nota-se por Γ_s^k .

▷ **Definição 2.2.1 (R-plano)** ... Seja L um plano n -dimensional pertencente ao espaço tangente $T_\theta(J^k(\pi))$. L diz-se um **R-plano** se e só se é tangente ao gráfico do k -jacto de alguma secção do fibrado π , sendo, portanto, horizontal relativamente à projecção $\pi : J^k(\pi) \rightarrow M$ (ou seja, projecta-se não degeneradamente sobre $T_x M$, $x = \pi_k \theta$, através de $(\pi_k)_*$).

◁.

Dado um ponto $\theta' \in J^{k+1}(\pi)$, seja s uma qualquer secção tal $[s]_x^{k+1} = \theta'$, e $L_{\theta'} \subset T_{\theta'}(J^k(\pi))$ o R-plano tangente ao gráfico do k -jacto da secção s , onde $\theta = \pi_k^{k+1}(\theta')$. Note-se que este ponto θ' , sendo determinado pelos valores das derivadas até à ordem $k+1$ da secção s , pode ser considerado como um par ordenado formado pelo ponto $\theta = \pi_k^{k+1}(\theta')$, que é determinado pelo valor das derivadas até à ordem k , e pelo R-plano $L_{\theta'}$, que é determinado pelos valores das primeiras derivadas (as de ordem 1) das derivadas de ordem k :

$$\theta' = (\theta, L_{\theta'})$$

Fixemos um ponto $\theta \in J^k(\pi)$ e consideremos os pontos θ' da fibra:

$$F_\theta = F_{k+1,k}(\theta) = \pi_k^{k+1-1}(\theta) \subset J^{k+1}(\pi)$$

(por outras palavras, estamos a fixar os valores de uma certa função vectorial, bem como das suas derivadas parciais até à ordem k , deixando as suas derivadas parciais de ordem $k+1$ variar de forma arbitrária). Quando o ponto θ' se move na fibra F_θ , o R-plano correspondente $L_{\theta'} \subset T_{\theta'} J^k(\pi)$, roda em torno do ponto θ , mantendo-se sempre horizontal relativamente à projecção π_k .

Estamos agora em condições de poder definir a distribuição de Cartan:

▷ **Definição 2.2.2 (Distribuição de Cartan)** ... A distribuição de Cartan, em $J^k(\pi)$, é a distribuição (no sentido de Frobenius):

$$\mathcal{C} : \theta \in J^k(\pi) \mapsto \mathcal{C}_\theta = \mathcal{C}_\theta^k \subset T_\theta J^k(\pi)$$

que, a cada ponto $\theta \in J^k(\pi)$, associa o subespaço $\mathcal{C}_\theta = \mathcal{C}_\theta^k \subset T_\theta J^k(\pi)$, denominado por **plano de Cartan**, gerado por todos os R-planos $L_{\theta'}$, com $\theta' \in F_\theta = \pi_k^{k+1-1}(\theta)$:

$$\mathcal{C}_\theta = \text{span}\{L_{\theta'} : \theta' \in F_\theta\} \tag{2.2.1}$$

ou seja, por todos os planos tangentes aos gráficos Γ_s^k dos k -jactos de todas as secções s tais que $[s]_x^k = \theta$.

◁.

▷ **Exemplo 2.2.1** ... Quando E é o fibrado trivial $\pi : \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_u \rightarrow \mathbb{R}_x^n$, o espaço $J^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}) = J^1(n, 1)$ pode ser visto como o espaço dos elementos de contacto regulares de $\mathbb{R}_{x^i u}^{n+1}$, que não é mais do que $\mathbb{R}^{2n+1} = \mathbb{R}_{x^i u p_i}^{2n+1}$. Um elemento de contacto de $\mathbb{R}_{x^i u}^{n+1}$ é, por definição, um par $c = (m, \mathcal{H}_m)$, constituído por um ponto $m = (\mathbf{x}, u) \in \mathbb{R}^{n+1}$ e por um hiperplano $\mathcal{H}_m \in T_m \mathbb{R}^{n+1}$. O ponto m diz-se o **suporte** de $c = (m, \mathcal{H}_m)$. O elemento de contacto $c = (m, \mathcal{H}_m)$ diz-se regular quando o hiperplano \mathcal{H}_m é não vertical, i.e., quando não contem $\frac{\partial}{\partial u}|_m$. Como $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}|_m, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_m, \frac{\partial}{\partial u}|_m \right\}$ constituem uma base para o espaço tangente $T_m \mathbb{R}^{n+1}$, onde $m = (\mathbf{x}, u) \in \mathbb{R}^{n+1}$, e como $\{dx^1|_m, \dots, dx^n|_m, du|_m\}$ é a respectiva base dual, o hiperplano \mathcal{H}_m (sendo não vertical) tem por equação:

$$\begin{aligned} du|_m &= p_1 dx^1|_m + \dots + p_n dx^n|_m \\ &= \mathbf{p} \cdot d\mathbf{x}|_m \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

onde $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$. O hiperplano \mathcal{H}_m é pois perpendicular ao vector $(\mathbf{p}, -1) = (p_1, \dots, p_n, -1) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Consideremos agora a projecção canónica $\pi : \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, dada por:

$$\begin{aligned} \pi = \pi_0^1 : \quad J^1(n, 1) = \mathbb{R}^{2n+1} &\longrightarrow J^0(n, 1) = \mathbb{R}^{n+1} \\ c = (m, \mathcal{H}_m) = (\mathbf{x}, u, \mathbf{p}) &\longmapsto m = (\mathbf{x}, u) \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

que a cada elemento de contacto $c = (m, \mathcal{H}_m)$ associa o respectivo suporte m . Existe uma distribuição de $2n$ -planos $\mathcal{C} : c \mapsto \mathcal{C}_c \subset T_c \mathbb{R}^{2n+1}$, canonicamente definida em \mathbb{R}^{2n+1} , da seguinte forma - um vector tangente $\xi \in T_c \mathbb{R}^{2n+1}$, onde $c = (m, \mathcal{H}_m)$, pertence ao $2n$ -plano \mathcal{C}_c se e só se $\pi_*(\xi) \in \mathcal{H}_m$, isto é:

$$\mathcal{C}_c = \pi_*^{-1}(\mathcal{H}_m) \subset T_c \mathbb{R}^{2n+1}, \quad c = (m, \mathcal{H}_m) \quad (2.2.4)$$

Como o n -plano \mathcal{H}_m é dado pela equação (2.2.2), deduzimos que um vector $\xi \in T_c \mathbb{R}^{2n+1}$ está em \mathcal{C}_c sse $(du - \mathbf{p} \cdot d\mathbf{x})(\pi_* \xi) = 0$, isto é, sse $\pi^*(du - \mathbf{p} \cdot d\mathbf{x})(\xi) = (du - \mathbf{p} \cdot d\mathbf{x})(\xi) = 0$, e portanto \mathcal{C} fica definida pela 1-forma:

$$\theta = du - \mathbf{p} \cdot d\mathbf{x} = du - \sum_{i=1}^n p_i dx^i \quad (2.2.5)$$

em \mathbb{R}^{2n+1} , a que chamamos **forma de contacto** em $J^1(n, 1) = \mathbb{R}^{2n+1}$. À distribuição de $2n$ -planos $\mathcal{C} = \text{Ker } \theta$, chamamos a **distribuição de contacto** em $J^1(n, 1)$.

◁.

Para obtermos uma descrição da distribuição de Cartan, em coordenadas locais adaptadas $(x^i, u^\alpha, u_I^\alpha)$, vamos, em primeiro lugar, determinar uma base de vectores para o R -plano $L_{\theta'}$, onde $\theta' \in F_\theta$, isto é, $\pi_k^{k+1}(\theta') = \theta$. Como $L_{\theta'}$ é horizontal relativamente à projecção π_k , é possível determinar uma base $\{v_1^\theta, v_2^\theta, \dots, v_n^\theta\}$, de vectores de $L_{\theta'}$, tais que cada v_i^θ se projecta sobre $\frac{\partial}{\partial x^i}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Seja s uma secção tal $[s]_x^{k+1} = \theta'$, seja Γ_s^k o seu k -gráfico (o gráfico do k -jacto $j_k s$), e suponhamos que o R -plano $L_{\theta'}$ é tangente a esse gráfico. Em coordenadas adaptadas $(x^i, u^\alpha, u_I^\alpha)$, se s é dada por $x^i \mapsto u^\alpha = s^\alpha(x^i)$, vemos que o k -gráfico Γ_s^k é a n -superfície em $J^k(\pi)$, parametrizada por:

$$x^i \longmapsto \left(x^i, u^\alpha = s^\alpha(x^i), u_I^\alpha = \frac{\partial |I|_s^\alpha}{\partial (x^1)^{i_1} \dots \partial (x^n)^{i_n}}(x^i) \right)$$

onde $i = 1, \dots, n$, $\alpha = 1, \dots, m$, $I \in \mathbb{N}^n$, $|I| \leq k$. Portanto cada vector v_i^θ , sendo um vector tangente a Γ_s^k , é dado por:

$$v_i^\theta = \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{|I| \leq k} \sum_{\alpha=1}^m u_{I+(i)}^\alpha(\theta') \frac{\partial}{\partial u_I^\alpha}, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.2.6)$$

Aqui $(i) \in \mathbb{N}^n$ representa o multiíndice com 1 na posição i e zero nas restantes posições. Pusemos ainda $u_I^\alpha = u^\alpha$, quando $|I| = 0$. Note que a soma em (2.2.6), tomada apenas para $|I| \leq k - 1$, depende apenas de θ e não do $\theta' \in F_\theta$. Portanto, dado um outro ponto $\eta \in F_\theta$, e a correspondente base $\{v_i^\eta\}$, para o R -plano L_η , vemos que os vectores $\delta_i = v_i^\eta - v_i^\theta \in T_\theta J^k(\pi)$, são verticais relativamente à projecção π_{k-1}^k :

$$\delta_i = \sum_{|I|=k} \sum_{\alpha=1}^m \left[u_{I+(i)}^\alpha(\eta) - u_{I+(i)}^\alpha(\theta') \right] \frac{\partial}{\partial u_I^\alpha} \in V_\theta = T_\theta(F_{\theta''})$$

onde $\theta'' = \pi_{k-1}^k(\theta)$. Os vectores $\{\partial/\partial u_I^\alpha\}_{|I|=k}$ formam uma base para o espaço vertical $V_\theta = T_\theta(F_{\theta''})$, onde $\theta'' = \pi_{k-1}^k(\theta)$. Inversamente, cada vector vertical $\frac{\partial}{\partial u_I^\alpha} \in V_\theta$ pode ser tomado como um vector da forma $v_i^\eta - v_i^\theta$ - basta tomar $\eta \in F_\theta$, tal que todas as suas coordenadas, excepto uma, coincidam com as correspondentes coordenadas de θ' , e $u_{I+(i)}(\eta) = u_{I+(i)}(\theta') + 1$. Vem então que $\delta_i = v_i^\eta - v_i^\theta = \frac{\partial}{\partial u_I^\alpha}$.

Estas considerações permitem-nos estabelecer o seguinte teorema:

▷ **Teorema 2.2.1** ... *Seja \mathcal{C} a distribuição de Cartan na variedade $J^k(\pi)$. São válidas as seguintes afirmações:*

1. *O plano de Cartan $\mathcal{C}_\theta \subset T_\theta(J^k(\pi))$ é a soma directa do subespaço de vectores verticais, V_θ , com um qualquer dos R -planos em θ :*

$$\mathcal{C}_\theta = V_\theta \oplus L_{\theta'} \quad (2.2.7)$$

onde $V_\theta = T_\theta(F_{\theta''})$, com $\theta'' = \pi_{k-1}^k(\theta)$, designa o espaço tangente à fibra da projecção π_{k-1}^k e $L_{\theta'}$ é o R -plano correspondente ao ponto $\theta' \in F_\theta$.

2. *O plano de Cartan \mathcal{C}_θ é formado pelos vectores tangentes no ponto θ que se projectam em L_θ através da aplicação $(\pi_{k-1}^k)_*$:*

$$\mathcal{C}_\theta = (\pi_{k-1}^k)_*^{-1}(L_\theta) \quad (2.2.8)$$

Dem. A primeira afirmação resulta directamente das considerações anteriores. Quanto à segunda afirmação, basta-nos notar que, através da projecção $(\pi_{k-1}^k)_*$, o subespaço V_θ é levado no subespaço trivial de $T_{\theta''}(J^{k-1}(\pi))$, onde $\theta'' = \pi_{k-1}^k(\theta)$, enquanto que o subespaço $L_{\theta'} \subset T_\theta(J^k(\pi))$ é levado bijectivamente em $L_\theta \subset T_{\theta''}(J^{k-1}(\pi))$. Logo, temos $(\pi_{k-1}^k)_*(\mathcal{C}_\theta) = (\pi_{k-1}^k)_*(V_\theta \oplus L_{\theta'}) = L_\theta$, pelo que $\mathcal{C}_\theta \subset (\pi_{k-1}^k)_*^{-1}(\pi_{k-1}^k)_*(\mathcal{C}_\theta) = (\pi_{k-1}^k)_*^{-1}(L_\theta)$. Inversamente, temos que $(\pi_{k-1}^k)_*^{-1}(\theta'') = V_\theta \subset \mathcal{C}_\theta$. Portanto, temos $\mathcal{C}_\theta = (\pi_{k-1}^k)_*^{-1}(L_\theta)$.

◁.

Vemos então que a distribuição de Cartan é determinada pelo conjunto de 1-formas:

$$\theta_I^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} du_I^\alpha - \sum_{i=1}^n u_{I+(i)}^\alpha dx^i, \quad \text{com } \alpha = 1, \dots, m \quad \text{e} \quad |I| \leq k - 1 \quad (2.2.9)$$

denominadas **formas de Cartan**. Estas formas são linearmente independentes em cada ponto, são em número de:

$$N = m \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n+i-1}{n-1} = m \binom{n+k-1}{k-1}$$

que é portanto a codimensão da distribuição de Cartan. A sua dimensão é:

$$\dim \mathcal{C}^k = \dim J^k(\pi) - N = n + m \binom{n+k-1}{k-1}$$

Temos ainda, como consequência, os seguintes corolários:

▷ **Corolário 2.2.1** ... Qualquer subespaço horizontal (relativamente à projeção π_{k-1}^k) do plano de Cartan \mathcal{C}_θ tem dimensão $\leq n = \dim M$.

▷ **Corolário 2.2.2** ... Qualquer subespaço P do plano de Cartan é horizontal relativamente à projecção π_{k-1}^k , se e só se é horizontal relativamente à projecção $\pi_k : J^k(\pi) \rightarrow M$, ou seja, se $\pi_{k-1}^k : J^k(\pi) \rightarrow J^{k-1}(\pi)$ projecta difeomòrficamente P sobre a sua imagem, o mesmo acontece com as suas sucessivas imagens pelas projecções $\pi_{\ell-1}^\ell : J^\ell(\pi) \rightarrow J^{\ell-1}(\pi)$, com $\ell = k-1, \dots, 1$, e pela projecção $\pi_0 : J^0(\pi) \rightarrow M$.

◁.

Podemos agora usar a decomposição dada no teorema para representar em coordenadas um campo de vectores $X \in \Gamma(\mathcal{C}^k)$, i.e., um campo de vectores pertencente à distribuição de Cartan \mathcal{C}^k em $J^k(\pi)$. Tomamos uma base de vectores do subespaço vertical V_θ , num certo ponto θ , formada pelos vectores $\frac{\partial}{\partial u_I^\alpha}$, $\alpha = 1, \dots, m$, $|I| = k$, e uma base de vectores do subespaço horizontal $L_{\theta'}$ formada pelos vectores, denominados **operadores truncados de derivação total**, dados por:

$$D_i^{(k)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{|I| \leq k-1} \sum_{\alpha=1}^m u_{I+(i)} u_I^\alpha \frac{\partial}{\partial u_I^\alpha} \quad (2.2.10)$$

Usando estas bases de vectores para V_θ e $L_{\theta'}$, respectivamente, e atendendo a 2.2.7, podemos decompôr o campo de vectores $X \in \Gamma(\mathcal{C})$ da seguinte forma:

$$X = \sum_{i=1}^n a^i D_i^{(k)} + \sum_{\alpha=1}^m \sum_{|I|=k} b_I^\alpha \frac{\partial}{\partial u_I^\alpha} \quad (2.2.11)$$

Pelo teorema de Frobenius, podemos concluir que a distribuição de Cartan não é completamente integrável, uma vez que, por exemplo, o comutador:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial u_{I+(i)}^\alpha}, D_i^{(k)} \right] &= \left[\frac{\partial}{\partial u_{I+(i)}^\alpha}, \frac{\partial}{\partial x^i} \right] + \sum_{|J| \leq k-1} \sum_{\beta=1}^m \left[\frac{\partial}{\partial u_{I+(i)}^\alpha}, u_{J+(i)}^\beta \frac{\partial}{\partial u_J^\beta} \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial u_I^\alpha} \end{aligned}$$

não é da forma (2.2.11), logo não pertence à distribuição de Cartan. Assim, as variedades integrais da distribuição de Cartan \mathcal{C}^k terão, necessariamente, dimensão inferior à dimensão de \mathcal{C}^k .

O teorema seguinte descreve de que forma são, localmente, as variedades integrais da distribuição de Cartan, usando o facto de esta poder ser determinada pelo conjunto de 1-formas $\theta_I^\alpha = du_I^\alpha - \sum_{i=1}^n u_{I+(i)}^\alpha dx^i$, com $\alpha = 1, \dots, m$ e $|I| \leq k - 1$:

▷ **Teorema 2.2.2** ... *Seja $Q \subset J^k(\pi)$ uma superfície n -dimensional que se projecta difeomórficamente no espaço M das variáveis independentes, numa vizinhança do ponto $y \in Q$. A superfície Q é uma variedade integral da distribuição \mathcal{C} , na vizinhança considerada, se e só se puder ser definida por relações da forma:*

$$\begin{cases} u^1 &= f^1(x^1, \dots, x^n) \\ &\dots \\ u^m &= f^m(x^1, \dots, x^n) \\ u_I^\alpha &= \frac{\partial^{|I|} f^\alpha}{\partial (x^1)^{i_1} \dots \partial (x^n)^{i_n}}(x^1, \dots, x^n) \end{cases} \quad (2.2.12)$$

para certas funções suaves f^α , onde $\alpha = 1, \dots, m$, $I = (i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^n$ e $|I| \leq k$.

Dem. O facto de, por hipótese, a projecção $\pi_k|_Q$ ser não degenerada significa que, localmente, é possível representar a equação que define Q da seguinte forma:

$$\begin{cases} u^\alpha &= f^\alpha(x^1, \dots, x^n) \\ u_I^\alpha &= f_I^\alpha(x^1, \dots, x^n) \end{cases}$$

para $\alpha = 1, \dots, m$, $|I| \leq k$, onde f^α e f_I^α são funções suaves. Como, por hipótese, a superfície Q é uma variedade integral da distribuição de Cartan \mathcal{C}^k , e esta é localmente definida pelas 1-formas θ_I^α , temos:

$$\begin{aligned} \theta_I^\alpha|_Q &= df_I^\alpha - \sum_i f_{I+(i)}^\alpha dx^i \\ &= \sum_i \left(\frac{\partial f_I^\alpha}{\partial x^i} - f_{I+(i)}^\alpha \right) dx^i \\ &= 0 \end{aligned}$$

Logo:

$$f_I^\alpha = \frac{\partial^{|I|} f^\alpha}{\partial (x^1)^{i_1} \dots \partial (x^n)^{i_n}}$$

para todo $\alpha = 1, \dots, m$ e $|I| \leq k$.

◁.

Podemos concluir então que uma solução de uma dada equação $\mathcal{E} \in J^k(\pi)$ é uma variedade integral da distribuição de Cartan \mathcal{C}^k contida em \mathcal{E} , de dimensão $n = \dim M$ e que se projecta não degeneradamente sobre M . No entanto, este conceito de solução de uma equação diferencial \mathcal{E} de ordem k , pode ser definido sem usar o facto de \mathcal{E} ser uma superfície contida em $J^k(\pi)$, nomeadamente através da seguinte definição:

▷ **Definição 2.2.3** ... *Uma equação diferencial de ordem k no fibrado $\pi : E \rightarrow M$, é uma subvariedade $\mathcal{E} \subseteq J^k(\pi)$, munida da distribuição de Cartan induzida:*

$$\mathcal{C}(\mathcal{E}) : \theta \mapsto \mathcal{C}_\theta(\mathcal{E}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{C}_\theta^k \cap T_\theta \mathcal{E}, \quad \theta \in \mathcal{E} \quad (2.2.13)$$

Uma **solução (generalizada)** da equação diferencial $\mathcal{E} \subseteq J^k(\pi)$ é uma variedade integral maximal da distribuição de Cartan $\mathcal{C}(\mathcal{E})$.

◁.

Ou seja, em vez de considerarmos a distribuição de Cartan \mathcal{C}^k definida em todo o ponto $\theta \in J^k(\pi)$, consideramos a distribuição de Cartan $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ induzida em \mathcal{E} pela distribuição \mathcal{C}^k , definida como sendo, em cada ponto $\theta \in \mathcal{E}$, a intersecção do subespaço \mathcal{C}_θ^k com o plano tangente à subvariedade \mathcal{E} , $T_\theta\mathcal{E}$. As soluções de \mathcal{E} , sendo variedades integrais de \mathcal{C}^k e estando contidas em \mathcal{E} , são, obviamente, variedades integrais da distribuição $\mathcal{C}(\mathcal{E})$, que se projectam sobre M não degeneradamente. Considerando agora variedades integrais arbitrárias da distribuição $\mathcal{C}(\mathcal{E})$, obtemos aquilo a que designamos por soluções generalizadas da equação diferencial \mathcal{E} .

▷ **Exemplo 2.2.2** ... Consideremos a equação \mathcal{E} dada por:

$$u^2 + (u')^2 = 1 \quad (2.2.14)$$

Temos que $\mathcal{E} = \{(x, u, p) \in J^1(1, 1) \simeq \mathbb{R}^3 : p^2 + u^2 - 1 = 0\}$ é um cilindro em $J^1(1, 1) \simeq \mathbb{R}^3$ e, portanto, pode ser parametrizado por $\phi : (\theta, x) \mapsto (x, \sin \theta, \cos \theta)$. Nestas novas coordenadas, a forma de Cartan θ é dada por $\theta = du - p dx = d(\sin \theta) - (\cos \theta) dx = (\cos \theta) d\theta - (\cos \theta) dx = (\cos \theta)(d\theta - dx)$, pelo que $\theta = 0 \Leftrightarrow (\cos \theta)(d\theta - dx) = 0 \Leftrightarrow \cos \theta = 0 \vee d\theta = dx \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \vee \theta = x + a, a \in \mathbb{R}$. No caso de ser $\theta = x + a$, obtemos a hélice circular parametrizada por $x \mapsto (x, \sin(x + a), \cos(x + a))$, com $a \in \mathbb{R}$ constante, que é uma solução da equação \mathcal{E} pela primeira definição, dado que se projecta não degeneradamente sobre \mathbb{R} . Se $\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{R}$, obtemos as soluções $u = 1, p = 0$ para k par e $u = -1, p = 0$ para k ímpar, cujos gráficos são rectas que também se projectam não degeneradamente sobre \mathbb{R} , logo também são soluções de \mathcal{E} segundo a primeira definição dada. Note-se ainda que estas duas últimas soluções são as envolventes das soluções anteriores.

◁.

2.3 Variedades integrais da distribuição de Cartan

O teorema 2.2.2 permitiu concluir que os gráficos Γ_s^k , de k -jactos de secções s do fibrado $\pi : E \rightarrow M$, são variedades integrais da distribuição de Cartan \mathcal{C}^k . Nesta secção, vamos ver de que forma são as variedades integrais maximais.

▷ **Definição 2.3.1** ... Dado um plano $\mathcal{P} \subset \mathcal{C}_\theta^{k-1}$, $\theta \in J^{k-1}(\pi)$, de dimensão $d \leq \dim M$, ao subconjunto:

$$\ell(\mathcal{P}) = \{\tilde{\theta} \in F_\theta \mid L_{\tilde{\theta}} \supset \mathcal{P}\} \subseteq F_\theta = \pi_{k-1}^{-1}(\theta) \quad (2.3.1)$$

chama-se a **variedade de raios** correspondente ao plano \mathcal{P} .

Dado uma subvariedade $N \subset J^{k-1}(\pi)$, o **levantamento**, ou **prolongamento** de N , é definido como sendo:

$$L(N) = \bigcup_{q \in N} \ell(T_q N) \quad (2.3.2)$$

◁.

▷ **Exemplo 2.3.1** ... Consideremos o fibrado trivial $\pi : \mathbb{R}_{xy}^2 \times \mathbb{R}_u \rightarrow \mathbb{R}_{xy}^2$ e o espaço dos 1-jactos $J^1(\pi) = J^1(2, 1) = J^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, cujas coordenadas são as variáveis independentes x e y , a variável dependente u e as variáveis p e q .

Fixemos um ponto $\theta = (x, y, u) \in J^0(\pi)$. A fibra F_θ do fibrado $\pi_0^1 : J^1(\pi) \rightarrow J^0(\pi)$ é o plano com coordenadas p, q . Seja \mathcal{P} o subespaço gerado por um vector não nulo $\xi = X \frac{\partial}{\partial x} + Y \frac{\partial}{\partial y} + U \frac{\partial}{\partial u} \in T_\theta J^0(\pi)$, e calculemos as equações que descrevem $\ell(\mathcal{P})$.

Se $\tilde{\theta} \in F_\theta$ tem coordenadas (p_o, q_o) , então o R -plano $L_{\tilde{\theta}} \subset T_\theta J^0(\pi)$ é definido por:

$$\theta|_{\tilde{\theta}} = du - p_o dx - q_o dy = 0$$

Para que se verifique $L_{\tilde{\theta}} \supset \mathcal{P}$, temos de ter:

$$\begin{aligned} \theta|_{\tilde{\theta}}(\xi) &= 0 \\ \Leftrightarrow (dz - p_0 dx - q_0 dy) \left(X \frac{\partial}{\partial x} + Y \frac{\partial}{\partial y} + U \frac{\partial}{\partial u} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow X p_0 + Y q_0 - U &= 0 \\ \Leftrightarrow X p_0 + Y q_0 &= U \end{aligned}$$

Considerando agora pontos genéricos $\tilde{\theta} \in F_\theta$ com coordenadas arbitrárias p e q cujos respectivos R -planos $L_{\tilde{\theta}}$ contêm \mathcal{P} , vemos que $\ell(\mathcal{P})$ é dado pela equação $Xp + Yq = U$, estando os valores de X, Y e U fixos por ξ . Vemos pois que genéricamente $\ell(\mathcal{P})$ é uma recta no plano $F_\theta \cong \mathbb{R}_{pq}^2$.

No caso particular em que $X = Y = 0$ e $U \neq 0$, isto é, quando o vector ξ é vertical, obtemos uma equação impossível, pelo que $\ell(\mathcal{P}) = \emptyset$. De facto, nenhum R -plano contém vectores verticais.

◀

▷ **Exemplo 2.3.2** ... Consideremos agora uma subvariedade $N \subset J^0(2, 1) = \mathbb{R}_{xyu}^3$ projectando-se não degeneradamente sobre \mathbb{R}_{xy}^2 . Consoante a dimensão de N , temos 3 casos distintos para o levantamento $L(N)$:

1. Se $\dim N = 0$, então N é um ponto θ apenas, pelo que $L(N) = L(\{\theta\}) = F_\theta = (\pi_0^1)^{-1}(\theta)$.
2. Se $\dim N = 1$, então N é uma curva parametrizada da forma $t \mapsto \theta(t) = (\alpha(t), \beta(t), \gamma(t))$, parametrizada por t . Logo, para cada ponto $\theta(t) = (\alpha(t), \beta(t), \gamma(t)) \in N$, $T_{\theta(t)}N$ é a recta gerada pelo vector $(\alpha'(t), \beta'(t), \gamma'(t))$, pelo que, como vimos no exemplo anterior, $\ell(T_{\theta(t)}N)$ é uma recta em $F_{\theta(t)}$ determinada pela equação $\alpha'(t)p + \beta'(t)q = \gamma'(t)$. Fazendo variar o parâmetro t , obtemos uma superfície regrada no espaço de dimensão 5, $J^1(2, 1)$, que resulta da reunião de todas estas rectas $\ell(T_{\theta(t)}N)$, e que é dada pelo sistema de equações:

$$\begin{cases} x = \alpha(t) \\ y = \beta(t) \\ u = \gamma(t) \\ \alpha'(t)p + \beta'(t)q = \gamma'(t) \end{cases} \quad (2.3.3)$$

Considerando a curva N como sendo o gráfico de uma função $u(x, y)$ restricta à curva $(x, y) = (\alpha(t), \beta(t))$ em \mathbb{R}^2 , vemos que a última equação do sistema (2.3.3) é uma consequência da relação existente na curva entre as derivadas parciais $p = u_x$ e $q = u_y$, podendo ser obtida através da regra da cadeia:

$$\gamma'(t) = \frac{d}{dt} u(\alpha(t), \beta(t)) = u_x \alpha'(t) + u_y \beta'(t) = \alpha'(t)p + \beta'(t)q$$

3. Finalmente, se $\dim N = 2$, então N é uma superfície da forma $u = f(x, y)$. Um ponto $\theta \in N$, determina um único ponto $\tilde{\theta} \in F_\theta$, tal que $L_{\tilde{\theta}} \supset T_\theta(N)$, que é aquele cujas componentes p e q coincidem com os declives do plano $T_\theta(N)$ relativamente aos eixos x e y , sendo neste caso $L_{\tilde{\theta}} = T_\theta N$. Assim, temos que $L(N)$ é o 1-gráfico Γ_f^1 do 1-jacto da função f .

Em qualquer dos casos, $L(N)$ é uma variedade de Legendre em $J^1(2, 1)$, munido da estrutura de contacto usual, definida pela 1-forma $\theta = du - p dx$, em coordenadas canónicas. \triangleleft

A utilidade da definição 2.3.1, reside no facto de que, se $N \in J^{k-1}(\pi)$ é uma variedade integral da distribuição de Cartan, que se projecta não degeneradamente sobre o espaço das variáveis independentes M (uma tal variedade chama-se **variedade horizontal**), então o seu levantamento $L(N) \in J^k(\pi)$ é ainda uma variedade integral da distribuição de Cartan. Isto permite-nos construir variedades integrais em $J^k(\pi)$ partindo de variedades integrais em $J^{k-1}(\pi)$.

De facto, pelo teorema 2.2.1, o plano de Cartan $\mathcal{C}_{\tilde{\theta}}$ é formado pelos vectores tangentes no ponto $\tilde{\theta}$ que se projectam em $L_{\tilde{\theta}}$ através da aplicação $(\pi_{k-1}^k)_*$:

$$\mathcal{C}_{\tilde{\theta}} = (\pi_{k-1}^k)_*^{-1}(L_{\tilde{\theta}})$$

Logo basta ver que, para todo o ponto $\tilde{\theta} \in L(N) \subset J^k(\pi)$, a projecção $(\pi_{k-1}^k)_*$ envia $T_{\tilde{\theta}}L(N)$ em $L_{\tilde{\theta}}$. Se assim fôr, $T_{\tilde{\theta}}L(N) \subset \mathcal{C}_{\tilde{\theta}}$ e $L(N)$ é variedade integral da distribuição de Cartan.

Mas se $\theta = \pi_{k-1}^k(\tilde{\theta}) \in N \subset J^{k-1}(\pi)$, então, por definição de variedade de raios, $T_\theta N \subset L_{\tilde{\theta}}$. Por outro lado, como N é horizontal, a projecção π_{k-1}^k envia o espaço tangente $T_{\tilde{\theta}}L(N)$ em $T_\theta N$. Logo $T_{\tilde{\theta}}L(N) \subset \mathcal{C}_{\tilde{\theta}}$.

\triangleright **Proposição 2.3.1** ... *Toda a variedade integral horizontal $N \subset J^k(\pi)$ da distribuição de Cartan em $J^k(\pi)$, localmente está contida no k -gráfico Γ_f^k do k -jacto de alguma secção f .*

Dem. Seja $r = \dim N \leq n = \dim M$. Dado um ponto $\theta \in N$, vamos tomar coordenadas locais x^1, x^2, \dots, x^n , em torno de $a = \pi_k(\theta) \in M$, que definam $\tilde{N} = \pi_k(N)$ através das equações:

$$x^{r+1} = x^{r+2} = \dots = x^n = 0$$

A variedade N , sendo horizontal (i.e., projecta-se não degeneradamente sobre M), pode ser definida por equações da forma:

$$\begin{aligned} x_i &= 0, & i &= r+1, \dots, n \\ u_I^\alpha &= \tilde{f}_I^\alpha(x^1, \dots, x^r), & \alpha &= 1, \dots, m, \quad |I| \leq k \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

e como N é variedade integral da distribuição de Cartan em $J^k(\pi)$, devemos ter:

$$\tilde{f}_{I+(i)}^\alpha = \frac{\partial \tilde{f}_I^\alpha}{\partial x^i}(x^1, \dots, x^r), \quad \alpha = 1, \dots, m, \quad |I| \leq k-1, \quad i = 1, \dots, r \quad (2.3.5)$$

As funções $\tilde{f}^1, \dots, \tilde{f}^m$ estão pois definidas em $\tilde{N} = \pi_k(N)$, e os valores das suas derivadas tangenciais são dadas em \tilde{N} . Logo, é possível arranjar funções f^1, f^2, \dots, f^m tais que $f^\alpha|_{\tilde{N}} = \tilde{f}^\alpha$, $\alpha = 1, \dots, m$, e com os valores dados das derivadas tangenciais em \tilde{N} , pelo que $N \subset \Gamma_f^k$ para $f = (f^1, \dots, f^m)$.

\triangleleft

▷ **Proposição 2.3.2** ... Seja $\pi : E \rightarrow M$ um fibrado de rank m , sobre uma variedade M de dimensão n , e seja N uma variedade integral horizontal da distribuição de Cartan em $J^k(\pi)$, de dimensão $r = \dim N \leq n$. Então a dimensão do levantamento de N é dada por:

$$\dim L(N) = r + m \binom{n - r + k}{n - r - 1} \quad (2.3.6)$$

Dem. Dado um ponto $\theta \in N$, vamos tomar coordenadas locais x^1, x^2, \dots, x^n que definam $\tilde{N} = \pi_k(N)$ através das equações $x^{r+1} = x^{r+2} = \dots = x^n = 0$.

Pela proposição anterior, existe uma secção $f = (f^1, \dots, f^m)$ tal que $N \subset \Gamma_f^k$. Seja $a_{I,i}^\alpha = \frac{\partial^{I+1} f^\alpha}{\partial x^I \partial x^i}$. Então, considerando no ponto $\theta \in N$ os vectores

$$v_i^\theta = \left(\frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{|I| \leq k} \sum_{\alpha=1}^m a_{I,i}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_I^\alpha} \right) \Big|_\theta, \quad i = 1, \dots, r \quad (2.3.7)$$

vemos que $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ é uma base de $T_\theta(N)$. Para que um ponto $\tilde{\theta} \in F_\theta$ pertença a $\ell(T_\theta N)$ as suas coordenadas \tilde{p}_J^α deverão satisfazer as equações:

$$\tilde{p}_{I+(i)}^\alpha = a_{I,i}^\alpha, \quad i = 1, \dots, r, \quad \alpha = 1, \dots, m$$

Assim, enquanto que os multi-índices J de comprimento $k+1$ tais que $J = I + (i)$, $i = 1, \dots, r$ estão determinados, os outros multi-índices J de comprimento $k+1$ podem tomar qualquer valor.

Como, para qualquer $\alpha = 1, \dots, m$ fixo, existem exactamente $m \binom{n - r + k}{n - r - 1}$ multi-índices J de comprimento $k+1$ com alguma componente $r+1, \dots, n$ não nula, temos que a dimensão de $L(N)$ considerado como fibrado sobre N é $m \binom{n - r + k}{n - r - 1}$. Logo, como $\dim(N) = r$, temos

$$\dim L(N) = r + m \binom{n - r + k}{n - r - 1}.$$

◁.

▷ **Corolário 2.3.1** ... Se N_1 e N_2 são duas variedades tais que $\dim N_1 < \dim N_2$ então $\dim L(N_1) \geq \dim L(N_2)$. A igualdade ocorre apenas nos seguintes casos:

- (i). $m = n = 1$
- (ii). $k = 0, m = 1$
- (iii). $m = 1, \dim N_1 = n - 1, \dim N_2 = n$ (2.3.8)

◁.

Vimos anteriormente que o levantamento de uma variedade integral horizontal $N \in J^{k-1}(\pi)$ é ainda uma variedade integral $L(N) \in J^k(\pi)$ da distribuição de Cartan. Vamos agora ver que, se uma variedade integral é maximal, então é, em quase toda a parte, da forma $L(N)$, para alguma variedade N .

▷ **Proposição 2.3.3** ... *Seja $Q \in J^k(\pi)$ uma variedade integral da distribuição de Cartan em $J^k(\pi)$. Então Q é maximal se e só se, localmente, puder ser escrita como o levantamento de uma variedade integral horizontal $N \in J^{k-1}(\pi)$, excepto possivelmente numa variedade de dimensão $< \dim Q$.*

Dem. Consideremos uma variedade integral maximal Q . O conjunto dos pontos na vizinhança dos quais $\pi' = \pi'_{k-1} : J^k(\pi) \rightarrow J^{k-1}(\pi)$ tem rank constante, é um aberto denso em Q .

Tomando a subvariedade de Q formada por estes pontos, seja θ um dos seus elementos e $\theta' = \pi'(\theta)$. Consideremos uma vizinhança U de θ , cujos pontos pertencem à subvariedade dada, e seja $N = \pi'(U)$. Como consequência do teorema da função implícita, temos que N é uma subvariedade de $J^{k-1}(\pi)$ e $T_{\theta'}N = T_{\theta'}(\pi'(U)) = T_{\theta'}(\pi'(Q)) = \pi'_*(T_\theta(Q)) \subset \pi'_*(\mathcal{C}_\theta) = L_\theta$. Logo, $N \subset J^{k-1}(\pi)$ é uma variedade integral horizontal da distribuição de Cartan em $J^{k-1}(\pi)$, pelo que está contida no $(k-1)$ -gráfico do $(k-1)$ -jacto de alguma secção f . Como $T_{\theta'}(N) \subset L_\theta$, pela definição de levantamento de uma variedade, temos que $\theta \in L(N)$. Logo, como Q é variedade integral maximal e, localmente, $Q \subset L(N)$, vem que $Q = L(N)$.

Reciprocamente, vejamos que todo o levantamento de uma variedade horizontal integral em $J^{k-1}(\pi)$ é uma variedade integral maximal em $J^k(\pi)$. Dada uma variedade da forma $L(N)$, com $N \subset J^{k-1}(\pi)$ variedade horizontal integral, ela estará contida em alguma variedade integral maximal que, como vimos, terá de ser da forma $L(N_1)$ para alguma subvariedade horizontal $N_1 \subset J^{k-1}(\pi)$. Logo, como $N = \pi'(L(N))$ e $N_1 = \pi'(L(N_1))$, temos que $N \subset N_1$, pelo que, pelo corolário 2.3.1, $\dim L(N_1) \leq \dim L(N)$. Então, como $L(N) \subset L(N_1)$, temos de ter necessariamente $L(N) = L(N_1)$, sendo portanto $L(N)$ uma variedade integral maximal em $J^k(\pi)$.

◁.

