

**Carlos Augusto Lopes Morais**

# **A Astronomia no Ensino da Matemática**

Uma proposta para o Ensino Secundário

**Dissertação de Mestrado em Ensino da Astronomia**



**Departamento de Matemática Aplicada  
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto**

Março 2003

Carlos Augusto Lopes Morais

# A Astronomia no Ensino da Matemática

Uma proposta para o Ensino Secundário

Dissertação de Mestrado em Ensino da Astronomia

Orientador: Doutor João Manuel de Morais Barros Fernandes

Professor Auxiliar do Departamento de Matemática  
da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra



Departamento de Matemática Aplicada  
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

Março 2003

*Para o Leonardo e Mariana*

## Agradecimentos

Ao Professor Doutor João Manuel de Moraes Barros Fernandes como proponente e orientador deste trabalho pelo seu inestimável apoio científico e humano do qual guardarei sempre uma grata recordação.

Ao colega Eng<sup>o</sup> José Alberto Vieira pelo aconselhamento informático prestado e pela sua permanente disponibilidade de colaboração ao longo deste trabalho.

À colega Dr<sup>a</sup> Olinda de Jesus Oliveira pela amabilidade de fazer as traduções do resumo.

À minha esposa pela paciente colaboração em especial na revisão final do trabalho.

À minha família pelo acompanhamento sempre interessado da evolução do trabalho e em especial à minha irmã Lena pelas fotografias do Sol.

Ao Professor Doutor Jorge Maurício de Carvalho pelo seu contributo na correcção de imprecisões sobre o efeito Doppler.

## **Resumo**

Este trabalho incide sobre conceitos matemáticos aplicados em Astronomia e está dividido em sete capítulos. No primeiro e segundo capítulos mostra-se como a geometria plana permite calcular distâncias e eclipses. No terceiro descrevem-se matematicamente as órbitas planetárias. No quarto referem-se a geometria e a trigonometria esféricas no contexto da Astronomia de posição. No quinto faz-se uma referência aos fenómenos astronómicos modelados matematicamente por funções periódicas. No sexto são analisadas algumas características das estrelas com base em modelos matemáticos, nomeadamente com as funções exponencial e logarítmica. No sétimo mostra-se como se pode estimar uma idade para o Universo a partir das distâncias às galáxias. A finalizar o trabalho descreve-se numa aplicação, a Matemática associada aos relógios de Sol.

## **Abstract**

This is a study about mathematical concepts applied to Astronomy, and is divided into seven chapters. The first and second ones show how plane geometry is relevant for measuring distances and eclipses. In chapter three a mathematical description of planetary orbits is done. In chapter four the subjects are spherical geometry and trigonometry in positional Astronomy. The fifth one deals with astronomical phenomena described mathematically by periodic functions. In chapter six some of the star characteristics are analysed based on mathematical models, namely exponential and logarithmic functions. The seventh one shows how to estimate the Universe age, based on galactic distances. At the end an application of mathematics to sundials is described.

## **Abrégé**

Ce travail porte des concepts mathématiques appliqués à la Astronomie et se divise en sept chapitres. Dans les deux premiers chapitres on montre comment la géométrie plane permet de calculer des distances et des eclipses. Dans le troisième on décrit mathématiquement des orbites planétaires. Dans le quatrième on se rapporte à la géométrie et à la trigonométrie sphériques dans le contexte de l'Astronomie de position. Dans le cinquième on parle des phénomènes astronomiques modélés mathématiquement par des fonctions périodiques. Dans le sixième quelques caractéristiques des étoiles sont analysées en nous basant sur des modèles mathématiques particulièrement les fonctions exponentielle et logarithmique. Dans le septième on estime l'âge de l'Univers à partir du calcul de la distance aux galaxies. À la fin du travail on décrit par une application la mathématique associée aux cadrans solaires.

# Índice

Introdução	7
Capítulo 1 Geometria plana no cálculo de distâncias em Astronomia	17
1.1 Quanto mede o raio da Terra?	18
1.1.1 Cálculo de Eratóstenes	18
1.1.2 Estimativa de Possidônio	19
1.2 Distância Terra-Lua	21
1.2.1 Método de Aristarco	21
1.2.2 Diâmetro angular	21
1.2.3 A paralaxe nas distâncias	22
1.2.4 Paralaxes astronómicas	24
1.2.5 Paralaxe geocêntrica	24
1.3 Unidades de medida em Astronomia	25
1.3.1 A unidade astronómica	25
1.3.2 O ano luz	25
1.3.3 Relação entre ano luz e U.A.	25
1.3.4 O parsec	26
1.4 Distância Terra-Sol	27
1.4.1 Método de Aristarco	27
1.4.2 Método da paralaxe do Sol	28
1.4.3 Trânsitos de Vénus	30
1.4.3.1 Jonh Horrocks	30
1.4.3.2 Edmund Halley	32
1.5 Distâncias no Sistema Solar	34
1.5.1 Planetas inferiores	34
1.5.2 Planetas exteriores	35
1.6 Distância às estrelas	37
1.6.2 Paralaxe heliocêntrica	37
Questões sobre distâncias e paralaxes	39
Capítulo 2 Geometria dos eclipses	41
2.1 O que é um eclipse	41
2.2 Comprimento da sombra	42
2.2.1 Raio da sombra da Terra	42

2.2.2 Cálculo de sombras	43
2.3 Condições de ocorrência de eclipses	44
2.3.1 Eclipses lunares	44
2.3.2 Eclipses solares	46
2.4 Cálculo de eclipses	49
2.4.1 Eclipses solares	49
2.4.2 Eclipses lunares	51
2.5 Frequência dos eclipses	54
Capítulo 3 Descrição matemática das órbitas planetárias	55
3.1 O modelo heliocêntrico	56
3.1.1 Movimento dos planetas	57
3.1.2 Tycho Brahe	57
3.1.3 Kepler	57
3.1.4 Galileu	58
3.1.5 As leis de Kepler	59
3.2 Propriedades das elipses	61
3.3 Determinação da órbita de Marte	62
3.3.1 Método de Kepler	63
3.3.1.1 Primeira lei	64
3.3.1.2 Segunda lei	66
3.3.1.3 Terceira lei	68
3.4 Órbita de Mercúrio	69
3.4.1 Construção da órbita	70
3.4.2 Excentricidade	68
3.5 Retrogradação dos planetas	73
3.5.1. Pontos de viragem	74
3.5.1.1 Planeta Marte	74
3.5.1.2 Planeta Mercúrio	77
3.6 Inclinação das órbitas planetárias	78
3.6.1 Estudo vectorial	78
3.6.2 Inclinação da órbita de Mercúrio	79
3.6.3 Determinação dos nodos	80
3.7 Determinação da posição orbital dum planeta	82
3.7.1 Coordenadas	82

3.7.2 Raio vector	82
3.7.3 Equação de Kepler	83
3.7.4 Algoritmo de cálculo da equação de Kepler	85
Questões sobre órbitas planetárias	87
Capítulo 4 Geometria esférica na Astronomia de posição	91
4.1 Trigonometria esférica	92
4.1.1 Definições básicas	92
4.1.2 Triângulos esféricos	92
4.1.3 Propriedades dos triângulos esféricos	92
4.1.4 Soluções dos triângulos esféricos	93
4.2 A latitude e a longitude	94
4.2.1 A importância das medições	94
4.2.2 O problema da latitude	96
4.2.3 O problema da longitude	98
4.2.4 Aplicações da latitude e da longitude	100
4.3 A esfera celeste	102
4.3.1 Sistemas de coordenadas	104
4.3.1.1 Sistema horizontal	105
4.3.1.2 Sistema equatorial celeste	106
4.3.1.3 Sistema equatorial horário	107
4.3.1.4 Sistema de coordenadas eclípticas	107
4.4 Movimento diurno dos astros	108
4.4.1 Passagem meridiana	109
4.4.2 Estrelas circumpolares	110
4.5 O Triângulo de Posição	101
4.6 Transformações de coordenadas	113
4.6.1 De horizontais para equatoriais	113
4.6.2 De equatoriais para eclípticas	115
4.7 Cálculo vectorial na posição dos astros	116
4.7.1 Cosenos directores	116
4.7.2 Ângulo entre astros	117
Questões sobre Geometria esférica	119
Capítulo 5 Funções periódicas na Astronomia	121
5.1 Movimento de translação	122

5.1.1 Declinação	123
5.2 Duração do dia e da noite	125
5.2.1 Cálculo da duração do dia	125
5.2.2 Variação do dia ao longo do ano	127
5.3 Altura máxima do Sol	128
5.3.1 Altura máxima versus declinação e latitude	128
5.3.2 Variação anual	129
5.3.3 Variação diária	130
5.4 O azimute do Sol	131
5.4.1 Variação anual	131
5.4.2 Variação diária	132
5.5 Variação da insolação solar	134
5.5.1 Variação anual	136
5.5.2 Variação com a distância Terra-Sol	139
5.6 Manchas e ciclo solares	140
5.6.1 Análise matemática das manchas solares	141
5.6.1.1 Curva sinusoidal	142
5.6.1.2 Curva normal	143
5.6.1.3 Previsão para o ciclo actual	145
5.7 Declinação geocêntrica da Lua	146
Questões sobre funções periódicas	148
Capítulo 6 Análise matemática na radiação das estrelas	149
6.1 O brilho das estrelas	150
6.1.1 Grandeza	150
6.1.2 Equação de Pogson	150
6.1.2.1 Aplicações	151
6.1.3 Lei da fotometria	152
6.1.4 Magnitude absoluta	154
6.2 Cálculo de distâncias às estrelas e galáxias	155
6.2.1 Paralaxe espectroscópica	155
6.2.2 Paralaxe fotométrica	156
6.2.2.1 Obtenção de $p(m)$	157
6.2.2.1.1 Obtenção de $p(M)$	158
6.2.2.3 Módulo da distância	159

6.2.2.4 Cálculo da distância	160
6.3 A radiação das estrelas	162
6.3.1 A lei de Planck	163
6.3.2 A lei de Wien	164
6.3.3 Lei de Stefan – Boltzman	166
6.3.4 Luminosidade versus raio e temperatura	169
6.3.5 Aplicações das leis de Wien e Stefan – Boltzman	172
Questões sobre estrelas	175
Capítulo 7 O declive da recta e a idade do Universo	177
7.1 Lei de Hubble	178
7.1.1 Efeito Doppler	179
7.1.2 Velocidade de recessão	180
7.1.3 Constante de Hubble	181
7.1.4 Distância às galáxias	183
7.2 Constante de Hubble e a idade do Universo	186
7.3 Actividade experimental sobre a lei de Hubble	188
Conclusões	193
Anexo I Pedro Nunes	195
Anexo II A matemática dos relógios de Sol	199
Referências Bibliográficas	219
Figuras	221
Tabelas	223

## Introdução

A Astronomia sendo uma ciência que partindo do que observa tenta chegar por um lado, a uma interpretação coerente de acordo com as observações estabelecendo modelos explicativos (teorias) e por outro, quantifica e relaciona grandezas (por exemplo tempo e distância) através de ferramentas matemáticas (geometria, funções, cálculo diferencial etc) permitindo estabelecer relações de causa-efeito e investigar o passado, conhecer o presente e perspectivar o futuro.

Numa fase inicial, os fenómenos e acontecimentos astronómicos acessíveis ao homem eram aqueles que a vista humana alcançava tais como a sucessão dos dias e das noites, movimentos aparentes do sol, eclipses, fases da Lua, variação da posição dos planetas relativamente às estrelas, modificação das constelações visíveis ao longo do ano, etc.

Desde sempre que o homem se preocupou em perceber os fenómenos, pois cedo se apercebeu, que os mesmos condicionavam as suas actividades (na época em que apareceu a agricultura, foi determinante o conhecimento das estações do ano, para que ela se desenvolvesse) portanto havia um lado prático ligado à sobrevivência, que o levava a querer tirar partido do conhecimento destes fenómenos. Numa fase já mais avançada em que apareceram as primeiras sociedades organizadas, começou a sentir a necessidade mais metafísica, de perceber o Universo que o rodeava e condicionava, interrogando-se sobre questões para as quais não tinha e nalguns casos ainda não tem respostas, como por exemplo, que forma e tamanho tem o Universo? Como começou e como acabará?

Enquanto não desenvolveu capacidades no uso da razão socorreu-se de mitos, superstições e divindades para explicar o que não percebia, mas logo que essas capacidades apareceram começou a poder explicar o que observava criando conceitos e modelos abstractos, traduzidos simbolicamente numa linguagem (a Matemática) que se veio a revelar um instrumento poderoso e universal para a compreensão e resolução de muitos problemas que a Astronomia colocou e continua a colocar actualmente.

Com o desenvolvimento da civilização grega (séc. III e II A.C) as respostas aos problemas astronómicos, foram sendo obtidas fazendo uso da geometria (uma ciência cujo desenvolvimento a Astronomia potenciou) particularmente no conhecimento das propriedades do círculo e dos triângulos, permitindo nomeadamente:

- Criar um modelo de Universo ( modelo Geocêntrico)
- Medir o raio da Terra

- Medir o raio da Lua
- Medir as distâncias Terra – Lua e Terra – Sol em raios terrestres
- Explicar as fases da Lua

Com a evolução da Astronomia, a criação de observatórios que foram registrando sistematicamente as observações ao longo de séculos, o uso de instrumentos como o astrolábio e o quadrante, e mais tarde o aparecimento do telescópio, vieram alargar o âmbito dessas observações, e conduziram à necessidade de outras ferramentas matemáticas para a interpretação das novas realidades que se iam revelando.

A Matemática respondeu a essas necessidades (nalguns casos por antecipação) desenvolvendo instrumentos (trigonometria, álgebra, trigonometria esférica, cálculo vectorial, cálculo diferencial) que a Astronomia aplicou entre outros, aos seguintes casos:

- Modelo Heliocêntrico
- Órbitas planetárias
- Distâncias no sistema Solar
- Distância às estrelas
- Posicionamento dos astros através de coordenadas (o que facilitou a navegação através da orientação astronómica).

Mais recentemente com o contributo da física e o avanço da tecnologia, a Astronomia (Astro-Física) vem alargando o seu horizonte de conhecimentos a domínios como formação e evolução estelar, Astronomia galáctica e extra –galáctica, cosmologia, entre muitos outros, onde a Matemática contribui com ferramentas cada vez mais complexas:

- Cálculo integral
- Cálculo tensorial
- Álgebra das matrizes
- Análise complexa
- Equações diferenciais
- Teorias Quântica e da Relatividade

Esta interacção permanente entre Astronomia e Matemática, de alguma forma pode ser aproveitada para tentar ultrapassar as dificuldades que a maioria dos alunos experimenta,

quer na compreensão dos conceitos matemáticos quer na sua aplicação à realidade, tirando também partido do facto da Astronomia por si só ser bastante motivadora pela curiosidade que desperta nas pessoas, nomeadamente como actividade amadora bastante generalizada. Estas dificuldades com várias explicações e causas possíveis, assentam a meu ver em três factores que se sobrepõem aos restantes:

- Um preconceito negativo, relativamente à Matemática, alimentado pela sociedade em geral, que a ignora e desvaloriza sistematicamente, embora usufrua do conforto e bem estar, que a tecnologia (logo a Matemática) proporciona cada vez mais.
- A dificuldade da escola ultrapassar essa situação, seja por falta de condições objectivas, que não permite uma abordagem da Matemática como uma "ciência experimental" que também o pode ser, limitando o desempenho dos professores a uma abordagem "clássica" com excessiva abstracção e pouca aplicação concreta à realidade
- Falta de cultura científica (na perspectiva de uma aprendizagem que enriqueça e estimule o conhecimento) que a escola continua a praticar, embora os programas e as orientações já comecem a dar um pouco de atenção a essa questão .

A compreensão dos conceitos sendo do domínio do abstracto, pode de alguma forma ser facilitada aos alunos com o recurso a situações onde a sua aplicação seja determinante na resolução de problemas concretos. Aqui a Astronomia fornece bastantes exemplos, como os que são tratados neste trabalho:

#### 1. Conceitos elementares de geometria

- Ângulos e arcos num círculo permitem medir o raio da Terra
- Triângulos e razões trigonométricas permitem calcular a distância Terra – Lua e Terra – Sol
- A elipse permite representar as órbitas dos planetas

#### 2. Conceitos elementares de análise de funções

- O declive duma recta permite estimar a idade do Universo
- A derivada permite calcular a retrogradação dos planetas
- O uso de funções trigonométricas permite calcular por exemplo a duração do dia e a altura máxima do Sol num qualquer dia do ano.

- A relação entre a distância duma estrela e o seu brilho é uma função logarítmica
- A função exponencial permite calcular a temperatura dum estrela

Todos estes conceitos estão integrados nos programas a nível do secundário proposto pelo Ministério da Educação, onde poderão ser explorados com a devida contextualização, promovendo a já referida cultura científica assim como evidenciando o lado prático da Matemática.

Sendo estes os objectivos principais que este trabalho pretende alcançar e que estão subjacentes aos objectivos propostos para os referidos programas, far-se-á de seguida uma breve análise crítica dos programas citados.

Considerando uma das finalidades da disciplina para o ensino secundário entre outras, o "*Desenvolvimento da capacidade de usar a Matemática como instrumento de interpretação e intervenção no real e o contribuir para uma atitude positiva face à Ciência*" temos aqui dois campos onde a Astronomia pode e deve ser utilizada, seja como suporte científico e pedagógico, seja como reflexão filosófica no contexto da origem do Universo.

Ao nível dos objectivos e competências gerais são em que é proposto uma série de valores/attitudes, assim como capacidades/competências a desenvolver pelos alunos a partir de conhecimentos a adquirir na disciplina de Matemática (quadro I) serão de destacar aqueles que se enquadram nos objectivos a atingir com o uso da Astronomia, nomeadamente em actividades onde seja relevante o papel da Matemática.

Esta caracterização dos objectivos através de valores, capacidades e conhecimentos vem realçar que *o essencial da aprendizagem da Matemática deve ser procurada ao nível das ideias* (segundo os autores desta proposta de programa) sem por em causa *o ensino do manejo das ferramentas matemáticas que deverá ser feito no contexto das ideias e da resolução de problemas interessantes* concluindo pela *inclusão de características típicas do ensino experimental nas aprendizagens significativas em Matemática contribuindo assim para alicerçar conhecimentos e formas de pensar sobre a ciência experimental* ( a Astronomia é uma ciência experimental: observa-se, mede-se, regista-se etc)

Quadro I - Objectivos e competências gerais para o ensino secundário

Valores/Atitudes	Capacidades/Aptidões	Conhecimentos
<p>Desenvolver a confiança em si próprio:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ exprimir e fundamentar as suas opiniões;</li> <li>▪ revelar espírito crítico, de rigor e de confiança nos seus raciocínios;</li> <li>▪ abordar situações novas com interesse, espírito de iniciativa e criatividade;</li> <li>▪ procurar a informação de que necessita.</li> </ul> <p>Desenvolver interesses culturais:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ manifestar vontade de aprender e gosto pela pesquisa;</li> <li>▪ interessar-se por notícias e publicações relativas à Matemática e a descobertas científicas e tecnológicas;</li> <li>▪ apreciar o contributo da Matemática para a compreensão e resolução de problemas do Homem através do tempo.</li> </ul> <p>Desenvolver hábitos de trabalho e persistência:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ elaborar e apresentar os trabalhos de forma organizada e cuidada;</li> <li>▪ manifestar persistência na procura de soluções para uma situação nova.</li> </ul>	<p>Desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ analisar situações da vida real identificando modelos matemáticos que permitam a sua interpretação e resolução;</li> <li>▪ seleccionar estratégias de resolução de problemas;</li> <li>▪ formular hipóteses e prever resultados;</li> <li>▪ interpretar e criticar resultados no contexto do problema;</li> <li>▪ resolver problemas nos domínios da Matemática, da Física, da Economia, das Ciências Humanas, ...</li> </ul> <p>Desenvolver o raciocínio e o pensamento científico:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ descobrir relações entre conceitos de Matemática;</li> <li>▪ formular generalizações a partir de experiências;</li> <li>▪ validar conjecturas; fazer raciocínios demonstrativos usando métodos adequados;</li> <li>▪ compreender a relação entre o avanço científico e o progresso da humanidade.</li> </ul>	<p>(<i>Dependente da discussão pública em curso</i>)</p> <p>Ampliar o conceito de número (operações em <math>\mathbb{R}</math> e <math>\mathbb{C}</math>, com expressões polinomiais, racionais, com radicais, trigonométricas, exponenciais e logarítmicas)</p> <p>Ampliar conhecimentos de Geometria no Plano e no Espaço (problemas de incidência, paralelismo e perpendicularidade, operações com vectores)</p> <p>Iniciar o estudo da Análise Infinitesimal (limites, taxas de variação e derivadas sobre funções polinomiais, racionais, com radicais, trigonométricas, exponenciais e logarítmicas)</p> <p>Ampliar conhecimentos de Estatística e Probabilidades</p> <p>Conhecer aspectos da História da Matemática</p>

Fonte: Programa para o ensino secundário proposto pelo Ministério da Educação.

O programa do ensino secundário está dividido em cada um dos anos em 3 grandes temas como se mostra no quadro seguinte.

### Quadro Resumo Distribuição dos temas em cada ano

10º ano	11º ano	12º ano
<p><b>Tema I</b> Geometria no Plano e no Espaço I</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Resolução de problemas de Geometria no plano e no espaço.</li> <li>▪ Geometria Analítica.</li> </ul> <p>O método cartesiano para estudar Geometria no plano e no espaço.</p> <p><b>Tema II</b> Funções e Gráficos. Funções polinomiais. Função módulo.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Função, gráfico e representação gráfica.</li> <li>▪ Estudo intuitivo de propriedades da: <ul style="list-style-type: none"> <li>- função quadrática;</li> <li>- função módulo.</li> </ul> </li> <li>▪ Funções polinomiais (graus 3 e 4).</li> <li>▪ Decomposição de polinómios em factores.</li> </ul> <p><b>Tema III</b> Estatística</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Estatística - Generalidades</li> <li>▪ Organização e interpretação de caracteres estatísticos (qualitativos e quantitativos).</li> <li>▪ Referência a distribuições bidimensionais (abordagem gráfica e intuitiva).</li> </ul>	<p><i>(Em discussão)</i></p> <p><b>Tema I</b> Geometria no Plano e no Espaço II</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Trigonometria; círculo trigonométrico</li> <li>▪ Produto escalar de dois vectores no plano e no espaço; definição de plano.</li> </ul> <p><b>Tema II</b> Funções Racionais. Taxa de variação.</p> <p><b>Tema III</b> Sucessões reais.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Definição e propriedades. Exemplos (o caso das progressões)</li> <li>▪ Convergência e divergência.</li> </ul>	<p><i>(Em discussão)</i></p> <p><b>Tema I</b> Probabilidades e Combinatória</p> <p><b>Tema II</b> Funções exponenciais e logarítmicas. Limites e Continuidade. Conceito de Derivada e Aplicações.</p> <p><b>Tema III</b> Funções trigonométricas. Complexos</p>
<b>Temas Transversais</b>		
<ul style="list-style-type: none"> <li style="width: 50%;">▪ Comunicação Matemática</li> <li style="width: 50%;">▪ Aplicações e Modelação Matemática</li> <li style="width: 50%;">▪ História da Matemática</li> <li style="width: 50%;">▪ Lógica e Raciocínio Matemático</li> <li style="width: 50%;">▪ Resolução de Problemas e Actividades Investigativas</li> <li style="width: 50%;">▪ Tecnologia e Matemática</li> </ul>		

Fonte: Programa para o ensino secundário proposto pelo Ministério da Educação

Além de temas transversais subjacentes aos conteúdos programáticos a leccionar ao longo dos três anos, estão contempladas neste programa as principais áreas da Matemática:

- Geometria no Plano e no Espaço
- Funções e Sucessões
- Probabilidades e Estatística

De notar o peso considerável atribuído à Geometria, tentando recuperar as graves insuficiências nesta área, devido ao esquecimento a que foi votada durante bastantes anos, podendo aqui a Astronomia desempenhar um papel importante na recuperação desse atraso, tirando partido da sua ligação histórica com a Geometria (na época das grandes civilizações - Babilónia Egipto e Grécia - a Astronomia era sinónimo de Geometria).

De entre as **sugestões metodológicas gerais** destacaria *a análise de situações da vida real e a identificação de modelos matemáticos que permitem a sua interpretação e resolução constituindo uma oportunidade de abordar o método científico* bem como a referência *numa perspectiva histórico-cultural de actividades que ajudem a compreender a nossa herança cultural pelas aplicações que a Matemática tem tido e ainda tem, á Astronomia, Física e outras Ciências.*

Em concreto encontramos no programa proposto, uma série **de indicações metodológicas específicas** para determinados temas, os quais podem ser associados com a Astronomia.

Neste trabalho essa associação é concretizada da seguinte forma:

### **Geometria no Plano e no Espaço**

- Resolução de Problemas de Geometria – É sugerida a utilização de problemas que sugiram outros e permitam abordagens segundo diferentes perspectivas (por exemplo usando coordenadas e vectores) assim como a resolução dum problema histórico.
- Geometria Analítica –Proposta de actividades em que haja necessidade e vantagem do uso dum referencial quer no plano quer no espaço.
- Vectores – Explorar ligações do cálculo vectorial com outras áreas.
- Resolução de problemas que envolvam triângulos –Uso de situações em que sejam aplicados métodos trigonométricos (navegação, topografia, históricos etc)

Nesta tema vamos encontrar:

- Medição do raio da Terra
- Cálculo da Latitude e Longitude
- Distâncias no Sistema Solar
- Eclipses Solares e Lunares
- Forma e Inclinação das órbitas planetárias
- Relógios de Sol
- Geometria e Trigonometria esféricas

### **Funções**

- Função linear – Exemplos a partir de questões concretas
- Função exponencial e Logarítmica – Modelação usando capacidades de calculadoras gráficas e por análise algébrica adequando modelos fornecidos.
- Funções trigonométricas: seno, coseno e tangente – Investigar (em casos simples e se possível ligados a problemas de modelação) a influência da mudança de parâmetros na expressão que define a função.

Este tema é contemplado em:

- Lei de Hubble
- Lei de Pogson
- Radiação do Corpo Negro (Leis de Planck, Wien e Stefan - Boltzman)
- Sistemas de Coordenadas
- Movimentos aparentes do Sol

### **Cálculo Diferencial**

- Resolução de problemas envolvendo funções ou taxa de variação – aprendizagem intuitiva do conceito de taxa de variação num contexto de modelação matemática

A aplicação de derivadas surge nos seguintes casos:

- Lei das áreas ( 2º lei de Kepler)
- Retrogradação dos Planetas
- Lei de Wien (cálculo da temperatura duma estrela)

A utilidade da Matemática para a Astronomia não se esgotando nestes casos, é possível vir a ser demonstrada quer ao nível dos conhecimentos que são acessíveis aos alunos do secundário, nível que baliza este trabalho e cujos professores e alunos serão os principais destinatários, quer ainda nos casos onde a Matemática usada (trigonometria esférica, integração) vai além do nível secundário numa perspectiva de estimular a curiosidade e o conhecimento científicos.

Em concreto este tese está estruturada da seguinte forma:

- Sete capítulos, seguindo um estudo do que está próximo (Terra e Sistema Solar nos primeiros cinco capítulos) para o que está distante (Estrelas e Galáxias nos sexto e sétimo capítulos respectivamente) complementado por dois anexos, referentes o primeiro ao Matemático Pedro Nunes, e o segundo à Matemática dos relógios de Sol.
- Em cada capítulo é feita uma introdução situando os temas matemáticos na Astronomia e no contexto do programa do secundário.
- São introduzidas ao longo do texto, perguntas cujas respostas ficam a cargo do leitor, e no final dos capítulos é proposto um conjunto de questões que permitem aplicar a Matemática no contexto da Astronomia.
- Todos os cálculos envolvidos são apresentados, sendo alguns (poucos) remetidos para o leitor de forma a envolvê-lo na sua concretização .
- Ao longo do trabalho recorre-se frequentemente ao uso de software, quer de Astronomia quer de Matemática que permite um tratamento mais eficiente e mais sugestivo dos dados utilizados, nomeadamente na construção de tabelas e na obtenção de gráficos.
- Os assuntos que ultrapassam o âmbito do ensino secundário, são referidos numa perspectiva optimista de motivação extra-curricular, assentes como estão em conhecimentos de maior complexidade e profundidade, que poderão estimular a curiosidade científica dos alunos .

# Capítulo 1

## A Geometria plana no cálculo de distâncias em Astronomia

Ao observar no céu a forma esférica dos astros mais próximos, Lua Sol e alguns planetas foi – se criando a ideia que o Universo (resumido ao que era observável) teria uma arquitectura esférica, com a Terra no centro envolvida por esferas concêntricas, uma por cada astro (que rodariam em volta da Terra descrevendo círculos) exceptuando as estrelas que estariam fixas numa única esfera que fecharia o Universo. Esta concepção de Universo deve-se a Ptolomeu (séc II D.C) resultando claramente daqui uma concepção geométrica do Universo, privilegiando a forma mais perfeita conhecida ou seja o círculo.

Não admira pois que a Geometria tenha tido um papel determinante (e durante 2 milénios praticamente único) na interpretação do Universo.

Os conhecimentos geométricos entretanto desenvolvidos (sendo a civilização Grega o expoente máximo desse desenvolvimento) vieram permitir fazer cálculos e começar a ter a noção das distâncias aos astros mais próximos (as estrelas à excepção do Sol eram inatingíveis, quer geometricamente quer filosoficamente).

Neste capítulo serão referidos conceitos de geometria plana utilizados no cálculo de distâncias astronómicas como:

- Semelhança de triângulos
- Razões trigonométricas
- Dualidade ângulo – arco

fazendo uso de relações decorrentes das propriedades quer dos triângulos quer da circunferência tais como:

- Teorema de Pitágoras
- Proporcionalidade nos triângulos semelhantes
- Razões trigonométricas
- Perímetro da circunferência
- Amplitude de ângulos ao centro

mostrando-se como tirar partido dessa relações no cálculo das referidas distâncias, aplicando métodos geométricos que poderão ser explorados nos temas " Geometria no plano e no espaço I e II ", quer como exemplo de aplicações concretas á resolução de problemas, quer como proposta de actividades relacionadas com a Astronomia.

## 1.1. Quanto mede o raio da Terra?

### 1.1.1. Cálculo de Eratóstenes

O primeiro cálculo baseado em métodos geométricos, foi obra de Eratóstenes de Alexandria por volta de 230 A.C. Tendo observado que ao meio-dia no Solstício de Verão, os raios solares iluminavam o fundo de um poço situado em Siena (concluindo que os raios solares incidiam perpendicularmente) e que à mesma hora em Alexandria, a sombra projectada por uma vara permitia-lhe (a partir do comprimento da sombra e da altura da vara) calcular a inclinação dos raios solares. Eratóstenes mediu um ângulo correspondente à quinquagésima parte da circunferência ou seja  $7,2^\circ$  (fig. 1.1)

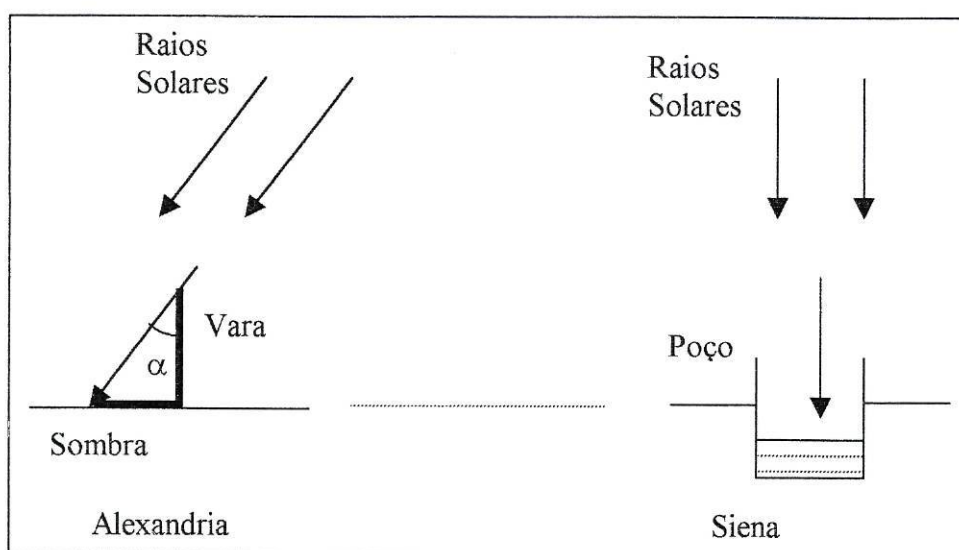


Fig.1.1 - O observado por Eratóstenes no Solstício de Verão

Com base nisto, o raciocínio utilizado pode ser traduzido geometricamente na figura seguinte (fig. 1.2)

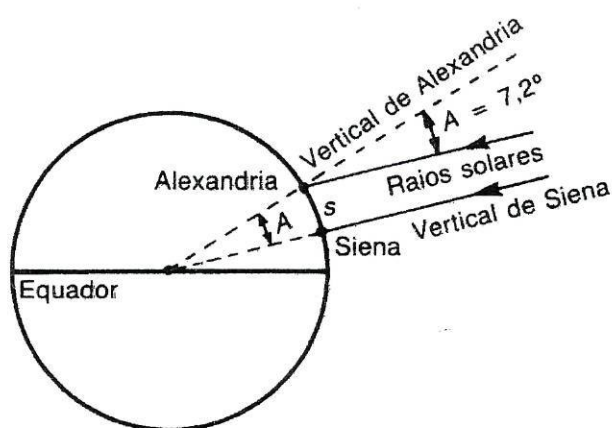


Fig. 1.2 - Determinação do raio da Terra por Eratóstenes

Usando a correspondência entre ângulos e arcos de circunferência:

Sendo  $p$  o perímetro da Terra

$$\frac{s}{p} = \frac{7,2^\circ}{360^\circ}$$

sabendo  $s$  (distância entre Siena e Alexandria) estimada em 5000 estádios

$$\frac{5.000}{p} = \frac{7,2^\circ}{360^\circ}$$

donde resulta  $p = 250\,000$  estádios (admite-se que o estádio equivalia a 157,5 m) vindo

$$p = 250.000 \times 0,1575 = 39.375 \text{ Km}$$

Com base no perímetro da circunferência  $2\pi R$  (assumindo a Terra como esférica)

Obtém-se para o raio terrestre:

$$R = \frac{39.375}{2\pi} = 6.270 \text{ Km}$$

Actualmente o raio médio da Terra está em 6.378 Km pelo que o valor obtido por Eratóstenes difere do actual menos de 1,6% o que é notável.

### 1.1.2. Estimativa de Possidónio

Outra estimativa para o raio da Terra, foi avançada por Possidónio com base na observação da estrela Canopos da constelação de Carina (fig. 1.3)

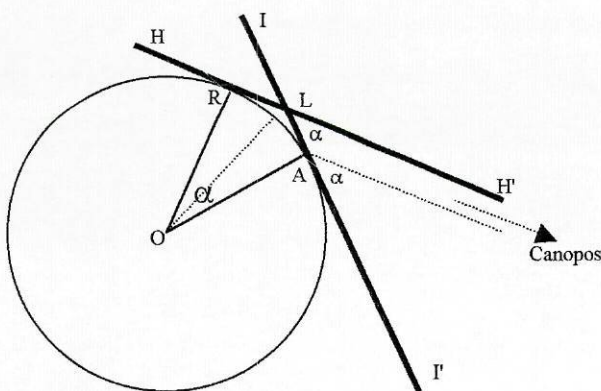


Fig.1.3 – Canopos vista de Rhodes e Alexandria

Os Gregos desenvolveram um método para medir o perímetro terrestre, utilizando uma estrela fixa em vez do Sol. O método atribuído a Possidónio, baseia-se na observação de que quando a estrela Canopos (C) se vê na linha do horizonte na direcção de Rhodes, ela está acima do horizonte em Alexandria da 24ª parte dum ângulo raso.

Como Rhodes e Alexandria estão sensivelmente num mesmo meridiano, e sendo  $HH'$  a linha do horizonte em Rhodes (R) e  $II'$  a linha do horizonte em Alexandria (A) ambas perpendiculares aos raios da Terra, nos pontos de tangência R e A respectivamente, tem-se a igualdade dos ângulos  $I'AC$  e  $ROA$  e também dos ângulos  $I'LH'$  e  $I'AC$  (fig.1.3). Porquê?

Sendo  $\widehat{AC} = \widehat{OA}$  implica que o comprimento do arco AR seja a 48ª parte do perímetro do meridiano terrestre. Porquê?

Faltava medir o comprimento do arco AR ligando Alexandria a Rhodes. Tomando um valor atribuído a Eratóstenes segundo o qual  $AR = 3.750$  estádios, Possidónio calculou para o perímetro terrestre:

$$48 \times 3.750 = 180.000 \text{ estádios} \cong 28.350 \text{ Km}$$

menos de  $\frac{3}{4}$  do valor obtido por Eratóstenes. O erro de Possidónio pode estar na estimativa da elevação de Canopos, que devia ser de  $5,25^\circ$  em vez dos  $7,5^\circ$   $\left(\frac{180^\circ}{24}\right)$

Este valor de 180 000 estádios, foi o preferido por Cristovão Colombo séculos mais tarde para calcular a distância que teria de percorrer no mar, navegando para ocidente segundo o paralelo (latitude de  $23^\circ$  Norte) que passa nas ilhas Canárias, onde a viagem seria iniciada. Supondo Colombo, que teria apenas de percorrer  $60^\circ$  ao longo desse paralelo até encontrar as Índias Orientais, calculou

$$\frac{60}{360} \times 180.000 \times 157,5 \cong 4.725 \text{ km}$$

Como a viagem seria feita ao longo do paralelo à latitude de  $23^\circ$  N, e não ao longo do Equador (fig. 1.4) a distância calculada teria de ser corrigida dum factor de 0,92 pois:

$$R_P = R_T \times 0,92 \quad \text{Porquê?}$$

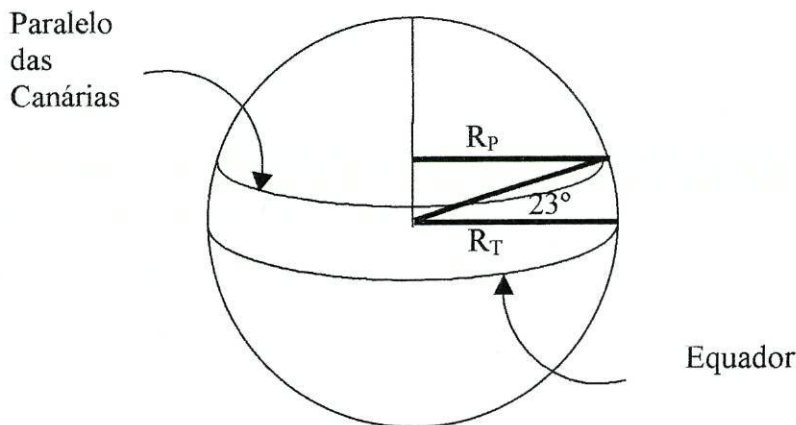


Fig 1.4 – Paralelo das Canárias versus Equador

Com esta correcção, obtém-se um valor de aproximadamente 4.300 Km que Colombo pensava cobrir em cerca de 30 dias. De facto demorou 33 dias a encontrar Terra  $57^\circ$  a Ocidente do ponto de partida tendo chegado não às Índias, mas sim à América do Norte.

## 1.2. Distância Terra-Lua e Raio da Lua

### 1.2.1. Método de Aristarco de Samos

Partindo do raio da Terra, Aristarco de Samos numa forma simples e engenhosa (combinando geometria com observação) calculou a distância entre os dois astros, da seguinte maneira:

Sabendo que o Sol está consideravelmente mais longe da Terra que a Lua, considera o cone de sombra projectada pela Terra praticamente cilíndrico, pelo que a Lua ao atravessá-lo terá de percorrer uma distância igual ao diâmetro da Terra (fig.1.5). Aproveitando um eclipse lunar, constatou que o tempo gasto para mergulhar completamente na sombra, é  $\frac{1}{4}$  do tempo gasto para atravessar o cilindro de sombra, donde concluiu que o raio da Lua mediria  $\frac{1}{4}$  do raio da Terra.

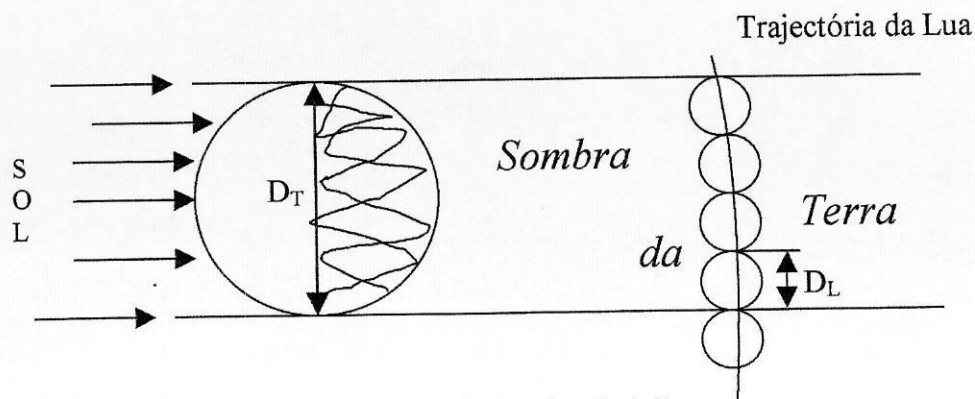


Fig.1.5 - Determinação do raio da Lua

$$R_L = \frac{R_T}{4} = \frac{6.320}{4} = 1.580 \text{ Km}$$

Sendo o valor actual de 1.730 Km vemos que o erro cometido por Aristarco foi de 0,087 ou seja, inferior a 9% o que é notável.

### 1.2.2. Diâmetro angular

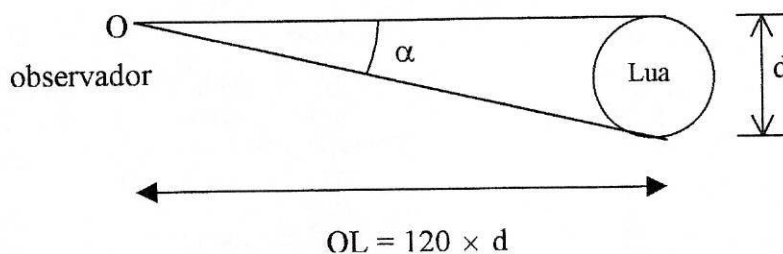


Fig.1.6 - Distância para um diâmetro aparente  $\alpha$ , de  $30'$

Sendo já conhecido (30') o diâmetro aparente da Lua, e tendo os geómetras da época estabelecido que o afastamento necessário, para ver um disco segundo um ângulo de 30' é 120 vezes o seu diâmetro (fig.1.6):

Teremos

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{d}{120 \times d} \\ \alpha &= \operatorname{arctg} \left( \frac{1}{120} \right) \\ \alpha &= 30' \end{aligned}$$

Assim sendo a distância Terra-Lua ( $D_{TL}$ ) será:

$$D_{TL} = \frac{D_L}{\operatorname{tg} 30'} = \frac{2 \times 1.580}{87,3 \times 10^{-4}} = 362.100 \text{ Km}$$

### 1.2.3. A paralaxe no cálculo das distâncias astronómicas

Um outro processo de cálculo, baseia-se na triangulação através da chamada paralaxe .

