Maria Helena Moreira da Silva Sousa Magalhães

Uma Introdução à Cosmologia

Proposta para a formação de professores do ensino básico e secundário

Dissertação submetida à Faculdade de Ciências da Universidade do Porto para obtenção do grau de Mestre em Ensino da Astronomia

Departamento de Matemática Aplicada

Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

Setembro 2003

Tese orientada por

Doutor Jorge Paulo Maurício de Carvalho

À minha filha

e

aos meus pais

Agradecimentos

Quero expressar a minha gratidão ao Doutor Jorge Paulo Maurício de Carvalho pela ajuda, imensa paciência e atenção que me dedicou o que muito contribuiu para a realização deste trabalho.

Também, quero agradecer aos meus pais por terem feito tudo o que estava ao seu alcance para me ajudarem, assim como à cumplicidade e compreensão que a minha filha sempre me deu.

Não posso esquecer as palavras de apoio, sempre de encorajamento, dadas por alguns colegas e amigos.

E, finalmente agradecer a força dada por um professor muito especial.

"É quase impossível aos seres humanos não acreditarem que existe uma relação especial entre eles e o Universo, que a vida não é apenas o resultado grotesco de uma cadeia de acidentes que chegam até aos três primeiros minutos, mas que, de certo modo, fomos concebidos desde o início."

Steven Weinberg

Resumo

Neste trabalho apresenta-se algumas das noções básicas inerentes ao estudo da cosmologia científica assim como as equações diferenciais que descrevem a cosmologia padrão no âmbito de um Universo em expansão.

Realça-se a importância do conhecimento do valor actual dos parâmetros cosmológicos, no sentido de ajudar a caracterizar o modelo que melhor descreve a evolução do nosso Universo.

Faz-se uma abordagem ao estudo e compreensão dos horizontes cosmológicos estabelecendo claramente a diferença entre eles.

Sucintamente são apresentados alguns modelos cosmológicos com interesse histórico e pedagógico.

Abstract

In this work some basic notions concerning scientific cosmology are presented as well as differentials equations which describe the cosmology models regarding Universe in expansion.

This importance of the knowledge of the actual cosmological parameters is emphasized in order to help characterize the model which describes the evolution of our Universe.

This work presents an approach to the study and comprehension of the cosmological horizons establishing a clear difference between them.

Therefore some cosmological models, which have some historic and pedagogical interest are briefly presented.

Résumé

Dans ce travail on présent quelques notions basiques inhérentes à l'étude de la cosmologique scientifique ainsi que les équations différentielles qui décrivent la cosmologie modèle dans le contexte d'un Univers en expansion.

On relève l'importance de la connaissance de la valeur actuelle des paramètres cosmologiques pour aider a caractériser le modèle que mieux décrit l'évolution de notre Univers.

On fait une abordage à l'étude et compréhension des horizons cosmologiques en établissant clairement la différence entre eux.

Succinctement on présente quelques modèles cosmologiques avec intérêt historique et pédagogique.

Objectivos e Relevância do Tema da Dissertação

O objectivo da cosmologia científica é a criação de modelos que permitam descrever a evolução global do Universo em que vivemos, e que pensamos estar em expansão. É neste contexto que o presente trabalho se insere.

Olhando para trás no tempo e para objectos no espaço, não observamos as galáxias a afastarem-se até distancias infinitas num passado infinito. O que observamos são objectos que se encontram localizados no interior do Universo observável, isto é, que se encontram a distancias finitas, o que é em geral uma parte de todo o Universo. Estamos situados no centro do nosso universo observável, tendo como fronteira um horizonte. Para além deste horizonte encontram-se os objectos não observáveis. Os observadores de outras galáxias estarão no centro dos seus universos observáveis, que terão os seus próprios horizontes e fronteiras.

Assim, o conhecimento da história passada, bem como a previsão da evolução futura de cada modelo de universo só é possível tendo acesso aos acontecimentos que ocorrem no interior desses limites observáveis que constituem barreiras efectivas para a transmissão de informação – os denominados ***horizontes cosmológicos***. Do ponto de vista científico não especulativo, só faz sentido tentar descrever o que é possível observar, e daí decorre naturalmente a importância do estudo da evolução dos horizontes cosmológicos,

No entanto este assunto não havia sido tratado de uma forma "responsável", sendo mesmo um tema bastante confuso, até 1956, altura em que o trabalho de Wofgang Rindler permitiu, por um lado, clarificar alguns conceitos nesta área, e por outro, que se pudesse dar aos horizontes cosmológicos a importância que de facto eles têm na cosmologia moderna. Assim, este trabalho, para além de apresentar as noções que é comum encontrar em livros de cosmologia de carácter introdutório, pretende abordar igualmente alguns conceitos associados aos horizontes cosmológicos, conceitos esses tantas vezes esquecidos, ou atirados para segundo plano, em textos sobre cosmologia.

Atendendo ao enquadramento do trabalho, realizado no âmbito de um mestrado em ensino, pretendo que ele seja acessível, e que possa constituir um apoio efectivo, a professores do ensino básico e secundário. Para atingir estes objectivos são apresentadas algumas das noções básicas inerentes ao estudo da cosmologia, e obtidas as equações que descrevem a cosmologia padrão no âmbito de um Universo em expansão, tentando evidenciar a importância deste estudo. Penso que este trabalho poderá ser igualmente útil como complemento, ou mesmo como guião, no sentido de proporcionar uma melhor formação desses mesmos professores na área da cosmologia.

Por outro lado pretende-se que esta dissertação possa servir de motivação para o estudo de alguns dos assuntos previstos no "Esquema Programático" da disciplina de Física do 12° ano, contemplando por exemplo os princípios de relatividade de Galileu e de Einstein e a lei de gravitação universal Newtoniana, ou os conceitos de interacção gravitacional e campo gravitacional. Para cumprir este objectivo deverá ser dada relevância, por exemplo, ao facto de ser a interacção gravitacional a principal responsável pela evolução temporal de um modelo de universo, bem como pelo comportamento dos horizontes cosmológicos.

Este projecto pode ainda ser útil para uma abordagem à evolução histórica dos modelos de Universo. Como tal, deverá ser realçada a importância das observações na construção desses modelos, sublinhando que tanto o *modelo geocêntrico*, como o *modelo heliocêntrico* do Sistema Solar foram na realidade modelos cosmológicos, atendendo a que, quer um quer outro, pretenderam descrever a evolução do Universo que era possível observar. Na verdade, o conceito de Universo não era, no passado, muito distinto do actual, a forma de o descrever, isto é, a construção dos modelos, essa sim sofreu uma enorme evolução, que se deve ao facto do Universo observado depender da época considerada. A razão para esta dependência não se deve ao facto de os horizontes (tal como definimos hoje) serem distintos, mas porque a tecnologia posta à disposição dos observadores não é a mesma em épocas diferentes.

Por fim, convém referir que, no âmbito da disciplina da Matemática, o trabalho proposto pode igualmente servir para ilustrar a importância da utilização das "ferramentas" matemáticas no tratamento deste tipo de problemas.

Índice

Estrutura da dissertação 1

Capítulo I – Um Universo em Expansão **4**

I.1 - Introdução: Um pouco de História 5
I.2 - A expansão do Universo 11
I.2.1 - O Princípio Cosmológico 13
I.2.2 - A lei de Hubble 15
I.2.3 - O efeito de Doppler 20
I.2.4 - Coordenadas co-móveis 26
I.2.5 - A esfera de Hubble 29

Capítulo II – Cosmologia Newtoniana - As Equações **31**

II.1 - O formalismo newtoniano 32
II.2 - Utilização da 2ª lei de Newton 35
II.3 - Utilização da lei de conservação de energia 40
II.4 – Comportamento da densidade 48
II.4.1 – Caso de um universo apenas com matéria 50
II.4.2 – Caso de um universo apenas com radiação 51

Capítulo III – Parâmetros Cosmológicos **53**

III.1 - A densidade crítica 54
III.2 - Parâmetro de densidade 57
III.3 - Parâmetro de desaceleração 60
III.4 - Os parâmetros de desaceleração e de densidade 61
III.4.1 - Época dominada pela matéria 61
III.4.2 - Época dominada pela radiação 63
III.5 - Introdução da Constante Cosmológica nas equações 65
III. 5.1 – O Universo de Einstein 66
III.5.2 – Equações necessárias, para tratamento numérico , com constante Cosmológica 67
III.5.3 – Expressões gerais para os diversos parâmetros 69
III.5.3.1 – O parâmetro de densidade 73
III.5.3.2 – O parâmetro de desaceleração 76
III.5.3.2.1 – Universo com matéria e constante cosmológica 77
III.5.3.2.2 – Universo com radiação e constante cosmológica 78
III.5.3.2.3 – Universo com matéria e radiação e uma constante cosmológica 80
III.5.3.3 – A equação de Friedmann em função dos parâmetros observáveis para modelos com $\Lambda \neq 0$ 82

III.5.3.4 – Modelos acelerados em função de modelos desacelerados 84
III.5.3.5 – Casos particulares 86
III.5.3.5.1 – Modelos com $\Lambda < 0$ 86
III.5.3.5.2 – Modelos com $\Lambda > 0$ 87
III.5.3.5.3 – Modelos com $\Lambda > 0$ e $k = -1$ ou $k = 0$ 88
Capítulo IV – Algumas Noções de Relatividade Restrita **90**

IV.1 - Diagramas de espaço-tempo 91
IV.2 - Transformações de Lorentz 93
IV.3 - Noção de intervalo em Relatividade Restrita 96
IV.3.1 - Intervalo Tipo Espaço 96
IV.3.2 - Intervalo Tipo Tempo 97
IV.3.3 - Intervalo Tipo Luz 98
IV.4 - Cones de luz 99

Capítulo V – Horizontes Cosmológicos **105**

V.1 – Introdução 106
V.2 - Horizonte de partícula 109
V.2.1 O horizonte de partícula num universo newtoniano 111
V.3 - Horizonte de acontecimentos 115

Capítulo VI – Modelos Cosmológicos **117**

VI.1 - Modelo de Friedmann 118
VI.1.1 - Universo fechado 121
VI.1.2 - Universo aberto 124
VI.1.3 - Universo plano 125
VI.1.4 – Será o universo de Friedmann aberto ou fechado? 128
VI.2 - Alguns Modelos com Interesse Histórico e Pedagógico 133
VI.2.1 Universos estáticos 133
VI.2.1.1 Universo de Einstein 133
VI.2.1.2 O último universo de estado estático e estacionário 136
VI.2.2 Universos dinâmicos 139
VI.2.2.1 Universo de expansão linear 139
VI.2.2.2 Universo de De Sitter 142
VI.2.2.3 Universo de Lemaître 145
VI.2.2.4 Universo de Eddington 148
VI.2.2.5 Universo oscilante 150

Capítulo VII–Exercícios propostos **152**

VII.1- Temas e características gerais dos programas do 3º Ciclo 153
VII.1.1 7 ºAno de Escolaridade 154
VII.1.1.1 Banco de Questões 156
VII.1.2 8º Ano de Escolaridade 163
VII.1.2.1. Banco de Questões 165

VII.1.3 12 ° Ano de Escolaridade 169
VII.1.3.1 Banco de Questões 170

Conclusão **174**

Referências Bibliográficas **175**

Endereços Internet **176**

Estrutura da dissertação

Este trabalho encontra-se estruturado da forma que passo a apresentar:

No Capítulo I começamos por mostrar como os mitos antigos, a filosofia e a teologia forneceram alguns modelos que tentaram satisfazer a sempre presente curiosidade das pessoas em saberem como começou o mundo e como terminará. Em seguida é dada uma ênfase particular ao trabalho de Edwin Hubble e ao seu enorme contributo para o estabelecimento da lei de expansão do Universo, com base em evidências observacionais sólidas. São apresentados alguns conceitos básicos associados ao estudo dos modelos de universo em expansão, como são, por exemplo, o princípio cosmológico, as coordenadas co-móveis, ou a esfera de Hubble

No Capítulo II começamos por discutir a validade de uma abordagem newtoniana, isto é, da aplicabilidade do formalismo, e resultados, da teoria da gravitação Newtoniana a todo o Universo, mesmo que infinito, invocando o teorema de Birkhoff. Em seguida são então obtidas as equações diferenciais que descrevem os modelos de universo construidos com base no princípio cosmológico.

No Capítulo III são definidos os chamados parâmetros cosmológicos. Atendendo a que o parâmetro de Hubble havia sido já anteriormente definido no Capítulo I, começamos por definir densidade crítica, ou seja, a densidade num modelo plano, ou de curvatura nula. Sendo em seguida definidos o parâmetro de densidade e o parâmetro de desaceleração, bem como a relação que se pode estabelecer entre eles em duas épocas distintas da evolução do universo: a época da matéria e a época da radiação. De notar que é realçada a importância do conhecimento do valor actual dos parâmetros cosmológicos, no sentido de ajudar a caracterizar o modelo que melhor descreve a evolução do nosso Universo.

O Capítulo IV serve para apresentar algumas noções necessárias ao estudo e compreensão dos horizontes cosmológicos. Como a cosmologia estuda a natureza do

Universo no espaço-tempo revela-se muito útil o recurso à utilização de diagramas de espaço-tempo, sobretudo para ilustrar alguns conceitos que possam ser menos intuitivos. São definidos os conceitos de acontecimento e de linha de universo de uma partícula, e é feita uma introdução sumária às transformações de Lorentz. É definido o conceito de intervalo entre acontecimentos, bem como o de cone de luz de um observador.

O Capítulo V é inteiramente dedicado à apresentação dos horizontes cosmológicos, começando por definir horizonte de partícula e horizonte de acontecimentos, estabelecendo claramente a diferença entre ambos. Os conceitos associados ao comportamento do horizonte de partícula são apresentados utilizando o modelo cosmológico mais simples possível que é o de um universo estático, obedecendo no entanto ao princípio cosmológico de homogeneidade e isotropia espacial. Apesar do comportamento quantitativo do horizonte de partícula depender do modelo cosmológico adoptado, as noções básicas associadas ao seu comportamento qualitativo podem perfeitamente ser introduzidas, sem perda de generalidade, utilizando este modelo simples.

O Capítulo VI são apresentados sucintamente alguns modelos cosmológicos. A notar o facto de que os modelos construídos pelos cosmólogos não são mais do que meras descrições físico-matemáticas que tentam explicar o comportamento dinâmico do Universo, desde os tempos mais remotos até à época actual, e efectuar igualmente previsões de como o Universo se poderá comportar no futuro. Como é natural começamos por apresentar as características gerais dos modelos cosmológicos de Friedmann, dando especial relevo ao modelo plano de Einstein-de Sitter, discutindo ainda a questão de saber se o nosso Universo é aberto ou fechado. Terminamos este capítulo referindo algumas características gerais de alguns modelos que apesar de não serem considerados actualmente uma boa descrição do nosso Universo, possuem um inegável interesse histórico e pedagógico, podendo contribuir para uma reflexão mais profunda sobre algumas questões cosmológicas.

Finalmente no Capítulo VII apresentam-se objectivos pedagógicos e aplicações directas ao ensino básico e secundário. Para melhor sedimentar e testar a aquisição dos conhecimentos de acordo com os conteúdos programáticos são propostos exercícios de

aplicação no âmbito da disciplina de Ciências Físico-Químicas (7º e 8º anos de escolaridade – novos programas) e da disciplina de Física do 12º ano.

CAPÍTULO I

Um Universo em Expansão

I.1 Introdução: um pouco de História

Cerca de 270 anos a. C. o astrónomo grego Aristarco de Samos admitiu que a Terra girava em torno do seu eixo e tinha movimento anual de translacção em torno do Sol. Tal ideia era filosoficamente inaceitável na época e, foi abandonada. De entre todos os outros modelos criados, o de maior sucesso foi o modelo de Ptolomeu, desenvolvido em meados do século II D.C.. Tendo como característica a Terra no centro do Sistema Solar, era, como todos os outros nesta época, um *modelo geocêntrico*. O universo de Ptolomeu não é mais do que um modelo de Aristóteles alterado e desenvolvido por forma a melhor podere explicar as observações astronómicas. Estes modelos eram quase unânimamente aceites. A contribuição de Ptolomeu para a evolução dos modelos de Aristóteles foi sobretudo no aspecto "técnico", com a introdução dos epiciclos.

Podemos dizer que os *precursores da Cosmologia Moderna*, que nega em absoluto qualquer ideia de antropocentrismo no espaço, foram *Nicolau Copérnico* (1473 -1543), *Tycho Brahe* (1546 – 1601), *Johannes Kepler* (1571 – 1630), *Galileu Galilei* (1564 – 1642) *e Isaac Newton* (1642 -1727).

Copérnico sugeriu um modelo estrutural para o Sistema Solar em que o Sol passava a ocupar a posição central do sistema e que o movimento de todos os planetas seria efectuado em torno do Sol e não da Terra. Este modelo era denominado por *modelo heliocêntrico.* A ideia do heliocêntrismo já tinha sido proposta por Aristarco no século III a.C.

As leis empíricas que descrevem o movimento dos planetas para norte e para sul da eclíptica seriam mais tarde obtidas por *Kepler.* Elas não são mais do que simples consequência do facto das órbitas dos planetas estarem em planos

inclinados relativamente ao plano da órbita da Terra. Foram três as leis estabelecidas por Kepler:

- 1ª Lei de Kepler ou Lei das Órbitas – os planetas descrevem órbitas elípticas em torno do Sol, ocupando este um dos seus focos.
- 2ª Lei de Kepler ou Lei das Áreas – as áreas varridas pelo vector posição de um planeta, em relação ao Sol, são iguais para intervalos de tempo iguais.

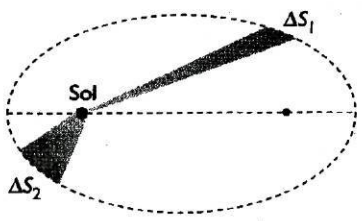


Figura I.1: 1ª e 2ª Leis de Kepler

- 3° Lei de Kepler ou Lei dos Períodos – o quadrado do período de revolução de um planeta em torno do Sol é directamente proporcional ao cubo da distância que os separa.

$$\frac{T^2}{r^3} = k \qquad \text{(I.1)}$$

As leis de Kepler sobre as trajectórias dos planetas forneceram os conceitos astronómicos que foram essenciais para o posterior nascimento do Universo Newtoniano.

Galileu, ao efectuar as primeiras observações telescópicas, contribuiu decisivamente para a afirmação do modelo de Copérnico. Por fim, Newton deduziu a lei fundamental que regia todos os movimentos celestes, a lei da

Gravitação Universal, que em conjunto com a 2° lei de Newton (F = m.a) serão utilizadas neste trabalho para obter a equação de Friedmann, que descreve a evolução dinâmica do Universo de acordo com o modelo cosmológico padrão.
Apesar de Einstein ter mostrado mais tarde que a dinâmica newtoniana estava incompleta, ela continua a ser válida e perfeitamente aceitável na grande maioria dos casos.

O aparecimento da Cosmologia como ciência assente em bases sólidas, resultantes da utilização de tecnologia cada vez mais sofisticada, apenas se verificou depois da segunda década do séc. xx, quando passou a ser possível medir as distâncias a diversas galáxias que habitam o Universo. A partir de então foi possível construir modelos que descrevessem de uma forma mais aceitável a estrutura e a evolução do Universo.

A cosmologia dos nossos dias é vista como uma ciência moderna. No entanto o pensamento cosmológico tem sido uma componente importante no desenvolvimento da civilização humana ao longo de toda a sua história. Por isso, para além do carácter científico da cosmologia actual teremos que considerar igualmente o seu carácter filosófico.

Podemos separar o desenvolvimento histórico e dialéctico da Cosmologia em três períodos: o *Período Antigo*, o *Período Clássico* e o *Período Moderno*.

O Período Antigo, de Platão (428 - 348 a.C.) a Descartes (1596 - 1650), é caracterizado pela especulação de dois problemas: a origem e a evolução primordial da natureza ou do Cosmos. Neste período a cosmologia foi sempre considerada como parte integrante ou da astronomia ou da física descritiva. Antes de Platão, as soluções encontradas eram sempre de carácter mitológico ou tinham uma forte componente mitológica.

Dos primeiros fisicos gregos pouco sabemos, porque até nós apenas chegaram alguns fragmentos dos seus tratados da Natureza, ainda que possamos sempre socorrer-nos das citações e crítica de pensadores posteriores, sobretudo Aristóteles. Uns são monistas: a natureza deriva de uma só origem ou princípio. Para Tales, por exemplo, é a água, para Anaximandro é o indeterminado, para Heraclito é o fogo, para Parmenides e Zenão é o ser finito e uno, no entanto para Melisso é o ser infinito. Estávamos perante duas antinomias: o ser é uno e múltiplo; o ser é permanente e mutável! Outros são pluralistas: a natureza das coisas é formada por vários princípios de ser. A Escola Pitagórica define-a pelos conceitos de número infinito de átomos homogéneos, eternos e indivisíveis; o não ser é o vazio ou espaço absoluto. Por outro lado, Platão faz a dedução geométrica do Universo e dos corpos, mas também cai no erro do parapsiquismo mítico.

Quanto à cosmologia, Aristóteles oferece-nos uma cosmologia estática. Este filósofo grego, que viveu no séc. IV a. C. admitia que o mundo estava dividido em dois grandes domínios. O que está "abaixo da Lua" (região sublunar) está sujeito à mudança: o ferro enferruja, as montanhas sofrem erosão, a madeira apodrece. O que está "acima da Lua" (supralunar) é inalterável e imperecível. Nada muda. Sem serem criadas, e eternas, as estrelas oferecem a imagem da permanência do cosmos. Todos os anos as constelações retomam fielmente as suas posições no céu. O universo existiu e existirá sempre, eternamente semelhante a si mesmo. O universo eterno e estático de Aristóteles foi durante muito tempo um paradigma do pensamento filosófico e científico.

As cosmologias posteriores reflectem os sistemas aristotélicos ou platónicos. O movimento renascentista, os filósofos do séc. XVI e a revolução intelectual, cultural e científica, de Copérnico, Kepler e Galileu puseram em crise a cosmologia antiga.

O **Período Clássico** começa com Descartes e prolonga-se até Einstein. Este período é caracterizado por novas problemáticas da astronomia e da física. A cosmologia é a ciência da dedução geométrica e da mecânica. Para além de problemas de carácter puramente físico, Newton debruça-se igualmente sobre questões de carácter filosófico. A sua obra-prima "Philosophiae Naturalis Principia Mathematica" (1687), é uma reflexão profunda sobre os princípios da dinâmica e os conceitos de espaço e tempo absolutos.
Com Leibniz, a cosmologia continua a ser uma ciência de dedução geométrica, mas dinâmica, onde um corpo é um sistema de pontos inextensos, átomos de energia ou formas infinitesimais que reflectem, como um espelho , todo o Universo.

O **Período Moderno,** de Einstein até aos nossos dias, caracteriza-se pela análise do conhecimento científico e lógico dos axiomas e conceitos. Devem-se a Einstein os meios para que a ciência pudesse começar a construir uma "moderna teoria do universo". Utilizando o diálogo entre a observação e os conceitos matemáticos, os cosmólogos começaram a poder interrogar e a sondar de uma forma mais profunda a Natureza e a estrutura do cosmos.

É neste período que se conclui que o universo não é estático, como até então se admitia. São obtidas fortes evidências observacionais de que o Universo se encontra em expansão, sendo por isso uma entidade em evolução, onde se consideram como elementos organizadores as interacções físicas regidas por leis precisas e universais.

Einstein, com as suas reflexões profundas e rigorosas sobre os conceitos de espaço e de tempo abriu as portas a novas soluções para eternos problemas cosmológicas. O universo eterno e estático com raízes profundas no pensamento aristotélico, e que durante mais de dois milénios havia sido um paradigma do pensamento filosófico e científico é abandonado.

O modelo actualmente mais bem aceite, conhecido como o modelo do "Big Bang", ou modelo da "Criação Primordial", foi pela primeira vez proposto em 1927 por um padre e cosmólogo belga, Georges Lemaître. Na sua versão inicial, este modelo postula a existência de um "átomo" primordial, onde se encontrava condensada toda a matéria existente no Universo. A explosão desse "átomo", ocorrido no próprio momento da criação, corresponde ao início do tempo. A matéria lançada no espaço acaba por dar origem às galáxias que se afastam umas das outras com uma velocidade de recessão proporcional à distância que as separa, conforme confirmam as observações. O Universo teria tido a sua origem nestas condições, sendo que a sua evolução se faria num sentido determinado.

Mais tarde, em alternativa ao modelo evolucionista do "Big Bang", surgiu um modelo de características essencialmente diferentes. É o denominado modelo de "Criação Contínua" e que é uma criação do astrónomo inglês Fred Hoyle. Segundo este modelo o Universo existiu sempre e, no essencial, não evolui. A matéria é continuamente criada no espaço à custa da energia radiada pelas estrelas. Os átomos que se criam vão formar as galáxias que, pela acção de uma força actuando em sentido contrário à gravitação, se afastam umas das outras. De acordo com este modelo não houve início para o tempo, e o momento que agora decorre não tem qualquer significado especial. Este é um modelo que conta actualmente com muito poucos seguidores na comunidade cosmológica internacional já que existem dados de observação claros que parecem colocar este modelo numa posição bastante desconfortável.

A descoberta da radiação cósmica de fundo parece não encontrar explicação à luz deste modelo, por outro lado, também a descoberta dos "quasars" parece contrariar determinadas conclusões do modelo da "Criação Contínua".

I.2 A Expansão do Universo

Quando se fala na descoberta da expansão do Universo o nome de Edwin Powell Hubble (1889-1953) é sempre o primeiro a vir-nos à memória. Não é pois de estranhar que seja este um dos nomes que mais destaque merece entre os grandes astrónomos do sec. XX, podendo mesmo ser considerado como o maior astrónomo desde Copérnico. A sua maior contribuição para a cosmologia foi naturalmente o estabelecimento, assente em evidências observacionais sólidas, da lei de expansão do universo. No entanto convém igualmente não esquecer o seu importante trabalho na área da astronomia extragaláctica, descobrindo uma grande quantidade de galáxias, e criando em seguida um sistema simples de classificação das mesmas.

No entanto outros cientistas houve que deram um contributo importante para a descoberta da expansão do Universo, e que por isso mesmo devem ser referidos neste contexto. É o caso, por exemplo, de Vesto Melvin Slipher e de Henrietta Leavitt. Slipher porque foi o primeiro a fazer um estudo sistemático dos espectros das nebulosas espirais, que permitia conhecer a velocidade dessas nebulosas relativamente à nossa posição, à luz da interpretação dada pelo efeito de Doppler (ver a secção sobre este efeito mais à frente). Leavitt porque os seus trabalhos sobre as estrelas variáveis cefeides permitiria mais tarde determinar, com um rigor até aí impossível, as distâncias a que se encontravam as nebulosas observadas, desde que nelas fossem identificadas estrelas deste tipo.

À medida que se determinavam as distâncias às galáxias observadas verificava-se que na sua grande maioria elas apresentavam um deslocamento das riscas espectrais em direcção ao vermelho. Esse deslocamento, interpretado inicialmente como resultado do denominado efeito de Doppler, correspondia a um movimento de afastamento dessas galáxias, em relação à posição que a nossa Galáxia ocupa no espaço.

Verificou-se ainda que a velocidade de afastamento de uma dada galáxia era proporcional à distância a que essa galáxia se encontra de nós. À primeira vista poderia parecer que ocupamos uma posição especial no Universo, posição essa, a partir da qual todas as galáxias exteriores se afastam, o que não é exactamente verdade. É o próprio espaço que se dilata e, seja qual for a galáxia que se considere, em relação a ela todas as outras mostrarão um movimento de afastamento ou recessão.

A descoberta da expansão do Universo, em conjunto com o Princípio Cosmológico, de que falámos anteriormente, conduziu à construção e desenvolvimento de um modelo cosmológico, conhecido como o modelo do "Big Bang", que possui o apoio da maioria dos cosmólogos e astrofísicos, acreditando estes, poder adequá-lo de modo a incorporar novas contribuições que vão sendo descobertas.

Posteriormente, com o apoio dos importantes desenvolvimentos efectuados nas técnicas utilizadas para a obtenção dos valores das distâncias que haviam sido determinadas anteriormente, os modelos que iam sendo construídos tinham um rigor cada vez maior. Mas esses desenvolvimentos técnicos não vieram alterar os conceitos cosmológicos que haviam já sido estabelecidos. Pelo contrário, reforçaram esses conceitos dando ainda mais rigor aos modelos.

I.2.1 O Princípio Cosmológico

Como dissemos já, a cosmologia científica é a área do conhecimento que procura descrever a evolução do *Universo* como um todo. A partir de conjuntos de observações astronómicas a cosmologia cria modelos teóricos que se acredita serem importantes na descrição dos fenómenos cósmicos. Os *modelos cosmológicos ou modelos de universo* são representações teóricas do Universo, isto é, são modelos matemáticos baseados em teorias físicas.