Note-se que, se N é o $(k-1)$ -gráfico do $(k-1)$ -jacto de alguma secção f , então $L(N)$ é o k -gráfico do k -jacto da mesma secção f . Logo, como consequência deste teorema resulta que *as variedades integrais maximais da distribuição de Cartan são exactamente os gráficos dos jactos de secções do fibrado π* . Outra consequência deste teorema e do corolário 2.3.1, é que, excepto em casos pontuais (quando $m = n = 1$ ou quando $k = m = 1$), as variedades integrais maximais da distribuição de Cartan em $J^k(\pi)$ são o levantamento de variedades de dimensão nula (pontos) em $J^{k-1}(\pi)$, ou seja, *as fibras da projecção $\pi' = \pi'_{k-1}$ são variedades integrais maximais da distribuição de Cartan*.

2.4 Transformações de Lie

Seja $\pi : E \rightarrow M$ um fibrado vectorial. Qualquer difeomorfismo $\Phi : E \rightarrow E$ pode ser levantado a um difeomorfismo (local) $\Phi^{(k)} : J^k(\pi) \rightarrow J^k(\pi)$, $k \geq 1$ da seguinte forma: dado um ponto $\theta \in J^k_a(\pi)$, onde $a = \pi_k(\theta) \in M$ e $b = \pi_{k,0}(\theta) \in E$, tomemos uma secção s do fibrado π tal que $\theta = [s]_a^k$. Então, o difeomorfismo Φ , ao actuar sobre o 0 -gráfico $\Gamma_s \subset E = J^0(\pi)$ da secção dada, vai levá-lo na subvariedade $\Phi(\Gamma_s) \subset E$. Se esta subvariedade fôr, para alguma vizinhança do ponto $b' = \Phi(b)$, o gráfico de alguma secção s' , então tomamos:

$$\Phi^{(k)}(\theta) = [s']_{a'}^k, \quad \text{onde } a' = \pi(b') = \pi(\Phi(b))$$

Esta transformação, assim definida, designa-se por **k -levantamento da transformação pontual** $\Phi : E \rightarrow E$. Note-se que, embora a transformação pontual $\Phi : E \rightarrow E$ esteja definida em toda a variedade E , o seu levantamento $\Phi^{(k)}$, por construção, pode não estar definido em toda o espaço $J^k(\pi)$, pois a imagem do gráfico de uma secção pode não ser o gráfico de nenhuma secção em torno de vizinhanças de certos pontos de E . No entanto, é sempre verdade que $\Phi^{(k)}$ está definida num aberto denso de $J^k(\pi)$.

Finalmente, note-se que, por construção, se tivermos um ponto $\theta \in J_a^k(\pi)$ com $a = \pi_k(\theta)$, $\theta = [s]_a^k$, $\tilde{\theta} = [s]_a^{k+1}$, e se existir s' tal que $\Phi(\Gamma_s) = \Gamma_{s'}$, com $\tilde{\theta}' = [s']_a^{k+1}$, então $d\Phi_\theta^{(k)}(L_{\tilde{\theta}}) = L_{\tilde{\theta}'}$. Mas, por definição, a distribuição de Cartan é gerada pelos R -planos L_θ , e estes são preservados pela transformação $\Phi^{(k)}$, logo esta transformação preserva a distribuição de Cartan, ou seja, é uma simetria (finita) da distribuição de Cartan. Mais geralmente, temos a seguinte definição.

▷ **Definição 2.4.1** ... Uma transformação de Lie é um difeomorfismo $\Phi : J^k(\pi) \rightarrow J^k(\pi)$ tal que $d\Phi_\theta(C_\theta^k) = C_{\Phi(\theta)}^k$, para todo o ponto $\theta \in J^k(\pi)$. ◁.

▷ **Exemplo 2.4.1** ... Seja $\Phi : \mathbb{R}_{xu}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{XU}^2$ um difeomorfismo dado por:

$$(x, u) \longmapsto (X(x, u), U(x, u))$$

e $\theta \in J^1(\pi)$ um ponto arbitrário de coordenadas (x, u, p) , sendo p o declive da recta tangente ao gráfico de alguma secção que representa o ponto θ . Esta recta é gerada pelo vector $(1, p)$, e:

$$d\Phi_{(x,u)}(1, p) = (X_x(x, u) + X_u(x, u)p, U_x(x, u) + U_u(x, u)p)$$

Se $X_x(x, u) + X_u(x, u)p \neq 0$, então o difeomorfismo Φ , ao actuar sobre a recta de declive p , vai levá-la na recta de declive $\frac{U_x(x, u) + U_u(x, u)p}{X_x(x, u) + X_u(x, u)p}$, e portanto:

$$\Phi^{(1)}(\theta) = \Phi^{(1)}(x, u, p) = \left(X(x, u), U(x, u), \frac{U_x(x, u) + U_u(x, u)p}{X_x(x, u) + X_u(x, u)p} \right)$$

Por exemplo, se $\Phi : \mathbb{R}_{xu}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{xu}^2$ é uma rotação de ângulo ε , então:

$$\Phi^{(1)}(x, u, p) = \left(x \cos \varepsilon - u \sin \varepsilon, x \sin \varepsilon + u \cos \varepsilon, \frac{\sin \varepsilon + \cos \varepsilon p}{\cos \varepsilon - \sin \varepsilon p} \right)$$

◁.

▷ **Exemplo 2.4.2 (Transformação de Legendre)** ... É a transformação $\mathcal{L} : J^1(1, 1) \rightarrow J^1(1, 1)$ dada, em coordenadas canónicas (x, u, p) , por:

$$\mathcal{L} : (x, u, p) \longmapsto (p, xp - u, x) \quad (2.4.1)$$

É uma transformação de contacto uma vez que:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^*(du - p dx) &= d(u \circ \mathcal{L}) - (p \circ \mathcal{L})d(x \circ \mathcal{L}) \\ &= dU - P dX \\ &= d(xp - u) - x dp \\ &= p dx + x dp - du - x dp \\ &= -(du - p dx) \end{aligned}$$

A transformação de Legendre transforma a 1-faixa de contacto¹:

$$\mathcal{F}_m : p \mapsto (a, b, p), \quad p \in \mathbb{R}$$

de suporte fixo $m = (a, b) \in \mathbb{R}_{xu}^2$, na 1-faixa $\mathcal{L} \circ \mathcal{F}_m$ dada por:

$$\mathcal{L} \circ \mathcal{F}_m : p \mapsto (p, ap - b, a)$$

cuja suporte, isto é, cuja projecção no plano de configuração, é a recta $u = ax - b$

A transformação de Legendre transforma a equação de Clairaut $u = xu' - f(u')$, isto é:

$$\Sigma = \{(x, u, p) : u = xp - f(p)\} \subset J^1(1, 1)$$

na equação obtida da seguinte forma. Calculamos primeiro \mathcal{L}^{-1} :

$$\mathcal{L} : \begin{cases} X = p \\ U = xp - u \\ P = x \end{cases} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1} : \begin{cases} x = P \\ u = XP - U \\ p = X \end{cases}$$

Em seguida calculamos:

$$\begin{aligned} 0 &= u - xp + f(p) \\ &= (XP - U) - PX + f(X) \\ &= -U + f(X) \end{aligned}$$

e portanto \mathcal{L} transforma a equação de Clairaut, na equação:

$$U = f(X) \tag{2.4.2}$$

que não contem derivadas, e por isso está automaticamente resolvida. Note que a equação $U = f(X)$ deve ser interpretada, no presente contexto, como uma equação diferencial do tipo $F(X, U, P) = 0$, onde P é arbitrário. As soluções de $U = f(X)$ são as rectas verticais $P \mapsto (a, f(a), P)$, “por cima” de cada ponto $(a, f(a))$ do gráfico de f , e podem ser interpretadas como 1-faixas de contacto, de suporte $A = (a, f(a))!$

Por outras palavras, para cada $X = a$ fixo, a curva parametrizada:

$$\mathcal{F}_a : P \mapsto (a, f(a), P)$$

é uma solução generalizada da equação (2.4.2). Com efeito, essa curva está contida em $\{(X, U, P) : U - f(X) = 0\}$, e $\mathcal{F}_a^*(\theta) = \mathcal{F}_a^*(dU - PdX) = 0$, uma vez que $X \equiv a$ está fixo. \mathcal{F}_a é a 1-faixa de contacto, de suporte $A = (a, f(a))$.

Sob a transformação de Legendre, cada uma destas soluções transforma-se numa solução da equação de Clairaut:

$$\phi_a \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}^{-1} \circ \mathcal{F}_a : P \mapsto (x = P, u = aP - f(a), p = a)$$

cujos suporte é a recta $u = ax - f(a)$, no plano de configuração \mathbb{R}_{xu}^2 .

¹Por definição, uma **1-faixa de contacto** é uma curva imersa $\mathcal{F} : I \subseteq \mathbb{R} \hookrightarrow J^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, que é curva integral da distribuição de contacto: $\mathcal{F}^*! = 0$. Ver o exemplo 2.3.2.

Desta forma obtemos uma família a 1 parâmetro $\{\phi_a\}_{a \in \mathbb{R}}$ de soluções da equação de Clairaut:

$$\{u = ax - f(a)\}_{a \in \mathbb{R}} \quad (2.4.3)$$

a que se chama o **integral completo** da equação de Clairaut. A envolvente desta família a 1 parâmetro de rectas, obtem-se eliminando o parâmetro a , nas equações:

$$\begin{cases} u - ax + f(a) = 0 \\ -x + f'(a) = 0 \end{cases} \quad (2.4.4)$$

Suponhamos por exemplo que $f(p) = \frac{1}{2}p^2$. Então:

$$\begin{cases} u - ax + a^2/2 = 0 \\ -x + a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = x \\ u = x^2/2 \end{cases} \Rightarrow u = x^2/2$$

e a envolvente é a parábola $u = x^2/2$, que fornece a chamada **solução singular** da equação de Clairaut. Note que a solução clássica $u = ax - a^2/2$ é a recta tangente à solução singular $u = x^2/2$, no ponto $(a, a^2/2)$.

◁.

Vimos já que, localmente, a distribuição de Cartan era determinada pelas formas de Cartan:

$$\theta_I^\alpha = du_I^\alpha - \sum_{i=1}^n u_{I+(i)}^\alpha dx^i$$

com $|I| \leq k-1$. Então, a definição 2.4.1 pode ser reformulada da seguinte forma: uma transformação de Lie é um difeomorfismo tal que, localmente, temos:

$$\Phi^*(\theta_I^\alpha) = \sum_{\beta=1}^m \sum_{|J| \leq k-1} \lambda_{I,\beta}^{\alpha,J} \theta_J^\beta \quad (2.4.5)$$

para $\alpha = 1, \dots, m$, $|I| \leq k-1$ e para $\lambda_{I,\beta}^{\alpha,J}$ funções não nulas em $C^\infty(J^k(\pi))$.

Assim, por exemplo, dado um difeomorfismo pontual $\Phi : \mathbb{R}_{xu}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{xu}^2$ definido por $(x, u) \mapsto (X(x, u), U(x, u))$, então, se $\Phi^{(1)}(x, u, p) = (X(x, u), U(x, u), P(x, u, p))$, devemos ter:

$$(\Phi^{(1)})^*(du - p dx) = dU - P dX = \lambda(du - p dx)$$

para alguma função $\lambda \in C^\infty(J^1(1, 1))$ não nula. Mas:

$$dU - P dX = U_x dx + U_u du - P X_x dx - P X_u du = (U_u - P X_u) du + (U_x - P X_x) dx$$

logo $\lambda = U_u - P X_u$ e $-\lambda p = U_x - P X_x$, isto é, $-p(U_u - P X_u) = U_x - P X_x$, donde vem $P = \frac{U_x + U_u p}{X_x + X_u p}$, o que está de acordo com o que vimos anteriormente.

O procedimento anterior para construir o levantamento de difeomorfismos pontuais em $E = J^0(\pi)$, pode ser generalizado para qualquer transformação de Lie $\Phi : J^k(\pi) \rightarrow J^k(\pi)$, $k \geq 1$ da seguinte forma: como se viu anteriormente, um ponto $\tilde{\theta} \in J^{k+1}(\pi)$ pode ser considerado como um par ordenado formado pelo ponto $\theta = \pi_k^{k+1}(\tilde{\theta})$ e pelo R -plano $L_{\tilde{\theta}} \subset T_{\tilde{\theta}} J^k(\pi)$. Se $d\Phi_\theta(L_{\tilde{\theta}})$ fôr ainda um R -plano, ou seja, se puder escrever-se na forma $L_{\tilde{\theta}'}$ para algum $\tilde{\theta}' \in F_{\Phi(\theta)} = F_{\theta'}$,

tomamos $\Phi^{(1)}(\tilde{\theta}) = \tilde{\theta}$, ou seja, a imagem de $\tilde{\theta}$ é o par ordenado formado pelo ponto $\theta' = \Phi(\theta)$ e pelo R -plano $L_{\tilde{\theta}}$. Análogamente ao levantamento de transformações pontuais, embora $\Phi^{(1)}$ possa não estar definido em toda o espaço $J^{k+1}(\pi)$, é sempre verdade que $\Phi^{(1)}$ está definida num aberto denso em $J^{k+1}(\pi)$.

Vamos agora ver que só há dois tipos genéricos de transformações de Lie.

▷ **Teorema 2.4.1 (Lie-Backlund)** ... Toda a transformação de Lie $\Phi : J^k(\pi) \rightarrow J^k(\pi)$, com $k > 1$, é de um dos seguintes tipos:

1. se $m = \text{rank } E = 1$ (uma só variável dependente), então Φ é o $(k - 1)$ -levantamento de uma transformação de contacto em $J^1(\pi)$.
2. se $m = \text{rank } E > 1$, então Φ é o k -levantamento de uma transformação pontual em $E = J^0(\pi)$

Dem. Começamos por considerar o caso em que $m > 1$ ou $n > 1$. Neste caso, vimos que as variedades integrais maximais da distribuição de Cartan em $J^k(\pi)$ eram as fibras da projecção π_{k-1}^k . Mas, se Φ é uma transformação de Lie, então preserva a distribuição de Cartan, e, consequentemente, preserva as suas variedades integrais maximais. Logo, a imagem por Φ de uma fibra da projecção π_{k-1}^k é ainda uma fibra da projecção π_{k-1}^k , o que nos permite definir uma aplicação $\tilde{\Phi} : J^{k-1}(\pi) \rightarrow J^{k-1}(\pi)$ da seguinte forma: dado um ponto $\theta \in J^{k-1}(\pi)$, se F_θ é a fibra da projecção π_{k-1}^k sobre θ , tomo $\tilde{\Phi}(\theta)$ como sendo o ponto $\tilde{\theta}$ tal que $\Phi(F_\theta) = F_{\tilde{\theta}}$. Considerando agora $\Phi' = \tilde{\Phi}^{(1)} \circ \Phi^{-1}$, obtenho uma aplicação em $J^k(\pi)$ que se projecta na identidade em $J^{k-1}(\pi)$. Mas tal aplicação só pode ser a própria identidade em $J^k(\pi)$, pelo que $\tilde{\Phi}^{(1)} = \Phi$. Utilizando o facto do levantamento de transformações de Lie ser associativo, no sentido de verificar $(\Phi^{(l)})^{(s)} = \Phi^{(l+s)}$ para toda a transformações de Lie $\Phi : J^{k-1}(\pi) \rightarrow J^{k-1}(\pi)$ e para todos $l, s \in \mathbb{N}$, posso aplicar sucessivamente o raciocínio anterior e concluir que Φ é o $(k - 1)$ -levantamento de uma transformação de contacto em $J^1(\pi)$, se $m = 1$, ou o k -levantamento de uma transformação pontual em $J^0(\pi)$.

Vamos agora considerar o caso em que $m = n = 1$ (uma variável dependente u e uma variável independente x apenas). Em $J^k(\pi) = J^k(1; 1)$, consideramos o sistema de coordenadas local dado por $x, u_0 = u, u_1, u_2, \dots, u_k$. Neste caso particular, a distribuição de Cartan, em $J^k(1; 1)$, tem dimensão 2 e é gerada pelo campo de vectores vertical $Z = \frac{\partial}{\partial u_k}$ e pelo campo de vectores horizontal $D = \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{i=0}^{k-1} u_{i+1} \frac{\partial}{\partial u_i}$.

Se demonstrarmos que Φ preserva a distribuição gerada por Z , então, consequentemente, preserva as suas variedades integrais maximais, que são as fibras da projecção $\pi_k : J^k(\pi) \rightarrow M$. Aplicando o mesmo raciocínio do caso anterior, chegamos à conclusão que Φ é o k -levantamento de uma transformação pontual em $E = J^0(\pi)$.

Seja V a distribuição gerada por Z . Dada uma distribuição P , vamos designar por $\Gamma(P)$ o conjunto dos campos de vectores pertencentes a P . Tomando C' como sendo a distribuição em $J^k(\pi)$ gerada pelos comutadores de campos de vectores pertencentes a $\Gamma(C)$, temos que, como C é gerada pelos campos de vectores Z e D , C' é gerada pelos campos de vectores Z , D e $Y = [Z, D] = [\frac{\partial}{\partial u_k}, \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{i=0}^{k-1} u_{i+1} \frac{\partial}{\partial u_i}] = [\frac{\partial}{\partial u_k}, \frac{\partial}{\partial x}] + \sum_{i=0}^{k-1} [\frac{\partial}{\partial u_k}, u_{i+1} \frac{\partial}{\partial u_i}] = [\frac{\partial}{\partial u_k}, u_k \frac{\partial}{\partial u_{k-1}}] = \frac{\partial}{\partial u_{k-1}}$. Se tomarmos agora $S(C')$ como sendo o conjunto dos campos de vectores $S \in T(J^k(\pi))$ que verificam $[S, \Gamma(C')] \subset \Gamma(C')$, vamos agora ver que $\Gamma(V) = \Gamma(C) \cap S(C')$. De facto, se S

é um campo de vectores de $\Gamma(C)$, posso escrever $S = \alpha Z + \beta D$ para certas secções α e β de $J^k(\pi)$, dado que $\Gamma(C)$ é gerado pelos campos Z e D . Logo, se $S \in S(C')$ então, em particular, como $Y \in \Gamma(C')$, devemos ter $[Y, S] \in \Gamma(C')$. Mas $[Y, S] = [Y, \alpha Z + \beta D] = Y(\alpha)Z + \alpha[Y, Z] + Y(\beta)D + \beta[Y, D] = Y(\alpha)Z + Y(\beta)D + \beta X$, logo, para que $[Y, S]$ pertença a $\Gamma(C')$, devemos ter $\beta = 0$, dado que os campos de vectores Z, D, Y e X são linearmente independentes em todos os pontos de $J^k(\pi)$ e dado que C' é gerada pelos campos de vectores Z, D e Y . Temos então que $S = \alpha Z$, ou seja, $S \in \Gamma(V)$. Como Φ preserva a distribuição de Cartan, temos $d\Phi(\Gamma(C)) = \Gamma(C)$ e, conseqüentemente, $d\Phi(\Gamma(C')) = \Gamma(C')$. Logo, $d\Phi(\Gamma(V)) = d\Phi(\Gamma(C) \cap \Gamma(C')) = d\Phi(\Gamma(C)) \cap d\Phi(\Gamma(C')) = \Gamma(C) \cap \Gamma(C') = \Gamma(V)$, ou seja, Φ preserva a distribuição V gerada por Z .

◁.

Um exemplo, para $m = 1$, de uma transformação de Lie que é de contacto mas que não é o levantamento de nenhuma transformação pontual é dada pela transformação de Legendre em $J^1(1, 1)$, que é definida por:

$$(x, u, p) \mapsto (X(x, u, p) = p, U(x, u, p) = xp - u, P(x, u, p) = x) \quad (2.4.6)$$

Trata-se de uma transformação de Lie, como já vimos, mas, no entanto, é óbvio que não é o levantamento de nenhuma transformação pontual em \mathbb{R}_{xu} .

2.5 Campos de Lie

▷ **Definição 2.5.1** ... Um campo de Lie \mathbf{X} em $J^k(\pi)$ é um campo de vectores cujo fluxo (local) é constituído por transformações de Lie. Ou seja, se \mathbf{X} é um campo de vectores em $J^k(\pi)$ cujo fluxo (local) em $J^k(\pi)$ é $\{\Phi_t\}$, \mathbf{X} é um campo de Lie se e só Φ_t é uma transformação de Lie, para todo t .

◁.

Vimos que, localmente, a distribuição de Cartan era determinada pelas formas de Cartan $\theta_I^\alpha = du_I^\alpha - \sum_{i=1}^n u_{I+(i)}^\alpha dx^i$, com $|I| \leq k - 1$. Então, a definição anterior pode ser reformulada da seguinte forma: um campo de Lie é um campo de vectores \mathbf{X} tal que, localmente, temos:

$$L_{\mathbf{X}}\theta_I^\alpha = \sum_{\beta=1}^m \sum_{|J| \leq k-1} \lambda_{I,\beta}^{\alpha,J} \theta_J^\beta$$

para $\alpha = 1, \dots, m$, $|I| \leq k - 1$ e para $\lambda_{I,\beta}^{\alpha,J}$ funções de $C^\infty(J^k(\pi))$.

Na secção anterior, vimos que só havia dois tipos genéricos de transformações de Lie (levantamentos de transformações de contacto em $J^1(\pi)$ e levantamentos de transformações pontuais em $E = J^0(\pi)$). Vamos ver que o mesmo acontece com os campos de Lie.

Dado um campo de Lie $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}(J^k(\pi))$, podemos definir o seu levantamento de ordem ℓ da seguinte forma: tomando o respectivo fluxo (local) $\{\Phi_t\}$ de transformações em $J^k(\pi)$, uma vez que se tratam de transformações de Lie podemos tomar o levantamento de ordem ℓ de cada uma delas e obter um fluxo de transformações de Lie em $J^{k+\ell}(\pi)$, cujo respectivo gerador infinitesimal será o campo de vectores em $\mathfrak{X}(J^{k+\ell}(\pi))$ que designaremos por levantamento de ordem ℓ do campo de vectores dado e que notaremos por $\mathbf{X}^{(\ell)}$. Note-se que, por construção,

$\mathbf{X}^{(\ell)}$ é ainda um campo de Lie. Notemos ainda que, ao contrário do que acontecia com as transformações de Lie, o campo de Lie $\mathbf{X}^{(\ell)}$ está definido em toda a variedade $J^{k+\ell}(\pi)$. De facto, dado um campo de Lie $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}(J^k(\pi))$ e um ponto $\theta \in J^{k+1}(\pi)$, o respectivo R -plano L_θ , sendo horizontal, será enviado num plano também horizontal por uma transformação Φ_t com t suficientemente pequeno. Isto permite-nos definir o levantamento de ordem 1 do campo de Lie $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}(J^k(\pi))$ em toda a variedade $J^{k+1}(\pi)$, pelo que, usando a associatividade do levantamento de campos de Lie, podemos definir levantamento de ordem ℓ do campo de Lie $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}(J^k(\pi))$ em toda a variedade $J^{k+\ell}(\pi)$ para qualquer $\ell \in \mathbb{N}$.

Temos, então, o seguinte teorema:

▷ **Teorema 2.5.1** ... Toda o campo de Lie $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}(J^k(\pi))$, com $k > 1$, é de um dos seguintes tipos:

1. se $m = \text{rank } E = 1$, então \mathbf{X} é o $(k-1)$ -levantamento de um campo de contacto em $J^1(\pi)$.
2. se $m = \text{rank } E > 1$, então \mathbf{X} é o k -levantamento de um campo de vectores em $J^0(\pi)$.

◁.

▷ **Exemplo 2.5.1** ... Consideremos o fibrado trivial $\pi : E = \mathbb{R}_{xu}^2 \rightarrow \mathbb{R}_x = M$, de $\text{rank } E = 1$, e um campo de vectores $\mathbf{X} = a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial u} \in \mathfrak{X}(E)$, com $a, b \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, cujo fluxo é $\{\Phi_t\}$, com $\Phi_t(x, u) = (X(t; x, u), U(t; x, u))$ sendo $X(t; \cdot), U(t; \cdot) \in C^\infty(\mathbb{R}^2), \forall t \in \mathbb{R}$ funções suaves tais que $X(0; x, u) = x, U(0; x, u) = u, \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} X(t; \cdot) = a$ e $\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} U(t; \cdot) = b$. Então, para cada $t \in \mathbb{R}$, podemos considerar o levantamento a $J^1(\pi)$ do difeomorfismo:

$$\Phi_t : (x, u) \mapsto (X(t; x, u), U(t; x, u))$$

que, como vimos antes, é dado por:

$$\Phi_t^{(1)} : (x, u, p) \mapsto \left(X(t; x, u), U(t; x, u), \frac{U_x(t; x, u) + U_u(t; x, u)p}{X_x(t; x, u) + X_u(t; x, u)p} \right)$$

Temos agora um fluxo local em $J^1(\pi)$, cujo gerador infinitesimal é:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^{(1)}(x, u, p) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \left(X(t; x, u), U(t; x, u), \frac{U_x(t; x, u) + U_u(t; x, u)p}{X_x(t; x, u) + X_u(t; x, u)p} \right) \\ &= \left(a, b, b_x + (b_u - a_x)p - a_u p^2 \right) \end{aligned}$$

isto é, os campos de Lie em $J^1(1, 1)$ que são o levantamento de campos de vectores em $J^0(\pi)$ são dados por:

$$\mathbf{X}^{(1)} = a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial u} + (b_x + (b_u - a_x)p - a_u p^2) \frac{\partial}{\partial p}$$

sendo a e b as suas componentes em $J^0(\pi)$.

Por exemplo, o levantamento a $J^1(1, 1)$ do campo de vectores $\mathbf{X} = -u \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial u}$, em $E = J^0(\pi) = \mathbb{R}_{xu}^2$, é $\mathbf{X}^{(1)} = -u \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial u} + (1 + p^2) \frac{\partial}{\partial p}$.

◁.

Vamos agora ver como podemos calcular as componentes do levantamento de um campo de Lie \mathbf{X} , dadas as suas componentes.

▷ **Teorema 2.5.2** ... Consideremos um campo de Lie dado por:

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1, \dots, m, |I| \leq k} b_I^\alpha \frac{\partial}{\partial u_I^\alpha} \quad (2.5.1)$$

Os coeficientes b_I^α podem ser calculados por recorrência através da seguinte fórmula:

$$b_{I+(i)}^\alpha = D_i(b_I^\alpha) - \sum_{j=1}^n u_{I+(j)}^\alpha D_i(a^j) \quad (2.5.2)$$

onde $|I| \leq k-1$ e $D_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha, I} u_{I+(i)}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_I^\alpha}$ é o operador de derivação total relativamente a x^i .

Dem. Se \mathbf{X} é um campo de Lie, temos que $L_{\mathbf{X}}\theta_I^\alpha$ deve ser uma combinação linear de formas de Cartan. Como $\mathbf{X}(x^i) = a^i$ e $\mathbf{X}(u_I^\alpha) = b_I^\alpha$, temos que:

$$\begin{aligned} L_{\mathbf{X}}\theta_I^\alpha &= \mathbf{X} \left(du_I^\alpha - \sum_{i=1}^n u_{I+(i)}^\alpha dx^i \right) \\ &= d(\mathbf{X}u_I^\alpha) - \sum_{i=1}^n (\mathbf{X}u_{I+(i)}^\alpha) dx^i + u_{I+(i)}^\alpha d(\mathbf{X}x^i) \\ &= db_I^\alpha - \sum_{i=1}^n (b_{I+(i)}^\alpha dx^i + u_{I+(i)}^\alpha da^i) \end{aligned}$$

Notemos agora que qualquer 1-forma

$$\omega = \sum_i a_i dx^i + \sum_{\alpha=1, \dots, m, |I| \leq k} b_\alpha^I du_I^\alpha$$

em $J^k(\pi)$ pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_{i=1}^n a_i dx^i + \sum_{\alpha, I} b_\alpha^I du_I^\alpha \\ &= \sum_{i=1}^n a_i dx^i + \sum_{\alpha, I} b_\alpha^I \left(\theta_I^\alpha + \sum_{i=1}^n u_{I+(i)}^\alpha dx^i \right) \\ &= \sum_{i=1}^n a_i dx^i + \sum_{\alpha, I} b_\alpha^I \theta_I^\alpha + \sum_{i=1}^n \left(\sum_{\alpha, I} u_{I+(i)}^\alpha b_\alpha^I \right) dx^i \\ &= \sum_{i=1}^n \left(a_i + \sum_{\alpha, I} u_{I+(i)}^\alpha b_\alpha^I \right) dx^i + \sum_{\alpha, I} b_\alpha^I \theta_I^\alpha \\ &= \sum_{i=1}^n \varphi_i dx^i + \omega_C \end{aligned} \quad (2.5.3)$$

onde $\varphi_i = a_i + \sum_{\alpha, I} u_{I+(i)}^\alpha b_\alpha^I$ é uma função suave em $J^{k+1}(\pi)$ e ω_C é uma combinação linear de formas de Cartan. Em particular, uma 1-forma do tipo $d\varphi$ em que φ é uma função suave em $J^k(\pi)$ pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} d\varphi &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} dx^i + \sum_{\alpha, I} \frac{\partial \varphi}{\partial u_I^\alpha} du_I^\alpha \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^i} + \sum_{\alpha, I} u_{I+(i)}^\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial u_I^\alpha} \right) dx^i + \sum_{\alpha, I} \frac{\partial \varphi}{\partial u_I^\alpha} \theta_I^\alpha \\ &= \sum_{i=1}^n D_i(\varphi) dx^i + \sum_{\alpha, I} \frac{\partial \varphi}{\partial u_I^\alpha} \theta_I^\alpha \end{aligned} \quad (2.5.4)$$

Temos então:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(\theta_I^\alpha) &= db_I^\alpha - \sum_{i=1}^n b_{I+(i)}^\alpha dx^i - \sum_{j=1}^n u_{I+(j)}^\alpha da_j \\ &= \sum_{i=1}^n D_i(b_I^\alpha) dx^i - \sum_{i=1}^n b_{I+(i)}^\alpha dx^i - \sum_{j=1}^n \left(u_{I+(j)}^\alpha \sum_{i=1}^n D_i(a_j) dx^i \right) + \omega_C \\ &= \sum_{i=1}^n \left(D_i(b_I^\alpha) - b_{I+(i)}^\alpha - \sum_{j=1}^n u_{I+(j)}^\alpha D_i(a_j) \right) dx^i + \omega_C \end{aligned} \quad (2.5.5)$$

onde ω_C é uma combinação linear de formas de Cartan. Logo, para que $\mathbf{X}(\theta_I^\alpha)$ seja uma combinação linear de formas de Cartan, concluímos que tal acontece se e só se $D_i(b_I^\alpha) - b_{I+(i)}^\alpha - \sum_{j=1}^n u_{I+(j)}^\alpha D_i(a_j) = 0$, ou seja, se e só se $b_{I+(i)}^\alpha = D_i(b_I^\alpha) - \sum_{j=1}^n u_{I+(j)}^\alpha D_i(a_j)$ para quaisquer $i = 1, \dots, n$, $\alpha = 1, \dots, m$ e $|I| \leq k - 1$.

◁.

▷ **Exemplo 2.5.2** ... De que forma são os campos de contacto em $J^1(n, 1)$? Consideremos em $J^1(n, 1)$ um campo de contacto \mathbf{X} dado por:

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial}{\partial x^i} + b \frac{\partial}{\partial u} + \sum_{i=1}^n c_i \frac{\partial}{\partial u_i} \quad (2.5.6)$$

onde designamos $u_{(i)}$ por u_i . Vamos, em primeiro lugar, ver qual a relação entre as funções a^i e a função b . Para que \mathbf{X} seja um campo de contacto, temos de ter $X(\theta) = \lambda\theta$ para alguma função suave $\lambda \in C^\infty(J^1(n, 1))$, onde $\theta = du - \sum_{i=1}^n u_i dx^i$ é a forma de Cartan (ou de contacto) em $J^1(n, 1)$. Logo, vem:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(\theta) &= \mathbf{X} \left(du - \sum_{i=1}^n u_i dx^i \right) \\ &= d(\mathbf{X}u) - \sum_{i=1}^n (\mathbf{X}u_i) dx^i - \sum_{i=1}^n u_i d(\mathbf{X}x^i) \\ &= db - \sum_{i=1}^n c_i dx^i - \sum_{j=1}^n u_j da^j \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial b}{\partial x^i} - c_i - \sum_{j=1}^n u_j \frac{\partial a^j}{\partial x^i} \right) dx^i + \left(\frac{\partial b}{\partial u} - \sum_{j=1}^n u_j \frac{\partial a^j}{\partial u} \right) du + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial b}{\partial u_i} - \sum_{j=1}^n u_j \frac{\partial a^j}{\partial u_i} \right) du_i$$

Portanto $X(\theta) = \lambda\theta = \lambda(du - \sum_{i=1}^n u_i dx^i)$ se e só se:

$$\begin{cases} \frac{\partial b}{\partial x^i} - c_i - \sum_{j=1}^n u_j \frac{\partial a^j}{\partial x^i} = -\lambda u_i, & i = 1, \dots, n \\ \frac{\partial b}{\partial u} - \sum_{j=1}^n u_j \frac{\partial a^j}{\partial u} = \lambda \\ \frac{\partial b}{\partial u_i} - \sum_{j=1}^n u_j \frac{\partial a^j}{\partial u_i} = 0, & i = 1, \dots, n \end{cases} \quad (2.5.7)$$

isto é, se e só se:

$$\begin{cases} \frac{\partial b}{\partial x^i} - c_i - \sum_{j=1}^n u_j \frac{\partial a^j}{\partial x^i} + u_i \frac{\partial b}{\partial u} - u_i \sum_{j=1}^n u_j \frac{\partial a^j}{\partial u} = 0, & i = 1, \dots, n \\ \frac{\partial b}{\partial u_i} - \sum_{j=1}^n u_j \frac{\partial a^j}{\partial u_i} = 0, & i = 1, \dots, n \end{cases} \quad (2.5.8)$$

Considerando a função $f = b - \sum_{j=1}^n u_j a^j$, temos que $\frac{\partial f}{\partial u_i} = \frac{\partial b}{\partial u_i} - \sum_{j=1}^n u_j \frac{\partial a^j}{\partial u_i} - a^i = -a^i$, $i = 1, \dots, n$, pelo que $a^i = -\frac{\partial f}{\partial u_i}$, $i = 1, \dots, n$ e $b = f + \sum_{j=1}^n u_j a^j = f - \sum_{j=1}^n u_j \frac{\partial f}{\partial u_j}$.

Quanto às funções c_i , estas podem ser obtidas recorrendo ao teorema anterior. Sendo assim, temos:

$$\begin{aligned} c_i &= D_i(b) - \sum_{j=1}^n u_j D_i(a^j) \quad \text{onde } D_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + u_i \frac{\partial}{\partial u} \\ &= D_i \left(f - \sum_{j=1}^n u_j \frac{\partial f}{\partial u_j} \right) - \sum_{j=1}^n u_j D_i \left(-\frac{\partial f}{\partial u_j} \right) \\ &= D_i(f) - \sum_{j=1}^n u_j D_i \left(\frac{\partial f}{\partial u_j} \right) + \sum_{j=1}^n u_j D_i \left(\frac{\partial f}{\partial u_j} \right) \\ &= D_i(f) = \frac{\partial f}{\partial x^i} + u_i \frac{\partial f}{\partial u} \end{aligned} \quad (2.5.9)$$

Chegamos então à conclusão que os campos de contacto em $J^1(n, 1)$ são da forma:

$$\mathbf{X}_f = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial u_i} \frac{\partial}{\partial x^i} + \left(f - \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial f}{\partial u_i} \right) \frac{\partial}{\partial u} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} + u_i \frac{\partial f}{\partial u} \right) \frac{\partial}{\partial u_i} \quad (2.5.10)$$

A função f designa-se por **função geradora do campo \mathbf{X}_f** .

◁.

Generalizando o exemplo anterior, vamos agora considerar em $J^k(\pi)$ um campo de Lie $\mathbf{X} = \sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^m b^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + \dots$ e uma secção arbitrária f do fibrado π . Sabemos que, como \mathbf{X} é, por hipótese, um campo de Lie, para t suficientemente pequeno o k -gráfico da secção de f é transformado no k -gráfico de alguma secção f_t de π . Vamos, então, definir uma secção em $J^k(\pi)$, denominada por **secção geradora do campo \mathbf{X}** , que irá medir a velocidade instantânea de variação da secção f através das transformações locais geradas pelo campo \mathbf{X} . Usando as coordenadas canónicas $\{x^i, u^\alpha\}$ de π , suponhamos que a secção f é definida por

$u^\alpha = f^\alpha(x^1, \dots, x^n)$. Então, o seu k -gráfico Γ_f^k , em $J^k(\pi)$, é dado, nas coordenadas canónicas $\{x^i, u^\alpha, u_I^\alpha\}$ de $J^k(\pi)$, pelas equações:

$$\begin{cases} u^\alpha = f^\alpha(x^1, \dots, x^n), & \alpha = 1, \dots, m \\ u_I^\alpha = \frac{\partial^{|I|} f^\alpha}{\partial (x^1)^{i_1} \dots \partial (x^n)^{i_n}}(x^1, \dots, x^n), & \alpha = 1, \dots, m, |I| \leq k \end{cases} \quad (2.5.11)$$

Como em Γ_f^k se tem que $u_I^\alpha = \frac{\partial^{|I|} f^\alpha}{\partial x^I}$, $|I| \leq k$, vemos que os campos de vectores $\mathbf{D}_i^{(f)}$, dados por:

$$\mathbf{D}_i^{(f)} = \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^m \left(\sum_{|I|<k} u_{I+(i)}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_I^\alpha} + \sum_{|I|=k} \frac{\partial^{|I|+1} f^\alpha}{\partial x^I \partial x^i} \frac{\partial}{\partial u_I^\alpha} \right) \quad (2.5.12)$$

formam uma base do espaço tangente do k -gráfico Γ_f^k . Sendo assim, podemos desprezar a acção destes campos em Γ_f^k , uma vez que esta é trivial. Vamos então considerar a acção da componente vertical \mathbf{X}^v do campo de vectores \mathbf{X} , dada por:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^v &= \mathbf{X} - \sum_{i=1}^n a^i \mathbf{D}_i^{(f)} \\ &= \sum_{\alpha=1}^m \left(b^\alpha - \sum_{i=1}^n a^i u_i^\alpha \right) \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + \dots \end{aligned} \quad (2.5.13)$$

A **secção geradora** $\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^m)$ define-se então como sendo a secção cuja componente φ^α coincide com a componente de \mathbf{X}^v em $\frac{\partial}{\partial u^\alpha}$, ou seja:

$$\varphi^\alpha = b^\alpha - \sum_{i=1}^n a^i u_i^\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, m \quad (2.5.14)$$

Note-se que a componente φ^α pode também ser calculada através da seguinte fórmula:

$$\varphi^\alpha = \mathbf{X} \lrcorner \theta^\alpha = \theta^\alpha(\mathbf{X}), \quad \text{onde } \theta^\alpha = du^\alpha - \sum_{i=1}^n u_i^\alpha dx^i \quad (2.5.15)$$

Obtemos assim uma correspondência bijectiva entre os campos de Lie e as secções $\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^m)$. Esta bijecção permite-nos definir o parêntesis de Jacobi entre duas secções φ e ψ de π como sendo a secção $\{\varphi, \psi\}$ cujo respectivo campo de Lie é dado pelo comutador entre o campo de Lie associado a φ e o campo de Lie associado a ψ . Obviamente, obtemos assim uma estrutura de álgebra de Lie relativamente ao parêntesis de Jacobi.