O método mais comum para se medirem grandes distâncias a pontos inacessíveis, é a triangulação. Na fig.1.7 está esquematizado como exemplo, a maneira de medir a distância de uma árvore localizada do outro lado de um rio, sem atravessá-lo:

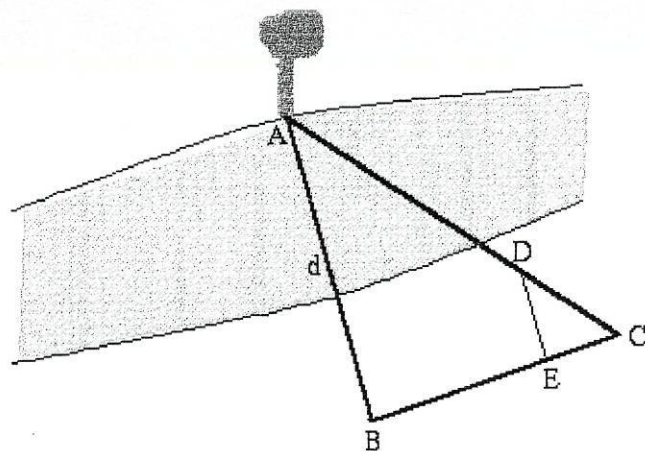


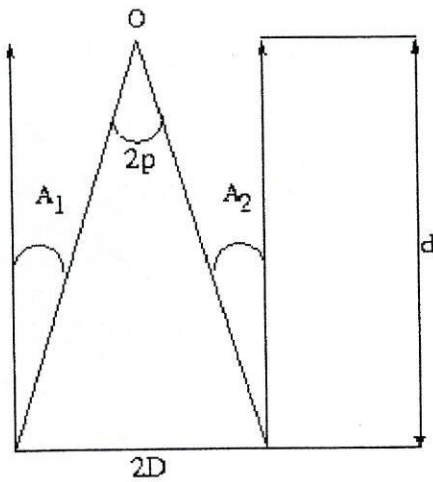
Fig.1.7 - Método da triangulação

Tomando a árvore como um dos vértices, construímos os triângulos semelhantes ABC e DEC. BC é a linha de base do triângulo grande, AB e AC são os lados, que são as direcções do objecto (a árvore) vistas de cada extremidade da linha base. Logo

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EC} \Leftrightarrow AB = \frac{BC \times DE}{EC}$$

Como se pode medir BC DE e EC, pode-se calcular o lado AB e conhecer a distância da árvore.

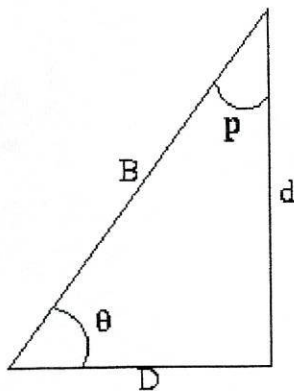
Vemos que a direcção da árvore vista de B, é diferente da direcção da árvore vista de C. Esse deslocamento aparente, na direcção do objecto observado devido à mudança de posição do observador, é o chamado efeito de *paralaxe*. Em Astronomia, usa-se uma quantidade  $p$  que corresponde a metade do ângulo correspondente a esse deslocamento como está ilustrado na fig.1.8



Suponha que o ponto O é o objecto cuja distância se quer medir (a árvore da figura anterior).  $2D$  é a linha de base do triângulo, e os ângulos  $A_1$  e  $A_2$  são os ângulos entre a direcção do objecto, visto de cada extremidade da linha base e a direcção de um objecto muito mais distante tomado como referência (pode ser uma montanha no horizonte, no exemplo anterior).

Fig 1.8 - Ângulo de deslocamento  $2p$

Recordando que num triângulo de base  $D$ , altura  $d$ , diagonal  $B$  e ângulo  $\theta$  entre  $D$  e  $B$ , temos



$$B \cos \theta = D \Leftrightarrow B = \frac{D}{\cos \theta}$$

$$B \sin \theta = d \Leftrightarrow d = \frac{D \sin \theta}{\cos \theta} = D \operatorname{tg} \theta$$

Como na paralaxe medimos o ângulo  $p$  entre  $B$  e  $d$ , temos

$$\operatorname{tg} p = \frac{D}{d} \Leftrightarrow d = \frac{D}{\operatorname{tg} p} \cong \frac{D}{p(\text{rad})}$$

para ângulos  $p$  suficientemente pequenos.

Usa uma calculadora e verifica que  $\operatorname{tg} p \cong \operatorname{sen} p \cong p$  com  $p$  em radianos e valores inferiores a meio grau

Regressando à fig. 1.8 sabemos que

$$\operatorname{tg} p = \frac{D}{d}$$

Medindo  $A_1$  e  $A_2$  (com teodolitos por exemplo) podemos calcular  $p$  pois no triângulo

$$2p + (90 - A_1) + (90 - A_2) = 180$$

donde resulta

$$p = \frac{A_1 + A_2}{2},$$

Como  $D$  também é conhecido, podemos medir a distância  $d$ . Para ângulos pequenos, a tangente do ângulo é aproximadamente igual ao próprio ângulo medido em radianos.

Então:

$$d = \frac{D}{p(\text{rad})} \quad (1)$$

Como  $p$  é medido em radianos,  $d$  terá a mesma unidade de  $D$ .

#### 1.2.4. Paralaxes astronômicas

O mesmo método de triangulação explicado acima, é usado para medir distâncias de objectos astronômicos. Mas como esses objectos estão muito distantes, é necessário escolher uma linha de base muito grande. Para medir a distância da Lua ou dos planetas mais próximos por exemplo, pode-se usar o diâmetro da Terra como linha de base. Para se medir a distância de estrelas próximas, usa-se o diâmetro da órbita da Terra como linha de base.

#### 1.2.5. Paralaxe geocêntrica

A fig. 1.9 ilustra o problema para a determinação da distância da Lua, usando o diâmetro da Terra como linha de base.

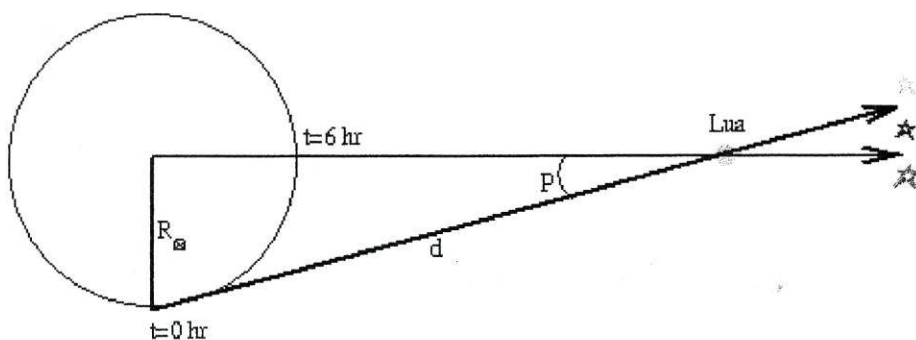


Fig 1.9 - Paralaxe da Lua

A posição da Lua em relação às estrelas distantes, é medida duas vezes, em posições opostas na Terra, e a paralaxe corresponde a metade da variação total na direcção observada dos dois lados opostos da Terra. Essa paralaxe é chamada *paralaxe geocêntrica*, e é expressa por:

$$p(\text{rad}) = \frac{R_{\text{Terra}}}{d} \Leftrightarrow d = \frac{R_{\text{Terra}}}{p(\text{rad})}$$

Por observação verifica-se que o valor médio de  $p$  (média de valores de  $p$  obtidos com a Lua em diferentes posições ao longo da sua órbita) é de  $57'$  o que determina:

$$p(\text{rad}) = \frac{57}{60} \times \frac{2\pi}{360} = 0,166$$

$$d = \frac{6.370}{0,166} = 384.183 \text{ Km}$$

Ou seja a distância média da Lua à Terra é de aproximadamente 384.000Km

### 1.3. Unidades de medida em Astronomia

#### 1.3.1. A unidade astronómica (U.A.)

Chama-se unidade astronómica à distância média da Terra ao Sol e o seu valor é:

$$1 \text{ U.A.} = 149.600.000 \text{ Km}$$

#### 1.3.2. O ano-luz (AL)

O ano-luz é a distância percorrida pela luz no vazio num ano.

Essa distância equivale a:

$$1 \text{ AL} = \text{velocidade da luz} \times 1 \text{ ano}$$

$$1 \text{ AL} = 3 \times 10^5 \text{ Km/s} \times 3,2 \times 10^7 \text{ s} \cong 9,6 \times 10^{12} \text{ Km}$$

#### 1.3.3. Relação entre ano-luz e U.A.

$$\text{Como} \quad \begin{cases} 1 \text{ U.A.} = 1,496 \times 10^8 \text{ Km} \\ 1 \text{ AL} = 9,6 \times 10^{12} \text{ Km} \end{cases}$$

vamos ter que:

$$1 \text{ AL} = \frac{9,6 \times 10^{12}}{1,496 \times 10^8} \text{ UA} \quad \text{ou seja} \quad 1 \text{ AL} \cong 64.171 \text{ UA}$$

### 1.3.4. O Parsec

Um parsec é a distância de um objecto, tal que um observador nesse objecto veria o raio da órbita da Terra em torno do Sol, com um tamanho angular de  $1''$  ou por outras palavras, é a distância de um objecto que apresenta paralaxe heliocêntrica de  $1''$ .

Como um ângulo de  $1''$  expresso em radianos vale

$$1'' = \left( \frac{1^\circ}{3600} \right) \times \left( \frac{2\pi}{360^\circ} \right) = 4,848 \times 10^{-6} \text{ rad}$$

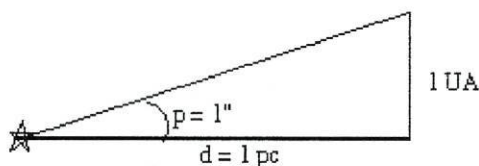
substituindo em (1) resulta:

$$1 \text{ pc} = \frac{1 \text{ UA}}{4,848 \times 10^{-6}} = 206.265 \text{ UA}$$

A distância de um objecto, expressa em parsecs é dada por:

$$d(\text{pc}) = \frac{1}{p('')}$$

Um parsec portanto, é igual a 206.265 UA e a 3,26 AL.



Resumindo as três unidades para uma estrela com paralaxe heliocêntrica qualquer, a sua distância será:

$$d(\text{UA}) = \frac{1}{p(\text{rad})} = \frac{206.265}{p('')}$$

$$d(\text{pc}) = \frac{1}{p('')}$$

$$d(\text{AL}) = \frac{3,26}{p('')}$$

Até há poucos anos com os telescópios disponíveis na Terra, a maior distância às estrelas que se podia medir com precisão superior a 10% era 20 pc, o que corresponde a  $p \geq 0.05''$ . O uso de CCD e telescópios delicados baixou a incerteza das observações na Terra para 1 mili-segundo de arco, semelhante ao conseguido pelo satélite HIPPARCOS

(High-Precision Parallax Collecting Satellite) construído para medir com alta precisão a posição e a paralaxe de 120.000 estrelas. Ele foi lançado em Agosto de 1989, e operou com sucesso durante 3 anos apesar de não ter alcançado a órbita geoestacionária pretendida. É importante notar que 1 mili-segundo de arco, é equivalente ao tamanho angular de uma pessoa na superfície da Lua vista da Terra. Para atingir esta precisão, foi necessário corrigir o desvio da luz devido ao efeito gravitacional do Sol previsto pela relatividade geral, e que é de 1,7 segundos de arco na borda do Sol e 4 mili-segundos de arco a  $90^\circ$  do Sol.

## 1.4. Distância Terra-Sol e Raio do Sol

A medição da distância Terra – Sol sempre constituiu um desafio para os astrónomos e as formas de a fazer são variadas, sendo umas mais precisas que outras.

De seguida iremos descrever alguns métodos utilizados nessa medição.

### 1.4.1. Método de Aristarco

Aristarco propôs o seguinte raciocínio: Considerou duas posições na órbita da Lua, uma L em quadratura com a Terra e o Sol (ângulo STL =  $90^\circ$ ) e outra L' bastante próxima com o ângulo SL' T =  $90^\circ$  (fig. 1.10).

Do triângulo TL'S rectângulo em L' tirou a relação

$$\frac{TS}{TL'} = \frac{1}{\sin \alpha} \quad \boxed{\text{Mostrar que } \alpha = \beta}$$

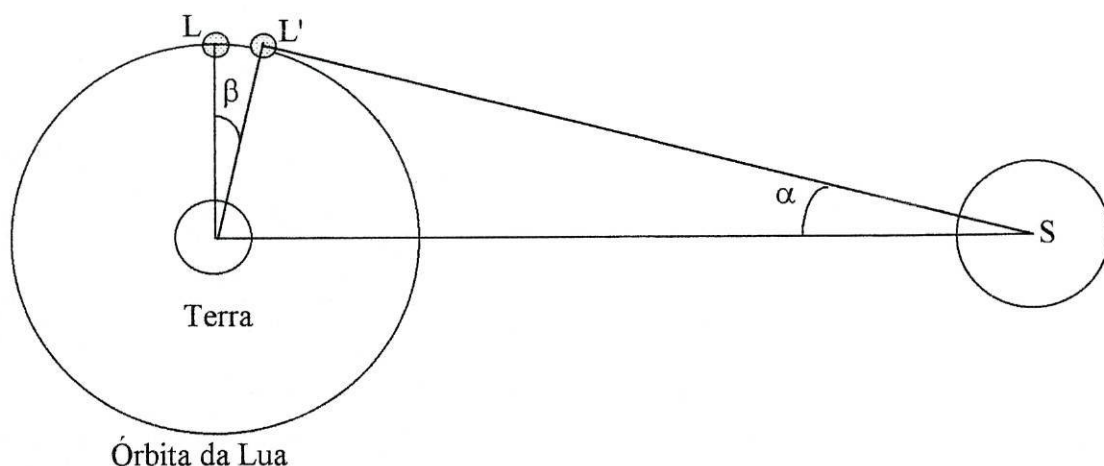


Fig. 1.10 - Cálculo da distância Terra-Sol por Aristarco

O problemático da situação prende-se com a manifesta dificuldade de medir o ângulo LTL' (sobretudo devido à pouca precisão dos instrumentos da época) tendo Aristarco avaliado o

valor de  $\beta$  em  $3^\circ$  (em vez de  $10'$ ) pelo que obteve

$$\frac{TS}{TL'} = 19$$

$$TS = TL' \times 19 = 60 \times R_T \times 19 \cong 1.140 \times R_T \text{ (em vez de } 23.400 \times R_T \text{)}$$

Este valor apesar de bastante mau foi adoptado (por falta de alternativa durante cerca de 1.500 anos).

Hoje é sabido que o Sol está 400 vezes mais afastado da Terra que a Lua. Na ocorrência dum eclipse anular vemos da Terra, os discos lunar e solar sobrepostos o que permite concluir pela quase igualdade dos raios aparentes (fig. 1.11).

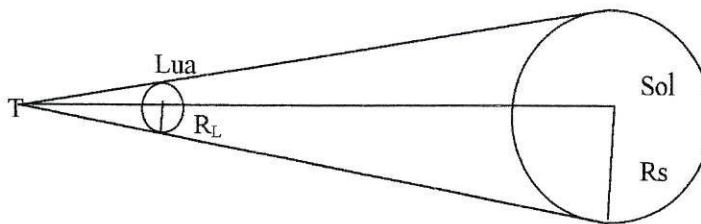


Fig. 1.11 - Relação entre os raios do Sol e da Lua

Da figura e por semelhança de triângulos

$$\frac{TS}{TL} = \frac{R_s}{R_L} \cong 400$$

$$TS = 400 \times TL \Leftrightarrow 382.000 \times 400 = 152.800.000 \text{ Km}$$

donde se conclui:

$$R_s = 400 \times R_L \Leftrightarrow 1.600 \times 400 = 640.000 \text{ Km}$$

#### 1.4.2. Método da paralaxe do Sol

##### Pela oposição de Marte

Uma das possibilidades de calcular  $D_{TS}$  (distância Terra-Sol) é através do conhecimento da sua paralaxe horizontal  $\alpha$  (ângulo sob o qual o Sol vê o raio da Terra) uma vez conhecido o raio terrestre  $r$  (fig. 1.12).

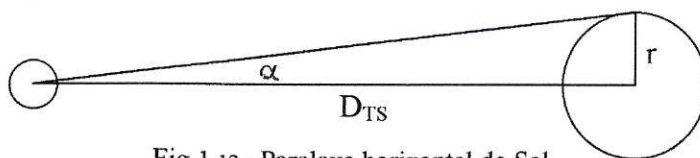


Fig 1.12 - Paralaxe horizontal do Sol

Por definição de tangente

$$D_{TS} = \frac{r}{\text{tg}\alpha}$$

Uma das formas de obter essa paralaxe, é a partir da observação de Marte nas chamadas grandes oposições (quando o planeta se encontra perto do periélio da sua órbita, aproximadamente a 55 milhões de Km da Terra)

Vejamos como se pode obter geometricamente a paralaxe do Sol.

Consideremos para simplificar que o Sol Terra e Marte se encontram alinhados no momento da oposição(fig.1.13)

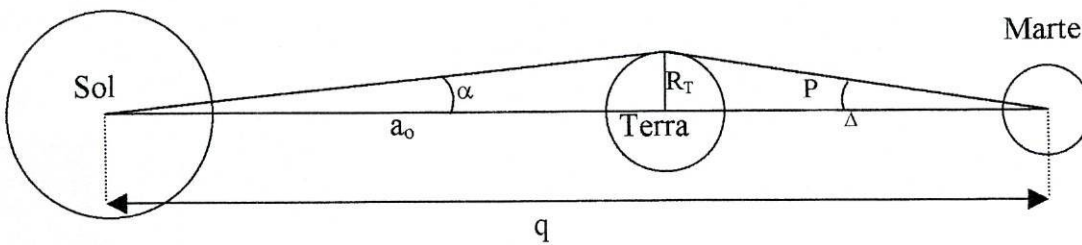


Fig 1.13 - Determinação da paralaxe do Sol

$\alpha$  – Paralaxe horizontal do Sol

$p$ – Paralaxe horizontal de Marte

$a_0$  – Distância Terra-Sol ;  $a_0 = 1$  unidade astronómica

$\Delta$  - Distância Terra-Marte ;  $\Delta = q - a_0$

$q$  – Distância Marte-Sol no periélio;  $q = a(1 - e)$  sendo  $a$  o semieixo maior e  $e$  a excentricidade da órbita de Marte

Da figura tiramos

$$R_T = a_0 \operatorname{tg} \alpha \quad (2)$$

$$R_T = \Delta \operatorname{tg} p = (q - a_0) \operatorname{tg} p = [a(1 - e) - a_0] \times \operatorname{tg} p \quad (3)$$

Igualando os membros direitos de (2) e (3) e aproximando as tangentes dos ângulos aos próprios ângulos obtemos:

$$a_0 \alpha = [a(1 - e) - a_0] \times p$$

donde tiramos:

$$\alpha = \left[ \frac{a}{a_0}(1 - e) - 1 \right] \times p$$

A razão  $\frac{a}{a_0}$  calcula-se através da 3ª lei de Kepler (ver 3.1.5) :

$$\left(\frac{a}{a_0}\right)^3 = \left(\frac{P_M}{P_T}\right)^2 \text{ com } a \text{ e } a_0 \text{ em U.A. e } P_M \text{ e } P_T \text{ em anos.}$$

Sendo  $P_M = 687$  dias

$$P_M = \frac{687}{365} = 1,88 \text{ anos}$$

$$\frac{a}{a_0} = \sqrt[3]{\frac{P_M^2}{P_T^2}} = \sqrt[3]{\frac{1,88^2}{1^2}} = 1,5234$$

ao passo que  $p$  e  $e$  se podem obter com base em observações astronómicas:

$$p = 7'' = 0,00194^\circ$$

$$e = 0,0934$$

Com estes valores obtém-se :

$$\alpha = 1,5234(1 - 0,0934) 0,00194^\circ \cong 0,00269^\circ \cong 9,7''$$

A distância Terra-Sol vem :

$$D_{TS} = \frac{R_T}{\text{tg } \alpha} = \frac{6.370}{\text{tg } 0,00269^\circ} \cong 13567881 \text{ km}$$

### 1.4.3. Trânsitos de Vénus

Uma outra possibilidade para a determinação da paralaxe do Sol, é a partir das observações do trânsito de Vénus que consiste na passagem de Vénus entre o Sol e a Terra, sendo a sua sombra projectada no disco solar, e vista da Terra durante o período de tempo que o planeta passa diante do Sol (o chamado trânsito). Este acontecimento é pouco frequente e vai ocorrer novamente em **2004**, constituindo mais uma rara oportunidade para ser observado e registado.

A 1ª vez que este fenómeno foi observado e registado, aconteceu em 1639 por iniciativa de Jeremiah Horrocks.

#### 1.4.3.1. O trânsito de Vénus no cálculo da paralaxe do Sol por Horrocks

Em 1639 Jeremiah Horrocks projectou a imagem do disco solar do seu telescópio para uma folha graduada de papel, onde registou o planeta em três instantes distintos (fig. 1.14).

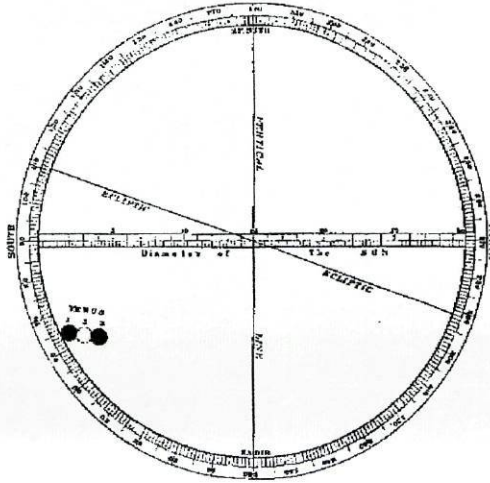


Fig. 1.14 - Observações de Vénus em trânsito

Com base na figura fez algumas medições que estão registadas na tabela 1.1

Hora local	Distância entre centros (em% do Diâmetro do Sol)
15.15	48.06
15.35	45.00
15.45	43.33

Tabela 1.1 - Registos das observações de Horrocks

Com base nestas observações, estimou para o diâmetro de Vénus 4% do diâmetro do Sol  
Tendo estimado 31' 30" para o Sol obteve 1' 16" para Vénus.

A partir daqui Horrocks chegou à paralaxe da seguinte forma (fig.1.15)

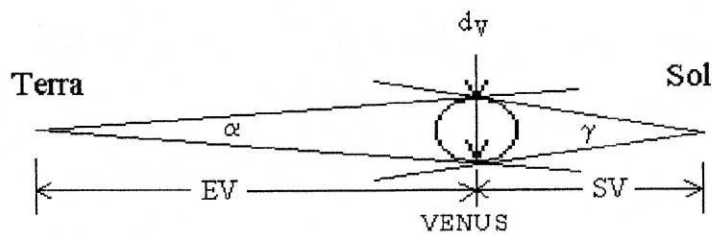


Fig.1.15 - Diâmetros aparentes de Vénus  $\alpha$ (visto da Terra) e  $\gamma$  (visto do Sol)

Considerando o diâmetro de Vénus  $d_V$  como um arco de raio  $EV$  (visto da Terra) sob o ângulo  $\alpha$  e raio  $SV$  (visto do Sol) sob o ângulo  $\gamma$  :

$$EV + SV = 1 \text{ U.A.}$$

$$dv = \alpha EV = \gamma SV$$

$$\gamma = \alpha \frac{EV}{SV} = \frac{\alpha (1 - SV)}{SV}$$

Da 3ª lei de Kepler

$$SV^3 = P_V^2 \text{ com } SV \text{ (u.a.) e } P_V \text{ (anos)}$$

ou seja  $SV = \sqrt[3]{P_V^2}$

$$\gamma = \alpha \frac{(1 - \sqrt[3]{P_V^2})}{\sqrt[3]{P_V^2}}$$

substituindo  $P_V = 0,6083$  anos e  $\alpha = 1' 16''$  vem

$$\gamma = 30''$$

Com base neste valor, e assumindo que  $30''$  é o ângulo como a Terra é vista do centro do Sol resulta para a distância Terra – Sol,  $D_{TS}$ :

$$D_{TS} = \frac{R_T}{\text{tg}15''} = 13.750 R_T$$

Este valor está bastante longe do real, devido ao convencimento de Horrock que o Sol vê todos os planetas sob o mesmo ângulo, o que não acontece, devido às significativas diferenças nas distâncias.

#### 1.4.3.2. O trânsito de Vénus no cálculo da paralaxe do Sol por Halley

A distância na perpendicular  $D$  entre cordas determinadas no disco solar pelo trânsito de Vénus, permite estabelecer uma relação com  $d$  que é a distância na Terra entre os pontos de observação associados às cordas consideradas (fig.1.16).

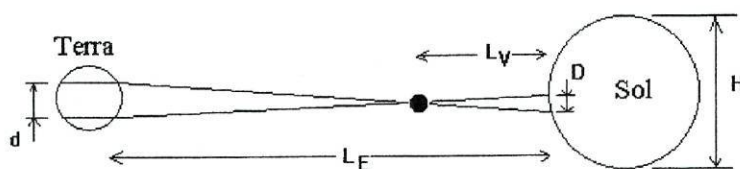


Fig.1.16 - Método de Halley para calcular a paralaxe do Sol

Observando a figura podemos estabelecer o seguinte:

Da semelhança de triângulos

$$\frac{D}{L_V} = \frac{d}{L_E - L_V} \Leftrightarrow D = d \frac{L_V}{L_E - L_V}$$

a razão  $\frac{L_V}{L_E}$  é conhecida a partir da 3ª lei de Kepler sendo

$$\frac{L_V}{L_E} = \text{sen}\theta \text{ com } \theta = 48^\circ \text{ (máx}^a \text{ elongação de Vénus, ver fig.1.18)}$$

Assim sendo vamos ter

$$D = d \text{ sen } \theta \frac{L_E}{L_E (1 - \text{sen } \theta)} = d \frac{\text{sen}\theta}{1 - \text{sen}\theta}$$

A razão  $\frac{D}{H}$  pode ser obtida com base na fig.1.17 que regista as observações do trânsito de Vénus, medindo os diâmetros das projecções do Sol e de Vénus.

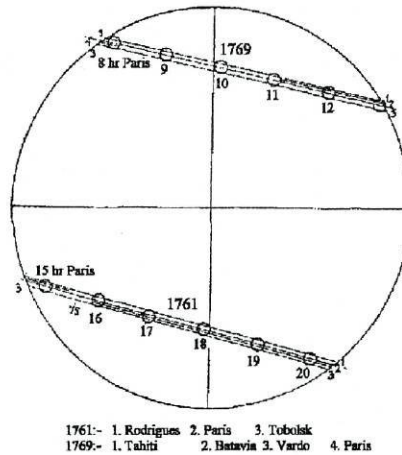


Fig.1.17 - Observações do trânsito de Vénus em 1761 e 1769 visto de diferentes lugares.

A partir de H (diâmetro do Sol) e  $\frac{D}{H}$

$$D = \frac{D}{H} \times H$$

- a paralaxe do Sol

$$p = \frac{D}{L_V}$$

## 1.5. Medição de distâncias planetárias no Sistema Solar

### 1.5.1. Para planetas inferiores (cujas órbitas são interiores à da Terra)

Nicolau Copérnico (1473-1543) observando ao longo do tempo a posição relativa do Sol Terra e Vénus, medindo a elongação de Vénus que é o ângulo STV (Sol-Terra-Vénus) verificou que o seu valor máximo é de  $48^\circ$  (fig.1.18).

Sendo a distância Terra-Sol (TS) igual a 1 U.A.

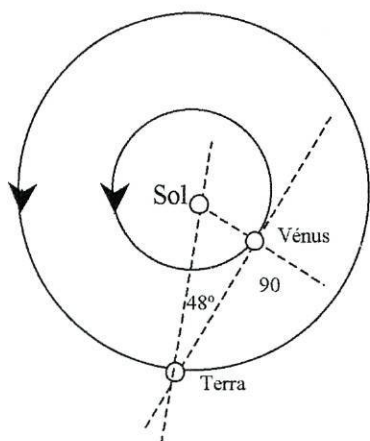


Fig.1.18 - Posições do Sol Terra e Vénus na quadratura

Do triângulo STV rectângulo em V tem-se:

$$\text{sen } 48^\circ = \frac{VS}{TS} \text{ donde}$$

$$VS = 1 \times \text{sen } 48^\circ = 0,74 \text{ U.A.}$$

$$VT = \sqrt{1 - 0,74^2} = 0,67 \text{ U.A.}$$

na quadratura.

Este processo aplica-se também a Mercúrio, cuja elongação máxima é de  $28^\circ$ .

*Determina neste caso MS (distância de Mercúrio ao Sol)*

Conhecidos os raios das órbitas que são aproximadamente circulares, é possível geometricamente calcular as distâncias entre Vénus ou Mercúrio e a Terra para quaisquer posições relativas, desde que se conheça o ângulo STV( $\alpha$ ) como se mostra na fig.1.19

- $SP \perp TV$

Sabendo  $\alpha$  (por observação) obtemos

- $TP = ST \times \cos \alpha$

1. Usando o teorema de Pitágoras em STP

obtemos

$$SP = \sqrt{ST^2 - TP^2}$$

e em SPV obtemos

$$PV = \sqrt{SV^2 - SP^2}$$

donde finalmente tiramos

$$TV = TP + PV$$

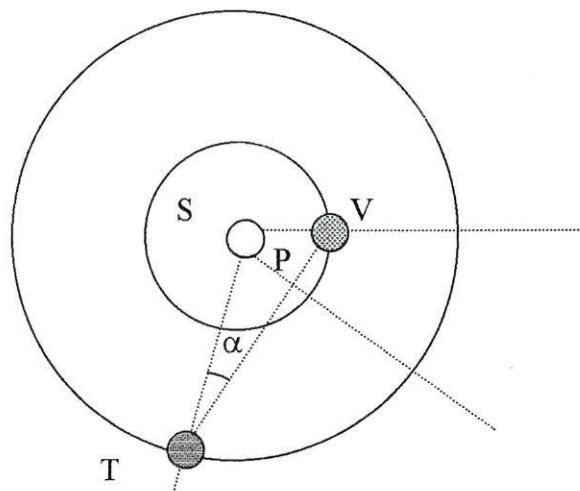


Fig.1.19 – Posição de Vénus com uma elongação  $\alpha$

2. Utilizando o Teorema de Carnot em STV:

$$SV^2 = ST^2 + TV^2 - 2ST \times SV \times \cos\alpha$$

donde

$$TV = \sqrt{SV^2 - ST^2 + 2ST \times SV \times \cos\alpha}$$

3. Concretizando para Mercúrio a partir da medição da elongação  $\alpha$ .

Por observação  $\alpha=7^\circ$

$$TP = 1 \times \cos 7^\circ \cong 0,99 \text{ U.A.}$$

$$SP = \sqrt{1 - 0,99^2} = 0,14$$

$$PM = \sqrt{0,47^2 - 0,02^2} = 0,45$$

$$TM = 0,99 + 0,47 = 1,44 \text{ U.A.}$$

*Determina TM aplicando o teorema de Carnot*

### 1.5.2. Para os planetas superiores (órbitas exteriores à da Terra).

Agora a situação implica a determinação de ângulos através dos tempos que os planetas demoram a percorrer na sua órbita os arcos correspondentes. Exemplificando com o planeta Marte (fig.1.20).

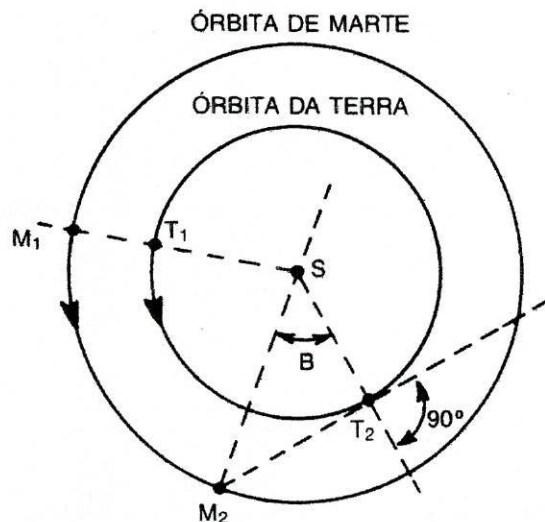


Fig.1.20 – Posições do Sol Terra e Marte em oposição e em quadratura

Partindo da oposição de Marte ( $ST_1M_1$ ) a quadratura seguinte ( $ST_2M_2$ ) acontece quando se vêem da Terra, Marte e o Sol em direcções perpendiculares, o que ocorre passado t dias medidos desde a oposição. Nesse tempo t Marte moveu-se de  $M_1$  para  $M_2$  e a Terra de  $T_1$  para  $T_2$ .

Teremos então a seguinte relação angular

$$\angle B = \angle T_1ST_2 - \angle T_1SM_2$$

Sabidos os períodos de translação de Marte (686,98 dias) e da Terra (365,24 dias) sabendo que durante esse período qualquer planeta roda  $360^\circ$  em torno do Sol, e notando que

$$T_1 \hat{S} T_2 = M_1 \hat{S} M_2$$

pode-se usar as proporções seguintes:

- No caso da Terra :

$$\frac{t}{365,24} = \frac{T_1 \hat{S} T_2}{360^\circ} \quad (4)$$

- No caso de Marte:

$$\frac{t}{686,98} = \frac{M_1 \hat{S} M_2}{360^\circ} \quad (5)$$

sendo  $t$  o tempo em dias desde a oposição à quadratura (de  $M_1$  a  $M_2$  ou de  $T_1$  a  $T_2$ )

Este tempo  $t$  pode ser medido observacionalmente e corresponde a 105,4 dias

Resolvendo (4) e (5) obtém-se :

$$T_1 \hat{S} T_2 = 360^\circ \times \frac{105,4}{365,24} \cong 103,9^\circ$$

$$T_1 \hat{S} M_2 = 360^\circ \times \frac{105,4}{686,98} \cong 55,2^\circ$$

$$B = 103,9^\circ - 55,2^\circ = 48,7^\circ$$

Do triângulo rectângulo  $SM_2T_2$  :

$$ST_2 = SM_2 \times \cos 48,7^\circ$$

$$SM_2 = 1,5 \times ST_2$$

$$SM_2 = 1,5 \text{ U.A.}$$

***(A distância de Marte ao Sol é 1.5 U.A.)***

$$M_2T_2 = ST_2 \times \operatorname{tg} 48,7^\circ$$

$$M_2T_2 = 1,14 \times ST_2$$

$$M_2T_2 = 1,14 \text{ U.A.}$$

***(A distância da Terra a Marte é 1.14 U.A. na quadratura).***

## 1.6. Distância às estrelas

### 1.6.1. Paralaxe heliocêntrica

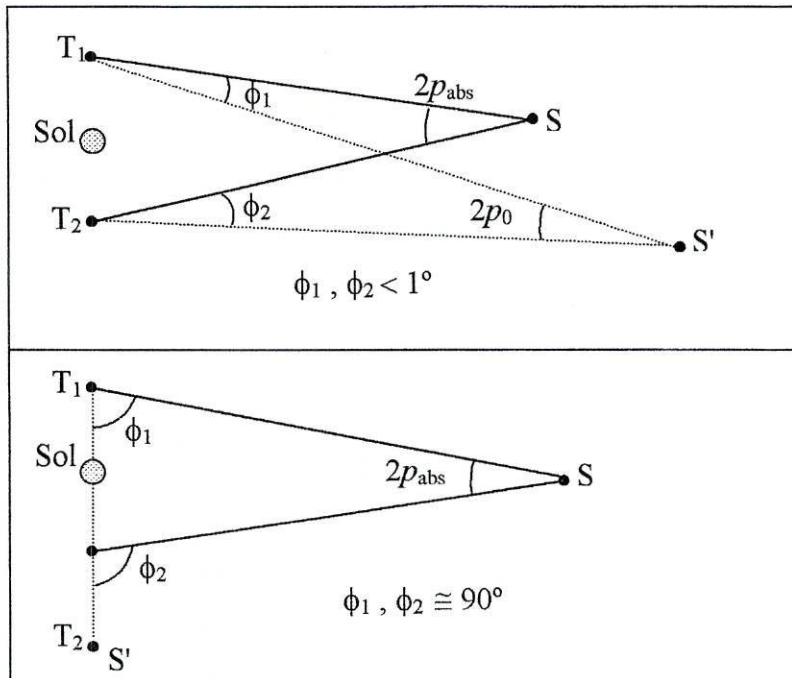


Fig.1.21 – A paralaxe heliocêntrica das estrelas

A paralaxe heliocêntrica absoluta  $p_{\text{abs}}$  (fig.1.21) é usada para calcular a distância  $d$  às estrelas mais próximas a partir da relação

$$d(\text{pc}) = \frac{1}{p_{\text{abs}}('')}$$

À medida que a Terra se move em torno do Sol, podemos medir o desvio angular  $\phi_1$  de uma estrela  $S$  em relação a uma estrela de referência  $S'$  (a estrela  $S'$  é de paralaxe supostamente conhecida, na prática assume-se um valor que é uma média estatística das paralaxes das estrelas mais distantes) quando a Terra está de um lado do Sol em  $T_1$  e tornamos a fazer a medida  $\phi_2$  seis meses mais tarde, quando a Terra está do outro lado do Sol em  $T_2$ .

Para desvios angulares pequenos (parte superior da fig.1.21) vê-se geometricamente que o desvio visto da Terra  $2 p_{\text{abs}}$  (dobro da paralaxe absoluta) se obtém a partir de  $\phi_1$  e  $\phi_2$  que nos dá a paralaxe relativa

$$p_{\text{rel}} = \frac{1}{2}(\phi_2 - \phi_1)$$

e de  $p_0$  (paralaxe da estrela de referência  $S'$ ) da seguinte forma

$$p_{\text{abs}} = \frac{1}{2}(\phi_2 - \phi_1) + p_0 \quad \boxed{\text{Porquê?}}$$

Actualmente é possível medir os desvios angulares  $\phi_1$  e  $\phi_2$  com bastante rigor, sendo no entanto ainda bastante problemático medir  $p_0$  (medição feita por fotometria)

Para grandes desvios angulares próximos de  $90^\circ$ , que o satélite Hipparcos (lançado pela ESA Agência Espacial Europeia) já permite medir (parte inferior da fig.1.21) a paralaxe absoluta é medida directamente sendo

$$p_{\text{abs}} = \frac{1}{2}(\phi_2 - \phi_1)$$

De notar aqui a irrelevância da distância à estrela de referência  $S'$ .

A estrela mais próxima da Terra *Próxima de Centauro* apresenta uma paralaxe de  $0,76''$  portanto:

$$p(\text{rad}) = \frac{0,76}{3.600} \times \frac{2\pi}{360} \cong \frac{0,76}{206.205}$$

$$d \cong \frac{206.205}{0,76} \cong 271.322 \text{ U.A.}$$

ou seja está a uma distância da Terra que é aproximadamente 271.322 vezes a distância a que a Terra está do Sol.

**Exemplo:**

Mediram-se com 6 meses de intervalo os desvios angulares de uma estrela tendo-se registado os seguintes valores

$$\phi_1 = 89^\circ 12' 23'' \quad \phi_2 = 89^\circ 12' 23,2''$$

Vamos ter neste caso uma paralaxe

$$p = \frac{(\phi_1 - \phi_2)}{2} = 0,10''$$

vindo a distância

$$d = \frac{1}{0,10''} = 10 \text{ pc}$$

## Questões sobre distâncias no sistema solar

- Se em vez de Alexandria Eratóstenes tivesse medido a sombra num local ao dobro da distância de Siena qual seria o ângulo medido?
- Qual o diâmetro aparente da Lua no perigeu? E no apogeu?
- Sendo o raio angular aparente do Sol de  $0,5^\circ$  qual a distância Terra-Sol medida em raios solares?
- Determinar a distância de Mercúrio ao Sol e à Terra na posição de elongação máxima que é de  $28^\circ$ .
- Determinar a distância de Júpiter ao Sol e à Terra sabendo que o tempo que decorre entre a oposição e a quadratura é de 115 dias e que o período de Júpiter é de 11,86 anos .

## Questões sobre paralaxes

- Para o Sol a paralaxe média é de  $8,79''$ . Qual a distância média Terra-Sol?
- Os planetas exteriores Marte, Júpiter e Saturno distam em média do Sol de 1,524 ; 5,203 e 9,539 U.A. respectivamente. Qual o que apresentará maior paralaxe? E menor? Calcula essas paralaxes.
- O planeta Neptuno dista em média do Sol 6 vezes mais que Júpiter? Qual a paralaxe de Neptuno?
- A estrela Sírio que é a estrela mais brilhante do nosso céu dista 8,7 anos-luz da Terra. Qual a distância em parsecs? E a Paralaxe?
- Num registo fotográfico mediu-se um deslocamento linear de 5 mm na posição duma estrela em dois instantes separados de 3 meses. Correspondendo 1mm a  $0,005''$ , qual a distância a que se encontra a estrela?
- Sabendo que é bastante difícil a partir da Terra medir com rigor paralaxes inferiores a  $0,008''$ , até que distância este método se pode aplicar.

## Capítulo 2

### A geometria dos eclipses

Neste capítulo tal como no 1, os conceitos de geometria plana já referidos, são usados na interpretação do fenómeno dos eclipses, que permitem em concreto determinar grandezas que caracterizam os diferentes tipos de eclipses:

- Comprimentos de sombras
- Zonas de sombra e de penumbra
- Tempo de duração
- Posição angular nas órbitas

Tal como no capítulo anterior, os temas "Geometria no plano e no espaço I e II" são os adequados para uma abordagem dos eclipses, com um aspecto importante a ser destacado: a possibilidade de simplificar matematicamente uma situação (que exige para maior rigor geometria esférica) fazendo uso de geometria plana como aproximação, o que permite neste particular usar Matemática ao nível do secundário.

#### 2.1. O que é um eclipse?

Um **eclipse** é um fenómeno que ocorre sempre que a Lua entra na sombra da Terra (**eclipse lunar**) e quando a sombra da Lua atinge a Terra (**eclipse solar**)

Se a órbita da Terra em torno do Sol, e a órbita da Lua em torno da Terra, estivessem no mesmo plano, ocorreria sempre um eclipse da Lua na Lua Cheia, quando a Terra está entre o Sol e a Lua, e um eclipse do Sol na Lua Nova, quando a Lua está entre o Sol e a Terra.

Como o plano da órbita da Lua está inclinado  $5,2^\circ$  em relação ao plano da órbita da Terra, só ocorrem eclipses quando a Lua está na fase de Lua Cheia ou Nova, e quando o Sol está sobre a *linha dos nodos*, que é a linha de intersecção dos planos das órbitas da Terra e da Lua.

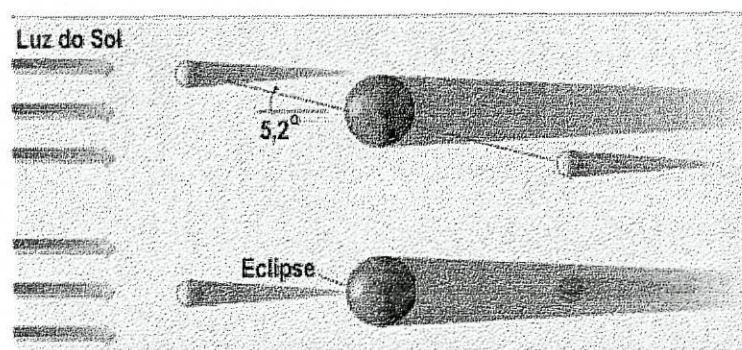
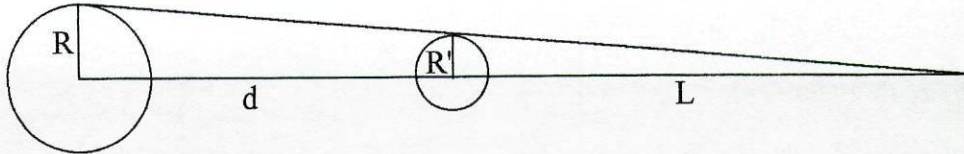


Fig.2.1 – Lua Cheia e Lua Nova com eclipses e sem eclipses

O tempo de duração dos eclipses, a extensão das áreas afectadas pela sombra no caso dos eclipses solares e a posição orbital nos eclipses, é o que iremos tratar a partir do cálculo das sombras.

## 2.2. Como se calcula o comprimento da sombra?

Consideremos um corpo luminoso de raio  $R$  a uma distância  $d$  de uma esfera opaca de raio  $R'$ .