Por outro lado a cosmologia estuda também grupos de objectos nos quais as leis físicas tenham significado e possam ser aplicadas de maneira consistente e bem sucedida. Fazem parte desse grupo de objectos as galáxias, quasares, enxames e super enxames de galáxias, etc.

Na construção de modelos cosmológicos, tal como em modelos noutras áreas, adoptam-se alguns princípios simples com o objectivo de facilitar o tratamento dos problemas.

O Universo é sempre apresentado, em todos os modelos antigos do cosmos, tanto no Ocidente como no Oriente, como tendo um centro. O universo geocentrista de Ptolomeu tinha o seu centro na Terra, e quando foi substituído pelo modelo heliocêntrico, o centro manteve-se, embora a Terra tenha sido substituída nessa posição pelo Sol. Um dos pontos de partida da cosmologia moderna é precisamente o conceito de que o Universo não tem centro. Não existe no Universo qualquer ponto privilegiado, todas as posições têm igual importância. Esta conclusão fundamental para a existência de uma cosmologia científica, traduz o chamado *Princípio Cosmológico*, também muitas vezes designado por *Princípio de Copérnico*, e que pode ser enunciado da seguinte forma:

"em cada época o universo não muda de ponto para ponto, isto é, apresenta o mesmo aspecto em cada posição, exceptuando as irregularidades locais."

Este princípio foi proposto originalmente por Einstein inspirado pelo físico alemão Ernst Mach, mas que tem as suas raízes no trabalho pioneiro do filósofo Immanuel Kant. De facto, no seu livro *História Geral da Natureza e Teoria dos Céus*, publicado em 1755, Kant, alimentado pela especulação pura, e pelas influências que recebera do trabalho do inglês Thomas Wright, sugere que nós vivemos numa zona perfeitamente típica e comum do Universo, que o Sol é uma estrela igualmente comum, e que a nossa própria galáxia, a Via Láctea, mais não é que uma entre muitas, sendo que, todas as nébulas que os astrónomos então viam no céu eram outras galáxias[1]. Uma das implicações directas do Princípio Cosmológico é a isotropia e homogeneidade do Universo a grande escala. De facto se num determinado instante não existem pontos privilegiados, o universo é homogéneo, isto é, as quantidades cósmicas não dependerão da posição mas somente do tempo. Por outro lado, para além da inexistência de pontos privilegiados, este princípio requer a não existência de direcções privilegiadas em redor de cada ponto. Chega-se, assim, à conclusão que o universo além de homogéneo é também isotrópico.

É este Princípio Cosmológico que actualmente é mais utilizado em cosmologia. Com base na essência do princípio cosmológico, a homogeneidade e isotropia espacial, conclui-se que a distribuição dos objectos que constitui o fluído cosmológico deve ser esfericamente simétrica em volta de qualquer ponto.

---

[1] Wright publicara cinco anos antes um livro chamado "Uma Teoria Original ou Nova Hipótese do Universo", onde explicava que a Via Láctea, tal como a observamos no céu, seria o resultado do movimento em torno de um centro de todas as estrelas que a constituem, movimento esse que, à semelhança do movimento dos planetas em torno do Sol, ocorre num plano preferencial. Aquilo que nós chamamos Via Láctea, chamou Wright "Criação", e nessa Criação, o Sol não era mais que uma estrela que rodava, como todas as outras, em torno de um ponto central.

I.2.2 A Lei de Hubble

Em 1914 Slipher descobriu que as linhas espectrais das estrelas na galáxia M31 mostravam um grande deslocamento para o azul, região do espectro de menores comprimentos de onda, indicando que esta galáxia estava a aproximar-se do sol, a uma velocidade de cerca de 300 km/s.

Durante quase duas décadas Slipher desenvolveu um trabalho incessante, e em 1925 tinha já estudado os espectros de 45 nebulosas espirais, nome como eram conhecidas na altura as galáxias espirais. Concluiu que a sua grande maioria, cerca de 90%, apresentava um deslocamento espectral para o vermelho, indicando o seu afastamento de nós, contrariamente ao observado para a galáxia M31, a galáxia de Andrómeda. Na verdade, das 41 nebulosas estudadas, 36 apresentavam desvios para o vermelho, e apenas 5 (incluindo Andrómeda) se aproximavam da Terra.

Slipher concluiu ainda que quanto menos brilhante era a galáxia, isto é, quanto mais distante ela estava, maior era o deslocamento para o vermelho no seu espectro. A velocidade dessas nebulosas era muito alta, em média mais de 20 vezes as velocidades típicas encontradas para as estrelas.

Entretanto já Henrietta Leavitt havia levado a cabo um estudo exaustivo de análise de chapas fotográficas. Durante esse estudo identificou cerca de 2400 estrelas variáveis, sendo que 25 delas eram cefeides que se encontravam nas nuvens de Magalhães. À medida que ía tomando notas acerca do período e luminosidade aparente dessas cefeides verificou que havia um padrão que se repetia, isto é, concluiu que existia uma correlação entre o período de variabilidade da estrela, que podia variar de alguns dias até algumas semanas, e a sua luminosidade. Essa relação indicava que quanto maior fosse a luminosidade, mais lentamente decorria o seu ciclo de variação. Leavitt

concluiu, por exemplo, que uma cefeide de uma das nuvens de Magalhães que tivesse um período de três dias era cerca de seis vezes menos brilhante que uma outra cefeide com um período de trinta dias.

Esta conclusão era de grande importância, já que a luminosidade aparente de uma estrela depende da sua luminosidade absoluta, mas também da distância a que se encontra de nós, e portanto o conhecimento do ciclo de variação de uma cefeide[2] poderia conduzir à determinação da distância a que se encontrava a nebulosa onde fosse observada a cefeide. Ou seja, como a intensidade da luz diminui com o inverso do quadrado da distância, podemos determinar a distância de uma estrela cefeide medindo a sua luminosidade aparente e estimando a sua luminosidade absoluta através da observação do período de variabilidade.

Em 1929, Hubble aplicou o método das cefeides a 24 galáxias da lista de Slipher. O diagrama original de Hubble, isto é, o gráfico onde ele distribuiu as velocidades de recessão das galáxias em função das respectivas distâncias, permitia observar uma relação aproximadamente linear entre as duas quantidades, isto é, as galáxias mais distantes afastavam-se com uma maior velocidade. Hubble anunciou então nesse ano que as galáxias distantes, situadas para além do Grupo Local se afastavam com velocidades proporcionais às suas distâncias, isto é, quanto mais distante a galáxia, maior a sua velocidade de afastamento.

[2] São estrelas variáveis, amarelas, muito grandes e de grande luminosidade, cuja luz emitida varia em períodos de 1 a 70 dias. São importantes, porque fornecem um meio de medir distâncias demasiado grandes para serem medidas por outros métodos. Exemplo de uma cefeide é a estrela Polar ou estrela do Norte, é a mais próxima, variando o seu brilho entre as magnitudes de 2,5 e 2,6 em cerca de 4 dias.

Hubble & Humason (1931)

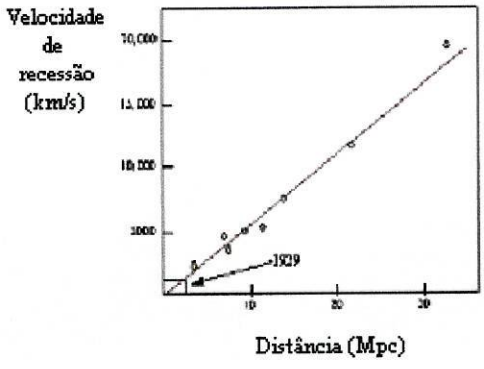


Figura I.2: Velocidade de recessão das galáxias em função da sua distância.

Nos anos seguintes para ampliar e refinar as suas observações, sobretudo o rigor na determinação das distâncias, Hubble recorreu à ajuda de Humason. Para a determinação das distâncias utilizaram sempre estrelas variáveis cefeides e a relação entre o seu período e a sua luminosidade. Com novas e precisas observações, os dois foram capazes de ampliar os seus estudos a galáxias que se localizavam a 240 milhões de anos-luz. Os novos dados confirmaram as primeiras previsões feitas em 1929 e a relação entre a velocidade de recessão **v**, de uma galáxia e a distância **d** a que ela se encontra de nós ficou conhecida por Lei de Hubble:

$$v = C\, d \qquad (I.2)$$

onde a constante de proporcionalidade C, que traduz a taxa de expansão do Universo, se representa usualmente por H_0, e é conhecida por constante de Hubble. Considerando a taxa de expansão do Universo constante, conclui-se que no instante $t_H = 1/H_0$, considerado como tempo de Hubble, os grupos de galáxias se encontravam todos localizados no mesmo ponto do espaço, que

teria por isso uma densidade infinita e uma temperatura muito elevada. Uma singularidade no espaço-tempo que se expandiu e a que habitualmente damos o nome de Big-Bang ou Explosão Primordial. O Big-Bang criou não só a matéria e a radiação como também o próprio espaço-tempo. Este é o início do Universo que conhecemos.

Diagrama de Hubble

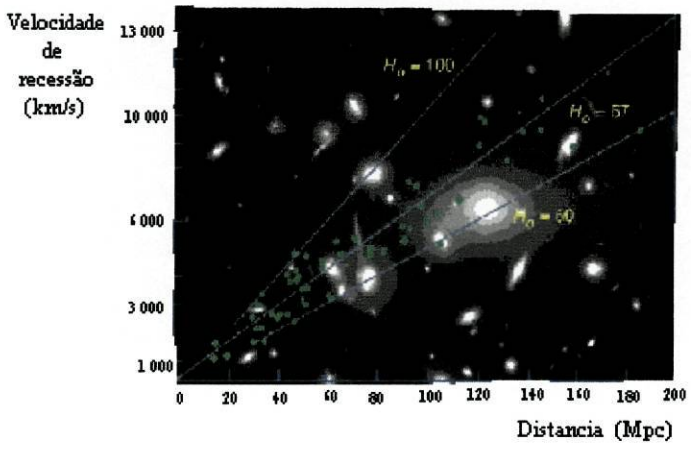


Figura I.3: Velocidade de recessão das galáxias em função da sua distancia

Matematicamente, escreve-se a lei de Hubble

$$v(t) = H(t)d(t) \qquad (I.3)$$

sendo:

v(t) = velocidade de recessão de uma galáxia relativamente à nossa Galáxia (Km/s)

d = distancia entre a galáxia e a nossa Galáxia (Mpc)

H(t) = parâmetro de Hubble

O parâmetro de Hubble, é uma função do tempo e, em geral, varia com ele. A constante, H_0, define-se como sendo o parâmetro de Hubble no instante $t = t_{hoje}$. O aumento da distância própria das galáxias, em relação a nós, é o reflexo da expansão do Universo. Podemos definir a taxa de variação da distancia, própria de uma galáxia, em relação ao tempo como sendo a velocidade de recessão.

A lei de Hubble é uma consequência da homogeneidade e isotropia do Universo.

Figura I.4: Simulação da expansão num balão.

A homogeneidade significa a equivalência de todos os pontos do espaço e a isotropia a igualdade, em um determinado ponto, de todas as direcções. Na verdade não há um centro do Universo, isto é, todos os pontos são centrais. Comparando o exemplo do balão da figura I.4 com o Universo, verifica-se que a expansão no balão acontece num espaço vazio e estático. No caso do Universo isso não ocorre, o Universo é a totalidade e, portanto, não está a expandir-se dentro de um espaço vazio e estático que o contém. É realmente difícil imaginar!

I.2.3 O Efeito de Doppler

Vimos anteriormente que o desvio das riscas espectrais nos espectros das nebulosas observadas foi interpretado como consequência do efeito de Doppler, concluindo-se assim que o Universo se encontrava em expansão. Convém por isso esclarecer em que consiste este efeito.

O efeito de Doppler deve o nome ao físico austríaco Christian Doppler, nascido em 1803, o qual concluiu que a frequência das ondas sonoras emitidas por uma fonte em movimento, tem valores diferentes para receptores com velocidades distintas relativamente à fonte emissora. Originalmente, o pensamento de Doppler dirigiu-se no sentido das ondas sonoras, embora tivesse reconhecido que também a luz, caso fosse efectivamente uma onda, estaria sujeita ao mesmo fenómeno.

Considere-se então uma fonte sonora F, em repouso num determinado referencial, e um receptor R aproximando-se da fonte com velocidade de módulo v_o. Se o receptor estivesse igualmente em repouso em relação ao meio onde se propagam as ondas sonoras, então ele receberia

$$n = \frac{vt}{\lambda} \tag{I.4}$$

ondas sonoras durante o tempo t, sendo λ o comprimento de onda emitido pelo emissor e v a velocidade do som no meio em causa. No caso de o receptor ter um movimento em direcção à fonte, ele recebe

$$n' = \frac{v_0 t}{\lambda} \tag{I.5}$$

ondas sonoras adicionais durante o mesmo intervalo de tempo t. Dado que a frequência é o número de ondas por unidade de tempo, vem que a frequência do som que chega ao receptor ν é dada por:

$$\nu' = \frac{n}{t} + \frac{n'}{t} = \frac{vt + v_0 t}{\lambda t} \tag{I.6}$$

e atendendo a que

$$\lambda = \frac{v}{\nu} \tag{I.7}$$

temos:

$$\nu' = \nu\left(1 + \frac{v_0}{v}\right) \tag{I.8}$$

Seguindo o mesmo raciocínio facilmente se chega à conclusão de que, se o receptor se estiver a afastar do emissor, então a relação entre a frequência emitida ν e a frequência recebida ν' é:

$$\nu' = \nu\left(1 - \frac{v_0}{v}\right) \tag{I.9}$$

Por outro lado, no caso em que o receptor se encontra estacionário e, sendo a fonte a movimentar-se, o raciocínio anterior conduz-nos rapidamente à conclusão que:

$$\nu' = \nu\left(\frac{v}{v \mp v_f}\right) \tag{I.10}$$

onde o sinal negativo é válido para a situação em que a fonte se aproxima do receptor e o sinal positivo para o caso em que a fonte se afasta do receptor, sendo v_f a velocidade da fonte.

Conclui-se pois, que a mudança de frequência de uma onda sonora devido ao movimento relativo entre a fonte e o receptor depende da entidade que se encontra em movimento em relação ao meio de propagação das ondas sonoras, isto é, se a fonte, se o receptor. Esta distinção entre quem se movimenta e quem se encontra em repouso, é possível para o caso do som, pois existe sempre um meio em relação ao qual o movimento ocorre. Se tal meio não existir, simplesmente não existe propagação do som.

Todavia, para o caso da luz que se propaga no vácuo, a distinção já não é possível, e as equações deduzidas para o som deixam de ter validade. Por outro lado, um dos postulados da relatividade restrita estipula a constância da velocidade da luz, independentemente da velocidade relativa entre a fonte e o receptor. Na realidade, tanto a frequência como o comprimento de onda de uma dada radiação electromagnética podem variar, desde que se mantenha a condição de que o seu produto seja sempre igual à velocidade da luz c, que é uma constante:

$$c = \lambda \nu \qquad \text{(I.11)}$$

É essa variação, na radiação electromagnética, da frequência, e consequentemente do comprimento de onda, que resulta do movimento relativo entre a fonte e o receptor, que se designa por *efeito de Doppler*[3] aplicado à "luz".

Considere-se uma fonte luminosa F que se aproxima de um receptor R, com velocidade v, sendo N o número de ondas electromagnéticas emitidas por essa fonte.

[3] Para mais detalhes sobre o efeito de Doppler ver: Resnick, R., Halliday, D., *Física – vol 2*, Livros Técnicos e Científicos Editora, 1984, pag. 153 – 156.

No intervalo de tempo δt_r, medido no referencial do receptor, a primeira onda cobrirá uma distância $c\delta t_r$, enquanto que a fonte percorrerá a distância $v\delta t_r$ em direcção ao receptor.

O comprimento de onda da radiação, quando esta chega ao receptor será então dado por:

$$\lambda=(c\, \delta t_r - v\delta t_r)/N, \tag{I.12}$$

e a frequência recebida pelo receptor ($\nu'=c/\lambda'$):

$$\nu'=(1/(1-(v/c)))/(N/\delta t_r) \tag{I.13}$$

Se a frequência da radiação à saída da fonte for n, então, o número de ondas N, emitidas no intervalo de tempo δt_f, medido pela fonte, será dado por:

$$N=\nu\delta t_f, \tag{I.14}$$

e a expressão (I.13) ficará:

$$\nu'=(1/(1-(v/c)))/(\nu\delta t_f/\delta t_r) \tag{I.15}$$

De acordo com a relatividade restrita, os intervalos de tempo δt_f e δt_r encontram-se relacionados pela equação:

$$\delta t_f=\gamma\delta t_r \tag{I.16}$$

onde γ é o chamado factor de Lorentz:

$$\gamma=(1-(v^2/c^2))^{-1/2}. \qquad (I.17)$$

Substituindo este resultado na equação (I.15), e rearranjando, obtemos:

$$\nu'=[(1+(v/c))/(1-(v/c))]^{1/2}\nu, \qquad (I.18)$$

que, em Relatividade Restrita, é válida para o caso em que a fonte e o receptor se estão a aproximar. Caso a fonte e o receptor se estejam a afastar, a velocidade relativa v assume sinal contrário e teremos:

$$\nu'=[(1-(v/c))/(1+(v/c))]^{1/2}\nu, \qquad (I.19)$$

Uma análise cuidada destas equações mostra que um afastamento relativo entre a fonte e o receptor implica que a frequência ν da radiação electromagnética emitida pela fonte, atinja o receptor com um valor ν' que é sempre menor que o emitido. Por isso se diz que, havendo afastamento relativo entre a fonte e o receptor, a radiação emitida pelo primeiro chegará ao segundo desviada para o vermelho. O inverso se passa no caso de a fonte e o receptor se estarem a aproximar: a frequência ν' recebida pelo receptor é sempre maior que a frequência ν que havia sido emitida pelo emissor. Diz-se, então, que ocorre desvio para o azul na radiação emitida pela fonte. A equação (I.19) pode ser reescrita em função do comprimento de onda λ[4]:

$$\lambda/\lambda' =[(1-(v/c))/(1+(v/c))]^{1/2}. \qquad (I.20)$$

[4] O mesmo se poderá, obviamente, fazer com a equação (I.18) obtendo-se resultado análogo.

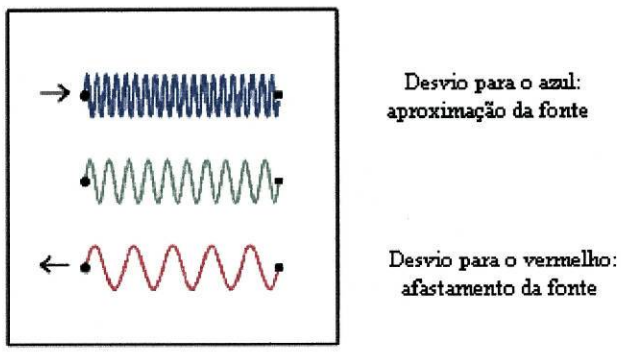


Figura I.5 Efeito de Doppler

A figura I.5 ilustra o que acaba de ser exposto. A equação (I.20) fica simplificada se definirmos o parâmetro β:

$$\beta = v/c. \tag{I.21}$$

Elevando ao quadrado os dois membros da equação (I.20) e tomando o inverso de cada membro, obtemos:

$$(1+\beta)/(1-\beta) = (\lambda'/\lambda)^2. \tag{I.22}$$

Desta forma, é possível determinar a velocidade de afastamento ou aproximação de uma fonte de ondas electromagnéticas conhecendo λ e λ'.

I.2.4 Coordenadas Co-móveis

Quando falamos da velocidade de uma partícula num determinado referencial, referimo-nos às diferentes posições ou coordenadas espaciais que essa partícula ocupa à medida que o tempo passa. Podemos pensar que as coordenadas espaciais das galáxias estão fixas e que o espaço entre elas aumenta, consequência da expansão do Universo.

Estas coordenadas definem-se como *co-móveis* com a expansão, isto é, coordenadas que não se alteram com a expansão ou contracção do Universo.

Utilizando um sistema de coordenadas co-móveis:

$$r(t) = a(t)\, r_c \qquad \text{(I.23)}$$

sendo:

r(t) = é a distancia própria no instante t

r_c = distância co-móvel, coordenada que não se altera com a expansão ou contracção do Universo.

a(t) = factor de escala cósmico no instante t.

Num Universo em expansão, o factor de escala aumenta com o tempo. Considerando a expansão uniforme, num determinado instante, este factor tem sempre o mesmo valor em qualquer ponto do espaço.

Se considerarmos uma galáxia à distância co-móvel, r_c, num instante t e pretendermos conhecer a sua velocidade de recessão em função do tempo, v(t), então,

derivando a equação (I.23)

$$v(t) = \frac{d}{dt}\,[\,r(t)\,] = \frac{d}{dt}\,[a(t).\,r_c] \tag{I.24}$$

$$v(t) = \dot{a}(t) r_c + a(t).\,\dot{r}_c \tag{I.25}$$

Como, anteriormente, se disse que r_c é uma constante então:

$$\dot{r}_c = 0 \tag{I.26}$$

$$v(t) = \dot{a}(t)\, r_c \tag{I.27}$$

Resolvendo as equações (I.23) e (I.27) em ordem a r_c e igualando-as, obtém-se:

$$\frac{v(t)}{a(t)} = \frac{r(t)}{a(t)} \tag{I.28}$$

$$v(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\, r(t) \tag{I.29}$$

$\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$ define-se como sendo o parâmetro de Hubble, H(t).

Então:

$$v(t) = H(t)\, r(t) \tag{I.30}$$

Nesta expressão, estão presentes coordenadas co-móveis, obtidas da transformação das coordenadas co-móveis da equação (I.23).

Para a época actua, t_0:

$$v(t_0) = H(t_0).\, r(t_0) \tag{I.31}$$

De acordo com a homogeneidade e isotropia do Universo a velocidade de recessão das galáxias apenas tem uma componente radial. Essa componente é determinada medindo os desvios $\Delta\lambda$ das riscas espectrais dos espectros obtidos para as referidas galáxias referidas na equação (I.1).

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda_e}{\lambda_e} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_e} = \frac{v}{c} \tag{I.32}$$

Considere-se

$$z << 1 \tag{I.33}$$

A expressão (I.18) representa a velocidade de recessão das galáxias e o desvio cosmológico para o vermelho.

$$v(t) = H(t)\, r(t) \tag{I.34}$$

conhecida como Lei de Hubble.

$$z = \frac{H_0}{c}\, r \tag{I.35}$$

traduz o desvio cosmológico para o vermelho de uma galáxia à distância a que ela se encontra. A equação (I.32) só será válida para velocidades de recessão, v, muito inferiores à velocidade da luz, c. Assim,

$$v = z\, c \tag{I.36}$$

I.2.5 A Esfera de Hubble

É uma esfera centrada em qualquer ponto arbitrário cujo raio é denominado por *comprimento de Hubble* ($r_H = \frac{1}{H} = \frac{c}{H}$), distância percorrida pela luz no tempo de Hubble.

O centro da esfera não é um "centro" para o Universo, porque cada ponto tem a sua própria esfera de Hubble.

Para distancias maiores que o chamado raio de Hubble, a velocidade de recessão de uma galáxia é maior que a velocidade da luz, sobre a esfera a velocidade de recessão iguala a da luz e dentro é inferior.
Os fotões emitidos fora desta esfera, na nossa direcção, viajam (localmente) à velocidade da luz para os observadores fundamentais que se cruzam com eles, todavia, o espaço (distância própria) que nos separa cresce com uma velocidade superior à da luz. Os que são emitidos dentro da esfera de Hubble aproximam-se de nós, enquanto que, os que são emitidos sobre a esfera, ficam momentaneamente "parados".

Num Universo em desaceleração, a constante de Hubble diminui com o tempo enquanto que a esfera de Hubble se expande. Sendo os fotões entidades dinâmicas, as suas coordenadas espaciais variam afastando-se do emissor. Assim, fotões emitidos fora da esfera podem ser alcançados e ficarem retidos dentro da esfera de Hubble, o mesmo pode não acontecer com o emissor. Os fotões começam a aproximar-se de nós podendo ser detectados. Conclue-se que a esfera de Hubble e o horizonte de partícula (o que define o Universo observável) não é a mesma coisa.

Horizonte de partícula é o ponto mais afastado que a luz pôde viajar desde o início do Universo até nos alcançar. O raio de Hubble pode ser considerado como um horizonte de acontecimentos. Um objecto sobre o horizonte de acontecimentos emite luz que está tão longe que o desvio para o vermelho, não poderá alcançar o observador. Isto ocorre perto dos buracos negros e num Universo em expansão acelerada (ex. inflacção) em que partes do Universo se afastam do observador à velocidade da luz.

A esfera de Hubble não viola o *Princípio Cosmológico* ou o *Princípio Copercaniano* porque não exige um "centro" num local especial. Pode-se considerar a esfera como um cone de luz num ponto e tempo específicos, havendo diferentes esferas de Hubble para qualquer ponto do Universo.

CAPÍTULO II

Cosmologia Newtoniana

As Equações

II.1 O Formalismo Newtoniano

O modelo cosmológico do Big-Bang é um modelo de Universo construido com base nas equações tensoriais de Einstein, isto é, tanto a geometria do Universo como a forma como ele se expande são explicadas tendo por base a teoria relativista do espaço-tempo. No entanto, Birkhoff demonstrou a possibilidade de entender essa geometria utilizando argumentos da dinâmica Newtoniana (ver por exemplo Peebles 1993).

O teorema de Birkhoff, com um análogo newtoniano conhecido por teorema esférico de Newton, baseia-se na aplicação de um outro teorema, o de Gauss, aplicado ao campo gravitacional. Este teorema estabelece que o campo gravitacional no exterior de uma região com distribuição esférica de massa, é o mesmo que o campo gravitacional criado por toda a massa da distribuição considerada, caso esteja concentrada no centro da região esférica.
Se imaginarmos que esta esfera está imersa num meio homogéneo infinito, a força gravitacional exercida pelo meio exterior sobre um dado elemento da massa da região esférica considerada anula-se identicamente. Este é o corolário do teorema de Birkhoff.

A teoria Newtoniana não é aplicável a um Universo infinito, visto o potencial gravitacional não estar definido. O seu campo de aplicação abrangerá, apenas regiões finitas com condições físicas de fracas densidades e de baixas velocidades, no entanto, como dissemos, o teorema de Birkhoff permite aplicar o formalismo da teoria de gravitação Newtoniana a todo o Universo, mesmo que infinito. É o que faremos nas secções seguintes.

Convém ainda dizer que alguns dos termos das equações que vamos obter terão que ser reinterpretados à luz dos resultados relativistas que conhecemos. Em particular, o termo que nas equações newtonianas representa a densidade de massa terá que ser considerado como a densidade de massa equivalente à

densidade de energia total, consequência de pelo menos duas componentes que sabemos existirem no Universo: a componente material e a componente radiativa.

Para além disto, e atendendo aos recentes resultados de observações de supernovas do tipo Ia, entre outras, acredita-se hoje que o Universo se encontra actualmente numa fase de expansão acelerada. As equações que vamos obter não contemplam esta possibilidade. Isto é, as equações que melhor descrevem o Universo actual, terão que incluir um termo extra que descreva essa expansão acelerada. Embora haja diversas propostas para a descrever, a mais usual é admitir a existência, no Universo, de um determinado tipo de energia associada à designada constante cosmológica.

Não é difícil a modificação das equações que iremos obter, no sentido de incluir a constante cosmológica. Por isso, apenas escreveremos as equações com esse termo extra, sem contudo as resolver. A justificação para esta decisão prende-se com o facto de apenas ser possível um tratamento numérico dessas equações, tratamento esse que não se enquadra no âmbito deste trabalho. O leitor que pretenda conhecer os pormenores da evolução do modelo cosmológico descrito pelas equações com a constante cosmológica, tem, pois, à sua disposição as equações necessárias para o fazer.

Por outro lado deve notar-se ainda que as equações que vamos obter, considerando apenas uma componente material e uma componente radiativa, descrevem um longo período da história do Universo, isto é, desde a chamada época inflacionária[5] até "quase" à época actual, altura em que a constante cosmológica começa a ter influência na dinâmica do Universo.

[5] Designa-se por inflação o período de expansão exponencial do universo que terá ocorrido na sua fase muito primitiva, mais concretamente quando o universo teria apenas uma idade de cerca de 10^{-35}s.

Este é portanto um longo período da história do Universo, o qual é descrito pelas equações que aqui analisaremos, e este facto, só por si, justifica o seu estudo, tanto mais que este é um tratamento completamente analítico.

II.2 Utilização da 2ª lei de Newton

Vamos considerar uma região do Universo, de massa total M, com uma distribuição esférica, e admitimos que esta região se pode expandir (ou contrair) uniformemente no espaço vazio euclidiano.

Consideremos, ainda, um observador no centro desta esfera, numa posição O e representemos por Gx uma galáxia à distancia r de O, tal como se ilustra na figura II.1.

Esta galáxia afasta-se de O com velocidade v; sobre ela actua, unicamente, a força gravitacional F devido à distribuição de massa no interior da região esférica de raio r.