2.6 Simetrias clássicas

▷ **Definição 2.6.1** ... Uma simetria (finita) clássica de uma equação $\mathcal{E} \subset J^k(\pi)$ é uma transformação de Lie $\Phi : J^k(\pi) \mapsto J^k(\pi)$, que envia a equação \mathcal{E} nela própria, ou seja, tal que $\Phi(\mathcal{E}) \subset \mathcal{E}$.

▷ **Definição 2.6.2** ... Uma simetria (infinitesimal) clássica de uma equação $\mathcal{E} \subset J^k(\pi)$ é um campo de Lie $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}(J^k(\pi))$, que é tangente a \mathcal{E} , ou seja, tal que $\mathbf{X}_\theta \in T_\theta(\mathcal{E})$, $\forall \theta \in \mathcal{E}$.

◁.

O teorema seguinte decorre directamente das definições:

▷ **Teorema 2.6.1 ... 1.** *Seja $\Phi : J^k(\pi) \rightarrow J^k(\pi)$ uma simetria (finita) da equação $\mathcal{E} \subset J^k(\pi)$, e seja \mathbf{s} uma solução de \mathcal{E} , isto é, uma secção do fibrado π , cujo k -gráfico $\Gamma_{\mathbf{s}}^k$ está contido em \mathcal{E} . Então $\Phi(\Gamma_{\mathbf{s}}^k)$ é uma solução generalizada da equação \mathcal{E} . Em particular, se $\Phi(\Gamma_{\mathbf{s}}^k)$ é da forma $\Gamma_{\mathbf{s}'}$, para alguma secção $\mathbf{s}' = \Phi^*\mathbf{s}$, então \mathbf{s}' é solução de \mathcal{E} .*

2. *Se \mathbf{X} é uma simetria infinitesimal de \mathcal{E} e \mathbf{s} é uma solução, então para qualquer ponto $\theta \in \Gamma_{\mathbf{s}}^k$ existe uma vizinhança U , de θ em $\Gamma_{\mathbf{s}}^k$, e $\epsilon > 0$ tal que $\forall |t| < \epsilon$, a variedade $\text{Fl}_t^{\mathbf{X}}(U)$ é localmente da forma $\Gamma_{\Phi_t^{\mathbf{X}}\mathbf{s}}$. Por outras palavras, \mathbf{X} determina um fluxo no conjunto das soluções de \mathcal{E} .*

◁.

Por vezes, considera-se como simetria infinitesimal não o campo de Lie, mas a sua respectiva secção geradora. Tal pode ser feito, pois, como vimos, existe uma correspondência bijectiva entre ambos. Note-se também que, se \mathbf{X} e \mathbf{Y} são campos de Lie, então as formas $\mathbf{X}(\theta_I^\alpha)$ e $\mathbf{Y}(\theta_I^\alpha)$ pertencem ambas à distribuição de Cartan, pelo que $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}](\theta_I^\alpha) = \mathbf{X}(\mathbf{Y}(\theta_I^\alpha)) - \mathbf{Y}(\mathbf{X}(\theta_I^\alpha))$ também pertence à distribuição de Cartan e, conseqüentemente, $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$ é também um campo de Lie. Além disso, se \mathbf{X} e \mathbf{Y} forem tangentes à equação \mathcal{E} , $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$ também o é. Temos então que o conjunto das simetrias de uma equação \mathcal{E} tem uma estrutura de álgebra de Lie, a qual pode ser transportada para o conjunto das secções geradoras de campos de simetria de uma dada equação \mathcal{E} , através da correspondência entre os campos de Lie e as suas respectivas secções geradoras.

Uma das principais razões da utilização de simetrias infinitesimais em vez de simetrias finitas reside no facto de as primeiras poderem ser determinadas localmente através de sistemas de equações diferenciais lineares. Assim, dada uma equação $\mathcal{E} = \{\theta \in J^k(\pi) : F^\alpha(\theta) = 0, \alpha = 1, \dots, r\} \subset J^k(\pi)$ de rank máximo, para que um determinado campo de Lie \mathbf{X} seja tangente à equação \mathcal{E} é necessário e suficiente que $\mathbf{X}(F^\alpha)$ se anule em \mathcal{E} para todo $\alpha = 1, \dots, r$, ou seja, que se verifique a seguinte condição:

$$\mathbf{X}(F^\alpha) = \sum_{\beta=1}^r \lambda_\beta^\alpha F^\beta \quad (2.6.1)$$

para $\alpha = 1, \dots, r$ e para λ_β^α funções de $C^\infty(J^k(\pi))$.

Vejamus um exemplo:

▷ **Exemplo 2.6.1 ...** Em $J^2(2,1)$, consideremos uma PDE de segunda ordem em duas variáveis independentes x^1 e x^2 e numa variável dependente u dada por:

$$F(x^1, x^2, u, u_1 = u_{(1,0)}, u_2 = u_{(0,1)}, u_{(2,0)}, u_{(1,1)}, u_{(0,2)}) = 0 \quad (2.6.2)$$

onde F é uma função suave em $J^2(2,1)$.

Como $m = 1$, qualquer campo de Lie em $J^2(2,1)$ é o 1-levantamento de um campo de contacto em $J^1(2,1)$. Neste caso, temos que os campos de contacto são dados por:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_\varphi = & -\frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \frac{\partial}{\partial x^1} - \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} \frac{\partial}{\partial x^2} + \left(\varphi - u_1 \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} - u_2 \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} \right) \frac{\partial}{\partial u} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^1} + u_1 \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right) \frac{\partial}{\partial u_1} \\ & + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^2} + u_2 \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right) \frac{\partial}{\partial u_2} \end{aligned} \quad (2.6.3)$$

Logo:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_\varphi^{(1)} = & -\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}\frac{\partial}{\partial x^1} - \frac{\partial\varphi}{\partial u_2}\frac{\partial}{\partial x^2} + \left(\varphi - u_1\frac{\partial\varphi}{\partial u_1} - u_2\frac{\partial\varphi}{\partial u_2}\right)\frac{\partial}{\partial u} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^1} + u_1\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)\frac{\partial}{\partial u_1} + \\ & \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^2} + u_2\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)\frac{\partial}{\partial u_2} + b_{(2,0)}\frac{\partial}{\partial u_{(2,0)}} + b_{(1,1)}\frac{\partial}{\partial u_{(1,1)}} + b_{(0,2)}\frac{\partial}{\partial u_{(0,2)}} \end{aligned} \quad (2.6.4)$$

para certas funções suaves $b_{(2,0)}$, $b_{(1,1)}$ e $b_{(0,2)}$. Portanto, a equação que define as simetrias de \mathcal{E} é:

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}\frac{\partial F}{\partial x^1} - \frac{\partial\varphi}{\partial u_2}\frac{\partial F}{\partial x^2} + \left(\varphi - u_1\frac{\partial\varphi}{\partial u_1} - u_2\frac{\partial\varphi}{\partial u_2}\right)\frac{\partial F}{\partial u} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^1} + u_1\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)\frac{\partial F}{\partial u_1} \\ & + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^2} + u_2\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)\frac{\partial F}{\partial u_2} + b_{(2,0)}\frac{\partial F}{\partial u_{(2,0)}} + b_{(1,1)}\frac{\partial F}{\partial u_{(1,1)}} + b_{(0,2)}\frac{\partial F}{\partial u_{(0,2)}} = \lambda F \end{aligned} \quad (2.6.5)$$

Note-se que, para calcular as funções $b_{(2,0)}$, $b_{(1,1)}$ e $b_{(0,2)}$, basta utilizar o teorema ?. Temos, por exemplo, que:

$$\begin{aligned} b_{(2,0)} = & D_1(b_{(1,0)}) - u_{(2,0)}D_1(a_1) - u_{(1,1)}D_1(a_2) \\ = & D_1\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^1} + u_1\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right) - u_{(2,0)}D_1\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}\right) - u_{(1,1)}D_1\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial u_2}\right) \\ = & \frac{\partial^2\varphi}{\partial(x^1)^2} + u_1\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^1\partial u} + u_{(2,0)}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^1\partial u_1} + u_{(1,1)}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^1\partial u_2} + u_{(2,0)}\frac{\partial\varphi}{\partial u} + u_1\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial x^1} + u_1^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} + \\ & + u_1u_{(2,0)}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial u_1} + u_1u_{(1,1)}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial u_2} + u_{(2,0)}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u_1\partial x^1} + u_{(2,0)}u_1\frac{\partial^2\varphi}{\partial u_1\partial u} + u_{(2,0)}^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial u_1^2} + \\ & + u_{(2,0)}u_{(1,1)}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u_1\partial u_2} + u_{(1,1)}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u_2\partial x^1} + u_{(1,1)}u_1\frac{\partial^2\varphi}{\partial u_2\partial u} + u_{(1,1)}u_{(2,0)}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u_2\partial u_1} + u_{(1,1)}^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial u_2^2} \\ = & u_{(2,0)}\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial(x^1)^2} + 2u_1\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^1\partial u} + 2u_{(2,0)}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^1\partial u_1} + 2u_{(1,1)}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^1\partial u_2} + u_1^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} + 2u_1u_{(2,0)}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial u_1} + \\ & 2u_1u_{(1,1)}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial u_2} + u_{(2,0)}^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial u_1^2} + 2u_{(2,0)}u_{(1,1)}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u_1\partial u_2} + u_{(1,1)}^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial u_2^2} \end{aligned} \quad (2.6.6)$$

◁.

2.7 Cálculo das simetrias da equação de Burgers

A equação de Burgers é a equação dada por:

$$u_t = uu_x + u_{xx} \quad (2.7.1)$$

Trata-se de uma PDE de segunda ordem em duas variáveis independentes x e t e numa variável dependente u . Aqui estamos a usar notações clássicas com $x^1 = x$, $x^2 = t$, $u_{(0,0)} = u$, $u_{(1,0)} = u_x$, $u_{(2,0)} = u_{xx}$, $u_{(0,2)} = u_{tt}$. Com as notações multiíndice, a equação (2.7.1) escreve-se, em $J^2(2;1)$, na forma:

$$u_{(0,2)} - u_{(0,0)}u_{(1,0)} - u_{(2,0)} = 0$$

Aplicando o exemplo da secção anterior, temos que a equação que define as simetrias da equação de Burgers é:

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial\varphi}{\partial u_x}\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{\partial\varphi}{\partial u_t}\frac{\partial F}{\partial t}+\left(\varphi-u_x\frac{\partial\varphi}{\partial u_x}-u_t\frac{\partial\varphi}{\partial u_t}\right)\frac{\partial F}{\partial u}+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+u_x\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)\frac{\partial F}{\partial u_x} \\ & +\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+u_t\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)\frac{\partial F}{\partial u_t}+b_{xx}\frac{\partial F}{\partial u_{xx}}+b_{xt}\frac{\partial F}{\partial u_{xt}}+b_{tt}\frac{\partial F}{\partial u_{tt}}=\lambda F \end{aligned} \quad (2.7.2)$$

onde $F = uu_x + u_{xx} - u_t$ e onde $b_{xx} = u_{xx}\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + 2u_x\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial u} + 2u_{xx}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial u_x} + 2u_{xt}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial u_t} + u_x^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} + 2u_xu_{xx}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial u_x} + 2u_xu_{xt}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial u_t} + u_{xx}^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial u_x^2} + 2u_{xx}u_{xt}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u_x\partial u_t} + u_{xt}^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial u_t^2}$.

Como $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial u_x} = \frac{\partial F}{\partial u_t} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial u} = u_x$, $\frac{\partial F}{\partial u_x} = u$, $\frac{\partial F}{\partial u_t} = -1$ e $\frac{\partial F}{\partial u_{xx}} = 1$, vem:

$$\begin{aligned} & \left(\varphi-u_x\frac{\partial\varphi}{\partial u_x}-u_t\frac{\partial\varphi}{\partial u_t}\right)u_x+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+u_x\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)u-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+u_t\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)+ \\ & +u_{xx}\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+2u_x\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial u}+2u_{xx}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial u_x}+2u_{xt}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial u_t}+u_x^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}+ \\ & 2u_xu_{xx}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial u_x}+2u_xu_{xt}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial u_t}+u_{xx}^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial u_x^2}+2u_{xx}u_{xt}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u_x\partial u_t}+u_{xt}^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial u_t^2} \\ & =\lambda(uu_x+u_{xx}-u_t) \end{aligned} \quad (2.7.3)$$

Notemos também que φ é uma função suave nas variáveis x , t , u , u_x e u_t . Uma análise detalhada desta equação permite-nos concluir que, para que esta seja possível, a função λ não pode conter as variáveis u_{xx} , u_{xt} e u_{tt} . Logo, não pode surgir nenhum termo em u_{xx}^2 no segundo membro da equação, pelo que o coeficiente de u_{xx}^2 no primeiro membro da equação deverá ser nulo. Então, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial u_x^2} = 0$ e φ é da forma:

$$\varphi = \alpha(x, t, u, u_t)u_x + \beta(x, t, u, u_t)$$

Um raciocínio análogo permite-nos concluir que $\frac{\partial^2\varphi}{\partial u_t^2} = 0$, logo $\frac{\partial^2\alpha}{\partial u_t^2}u_x + \frac{\partial^2\beta}{\partial u_t^2} = 0$, pelo que $\frac{\partial^2\alpha}{\partial u_t^2} = \frac{\partial^2\beta}{\partial u_t^2} = 0$ e φ é da forma:

$$\begin{aligned} \varphi & = (O(x, t, u)u_t + A(x, t, u))u_x + B(x, t, u)u_t + C(x, t, u) \\ & = O(x, t, u)u_xu_t + A(x, t, u)u_x + B(x, t, u)u_t + C(x, t, u) \end{aligned} \quad (2.7.4)$$

Temos também que $\frac{\partial^2\varphi}{\partial u_x\partial u_t} = 0$, logo $O(x, t, u) = 0$ e φ é da forma:

$$\varphi = A(x, t, u)u_x + B(x, t, u)u_t + C(x, t, u)$$

Substituindo na equação que define as simetrias da equação de Burgers, obtemos:

$$\begin{aligned} & Cu_x + (A_xu_x + B_xu_t + C_x + u_x(A_uu_x + B_uu_t + C_u))u - (A_tu_x + B_tu_t + C_t + u_t(A_uu_x \\ & + B_uu_t + C_u)) + u_{xx}(A_uu_x + B_uu_t + C_u) + (A_{xx}u_x + B_{xx}u_t + C_{xx}) + 2u_x(A_{xu}u_x \\ & + B_{xu}u_t + C_{xu}) + 2u_{xx}A_x + 2u_{xt}B_x + u_x^2(A_{uu}u_x + B_{uu}u_t + C_{uu}) \\ & + 2u_xu_{xx}A_u + 2u_xu_{xt}B_u = \lambda(uu_x + u_{xx} - u_t) \end{aligned} \quad (2.7.5)$$

Como ambos os membros são polinomiais de grau 1 em u_{xx} , os seus coeficientes terão de ser iguais, pelo que $\lambda = A_u u_x + B_u u_t + C_u + 2A_x + 2u_x A_u$ e vem:

$$\begin{aligned} & C u_x + (A_x u_x + B_x u_t + C_x + u_x(A_u u_x + B_u u_t + C_u))u - (A_t u_x + B_t u_t + C_t + u_t(A_u u_x \\ & + B_u u_t + C_u)) + u_{xx}(A_u u_x + B_u u_t + C_u) + (A_{xx} u_x + B_{xx} u_t + C_{xx}) + 2u_x(A_{xu} u_x \\ & + B_{xu} u_t + C_{xu}) + 2u_{xx} A_x + 2u_{xt} B_x + u_x^2(A_{uu} u_x + B_{uu} u_t + C_{uu}) + 2u_x u_{xx} A_u + 2u_x u_{xt} B_u \\ & = (A_u u_x + B_u u_t + C_u + 2A_x + 2u_x A_u)(u u_x + u_{xx} - u_t) \end{aligned} \quad (2.7.6)$$

Simplificando, vem:

$$\begin{aligned} & C u_x + (A_x u_x + B_x u_t + C_x)u - (A_t u_x + B_t u_t + C_t) + \\ & + (A_{xx} u_x + B_{xx} u_t + C_{xx}) + 2u_x(A_{xu} u_x + B_{xu} u_t + C_{xu}) + 2u_{xt} B_x + \\ & u_x^2(A_{uu} u_x + B_{uu} u_t + C_{uu}) + 2u_x u_{xt} B_u = (2A_x + 2u_x A_u)(u u_x - u_t) \end{aligned} \quad (2.7.7)$$

Vamos agora ver de que forma são as funções A , B e C . O coeficiente de u_{xt} é nulo no segundo membro e é $2B_x + 2u_x B_u$ no primeiro membro, logo temos $B_x = B_u = 0$. Simplificando, vem:

$$\begin{aligned} & C u_x + (A_x u_x + C_x)u - (A_t u_x + B_t u_t + C_t) + \\ & + (A_{xx} u_x + C_{xx}) + 2u_x(A_{xu} u_x + C_{xu}) + \\ & u_x^2(A_{uu} u_x + C_{uu}) = (2A_x + 2u_x A_u)(u u_x - u_t) \end{aligned} \quad (2.7.8)$$

Agora, o coeficiente de $u_x u_t$ é nulo no primeiro membro e é $-2A_u$ no primeiro membro, logo temos $A_u = 0$. Simplificando, vem:

$$\begin{aligned} & C u_x + (A_x u_x + C_x)u - (A_t u_x + B_t u_t + C_t) + \\ & + (A_{xx} u_x + C_{xx}) + 2u_x C_{xu} + u_x^2 C_{uu} = \\ & = 2A_x(u u_x - u_t) \end{aligned} \quad (2.7.9)$$

Temos agora que o coeficiente de u_t é $-B_t$ no primeiro membro e é $-2A_x$ no primeiro membro, logo, supondo $B_t = 2A_x$, vem:

$$\begin{aligned} & C u_x + (A_x u_x + C_x)u - (A_t u_x + C_t) + \\ & + (A_{xx} u_x + C_{xx}) + 2u_x C_{xu} + u_x^2 C_{uu} = \\ & = 2A_x u u_x \end{aligned} \quad (2.7.10)$$

Esta última equação é quadrática em u_x . Logo, igualando os coeficientes dos termos de grau 0, 1 e 2, vem:

$$\begin{cases} C_{uu} & = & 0 \\ C + A_x u - A_t + A_{xx} + 2C_{xu} & = & 2A_x u \\ C_x u - C_t + C_{xx} & = & 0 \end{cases} \quad (2.7.11)$$

Pela primeira equação do sistema, vemos que $C = r(x, t)u + s(x, t)$. Substituindo na terceira equação, obtemos:

$$r_x u^2 + s_x u - r_t u - s_t + r_{xx} u - s_{xx} = 0$$

Esta última equação é quadrática em u . Logo, vem:

$$\begin{cases} r_x & = 0 \\ s_x - r_t + r_{xx} & = 0 \\ s_t + s_{xx} & = 0 \end{cases} \quad (2.7.12)$$

Derivando a segunda equação deste sistema relativamente a x , vem $s_{xx} - r_{tx} + r_{xxx}$. Mas, como $r_x = 0$, temos $s_{xx} = 0$, ou seja, $s = wx + v$, pelo que da terceira equação concluímos que $s_t = 0$. Derivando agora a segunda equação deste sistema relativamente a t , vem $s_{xt} - r_{tt} + r_{xxt}$. Mas, como $r_x = s_t = 0$, temos r_{tt} , ou seja, $r = mt + n$. Notemos ainda que a segunda equação implica que $w = m$. Assim, temos:

$$C = (mt + n)u + (wx + v) = (wt + n)u + wx + v$$

Voltando ao primeiro sistema, vamos derivar a segunda equação relativamente a u . Como $A_u = C_{uu} = 0$, obtemos $C_u + A_x = 2A_x$, ou seja, $C_u = A_x$. Logo, $A_x = wt + n$ e, como $A_u = 0$, vem $A = (wt + n)x + q(t)$. Substituindo na segunda equação, vem:

$$\begin{aligned} (wt + n)u + wx + v + (wt + n)u - (wx + q_t) &= 2(wt + n)u \\ q_t &= v \\ q &= vt + k \end{aligned} \quad (2.7.13)$$

Logo, $A = (wt + n)x + vt + k$. Finalmente, como $B_u = B_x = 0$ e $B_t = 2A_x = 2wt + 2n$, vem $B = wt^2 + 2nt + l$. Temos então que:

$A = (wt + n)x + vt + k$, $B = wt^2 + 2nt + l$, $C = (wt + n)u + wx + v$, com $w, n, v, k, l \in \mathbb{R}$ e φ é dada por:

$$\begin{aligned} \varphi &= ((wt + n)x + vt + k)u_x + (wt^2 + 2nt + l)u_t + (wt + n)u + wx + v = \\ &= w(txu_x + t^2u_t + tu + x) + n(xu_x + 2tu_t + u) + v(tu_x + 1) + ku_x + lu_t \end{aligned} \quad (2.7.14)$$

Assim, as funções $txu_x + t^2u_t + tu + x$, $xu_x + 2tu_t + u$, $tu_x + 1$, u_x e u_t formam uma base do espaço vectorial de simetrias da equação de Burgers, sendo que os correspondentes campos de Lie em $J^0(2, 1)$ são dados, respectivamente, por:

$$\begin{aligned} -tx \frac{\partial}{\partial x} - t^2 \frac{\partial}{\partial t} + (tu + x) \frac{\partial}{\partial u} \\ -x \frac{\partial}{\partial x} - 2t \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial u} \\ -t \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u} \\ \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.7.15)$$

Capítulo 3

Geometria Formal e Simetrias Generalizadas das Equações Diferenciais

Neste capítulo serão descritos alguns aspectos da teoria geométrica formal de sistemas de PDE's, que se devem essencialmente a Tsujishita e Vinogradov. Por teoria formal entende-se uma teoria cujo objectivo é o de descrever a estrutura das séries de potências formais das soluções desses sistemas, o que é equivalente a estudar os prolongamentos infinitos desses mesmos sistemas, num sentido que será explicado neste capítulo. Na categoria real analítica a teoria formal dá automaticamente a teoria “verdadeira”, atendendo ao teorema de Cauchy-Kowalevskaya. No entanto, na categoria C^∞ a teoria formal é bastante débil em muitos aspectos, como por exemplo no que se refere à existência de soluções ou ao tratamento de singularidades.

3.1 Os espaços de jactos infinitos $J^\infty(\pi)$

Seja $\pi : E \rightarrow M$ um fibrado vectorial de rank m sobre uma variedade M de dimensão n , e consideremos a sucessão de projecções:

$$M \xleftarrow{\pi} E = J^0(\pi) \xleftarrow{\pi_0^1} J^1(\pi) \xleftarrow{\pi_1^2} J^2(\pi) \xleftarrow{\dots} \dots \xleftarrow{\dots} J^k(\pi) \xleftarrow{\pi_k^{k+1}} J^{k+1}(\pi) \xleftarrow{\dots} \dots \quad (3.1.1)$$

O espaço de jactos infinitos $J^\infty(\pi)$ define-se como sendo o limite inverso deste sistema. Portanto um elemento $\sigma_\infty \in J^\infty(\pi)$ é uma sucessão infinita $\sigma_\infty = \{x, \sigma_k\}$, onde $x \in M$ e $\sigma_k \in J^k(\pi)$, $k = 0, 1, \dots$, tal que $\pi_k^{k+1}(\sigma_{k+1}) = \sigma_k$ e $\pi(\sigma_0) = x$. Pelo lema de Borel, e usando as definições dos espaços $J^k(\pi)$, podemos escolher sempre uma secção $s \in \Gamma(\pi)$ tal $\sigma_k = j^k s(x) = [s]_x^k, \forall k \geq 1$. Pômos então:

$$\sigma = j^\infty s(x) = [s]_x^\infty$$

Portanto, pontos de $J^\infty(\pi)$ podem ser pensados como classes de secções do fibrado π , tangentes com ordem infinita, ou como séries de Taylor infinitas de tais secções.

Dado um ponto $\sigma_\infty = \{x, \sigma_k\} \in J^\infty(\pi)$, pômos $\pi_k^\infty(\sigma_\infty) = \sigma_k$ e $\pi_\infty(\sigma_\infty) = x$, e, portanto, para $k \geq \ell \geq 0$ temos os seguintes diagramas comutativos:

$$\begin{array}{ccc}
 J^\infty(\pi) & \xrightarrow{\pi_k^\infty} & J^k(\pi) \\
 \searrow \pi_\infty & & \swarrow \pi_k \\
 & & M
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 J^\infty(\pi) & \xrightarrow{\pi_k^\infty} & J^k(\pi) \\
 \searrow \pi_\ell^\infty & & \swarrow \pi_\ell^k \\
 & & J^\ell(\pi)
 \end{array}
 \tag{3.1.2}$$

O fibrado $\pi_\infty : J^\infty(\pi) \longrightarrow M$ diz-se o **fibrado de jactos infinitos** do fibrado $\pi : E \rightarrow M$. O sistema inverso (3.1.1) dá origem a um sistema directo:

$$C^\infty(M) \xrightarrow{\nu} \mathcal{F}_0 \xrightarrow{\nu_0^1} \mathcal{F}_1 \xrightarrow{\nu_1^2} \dots \longrightarrow \mathcal{F}_k \xrightarrow{\nu_k^{k+1}} \mathcal{F}_{k+1} \longrightarrow \dots
 \tag{3.1.3}$$

onde pusemos:

$$\mathcal{F}_k = C^\infty(J^k(\pi)), \quad \text{e} \quad \nu = \pi^*, \quad \nu_k^{k+1} = (\pi_k^{k+1})^*, \quad k = 0, 1, \dots,$$

Por definição, a **álgebra de funções** suaves em $J^\infty(\pi)$ é o limite directo do sistema (3.1.16)

- $\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_k \mathcal{F}_k$:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathcal{F}_{-\infty} & \xrightarrow{\nu} & \mathcal{F}_0 & \xrightarrow{\nu_0^1} & \dots & \xrightarrow{\nu_k^{k+1}} & \mathcal{F}_{k+1} & \longrightarrow & \dots \\
 & \searrow \nu_\infty & & \searrow \nu_0 & & \searrow \nu_k & & \searrow \nu_{k+1} & \\
 & & & & & & & & \mathcal{F} = \bigcup_k \mathcal{F}_k
 \end{array}$$

Se $\varphi \in \mathcal{F}$, então, por definição de limite directo, φ deve factorizar-se através de uma função $\tilde{\varphi} \in \mathcal{F}_k$, para algum k , isto é:

$$\begin{array}{ccc}
 J^\infty(\pi) & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R} \\
 \pi_k^\infty \downarrow & \nearrow \tilde{\varphi} & \\
 J^k(\pi) & &
 \end{array}
 \quad : \quad \varphi = \tilde{\varphi} \circ \pi_k^\infty
 \tag{3.1.4}$$

O menor desses k 's diz-se o **grau** (de filtração) de φ e nota-se por $\text{deg}(\varphi)$. Se φ é de grau k então também será de grau $\geq k$.

3.1.1 Campos de vectores

Um vector tangente X_σ , num ponto $\sigma = (x, \sigma_k) \in J^\infty(\pi)$, define-se como sendo uma sequência $\{X_x, X_{\sigma_k}\}$ de vectores tangentes a M e a cada $J^k(\pi)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, respectivamente nos pontos $x = \pi_\infty(\sigma)$ e $\sigma_k = \pi_k^\infty(\sigma)$, isto é, $X_x \in T_x M$ e $X_{\sigma_k} \in T_{\sigma_k} J^k(\pi)$, e tais que:

$$(\pi_k^{k+1})_*(X_{\sigma_{k+1}}) = X_{\sigma_k}, \quad (\pi_k)_*(X_{\sigma_k}) = X_x$$

Se (U, x^i) é um sistema de coordenadas locais em M , e se (x^i, u_I^α) é o sistema de coordenadas canónico em $\pi_\infty^{-1}(U)$, então X_σ é representado simbòlicamente na forma de uma soma infinita:

$$X_\sigma = \sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{|I| \geq 0} \sum_{\alpha=1}^m b_I^\alpha \frac{\partial}{\partial u_I^\alpha} \quad (3.1.5)$$

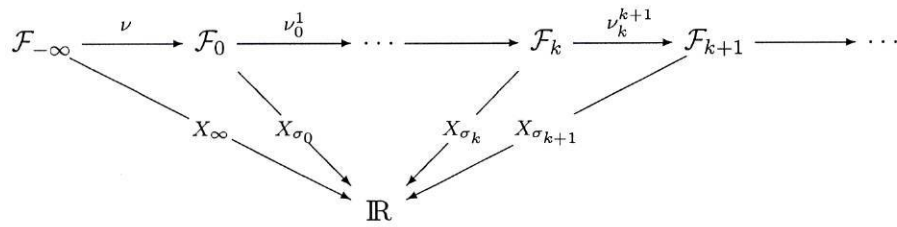
onde $a_i, b_I^\alpha \in \mathbb{R}$. Também se tem que:

$$X_{\sigma_k} = (\pi_k^\infty)_*(X_\sigma) = \sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{|I|=0}^k \sum_{\alpha=1}^m b_I^\alpha \frac{\partial}{\partial u_I^\alpha}, \quad (\pi_\infty)_*(X_\sigma) = \sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

Seja X_σ um vector tangente num ponto $\sigma = (x, \sigma_k) \in J^\infty(\pi)$, e $X_{\sigma_k} = (\pi_k^\infty)_*(X_\sigma)$ a sua projecção em $T_{\sigma_k} J^k(\pi)$. Então X_{σ_k} pode ser interpretado como uma derivação pontual na álgebra \mathcal{F}_k , isto é, como uma aplicação $X_{\sigma_k} : \mathcal{F}_k \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$X_{\sigma_k}(\varphi\psi) = \varphi(\sigma_k)X_{\sigma_k}\psi + \psi(\sigma_k)X_{\sigma_k}\varphi, \quad \varphi, \psi \in \mathcal{F}_k \quad (3.1.6)$$

A condição de compatibilidade dos vectores X_x, X_{σ_k} com as projecções, significa que o diagrama seguinte é comutativo:



e portanto o vector tangente X_σ pode ser visto como uma derivação pontual na álgebra \mathcal{F} :

$$X_\sigma(\varphi\psi) = \varphi(\sigma)X_\sigma\psi + \psi(\sigma)X_\sigma\varphi, \quad \varphi, \psi \in \mathcal{F} \quad (3.1.7)$$

Se tivermos agora uma família $X = \{X_\sigma\}$, parametrizada pelos pontos de $J^\infty(\pi)$, então (3.1.7) fica:

$$X(\varphi\psi) = \varphi X(\psi) + \psi X(\varphi), \quad \varphi, \psi \in \mathcal{F}$$

Definimos pois um campo de vectores em $J^\infty(\pi)$, como sendo uma aplicação $X : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ que é uma derivação da álgebra \mathcal{F} e tal que:

$$\deg X(\varphi) = \deg(\varphi) + k, \quad \varphi \in \mathcal{F}$$

onde $k = \deg(X)$ é um inteiro que não depende de φ .

Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$ um campo de vectores em M . Seja $x \in M$ e $\sigma_k \in (\pi_k)^{-1}(x) \in J^k(\pi)$. Então $\sigma_k = [s]_x^k$ para alguma secção $s \in \Gamma(\pi)$. Seja φ uma função suave em $J^k(\pi)$, definida numa vizinhança de σ_k . Definamos um novo campo \widehat{X} através de:

$$\widehat{X}_{\sigma_k}\varphi \stackrel{\text{def}}{=} X_x(\varphi \circ j^k s) \quad (3.1.8)$$

o membro direito não depende da secção s que representa σ_k e, portanto, \widehat{X}_{σ_k} representa um vector tangente a $J^k(\pi)$ no ponto σ_k . Se $\sigma = \{x, \sigma_k\} \in J^\infty(\pi)$ então $(\pi_k^{k+1})_*(\widehat{X}_{\sigma_{k+1}}) = \widehat{X}_{\sigma_k}$ e $(\pi_k)_*(\widehat{X}_{\sigma_k}) = \widehat{X}_x$, o que significa que $\{\widehat{X}_x, \widehat{X}_{\sigma_k}\}$ determina um vector tangente a $J^\infty(\pi)$ no ponto σ .

▷ **Definição 3.1.1** ... O campo \widehat{X} em $J^\infty(\pi)$ diz-se o **levantamento** do campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ ao espaço de jactos infinitos $J^\infty(\pi)$.

◁.

As propriedades seguintes do levantamento deduzem-se directamente da definição anterior:

$$f\widehat{X} + g\widehat{Y} = f\widehat{X} + g\widehat{Y} \quad (3.1.9)$$

$$[\widehat{X}, \widehat{Y}] = [\widehat{X}, \widehat{Y}] \quad (3.1.10)$$

$$\widehat{X}(f\varphi) = X(f)\varphi + f\widehat{X}(\varphi) \quad (3.1.11)$$

onde $f, g \in C^\infty(M)$, $\varphi \in \mathcal{F}$ e $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. As duas primeiras propriedades significam que o levantamento é um homomorfismo da álgebra de Lie $\mathfrak{X}(M)$ na álgebra de Lie $\mathfrak{X}(\pi) = \mathfrak{X}(J^\infty(\pi))$, enquanto que a terceira significa que a projecção em M do levantamento \widehat{X} é o campo inicial X . Portanto a correspondência:

$$X \longrightarrow \widehat{X} \quad (3.1.12)$$

define uma conexão integrável em $J^\infty(\pi)$ a que chamaremos a **distribuição de Cartan** em $J^\infty(\pi)$.

Qual o levantamento de $\frac{\partial}{\partial x^i}$? Seja $\varphi = \varphi(x^i, u_I^\alpha) \in \mathcal{F}$ e $s = (s^\alpha) \in \Gamma(\pi)$. Como $u_I^\alpha(j^k s) = \frac{\partial^{|\mathbf{I}|} s^\alpha}{\partial x^{\mathbf{I}}}$, vem, pela definição (3.1.8), que:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_{\sigma_k} \varphi &= \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_x (\varphi \circ j^k s) \\ &= \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_x \varphi \left(x^i, \frac{\partial^{|\mathbf{I}|} s^\alpha}{\partial x^{\mathbf{I}}} \right) \\ &= \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} + \sum_{\alpha, \mathbf{I}} \frac{\partial \varphi}{\partial u_I^\alpha} \frac{\partial^{|\mathbf{I}|+1} s^\alpha}{\partial x^i \partial x^{\mathbf{I}}} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha, \mathbf{I}} u_{\mathbf{I}+(i)}^\alpha (j^{k+1} s) \frac{\partial}{\partial u_I^\alpha} \right) \varphi \end{aligned}$$

e portanto:

$$\widehat{\frac{\partial}{\partial x^i}} \stackrel{\text{def}}{=} D_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^m \sum_{|\mathbf{I}|=0}^{\infty} u_{\mathbf{I}+(i)}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_I^\alpha} \quad (3.1.13)$$

onde D_i é o operador de **derivação total** segundo x^i . Note que D_i transformam funções em k -jactos em funções em $(k+1)$ -jactos e por isso não determinam qualquer campo de vectores em variedades de jactos finitos. Note ainda que:

$$[D_i, D_j] = 0, \quad \forall i, j \quad (3.1.14)$$

pela segunda propriedade em (3.1.11).

Um campo de vectores $X \in \mathfrak{X}(\pi)$ diz-se **vertical** se:

$$X(\pi_\infty^* f) = 0, \quad \forall f \in C^\infty(M) \quad (3.1.15)$$

Em coordenadas canónicas, um campo vertical tem uma expressão da forma:

$$X = \sum_{\alpha, \mathbf{I}} X_I^\alpha \frac{\partial}{\partial u_I^\alpha}$$

Representamos por $\mathfrak{X}^V(\pi)$ a subálgebra de Lie de $\mathfrak{X}(\pi)$ constituída pelos campos verticais.

3.1.2 Formas Diferenciais

Consideremos, para cada i , o módulo $\Omega^i(J^k(\pi))$, de i -formas em $J^k(\pi)$. Temos então um sistema directo:

$$\Omega^i(M) \xrightarrow{\nu} \Omega^i(E) \xrightarrow{\nu_0^1} \dots \longrightarrow \Omega^i(J^k(\pi)) \xrightarrow{\nu_k^{k+1}} \Omega^i(J^{k+1}(\pi)) \longrightarrow \dots \quad (3.1.16)$$

onde pusemos mais uma vez $\nu = \pi^*$ e $\nu_k^{k+1} = (\pi_k^{k+1})^*$, que nos permite definir $\Omega^i(\pi)$ como o respectivo limite directo:

$$\Omega^i(\pi) = \bigcup_{k=0}^{\infty} \Omega^i(J^k(\pi))$$

Em particular $\Omega^0(\pi) = \mathcal{F}$. Finalmente definimos o módulo de formas diferenciais em $J^\infty(\pi)$, através de:

$$\Omega^*(\pi) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \Omega^i(\pi) \quad (3.1.17)$$

É possível desenvolver um cálculo de Cartan em $\Omega^*(\pi)$. Assim, se $X \in \mathfrak{X}(\pi)$ e $\omega \in \Omega^i(\pi)$, podemos definir o **produto interior** $X \lrcorner \omega \in \Omega^{i-1}(\pi)$, da seguinte forma: seja $\sigma = (x, \sigma_k) \in J^\infty(\pi)$ e $X_\sigma = \{X_x, X_{\sigma_k}\} \in T_\sigma J^\infty(\pi)$. Existe um k tal que $\omega \in \Omega^i(J^k(\pi))$. Pômos então:

$$(X \lrcorner \omega)_\sigma \stackrel{\text{def}}{=} X_{\sigma_k} \lrcorner \omega_{\sigma_k}$$

$\forall k' \geq k$, sabemos que $\pi_k^{k'}(X_{\sigma_{k'}}) = X_{\sigma_k}$ e portanto $X_{\sigma_{k'}} \lrcorner ((\pi_k^{k'})^* \omega)_{\sigma_{k'}} = X_{\sigma_k} \lrcorner \omega_{\sigma_k}$, o que significa que \lrcorner está bem definida.

Podemos agora definir a derivada de Lie $L_X \omega$, através da fórmula de Cartan usual:

$$L_X \omega = d(X \lrcorner \omega) + X \lrcorner d\omega$$

▷ **Definição 3.1.2** ... Uma forma diferencial $\omega \in \Omega^*(\pi)$ diz-se **semi-básica** ou **horizontal** se $X \lrcorner \omega = 0$ para todo o campo vertical $X \in \mathfrak{X}^V(\pi)$.

◁.

Como um campo vertical $X \in \mathcal{V}(\pi)$ tem uma expressão local da forma $X = \sum_{\alpha, I} X_I^\alpha \frac{\partial}{\partial u_I^\alpha}$, uma forma horizontal tem uma expressão local do tipo:

$$\omega = \sum \varphi_{i_1, \dots, i_\ell} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_\ell}$$

onde $\varphi_{i_1, \dots, i_\ell} \in \mathcal{F}(\pi)$.

3.1.3 A distribuição de Cartan em $J^\infty(\pi)$

Vamos agora definir com mais detalhe a conexão plana $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\pi)$, em $J^\infty(\pi) \rightarrow M$, chamada a **conexão** ou a **distribuição de Cartan**, que desempenha um papel essencial em todo este trabalho.

Para cada $\sigma = (x, \sigma_k) \in J^\infty(\pi)$ define-se um subespaço $\mathcal{H}_\sigma \in T_\sigma J^\infty(\pi)$ da seguinte forma: consideramos uma secção $s \in \Gamma(\pi)$ tal que $\sigma = j^\infty s(x) = [s]_x^\infty$, onde $x = \pi_\infty(\sigma) \in M$, o que é possível, como já assinalamos, pelo lema de Borel, e pômos:

$$\mathcal{H}_\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \text{im} \{(dj^\infty s)_x : T_x M \rightarrow T_\sigma J^\infty(\pi)\} \quad (3.1.18)$$

onde $(dj^\infty s)_x : T_x M \rightarrow T_\sigma J^\infty(\pi)$ é a diferencial de $j^\infty s$ em x .