Por semelhança de triângulos temos que:

$$\frac{R'}{L} = \frac{R}{L + d}$$

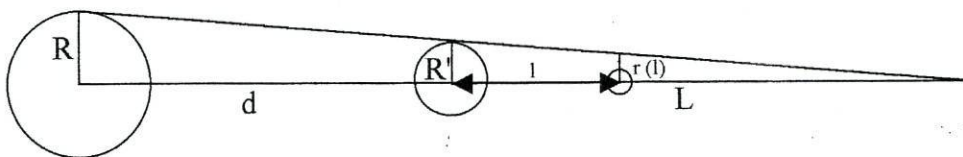
E portanto a altura do cone de sombra ( $L$ ) é:

$$L = \frac{R'd}{R - R'}$$

Onde:

- $L$  = comprimento da sombra
- $d$  = distância da fonte à esfera opaca
- $R'$  = raio da esfera opaca
- $R$  = raio da fonte

### 2.2.1. Como se calcula o raio da sombra da Terra à distância da Lua?



- $L$  = comprimento da sombra
- $R'$  = raio da Terra
- $r(l)$  = raio da sombra a uma distância  $l$  da Terra

Novamente por semelhança de triângulos temos que:

$$\frac{r(l)}{L-1} = \frac{R'}{L}$$

E o raio da sombra à distância  $l$  da esfera opaca é:

$$r(l) = R' \frac{L-1}{L}$$

### 2.2.2. Exemplos de cálculos de sombras

1. Calcular o comprimento médio da sombra da Terra, considerando-se:

- distância Terra-Sol: 149.600.000 km
- raio da Terra: 6.370 km
- raio do Sol: 696.000 km

Como

$$\text{comprimento da sombra} = \frac{\text{distância da fonte} \times \text{raio da esfera}}{\text{raio da fonte} - \text{raio da esfera}}$$

Obtemos

$$\text{comprimento da sombra} = \frac{149.600.000 \text{ Km} \times 6.370 \text{ Km}}{696.000 \text{ Km} - 6.370 \text{ Km}}$$

ou seja

$$\text{comprimento da sombra} = 1.381.800 \text{ Km}$$

2. Seja

- $r$  o raio da Terra,
  - $R = 109r$  o raio do Sol
  - $d = 23.680r$  a distância entre o Sol e a Terra
- a) Qual é o comprimento do cone de sombra formado?

$$L = \frac{d \times r}{R - r} = \frac{23.680 r^2}{109r - r} = 219,26 r$$

b) Qual é o raio deste cone a uma distância de  $l = 60r$  por onde passa a Lua?

Como

$$\frac{r(l)}{L - l} = \frac{r}{L}$$

vem

$$r(l) = \frac{r}{L} (L - l) = \frac{r}{219,26r} (219,26r - 60r) = 0,726r$$

c) Sendo  $r_L = \frac{r}{3,6}$  o raio da Lua, quantos diâmetros lunares cabem nessa região da sombra?

$$\frac{r(l)}{r_L} = \frac{0,726r}{r/3,6} = 2,6$$

Isto é, na distância da Lua a umbra da Terra tem 9.200 km. A penumbra tem 16.000 km e como a velocidade da Lua na sua órbita é de 3.400 km/hr, um eclipse total da Lua dura cerca de 1h 40 m e um eclipse parcial da Lua dura cerca de 6h

*Sabendo que Mercúrio tem um diâmetro de 4.878 Km, dista 59,9 milhões do Sol e Vénus tem de diâmetro 12.104 Km e está a 108,2 milhões Km do Sol, determina os comprimentos das sombras respectivas, e avalia em que condições a sombra de Mercúrio atinge Vénus.*

## 2.3. Condições para a ocorrência de Eclipses

### 2.3.1. Eclipses lunares

Na fig.2.2 apresenta-se esquematicamente, a posição da Lua e da sombra da Terra que propicia a ocorrência dum eclipse.

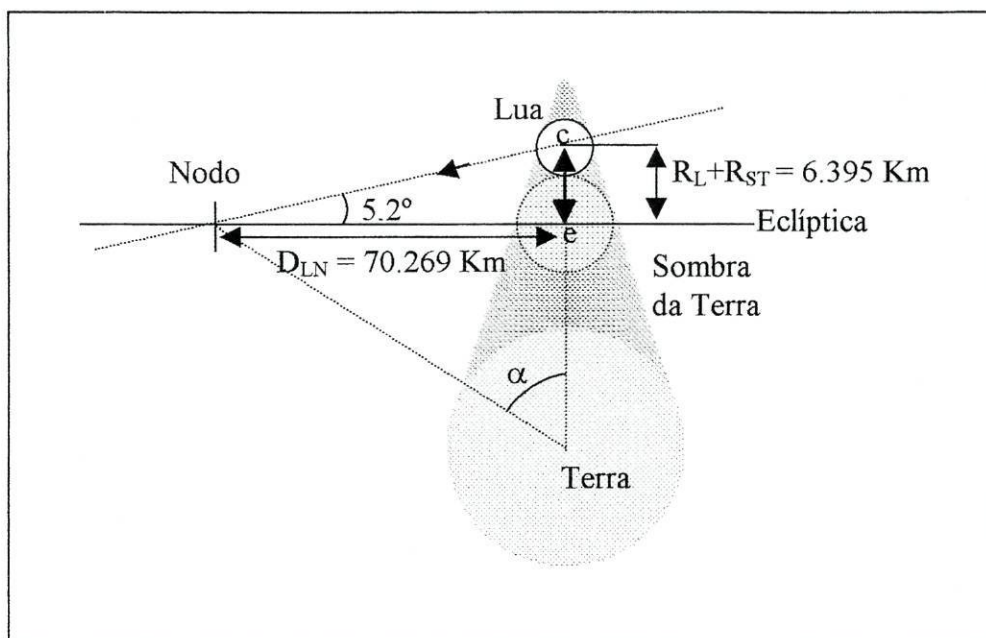


Fig.2.2 - Posição limite da Lua para ocorrer um eclipse

Como se observa na figura a Lua toca apenas a sombra, e nesta posição o centro da Lua dista da Eclíptica  $\overline{ce} = R_L + R_{ST}$  e entrará na sombra da Terra desde que esta distância seja

inferior a 6.395 km (1.770 do raio lunar mais 4.625 do raio da sombra da Terra, à distância da Lua) sendo a distância ao nodo:

$$D_{LN} = \frac{6.395}{\text{tg } 5,2^\circ} \cong 70.269 \text{ Km}$$

que corresponde a um afastamento angular  $\alpha$  :

$$\alpha = 2 \times \text{arc tg} \left( \frac{70.269}{2 \times 384.000} \right) \cong 10,46^\circ$$

Como a sombra da Terra se desloca

$$\frac{360^\circ}{365,4} = 0,985^\circ / \text{dia}$$

significa que demora a percorrer o arco (centrado no nodo) de  $20,92^\circ (2 \times 10,46^\circ)$ :

$$\frac{20,92}{0,985} \cong 21,24 \text{ dias}$$

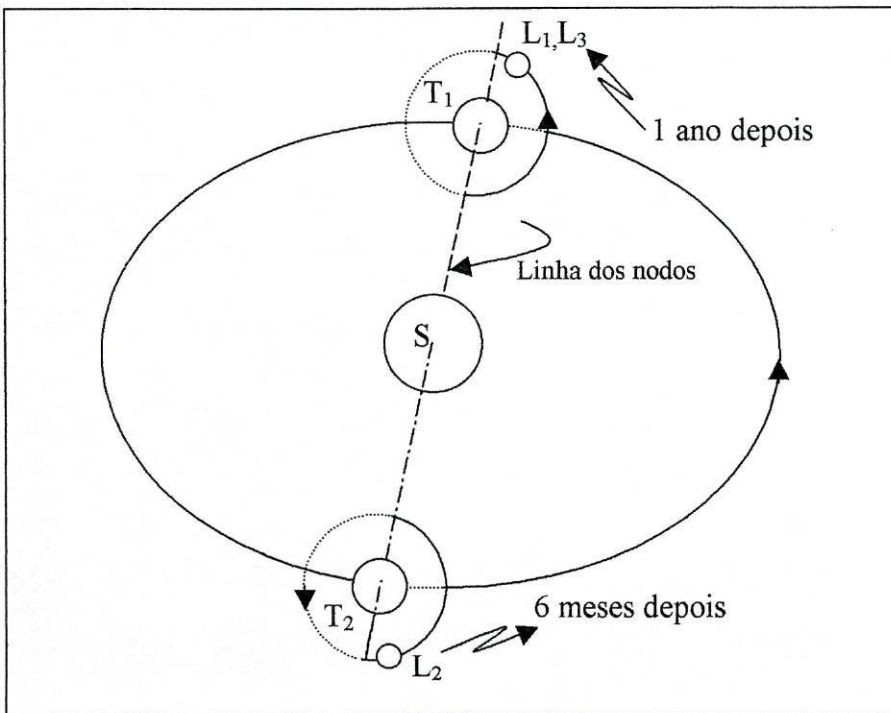


Fig.2.3 - Posição possível da Lua nos eclipses lunares

Sendo o período sinódico (tempo decorrido entre duas posições sucessivas iguais, por ex° entre duas Luas Cheias) de 29,5 dias e acontecendo Lua Cheia a uma distância superior a  $10,6^\circ$  a Oeste do nodo a Lua Cheia seguinte ocorrerá à mesma distância do nodo mas a Este.

Significa isto que não ocorrerão eclipses nesse mês nem no próximo, visto que o centro da Lua passará pelo nodo 27,2 dias (mês dracónico) após, enquanto a Lua Cheia acontecerá 2,3 dias mais tarde.

Nesses 2,3 dias a Lua afasta-se 30° do nodo, e o seu centro passará ao lado da sombra da Terra a mais de 56',5. O eclipse lunar seguinte só poderá ocorrer passado um semestre nas mesmas condições perto do outro nodo. Significa isto que anualmente o número máximo de eclipses lunares será de 3, isto no caso do 1º ocorrer logo após o dia 1 de Janeiro acontecendo o 2º no fim de Junho e o 3º no fim de Dezembro, 12 meses sinódicos (354 dias) após o 1º(ver fig.2.3).

### 2.3.2. Eclipses Solares

Na fig.2.4 mostra-se a Lua na posição limite para a ocorrência dum eclipse solar. Para simplificar vamos considerar os três astros num plano perpendicular à Eclíptica e dada a enorme distância entre a Terra e o Sol ( $ST = 149.600.000$  Km) também consideraremos os raios solares praticamente paralelos,  $S_1 T_1 // ST$ . Com estas simplificações estamos em condições de calcular o tamanho do disco solar à distância da Lua e a partir daqui determinar a posição da Lua.

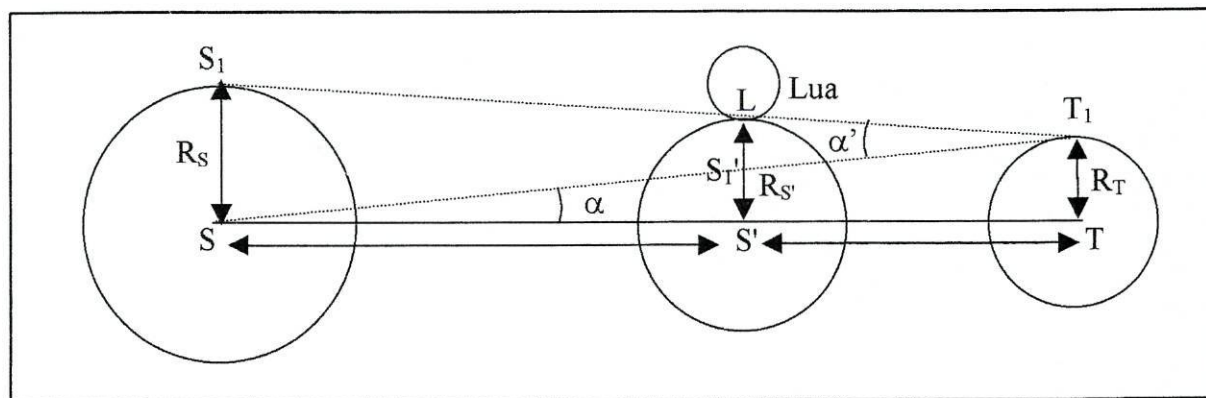


Fig.2.4 - Representação do Sol Terra e Lua considerando a Lua no mesmo plano (perpendicular à Eclíptica)

Da figura obtemos:

$$T_1 L \cong S' T \text{ pois } S_1 T_1 // ST \text{ e } S'_1 L \cong \text{tg } \alpha' \times S' T$$

$$R_{S'} = SS'_1 + S'_1 L \text{ e } SS'_1 = \text{tg } \alpha \times SS'$$

$$R_{S'} \cong \text{tg } \alpha \times SS' + \text{tg } \alpha' \times S' T$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{R_T}{ST} ; \text{tg } \alpha' \cong \frac{R_S}{ST}$$

$$R_s \cong \frac{R_T}{ST} \times SS' + \frac{R_s}{ST} \times S'T$$

$$R_s \cong \frac{6.370}{149,6 \times 10^6} \times (149,6 \times 10^6 - 384.000) + \frac{696.000}{149,56 \times 10^6} \times 384.000 \cong 8.140 \text{ Km}$$

O disco solar á distância da Lua é "visto" da Terra com um raio de 8.140 Km o que significa que a Lua entrará no disco, tapando-o, quando a distância à Eclíptica for inferior a  $1.770 + 8.140 = 9.910 \text{ Km}$  (raio solar mais raio lunar) conforme se mostra na fig.2.5

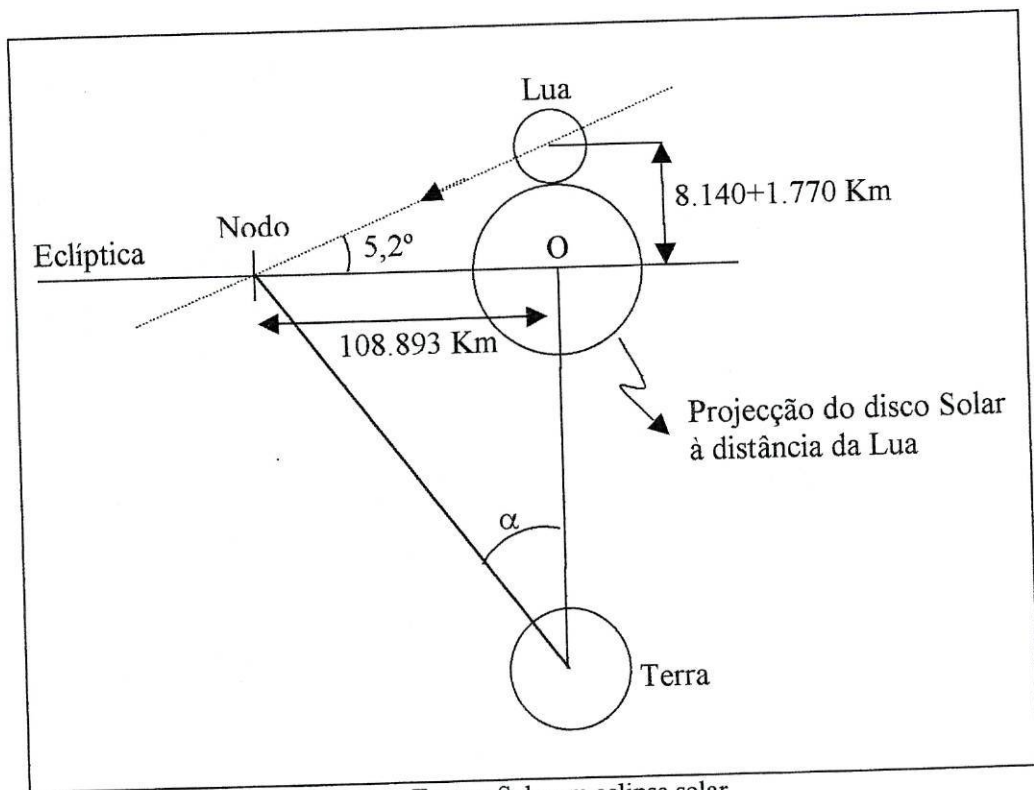


Fig.2.5 - Lua, Terra e Sol num eclipse solar

Nesse momento a distância ao nodo:

$$ON = \frac{9.910}{\text{tg} 5,2^\circ} \cong 108.893 \text{ Km}$$

a que corresponde um afastamento angular  $\alpha$ :

$$\alpha = 2 \times \text{arctg} \left( \frac{108.893}{2 \times 384.000} \right) = 16,1^\circ$$

*Nota: Com recurso à trigonometria esférica pode-se obter um valor mais exacto de  $16,5^\circ$ .*

Esta distância obviamente é a mesma se o Sol estiver posicionado do outro lado do nodo. Como o Sol percorre diariamente em média 59' demora 34 dias a cobrir o arco de 33'(onde podem ocorrer eclipses) centrado no nodo.

Nesse período de 34 dias ocorre pelo menos uma Lua Nova, podendo ocorrer duas (já que o período sinódico é de 29,5 dias) pelo que haverá necessariamente 2 eclipses solares (na vizinhança dos dois nodos da órbita Lunar).

Assim sendo ocorrerão no total 4 e no caso de o 1º ocorrer logo após 1 de Janeiro acontecerão 5, sendo o 2º na Lua Nova seguinte, o 3º e 4º após um semestre (pouco antes) e o 5º, 12 meses sinódicos (354 dias) após o 1º como se mostra na fig.2.6.

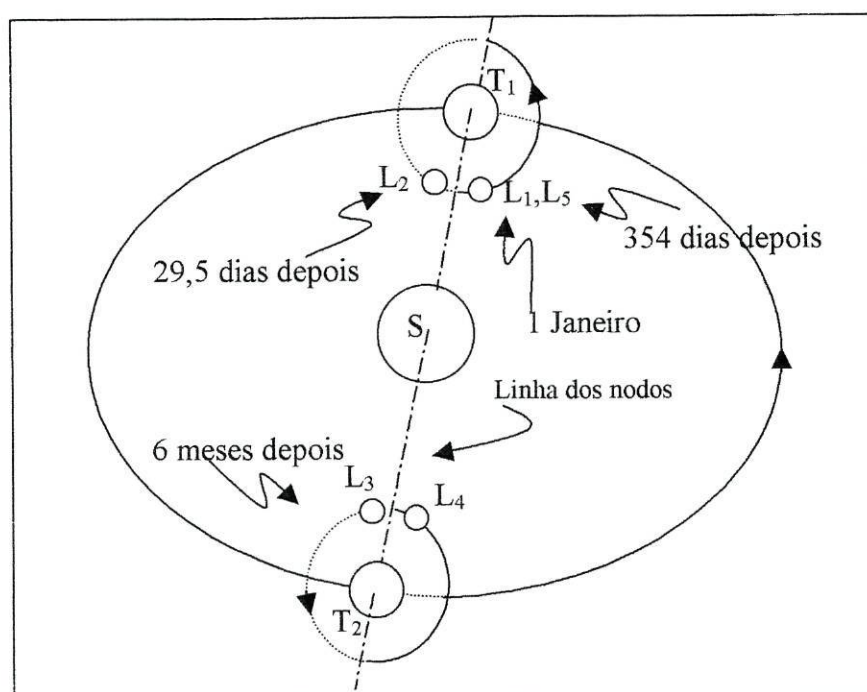


Fig.2.6 - Posições possíveis da Lua nos eclipses solares

## 2.4. Cálculo de eclipses

### 2.4.1. Eclipses do Sol

- Eclipses anulares

Variando a distância Terra – Lua entre 450.500 km e 363.300 Km e tendo o cone de sombra da Lua um comprimento médio de 384.413 Km acontece não ser a Terra atingida pela sombra quando a distância da Lua à Terra for superior (por exemplo no apogeu) o que determina na superfície terrestre uma zona  $T_1T_2$  onde vai ocorrer um eclipse anular pois a parte solar visível tem a forma dum anel devido á interposição da Lua (fig.2.7).

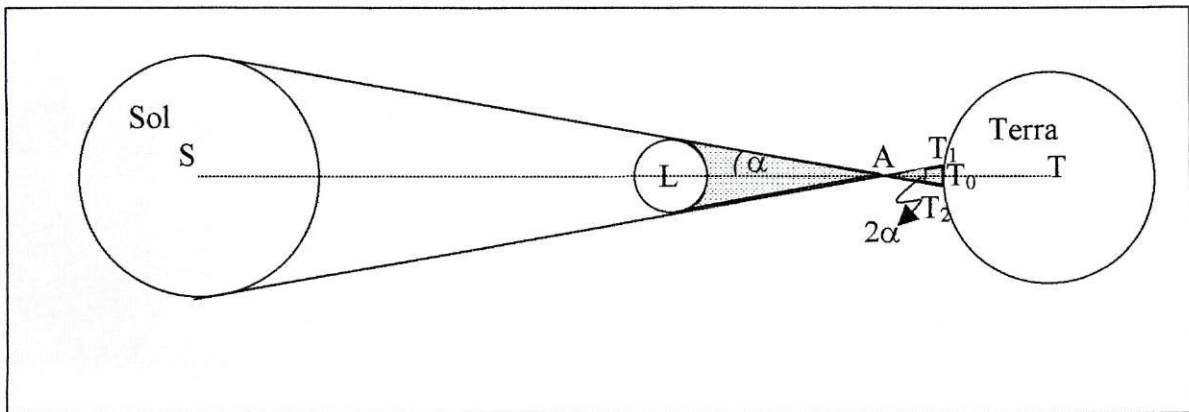


Fig.2.7 Eclipse anular do Sol

O diâmetro desta zona pode ser calculado aproximadamente sabendo que:

$D_{LA}$  (cone de sombra)

$$D_{LA} = \frac{D_{SL} \times R_L}{R_S - R_L} = \frac{(149.600.000 - 405.500) \times 1.770}{696.000 - 1.770} \cong 380.384 \text{ Km}$$

$\alpha$  (raio angular da Lua)

$$\alpha = \text{arc tg} \left( \frac{R_L}{D_{LA}} \right) = \text{arc tg} \left( \frac{1.770}{380.384} \right) = 0,266^\circ = 16'$$

$$D_{AT_0} = D_{TL} - (D_{LA} + R_T) = 40.5500 - (380.384 + 6.370) = 18.746 \text{ Km}$$

donde resulta:

$$T_1T_2 = 2 \times \text{tg } 0,266^\circ \times 18.746 = 174 \text{ Km}$$

Concluimos assim ser de 174 Km (diâmetro da sombra) a largura da faixa terrestre onde é visível o eclipse.

*Qual a distância da Terra a que teria de estar a Lua para o eclipse anular ser visto numa faixa com o dobro da largura?*

- Eclipse total do Sol

Estando a Lua a uma distância inferior ao comprimento do cone de sombra (no perigeu por exemplo) a Terra será atingida pela sombra ocorrendo na zona  $T_1T_2$  um eclipse total (fig.2.8).

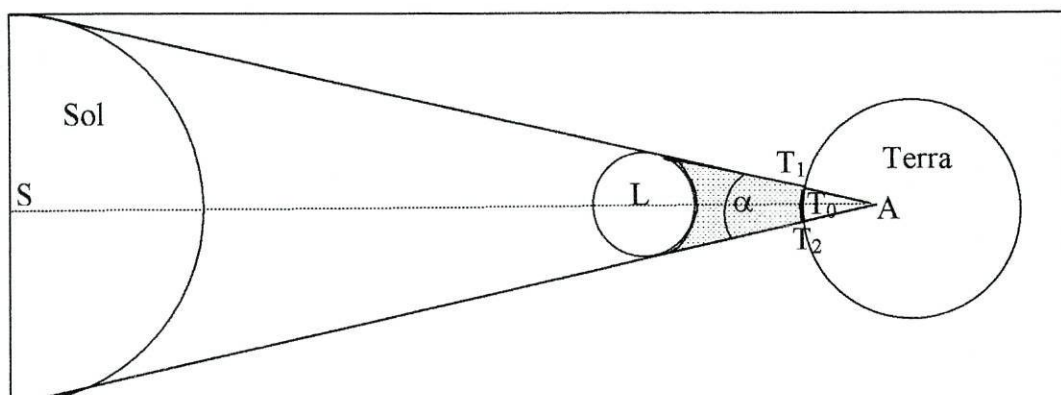


Fig.2.8 - Eclipse Total do Sol

O comprimento desta zona pode ser calculado sabendo:

O comprimento do cone de sombra da Lua

$$D_{LA} = \frac{D_{SL} \times R_L}{R_S - R_L} = \frac{(149.600.000 - 363.300) \times 1.770}{696.000 - 1.770} \cong 380.493 \text{ Km}$$

O raio  $R_S$  do cone de sombra à distância da Terra (na superfície):

$$R_S = \frac{R_L \times (D_{LA} - D_{TL} + R_T)}{D_{LA}} = \frac{(380.493 - 363.300 + 6.370) \times 1.770}{380.493} \cong 110 \text{ Km}$$

Como a distância  $T_1T_2$  é praticamente o dobro do raio da sombra vem:

$$T_1T_2 \cong 2 \times 110 \text{ Km} = 220 \text{ Km}$$

Esta distância corresponde ao tamanho (diâmetro) da sombra na Terra, o que significa ser o eclipse visível numa faixa com 220 Km de largura.

Como a Lua se move  $\frac{360^\circ}{29,5} \cong 12^\circ$  por dia, para Este, em relação ao Sol, implica uma

velocidade de:

$$\frac{12^\circ}{360} \times 2\pi \times 384.000 \cong 56 \text{ Km/dia}$$

A velocidade de um ponto da superfície da Terra devido à rotação para leste da Terra é:

$$\frac{2\pi \times 6.370}{24} = 1.667 \text{ Km/h} \cong 28 \text{ Km/min}$$

Como a velocidade da Lua no céu é maior do que a velocidade de rotação da Terra, a velocidade da sombra da Lua na Terra tem o mesmo sentido do movimento (real) da Lua, ou seja para Este. O valor da velocidade da sombra (desprezando o ângulo entre os movimentos) é, grosseiramente:

$$56 \text{ Km/min} - 28 \text{ Km/min} = 28 \text{ Km/min}$$

A duração da totalidade do eclipse, num certo ponto da Terra, será o tempo desde o instante em que a borda Este da sombra da Lua toca esse ponto até ao instante em que a borda Oeste da Lua o toca. Esse tempo é igual ao tamanho da sombra dividido pela velocidade a que ela se desloca.

Sendo o tamanho calculado para a sombra, de 220 Km, vamos ter:

$$\frac{220 \text{ Km}}{28 \text{ Km/min}} \cong 7,9 \text{ min}$$

portanto o tempo de duração total para um eclipse solar será de aproximadamente 7 min e 54 seg.

### 2.4.2 Eclipses lunares

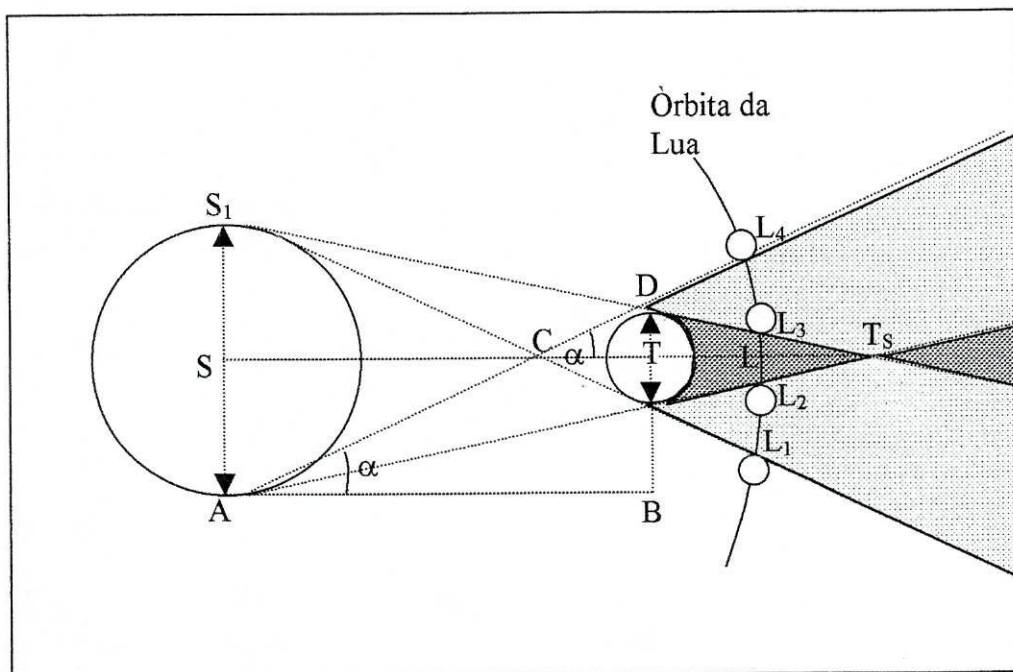


Fig.2.9 - Eclipse Lunar

Quando a Lua entra na sombra da Terra ( $L_2L_3$ ) ocorre um eclipse lunar (fig.2.9). Na zona de penumbra ( $L_1L_4$ ) o brilho da Lua diminui mas tão pouco, que é imperceptível da Terra.

- Vejamos qual o comprimento do percurso ( $L_1L_4$ ) da Lua na Penumbra

Dados conhecidos:

- distância Terra - Sol : 149.600.000 Km
- raio do Sol : 696.000 Km
- raio da Terra : 6.370 Km
- raio da Lua : 1.770 Km
- distância Terra – Lua : 384.000 Km

No triângulo ABD conhecemos :

- $AB = 149.600.000$  Km
- $DB = 696.000 + 6.370 = 672.370$  Km

Podemos calcular :

$$\alpha = \arctg \frac{DB}{AB}$$

$$\alpha = \arctg \frac{672.370}{149.600.000}$$

$$\alpha \cong 0,258^\circ$$

$$CT = \frac{R_T}{\text{sen} \alpha} = \frac{6.370}{\text{sen } 0,258^\circ}$$

$$CT \cong 1.417.317 \text{ Km}$$

$$CL = CT + TL \cong 1.417.317 + 384.000 = 180.1317 \text{ Km}$$

Daqui resulta

$$L_1L_4 = \frac{1.801.317 \times 2 \times 0,258 \times \pi}{180}$$

$$L_1L_4 \cong 16.222 \text{ Km}$$

Como a Lua se desloca a uma velocidade de 3400 Km/ hora demora

$$\frac{16.222}{3.400} = 4,77 \text{ H}$$

ou seja decorrem aproximadamente 4 horas e 46 minutos desde que mergulha até que sai da penumbra.

- Quanto ao percurso( $L_2L_3$ ) da Lua na sombra :

Calculemos o comprimento do cone de sombra –  $TT_s$ . Por semelhança dos triângulos  $S_1ST_s$  e  $DTT_s$  temos:

$$\frac{S_1S}{ST + TT_s} = \frac{DT}{TT_s}$$

$$TT_s = \frac{DT \times ST}{S_1S - DT}$$

$$TT_s = \frac{6.370 \times 149,6 \times 10^6}{696 \times 10^3 - 6.370} = 1.381.830 \text{ Km}$$

Com base em  $TT_s$  e  $DT$  calculamos:

$$\begin{aligned} \angle DT_s T &= \arctg \frac{DT}{TT_s} \\ &= \arctg \frac{6.370}{1.381.830} \cong 0,264^\circ \end{aligned}$$

Sabido este ângulo temos:

$$\begin{aligned} L_2L_3 &\cong \frac{2 \times 0,264 \times \pi}{180} \times (1.381.830 - 384.000) \\ L_2L_3 &\cong 9.195 \text{ Km} \end{aligned}$$

o que permite determinar o tempo que a Lua demora a percorrer o arco  $L_2L_3$  :

$$\frac{9.195}{3.400} = 2,7 \text{ horas}$$

e tendo a Lua um diâmetro de 3.540 Km significa que demora aproximadamente uma hora desde que toca o cone de sombra em  $L_3$  até ficar completamente imersa, permanecendo assim até atingir o outro bordo da sombra em  $L_4$ , o que implica que a Lua está totalmente mergulhada na sombra-*eclipse total* (2,7 – 1) ou seja 1,7 horas isto é aproximadamente 1 h e 43 min.

*Qual seria a duração do eclipse total da Lua se o tamanho da Terra fosse o dobro?*

## 2.5. A Frequência dos Eclipses . Saros

A frequência de ocorrência dos eclipses depende:

- da posição entre os planos orbitais lunar e terrestre.  
Se o plano orbital da Lua coincidissem com o plano da Eclíptica, um eclipse solar ocorreria a toda Lua nova e um eclipse lunar a toda Lua cheia, o que não acontece pois o plano orbital da Lua, está inclinado  $5,2^\circ$  relativamente ao plano orbital da Terra.
- da posição da Lua ao longo de sua órbita em termos da sua proximidade ou coincidência com os nodos.

A Lua precisa estar próxima da linha de nodos para que um eclipse ocorra. A distância angular da Lua do nodo precisa ser menor que  $4,6^\circ$  para um eclipse lunar total, e menor que  $10,3^\circ$  para um eclipse solar total.

- da sua distância para com a Terra.

O Sol e o nodo ascendente ou descendente da Lua estão na mesma direcção uma vez cada 346,62 dias. Dezanove de tais períodos ( $6.585,78$  dias = 18 anos 11 dias) estão próximos em duração a 223 meses sinódicos. Isto significa que a configuração Sol-Lua e os eclipses se repetem na mesma ordem depois deste período. Este ciclo já era conhecido pelos antigos Babilónios, e por razões históricas é conhecido como *Saros*, que significa repetição em grego.

Esse intervalo de tempo é denominado "**Período de Saros**", o qual contém 70 eclipses dos quais 41 são solares e 29 são lunares. Nesse período ocorrem, no mínimo dois eclipses solares num ano e no máximo cinco eclipses solares, ou três eclipses lunares e quatro eclipses solares.

Ocorrem anualmente entre dois e sete eclipses. Habitualmente os eclipses acontecem em conjuntos de 1 a 3, separados por 173 dias  $[(1 \text{ ano} - 20 \text{ dias})/2]$ .

Num conjunto; ocorre um só eclipse solar, ou uma sucessão de eclipse solar, lunar e solar novamente. Num ano; 2 ou 3 destes conjuntos podem ocorrer.

## Capítulo 3

### Descrição matemática das órbitas planetárias

A observação dos planetas e a interpretação dos seus movimentos, tem sido objecto de estudo ao longo dos séculos, tendo evoluído do modelo Geocêntrico para o Heliocêntrico, face às evidências observacionais (Galileu e Kepler) e às teorias físicas (Gravitação universal de Newton) que permitem com bastante fiabilidade traçar as suas órbitas, e calcular a sua posição orbital em qualquer instante.

Neste capítulo reservado aos movimentos planetários vamos fazer uso de conceitos mais diversificados dados as questões que estes movimentos levantam:

- Geometria da elipse
- Declive da recta
- Derivadas
- Coordenadas de posição
- Vectores

Qualquer das aplicações destes conceitos, tem cabimento em temas a leccionar.

A construção das órbitas e a verificação das respectivas características são um exemplo privilegiado de transversalidade que pode ser usado como síntese na aplicação de conhecimentos adquiridos ao longo do secundário. Nesta perspectiva e dado incorporar Geometria (analítica e vectorial) e Análise de funções, pode ser interessante explorar isto no final do 12º ano, sob a forma de trabalho experimental:

- Recolha de dados observacionais sobre planetas ou satélites (Na internet por exemplo)
- Tratamento matemático dessas observações
- Verificação de modelos matemáticos pré estabelecidos
- Análise e conclusões

### 3.1. O Modelo Heliocêntrico

No início do século XVI, a Renascença, terminou com o obscurantismo reinante na Idade Média e trouxe um novo fôlego a todas as áreas do conhecimento humano. **Nicolau Copérnico** representou o Renascimento na Astronomia. Copérnico (1473-1543) foi um astrônomo polaco que tal como Aristarco ( $\approx 300$  a.C.) considerou a hipótese heliocêntrica com o Sol no centro do Universo, mais plausível que a geocêntrica. Copérnico registou as suas ideias num livro - **De Revolutionibus**- publicado no ano da sua morte.

Os conceitos mais importante colocados por Copérnico foram:

- introduziu o conceito de que a Terra é apenas um dos seis planetas (então conhecidos) girando em torno do Sol
  - colocou os planetas em ordem de distância ao Sol: Mercúrio, Vénus, Terra, Marte, Júpiter, Saturno (Urano, Neptuno e Plutão só foram descobertos posteriormente)
  - determinou as distâncias dos planetas ao Sol, em termos da distância Terra-Sol
  - deduziu que quanto mais perto do Sol está o planeta, maior é sua velocidade orbital.
- Dessa forma, o movimento retrógrado dos planetas foi facilmente explicado sem necessidade de epiciclos

Copérnico manteve a ideia de que as órbitas dos planetas eram circulares, e embora o movimento dos planetas ficasse simples de entender no seu sistema, as posições previstas para os planetas não eram em nada melhores do que as posições previstas no sistema de Ptolomeu.

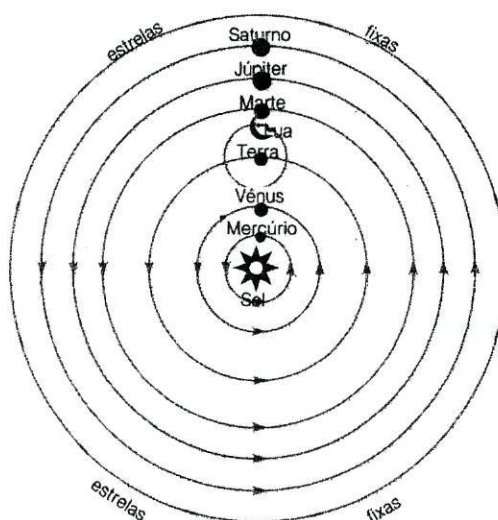


Fig.3.1 - Sistema de Copérnico

### 3.1.1. Movimento dos Planetas

A **Teoria Heliocêntrica** conseguiu dar explicações mais simples e naturais para os fenômenos observados, como por exemplo o movimento retrógrado dos planetas (fig.3.2) porém, Copérnico não conseguiu prever as posições dos planetas de forma precisa, nem conseguiu provar que a Terra estava em movimento.

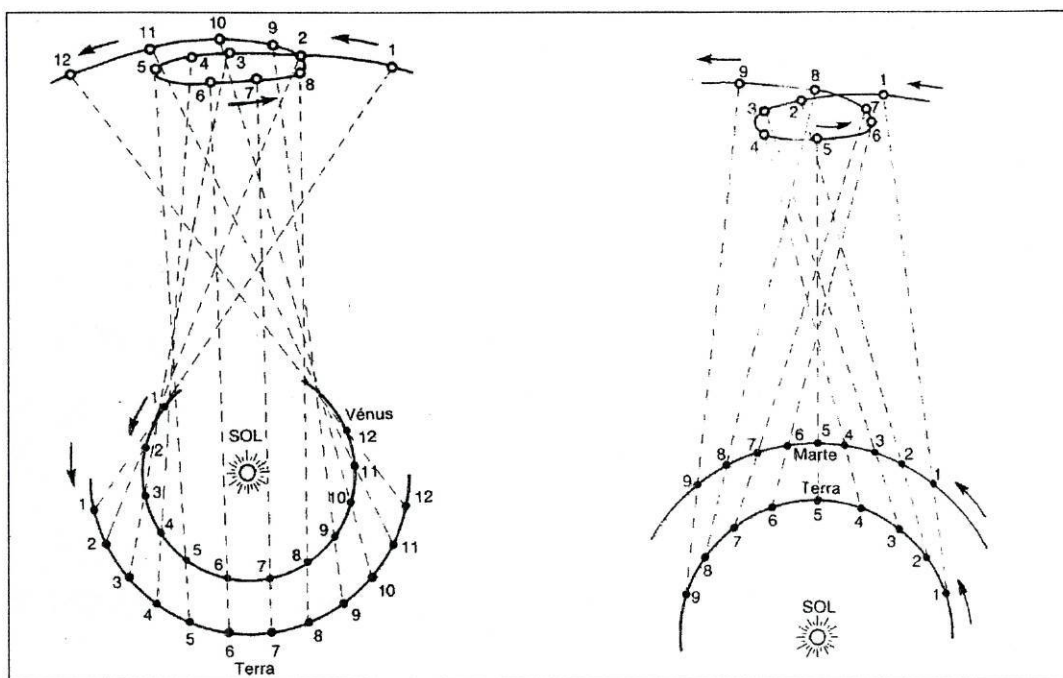


Fig.3.2 - Movimentos aparentes de Vénus e Marte onde são visíveis as retrogradações(5,6,7,8) no caso de Vénus e (4,5,6) no caso de Marte

### 3.1.2. Tycho Brahe

Três anos após a morte de Copérnico, nasceu o dinamarquês Tycho Brahe (1546-1601) o último grande astrónomo observacional antes da invenção do **telescópio**. Usando instrumentos fabricados por ele mesmo, Tycho fez extensivas observações das posições de planetas e estrelas, com uma precisão em muitos casos melhor do que 1 minuto de arco (1/30 do diâmetro do Sol).

Tycho Brahe não acreditava na hipótese heliocêntrica de Copérnico, mas foram as suas observações dos planetas que levaram às leis de Kepler do movimento planetário.

### 3.1.3. Johannes Kepler

Kepler (1571-1630) ao ler os princípios de Copérnico tornou-se um entusiástico defensor do heliocentrismo, e quando Tycho morreu "herdou" os seus dados, a cujo estudo se dedicou durante os 20 anos seguintes.

O planeta para o qual havia o maior número de dados era Marte. Kepler conseguiu determinar as diferentes posições da Terra após cada período sideral de Marte, e assim conseguiu traçar a órbita da Terra. Verificou que essa órbita se ajustava muito bem a um círculo excêntrico, isto é, com o Sol um pouco afastado do centro.

Kepler conseguiu também determinar a órbita de Marte, mas ao tentar ajustá-la com um círculo não teve sucesso. Continuou a insistir nessa tentativa por vários anos, e a dada altura encontrou uma órbita circular que concordava com as observações com um erro de 8 minutos de arco. Mas sabendo que as observações de Tycho não poderiam ter um erro desse tamanho (apesar disso significar um erro de apenas 1/4 do tamanho do Sol) Kepler, com a integridade que lhe era peculiar, descartou essa possibilidade.

Finalmente, passou à tentativa de representar a órbita de Marte por uma oval, e rapidamente descobriu que uma elipse se ajustava muito bem aos dados. A posição do Sol coincidia com um dos focos da elipse. Ficou assim explicada também a trajetória quase circular da Terra, com o Sol afastado do centro.

#### **3.1.4. Galileu**

Uma grande contribuição para a destruição do Modelo Geocêntrico foi dado pelo italiano Galileu Galilei (1564 - 1642).