Resumindo, temos:

- uma esfera material em expansão/contração uniforme no espaço vazio
- a esfera tem densidade uniforme
- as partículas que constituem a esfera encontram-se em queda livre no campo gravitacional criado pela distribuição.

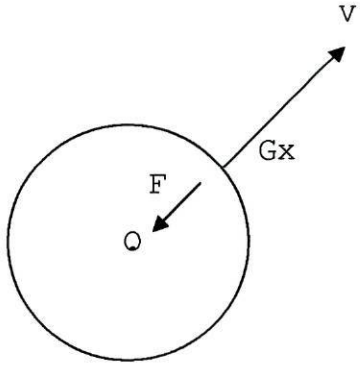


Figura II.1: Região esférica de raio r. A galáxia Gx, que se situa na superfície desta esfera, está sujeita à acção da força **F** e tem uma velocidade de afastamento **v** relativamente ao observador O.

Utilizando a 2ª lei de Newton, expressão (II.1), podemos encontrar a equação que rege o movimento da galáxia Gx.

$$\mathbf{F} = m\mathbf{g} \tag{II.1}$$

onde:

m - massa da galáxia

g - aceleração da galáxia

F - força gravitacional que actua sobre a galáxia

$$g = |\mathbf{g}| = \frac{d^2 r}{dt^2} = \ddot{r} \tag{II.2}$$

$$F = |\mathbf{F}| = -G\frac{Mm}{r^2} \tag{II.3}$$

Onde G é a constante de gravitação universal ou newtoniana r é o módulo do vector de posição da galáxia considerada. O sinal (-) significa que a força **F** que actua sobre a galáxia está dirigida para o interior da região considerada.

Uma vez que o movimento da galáxia é radial, e portanto rectilíneo ou a uma dimensão, podemos abandonar a notação vectorial. A equação de movimento pode então ser escrita, recorrendo às expressões (II.1), (II.2) e (II.3), na forma:

$$\ddot{r} = \left| -G\frac{M}{r^2} \right|, \tag{II.4}$$

onde a massa M da região esférica considerada é dada por:

$$M = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \,, \tag{II.5}$$

sendo ρ a densidade de massa, a qual não depende da posição da partícula.

Substituíndo (II.5) em (II.4) obtemos:

$$\ddot{r} = -\frac{4}{3}\pi G \rho r \tag{II.6}$$

Como admitimos que a esfera pode estar em expansão ou contracção, a distancia r é dada em qualquer instante por:

$$r \equiv r(t) = a(t)\, x \equiv a\, x \tag{II.7}$$

onde a(t) é um factor de escala - crescente com o tempo, para o caso de considerarmos a expansão, e decrescente no caso contrário - e x é o raio co-móvel da região esférica considerada, isto é, a distância, calculada em coordenadas co-móveis, entre a galáxia e o observador - x é portanto constante.

Da equação (II.7) obtém-se:

$$\frac{dr}{dt} = \dot{a}\, x \tag{II.8}$$

$$d^2r/dt^2 = g = \ddot{a}\,x \qquad \text{(II.9)}$$

Substituindo (II.7) e (II.9) em (II.6) teremos:

$$d^2a/dt^2\ x = -(4/3)\pi\ G\ r_o\ a\ x\ , \qquad \text{(II.10)}$$

e a equação (II.1) poderá então ser escrita da seguinte maneira:

$$\ddot{a} = -\frac{4}{3}\pi\ G\rho\ a \qquad \text{(II.11)}$$

Constata-se assim que a equação (II.11) descreve não só o movimento da galáxia Gx, mas também o de qualquer outra partícula material que se encontre sujeita apenas à influência da distribuição de massa considerada, com simetria esférica e de densidade ρ.

Sabendo que $\rho a^3 = constante$ então a equação (II.11) ficará:

$$\ddot{a} = -\frac{4}{3}\pi G\frac{c_1}{a^2} \qquad \text{(II.12)}$$

onde C_1 é uma constante.

Multiplicando por $2\dot{a}$ ambos os membros da equação (I.12), obtemos:

$$2\dot{a}\ddot{a} = -\frac{8}{3}\pi G\frac{\dot{a}}{a^2}C_1 \qquad \text{(II.13)}$$

e integrando ambos os membros desta equação, tem-se:

$$\dot{a}^2 = \frac{8}{3}\pi G\rho a^2 + const. \qquad \text{(II.14)}$$

onde a constante no segundo membro é uma constante de integração, e por isso não tem uma interpretação física imediata. Todavia, como veremos, se esta equação for obtida a partir da lei da conservação de energia para uma partícula (por exemplo uma galáxia como a referida nas condições anteriores), então, essa constante poderá ser facilmente interpretada.

II.3 Utilização da lei de conservação de energia

Suponhamos que temos uma partícula material, na vizinhança de uma região de distribuição de massa esférica e homogénea tendo um raio fixo r.

Analisemos qualitativamente o comportamento dessa partícula em função da sua velocidade v.

Seja M a massa da região esférica considerada e v_e a velocidade de escape à sua superfície, isto é, a velocidade mínima necessária para que a partícula se afaste indefinidamente da esfera.

A velocidade de escape é dada por:

$$v_e^2 = 2\frac{GM}{r} \tag{II.15}$$

Ao abandonar a superfície da esfera, a partícula considerada poderá ter três comportamentos qualitativamente distintos, dependendo esse comportamento da sua velocidade v.

Assim temos:

- $v < v_e$ — a partícula afastar-se-á inicialmente da superfície da esfera, regressando posteriormente a essa mesma superfície, descrevendo uma trajectória cuja órbita é *elíptica.* A esfera expande-se e em seguida colapsa.

- $v = v_e$ — a partícula tem a velocidade mínima necessária para atingir o infinito, sendo a sua trajectória uma *órbita parabólica.*

- $v > v_e$ — a partícula atingirá, também neste caso, o infinito, traçando uma trajectória cuja órbita é *hiperbólica.*

Resumindo, o Universo visível está-se a expandir. Nós vemos galáxias e grupos de galáxias a deslocarem-se no Universo. Esta expansão decorre desde que o Universo foi formado, sensivelmente , há 15 mil milhões de anos. Acontecimento esse, conhecido como origem do espaço e do tempo e habitualmente designado por Big-Bang ou Explosão Primordial.

O Universo é finito em idade. Contudo, o Universo demasiado quente, teve comprimido à mesma temperatura. Assim foi o Big-Bang: o início quente. Sendo assim, o ***Big Bang terá sido o começo do tempo e do espaço.***

Se perguntarmos o que aconteceu antes do Big Bang é o mesmo que perguntar "onde é o norte do Pólo Norte?" Podemos considerar o Big Bang o início do tempo. Não há "antes". Onde aconteceu o Big Bang também é uma pergunta impossível. O espaço foi criado no Big Bang. Não há nenhum "antes". Deduzindo que aconteceu, algures, em qualquer lado. Todos os pontos do Universo encontravam-se concentrados num único ponto, estando todos à mesma temperatura.

O Universo não tem "centro" quer seja ou não infinito. Por analogia a um Universo finito, podemos considerar a duas dimensões, a superfície de um balão: todos os pontos da superfície são equivalentes (figura II.1).

Por hipótese, no início, o Universo terá expandindo mais rapidamente do que a velocidade da luz, embora, as partículas não estivessem a viajar tão rápido, o espaço entre elas aumentava grandemente.

Tanto no caso em que $v = v_e$, como no caso em que $v > v_e$, a esfera expandir-se-á continuamente e nunca colapsará.

Numa esfera em expansão ou contracção uniforme, as posições relativas das partículas que a constituem mantêm-se. Uma partícula localizada na superfície da esfera manter-se-á sempre nessa superfície mesmo que ela se encontre em expansão.

Consideremos uma partícula que pode ser uma galáxia de massa *m*, movendo-se com velocidade *v*, a uma distância *r* da origem de um sistema de coordenadas qualquer, num sistema de massa total *M* contida no volume de raio *r*.
A energia total do sistema, na ausência de cargas eléctricas, é igual à soma da energia cinética E_c, com a energia potencial gravítica E_{pg}.

Aplicando a *lei da conservação de energia*, por unidade de massa, teremos:

$$E/m = Ec/m + Epg/m = \text{constante} \qquad \text{(II.16)}$$

$$\frac{E}{m} = \frac{1}{2}v^2 + \left(-\frac{GM}{r}\right) \qquad \text{(II.17)}$$

onde:

E – energia total constante de gravitação newtoniana

G - constante de gravitação newtoniana

r - distância a que se encontra a partícula do centro da esfera

A partir da equação anterior, e atendendo à definição de velocidade de escape, equação (II.15), podemos escrever

$$v^2 = v_e^2 + 2\frac{E}{m} \qquad \text{(II.18)}$$

Este resultado mostra claramente que é o valor de $2\frac{E}{m}$ que vai determinar o comportamento da partícula e portanto também o comportamento da região considerada.

Assim temos três casos possíveis. Quando:

- $v < v_e$, o valor de $2\frac{E}{m}$ é negativo, sendo a energia total igualmente negativa.
- $v = v_e$, o valor de $2\frac{E}{m}$ é zero, tomando também, o valor zero a energia total.
- $v > v_e$, o valor de $2\frac{E}{m}$ é positivo e, portanto, a energia total tem o mesmo sinal.

Admitindo a hipótese de a esfera se poder expandir de uma forma uniforme, a distância r entre dois pontos quaisquer será proporcional à distância, r_o, que os separa num dado instante t_o. Por outro lado, *r* dependerá, também, de um *factor de escala a*, ou seja de um factor de expansão que indica o quanto a esfera se expandiu num determinado intervalo de tempo, e portanto esse factor *a* depende do tempo, isto é:

$$a \equiv a(t) \tag{II.19}$$

Assim, temos que a razão entre a distância r entre dois quaisquer pontos e o factor de escala, tomados no mesmo instante, é constante, ou seja:

$$\frac{r}{a} = \frac{r_0}{a_0} = cons\tan te \tag{II.20}$$

Explicitando a dependência temporal de a e de r, podemos escrever:

$$r(t) = r_0 \frac{a(t)}{a_0} \tag{II.21}$$

e para a velocidade virá sucessivamente:

$$v = \frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt}\left[r_0 \frac{a(t)}{a_0} \right] \tag{II.22}$$

$$v = r_0 \frac{\dot{a}}{a_0} \tag{II.23}$$

Atendendo à definição da velocidade de escape, equação (II.15), a equação (II.18) pode escrever-se na forma:

$$v^2 = 2\frac{GM}{r} + 2\frac{E}{m} \tag{II.24}$$

Substituindo nesta equação r e v pelas suas expressões dadas respectivamente em (II.21) e (II.23) obtemos:

$$r_0^2\left(\frac{\dot{a}}{a_0}\right)^2 = 2\frac{GMa_0}{r_0 a} + 2\frac{E}{m} \qquad \text{(II.25)}$$

equação esta que depois de simplificada toma o seguinte aspecto:

$$\dot{a}^2 = 2\frac{GM}{r_0^3}\frac{a_0^3}{a} + 2\frac{E}{m}\left(\frac{a_0}{r_0}\right)^2 \qquad \text{(II.26)}$$

sabendo ainda que $M = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$ e substituindo em (II.26) tem-se:

$$\dot{a}^2 = \frac{8}{3}\pi G\rho\left(\frac{r}{r_0}\right)^3\frac{a_0^3}{a} + 2\frac{E}{m}\left(\frac{a_0}{r_0}\right)^2 \qquad \text{(II.27)}$$

ou seja:

$$\dot{a}^2 = \frac{8}{3}\pi G\rho a^2 + 2\frac{E}{m}\left(\frac{a_0}{r_0}\right)^2 \qquad \text{(II.28)}$$

O valor da segunda parcela do segundo membro desta expressão apenas dependerá da energia por unidade de massa e terá sempre o mesmo valor constante em qualquer ponto.

Representaremos essa constante por –k, isto é:

$$2\frac{E}{m}\left(\frac{a_0}{r_0}\right)^2 = cons\tan te = -k \qquad \text{(II.29)}$$

Obtemos então finalmente, obtemos a equação que descreve o comportamento do sistema em qualquer instante:

$$\dot{a}^2 = \frac{8}{3}\pi G\rho a^2 - k \qquad \text{(II.30)}$$

Esta é pois a equação que descreve a evolução dinâmica do Universo de acordo com o modelo cosmológico padrão e, denomina-se por *equação de Friedmann.*

Atendendo a que o valor de $\frac{E}{m}$ pode ser positivo, negativo ou nulo, então k pode tomar respectivamente os valores –1, 1 e 0. Sendo k uma função da energia, e atendendo à associação relativista entre energia e geometria, então, k pode ser interpretado como um parâmetro que caracteriza a geometria da região considerada, ou mais concretamente a sua curvatura, e é por isso designado por *parâmetro de curvatura.*

- $v > v_e$ → $k = -1$ → Universo aberto
- $v = v_e$ → $k = 0$ → Universo plano
- $v < v_e$ → $k = +1$ → Universo fechado

Consideremos uma região esférica em expansão, de massa *M,* homogénea e isotrópica, que pode representar o Universo, e a força gravitacional que actua sobre uma partícula co-móvel com a expansão. A partícula em causa situa-se na superfície de uma esfera de raio *r(t)*, e por isso no instante *t*, a partícula sofrerá uma aceleração gravitacional dada por:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{GM}{r^2} \qquad \text{(II.31)}$$

Esta aceleração tende a reduzir a expansão do Universo. Sendo assim, a energia mecânica, E, da partícula será:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{mGM}{r} \tag{II.32}$$

$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - \frac{mGM}{r} \tag{II.33}$$

No caso em que, apenas, a gravidade actua no Universo, $E = cons\tan te$. Assim, em conformidade com o sinal de E, as partículas poderão afastar-se, ou não, indefinidamente umas das outras:

- **E > 0** $\Rightarrow$ expansão indefinida $\Rightarrow$ **Universo aberto**
- **E < 0** $\Rightarrow$ expansão e posterior colapso $\Rightarrow$ **Universo fechado**
- **E = 0** $\Rightarrow$ expansão indefinida $\Rightarrow$ **Universo plano**

Na equação II.30 o termo da densidade ρ terá que ser reinterpretado, como dissemos já, atendendo ao facto de que para além da componente material, o Universo contém igualmente uma componente radiativa que contribui para a densidade total da sua energia.

É na secção seguinte que veremos como se comporta a densidade de cada uma dessas duas componentes: a material e a radiativa.

II.4 Comportamento da densidade

Aplicando a 1ª Lei da Termodinâmica a um elemento de fluido cósmico, podemos estudar a evolução de um universo em expansão com um determinado conteúdo.

Esta lei afirma que a variação de energia de um sistema em expansão é igual ao trabalho realizado pelas forças de pressão, podendo ser escrito da seguinte forma:

$$\frac{dE}{dV} = - p \qquad \text{(II.34)}$$

sendo:

dE = a energia do elemento considerado

dV = volume do elemento considerado

p = pressão que actua sobre o mesmo elemento.

Explicitando a dependência temporal da energia, e do volume podemos escrever:

$$\frac{dE}{dt} = - \rho \frac{dV}{dt} \qquad \text{(II-35)}$$

Utilizando a equação

$$E = Mc^2 \qquad \text{(II.36)}$$

Em que M representa não só a contribuição da matéria usual mas também a massa equivalente à energia de radiação.

Sabendo que

$$M = \rho V \qquad \text{(II.37)}$$

e que ρ representa a densidade total (matéria e radiação), obtemos a seguinte equação de energia:

$$E = \rho V c^2 \qquad \text{(II.38)}$$

Atendendo que o volume do elemento considerado é proporcional ao cubo do factor escala, podemos escrever:

$$V = \alpha a^3 \qquad \text{(II.39)}$$

onde α é uma constante.

Utilizando a relação (II.38) na expressão (II.35) obtemos:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}(\rho\, \alpha a^3\, c^2) \qquad \text{(II.40)}$$

Utilizando a relação (II.39), o segundo membro da equação (II.40) tomará o aspecto:

$$p\,\frac{dV}{dt} = p\frac{d}{dt}(\alpha a^3) \qquad \text{(II.41)}$$

Finalmente substituindo as relações (II.40) e (II.41) na equação (II.35) obteremos uma relação diferencial que relaciona a densidade, a pressão e o factor de escala:

$$\frac{d}{dt}(\rho\, a^3) + \frac{p}{c^2}\frac{d}{dt}(a^3) = 0 \qquad \text{(II.42)}$$

Para o caso mais geral a equação (II.42) não tem solução analítica. Sendo assim, vamos considerar duas situações limite, permitindo que a expressão obtenha facilmente soluções analíticas.

II. 4.1 Caso de um universo apenas com matéria

Consideremos um universo cujo conteúdo é um fluido material co-móvel com a expansão. Para tal, admita-se que:

$$\rho_r = p_r = 0 \tag{II.43}$$

Substituindo na equação (II.42) obtém-se:

$$\frac{d}{dt}(\rho_m a^3) + \frac{p_m}{c^2}\frac{d}{dt}(a^3) = 0 \tag{II.44}$$

Num universo em expansão uniforme, obedecendo ao princípio cosmológico e constituído apenas por partículas materiais não relativistas, é de admitir que a pressão da matéria é nula. Neste caso, a equação de estado do fluido cósmico será:

$$p_m = 0 \tag{II.45}$$

A equação (II.44) ficará simplificada:

$$\frac{d}{dt}(\rho_m a^3) = 0 \tag{II.46}$$

cuja solução é imediata, sendo:

$$\rho_m a^3 = \text{constante} \tag{II.47}$$

II.4.2 Caso de um universo apenas com radiação

Neste caso, consideramos um universo contendo apenas radiação, ou seja:

$$p_m = \rho_m = 0 \tag{II.48}$$

Então, a equação (II.42) tomará o seguinte aspecto:

$$\frac{d}{dt}(\rho_r a^3) + \frac{p_r}{c^2}\frac{d}{dt}(a^3) = 0 \tag{II.49}$$

De acordo com um resultado relativista, a equação de estado para um fluido cósmico constituído apenas por radiação, é dada por:

$$p_r = c^2 \frac{\rho_r}{3} \tag{II.50}$$

Substituindo em (II.49) obtemos:

$$\frac{d}{dt}(\rho_r a^3) + \frac{\rho_r}{3}\frac{d}{dt}(a^3) = 0 \tag{II.51}$$

$$4\rho_r a^2 \frac{da}{dt} + a^3 \frac{d\rho_r}{dt} = 0 \tag{II.52}$$

multiplicando ambos os membros pelo factor de escala (a) que supomos ser diferente de zero, obteremos:

$$4\rho_r a^3 \frac{da}{dt} + a^4 \frac{d\rho_r}{dt} = 0 \tag{II.53}$$

Podendo a equação (II.53) ser escrita de outra forma:

$$\frac{d}{dt}\left(\rho_r.a^4\right) = 0 \qquad \text{(II.54)}$$

Sendo assim, neste caso obtém-se:

$$\rho_r.a^4 = \text{constante} \qquad \text{(II.55)}$$

CAPÍTULO III

Parâmetros Cosmológicos

III.1 A densidade crítica

Consideremos, novamente, uma galáxia de massa m, situada a uma distância r de um observador, e afastando-se dele com velocidade v. Seja M a massa total contida na região esférica de raio r.

A energia total do sistema, no caso de neutralidade eléctrica global, será dada por:

$$E_{total} = E_{cinética} + E_{potencial.gravítica} = \text{constante} \qquad \text{(III.1)}$$

isto é:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = cons\tan te \qquad \text{(III.2)}$$

Considerando que a região em causa representa o Universo, verificamos que, dependendo do valor de E_{total}, que é uma constante do sistema, o Universo poderá ser aberto, fechado ou plano, como vimos na secção anterior.

Usando, na expressão (III.2), a lei de expansão

$$v = Hr \qquad \text{(III.3)}$$

e a expressão de massa total

$$M = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \qquad \text{(III.4)}$$

obtemos para o caso em que a energia total é nula (E = 0):

$$\frac{1}{2}mH^2r^2 - \frac{4}{3}Gm\pi r^2\rho_c = 0 \qquad \text{(III.5)}$$

onde ρ é a densidade para este caso (universo plano), ou seja a densidade necessária e suficiente para que a energia total seja nula (E = 0). Designa-se geralmente por densidade crítica, representando-se por ρ_c. Muitas vezes diz-se que o universo plano é um universo crítico.

A densidade crítica ρ_c, será então dada por:

$$\rho_c = \frac{3}{8}\frac{H^2}{\pi G} \qquad \text{(III.6)}$$

e é, como dissemos, a densidade mínima necessária para evitar um recolapso do Universo.

Tomando:

$$H_0 = 75 km/\sec/Mpc$$

$$G = 6{,}67259x10^{-8}\, cm^3/g\sec^2$$

obtém-se:

$$\rho_c \approx 1{,}1x10^{-29}\, g/cm^3 \qquad \text{(III.7)}$$

Ao compararmos o valor obtido anteriormente com o valor estimado para a densidade ρ_v de matéria visível (observada directamente), que é da ordem de

$$\rho_v \sim 10^{-31}\ g/cm^3,$$

verificamos que a densidade crítica é cerca de 100 vezes superior e que portanto a matéria visível não é suficiente para forçar o Universo a recolapsar no futuro.

III.2 O parâmetro de densidade

Retomemos a expressão (III.2). Tendo em conta que

$$M = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho(t) \tag{III.8}$$

podemos escrever:

$$2E = m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - \frac{8}{3}G\pi m r^2 \rho(t) \tag{III.9}$$

Atendendo à definição de densidade crítica, equação (III.6), temos:

$$(8/3)\,\pi\, G = H^2/\rho_c \tag{III.10}$$

e a equação (5.9) virá:

$$2E = m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - mr^2 \frac{H^2}{\rho_{c(t)}}\rho(t) \tag{III.11}$$

Dividindo ambos os membros desta equação por mr^2, obtém-se:

$$2E/mr^2 = (1/r^2)\,(dr/dt)^2 - H^2\,\rho/\rho_c \tag{III.12}$$

Como

$$(1/r^2)\,(dr/dt)^2 = [(1/a)\,(da/dt)]^2 = H^2 \tag{III.13}$$

ficamos com:

$$\frac{2E}{mr^2} = H^2\left(1 - \frac{\rho(t)}{\rho_c(t)}\right) \qquad \text{(III.14)}$$

Definindo

$$\Omega(t) = \frac{\rho(t)}{\rho_c(t)} \qquad \text{(III.15)}$$

obtemos finalmente

$$\frac{2E}{mr^2} = H^2[1 - \Omega(t)] \qquad \text{(III.16)}$$

A expressão (III.15) define o parâmetro Ω, que não é mais do que a densidade do modelo cosmológico em unidades da densidade do modelo crítico ou densidade crítica. Este parâmetro é conhecido como *parâmetro de densidade*.

Sendo sempre positivos os valores de r^2 e H^2 então os sinais de E e $\Omega(t)$ são opostos:

$\Omega(t) > 1 \Rightarrow \rho(t) > \rho_c(t) \Rightarrow E < 0 \Rightarrow$ k = +1 $\Rightarrow$ **universo fechado**

$\Omega(t) < 1 \Rightarrow \rho(t) < \rho_c(t) \Rightarrow E > 0 \Rightarrow$ k = -1 $\Rightarrow$ **universo aberto**

$\Omega(t) = 1 \Rightarrow \rho(t) = \rho_c(t) \Rightarrow E = 0 \Rightarrow$ k = 0 $\Rightarrow$ **universo plano**

O valor do parâmetro de densidade varia, em geral, com o tempo cósmico excepto no modelo plano para o qual é constante e igual a 1.

Na época actual é representado por Ω_0. Assim, escrevendo a expressão (III.6) para a época actual, virá:

$$\rho_c^{\,0} = (3/8)\,(H_0^2/\pi G) \qquad \text{(III.17)}$$

ou

$$(\rho_0/\rho_c^{\,0}) \equiv \Omega_0 = \frac{8}{3}\frac{G\pi}{H_0^{\,2}}\rho_0 \qquad \text{(III.18)}$$

III.3 O parâmetro de desaceleração

O parâmetro de desaceleração q, é definido em função do factor de escala, e das suas primeira e segunda derivadas em ordem ao tempo, da forma seguinte:

$$q = \left(-\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2} \right) \tag{III.19}$$

Este é também um parâmetro importante pois o conhecimento do seu valor pode igualmente contribuir para uma melhor compreensão da dinâmica do processo de expansão do Universo. O seu valor na época actual $q_0 \equiv q(t_0)$, pode ser obtido por observação, sendo dado para esta época por

$$q_0 = \left(-\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2} \right)_{t_0} \tag{III.20}$$

III.4 Os parâmetros de desaceleração e de densidade

O parâmetro de desaceleração relaciona-se facilmente, como vamos ver, com o parâmetro de densidade Ω. Temos, contudo, que separar a época em que o Universo é dominado dinamicamente pela radiação, da época em que esse domínio é exercido pela matéria.

III.4.1 Época dominada pela matéria

Recorrendo à equação de Friedmann escrita em (II.30):

$$\dot{a}^2 = \frac{8}{3}\pi G\rho a^2 - k \qquad \text{(III.21)}$$

e multiplicando a 1ª parcela do 2º membro por $\frac{a}{a}$ fica:

$$\dot{a}^2 = \frac{8}{3}\pi G\rho a^2 \frac{a}{a} - k \qquad \text{(III.22)}$$

$$\dot{a}^2 = \frac{8}{3}\pi G\rho a^3 \frac{1}{a} - k \qquad \text{(III.23)}$$

sabendo que nesta época: (ver secção II.4.1)

$$\rho_m a^3 = cons\tan te\,,$$

definimos:

$$C_m = \frac{8}{3}\pi G\rho_m a^3$$

e, utilizando a expressão (III.18), obtemos:

$$C_m = \Omega_m H^2 a^3 \tag{III.24}$$

Atendendo à relação (III.24), a equação (III.23) pode escrever-se na forma:

$$\dot{a}^2 = C_m \frac{1}{a} - k \tag{III.25}$$

Derivando em ordem ao tempo os dois membros desta equação, temos:

$$\dot{a}\ddot{a} = -\frac{C_m}{2}\frac{\dot{a}}{a^2}\,, \tag{III.26}$$

substituindo a expressão (III.24) na equação (III.26) obtemos:

$$\ddot{a} = -\frac{H^2\,\Omega_m a}{2} \tag{III.27}$$

obtendo-se:

$$\ddot{a} = -\frac{H^2\,\Omega_m a}{2} \tag{III.28}$$

Atendendo à definição do parâmetro de Hubble, ($H = \frac{\dot{a}}{a}$) e à definição do parâmetro de desaceleração q, equação (5.19) então, obtém-se a equação (III.28) escrita na forma:

$$q = \frac{\Omega_m}{2} \tag{III.29}$$

Esta é a relação, que procurávamos, entre o parâmetro de desaceleração e o parâmetro de densidade, válida para a época de matéria. Assim, podemos utilizar a tabela abaixo para caracterizar os três tipos de universos de Friedmann, para a época de matéria, de acordo com os valores dos parâmetros *k, Ω, ou q:*

$$k = 0 \Rightarrow \Omega_m = 1 \Rightarrow q = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{universo plano}$$

$$k = 1 \Rightarrow \Omega_m > 1 \Rightarrow q > \frac{1}{2} \Rightarrow \text{universo fechado}$$

$$k = -1 \Rightarrow \Omega_m < 1 \Rightarrow q < \frac{1}{2} \Rightarrow \text{universo aberto}$$

III.4.2 Época dominada pela radiação

Multiplicando a 1ª parcela do 2° membro da equação (4.30) por $\frac{a^2}{a^2}$, virá:

$$\dot{a}^2 = \frac{8}{3}\pi G \rho_r a^4 \frac{1}{a^2} - k \qquad \text{(III.30)}$$

Na época dominada ***pela radiação***: (ver secção II.4.2)

$$\rho a^4 = cons\tan te\,,$$

definimos a constante C_r da forma seguinte:

$$C_r = \frac{8}{3}\pi G \rho_r a^4 \qquad \text{(III.31)}$$

ou, atendendo à relação (III.18):

$$C_r = \Omega_r H^2 a^4 \tag{III.32}$$

A equação (III.30) tomará então o seguinte aspecto:

$$\dot{a}^2 = C_r \frac{1}{a^2} - k \tag{III.33}$$

derivando em ordem ao tempo os dois membros desta equação é fácil chegarmos à seguinte expressão:

$$-\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} = \Omega_r \tag{III.34}$$

isto é, na época dominada pela radiação temos:

$$q = \Omega_r \tag{III.35}$$

Sendo Ω_r, o parâmetro de densidade correspondente à energia contida na radiação.

III.5 Introdução da Constante Cosmológica nas Equações

Albert Einstein introduziu, pela primeira vez, a chamada constante cosmológica Λ nas suas equações da Relatividade Geral, para poder obter soluções estáticas. Assim, criou um modelo de universo estático.

Esta constante introduz uma força de repulsão que cresce proporcionalmente à distância entre dois corpos.