- ▷ **Lema 3.1.1** ... 1. \mathcal{H}_σ não depende de s .
 2. $\mathcal{H} = \cup_\sigma \mathcal{H}_\sigma$ é um subfibrado de $TJ^\infty(\pi)$.

Dem. Seja (x^i, u_I^α) um sistema de coordenadas canónico. Para cada função $\varphi \in \mathcal{F}$, sabemos que $\varphi \in \mathcal{F}_k$, para algum k . Portanto, para $i = 1, \dots, n$, tem-se que:

$$\begin{aligned} D_i \varphi &\stackrel{\text{def}}{=} (dj^\infty s)_x (\partial / \partial x^i) \varphi = \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_x (\varphi \circ j^k s) \\ &= \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_x \varphi \left(x^i, \frac{\partial^{|\alpha|} s^\alpha}{\partial x^I} \right) \\ &= \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} + \sum_{\alpha, I} \frac{\partial \varphi}{\partial u_I^\alpha} \frac{\partial^{|\alpha|+1} s^\alpha}{\partial x^i \partial x^I} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha, I} u_{I+(i)}^\alpha (j^{k+1} s) \frac{\partial}{\partial u_I^\alpha} \right) \varphi \end{aligned}$$

e portanto:

$$D_i = \widehat{\frac{\partial}{\partial x^i}} = \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^m \sum_{|I|=0}^{\infty} u_{I+(i)}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_I^\alpha} \quad (3.1.19)$$

são independentes de s e $\mathcal{H} = \text{span}\{D_i\}$.

◁.

A conexão \mathcal{H} permite levantar um campo de vectores $X \in \mathfrak{X}(M)$ a um campo “horizontal” $\tilde{X} \in \Gamma(\mathcal{H}) \subset \mathfrak{X}(\pi)$, que não é mais do que o levantamento de X , definido já em 3.1.1. Representamos por:

$$\tau : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(\pi) \quad (3.1.20)$$

esta aplicação de levantamento, que é, como já vimos, um homomorfismo de álgebras de Lie. Portanto a conexão \mathcal{H} é plana. Podemos também ver isto, atendendo a que o anulador de \mathcal{H} é localmente gerado pelas seguintes 1-formas de Cartan:

$$\theta_I^\alpha = du_I^\alpha - \sum_i u_{I+(i)}^\alpha dx^i \quad (3.1.21)$$

onde $\alpha = 1, \dots, m = \text{rank } E$, e $I \in \mathbb{N}^p$. De facto, $\theta_I^\alpha(D_i) = 0$, $\forall i$ e $dx^i(D_j) = \delta_j^i$. Além disso:

$$\begin{aligned} d\theta_I^\alpha &= d(du_I^\alpha - \sum_i u_{I+(i)}^\alpha dx^i) \\ &= - \sum_i du_{I+(i)}^\alpha \wedge dx^i \\ &= - \sum_{i,k} u_{I+(i)+(k)}^\alpha dx^k \wedge dx^i \quad \text{mod } \{\mathbb{R}\theta_{I+(i)}^\alpha\} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.1.22)$$

isto é:

$$d\Gamma\mathcal{H}^\perp \subset \Gamma\mathcal{H}^\perp$$

3.2 Um exemplo

Consideremos o seguinte sistema (não autónomo) de ODE's de primeira ordem \mathcal{E}_1 , dado por:

$$[\mathcal{E}_1] \dots \quad \frac{du^\beta}{dx} = f^\beta(x, u^1, \dots, u^m) = f^\beta(x, u^\alpha), \quad \alpha, \beta = 1, \dots, m \quad (3.2.1)$$

onde as funções f^β são de classe C^∞ em $\mathbb{R}_{x, u^\alpha}^{m+1}$.

Para analisar este sistema do ponto de vista geométrico, podemos considerar o correspondente sistema de equações de Pfaff:

$$\theta^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} du^\alpha - f^\alpha(x, u) dx = 0, \quad \alpha = 1, \dots, m \quad (3.2.2)$$

definido no “espaço de fases estendido”¹:

$$\mathcal{R}_\infty = \mathcal{R}_\infty(\mathcal{E}_1) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_{u^\alpha}^m \quad (3.2.3)$$

No entanto, a descrição geométrica do sistema \mathcal{E}_1 ficará ainda mais clara se considerarmos a conexão \mathcal{H} , de dimensão 1, definida no fibrado trivial:

$$\pi : \mathcal{R}_\infty = \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_{u^\alpha}^m \longrightarrow \mathbb{R}_x = M \quad (3.2.4)$$

pelo sistema de Pfaff $\{\theta^\alpha\}$, dada por (3.2.2). Se \mathcal{V} é o subfibrado de $T\mathcal{R}_\infty$, formado pelos vectores verticais, i.e., tangentes às fibras de π , então:

$$T\mathcal{R}_\infty \cong \mathcal{V} \oplus \mathcal{H} \quad (3.2.5)$$

O campo de vectores D_x definido por:

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{\alpha=1}^m f^\alpha(x, u) \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \quad (3.2.6)$$

é um referencial do subfibrado \mathcal{H} .

Uma secção $s : x \mapsto (x, u^\alpha = s^\alpha(x))$ do fibrado π , diz-se \mathcal{H} -plana se e só se o plano tangente ao gráfico de s , em cada ponto $s(x)$, coincide com o plano $\mathcal{H}_{s(x)}$, isto é:

$$ds \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \in \mathcal{H}_{s(x)}, \quad \forall x \quad (3.2.7)$$

Como:

$$\begin{aligned} ds \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \in \mathcal{H}_{s(x)} &\iff \frac{\partial}{\partial x} + \sum \frac{\partial s^\alpha}{\partial x} \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \in \mathbb{R} \langle D_x \rangle \\ &\iff \frac{\partial}{\partial x} + \sum \frac{\partial s^\alpha}{\partial x} \frac{\partial}{\partial u^\alpha} = \lambda \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} + \sum f^\alpha(x, s^\beta(x)) \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \right), \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ &\iff \lambda = 1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial s^\alpha}{\partial x} = f^\alpha(x, s^\beta(x)), \quad \alpha = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

¹adiante se verá o porquê da notação \mathcal{R}_∞ . Veremos que é natural considerar $\mathcal{R}_\infty = \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_{u^\alpha}^m$, como o prolongamento infinito de \mathcal{E}_1 , de acordo com uma definição geral que será então dada.

vemos que $u^\alpha = s^\alpha(x)$ é uma solução de \mathcal{E}_1 . Podemos então considerar o espaço das secções \mathcal{H} -planas como sendo o espaço das soluções do sistema \mathcal{E}_1 e notá-lo por:

$$\text{Sol}(\mathcal{E}_1) \tag{3.2.9}$$

Mas, pelo teorema de existência e unicidade das soluções, uma solução do sistema \mathcal{E}_1 fica univocamente determinada pelo valor que possui num determinado ponto b de \mathbb{R} , espaço de base do fibrado π . Assim, é natural identificar o espaço das soluções do sistema \mathcal{E}_1 como uma fibra de π . No entanto, como não podemos escolher em princípio b de forma canónica, adoptamos o par $(\mathcal{R}_\infty, \mathcal{H})$ como o substituto do espaço de soluções de \mathcal{E}_1 .

O campo vectorial $D_x \in \Gamma(\mathcal{H})$, definido anteriormente, pode ser encarado como uma derivação da álgebra de funções C^∞ definidas no espaço \mathcal{R}_∞ , o que nos permite obter uma álgebra diferencial $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathcal{E}_1)$. Uma função $\varphi \in \mathcal{A}$, diz-se um **integral primeiro** de \mathcal{E}_1 se verificar a condição $D_x \varphi = 0$, a qual se traduz numa equação diferencial parcial de primeira ordem.

Quando $\varphi \in \mathcal{A}$ é um integral primeiro, a aplicação f_φ definida por:

$$\begin{aligned} f_\varphi : \text{Sol}(\mathcal{E}_1) &\longrightarrow C^\infty(M) \\ s &\longmapsto f_\varphi(s) = s^* \varphi \end{aligned}$$

é constante. De facto, como $s \in \text{Sol}(\mathcal{E}_1)$, temos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\varphi(s(x))) &= \frac{\partial \varphi}{\partial x}(s(x)) + \sum \frac{ds^\alpha}{dx}(x) \frac{\partial \varphi}{\partial u^\alpha}(s(x)) \\ &= \frac{\partial \varphi}{\partial x}(s(x)) + \sum f^\alpha(s(x)) \frac{\partial \varphi}{\partial u^\alpha}(s(x)) \\ &= D_x \varphi(s(x)) = 0 \end{aligned}$$

Podemos então fazer corresponder, a cada integral primeiro $\varphi \in \mathcal{A}$, uma função real f_φ definida no espaço de soluções, que a cada $s \in \text{Sol}(\mathcal{E}_1)$ atribui o valor constante $s^* \varphi$. Ou seja, temos que:

$$\{\text{Integrais primeiros}\} = C^\infty(\text{Sol}(\mathcal{E}_1)) = C^\infty(\text{fibra de } \pi) \tag{3.2.10}$$

Note-se ainda que o problema de resolver a equação \mathcal{E}_1 pode ser reduzido ao problema de encontrar m integrais primeiros funcionalmente independentes.

3.2.1 O bicomplexo variacional de \mathcal{E}_1

Vimos que o fibrado tangente $T\mathcal{R}_\infty$ podia ser decomposto na forma $T\mathcal{R}_\infty = \mathcal{V} \oplus \mathcal{H}$, isto é, \mathcal{R}_∞ tem uma estrutura quasi-produto. Um campo de vectores $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{R}_\infty)$ diz-se horizontal se $X \in \Gamma(\mathcal{H})$ e vertical se $X \in \Gamma(\mathcal{V})$. Um forma diferencial ω em \mathcal{R}_∞ diz-se de **tipo** (p, q) se ω tem grau $p + q$ e se, para campos de vectores $X_i \in \mathfrak{X}(\mathcal{R}_\infty)$ se tem:

$$\omega(X_1, \dots, X_{p+q}) = 0, \text{ sempre que : } \begin{cases} \text{mais do que } p \text{ dos } X_i \text{ estão em } \Gamma(\mathcal{V}) \\ \text{ou:} \\ \text{mais do que } q \text{ dos } X_i \text{ estão em } \Gamma(\mathcal{H}) \end{cases} \tag{3.2.11}$$

Representemos o \mathcal{A} -módulo de formas de tipo (p, q) em \mathcal{R}_∞ por $\Omega^{p,q}(\mathcal{E}_1)$. Assim, por exemplo, $\omega \in \Omega^{1,0}(\mathcal{E}_1)$ se $\omega(X_1) = 0$ sempre que X_1 é horizontal, $\omega \in \Omega^{0,1}(\mathcal{E}_1)$ se $\omega(X_1) = 0$ sempre que X_1 é vertical, e $\omega \in \Omega^{2,3}(\mathcal{E}_1)$ se $\omega(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) = 0$ sempre que mais do que 2 dos X_i são verticais ou mais do que 3 dos X_i são horizontais. Em coordenadas canónicas (x, u^α) para $\mathcal{R}_\infty = \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_{u^\alpha}^m$, como $\{dx, \theta^\alpha = du^\alpha - f^\alpha(x, u)dx\}$ geram o módulo de 1-formas, onde os $\theta^\alpha = du^\alpha - f^\alpha(x, u)dx$ geram o anulador de \mathcal{H} e dx o anulador de \mathcal{V} , vemos, por exemplo, que $\omega \in \Omega^{1,0}(\mathcal{E}_1)$ escreve-se na forma $\omega = \varphi_\alpha \theta^\alpha$ enquanto que $\omega \in \Omega^{0,1}(\mathcal{E}_1)$ escreve-se na forma $\omega = \varphi dx$.

Toda a r -forma $\omega \in \Omega^r(\mathcal{R}_\infty)$ tem uma decomposição única como uma soma de formas de tipo (p, q) , com $p + q = r$. De facto, a “componente” de tipo (p, q) de ω , é a forma ω_{pq} que é igual a ω sempre que p dos X_i estão em $\Gamma(\mathcal{V})$ e q dos X_i estão em $\Gamma(\mathcal{H})$ e é zero em todos os outros casos. Portanto $\omega = \sum_{p+q=r} \omega_{pq}$ e temos a decomposição:

$$\Omega^r(\mathcal{R}_\infty) = \bigoplus_{p+q=r} \Omega^{p,q}(\mathcal{E}_1) \quad (3.2.12)$$

onde:

$$\Omega^{p,q}(\mathcal{E}_1) = \Gamma(\wedge^p \mathcal{V}^* \otimes \wedge^q \mathcal{H}^*) \quad (3.2.13)$$

Uma forma de tipo (p, q) escreve-se localmente na forma:

$$\omega = \sum \omega_{\alpha_1 \dots \alpha_p, i_1 \dots i_q} \theta^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge \theta^{\alpha_p} \otimes dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_q} \quad (3.2.14)$$

Consideremos agora uma forma α de tipo (p, q) e calculemos $d\alpha$. Pela fórmula conhecida para $d\alpha$:

$$\begin{aligned} d\alpha(X_1, \dots, X_{p+q+1}) &= \sum_{i=1}^{p+q} (-1)^{i+1} X_i \alpha(X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_{p+q+1}) \\ &+ \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \alpha([X_i, X_j], X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_{p+q+1}) \end{aligned} \quad (3.2.15)$$

deduzimos que as únicas componentes eventualmente não nulas de $d\alpha$ são as componentes de tipos $(p+1, q)$ e $(p, q+1)$, uma vez que \mathcal{H} e \mathcal{V} são ambas distribuições integráveis. Definimos pois, para $\alpha \in \Omega^{p,q}$:

$$\begin{aligned} \partial\alpha &\stackrel{\text{def}}{=} (d\alpha)_{p+1,q}, & \text{a } (p+1,q)\text{-componente de } d\alpha \\ \delta\alpha &\stackrel{\text{def}}{=} (d\alpha)_{p,q+1}, & \text{a } (p,q+1)\text{-componente de } d\alpha \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

Concluindo: tomando o complexo de de Rham $\{\Omega^*(\mathcal{R}_\infty), d\}$, podemos decompôr $\Omega^r(\mathcal{R}_\infty)$ da seguinte forma:

$$\Omega^r(\mathcal{R}_\infty) = \bigoplus_{p+q=r} \Omega^{p,q}(\mathcal{E}_1) \quad (3.2.17)$$

onde:

$$\Omega^{p,q}(\mathcal{E}_1) = \Gamma(\wedge^p \mathcal{V}^* \otimes \wedge^q \mathcal{H}^*) \quad (3.2.18)$$

Quanto à derivada exterior d , em $\Omega^{p,q}$, podemos decompô-la numa $(1, 0)$ -componente, ou componente horizontal ∂ , e numa $(0, 1)$ -componente, ou componente vertical δ , uma vez que as distribuições definidas pelos subfibrados \mathcal{V} e \mathcal{H} são ambas integráveis. Obviamente que $\partial^2 = 0 = \delta^2$,

e como $0 = d^2 = (\partial + \delta)^2 = \partial^2 + \delta^2 + (\partial\delta + \delta\partial) = \partial\delta + \delta\partial$, deduzimos que $\partial\delta + \delta\partial = 0$ e portanto obtemos um bicomplexo $\{\Omega^{*,*}(\mathcal{E}_1), \partial, \delta\}$ que é denominado o **bicomplexo variacional** do sistema \mathcal{E}_1 . A sucessão espectral associada a esse bicomplexo chama-se a **C-sucessão espectral de Vinogradov** do sistema \mathcal{E}_1 . O termo “variacional” indica que o operador ∂ , de derivação horizontal, descreve como variam as formas diferenciais no espaço solução, quando as soluções são deformadas ...

Este bicomplexo pode ser descrito usando o sistema de coordenadas locais $x, u^\alpha, \alpha = 1, \dots, m$. Para isso, tomamos a 1-forma dx como uma base de \mathcal{H}^* e as 1-formas $\theta^\alpha = du^\alpha - f^\alpha(x, u) dx, \alpha = 1, \dots, m$ como uma base para \mathcal{V}^* . Estas últimas geram um ideal, chamado o **ideal de contacto** de \mathcal{E}_1 . Temos então que:

$$\Omega^{p,q}(\mathcal{E}_1) = \mathcal{A} \otimes_{\mathbb{R}} \wedge^p[\theta^1, \dots, \theta^m] \otimes \wedge^q[dx] \tag{3.2.19}$$

e as diferenciais ∂ e δ são caracterizadas pelas fórmulas seguintes:

$$\begin{aligned} \partial(\theta^\alpha) &= \partial(dx) = \delta(dx) = 0 \\ \delta(\theta^\alpha) &= -\sum_{\beta} \frac{\partial f^\alpha}{\partial u^\beta} \theta^\beta \otimes dx \\ \delta\varphi &= (D_x\varphi) dx \\ \partial\varphi &= \sum \frac{\partial\varphi}{\partial u^\alpha} \theta^\alpha \end{aligned} \tag{3.2.20}$$

para todo $\varphi \in \mathcal{A}$. Assim, por exemplo:

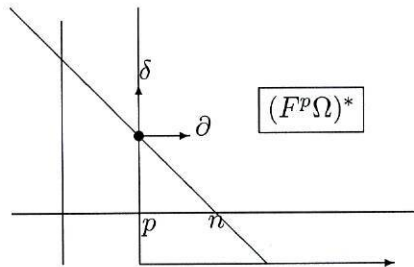
$$\begin{aligned} d\theta^\alpha &= d(du^\alpha - f^\alpha(x, u) dx) \\ &= -\frac{\partial f^\alpha}{\partial u^\beta} du^\beta \wedge dx \\ &= -\frac{\partial f^\alpha}{\partial u^\beta} (\theta^\beta + f^\beta dx) \wedge dx \\ &= -\frac{\partial f^\alpha}{\partial u^\beta} \theta^\beta \wedge dx \end{aligned}$$

donde $\delta\theta^\alpha = -\sum_{\beta} \frac{\partial f^\alpha}{\partial u^\beta} \theta^\beta \otimes dx \in \Omega^{(1,1)}$ e $\partial\theta^\alpha = 0$.

3.2.2 A C-sucessão espectral

Consideremos a filtração por colunas (ou pelo grau de contacto) do complexo de deRham (para tudo isto ver a secção 4.5 do capítulo 4):

$$(F^p\Omega)^* \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{i \geq p} \Omega^{i, *-i}(\mathcal{E}_1) \tag{3.2.21}$$



Portanto o termo de ordem n de $(F^p\Omega)^*$ consiste na soma de todos os $\Omega^{p,q}$ situados na recta $p + q = n$, à direita da linha vertical de abcissa p .

Consideremos agora a sucessão espectral correspondente $E(\mathcal{E}_1) = \{E_r^{p,q}(\mathcal{E}_1), d_r\}$, que, como sabemos, converge para a cohomologia de deRham $\mathcal{H}^*(\mathcal{R}_\infty)$, e vejamos qual o significado dos termos desta sucessão espectral, relativamente à equação \mathcal{E}_1 .

Para facilitar a leitura, recordemos sumariamente os principais conceitos envolvidos. No capítulo 4 far-se-á uma exposição detalhada. Pondo $\Omega = \{\Omega^{p,q} = \Omega^{p,q}(\mathcal{E}_1)\}$, temos então o seguinte bicomplexo:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
 & \uparrow \delta & & \uparrow \delta & & \uparrow \delta & \\
 \Omega^{0,2} & \xrightarrow{\partial} & \Omega^{1,2} & \xrightarrow{\partial} & \Omega^{2,2} & \xrightarrow{\partial} & \dots \\
 & \uparrow \delta & & \uparrow \delta & & \uparrow \delta & \\
 \Omega^{0,1} & \xrightarrow{\partial} & \Omega^{1,1} & \xrightarrow{\partial} & \Omega^{2,1} & \xrightarrow{\partial} & \dots \\
 & \uparrow \delta & & \uparrow \delta & & \uparrow \delta & \\
 \Omega^{0,0} & \xrightarrow{\partial} & \Omega^{1,0} & \xrightarrow{\partial} & \Omega^{2,0} & \xrightarrow{\partial} & \dots
 \end{array} \tag{3.2.22}$$

Definamos, para cada p fixo, a **cohomologia vertical da p -coluna**, $E_1^{p,q} \stackrel{\text{def}}{=} H_\delta^{p,*}(\Omega)$, através de:

$$E_1^{p,q} = H_\delta^{p,q}(\Omega) = H^q(\Omega^{p,*}, \delta) = \frac{\text{Ker}(\delta : \Omega^{p,q} \longrightarrow \Omega^{p,q+1})}{\text{im}(\delta : \Omega^{p,q-1} \longrightarrow \Omega^{p,q})} \tag{3.2.23}$$

A condição $\partial\delta + \delta\partial = 0$ implica que a diferencial horizontal ∂ induz uma aplicação:

$$d_1 : E_1^{p,q} \longrightarrow E_1^{p+1,q} \tag{3.2.24}$$

que é ainda uma diferencial, isto é, $(d_1)^2 = 0$. Por outras palavras, para cada q fixo, $E_1^{*,q} = H_\delta^{*,q}(\Omega)$ é um complexo “horizontal” com diferencial d_1 , induzida por ∂ :

$$\begin{array}{ccccccc}
 E_1^{0,q} & \xrightarrow{d_1} & E_1^{1,q} & \xrightarrow{d_1} & E_1^{2,q} & \xrightarrow{d_1} & \dots \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 E_1^{0,1} & \xrightarrow{d_1} & E_1^{1,1} & \xrightarrow{d_1} & E_1^{2,1} & \xrightarrow{d_1} & \dots \\
 E_1^{0,0} & \xrightarrow{d_1} & E_1^{1,0} & \xrightarrow{d_1} & E_1^{2,0} & \xrightarrow{d_1} & \dots
 \end{array} \tag{3.2.25}$$

Mais concretamente, se α e $\alpha + \delta\beta$, com $\delta\alpha = 0$, representam $[\alpha] \in H_\delta^{p,q}(\Omega) = E_1^{p,q}$, então $\partial\alpha$ e $\partial\alpha + \partial\delta\beta$ estão no núcleo de δ , uma vez que $\delta\partial\alpha = -\partial\delta\alpha = 0$ e $\delta(\partial\alpha + \delta\beta) = 0$, e diferem por elementos na imagem de δ .

Para cada q fixo, consideremos agora a cohomologia do complexo horizontal $(E_1^{*,q}, d_1) = (H_\delta^{*,q}, d_1)$ (ver (4.5.8)):

$$E_2^{p,q} \stackrel{\text{def}}{=} H^p(E_1^{*,q}, d_1) = H^p(H_\delta^{*,q}(\Omega), d_1) \stackrel{\text{def}}{=} H_\delta^{p,q} H_\delta(\Omega) \quad (3.2.26)$$

Existe uma maneira de produzir uma aplicação:

$$d_2 : E_2^{p,q} \longrightarrow E_2^{p+2,q-1} \quad (3.2.27)$$

como a seguir se explica. Seja $[e] \in E_2^{p,q}$ a classe de um cociclo $e \in E_1^{p,q} = H^q(\Omega^{p,*}, \delta)$, isto é, $d_1 e = 0$. Mas este elemento e , é, ele próprio, a classe de algum cociclo vertical, isto é, $e = [\alpha] \in H_\delta^{p,q}(\Omega)$, com $\alpha \in \Omega^{p,q}$ e $\delta\alpha = 0$. A condição $0 = d_1 e = d_1[\alpha] = [\partial\alpha]$, significa que $\partial\alpha$ é um δ -cobordo, isto é, $\partial\alpha = \delta\beta$ para algum $\beta \in \Omega^{p+1,q-1}$.

Podemos pois dizer que um elemento $[e] \in E_2^{p,q}$ é representado por uma soma:

$$\alpha + \beta \in \Omega^{p,q} \oplus \Omega^{p+1,q-1}, \quad \text{tal que } \partial\alpha = \delta\beta \quad (3.2.28)$$

Consideremos agora o elemento $\partial\beta \in \Omega^{p+2,q-1}$. As relações anteriores implicam que:

$$\delta\partial\beta = -\partial\delta\beta = -\partial\partial\alpha = 0$$

o que significa que $\partial\beta$ é um cociclo vertical (ou um δ -cociclo) em $\Omega^{p+2,q-1}$ e determina por isso uma classe de cohomologia $[\partial\beta]$ em $H^{q+1}(\Omega^{p+2,*}, \delta) = E_1^{p+2,q-1}$. Calculemos $d_1[\partial\beta]$:

$$d_1[\partial\beta] = [\partial\beta] = [\partial\partial\beta] = 0$$

Concluimos que $[\partial\beta]$ é um d_1 -cociclo e portanto determina um elemento:

$$[\partial\beta] \stackrel{\text{def}}{=} d_2 e \quad \text{em} \quad E_2^{p+2,q-1} \quad (3.2.29)$$

$$\begin{array}{ccc} \Omega^{p,q} & \xrightarrow{\partial} & \Omega^{p+1,q} \\ & & \uparrow \delta \\ & & \Omega^{p+1,q-1} \xrightarrow{\partial} \Omega^{p+2,q-1} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \alpha & \xrightarrow{\partial} & \partial\alpha = \delta\beta \xrightarrow{\partial} 0 \\ & & \uparrow \delta \qquad \uparrow \delta \\ & & \beta \xrightarrow{\partial} \partial\beta \end{array}$$

Regressemos então à sucessão espectral correspondente $E(\mathcal{E}_1) = \{E_r^{p,q}(\mathcal{E}_1), d_r\}$, e vejamos o significado dos termos desta sucessão espectral, relativamente à equação \mathcal{E}_1 . Em primeiro lugar, atendendo a (3.2.20):

$$\begin{aligned} E_1^{0,0}(\mathcal{E}_1) &= \{\varphi \in \mathcal{A} \mid \delta\varphi = D_x\varphi dx = 0\} \\ &= \{\text{integrais primeiros de } \mathcal{E}_1\} \end{aligned} \quad (3.2.30)$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned} E_1^{p,0}(\mathcal{E}_1) &= \{\omega \in \Omega^{p,0} \mid \delta\omega = 0\} \\ &= \{\text{invariantes integrais absolutos de grau } p \text{ de } \mathcal{E}_1\} \end{aligned} \quad (3.2.31)$$

De facto, seja $x_o \in \mathbb{R}_x$ e $D_0 \subset \pi^{-1}(x_o)$ um subvariedade de dimensão p com bordo suave, contida na fibra $\pi^{-1}(x_o)$. Movendo D_0 , ao longo das curvas solução, até uma subvariedade $D_1 \subset \pi^{-1}(x_1)$, obtemos subvariedades N e B , varridas respectivamente por D_0 e ∂D_0 , no seu movimento de $\pi^{-1}(x_o)$ até $\pi^{-1}(x_1)$. Pelo teorema de Stokes:

$$\int_N d\omega = \int_{\partial N} \omega = \int_{D_0} \omega - \int_{D_1} \omega + \int_B \omega$$

Mas $d\omega = \partial\omega \in \Omega^{p+1,0}$ (porque $\delta\omega = 0$) e $TN \supset \mathcal{H}|_N$ implicam que $i_N^* d\omega = 0$ ($i_N : N \hookrightarrow \mathcal{R}_\infty$). Anàlogamente, $i_B^* \omega = 0$. Portanto:

$$\int_{D_0} \omega = \int_{D_1} \omega$$

quando $\omega \in \Omega^{p,0}$ satisfaz $\delta\omega = 0$, isto é, ω é um invariante integral absoluto de grau p de \mathcal{E}_1 .

Anàlogamente:

$$E_2^{p-1,1}(\mathcal{E}_1) = \{\text{invariantes integrais relativos de grau } p \text{ de } \mathcal{E}_1\} \quad (3.2.32)$$

De facto, de acordo com (3.2.28) (ver também a secção 4.5 do capítulo 4), um cociclo $\omega \in E_2^{p-1,1}(\mathcal{E}_1)$ pode ser representado na forma $\omega = \omega_1 + \omega_2$, onde $\omega_1 \in \Omega^{p-1,1}$ e $\omega_2 \in \Omega^{p,0}$, tal que $\partial\omega_1 = \delta\omega_2$. Portanto, com a condição adicional $\partial D_0 = \emptyset$, temos que:

$$\int_{D_0} \omega_2 = \int_{D_1} \omega_2$$

que depende apenas da classe de ω .

Finalmente, o espaço $E_1^{1,0}(\mathcal{E}_1)$ pode ser descrito da seguinte forma. Seja:

$$\omega = \omega_1 \theta^1 + \dots + \omega_m \theta^m = \sum_{\alpha} \omega_{\alpha} \theta^{\alpha} \in \Omega^{1,0}$$

Por definição:

$$\begin{aligned} \delta\omega &= \delta(\omega_{\alpha} \theta^{\alpha}) \\ &= \delta\omega_{\alpha} \wedge \theta^{\alpha} + \omega_{\alpha} \delta\theta^{\alpha} \\ &= D_x \omega_{\alpha} dx \wedge \theta^{\alpha} - \omega_{\alpha} \frac{\partial f^{\alpha}}{\partial u^{\beta}} \theta^{\beta} \otimes dx \\ &= - \sum_{\alpha} \left(D_x \omega_{\alpha} + \sum_{\beta} \omega_{\beta} \frac{\partial f^{\beta}}{\partial u^{\alpha}} \right) \theta^{\alpha} \otimes dx \in \Omega^{1,1} \end{aligned} \quad (3.2.33)$$

Portanto $\omega \in E_1^{1,0}(\mathcal{E}_1)$ sse $\delta\omega = 0$, isto é, sse:

$$D_x \omega_{\alpha} + \sum_{\beta} \omega_{\beta} \frac{\partial f^{\beta}}{\partial u^{\alpha}}, \quad \alpha = 1, \dots, m \quad (3.2.34)$$

3.2.3 Campos de vectores. Simetrias

Estamos agora interessados em saber que condição deve satisfazer um campo de vectores arbitrário $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{R}_\infty)$, de modo a que o respectivo fluxo (ou grupo de transformações a um

parâmetro gerado por X) preserve o gráfico das soluções de \mathcal{E}_1 . Como o gráfico de uma solução de \mathcal{E}_1 é uma curva integral do campo D_x , essa condição pode ser escrita na forma:

$$[X, D_x] \in \mathcal{A} \cdot D_x = \Gamma(\mathcal{H})$$

Definamos então o espaço:

$$\mathcal{S}(\mathcal{E}_1) = \{X \in \mathfrak{X}(\mathcal{R}_\infty) \mid [X, \Gamma(\mathcal{H})] \subset \Gamma(\mathcal{H})\} \quad (3.2.35)$$

O fluxo de X preserva o gráfico das soluções de \mathcal{E}_1 se e só se $X \in \mathcal{S}(\mathcal{E}_1)$. Notemos agora que, como todos os elementos de $\Gamma(\mathcal{H})$ pertencem a $\mathcal{S}(\mathcal{E}_1)$, é natural tomar como espaço de transformações infinitesimais de \mathcal{E}_1 (simetrias) não o espaço $\mathcal{S}(\mathcal{E}_1)$ mas o espaço quociente:

$$\text{Sim}(\mathcal{E}_1) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{S}(\mathcal{E}_1)/\Gamma(\mathcal{H}) \quad (3.2.36)$$

Uma vez que $\Gamma(\mathcal{H})$ é um ideal de $\mathcal{S}(\mathcal{E}_1)$, o espaço $\text{Sim}(\mathcal{E}_1)$ fica munido de uma estrutura de álgebra de Lie denominada a álgebra de Lie das simetrias (infinitesimais) de \mathcal{E}_1 . Um elemento de $\text{Sim}(\mathcal{E}_1)$ diz-se uma **simetria** da equação \mathcal{E}_1 . Note-se que esta álgebra é determinada completamente por \mathcal{H} independentemente da escolha do complemento \mathcal{V} de \mathcal{H} em $T\mathcal{R}_\infty$.

Consideremos agora um elemento X de $\text{Sim}(\mathcal{E}_1)$. Como $T\mathcal{R}_\infty = \mathcal{V} \oplus \mathcal{H}$, X pode representado por um campo de vectores vertical:

$$X = \xi^1 \frac{\partial}{\partial u^1} + \cdots + \xi^m \frac{\partial}{\partial u^m} = \xi^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \in \Gamma(\mathcal{V}) \quad (3.2.37)$$

Uma vez que os elementos de $\Gamma(\mathcal{H})$ são da forma φD_x , com $\varphi \in \mathcal{A}$, a condição $[X, \Gamma(\mathcal{H})] \subset \Gamma(\mathcal{H})$ reduz-se a $[X, D_x] = \varphi D_x$ para algum $\varphi \in \mathcal{A}$. Por outro lado, temos que:

$$[X, D_x] = \sum_{\alpha=1}^m \left(\sum_{\beta=1}^m \xi^\beta \frac{\partial f^\alpha}{\partial u^\beta} - D_x \xi^\alpha \right) \frac{\partial}{\partial u^\alpha}$$

e portanto a condição $[X, D_x] \in \Gamma(\mathcal{H})$ é equivalente a $[X, D_x] = 0$, isto é:

$$D_x \xi^\alpha - \sum_{\beta=1}^m \xi^\beta \frac{\partial f^\alpha}{\partial u^\beta} = 0, \quad \alpha = 1, \dots, m \quad (3.2.38)$$

que é a chamada **equação característica das simetrias de \mathcal{E}_1** .

Observemos também que, uma vez que $[X, D_x] = 0$, a acção da derivada de Lie L_X no bicomplexo variacional preserva o bigrau e comuta com ambas as diferenciais ∂ e δ e portanto induz uma acção em $E(\mathcal{E}_1)$. Assim, as simetrias de \mathcal{E}_1 actuam não só no espaço das soluções de \mathcal{E}_1 , mas também nos espaços dos seus integrais primeiros e dos seus invariantes integrais (absolutos e relativos).

Vejamos agora alguns casos especiais do sistema \mathcal{E}_1 , dado por (3.2.1): $\frac{du^\beta}{dx} = f^\beta(x, u^\alpha)$, $\alpha, \beta = 1, \dots, m$, onde as funções f^β são de classe C^∞ em $\mathbb{R}_{x, u^\alpha}^{m+1}$.

▷ **Exemplo 3.2.1 (Equações triviais)** ... Tomemos o caso especial em que $f^\beta = 0$, $\beta = 1, \dots, m$. Obtemos então o sistema trivial \mathcal{E}_2 dado por:

$$[\mathcal{E}_2] \dots \quad \frac{du^\beta}{dx} = 0, \quad \beta = 1, \dots, m \quad (3.2.39)$$

Neste caso, temos que $D_x = \frac{\partial}{\partial x}$ e portanto:

$$\begin{aligned} E_1^{p,1}(\mathcal{E}_2) &\cong \Omega^p(\mathbb{R}^m) \otimes H^q(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ E_2^{p,1}(\mathcal{E}_2) &\cong H^p(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}) \otimes H^q(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ \text{Sim}(\mathcal{E}_2) &\cong \mathfrak{X}(\mathbb{R}^m) \end{aligned} \quad (3.2.40)$$

isto é:

$$\begin{aligned} E_1^{p,1} &= E_2^{p,1} \cong 0, \forall p \in \mathbb{N}_0 \\ E_2^{p,0} &\cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } p = 0 \\ 0 & \text{se } p > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

▷ **Exemplo 3.2.2 (Equações lineares)** ... Consideremos agora o seguinte sistema \mathcal{E}_3 :

$$[\mathcal{E}_3] \dots \quad \frac{du^\beta}{dx} = \sum_{\alpha=1}^m a_\alpha^\beta(x) u^\alpha, \quad \beta = 1, \dots, m \quad (3.2.41)$$

Neste caso, $f^\beta(x, u^\alpha) = \sum_{\alpha=1}^m a_\alpha^\beta(x) u^\alpha \Rightarrow \frac{\partial f^\beta}{\partial u^\alpha} = a_\alpha^\beta(x)$, logo as simetrias $X = \sum_{\alpha} \xi^\alpha(x, u^\beta) \frac{\partial}{\partial u^\alpha}$, em $\text{Sim}(\mathcal{E}_3)$, terão de verificar a equação característica dada por:

$$D_x \xi^\alpha - \sum_{\beta=1}^m a_\beta^\alpha(x) \xi^\beta = 0, \quad \alpha = 1, \dots, m \quad (3.2.42)$$

Em particular, se considerarmos um campo de vectores da forma $X = \sum_{\alpha} \xi^\alpha(x) \frac{\partial}{\partial u^\alpha}$, onde $\xi^\alpha(x) = s^\alpha(x)$, $\alpha = 1, \dots, m$, para alguma solução s do sistema \mathcal{E}_3 , temos que esse campo de vectores é simetria de \mathcal{E}_3 . De facto temos que:

$$\frac{ds^\alpha(x)}{dx} = \sum_{\beta=1}^m a_\beta^\alpha(x) s^\beta(x), \quad \alpha = 1, \dots, m$$

Mas, como $\frac{ds^\alpha(x)}{dx} = D_x s^\alpha$, obtemos de facto a equação característica (3.2.42). Assim, podemos fazer corresponder, a cada solução do sistema diferencial dado, uma simetria desse sistema, pelo que identificaremos $\mathcal{S}ol(\mathcal{E}_3)$ como um subconjunto de $\text{Sim}(\mathcal{E}_3)$.

Tomemos agora um elemento de $\text{Sim}(\mathcal{E}_3)$ da forma

$$X_b = \sum_{\beta=1}^m b_\beta^\alpha(x) u^\beta \frac{\partial}{\partial u^\alpha}$$

e designemos por $\text{Sim}_{lin}(\mathcal{E}_3)$ o subconjunto de $\text{Sim}(\mathcal{E}_3)$ formado por estes elementos. Então, $\text{Sim}_{lin}(\mathcal{E}_3) \oplus \mathcal{S}ol(\mathcal{E}_3)$ é uma subálgebra de $\text{Sim}(\mathcal{E}_3)$ cujo ideal é $\mathcal{S}ol(\mathcal{E}_3)$. É fácil ver que o parêntesis de Lie entre um elemento de $\text{Sim}_{lin}(\mathcal{E}_3)$ e um elemento de $\mathcal{S}ol(\mathcal{E}_3)$ é calculado da seguinte forma:

$$[X_b, s] = -b(s)$$

onde $b(s)^\alpha = \sum_{\beta=1}^m b_\beta^\alpha s^\beta$. Finalmente, note-se que X_b será um elemento de $\text{Sim}(\mathcal{E}_3)$ se e só se $b = (b_\beta^\alpha)$ verifica a equação dada por:

$$\frac{db}{dx} = [a, b] = ab - ba$$

onde $a = (a_\beta^\alpha)$.