Galileu usou o telescópio para observar sistematicamente o céu, fazendo várias descobertas importantes das quais referimos as seguintes:

- descobriu que Júpiter tinha quatro satélites ou luas, orbitando em torno dele com períodos entre 2 e 17 dias. Esses satélites são chamados "galileanos" e são:

Io, Europa, Ganímedes e Calisto. Desde então, mais 24 satélites foram descobertos em Júpiter. Esta descoberta de Galileu foi particularmente importante porque mostrou que podia haver centros de movimento que por sua vez também estavam em movimento; portanto o facto da Lua girar em torno da Terra não implicava que a Terra estivesse parada

- descobriu que Vénus passa por um ciclo de fases, assim como a Lua

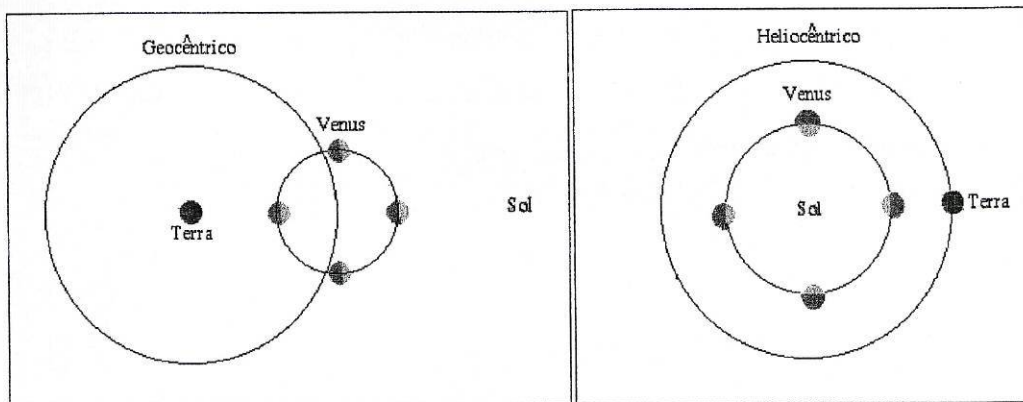


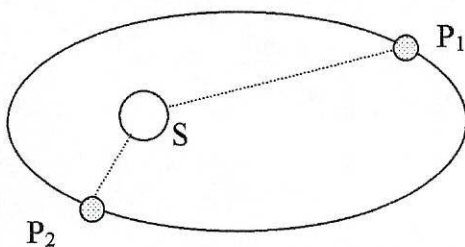
Fig.3.3 - Órbitas de Vénus nos modelos Geocêntrico e Heliocêntrico

Esta descoberta também foi fundamental porque, no sistema ptolomaico Vénus está sempre mais próximo da Terra do que o Sol (pois considera os planetas a moverem-se com a mesma velocidade) e como Vénus está sempre próximo do Sol, ele **nunca poderia ter toda sua face iluminada voltada para nós** (fase cheia) e portanto, deveria sempre aparecer como nova ou no máximo crescente. Ao ver que Vénus muitas vezes aparece em fase quase totalmente cheia, Galileu concluiu que ele viaja ao redor do Sol, passando às vezes pela frente dele e outras vezes por trás dele, e não sempre do mesmo lado em relação ao Sol o que contraria o modelo assente no geocentrismo.

### 3.1.5. As Leis de Kepler

Com base nas observações e nos cálculos efectuados, Kepler estabeleceu três leis que descrevem a forma como os planetas orbitam em volta do Sol.

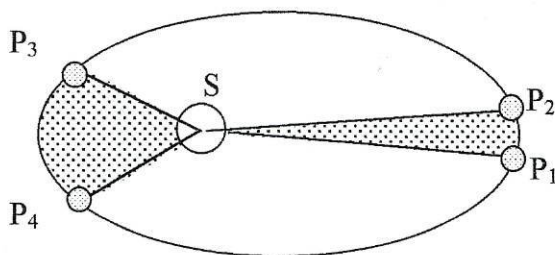
**1ª-Lei das órbitas elípticas (1609):** A órbita de cada planeta é uma elipse, com o Sol num dos focos. Como consequência da órbita elíptica, a distância do Sol ao planeta varia ao longo de sua órbita.



A distância do Planeta ao Sol, em  $P_1$  é maior (diferente) do que em  $P_2$

**2ª-Lei da áreas (1609):** A recta unindo o planeta ao Sol (raio vector) varre áreas iguais em tempos iguais. O significado físico desta lei é que a velocidade orbital não é

uniforme, mas varia de forma regular: quanto mais distante o planeta está do Sol, mais devagar ele se move. Dizendo de outra maneira, esta lei estabelece que *áreas iguais são varridas em tempos iguais*.



Sendo as áreas dos sectores  $P_1SP_2$  e  $P_3SP_4$  iguais o planeta P move-se mais depressa de  $P_3$  para  $P_4$  do que de  $P_1$  para  $P_2$

**3ª-Lei harmónica (1618):** O quadrado do período orbital dos planetas é directamente proporcional ao cubo de sua distância média ao Sol. Esta lei estabelece que planetas com órbitas maiores se movem mais lentamente em volta do Sol, e portanto isso implica que a força entre o Sol e o planeta decresce com a distância ao Sol.

Sendo  $P$  o período sideral do planeta,  $a$  o semi-eixo maior da órbita, que é igual à distância média do planeta ao Sol, e  $K$  uma constante, Podemos expressar a 3ª lei como:

$$P^2 = K a^3$$

Planeta	$T$ (anos)	$R_m$ (U.A.)	$T^2/R_m^3$	Planeta	$T$ (anos)	$R_m$ (U.A.)	$T^2/R_m^3$
Mercúrio	0.241	0.38	1.06	Mercúrio	0.241	0.387	1.00
Vénus	0.614	0.72	1.01	Vénus	0.615	0.723	1.00
Marte	1.881	1.52	1.01	Marte	1.881	1.523	1.00
Júpiter	11.8	5.2	0.99	Júpiter	11.862	5.20	1.00
Saturno	29.5	9.2	1.12	Saturno	29.458	9.54	1.00

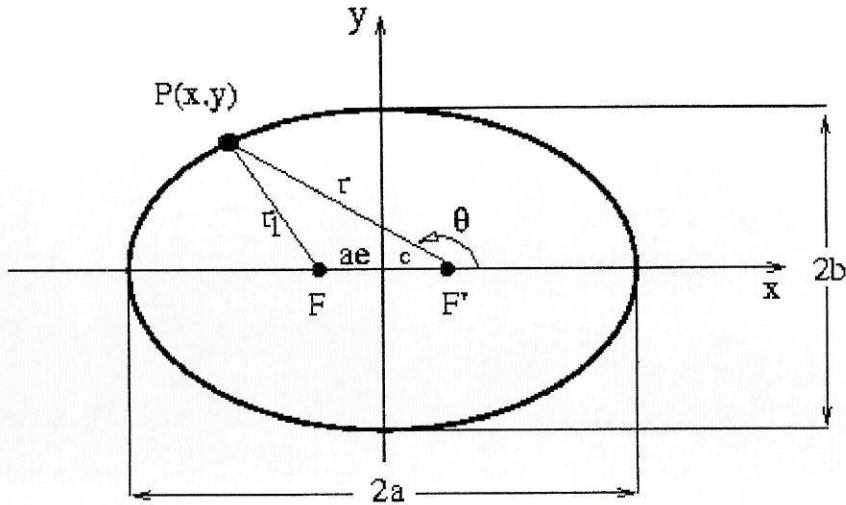
Tabela 3.1 - Verificação da lei dos períodos de Kepler. Na tabela da esquerda indicam-se os valores calculados por Kepler e na tabela da direita mostram-se os valores actuais.  $T$  é o período de translação do planeta em anos,  $R_m$  é o raio médio da respectiva órbita em Unidades Astronómicas.

Como se pode comprovar comparando com os valores actuais os cálculos de Kepler são bastante precisos o que mostra a fiabilidade das suas leis. O suporte matemático (geométrico) destas leis, que Kepler estabeleceu empiricamente apenas baseado nas

observações, assenta na elipse (cónica já conhecida dos Gregos) e que Newton com a sua teoria da gravitação explicou fisicamente, ser a forma orbital para os planetas.

No ponto seguinte vamos descrever as suas propriedades.

### 3.2. Propriedades das Elipses

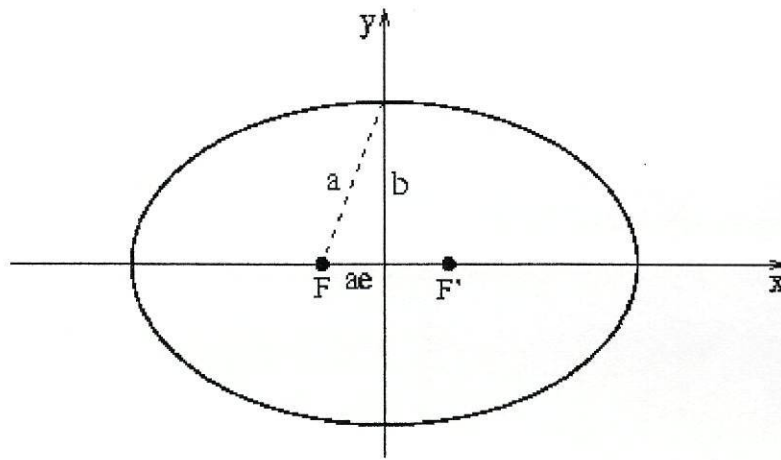


- Em qualquer ponto da curva, a soma das distâncias desse ponto aos dois focos é constante. Sendo  $F$  e  $F'$  os focos,  $P$  um ponto sobre a elipse, e  $a$  o seu semi-eixo maior, então:

$$FP + F'P = \text{constante} = 2a$$

- Quanto maior a distância entre os dois focos, maior é a *excentricidade* ( $e$ ) da elipse. Sendo  $c$  a distância do centro a cada foco,  $a$  o semi-eixo maior, e  $b$  o semi-eixo menor, a excentricidade é definida por;

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}$$



já que quando o ponto está exactamente sobre  $b$  temos um triângulo rectângulo, com

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

- Se imaginarmos que um dos focos da órbita do planeta é ocupado pelo Sol, o ponto da órbita mais próximo do Sol chama-se **periélio**, e o ponto mais distante chama-se **afélio**. A distância do periélio ao foco ( $R_p$ ) é:

$$R_p = a - c = a - ae = a(1 - e)$$

e a distância do afélio ao foco ( $R_a$ ) é:

$$R_a = a + c = a + ae = a(1 + e)$$

### 3.3. Determinação da órbita de Marte

Uma das conclusões a que chegou Kepler com base nas observações recolhidas durante anos das posições dos planetas foi de que as órbitas eram elípticas e não circulares como se pensava, tendo sido as irregularidades nas posições de Marte que o levaram a considerar a elipse (estando o Sol num dos focos) em alternativa á circunferência e à oval como sendo a forma mais adequada para descrever as órbitas. Empiricamente concluiu também que a área varrida pelo raio vector (vector definido pelo Sol e planeta) por unidade de tempo era constante bem como da existência duma constante de proporcionalidade entre o cubo dos semi-eixos maiores (em U.A.) e o quadrado dos períodos (em anos). Com base em dados observacionais para Marte e Mercúrio vamos "verificar experimentalmente" a validade destas leis.

### 3.3.1. Método de Kepler

A tabela 2 mostra as longitudes heliocêntricas  $\lambda_{\oplus}$  e  $\lambda_{\ominus}$ , da Terra e de Marte respectivamente, e a elongação  $\theta$  de Marte, para 24 datas.

Medidas das posições da Terra e de Marte					
Data	Dia Juliano	Longitude Heliocêntrica		Elongação	Número
	2 400 000	Marte	Terra	Marte-Sol	da
	+	$\lambda_{\ominus}$ (graus)	$\lambda_{\oplus}$ (graus)	$\theta$ (graus)	Oposição
10.09.1956	35 726	347	347	180	1
29.07.1958	36 413	347	125	25	
16.11.1958	36 523	53	53	180	2
11.02.1959	36 610	98	141	100	
02.10.1960	37 209	53	9	93	
30.12.1960	37 298	98	98	180	3
01.05.1962	37 785	347	220	31	
04.02.1963	38 064	135	135	180	4
09.03.1965	38 828	168	168	180	5
25.05.1966	39 270	53	243	6	
10.11.1966	39 439	135	47	61	
15.04.1967	39 595	204	204	180	6
31.05.1969	40 372	250	250	180	7
29.10.1970	40 888	168	35	30	
17.01.1971	40 968	204	116	60	
19.04.1971	41 060	250	208	96	
10.08.1971	41 173	317	317	180	8
02.12.1972	41 653	204	70	29	
25.10.1973	41 980	31	31	180	9
07.07.1974	42 235	156	284	33	
16.05.1975	42 548	317	234	59	
15.12.1975	42 761	82	82	180	10
22.01.1978	43 530	121	121	180	11
25.02.1980	44 294	156	156	180	12

Tabela 3 2 – Posições da Terra e Marte ao longo de 24 anos (1956-1980)

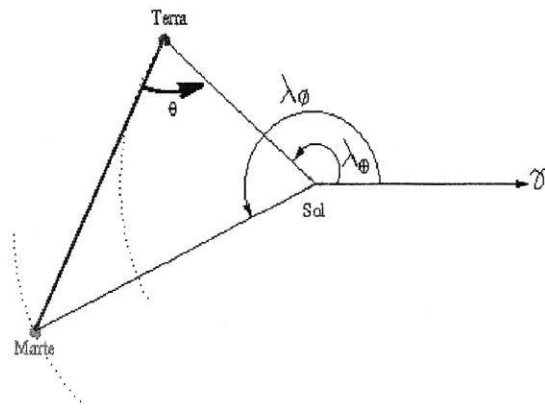


Fig.3.4 – Posições de Marte, Terra e Sol

A fig.3.4, permite a visualização de  $\lambda_{\oplus}$ ,  $\lambda_{\oplus}$ , e de  $\theta$ . Quando  $\theta$  é de  $180^\circ$  os planetas estão em oposição, e as suas longitudes são iguais. A tabela dá os dados para 12 oposições desde 1956 até 1980. Em 1609 (as duas primeiras) e em 1618 (a terceira) a partir de observações semelhantes também sobre um período de 24 anos, Kepler formulou três leis para explicar o movimento orbital de Marte, através do método gráfico resumido abaixo.

### 3.3.1.1. Primeira Lei.

O problema consiste em traçar a órbita de Marte a partir das várias posições na tabela. Num cálculo preliminar, Kepler encontrou que a Terra tinha uma órbita quase circular com excentricidade  $e = 0.017$ , e longitude no periélio de  $101^\circ$ :

- Desenha-se esta órbita, usando um círculo de raio  $r$ . Coloca-se a posição do Sol a uma distância  $e \cdot r$  do centro do círculo na direcção do periélio
- Em seguida marcam-se as posições de Marte, como segue (fig.3.5)

Desenha-se a direcção (vamos chamar  $\gamma$  essa direcção) que é comum para Terra e Marte na oposição nº 1. Notar que neste ponto só sabemos a direcção em que está Marte, mas não sabemos em que posição ao longo desta direcção ele está. No entanto após 1 período sideral  $P$ , em julho de 1958, Marte regressou à mesma longitude. A sua posição  $M_1$  agora pode ser encontrada marcando a posição da Terra no diagrama, e então desenhar a linha (vamos chamar  $\gamma_1$ ) na direcção dada pelo ângulo  $\theta$ . O ponto em que essa linha corta a linha  $\gamma$  é a posição de Marte.



Tirando partido do (Sketchpad) medem-se as distâncias:

- Sol a Marte no periélio :  $SPE^\circ$
- Sol a Marte no afélio:  $SAF^\circ$

Com base nestas medidas obtemos a excentricidade :

$$e = \frac{SPE^\circ - SAF^\circ}{SPE^\circ + SAF^\circ} = 0,100$$

Directamente obtemos:

- Distância ao Afélio = 1,702 u.a.
- Distância ao Periélio = 1,393 u.a.
- Longitude do periélio  $LPE^\circ = 332,654^\circ$

### 3.3.1.2. Segunda Lei.

Kepler observou que o movimento longitudinal de Marte era irregular.

Entre duas oposições sucessivas, separadas por um intervalo  $P + \Delta t$  :

- A longitude cresce de  $360^\circ + \Delta\lambda$  .
- A velocidade angular resultante é  $\Delta\lambda / \Delta t$

Exemplo: entre 1a. e 2a. oposição:

$$\Delta t_1 = 797 - 687 = 110 \text{ dias}$$

$$\Delta\lambda = (53^\circ - 347^\circ) + 360^\circ, \text{ e portanto}$$

$$\Delta\lambda / \Delta t_1 = 66^\circ / 110d = 0,60^\circ / \text{dia}$$

A velocidade angular resultante é irregular (ver fig.3.7 e tab.3.3).

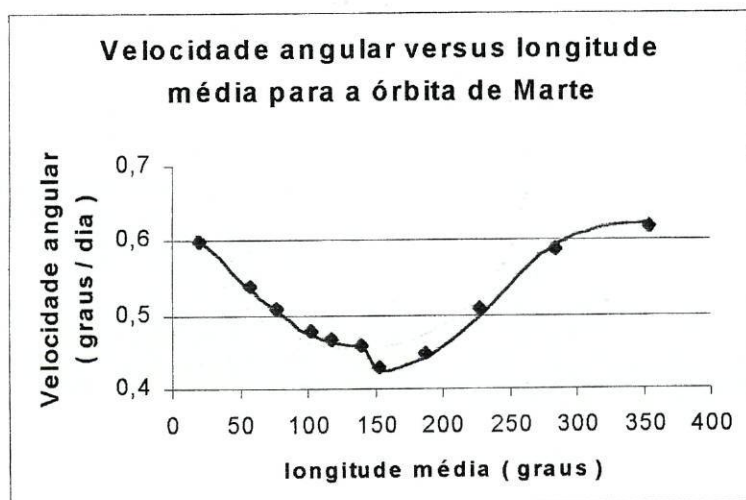


Fig.3.7 - Gráfico da variação de  $\Delta\lambda / \Delta t$  com  $\lambda_{\emptyset}$  média onde é patente a irregularidade dessa variação ao longo da órbita

Oposições	$\Delta\lambda$	$\Delta t$	$\Delta\lambda / \Delta t$	$\lambda_{\emptyset}$ (média)
1-2	66	110	0,60	20
2-3	45	88	0,51	75,5
3-4	37	79	0,47	116,5
4-5	33	77	<b>0,43 - mínimo</b>	151,5
5-6	36	80	0,45	186
6-7	46	90	0,51	227
7-8	67	114	0,59	283,5
8-9	74	120	<b>0,62 - Máximo</b>	354
9-10	51	94	0,54	56,5
10-11	39	82	0,48	101,5
11-12	35	77	0,46	138,5

Tabela 3.3 - Variação de  $\Delta\lambda$  ;  $\Delta\lambda / \Delta t$  e  $\lambda_{\emptyset}$  (média) ao longo do período de observação

- Representando a variação de  $\Delta\lambda / \Delta t$  como uma função da longitude  $\lambda_{\emptyset}$ , e usando a longitude *média* no intervalo podemos ver:

1. Que direcções correspondem aos valores de máximo e mínimo.

2. Que a área varrida pela linha unindo Marte e o Sol na unidade de tempo é sempre a mesma para estas duas direcções, lembrando que a velocidade areal (variação da área por unidade de tempo) é dada por:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{r^2}{2} \times \frac{d\lambda}{dt}$$

Consultando a tabela 3.3 verificamos que a velocidade angular média  $\Delta\lambda / \Delta t$  apresenta:

- mínimo de 0,43°/dia para  $\lambda_{\emptyset} = 159,5$
- Máximo de 0,62°/dia para  $\lambda_{\emptyset} = 354^{\circ}$

*Que característica da órbita determina esta diferença assinalável das velocidades médias, máxima e mínima?*

E a distância Marte – Sol nestas direcções (ver fig.3.6):

- Do periélio  $SPE^{\circ} = 1,393$  U.A.
- Do afélio  $SAF^{\circ} = 1,702$  U.A.

donde resultam velocidades por unidade de área :

- No Periélio  $V_a = \frac{1,393^2}{2} \times 0,62 = 0,602 \text{ U.A.}^2 / \text{dia}$
- No Afélio  $V_a = \frac{1,702^2}{2} \times 0,43 = 0,623 \text{ U.A.}^2 / \text{dia}$

praticamente iguais (diferença inferior a 0,02)

### 3.3.1.3. Terceira Lei.

O período sinódico  $S$ , pode ser encontrado a partir do intervalo médio entre oposições sucessivas. Calculando este valor para cada par de oposições marcadas na tabela 3.4, e calculando o valor médio obtemos:

Oposições	Periodo (dias)
1 <sup>a</sup> -2 <sup>a</sup>	$\Delta t = 36.523 - 35.726 = 797$
2 <sup>a</sup> -3 <sup>a</sup>	$\Delta t = 775$
3 <sup>a</sup> -4 <sup>a</sup>	$\Delta t = 766$
4 <sup>a</sup> -5 <sup>a</sup>	$\Delta t = 764$
5 <sup>a</sup> -6 <sup>a</sup>	$\Delta t = 767$
6 <sup>a</sup> -7 <sup>a</sup>	$\Delta t = 777$
7 <sup>a</sup> -8 <sup>a</sup>	$\Delta t = 801$
8 <sup>a</sup> -9 <sup>a</sup>	$\Delta t = 807$
9 <sup>a</sup> -10 <sup>a</sup>	$\Delta t = 781$
10 <sup>a</sup> -11 <sup>a</sup>	$\Delta t = 769$
11 <sup>a</sup> -12 <sup>a</sup>	$\Delta t = 764$
Total - 11	$\sum \Delta t = 8.568$

Tabela 3.4 - Intervalo entre oposições

Periodo Sinódico  $S$ : 
$$S = \frac{\sum \Delta t}{11} = \frac{8.568}{11} = 778,9 \approx 779 \text{ dias}$$

- **Período sideral de Marte**

O período sideral é o intervalo de tempo entre longitudes iguais sucessivas.

Exemplo:  $\Delta T_1 = 687$  dias.

Podemos também usar o período sinódico médio calculado anteriormente, e a relação entre período sinódico e sideral,

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{P} - \frac{1}{P_M} \quad (1)$$

sendo S o período sinódico,  $P_M$  o período sideral de Marte, e P o período sideral da Terra .

Aplicando (1)

$$\frac{1}{779} = \frac{1}{365} - \frac{1}{P_M}$$

$$P_M = \frac{779 \times 365}{779 - 365} = 686,799 \approx 687 \text{ dias}$$

- **Verificação da 3ª lei :  $a^3 / P^2 = c^{te}$**

Razão entre os eixos maiores e os períodos:

$$a_M = 1,548 \text{ u.a.} ; \quad a_T = 1 \text{ u.a.}$$

$$P_M = \frac{687}{365} = 1,88 \text{ anos} ; \quad P_T = 1 \text{ ano}$$

$$\frac{a_M^3}{P_M^2} = \frac{1,548^3}{1,88^2} = 1,05$$

$$\frac{a_T^3}{P_T^2} = \frac{1^3}{1^2} = 1 \quad \text{ou seja} \quad \frac{a_M^3}{P_M^2} \approx \frac{a_T^3}{P_T^2}$$

### 3.4. Órbita de Mercúrio

Com base em observações regulares de 5 em 5 dias do planeta Mercúrio cujo período é de 88 dias, vamos :

- construir a sua órbita
- verificar a sua forma elíptica e determinar a excentricidade (1ª Lei de Kepler)
- verificar as 2ª e 3ª Leis de Kepler

Na tabela 3.5 apresentam-se os registos das observações em que os graus representam a distância angular que Mercúrio percorreu durante cada intervalo de tempo, e a distância ao Sol refere-se obviamente a Mercúrio para cada observação.

observação	graus	distância ao Sol (U. A.)
1	4	0,35
2	31	0,32
3	61	0,31
4	92	0,31
5	122	0,32
6	149	0,35
7	172	0,38
8	192	0,41
9	209	0,43
10	224	0,45
11	239	0,46
12	252	0,47
13	266	0,47
14	280	0,46
15	295	0,44
16	311	0,42
17	330	0,40
18	350	0,37

Tabela 3.5 - Observações de Mercúrio

### 3.4.1 Construção da órbita

Com base nestes dados e usando um programa de Geometria (Sketchpad) obtemos a seguinte representação (fig.3.8) num referencial com o Sol no centro, e com os pontos de C a T de coordenadas (distância ao Sol, posição angular) correspondentes às diferentes posições de Mercúrio.

Aparentemente a órbita é circular, mas os elementos obtidos por medição directa que o programa permite isto é, as distâncias do Sol aos pontos E e M da órbita, revelam tratar-se duma elipse como se mostra no ponto seguinte.

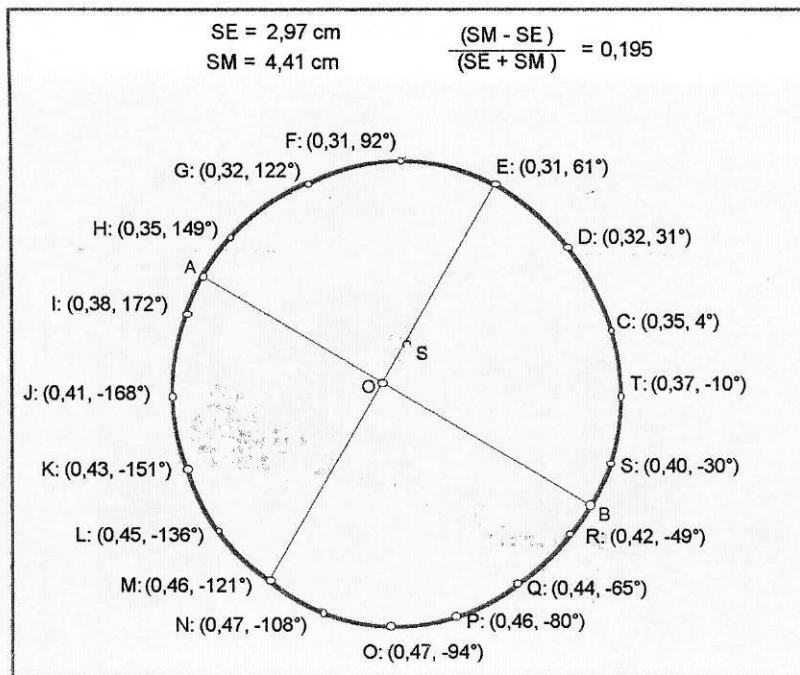


Fig.3.8 - Órbita de Mercúrio

### 3.4.2. Excentricidade

Embora pareça uma circunferência com centro em O a sua excentricidade

$$e = \frac{SM - SE}{SM + SE} = \frac{4,41 - 2,97}{4,41 + 2,97} = 0,195$$

não sendo zero mostra tratar-se duma elipse. (*1ª Lei de Kepler*)

### 3.4.3. Verificação das 2ª e 3ª leis

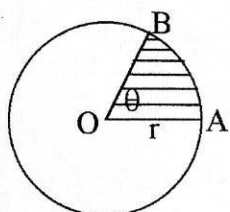
Vejam agora o que acontece com as áreas dos sectores circulares definidos pelo Sol e Mercúrio em 2 posições observadas com intervalo de 5 dias (por exº C,D e J,K).

Calculando estas áreas usando o raio médio para cada sector temos:

$$A_{CD} = \frac{(0,32 + 0,35)^2}{2} \times (31 - 4) = 1,52$$

$$A_{JK} = \frac{(0,41 + 0,43)^2}{2} \times (168 - 151) = 1,50 \quad \text{ou seja}$$

$$A_{CD} \approx A_{JK} \quad \text{áreas praticamente iguais}$$



Nota: A área dum sector circular OAB é dada por :

$$\frac{\theta \times r^2}{2}$$

*Mostrar como se obtém essa expressão*

Usando as capacidades do Sketchpad (fig.3.9) obtemos para as áreas dos sectores:

$$A_{SDXC} = 2,41 \text{ cm}^2 ; A_{SJYK} = 2,42 \text{ cm}^2$$

ou seja áreas quase iguais (diferença de 0,01)

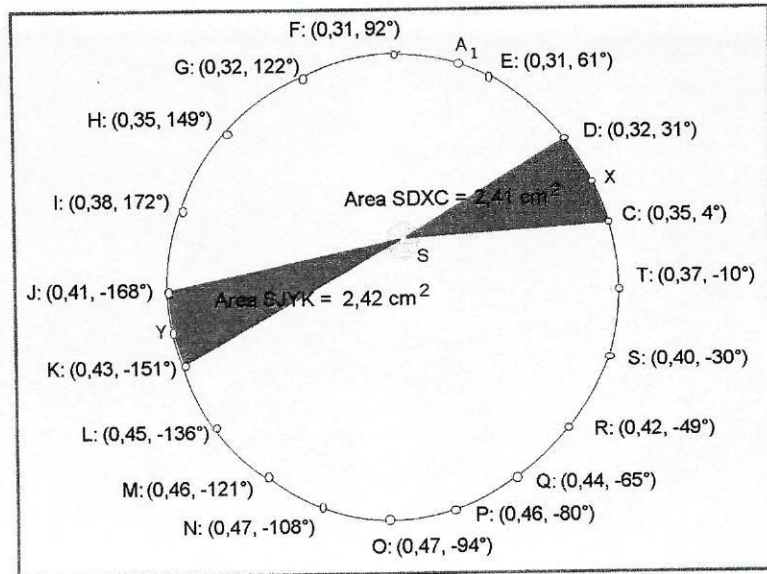


Fig.3.9 - Sectores da órbita de Mercúrio com áreas iguais

**Como estas áreas são varridas em tempos iguais verifica-se aqui a da 2ª Lei de Kepler**

Calculemos agora o comprimento dos arcos EF que contém o periélio e MO que contém o afélio, permitindo-nos obter a velocidade de Mercúrio nessas partes da órbita. Para isso vamos usar o raio médio e o ângulo em radianos :

$$Arc_{EF} = \frac{31}{360} \times 0,31 = 0,17 \text{ U.A.}$$

$$Arc_{MO} = \frac{21}{360} \times 0,465 = 0,22 \text{ U.A.}$$

Dividindo pelo tempo que demora a percorrer esses arcos obtemos as velocidades orbitais médias

$$V_{EF} = \frac{0,17 \times 15 \times 10^7}{5 \times 24 \times 3.600} = 59,03 \text{ km/s}$$

$$V_{JK} = \frac{0,22 \times 15 \times 10^7}{10 \times 24 \times 3.600} = 38,19 \text{ km/s} \text{ ou seja } V_{EF} > V_{JK}$$

**Constatamos pois que a velocidade orbital é maior quando o planeta está mais próximo do Sol e menor quando está mais afastado como seria de esperar de acordo com a 2ª lei.**

Sendo o semieixo maior 0,32 U.A. e o período orbital  $88/365 = 0,24$  anos vamos ter

$$0,39^3 / 0,24^2 = 1,029 \quad \text{3ª Lei de Kepler}$$

### 3.5. Retrogradação dos planetas

Devido às diferentes velocidades com que os planetas se deslocam nas suas órbitas, as suas posições na esfera celeste relativamente às estrelas mais distantes (que para nós parecem fixas) evoluem de maneira tal que para um observador na Terra, o movimento dos planetas (fig.3.10) que na maior parte da órbita é no sentido directo (visto da Terra) inverte o sentido e passa a ser retrógrado durante algum tempo ( $P_1$  a  $P_2$ ) findo o qual, retoma o sentido directo.

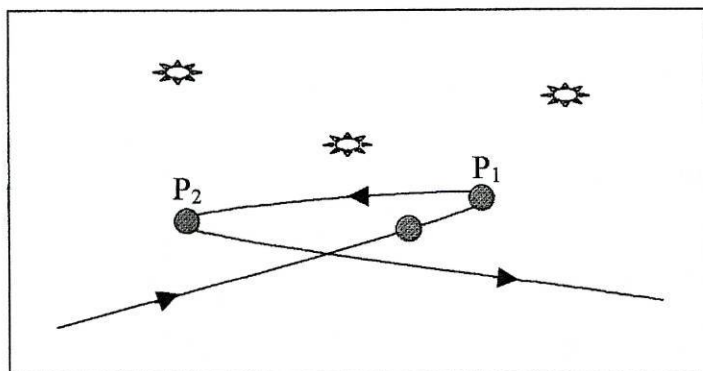


Fig.3.10 - Movimento retrógrado  $P_1P_2$

O movimento observado de cada planeta é uma combinação do movimento do planeta em torno do Sol com o movimento da Terra em torno do Sol, e é simples de explicar quando sabemos que a Terra está em movimento, mas fica muito difícil de descrever num sistema em que a Terra esteja parada.

Apesar da dificuldade de compreender e explicar o movimento observado dos planetas do ponto de vista geocêntrico (a Terra no centro do Universo) o geocentrismo foi uma ideia dominante na Astronomia durante toda a Antiguidade e Idade Média. O sistema geocêntrico também é conhecido como sistema ptolomaico, pois foi **Cláudio Ptolomeu**, o último dos grandes astrónomos gregos (150 d.C.) quem construiu o modelo geocêntrico mais completo e eficiente. Ptolomeu explicou o movimento dos planetas através de uma combinação de círculos para conseguir ajustar o modelo às observações: o planeta move-se ao longo de um pequeno círculo chamado **epiciclo**, cujo centro se move num círculo maior chamado **deferente**. A Terra fica numa posição um pouco afastada do centro do deferente (portanto o deferente é um círculo excêntrico em relação à Terra). Para dar conta do movimento não uniforme dos planetas,

Ptolomeu introduziu ainda o **equanto**, (fig.3.11) que é um ponto ao lado do centro do deferente oposto à posição da Terra, em relação ao qual o centro do epíciclo se move a uma taxa uniforme.

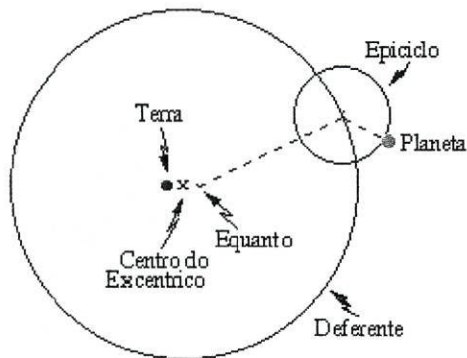


Fig.3.11-Modelo explicativo de Ptolomeu para os planetas

O objectivo de Ptolomeu era produzir um modelo que permitisse prever a posição dos planetas de forma correcta, e nesse ponto ele foi razoavelmente bem sucedido. Por essa razão esse modelo continuou sendo usado sem mudança substancial por 1.300 anos.

### 3.5.1. Pontos de viragem

Considerando que as órbitas são circulares e coplanares (o que é aproximadamente verdadeiro) vamos determinar os pontos de viragem no movimento dos planetas e calcular o tempo de duração em que o sentido do movimento é retrógrado. Apesar de no Modelo Heliocêntrico não fazer sentido falar na retrogradação dos planetas, é no entanto interessante do ponto de vista do observador na Terra.

#### 3.5.1.1. Para o planeta Marte:

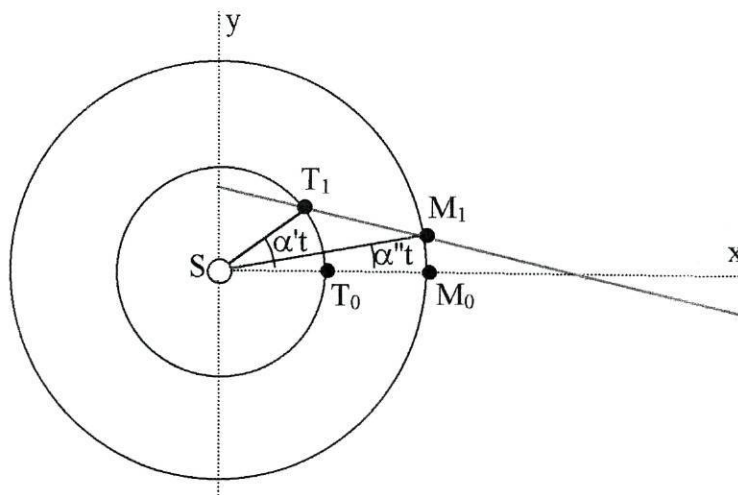


Fig.3.12 - Posição da Terra e Marte em 2 instantes distintos

A velocidade angular

- de Marte  $\alpha'' = 2\pi/687 \text{ rad/dia}$
- da Terra  $\alpha' = 2\pi/360 \text{ rad/dia}$

e a distância angular percorrida no tempo  $t$  por

- Marte  $(2\pi/687) \times t$  rad
- Terra  $(2\pi/360) \times t$  rad

Enquanto a Terra se desloca de  $T_0$  para  $T_1$  Marte desloca-se de  $M_0$  para  $M_1$ . Usando um referencial com origem em  $O$  e os eixos assinalados (fig.3.12) podemos associar às posições dos planetas as coordenadas  $X(t)$  e  $Y(t)$  em U.A. segundo o eixo horizontal e vertical respectivamente.

Vamos ter então o seguinte:

- Para o planeta Terra  $\begin{cases} X(t) = \cos \alpha' t \\ Y(t) = \text{sen} \alpha' t \end{cases}$
- Para o planeta Marte  $\begin{cases} X(t) = 1,52 \cos \alpha'' t \\ Y(t) = 1,52 \text{sen} \alpha'' t \end{cases}$

Com base nestas coordenadas podemos calcular

- **Declive  $m(t)$  da recta Terra-Marte**

$$m(t) = \left( \frac{\text{sen} \alpha' t - 1,52 \text{sen} \alpha'' t}{\cos \alpha' t - 1,52 \cos \alpha'' t} \right)$$

Os instantes em que ocorrem os pontos de viragem no sentido do movimento de Marte podem ser determinados pela derivada de  $m(t)$  pois estes pontos coincidem com a mudança do sentido de variação do declive desta recta .

Significa isto que  $t$  para os instantes referidos será obtido da equação:

$$\frac{dm(t)}{dt} = 0 \quad \boxed{\text{Porquê?}} \quad (2)$$

$$\frac{(\alpha' \cos \alpha' t - 1,52 \alpha'' \cos \alpha'' t) \times (\cos \alpha' t - 1,52 \cos \alpha'' t)}{(\cos \alpha' t - 1,52 \cos \alpha'' t)^2} - \frac{(1,52 \alpha'' \text{sen} \alpha'' t - \alpha' \text{sen} \alpha' t) \times (\text{sen} \alpha' t - 1,52 \text{sen} \alpha'' t)}{(\cos \alpha' t - 1,52 \cos \alpha'' t)^2} = 0$$

efectuando os produtos e simplificando obtemos

$$\frac{dm(t)}{dt} = \frac{\alpha' + 1,52^2 \alpha'' - 1,52(\alpha' + \alpha'')(\cos \alpha' t \cos \alpha'' t + \text{sen} \alpha' t \text{sen} \alpha'' t)}{(\cos \alpha' t - 1,52 \cos \alpha'' t)^2}$$

como

$$(\cos\alpha't \cos\alpha''t + \operatorname{sen}\alpha't \operatorname{sen}\alpha''t) = \cos(\alpha't - \alpha''t)$$

**Porquê?**

igualando a zero

$$\alpha't - \alpha''t = \arccos\left(\frac{\alpha' + 1,52^2\alpha''}{1,52(\alpha' + \alpha'')}\right)$$

Cuja solução é:

$$t = \frac{\arccos\left(\frac{\alpha' + 1,52^2\alpha''}{1,52(\alpha' + \alpha'')}\right)}{(\alpha' - \alpha'')}$$

$$t = \frac{\arccos\left(\frac{\frac{2\pi}{360} + 1,52^2 \frac{2\pi}{687}}{1,52\left(\frac{2\pi}{360} + \frac{2\pi}{687}\right)}\right)}{\left(\frac{2\pi}{360} - \frac{2\pi}{687}\right)} = 36,5 \text{ dias}$$

- **Tempo de retrogradação de Marte**

Este é o tempo que Marte demora desde a oposição (0) até retomar o sentido directo (1) movimento aparente (M<sub>0</sub>-M<sub>1</sub> na fig.3.13). Como o instante de viragem antes da oposição (M<sub>2</sub>) quando Marte começa a retrogradar ocorre simetricamente á oposição então concluímos que Marte se desloca em sentido retrógrado (M<sub>2</sub>-M<sub>1</sub>):

$$2 \times 36,5 \text{ dias} = 73 \text{ dias.}$$

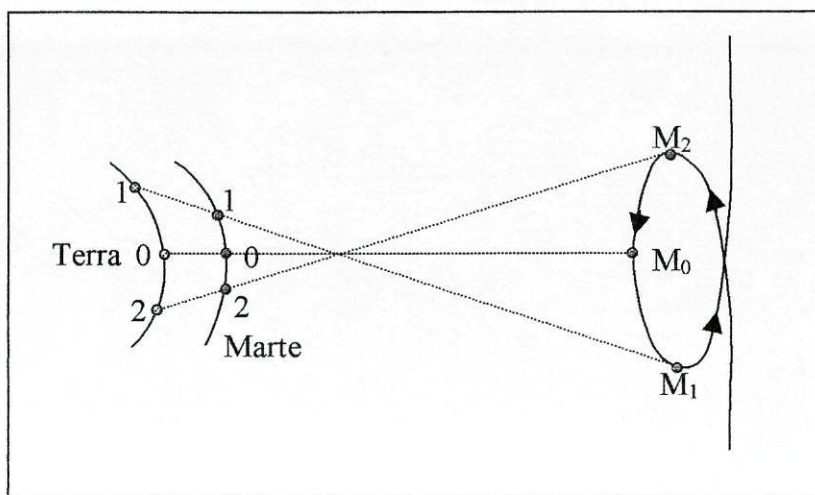


Fig.3.13 - Retrogradação de Marte

### 3.5.1.2. Para o planeta Mercúrio

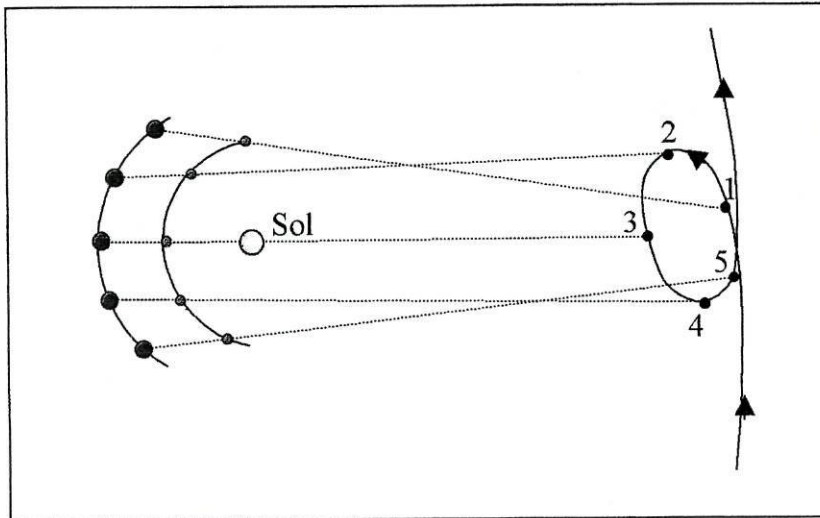


Fig.3.14 - Retrogradação de Mercúrio

A velocidade angular de Mercúrio

$$\alpha'' = 2\pi/88 \text{ rad/dia}$$

e a distância angular

$$(2\pi/88) \times t$$

sendo  $t$  o tempo decorrido desde a conjunção dos planetas (posição 3)

No caso de Mercúrio vamos ter

$$m(t) = \frac{\text{sen}\alpha't - 0,39\text{sen}\alpha''t}{\text{cos}\alpha't - 0,39\text{cos}\alpha''t}$$

*Procede como no caso de Marte e calcula o tempo de retrogradação que deverá ser*

$$2 \times 11,4 \text{ dias} = 23 \text{ dias aproximadamente}$$

### 3.6. Inclinação das Órbitas Planetárias

#### 3.6.1. Estudo vectorial da inclinação relativamente à eclíptica

Como é sabido os planetas descrevem órbitas elípticas com o Sol num dos focos. Com base nas coordenadas de posição dum planeta P em momentos distintos do seu percurso orbital  $P_1$  e  $P_2$  (fig.3.15) vamos definir vectorialmente a posição nesses instantes e calcular a inclinação  $\alpha$  relativamente à Eclíptica.