Se adicionarmos na equação de energia (II.17) um outro termo à energia potencial com a característica da força derivada desse potencial crescer com a distância, na forma:

$$E_{\Lambda} = -\frac{\Lambda c^2}{6} r^2 \qquad \text{(III.36)}$$

Obteríamos da equação de Friedmann (c=1) as seguintes equações:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8}{3}\pi G\rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \qquad \text{(III.37)}$$

e

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4}{3}\pi G\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) + \frac{\Lambda}{3} \qquad \text{(III.38)}$$

em que esta última não é mais do que a equação da aceleração.

III.5.1 O Universo de Einstein

O modelo proposto por Einstein após a publicação da Teoria da Relatividade Geral, assumia um Universo homogéneo e isotrópico, com pressão nula, juntamente com um espaço-tempo estático. Este modelo também apresentava uma geometria positiva e constante.

Sendo a constante, neste modelo, podemos obter facilmente a partir das equações (III.37) e (III.38) que:

$$\Lambda = \frac{k}{a^2} \tag{III.39}$$

e, então

$$\frac{8\pi G}{3}\rho = \frac{2k}{3a^2} \tag{III.40}$$

Neste modelo se soubermos a densidade do Universo, conhecemos o factor de escala, que neste contexto corresponde ao raio do Universo.

Para k = +1, obtemos uma relação entre a densidade e a constante cosmológica:

$$\rho = \frac{\Lambda}{4\pi G} \tag{III.41}$$

Desta equação podemos concluir o seguinte:

- *o universo contrair-se-á* se a densidade for maior que um certo valor de densidade;

- *expandir-se-á* caso aconteça o contrário.

A densidade expressa na equação (III.40) é um ponto de equilíbrio instável nas equações de Einstein para o Universo.

III.5.2 Equações necessárias, para um tratamento numérico, com constante cosmológica

Escrevendo a equação de Friedmann em função dos parâmetros cosmológicos incluindo a constante cosmológica. Assim, temos que definir dois parâmetros de densidade actuais:

$$\Omega_{\Lambda}^{0} = \frac{\Lambda}{3H_0^2} \tag{III.42}$$

e

$$\Omega_{k}^{0} = \frac{-k}{a_0^2 H_0^2} \tag{III.43}$$

e explicitando o parâmetro de densidade actual para a matéria:

$$\Omega_{m}^{0} = \frac{8\pi G}{3H_0^2}\rho_{m_0} \tag{III.44}$$

É fácil verificar que:

$$\Omega_{k}^{0} + \Omega_{m}^{0} + \Omega_{\Lambda}^{0} = 1 \tag{III.45}$$

e definindo a densidade total

$$\Omega_{m}^{0} + \Omega_{\Lambda}^{0} = \Omega_{T} \tag{III.46}$$

em que:

$$\Omega_T = 1 - \Omega_k^0 \tag{III.47}$$

Utilizando as equações (III.42), (III.43) e (III.44) na equação (III.37), após algumas simplificações obtemos:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H_0^2\left[\Omega_m^0\left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \Omega_k^0\left(\frac{a_0}{a}\right)^2 + \Omega_\Lambda^0\right] \tag{III.48}$$

Devemos fazer a mudança de variável para facilitar a integração:

$$a = 2\text{-}x \tag{III.49}$$

e derivando em relação ao tempo,

$$\frac{da}{dt} = -\frac{dx}{dt} \tag{III.50}$$

Em seguida, vamos normalizar o factor de escala de forma que $a_0 = 1$ e $H_0 = 1$.

Obteremos a idade do Universo em unidades de H_0^{-1}. Quando x varia entre 1 e 2, o factor de escala varia entre 1 e 0 e t varia entre 0 e 1.

Após algumas manipulações, chegamos à seguinte equação diferencial:

$$\frac{dt}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{\left[\Omega_m^0(2-x)^{-1} + \Omega_\Lambda^0(2-x)^2 + \Omega_k^0\right]}} \tag{III.51}$$

Os valores obtidos das soluções numéricas da equação (III.51) podem ser representados em gráficos, o que não faremos neste trabalho pelas razões já apontadas.

Com as normalizações já feitas e combinando as equações (III.45) e (III.48) obtemos:

$$\dot{a}^2 = 1 + \Omega_m^0\left(\frac{1}{a} - 1\right) + \Omega_\Lambda^0\left(a^2 - 1\right) \qquad \text{(III.52)}$$

Nesta equação, verificamos que o termo Ω_Λ^0 está multiplicado por a^2. Sendo assim, apenas se Ω_m^0 for suficientemente grande para valores de factor de escala superiores ao valor actual (normalizado), irá ocorrer o colapso.

III.5.3 Expressões gerais para os diversos parâmetros

A equação da constante cosmológica Λ que permanece constante quer o Universo expanda, quer se mantenha estático é dada por:

$$\Lambda = 8\pi G\rho_\Lambda \qquad \text{(III.53)}$$

onde ρ_Λ é a densidade de energia de vácuo, à qual se encontra associado o parâmetro de densidade Ω_Λ.

$$\Omega_\Lambda = \frac{\rho_\Lambda}{\rho_c} \qquad \text{(III.54)}$$

A equação de Friedmann com constante cosmológica, pode ser escrita, como anteriormente vimos na forma:

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho a^2 + \frac{1}{3}\Lambda a^2 - k \qquad \text{(III.55)}$$

ou, tendo em consideração a equação (III.53):

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho a^2 + \frac{8\pi G}{3}\rho_\Lambda a^2 - k \qquad \text{(III.56)}$$

Como anteriormente já foi dito, para a densidade ρ contribui não só a componente material como a componente radiativa embora esta, seja, no Universo actual, desprezável em relação à componente material.

É de ter em consideração que tanto ρ_m como ρ_r diminuem à medida que o Universo expande e aumentam caso o Universo contraia.

Também sabemos que a constante cosmológica Λ permanece realmente constante quer o Universo expanda, quer o Universo contraia, o mesmo acontecendo com ρ_Λ [6] Atendendo a estas considerações sobre a evolução da densidade , podemos escrever:

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3}\left[\rho_m^0\left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \rho_r^0\left(\frac{a_0}{a}\right)^4\right]a^2 + \frac{8\pi G}{3}\rho_\Lambda a^2 - k \qquad \text{(III.57)}$$

[6] Mas não com Ω_Λ que depende de ρ_c.

Nestes modelos há a considerar dois aspectos muito importantes:

- quando $a \rightarrow 0$, o valor de $\dot{a} \rightarrow \infty$.

De facto, na época de matéria o termo dominante quando $a \rightarrow 0$ é:

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3}\left(\rho_m a^3\right)\frac{1}{a} \qquad \text{(III.58)}$$

sendo, que na época da radiação é dominante:

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3}\left(\rho_r a^4\right)\frac{1}{a^2} \qquad \text{(III.59)}$$

Tanto num caso como noutro, se $a \rightarrow 0$, então $\dot{a}^2 \rightarrow \infty$ (é de relembrar que tanto $\rho_m a^3$ como $\rho_r a^4$ são constantes).[7]

- Por outro lado, à medida que $a \rightarrow 0$, a constante cosmológica deixa de ter qualquer importância, e o modelo comporta-se como se o seu valor fosse aproximadamente nulo.

Derivando a expressão (II.57) obtemos:

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3}\frac{a_0^3}{a^2}\left(\rho_m^0 + \frac{2a_0\rho_r^0}{a} - \frac{4\rho_\Lambda a^3}{a_0^3}\right) \qquad \text{(III.60)}$$

Nesta expressão verificamos o efeito contrário à força atractiva da gravidade, provocado por uma constante cosmológica positiva.

---

[7] No nosso Universo, quando a tende para zero a componente dominante é a componente radiativa.

A expansão do Universo é desacelerada pela presença de matéria e radiação, e essa desaceleração é contrariada pela presença de uma constante cosmológica maior que zero.

Se $\Lambda < 0$, a atracção gravitacional da matéria e da radiação é incrementada.

III.5.3.1. O parâmetro de densidade

As expressões que anteriormente foram deduzidas para os parâmetros cosmológicos não incluem a possibilidade da existência de uma constante cosmológica diferente de zero, pelo que não podem ser consideradas mais do que casos particulares.

É de realçar que todas as expressões que tiverem uma densidade ρ, esta refere-se ao somatório das diversas densidades, isto é, da componente material (ρ_m), radiativa (ρ_r) e cosmológica. (ρ_Λ).

A densidade crítica, como já vimos, é a densidade de um Universo plano, k=0, deduzida a partir da equação de Friedmann, obtendo-se:

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G} \tag{III.61}$$

Sabendo que a expressão que define o parâmetro densidade é:

$$\Omega = \frac{8\pi G\rho}{3H^2} \tag{III.62}$$

Então, o parâmetro de densidade não é mais do que a soma dos três parâmetros individuais resultantes de cada um dos constituintes do Universo:

$$\Omega = \Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda \tag{III.63}$$

A geometria do espaço continua a ser ditada pelo valor de Ω tal como no caso em que $\Lambda = 0$, tendo as afirmações já conhecidas anteriormente:

$\Omega < 1 \quad \Rightarrow$ Universo geometricamente aberto.

$\Omega = 1 \quad \Rightarrow$ Universo geometricamente plano.

$\Omega > 1 \quad \Rightarrow$ Universo geometricamente fechado.

Nos modelos com constante cosmológica nula, a geometria do Universo definia automaticamente a sua evolução em termos futuros, isto é, definia se o Universo se expandiria para sempre ou se, haveria uma altura no tempo cósmico em que a expansão daria lugar à contracção.

Precisamente, nesta altura, que a introdução de uma constante cosmológica não nula trás algumas modificações, como por exemplo:

- a geometria não define a evolução do Universo como acontecia nos modelos em que $\Lambda = 0$, contudo, a curvatura, positiva, negativa ou nula do espaço continua a ser ditada pelo parâmetro de densidade, Ω.

Para $\Lambda \neq 0$:

- o Universo pode ser fechado geometricamente (ter curvatura positiva) e expandir-se para sempre;
- o Universo pode ter curvatura nula ou mesmo negativa e colapsar.

É necessário saber quem assumirá o domínio da dinâmica do Universo para se poder definir a evolução em termos de expansão infinita ou expansão seguida de colapso:

- se a energia de vácuo, descrita pela constante cosmológica;
- se a matéria e radiação;

- e, em que altura da evolução cósmica é que o fará.

Exemplifiquemos com um **modelo em que $\Omega > 1$.**

- se $\Lambda = 0$, este Universo iniciará um processo de contracção no futuro e colapsará $\Rightarrow$ é um modelo fechado quer geometricamente, quer dinamicamente;

- se $\Lambda \neq 0$ e positiva, esta introduz um efeito repulsivo que contraria a atracção da matéria e da radiação.

É de realçar que a densidade de energia de vácuo mantém-se constante e indiferente à expansão enquanto que a densidade respeitante às componentes material e radiativa diminui ao longo da expansão.

Haverá, então, um momento em que a constante cosmológica dominará sobre as componentes que tentam colapsar o Universo.

O factor de escala a partir da qual a constante cosmológica adquire um papel principal na evolução dinâmica do Universo e tendo em consideração a seguinte equação:

$$\rho_\Lambda > \rho_m^0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \rho_r^0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^4 \qquad \text{(III.64)}$$

e, normalizando a para a época actual $(a_0 = 1)$, sendo ρ_r^0 desprezável, obtém-se:

$$a^3 > \frac{\rho_m^0}{\rho_\Lambda} \qquad \text{(III.65)}$$

ao dividir o segundo membro , tanto o numerador como o denominador, por ρ_c^0 obter-se-á, finalmente, o factor de escala a partir do qual o efeito de Λ, quer seja atractivo ($\Omega_\Lambda < 0$) quer seja repulsivo ($\Omega_\Lambda > 0$), domina sobre o efeito atractivo da massa inercial de matéria e radiação:

$$a = \left| \sqrt[3]{\frac{\Omega_m^0}{\Omega_\Lambda^0}} \right| \qquad \text{(III.66)}$$

Existe apenas um senão, isto é, se antes da constante cosmológica assumir o papel da dinâmica, as componentes atractivas consigam deter a expansão, então, o momento em que Λ passará a dominar nunca mais chegará.

Isto, deve-se ao facto, de que uma vez detida a expansão e iniciado o colapso, tanto a densidade de matéria como a de radiação passarão a aumentar com o tempo e nunca mais ρ_Λ dominará, tanto na expansão como na contracção, mantendo-se constante.

III. 5.3.2 O parâmetro de desaceleração

Este parâmetro é afectado pela introdução da constante cosmológica. Sendo assim, nas secções seguintes serão deduzidas as expressões gerais para as diferentes épocas:

- época dominada pela matéria;

- época dominada pela radiação;
- época dominada em simultâneo pela matéria e pela radiação.

III.5.3.2.1 Universo com matéria e constante cosmológica

Da equação de Friedmann com constante cosmológica não nula, temos:

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_m a^3 \frac{1}{a} + \frac{1}{3}\Lambda a^2 - k \qquad \text{(III.67)}$$

podendo esta equação tomar a seguinte forma:

$$\dot{a}^2 = \frac{C_m}{a} + \frac{1}{3}\Lambda a^2 - k \qquad \text{(III.68)}$$

derivando a expressão anterior e, fazendo uns rearranjos obtemos:

$$\ddot{a} = -\frac{\Omega_m a}{2}H^2 + \frac{\Lambda a}{3} \qquad \text{(III.69)}$$

sabendo que $H = \frac{\dot{a}}{a}$ e, substituindo na equação (III.69) obtém-se:

$$-\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} = \frac{\Omega_m}{2} - \frac{\Lambda a^2}{3\dot{a}^2} \qquad \text{(III.70)}$$

de acordo com a definição do parâmetro de desaceleração q a expressão anterior tomará a seguinte forma:

$$q = \frac{\Omega_m}{2} - \frac{\Lambda}{3H^2} \qquad \text{(III.71)}$$

atendendo às relações (III.53) e (III.62) com introdução de constante cosmológica a equação (III.71) ficará:

$$q = \frac{\Omega_m}{2} - \Omega_\Lambda \qquad \text{(III.72)}$$

No caso de um Universo com matéria e constante cosmológica temos que ter em linha de conta o seguinte:

- se $\Lambda > 0$ então o parâmetro de desaceleração em qualquer instante diminui, o que implica que existam maiores possibilidades de o Universo nunca desacelerar;
- se $\Lambda = 0$ não há alterações, e as equações reduzem-se à forma anterior;
- se $\Lambda < 0$ então q aumenta em qualquer instante, e as probabilidades de vivermos num Universo fechado aumentam.

III.5.3.2.2 Universo com radiação e constante cosmológica

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_r a^4 \frac{1}{a^2} + \frac{1}{3}\Lambda a^2 - k \qquad \text{(III.73)}$$

introduzindo a constante C_r na equação de Friedmann, obtemos:

$$\dot{a}^2 = \frac{C_r}{a^2} + \frac{1}{3}\Lambda a^2 - k \qquad \text{(III.74)}$$

derivando a expressão anterior, obtemos:

$$\ddot{a} = -\Omega_r a H^2 + \frac{\Lambda a}{3} \qquad \text{(III.75)}$$

ainda podemos apresentar a equação anterior da seguinte forma:

$$-\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} = \Omega_r - \frac{\Lambda a^2}{3\dot{a}^2} \qquad \text{(III.76)}$$

tendo em atenção conceitos anteriores, a expressão (III.76) poder-se-á escrever da seguinte maneira:

$$q = \Omega_r - \frac{\Lambda}{3H^2} \qquad \text{(III.77)}$$

ou

$$q = \Omega_r - \Omega_\Lambda \qquad \text{(III.78)}$$

III. 5.3.2.3 Universo com matéria e radiação e uma constante cosmológica

Para determinarmos o parâmetro desaceleração neste tipo de Universo, temos que partir da equação de Friedmann:

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_r a^4 \frac{1}{a^2} + \frac{1}{3}\Lambda a^2 - k \qquad \text{(III.79)}$$

ou

$$\dot{a}^2 = \frac{1}{a}\left(\frac{8\pi G}{3}\rho_m a^3\right) + \frac{1}{a^2}\left(\frac{8\pi G}{3}\rho_m a^4\right) + \frac{1}{3}\Lambda a^2 - k \qquad \text{(III.80)}$$

simplificaremos esta expressão utilizando as constantes C_m e C_r:

$$\dot{a}^2 = \frac{C_m}{a} + \frac{C_r}{a^2} + \frac{1}{3}\Lambda a^2 - k \qquad \text{(III.81)}$$

fazendo alguns rearranjos e derivando posteriormente, esta equação pode também tomar a seguinte forma:

$$\ddot{a} = -\frac{\Omega_m a H^2}{2a^2} - \frac{\Omega_r a H^2}{a^3} + \frac{\Lambda a}{3} \qquad \text{(III.82)}$$

tendo em conta a expressão para o parâmetro de Hubble, obtemos:

$$\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} = \frac{\Omega_m}{2} + \Omega_r - \frac{\Lambda}{3H^2} \qquad \text{(III.83)}$$

ou ainda:

$$q = \frac{\Omega_m}{2} + \Omega_r - \Omega_\Lambda \qquad \text{(III.84)}$$

A equação (III.84) traduz a expressão geral para o parâmetro de desaceleração.

Recentes observações astronómicas demonstram-nos que o Universo está em expansão acelerada.

Uma expansão acelerada, isto é, com $(\ddot{a}_0 > 0) \Rightarrow q_0 < 0$. É fácil de concluir pela expressão (III.84) que num modelo com $\Lambda = 0$ não seria possível que tal acontecesse, porque era impossível Ω_m^0 ou Ω_r^0 tomarem valores negativos. Podemos concluir que, num Universo com constante cosmológica nula e não vazio, a expansão é obrigatoriamente desacelerada.

Sendo a expansão acelerada, é de prever a existência de um $\Lambda = 0$ [8]. Por outro lado, fazendo $q = 0$ obtemos a relação entre os parâmetros de densidade que conduz a uma expansão com velocidade constante:

$$\Omega_m \approx 2\Omega_\Lambda \qquad \text{(III.85)}$$

[8] Poderá existir um outro processo , não relacionado com a constante cosmológica, que conduza a uma expansão acelerada do espaço. Contudo, com os dados de que dispomos actualmente, a expansão acelerada parece ter como explicação mais razoável a existência de uma constante cosmológica positiva.

III.5.3.3 A equação de Friedmann em função dos parâmetros observáveis para modelos com $\Lambda \neq 0$

Trataremos, na generalidade, de modelos que contenham valores não nulos. para a constante cosmológica.

Partindo da equação de Friedmann:

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho a^2 + \frac{8\pi G}{3}\rho_\Lambda a^2 - k \qquad \text{(III.86)}$$

e atendendo a que:

$$\rho > \rho_m^0\left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \rho_r^0\left(\frac{a_0}{a}\right)^4 \qquad \text{(III.87)}$$

tendo, por outro lado, ρ_Λ um valor constante que não é alterado pela expansão do Universo, como anteriormente já referimos e, sabendo que o parâmetro de curvatura k é dado por:

$$k = H_0^2 a_0^2(\Omega_0 - 1) \qquad \text{(III.88)}$$

substituindo na equação (III.86), obtemos:

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_m^0\frac{a_0^3}{a} + \frac{8\pi G}{3}\rho_r^0\frac{a_0^4}{a^2} + \frac{8\pi G}{3}\rho_\Lambda a^2 - H_0^2 a_0^2(\Omega_0 - 1) \qquad \text{(III.89)}$$

sabendo que:

$$\frac{H_0^2}{\rho_c^0} = \frac{8\pi G}{3} \qquad \text{(III.90)}$$

então:

$$\dot{a}^2 = H_0^2 \frac{\rho_m^0}{\rho_c^0}\frac{a_0^3}{a} + H_0^2 \frac{\rho_r^0}{\rho_c^0}\frac{a_0^4}{a^2} + H_0^2 \frac{\rho_\Lambda}{\rho_c^0} a^2 - H_0^2 a_0^2 (\Omega_0 - 1) \qquad \text{(III.91)}$$

atendendo à definição de Ω e ao facto de que:

$$\Omega_0 = \Omega_m^0 + \Omega_r^0 + \Omega_\Lambda^0 \qquad \text{(III.92)}$$

obtemos a equação de Friedmann em função dos parâmetros observáveis:

$$\dot{a}^2 = H_0^2 a_0^2 \left[1 + \frac{a_0}{a}\Omega_m^0 + \frac{a_0^2}{a^2}\Omega_r^0 + \frac{\Omega_\Lambda^0 a^2}{a_0^2} - \left(\Omega_m^0 + \Omega_r^0 + \Omega_\Lambda^0\right) \right] \qquad \text{(III.93)}$$

Da expressão anterior, verifica-se que, para:

- a pequeno a componente radiativa domina;
- a a tender para valores muito elevados o domínio na dinâmica do Universo é assumido pela componente correspondente à constante cosmológica.

III.5.3.4 Modelos acelerados em função de modelos desacelerados

Da equação (III.84), simplificada para modelos com Ω_r^0 desprezável, podemos escrever:

$$\Omega_m^0 = 2q_0 + 2\Omega_\Lambda^0 \qquad \text{(III.94)}$$

num modelo com $k = 0 \quad (\Omega_m^0 + \Omega_\Lambda^0 = 1)$

a equação (III.94) poder-se-á escrever da seguinte forma:

$$\Omega_m^0 = \frac{2}{3}(1 + q_0) \qquad \text{(III.95)}$$

podendo, assim, obter a recta dos Universos geometricamente planos num gráfico $\Omega_m^0 = f(q_0)$, Figura (III.1).

Abaixo dessa recta temos $k = -1$ e acima $k = 1$.

As linhas dos Λ[9] constantes, no mesmo gráfico, têm por equação:

$$\Omega_m^0 = 2(\Omega_\Lambda^0 + q_0) \qquad \text{(III.96)}$$

[9] Λ é por definição constante para um dado Universo. Assim, define –se conjuntos de pontos ocupados por Universos que apresentem o mesmo valor de Λ.

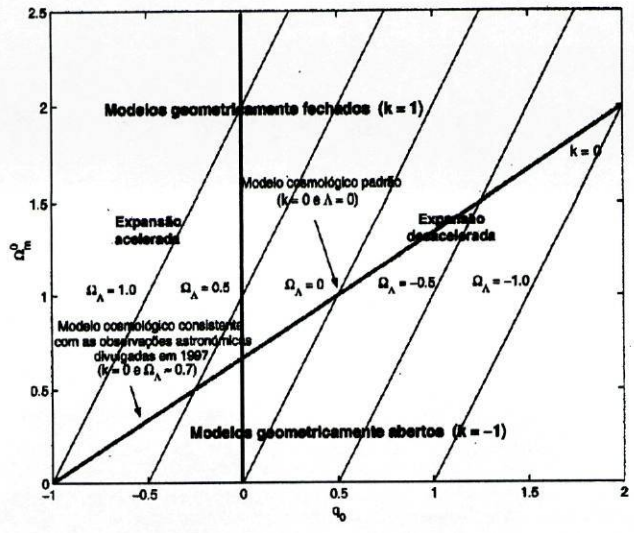


Figura III.1: Diagrama das relações $\Omega_0 - q_0$ para modelos cosmológicos com diversos valores da constante cosmológica Λ.

Na figura III.1 **a linha oblíqua**, para $k = 0$ divide os Universos geometricamente fechados, dos Universos geometricamente abertos.

Para modelos com $\Omega_m^0 < 1.0$ podemos ter Universos fechados geometricamente e da mesma maneira, para modelos com $\Omega_m^0 > 1.0$, poderá também dar-se o caso de o espaço ter curvatura negativa, contrariamente ao que acontece no modelo padrão.

A linha vertical para $q = 0$ separa os modelos com expansão acelerada que se encontram situados à esquerda dessa linha dos modelos com expansão desacelerada que se localizam à sua direita.

Podemos reparar na figura III.1 a representação do **modelo cosmológico padrão** com $k = 0$ e $\Lambda = 0$, também denominado por **modelo de Einstein-de-Sitter** e, ainda, o modelo que melhor parece concordar com

trabalhos de observação divulgados em 1997 que apontam para a existência de uma constante cosmológica com um parâmetro de densidade $\Omega_\Lambda \approx 0.7$.

III.5.3.5 Casos particulares

III.5.3.5.1. Modelos com $\Lambda < 0$

Para $\Lambda < 0$
o Universo será sempre dinamicamente fechado, quer seja geometricamente aberto ($k = -1$), plano ($k = 0$) ou fechado ($k = 1$).

Mesmo que o efeito atractivo, que é este caso, da constante cosmológica apenas se torne dominante a partir de um factor de escala dado pela expressão (III.66), antes desse instante, já a matéria e a radiação tinham estado a retardar a expansão e continuarão a fazer depois, mesmo que, à medida que o Universo expanda, o façam cada vez com menos intensidade.

Temos que entrar em consideração que, o efeito atractivo da constante cosmológica não diminui com a expansão e chegará inevitavelmente o instante em que essa expansão será anulada conduzindo o Universo ao colapso.

III.5.3.5.2 Modelos com $\Lambda > 0$ e $k = 1$

Para um Universo geometricamente fechado encontraremos soluções dinamicamente fechadas e soluções dinamicamente abertas:

- se $\Lambda = \Lambda_E$, verificamos uma evolução que converge assimptoticamente para o Universo estático de Einstein, e o valor do factor de escala tende para $a_E = \frac{1}{\sqrt{\Lambda_E}}$;
- se $\Lambda < \Lambda_E$, a pressão de vácuo não é suficiente para contrariar a atracção devida à matéria e à radiação e o Universo colapsará (**modelos dinamicamente fechados**);
- se $\Lambda > \Lambda_E$, a evolução é iniciada com um Big Bang, expandindo-se o Universo até um valor próximo de a_E onde tende a estabilizar. Permanecerá próximo desse valor durante algum tempo, após o qual retomará a expansão, com $\ddot{a} > 0$ (**modelos dinamicamente abertos**).

No último caso, quando $a \to \infty$, a expansão aproxima-se do tipo exponencial.

Na equação de Friedmann:

$$\dot{a}^2 + k = \frac{8\pi G}{3}\rho a^3 \frac{1}{a} + \frac{\Lambda}{3}a^2 \qquad \text{(III.97)}$$

o termo que domina quando $a \to \infty$ é $\frac{\Lambda}{3}a^2$ ficando:

$$\dot{a}^2 = \frac{\Lambda}{3}a^2 \qquad \text{(III.98)}$$

a solução positiva ficará:

$$\frac{da}{a} = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}dt \qquad \text{(III.99)}$$

conduzindo a uma solução do tipo exponencial:

$$a \ \alpha \ e^{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t} \qquad \text{(III.100)}$$

III.5.3.5.3 Modelos com $\Lambda > 0$ e $k = -1$ ou $k = 0$

Estamos perante modelos geometricamente abertos ($k = -1$) ou planos ($k = 0$) expandindo-se indefinidamente, sendo dinamicamente abertos. Assim como no caso anterior, quando $a(t)$ tende para infinito, a expansão torna-se exponencial. Neste limite, a primeira derivada do factor de escala será sempre positiva:

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho a^2 + \frac{\Lambda}{3}a^2 - k \qquad \text{(III.101)}$$

sendo a inversão da concavidade $(\ddot{a}(t)=0)$ dá-se acima da fronteira do Universo estático, surge quando $a > a_E$. A partir desse momento o termo de pressão do vácuo torna-se dominante e a expansão jamais será travada.

CAPÍTULO IV

Algumas Noções de Relatividade Restrita

IV.1 Diagramas de espaço-tempo

Nas figuras IV.1 e IV.2 encontram-se ilustrados dois diagramas (bidimensionais) de espaço-tempo. Isto é, representamos o plano (x-t), onde o eixo *Ox* corresponde à parte espacial e o eixo *Ot* à parte temporal do espaço-tempo.

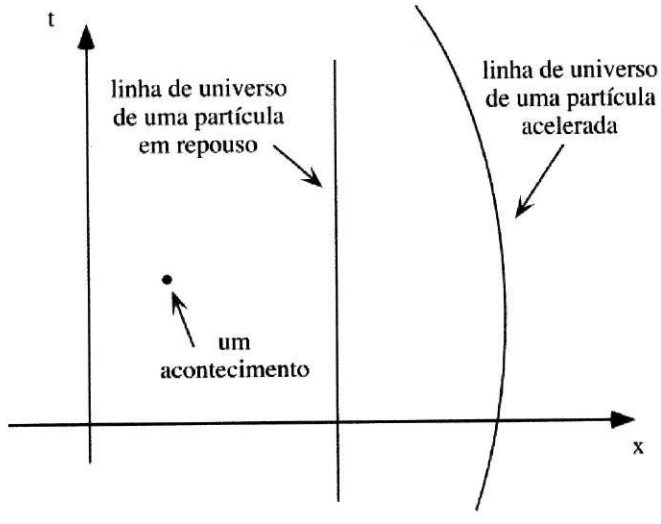


Figura IV.1: Diagrama de espaço-tempo ilustrando um acontecimento, as linhas de universo de uma partícula em repouso e de uma partícula acelerada.