3.3 O bicomplexo variacional livre. Exemplos

Vimos já na secção 3.1.3, que o fibrado tangente $TJ^\infty(\pi)$ podia ser decomposto na forma $TJ^\infty(\pi) = \mathcal{H} \oplus \mathcal{V}$, isto é, $J^\infty(\pi)$ tem uma estrutura quasi-produto. De maneira completamente análoga ao que foi feito na secção anterior, uma forma diferencial ω em $J^\infty(\pi)$ diz-se de **tipo** (p, q) se ω tem grau $p + q$ e se, para campos de vectores $X_i \in \mathfrak{X}(J^\infty(\pi))$ se tem:

$$\omega(X_1, \dots, X_{p+q}) = 0, \text{ sempre que : } \begin{cases} \text{mais do que } p \text{ dos } X_i \text{ estão em } \Gamma(\mathcal{V}) \\ \text{ou:} \\ \text{mais do que } q \text{ dos } X_i \text{ estão em } \Gamma(\mathcal{H}) \end{cases} \quad (3.3.1)$$

Toda a r -forma $\omega \in \Omega^r(J^\infty(\pi))$ tem uma decomposição única como uma soma de formas de tipo (p, q) , com $p + q = r$. De facto, a “componente” de tipo (p, q) de ω , é a forma ω_{pq} que é igual a ω sempre que p dos X_i estão em $\Gamma(\mathcal{V})$ e q dos X_i estão em $\Gamma(\mathcal{H})$ e é zero em todos os outros casos. Portanto $\omega = \sum_{p+q=r} \omega_{pq}$ e tomando o complexo de de Rham $\{\Omega^*(\pi) = \Omega^*(J^\infty(\pi)), d\}$, podemos decompôr $\Omega^r(\pi)$ da seguinte forma:

$$\Omega^r(\pi) = \bigoplus_{p+q=r} \Omega^{p,q}(\pi) \quad (3.3.2)$$

onde:

$$\Omega^{p,q}(\pi) = \Gamma(\wedge^p \mathcal{V}^* \otimes \wedge^q \mathcal{H}^*) \quad (3.3.3)$$

Quanto à derivada exterior d , em $\Omega^{i,j}$, podemos decompô-la numa $(1, 0)$ -componente, ou componente horizontal ∂ , e numa $(0, 1)$ -componente, ou componente vertical δ , uma vez que as distribuições definidas pelos subfibrados \mathcal{V} e \mathcal{H} são ambas integráveis. Obviamente que $\partial^2 = 0 = \delta^2$, e como $0 = d^2 = (\partial + \delta)^2 = \partial^2 + \delta^2 + (\partial\delta + \delta\partial) = \partial\delta + \delta\partial$, deduzimos que $\partial\delta + \delta\partial = 0$ e portanto obtemos um bicomplexo $\{\Omega^{*,*}(\pi), \partial, \delta\}$ que é denominado o **bicomplexo variacional livre** de $J^\infty(\pi)$. A sucessão espectral associada a esse bicomplexo chama-se a **\mathcal{C} -sucessão espectral de Vinogradov** de $J^\infty(\pi)$.

Em coordenadas canónicas (x, u_I^α) para $J^\infty(\pi)$, como $\{dx^i, \theta_I^\alpha\}$ geram o módulo de 1-formas, onde os $\theta_I^\alpha = du_I^\alpha - \sum_i u_{I+(i)}^\alpha dx^i$ geram o anulador de \mathcal{H} e os dx^i o anulador de \mathcal{V} , podemos descrever explicitamente o bicomplexo variacional, da seguinte forma. Consideremos os campos:

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha, I} u_{I+(i)}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_I^\alpha}$$

($i = 1, \dots, n$) e as formas de Cartan (de tipo $(1, 0)$):

$$\theta_I^\alpha = du_I^\alpha - \sum_i u_{I+(i)}^\alpha dx^i$$

Então:

$$\Omega^{p,q}(\pi) = \mathcal{F}(\pi) \otimes \wedge^p [\theta_I^\alpha] \otimes \wedge^q [dx^i] \quad (3.3.4)$$

e as diferenciais “horizontal” e “vertical” são caracterizadas respectivamente por:

$$\begin{aligned} \partial(\theta_I^\alpha) &= \partial(dx^i) = \delta(dx^i) = 0 \\ \delta(\theta_I^\alpha) &= \sum_i \theta_{I+(i)}^\alpha \otimes dx^i \\ \delta\varphi &= \sum_i D_i \varphi dx^i \\ \partial\varphi &= \sum_{\alpha, I} \frac{\partial\varphi}{\partial u_I^\alpha} \theta_I^\alpha \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

onde $\varphi \in \mathcal{F}(\pi)$.

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \Omega^{0,n} & \xrightarrow{\partial} & \Omega^{1,n} & \xrightarrow{\partial} & \Omega^{2,n} \longrightarrow \dots \\
 & & \uparrow \delta & & \uparrow \delta & & \uparrow \delta \\
 0 & \longrightarrow & \vdots & \xrightarrow{\partial} & \vdots & \xrightarrow{\partial} & \vdots \longrightarrow \dots \\
 & & \uparrow \delta & & \uparrow \delta & & \uparrow \delta \\
 0 & \longrightarrow & \Omega^{0,1} & \xrightarrow{\partial} & \Omega^{1,1} & \xrightarrow{\partial} & \Omega^{2,1} \longrightarrow \dots \\
 & & \uparrow \delta & & \uparrow \delta & & \uparrow \delta \\
 0 & \longrightarrow & \Omega^{0,0} & \xrightarrow{\partial} & \Omega^{1,0} & \xrightarrow{\partial} & \Omega^{2,0} \longrightarrow \dots
 \end{array} \tag{3.3.6}$$

▷ **Proposição 3.3.1** .. Seja $\omega \in \Omega^{0,r}(\pi)$. Então $\partial\omega = 0$ se e só se ω é o pull-back por $\pi_\infty : J^\infty(\pi) \longrightarrow M$ de uma r -forma em M .

Dem. Basta provar o resultado localmente já que o resultado global se obtém por um argumento usual de partições da unidade. Suponhamos então que:

$$\omega = \varphi_J[x, u] dx^J \in \Omega^{0,r}(\pi)$$

onde $J = (j_1 j_2 \dots j_r)$ e $dx^J = dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_r}$. Então:

$$\partial\omega = \sum_{\alpha, I} \frac{\partial \varphi_J}{\partial u_I^\alpha} \theta_I^\alpha \otimes dx^J \in \Omega^{1,r}(\pi)$$

e isto anula-se se e só se os $\frac{\partial \varphi_J}{\partial u_I^\alpha} = 0$, isto é, se os φ_J são apenas função das variáveis x^i da base M .

◁.

Todas as formas em $\Omega^{s,n}$ são obviamente δ -fechadas. No entanto elas não são em geral δ -exactas (mesmo localmente). Podemos pois introduzir os espaços de cohomologia:

$$E_1^{s,n} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Omega^{s,n}}{\delta(\Omega^{s,n-1})} \tag{3.3.7}$$

Estes espaços são parte do E_1 termo da sucessão espectral associada ao bicomplexo (3.3.6), e desempenham um papel essencial na teoria.

▷ **Exemplo 3.3.1 (O bicomplexo variacional livre para $\pi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$)** ... Vamos considerar o fibrado trivial $\pi : E \longrightarrow M$:

$$\pi : E = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R} = M$$

$$(x, u^\alpha) \longmapsto x \tag{3.3.8}$$

e o fibrado $\pi_\infty : J^\infty(\pi) \rightarrow \mathbb{R}$. Coordenadas em $J^\infty(\pi)$ são:

$$(x, u^\alpha, u_I^\alpha), \quad \text{com } \alpha = 1, 2, \dots, m, \quad \text{e } I = 1, 2, \dots$$

onde:

$$u_I^\alpha([s]_x^\infty) = \left. \frac{d^I s^\alpha}{dx^I} \right|_x$$

O ideal de contacto $\mathcal{C}(J^\infty(\pi))$ é gerado pelas formas de contacto:

$$\theta^\alpha = du^\alpha - u_1^\alpha dx, \quad \theta_1^\alpha = du_1^\alpha - u_2^\alpha dx, \quad \dots, \quad \theta_I^\alpha = du_I^\alpha - u_{I+1}^\alpha dx, \quad \dots \tag{3.3.9}$$

Seja $\Omega^r(\pi) = \Omega^r(J^\infty(\pi))$ o espaço das r -formas em $J^\infty(\pi)$ e $\Omega^{p,q}(J^\infty(\pi))$ o espaço das $r = (p + q)$ -formas de grau horizontal (ou grau de contacto) p e grau vertical q . Assim, por exemplo, $\Omega^{0,0}(\pi)$ é muito simplesmente o espaço das funções reais C^∞ em $J^\infty(\pi)$, enquanto que $\Omega^{1,0}(\pi)$ consiste de formas do tipo (soma finita):

$$\eta = \sum_{I,\alpha} \eta_\alpha^I \theta_I^\alpha \tag{3.3.10}$$

onde as funções $\eta_\alpha^I \in C^\infty(J^\infty(\pi))$. Por outro lado $\Omega^{0,1}(J^\infty(\pi))$ consiste de formas do tipo:

$$\lambda = L(x, u^\alpha, u_1^\alpha, \dots, u_\ell^\alpha) dx \tag{3.3.11}$$

É claro que $\Omega^{p,q}(J^\infty(\pi)) = 0$, para $q \geq 2$, já que a base $M = \mathbb{R}$ tem dimensão 1, e portanto, o bicomplexo variacional livre de $\pi : E \longrightarrow M$, é o bicomplexo $(\Omega^{p,q}(\pi), \partial, \delta)$, de formas em $J^\infty(\pi)$, seguinte:

$$\begin{array}{ccccccc} \Omega^{0,1} & \xrightarrow{\partial} & \Omega^{1,1} & \xrightarrow{\partial} & \Omega^{2,1} & \xrightarrow{\partial} & \dots \\ \uparrow \delta & & \uparrow \delta & & \uparrow \delta & & \\ \Omega^{0,0} & \xrightarrow{\partial} & \Omega^{1,0} & \xrightarrow{\partial} & \Omega^{2,0} & \xrightarrow{\partial} & \dots \end{array} \tag{3.3.12}$$

Temos pois a decomposição em soma directa:

$$\Omega^r(\pi) = \Omega^{r-1,1}(\pi) \oplus \Omega^{r,0}(\pi)$$

relativamente à qual a diferencial $d : \Omega^p \longrightarrow \Omega^{p+1}$ se cinde nas suas componentes $(1, 0)$, ou horizontal, e $(0, 1)$, ou vertical:

$$d = \partial + \delta$$

onde:

$$\begin{array}{ll} \partial : \Omega^{p,q}(\pi) & \longrightarrow \Omega^{p+1,q}(\pi) \\ \delta : \Omega^{p,q}(\pi) & \longrightarrow \Omega^{p,q+1}(\pi) \end{array} \tag{3.3.13}$$

Se $\varphi = \varphi(x, u^\alpha, u_1^\alpha, \dots, u_\ell^\alpha) \in \mathcal{F}(\pi)$, então:

$$\begin{aligned} \partial\varphi &= \sum_{I=0}^{\ell} \frac{\partial\varphi}{\partial u_I^\alpha} \theta_I^\alpha \\ \delta\varphi &= (D_x\varphi) dx \\ &= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \sum_{I=0}^{\ell} u_{I+1}^\alpha \frac{\partial\varphi}{\partial u_I^\alpha} \right) dx \end{aligned} \quad (3.3.14)$$

onde pusemos, por convenção, $u_0^\alpha = u^\alpha$. Por outro lado tem-se que:

$$\delta\theta_I^\alpha = \theta_{I+1}^\alpha \otimes dx \quad \text{e} \quad \partial\theta_I^\alpha = 0 \quad (3.3.15)$$

e ainda $\partial dx = 0$ e $\delta dx = 0$.

▷ **Lema 3.3.1** ... Se $\omega \in \Omega^{1,1}(\pi)$, é da forma $\omega = \sum_\alpha \omega_\alpha \theta^\alpha \otimes dx$, e se ω δ -exacta, isto é, se existe $\eta \in \Omega^{1,0}(\pi)$ tal que $\delta\eta = \omega$, então $\omega = 0$.

Dem. Com $\eta = \sum_{I,\alpha} \eta_\alpha^I \theta_I^\alpha \in \Omega^{1,0}$ (soma finita), vem que:

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_\alpha \theta^\alpha \otimes dx \\ &= \delta\eta = \delta \left(\eta_\alpha^I \theta_I^\alpha \right) \\ &= \left[(D_x \eta_\alpha^I) \theta_I^\alpha + \eta_\alpha^I \theta_{I+1}^\alpha \right] \otimes dx \end{aligned} \quad (3.3.16)$$

e igualando os coeficientes das formas de contacto, deduzimos que $\omega_\alpha = 0, \forall \alpha$, isto é, $\omega = 0$.

◁.

▷ **Lema 3.3.2** ... As linhas do bicomplexo (3.3.12) são exactas.

Dem. Consideremos o campo de Euler $Z \in \mathfrak{X}^V(J^\infty(\pi))$, isto é, o campo de vectores vertical em $J^\infty(\pi)$, dado por:

$$Z = \sum u_I^\alpha \frac{\partial}{\partial u_I^\alpha} \quad (3.3.17)$$

e definamos, para $p \geq 1$ e para cada $q = 0, 1$ fixo, o operador de homotopia para a diferencial horizontal ∂ :

$$h^{p,q} : \Omega^{p,q}(\pi) \longrightarrow \Omega^{p-1,q}(\pi)$$

dado por:

$$h^{p,q}(\omega) = \int_0^1 t^{p-1} (Z \lrcorner \omega_t) dt \quad (3.3.18)$$

onde ω_t é a (p, q) -forma obtida a partir de ω , calculando os coeficientes de ω em $x, tu^\alpha, tu_1^\alpha, \dots, tu_I^\alpha, \dots$. É possível mostrar que:

$$(h^{p+1,q}\partial + \partial h^{p+1,q})(\omega) = \omega$$

O complexo $\Omega^{*,q}$ é pois nulo-homotópico (uma vez que a aplicação identidade Id é homotópica à aplicação nula: $\text{Id} = hd + dh$), e portanto é acíclico (ver o capítulo 4).

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \longrightarrow & \Omega^{p-1,q} & \xrightarrow{\partial} & \Omega^{p,q} & \xrightarrow{\partial} & \Omega^{p+1,q} & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow \downarrow & & \downarrow \downarrow & & \downarrow \downarrow & & \\
 & & \text{Id } 0 & \nearrow h^{p,q} & \text{Id } 0 & \nearrow h^{p+1,q} & \text{Id } 0 & & \\
 & & \downarrow \downarrow & & \downarrow \downarrow & & \downarrow \downarrow & & \\
 \dots & \longrightarrow & \Omega^{p-1,q} & \xrightarrow{\partial} & \Omega^{p,q} & \xrightarrow{\partial} & \Omega^{p+1,q} & \longrightarrow & \dots
 \end{array} \tag{3.3.19}$$

◁.

Seja $\lambda = L(x, u^\alpha, u_1^\alpha, \dots, u_\ell^\alpha) dx \in \Omega^{0,1}(\pi)$, o espaço dos **Lagrangeanos** em E . Então, dada uma secção local $s : [a, b] \longrightarrow E$, podemos considerar o pull-back de λ por $j^\infty s : [a, b] \longrightarrow J^\infty(E)$ e integrar para obter um funcional:

$$I[s] = \int_a^b (j^\infty s)^* \lambda \tag{3.3.20}$$

para um problema variacional em E . Para o Lagrangeano $\lambda = L(x, u^\alpha, u_1^\alpha, \dots, u_\ell^\alpha) dx \in \Omega^{0,1}(\pi)$, definimos a respectiva **forma de Euler-Lagrange** $E(\lambda) \in \Omega^{1,1}(\pi)$, através de:

$$E(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} E_\alpha(L) \theta^\alpha \wedge dx \tag{3.3.21}$$

onde $\theta^\alpha = du^\alpha - u_1^\alpha dx$ (ver (3.3.9)), e os coeficientes $E_\alpha(L)$ são as componentes do operador clássico de Euler-Lagrange, dadas por:

$$E_\alpha(L) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial L}{\partial u^\alpha} - D_x \frac{\partial L}{\partial u_1^\alpha} + D_x^2 \frac{\partial L}{\partial u_2^\alpha} - \dots \tag{3.3.22}$$

Analisemos o caso em que temos apenas uma variável dependente u , isto é, $\alpha = 1$ (ver a secção 2.3 em [7], nomeadamente 2.3c, pág. 47). Neste caso temos coordenadas canónicas $(x, u, u_1, u_2, \dots, u_I, \dots)$ e:

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{I \geq 0} u_{I+1} \frac{\partial}{\partial u_I}$$

Os E_1 -termos da sucessão espectral, associada à filtração por colunas (ou grau de contacto) do bicomplexo variacional livre (3.3.12), são:

$$\begin{aligned}
 E_1^{p,0} &\cong \begin{cases} 0, & \text{para } p > 0 \\ \mathbb{R}, & \text{para } p = 0 \end{cases} \\
 E_1^{0,1} &\cong \mathcal{F}/D_x \mathcal{F} && \text{através de } [L dx] \mapsto [L] \\
 E_1^{1,1} &\cong \mathcal{F} && \text{através de } [\varphi \theta \otimes dx] \mapsto \varphi
 \end{aligned} \tag{3.3.23}$$

Calculemos agora a diferencial $d_1 : E_1^{0,1} \longrightarrow E_1^{1,1}$ que é, como já vimos, induzida por ∂ :

$$\begin{aligned}
 \partial(L dx) &= \partial L \wedge dx \\
 &= \sum_{I \geq 0} \frac{\partial L}{\partial u_I} \theta_I \wedge dx \\
 &= E(L) \theta \wedge dx + \sum_{J \geq 1} \delta \left\{ - \sum_{K=0}^{J-1} (-D_x)^K \frac{\partial L}{\partial u_K} \theta_{J-K-1} \right\} \\
 &= E(L) \theta \wedge dx + \delta \eta
 \end{aligned} \tag{3.3.24}$$

onde:

$$E(L) = \frac{\delta L}{\delta u} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{K \geq 0} (-D_x)^K \frac{\partial L}{\partial u_K} \quad (3.3.25)$$

e:

$$\eta = - \sum_{J \geq 1} \sum_{K=0}^{J-1} (-D_x)^K \frac{\partial L}{\partial u_K} \theta_{J-K-1} \in \Omega^{1,0} \quad (3.3.26)$$

Portanto:

$$d_1[Ldx] = [E(L)dx \otimes \theta] \quad (3.3.27)$$

Incidentalmente, o cálculo anterior mostrou também o lema seguinte:

▷ **Lema 3.3.3** ... Se $\lambda \in \Omega^{0,1}(\pi)$ é um Lagrangeano em E , então:

$$\partial \lambda = E(\lambda) + \delta \eta \quad (3.3.28)$$

para alguma 1-forma $\eta \in \Omega^{1,0}(\pi)$.

◁.

Por exemplo, quando $\ell = 1$, de tal forma que $\lambda = L(x, u^\alpha, u_1^\alpha) dx$ (usualmente põe-se $u_1^\alpha = \dot{u}^\alpha$), η em (3.3.28) é dada por:

$$\eta = - \frac{\partial L}{\partial \dot{u}^\alpha} \theta^\alpha$$

e quando $\ell = 2$, de tal forma que $\lambda = L(x, u^\alpha, u_1^\alpha, u_2^\alpha) dx$ (usualmente põe-se $u_1^\alpha = \dot{u}^\alpha$ e $u_2^\alpha = \ddot{u}^\alpha$), η em (3.3.28) é dada por:

$$\eta = \left(- \frac{\partial L}{\partial \dot{u}^\alpha} + D_x \frac{\partial L}{\partial \ddot{u}^\alpha} \right) \theta^\alpha - \frac{\partial L}{\partial \ddot{u}^\alpha} \theta_1^\alpha$$

3.4 O prolongamento infinito de uma equação diferencial

Antes de dar uma definição geral, analisemos alguns exemplos:

▷ **Exemplo 3.4.1 (ODE's de ordem k)** ... Consideremos agora uma ODE de ordem k , numa variável dependente u , do tipo seguinte:

$$[\mathcal{R}_k] \dots \quad u_k = f(x, u, u_1, \dots, u_{k-1}) \quad (3.4.1)$$

ou:

$$[\mathcal{R}_k] \dots \quad F \stackrel{\text{def}}{=} u_k - f(x, u, u_1, \dots, u_{k-1}) = 0 \quad (3.4.2)$$

onde, como habitualmente, $u_j = \frac{d^j u}{dx^j}$, $j = 1, \dots, k$. A equação (3.4.1) define uma subvariedade fechada \mathcal{R}_k em $J^k(\pi)$, onde $\pi : \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_u \longrightarrow \mathbb{R}_x$ é o fibrado trivial. Derivando (3.4.2) em ordem a x , obtemos uma equação da forma:

$$\begin{aligned} [\mathcal{R}_{k+1}] \dots \quad F_1 &= D_x F \\ &= u_{k+1} - \frac{\partial f}{\partial x}(x, u, u_1, \dots, u_{k-1}) - \sum_{i=0}^{k-1} u_{i+1} \frac{\partial f}{\partial u_i}(x, u, u_1, \dots, u_{k-1}) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

que se diz o 1-prolongamento da equação \mathcal{R}_k . É claro que as soluções de \mathcal{R}_k também satisfazem \mathcal{R}_{k+1} . Mais geralmente, e de forma análoga, derivando r vezes (3.4.1) em ordem a x , obtemos o chamado **r -prolongamento** $\mathcal{R}_{k+r} \subset J^{k+r}(\pi)$ da equação (3.4.1):

$$[\mathcal{R}_{k+r}] \dots \quad D_x^r F = 0 \quad (3.4.4)$$

Consideremos então o ideal \mathfrak{J}_∞ , de $\mathcal{F}(\pi) = C^\infty(J^\infty(\pi))$, gerado por:

$$\{D_x^r F : r = 0, 1, 2, \dots\}$$

e representemos o respectivo anulador por \mathcal{R}_∞ . Portanto \mathcal{R}_∞ é o conjunto dos pontos de J^∞ que são zeros de todas as funções do ideal \mathfrak{J}_∞ . Como em \mathcal{R}_∞ , $u_k, u_{k+1}, u_{k+1}, \dots$ se podem exprimir apenas como funções de $x, u, u_1, \dots, u_{k-1}$, o conjunto \mathcal{R}_∞ é uma subvariedade de dimensão finita, $\dim \mathcal{R}_\infty = k + 1$, em $J^\infty(\pi)$, com coordenadas (globais) $(x, u, u_1, \dots, u_{k-1})$, que se diz o **prolongamento infinito** da equação \mathcal{R}_k , dada por (3.4.1).

Por definição o bicomplexo variacional $\{\Omega^{*,*}(\mathcal{R}_\infty), \partial, \delta\}$ da equação de ordem k (3.4.1), é o pull-back pela inclusão $i : \mathcal{R}_\infty \longrightarrow J^\infty(E)$ do bicomplexo variacional livre de $J^\infty(E)$ a \mathcal{R}_∞ .

Como $(x, u, u_1, \dots, u_{k-1})$ são coordenadas (globais) em \mathcal{R}_∞ , uma p -forma $\omega \in \Omega^p(\mathcal{R}_\infty)$ é simplesmente uma p -forma nas variáveis $(x, u, u_1, \dots, u_{k-1})$. O ideal de contacto em \mathcal{R}_∞ é gerado pelas 1-formas:

$$\begin{aligned} \theta &= du - u_1 dx, & \theta_1 &= du_1 - u_2 dx, & \dots & & \theta_{k-2} &= du_{k-2} - u_{k-1} dx \\ & & \text{e} & & & & \theta_{k-1} &= du_{k-1} - f dx \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

As diferenciais horizontal e vertical de uma função φ em \mathcal{R}_∞ são dadas respectivamente por:

$$\begin{aligned} \partial\varphi &= \sum_{r=0}^{k-1} \frac{\partial\varphi}{\partial u_r} \theta_r \\ \delta\varphi &= D_x \varphi dx \\ &= \left[\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \sum_{r=0}^{k-2} u_{r+1} \frac{\partial\varphi}{\partial u_r} + f \frac{\partial\varphi}{\partial u_{k-1}} \right] dx \end{aligned} \quad (3.4.6)$$

enquanto que as diferenciais das formas de contacto são dadas por:

$$\delta\theta_r = dx \wedge \theta_{r+1}, \quad \partial\theta_r = 0, \quad r = 0, 1, \dots, k-2 \quad (3.4.7)$$

$$\delta\theta_{k-1} = dx \wedge \partial f = dx \wedge \left[\sum_{r=0}^{k-1} \frac{\partial f}{\partial u_r} \theta_r \right], \quad \text{e ainda} \quad \partial\theta_{k-1} = 0 \quad (3.4.8)$$

Notemos que as funções $f \in \Omega^{0,0}(\mathcal{R}_\infty)$ tais que $\partial f = 0$, são constantes ao longo das soluções de (3.4.1), e são portanto integrais primeiros de (3.4.1).

De acordo com Tsujishita [7], se $\pi : E \rightarrow M$ é um fibrado (vectorial) sobre M , definimos uma **equação diferencial de ordem $\leq k$ em E** , como sendo uma subvariedade fechada \mathcal{R} , num aberto de $J^k(\pi)$, tal que $\pi_k|_{\mathcal{R}} : \mathcal{R} \rightarrow M$ é uma submersão sobrejectiva. Uma secção $s \in \Gamma(\pi)$ é uma solução da equação \mathcal{R} se e só se $j^k s(M) \subset \mathcal{R}$. O conjunto de todas as soluções de \mathcal{R} é notado por $Sol(\mathcal{R})$.

Definamos agora o prolongamento infinito da equação $\mathcal{R} \subset J^k(\pi)$. Por definição, \mathcal{R} é uma subvariedade fechada num aberto $U \subseteq J^k(\pi)$. Seja $\mathfrak{J}_k \subset \mathcal{F}(U)$ o ideal que define

\mathcal{R} . O **prolongamento infinito da equação** \mathcal{R} define-se como sendo o anulador \mathcal{R}_∞ , em $(\pi_k^\infty)^{-1}(U) \subseteq J^\infty(\pi)$, do ideal gerado por:

$$\mathcal{I}_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{i \geq k} \mathcal{I}_i$$

onde, para $i = k, k+1, \dots$:

$$\mathcal{I}_{i+1} = \{ \widehat{X}\varphi : X \in \mathfrak{X}(M), \varphi \in \mathcal{I}_i \} \quad (3.4.9)$$

Uma secção $s \in \Gamma(E)$ é uma solução de \mathcal{R} se e só se $j^\infty s$ é solução de \mathcal{R}_∞ (isto é, $j^\infty s(M) \subset \mathcal{R}_\infty$). De facto, como $\mathcal{I}_k \subset \mathcal{I}_\infty$, $j^\infty s(M) \subset \mathcal{R}_\infty$ implica que s é solução de \mathcal{R} . Reciprocamente, suponhamos que s é solução, isto é, que $j^k s(x) \in \mathcal{R}$, $\forall x \in M$, ou ainda, $(\varphi \circ j^k s)(x) = 0$, $\forall \varphi \in \mathcal{I}_k$, $\forall x \in M$. Por definição de \widehat{X} , sabemos que $(\widehat{X}\varphi) \circ j^\ell s = X(\varphi \circ j^\ell s)$, $\forall \ell$. Portanto $(j^\infty s)^* \mathcal{R}_i = 0$ implica que $(j^\infty s)^* \mathcal{R}_{i+1} = 0$, isto é, $(j^\infty s)^* \mathcal{R}_i = 0$, $\forall i$, ou ainda, $(j^\infty s)^* \mathcal{R}_\infty = 0$.

De aqui em diante, supõe-se que é válida a seguinte condição:

$$\text{Condição [R]...} \quad \mathcal{R}_\infty \rightarrow M \quad \text{é um subfibrado de} \quad J^\infty(\pi) \rightarrow M \quad (3.4.10)$$

no sentido em que $\pi_\ell^\infty \mathcal{R}_\infty \rightarrow M$ é um subfibrado de $J^\ell(\pi) \rightarrow M$, $\forall \ell \geq k$. Isto permite, como na secção 3.1, definir os objectos usuais em \mathcal{R}_∞ , funções suaves, formas, campos, etc.

O fibrado $\mathcal{R}_\infty \rightarrow M$ está munido de uma conexão:

$$\mathcal{H}_\mathcal{R} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{H}|_{\mathcal{R}_\infty}$$

onde \mathcal{H} é a conexão plana em $J^\infty(\pi)$, definida na secção 3.1.3. Como $\widehat{X}\mathcal{I}_\infty \subset \mathcal{I}_\infty$, $\forall X \in \mathfrak{X}(M)$, vemos que $\mathcal{H}_\mathcal{R} \subset T\mathcal{R}_\infty$. Mais ainda - a conexão $\mathcal{H}_\mathcal{R}$ é plana. De facto, seja $i : \mathcal{R}_\infty \rightarrow J^\infty(\pi)$ a inclusão natural. Como $\Gamma(\mathcal{H}_\mathcal{R}^\perp) = i^* \Gamma(\mathcal{H}^\perp)$ e como \mathcal{H} é plana, isto é, $d\Gamma(\mathcal{H}^\perp) \equiv 0 \pmod{\Gamma(\mathcal{H}^\perp)}$, vemos que:

$$\begin{aligned} d\Gamma(\mathcal{H}_\mathcal{R}^\perp) &= di^* \Gamma(\mathcal{H}^\perp) \\ &= i^* d\Gamma(\mathcal{H}^\perp) \equiv 0 \pmod{i^* \Gamma(\mathcal{H}^\perp) = \Gamma(\mathcal{H}_\mathcal{R}^\perp)} \end{aligned} \quad (3.4.11)$$

O conjunto $Sol(\mathcal{R})$ das soluções de \mathcal{R} , pode ser identificado com o conjunto das secções planas de $\mathcal{R}_\infty \rightarrow M$, relativamente à conexão $\mathcal{H}_\mathcal{R}$.

Como antes, a conexão $\mathcal{H}_\mathcal{R}$ permite definir o **bicomplexo variacional** de \mathcal{R} . Se $\mathcal{V}_\mathcal{R}$ é o subfibrado dos vectores verticais de $\mathcal{R}_\infty \rightarrow M$, então $T\mathcal{R}_\infty = \mathcal{V}_\mathcal{R} \oplus \mathcal{H}_\mathcal{R}$ e portanto:

$$\Omega^r \mathcal{R}_\infty = \bigoplus_{p+q=r} \Omega_{\mathcal{R}}^{p,q}$$

onde:

$$\Omega_{\mathcal{R}}^{p,q} \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma(\wedge^p \mathcal{V}_\mathcal{R}^* \otimes \wedge^q \mathcal{H}_\mathcal{R}^*)$$

A diferencial d cinde-se nas suas componentes $(1, 0)$ e $(0, 1)$, respectivamente, ∂ e δ , e obtemos o bicomplexo variacional $(\Omega_{\mathcal{R}}^{*,*} = \bigoplus \Omega_{\mathcal{R}}^{p,q}, \partial, \delta)$.

▷ **Exemplo 3.4.2 [Equação de onda]** ... Seja $M = \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $\pi : E = M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ o fibrado trivial e $\mathcal{R} \subset J^2(\pi)$ a equação de onda:

$$\mathcal{R} = \left\{ K = u_{2(1)} - \sum_{i=2}^n u_{2(i)} = 0 \right\} \subset J^2$$

Aqui $(i) = (0, \dots, 1, \dots, 0) \in \mathbb{N}^n$ é o multiíndice com um 1 na posição i e 0's nas outras posições. Por exemplo, com $n = 3$, chamando t, x, y às variáveis independentes em $M = \mathbb{R}^3$, então $u_{2(1)} = u_{(2,0,0)} = u_{tt}$, $u_{2(2)} = u_{(0,2,0)} = u_{xx}$ e $u_{2(3)} = u_{(0,0,2)} = u_{yy}$ e a equação de onda escreve-se na forma:

$$\begin{aligned} K &= u_{2(1)} - \sum_{i=2}^3 u_{2(i)} \\ &= u_{(2,0,0)} - u_{(0,2,0)} - u_{(0,0,2)} \\ &= u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} = 0, \quad \text{em notação usual} \end{aligned} \quad (3.4.12)$$

Sabemos que:

$$D_i = \widehat{\frac{\partial}{\partial x^i}} = \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{I \in \mathbb{N}^n} u_{I+(i)} \frac{\partial}{\partial u_I}$$

e portanto, se $I = (i_1 i_2 \dots i_n) \in \mathbb{N}^n$, então:

$$u_I = D_I u$$

onde $u_I = u_{(i_1, i_2, \dots, i_n)}$ e $D_I = D_1^{i_1} \dots D_n^{i_n}$. Mais geralmente $D_I u_J = u_{I+J}$, $\forall I, J \in \mathbb{N}^n$. O ideal \mathcal{I}_∞ é pois gerado por $\{D_I K : I \in \mathbb{N}^n\} = \{u_{I+2(1)} - \sum_{i=2}^n u_{I+2(i)} : I \in \mathbb{N}^n\}$, e portanto \mathcal{R}_∞ é uma subvariedade em J^∞ parametrizada pelas coordenadas globais:

$$\left(x^i, u_{j,J} = u_{j(1)+J} \Big|_{\mathcal{R}_\infty} \right)$$

onde $j = 0, 1$ e $J = (0, j_2, \dots, j_n) \in \mathbb{N}^n$.

Um referencial global para \mathcal{H}_{car}^\perp é dado por $\{\theta_{j,J} : j = 0, 1; J = (0, j_2, \dots, j_n) \in \mathbb{N}^n\}$, onde $\theta_{j,J} = \theta_{j(1)+J} \Big|_{\mathcal{R}_\infty}$. Usando as coordenadas anteriores para \mathcal{R}_∞ , tem-se que:

$$\begin{aligned} \theta_{0,J} &= du_{0,J} - u_{1,J} dx^1 - \sum_{j=2}^n u_{0,J+(j)} dx^j \\ \theta_{1,J} &= du_{1,J} - \left(\sum_{j=2}^n u_{0,J+(j)} \right) dx^1 - \left(\sum_{j=2}^n u_{1,J+(j)} dx^j \right) \end{aligned} \quad (3.4.13)$$

Portanto:

$$\Omega_{\mathcal{R}}^{p,q} = \mathcal{A}(\mathcal{R}) \otimes \wedge^p[\theta_{j,J}] \otimes \wedge^q[dx^i]$$

Os operadores $\bar{D}_i = D_i \Big|_{\mathcal{R}_\infty}$, que são os levantamentos de $\partial/\partial x^i$, são caracterizados por $\bar{D}_i \lrcorner dx^j = \delta_i^j$ e $\bar{D}_i \lrcorner \theta_{j,J} = 0$, isto é:

$$\begin{aligned} \bar{D}_i x^j &= \delta_i^j \\ \bar{D}_1 u_{0,J} &= u_{1,J} \\ \bar{D}_1 u_{1,J} &= \sum_{j=2}^n u_{0,J+2(j)} \\ \bar{D}_i u_{j,J} &= u_{j,J+(i)}, \quad i \geq 2 \end{aligned} \quad (3.4.14)$$

A diferencial ∂ é caracterizada por $x^i \mapsto 0$, $u_{j,J} \mapsto \theta_{j,J}$ e δ por $x^i \mapsto dx^i$ e $u_{j,J} \mapsto \sum_{i=1}^n \bar{D}_i u_{j,J} dx^i$.

▷ **Exemplo 3.4.3 [Equação KdV]** ... Seja $M = \mathbb{R}^2$, $\pi : E = M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ o fibrado trivial e $\mathcal{R} \subset J^2(\pi)$ a equação Korteweg-de Vries (KdV):

$$\mathcal{R} = \left\{ K = u_{(3,0)} + u u_{(1,0)} + u_{(0,1)} = 0 \right\} \subset J^3$$

Em notação usual, chamando x, y às variáveis independentes em $M = \mathbb{R}^2$, a equação KdV escreve-se na forma:

$$u_{xxx} + u u_x + u_y = 0$$

O ideal \mathcal{J}_∞ é gerado por $\{D_I K : I \in \mathbb{N}^2\} = \{u_{I+3(1)} + D_I(u u_{(1,0)} + u_{(0,1)}) : I \in \mathbb{N}^n\}$. Portanto em \mathcal{R}_∞ tem-se, pondo $I = (j, k) \in \mathbb{N}^2$:

$$u_{(j+3,k)} = D_{(j,k)} F, \quad \text{onde } F = -(u u_{(1,0)} + u_{(0,1)})$$

e portanto \mathcal{R}_∞ é uma subvariedade em J^∞ parametrizada pelas coordenadas globais:

$$\left(x^i, u_j = u_{(j,0)} \Big|_{\mathcal{R}_\infty} \right)$$

onde $i = 1, 2$ e $j \in \mathbb{N}$. Os operadores $\bar{D}_i = D_i|_{\mathcal{R}_\infty}$, que são os levantamentos de $\partial/\partial x^i$, são caracterizados por:

$$\begin{aligned} \bar{D}_i x^j &= \delta_i^j \\ \bar{D}_1 u_j &= u_{j+1} \\ \bar{D}_2 &= -\bar{D}_1^j (u u_1 + u_3) \end{aligned} \quad (3.4.15)$$

$\mathcal{H}_{\mathcal{R}}^\perp$ é gerado por $\{\theta_j : j \in \mathbb{N}\}$, onde:

$$\theta_j \stackrel{\text{def}}{=} \theta_{j,0}|_{\mathcal{R}_\infty} = du^j \sum_{i=1,2} \bar{D}_i u_j dx^i$$

e portanto:

$$\Omega_{\mathcal{R}}^{p,q} = \mathcal{A}(\mathcal{R}) \otimes \wedge^p[\theta_j] \otimes \wedge^q[dx^i]$$

A diferencial ∂ é caracterizada por $x^i \mapsto 0$, $u_j \mapsto \theta_j$ e δ por $x^i \mapsto dx^i$ e $u_j \mapsto \sum_i \bar{D}_i u_j dx^i$.

◁.

3.5 Simetrias Generalizadas

Consideremos um fibrado $\pi : E \rightarrow M$ e seja $\mathcal{R} \subset J^k(\pi)$ uma equação diferencial que satisfaz a condição de regularidade [R] (3.4.10). Vamos ver que o espaço das simetrias de \mathcal{R} , $\text{Sim}(\mathcal{R})$, pode ser considerado como o núcleo de um certo operador diferencial linear que iremos definir. Para já, vamos ver o que se entende por “simetria de \mathcal{R} ”. De seguida $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\mathcal{R}}$ representa a restrição da conexão \mathcal{H} a \mathcal{R}_∞ .

▷ **Definição 3.5.1** ... Consideremos as seguintes subálgebras da álgebra de Lie $\mathfrak{X}(\mathcal{R}_\infty)$ dos campos de vectores suaves em \mathcal{R}_∞ :

$$\mathcal{S}(\mathcal{H}) = \{X \in \mathfrak{X}(\mathcal{R}_\infty) : [X, \Gamma(\mathcal{H})] \subseteq \Gamma(\mathcal{H})\} \quad (3.5.1)$$

Se notarmos por $\mathfrak{X}^V(\mathcal{R}_\infty)$ a subálgebra de $\mathfrak{X}(\mathcal{R}_\infty)$ formada pelos campos de vectores verticais de \mathcal{R}_∞ , temos a seguinte subálgebra de $\mathfrak{X}(\mathcal{R}_\infty)$:

$$\mathcal{S}^V(\mathcal{H}) = \mathcal{S}(\mathcal{H}) \cap \mathfrak{X}^V(\mathcal{R}_\infty) \quad (3.5.2)$$

Note-se que $\Gamma(\mathcal{H})$ é um ideal de $\mathcal{S}(\mathcal{H})$, logo temos a seguinte álgebra de Lie:

$$\text{Sim}(\mathcal{R}) = \mathcal{S}(\mathcal{H})/\Gamma(\mathcal{H}) \quad (3.5.3)$$

Os elementos de $\text{Sim}(\mathcal{R})$ dizem-se as **simetrias** de \mathcal{R} e $\text{Sim}(\mathcal{R})$ diz-se a **álgebra de simetrias** de \mathcal{R} .

◁.

Obtemos assim a álgebra de Lie das simetrias (infinitesimais generalizadas) de \mathcal{R} , cujos elementos são as simetrias da equação diferencial \mathcal{R} .