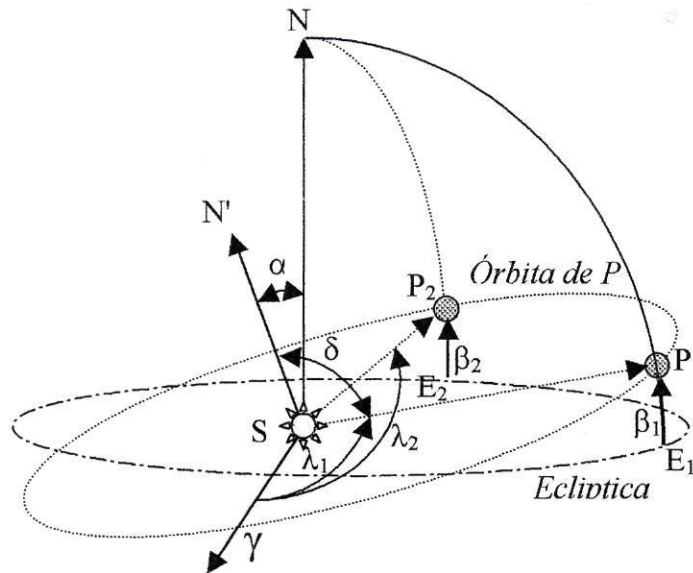


Fig.3.15 - Posições da Órbita de P e da Eclíptica

Sabendo por observação as coordenadas eclípticas de posição do planeta P  $(\rho, \lambda, \beta)$ ; (distância ao Sol, longitude eclíptica e latitude eclíptica) em  $P_1$  e  $P_2$  podemos definir os vectores de posição em coordenadas rectangulares  $(x, y, z)$  mediante a seguinte transformação:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \lambda \cos \beta \\ y = \rho \sin \lambda \cos \beta \\ z = \rho \sin \beta \end{cases}$$

A partir daqui usando o produto externo dos vectores  $\overrightarrow{SP_1}$  e  $\overrightarrow{SP_2}$  obtém-se o vector  $\overrightarrow{SN'}$

$$\overrightarrow{SN'} = \overrightarrow{SP_1} \times \overrightarrow{SP_2} = \begin{vmatrix} \vec{x} & \vec{y} & \vec{z} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

perpendicular ao plano da órbita de P (ver fig. 3.15) e a partir deste vector e de SN perpendicular à Eclíptica obtém-se  $\alpha$  que é o ângulo formado pelos dois planos, bastando para isso usar o produto interno de vectores:

$$\overline{SN} \cdot \overline{SN'} = \|\overline{SN}\| \times \|\overline{SN'}\| \times \cos \alpha$$

$$\alpha = \arccos \frac{\overline{SN} \cdot \overline{SN'}}{\|\overline{SN}\| \times \|\overline{SN'}\|}$$

### 3.6.2. Inclinação da órbita de Mercúrio

Usando o Skymap verificamos que o planeta Mercúrio em dois instantes distintos P<sub>1</sub> (17 Março 2002) e P<sub>2</sub> (9 março 2002) apresenta as seguintes coordenadas:

	P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>
• Distância ao Sol	0,443 U.A.	0,463 U.A.
• Latitude	-6,5°	-4,8°
• Longitude	295,2°	271,7°

Fazendo a transformação para coordenadas rectangulares:

$$\overline{SP}_1 = (0,443 \times \cos 295,2^\circ \times \cos 6,5^\circ) \overline{x}_1 + (0,443 \times \sin 295,2^\circ \times \cos 6,5^\circ) \overline{y}_1 + (0,443 \sin(-6,5^\circ)) \overline{z}_1$$

$$\overline{SP}_2 = (0,443 \times \cos 271,7^\circ \times \cos 4,8^\circ) \overline{x}_1 + (0,443 \times \sin 271,7^\circ \times \cos 4,8^\circ) \overline{y}_1 + (0,443 \sin(-4,8^\circ)) \overline{z}_1$$

$$\overline{SP}_1 = 0,423 \overline{x} - 0,899 \overline{y} - 0,113 \overline{z}$$

$$\overline{SP}_2 = 0,035 \overline{x} - 0,996 \overline{y} - 0,084 \overline{z}$$

donde

$$\overline{SP}_1 \times \overline{SP}_2 = \begin{vmatrix} \overline{x} & \overline{y} & \overline{z} \\ -0,423 & -0,899 & -0,113 \\ 0,035 & -0,996 & -0,084 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0,899 & -0,113 \\ -0,996 & -0,084 \end{vmatrix} \overline{x} - \begin{vmatrix} -0,423 & -0,113 \\ 0,035 & -0,084 \end{vmatrix} \overline{y} +$$

$$+ \begin{vmatrix} -0,423 & -0,899 \\ 0,035 & -0,996 \end{vmatrix} \overline{z} = -0,037 \overline{x} + 0,032 \overline{y} + 0,389 \overline{z}$$

Sendo  $\vec{SN}^i = \vec{SP}_1 \times \vec{SP}_2$  e  $\vec{SN} = 0\vec{x} + 0\vec{y} + \vec{z}$

e fazendo o produto escalar de  $\vec{SN}^i$  por  $\vec{SN}$

$$\vec{SN}^i \cdot \vec{SN} = 0,389 = \sqrt{0,037^2 + 0,032^2 + 0,389^2} \times \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} \times \cos \alpha$$

$$\alpha = \arccos \frac{0,389}{\sqrt{0,037^2 + 0,032^2 + 0,389^2} \times \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}}$$

$$\alpha = \arccos 0,992$$

$$\alpha = 7,17^\circ$$

Temos então uma inclinação para a órbita de Mercúrio de aproximadamente  $7^\circ$

*Mostrar que o cálculo de  $\alpha$  é independente das distâncias ao Sol*

### 3.6.3. Determinação dos nodos

Podemos também determinar os nodos (intercepção dos planos da órbita e da eclíptica) definindo vectorialmente os planos:

- Para a Eclíptica – plano  $\varepsilon$   
cuja equação será :

$$\varepsilon \rightarrow z = 0$$

- Para a órbita de Mercúrio – plano  $\eta$ :

sendo o vector  $-0,037\vec{x} + 0,032\vec{y} + 0,389\vec{z}$ , calculado no ponto anterior, um vector normal a  $\eta$  e  $S \rightarrow (0,0,0) \in \eta$

a equação será:

$$\eta \rightarrow -0,037(x - 0) + 0,032(y - 0) + 0,389(z - 0) = 0$$

- A intercepção será obtida resolvendo o sistema:

donde resulta

$$-0,037x + 0,032y = 0$$

que é a equação da recta de intersecção dos planos  $\varepsilon$  e  $\eta$

Esta recta passa na origem do referencial e no ponto de coordenadas (0,86,1,0) e está identificada por  $s$  na fig.3.16 onde se mostram as posições das órbitas de Mercúrio e da Eclíptica e se assinalam as longitudes  $\lambda_A$  e  $\lambda_B$  dos nodos ascendente  $N_A$  e descendente  $N_B$ .

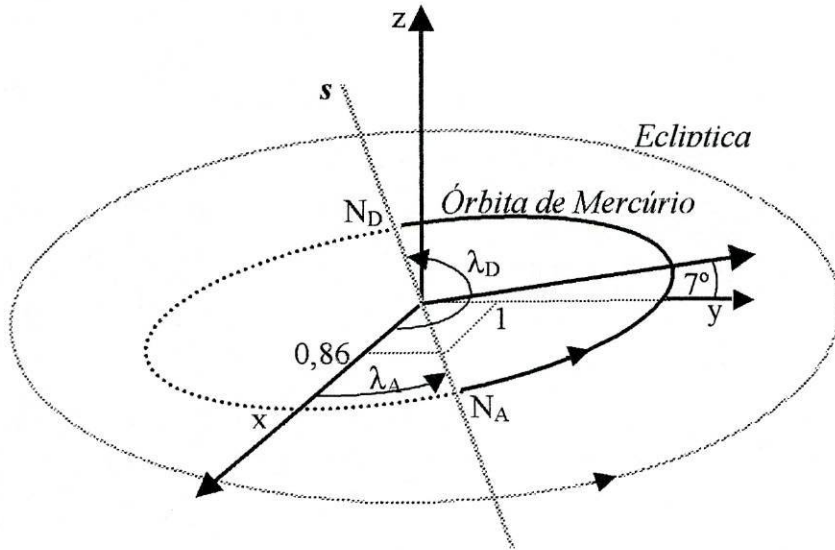


Fig.3.16 - Órbitas de Mercúrio e Eclíptica

Estas longitudes podem ser calculadas a partir do ângulo da recta  $s$  com o eixo dos  $x$ :

$$\lambda_A = \text{arc tg} \frac{1}{0,86} = 49,3^\circ$$

$$\lambda_B = 180^\circ + 49,3^\circ = 229,3^\circ$$

### 3.7. Cálculo da posição orbital dum planeta.

#### 3.7.1. Coordenadas

A posição dum planeta na sua órbita identifica-se através de duas coordenadas  $(r, f)$

- A distância  $r$  ao Sol – o chamado **raio vector**.
- O ângulo  $f$  formado com a direcção do periélio – chamado de **anomalia verdadeira**

O conhecimento da geometria da elipse não é suficiente para posicionar o planeta num dado instante, já que não conhecemos  $r(t)$ : o raio vector  $r$  como função do tempo  $t$ .

A variável na equação da órbita é o ângulo  $f$  (anomalia verdadeira) medido desde o periélio. Pela 2ª lei de Kepler, sabemos que a variação de  $f$  com o tempo não é constante.

#### 3.7.2. Cálculo do raio vector

Vejamos como se podem obter  $r$  e  $f$  que nos dão a posição do planeta na órbita:

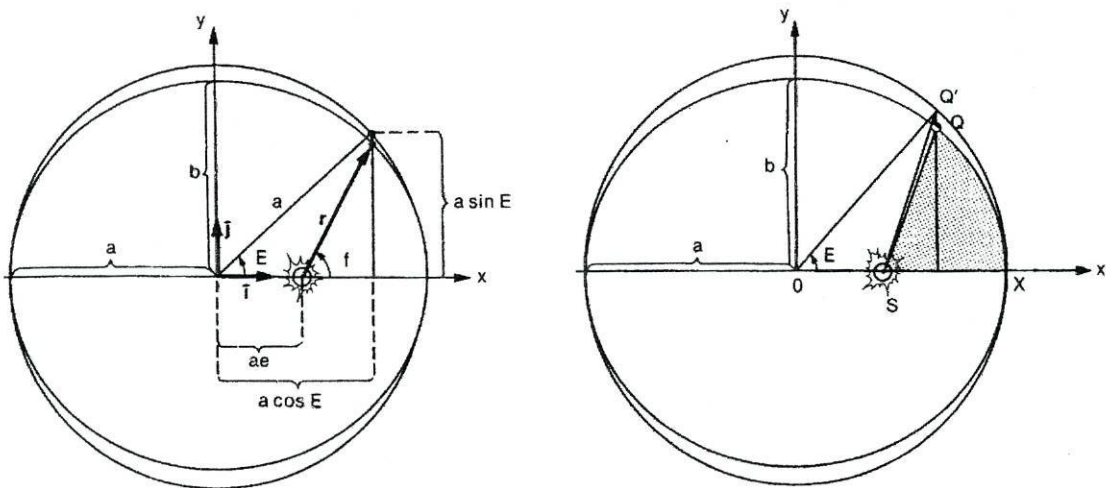


Fig.3.17 – Posição orbital  $(r,f)$  à esquerda e área varrida  $SQX$  à direita

Na fig.3.17 mostra-se um ponto da órbita elíptica identificado por  $r$  e  $f$ .

O raio vector  $r$  pode ser expresso como :

$$\vec{r} = a(\cos E - e) \vec{i} + b \operatorname{sen} E \vec{j} \quad (3)$$

sendo  $\vec{i}$  e  $\vec{j}$  vectores unitários com a direcção dos eixos maior e menor respectivamente.

Nota: Dada a relação de afinidade entre elipse e circunferência	
$\left( \frac{y_e}{y_c} = \frac{\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{b}{a} \right)$	onde $y_e$ e $y_c$ são as ordenadas de um ponto com a mesma abcissa, na elipse e circunferência respectivamente.
No caso da Fig 3.17	$y_c = a \operatorname{sen} E \Rightarrow y_e = \frac{b}{a} a \operatorname{sen} E$ <p>resulta</p> $y_e = b \operatorname{sen} E$

O ângulo  $E$  é a chamada anomalia excêntrica do planeta e corresponde ao ângulo ao centro definido pelo periélio e pela posição do planeta, se a órbita fosse circular.

*Este ângulo  $E$  é particularmente importante em astronomia pois torna mais simples as fórmulas que descrevem o movimento elíptico.*

Quadrando (3) obtemos o módulo de  $r$ :

$$r^2 = a^2(\cos E - e)^2 + (b \operatorname{sen} E)^2$$

$$r^2 = a^2(\cos^2 E - 2e \cos E + e^2) + b^2 \operatorname{sen}^2 E \text{ sendo } b^2 = a^2 - c^2 \text{ e } e = \frac{c}{a} :$$

$$r^2 = a^2 \cos^2 E - 2 a.c. \cos E + c^2 + a^2 \operatorname{sen}^2 E - c^2 \operatorname{sen}^2 E \text{ e como } \operatorname{sen}^2 E = 1 - \cos^2 E :$$

$$r^2 = a^2 - 2 a.c. \cos E + c^2 - c^2 + c^2 \cos^2 E$$

donde resulta

$$r^2 = a^2 - 2 a.c. \cos E + c^2 \cos^2 E = (a - ac \cos E)^2$$

e finalmente

$$r = a(1 - e \cos E) \quad \text{raio vector}$$

### 3.7.3. Equação de Kepler

Para calcular  $E$  num dado instante  $t$ , vamos socorrer-nos da 2ª lei de Kepler que nos diz ser

constante a variação da área com o tempo  $\frac{dA}{dt}$ .

Na fig.3.17 a área sombreada do sector SQX

$$A = \pi a b \frac{t - t_0}{P} \quad (4)$$

sendo  $t - t_0$  o tempo decorrido desde o periélio, e  $T$  o período orbital.

Por outro lado a área da parte da elipse pode ser obtida, através da área correspondente da circunferência circunscrita, multiplicando por  $\frac{b}{a}$ . Assim sendo:

$$A = \frac{b}{a} (\text{área de SQ'X}) = \frac{b}{a} (\text{área do sector OQ'X} - \text{área do triângulo OQ'S})$$

$$A = \frac{b}{a} \left( \frac{1}{2} a \times a E - \frac{1}{2} a e \times a \text{sen} E \right) = \frac{1}{2} ab(E - e \text{sen} E) \quad (5)$$

Igualando as equações (4) e (5)

$$\pi a b \frac{t - t_0}{P} = \frac{1}{2} ab(E - e \text{sen} E)$$

e introduzindo  $M = \frac{2\pi}{P}(t - t_0)$  resulta

$$\mathbf{M = E - e \text{sen} E} \quad \text{Equação de Kepler}$$

**M** é a chamada **anomalia média** do planeta isto é o ângulo formado com o periélio, por um corpo fictício que se desloca com movimento médio (velocidade angular). Esta equação onde para um tempo dado, **M** e **e** são dados sendo **E** a incógnita, é uma equação **transcendente** e portanto não se pode resolver **algébricamente**.

O melhor método é o iterativo.

Sendo a excentricidade dos planetas **e** pequena, pode-se desprezar na aproximação inicial:

$E_0 = M$ . Com esta solução inicial obtém-se um valor melhor:

$$E_1 = M + e \text{sen} E_0$$

$$E_2 = M + e \text{sen} E_1$$

$$E_3 = M + e \text{sen} E_2$$

Terminando quando duas **iterações** em  $E_n$  ( $E_n$  e  $E_{n+1}$ ) se diferenciem duma quantidade inferior ao erro assumido ( $\epsilon$ ) ou seja  $|E_n - E_{n+1}| < \epsilon$ .

O processo de cálculo reduz-se a determinar a anomalia média **M**, e de posse desta calcula-se a anomalia excêntrica **E** que satisfaz a equação de Kepler.

A partir de  $E$  podemos calcular  $r$ :

$$r = a(1 - e \cos E)$$

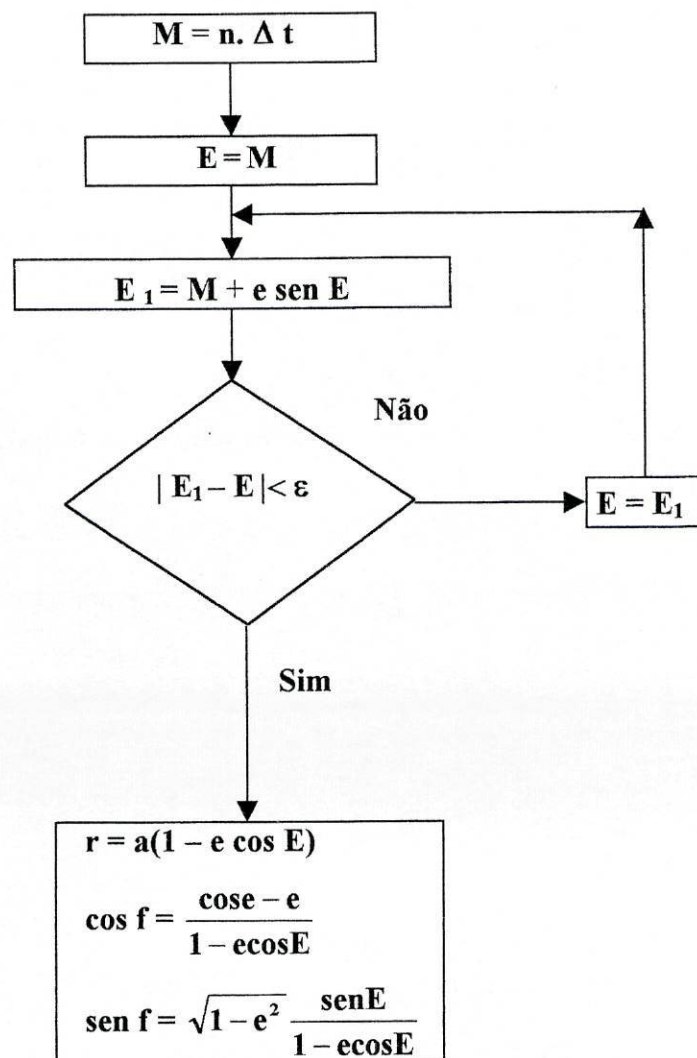
e a partir das componentes de  $r$  podemos determinar  $f$ :

$$\cos f = \frac{a(\cos E - e)}{r} = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E}$$
$$\sin f = \frac{b \sin E}{r} = \sqrt{1 - e^2} \frac{\sin E}{1 - e \cos E}$$

### 3.7.4. Algoritmo para a resolução da equação de Kepler

Este processo iterativo é facilmente realizado com calculadoras ou folhas de cálculo. O

diagrama do processo iterativo é o seguinte:



### 3.7.5. Exemplo de aplicação: Terra

$$a = 1 \text{ u.a.} \quad e = 0,0167090 \quad \varepsilon < 0,00001$$

$$t = 92 \quad 1 \text{ Abril de 2000}$$

$$t_0 = 3 \quad 3 \text{ Janeiro 2000 (periélio)}$$

$$\Delta t = t - t_0 = 89$$

$$n = \frac{2\pi}{365,257} = 0,01720209$$

$$M = n \cdot \Delta t = 1,530986 \text{ rad } (87^\circ,719058)$$

$$E_0 = M = 1,530986$$

$$E_1 = M + e \text{ sen } E_0 = 1,54768176102$$

$$E_1 - E_0 = 0,01669576102 > 0,00001$$

$$E_2 = M + e \text{ sen } E_1 = 1,54769053653$$

$$E_2 - E_1 = 0,00008775121 > 0,00001$$

$$E_3 = M + e \text{ sen } E_2 = 1,54769053992$$

$$E_3 - E_2 = 0,000000003883 < 0,00001$$

$$E = E_3 = 1,54769053992$$

$$r = a(1 - e \cos E) = 1 - 0,0167090 \cos(1,54769053992)$$

$$r = 0,999613959759 \cong 149.442.229 \text{ Km}$$

consultando uma tabela de efemérides temos 0,9999201 U.A. o que difere em menos de 0.0001 do valor calculado

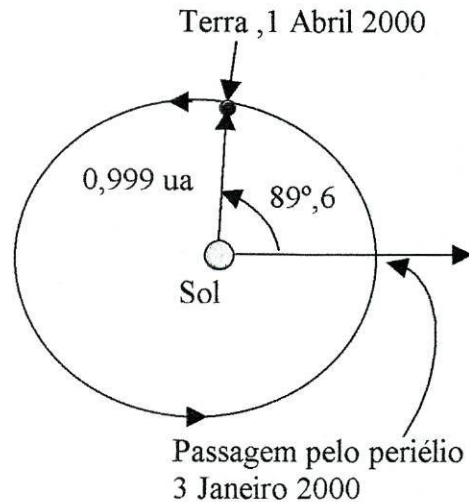
$$\cos f = \frac{a(\cos E - e)}{r} = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E} = \frac{\cos(1,54769053992) - 0,0167090}{1 - 0,0167090 \cos(1,54769053992)} = 0,006397200564$$

$$\begin{aligned} \text{sen } f &= \frac{b \text{ sen } E}{r} = \sqrt{1 - e^2} \frac{\text{sen } E}{1 - e \cos E} = \sqrt{1 - 0,0167090^2} \frac{\text{sen}(1,54769053992)}{1 - 0,0167090 \cos(1,54769053992)} = \\ &= 0,999979537703 \end{aligned}$$

$$\text{Como } \begin{cases} \cos f > 0 \\ \text{sen } f > 0 \end{cases} \Rightarrow f \in 1^\circ \text{ Quadrante}$$

$$f = \cos^{-1}(0,006397200564) = 1,5643990828 \text{ rad}$$

$$f = 89^\circ,6334649069$$



## Questões sobre órbitas planetárias

Os planetas maiores do sistema solar, apresentam pequenos corpos e anéis em órbita, constituindo como que sistemas solares em miniatura. O planeta Saturno é um desses casos, sendo a tabela que se apresenta, um registo de dados observacionais das suas luas.

1. Dados os valores dos períodos orbitais, e das distâncias a Saturno das suas luas, obter gráficos da distância vs período e da distância<sup>3</sup> vs período<sup>2</sup>.

Nome	Período Orbital (dias)	Dist. média a Saturno (km)
Atlas	0,602	137,640
Prometheus	0,613	139,350
Pandora	0,629	141,700
Epimetheus	0,694	151,422
Janus	0,695	151,472
Mimas	0,942	185,520
Enceladus	1,370	238,020
Tethys	1,888	294,660
Telesto	1,888	294,660
Calypso	1,888	294,660
Dione	2,737	377,400
Helene	2,737	377,400
Rhea	4,518	527,040
Titan	15,945	1,221,850
Hyperion	21,277	1.481,000
Iapetus	79,331	3.561,300
Phoebe	550,480	12.952,000

Tabela 3.6

Vendo esta tabela que constata-se que as 3 luas **Tethys, Telesto, e Calypso** assim como as 2 luas **Dione e Helene** constituem dois grupos de satélites co-orbitais, pois estão á mesma distância de Saturno e têm o mesmo período.

*Isso deve-se ao facto, desses grupos de satélites ocuparem em cada uma das órbitas os chamados pontos de Lagrange, que são pontos onde é possível outro(s) satélite(s) ocupar(em) a mesma órbita, além do satélite principal. Estes pontos foram previstos pelo matemático Joseph Lagrange (1736–1813) que concluiu poderem existir 5 desses pontos numa dada órbita, sendo três deles instáveis, e os restantes dois (localizados 60° adiante e 60° atrás do satélite principal) perfeitamente estáveis.*

*Telesto e Calypso ocupam os pontos estáveis de Lagrange na órbita de Tethys, o mesmo acontecendo com Helene, na órbita de Dione.*

Este sistema de satélites é uma miniatura dum sistema solar, e deverá obedecer às leis de Kepler. Em particular estes dados, prestam-se a testar a 3ª lei, que relaciona a distância dos planetas ao Sol com o respectivo período orbital.

### **Recordando a obtenção da 3ª lei de Kepler.**

Pela 2ª lei de Newton, para um corpo com movimento circular uniforme influenciado pela força gravitacional

$$F = GMm/r^2 = mv^2/r \quad (1)$$

Porque a velocidade é constante

$$v = 2\pi r/T \quad (2)$$

onde **T** é o período da órbita em segundos, **v** é a velocidade do corpo em metros por segundo, e  $2\pi r$  é a circunferência da órbita, considerada circular para simplificar os cálculos.

Eliminando a massa, **m**, do corpo na equação (1) e substituindo pela equação (2) a velocidade na equação (1) vamos obter (após algumas transformações algébricas) a 3ª lei de Kepler relacionando a distância, **r**, e o período **T**, dum corpo orbitando outro de maior massa, **M**.

$$r^3/T^2 = GM/4\pi^2 \quad (3)$$

**G** é a constante de Gravitação Universal,  $6,67 \times 10^{-11}$  Newton-metros<sup>2</sup>/kg<sup>2</sup>; **M** é a massa do corpo central que é orbitado, neste caso Saturno, pelo que o membro direito da equação (3) é igual a uma constante!

Se designarmos essa constante por "**k**", então poderemos reescrever a equação (3) como:

$$r^3 = kT^2 \quad (4)$$

### Sugestão de trabalho:

Fazer um gráfico de  $r^3$  vs.  $T^2$  para as luas de Saturno. Isto é, os valores de  $T^2$  serão as abcissas e os valores de  $r^3$  serão as ordenadas.

### Qual a forma que se prevê para o gráfico $r^3$ vs. $T^2$ ?

Testar previsões, usando um programa de computador, para obteres um gráfico com os dados da tabela das luas de Saturno. Introduzir primeiro, os dados para os períodos (abcissas) e depois as distâncias (ordenadas) tendo o cuidado de introduzir apenas um par de valores, período / distância, para as luas co – orbitais.

Correr o programa a fim de se obter o gráfico.

Este gráfico tem a forma esperada?

Imprimir o gráfico numa folha de papel .

Voltar novamente ao programa, e modificar a entrada de dados de modo a que os valores de  $x$  passem a ser  $T^2$  e os valores de  $y$   $r^3$ .

Imprimir o gráfico junto ao anterior e verificar as previsões. Que se pode concluir?

2. Considerar agora os períodos orbitais dos planetas do sistema solar, e as respectivas distâncias ao Sol (semieixo maior das órbitas). Ver tabela seguinte.

planeta	Semieixo maior(u.a.)	Período(anos)
Mercúrio	0,39	0,25
Vénus	0,72	0,62
Terra	1,00	1
Marte	1,52	1,88
Júpiter	5,20	11,86
Saturno	9,54	29,46
Úrano	19,18	84,01
Neptuno	30,07	164,79
Plutão	39,4	247,69

Tabela 3.7

Obter o gráfico com  $r$  no eixo  $y$  e  $T$  no eixo  $x$ . Que forma tem o gráfico?

Modificar novamente usando  $r^3$  e  $T^2$  como anteriormente. Que forma tem o gráfico agora?

A forma é comparável á do gráfico de  $r^3$  vs.  $T^2$  para as luas de Saturno?

O que nos diz isto acerca do comportamento do sistema das luas de Saturno e do sistema solar? Se fizermos um gráfico das distâncias e dos períodos orbitais das luas de Júpiter, o que esperamos obter, comparando com os gráficos de  $r^3$  vs.  $T^2$  do sistema solar e das luas de Saturno?

3. Representa esquematicamente a retrogradação de Vénus, identificando os pontos de viragem e calcula o tempo de retrogradação respectivo.

4. Procurar as coordenadas do planeta Júpiter (usando o Skymap por exemplo) e determinar a inclinação da sua órbita bem como a longitude dos nodos.

## Capítulo 4

### A geometria esférica na Astronomia de posição

Um domínio onde os conceitos geométricos e as relações entre os elementos que materializam esses conceitos (planos, ângulos, arcos, triângulos planos e esféricos) se revelam imprescindíveis, é o da localização dos astros na chamada **Esfera Celeste**, e a identificação do seu posicionamento nessa esfera através de **coordenadas**. O uso de coordenadas, facilita e permite resolver problemas relacionados com o posicionamento na Terra, a partir da latitude e longitude, e na esfera celeste com os diferentes sistemas de coordenadas através de transformações vectoriais.

Neste capítulo aborda-se a geometria esférica (incontornável em Astronomia) que não estando contemplada no ensino secundário, não deixa de ser útil e interessante pois os conceitos que a sustentam, são uma extensão dos usados na geometria plana, daí poderem ser compreendidos a este nível.

Os problemas que a geometria esférica resolve, podem assim ser utilizados como exemplo de aplicações de :

- coordenadas
- vectores

integrados nos temas "Geometria no plano e no espaço I e II ", com a vantagem de alargar horizontes e consolidar conhecimentos, o que está subjacente em problemas como a determinação da latitude e longitude. A forma de introduzir a geometria esférica poderá ser através de aplicações, parecendo-me uma boa estratégia referir:

- Distâncias segundo círculos máximos e menores na superfície da esfera
- Problemas de navegação
- Localização dos astros

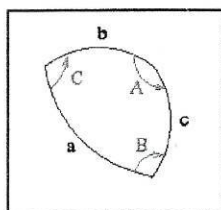
## 4.1. Trigonometria Esférica

A astronomia esférica ou astronomia de posição, diz respeito fundam. direccões na qual os astros são vistos, sem se preocupar com a su. conveniente expressar essas direccões em termos das posições sobre a sup. esfera - a Esfera Celeste. Essas posições são medidas unicamente em â. forma, o raio da esfera, que é totalmente arbitrário, não entra nas equações.

### 4.1.1. Definições básicas:

Se um plano passa pelo centro de uma esfera, divide-a em dois hemisfério. longo de um **círculo máximo**. Qualquer plano que corta a esfera sem p. centro intercepta-a num círculo menor ou paralelo. Quando dois círcul. interceptam em um ponto, formam entre si um **ângulo esférico**. A medida. esférico é igual à medida do ângulo plano entre as tangentes dos dois arcos q. Um ângulo esférico também é medido pelo arco esférico correspondente, q. um círculo máximo contido entre os dois lados do ângulo esférico e distan. vértice. A medida de um arco esférico por sua vez, é igual ao ângulo que ele. centro da circunferência.

### 4.1.2. Triângulos esféricos:



Um triângulo esférico não é qualquer figura fechada. sobre a esfera. Os seus lados devem ser arcos de *círculo*. seja, arcos esféricos. Identificamos os ângulos de. esférico por letras maiúsculas (A,B,C) e os seus la. minúsculas (a,b,c).

### 4.1.3. Propriedades dos triângulos esféricos

- 1) A soma dos ângulos de um triângulo esférico, sempre maior que 180. do que 540 graus, não é constante dependendo do triângulo. De fac. entre a soma dos três ângulos e 180° o chamado **excesso esférico**  $\sigma$  ( $\sigma = \angle A + \angle B + \angle C - 180^\circ$ ) é directamente proporcional à área do tri.

$$A_t = \sigma \frac{\pi R^2}{180^\circ} \text{ sendo } R \text{ o raio da esfera em cuja superfície está o triângulo}$$

- 2) A soma dos lados de um triângulos esférico é maior do que zero, e. 180 graus.

- 3) Os lados maiores estão opostos aos ângulos maiores no triângulo.
- 4) A soma de dois lados do triângulo é sempre maior do que o terceiro lado, e a diferença é sempre menor.
- 5) Cada um dos lados do triângulo é menor do que 180 graus, e isso aplica-se também aos ângulos.

#### 4.1.4. Solução de triângulos esféricos:

Tal como na trigonometria plana, é sempre necessário conhecer no mínimo três elementos para resolver um triângulo esférico: ou três ângulos, ou três lados, ou dois lados e um ângulo, ou um ângulo e dois lados. Vejamos (fig.4.1) como fazendo uso do produto escalar de vectores, se pode estabelecer uma relação entre lados e ângulos num triângulo esférico

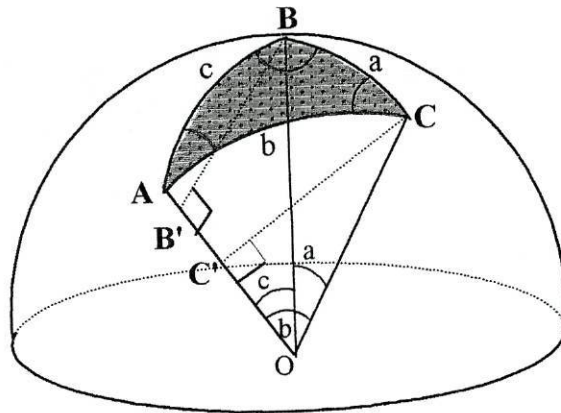


Fig.4.1 – Triângulo esférico. Os lados do triângulo, a, b, c são arcos de círculos máximos

Considerando a esfera de raio unitário, temos que os módulos dos vectores  $\overrightarrow{OA}$ ,  $\overrightarrow{OB}$  e  $\overrightarrow{OC}$  são iguais a 1 e os ângulos a, b e c quando medidos em radianos, correspondem aos comprimentos dos arcos BC, AC e AB respectivamente.

Assim sendo temos:

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \cos a \quad \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \cos c \quad \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = \cos b$$

B' e C' são as projecções de B e C no eixo AO pelo que podemos escrever

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = (\overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{B'B}) \cdot (\overrightarrow{OC'} + \overrightarrow{C'C})$$

Sendo

$$\overrightarrow{OB'} \perp \overrightarrow{CC'} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{OC'} \perp \overrightarrow{B'B}$$

Obtemos 
$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB'} \cdot \overrightarrow{OC'} + \overrightarrow{B'B} \cdot \overrightarrow{C'C}$$

$\overrightarrow{OB'}$  e  $\overrightarrow{OC'}$  são colineares  $\Rightarrow \overrightarrow{OB'} \cdot \overrightarrow{OC'} = \cos b \cos c$

e como 
$$\overrightarrow{B'B} \cdot \overrightarrow{C'C} = \sin b \sin c \cos \hat{A}$$

resulta

$$\cos (a) = \cos (b) \cos (c) + \sin (b) \sin (c) \cos (\hat{A})$$

### Fórmula fundamental da Trigonometria Esférica

Nota: Esta fórmula também chamada "fórmula dos cossenos", põe em evidência o cálculo de um lado do triângulo à custa dos outros dois lados e do ângulo que se lhes opõe.

Outras fórmulas se podem deduzir como:

- fórmula dos senos

$$\frac{\text{sena}}{\text{senA}} = \frac{\text{senb}}{\text{senB}} = \frac{\text{senc}}{\text{senC}}$$

- fórmula dos cinco elementos

$$\text{sen a cos B} = \cos b \text{ sen c} - \text{sen b cos c cos A}$$

- fórmula dos quatro elementos consecutivos

$$\text{cos a cos C} = \text{sen a cotg b} - \text{sen C cotg B}$$

## 4.2. A latitude e a longitude

### 4.2.1. A importância destas medições

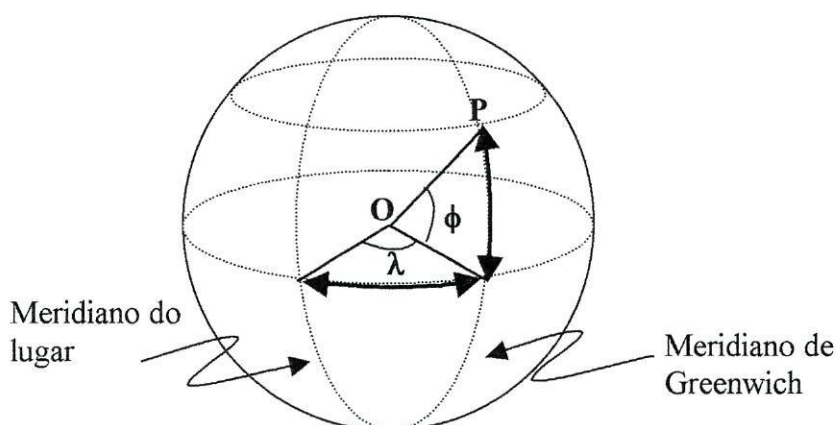


Fig.4.2 – Latitude e Longitude

Localizamos um ponto **P** sobre a superfície terrestre (fig.4.2) via duas coordenadas:

- **longitude geográfica ( $\lambda$ ):** é o ângulo medido ao longo do Equador da Terra, tendo origem em um meridiano de referência (o meridiano de Greenwich) e extremidade no meridiano do lugar. Na Conferência Internacional Meridiana, realizada em Washington em Outubro de 1884, foi definida como variando de 0 a +180° (Oeste de Greenwich) e de 0 a -180° (Este). Na convenção usada em Astronomia, varia entre -12h (Oeste) e +12h (Este).

$$- 12 \text{ h} < \lambda < 12 \text{ h}$$

- **latitude geográfica ( $\phi$ ) :** ângulo medido ao longo do meridiano do lugar, com origem no Equador e extremidade no lugar. Varia entre -90 °e +90 °. O sinal negativo indica latitudes do hemisfério sul e o sinal positivo hemisfério norte.

$$- 90^\circ < \phi < 90^\circ$$

Um grau de latitude corresponde a um arco cujo comprimento é o mesmo em qualquer local sobre a superfície terrestre (cerca de 110 Km) enquanto os graus de longitude dão arcos cujo comprimento varia com o local (de 110 Km no Equador diminuem para zero nos Pólos)

Nota: A milha náutica usada na navegação corresponde a 1' de latitude.

Qual o seu comprimento?

O primeiro uso destas coordenadas ocorreu na feitura de mapas e isso foi feito já por Ptolomeu 150 DC. A necessidade de calcular estas coordenadas tornou-se bastante importante quando o homem começou a fazer viagens através dos oceanos. Até cerca de 1500 as viagens marítimas eram feitas ao longo das costas dos continentes, de modo a possibilitar a localização do navio. Com a descoberta do caminho da Índia e da América, foi preciso navegar em mar aberto e isso deixava como única possibilidade de localização do navio (ou seja, a determinação da sua latitude e longitude) o uso dos astros celestes

É importante lembrarmos que naquela época, um navio que se perdesse ou mesmo se desviasse da rota, corria o risco de perder a carga e a tripulação (dizimada pelo escorbuto e falta de água) . O valor dessas cargas podia ser imenso. Estima-se em nada menos de 300 milhões de dólares o valor da carga de especiarias, que em 1592 bucaneiros ingleses roubaram do navio português Madre de Deus. Não eram menores os prejuízos com vidas humanas, o mais famoso deles sendo o afundamento em 1707 de quatro navios ingleses que perdidos, bateram nas rochas das Ilhas Scilly tendo morrido 2000 marinheiros neste acidente.

Como resultado por cerca de 1700, a maioria dos países europeus envolvidos no comércio marítimo, começaram a oferecer vultuosos prémios a quem fosse capaz de descobrir um modo prático e exacto, de se determinarem as coordenadas de um navio em mar aberto. A maioria desses prémios chegava a milhões de dólares actuais. Na busca da solução para esse problema, participaram matemáticos e cientistas do maior calibre como Galileu Huyghens Newton e Euler.

No que segue veremos alguns detalhes sobre a resolução do problema. É importante, contudo, que desde já destaquemos duas coisas:

- a determinação da latitude, é um problema fácil ao contrário da longitude.
- A determinação da latitude e longitude de pontos sobre os continentes, é muito mais fácil que no caso de pontos representando a posição de um navio em mar aberto.

#### 4.2.2. O problema da latitude

- **Latitude pelo método polar**

Este método não usa trigonometria e baseia-se no facto que:

a latitude de um ponto P, é igual a altura do pólo celeste visível desde esse ponto conforme se pode comprovar facilmente (fig.4.3).

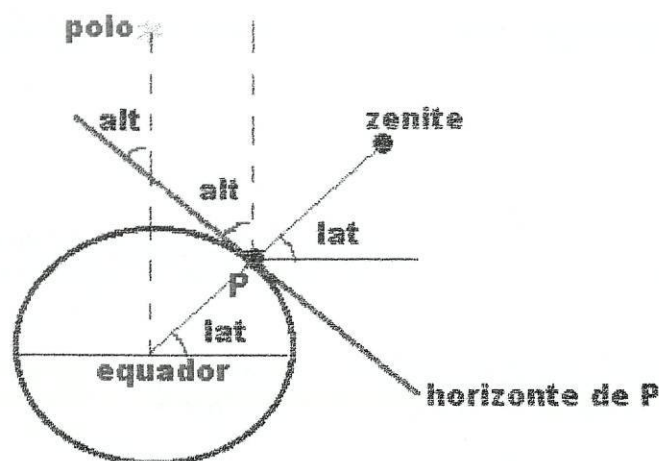


Fig.4.3 – Latitude versus altura do Polo

Com este método há a vantagem de ser facilmente mensurável a altura polar (basta usar qualquer instrumento capaz de medir ângulos, um quadrante por exemplo) e sendo fácil localizar o Pólo Norte celeste no Hemisfério Norte, o uso deste método torna-se bastante cómodo e simples

- A Estrela Polar praticamente coincide com ele (em verdade, hoje ela está afastada cerca de um grau da posição polar, na época de Hipparchos estava a cerca de 3 graus).

No Hemisfério Sul não havendo nenhuma estrela razoavelmente perto da posição polar, é mais conveniente usar a seguinte variante:

- escolher uma estrela próxima à posição do pólo celeste visível
- medir a altura dessa estrela em relação ao horizonte de P, em dois instantes separados por 12 horas
- a média dessas alturas é a altura do pólo visível.

A necessidade de esperar 12 horas pode tornar essa variante inviável em mar aberto.

O método da altura da Estrela Polar foi o usado pelos Portugueses no início da época dos Descobrimentos. Acontece que esta estrela não está exactamente no Pólo Celeste. Naquela época ela estava afastada  $4^\circ$ . Aliado a esse facto, a precariedade dos instrumentos da época e a oscilação dos navios, faziam com que não fosse raro cometerem erros de 3 a  $4^\circ$  na latitude

*Que erro em Km isso produzia?*

Outro método baseava-se na medida da altura do Sol no meridiano local. Terá sido esse o método usado pelos marinheiros de Pedro Álvares Cabral, para localizar a suposta ilha de Vera Cruz em 27 de Abril de 1500:

*... descemos à terra...e tomamos a altura do Sol ao meio dia e achamos 56 graus, e sombra era norte, pelo que, segundo as regras do astrolábio... julgamos ter o pólo sul 17 graus de altura...*

O exacto local da medida corresponde ao actual Ilhéu da Coroa Vermelha, e segundo o Prof. Joaquim F. Duarte a altura do Sol que deviam ter aí medido naquela data seria  $14,7^\circ$ . Isso dá um erro grosseiro, mas que por um acaso acabou por ser cancelado. Com efeito o professor calculou  $16,4^\circ$  Sul a latitude desse ilhéu, em vez dos  $17^\circ$  do matemático de Cabral.

*Quantos Km representa o erro cometido?*

Um método alternativo baseado na medição da altura do Sol em dois instantes diferentes, foi proposto por Pedro Nunes<sup>1</sup> que para o efeito, concebeu um instrumento que permitia medir directamente a altura do Sol num círculo graduado.

<sup>1</sup> Ver Anexo I no final

### 4.2.3. O problema da longitude

Para este problema foi muito mais difícil achar um método, capaz de dar resultados exactos no caso de navios em mar alto. Muitos factores dificultavam o problema, a oscilação do navio, a impossibilidade de ancorar para fazer medidas, etc. A leitura do edital do famoso Longitude Act formulado em 1714 pelo governo inglês, dá uma boa ideia da problemática:

- oferecia prémio equivalente a 12 milhões de dólares actuais por um método capaz de achar a longitude com erro até meio grau
- prémio de 9 milhões para método com erro até 2 / 3 de grau
- prémio de 6 milhões para método com erro até um grau

(Para se ter uma ideia mais concreta dessas exigências note-se que um grau de longitude no Equador, equivale a cerca de 110 Km.)

A luta pela obtenção desses prémios ocupou boa parte daquele século, com três métodos a disputarem o cobiçado prémio:

- o método de Galileu que explorava o "relógio celeste" formado pelas luas de Júpiter

Por observação, Galileu verificou que ocorriam eclipses nas luas de Júpiter cerca de 1000 vezes por ano, ou seja quase 3 vezes por dia. Seja o observador M que observa um eclipse às 2h da madrugada, e que dispõe de uma tabela que o informa de que esse eclipse é observado em Londres às 23h 30m do dia anterior. Ele sabe que em termos horários, a sua diferença em relação a Londres é +2h 30 m, logo a sua longitude é 37°,5 W (Oeste). Resta o problema da determinação do tempo local que poderia fazer-se astronomicamente.

- o método que dependia da construção de um relógio, capaz de manter a hora mesmo com as oscilações e intempéries de uma viagem oceânica

A ideia do método é bastante simples:

O navegador leva um relógio que indica a hora  $H_G$  no meridiano de Greenwich, usando o Sol como estrela E resolve o triângulo posicional (ver 4.5) obtendo a hora local  $H_L$  na posição do navio .