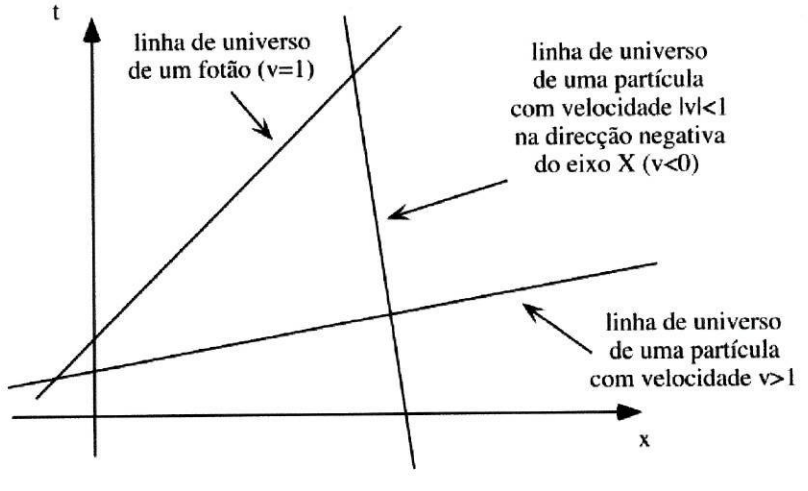


Figura IV.2: Diagrama de espaço-tempo representando as linhas de universo de três partículas com diferentes velocidades.

Um ponto neste espaço bidimensional tem coordenadas x e t fixas, e designa-se por *acontecimento*.

Por outro lado, uma curva neste plano estabelece uma relação entre a coordenada x e a coordenada t, isto é:

$$x = x(t) \tag{IV.1}$$

e portanto representa a posição de uma partícula em diferentes instantes. A esta curva damos o nome de *linha de universo* da partícula.

IV.2 Transformações de Lorentz

É conhecido o facto de que a resolução de muitos problemas se simplifica quando escolhemos determinados sistemas de referência. Em Relatividade Restrita existe também uma classe de sistemas de referência privilegiados– os chamados referenciais de inércia – relativamente aos quais as leis da mecânica (ou mais geralmente as leis da Física) se podem representar na sua forma mais simples.

Se k é um referencial inércial, qualquer outro sistema k' em movimento de translacção uniforme relativamente a k, é também um sistema de referência inércial e as leis da natureza são válidas em todos os referenciais inérciais. O que acabamos de escrever traduz o que normalmente se denomina por "Princípio da Relatividade Restrita".

Consideremos dois observadores (referenciais) movendo-se entre si com velocidade uniforme.

Seja S um referencial munido de um sistema de eixos ($\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$) e de um relógio em repouso registando o tempo t e, seja S' um outro referencial com um sistema de eixos ($\vec{e}_1'$, $\vec{e}_2'$, $\vec{e}_3'$), transportando um relógio que regista o tempo t', que se desloca com uma velocidade $\vec{V}$ na direcção x de S (por exemplo $\vec{V} = V\,\vec{e}_1$).

Supondo os relógios sincronizados de forma a que para $t = t' = 0$ os sistemas de eixos coincidem espacialmente (ex. têm a mesma origem).

Assim, qualquer acontecimento físico observado em S no ponto (x, y, z) no instante t será registado em S' num certo ponto (x', y', z') num determinado instante t'.

De acordo com o Princípio da Relatividade Restrita devemos admitir o mesmo para qualquer outro sistema inércial, admitindo como válido o valor constante da velocidade da luz em todos os sistemas de inércia, isto é, a velocidade da luz c é a mesma para todos os referenciais em movimento relativo uniforme.

Tendo em conta as noções de espaço e de tempo, além das considerações gerais de isotropia e homogeneidade do espaço é possível deduzir as chamadas Transformações de Lorentz que relacionam tanto as coordenadas como os tempos nos dois referenciais, S e S'. Essas transformações escrevem-se na forma seguinte:

$$x' = \gamma (x - vt) \qquad \text{(IV.2)}$$

$$y' = y \qquad \text{(IV.3a)}$$

$$z' = z \qquad \text{(IV.3b)}$$

$$t' = \gamma (t - \frac{v}{c^2} x) \qquad \text{(IV.4)}$$

onde

$$\beta = \frac{v}{c} \qquad \text{e} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \text{(IV.5)}$$

Sendo que o conjunto de transformações

$$x \rightarrow x' , \quad y \rightarrow y', \quad z \rightarrow z' , \quad t \rightarrow t' \qquad \text{e} \qquad \vec{V} \rightarrow - \vec{V} \qquad \text{(IV.6)}$$

dá origem às chamadas Transformações de Lorentz inversas:

$$x = \gamma (x' + vt') \qquad \text{(IV.7)}$$

$$y = y' \qquad \text{(IV.8a)}$$

$$z = z' \tag{IV.8b}$$

$$t = \gamma (t' + \frac{v}{c^2} x') \tag{IV.9}$$

As transformações (IV.2), (IV.3ª) e (IV3b) deixam invariante a quantidade

$$\begin{aligned} S^2 &= (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 \\ &= (ct')^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 \end{aligned} \tag{IV.10}$$

A expressão (IV.10) é independente da velocidade v, sendo invariante sob as Transformações de Lorentz, é designado por isso um *invariante de Lorentz*.

IV.3 Noção de intervalo em Relatividade Restrita

As relações (IV.10) também são válidas para a diferença entre as coordenadas de dois acontecimentos, isto é, efectuando as substituições

$$x \rightarrow \Delta x \tag{IV.11}$$

$$y \rightarrow \Delta y \tag{IV.12}$$

$$z \rightarrow \Delta z \tag{IV.13}$$

$$S \rightarrow \Delta S \tag{IV.14}$$

A quantidade ΔS^2 pode ter um sinal qualquer, obtendo-se desta forma três tipos de intervalos entre os dois acontecimentos considerados:

- intervalo tipo tempo: $\Delta S^2 > 0$
- intervalo tipo luz: $\Delta S^2 = 0$
- intervalo tipo espaço: $\Delta S^2 < 0$

A existência destes diferentes intervalos permite estabelecer as relações de causalidade existentes entre acontecimentos.

IV.3.1 Intervalo Tipo Espaço: $\Delta S^2 < 0$

A partir da relação:

$$\Delta S^2 = (c\Delta t)^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 \quad = (c\Delta t)^2 - \Delta r^2 \tag{IV.15}$$

que nos dá a separação entre dois acontecimentos A e B, e sabendo que $\Delta s^2 < 0$, podemos escrever

$$c^2\Delta t^2 < \Delta r^2 \tag{IV.16}$$

A velocidade de afastamento entre os dois acontecimentos considerados, w pode obter-se a partir da relação seguinte:

$$w^2 = \frac{\Delta r^2}{\Delta t^2} = (\frac{\Delta x}{\Delta t})^2 + (\frac{\Delta y}{\Delta t})^2 + (\frac{\Delta z}{\Delta t})^2 \qquad \text{(IV.17)}$$

e atendendo à expressão (IV.16) podemos então escrever:

$$w^2 = \frac{\Delta r^2}{\Delta t^2} > c^2 \qquad \text{(IV.18)}$$

A relação (IV.18) não é permitida na teoria da relatividade restrita, visto que, de acordo com esta teoria, a velocidade da luz - c - é a mesma para todos os referenciais em movimento relativo uniforme. Esta velocidade é considerada a velocidade máxima a que se podem enviar ou receber sinais.

Sendo assim $\Delta s^2 < 0$ descreve o conjunto de acontecimentos fora da influência de A, isto é, sem relação causal com este acontecimento, no sentido de que não podem ser a sua causa ($\Delta t < 0$), nem causados por ele ($\Delta t > 0$).

IV.3.2 Intervalo Tipo Tempo: $\Delta s^2 > 0$

Para $\Delta r^2 < c^2 \Delta t^2$, e supondo que A e B se separam a uma velocidade w, podemos escrever:

$$w^2 = \frac{\Delta r^2}{\Delta t^2} = (\frac{\Delta x}{\Delta t})^2 + (\frac{\Delta y}{\Delta t})^2 + (\frac{\Delta z}{\Delta t})^2 < c^2 \qquad \text{(IV.19)}$$

Constatando-se que $w < c$, isto significa que A e B se influenciam mutuamente podendo A ser a causa de B e vice-versa, conforme o sinal de Δt. Assim, $\Delta s^2 > 0$ descreve a região de influência de A ($\Delta t > 0$), ou a região que está na origem de A ($\Delta t < 0$). Esta região constitui o conjunto de acontecimentos em relação causal com A, isto é, que podem influenciar ou ser influenciados por A, influências essas transmitidas a velocidades inferiores a c.

IV.3.3 Intervalo Tipo Luz: $\Delta s^2 = 0$

Neste caso temos:

$$\Delta r^2 = c^2 \Delta t^2 \qquad \text{(IV.20)}$$

ou

$$|\Delta r| = c\,|\Delta t| \qquad \text{(IV.21)}$$

A equação (IV.21) descreve o conjunto de acontecimentos na fronteira dos dois outros regimes, que são acontecimentos resultantes da emissão em A de um sinal luminoso ($\Delta t > 0$), ou que originam A por emissão de sinais luminosos ($\Delta t < 0$). Em qualquer dos casos, a influência tem de ser por sinais luminosos por serem os únicos susceptíveis de se deslocar à velocidade c. A região $\Delta s^2 = 0$ é a fronteira de influencia de A e o limite da sua causalidade.

IV.4 Cones de luz

Podemos facilmente ilustrar o conceito de cone de luz recorrendo a um diagrama de espaço-tempo. Comecemos por considerar um diagrama de espaço-tempo, e neste referencial consideremos um observador em repouso no espaço, tal como se ilustra na figura IV.3.

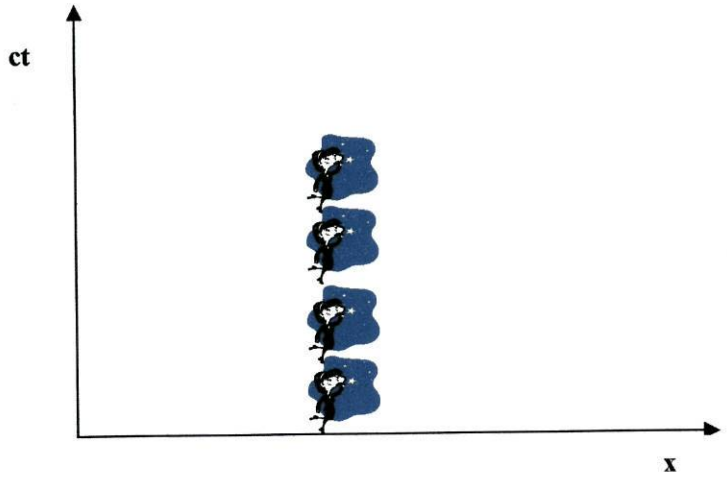


Figura IV.3: Um observador, em repouso, num diagrama espaço-tempo.

A representação deste observador, neste diagrama, é uma recta paralela ao eixo do tempo. Para que o eixo temporal e o eixo espacial tenham as mesmas unidades, devemos multiplicar a coordenada temporal pela velocidade da luz, como também se indica na figura IV.3.

Por outro lado, devido ao facto de a velocidade da luz ser finita, da ordem de 300 000 km/s, a informação luminosa emitida por uma fonte demora um intervalo de tempo não nulo para alcançar o observador considerado.

A figura IV.4 representa a trajectória de um raio luminoso (linha de universo de um fotão), deslocando-se à velocidade da luz.

Tal como está ilustrado, esta trajectória é uma recta que faz um ângulo de 45° com os dois eixos, o espacial e o temporal.

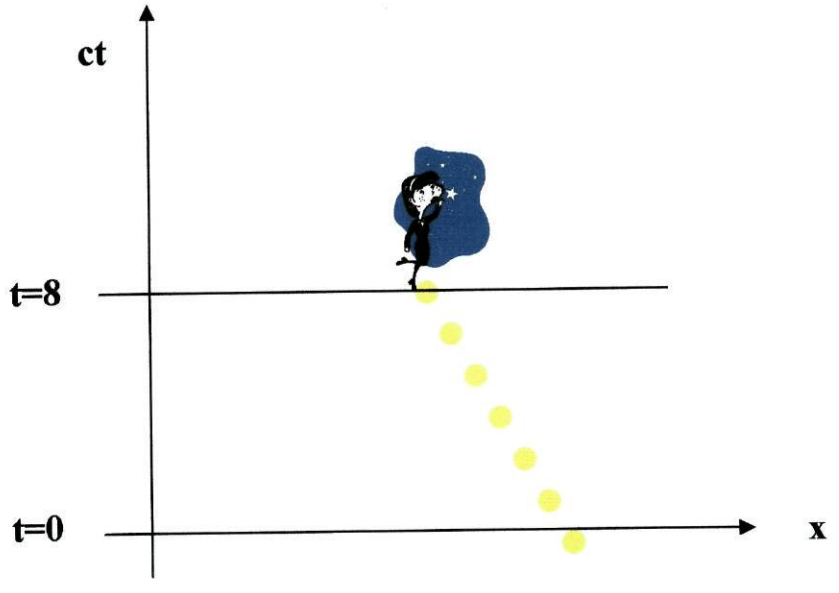


Figura IV.4: Instante em que o observador recebe a luz proveniente do Sol, demorando 8 minutos a chegar à Terra.

Da mesma forma, a luz emitida pelo observador tem um comportamento semelhante, tal como se representa na figura IV.5.

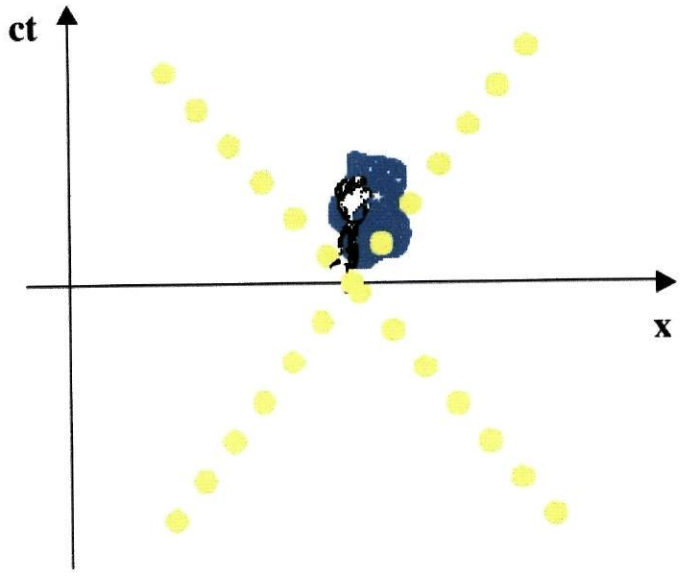


Figura IV.5: Representação bidimensional de toda a informação luminosa recebida e emitida (nos dois sentidos do eixo dos x) por um observador num determinado instante.

Se considerarmos uma segunda dimensão espacial, a trajectória dos raios luminosos que atingem o observador e a trajectória dos fotões emitidos pelo observador no instante considerado darão origem a uma superfície cónica, designada por cone de luz, tal como o que se pretende ilustrar na figura IV.6.

Todos os acontecimentos no interior do cone de luz do acontecimento O têm uma separação tipo-tempo relativamente a O, assim, todos esses acontecimentos podem ser atingidos a partir de O através de uma linha de universo tipo-tempo, constituindo por este motivo, a região causal do acontecimento O, no instante considerado. Podemos afirmar que todos os acontecimentos no interior do cone de luz estão causalmente ligados a O. Os acontecimentos situados no exterior do cone de luz estão separados de O por intervalos de tipo-espaço, o que significa que estes acontecimentos não podem ser atingidos a partir de O através de uma linha de universo tipo-

tempo, não estando portanto causalmente ligados a O, e constituindo uma região do espaço-tempo inacessível para O.

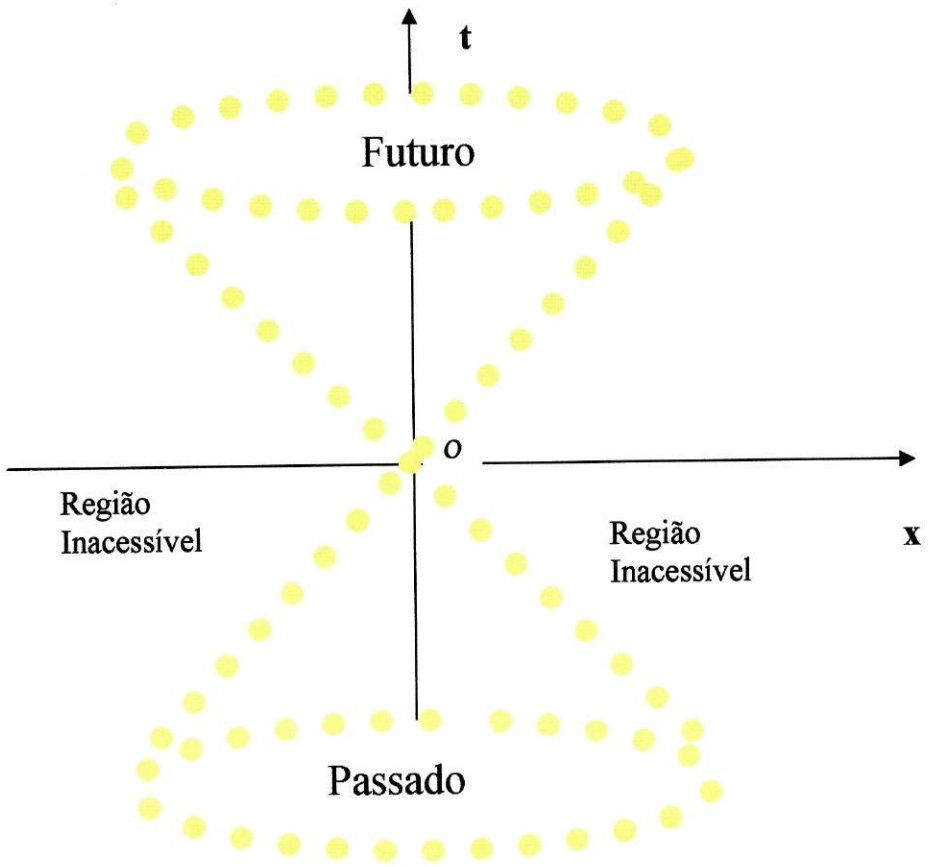


Figura IV.6: Cone de luz do futuro, cone de luz do passado e regiões inacessíveis, para um observador O, num dado instante t.

Aos conceitos representadas na figura IV.6 podemos, também, designar a região do futuro por região do futuro absoluto de O e, a região do passado por passado absoluto de O. As outras regiões do espaço-tempo, as que se encontram no exterior do cone de luz do observador, são relativamente a O, designadas por regiões inacessíveis ou por regiões de afastamento absoluto.

Voltando aos três tipos de intervalo que definimos anteriormente, podemos ilustrar as diversas regiões a distinguir no espaço-tempo de um observador, em função desses diferentes intervalos. Por simplicidade, consideremos um acontecimento ***O*** coincidente com a origem dos espaços e dos tempos e apenas uma dimensão espacial x. Assim o plano (ct, x) pode ser dividido nas regiões seguintes:

- $\Delta S^2 > 0$, $ct > 0$: *cone de luz do futuro* região de influência do acontecimento ***O***;

- $\Delta S^2 > 0$, $ct < 0$: *cone de luz do passado*, região de acontecimentos que poderiam ter originado ***O***;

- $\Delta S^2 < 0$: região de acontecimentos sem qualquer relação de causalidade com ***O***, a qual inclui os acontecimentos fora da sua influência ($ct > 0$), e aqueles que não podem estar na sua origem ($ct < 0$), sendo $\Delta S^2 = 0$ a região onde a influência só pode ser efectuada por sinais luminosos.

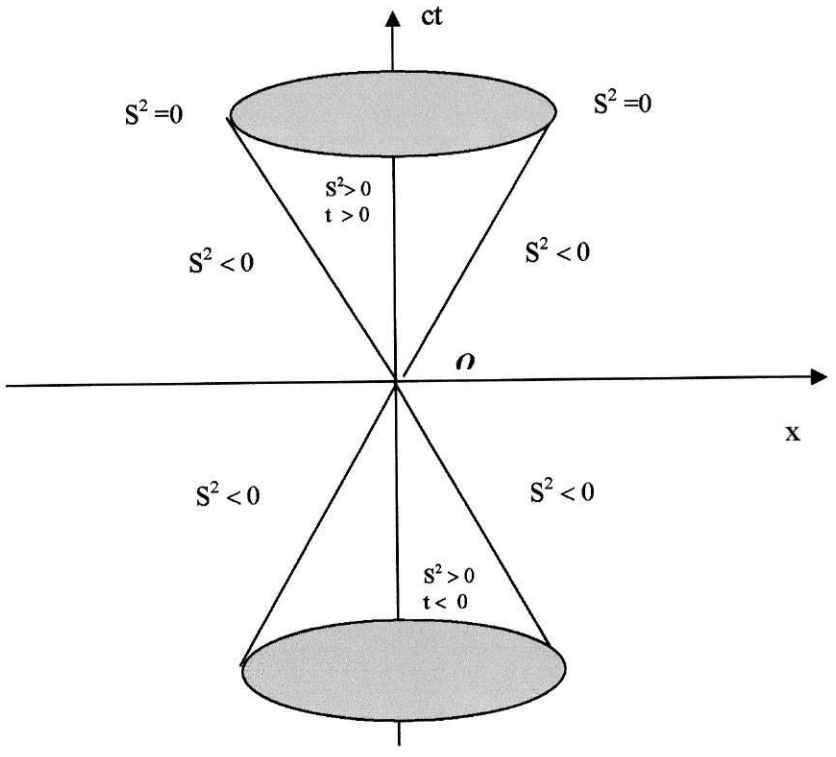


Figura IV.7: Cone de luz de um observador: o cone de luz do passado contém o passado absoluto do observador, e o cone de luz do futuro, o seu futuro absoluto.

CAPÍTULO V

Horizontes Cosmológicos

V.1 Introdução

Em Cosmologia definimos horizontes como "barreiras" que limitam a possibilidade de comunicação entre acontecimentos no Universo. Existem dois tipos de horizontes cosmológicos distintos: o *horizonte de partícula* e o *horizonte de acontecimentos*. Cada um deles é definido de acordo com o que estamos interessados em observar, linhas de universo ou acontecimentos,, respectivamente.

Para determinado observador, o que pode e o que não pode ser observado, isto é, o observável e o não observável, tem uma localização diferente no espaço-tempo. Por outro lado podem ser efectuadas observações de pelo menos dois tipos de ocorrências no espaço-tempo, linhas de universo e acontecimentos.

Como vimos, as linhas de universo representam objectos, como galáxias, que duram longos períodos de tempo, isto é, em cada instante ocupam um dado lugar no espaço que se prolonga no tempo. Quando "algo" é breve, como a explosão de uma supernova, por exemplo, que ocorre num determinado ponto do espaço e que, na escala cosmológica, perdura apenas durante um curto intervalo de tempo, dizemos que estamos perante um acontecimento. Sendo assim, as linhas de universo são percursos constituídos por acontecimentos, isto é, a linha de universo de uma galáxia é o conjunto de todos os acontecimentos dessa mesma galáxia, ordenados de uma maneira cronológica.

É com base na diferença entre acontecimentos e linhas de universo que iremos distinguir dois tipos distintos de horizontes:

- *o horizonte de partícula,* relacionado com a observação de linhas de universo;
- *o horizonte de acontecimentos,* relacionado com a observação de acontecimentos

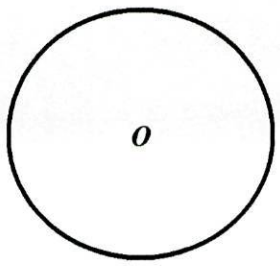


Figura V.1: Horizonte de partícula, fronteira no espaço, que delimita o universo observável, e no qual o acontecimento ***O***, que representa o observador, se situa no centro da região observável.

Foi Rindler[10] quem pela primeira vez distinguiu estes diferentes tipos de horizontes.

Convém aqui referir que os horizontes terrestres a que estamos habituados, no mar por exemplo, são, de certa forma, horizontes do tipo dos horizontes de partícula cosmológicos (associados às linhas de universo), muito embora possuam propriedades bastante distintas.

---

[10] Em 1956, Wolfgang Rindler foi o o primeiro a analisar de uma forma profunda, a diferença entre o observado, o observável e o não observável. Esta análise conduziu-o ao estabelecimento dos dois tipos de horizontes cosmológicos que aqui se apresentou.

A figura V.1 ilustra a separação entre a região observável em determinado instante, o interior da "esfera", e a região não observável, o exterior da mesma a "esfera" considerada nesse mesmo instante.

Por outro lado, o horizonte de acontecimentos, ao contrário do que acontece com o horizonte de partícula, não divide uma região em duas. Este horizonte estabelece uma divisão no conjunto dos acontecimentos dividindo-os nos dois grupos seguintes:

- os que são observáveis num momento ou noutro;
- os que nunca serão observáveis.

Podemos dizer que o horizonte de acontecimentos não é uma "superfície" no espaço mas sim um "cone" que separa os acontecimentos que podem ser observados num qualquer instante, dos que nunca poderão ser observados.

V.2 Horizonte de partícula

A distância a que se encontra o horizonte de partícula de um dado observador, num determinado instante, está associada à distância percorrida, pelos fotões, desde o "Big Bang" até ao instante considerado[11].

Assim, em cada época, podemos considerar que o horizonte de partícula se encontra a uma distância igual ao "raio" do Universo observável, isto é, a distância aos objectos mais afastados que teoricamente podemos observar, tendo em consideração a "viagem" da luz desde o "Big Bang" até hoje. Como a velocidade da luz tem um valor finito, essa distância é, em princípio, também finita.

No entanto esses objectos, que se encontram à distância do horizonte de partícula, têm um desvio para o vermelho infinito.

Sabendo que a distância percorrida pela luz num intervalo de tempo dt, é:

$$dr = cdt\,, \tag{V.1}$$

e, devido ao facto de os fotões se deslocarem ao longo de linhas de universo com uma separação tipo-luz ($ds^2=0$), recorrendo à expressão da métrica de Robertson-Walker[12]:

$$c^2dt^2 = a^2\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2\left(d\phi^2 + \sin^2\phi d\varphi^2\right)\right] \tag{V.2}$$

conclui-se que, para k=0:

---

11 Na realidade os fotões não "percorreram" a distância a que hoje se encontram de nós. Eles foram "ajudados" pela expansão, ocupando actualmente posições diferentes das que ocupariam se o Universo fosse estático.

12 A métrica de Robertson-Walker caracteriza a geometria espaço-tempo que se adapta ao princípio cosmológico.

$$c\,dt = a\,dr \tag{V.3}$$

ou

$$dr = c\,dt/a \tag{V.4}$$

Assim, na época actual, a distância co-móvel ao horizonte de partícula, r_p poderá ser obtida calculando o valor do seguinte integral

$$r_p = \int_0^{t_0} \frac{c\,dt}{a(t)} \tag{V.5}$$

Se, nesta expressão, o valor do integral for finito, então r_p é a distância co-móvel a que se encontra o horizonte de partícula, representando o "raio" do Universo observável, para um dado observador.

Por outro lado a relação entre o factor de escala e o desvio cosmológico para o vermelho é, como vimos, dada por:

$$\frac{a(t_0)}{a(t)} = \frac{1}{a(t)} = 1 + z \tag{V.6}$$

e, assim, podemos obter a distância co-móvel ao horizonte de partícula em função do desvio cosmológico para o vermelho, isto é:

$$r_p = \int_0^{t_0} \frac{c\,dt}{a(t)} = c\int_{\infty}^{0} (1+z)\frac{dt}{dz}dz \tag{V.7}$$

Como se constata pela equação (V.7), o valor de r_p depende do modelo cosmológico considerado, devido à presença da função a(t) na função integranda. Nos modelos cosmológicos em que existe este horizonte, ele é considerado como sendo uma "superfície esférica", ocupando o observador o seu centro. Como dissemos, esta "superfície esférica" divide, em cada instante, o espaço em duas regiões distintas, a região que é possível observar e aquela que nos está vedada à observação. Este é um horizonte que em geral

varia com o tempo e por isso aquelas duas regiões estão em contínua alteração.

O valor da distância ao horizonte de partícula num dado instante depende, como dissemos também, do modelo cosmológico considerado, e é consequência do facto de a velocidade da luz ser finita. Pode por isso acontecer que exista muita informação luminosa que em determinado instante ainda não tenha tido tempo para alcançar o observador. Ou seja, apesar de ser informação que se encontre a uma distância inferior à distância ao horizonte, pode não estar ainda no interior do cone de luz do passado do observador considerado.

V.2.1 O horizonte de partícula num universo newtoniano

Apesar de o nosso Universo não ser um universo newtoniano, há conceitos associados ao horizonte de partícula que podem ser ilustrados, de uma forma simples, recorrendo a este tipo de universo.

O Universo newtoniano é um universo estático e infinito. Tendo em conta o Princípio Cosmológico supomos que as galáxias se encontram distribuídas uniformemente no espaço, existindo há cerca de 10^{10} anos.