Recordemos que é válida a decomposição $T\mathcal{R}_\infty \cong \mathcal{V} \oplus \mathcal{H}$. Portanto, dado um campo de vectores $X \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$, podemos decompô-lo na forma $X = X^V + X^H$. Como $X^H \in \Gamma(\mathcal{H}) \subset \mathcal{S}(\mathcal{H})$, concluímos que $X^V = X - X^H \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ e portanto $X^V \in \mathcal{S}^V(\mathcal{H})$. Deduzimos então que é válida a seguinte decomposição:

$$\mathcal{S}(\mathcal{H}) = \mathcal{S}^V(\mathcal{H}) \oplus \Gamma(\mathcal{H}) \quad (3.5.4)$$

e obtemos assim o seguinte isomorfismo de álgebras de Lie:

$$\text{Sim}(\mathcal{R}) \cong \mathcal{S}^V(\mathcal{H}) \quad (3.5.5)$$

que é muito útil, já que permite, ao calcular as simetrias, ignorar a respectiva parte horizontal (a parte trivial) o que simplifica bastante a situação.

3.5.1 Cálculo de $\text{Sim}(E)$. Simetrias da equação trivial

Consideremos o caso em que a equação diferencial é a trivial, isto é, \mathcal{R} coincide com $E = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow M = \mathbb{R}^n$, o que corresponde a dizer que \mathcal{R} é definido por um sistema de equações vazio. Vamos usar as coordenadas canónicas (x^i, u_I^α) para $J^\infty(\pi)$.

Vimos antes que o espaço dos campos horizontais, $\Gamma(\mathcal{H})$, é gerado pelas derivações totais:

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum u_{I+(i)}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_I^\alpha}, \quad i = 1, \dots, n$$

Portanto um campo vertical $X \in \Gamma(\mathcal{V})$ pertence a $\mathcal{S}^V(\mathcal{H})$ se e só se $[X, D_i] \in \Gamma(\mathcal{H})$, $i = 1, \dots, n$. Se $X = \sum X_I^\beta \frac{\partial}{\partial u_I^\beta}$, com $X_I^\beta \in \mathcal{F}(\pi) = \mathcal{F}[x^i, u_J^\alpha]$, temos então que:

$$[X, D_i] = \left[\sum_{\beta, I} X_I^\beta \frac{\partial}{\partial u_I^\beta}, \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha, J} u_{J+(i)}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_J^\alpha} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \sum \left[X_I^\beta \frac{\partial}{\partial u_I^\beta}, \frac{\partial}{\partial x^i} \right] + \sum \left[X_I^\beta \frac{\partial}{\partial u_I^\beta}, u_{J+(i)}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_J^\alpha} \right] \\
&= \sum \left(-\frac{\partial X_I^\beta}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial u_I^\beta} \right) + \sum \left(X_{J+(i)}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_J^\alpha} \right) + \sum \left(-u_{J+(i)}^\alpha \frac{\partial X_I^\beta}{\partial u_J^\alpha} \frac{\partial}{\partial u_I^\beta} \right) \\
&= \sum \left(X_{J+(i)}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_J^\alpha} \right) - \sum \left(\frac{\partial X_I^\beta}{\partial x^i} + \sum u_{J+(i)}^\alpha \frac{\partial X_I^\beta}{\partial u_J^\alpha} \right) \frac{\partial}{\partial u_I^\beta} \\
&= \sum \left(X_{I+(i)}^\beta \frac{\partial}{\partial u_I^\beta} \right) - \sum \left(D_i X_I^\beta \frac{\partial}{\partial u_I^\beta} \right) \\
&= \sum_{\beta, I} \left(X_{I+(i)}^\beta - D_i X_I^\beta \right) \frac{\partial}{\partial u_I^\beta} \tag{3.5.6}
\end{aligned}$$

Consequentemente, $[X, D_i] \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ se e só se $X_{I+(i)}^\beta = D_i X_I^\beta, \forall \beta = 1, \dots, m, I \in \mathbb{N}^n$. Em particular, pondo $\varphi^\beta = X_0^\beta$, vem que $X_{(i)}^\beta = D_i(\varphi^\beta), \beta = 1, \dots, m$, e aplicando sucessivamente os operadores D_i , devemos ter $X_I^\beta = D_I \varphi^\beta, \forall \beta = 1, \dots, m, I \in \mathbb{N}^n$, onde $D_I = D_1^{i_1} \dots D_n^{i_n}$, para $I = (i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^n$, ou seja:

$$X \in \mathcal{S}^V(\mathcal{H}), \quad \text{se e só se} \quad X = \sum_{\beta} D_I \varphi^\beta \frac{\partial}{\partial u_I^\beta} \tag{3.5.7}$$

O campo da forma (3.5.7) diz-se o **campo evolucionário** determinado pela função vectorial $\varphi = (\varphi^\beta)_{\beta=1, \dots, m}$, e nota-se por $\mathfrak{E}\varphi$.

Temos então as seguintes proposições:

▷ **Proposição 3.5.1** ... Seja $\pi : E = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow M = \mathbb{R}^n$. A seguinte aplicação é um isomorfismo:

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{F}^m & \longrightarrow & \text{Sim}(E) \\
\varphi = (\varphi^\beta)_{\beta=1, \dots, m} & \longmapsto & \mathfrak{E}\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\beta, I} D_I \varphi^\beta \frac{\partial}{\partial u_I^\beta}
\end{array} \tag{3.5.8}$$

◁.

▷ **Proposição 3.5.2** ... Dado um fibrado arbitrário $\pi : E \rightarrow M$, um campo de vectores $X \in \mathfrak{X}^V(E)$ pertence a $\mathcal{S}^V(\mathcal{H})$ se e só se $[X, \hat{Y}] = \mathbf{0}$ para todo $Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Dem. Recordemos que $\hat{Y} \in \Gamma(\mathcal{H})$ é o levantamento horizontal de $Y \in \mathfrak{X}(M)$, determinado pela conexão \mathcal{H} . Como o problema é local, podemos supôr que o fibrado é trivial, ou seja, que $\pi : E = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow M = \mathbb{R}^n$. Então, para que X pertença a $\mathcal{S}^V(\mathcal{H})$ devemos ter $[X, D_i] \in \Gamma(\mathcal{H}), i = 1, \dots, n$. Mas como vimos antes $[X, D_i]$ é um campo de vectores sem a componente em $\frac{\partial}{\partial x}$ (ou, seja, é vertical), pelo que X pertence a $\mathcal{S}^V(\mathcal{H})$ se e só se $[X, D_i] = \mathbf{0}, i = 1, \dots, n$. Mas se $f_i \in C^\infty(M)$ temos que $X f_i = 0$ e portanto $[X, \sum_i f_i D_i] = \sum f_i [X, D_i]$. Como $\{D_i, i = 1, \dots, n\}$ é um base do módulo (sobre $C^\infty(M)$) formado pelos campos de vectores da forma \hat{Y} , com $Y \in \mathfrak{X}(M)$, temos $[X, D_i] = \mathbf{0}, \forall i$ se e só se $[X, \hat{Y}] = \mathbf{0}$ para todo $Y \in \mathfrak{X}(M)$.

◁.

3.5.2 Cálculo de Cartan aplicado às simetrias

Vamos agora ver como definir os conceitos básicos do cálculo de Cartan em \mathcal{R}_∞ . Recordemos que uma p -forma $\omega \in \Omega^p(\mathcal{R}_\infty)$ pode ser encarada como uma aplicação $\omega : \mathfrak{X}^p(\mathcal{R}_\infty) \rightarrow \mathcal{F}$ multilinear sobre \mathcal{F} e alternada. A derivada exterior pode ser expressa pela fórmula habitual:

$$d\omega(X_1, \dots, X_{p+1}) = \sum_i (-1)^{i+1} X_i \omega(X_1, \dots, \check{X}_i, \dots, X_{p+1}) + \sum_{i,j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_i, \dots, \check{X}_i, \dots, \check{X}_j, \dots, X_{p+1}) \quad (3.5.9)$$

O produto interior é definido por:

$$(X \lrcorner \omega)(X_1, \dots, X_{p-1}) = \omega(X, X_1, \dots, X_{p-1}) \quad (3.5.10)$$

enquanto que a derivada de Lie é dada pela fórmula de Cartan:

$$L_X \omega = X \lrcorner d\omega + d(X \lrcorner \omega) \quad (3.5.11)$$

para quaisquer $X, X_i \in \mathfrak{X}(\mathcal{R}_\infty)$ e $\omega \in \Omega^p(\mathcal{R}_\infty)$.

▷ **Lema 3.5.1** ... Para qualquer $X \in S^V(\mathcal{H})$ e $\omega \in \Omega^*(\mathcal{R}_\infty)$, tem-se:

$$\begin{aligned} L_X \omega &= X \lrcorner \partial \omega + \partial(X \lrcorner \omega) \\ X \lrcorner \delta \omega &= -\delta(X \lrcorner \omega) \end{aligned} \quad (3.5.12)$$

Dem. De facto temos que, se $\omega \in \Omega^{p,q}(\mathcal{R}_\infty)$, então:

$$\begin{aligned} L_X \omega &= X \lrcorner d\omega + d(X \lrcorner \omega) \\ &= X \lrcorner (\partial \omega + \delta \omega) + (\partial(X \lrcorner \omega) + \delta(X \lrcorner \omega)) \\ &= (X \lrcorner \partial \omega + \partial(X \lrcorner \omega)) + (X \lrcorner \delta \omega + \delta(X \lrcorner \omega)) \end{aligned}$$

Como X é vertical e ω tem bigrau (p, q) , $X \lrcorner \omega$ tem bigrau $(p-1, q)$, e portanto $L_X(\omega)$ tem uma componente de bigrau (p, q) dada por $X \lrcorner \partial \omega + \partial(X \lrcorner \omega)$ e uma componente de bigrau $(p-1, q+1)$ dada por $X \lrcorner \delta \omega + \delta(X \lrcorner \omega)$. Vamos ver que esta última componente tem de ser nula. Como L_X é uma derivação e $\Omega^{p,q}$ é localmente gerado por $\Omega^{1,0}$ e $\Omega^{0,1}$, basta mostrar que $L_X \Omega^{1,0} \subseteq \Omega^{1,0}$ e que $L_X \Omega^{0,1} \subseteq \Omega^{0,1}$. De facto, se $\omega \in \Omega^{0,1}(\mathcal{R}_\infty)$, temos que $L_X \omega \in \Omega^{0,1}(\mathcal{R}_\infty)$, dado que $L_X(f dx^i) = X(f) dx^i \in \Omega^{0,1}(\mathcal{R}_\infty)$, uma vez que X é vertical por hipótese. Suponhamos agora que $\omega \in \Omega^{1,0}(\mathcal{R}_\infty)$ e seja $Y \in \Gamma(\mathcal{H})$. Temos então que:

$$\begin{aligned} (L_X \omega)(Y) &= (X \lrcorner d\omega + d(X \lrcorner \omega))(Y) \\ &= d\omega(X, Y) + Y(X \lrcorner \omega) \\ &= X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X, Y]) + Y\omega(X) \\ &= X\omega(Y) - \omega([X, Y]) \end{aligned} \quad (3.5.13)$$

Mas como $X \in \mathcal{S}^V(\mathcal{H})$ e $Y \in \Gamma(\mathcal{H})$ temos $[X, Y] \in \Gamma(\mathcal{H})$. Portanto como $\omega \in \Omega^{1,0}(\mathcal{R}_\infty)$, temos que $\omega(Y) = \omega([X, Y]) = 0$, pelo que $(L_X\omega)(Y) = 0$. Concluindo, $L_X\Omega^{p,q} \subset \Omega^{p,q}$ e, portanto, $L_X(\omega)$ não pode ter componente de bigrau $(p-1, q+1)$.

◁.

Vamos ver que podemos concluir algo de análogo se consideramos agora a derivada de Lie relativamente a um campo de vectores da forma \hat{Y} , com $Y \in \mathfrak{X}(M)$.

▷ **Lema 3.5.2** ... *Seja $Y \in \mathfrak{X}(M)$. Temos então que:*

$$\begin{aligned} L_{\hat{Y}}\omega &= \hat{Y} \lrcorner \delta\omega + \delta(\hat{Y} \lrcorner \omega) \\ \hat{Y} \lrcorner \partial\omega &= -\partial(\hat{Y} \lrcorner \omega) \end{aligned} \quad (3.5.14)$$

Dem. Observemos que, se $f \in C^\infty(M)$ e $X \in \Gamma(\mathcal{V})$, então $[\hat{Y}, X]f = \hat{Y}Xf - X\hat{Y}f = \hat{Y}(Xf) - X(Yf)$. Mas, como f e Yf estão ambos em $C^\infty(M)$ e $X \in \Gamma(\mathcal{V})$, temos $Xf = X(Yf) = 0$, pelo que $[\hat{Y}, X]f = 0$, $\forall f \in C^\infty(M)$, isto é, $[\hat{Y}, X] \in \Gamma(\mathcal{V})$. Assim, de forma análoga ao que foi feito na demonstração do Lema anterior, temos que $L_{\hat{Y}}\Omega^{p,q} \subset \Omega^{p,q}$ e, portanto, $L_{\hat{Y}}(\omega)$ não pode ter componente de bigrau $(p-1, q+1)$. Podemos então concluir que $\hat{Y} \lrcorner \partial\omega + \partial(\hat{Y} \lrcorner \omega) = 0$ e, conseqüentemente, $L_{\hat{Y}}\omega = \hat{Y} \lrcorner \delta\omega + \delta(\hat{Y} \lrcorner \omega)$.

◁.

Podemos agora enunciar a seguinte versão mais geral da proposição 3.5.2, válida para qualquer equação diferencial \mathcal{R} :

▷ **Proposição 3.5.3** ... *Se $X \in \mathcal{S}^V(\mathcal{H})$ e $Y \in \mathfrak{X}(M)$, então $[X, \hat{Y}] = 0$.*

Dem. Seja $f \in \mathcal{F}(\pi)$. Temos então que:

$$\begin{aligned} X\hat{Y}f &= XL_{\hat{Y}}f = X(\hat{Y} \lrcorner \delta f + \delta(\hat{Y} \lrcorner f)), && \text{pelo Lema 3.5.2} \\ &= X(\hat{Y} \lrcorner \delta f) = L_X(\hat{Y} \lrcorner \delta f) \\ &= X \lrcorner \partial(\hat{Y} \lrcorner \delta f) + \partial(X \lrcorner (\hat{Y} \lrcorner \delta f)), && \text{pelo Lema 3.5.1} \\ &= X \lrcorner \partial(\hat{Y} \lrcorner \delta f) = -X \lrcorner \hat{Y} \lrcorner \partial\delta f \\ &= X \lrcorner \hat{Y} \lrcorner \delta\partial f = -\hat{Y} \lrcorner X \lrcorner \delta\partial f = \hat{Y} \lrcorner \delta(X \lrcorner \partial f) \end{aligned}$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned} \hat{Y}Xf &= \hat{Y}L_Xf = \hat{Y}(X \lrcorner \partial f + \partial(X \lrcorner f)) \\ &= \hat{Y}(X \lrcorner \partial f) = L_{\hat{Y}}(X \lrcorner \partial f) \\ &= \hat{Y} \lrcorner \delta(X \lrcorner \partial f) + \delta(\hat{Y} \lrcorner (X \lrcorner \partial f)) = \hat{Y} \lrcorner \delta(X \lrcorner \partial f) \end{aligned}$$

Logo, $X\hat{Y}f = \hat{Y}Xf$ para todo $f \in \mathcal{F}$, ou seja, $[X, \hat{Y}]f = X\hat{Y}f - \hat{Y}Xf = 0$ para todo $f \in \mathcal{F}$ e, portanto, $[X, \hat{Y}] = 0$.

◁.

Estes resultados também permitem concluir a seguinte proposição:

▷ **Proposição 3.5.4** ... $L_X : \Omega^{*,*} \rightarrow \Omega^{*,*}$ é um homomorfismo de bicomplexos qualquer que seja $X \in \mathcal{S}^V(\mathcal{H})$, ou seja, $[L_X, \delta] = [L_X, \partial] = 0$.

Dem. Tomemos $X \in \mathcal{S}^V(\mathcal{H})$ e $\omega \in \Omega^{*,*}$. Então, pelo Lema 3.5.1, temos que:

$$L_X \delta \omega = X \lrcorner \partial \delta \omega + \partial(X \lrcorner \delta \omega) = X \lrcorner \partial \delta \omega - \partial \delta(X \lrcorner \omega)$$

$$\delta L_X \omega = \delta(X \lrcorner \partial \omega) + \delta \partial(X \lrcorner \omega) = -X \lrcorner \delta \partial \omega + \delta \partial(X \lrcorner \omega)$$

Mas, como $\partial \delta = -\delta \partial$, temos que $[L_X, \delta] \omega = L_X \delta \omega - \delta L_X \omega = 0$, logo $[L_X, \delta] = 0$. Temos também:

$$L_X \partial \omega = X \lrcorner \partial \partial \omega + \partial(X \lrcorner \partial \omega) = \partial(X \lrcorner \partial \omega)$$

$$\partial L_X \omega = \partial(X \lrcorner \partial \omega) + \partial \partial(X \lrcorner \omega) = \partial(X \lrcorner \partial \omega)$$

e portanto, $[L_X, \partial] \omega = L_X \partial \omega - \partial L_X \omega = 0$, logo $[L_X, \partial] = 0$.

◁.

3.5.3 Automorfismos de fibrados

▷ **Lema 3.5.3** ... Dado um campo de vectores $X \in \mathfrak{X}(E)$, existe uma e uma só simetria $\tilde{X} \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ que coincide com X em $\mathcal{A}_0 = \mathcal{F}_0(\pi) = C^\infty(E)$.

Dem. Recordemos que $\mathcal{S}(\mathcal{H}) = \{Z \in \mathfrak{X}(\mathcal{R}_\infty) : [Z, \Gamma(\mathcal{H})] \subseteq \Gamma(\mathcal{H})\}$.

Unicidade: basta mostrar que se $Y \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ é tal que $Yf = 0, \forall f \in \mathcal{A}_0$, então $Y = 0$. Num sistema de coordenadas locais $(x^i, u_J^\alpha; U)$, podemos escrever que $Y|_U = \sum_i Y^i D_i + Y'$, com $Y^i \in \mathcal{F}(\pi)$ e $Y' \in \mathcal{S}^V(\mathcal{H})$, atendendo à decomposição $\mathcal{S}(\mathcal{H}) = \mathcal{S}^V(\mathcal{H}) \oplus \Gamma(\mathcal{H})$ e devido ao facto de $\Gamma(\mathcal{H})$ ser gerado pelos campos $D_i, i = 1, \dots, n$.

Então, se $Yf = 0, \forall f \in \mathcal{A}_0$, temos que $Yx^i = Y^i = 0, i = 1, \dots, n$ e $Y'u^\alpha = 0, \alpha = 1, \dots, m$. Pela proposição 3.5.1, isso significa que $Y'|_U = 0$, logo temos $Y = 0$.

Existência: Pela unicidade, podemos supôr que $E = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow M = \mathbb{R}^n$.

Dado $X = \sum X^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum Y^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \in \mathfrak{X}(E)$, com $X^i, Y^\alpha \in \mathcal{A}_0$, definamos \tilde{X} através de:

$$\tilde{X} \stackrel{\text{def}}{=} \sum X^i D_i + \sum D^I \left(Y^\alpha - \sum X^i u_{(i)}^\alpha \right) \frac{\partial}{\partial u_J^\alpha} \quad (3.5.15)$$

onde, $D^I = D_1^{i_1} \dots D_n^{i_n}$, para $I = (i_1, i_2, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^n$. Então, é claro que $\sum X^i D_i \in \Gamma(\mathcal{H})$ e $\sum D^I \left(Y^\alpha - \sum X^i u_{(i)}^\alpha \right) \frac{\partial}{\partial u_J^\alpha} \in \mathcal{S}^V(\mathcal{H})$, logo $\tilde{X} \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$. Além disso, temos que:

$$\begin{aligned} \tilde{X}x^i &= X^i = Xx^i \\ \tilde{X}u^\alpha &= \sum X^i D_i u^\alpha + \sum D^I \left(Y^\alpha - \sum X^i u_{(i)}^\alpha \right) \frac{\partial}{\partial u_J^\alpha} u^\alpha \\ &= \sum X^i u_{(i)}^\alpha + Y^\alpha - \sum X^i u_{(i)}^\alpha \\ &= Y^\alpha = Xu^\alpha \end{aligned}$$

pelo que $\tilde{X} \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ coincide com X em \mathcal{A}_0 .

◁.

O campo $\tilde{X} \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$, construído no lema anterior, diz-se o **prolongamento** do campo $X \in \mathfrak{X}(E)$.

Note-se que esta definição de prolongamento, coincide com a ideia geométrica do que é o levantamento de um campo de vectores de $\mathfrak{X}(E)$, ou seja, corresponde ao grupo a um parâmetro gerado por X quando considerado a actuar não em $\Gamma(E) = J^0(\pi)$ mas em $J^\infty(\pi)$. \tilde{X} é então o correspondente gerador infinitesimal.

Se \mathcal{R} é a equação trivial, definamos agora a aplicação:

$$\begin{aligned} \Phi : \mathfrak{X}(E) &\longrightarrow \text{Sim}(\mathcal{R}) = \mathcal{S}(\mathcal{H})/\Gamma(\mathcal{H}) \\ X &\longmapsto [\tilde{X}] \end{aligned} \quad (3.5.16)$$

Em coordenadas locais (x^i, u_I^α) , $[\tilde{X}]$ pode ser identificado com o campo evolucionário \mathfrak{E}_φ , onde $\varphi = (\varphi^\alpha)$, dado pela segunda soma em (3.5.15), isto é:

$$[\tilde{X}] = \mathfrak{E}_{\varphi^\alpha} = \sum D^I \varphi^\alpha \frac{\partial}{\partial u_I^\alpha}, \quad \text{onde} \quad \varphi^\alpha = Y^\alpha - \sum_i X^i u_{(i)}^\alpha \quad (3.5.17)$$

Temos então o seguinte lema:

▷ **Lema 3.5.4** ... Φ é um homomorfismo de álgebras de Lie.

Dem. Dados $X, Y \in \mathfrak{X}(E)$, temos que $[\widetilde{X}, \widetilde{Y}] = [\tilde{X}, \tilde{Y}] = [X, Y]$ em \mathcal{A}_0 . Logo, como $[\tilde{X}, \tilde{Y}] \in \text{Sim}(\mathcal{R})$, a unicidade de $[\widetilde{X}, \widetilde{Y}]$ garante-nos que $[\widetilde{X}, \widetilde{Y}] = [\tilde{X}, \tilde{Y}]$, pelo que $\Phi([X, Y]) = [\Phi(X), \Phi(Y)]$ e Φ é um homomorfismo de álgebras de Lie.

◁.

Supondo $E = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow M = \mathbb{R}^n$, vimos que havia um isomorfismo Ψ entre \mathcal{F}^m e $\text{Sim}(\mathcal{R})$. Compondo $\Lambda = \Psi^{-1}$ com o homomorfismo Φ , obtemos um homomorfismo entre $\mathfrak{X}(E)$ e \mathcal{F}^m dado por:

$$\Lambda \circ \Phi : X = \sum X^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum Y^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \in \mathfrak{X}(E) \longmapsto \varphi^\alpha = Y^\alpha - \sum_i X^i u_{(i)}^\alpha \in \mathcal{F}^m \quad (3.5.18)$$

onde $X^i, Y^\alpha \in \mathcal{A}_0 = \mathcal{F}_0(\pi) = C^\infty(E)$.

3.5.4 Transformações de contacto

Vamos considerar agora o caso particular em que $m = 1$. Neste caso J^1E tem uma **estrutura de contacto** natural definida pelo fibrado-linha $L \subset T^*J^1E$, localmente gerado pela **1-forma de contacto** $\theta = du - \sum_i u_i dx^i$, onde abreviamos $u_{(i)}$ para u_i .

Um difeomorfismo $\phi : J^1E \rightarrow J^1E$ diz-se uma **transformação de contacto** se $\phi^*L = L$, ou seja, se $\phi^*(\theta) = \lambda\theta$ para alguma função $\lambda \in \mathcal{F}_1(\pi)$ que nunca se anula. Um **campo de contacto** ou **transformação de contacto infinitesimal** é um campo de vectores $X \in J^1E$ que verifica $L_X \Gamma L \subset \Gamma L$, ou seja, $L_X \theta = \lambda\theta$ para alguma função $\lambda \in \mathcal{F}_1(\pi)$. O espaço dos campos de contacto forma uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{X}(J^1E)$ que iremos denotar por \mathfrak{X}^{ct} .

▷ **Lema 3.5.5** ... Dado um campo de contacto $X \in \mathfrak{X}^{ct}$, existe uma e uma só simetria $\tilde{X} \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ que coincide com X em $\mathcal{A}_1 = \mathcal{F}_1(\pi)$.

Dem. Unicidade: basta mostrar que se $Y \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ é tal que $Yf = 0, \forall f \in \mathcal{A}_1$, então $Y = 0$. Como já vimos, dado um sistema de coordenadas local $(x^i, u, u_I; U)$, podemos escrever que $Y|_U = \sum_i Y^i D_i + Y'$, com $Y^i \in \mathcal{F}(\pi)$ e $Y' \in \mathcal{S}^V(\mathcal{H})$.

Então, se $Yf = 0, \forall f \in \mathcal{A}_1$, temos que $Yx^i = Y^i = 0, i = 1, \dots, n$ e $Y'u = 0$. Pela proposição 3.5.1, isso significa que $Y'|_U = 0$, logo temos $Y = 0$.

Existência: Pela unicidade, podemos supôr que $E = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow M = \mathbb{R}^n$. Seja $X = \sum X^i \frac{\partial}{\partial x^i} + Y \frac{\partial}{\partial u} + \sum Z_i \frac{\partial}{\partial u_i}$, com $X^i, Y, Z_i \in \mathcal{A}_1$. Para que X seja um campo de contacto, devemos ter $L_X \theta = \lambda \theta$ para alguma função $\lambda \in \mathcal{F}_1(\pi)$. Se definirmos $W = Y - \sum_j u_j X^j$, um cálculo fastidioso mostra que:

$$\begin{aligned} L_X \theta &= L_X (du - \sum_j u_j dx^j) \\ &= \sum_i \left(\frac{\partial W}{\partial x^i} + u_i \frac{\partial W}{\partial u} - Z_i \right) dx^i + \sum_i \left(\frac{\partial W}{\partial u_i} + X^i \right) du_i \end{aligned} \quad (3.5.19)$$

módulo $\theta = du - \sum u_i dx^i$. Logo, X é um campo de contacto se e só se tivermos:

$$\begin{aligned} Z_i &= \frac{\partial W}{\partial x^i} + u_i \frac{\partial W}{\partial u} \\ X^i &= -\frac{\partial W}{\partial u_i} \end{aligned} \quad (3.5.20)$$

Definamos então, para $X = \sum X^i \frac{\partial}{\partial x^i} + Y \frac{\partial}{\partial u} + \sum Z_i \frac{\partial}{\partial u_i} \in \mathfrak{X}(J^1 E)$, o respectivo **prolongamento**, $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(\pi)$, através de:

$$\tilde{X} \stackrel{\text{def}}{=} \sum X^i D_i + \sum D^I W \frac{\partial}{\partial u_I} \quad (3.5.21)$$

onde $W = Y - \sum_j u_j X^j$. Então, é claro que $\sum X_i D_i \in \Gamma(\mathcal{H})$ e $\sum D^I W \frac{\partial}{\partial u_i} \in \mathcal{S}^V(\mathcal{H})$, logo $\tilde{X} \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$. Além disso, temos:

$$\begin{aligned} \tilde{X}x^i &= X^i = Xx^i \\ \tilde{X}u &= \left(\sum X^i D_i + \sum D^I W \frac{\partial}{\partial u_I} \right) u = \sum X^i u_i + W = Y = Xu \end{aligned}$$

e ainda:

$$\begin{aligned} \tilde{X}u_i &= \left(\sum X^i D_i + \sum D^I W \frac{\partial}{\partial u_I} \right) u_i \\ &= \sum X^j u_{ji} + D_i W \\ &= \sum_j X^j u_{ji} + \frac{\partial W}{\partial x^i} + u_i \frac{\partial W}{\partial u} + \sum_j u_{ij} \frac{\partial W}{\partial u_j} \\ &= \sum X^j u_{ji} + Z_i + \sum u_{ij} (-X^j), \quad \text{por (3.5.20)} \\ &= Z_i = Xu_i \end{aligned}$$

pelo que $\tilde{X} \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ coincide com X em \mathcal{A}_1 .

◁.

Supondo que $\pi : E = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow M = \mathbb{R}^n$, então, se definirmos $\mu : \mathfrak{X}^{ct} \rightarrow \mathcal{A}_1$ por:

$$\mu : X = \sum X^i \frac{\partial}{\partial x^i} + Y \frac{\partial}{\partial u} + \sum Z_i \frac{\partial}{\partial u_i} \mapsto W = Y - \sum_i X^i u_i \quad (3.5.22)$$

onde $X^i, Y, Z_i \in \mathcal{A}_1$, temos o seguinte corolário:

▷ **Corolário 3.5.1** ... μ é um isomorfismo.

Dem. É óbvio que μ é um homomorfismo e que é injectivo. Para ver a sobrejectividade, note-se que, dadas as relações:

$$\begin{aligned} Z_i &= \frac{\partial W}{\partial x^i} + u_i \frac{\partial W}{\partial u} \\ X_i &= -\frac{\partial W}{\partial u_i} \\ Y &= W + \sum u_j X_j = W - \sum u_j \frac{\partial W}{\partial u_j} \end{aligned} \quad (3.5.23)$$

podemos, a partir de W , encontrar $X = \sum X^i \frac{\partial}{\partial x^i} + Y \frac{\partial}{\partial u} + \sum Z_i \frac{\partial}{\partial u_i}$ que satisfaz as relações dadas e, portanto, a sua imagem por μ é W .

◁.

Se $\beta : \mathfrak{X}^{ct} \rightarrow \text{Sim}(\mathcal{R}) = \mathcal{S}(\mathcal{H})/\Gamma(\mathcal{H})$ é dada por $\beta(X) = [\tilde{X}]$, então temos o seguinte lema:

▷ **Lema 3.5.6** ... β é um homomorfismo de álgebras de Lie.

Dem. Dados $X, Y \in \mathfrak{X}^{ct}$, temos que $[\widetilde{[X, Y]}] = [\tilde{X}, \tilde{Y}] = [X, Y]$ em \mathcal{A}_1 . Logo, como $[\tilde{X}, \tilde{Y}] \in \text{Sim}(\mathcal{R})$, a unicidade de $[\widetilde{[X, Y]}]$ garante-nos que $[\widetilde{[X, Y]}] = [\tilde{X}, \tilde{Y}]$, pelo que $\beta([X, Y]) = [\beta(X), \beta(Y)]$ e β é um homomorfismo de álgebras de Lie.

◁.

Concluindo toda esta discussão, supondo que $\pi : E = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow M = \mathbb{R}^n$, temos então definidos os seguintes homomorfismos:

$$\Lambda : \begin{array}{ccc} \text{Sim}(E) & \longrightarrow & \mathcal{F}^m \\ \sum_{I, \beta} D_I \varphi^\beta \frac{\partial}{\partial u_I^\beta} & \longmapsto & (\varphi^\beta)_{\beta=1, \dots, m} \end{array} \quad (3.5.24)$$

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathfrak{X}(E) & \longrightarrow & \text{Sim}(E) \\ X & \longmapsto & [X] \end{array} \quad \beta : \begin{array}{ccc} \mathfrak{X}^{ct} & \longrightarrow & \text{Sim}(E) \\ X & \longmapsto & [\tilde{X}] \end{array} \quad (3.5.25)$$

$$\mu : \begin{array}{ccc} \mathfrak{X}^{ct} & \longrightarrow & \mathcal{A}_1 \\ X = \sum X^i \frac{\partial}{\partial x^i} + Y + \sum Z_i \frac{\partial}{\partial u_i} & \longmapsto & Y - \sum X^i u_i \end{array} \quad (3.5.26)$$

Se definirmos ainda:

$$\nu : \begin{array}{ccc} \mathfrak{X}(E) & \longrightarrow & \mathcal{A}_1 \\ X = \sum X^i \frac{\partial}{\partial x^i} + Y \frac{\partial}{\partial u} & \longmapsto & Y - \sum u_i X^i \end{array} \quad (3.5.27)$$

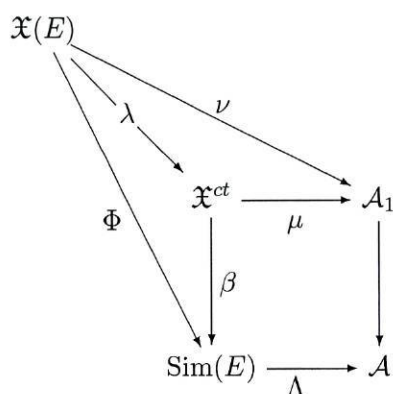
então:

$$\lambda = \mu^{-1}\nu : \begin{array}{ccc} \mathfrak{X}(E) & \longrightarrow & \mathfrak{X}^{ct} \\ X = \sum X^i \frac{\partial}{\partial x^i} + Y \frac{\partial}{\partial u} & \longmapsto & (\mu^{-1}\nu)(X) \end{array} \quad (3.5.28)$$

é dada por:

$$\begin{aligned} & (\mu^{-1}\nu) \left(\sum X^i \frac{\partial}{\partial x^i} + Y \frac{\partial}{\partial u} \right) = \mu^{-1} \left(Y - \sum u_i X^i \right) \\ & = \sum X^i \frac{\partial}{\partial x^i} + Y \frac{\partial}{\partial u} + \sum \left(\frac{\partial(Y - \sum u_i X^i)}{\partial x^i} + u_i \frac{\partial(Y - \sum u_i X^i)}{\partial u} \right) \frac{\partial}{\partial u_i} \end{aligned} \quad (3.5.29)$$

e temos o seguinte diagrama comutativo:



3.5.5 Descrição de $\text{Sim}(\mathcal{R})$

Supondo que $\pi : E = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow M = \mathbb{R}^n$, seja \mathcal{R} uma equação diferencial dada por $\mathcal{R} = \{F^\ell = 0, \ell = 1, \dots, k\}$, com $F^\ell \in \mathcal{F}$, $\ell = 1, \dots, k$, que satisfaz a condição de regularidade $[\mathbf{R}]$ (3.4.10), isto é, $\mathcal{R}_\infty \rightarrow M$ é um subfibrado de $\pi_\infty : J^\infty E \rightarrow M$.

Consideremos o chamado **operador de linearização universal**, definido por:

$$\mathfrak{l}_F : \begin{array}{ccc} \mathcal{F}^m & \longrightarrow & \mathcal{F}^k \\ \varphi = (\varphi^\alpha) & \longmapsto & \mathfrak{l}_F(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} (\mathfrak{E}_\varphi F^\ell) \end{array} \quad (3.5.30)$$

onde $F = (F^\ell)_{\ell=1, \dots, k}$, isto é:

$$\begin{aligned} (\mathfrak{l}_F \varphi)^\ell &= \mathfrak{E}_\varphi F^\ell = \left(\sum_{\alpha, I} D_I \varphi^\alpha \frac{\partial}{\partial u_I^\alpha} \right) F^\ell \\ &= \sum_{\alpha, I} \frac{\partial F^\ell}{\partial u_I^\alpha} D_I \varphi^\alpha \end{aligned} \quad (3.5.31)$$

ou de outra forma, o operador ℓ_F é dado por:

$$\ell_F = \sum_I \begin{bmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial u_I^1} & \frac{\partial F^1}{\partial u_I^2} & \cdots & \frac{\partial F^1}{\partial u_I^m} \\ \frac{\partial F^2}{\partial u_I^1} & \frac{\partial F^2}{\partial u_I^2} & \cdots & \frac{\partial F^2}{\partial u_I^m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial F^k}{\partial u_I^1} & \frac{\partial F^k}{\partial u_I^2} & \cdots & \frac{\partial F^k}{\partial u_I^m} \end{bmatrix} D_I \quad (3.5.32)$$

o que mostra que o operador ℓ_F pode ser restrito a \mathcal{R}_∞ . De facto, se \mathfrak{J}_∞ é o ideal que define \mathcal{R}_∞ , temos que $\Phi(\mathfrak{J}_\infty^m) \subset \mathfrak{J}_\infty^k$ e, portanto, faz sentido considerar a referida restrição que notamos por:

$$\bar{\ell}_F : \mathcal{F}(\mathcal{R})^m \longrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{R})^k$$

Fixemos agora um campo $X \in \mathcal{S}^V(\mathcal{H}_\mathcal{R})$. Ponhamos $\bar{u}_I^\alpha = u_I^\alpha|_{\mathcal{R}_\infty}$ e $\bar{f}^\alpha = X\bar{u}^\alpha \in \mathcal{F}(\mathcal{R})$. É sempre possível escolher, para cada α , uma função $f^\alpha \in \mathcal{F}$ tal que $f^\alpha|_{\mathcal{R}_\infty} = \bar{f}^\alpha$. Pela proposição 3.5.1, sabemos que:

$$\bar{X} \stackrel{\text{def}}{=} \sum D_I f^\alpha \frac{\partial}{\partial u_I^\alpha} = \mathfrak{E}_{f^\alpha} \in \mathcal{S}^V(\mathcal{H})$$

Vejamus que este campo de vectores é tangente a \mathcal{R}_∞ e coincide com X em \mathcal{R}_∞ :

▷ **Lema 3.5.7** ... \bar{X} é tangente a \mathcal{R}_∞ e $\bar{X}|_{\mathcal{R}_\infty} = X$.

Dem. Queremos ver que $\bar{X}_\sigma = X_\sigma$ para todo o ponto $\sigma \in \mathcal{R}_\infty$. Para isso, basta ver que $\bar{X}_\sigma u_I^\alpha = X_\sigma u_I^\alpha$, uma vez que X e \bar{X} são campos verticais. Sabemos que, por hipótese, X é tangente a \mathcal{R}_∞ , logo, $X_\sigma u_I^\alpha = X_\sigma \bar{u}_I^\alpha = (X u_I^\alpha)(\sigma)$. Portanto, é suficiente mostrar que $p(\bar{X} u_I^\alpha) = X \bar{u}_I^\alpha$, onde $p : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{R})$ é a projecção. Representemos ainda por D_i a restrição de D_i a \mathcal{R}_∞ , $D_i = D_i|_{\mathcal{R}_\infty}$. Temos que D_i comuta com p . Logo, como $\bar{X} \in \mathcal{S}^V(\mathcal{H})$ e $D_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$, pela proposição 3.5.2 temos que $[\bar{X}, D_i] = 0$, ou seja, $\bar{X} D_i = D_i \bar{X}$, pelo que $p(\bar{X} u_I^\alpha) = p(\bar{X} D_I u^\alpha) = p(D_I \bar{X} u^\alpha) = D_I p(\bar{X} u^\alpha) = D_I (p \bar{f}^\alpha) = D_I (f^\alpha) = D_I (X \bar{u}^\alpha)$. Agora, como $X \in \mathcal{S}^V(\mathcal{H})$ e $D_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$, pela proposição 3.5.3 temos que $[X, D_i] = 0$, ou seja, $X D_i = D_i X$, pelo que $D_I (X \bar{u}^\alpha) = X (D_I \bar{u}^\alpha) = X \bar{u}_I^\alpha$. Logo, $p(\bar{X} u_I^\alpha) = X \bar{u}_I^\alpha$.

◁.