Sabendo que em 24 horas a Terra roda 360° de longitude, a diferença  $H_G - H_L$  multiplicada por 15° dá a longitude do navio

- o método da distância lunar

A solução astronómica para o cálculo da longitude, baseia-se nas posições relativas da Lua e do Sol ou da Lua e de outra estrela, e na posição destes astros em relação à Terra ou seja, através da medição dos três ângulos representados na fig.4.4 a *altura da estrela*, a *altura da Lua* e a *distância angular entre a estrela e a Lua*. Estas medições podem fazer-se com um sextante.

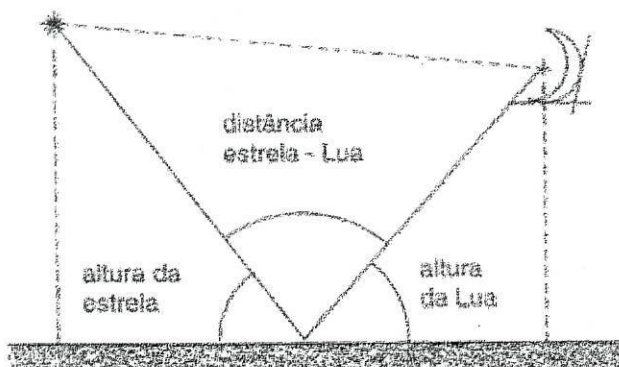


Fig.4.4 - As três distâncias angulares fundamentais medidas para determinar a longitude pelo método lunar

Admitamos os seguintes valores medidos:

Altura da estrela (o Sol por exemplo) – 25,2°

Altura da Lua – 17,6°

Daqui resulta que:

Distância angular Sol – Lua =  $180^\circ - (25,2^\circ + 17,6^\circ) = 137,2^\circ$

Consultando uma tabela de efemérides, lê-se a que horas esta distância Sol – Lua acontece em Greenwich. Admitamos por exemplo às 14 h 30 m do mesmo dia .

Se a hora local do observador for por exemplo 17 h 5m então a longitude do local do observador  $\theta_L$  será:

$$\theta_L = (17,083 - 14,5) \times 15^\circ = 38,75^\circ$$

O acontecimento é visto mais tarde que em Greenwich logo o observador está a 38,75° W.

Na época dos Descobrimentos, os Portugueses usavam a posição da Lua entre as estrelas para achar a longitude. Como essa gira em torno da Terra a cada 27 dias, é vista em posições diferentes do céu conforme variar a longitude do observador terrestre. Essas diferenças são muito pequenas e difíceis de constatar num navio. Na época, não existiam almanaques lunares fiáveis. Mesmo com o famoso almanaque de Regiomontanus (1474) os erros na determinação da longitude podiam chegar a 10°. Quantos Km isso significa ?

#### 4.2.4. Aplicações da latitude e da longitude

A necessidade do conhecimento, quer da latitude quer da longitude torna-se bastante útil e necessário na navegação, seja aérea seja marítima pois permite calcular e comparar as distâncias, segundo rotas mais adequadas entre diferentes locais diminuindo o custo das viagens e a sua duração.

Vejamos como se calculam as distâncias usando como rota:

- O paralelo

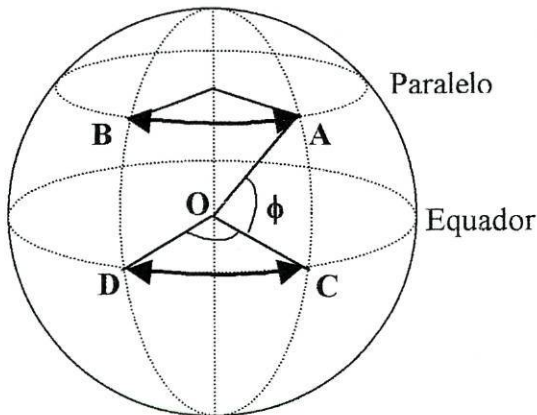


Fig.4.5 – Distância pelo paralelo

Neste caso temos os locais A e B situados no mesmo paralelo, ambos com latitude  $\phi$  N.

A distância medida segundo o paralelo ou seja o arco AB pode ser calculada da seguinte maneira:

$$AC = BD = \phi$$

Sejam as longitudes de A ( $\lambda_A$ ) e B ( $\lambda_B$ ).

Na figura vemos que

$$CD = \angle COD = \lambda_A - \lambda_B$$

Como

$$AB = CD \cos \phi \quad \boxed{\text{Porquê?}}$$

Temos que a distância entre dois pontos sobre o mesmo paralelo é dada pelo produto da diferença das longitudes pelo coseno da latitude.

$$AB = (\lambda_A - \lambda_B) \times \cos \phi$$

- O círculo máximo

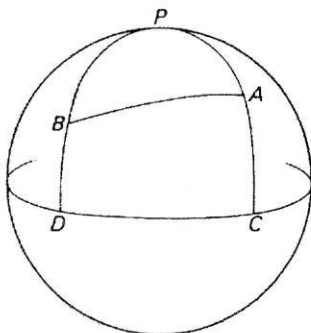


Fig.4.6 – Distância pelo círculo máximo

Neste caso a rota é segundo o círculo máximo que passa nos locais A e B. Vamos ter então definido um triângulo esférico BPA sendo as amplitudes de BD e AC as latitudes de A ( $\phi_A$ ) e B ( $\phi_B$ ) respectivamente. O  $\angle$  BPA corresponde à diferença das longitudes de A ( $\lambda_A$ ) e B ( $\lambda_B$ ).

Resolvendo o triângulo esférico aplicando a fórmula dos cosenos:

$$\cos AB = \cos AP \cos BP + \sin AP \sin BP \cos APB$$

$$BP = 90^\circ - \phi_A$$

$$AP = 90^\circ - \phi_B$$

$$\angle APB = \lambda_A - \lambda_B$$

donde obtemos

$$\cos AB = \sin \phi_B \sin \phi_A + \cos \phi_B \cos \phi_A \cos (\lambda_A - \lambda_B)$$

### Exemplo

Dois locais A e B de latitude e longitude ( $35^\circ 28' N$ ,  $44^\circ 32' W$ ) e ( $35^\circ 28'$ ,  $13^\circ 30' W$ ) respectivamente. Calcular a distância entre A e B:

- segundo o paralelo

$$\lambda_A - \lambda_B = 44^\circ 32' - 13^\circ 30' = 31^\circ 2'$$

Considerando a Terra esférica com 6.370 km de raio vamos ter para a circunferência do paralelo

$$2\pi \times 6.370 \times \cos 35^\circ 28'$$

Donde tiramos o comprimento de AB

$$\text{Arc AB} = \frac{2\pi \times 6.370 \times 31^\circ 2' \times \cos 35^\circ 28'}{360} = 2.805 \text{ Km}$$

- segundo o círculo máximo

$$\phi_A = \phi_B = 35^\circ 28'$$

$$\lambda_A - \lambda_B = 44^\circ 32' - 13^\circ 30' = 31^\circ 2'$$

$$\cos AB = \sin^2 35^\circ 28' + \cos^2 35^\circ 28' \cos 31^\circ 2' = 0,91$$

$$AB = \arccos 0,91 \cong 25,2^\circ$$

$$\text{Arc AB} = \frac{2\pi \times 6.370 \times 25,2}{360} \cong 2.797 \text{ Km}$$

Constatamos que o percurso pelo círculo máximo é mais curto que pelo paralelo

**Nota:** Prova-se que numa superfície esférica a *distância mais curta* entre dois pontos corresponde ao *arco de círculo máximo* que passa nesses pontos (equivalente ao segmento de recta no plano) pelo que as rotas aéreas e marítimas sempre que possível seguem círculos máximos, para encurtar distâncias.

### 4.3. A Esfera Celeste

Observando o céu numa noite estrelada, não podemos evitar a impressão de que estamos no meio de uma grande esfera incrustada de estrelas. Isso inspirou nos antigos gregos a ideia do céu como uma **Esfera Celeste**.

Com o passar das horas os astros movem-se no céu, nascendo a Este e pondo-se a Oeste. Isso causa a impressão de que a esfera celeste vai girando de Este para Oeste em torno de um eixo imaginário, que intercepta a esfera em dois pontos fixos, os **Pólos Celestes**. Na verdade esse movimento, chamado **movimento diurno dos astros**, é um reflexo do movimento de rotação da Terra que se faz de Oeste para Este. O eixo de rotação da esfera celeste é o prolongamento do eixo de rotação da Terra, e os pólos celestes são as projecções no céu, dos pólos terrestres.

Os antigos gregos definiram alguns planos e pontos na esfera celeste, que são úteis para a determinação da posição dos astros no céu. São eles:

- **Horizonte:** plano tangente à Terra no lugar em que se encontra o observador. Como o raio da Terra é desprezável face ao raio da esfera celeste, considera-se que o Horizonte é um círculo máximo da esfera celeste ou seja, passa pelo seu centro.
- **Zénite:** ponto no qual a vertical do lugar (perpendicular ao horizonte) intercepta a esfera celeste, (acima da cabeça do observador).
- **Nadir:** ponto diametralmente oposto ao Zénite.
- **Equador Celeste:** círculo máximo em que o prolongamento do Equador da Terra intercepta a esfera celeste.
- **Polo Norte Celeste:** ponto em que o prolongamento do eixo de rotação da Terra intercepta a esfera celeste, no hemisfério norte.
- **Polo Sul Celeste:** ponto em que o prolongamento do eixo de rotação da Terra intercepta a esfera celeste, no hemisfério sul.
- **Círculo vertical:** qualquer semi-círculo máximo da esfera celeste contendo a vertical do lugar. Os círculos verticais começam no Zénite e terminam no Nadir.
- **Ponto Geográfico Norte:** ponto em que o círculo vertical que passa pelo Polo Norte Celeste intercepta o Horizonte. É também chamado **Ponto Cardeal Norte**.
- **Ponto Geográfico Sul:** também chamado **Ponto Cardeal Sul**, é o ponto em que o círculo vertical que passa pelo Polo Celeste Sul intercepta o Horizonte. A linha sobre o Horizonte que liga os pontos cardeais Norte e Sul chama-se linha Norte-

Sul, ou **meridiana**. A linha Leste-Oeste é obtida, traçando-se sobre o Horizonte uma perpendicular à meridiana.

- **Círculo de altura:** qualquer círculo da esfera celeste paralelo ao Horizonte. É também chamado **almucântarado**, ou **paralelo de altura**.
- **Círculo horário:** qualquer semi-círculo máximo da esfera celeste que contém os dois pólos celestes. É também chamado **meridiano**. O meridiano que passa pelo Zênite chama-se **Meridiano Local**.
- **Paralelo:** qualquer círculo da esfera celeste paralelo ao Equador celeste. É também chamado **círculo diurno**.

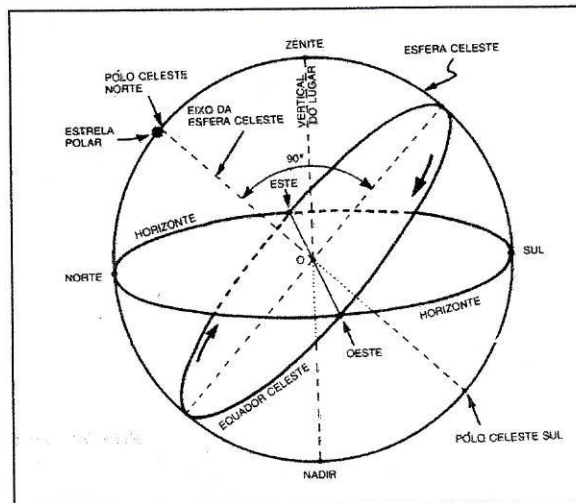
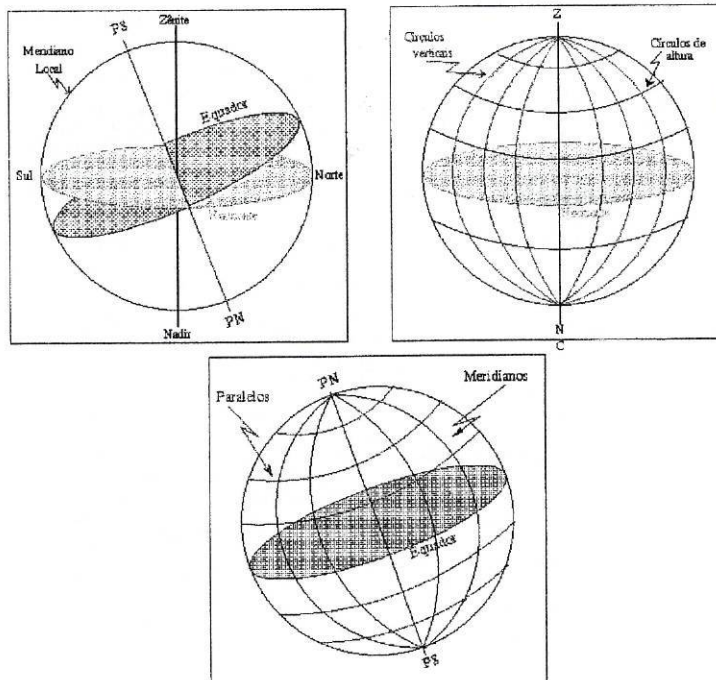


Fig.4.7 - A esfera celeste com os principais pontos e círculos



Fig<sup>as</sup> 4.8 - Representação dos diferentes tipos de círculos na esfera celeste

E qual é a velocidade angular aparente diária do Sol? Como um dia é definido como uma volta completa do Sol isto é, o Sol percorre  $360^\circ$  em 24 horas, a velocidade aparente é de

$$v_{\text{aparente}} = 360^\circ / 24 \text{ h} = 15^\circ / \text{h}.$$

### 4.3.1 Sistemas de coordenadas

Uma vez estabelecida a esfera celeste como representação do Universo visível, torna-se simples posicionar um astro no céu em qualquer instante do seu movimento (na fig.4.9 mostra-se o do Sol) através dum sistema de coordenadas. Nesse sistema, vamos utilizar apenas coordenadas angulares sem nos preocuparmos com as distâncias dos astros. A posição do astro será determinada através de dois ângulos de posição, um medido sobre um plano fundamental e o outro medido perpendicularmente a ele.

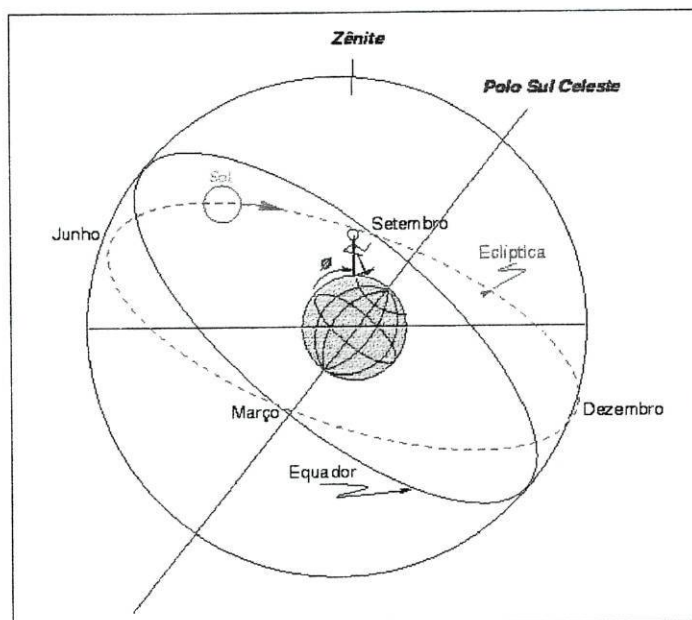


Fig.4.9 - Movimento aparente do Sol na eclíptica (Latitude Sul)

### 4.3.1.1. O Sistema Horizontal

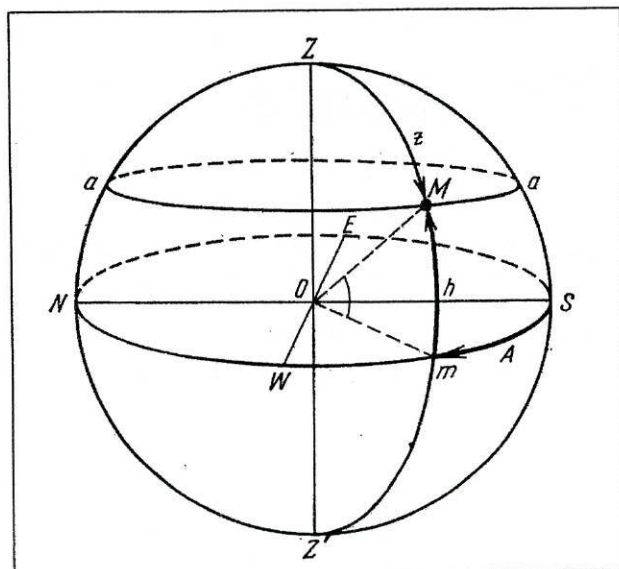


Fig.4.10 – Coordenadas horizontais

Esse sistema utiliza como plano fundamental o Horizonte celeste (NESW). As coordenadas horizontais são **azimute** e **altura**.

- **Azimute (A):** é o ângulo medido sobre o horizonte, no sentido horário (NESW) com origem no Sul e extremidade no círculo vertical do astro. O azimute varia entre  $0^\circ$  e  $360^\circ$ .

$$0^\circ \leq A \leq 360^\circ$$

- **Altura (h):** é o ângulo medido sobre o círculo vertical do astro, com origem no horizonte e extremidade no astro. A altura varia entre  $-90^\circ$  e  $+90^\circ$ . O complementar da altura chama-se **distância zenital (z)**. Assim, a distância zenital é o ângulo medido sobre o círculo vertical do astro, com origem no zénite e extremidade no astro. A distância zenital varia entre  $0^\circ$  e  $180^\circ$ :

$$(h + z = 90^\circ)$$

$$-90^\circ \leq h \leq 90^\circ$$

$$0^\circ \leq z \leq 180^\circ$$

O sistema horizontal é um sistema *local*, no sentido de que é fixo na Terra. As coordenadas azimute e altura (ou azimute e distância zenital) dependem do lugar e do instante da observação, e não são características do astro.

### 4.3.1.2. O sistema Equatorial Celeste

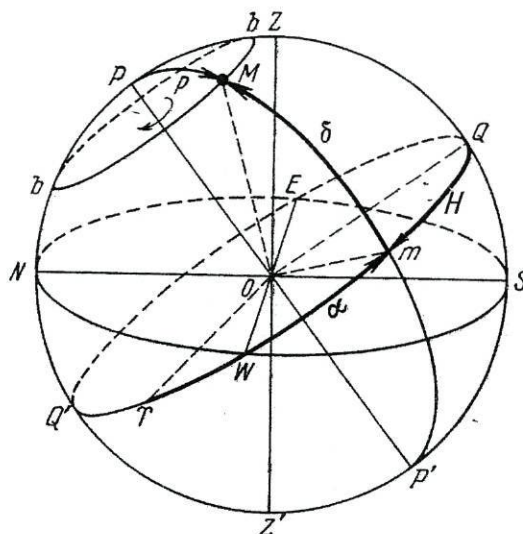


Fig.4.11 - Coordenadas equatoriais

Esse sistema utiliza como plano fundamental o Equador celeste. As coordenadas são a **ascensão recta** e a **declinação**.

- **ascensão recta ( $\alpha$  ou AR):** ângulo medido sobre o Equador, com origem no meridiano que passa pelo ponto Vernal  $\gamma$  e extremidade no meridiano do astro. A ascensão recta varia entre 0h e 24h (ou entre  $0^\circ$  e  $360^\circ$ ) aumentando para leste.

$$0 \leq \alpha \leq 24 \text{ h}$$

- **O Ponto Vernal**, é um ponto do Equador ocupado pelo Sol no equinócio da Primavera do hemisfério norte (mais ou menos em 22 de Março de cada ano).
- **declinação ( $\delta$ ):** ângulo medido sobre o meridiano do astro, com origem no Equador e extremidade no astro. A declinação varia entre  $-90^\circ$  e  $+90^\circ$ . O complemento da declinação chama-se distância polar ( $\Delta$ ).

$$(\delta + \Delta = 90^\circ)$$

$$-90^\circ \leq \delta \leq 90^\circ$$

$$0^\circ \leq \Delta \leq 180^\circ$$

O sistema equatorial celeste é fixo na esfera celeste e portanto em primeira aproximação, as suas coordenadas *não dependem* do lugar e instante de observação. A ascensão recta e a declinação de um astro permanecem praticamente constantes por longos períodos de tempo.

#### 4.3.1.3. Sistema Equatorial Horário

Nesse sistema o plano fundamental é o Equador, mas a coordenada medida ao longo do Equador não é a ascensão recta, mas uma coordenada variável chamada **ângulo horário**. A outra coordenada é a **declinação** (fig.4.11).

- **ângulo horário (H)**: ângulo medido sobre o Equador, com origem no meridiano local e extremidade no meridiano do astro. Varia entre -12h e +12h. O sinal negativo indica que o astro está a Este do meridiano, e o sinal positivo indica que ele está a Oeste do meridiano.

$$- 12 \text{ h} \leq t \leq 12 \text{ h}$$

#### 4.3.1.4. Sistema de coordenadas Eclípticas

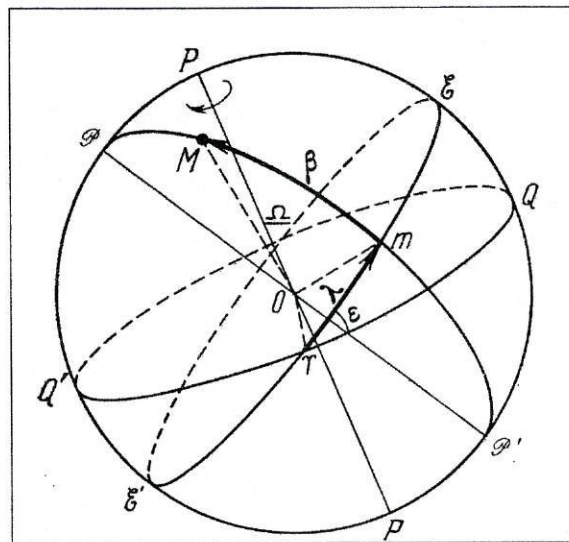


Fig.4.12 - Sistema de coordenadas eclípticas

Neste sistema o plano fundamental é o da Eclíptica e as coordenadas são a **Latitude e a Longitude elípticas**

- **Latitude elíptica(λ)**: ângulo medido no círculo de latitude do astro (círculo máximo que passa pelos polos da Eclíptica e pelo astro) desde a Eclíptica até ao astro. Varia entre +90° e -90°

$$90^\circ \geq \lambda \geq -90^\circ$$

- **Longitude elíptica(β)**: ângulo medido na Eclíptica a partir do ponto vernal até ao círculo de latitude do astro no sentido do deslocamento aparente do Sol, isto é de Oeste para Este. Varia entre 0° e 360°

$$360^\circ \geq \beta \geq 0^\circ$$

## 4.4. Movimento Diurno dos Astros

O movimento diurno dos astros, de Este para Oeste, é um reflexo do movimento de rotação da Terra de Oeste para Este. Ao longo do dia todos os astros descrevem no céu arcos paralelos ao Equador. A orientação desses arcos em relação ao horizonte depende da latitude do lugar (fig.4.13).

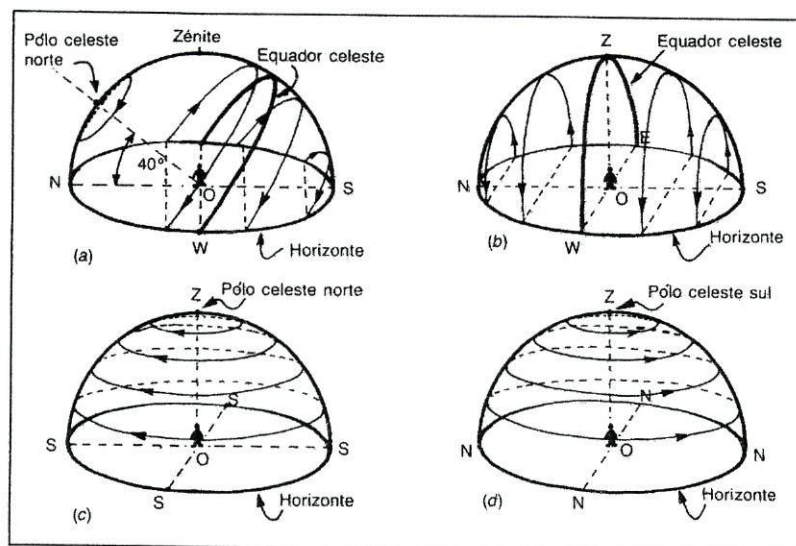


Fig.4.13-a) Local de Lat = 40° N b)-No Equador c) No Pólo Norte d) No Pólo Sul

- **1. Nos pólos ( $\phi = \pm 90$ ):** c) e d) na Fig.4.13

Todas as estrelas do mesmo hemisfério do observador, permanecem 24 h acima do horizonte (não têm nascer nem ocaso) e descrevem no céu círculos paralelos ao horizonte. As estrelas do hemisfério oposto nunca podem ser vistas.

- **2. No Equador ( $\phi = 0$ ):** b) na Fig.4.13

Todas as estrelas nascem e se põem, permanecendo 12h acima do horizonte e 12h abaixo dele. A trajetória das estrelas são arcos perpendiculares ao horizonte. Todas as estrelas do céu (dos dois hemisférios) podem ser vistas ao longo do ano.

- **3. Num lugar de latitude intermédia:** a) na Fig.4.13

Algumas estrelas têm nascer e ocaso, outras permanecem 24h acima do horizonte, outras permanecem 24h abaixo do horizonte. As estrelas visíveis descrevem no céu arcos com uma inclinação em relação ao horizonte, que depende da latitude do lugar.

#### 4.4.1. Passagem meridiana dum astro

Chama-se passagem meridiana ao instante em que o astro cruza o meridiano local. Durante o seu movimento diurno o astro realiza duas passagens meridianas, ou duas culminações: a culminação superior ou passagem meridiana superior ou ainda máxima altura (porque nesse instante a altura do astro atinge o maior valor) e a passagem meridiana inferior, ou culminação inferior. No instante da passagem meridiana superior, cumpre-se a seguinte relação entre  $z$ ,  $\delta$  e  $\phi$  ;

$$z = \pm (\delta - \phi)$$

onde o sinal (+) vale se a culminação é feita ao norte do zénite e o sinal (-) se a culminação é feita ao sul do zénite.

#### Exemplo

A distância zenital duma estrela na culminação superior (a Sul do zénite) e na culminação inferior são  $24^\circ$  e  $74^\circ$  respectivamente. Calcular a latitude do observador e a declinação da estrela.

Na fig.4.14 temos representada esquematicamente a situação descrita, donde tiramos:

$$PF = PZ + ZF$$

$$90 - \delta = 90 - \phi + ZF$$

$$(1) \quad \phi - \delta = 24^\circ$$

$$PG = ZG - PZ$$

$$90 - \delta = ZG - 90 + \phi$$

$$(2) \quad \phi + \delta = 180^\circ - 74^\circ = 106^\circ$$

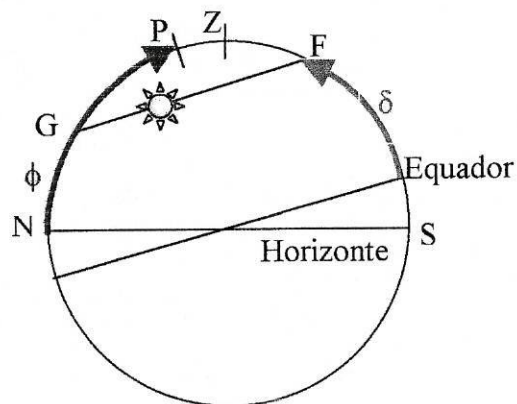


Fig.4.14

Somando (1) e (2)

$$2\phi = 130^\circ \text{ ou } \phi = 65^\circ \text{ N}$$

Substituindo em (1)

$$\delta = 65^\circ - 24^\circ = 41^\circ \text{ N}$$

#### 4.4.2. Estrelas Circumpolares

Estrelas circumpolares são aquelas que não têm nascer nem ocaso, descrevendo o círculo diurno completo acima do horizonte.(fig.4.15). Portanto, as estrelas circumpolares fazem as duas passagens meridianas acima do horizonte. Para uma certa estrela com declinação  $\delta$ , ser circumpolar em um lugar de latitude  $\phi$ , deve cumprir a relação:

$$|\delta| \geq 90^\circ - |\phi|$$

com  $\delta$  e  $\phi$  do mesmo sinal.

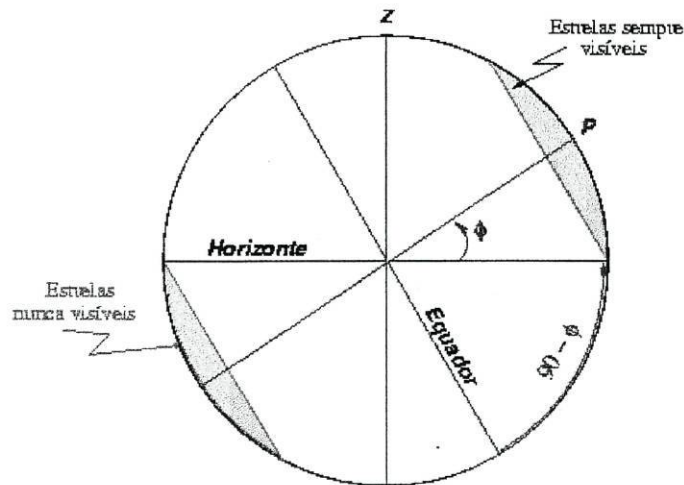


Fig.4.15 – Estrelas circumpolares

#### Exemplo

No Funchal com  $32,6^\circ$  N e em Bragança com  $41,8^\circ$  N são visíveis estrelas como :

$$\text{Sirio} : \delta = 16,7^\circ$$

$$\text{Vega} : \delta = 38,8^\circ$$

$$\text{Alkaid} : \delta = 49,3^\circ$$

Qual ou quais serão sempre visíveis?

No Funchal

$$90^\circ - 32,6^\circ = 57,4^\circ$$

Em Bragança

$$90^\circ - 41,8^\circ = 48,2^\circ$$

Como só Alkaid tem declinação superior a  $48,2^\circ$  resulta que, só esta estrela é sempre visível mas apenas em Bragança.

## 4.5. O Triângulo de Posição

Denomina-se triângulo de posição (fig.4.16) o triângulo situado na esfera celeste cujos vértices são o pólo elevado  $P_N$ , o astro  $E$  e o zénite  $Z$ .

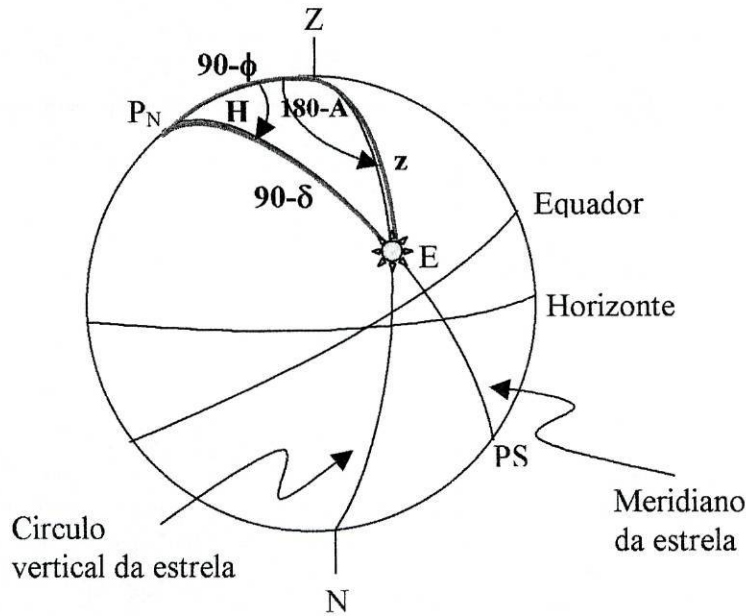


Fig.4.16 – Triângulo de posição para a estrela E

Os lados e ângulos do triângulo de posição são:

- arco entre o zénite e o pólo

$$P_NZ = 90^\circ - |\phi|$$

- arco entre o zénite e astro

$$EZ = z$$

- arco entre o pólo e o astro

$$P_NE = 90^\circ - |\delta|$$

- ângulo com vértice no zénite

$$P_NZE = 180 - A$$

- ângulo com vértice no pólo

$$ZP_NE = H$$

- ângulo com vértice na estrela

$$ZEP_N$$

O triângulo de posição é usado para obter as coordenadas do astro quando é conhecida a posição geográfica do lugar, ou determinar as coordenadas geográficas do lugar quando são conhecidas as coordenadas do astro.

## Exemplo 1

### Cálculo da latitude

Observando uma estrela E podemos:

- medir o ângulo ZEP ; por hipótese  $\angle ZEP = 10^\circ$
- medir a altura h ; por hipótese  $h = 35^\circ$
- Consultando uma tabela de efemérides, podemos saber  $\delta$ ; por hipótese  $\delta = 57^\circ$

Obtemos

$$z = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$$

E usando a relação dos cossenos obtemos

$$\cos(90 - \phi) = \cos 55^\circ \cos 33^\circ + \sin 55^\circ \sin 33^\circ \cos 10^\circ$$

$$\cos(90 - \phi) = 0,92$$

$$90 - \phi = 23,1^\circ$$

$$\phi = 66,9^\circ \quad \text{Latitude do lugar}$$

## Exemplo 2

### Cálculo da declinação

Sabendo

- a latitude do lugar ( $\phi$ ); por hipótese  $\phi = 41^\circ$

Medindo

- a distância zenital da estrela E (z); por hipótese  $z = 15^\circ$
- o ângulo EZP; por hipótese  $\angle EZP = 21^\circ$

Usando a relação dos cossenos obtemos

$$\cos(90 - \delta) = \cos 15^\circ \cos(90 - 41) + \sin 15^\circ \sin(90 - 41) \cos 21^\circ$$

$$\cos(90 - \delta) = 0,82$$

donde tiramos

$$\delta = 54,7^\circ \quad \text{Declinação da estrela}$$

Usando a relação dos senos obtemos

$$\sin H \sin 35,3^\circ = \sin 21^\circ \sin 15^\circ$$

$$\sin H = 0,16$$

$$H = 9,24^\circ$$

$$H = 0,616 \text{ horas}$$

donde tiramos

$$H = 36^m 57^s \quad \text{Ângulo horário da estrela}$$

## 4.6. Transformações vectoriais de coordenadas

Para se obterem as relações entre os sistemas de coordenadas sem usar o triângulo de posição, podem-se transformar em coordenadas rectangulares e identificar nesta forma que tipo de transformação vectorial permite passar de um para outro.

### 4.6.1. Passagem de coordenadas horizontais para equatoriais

Como se pode observar na fig.4.17, o referencial XYZ do sistema horizontal transforma-se no referencial X'Y'Z' do sistema equatorial rodando no sentido directo em torno do eixo Y de  $(90^\circ - \phi)$

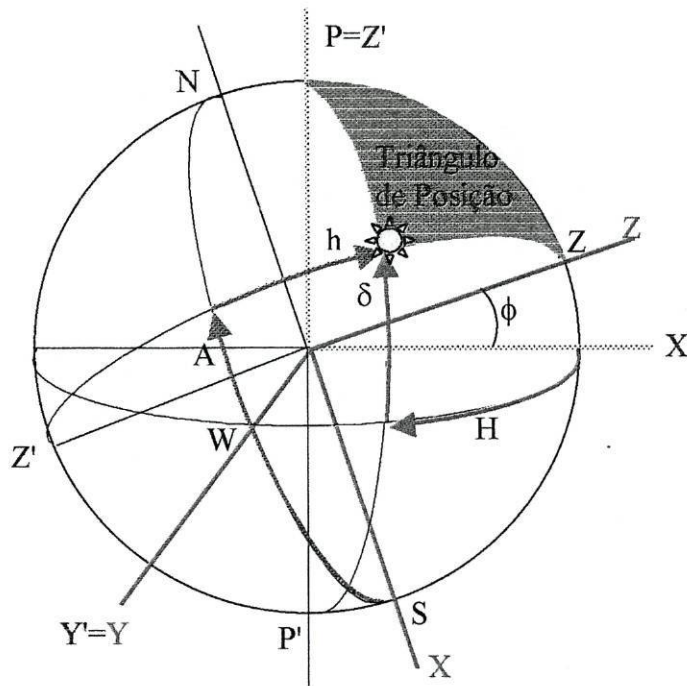


Fig.4.17 - Referenciais horizontal e equatorial

**Nota: Ambos os sistemas são retrógrados**

Em coordenadas rectangulares vamos ter

$$\begin{cases} x = \cos A \cos h \\ y = \sin A \cos h \\ z = \sin h \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} x' = \cos H \cos \delta \\ y' = \sin H \cos \delta \\ z' = \sin \delta \end{cases}$$

Em notação matricial

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos A \cos h \\ \sin A \cos h \\ \sin h \end{bmatrix} \quad e \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos H \cos \delta \\ \sin H \cos \delta \\ \sin \delta \end{bmatrix}$$

Aplicando uma rotação de  $(90^\circ - \phi)$  teremos:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(90 - \phi) & 0 & \sin(90 - \phi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(90 - \phi) & 0 & \cos(90 - \phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

donde resulta

$$\begin{cases} x' = \sin\phi x + \cos\phi z \\ y' = y \\ z' = -\cos\phi x + \sin\phi z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos H \cos \delta = \sin\phi \cos A \cos H + \cos\phi \operatorname{sen} h \\ \operatorname{sen} H \cos \delta = \operatorname{sen} A \operatorname{cosh} \\ \operatorname{sen} \delta = -\cos\phi \cos A \cos H + \sin\phi \operatorname{sen} h \end{cases} \quad (3)$$

a partir daqui resolvendo o sistema para  $\delta$  e  $H$  obtemos

$$\begin{cases} \operatorname{sen} \delta = \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} h - \cos \phi \cos h \cos A \\ \cos H = \operatorname{sen} h \operatorname{sec} \delta \operatorname{c} \operatorname{sec} \phi - \operatorname{tg} \delta \operatorname{tg} \phi \end{cases} \quad (4)$$

Resolve o sistema (3) e obtém (4)

No caso inverso de  $X'Y'Z'$  para  $XYZ$  teremos uma rotação de  $-(90-\phi)$  em torno do mesmo eixo  $Y$ .

**Exemplo:**

**Cálculo de  $\delta$  e  $H$  a partir de  $A$  e  $h$**

Num local de latitude  $25^\circ$  N na observação duma estrela mediu-se

- altura  $h = 42^\circ$
- azimute  $A = 110^\circ$

Calcular a declinação e o ângulo horário.

Aplicando (4)

$$\operatorname{sen} \delta = \operatorname{sen} 25^\circ \operatorname{sen} 42^\circ - \cos 25^\circ \cos 42^\circ \cos 110^\circ$$

$$\cos H = \frac{\operatorname{sen} 42^\circ}{\cos 30^\circ \cos 25^\circ} - \operatorname{tg} 30^\circ \operatorname{tg} 25^\circ$$

$$\operatorname{sen} \delta = 0,5$$

$$\cos H = 0,58 \Rightarrow H = 54,55^\circ \Rightarrow H = 3,64 \text{ horas}$$

donde tiramos

$$\delta = 30^\circ$$

*Declinação da estrela*

$$H = 3^{\text{h}} 38^{\text{m}} 12^{\text{s}}$$

*Ângulo horário da estrela*

#### 4.6.2. Passagem de coordenadas equatoriais para Eclípticas

Neste caso (fig.4.18) o referencial XYZ do sistema equatorial transforma-se em X'Y'Z' do sistema eclíptico por rotação em torno do eixo X de  $\epsilon$  (obliquidade da Eclíptica).

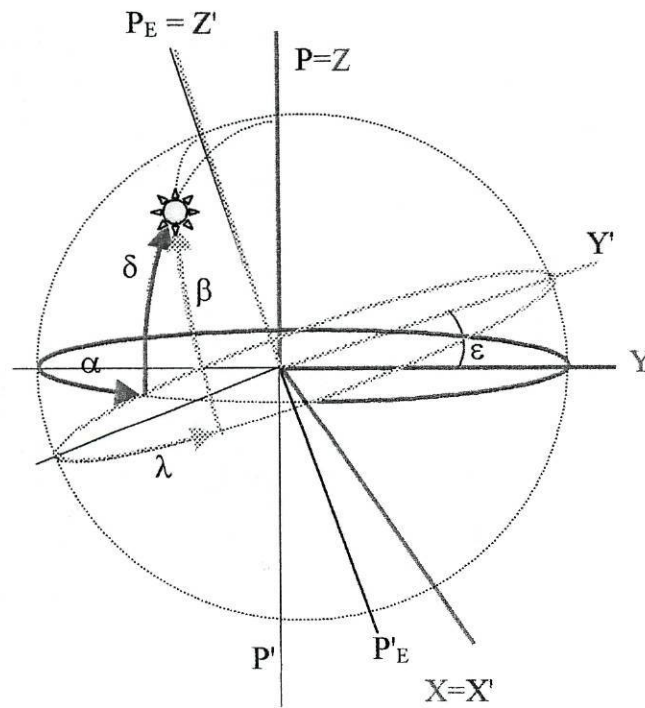


Fig.4.18 - Referenciais Equatorial e Eclíptico

Isto é:

$(\alpha, \delta) \rightarrow (\lambda, \beta)$  por rotação de amplitude  $+\epsilon$

$(\alpha, \delta) \leftarrow (\lambda, \beta)$  por rotação de amplitude  $-\epsilon$

Teremos então a seguinte relação matricial:

$$\begin{bmatrix} \cos\beta \cos\lambda \\ \cos\beta \sin\lambda \\ \sin\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\epsilon & 0 & \text{sen}\epsilon \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}\epsilon & 0 & \cos\epsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\delta \cos\alpha \\ \cos\delta \text{sen}\alpha \\ \text{sen}\delta \end{bmatrix}$$

ou seja

$$\begin{cases} \cos\beta \cos\lambda = \cos\epsilon \cos\delta \cos\alpha + \text{sen}\epsilon \text{sen}\alpha \\ \cos\beta \sin\lambda = \cos\delta \text{sen}\alpha \\ \text{sen}\beta = -\text{sen}\epsilon \cos\delta \cos\alpha + \cos\epsilon \text{sen}\alpha \end{cases}$$

*Determina a latitude e a longitude eclípticas duma estrela de  $\alpha=12^h 31^m 11s$  e  $\delta=-57^\circ 7'$*

## 4.7. Cálculo vectorial na posição dos astros

### 4.7.1. Cosenos directores

Consideremos(fig.4.19) um astro identificado pelas coordenadas equatoriais

- Ascensão Recta  $\alpha$
- Declinação  $\delta$

As coordenadas rectangulares serão dadas por:

$$x = r \cdot \cos \delta \cos \alpha$$

$$y = r \cdot \cos \delta \sin \alpha$$

$$z = r \cdot \sin \delta$$

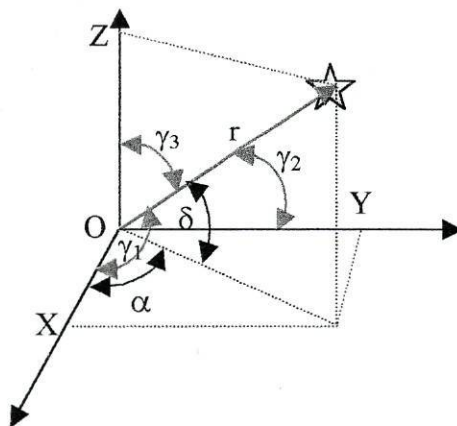


Fig.4.19 – Cosenos directores dum astro

Se designarmos por  $\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$  os ângulos que formam o vector de posição do astro  $r(x,y,z)$  com os eixos  $OX,OY,OZ$  verifica-se

$$\begin{cases} \cos \gamma_1 = a = \frac{x}{r} = \cos \delta \cos \alpha \\ \cos \gamma_2 = b = \frac{y}{r} = \cos \delta \sin \alpha \\ \cos \gamma_3 = c = \frac{z}{r} = \sin \delta \end{cases}$$

sendo a, b, c os cosenos directores em que :

$$\cos^2 \gamma_1 + \cos^2 \gamma_2 + \cos^2 \gamma_3 = 1$$

Os cosenos directores, como iremos ver podem ser utilizados no cálculo da distância angular entre dois astros.