Como vimos anteriormente (ver a figura IV.1) as linhas de universo relativas a objectos em repouso (como admitimos para as galáxias num universo newtoniano), são representadas num diagrama espaço-tempo por linhas rectas verticais.

Considerando um observador **O** num Universo Newtoniano e o respectivo diagrama de espaço-tempo, como se mostra na figura 9.2, podemos

facilmente representar o seu cone de luz do passado bem como as linhas de universo de três galáxias que representaremos por **A, B** e **C**.

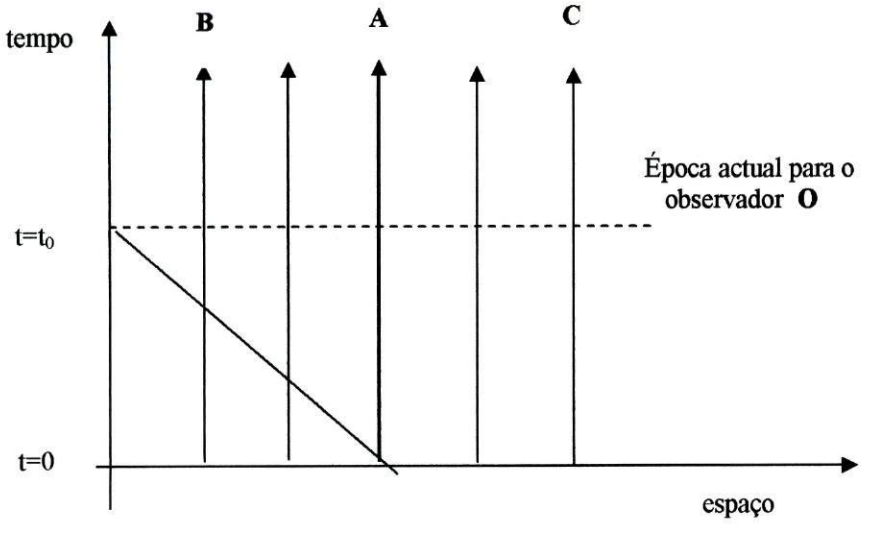


Figura V.2: Cone de luz do passado para observador O num universo newtoniano.

Da figura V.2 conclui-se que parte da linha do universo da galáxia **B** se encontra no interior do cone de luz do passado de **O**, o mesmo não acontecendo com a linha de universo da galáxia **C**, que se encontra toda no exterior do cone de luz do passado do observador **O**.

O horizonte de partícula para o observador **O** é definido pela linha de universo da galáxia **A**. Podemos, então, afirmar que a galáxia **B** é uma galáxia visível, enquanto que, a galáxia **C** é uma galáxia invisível para este mesmo observador.

Num dado instante as galáxias observáveis para um dado observador são todas aquelas cujas linhas de universo intersectam o seu cone de luz do passado.

A linha de universo da galáxia **A** separa as linhas de universo das galáxias observáveis daquelas que não são observáveis, sendo esta a linha de universo que determina o horizonte de partícula do observador **O** no instante considerado t_0.

Na época t_0, o observador **O** não pode observar galáxias que estejam a uma distância superior à da galáxia **A**, e admitindo que todas as galáxias existem há cerca de 10^{10} anos, então só as poderemos observar a uma distância da ordem de 10^{10} anos-luz. As que estão a uma distância superior não são visíveis.

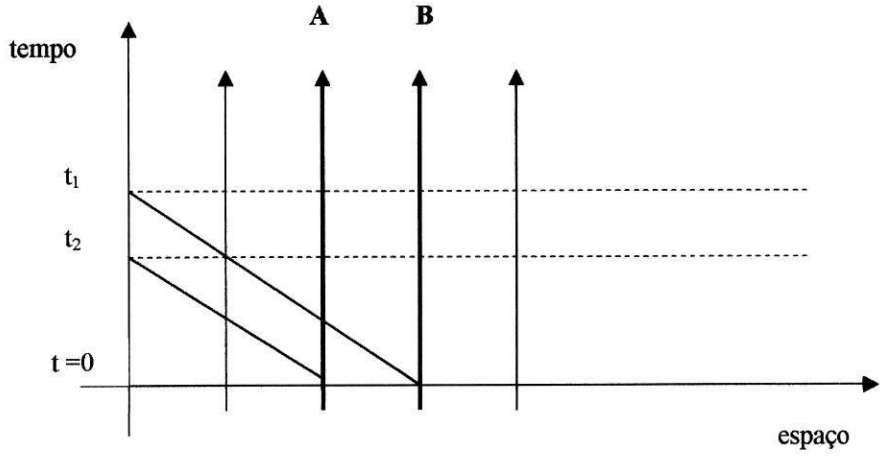


Figura V.3: Diagrama de espaço-tempo para um mesmo observador **O** e os cones de luz do passado em dois instantes diferentes: t_1 e $t_2 > t_1$.

Para o observador **O,** o horizonte de partícula, que no instante t_1 era definido pela distância à galáxia **A,** no instante t_2 passou a ser definido pela linha de universo da galáxia **B**, encontrando-se mais afastada de **O** do que a galáxia **A.**

É de realçar que o horizonte se expandiu no intervalo de tempo $[t_1 ; t_2]$, como aconteceria em qualquer intervalo de tempo, com uma velocidade igual à velocidade da luz (c= 300 000 km.s^{-1}).

Com este último exemplo, concluímos que mesmo em universos estáticos, como é o caso do dos universos newtonianos, o horizonte de partícula de qualquer observador é definido por uma "superfície", que se encontra em expansão contínua à velocidade da luz.

V.3 Horizonte de Acontecimentos

O "raio" deste tipo de horizonte define-se como sendo a distância que os fotões, por "nós" enviados no início do universo, percorrem durante o "tempo de vida" do universo. Caso exista, este horizonte é por isso definido pelo último cone de luz do observador. Assim, este horizonte só existirá se

$$\int_0^{t_{máx.}} \frac{cdt}{a(t)} < \infty \qquad \text{(V.8)}$$

Quando existe, este tipo de horizonte permite determinar a parte do universo que nunca nos será acessível.

O horizonte de acontecimentos é um horizonte diferente do horizonte de partícula. Como vimos, o horizonte de partícula divide, num determinado instante, o espaço em duas regiões distintas, a região observável e aquela que num determinado instante não poderá ser observada. O horizonte de acontecimentos, por seu lado, divide os acontecimentos em dois grupos: o grupo dos acontecimentos que são observáveis em algum instante e o grupo dos acontecimentos que nunca poderão ser observados, por nunca se encontrarem no interior de algum cone de luz do passado do observador.

De referir que os horizontes de acontecimentos normalmente associados a buracos negros são horizontes deste tipo.

Atendendo à equação (V.7) que define o horizonte de partícula e considerando que o horizonte de acontecimentos é definido pelo último cone de luz do observador, este horizonte só existe no caso de o integral

$$r_a = \int_0^{t_{máx.}} \frac{cdt}{a(t)} \qquad \text{(V.9)}$$

convergir, isto é, se tiver um valor finito, caso contrário estamos perante um modelo cosmológico sem horizonte de acontecimentos.

Nesta equação temos:

$t_{máx.}$ – "tempo de vida" do universo, que poderá ser finito ou infinito; por exemplo, num universo que entre em contracção este tempo é necessariamente finito;

0 – considerado o "início do tempo" no modelo cosmológico em causa;

r_a – "distância inicial" ao horizonte de acontecimentos (também designado por horizonte de eventos), ou "raio" do horizonte de acontecimentos.

CAPÍTULO VI

Modelos Cosmológicos

VI. 1 Modelos de Friedmann

Em 1922, Aleksandrn Aleksandrovich Friedmann, (1888-1925), cientista russo nascido na cidade de S. Petersburg, obteve pela primeira vez soluções expansionistas das equações de Einstein. Nessa época, tanto Einstein como De Sitter insistiam que as propriedades do espaço-tempo eram estáticas.

Friedmann encontrou um erro no modelo de Einstein, escrito em 1917, que levou o próprio Einstein a admitir esse erro, concluindo que o universo era necessariamente estático quando a força Λ[13] era introduzida.

O universo descrito pelo modelo de Friedmann é espacialmente homogéneo e isotrópico em relação a qualquer ponto, possuindo origem no passado altura em que a densidade da matéria diverge. Actualmente, este modelo é considerado como modelo padrão da Cosmologia.

Friedmann mostrou que, sob certas condições, obtém-se uma solução que descreve a expansão e a concentração em ciclos do universo fechado e cujo período ele estimou em dez mil milhões de anos. É provável que ele tenha chegado a esse valor, bastante próximo, ao que hoje acreditamos ser a idade do universo (~ 14 mil milhões de anos).

A família de soluções para a teoria da relatividade geral encontrada por Friedmann e Lemaître descreve um universo em expansão, a eles podemos chamar os pais da Cosmologia Moderna. As soluções possíveis das equações da relatividade geral incluem expansão eterna ou colapso.

[13] Denomina-se Λ por constante cosmológica. É uma força hipotética repulsiva que evita o colapso do Universo pela acção da força gravitacional, garantindo um Universo estático. Foi introduzida por Einsteinn no seu modelo.

Sendo a constante cosmológica (Λ) nula, os modelos dividem-se em três classes:

1. **universo fechado** - este tipo de universo expande até alcançar um tamanho máximo, após esse ponto colapsará. Isto é, se a densidade da matéria for suficientemente grande reverterá a expansão, tal como, a superficie de uma esfera . Se uma nave viajasse por um período de tempo extremamente longo em linha recta, voltaria de novo ao mesmo ponto de partida;

2. **universo aberto** – se a densidade for muito baixa, o universo continuará a expandir-se para sempre;

3. **universo plano** – encontra-se no limite entre o universo aberto e fechado. O universo, neste caso, expande-se para sempre, sendo a velocidade das galáxias cada vez menor, chegando a zero no infinito. Neste caso, estamos perante o universo euclidiano.

Em 1924, Friedmann publicou outro trabalho, mas, no ano seguinte contraiu tifo e faleceu precocemente aos 37 anos. Foi com Friedmann que a Cosmologia entrou numa nova era.

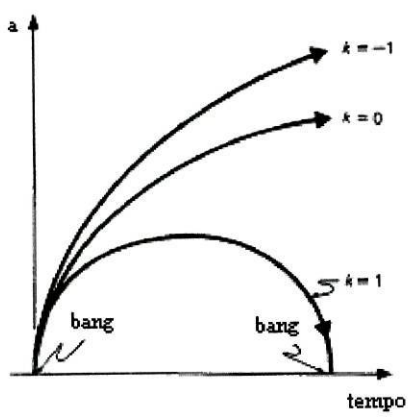


Figura VI.1: Todos os universos de Friedmann começam com um big-bang.

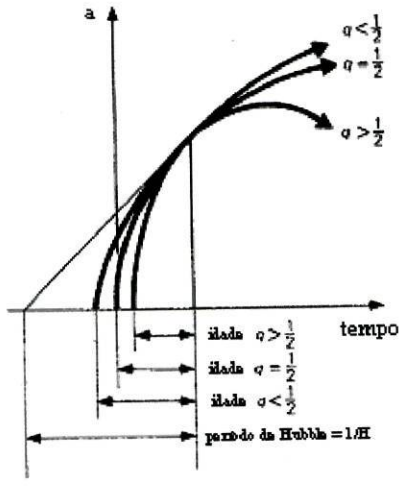


Figura VI.2: Diferentes universos de Friedmann com o mesmo valor de H e diferente parâmetro de desaceleração.

Das figuras VI.1 e VI.2 conclui-se que universos de elevado q têm idades menores, sendo assim:

K = 1: $q > \frac{1}{2} \rightarrow t < \frac{2}{3}H$; espaço esférico e fechado;

K = 0: $q = \frac{1}{2} \rightarrow t = \frac{2}{3}H$; espaço plano e aberto;

K = -1: $q < \frac{1}{2} \rightarrow t > \frac{2}{3}H$; espaço hiperbólico e aberto.

Um universo fechado tem uma idade inferior a 10 mil milhões de anos e um universo aberto tem uma idade igual ou superior a 10 mil milhões de anos. Estes valores são aproximados dependendo do valor assumido para a constante de Hubble.

Das equações de Friedmann, o ρ na época dominada pela matéria é dado por:

$$4\pi\rho G = 3qH^2 \qquad \text{(VI.1)}$$

Sabendo que, nos universos de Friedmann a desaceleração, q, é sempre positiva, definiremos a densidade crítica ($\rho_{crítica}$) como sendo a densidade de Einstein - De Sitter em que q = ½ :

$$8\pi\rho_{crítico} G = 3H^2 \qquad \text{(VI.2)}$$

Da equação (VI.2) obteremos:

$$q > \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \rho > \rho_{crítico}$$

$$q = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \rho = \rho_{crítico}$$

$$q < \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \rho < \rho_{crítico}$$

VI.1.1 Universo fechado

Todos os universos de Friedmann desaceleram enquanto expandem e, quando o $q > \frac{1}{2}$, cessam a expansão e começam a colapsar.

A densidade é maior que a densidade crítica, ($\rho > \rho_{crítico}$), por exemplo, a atracção gravitacional, dominada pela matéria, é suficiente para fazer parar a expansão. Sendo assim, o Universo expandirá até atingir um tamanho máximo, após esse ponto colapsará.

A contracção dá-se lentamente, após que, acelera até atingir o "big-crunch". A matéria colapsará num estado super denso e sobreaquecido.

O tamanho do Universo dependerá de quanto maior for o valor da densidade relativamente ao valor da densidade crítica. Assim, uma grande densidade implica um menor tempo para alcançar o "big-crunch".

O Universo adquire uma geometria esférica com uma curvatura positiva (k=1).

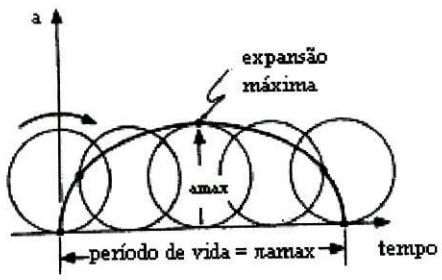


Figura VI.3: Variação do factor de escala (a) com o tempo num universo fechado de Friedmann. São visíveis os sucessivos ciclos.

A figura VI.3 mostra-nos uma ciclóide que não é mais do que uma curva idêntica ao traçado de uma roda que rola numa superfície plana. Todos estes universos começam e acabam em big-bangs cujo k = 1.

Nestes modelos, o factor de escala pode ser considerado como o raio do Universo e $2\pi a$, o tempo de circumnavegação da luz. No máximo da expansão o raio atinge o valor de:

$$a_{máx.} = a_0 \left(\frac{2q}{2q-1} \right) \qquad \text{(VI.3)}$$

em que:

a_0 = raio actual

q = parâmetro de desaceleração actual

Considerando q = 1

$$a_{max.} = 2a_0 \qquad \text{(VI.4)}$$

da equação anterior conclui-se que o universo está a meio do seu tamanho máximo.

Para um

$$a_{max.} \rightarrow \rho_{min.} \quad ,$$

então:

$$a_{max.} = \left(\frac{3}{8\pi\rho_{min.} G} \right)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{(VI.5)}$$

Apesar deste universo se encontrar no estado estacionário, estando na sua inflação máxima, não se pode comparar com o universo estático de Einstein.

A massa determina-se a partir da seguinte equação:

$$a_{max.} = \frac{2GM}{3\pi c^2} \qquad \text{(VI.6)}$$

O tempo de vida total de um universo fechado de Friedmann, aquando de um big-bang a outro big-bang será de $\pi a_{máx.}$ ou melhor metade do tempo de circumnavegação da luz no máximo da sua inflação.

$$\text{Tempo de vida} = \frac{2\pi q}{(2q-1)^{\frac{3}{2}}} \text{ períodos de Hubble} \qquad \text{(VI.7)}$$

Se q = 1

Tempo de vida = 2π período de Hubble ou cerca de 100 mil milhões de anos.

Para alcançar metade da sua idade, ou seja, o tempo para atingir o tamanho máximo será de 50 mil milhões de anos. Todavia, esse valor rondará os 40 mil milhões de anos.

Este tipo de Universo terá um volume finito de espaço, todavia, não tem qualquer centro nem fronteira para não contrariar o princípio cosmológico. Existirá um tempo finito para a expansão e para o colapso.

VI.1.2 Universo aberto

A densidade é menor que a densidade crítica, ($\rho < \rho_{crítico}$), isto é, não existe matéria suficiente para parar a expansão, fazendo com que o Universo expanda para sempre.

É infinito na sua extensão, sendo a geometria do espaço hiperbólica munida de uma curvatura negativa (k = -1).

A luz, proveniente de muitos objectos distantes, ao chegar até nós é considerada como sendo o "redshift". O limite mais afastado de observação é denominado como horizonte cósmico, porém não é um limite de espaço. Apenas se observam acontecimentos que estejam perto, isto é, que a luz tenha tempo suficiente para nos alcançar desde o big-bang.

A distancia ao horizonte cósmico, (h), é aproximadamente igual ao produto da velocidade da luz, (c), pela idade, (t), do Universo:

$$h = ct \qquad \text{(VI.8)}$$

O tamanho (R) do Universo é proporcional ao tempo até metade do seu tamanho. Durante a expansão, h aumenta mais rápido do que R. Se recuarmos

no tempo, h diminuirá mais rápido do que R. Sendo assim, o horizonte cósmico inclui pequenas quantidades do Universo desde o começo, significando que para objectos com grandes "redshifts", o horizonte é aproximadamente inferior ao Universo.

VI.1.3 Universo plano

Este tipo de universo de Friedmann estabelece a transição entre o Universo fechado ou esférico, de curvatura positiva (k = 1), e o Universo aberto e hiperbólico de curvatura negativa (k = -1) como se verifica na figura VI.1.

Este Universo, quando o seu conteúdo é apenas matéria, é conhecido como universo de Einstein - De Sitter. A sua densidade é igual à densidade crítica ($\rho = \rho_{crítico}$), isto é, é um universo com massa suficiente para parar a expansão mas, nunca antes do tamanho do Universo se tornar infinito.

A sua geometria é plana de curvatura igual a zero (k = 0) e por isso estamos perante um universo Euclidiano. Começa num big-bang e expande-se muito mais lentamente que um Universo aberto de geometria hiperbólica.

Neste modelo a dependência temporal do factor de escala é dado pela seguinte expressão:

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{3}} \qquad \text{(VI.9)}$$

Como se verifica, este é um tipo de universo em expansão desacelerada, no qual o parâmetro de Hubble é dado, como habitualmente, por:

$$H = \frac{1}{a}\frac{da}{dt} \qquad \text{(VI.10)}$$

e, atendendo à equação anterior, obtemos:

$$H = \frac{2}{3t}. \qquad \text{(VI.11)}$$

Quanto ao raio de Hubble podemos escrever

$$R_H = \frac{c}{H} = \frac{3ct_0}{2} \qquad \text{(VI.12)}$$

Verifica-se que o raio expande-se a uma velocidade superior à velocidade da luz, ou seja, cresce à velocidade de $\frac{3}{2}c$.

Na época actual o raio de Hubble é dado por:

$$R_H^{\ 0} = c/H_0 = \frac{3ct_0}{2} \qquad \text{(VI.13)}$$

Assim, os objectos que actualmente se encontrem a uma distância de nós dada por $\frac{3ct_0}{2}$, afastar-se-ão a uma velocidade igual à velocidade da luz.

Normalizando o factor de escala para a época actual e, sabendo que,

$$1 + z = \frac{a(t_0)}{a(t)} \qquad \text{(VI.14)}$$

obtemos a relação entre o desvio cosmológico para o vermelho z, e o tempo cósmico t, isto é:

$$1 + z = \frac{1}{a(t)} = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-\frac{2}{3}} \qquad \text{(VI.15)}$$

podendo agora escrever a expressão para a distância actual a um objecto com desvio para o vermelho z:

$$r(z) = c \int_z^0 (1+z)\frac{dt}{dz}dz$$

$$r(z) = c \int_z^0 (1+z)\left[\frac{2}{3}t_0(1+z)^{-\frac{5}{2}}\right]dz$$

$$r(z) = 3ct_0\left[1-(1+z)^{-\frac{1}{2}}\right] \qquad \text{(VI.16)}$$

Esta equação mostra-nos que as galáxias com um valor de z tal que $z > 3$ estão fora da esfera de Hubble. No entanto, como se concluiu pela equação (VI.12) a esfera de Hubble afasta-se do observador a uma velocidade igual a $\frac{3}{2}c$, essas galáxias entrarão mais cedo ou mais tarde no interior da esfera concluindo-se que o número de galáxias dentro da esfera de Hubble aumenta com o tempo.

Se na equação anterior fizermos tender para infinito o valor do desvio cosmológico para o vermelho obtemos o valor da distância actual ao horizonte de partícula, isto é:

$$r_p^0 = r(z \to \infty) = 3ct_0 \qquad \text{(VI.17)}$$

Como obtemos um valor finito para r_p^0, podemos afirmar que existe um *horizonte de partícula* e, consequentemente, o universo observável é finito.

A velocidade de recessão do *horizonte de partícula* é de *3c* enquanto que, a velocidade de recessão das galáxias à distância do horizonte de partícula é dada pela lei de Hubble, ou seja:

$$v = H_0 r_p^{\,0} = 2c \qquad \text{(VI.18)}$$

Da equação anterior concluímos que há galáxias que podem estar hoje para além do horizonte de partícula, mas que no futuro podem entrar no universo observável. À medida que decorre o tempo podemos ver uma maior parte do Universo. Este modelo de universo não tem *horizonte de acontecimentos*.

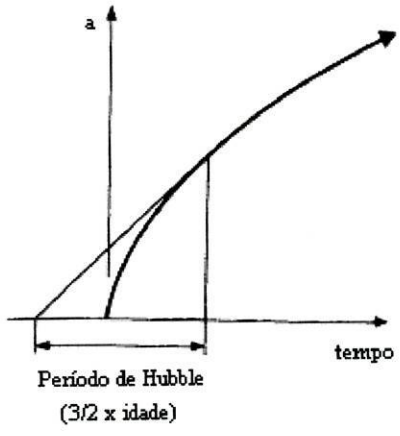


Figura VI.4: Variação do factor de escala com o tempo num universo de Einstein-De Sitter

VI.1.4 Será o universo de Friedmann aberto ou fechado?

Existem três maneiras de o determinar:

- determina-se o valor do termo desaceleração (q), observando como objectos do espaço variam com a distancia. Por exemplo, como o brilho aparente das galáxias diminui com o aumento da distancia.

Tendo as galáxias largas bandas de luminosidade, deveremos seleccionar uma classe de galáxias de luminosidade conhecida, podendo servir de "standard candles";

As galáxias mais brilhantes nos grandes enxames são, geralmente, as escolhidas;

Estudos efectuados na Universidade de Princeton, sugerem que as galáxias brilhantes nos centros dos grandes enxames estão a engolir galáxias mais pequenas, tornando-se cada vez maiores e mais brilhantes com a idade;

A mudança de brilho nestas galáxias usadas como "standard candles"[14], não tendo uma justificação plausível, serão o suficiente para causar um sério problema;

O método mais antigo para determinar o termo desaceleração através da luminosidade – desvio para o vermelho considera-se, hoje, impraticável.

- Encontrando a idade dos sistemas mais velhos;

Provavelmente, estes sistemas têm idades um pouco maiores do que a idade do Universo;

Estrelas da população II nos enxames globulares estão entre os mais velhos na Galáxia e têm idades de cerca 8 mil milhões de anos e

[14] É um método para determinar distâncias a galáxias muito afastadas. Supõe-se que um determinado tipo de objecto é uma "standard candle", caso ele possua sempre a mesma luminosidade intrínseca, sendo a variação no seu brilho aparente apenas o resultado de estar mais ou menos afastado.

muitos deles; assim, o termo desaceleração não pode ter o valor superior a $\frac{1}{2}$, podendo ser mesmo menor;

Determinada a idade, ela pode indicar se o nosso Universo é aberto se for do tipo de Friedmann;

- Determinando a densidade média da matéria no universo e compará-la com a densidade crítica do universo de Einstein – De Sitter.

  A densidade observada do Universo, própria das galáxias, é na sua maior parte cerca de 1 átomo de hidrogéneo/m^3, sendo pelo menos, 10 x menor do que a densidade crítica. A evidência mostra, neste caso, que o Universo é aberto;

  A abundância de deutério, também, sugere que o Universo é aberto.

Hoje, existem fortes evidências indicando que o universo é aberto. Caso seja do tipo de Friedmann, o Universo expandirá para sempre.

A existência de uma controvérsia em Cosmologia acerca dos universos abertos, leva alguns conceitos a serem reajustados e reinterpretados com os dados observacionais.

Um valor pequeno para a constante de Hubble significa que o Universo expande muito devagar adquirindo uma idade elevada.

Após algumas décadas, esta constante diminuiu o seu valor resultado do aperfeiçoamento das observações o que nos leva a pensar que o valor correcto da constante de Hubble, ainda, não foi encontrado.

Por exemplo:

> O valor de H se for reduzido para 10 km/s x 10^{-6} $a.l.$, o período de Hubble tomará o valor de 30 mil milhões de anos, que é mais do que suficiente para um universo fechado cuja idade é menor do que 20 mil milhões de anos.

Quando reduzimos a densidade crítica para o mesmo valor da densidade observada, estamos perante o problema da "perda de massa". Não se sabe onde está a matéria necessária para o universo fechado. Não pode estar dentro das galáxias porque as suas massas já são conhecidas do movimento das estrelas.

As massa aparentes de alguns enxames são, apenas, de 10% da necessária para as manterem juntas evitando-as de flutuar.

É possível que a "perda de massa" esteja na periferia das galáxias sob a forma de estrelas de baixa luminosidade ou em buracos negros[15].

Figura VI.5: Buraco negro.

[15] Um buraco negro engole tudo que chega perto dele. Como nem a própria luz escapa, nada podemos saber acerca do que se passa dentro dele, a não ser suposições teóricas.

Outra possibilidade, é a sua localização estar no gás disperso entre as galáxias.

Ainda é possível que os neutrinos[16] tenham massa e, uma densidade superior à densidade crítica.

Se o universo é fechado ou aberto é um caso que se encontra em "aberto" visto, ainda não se ter chegado a conclusão alguma.

[16] Neutrinos são partículas sem carga eléctrica. Participam, apenas, em interacções fracas e gravitacionais e, por isso são muito difíceis de detectar. Existem três tipos de neutrinos conhecidos, que são muito leves e que podem ter mesmo massa zero.

VI.2 Alguns Modelos com Interesse Histórico e Pedagógico

VI.2.1 Universos estáticos

VI.2.1.1 Universo de Einstein

A Teoria da Relatividade Geral é universal, no sentido de ser válida, também, nos casos em que os campos gravitacionais não são desprezáveis. Esta teoria descreve a gravitação como a acção das massas nas propriedades do espaço e do tempo afectando o movimento dos corpos e outras propriedades físicas.

Na teoria de Newton o espaço é rígido, sendo descrito pela geometria Euclidiana (Euclides de Alexandria ~ 350 a.C), na relatividade geral o espaço-tempo é distorcido pela presença da matéria que ele próprio contém.

Um ano depois de propor a relatividade geral, em 1917, Einstein publicou o seu artigo histórico sobre cosmologia, Considerações Cosmológicas sobre a Teoria da Relatividade , construindo um modelo esférico do Universo. Porém, as equações da Relatividade Geral não contemplam a possibilidade de um Universo estático, de raio finito, dificuldade idêntica à encontrada por Newton.

Na teoria de Einstein o espaço, sendo uma grandeza dinâmica, evolui com o tempo. Esta teoria deu origem a vários modelos do Universo. O seu modelo, além de ser espacialmente homogéneo e isotrópico, tinha a propriedade de ser estático, não se contraía nem se expandia. Naquela época, os cientistas acreditavam ser esta uma característica do Universo.

Sendo a gravitação atractiva, para obter um Universo estático, Einstein foi obrigado a modificar as suas equações originais respeitantes ao campo gravitacional. Assim, introduz uma força hipotética repulsiva, a chamada

constante cosmológica (Λ). Esta força evita o colapso do Universo pela acção da força gravitacional, garantindo um Universo estático.

Na 2ª década do sec.XX, altura em que se desconhecia a expansão do Universo, Einstein introduziu então nas suas equações tensoriais da relatividade geral um termo denominado constante cosmológica (Λ), visto estar seguro de que o Universo tinha que ser estático. Sendo assim, a constante não era mais do que uma força nova "anti-gravitatória" que ao contrário de outras forças, não tinha origem em fonte alguma, apenas estava inserida na estrutura do espaço-tempo. Afirmando que, o espaço-tempo tinha uma tendência intrínseca, a contrair, então, Λ, teria um valor, que equilibraria a atracção de toda a matéria concentrada no Universo, podendo ser possível a existência de um Universo estático.

Edwin Hubble ao descobrir a expansão do Universo, leva Einstein a admitir que a misteriosa constante cosmológica que propôs, não era mais do que o maior erro científico cometido por si próprio.