▷ **Lema 3.5.8** ... Seja $\varphi = (\varphi^\alpha) \in \mathcal{F}^m$. O campo de vectores $\mathfrak{E}_\varphi = \sum D_I \varphi^\alpha \frac{\partial}{\partial u_I^\alpha}$ é tangente a \mathcal{R}_∞ se e só se $\ell_F \varphi \in \Pi_{\ell=1}^k \mathfrak{J}_\infty$.

Dem. Uma vez que \mathfrak{J}_∞ é gerado pelas funções da forma $D_I F^\ell$, $I \in \mathbb{N}^n$, $\ell = 1, \dots, k$, o campo de vectores $\mathfrak{E}_\varphi = \sum D_I \varphi^\alpha \frac{\partial}{\partial u_I^\alpha}$ é tangente a \mathcal{R}_∞ se e só se $\mathfrak{E}_\varphi D_I F^\ell \in \mathfrak{J}_\infty$, $\forall I, \ell$. Mas, pela proposição 3.5.3, $\mathfrak{E}_\varphi D_I F^\ell = D_I \mathfrak{E}_\varphi F^\ell$, e como \mathfrak{J}_∞ é D_i -fechado, vemos que \mathfrak{E}_φ é tangente a \mathcal{R}_∞ se e só se $\mathfrak{E}_\varphi F^\ell \in \mathfrak{J}_\infty$. Mas por definição:

$$\mathfrak{E}_\varphi F^\ell = \sum D_I \varphi^\alpha \frac{\partial F^\ell}{\partial u_I^\alpha} = (\ell_F \varphi)^\ell$$

donde se deduz a proposição.

◁.

Podemos finalmente anunciar o resultado mais importante desta secção, que permite exhibir $\text{Sim}(\mathcal{R})$ como núcleo do operador de linearização universal \mathcal{L}_F :

▷ **Teorema 3.5.1** ... A seguinte aplicação:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^m &\longrightarrow \mathfrak{X}(\mathcal{R}_\infty) \\ \varphi = (\varphi^\alpha) &\longmapsto \mathfrak{E}\varphi|_{\mathcal{R}_\infty} \end{aligned} \quad (3.5.33)$$

induz um isomorfismo entre $\text{Ker } \bar{\mathcal{L}}_F$ e $\text{Sim}(\mathcal{R})$. Por outras palavras:

$$\begin{aligned} \text{Sim}(\mathcal{R}) &\cong \left\{ \mathfrak{E}\varphi|_{\mathcal{R}_\infty} : \varphi \in \mathcal{F}^m, \text{ e } \mathcal{L}_F\varphi = 0 \right\} \\ &\cong \left\{ \varphi \in \mathcal{F}(\mathcal{R})^m : \bar{\mathcal{L}}_F\varphi = 0 \right\} \end{aligned} \quad (3.5.34)$$

Dem. Definamos a seguinte aplicação Ψ , através de:

$$\begin{aligned} \Psi : \text{Ker } \mathcal{L}_F &\longrightarrow \text{Sim}(\mathcal{R}) \\ \varphi &\longmapsto \mathfrak{E}\varphi|_{\mathcal{R}_\infty} \end{aligned} \quad (3.5.35)$$

Se $\varphi \in \text{Ker } \mathcal{L}_F$, temos que $\mathcal{L}_F\varphi \in \mathfrak{J}_\infty^k$, logo, pelo lema anterior, $\mathfrak{E}\varphi$ é tangente a \mathcal{R}_∞ , pelo que a aplicação Ψ está bem definida. Como $\text{Sim}(\mathcal{R}) \cong \mathcal{S}^V(\mathcal{H})$, pelo lema 3.5.7, Ψ também é sobrejectiva. Para ver a injectividade, tomemos $\varphi \in \text{Ker } \mathcal{L}_F$ tal que $\Psi(\varphi) = \mathfrak{E}\varphi|_{\mathcal{R}_\infty} = \mathbf{0}$. Então $(\mathfrak{E}\varphi u^\alpha)|_{\mathcal{R}_\infty} = \varphi^\alpha|_{\mathcal{R}_\infty} = 0$ ou seja, $\varphi^\alpha \in \mathfrak{J}_\infty, \alpha = 1, \dots, m$. Reciprocamente, se $\varphi \in \mathfrak{J}_\infty^k$ então $\Psi(\varphi) = \mathfrak{E}\varphi|_{\mathcal{R}_\infty} = \mathbf{0}$. Logo, $\text{Ker } \Psi = \mathfrak{J}_\infty^m$. Assim, temos que $(\text{Ker } \mathcal{L}_F)/\mathfrak{J}_\infty \cong \text{Sim}(\mathcal{R})$, e como, $(\text{Ker } \mathcal{L}_F)/\mathfrak{J}_\infty \cong \text{Ker } \bar{\mathcal{L}}_F$, vem que $\text{Ker } \bar{\mathcal{L}}_F \cong \text{Sim}(\mathcal{R})$.

◁.

3.5.6 Campos de contacto em equações diferenciais

O teorema 3.5.1 fornece um método de cálculo das álgebras de Lie dos campos de vectores em E , e se $m = 1$ dos campos de contacto em J^1E , que deixam invariante a equação \mathcal{R} .

Consideremos então uma equação diferencial \mathcal{R} em $\pi : E = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow M = \mathbb{R}^n$, e ainda os seguintes campos:

$$\mathfrak{X}_0(\mathcal{R}) = \left\{ [\tilde{X}], X \in \mathfrak{X}(E), \tilde{X} \text{ é tangente a } \mathcal{R}_\infty \right\}$$

e para $m = 1$:

$$\mathfrak{X}^{ct}(\mathcal{R}) = \left\{ [\tilde{X}], X \in \mathfrak{X}^{ct}, \tilde{X} \text{ é tangente a } \mathcal{R}_\infty \right\}$$

Ponhamos ainda:

$$\bar{\mathcal{F}}_0 = \left\{ (\varphi^1, \dots, \varphi^m)|_{\mathcal{R}_\infty} : \varphi^\alpha = Y^\alpha - \sum_i X^i u_i^\alpha, Y^\alpha, X^i \in \mathcal{F}_0 \right\}$$

▷ **Teorema 3.5.2** ...

$$\begin{aligned} \text{(i).} \quad \mathfrak{X}_0(\mathcal{R}) &\cong \overline{\mathcal{F}}_0 \cap \text{Ker } \overline{\mathcal{L}}_F \\ \text{(ii).} \quad \mathfrak{X}^{ct}(\mathcal{R}) &\cong \mathcal{F}_1 \cap \text{Ker } \overline{\mathcal{L}}_F, \quad \text{se } m = 1. \end{aligned} \quad (3.5.36)$$

Dem. (i). Seja $X \in \mathfrak{X}_0(\mathcal{R})$. por definição $X = [\tilde{Y}]$ para algum $Y \in \mathfrak{X}(E)$. Se $Y = \sum X^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum Y^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha}$, seja $\varphi = (\varphi^\alpha)$, onde $\varphi^\alpha = Y^\alpha - \sum_i u_i^\alpha X^i$. Temos que $X\varphi = \tilde{Y} - \sum X^i D_i$ é um campo tangente a \mathcal{R}_∞ , logo, pelo lema 3.5.8, $\mathcal{L}_F(\varphi^\alpha) \in \mathfrak{J}_\infty^k$ e $(\varphi^\alpha)|_{\mathcal{R}_\infty} \in \overline{\mathcal{F}}_0 \cap \text{Ker } \overline{\mathcal{L}}_F$, sendo esta correspondência bijetiva. (ii). prova-se de forma análoga.

◁.

▷ **Exemplo 3.5.1 [Equação Korteweg-de Vries]** ... Seja $E = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $(x^i, u_{i,j})$ as cordenadas canônicas em $J^\infty(E)$, onde pusemos $u_{j,k} = u_{(j,k)}$. Seja \mathcal{R} a equação KdV (Korteweg-de Vries):

$$\mathcal{R} = \{F \stackrel{\text{def}}{=} u_{3,0} + uu_{1,0} + u_{0,1} = 0\} \subset J^3 E \quad (3.5.37)$$

(ou em notação usual $u_{xxx} + uu_x + u_y = 0$). O ideal \mathfrak{J}_∞ , que define \mathcal{R}_∞ , é gerado por $\{D_I F; I \in \mathbb{N}^2\}$. Temos que $\{x^i, u_j \stackrel{\text{def}}{=} u_{j,0}|_{\mathcal{R}_\infty}; i = 1, 2, j \in \mathbb{N}\}$ é uma carta global para \mathcal{R}_∞ . Representemos ainda por D_i a restrição $D_i|_{\mathcal{R}_\infty} = \overline{\frac{\partial}{\partial x^i}}|_{\mathcal{R}_\infty}$; $i = 1, 2$. Sabemos que D_i é tangente a \mathcal{R}_∞ e que é caracterizado por:

$$D_i x^j = \delta_i^j, \quad D_1 u_j = u_{j+1}, \quad D_2 u_j = -D_1^j (uu_1 + u_3)$$

$\mathcal{H}_{\mathcal{R}}^\perp$ é gerado por θ_j onde:

$$\theta_j = \theta_{j,0}|_{\mathcal{R}_\infty} = du_j - \sum_{i=1,2} D_i u_j dx^i$$

Temos neste caso que $m = 1, k = 1$ e portanto:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_F \varphi &= \mathfrak{E}_\varphi F \\ &= \left(\sum \frac{\partial F}{\partial u_I} D_I \right) \varphi \\ &= \left(D_2 + u D_1 + D_1^3 + u_1 \right) \varphi, \quad \varphi \in \mathcal{F} \end{aligned} \quad (3.5.38)$$

e ainda:

$$\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}(x^1, x^2, u, u_1, u_3) \subset \mathcal{F} \quad (3.5.39)$$

Um cálculo mostra que $(\text{Ker } \mathcal{L}_F) \cap \mathcal{F}_1$ é gerado por $\{u_1, -(u_3 + uu_1), 1 - x^2 u_1, -x^1 u_1 + 3x^2(u_3 + uu_1) - 2u\}$. Isto corresponde a $X_1 = \partial/\partial x^1, X_2 = \partial/\partial x^2, X_3 = x^2 \partial/\partial x^1 + \partial/\partial u$ e $X_4 = x^1 \partial/\partial x^1 + 3x^2 \partial/\partial x^2 - 2u \partial/\partial u \in \mathfrak{X}(E)$. Os seus comutadores são: $[X_1, X_2] = [X_1, X_3] = 0; [X_1, X_4] = [X_2, X_3] = X_1; [X_2, X_4] = 3X_2$ e $[X_3, X_4] = -2X_3$. Sucintamente, a correspondência:

$$-\sum_{i=1}^4 a_i X_i \mapsto \begin{bmatrix} a_4 & a_3 & 0 & a_1 \\ 0 & 3a_4 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & -2a_4 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

é uma injeção de álgebras de Lie $\mathfrak{X}^{ct} \hookrightarrow \mathfrak{gl}_4(\mathbb{R})$.

◁.

▷ **Exemplo 3.5.2 [Equação de Burgers]** ... Consideremos a equação de Burgers:

$$u_t = uu_x + u_{xx} \quad (3.5.40)$$

Esta equação diferencial é da seguinte forma, mais geral:

$$u_t = f(u)u_x + u_{xx} \quad (3.5.41)$$

onde $f(u)$ é uma função de u .

Seja então \mathcal{E} uma equação desta forma e \mathcal{E}^∞ o seu prolongamento ao espaço de jactos infinitos $J^\infty(\pi)$. Para obter um sistema de coordenadas intrínsecas em \mathcal{E}^∞ , observemos o seguinte:

Se D_1 e D_2 são os operadores de derivação total dados por $D_1 = \frac{\partial}{\partial x} + u_{(1,0)} \frac{\partial}{\partial u} + \dots + u_{(\alpha+1,\beta)} \frac{\partial}{\partial u_{(\alpha,\beta)}} + \dots$ e $D_2 = \frac{\partial}{\partial t} + u_{(0,1)} \frac{\partial}{\partial u} + \dots + u_{(\alpha,\beta+1)} \frac{\partial}{\partial u_{(\alpha,\beta)}} + \dots$, então $D_1^\alpha D_2^\beta(u) = D_1^\alpha(u_{(0,\beta)}) = u_{(\alpha,\beta)}$ para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0$. Logo, em \mathcal{E} , vem: $u_{(\alpha,\beta+1)} = D_1^\alpha D_2^{\beta+1}(u) = D_1^\alpha D_2^\beta(u_{(0,1)}) = D_1^\alpha D_2^\beta(u_{(2,0)} + f(u)u_{(1,0)})$. Assim, podemos tomar x, t e $u_\alpha = u_{(\alpha,0)}|_{\mathcal{E}^\infty}$ como um sistema de coordenadas intrínsecas em \mathcal{E}^∞ , no qual a restrição dos operadores anteriores a \mathcal{E}^∞ é dada por:

$$\begin{aligned} D_x &= D_1|_{\mathcal{E}^\infty} = \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0} u_{(\alpha+1,0)} \frac{\partial}{\partial u_{(\alpha,0)}} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0} u_{\alpha+1} \frac{\partial}{\partial u_\alpha} \\ D_t &= D_2|_{\mathcal{E}^\infty} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0} u_{(\alpha,1)} \frac{\partial}{\partial u_{(\alpha,0)}} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0} D_x^\alpha(u_2 + f(u)u_1) \frac{\partial}{\partial u_\alpha} \end{aligned} \quad (3.5.42)$$

O ideal \mathfrak{J}_∞ , que define \mathcal{E}^∞ , é gerado por $\{D_I F; I \in \mathbb{N}^2\}$, onde $F = u_2 + f(u)u_1 - u_{(0,1)}$. Como consequência do teorema 3.5.1, vemos que há um isomorfismo entre a álgebra das simetrias de \mathcal{E} e a álgebra de Lie de soluções da equação $\mathcal{L}_F(\varphi) = 0$. Neste caso, restringindo as soluções a \mathcal{E}^∞ , temos:

$$\mathcal{L}_F = \frac{\partial F}{\partial u_2} D_x^2 + \frac{\partial F}{\partial u_1} D_x + \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial u_t} D_t = D_x^2 + f(u)D_x + f'(u)u_1 - D_t$$

e portanto:

$$\mathcal{L}_F(\varphi) = 0 \iff D_x^2(\varphi) + f(u)D_x(\varphi) + f'(u)u_1\varphi - D_t(\varphi) = 0 \quad (3.5.43)$$

Designando por \mathcal{F}_k o espaço das funções ϕ tais que $\frac{\partial \phi}{\partial u_n} = 0$ para $n > k$, vamos agora supor que $\varphi \in \mathcal{F}_k$ e que $\frac{\partial \varphi}{\partial u_k} \neq 0$, ou seja, que φ é uma função das variáveis x, t, u, u_1, \dots, u_k . Então, a equação $\mathcal{L}_F(\varphi) = 0$ não depende das variáveis u_n com $n > k+2$. De facto, também não depende da variável u_{k+2} , pois temos:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_F(\varphi) &= D_x^2(\varphi) + f(u)D_x(\varphi) + f'(u)u_1\varphi - D_t(\varphi) \\
 &= D_x \left(\dots + u_{k+1} \frac{\partial \varphi}{\partial u_k} \right) + f(u)D_x(\varphi) + f'(u)u_1\varphi \\
 &\quad - \frac{\partial \varphi}{\partial t} - (u_2 + f(u)u_1) \frac{\partial \varphi}{\partial u} - (u_3 + f(u)u_2 + f'(u)u_1^2) \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \\
 &\quad - (u_4 + f(u)u_3 + 3f'(u)u_1u_2 + f''(u)u_1^3) \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} - \dots \\
 &\quad - (u_{k+2} + f(u)u_{k+1} + (k+1)f'(u)u_1u_k + \dots) \frac{\partial \varphi}{\partial u_k} \\
 &= \dots + u_{k+2} \frac{\partial \varphi}{\partial u_k} + \dots - u_{k+2} \frac{\partial \varphi}{\partial u_k} - \dots \in \mathcal{F}_{k+1}
 \end{aligned} \tag{3.5.44}$$

Note-se que a equação é polinomial de grau 2 relativamente à variável u_{k+1} :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_F(\varphi) &= D_x^2(\varphi) + f(u)D_x(\varphi) + f'(u)u_1\varphi - D_t(\varphi) \\
 &= D_x \left(\dots + u_{k+1} \frac{\partial \varphi}{\partial u_k} \right) + \dots \\
 &= \dots + u_{k+1}^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_k^2} + \dots
 \end{aligned}$$

sendo que não aparece mais nenhum termo de coeficiente u_{k+1}^2 . Logo, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_k^2} = 0$ e $\varphi = Au_k + B$, com $A, B \in \mathcal{F}_{k-1}$. Relativamente aos termos com coeficiente u_{k+1} , temos:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_F(\varphi) &= D_x^2(\varphi) + f(u)D_x(\varphi) + f'(u)u_1\varphi - D_t(\varphi) \\
 &= D_x \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + u_1 \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \dots + u_{k+1} \frac{\partial \varphi}{\partial u_k} \right) + f(u) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + u_1 \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \dots + u_{k+1} \frac{\partial \varphi}{\partial u_k} \right) \\
 &\quad + f'(u)u_1\varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial t} - (u_2 + f(u)u_1) \frac{\partial \varphi}{\partial u} - \dots - (u_{k+1} + \dots) \frac{\partial \varphi}{\partial u_{k-1}} \\
 &\quad - (u_{k+2} + f(u)u_{k+1} + \dots) \frac{\partial \varphi}{\partial u_k} \\
 &= \dots + u_{k+1} \frac{\partial \varphi}{\partial u_{k-1}} + \dots + u_{k+1} D_x \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_k} \right) + \dots + f(u)u_{k+1} \frac{\partial \varphi}{\partial u_k} + \dots \\
 &\quad - u_{k+1} \frac{\partial \varphi}{\partial u_{k-1}} - \dots - f(u)u_{k+1} \frac{\partial \varphi}{\partial u_k} - \dots \\
 &= u_{k+1} D_x \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_k} \right) + \dots = u_{k+1} D_x(A) + \dots
 \end{aligned} \tag{3.5.45}$$

Fazendo $\mathcal{L}_F(\varphi) = 0$, temos que $D_x(A) = 0$, logo $A = A(t)$, ou seja, A é uma função que apenas depende da variável t . Além disso, podemos ver que a equação também é polinomial de

grau 2 relativamente à variável u_k :

$$\begin{aligned}\ell_F(\varphi) &= D_x^2(\varphi) + f(u)D_x(\varphi) + f'(u)u_1\varphi - D_t(\varphi) \\ &= D_x\left(\dots + u_k \frac{\partial \varphi}{\partial u_{k-1}} + \dots\right) + \dots \\ &= \dots + u_k^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_{k-1}^2} + \dots\end{aligned}$$

sendo que não aparece mais nenhum termo de coeficiente u_{k+1}^2 . Logo, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_k^2} = \frac{\partial^2 B}{\partial u_k^2} = 0$ e $B = au_{k-1} + b$, com $a, b \in \mathcal{F}_{k-2}$. Relativamente aos termos com coeficiente u_k , temos:

$$\ell_F(\varphi) = D_x^2(\varphi) + f(u)D_x(\varphi) + f'(u)u_1\varphi - D_t(\varphi)$$

$$D_x(\varphi) = D_x(Au_k + B) = D_x(Au_k + au_{k-1} + b) = Au_{k+1} + au_k + D_x(a)u_{k-1} + D_x(b)$$

$$D_x^2(\varphi) = D_x(Au_{k+1} + au_k + D_x(a)u_{k-1} + D_x(b)) = Au_{k+2} + au_{k+1} + 2D_x(a)u_k + D_x^2(a)u_{k-1} + D_x^2(b)$$

$$\begin{aligned}D_t(\varphi) &= D_t(Au_k + au_{k-1} + b) = D_t(A)u_k + AD_t(u_k) + D_t(a)u_{k-1} + aD_t(u_{k-1}) + D_t(b) \\ &= A'(t)u_k + AD_x^k(u_2 + f(u)u_1) + D_t(a)u_{k-1} + aD_x^{k-1}(u_2 + f(u)u_1) + D_t(b) \\ &= A'(t)u_k + A(u_{k+2} + f(u)u_{k+1} + (k+1)f'(u)u_1u_k + \dots) + \\ &\quad + D_t(a)u_{k-1} + a(u_{k+1} + f(u)u_k + \dots) + D_t(b)\end{aligned}\tag{3.5.46}$$

Logo, o coeficiente de u_k é $2D_x(a) + f(u)a + f'(u)u_1A - (A' + A(k+1)f'(u)u_1 + af(u)) = 2D_x(a) + kAf'(u)u_1 - A' = 2D_x(a) + kAf'(u)u_1 - A' = D_x(2a - kAf) - A'$. Assim, temos:

$$\begin{aligned}D_x(2a - kAf) - A' = 0 &\iff D_x(2a - kAf) = A' \\ &\iff 2a - kAf = A'x + \gamma \\ &\iff a = \frac{1}{2}(kAf + A'x + \gamma)\end{aligned}\tag{3.5.47}$$

onde γ é uma função que apenas depende da variável t . Portanto, a função geradora φ é da forma

$$\varphi = A(t)u_k + \frac{1}{2}(kA(t)f + A'(t)x + \gamma(t))u_{k-1} + b, \quad b \in \mathcal{F}_{k-2}\tag{3.5.48}$$

Notemos ainda que o coeficiente do termo em $u_1^2 u_{k-1}$ é um múltiplo inteiro de $f''(u) \frac{\partial \varphi}{\partial u_k}$, sendo que, por hipótese, $\frac{\partial \varphi}{\partial u_k} \neq 0$. Mas então, $\varphi''(u) = 0$ e $\varphi = \alpha u + \beta$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, e apenas neste caso a equação \mathcal{E} admite simetrias. Podemos facilmente verificar que o caso $\alpha = 1$ e $\beta = 0$ corresponde à equação de Burgers.

Esta descrição das simetrias da equação dada permite-nos também descrever a respectiva álgebra de Lie. Nomeadamente, dados $\varphi_1 = A_1 u_{k_1} + b_1$ e $\varphi_2 = A_2 u_{k_2} + b_2$, com $A_i = A_i(t)$ e $b_i \in \mathcal{F}_{k_i}$ $i = 1, 2$, temos que $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ é ainda uma função geradora, dada por:

$$\{\varphi_1, \varphi_2\} = \frac{1}{2}(k_2 A_1' A_2 - k_1 A_2' A_1) u_{k_1+k_2-2} + c$$

com $c \in \mathcal{F}_{k_1+k_2-3}$. Finalmente, com esta descrição das funções geradoras, é possível mostrar que, embora a álgebra de Lie das funções geradoras das simetrias da equação de Burgers seja gerada,

como espaço vectorial, por todas as funções polinomiais em x, t, u, \dots, u_k do tipo $\varphi_k^i = t^i u_k + q$, com $q \in \mathcal{F}_{k-1}$ e $i \leq k$, ela é gerada, como álgebra de Lie, apenas por certas funções do tipo φ_1^0 , φ_2^2 e φ_3^0 .

◁.

Capítulo 4

Sucessões Espectrais

4.1 Conceitos de álgebra homológica

Um **complexo diferencial** é uma sucessão de espaços vectoriais¹ e aplicações lineares, chamadas **diferenciais**:

$$\dots \longrightarrow K^{i-1} \xrightarrow{d^{i-1}} K^i \xrightarrow{d^i} K^{i+1} \longrightarrow \dots \quad (4.1.1)$$

tais que $d^i \circ d^{i-1} = 0$. Em geral omite-se o índice i nas diferenciais e escreve-se simplesmente $d^2 = 0$. Por definição $\text{im } d^{i-1} \subseteq \text{Ker } d^i$. A **cohomologia** do complexo (K^*, d) é a família de espaços vectoriais:

$$H^i(K^*, d) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\text{Ker } d^i}{\text{im } d^{i-1}} \quad (4.1.2)$$

Quando $H^i(K^*, d) = 0$, isto é, $\text{im } d^{i-1} = \text{Ker } d^i$, o complexo diz-se **acíclico** (ou exacto) em grau i . O complexo K^* diz-se acíclico se o fôr em todos os graus.

Elementos de $Z^i = \text{Ker } d^i \subseteq K^i$ dizem-se **i -cociclos** e elementos de $B^i = \text{im } d^{i-1} \subseteq K^i$ dizem-se **i -cobordos**. Dois cociclos $\alpha_1, \alpha_2 \in Z^i$ dizem-se **cohomólogos** se $\alpha_1 - \alpha_2 \in \text{im } d^{i-1}$. Neste caso, definem a mesma classe de cohomologia $[\alpha_1] = [\alpha_2] \in H^i(K^*, d)$.

Um morfismo de complexos diferenciais $F : K^* \longrightarrow L^*$, é uma família de aplicações lineares $f^i : K^i \longrightarrow L^i$ que comutam com as diferenciais:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & K^{i-1} & \xrightarrow{d_K^{i-1}} & K^i & \xrightarrow{d_K^i} & K^{i+1} & \xrightarrow{d_K^{i+1}} & \dots \\ & & \downarrow f^{i-1} & & \downarrow f^i & & \downarrow f^{i+1} & & \\ \dots & \longrightarrow & K^{i-1} & \xrightarrow{d_L^{i-1}} & K^i & \xrightarrow{d_L^i} & K^{i+1} & \xrightarrow{d_L^{i+1}} & \dots \end{array} \quad (4.1.3)$$

Um tal morfismo induz uma aplicação $H^i(f) : H^i(K^*, d) \longrightarrow H^i(L^*, d)$, definida por $H^i(f)[\alpha] = [f(\alpha)]$. Claramente que $H^i(f \circ g) = H^i(f) \circ H^i(g)$. Portanto $H^i(\cdot)$ é um functor covariante da categoria dos complexos diferenciais na categoria dos espaços vectoriais.

Dois morfismos de complexos $f, g : K^* \longrightarrow L^*$ dizem-se **homotópicos** se existem aplicações $h^i : K^i \longrightarrow L^{i-1}$ tais:

$$f^i - g^i = h^{i+1} d_K^i + d_L^{i-1} h^i \quad (4.1.4)$$

¹mais geralmente, de R -módulos...

isto é:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \longrightarrow & K^{i-1} & \xrightarrow{d_K^{i-1}} & K^i & \xrightarrow{d_K^i} & K^{i+1} & \xrightarrow{d_K^{i+1}} & \dots \\
 & & \downarrow f^{i-1} & & \downarrow f^i & & \downarrow f^{i+1} & & \\
 & & g^{i-1} & \nearrow h^i & g^i & \nearrow h^{i+1} & g^{i+1} & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \dots & \longrightarrow & K^{i-1} & \xrightarrow{d_L^{i-1}} & K^i & \xrightarrow{d_L^i} & K^{i+1} & \xrightarrow{d_L^{i+1}} & \dots
 \end{array} \tag{4.1.5}$$

As aplicações h^i dizem-se uma homotopia.

▷ **Proposição 4.1.1** ... Se os morfismos de complexos $f, g : K^* \longrightarrow L^*$ são homotópicos, então $H^i(f) = H^i(g), \forall i$.

Dem. Seja $[\alpha] \in H^i(K^*, d)$. Então $d\alpha = 0$ e:

$$f(\alpha) - g(\alpha) = (hd + dh)(\alpha) = d(h(\alpha)) \implies [f(\alpha)] = [g(\alpha)]$$

◁.

Dois complexos K^* e L^* dizem-se **equivalentes** se existirem morfismos $f : K^* \longrightarrow L^*$ e $g : L^* \longrightarrow K^*$, tais que $g \circ f$ é homotópico a Id_K e $f \circ g$ é homotópico a Id_L . É claro que complexos equivalentes têm cohomologias isomorfas. Um complexo K^* diz-se **nulo-homotópico** se a aplicação identidade Id_K é homotópica à aplicação nula, isto é:

$$\text{Id}_K = hd + dh$$

para alguma homotopia $h^i : K^i \longrightarrow K^{i-1}$. Um complexo nulo-homotópico é obviamente acíclico.

Consideremos uma sucessão exacta curta de complexos diferenciais:

$$0 \longrightarrow L^* \xrightarrow{f} K^* \xrightarrow{g} M^* \longrightarrow 0 \tag{4.1.6}$$

ou mais detalhadamente:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 0 & \longrightarrow & L^{i+1} & \xrightarrow{f} & K^{i+1} & \xrightarrow{g} & M^{i+1} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow d_L & & \uparrow d_K & & \uparrow d_M & & \\
 0 & \longrightarrow & L^i & \xrightarrow{f} & K^i & \xrightarrow{g} & M^i & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow d_L & & \uparrow d_K & & \uparrow d_M & & \\
 0 & \longrightarrow & L^{i-1} & \xrightarrow{f} & K^{i-1} & \xrightarrow{g} & M^{i-1} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & &
 \end{array} \tag{4.1.7}$$

Portanto cada linha é exacta e f e g são morfismos de complexos (todos os quadrados são comutativos). As cohomologias de L , K e M , estão relacionadas pelas aplicações seguintes: f e g induzem como habitualmente aplicações:

$$H^i(L) \xrightarrow{H^i(f)} H^i(K) \xrightarrow{H^i(g)} H^i(M)$$

Mas existe uma aplicação menos óbvia:

$$k^i : H^i(M) \longrightarrow H^{i+1}(L) \tag{4.1.8}$$

chamada o **conector**, que se define da seguinte forma: seja $[\alpha] \in H^i(M)$, com $\alpha \in M^i$ tal que $d_M \alpha = 0$, e tomemos um elemento $\beta \in K^i$ tal que $g(\beta) = \alpha$, o que é possível já que g é sobrejectiva. Temos que $g(d_K \beta) = d_M(g(\beta)) = d_M \alpha = 0$, isto é, $d_K \beta \in \text{Ker } g = \text{im } f$, e portanto existe um elemento $\gamma \in L^{i+1}$ tal que $f(\gamma) = d_K \beta$.

$$\begin{array}{ccccc} \gamma \in L^{i+1} & \xrightarrow{f} & f(\gamma) = d_K \beta \in K^{i+1} & \xrightarrow{g} & 0 \\ & & \uparrow d_K & & \uparrow d_M \\ & & \beta \in K^i & \xrightarrow{g} & \alpha \in M^i \end{array}$$

Mas γ é um cociclo, i.e., $d_L \gamma = 0$. Com efeito, $f(d_L \gamma) = d_K(f(\gamma)) = d_K^2 \beta = 0$, e portanto $d_L \gamma = 0$ já que f é injectiva. É fácil ver que γ depende apenas da classe de cohomologia $[\alpha] \in H^i(M)$ de que partimos, e assim fica definido o conector k^i pondo:

$$k^i : [\alpha] \longmapsto [\gamma] \in H^{i+1}(L), \quad [\alpha] \in H^i(M)$$

Portanto, dada a sucessão exacta curta de complexos diferenciais (4.1.7), obtemos uma sucessão longa:

$$\begin{array}{ccccccc} & & \dots & \xrightarrow{H^i(g)} & H^{i-1}(M) & & \\ & & & & \nearrow k^i & & \\ H^i(L) & \xrightarrow{H^i(f)} & H^i(K) & \xrightarrow{H^i(g)} & H^i(M) & & \\ & & & & \nearrow k^i & & \\ H^{i+1}(L) & \xrightarrow{H^{i+1}(f)} & H^{i+1}(K) & \xrightarrow{H^{i+1}(g)} & H^{i+1}(M) & & \\ & & & & \nearrow k^i & & \\ H^{i+2}(L) & \xrightarrow{H^{i+2}(f)} & \dots & & & & \end{array} \tag{4.1.9}$$

Esta sucessão é exacta e diz-se a **sucessão exacta longa** associada à sucessão exacta curta de complexos diferenciais (4.1.7).

4.2 Sucessões espectrais

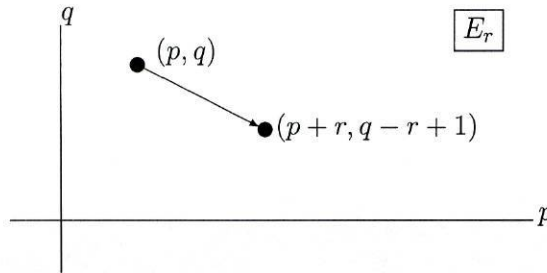
▷ **Definição 4.2.1** ... Uma **sucessão espectral** (de tipo cohomológico) é uma coleção de espaços vectoriais² $E = \{E_r^{p,q}\}_{r=0,1,2,\dots}$ e, para cada r , diferenciais de bigrau $(r, 1-r)$:

$$E_r^{p,q} \xrightarrow{d_r^{p,q}} E_r^{p+r, q+1-r} \tag{4.2.1}$$

tais que:

- $d_r^2 = 0$ (mais exactamente $d_r^{p+r, q+1-r} \circ d_r^{p,q} = 0$).
- para todos os p, q, r , o espaço $E_{r+1}^{p,q}$ é isomorfo à cohomologia $H^{p,q}(E_r^{*,*}, d_r)$, relativamente à diferencial d_r :

$$E_{r+1}^{p,q} \cong H^{p,q}(E_r^{*,*}, d_r), \quad \forall p, q, r \tag{4.2.2}$$



◁.

Notemos que E_r e d_r determinam E_{r+1} mas não determinam d_{r+1} . Para esclarecer o significado desta definição, comecemos por (E_2, d_2) (para não sobrecarregar muito as notações vamos omitir provisoriamente a referência à bigraduação em $E_r^{*,*}$). Representemos por:

$$Z_2 = \text{Ker } d_2 \quad \text{e} \quad B_2 = \text{im } d_2$$

A condição $d_2 \circ d_2 = 0$ implica que $B_2 \subseteq Z_2 \subseteq E_2$, e, por definição, $E_3 \cong H(E_2, d_2) = Z_2/B_2$. Seja $\bar{Z}_3 = \text{Ker}(E_3 \xrightarrow{d_3} E_3)$. Como \bar{Z}_3 é um subespaço de $E_3 \cong Z_2/B_2$, pode ser escrito na forma Z_3/B_2 , onde Z_3 é um subespaço de Z_2 . Anàlogamente $\bar{B}_3 = \text{im}(E_3 \xrightarrow{d_3} E_3)$ é isomorfo a B_3/B_2 e portanto:

$$E_4 \cong \bar{Z}_3/\bar{B}_3 \cong (Z_3/B_2)/(B_3/B_2) \cong Z_3/B_3$$

(o último isomorfismo deve-se ao “terceiro teorema fundamental do isomorfismo”), o que pode ainda ser apresentado sob a forma de uma sucessão de inclusões $B_2 \subseteq B_3 \subseteq Z_3 \subseteq Z_2 \subseteq E_2$.

Iterando este processo, obtemos a sucessão espectral sob a forma de uma torre infinita de subespaços de E_2 :

$$B_2 \subseteq B_3 \subseteq \dots \subseteq B_r \subseteq \dots \subseteq Z_r \subseteq \dots \subseteq Z_3 \subseteq Z_2 \subseteq E_2 \tag{4.2.3}$$

²mais geralmente de R -módulos.

com a propriedade de que $E_{r+1} \cong Z_r/B_r$. A diferencial d_{r+1} pode ainda ser considerada como uma aplicação $Z_r/B_r \longrightarrow Z_r/B_r$, que tem núcleo Z_{r+1}/B_r e imagem B_{r+1}/B_r . A sucessão exacta curta induzida por d_{r+1} :

$$0 \longrightarrow Z_{r+1}/B_r \longrightarrow Z_r/B_r \xrightarrow{d_r} B_{r+1}/B_r \longrightarrow 0 \tag{4.2.4}$$

dá origem a isomorfismos $B_{r+1}/B_r \cong (Z_r/B_r) / (Z_{r+1}/B_r) \cong Z_r/Z_{r+1}, \forall r$.

Diz-se que um elemento $\alpha \in E_2$ é um r -cociclo, se α está em Z_r (e portanto α está no núcleo das $r - 2$ diferenciais anteriores). Por outro lado, os elementos de $B_r \subseteq E_2$ dizem-se r -cobordos. Consideremos agora os seguintes subespaços de E_2 ;

$$\begin{aligned} Z_\infty &\stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_r Z_r = \{\alpha \in E_2 : d_r(\alpha) = 0, \forall r\} \\ B_\infty &\stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_r B_r = \{\alpha \in Z_\infty : \alpha = d_r(\beta) \text{ para algum } \beta \in E_r\} \end{aligned} \tag{4.2.5}$$

Da torre infinita de inclusões (4.2.3) deduzimos que $B_\infty \subseteq Z_\infty$, e finalmente definimos:

$$E_\infty \stackrel{\text{def}}{=} Z_\infty/B_\infty$$

cujos elementos são os ∞ -cociclos, módulo cobordos de alguma ordem.

Antecipando a noção de convergência, temos que, em geral, o objectivo do cálculo é o termo limite E_∞ . Sob certas condições favoráveis, o cálculo termina após um número finito de etapas. Vejamos um exemplo dessa situação. Diz-se que uma sucessão espectral **colapsa na ordem N** , se $d_r = 0, \forall r \geq N$. Da sucessão exacta:

$$0 \longrightarrow Z_r/B_{r-1} \longrightarrow Z_{r-1}/B_{r-1} \xrightarrow{d_r} B_r/B_{r-1} \longrightarrow 0$$

e da condição $d_r = 0$ deduzimos que $Z_r = Z_{r-1}$ e $B_r = B_{r-1}$, e portanto, a torre (4.2.3) fica:

$$B_2 \subseteq B_3 \subseteq \dots \subseteq B_{N-1} = B_N = \dots = B_\infty \subseteq Z_\infty = \dots = Z_N = Z_{N-1} \subseteq \dots \subseteq Z_3 \subseteq Z_2 \subseteq E_2$$

isto é:

$$E_\infty = E_N = Z_N/B_N$$

4.3 Pares exactos

▷ **Definição 4.3.1** ... Sejam D e E dois espaços vectoriais e $i : D \rightarrow D, j : D \rightarrow E$ e $k : E \rightarrow D$ homomorfismos. Diz-se que $\mathcal{C} = \{D, E; i, j, k\}$ é um **par exacto** se o diagrama seguinte é exacto:

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{i} & D \\ & \searrow k & \swarrow j \\ & & E \end{array} \tag{4.3.1}$$

isto é, $\text{im } i = \text{Ker } j, \text{im } j = \text{Ker } k$ e $\text{im } k = \text{Ker } i$.

◁.

Se definirmos $d : E \rightarrow E$ através de $d = j \circ k$, deduzimos, como consequência imediata desta definição, que (E, d) é um espaço diferencial. De facto:

$$d^2 = (j \circ k) \circ (j \circ k) = j \circ (k \circ j) \circ k = 0$$

A operação fundamental sobre um par exacto consiste na formação do respectivo **par derivado**. Para isso definamos:

- $E' \stackrel{\text{def}}{=} H(E, d) = \text{Ker } d / \text{im } d = \text{Ker } (j \circ k) / \text{im } (j \circ k)$
- $D' \stackrel{\text{def}}{=} i(D) = \text{Ker } j$
- $i' \stackrel{\text{def}}{=} i|_{iD=D'} : D' \rightarrow D'$
- $j' : D' \rightarrow E'$ define-se da seguinte forma: se $x' = i(x)$ pertence a D' , com $x \in D$, definimos $j'(x')$, através de:

$$j'(x') = [j(x)] \in H(E, d) = E' \tag{4.3.2}$$

onde $[\]$ representa a classe de cohomologia em $H(E, d)$. É claro que precisamos de mostrar que j' está bem definida, isto é, que:

- $j(x)$ é um cociclo. De facto $d(jx) = jkj(x) = 0$.
- a classe de cohomologia $[j(x)]$ não depende da escolha de $x \in D$. De facto, suponhamos que $x' = i(y)$ para um outro $y \in D$. Então $i(x - y) = 0 \Rightarrow (x - y) \in \text{Ker } i = \text{im } k \Rightarrow x - y = k(e)$ para algum $e \in E$. Portanto:

$$jx - jy = jk(e) = d(e) \Rightarrow [j(x)] = [j(y)]$$

- Finalmente define-se $k' : E' \rightarrow D'$ da seguinte forma: se $[e] \in H(E)$, então $d(e) = jk(e) = 0 \Rightarrow k(e) \in \text{Ker } j = \text{im } i \Rightarrow k(e) = i(x)$ para algum $x \in D$, i.e., $k(e) \in i(D) = D'$. Pômos então:

$$k'([e]) \stackrel{\text{def}}{=} k(e) \tag{4.3.3}$$

e é fácil ver que desta forma k' está bem definida.