#### 4.7.2. Ângulo entre dois astros.

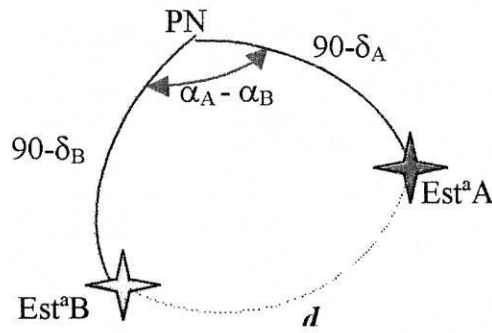


Fig 4.20 – Distância angular  $d$

A distância angular  $d$  entre dois astros A e B cuja ascensão recta  $\alpha$  e declinação  $\delta$  é conhecida, pode saber-se usando a expressão obtida no triângulo esférico (fig.4.20) em que um dos lados é a distância angular e os outros dois são as suas distâncias polares.

Usando a fórmula dos cosenos

$$\cos d = \text{sen}\delta_A \text{sen}\delta_B + \text{cos}\delta_A \text{cos}\delta_B \cos(\alpha_A - \alpha_B) \quad (5)$$

**Nota:** Expressão análoga obtém-se para coordenadas elípticas com a latitude e a longitude elípticas no lugar da ascensão recta e declinação

Também se pode calcular o ângulo (fig.4.21) a partir dos versores  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  (cujas coordenadas são os cosenos directores (a,b,c) de cada astro) e do produto escalar de vectores  $\vec{a}|\vec{b}$

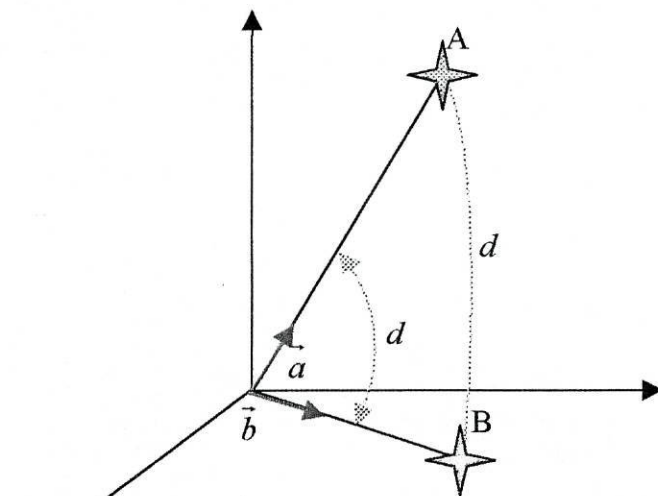


Fig.4.21 - Distância angular  $d$

Os cosenos directores de cada astro são:

$$a = x/r = \cos \delta \cos \alpha$$

$$b = y/r = \cos \delta \sin \alpha$$

$$c = z/r = \sin \delta$$

O produto escalar é

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos d$$

usando coordenadas  $(a, b, c)$  vamos ter

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_A a_B + b_A b_B + c_A c_B).$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \cos \delta_A \cos \alpha_A \cos \delta_B \cos \alpha_B + \cos \delta_A \sin \alpha_A \cos \delta_B \sin \alpha_B + \sin \delta_A \sin \delta_B$$

ou seja

$$\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos d = \cos \delta_A \cos \alpha_A \cos \delta_B \cos \alpha_B + \cos \delta_A \sin \alpha_A \cos \delta_B \sin \alpha_B + \sin \delta_A \sin \delta_B$$

sendo

$$\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\| = 1$$

resulta

$$\cos d = \cos \delta_A \cos \alpha_A \cos \delta_B \cos \alpha_B + \cos \delta_A \sin \alpha_A \cos \delta_B \sin \alpha_B + \sin \delta_A \sin \delta_B$$

$$\cos d = \sin \delta_A \sin \delta_B + \cos \delta_A \cos \delta_B \cos (\alpha_A - \alpha_B) \quad \boxed{\text{Porquê?}}$$

ou seja a fórmula dos cosenos (5).

### Exemplo

Qual o tamanho da Constelação Cruzeiro do Sul, medido pelo eixo maior da cruz?

O eixo maior da cruz é formado pelas estrelas Gacrux ( $\alpha=12^h 31^m 11^s$ ;  $\delta=-57^\circ 07'$ ) e Acrux ( $\alpha=12^h 36^m 37^s$ ;  $\delta=-63^\circ 06'$ )

O ângulo (designemo-lo por  $d$ ) formado por estas estrelas dá-nos o tamanho angular do eixo maior

$$\cos d = \cos \delta_A \cos \alpha_A \cos \delta_G \cos \alpha_G + \cos \delta_A \sin \alpha_A \cos \delta_G \sin \alpha_G + \sin \delta_A \sin \delta_G$$

$$\delta_G = -57^\circ 07' = -57,11^\circ$$

$$\alpha_G = 12^h 31^m 11^s = 186,65^\circ$$

$$\delta_A = -63^\circ 06' = -63,10^\circ$$

$$\alpha_A = 12^h 36^m 37^s = 187,80^\circ$$

Substituindo na expressão acima obtemos

$$\cos d \cong 0,99 \Rightarrow d \cong 6^\circ$$

## Questões sobre Geometria esférica

- Desenhar a esfera celeste para um observador de latitude  $55^\circ$  Sul, mostrando a posição de duas estrelas X (altura  $40^\circ$ , azimute  $130^\circ$  E do Sul) e Y (ângulo horário  $19^h$ , declinação  $40^\circ$  Sul). Estimar a partir do diagrama o ângulo horário e a declinação de X e a altura e o azimute de Y
- Calcular o azimute da estrela *Procyon* (declinação  $5^\circ$  N) quando a sua distância zenital é de  $80^\circ$  vista por um observador de latitude  $56^\circ$  N.
- Calcular o azimute do Sol quando nasce, e a altura ao meio dia solar, no Solstício de Verão para uma latitude de  $41^\circ$  N.
- Provar que o método dos cossenos directores conduzem à expressão inicial.
- Se a separação angular for pequena pode calcular-se a partir de:  
$$d = \sqrt{(\Delta\alpha \cos\delta)^2 + \Delta\delta^2}$$
 Sendo claro que as diferenças na A.R. e Declinação se expressam na mesma unidade.
- Se a diferença na A.R. se expressar em horas e a diferença na declinação em graus é útil para obter d em " de arco:  $d = 3600\sqrt{(15\Delta\alpha \cos\delta)^2 + \Delta\delta^2}$
- Calcular a distância entre Arturo (Alfa Bootes) e Spica (Alfa Virgen) . As coordenadas são:  $\alpha_1 = 14h 13m 22.8s$  e  $\delta_1 = 19^\circ 26' 31''$  para Arturo  $\alpha_2 = 13h 22m 33.3s$  e  $\delta_2 = -10^\circ 54' 03''$  para Spica.
- A posição da Lua e Saturno em 26-1-1978 às 12h é respectivamente:  
Lua;  $\delta = 8^\circ 21' 57''$   $\alpha = 10h 3m 10s$ , Saturno;  $\delta = 13^\circ 18'$   $\alpha = 10h 5.5m$   
Mostrar que Saturno estava  $5^\circ$  a N da Lua. **Solução:  $4^\circ 56'$**
- Calcular a mínima separação na conjunção de Marte e Júpiter ocorrida em 21 de Janeiro de 1998 à 1h de TU. As coordenadas são:  $\alpha_1 = 21h 56m 33s$  e  $\delta_1 = -13^\circ 39' 33''$  para Marte e  $\alpha_2 = 21h 57m 11s$  e  $\delta_2 = -13^\circ 24' 17''$  para Júpiter.  
**Solução:  $0^\circ 17' 50,6''$**
- Dois portos de mar situam-se no mesmo paralelo de latitude  $42^\circ 27'$ . A sua diferença de longitudes é de  $137^\circ 35'$ . Dois navios A e B fazem a ligação entre os dois portos, navegando A à velocidade de 20 milhas /h e seguindo a rota do paralelo de latitude; o navio B navega à mesma velocidade mas segue a rota do círculo máximo. Calcula a diferença de tempo com que os dois navios chegam ao porto de destino se partirem ao mesmo tempo.

## Capítulo 5

### Funções periódicas na Astronomia

Neste capítulo os movimentos aparentes do Sol são a principal fonte de fenómenos periódicos, cuja descrição matemática é explorada de forma a evidenciar funções como :

- função seno
- função coseno
- função tangente

assim como as suas características

- Período
- Amplitude

e que no âmbito do tema " Funções trigonométricas " se podem tratar de forma a exercitar e manipular este tipo de funções num contexto real de grande proximidade, já que os movimentos do Sol afectam-nos e condicionam-nos diariamente.

Isto pode ser conseguido por exemplo:

- Medindo sombras e azimutes ao longo dum dado período de tempo
- Modelando matematicamente os dados registados
- Interpretando os modelos e comparando-os com a realidade observada.

Uma das características dos movimentos planetários é a sua periodicidade.

Todos os planetas:

- Orbitam em volta do Sol (translação)
- Giram em torno do seu eixo (rotação)

com uma regularidade que se tem mantido estável ao longo da existência do Sistema Solar. Devido a esta regularidade, foi e é possível observar determinados fenómenos que se repetem diária e anualmente e através do registo e análise dessas observações estabelecer relações matemáticas que reflectem essa regularidade, como iremos ver e tratar.

## 5.1. Movimento de Translação

Devido ao movimento de translação da Terra em torno do Sol, este parece deslocar-se em relação às estrelas, descrevendo uma trajetória na esfera celeste chamada **Eclíptica** (fig.5.1). A Eclíptica é um círculo máximo que tem um inclinação de  $23^{\circ} 27'$  em relação ao Equador Celeste, sendo esta inclinação a causa das **Estações do ano**.

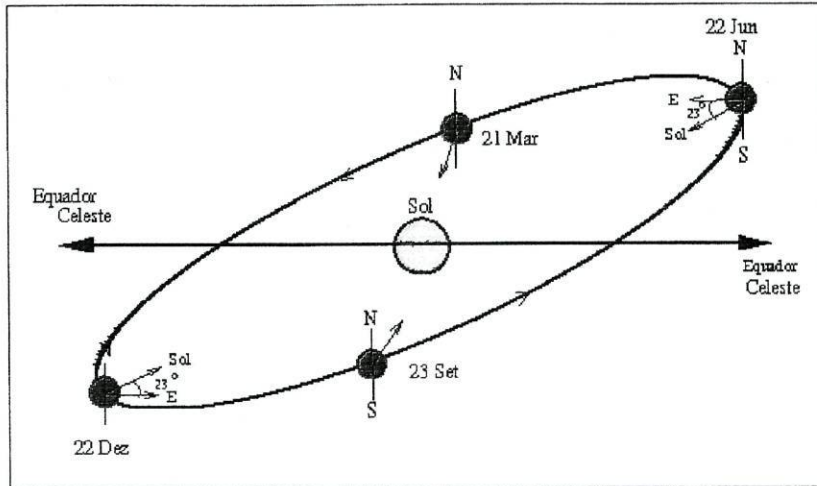


Fig.5.1 - Posições da Terra em relação ao Sol

Uma observação simples que permite "ver" o movimento do Sol durante o ano é através do **gnómon**, que não é mais do que uma haste vertical cravada no solo (fig.5.2).

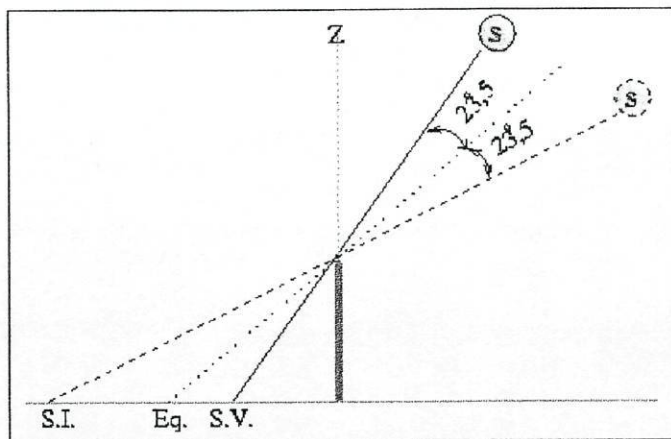


Fig.5.2 - Sombras à mesma hora nos Solstícios e equinócios

Durante o dia, a haste ao ser iluminada pelo Sol projecta uma sombra, cujo tamanho depende da hora do dia e da época do ano:

- A direcção da sombra ao meio-dia real local dá-nos a direcção Norte-Sul.
- Ao longo de um dia, a sombra é máxima no nascer e no ocaso do Sol, e é mínima ao meio-dia.

- Ao longo de um ano (à mesma hora do dia) a **sombra é máxima no Solstício de Inverno**, e **mínima no Solstício de Verão**. A bissetriz marca o tamanho da sombra nos equinócios (fig.5.2).

Foi observando a variação do tamanho da sombra do gnómon ao longo do ano que os antigos determinaram o comprimento do ano das estações, ou **ano tropical**.

### 5.1.1. Declinação

A posição do Sol na Eclíptica (fig.5.3) determina a **declinação**:

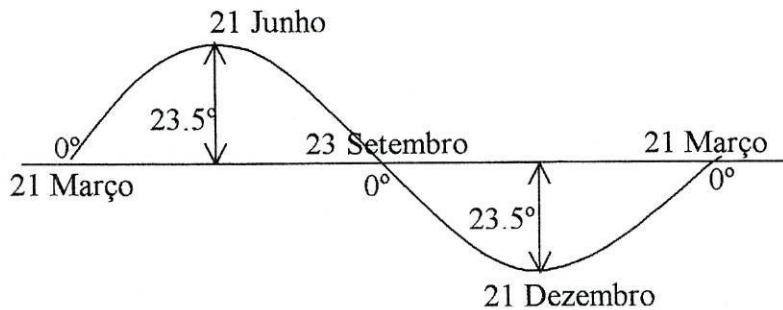


Fig.5.3 - Afastamento angular do Sol relativamente ao plano da órbita terrestre

- Varia entre  $-23,5^\circ$  e  $23,5^\circ$  nos Solstícios de Inverno e Verão respectivamente
- Vale  $0^\circ$  nos Equinócios.

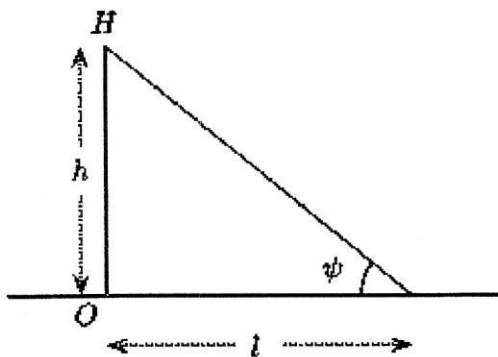


Fig.5.4 – Altura do Sol  $\psi$

Uma forma de a calcular, é através da medição da sombra de uma estaca  $l$  de altura  $h$  (fig.5.4) ao meio-dia solar, o que permite :

1. Calcular a altura máxima do Sol  $\psi$
2. Através da relação  $\psi = d + 90 - \phi$  obter **d** (ver 5.3.1)

Da trigonometria  $\operatorname{tg} \psi = \frac{h}{l} \Leftrightarrow \psi = \operatorname{arctg} \left( \frac{h}{l} \right)$  e  $d = \phi + \operatorname{arctg} \left( \frac{h}{l} \right) - 90$

Medição da **sombra** ao meio – dia solar em 21 Dezembro 2001, Bragança **latitude  $41.8^\circ$**

- gnómon usado  $h = 13,6 \text{ cm}$
- sombra medida  $l = 31,2 \text{ cm}$
- Altura do sol  $\operatorname{arctg} (h/l) = \operatorname{arctg} (13,6/31,2) = 23,55^\circ$

### Cálculo da *declinação*

$$d = 41,8 + 23,55 - 90 = -24,65^\circ$$

Sendo o valor exacto  $-23,5^\circ$  o *erro cometido* :

$$\frac{24,65 - 23,5}{23,5} = 0,048$$

inferior a 5%, o que dada a forma artesanal como foi obtida é perfeitamente aceitável.

Com base numa tabela de valores médios da declinação medidos que se apresenta, é possível ver a variação ao longo do ano através dum gráfico (fig.5.5) que sugere uma função trigonométrica.

Data	Dec	Data	Dec
1º Jan	-23,13	1º Julho	23,00
1º Fev	-17,30	1º Ago	18,00
1º Março	-8,00	1º Set	8,50
1º Abril	4,25	1º Out	-2,90
1º Maio	15,00	1º Nov	-14,00
1º Junho	22,00	1º Dez	-21,70
21º junho	23,44	21º Dez	-23,44

Tabela 5.1 - Valores médios da declinação

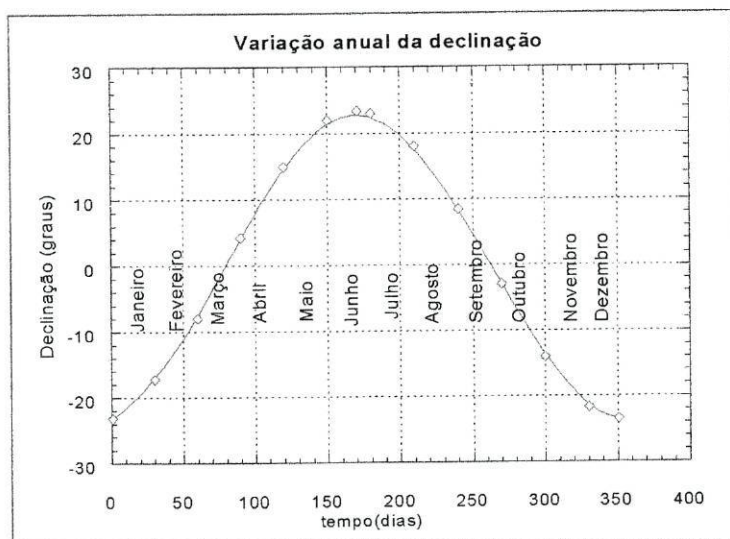


Fig.5.5 - Evolução da declinação ao longo do ano (variação diária)

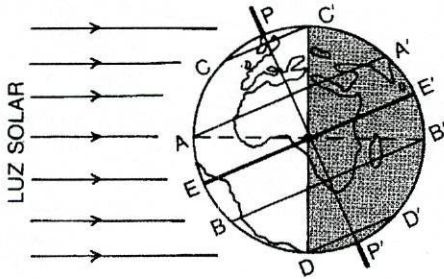
Sabendo que :

- Declinação máxima =  $23,5$  (21 Junho)
- Declinação mínima =  $-23,5$  (21 Dezembro)
- Declinação média =  $0$  (21 Março e 23 Setembro)
- Amplitude =  $47^\circ$

$$d = -23,5 \cos(2\pi/365 * t)$$

## 5.2. Duração do dia e da noite

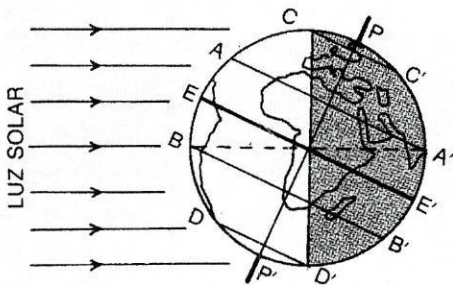
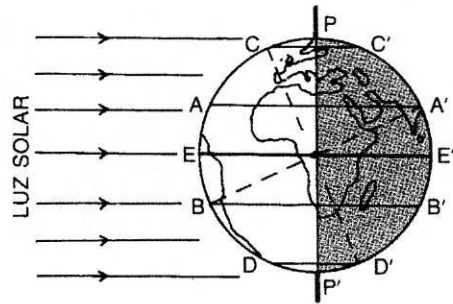
Um dos fenômenos observáveis diariamente, é o nascer e o pôr do Sol e é perfeitamente perceptível que a duração do dia varia ao longo do ano, dependendo dessa duração da posição do Sol na Eclíptica (declinação) e da posição do local (latitude) do observador.



No dia 21 de Junho temos a situação ilustrada na fig. do lado.

A duração do dia é maior que a noite no hem.º Norte e o contrário no Sul

Nos dias 22 Março e 21 Setembro o Sol incide perpendicularmente ao Equador EE' e ao eixo de rotação terrestre PP'(fig ao lado) o que determina que a parte iluminada é igual à parte não iluminada, donde resulta serem os dias iguais às noites em qualquer latitude.



No dia 21 de Dezembro (fig ao lado) temos o reverso de 21 de Junho. A duração do dia é menor que a noite no hemº Norte e o contrário no Sul

### 5.2.1. Cálculo da duração do dia

O cálculo da duração do dia (tempo que o Sol está acima do horizonte) envolve relações de trigonometria esférica no triângulo esférico PFZ (fig.5.6).

Usando a fórmula dos cossenos vista em 4.1.4.

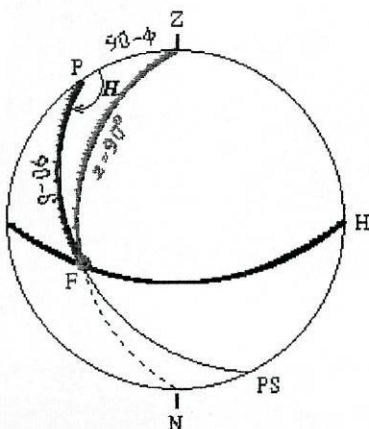


Fig.5.6 – Triângulo de posição para a astro F no horizonte

$$\cos H = \cos z \sec \phi \sec \delta - \operatorname{tg} \phi \operatorname{tg} \delta \quad (1)$$

Com base nesta relação é possível calcular a duração do dia, pois para um dado astro (neste caso o sol) o arco EMW que descreve acima do horizonte, tem uma amplitude angular que é 2 vezes a do ângulo horário no instante do nascimento ES ou do ocaso WS quando  $z = 90^\circ$  (fig.5.7)

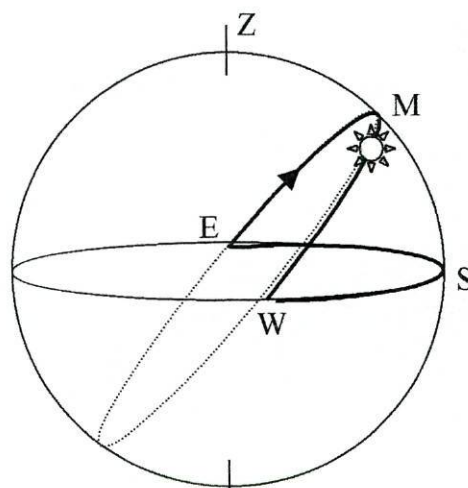


Fig.5.7 – Arco diurno do Sol

$$\text{Arc ESW} = \text{Arc EMW} = 2 \text{ Arc WS}$$

Como já foi visto em 4.6.1:

$$\cos H = \frac{\text{sen } h}{\cos \delta \cos \phi} - \text{tg} \delta \text{ tg} \phi$$

sendo  $h=0$  (ao nascer e ao pôr do Sol) resulta

$$\cos H = - \text{tg} \phi \text{ tg} \delta \text{ donde}$$

$$H = \text{arc cos}(- \text{tg} \phi \text{ tg} \delta)$$

Como 1 hora corresponde a  $15^\circ$  basta dividir  $2H$  por 15 para se obter o tempo em horas que dura o dia  $T_d$  temos

$$T_d = 2 \text{ arc cos}(- \text{tg} \phi \text{ tg} \delta) / 15$$

Desta relação podemos obter para qualquer dia do ano, a latitude onde o dia dura 24 horas

Resolvendo em ordem a  $\phi$

$$\text{tg} \phi = - \frac{\cos(15 \times 12)}{\text{tg} \delta} = - \text{ctg} \delta \quad (2)$$

### Exemplo

No Solstício de Verão  $\delta = 23,5^\circ$

Aplicando (2) obtemos

$$\phi = \text{arc tg} (- \text{ctg} 23,5^\circ) = 66,5^\circ \text{N}$$

Ou seja, nos locais situados no paralelo de  $66,5^\circ$  no hemisfério Norte o dia dura 24 horas acontecendo o chamado Sol da meia noite

*Para que latitudes e em que dias do ano acontece durar o dia 24 horas?*

### 5.2.2. Variação da duração do dia ao longo do ano

Usando um programa de computador Astrolab2, vemos a evolução ao longo do ano da duração do dia para dois locais distintos, um no hem° Norte (fig.5.8) outro no hem° Sul (fig.5.9)

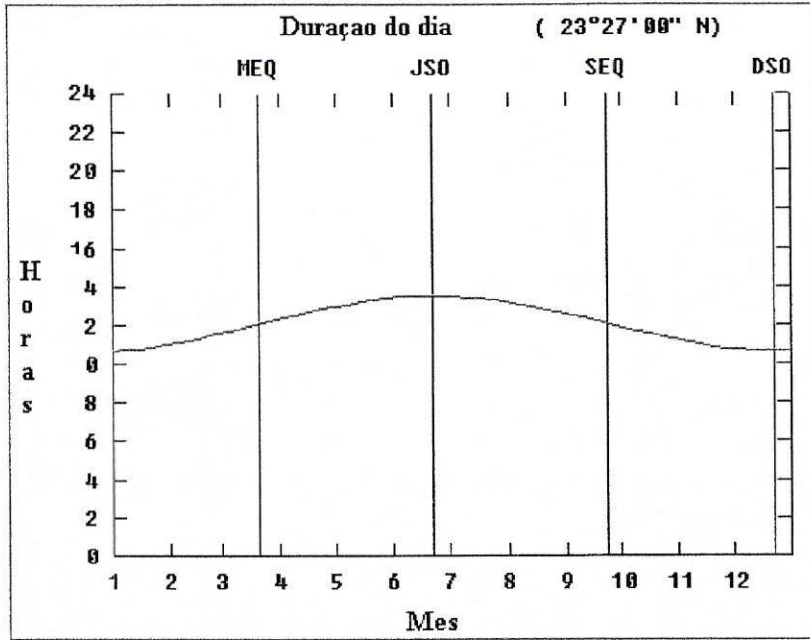


Fig.5.8 - Variação do dia para a latitude  $23^{\circ}27'N$

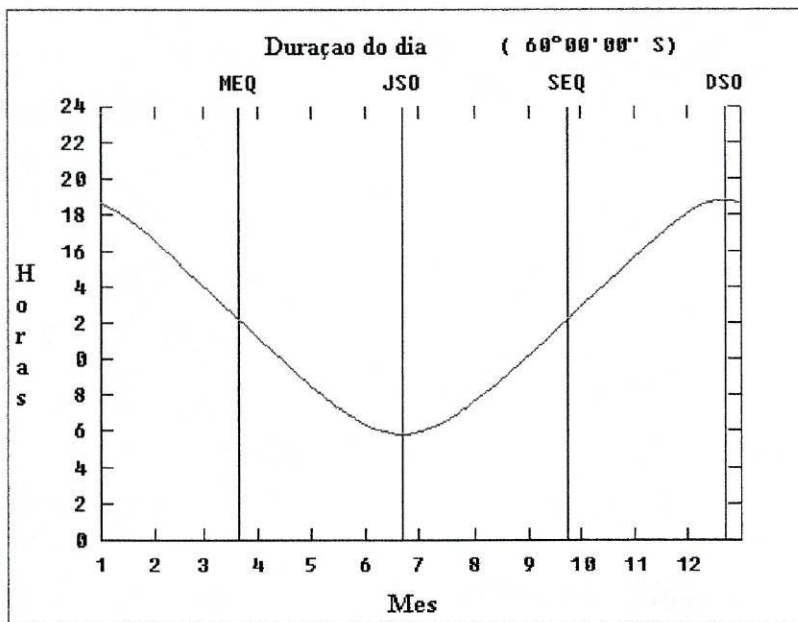


Fig.5.9 - Variação do dia na latitude  $60^{\circ}S$

Com base nos gráficos podemos estabelecer uma função  $T_d(t)$  entre a duração do dia  $T_d$  (em horas) e o tempo  $t$  (em dias)

Da leitura do gráfico 5.8:

- Máx =  $2 \arccos (-\operatorname{tg} 23,5 \operatorname{tg} 23,5)/15 = 13,48\text{h}$  ocorre no  $172^\circ$  dia
- Mín =  $2 \arccos (-\operatorname{tg} 23,5 \operatorname{tg} -23,5)/15 = 10,5\text{h}$  ocorre no  $355^\circ$  dia
- Médio =  $2 \arccos (-\operatorname{tg} 23,5 \operatorname{tg} 0)/15 = 12\text{h}$  ocorre nos  $80^\circ$  e  $233^\circ$  dias
- Amplitude =  $13,48 - 10,5 = 2,98$
- Período = 365 dias

$$T_d = 12 + 1,94 \cos(2\pi/365 * t - \pi)$$

Da leitura do gráfico 5.9:

- Máx = 18,5 h ocorre no  $355^\circ$  dia
- Mín = 5,49 h ocorre no  $172^\circ$  dia
- Médio = 12 h ocorre nos  $80^\circ$  e  $233^\circ$  dias
- Amplitude =  $18,5 - 5,49 = 13,01\text{h}$
- Período = 365 dias

$$T_d = 12 + 6,5 \cos(2\pi/365 * t)$$

### 5.3. Altura máxima do Sol

Outro dos fenômenos observáveis é o instante em que a sombra é mínima, que ocorre quando o Sol cruza o meridiano do observador (meio-dia solar) e que corresponde à altura máxima.

#### 5.3.1. Altura máxima versus declinação e latitude

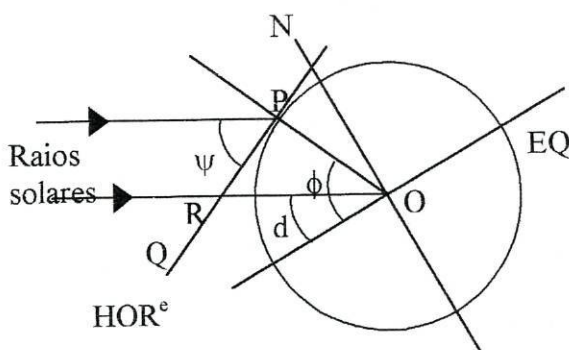


Fig.5.10 - Altura do Sol ao meio-dia

A inclinação dos raios solares (fig 5.10) determina a altura (máxima) que depende da posição do observador (*latitude*) e da posição do Sol na Eclíptica (*declinação*). Sendo  $\psi$  (altura do Sol) o ângulo formado pelos raios solares com o horizonte QP e sendo  $PO \perp QP$  no triângulo PRO vamos ter :

$$\angle RPO = 90^\circ \quad \angle PRO = \psi \quad \angle POR = \phi - d$$

ângulos cuja soma é  $180^\circ$  donde resulta

$$\psi = d + 90 - \phi$$

*Determina a altura máxima nos Solstícios para a tua latitude*

### 5.3.2. Variação anual da altura máxima $\psi$

A variação de  $\psi$  ao longo do ano pode ser obtida graficamente com o Astrolab, como se mostra para dois lugares um a Norte (fig.5.11) outro a Sul do Equador (fig.5.12)

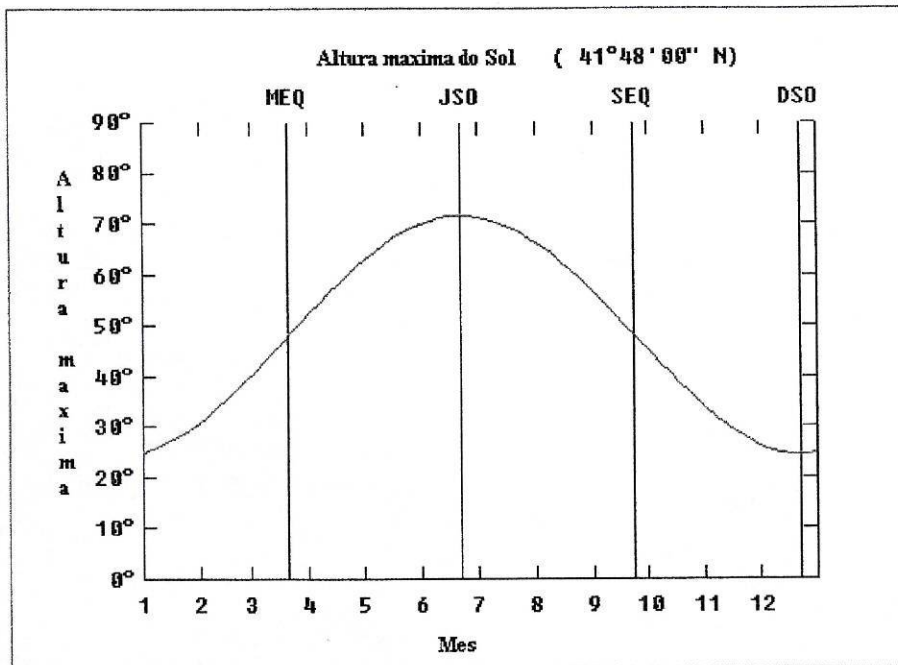


Fig.5.11 - Variação da Altura máxima para a latitude de 41° 48'

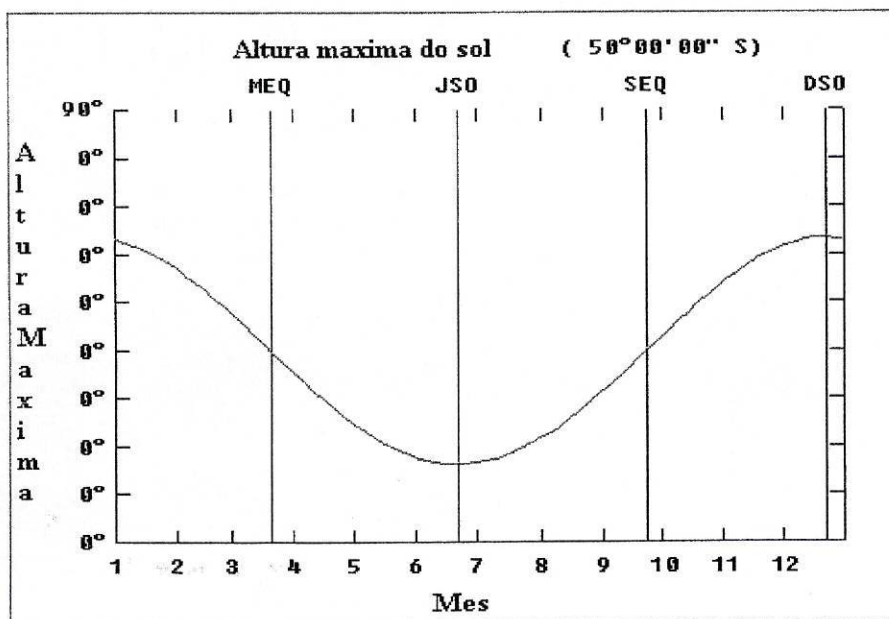


Fig.5.12 - Variação da altura máxima para a latitude de 50° Sul

Da leitura do gráfico (5.11)

- Altura máxima (21 de Junho) =  $23,5 + 90 - 41,8 = 71,7^\circ$
- Altura mínima (21 de Dezembro) =  $-23,5 + 90 - 41,8 = 24,7^\circ$
- Altura nos equinócios =  $90 - 41,8 = 48,2$
- Amplitude =  $71,7 - 24,7 = 47^\circ$
- Período = 365 dias

$$A_m = 48,2 - 23,5 \cos(2\pi/365 * t)$$

Da leitura do gráfico(5.12):

- Altura máxima (21 Dezembro) =  $23,5 + 90 - 50 = 63,5^\circ$
- Altura mínima (21 Junho) =  $-23,5 + 90 - 50 = 16,5^\circ$
- Altura (equinócios) =  $90 - 50 = 40^\circ$
- Amplitude =  $63,5 - 16,5 = 47^\circ$
- Período = 365 dias

$$A_m = 40 + 23,5 \cos(2\pi/365 * t - \pi)$$

### 5.3.3. Variação diária da altura do Sol

Devido ao movimento de rotação da Terra, a altura do Sol cresce desde o instante do nascimento (onde é nula) até ao meio-dia solar (onde é máxima) e decresce até ao pôr do Sol (onde volta a ser nula). Esta variação, pode ser constatada através da observação do comprimento da sombra dum estaca cravada na vertical, como a que eu efectuei e cujos registos, se mostram na fig.5.13 e tabela 5.1.

Hora	Sombra	Altura
8,33	32,5	23,75
9,5	19,6	36,11
10,5	13,2	47,29
11,5	7,2	63,27
12,5	6,1	66,9
13,5	5,2	70,02
<b>13,66</b>	<b>4,9</b>	<b>71,09</b>
14,5	6,2	66,56
15,5	8,6	58,98
16,5	12,8	48,17
17,5	19,6	36,11
19,1	41,9	18,84

Tabela 5.2-Dados registados

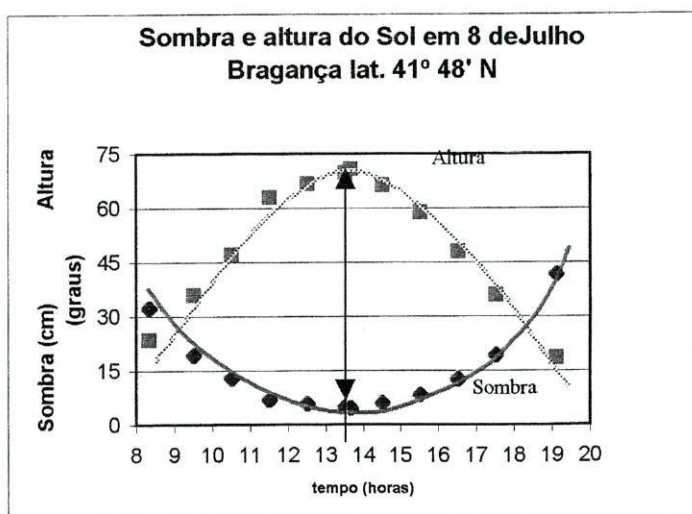


Fig.5.13-Variação da sombra e altura do Sol

Como a altura corresponde ao ângulo, cuja tangente é a razão entre o comprimento da estaca e o da sua sombra (ver fig.5.4) resulta que, quanto maior é o comprimento da sombra menor é a altura do Sol e vice-versa.

Na fig. 5.13 é patente uma simetria em relação ao máximo (no caso da altura) e ao mínimo (no caso da sombra) que é consequência da repetição dos mesmos valores antes e depois do meio dia solar, bem como a relação inversa entre altura e sombra, quanto maior é a altura menor é a sombra e consequentemente, o instante onde a altura é máxima a sombra é mínima, no caso isso ocorreu às 13h 40 min.

## 5.4. O azimute do Sol

### 5.4.1. Variação anual no nascimento (fig.5.14)

Outra das consequências da translação da Terra conjugada com a inclinação do eixo de rotação, é a variação ao longo do ano da posição do Sol no momento do seu nascimento.

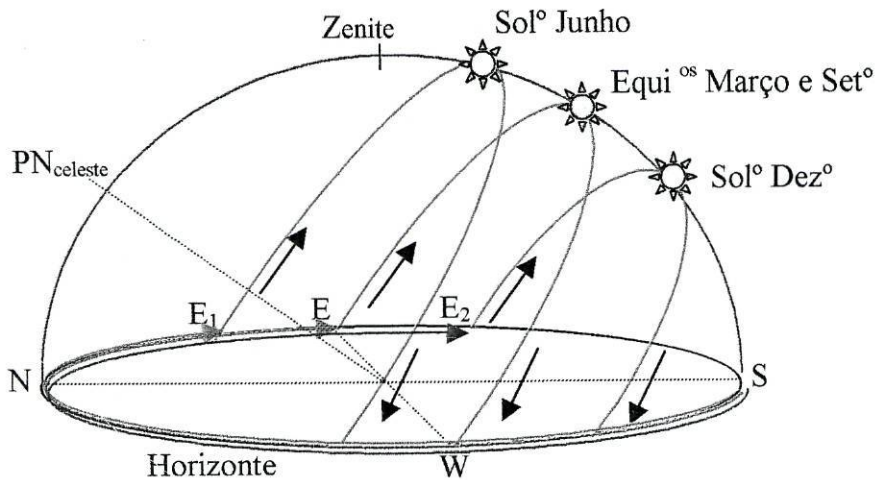


Fig.5.14 - O Sol acima do horizonte nos Equinócios e Solstícios

Por observação, verifica-se que o azimute do Sol ao nascer (distância angular no horizonte entre o Sul e o ponto onde nasce o Sol) é de  $270^\circ$  nos Equinócios (arc SNE) cresce de Junho onde toma o valor mínimo (arc SNE<sub>1</sub>) a Dezembro onde toma o valor máximo (arc SNE<sub>2</sub>). Da trigonometria esférica, sabemos que o azimute do Sol (A) ao nascer é dado por:

$$\cos A = \frac{\text{sen} \delta}{\text{cos} \phi} \Leftrightarrow A = \arccos \left( \frac{\text{sen} \delta}{\text{cos} \phi} \right)$$

Considerando :

$$\phi = 41^\circ \quad \delta = -23,5 \cos(2\pi/365 * t) \quad \text{ver 5.1.1}$$

Obtemos os valores da tabela :

t-Tempo (dias)	$\delta$ - Declinação (graus)	A - Azimute (graus)
0	-23,13	301,37
30	-17,3	293,21
60	-8	280,63
90	4,25	264,36
120	15	249,94
<b>150</b>	22	<b>240,24</b>
171	23,44	238,19
180	23	238,82
210	18	245,83
240	8,5	258,71
270	-2,9	273,84
300	-14	288,70
330	-21,7	299,34
<b>351</b>	-23,44	<b>301,81</b>

Tabela 5.3 – Valores da declinação e azimute

Usando um programa de computador (Kaleidagraph) obtemos  $A(t)$  na fig.5.15 que sugere claramente uma função sinusoidal

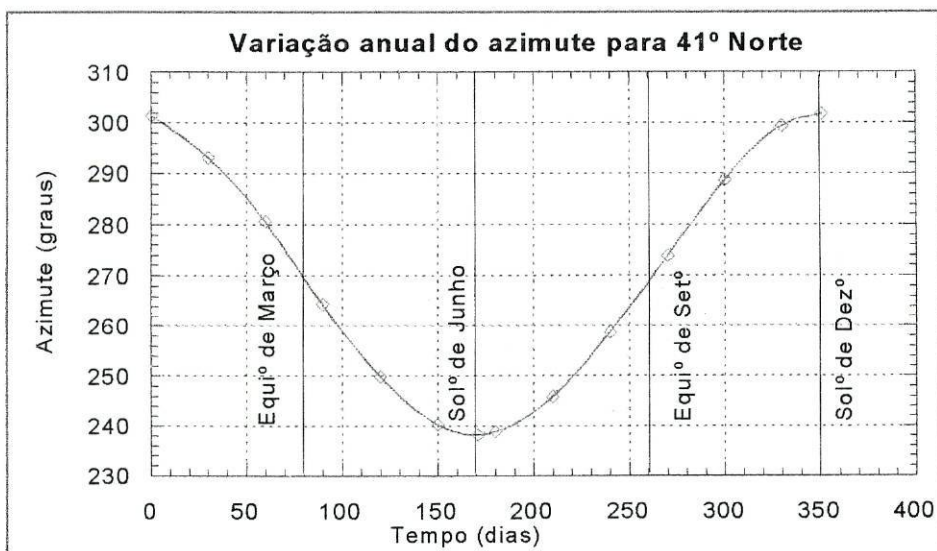


Fig.5.15 – Variação do azimute

Sendo :

- Valor mínimo 240,24°
- Valor máximo 301,81
- Valor médio 270° Oeste
- Amplitude  $301,81 - 240,24 = 61,57$
- Período 365 dias

$$A = 270 + 30,79 \cos (360 \cdot t / 365)$$

#### 5.4.2. Variação diária

Como a posição do Sol ao longo do dia, varia em relação a um dado observador devido à rotação da Terra, isso implica que o seu azimute cresça desde o nascer ao pôr do Sol

sendo de  $360^\circ$  ou  $0^\circ$  quando o Sol está na direcção Sul (meio dia solar). Uma forma simples de saber quanto vale o azimute, é através da medição do ângulo A que o prolongamento da sombra que aponta para o Sol, faz com a recta que aponta para o Sul. Na fig.5.16 mostram-se as sombras e os azimutes para três instantes distintos ao longo do dia.