Para $\Lambda > 0$:

Esta força actua como sendo repulsiva opondo-se à gravidade, afectando a dinâmica.
Um Universo tornado estático num determinado momento, pode não ser necessariamente estático em momentos anteriores e posteriores a esse momento. Para ter a certeza que o Universo continua estático num estado de equilíbrio, pode mostrar-se que a curvatura do espaço deve ser positiva.

No Universo estático de Einstein, o espaço é caracterizado por ser:

- esférico;
- fechado;
- finito;
- e, contendo a força repulsiva Λ (constante cosmológica) que se opõe à força da gravidade.

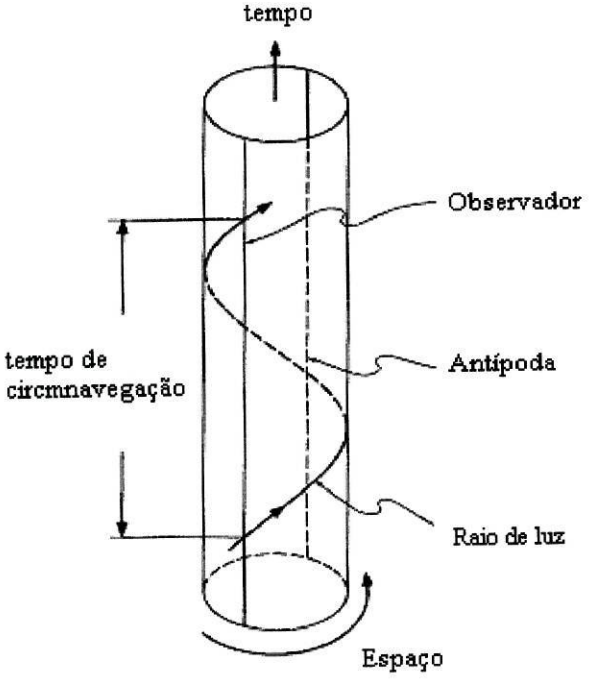


Figura VI.6: Diagrama espaço-tempo de um Universo estático de Einstein, representando apenas uma das três dimensões do espaço. A luz move-se descrevendo um caminho em hélice na superfície do cilindro de raio R.

Tomando como distâncias a viagem da luz, consideremos:

R - raio de curvatura do espaço, no Universo de Einstein, denominado como factor de escala;

$2\pi R$ - perímetro do Universo, tempo de circumnavegação da luz à volta do Universo de Einstein;

πR - antípoda de um observador, ou seja, o ponto que se encontra no lado oposto do Universo de Einstein.

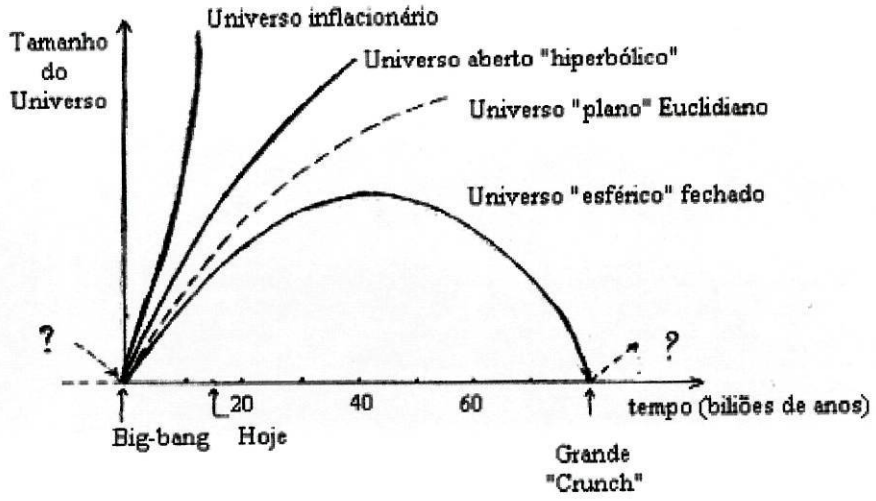


Figura VI.7: Modelos Cosmológicos de Einstein de espaços homogéneos e isotrópicos. Nestes modelos o espaço evolui partindo de um "início" e por volta dos 15 mil milhões de anos expande-se.

VI.2.1.2 O último universo de estado estático e estacionário

Embora os universos estáticos sejam inertes no sentido cósmico, os objectos que neles estão contidos evoluem com movimentos peculiares.

Por outro lado, os universos de estado estacionário nunca mudam o seu comportamento, isto é, o que acontece hoje já aconteceu no passado e sempre acontecerá.

Um universo estático de estado estacionário é cosmologicamente inerte e o seu conteúdo, em geral, nunca muda. Universos como estes são comuns na história da Cosmologia.

O último Universo com as características acabadas de referir foi concebido na Universidade de Chicago em 1918 e desenvolvido em 1920 pelo astrónomo William MacMillan (1861-1948).

Este modelo apresentava um grande problema, as estrelas apresentavam um intenso brilho. A radiação produzida em excesso acumula-se no espaço, tornando o céu nocturno mais claro.

MacMillan admitiu que os átomos seriam gerados nas profundezas do espaço através de energia radiante. Assim propôs a teoria de que as estrelas eram formadas, a partir de um gás interestelar. Elas evoluem, expandindo-se lentamente durante um longo período de tempo ou parte o qual irradiam toda a sua massa.

Em lugares profundos do espaço, completamente desconhecidos, a luz das estrelas é recuperada, muito lentamente, em átomos de matéria. O gás interestelar repleto de átomos novos, condensa formando novas estrelas. Elas, por sua vez, fundem em radiação para manterem o estado estacionário.

Hoje, sabemos que uma estrela, durante toda a sua vida, irradia apenas uma pequena fracção da sua massa sob a forma de luminosidade, sendo impossível regenerar a estrela da maneira como propôs MacMillan.

Também, podemos acrescentar que uma estrela tem um número fixo de bariões[17] e por mais radiação que emita, à custa da sua energia nuclear e gravitacional, o número de bariões (nucleões), tem de permanecer aproximadamente constante, não podendo a estrela transformar-se completamente em radiação.

[17] São uma classe de partículas elementares mais pesadas, que incluem os protões e os neutrões (núcleos atómicos estáveis, em geral). Os bariões são convencionados com o número +1, os anti-bariões −1 e as partículas que não são bariões 0.

Na verdade os bariões, neste caso, os nucleões não podem converter-se na sua totalidade em radiação. Também, a matéria não pode ser reciclada da forma apresentada por MacMillan.

Quando a radiação é muito energética é capaz de produzir partículas[18] e antipartículas[19], aos pares. Contudo, se as partículas e as anti-partículas não se separarem, elas aniquilam-se mutuamente convertendo-se novamente em radiação.

No entanto, a luz das estrelas é demasiado fraca para criar partículas e anti-partículas. Embora, a energia total no universo estático de McMillan seja conservada, a entropia total já não o é. Sendo assim, o universo não pode estar num estado estacionário.

Num Universo estático e estacionário munido de uma entropia constante, tudo está em equilíbrio térmico, não existe " a seta do tempo", logo não se pode distinguir o passado do futuro.

Este modelo teve alguma popularidade até meados da década de 30 do séc.XX altura em que as evidências em favor de um Universo em expansão colocaram-no para uma posição secundária no panorama cosmológico, acabando por cair no esquecimento.

[18] Objecto subatómico com massa e carga definidas.
[19] Para cada tipo de partícula existe um outro tipo de partícula que tem exactamente a mesma massa, mas o valor oposto de todas as outras cargas.

VI.2.2 Universos dinâmicos

VI.2.2.1 Modelo de expansão linear

Este tipo de modelo caracteriza-se pela dependência temporal do factor de escala:

$$a(t) = t/t_0 \qquad \text{(VI.19)}$$

Poderia acontecer, no caso ideal, num universo vazio de matéria e com constante cosmológica igual a zero.

A constante de Hubble (H_0) pode ser calculada neste modelo como

$$H_0 = \left(\frac{1}{a}\frac{da}{dt}\right)_{t=t_0} = \frac{1}{t_0} \qquad \text{(VI.20)}$$

E, portanto, no modelo de expansão linear, H_0 representa exactamente o inverso da idade do Universo (H_0^{-1} é normalmente designado por tempo de Hubble.

Por seu lado, o raio de Hubble tem, também, uma expressão simples, ou seja:

$$R_H = c/H = ct \qquad \text{(VI.21)}$$

E, para a época actual, teremos então

$$R_H^{\,0} = \frac{c}{H_0} = ct_0 . \qquad \text{(VI.22)}$$

Todos os objectos que se encontram a esta distância ($R_H^{\,0}$) afastar-se-ão do observador à velocidade da luz.

Como vimos, a distância ao horizonte de partícula pode ser calculada conhecendo a distância percorrida pela luz, tendo em consideração a "ajuda" da expansão do universo. Em função do desvio cosmológico para o vermelho, tendo em atenção a relação entre este parâmetro e o factor de escala

$$\frac{a(t_0)}{a(t)} = \frac{1}{a(t)} = (1+ z) \tag{VI.23}$$

podemos escrever para a distância a um objecto com um d.p.r.z

$$d(z) = c \int_z^0 (1+z)\frac{dt}{dz}dz$$

$$d(z) = c\int_z^0 (1+z)\left|t_0(1+z)^{-2}\right|dz$$

$$d(z) = ct_0 \log (1+z) \tag{VI.24}$$

O desvio para o vermelho de todos os objectos no interior da esfera de Hubble tem que respeitar a seguinte equação

$$d(z) \leq R_H^0 \rightarrow ct_0 \log (1+z) \leq ct_0 \rightarrow \tag{VI.25}$$

$$\rightarrow \log (1+z) \leq 1 \tag{VI.26}$$

Então:

$$z \leq e - 1 = 1.718 \tag{VI.27}$$

Conclui-se que a esfera de Hubble não é um horizonte cosmológico, uma vez que, podemos observar galáxias situadas para além deste limite, isto é,

galáxias com desvio para o vermelho superior a 1.718. Estando essas galáxias actualmente para além do raio de Hubble afastando-se de nós a uma velocidade superior à velocidade da luz.

Na verdade, as galáxias não podem viajar a uma velocidade superior à da luz. Na realidade, a velocidade de uma galáxia (que habitualmente é designada por velocidade peculiar) é, no máximo, da ordem de apenas algumas centenas de km/s.

Vejamos agora a velocidade a que a esfera de Hubble se afasta dum observador. A partir da equação (VI.21), facilmente se constata que essa velocidade é dada por:

$$dR_H/dt = c \qquad \text{(VI.28)}$$

Verificamos assim que a esfera de Hubble se afasta do observador à mesma velocidade que as galáxias que se encontram sobre ela. Assim, a quantidade de galáxias, ou seja, a quantidade de matéria que permanece dentro da esfera de Hubble é constante com o tempo.

Ao calcular a distância ao *horizonte de partícula*, verificamos que o integral da equação (V.7) diverge, isto é, tende para infinito, o que significa que não há horizonte de partícula, podendo observar-se todo o Universo.
A existência de um *horizonte de acontecimentos* dependerá do tempo de expansão ser finito ou infinito. Num universo com um parâmetro de expansão a aumentar linearmente com o tempo, o tempo de expansão disponível será, em princípio infinito, não existindo, por isso, *horizonte de acontecimentos.*

Poderemos sempre receber a luz de um objecto, por muito distante que ele esteja, se deixarmos passar o tempo suficiente.

VI.2.2.2 Universo de De Sitter

Em 1917, o astrónomo holandês Willem De Sitter (1872-1934) publicou três trabalhos em que aplica a relatividade geral à cosmologia.

De Sitter demonstrou a possibilidade de obter novas soluções estáticas[20] da relatividade geral, com constante cosmológica e sem matéria, entrando em contradição com o modelo de Einstein.

Willem De Sitter demonstrou que a constante cosmológica permite um universo em expansão, mesmo não tendo qualquer matéria (conhecida por energia de vácuo). As observações mostraram que o universo é homogéneo em escalas de 10 a 100 milhões de anos luz e maiores. Para escalas menores, podemos ver estrelas, galáxias e aglomerados de galáxias, contudo, em larga escala os elementos de volume são homogéneos.

De Sitter sugeriu, ainda, que a velocidade de afastamento de objectos espalhados aleatoriamente no seu universo aumentaria com a distância. Esta afirmação ficou conhecida como "*o efeito de De Sitter*".

O Universo de De Sitter tem o espaço plano. Um universo vazio cujo espaço é Euclidiano não pode conter propriedades estranhas e, se isso acontecer, então, é porque a força repulsiva, Λ, é diferente de zero. Isso pode acontecer se igualarmos a curvatura, κ, e a densidade, ambas a zero nas equações de Friedmann – Lemaître que falaremos adiante.

$$\kappa = 4\pi G\rho - H^2 (q + 1) \qquad \text{(VI.29)}$$

$$\Lambda = 4\pi G\rho - 3 H^2 q \qquad \text{(VI.30)}$$

20 Na realidade, a solução encontrada é estacionária, isto é, as suas propriedades não dependem do tempo.

Obtemos da equação (VI.29) :

$$q = -1 \tag{VI.31}$$

Substituindo (VI.31) na equação (VI.30) e atendendo que $\rho = 0$, obtém-se:

$$\Lambda = -3 H^2 q \tag{VI.32}$$

$$H^2 = \Lambda / 3 q$$

$$H = (\Lambda / 3 q)^{\frac{1}{2}} \tag{VI.33}$$

Assim, estamos perante um universo em expansão em que o valor obtido pela equação (VI.33) será sempre uma constante, conhecida pela constante de Hubble.

O efeito da força repulsiva, Λ, faz com que o espaço expanda munido de um valor constante de aceleração, $q = -1$.

Este universo é designado, muitas vezes, por universos inflacionários, já que se expandem exponencialmente, isto é, o factor de escala pode escrever-se na forma:

$$a(t) = \exp\left[(t - t_0)/t_0\right] \tag{VI.34}$$

onde t_0 é um tempo característico da expansão, que nada tem a ver com a idade do universo. A partir desta variação exponencial do factor de escala concluímos que estes universos podem multiplicar muitas vezes o seu "tamanho" em intervalos de tempo muito reduzidos.

Nestes modelos o parâmetro de Hubble mantém-se constante, isto é:

$$H = \frac{1}{a}\frac{da}{dt} = \frac{1}{t_0} \qquad \text{(VI.35)}$$

Sendo assim, o factor de escala poder-se-á escrever da seguinte maneira

$$a(t) = \exp\left[H(t - t_0)\right] \qquad \text{(VI.36)}$$

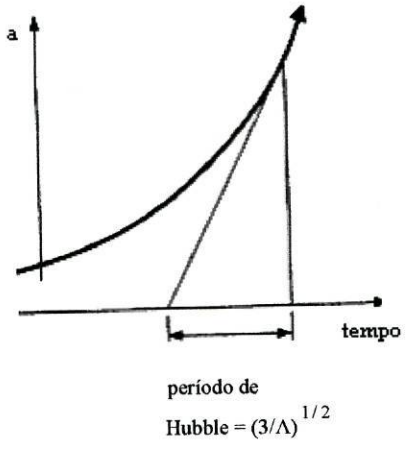


Figura VI.8: Variação do factor de escala com o tempo num universo de Einstein.

O factor de escala (a) aumenta como mostra a figura VI.8 e, ainda, se conclui que o Universo de De Sitter tem não só um infinito passado como um infinito futuro, acelerando sempre com uma constante de q = -1.

O Universo de De Sitter assenta num estado estacionário, nele nada varia. As constantes de Hubble e de desaceleração permanecem sempre as mesmas, assim como, não existe qualquer tipo de matéria visto esta, ser diluída pela expansão.

Pode-se concluir que:

- O Universo de Einstein contém matéria mas não movimento;
- O Universo de De Sitter contém movimento mas não matéria.

Estes dois Universos são o suporte dos modelos cosmológicos.

VI.2.2.3 Universo de Lemaître

O padre e cosmólogo belga Georges-Henri Édouard Lemaître (1894 – 1966) foi, provavelmente, o primeiro a propor um modelo específico para o Big – Bang em 1927. Foi neste ano que ele publicou o seu maior trabalho sobre a expansão do universo.

Ele imaginou que todo a matéria, num estado inicial de alta densidade, pudesse estar concentrada no que ele chamou de "átomo primordial" e, que este átomo partiu-se em pedaços infinitos, cada um fragmentando cada vez mais, até formar os átomos presentes no universo, numa enorme fissão nuclear.
Sabemos hoje que este modelo não pode estar correcto, visto, não obedecer às leis da relatividade e da mecânica quântica, contudo, ele inspirou os modelos modernos.

Lemaître adiciona às equações cosmológicas, anteriormente desenvolvidas por Friedmann, a constante cosmológica. Assim, referir-nos-emos a elas como as equações de Friedmann – Lemaître. Foram várias as soluções possíveis que ele obteve

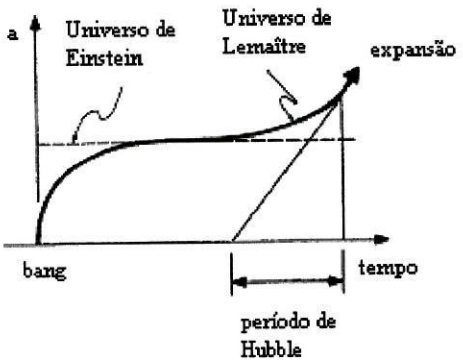


Figura VI.9: Universo de Lemaître. Universo fechado contendo a força repulsiva Λ, sendo ela positiva.

Este universo é muito idêntico ao de Einstein, a única diferença reside na constante cosmológica, que é ligeiramente superior ao valor escolhido por Einstein. Portanto, o universo de Lemaître não pode ser estático.

Ele começa num big bang e tem dois estados de expansão:

1º estado - a expansão desacelera devido a força da gravidade ser maior do que a força repulsiva Λ, aproximando-se lentamente do raio do universo de Einstein;

2º estado - neste momento, a força de repulsão torna-se maior do que a gravidade. O universo expande-se do raio de Einstein, inicialmente de uma forma lenta e depois aumentando gradualmente.

Concluindo, o universo de Lemaître começa num big-bang, evolui em direcção a uma expansão e, a uma certa altura, hesita ao passar pelo universo de Einstein. Combina nitidamente com as propriedades dos universos de Einstein e de De Sitter:

- é fechado como o universo de Einstein;
- tem repulsão cósmica como ambos os universos;
- debaixo do efeito da repulsão, mais tarde inflaciona numa expansão como o universo de De Sitter.

A idade do universo de "hesitação de Lemaître" no 2º estado é maior do que o período de Hubble. Ajustando a constante cosmológica, ela excede um pouco o valor obtido por Einstein, contudo, o período de hesitação pode ser prolongado consideravelmente.

Lemaître pensou que as galáxias pudessem ser formadas durante o período da hesitação.

Mais tarde, em 1960, o seu universo foi revisto com o objectivo de explicar o porquê do aparecimento dos quasares com desvios para o vermelho de $z = 2$. A explicação deve-se ao facto de pensarem que os quasares nasciam no "período da hesitação", tendo um desvio para o vermelho de 2. Isto, porque o raio do universo neste período era de 1/3 do seu valor.

Desde essa altura muitos quasares foram descobertos, havendo, hoje menos enxames com $z = 2$. Com a descoberta de alguns quasares com $z > 2$, a teoria do "período de hesitação" torna-se menos importante.

A era da hesitação não durou muito, levando-nos a interrogar se podemos prolongar a idade do universo de uma maneira significativa.

VI.2.2.4 Universo de Eddington

Em 1930, Arthur Eddington (1822-1944) provou que o Universo de Einstein era instável. Quando perturbado colapsa ou expande, conforme ilustra na figura VI.10

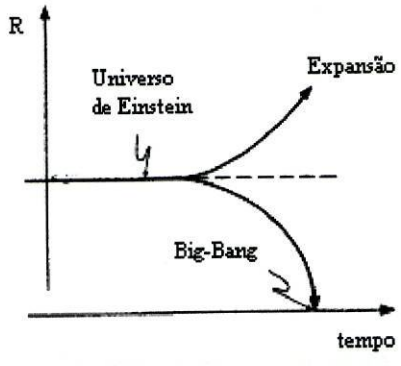


Figura VI.10: Universo de Einstein, quando perturbado.

Ao menor sinal, mesmo insignificante que seja, existindo *domínio da gravidade* o universo colapsa num Big-Bang durante um período de tempo igual ao da circumnavegação do tempo.

Por outro lado, se a *força repulsiva* Λ *domina,* o universo inflaciona e evolui no sentido da expansão. Por exemplo, ao acendermos um fósforo, ele irá colapsar, todavia se alguma reacção for absorvida, reatará de novo.

A solução de Einstein obedece ao princípio cosmológico, que diz que o Universo é homogéneo e isotrópico, isto é, sendo homogéneo, tem a mesma forma em qualquer ponto do espaço e sendo isotrópico o modelo é o mesmo em qualquer direcção.

Enquanto Lemaître era um aficcionado por "big bangs", talvez por razões religiosas, Eddington discordava e, tinha uma ideia completamente diferente dele. Devido a estas duas ideias, hoje ainda persiste a ideia de dois cultos: os "bangers" e os "anti-bangers".

O universo de Eddington existe, inicialmente, por um período infinito de tempo como o mundo estático de Einstein. Em seguida, devido a uma perturbação acidental, ele desperta de um "longo sono" e começa a expandir. Primeiramente num estado de Einstein e, depois, trocando mais tarde para o estado de De Sitter.

Eddington não aceitou a existência de um universo, inicialmente num estado estático como o de Einstein por um longo período de tempo, porque o considerava instável.

Por outro lado, afirmou a não existência de galáxias nem de vida neste período de tempo, acordando ser de 10 mil milhões de anos. Eddington postulou um passado infinito para não aceitar um começo catastrófico.

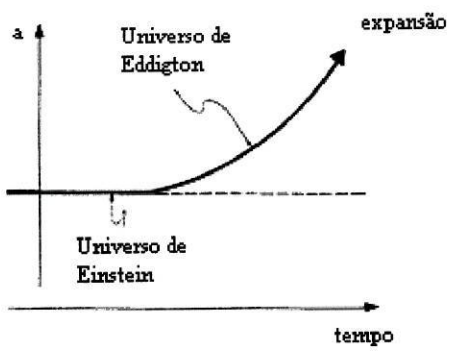


Figura VI.11: O universo de Eddington.

Os modelos de Lemaître e Eddington têm algo em comum: ambos contêm a constante cosmológica que serve de referência para o qual tudo é medido.

Para Eddington, a constante cosmológica determina a estrutura das partículas e o tamanho do universo.

VI.2.2.5 Universo oscilante

Dá-se este nome a universos que começam e acabam em big-bangs.

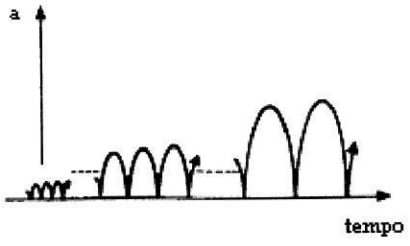


Figura VI.12: Universo oscilante.

A figura VI.12 mostra-nos que cada ciclo é um pouco maior do que o que lhe precedeu devido ao crescimento da entropia. Os períodos de expansão e contracção sucedem-se repetidamente uns atrás dos outros. O universo já oscilou um infinito número de vezes e continuará, no futuro, a oscilar indefinidamente.

Um universo fechado, que pensamos existir somente por um período finito, adquir um infinito tempo de vida devido às suas contínuas reincarnações.

Temos, ainda, a considerar que cada período de oscilação não pode ser exactamente o mesmo do anterior, como determinou Richard Tolman, em 1934.

As estrelas e outras fontes de emissão de radiação e, ainda, o número de fotões existentes no espaço aumentam lentamente durante cada período.

A entropia num ciclo é um pouco maior do que a entropia do ciclo que o antecedeu. Podemos concluir que cada bang é um pouco mais quente do que o anterior devido a entropia aumentar drasticamente. O universo tornar-se -á mais quente, a_{max} aumentará lentamente, também, o período de cada ciclo irá aumentar.

Neste momento, a radiação cósmica à temperatura de, somente, 3 graus ficará mais quente em ciclos futuros até à altura em que as galáxias não puderem nascer e as estrelas interromperem a sua existência. A vida como a conhecemos não existirá nestes ciclos no futuro.

No passado, os bangs eram mais frios e uma grande parte do hidrogénio teria sido convertido em hélio em cada um desses bangs. Caso se formem estrelas, elas terão uma vida demasiado curta ao ponto de não poderem ter uma evolução biológica.

O motivo de ocuparmos o universo no ciclo presente dever-se-á ao número finito de ciclos com vida que o universo em oscilação poderá ter, vivendo nós, em um deles.

Não temos conhecimento do que acontece num big-bang no seu estado de elevada densidade, altura em que o universo retoma a sua fase primordial.

CAPÍTULO VII

Exercícios Propostos

VII.1 Temas e características gerais dos programas do 3º Ciclo

As disciplinas de Ciências Físico-Químicas e Ciências Naturais fazem parte da área disciplinar Ciências Físicas e Naturais e tratam conjuntamente ao longo dos 7º, 8º e 9º anos do Ensino Básico quatro temas:

1. **Terra no Espaço**
2. Terra em Transformação
3. **Sustentabilidade na Terra**
4. Viver melhor na Terra

Os quatro temas estão articulados de acordo com um esquema organizador, em que cada um deles dá lugar a dois conjunto de conteúdos: um que diz respeito às Ciências Naturais e o outro às Ciências Físico-Químicas. Cada tema deve ser explorado pelos dois conjuntos de conteúdos numa perspectiva interdisciplinar, tendo em conta a interacção Ciência – Tecnologia – Sociedade – Ambiente.

Neste capítulo são feitas sugestões de exercícios dos temas 1 e 3.

VII.1.1 7ºANO de Escolaridade

Terra no Espaço

O que existe no Universo

Conteúdos a desenvolver

- O que conhecemos hoje acerca do Universo.
- Abordar conceitos como os de galáxia, estrela, planeta, sistema planetário, buraco negro, constelação, espaço "vazio" e quasar.
- Como tem conseguido o Homem explorar o Universo.
- Onde nos encontramos no Universo.

Conteúdos a articular com os das Ciências Naturais

- O que conhecemos hoje acerca do Universo ↔ Ciência como produto da actividade humana: teorias geocêntrica e heliocêntrica, resultantes do trabalho de cientistas como Ptolomeu, Copérnico e Galileu.
- Onde nos encontramos no Universo ↔ O que faz da terra um planeta com vida.
- Como tem conseguido o Homem explorar o Universo ↔ Ciência e conhecimento do Universo: as viagens espaciais e suas implicações ambientais, sociais e/ ou ambientais.

Competências essenciais

- Conhecimento sobre a caracterização do Universo.
- Discussão sobre a importância do avanço do conhecimento científico e tecnológico no conhecimento sobre o Universo, o Sistema Solar e a Terra.
- Reconhecimento de que novas ideias geralmente encontram oposição da parte de outros indivíduos e grupos por razões sociais, políticas ou religiosas.

Fazer notar que...

- O Universo deverá ter tido origem numa explosão: o Big Bang.
- O Universo é imensamente grande e está povoado de estrelas, planetas, cometas, nebulosas...
- Desde sempre o Homem observou o "céu" e que com o avançar do tempo inventaram-se e aperfeiçoaram-se instrumentos de observação para estudar o Universo.
- A Terra é um planeta do Sistema Solar que faz parte da Via Láctea, a nossa galáxia, uma das muitas que constituem o Universo.

VII. 1.1.1 Banco de Questões

(Para resolver os exercícios que se seguem aconselha-se a consultar o capítulo I)

1. Ptolomeu no séc.II e Copérnico no séc.XVI viam o Universo de maneira diferente. Compare os seus respectivos modelos de Universo.

R. Ptolomeu considerava no seu modelo que a Terra estaria no centro do Universo. Este modelo era conhecido por modelo geocêntrico. Mais tarde, Copérnico contraria a decisão de Ptolomeu e afirma que o centro do Universo não era a Terra, mas sim o Sol. A este modelo ele deu o nome de heliocêntrico.

2. Por que razão foi tão importante, para a evolução da Física, a luneta astronómica construída por Galileu no séc.XVII?

R. A luneta de Galileu permitiu-lhe confirmar experimentalmente que o Sol ocupa, na realidade, o centro do nosso Sistema Solar.

3. Leia, com atenção, o seguinte artigo:

" (...) O astrónomo que pela primeira vez observou este aspecto surpreendente de Vénus foi Galileu, o primeiro homem a apontar um telescópio para os céus .Estava-se em finais de 1610 e o cientista italiano ficou tão surpreendido com o que viu como fica hoje uma criança. (...) Galileu tinha descoberto que a lua tem montanhas e vales, tal como o nosso planeta, e essa descoberta tinha destruído a crença na perfeição e imutabilidade dos céus. Galileu tinha também descoberto que Júpiter tem duas luas que orbitam o planeta, e essa descoberta tinha destruído a crença na existência de um centro único do Universo.