Ao par $C' = \{D', E'; i', j', k'\}$ assim construído chamamos o **par derivado** de C :

$$\begin{array}{ccc}
 D' = i(D) & \xrightarrow{i'} & D' = i(D) \\
 & \swarrow k' & \searrow j' \\
 & E' = H(E, d = j \circ k) &
 \end{array} \tag{4.3.4}$$

O resultado fundamental é o seguinte:

▷ **Proposição 4.3.1** ... O par derivado $C' = \{D', E'; i', j', k'\}$ é um par exacto.

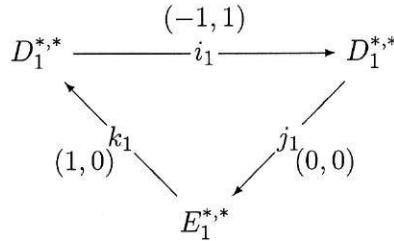
Dem. (i). $\text{im } j' \subset \text{Ker } k'$. De facto $k'j'(x') = k'j'i(x) = k'j(x) = kj(x) = 0$. (ii). $\text{im } j' \supset \text{Ker } k'$: como $k'[e] = k(e) = 0$, vem que $e = j(x) = j'(ix) \in \text{im } j'$. O resto da prova é análoga.

◁.

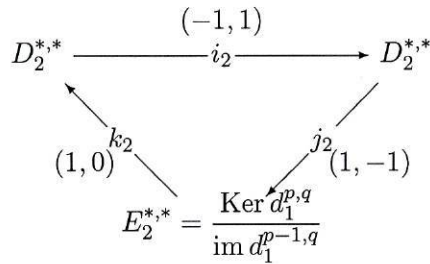
O processo acima descrito pode evidentemente ser iterado. Assim, começando com um par exacto $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 = \{D, E; i, j, k\}$, obtemos uma sucessão de pares exactos $\mathcal{C}_r = \{D_r, E_r; i_r, j_r, k_r\}$, onde $\mathcal{C}_2 = \{D_2, E_2; i_2, j_2, k_2\} = \{D', E'; i', j', k'\} = \mathcal{C}'$, e \mathcal{C}_{r+1} é o par derivado de \mathcal{C}_r .

Para estabelecer a relação com sucessões espectrais, vamos introduzir uma bigraduação. Suponhamos então que o par inicial $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1$ é bigraduado, isto é, que $D_1 = D_1^{*,*} = \bigoplus_{p,q} D_1^{p,q}$ e $E_1 = E_1^{*,*} = \bigoplus_{p,q} E_1^{p,q}$, e ainda que $i_1 : D_1 \rightarrow D_1$ tem bigrau $(-1, 1)$, $j_1 : D_1 \rightarrow E_1$ tem bigrau $(0, 0)$ e $k_1 : E_1 \rightarrow D_1$ tem bigrau $(1, 0)$:

$$\begin{aligned} i_1^{p,q} : D_1^{p,q} &\longrightarrow D_1^{p-1,q+1} \\ j_1^{p,q} : D_1^{p,q} &\longrightarrow E_1^{p,q} \\ k_1^{p,q} : E_1^{p,q} &\longrightarrow D_1^{p+1,q} \end{aligned} \tag{4.3.5}$$



Nestas circunstâncias, $d_1 = j_1 \circ k_1 : E_1^{*,*} \rightarrow E_1^{*,*}$ tem bigrau $(1, 0)$, isto é $d_1^{p,q} : E_1^{p,q} \rightarrow E_1^{p+1,q}$ e $E_2^{p,q} = H^{p,q}(E_1, d_1) = \frac{\text{Ker } d_1^{p,q}}{\text{im } d_1^{p-1,q}}$ e portanto, se $\mathcal{C}_2 = \{D_2, E_2; i_2, j_2, k_2\}$ é o par derivado de \mathcal{C}_1 , temos o seguinte:



isto é, d_2 tem bigrau $(2, -1)$. Mais geralmente, se $\mathcal{C}_r = \{D_r, E_r; i_r, j_r, k_r\}$ é o r -ésimo par derivado de $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1$, temos a seguinte proposição cuja prova resulta imediatamente das definições::

▷ **Proposição 4.3.2 ...**

- (i). i_r tem bigrau $(-1, 1)$, j_r tem bigrau $(r - 1, 1 - r)$ e k_r tem bigrau $(1, 0)$.
- (ii). $d_r = j_r \circ k_r$ tem bigrau $(r, 1 - r)$.
- (iii). $E_r^{p,q} = \text{Ker } d_r^{p,q} / \text{im } d_r^{p-r,q+r-1}$.

Portanto o par exacto bigraduado \mathcal{C} dá origem a uma sucessão espectral $\{E_r^{p,q}, d_r^{p,q}\}_{r=1,2,\dots}$.

4.4 Complexos filtrados

Suponhamos agora que temos um complexo $K = (K^*, d) = \{K^n, d\}$ munido de uma filtração decrescente $\{(F^p K)^*\}_{p=0,1,2,3,\dots}$:

$$K^* = (F^0 K)^* \supseteq (F^1 K)^* \supseteq \dots \supseteq (F^p K)^* \supseteq (F^{p+1} K)^* \supseteq \dots \quad (4.4.1)$$

ou mais detalhadamente:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
 & d & & d & & d & \\
 K^{n+1} & \supseteq & \dots & \supseteq & (F^p K)^{n+1} & \supseteq & (F^{p+1} K)^{n+1} \supseteq \dots \\
 & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
 & d & & d & & d & \\
 K^n & \supseteq & \dots & \supseteq & (F^p K)^n & \supseteq & (F^{p+1} K)^n \supseteq \dots \\
 & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
 & d & & d & & d & \\
 K^{n-1} & \supseteq & \dots & \supseteq & (F^p K)^{n-1} & \supseteq & (F^{p+1} K)^{n-1} \supseteq \dots \\
 & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
 & d & & d & & d &
 \end{array} \quad (4.4.2)$$

Para cada grau de filtração p fixo, temos uma sucessão exacta curta de complexos:

$$0 \longrightarrow (F^{p+1} K)^* \longrightarrow (F^p K)^* \longrightarrow (F^p K)^*/(F^{p+1} K)^* \longrightarrow 0 \quad (4.4.3)$$

e portanto, quando aplicamos o functor de cohomologia, obtemos a correspondente sucessão exacta longa (para cada p fixo):

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & \dots & \longrightarrow & H^{n-1}(F^p K/F^{p+1} K) \\
 & & & & & \nearrow & k \\
 H^n(F^{p+1} K) & \xrightarrow{i} & H^n(F^p K) & \xrightarrow{j} & H^n(F^p K/F^{p+1} K) & & \\
 & & & & & \nearrow & k \\
 H^{n+1}(F^{p+1} K) & \xrightarrow{i} & \dots & & & &
 \end{array} \quad (4.4.4)$$

onde k é o conector. É tradicional neste contexto pôr:

$$n = p + q$$

(p é o grau de filtração e n é o grau total) o que faremos de aqui em diante. Observemos que só existem dois tipos de termos : cohomologia de algum $F^p K$ ou cohomologia de algum quociente $F^p K/F^{p+1}K$. Portanto se definirmos os módulos bigraduados $E_1^{*,*}$ e $D_1^{*,*}$ através de:

$$\begin{aligned} D_1^{p,q} &\stackrel{\text{def}}{=} H^{p+q}(F^p K) \\ E_1^{p,q} &\stackrel{\text{def}}{=} H^{p+q}(F^p K/F^{p+1}K) \end{aligned} \quad (4.4.5)$$

a sucessão exacta longa (4.4.4) escreve-se na forma (pusemos um índice 1 em cada aplicação, para melhor identificação com o que se fez na secção anterior):

$$\begin{array}{ccccccccc} \longrightarrow & & k_1 & \longrightarrow & D_1^{p+1,q-1} & \xrightarrow{i_1} & D_1^{p,q} & \xrightarrow{j_1} & E_1^{p,q} & \xrightarrow{k_1} & D_1^{p+1,q} & \xrightarrow{i_1} & \longrightarrow \\ & & & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \\ \longrightarrow & & k & \longrightarrow & H^{p+q}(F^{p+1}K) & \xrightarrow{i} & H^{p+q}(F^p K) & \xrightarrow{j} & H^{p+q}(F^p K/F^{p+1}K) & \xrightarrow{k} & H^{p+q+1}(F^{p+1}K) & \xrightarrow{i} & \longrightarrow \end{array} \quad (4.4.6)$$

ou ainda sob a forma de um par exacto bigraduado:

$$\begin{array}{ccc} & & (-1, 1) \\ & & \xrightarrow{i_1} \\ D_1^{*,*} & \xrightarrow{\quad} & D_1^{*,*} \\ & \swarrow k_1 & \searrow j_1 \\ & (1, 0) & (0, 0) \\ & & E_1^{*,*} \end{array} \quad (4.4.7)$$

onde $i_1 : D \rightarrow D$ tem bigrau $(-1, 1)$, $j_1 : D \rightarrow E$ tem bigrau $(0, 0)$ e $k_1 : E \rightarrow D$ tem bigrau $(1, 0)$.

O que é d_1 ? Por definição d_1 tem bigrau $(1, 0)$ e obtem-se através da seguinte composição:

$$d_1^{p,q} : E_1^{p,q} \xrightarrow{k_1^{p,q}} D_1^{p+1,q} \xrightarrow{j_1^{p+1,q}} E_1^{p+1,q}$$

ou, atendendo a (4.4.5):

$$d_1^{p,q} : H^{p+q}(F^p K/F^{p+1}K) \xrightarrow{k_1^{p,q}} H^{p+q+1}(F^{p+1}K) \xrightarrow{j_1^{p+1,q}} H^{p+q+1}(F^{p+1}K/F^{p+2}K) \quad (4.4.8)$$

onde $k_1^{p,q}$ é o conector e $j_1^{p+1,q}$ é a aplicação induzida pela projecção natural:

$$F^{p+1}K \rightarrow F^{p+1}K/F^{p+2}K$$

Se H^* é um módulo graduado e filtrado, podemos examinar a filtração em cada grau, pondo $(\Phi^p H)^n = (\Phi^p H)^* \cap H^n$. Portanto o espaço graduado associado à filtração fica bigraduado pondo:

$$E_0^{p,q}(H^*, \Phi) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(\Phi^p H)^{p+q}}{(\Phi^{p+1} H)^{p+q}} \quad (4.4.9)$$

▷ **Definição 4.4.1** ... Diz-se que uma sucessão espectral $\{E_r^{*,*}, d_r\}$ converge para o módulo graduado H^* , se existe uma filtração $\{(\Phi^p H)^*\}_{p=0,1,\dots}$ de H^* tal que:

$$E_\infty^{p,q} \cong E_0^{p,q}(H^*, \Phi) = \frac{(\Phi^p H)^{p+q}}{(\Phi^{p+1} H)^{p+q}} \quad (4.4.10)$$

onde $E_\infty^{*,*}$ é o termo limite da sucessão espectral ◁.

Regressemos ao complexo $K = (K^*, d) = \{K^n, d\}$ munido da filtração decrescente $\{(F^p K)^*\}$ (ver (4.4.1)). Como d preserva a filtração podemos calcular a cohomologia $H^*(F^p K, d)$ da p -coluna no diagrama (4.4.13), e como os diagramas são comutativos, cada inclusão induz uma aplicação em cohomologia $H^*(F^{p+1} K, d) \xrightarrow{i} H^*(F^p K, d)$, o que significa que obtemos uma filtração da cohomologia $H^*(K, d)$, pondo:

$$F^p H(K, d) \stackrel{\text{def}}{=} \text{im} \left(H(F^p K, d) \xrightarrow{i} H(K, d) \right)$$

▷ **Teorema 4.4.1** ... Seja $K = (K^*, d) = \{K^n, d\}$ um complexo munido de uma filtração decrescente $\{(F^p K)^*\}_{p=0,1,2,3,\dots}$:

$$K^* = (F^0 K)^* \supseteq (F^1 K)^* \supseteq \dots \supseteq (F^p K)^* \supseteq (F^{p+1} K)^* \supseteq \dots \quad (4.4.11)$$

Então (K^*, d, F) determina uma sucessão espectral $\{E_r^{*,*}, d_r\}_{r=1,2,\dots}$, com d_r de bigrau $(r, 1 - r)$ e com:

$$E_1^{p,q} \cong H^{p+q}((F^p K)^* / (F^{p+1} K)^*) \quad (4.4.12)$$

Suponhamos além disso que a filtração é limitada, isto é, que, para cada dimensão n , existem valores $s = s(n)$ e $t = t(n)$ tais que:

$$K^n = (F^t K)^n \supseteq (F^{t+1} K)^n \supseteq \dots \supseteq (F^{s-1} K)^n \supseteq (F^s K)^n \supseteq \{0\}$$

Então a sucessão espectral converge para $H(K^*, d)$, isto é:

$$E_\infty^{p,q} \cong E_0^{p,q}(H^*(K, d), F) = \frac{(F^p H(K, d))^{p+q}}{(F^{p+1} H(K, d))^{p+q}}$$

Dem. Retomemos o diagrama (4.4.1) pondo mais uma vez $n = p + q$, onde p é o grau de

e seja $\eta_r^{p,q} : Z_r^{p,q} \rightarrow E_r^{p,q}$ a projecção canónica. Observemos que:

$$d(Z_r^{p,q}) = B_r^{p+r,q-r+1} \subseteq Z_r^{p+r,q-r+1}$$

e ainda que:

$$\begin{aligned} d(Z_{r-1}^{p+1,q-1} + B_{r-1}^{p,q}) &= d(Z_{r-1}^{p+1,q-1}) + d(B_{r-1}^{p,q}) \\ &\subseteq B_{r-1}^{p+r,q-r+1} + 0 \\ &\subseteq Z_{r-1}^{p+r+1,q-r} + B_{r-1}^{p+r,q-r+1} \end{aligned} \quad (4.4.17)$$

Portanto a diferencial, como uma aplicação $d : Z_r^{p,q} \longrightarrow Z_r^{p+r,q-r+1}$, induz um homomorfismo d_r , que torna comutativo o diagrama seguinte:

$$\begin{array}{ccc} Z_r^{p,q} & \xrightarrow{d} & Z_r^{p+r,q-r+1} \\ \eta \downarrow & & \downarrow \eta \\ E_r^{p,q} & \xrightarrow{d_r} & E_r^{p+r,q-r+1} \end{array} \quad (4.4.18)$$

Como $d^2 = 0$ também $d_r^2 = 0$. Para completar a prova resta mostrar o seguinte:

- $H^*(E_r^{*,*}, d_r) \cong E_{r+1}^{*,*}$
- $E_1^{p,q} \cong H^{p+q}(F^p K / F^{p+1} K)$
- $E_\infty^{p,q} \cong \frac{(F^p H(K,d))^{p+q}}{(F^{p+1} H(K,d))^{p+q}}$

o que pode ser visto em [3].

◁.

4.5 Bicomplexos

▷ **Definição 4.5.1** ... Um **bicomplexo** ou **complexo duplo** é um espaço vectorial bigraduado $K = K^{*,*} = \{K^{p,q}\}$ com duas aplicações lineares ∂ e δ de bigraus $(1,0)$ e $(0,1)$ respectivamente, e tais que:

$$\partial^2 = 0 = \delta^2 \quad e \quad \partial\delta + \delta\partial = 0$$

◁.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 \longrightarrow & K^{p-1,q+1} & \xrightarrow{\partial} & K^{p,q+1} & \xrightarrow{\partial} & K^{p+1,q+1} & \longrightarrow \\
 & \uparrow \delta & & \uparrow \delta & & \uparrow \delta & \\
 \longrightarrow & K^{p-1,q} & \xrightarrow{\partial} & K^{p,q} & \xrightarrow{\partial} & K^{p+1,q} & \longrightarrow \\
 & \uparrow \delta & & \uparrow \delta & & \uparrow \delta & \\
 \longrightarrow & K^{p-1,q-1} & \xrightarrow{\partial} & K^{p,q-1} & \xrightarrow{\partial} & K^{p+1,q-1} & \longrightarrow \\
 & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow &
 \end{array} \tag{4.5.1}$$

Note que cada linha e cada coluna é um complexo. Ao bicomplexo $K = K^{*,*} = \{K^{p,q}\}$ associamos um complexo $\text{Tot } K = (\text{Tot } K)^*$, chamado o **complexo total** associado a $K = K^{*,*}$, definido por:

$$(\text{Tot } K)^n \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{p+q=n} K^{p,q} \tag{4.5.2}$$

com a diferencial:

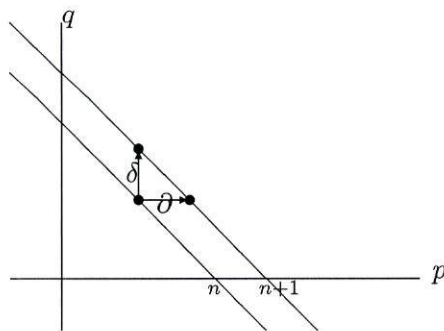
$$d_n : (\text{Tot } K)^n \longrightarrow (\text{Tot } K)^{n+1}$$

dada por:

$$d_n \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{p+q=n} \partial^{p,q} + \delta^{p,q}$$

ou mais sucintamente $d = \partial + \delta$. Portanto $(\text{Tot } K)^n$ é a soma de todos os $K^{p,q}$ situados na linha $p + q = n$. Notemos que, se $p + q = n$, então $\text{im } \partial^{p,q} \subseteq K^{p+1,q}$ e $\text{im } \delta^{p,q} \subseteq K^{p,q+1}$. Portanto, em qualquer dos casos, a soma dos índices é $p + q + 1 = n + 1$ e $\text{im } d_n \subseteq (\text{Tot } K)^{n+1}$. Além disso $d_n^2 = 0$ uma vez que:

$$dd = \oplus (\partial + \delta)(\partial + \delta) = \oplus \partial\partial \oplus (\partial\delta + \delta\partial) \oplus \delta\delta = 0$$



▷ **Exemplo 4.5.1** ... Suponhamos que $K = K^{*,*}$ é um espaço vectorial bigraduado com aplicações d_1, d_2 de bigraus $(1, 0)$ e $(0, 1)$, respectivamente. Se os $d_i, i = 1, 2$ são diferenciais que

comutam, isto é, $d_1 d_1 = 0 = d_2 d_2$ e $d_1 d_2 = d_2 d_1$, então pondo $\partial^{p,q} = d_1^{p,q}$ e $\delta^{p,q} = (-1)^p d_2^{p,q}$, obtemos um bicomplexo (K, ∂, δ) .

De facto, é claro que $\partial\partial = 0 = \delta\delta$. Por outro lado:

$$\begin{aligned} \partial^{p,q+1} \delta^{p,q} &= (-1)^p d_1^{p,q+1} d_2^{p,q} = (-1)^p d_2^{p+1,q} d_1^{p,q} \\ &= (-1)^p (-1)^{p+1} \delta^{p+1,q} \partial^{p,q} = -\delta^{p+1,q} \partial^{p,q} \end{aligned}$$

isto é, $\partial\delta + \delta\partial = 0$, como se pretendia.

▷ **Exemplo 4.5.2** ... Sejam (L^*, d_L) e (M^*, d_M) dois complexos graduados. Podemos então construir um bicomplexo $(K^{*,*}, \partial, \delta)$ pondo:

$$K^{p,q} = L^p \otimes M^q, \quad \partial^{p,q} = d_L^p \otimes \text{Id}^q, \quad \delta^{p,q} = (-1)^p (\text{Id}^p \otimes d_M^q)$$

O complexo $((\text{Tot } K)^*, d)$, associado ao bicomplexo $(K^{*,*}, \partial, \delta)$, diz-se o **produto tensorial** dos complexos (L^*, d_L) e (M^*, d_M) . Portanto:

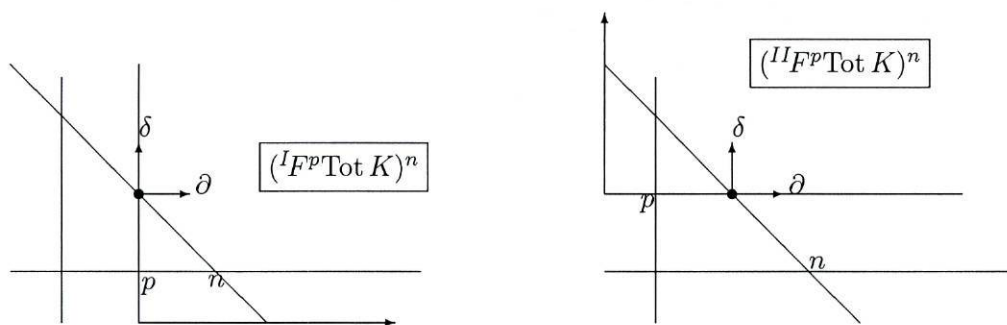
$$(\text{Tot } K)^n = \bigoplus_{p+q=n} L^p \otimes M^q, \quad d_n = \bigoplus_{p+q=n} (d_L^p \otimes \text{Id}^q) + (-1)^p (\text{Id}^p \otimes d_M^q)$$

◁.

Existem duas filtrações naturais de $(\text{Tot } K)^* = \bigoplus_n (\text{Tot } K)^n = \bigoplus_n \bigoplus_{p+q=n} K^{p,q}$: a **filtração por colunas** $({}^I F^p \text{Tot } K)^*$, e a **filtração por linhas** $({}^{II} F^p \text{Tot } K)^*$, definidas respectivamente por:

$$\begin{aligned} ({}^I F^p \text{Tot } K)^n &\stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{i \geq p} K^{i, n-i} \\ ({}^{II} F^p \text{Tot } K)^n &\stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{j \geq p} K^{n-j, j} \end{aligned} \tag{4.5.3}$$

que se ilustram nas figuras seguintes:



Portanto o termo de ordem n de $({}^I F^p \text{Tot } K)^*$ consiste na soma de todos os $K^{p,q}$ situados na recta $p + q = n$ e à direita da linha vertical de abcissa p . Anàlogamente, o termo de ordem n de $({}^{II} F^p \text{Tot } K)^*$ consiste na soma de todos os $K^{p,q}$ situados na recta $p + q = n$ e para cima da linha horizontal de ordenada p . Existe uma confusão possível nas notações que acabamos de usar para a segunda filtração - p designa o primeiro índice, mas estamos a usá-lo para restringir o segundo índice, i.e., o índice p continua a designar o grau de filtração em $({}^I F^p \text{Tot } K)^*$.

É fácil ver que $({}^I F^p \text{Tot } K)^*$ e $({}^{II} F^p \text{Tot } K)^*$ são ambos subcomplexos de $(\text{Tot } K)^*$.

▷ **Lema 4.5.1** ... (i). Se $K^{*,*}$ é um bicomplexo então ambas as filtrações (4.5.3) de $(\text{Tot}K)^*$ são limitas se e só se em cada recta $p + q = n$ existem apenas um número finito de $K^{p,q}$ não triviais ($\neq \{0\}$).

(i). Se $K^{*,*}$ é um bicomplexo de primeiro quadrante, como em (4.5.4), então ambas as filtrações são limitadas.

Dem. (i). Fixemos uma recta $p + q = n$. A filtração ${}^I F$ define-se movendo uma linha vertical para a direita e tomando todos os termos que se situam à sua direita. Se na recta considerada existem apenas um número finito de $K^{p,q}$ não triviais, é possível desenhar uma linha vertical à direita de todos esses $K^{p,q}$ (o que dá o $s(n)$) e uma linha vertical à esquerda de todos esses $K^{p,q}$ (o que dá o $t(n)$). Anàlogamente, a filtração ${}^{II} F$ define-se movendo uma linha horizontal para cima e tomando todos os termos que se situam para cima dela.

(ii). Óbvio pela parte (i). Neste caso $s(n) = -1$ e $t(n) = n$.

◁.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
 & \uparrow \delta & & \uparrow \delta & & \uparrow \delta & \\
 & K^{0,2} & \xrightarrow{\partial} & K^{1,2} & \xrightarrow{\partial} & K^{2,2} & \xrightarrow{\partial} \dots \\
 & \uparrow \delta & & \uparrow \delta & & \uparrow \delta & \\
 & K^{0,1} & \xrightarrow{\partial} & K^{1,1} & \xrightarrow{\partial} & K^{2,1} & \xrightarrow{\partial} \dots \\
 & \uparrow \delta & & \uparrow \delta & & \uparrow \delta & \\
 & K^{0,0} & \xrightarrow{\partial} & K^{1,0} & \xrightarrow{\partial} & K^{2,0} & \xrightarrow{\partial} \dots
 \end{array} \tag{4.5.4}$$

Como calcular $H^*(\text{Tot} K, d)$? Definamos, para cada q fixo, a **cohomologia horizontal da q -linha**, $H_\partial^{*,q}(K)$, através de:

$$H_\partial^{p,q}(K) \stackrel{\text{def}}{=} H^p(K^{*,q}, \partial) = \frac{\text{Ker}(\partial : K^{p,q} \longrightarrow K^{p+1,q})}{\text{im}(\partial : K^{p-1,q} \longrightarrow K^{p,q})} \tag{4.5.5}$$

e anàlogamente, definamos, para cada p fixo, a **cohomologia vertical da p -coluna**, $H_\delta^{p,*}(K)$, através de³:

$$E_1^{p,q} = H_\delta^{p,q}(K) = H^q(K^{p,*}, \delta) = \frac{\text{Ker}(\delta : K^{p,q} \longrightarrow K^{p,q+1})}{\text{im}(\delta : K^{p,q-1} \longrightarrow K^{p,q})} \tag{4.5.6}$$

A condição $\partial\delta + \delta\partial = 0$ implica que a diferencial horizontal ∂ induz uma aplicação:

$$d_1 : E_1^{p,q} \longrightarrow E_1^{p+1,q} \tag{4.5.7}$$

³a notação $E_1^{p,q}$ é usada frequentemente nos outros capítulos.

que é ainda uma diferencial, isto é, $(d_1)^2 = 0$. Por outras palavras, para cada q fixo, $E_1^{*,q} = H_\delta^{*,q}(K)$ é um complexo “horizontal” com diferencial d_1 , induzida por ∂ :

$$\begin{array}{ccccccc}
 E_1^{0,q} & \xrightarrow{d_1} & E_1^{1,q} & \xrightarrow{d_1} & E_1^{2,q} & \xrightarrow{d_1} & \dots \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 E_1^{0,1} & \xrightarrow{d_1} & E_1^{1,1} & \xrightarrow{d_1} & E_1^{2,1} & \xrightarrow{d_1} & \dots \\
 E_1^{0,0} & \xrightarrow{d_1} & E_1^{1,0} & \xrightarrow{d_1} & E_1^{2,0} & \xrightarrow{d_1} & \dots
 \end{array} \tag{4.5.8}$$

Mais concretamente, se α e $\alpha + \delta\beta$, com $\delta\alpha = 0$, representam $[\alpha] \in H_\delta^{p,q}(K) = E_1^{p,q}$, então $\partial\alpha$ e $\partial\alpha + \partial\delta\beta$ estão no núcleo de δ , uma vez que $\delta\partial\alpha = -\partial\delta\alpha = 0$ e $\delta(\partial\alpha + \delta\beta) = 0$, e diferem por elementos na imagem de δ .

Para cada q fixo, consideremos agora a cohomologia do complexo horizontal $(E_1^{*,q}, d_1) = (H_\delta^{*,q}, d_1)$ (ver (4.5.8)):

$$E_2^{p,q} \stackrel{\text{def}}{=} H^p(E_1^{*,q}, d_1) = H^p(H_\delta^{*,q}(K), d_1) \stackrel{\text{def}}{=} H_\partial^{p,q} H_\delta(K) \tag{4.5.9}$$

Existe uma maneira de produzir uma aplicação:

$$d_2 : E_2^{p,q} \longrightarrow E_2^{p+2,q-1} \tag{4.5.10}$$

como a seguir se explica. Seja $[e] \in E_2^{p,q}$ a classe de um cociclo $e \in E_1^{p,q} = H^q(K^{p,*}, \delta)$, isto é, $d_1 e = 0$. Mas este elemento e , é, ele próprio, a classe de algum cociclo vertical, isto é, $e = [\alpha] \in H_\delta^{p,q}(K)$, com $\alpha \in K^{p,q}$ e $\delta\alpha = 0$. A condição $0 = d_1 e = d_1[\alpha] = [\partial\alpha]$, significa que $\partial\alpha$ é um δ -cobordo, isto é, $\partial\alpha = \delta\beta$ para algum $\beta \in K^{p+1,q-1}$.

Podemos pois dizer que um elemento $[e] \in E_2^{p,q}$ é representado por uma soma $\alpha + \beta \in K^{p,q} \oplus K^{p+1,q-1}$ tal que $\partial\alpha = \delta\beta$.

Considremos agora o elemento $\delta\beta \in K^{p+2,q-1}$. As relações anteriores implicam que:

$$\delta\delta\beta = -\partial\delta\beta = -\partial\partial\alpha = 0$$

o que significa que $\partial\beta$ é um cociclo vertical (ou um δ -cociclo) em $K^{p+2,q-1}$ e determina por isso uma classe de cohomologia $[\partial\beta]$ em $H^{q+1}(K^{p+2,*}, \delta) = E_1^{p+2,q-1}$. Calculemos $d_1[\partial\beta]$:

$$d_1[\partial\beta] = [\partial\beta] = [\partial\partial\beta] = 0$$

Concluimos que $[\partial\beta]$ é um d_1 -cociclo e portanto determina um elemento:

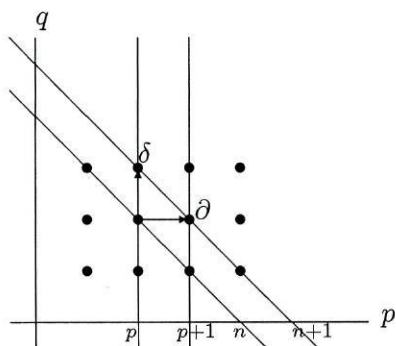
$$[\partial\beta] \stackrel{\text{def}}{=} d_2 e \quad \text{em} \quad E_2^{p+2,q-1} \tag{4.5.11}$$

$$\begin{array}{ccc}
 K^{p,q} & \xrightarrow{\partial} & K^{p+1,q} \\
 & & \uparrow \delta \\
 & & K^{p+1,q-1} \xrightarrow{\partial} K^{p+2,q-1}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 \alpha & \xrightarrow{\partial} & \partial\alpha = \delta\beta \\
 & & \uparrow \delta \\
 & & \beta \xrightarrow{\partial} \partial\beta
 \end{array}$$

Vamos considerar agora a primeira filtração (filtração por colunas) do complexo total $\text{Tot } K$ (omitimos o índice I e representamos ${}^I F^p \text{Tot } K$ simplesmente por F^p). Fixemos n e recordemos que $(F^p \text{Tot } K)^n = \bigoplus_{i \geq p} K^{i, n-i}$. Notemos agora que $(F^p/F^{p+1})^n$ é muito simplesmente $K^{p,q}$, com $p+q=n$:

$$(F^p/F^{p+1})^{p+q} \cong K^{p,q}$$

De facto, $(F^p)^n$ consiste na soma de todos os $K^{p,q}$ situados na recta $p+q=n$ e à direita da linha vertical de abcissa p , enquanto que $(F^{p+1})^n$ consiste na soma de todos os $K^{p,q}$ situados na recta $p+q=n$ e à direita da linha vertical de abcissa $p+1$:

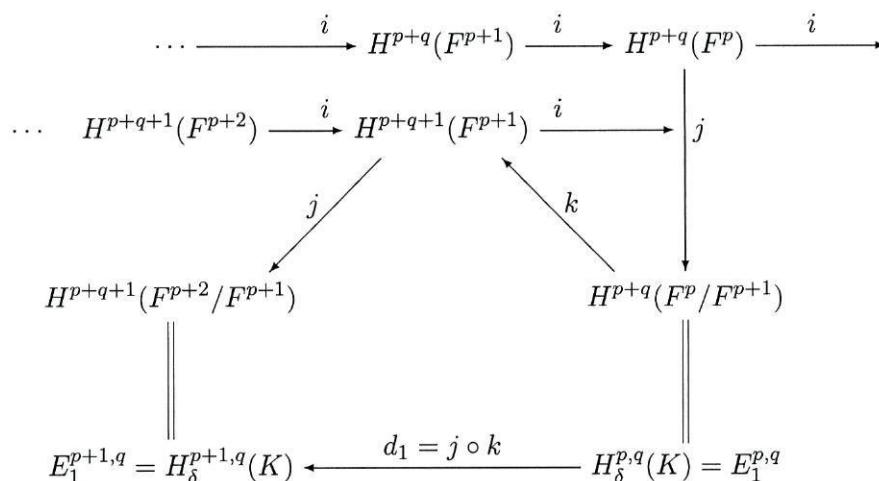


Por outro lado, $d_{p,q}(K^{p,q}) \subset K^{p+1,q} \oplus K^{p,q+1}$, uma vez que apenas $\partial_{p,q}$ e $\delta_{p,q}$ interferem. Mas $K^{p+1,q} \subset F^{p+1}$ e portanto apenas δ sobrevive no quociente F^p/F^{p+1} . Concluindo, F^p/F^{p+1} é a p -coluna com diferencial δ . Portanto, com as notações da secção anterior, temos que:

$$\begin{aligned} {}^I E_1^{p,q} &\stackrel{\text{def}}{=} H^{p+q}(F^p/F^{p+1}, d), && \text{ver (4.4.12)} \\ &= H^q(K^{p,*}, \delta) \\ &= \frac{\text{Ker}(\delta_{p,q} : K^{p,q} \longrightarrow K^{p,q+1})}{\text{im}(\delta_{p,q-1} : K^{p,q-1} \longrightarrow K^{p,q})} \\ &= H_\delta^{p,q}(K) \end{aligned} \tag{4.5.12}$$

Como calcular E_2 ?

Consideremos o diagrama seguinte:



Uma classe em $H^{p+q}(F^p/F^{p+1})$ pode ser escrita como $[\alpha + F^{p+1}]$, com $\alpha \in F^p$ e $d\alpha \in F^{p+1}$, ou alternativamente, como uma classe $[z] \in H_\delta^{p,q}(K)$, com $z \in K^{p,q}$. O conector k envia o elemento $[\alpha + F^{p+1}]$ em $[d\alpha] \in H^{p+q+1}(F^{p+1})$. Tomando z como o representante, isto determina $[\partial z]$ que está em $H^{p+q+1}(F^{p+1})$ uma vez que $\delta z = 0$. O morfismo j associa uma classe em $H^{p+q+1}(F^{p+1})$ ao seu representante mod F^{p+2} . Portanto podemos considerar ∂z como um elemento de $K^{p+1,q}$. Isto implica que $d_1 = j \circ k$ é a aplicação induzida por ∂ em $H_\delta^{p,q}(K) = E_1^{p,q}$, isto é, $d_1 = \tilde{\partial}$ e portanto:

$${}^I E_2^{p,q} = H_\partial^{p,q} H_\delta(K) \quad (4.5.13)$$

Podemos também tomar a segunda filtração por linhas de $\text{Tot}(K)$ e a correspondente sucessão espectral. Reindexando o bicomplexo para o seu transposto, isto é, ${}^t K^{p,q} \stackrel{\text{def}}{=} K^{p,q}$, ${}^t \partial = \delta$ e ${}^t \delta = \partial$ (a que corresponde uma relexão do bicomplexo relativo à linha $p = q$), tem-se que $\text{Tot}({}^t K) = \text{Tot}(K)$ e ${}^{II} F^* \text{Tot}(K) = {}^I F^* \text{Tot}({}^t K)$. Portanto, relativamente a esta segunda filtração, temos que:

$${}^{II} E_1^{p,q} = H_\partial^{p,q}(K) \quad (4.5.14)$$

e:

$${}^{II} E_2^{p,q} = H_\delta^{p,q} H_\partial(K) \quad (4.5.15)$$

Rsumindo toda esta discussão temos finalmente o seguinte:

▷ **Teorema 4.5.1** ... *Dado um bicomplexo $\{K^{*,*}, \partial, \delta\}$, existem duas sucessões espectrais $\{{}^I E_r^{p,q}, {}^I d_r\}$ e $\{{}^{II} E_r^{p,q}, {}^{II} d_r\}$, associadas, respectivamente, às filtrações ${}^I F$ e ${}^{II} F$ de $\text{Tot} K$, tais que:*

$${}^I E_1^{p,q} = H_\delta^{p,q}(K) \quad e \quad {}^{II} E_1^{p,q} = H_\partial^{p,q}(K) \quad (4.5.16)$$

e ainda:

$${}^I E_2^{*,*} \cong H_\partial^{*,*} H_\delta(K) \quad e \quad {}^{II} E_2^{*,*} \cong H_\delta^{*,*} H_\partial(K) \quad (4.5.17)$$

Se o bicomplexo é de primeiro quadrante, ambas as sucessões convergem para $H^(\text{Tot} K, d)$.*

◁.

Bibliography

- [1] Anderson, Ian M., "*Introduction to the variational bicomplex*". Mathematical aspects of classical field theory, Proc. AMS-IMS-SIAM Jt. Summer Res. Conf., Seattle/WA (USA) 1991, Contemp. Math 132, 51-73 (1992)
- [2] Krasil'shchik I.S. and Vinogradov A.M. (eds.), "*Symmetries and Conservation Laws for Differential Equations of Mathematical Physics*." Translations of Mathematical Monographs, Volume 182, A.M.S., 1999.
- [3] McCleary J., "*A user's guide to spectral sequences*." Publish or Perish, 1985.
- [4] Olver P. J., "*Application of Lie Groups to Differential Equations*", 2nd edition, GTM 107, Springer-Verlag, 1993.
- [5] Olver P. J., Review of [2], BAMS 37, 369-373, 2000.
- [6] Tavares J.N. , "*Geometria e Simetrias das Equações Diferenciais*". Curso de Mestrado, ano lectivo de 2000/01, Dep. Matemática Pura, FCUP, 2001.
- [7] Tsujishita Toru, "*Formal Geometry of Systems of Differential Equations*". Sugaku Expo. 3, No.1, 25-73 (1990); translation from Sûgaku 35, No.4, 332-357 (1983).
- [8] Tsujishita Toru, "*Homological method of computing invariants of systems of differential equations*". Differ. Geom. Appl. 1, No.1, 3-34 (1991).
- [9] Tsujishita Toru, "*On Variation Bicomplexes Associated to Differential Equations*". Osaka J. Math. 19, 311-363 (1982).
- [10] Vaisman I., "*Cohomology and DifferentialForms*"., Marcel Dekker, Inc., New York, 1973.
- [11] Vinogradov A.M., "*Cohomological Analysis of Partial Differential Equations and Secondary Calculus*"., Translations of Mathematical Monographs, Volume 204, A.M.S., 2001.
- [12] Vinogradov A.M., "*Local Symmetries and Conservation Laws*", Acta Applicandae Math. 2, 21-80, (1984).
- [13] Vinogradov A.M., "*Symmetries and Conservation Laws of Partial Differential Equations: Basic Notions and Results*", Acta Applicandae Math. 15, 3-21, (1989).