Mas Galileu sabia que a revelação das fases de Vénus seria fatal para a teoria geocêntrica. Se o planeta tinha fases não poderia ser verdade que tanto Vénus como o Sol se movessem em esferas cristalinas concêntricas, orbitando o nosso planeta, como supunha a teoria de Ptolomeu (...).

A única teoria capaz de explicar esses factos era a teoria de Copérnico, que via os planetas em torno do Sol. Por isso, Galileu tinha medo e revelar a sua descoberta..."

3.1. Transcreva do texto duas frases que descrevam o modelo de Ptolomeu.

R. ...perfeição e imutabilidade dos céus.

... existência de um centro único do Universo.

3.2. Transcreva do texto uma frase que descreva o modelo de Copérnico.

R. ... que via os planetas em órbitas em torno do Sol.

3.3. De que outro nome é conhecido o modelo de Copérnico?

R. Modelo heliocêntrico.

3.4. Porque tinha Galileu tanto medo?

R. A teoria de Copérnico tinha sido considerada uma heresia e condenada pela inquisição.

3.5. O que aconteceu a Galileu por ter revelado a sua dscoberta?

R. Foi julgado e condenado à morte pela Inquisição e teve que renegar a sua teoria.

4. Complete as frases com as seguintes palavras:

Sol; Geocêntrico; luneta astronómica; Universo; elípticas; Terra; Heliocêntrico; Copérnico; órbitas, gravitação universal.

4.1. Ptolomeu defendia o modelo _____, em que a _____era o centro do _____e que todos os astros giravam à sua volta.

4.2. Copérnico defendia o modelo _____, em que o _____era o centro do Sistema Solar.

4.3. Galileu confirmou experimentalmente a teoria de _____, efectuando observações com uma _____ _____ por si próprio construída.

4.4. Kepler mostrou que as _____ dos planetas são _____.

4.5. Newton estabeleceu a Lei da _____ _____.

R. geocêntrico; Terra; Universo; heliocêntrico; Sol; Copérnico; luneta astronómica; órbitas; elípticas; gravitação universal.

5. Faça a correspondência entre o nome de cada cientista e o contributo que ele deu para o conhecimento do que hoje conhecemos acerca do sistema solar.

A- Copérnico
B- Tycho Brahe
C- Newton

1- _____formulou as três leis fundamentais do movimento e a lei fundamental da gravitação.

2- _____foi o primeiro a usar o telescópio para

D- Galileu

E- Ptolomeu

F- Kepler

G- Einstein

observações astronómicas e descobriu as fases de Vénus.

3- _____descreveu a visão geocêntrica do Universo no Almagesto por volta do ano 150 da nossa era.

4- _____observou e registou os movimentos planetários, durante mais de 20 anos.

5- _____determinou empiricamente as suas três leis do movimento planetário a partir de dados observacionais.

6- _____publicou um livro em que descreveu o modelo heliocêntrico dos movimentos planetários, que foi publicado em 1543, ano em que morreu.

7- _____autor da Teoria da Relatividade.

R. C; D, E, B; F, A;G.

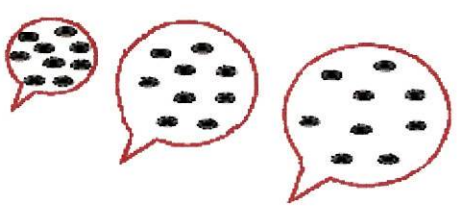
6. O que mantém os planetas nas suas órbitas em volta do Sol?

R. Uma combinação do seu movimento em linha recta e do seu movimento na direcção do Sol sob a acção da gravidade solar.

7. O que entende por Princípio Cosmológico?

R. Este princípio pressupõe que numa escala suficientemente grande o Universo é homogéneo e isotrópico. Em qualquer momento, a distribuição de matéria é a mesma em qualquer região do espaço e o Universo apresenta o mesmo aspecto em todas as direcções.

8. Imagine um balão repleto de galáxias...agora encha o balão...



O que lhe sugere o enchimento do balão? Fundamente a sua resposta.

R. Sugere um modelo do Universo em expansão. Observa-se que todos os pontos (galáxias) se afastam cada vez mais, isto é, a separação entre eles aumenta à medida que a película do balão se estica.

9. Defina Cosmologia.

R. É um ramo da Ciência relacionado com a origem, estrutura actual, evolução e destino final do Universo.

10. Em que é que os modelos cosmológicos diferem das explicações do Universo?

R. Os modelos cosmológicos não atribuem uma causa ou significado sobrenatural aos acontecimentos físicos, mas tentam explicar esses acontecimentos usando apenas as leis da natureza e a matemática.

11. Diga por palavras suas o que entende por Big Bang ou Explosão Primordial?

R. É uma teoria que explica o início do Universo. Este explodiu violentamente e, a partir desse momento, evoluiu. Esse início pensa-se que ocorreu há cerca de 10 a 20 mil milhões de anos. Toda a matéria e radiação estavam concentrados, inicialmente, numa imensa bola de fogo, num estado extremamente quente e denso, a partir do qual o Universo se expandiu rapidamente. À luz desta teoria , o Big Bang é conhecido como origem do tempo e do espaço.

Após milhares de anos começaram-se a formar as galáxias e as estrelas. O Universo continuou a expandir-se no espaço-tempo e as galáxias continuam a afastar-se umas das outras permanentemente.

Hoje, verificamos que o Universo continua a expandir-se e que as estrelas estão, ainda, a formar-se no seio das galáxias, usando o hidrogénio proveniente do Big Bang. A maior parte dos astrónomos aceitam a descrição da teoria do Big Bang para as fases passada e futura do Universo. As previsões variam quanto ao futuro, isto é, quando o hidrogénio original se esgotar nas estrelas e, estas deixarem de brilhar.

O destino do Universo será determinado pela competição entre :

- expansão para o exterior;
- compressão para o interior provocada pela força da gravidade.

12. Que tipos de Universos conhece? Faça uma breve descrição de cada um deles.

R. **Modelo do Universo aberto** – Defende que o Universo continuará a expandir-se indifinidamente. Assim, o Universo que começou com uma violenta expansão extraordinariamente quente, morrerá no escuro com um frio suave.

Modelo do Universo fechado – O nosso Universo que começou com o Big Bang não se expandirá para sempre. A gravidade parará a expansão e obrigará o colapso.

Actualmente, estamos a observar uma fase de expansão. No futuro, a expansão tornar-se-á mais lenta para depois terminar completamente e, então, o Universo começará a contrair-se (Big Crunch). À medida que se contrai, as galáxias aproximar-se-ão umas das outras até que a matéria volte a estar novamente aglomerada num estado demasiado quente e denso.

Modelo do Universo oscilatório- Este Universo defende que depois do Big Crunch ocorrerá outro Big Bang. Sendo assim, nascerá um outro Universo em expansão a partir da mesma matéria. O Universo oscilará, então, para sempre.

13. Fundamente, devidamente, a teoria do Estado Estacionário.

R. O Universo não evolui nem muda no tempo. Não houve um início no passado e não haverá um fim no futuro. O Universo passado, presente e futuro é sempre o mesmo. Esta teoria afirma que no espaço vazio é criado permanentemente hidrogénio novo, quantidade suficiente para substituir a matéria deslocada pelo afastamento das galáxias. Porém, não explica de onde vem este hidrogénio. Esta teoria é rejeitada porque contradiz as observações. A criação de uma massa, uma forma de energia viola a lei da conservação da energia. Esta lei diz-nos que a energia total de um sistema isolado permanece sempre a mesma. A energia não pode ser criada nem destruída, apesar de poder ocorrer transformações dentro do sistema.

14. Quem foi Edwin Hubble?

R. Foi um advogado-astrónomo. Nasceu nos Estados Unidos da América em Novembro de 1889. Frequentou as universidades de Oxford e Chicago, nesta última licenciou-se em Direito. Desde cedo foi grande o interesse demonstrado pela matemática e pela astronomia.
Dedicou-se ao estudo das nebulosas e demonstrou que a maioria das galáxias se encontram a grandes distancias. Trabalhou em observatórios astronómicos entre 1914 e 1919 chegando a director de um deles. Entre outras coisas, fez descobertas relacionadas com os movimentos e distancias entre as galáxias. Estas descobertas contribuíram para a elaboração da teoria que defende a expansão do Universo.
Faleceu a 1953 na Califórnia.

15. Traduza algebricamente a lei de Hubble. Tenha em atenção o significado de cada
um dos símbolos nela contida.

R. A lei traduz-se por:

$$V = H_0 D$$

sendo:

V = velocidade de recessão de uma galáxia.

H_0 = constante de Hubble. Traduz a taxa de expansão do Universo.

D = distancia a que a galáxia se encontra de nós.

16. Indique, aproximadamente, a idade do Universo

R. Está compreendida ente os 10 mil milhões e os 20 mil milhões de anos.

17. Observe a figura VII.1. Faça uma descrição breve das fases de um Universo fechado de acordo com a teoria do Big Bang.

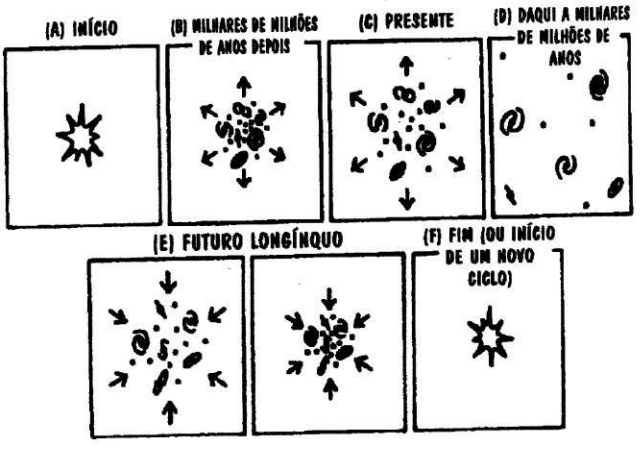


Figura VII.1: Fases do Universo fechado (ou oscilatório) (teoria do Big Bang)

R. (A) = Ocorreu o Big Bang.

(B) = As galáxias formaram-se e continuaram a afastar-se.

(C) = Vivemos num Universo em expansão; actualmente, as galáxias afastam-se umas das outras.

(D) = As galáxias pararão.

(E) = O Universo contrair-se-á e as galáxias juntar-se-ão umas às outras.

(F) = A matéria comprimir-se-á e juntar-se-á de novo.

12. Suponha que observamos uma galáxia a 500 Mpc de distância, afastando-se de nós a uma velocidade de 30 000 km/s. Se a velocidade fosse constante através do tempo, quando teria iniciado o Big Bang?

R. $v = d/t$

$t = 0{,}0166$ Mpc.s/km

Sabendo que:

$1 \text{ Mpc} = 3{,}09 \times 10^{19}$ km

então:

$t = 16 \times 10^{9}$ anos

VII.1.2 8ºANO de Escolaridade

Sustentabilidade na Terra

Produção e transmissão do som

Conteúdos a desenvolver

- Níveis de intensidade sonora.
- Sons produzidos e ouvidos por diferentes receptores.

Conteúdos a articular com os das Ciências Naturais

- Interacções seres vivos –ambiente.
- Poluição sonora, fontes de poluição e consequências da poluição.
- A poluição, nas múltiplas formas que pode tomar, constitui uma das principais causas do desequilíbrio dos ecossistemas.

Competências essenciais

- Compreender o significado de vibração e de onda.
- Caracterizar o som como fenómeno ondulatório.
- Identificar o significado de comprimento de onda, frequência, período e amplitude.

Fazer notar que...

- Há diferentes tipos de sons e de fontes sonoras.
- A altura de um som tem a ver com a sua frequência.
- As características e natureza do som.
- A intensidade de um som está relacionada com a amplitude da onda sonora.
- Os sons audíveis correspondem a uma determinada zona de frequências no espectro sonoro.
- Um som propaga-se em diferentes meios com velocidades diferentes.

Propriedades e aplicações da luz

Conteúdos a desenvolver

- O que é a luz.
- A luz é fundamental para vermos e comunicarmos informação.
- Espectro electromagnético.

Conteúdos a desenvolver com os das Ciências Naturais

- Interacção seres vivos-ambiente.
- Factores abióticos, por exemplo, aluz.
- Influência da luz no desenvolvimento das plantas.
- Fluxos de energia e ciclo da matéria, nomeadamente opapel do Sol como fonte de energia.

Competências essenciais

- Caracterizar a luz como fenómeno ondulatório.
- Interpretar o espectro electromagnético.

Fazer notar que...

- O espectro electromagnético é constituído por todas as radiações electromagnéticas.
- As radiações electromagnéticas encontram-se no espectro por ordem de frequências.
- As radiações electromagnéticas não necessitam de suporte material para se propagarem.
- As radiações electromagnéticas propagam-se no vazio todas à mesma velocidade (300 000 km/s).
- As ondas mecânicas e as ondas electromagnéticas são de natureza diferente, mas a todas elas se associa um comprimento de onda, uma amplitude, uma frequência e um período.

VII.1.2.1 Banco de Questões

(Para resolver os exercícios que se seguem aconselha-se a consultar o capítulo I)

1. A maior parte da nossa informação sobre o Universo tem sido obtida através da análise da luz. Com base nesta afirmação, defina o conceito de luz evidenciando a expansão do Universo.

R. A luz das galáxias distantes é desviada para comprimentos de onda que, no espectro electromagnético, estão para o lado do vermelho, um fenómeno chamado "desvio para o vermelho". Quanto mais longe estiver a galáxia, maior será esse desvio. As galáxias distantes estão a afastar-se uniformemente de nós, assim como umas das outras.

2. Ao olharmos para uma estrela verificamos a existência de energia.

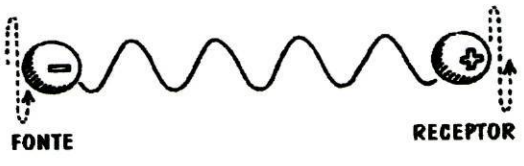


Figura VII.2 Visualização de uma onda de luz.

2.1. O que transporta uma onda de luz?

R. Transporta a energia de cargas eléctricas aceleradas proveniente das estrelas para as cargas eléctricas na retina do nosso olho.

2.2. Da figura VII.2 identifique:

2.2.1. a fonte; **R.** A estrela.

2.2.2. o receptor **R.** A retina do nosso olho.

3. Sabendo que a frequência, f, é o número de vibrações completas por segundo, medida em unidades Hz, faça uma análise cuidada quando existe:

3.1. um afastamento relativo entre a fonte e o receptor;

R. Significa que a frequência, f, da radiação electromagnética emitida pela fonte, atinja o receptor com um valor f' que é sempre menor que o emitido. Por isso, se diz que havendo um afastamento relativo entre a fonte e o receptor, a radiação emitida pelo primeiro chegará ao segundo desviada para o vermelho.

3.2 Uma aproximação relativa entre a fonte e o receptor.

R. O valor da frequência, f', recebida pelo receptor é sempre maior que a frequência, f, que havia sido emitida pelo emissor. Podemos, então, afirmar que ocorre desvio para o azul na radiação emitida pela fonte.

4. " Na realidade, tanto a frequência, f, como o comprimento de onda, λ, de uma dada radiação electromagnética podem variar, desde que se mantenha a condição de que o seu produto seja igual à velocidade da luz, c, tanto no ar como no vazio, isto é, de 300 000 000 m/s. ..."

4.1. Traduza por uma equação o que acabou de ler relativamente aos parâmetros em causa.

R. $C = \lambda.f$ em que:

C = velocidade da luz

λ = comprimento de onda

f = frequência

4.2. Como se designa a essa variação, na radiação electromagnética, de frequência e, consequentemente, do comprimento de onda que resulta do movimento relativo entre a fonte e o receptor.

R. Designa-se por efeito de Doppler aplicado à luz

5. O que entende por espectro electromagnético?

R. É o conjunto das ondas electromagnéticas ordenadas segundo os seus comprimentos de onda.

6. Por que motivo as ondas electromagnéticas, de todos os comprimentos de onda, são importantes para os astrónomos?

R. Porque todas elas trazem informações sobre as fontes que as emitiram.

7. Comente a seguinte afirmação: " A observação das estrelas é uma forma de ver como o Universo era há muitos anos".

R. A luz das estrelas é irradiada por cargas eléctricas nelas existentes . As ondas luminosas transportam energia até aos nossos olhos. As ondas luminosas viajam demasiado depressa, cerca de 300 000 000 m por segundo. Contudo, como as estrelas estão afastadas da Terra milhões e milhões de quilómetros, a viagem demora muito tempo. Sendo assim, vemos as estrelas como eram há muitos anos, quando a luz iniciou a sua viagem para a Terra.

8. Indique as principais regiões do espectro electromagnético, desde as ondas de menor comprimento de onda (energia mais elevada) às de maior comprimento de onda (energia mais baixa).

R. Radiação cósmica, raios gama (γ), raios X, radiação ultravioleta, luz visível, radiação infravermelha, microondas e ondas de rádio.

9. O que existe em comum entre todas as ondas electromagnéticas?

R. Todas as ondas electromagnéticas viajam pelo espaço vazio à mesma velocidade, a velocidade da luz, cerca de 300 000 000 m/s.

10. Escreva a fórmula que relaciona o comprimento de onda com a frequência da mesma.

R. $C = \lambda.f$ Em que:

C = Velocidade da luz.

λ = comprimento de uma onda.

f = frequência de uma onda.

11. Suponha que observa uma estrela azulada e outra avermelhada. Diga qual é a mais quente fundamentando convenientemente.

R. A estrela azulada é a mais quente. Quanto mais curto é o comprimento de onda da radiação a que estrela emite o seu máximo de luz, mais quente é a estrela. A luz azul tem um comprimento de onda mais curto que a luz vermelha (mais fria, constituída por ondas com menor frequência).

12. Afigura VII.3 apresenta a curva de radiação do Sol.

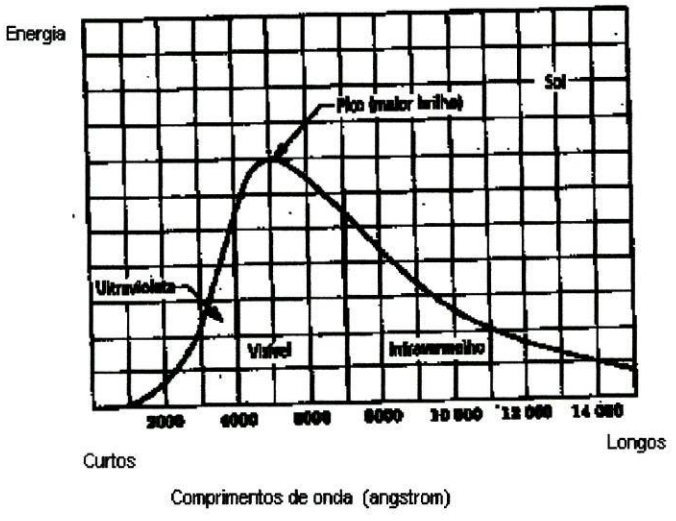


Figura VII.3 A curva de radiação do Sol

12.1. Como interpreta a curva de radiação do Sol?

R. Ela mostra a quantidade de energia que um corpo irradia nos diferentes comprimentos de onda.

12.2. Em que comprimentos de onda o Sol irradia mais intensamente?

R. No visível.

12.3. A quantidade total de energia que o Sol irradia no domínio da luz visível é (maior, menor) _____ do que a que irradia fora dessa região.

R. menor.

13. Descreva a evidência de que o Universo está em expansão.

R. A luz das galáxias distantes é desviada para comprimentos de onda que, no espectro electromagnético, estão para o lado do vermelho, um fenómeno chamado " desvio para o vermelho". Quanto mais longe está a galáxia, maior é esse desvio. As galáxias distantes estão a afastar-se uniformemente de nós e umas das outras.

VII.1.3 12º Ano de Escolaridade

Objectivos

Interacção gravitacional

- Teoria geocêntrica de Ptolomeu.
- Teoria heliocêntrica de Copérnico.
- Leis da cinemática do sistema solar - Leis de Kepler.
- Passos fundamentais que conduziram Newton à formulação da Lei da Gravitação Universal.
- Lei da Gravitação Universal.

VII.1.3.1 Banco de Questões

(Aconselha-se a ler o capítulo II como auxílio na resolução das questões seguintes)

1. Sabe-se que o sistema solar roda em torno do centro da nossa galáxia com uma velocidade de cerca de 3×10^5 ms^{-1} e a uma distância do centro da mesma de 3×10^{20} m (valores obtidos com base em estudos espectrais e no efeito de Doppler). Calcule a aceleração do referencial de Copérnico e tire conclusões desse valor.

R: $a_s = \frac{v_s^2}{R_s} \sim \frac{(3x10^5 ms^{-1})^2}{3x10^{20} m} = 3x10^{-10}$ ms^2

2. Dois satélites de massas diferentes gravitam à volta da Terra em trajectórias circulares de igual raio. Podemos afirmar que:

2.1. O satélite de maior massa tem maior período.

2.2. O satélite de menor massa tem maior velocidade.

2.3. Os dois satélites têm igual aceleração.

2.4. Os dois satélites têm igual energia cinética.

R: A afirmação verdadeira é a 2.3 porque : a força gravítica imprime ao satélite aceleração normal:

- $Fg = m.a_n \rightarrow \frac{GM_T m_s}{R^2} = m_s a_n \rightarrow a_n = \frac{GM_T}{R^2}$

  a_n só depende da massa da Terra e do raio da órbita que é o mesmo.

- A afirmação A é falsa , pois o período só depende do raio da órbita que é o mesmo .($T^2 = kR^3$).

- A afirmação B é falsa , pois $v = \frac{2\pi R}{T}$.

- A afirmação D é falsa, pois $E_c = \frac{1}{2} mv^2$ depende da massa já que avelocidade é a mesma.

3. Um satélite de massa 500 kg descreve, em volta da Terra, uma órbita circular de raio 4,2 x 10^{24} km. Considere o sistema satélite – Terra isolado e a massa da Terra 6,0x10^{24} kg. Determine a energia mecânica do satélite na referida órbita.

R:

$$F_g = F_c \rightarrow \frac{GM_T m_s}{R} \rightarrow V_{órbita} = \sqrt{GM_T/R}$$

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\frac{GM_T}{R} = \frac{GM_T m_s}{2R}$$

$$E_{p_g} = -\frac{GM_T m_s}{R}$$

$$E_M = E_c + E_{p_g} = -2{,}4\text{x}10^9 \text{ J}$$

4. Um satélite descreve uma órbita circular, de raio R, à volta da Terra com velocidade de módulo v_1. O mesmo satélite move-se com velocidade v_2, quando disposto a descrever uma órbita circular de igual raio, em torno da Lua. Considere a massa da Terra 81 vezes superior à da Lua.

R:

$$F_g = F_c \quad V_{órbita} = \sqrt{GM/R}$$

$$\text{Na Terra: } V_1 = \sqrt{GM_T/R}$$

$$\text{Na Lua: } V_2 = \sqrt{GM_L/R}$$

$$\frac{v_1}{v_2} = 9 \leftrightarrow V_1 = 9\,V_2$$

5. Considere o sistema Terra – Lua. Admita que a órbita descrita pela Lua em torno da Terra é circular. Nestas condições, podemos afirmar:

5.1. A distância entre o centro de massa do sistema *Terra – Lua* e o cenytro de massa da Terra é variável.

5.2. O potencial gravítico terrestre num ponto da órbita da Lua é positivo.

5.3. O módulo do campo gravítico criado pela Terra é igual ao módulo do campo gravítico criado pela Lua, em qualquer ponto equidistante dos dois planetas.

5.4. A energia potencial gravítica do sistema *Terra – Lua* mantém-se constante.

Seleccione a alternativa correcta.

R: 5.4. A energia potencial gravítica do sistema Terra – Lua é constante, pois:

$$E_p = -G\frac{M_T m_L}{r}$$

Onde r, que é a distância que separa os dois planetas, é constante, visto que a órbita descrita pela Lua em torno da Terra é circular.

5. Um satélite artificial, de massa 5,0 kg, descreve uma órbita circular em torno da Terra a uma altura igual ao raio desta .

Considere $m_T = 5{,}98 \times 10^{24}\,kg$, $r_T = 6{,}37 \times 10^{6}\,m$ e $G = 6{,}67\times10^{-11}\,Nm^2kg^{-2}$.

5.1. Calcule a energia mecânica do sistema *Terra + satélite.*

5.2. Determine a energia cinética fornecida ao satélite, à superfície da Terra, para o colocar em órbita.

5.3. Mostre que a velocidade de escape do satélite, à superfície da Terra, é independente da sua massa

R: **5.1.** $E_m = E_p + E_c$

$$E_m = -G\frac{m_T m}{r} + \frac{1}{2}mv^2 \qquad (1)$$

Quando um satélite descreve uma órbita circular, a resultante das forças é centrípeta.

$$F_c = F_g \quad \Rightarrow \quad m\frac{v^2}{r} = G\frac{m_T m}{r^2} \Leftrightarrow v^2 = G\frac{m_T}{r} \qquad (2)$$

Substituindo (2) na expressão (1) e posteriormente substituindo pelos respectivos valores obtém-se:

$$E_m = -7{,}83\times10^{10}\,J$$

5.2. Como o campo gravitacional é um campo conservativo, a energia mecânica do sistema Terra+satélite é constante.

$E_{m0} = E_m$

$E_{p0} + E_{c_0} = E_m$ e $E_{p0} = -G\frac{m_T m}{r_T}$

$E_{p0} = -3{,}313 \times 10^{11}$ J.

$E_{c_0} = 2{,}35 \times 10^{11}$ J

5.3. A velocidade de escape, v_e, é a velocidade mínima com que o satélite abandona a superfície da Terra, de modo a não ficar submetido à acção do campo gravítico por esta criado.
Como o satélite não fica submetido à acção do campo gravítico e a velocidade que lhe foi comunicada à superfície da Terra é mínima, conclui-se que a energia mecânica do sistema *Terra +satélite*, E_m, é nula.

Pela lei da Conservação da Energia Mecânica, $E_{m0} = E_m$.

$E_{p0} + E_{c_0} = E_m \Leftrightarrow -E_{p0} = E_{c_0}$

$\frac{1}{2}mv_e^2 = G\frac{m_T m}{r_r} \Leftrightarrow v_e = 1{,}12 \times 10^4 ms^{-1}$

A velocidade de escape não depende da massa do satélite, depende apenas das características do planeta de onde é lançado.

Conclusão

Penso ter atingido os objectivos a que me propus com este projecto que constitiu a minha dissertação, fazendo uma viagem ao longo dos tempos, desde a altura em que o termo cosmologia não era conhecido como tal, até aos nossos dias.

Pretendi que este trabalho fosse uma fonte de informação a um nível introdutório, e acessível a professores do ensino básico e secundário, no qual, para além da fundamentação teórica e descritiva, que penso ser apropriada, apresento exemplos que pretendem conduzir os professores no seu processo de pesquisa, no sentido de encontrarem as melhores abordagens a temas que podem ser motivadores para os alunos reais que são os seus.

Admito que, da maneira como os assuntos estão tratados e apresentados, poderão constituir uma estimulante fonte de reflexão, e estar na origem de um diálogo que poderá ser certamente muito produtivo, com formas diferentes de conceptualizar e praticar o trabalho pedagógico.

Referências Bibliográficas

- Jorge P. M. de Carvalho, 1998 – Introdução à Cosmologia- Mestrado em Ensino da Astronomia (FCUP).
- Pedro Viana – Astronomia Galática e Extragaláctica – Mestrado em Ensino da Astronomia 2000/2002 (FCUP).
- Dinah L. Moché - Astronomia – Gradiva.
- Craig J. Hogan – O pequeno livro do Big Bang – Editora Replicação.
- Stephen Hawking e Roger Penrose – A Natureza do Espaço e do Tempo – Gradiva.
- StevenWeinberg – Os três primeiros minutos – Gradiva.
- Albert Einstein – O significado da Relatividade – A.Amado Editora.
- Stacey Palen, Ph.D. – Astronomy – Schaum's out lines – Mcgraw-Hill.
- Léo Villaverde – Biocosmos – O Universo Vivo.
- Hubbert Reeves – O primeiro Segundo – Gradiva.
- P.J.E.Peebles – Principles of Cosmology (Priceton University Press).
- M.S.Longain – Space Science and Cosmology – cap. V – Royal Observatory, Blackford Hill.
- Virginia Trimble and Stephen P. Maran – Cosmology, Observational tests.
- Kaufmann – Universe.

Endereços Internet

- http://www.iafe.uba.ar/
- http://cosmos.colorado.edu/
- http://csep10.phys.utk.edu/
- http://www.phy.syr.edu/
- http://www.sciam.com/
- http://pupgg.princeton.edu/
- http://www.pbs.org/
- http://www.cosmologymodels.com/
- http://www.physics.gmu.edu/
- http://bullwinkle.as.utexas.edu/
- http://ScienceWorld.wolfram.com/
- http://map.gsfc.nasa.gov/
- http://phyuns.ucr.edu/
- http://www.geocities.com/
- http://nedwww.ipac.caltech.edu/
- http://www.if.ufrgs.br/
- http://home.earthlink.net/
- http://educar.org/
- http://astro.if.ufrgs.br/