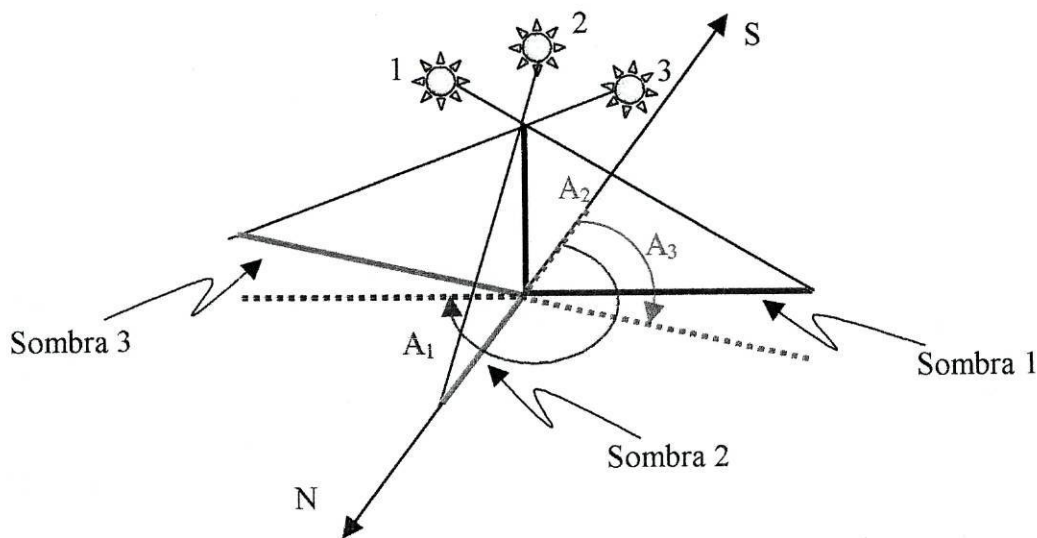


Fig.5.16 – Sombras e azimutes: ao meio-dia (2); antes (1) ; depois (3)

Com base em medições efectuadas em Bragança ( $41,8^\circ$  N) cujos registos se apresentam na tabela 5.3 obteve-se um gráfico (fig.5.17) que ilustra a forma como varia o azimute.

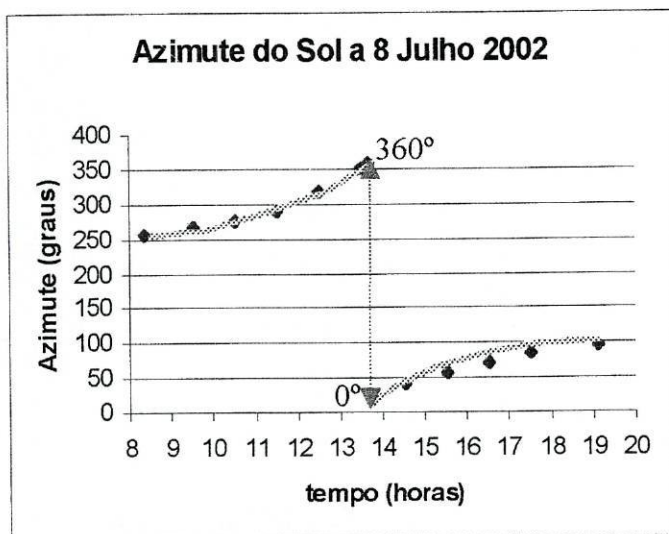


Fig.5.17 - Variação diária do azimute (8 de julho)

Hora	Azimute
8,33	257
9,5	168
10,5	278
11,5	292
12,5	318
13,5	352
<b>13,66</b>	<b>360</b>
14,5	41
15,5	59
16,5	73
17,5	88

Tabela 5.3 – valores medidos

Com base no gráfico observamos uma variação sempre no sentido crescente, sendo de destacar uma descontinuidade para  $t = 13,66$  h. Isto deve-se ao facto do azimute variar entre  $0^\circ$  e  $360^\circ$  pelo que, quando atinge  $360^\circ$  (o que acontece ao meio-dia solar) recomeça a contagem a partir de  $0^\circ$ .

## 5.5. Variação da Insolação Solar

O facto da altura do Sol variar, tem como consequência uma variação na chamada **insolação solar I** (quantidade de energia solar que atinge uma unidade de área A)

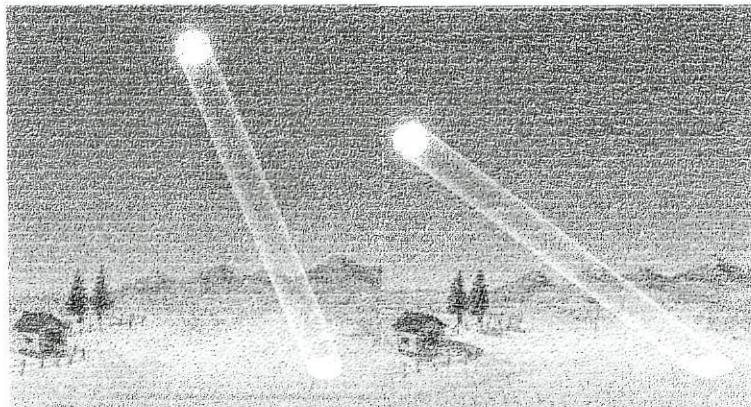


Fig. 5.18 – Incidência da radiação solar para alturas diferentes

Vejamos como se relacionam a área de incidência com a altura do Sol.

Sendo  $E_z$  a energia solar no zénite e A a área atingida pela radiação solar, vem:

$$I = \frac{E_z}{A}$$

e considerando que quando o Sol está a uma altura  $\theta$  em relação ao horizonte, a mesma energia é espalhada por uma área maior  $A'$  (fig.5.19)

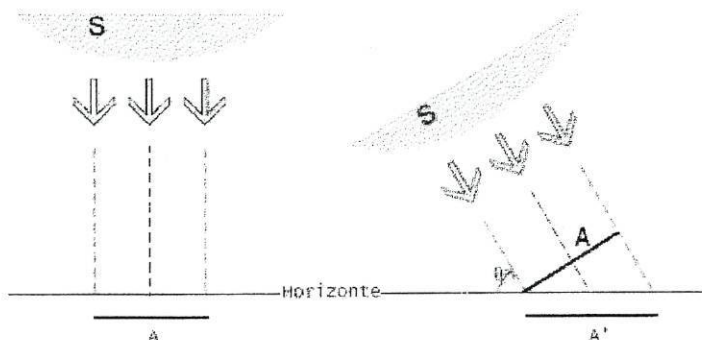


Fig.5.19 – Variação da área com a inclinação dos raios solares

$$A' = \frac{A}{\text{sen}\theta}$$

vemos que devido à variação da altura máxima do Sol para um lugar (causada pela inclinação da órbita) acontece uma variação da área iluminada na superfície da Terra e portanto uma variação na insolação, resultando

$$I = E_z \text{ sen } \theta$$

Ou seja, a insolação é directamente proporcional ao seno da altura do Sol (admitindo  $E_z$  constante)

### Exemplo

Para Bragança cuja latitude é  $41,8^\circ$  N a altura máxima do Sol no Solstício de Verão ( $\cong$  21 Junho) é  $\theta_V = 71,7^\circ$ , já que a distância zenital do Sol ao meio-dia (fig.5.20) é

$$Z_V = 18,3^\circ (41,8^\circ \text{ lat} - 23,5^\circ \text{ decl})$$

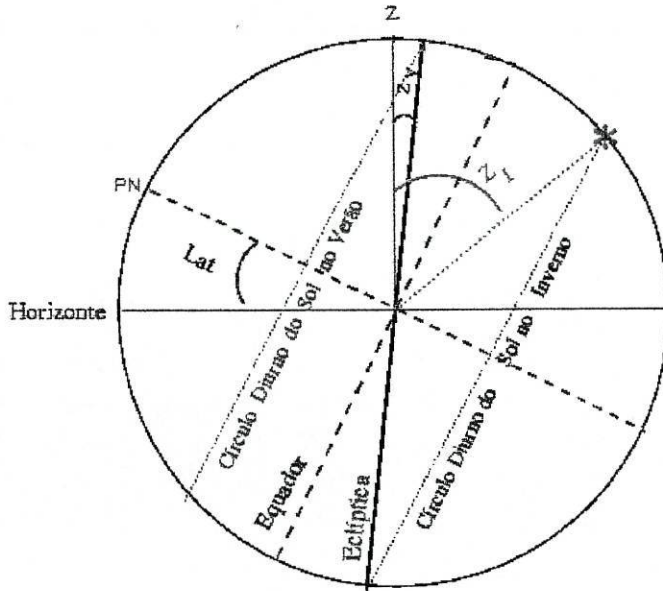


Fig.5.20 - Posição do Sol nos Solstícios ao meio-dia

Ao meio-dia no Solstício de Inverno ( $\cong$  21 Dez.) a altura máxima do Sol é  $\theta_I = 24,7^\circ$ , já que a distância zenital do Sol ao meio-dia é

$$Z_I = 65,3^\circ (41,8^\circ \text{ lat} + 23,5^\circ \text{ decl}).$$

Desprezando a variação da insolação solar com a distância da Terra ao Sol isto é, considerando a energia do Sol no Zênite ( $E_z$ ) constante, temos:

$$\frac{I_V}{I_I} = \frac{\text{sen } \theta_V}{\text{sen } \theta_I} = \frac{0,95}{0,42} = 2,27$$

isto é, a insolação em Bragança no Solstício de Verão (ao meio-dia) é duas vezes e um quarto (aproximadamente) maior do que no Solstício de Inverno à mesma hora.

Se considerarmos um local no Equador (latitude  $0^\circ$ ) vamos ter que a altura máxima ocorre nos Equinócios ( $\delta = 0$ ), sendo de  $90^\circ - 0 = 90^\circ$  e a altura mínima ocorre nos Solstícios ( $\delta = 23,5$ ), sendo de  $90 - 23,5^\circ = 66,5^\circ$

o que determina :

$$\frac{I_{\text{Eq}^\circ}}{I_{\text{Sol}^\circ}} = \frac{\text{sen } 90^\circ}{\text{sen } 66,5^\circ} = \frac{1}{0,92} = 1,09$$

ou seja no Equador a variação do mínimo para o máximo traduz-se em apenas 9%

### 5.5.1. Variação anual da insolação

Tomemos como referência Bragança de latitude  $41,8^\circ$  N e um local no Equador de latitude  $0^\circ$ , onde a altura máxima do Sol  $\psi$ :

- Em Bragança  $\psi = \delta + 90 - \phi$
- No Equador  $\psi = 90 - |\delta|$

E a Insolação  $I = E_z \sin \psi$

Tomando como hipótese  $E_z = 40 \text{ ergs/cm}^2$  (valor arbitrário) obtemos os seguintes valores, que registamos na tabela 5.4

Valores calculados

t (dias) (1 Jan° -21 Dez°)	$\delta$	$\psi$ (Brag. <sup>a</sup> )	$\psi$ (Equa. <sup>or</sup> )	I (Brag. <sup>a</sup> )	I (Equa. <sup>or</sup> )
0	-23,00	25,20	67,00	17,03	36,82
15	-21,00	27,20	69,00	18,28	37,34
30	-17,50	30,70	72,50	20,42	38,15
45	-12,750	35,45	77,25	23,20	39,01
60	-7,500	40,70	82,50	26,08	39,66
75	-1,500	46,70	88,50	29,11	39,99
80	0	48,2	90	29,82	40
90	4,50	52,70	85,50	31,82	39,88
105	10,00	58,20	80,00	33,99	39,39
120	15,00	63,20	75,00	35,703	38,64
135	19,00	67,20	71,00	36,88	37,82
150	22,00	70,20	68,00	37,64	37,09
165	23,25	71,45	66,75	37,92	36,75
171	23,44	71,64	66,56	37,96	36,70
180	23,10	71,30	66,90	37,89	36,79
195	21,50	69,70	68,50	37,52	37,22
210	18,50	66,70	71,50	36,74	37,93
225	14,50	62,70	75,50	35,55	38,73
240	9,50	57,70	80,50	33,81	39,45
255	4,00	52,20	86,00	31,61	39,90
264	0	48,2	90	29,82	40
270	-2,00	46,20	88,00	28,87	39,98
285	-7,50	40,70	82,50	26,08	39,66
300	-13,00	35,20	77,00	23,06	38,98
315	-17,50	30,70	72,50	20,42	38,15
330	-21,00	27,20	69,00	18,28	37,34
345	-23,00	25,20	67,00	17,03	36,82
355	-23,44	24,76	66,56	16,75	36,70

Tabela 5.4-Valores de declinação, altura e insolação calculados

Usando novamente o Kaleidagraph e com os dados da tabela, vamos obter os gráficos (fig 5.21 e 5.22) onde se mostra a evolução das insolações a par da altura máxima do

Sol. Como é óbvio a evolução das curvas é igual, coincidindo no tempo os máximos e os mínimos.

- Latitude 41,8°

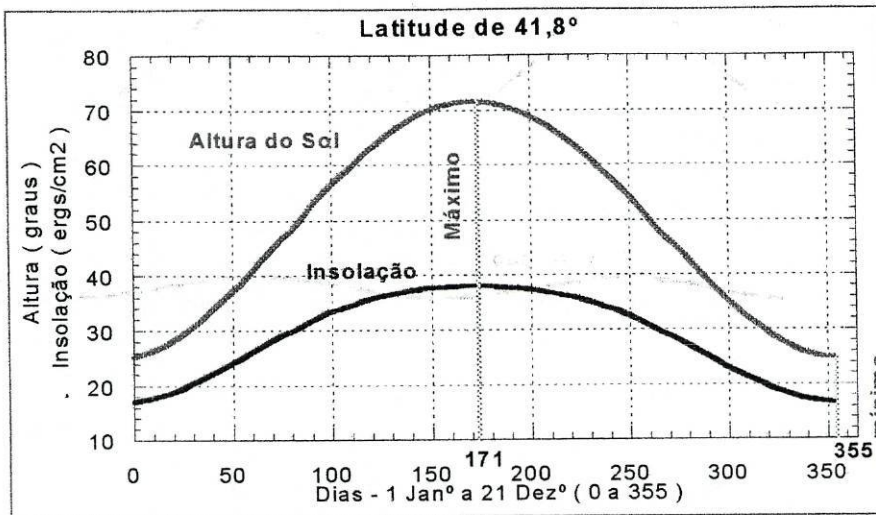


Fig.5.21-Variação anual da altura e insolação

Na tabela lemos:

$$I_{\min} = 16,75 \text{ para } t = 355$$

$$I_{\text{Máx}} = 37,96 \text{ para } t = 171$$

Daqui resulta :

$$I_{\text{médio}} = (37,96 + 16,75) / 2 = 27,36$$

$$\text{Amplitude} = 37,96 - 16,75 = 21,21$$

Podemos então estabelecer uma função  $I(t)$  que aproximadamente reflecte estes dados

$$I = 27,36 + 10,60 \cos(t - 171)$$

Comparando gráficamente (fig.5.22) vemos que a aproximação é bastante aceitável

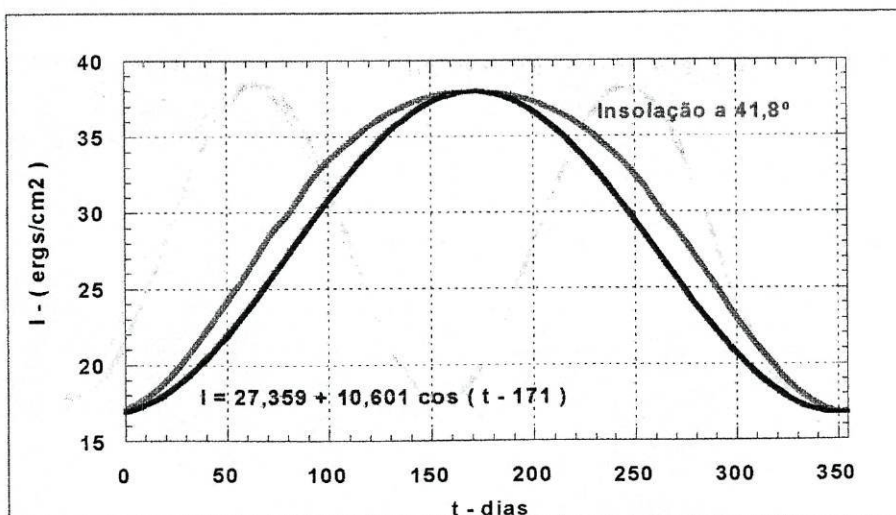


Fig.5.22 – Modelação da insolação

- Latitude 0°

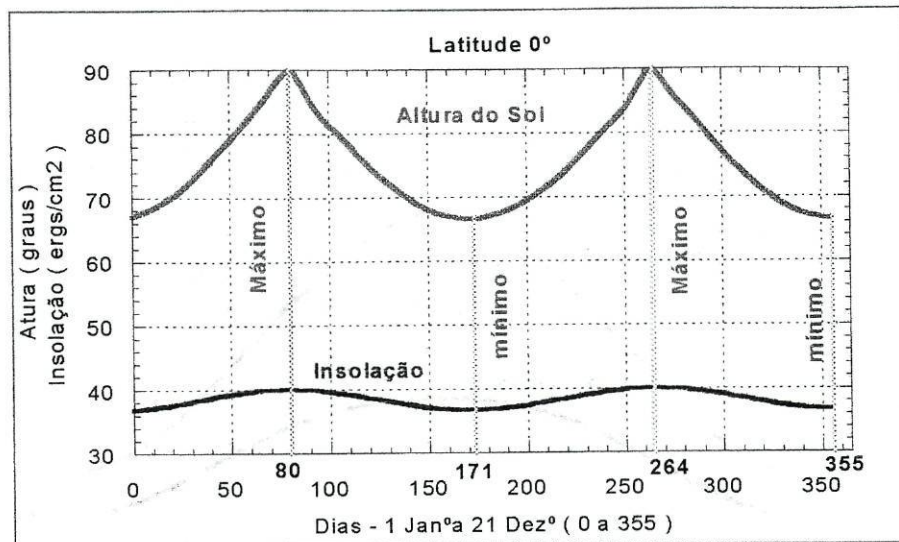


Fig.5.23 – Insolação e altura no Equador

Neste caso vamos ter :

$$I_{\min} = 36,70 \text{ para } t = 171 \text{ e } 355$$

$$I_{\text{Máx}} = 40 \text{ para } t = 80 \text{ e } 264$$

Daqui resulta :

$$I_{\text{médio}} = 76,70/2 = 38,35$$

$$\text{Amplitude} = 40 - 36,70 = 3,30$$

Vindo  $I(t)$  aproximado por:

$$I = 38,35 + 1,65 \cos (2*(t-80))$$

Na fig.5.24 mostram-se as duas curvas onde se observa uma quase coincidência, o que demonstra ser uma aproximação excelente.

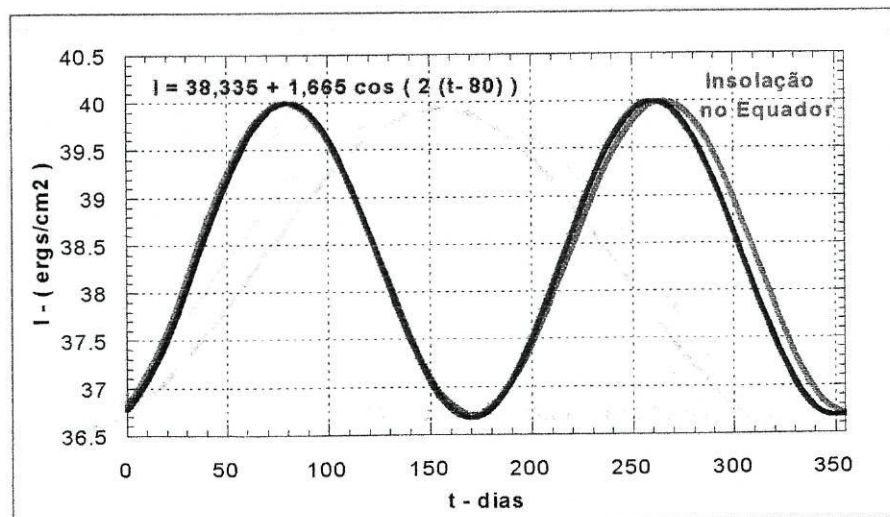


Fig.5.24 – Modelação da insolação (no Equador)

Comparando para as as duas latitudes, 41,8° e 0° (fig 5.25) verificamos promenores interessantes, a saber:

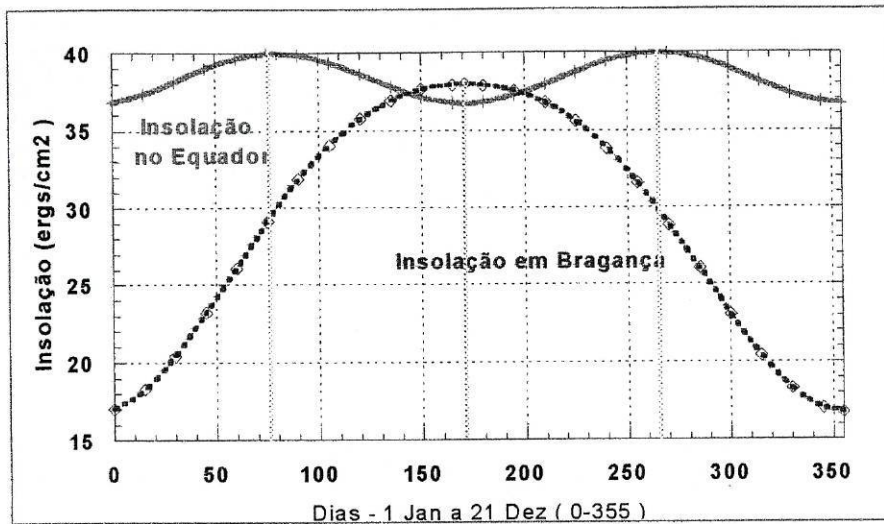


Fig.5.25 – Comparação das insolações

- Um período maior (aproximadamente duplo) para a insolação a 41,8°
- Uma significativamente menor amplitude na insolação no Equador.  
A quantidade de energia solar por unidade de área, varia pouco
- No Solstício de Verão quando a insolação é máxima a 41,8° é mínima no Equador
- Uma insolação média bastante maior (40%) no Equador

### 5.5.2. Variação da insolação com a distância Terra – Sol

Todas estas conclusões omitem o facto de a insolação variar com a distância Terra- Sol, que como sabemos não é constante. No entanto, sendo a órbita da Terra quase circular este efeito não tem grande expressão, como se pode ver pelo cálculo seguinte.

O efeito da variação da distância entre a Terra e o Sol, pode ser calculado levando em conta que a energia do Sol por unidade de área que alcança a Terra é dada por:

$$E_Z = \frac{E_S}{4\pi D_{ST}^2}$$

onde  $D_{ST}$  é a distância da Terra ao Sol no momento.

A variação da insolação solar devido à variação de 3% da distância Terra-Sol entre o afélio e o periélio é portanto:

$$\frac{I_{AFÉLIO}}{I_{PERIÉLIO}} = 0,97^2 = 0,94$$

isto é, em Janeiro (periélio) a insolação solar é 6% maior do que em Junho (afélio). Este pequeno efeito é contrabalançado pela maior concentração de terra no hemisfério norte.

### 5.6. As manchas solares e o ciclo solar

Cada 11 anos a actividade Solar atinge um pico durante o qual, o Sol apresenta uma quantidade máxima de manchas solares, cujos reflexos na Terra provocam interferências nas comunicações e alterações nas condições meteorológicas. Quanto maior o número de manchas solares, melhores são as comunicações a longa distância

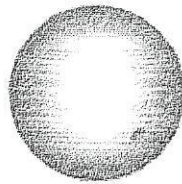


Fig 5.26 - Imagem do Sol com algumas manchas

A fig.5.27, mostra o número de manchas solares observado durante os últimos dois ciclos.

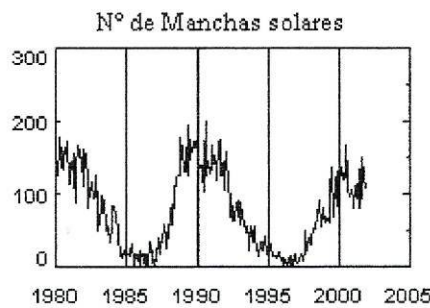


Fig.5.27 – Os dois últimos ciclos solares

Já que a actividade solar é cíclica, com ciclos de 11 anos, podem-se calcular previsões para um ciclo inteiro. Estamos agora no Ciclo 23, cuja previsão se mostra na fig.5.28.

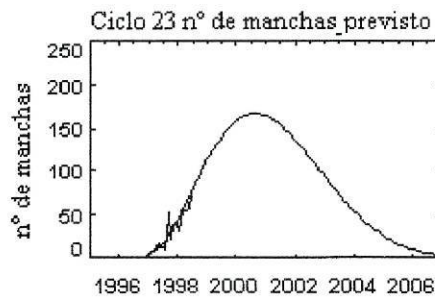


Fig.5.28 – Previsão parao 23º ciclo

Na fig.5.29 mostra-se a evolução das manchas solares desde que se começaram a registar em 1750

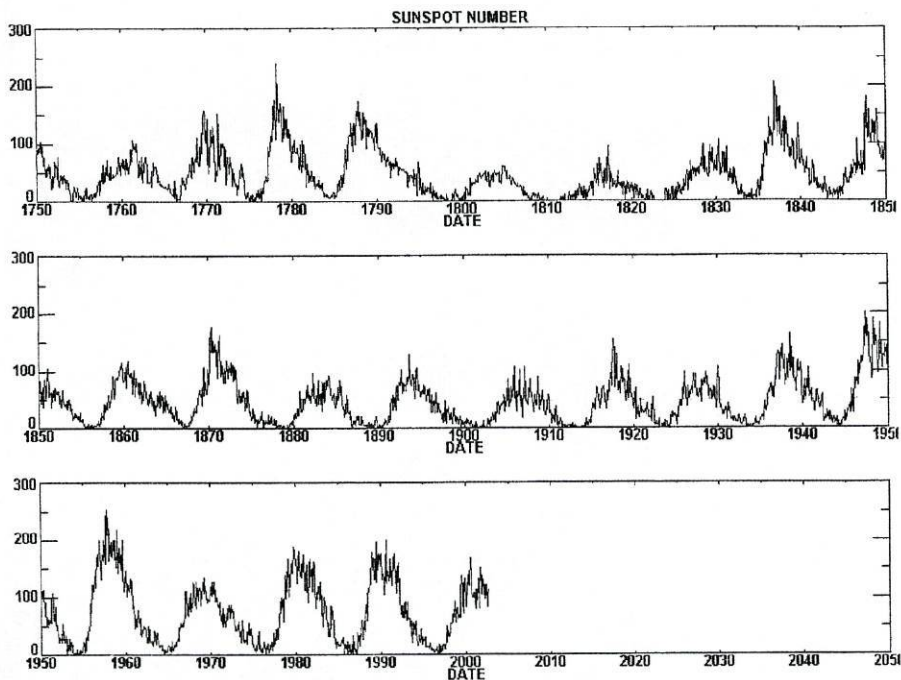


Fig.5.29 – Registos das manchas solares desde 1750

Como se pode ver a variação do número de manchas ao longo dos anos é bastante irregular, apresentando no entanto um padrão no que toca a uma repetição cíclica (em média 11 anos) dos máximos e mínimos.

### 5.6.1. Análise matemática das manchas solares

Partindo dos dados registados entre 1986 e 1996 (tabela 5.5).

Número médio mensal de manchas no ciclo solar de 1986 a 1996(11 anos)											
Ano	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996
Janeiro	2,5	10,4	59,0	161,3	177,3	136,9	150,0	59,3	57,8	24,2	11,5
Fevereiro	23,2	2,4	40,0	165,1	130,5	167,5	161,1	91,0	35,5	29,9	4,4
Março	15,1	14,7	76,2	131,4	140,3	141,9	106,7	69,8	31,7	31,1	9,2
Abril	18,5	39,6	88,0	130,6	140,3	140,0	99,8	62,2	16,1	14,0	4,8
Mai	13,7	33,0	60,1	138,5	132,2	121,3	73,8	61,3	17,8	14,5	5,5
Junho	1,1	17,4	101,8	196,2	105,4	169,7	65,2	49,8	28,0	15,6	11,8
Julho	18,1	33,0	113,8	126,9	149,4	173,7	85,7	57,9	35,1	14,5	8,2
Agosto	7,4	38,7	111,6	168,9	200,3	176,3	64,5	42,2	22,5	14,3	14,4
Setembro	3,8	33,9	120,1	176,7	125,2	125,3	63,9	22,4	25,7	11,8	1,6
Outubro	35,4	60,6	125,1	159,4	145,5	144,1	88,7	56,4	44,0	21,1	0,9
Novembro	15,2	39,9	125,1	173,0	131,4	108,2	91,8	35,6	18,0	9,0	17,9
Dezembro	6,8	27,1	179,2	165,5	129,7	144,4	82,6	48,9	26,2	10,0	13,3

Tabela 5.5 -Dados registados de manchas solares

obtemos graficamente uma distribuição de pontos fig.5.30

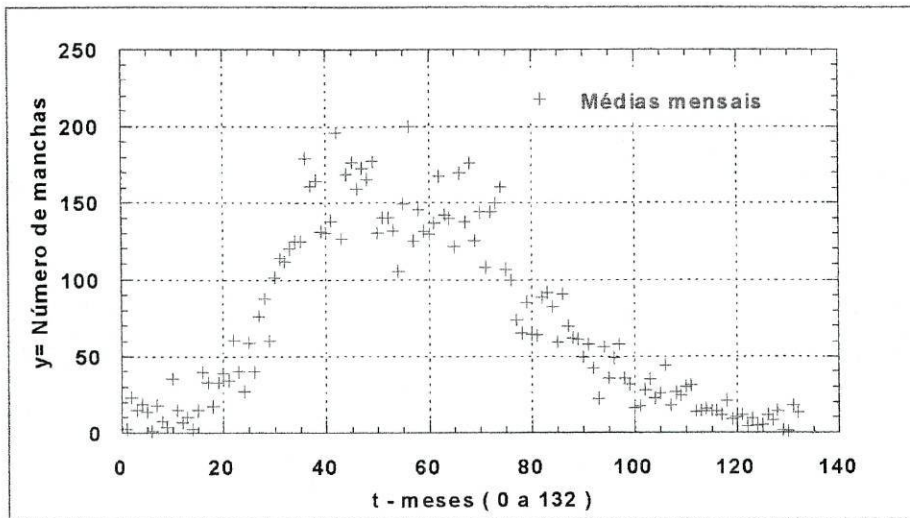


Fig.5.30 – Distribuição das médias mensais

que pode ser aproximada por:

- uma curva sinusoidal .
- uma curva de Gauss (normal) que só é válida para um ciclo, pois não é periódica como a sinusoidal

#### 5.6.1.1. Como definir a curva sinusoidal.

Por leitura do gráfico podemos admitir um valor mínimo de 5 para 0 e 120 e um valor máximo de 165 para 60 donde decorre um período de 120 meses.

Com estes valores podemos escrever:

$$y = 85 + 80 \cos[(t-60) * 360/120]$$

cuja curva está representada na fig.5.31, sendo y o número de manchas e representando t os meses decorridos desde Janeiro de 1986 (mês 0) até Dezembro de 1996 (mês 132).

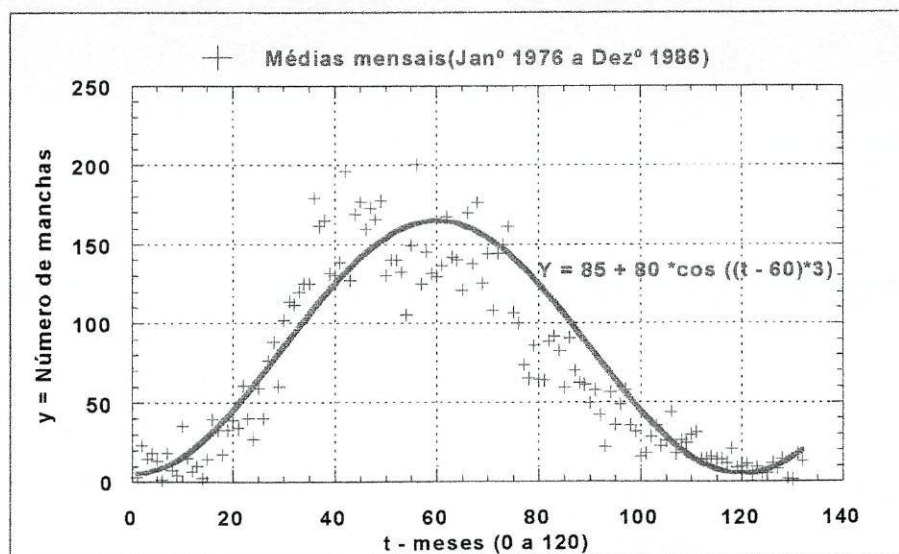


Fig.5.31 – Modelação da variação do nº médio mensal de manchas

Fazendo uma representação com base nas médias anuais do número de manchas para o mesmo período, obtemos uma distribuição de pontos relativamente à qual a curva já definida, também se ajusta dum forma equilibrada como se mostra na fig.5.32 onde se apresentam em simultâneo as duas distribuições.

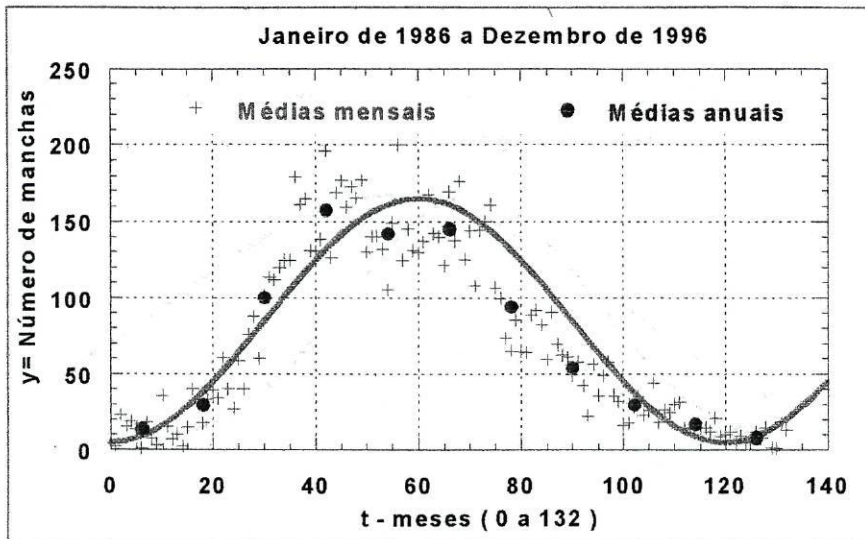


Fig.5.32 – Comparação da curva de modelação com as médias mensais e anuais

### 5.6.1.2. Como definir a curva normal

Sendo esta curva parametrizada pela média, desvio padrão e valor máximo da distribuição associada através da equação:

$$y = n_{\text{máx}} e^{\left( -\frac{(t-\bar{n})^2}{\sigma^2} \right)}$$

e como:

$$n_{\text{máx}} = 165 \text{ (nº máx de manchas solares)}$$

$$\bar{n} = \frac{\sum n}{132} = 71,9 \text{ (média)}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (n - \bar{n})^2}{132}} = 58,5 \text{ (desvio padrão)}$$

teremos :

$$y = 165 e^{\left( -\frac{(t-71,9)^2}{58,5^2} \right)}$$

que resulta numa aproximação pouco satisfatória (fig.5.33, curva a vermelho). Alterando os parâmetros ( $\bar{n}$  para 57 e  $\sigma$  para 33) obtemos uma outra curva satisfatoriamente ajustada, como se mostra na mesma figura (curva azul).

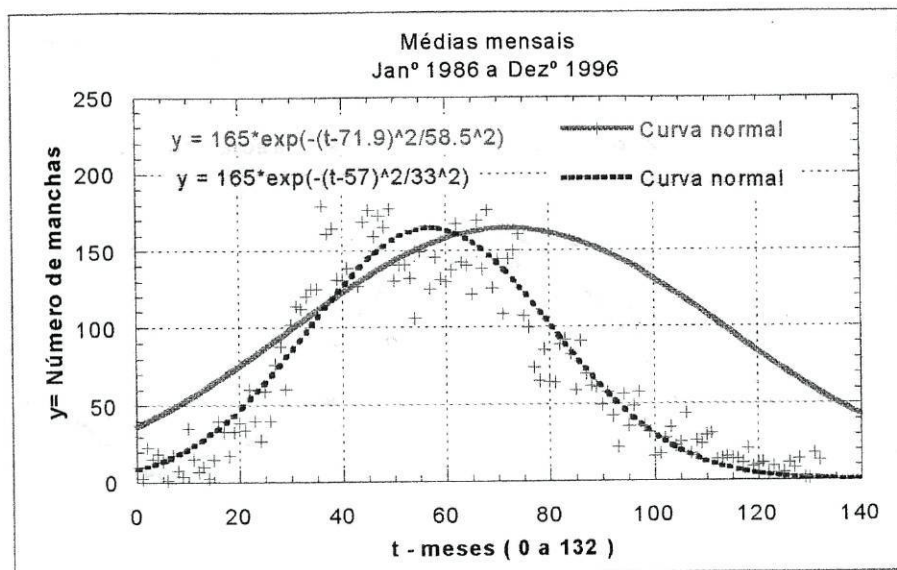


Fig.5.33 – Modelação das médias mensais através de curvas normais

Na fig.5.34 apresentam-se as duas aproximações, observando-se uma diferença pouco significativa entre ambas.

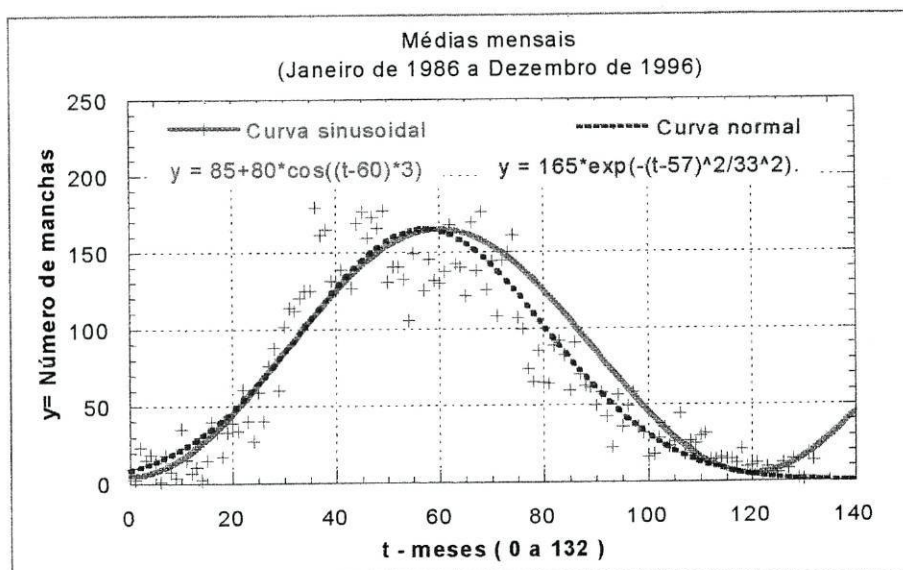


Fig.5.34 – Comparação das curvas de modelação, sinusoidal e normal.

### 5.6.1.3. Previsão para o ciclo actual

Admitindo que o ciclo actual tenha uma evolução semelhante aos dois anteriores podemos prever o que poderá acontecer até 2006.

Consideremos os dados da tabela 5.6.

Nº médio anual de manchas solares entre 1976 e 2001					
1976	12,6	1985	17,9	1994	29,9
1977	27,5	1986	13,4	1995	17,5
1978	92,5	1987	29,4	1996	8,6
1979	155,4	1988	100,2	1997	21,5
1980	154,6	1989	157,6	1998	64,3
1981	140,4	1990	142,6	1999	93,3
1982	115,9	1991	145,7	2000	119,6
1983	66,4	1992	94,3	2001	111
1984	45,9	1993	54,6		

Tabela 5.6-Manchas registados entre 1976 e 2001

Com base nestes dados podemos ver (fig.5.35) a evolução das manchas ao longo de dois ciclos completos 1976 – 1986 e 1986 – 1996 e parte do ciclo actual 1996 – 2001.

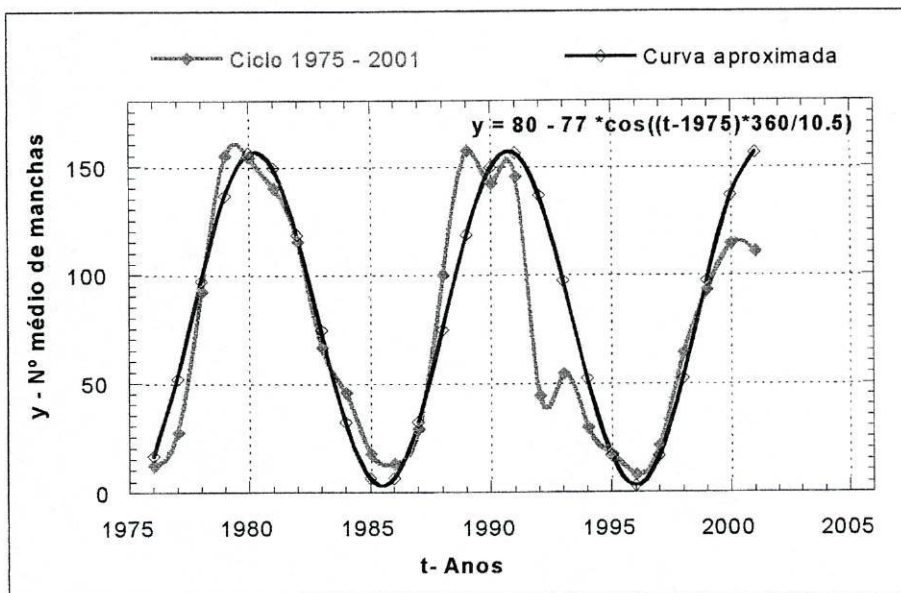


Fig.5.35 –Modelação para o ciclo actual.

Graficamente vemos uma distribuição algo irregular dos pontos, reflectindo a curva associada (a vermelha) essa irregularidade, podendo aproximá-la a uma sinusóide com um período 10.5 anos e amplitude 154 (curva a preto) e que corresponde a uma

aproximação satisfatória, pelo que podemos a partir dela fazer uma previsão para o ciclo actual através da relação:

$$y = 80 - 77 \times \cos\left(\frac{(t - 1975) \times 360}{10,5}\right)$$

sendo t a data do ano. Com isto podemos prever um máximo em 2001 com um nº médio de manchas de 155. Esta previsão como se pode ver não confirma os valores registados, pois em 2001 registaram-se em média 111 manchas, o que significa um erro na ordem dos 40% (por defeito), tratando-se portanto duma previsão pouco fiável.

### 5.7. Declinação geocêntrica da Lua

Tal como o Sol, também a Lua devido ao seu movimento de translação em volta da Terra, se posiciona relativamente ao Equador terrestre ora abaixo, ora acima, com um afastamento angular (declinação) que apresenta um padrão regular, embora não tão "linear" como o do Sol (os máximos e mínimos variam ao longo do ano, o que não acontece com os do Sol).

Na fig.5.36 representam-se as variações da declinação do Sol e da Lua, obtidas com o Skymap para o período de 1 Janeiro a 31 de Dezembro de 2002 com intervalos quinzenais, e cujos valores se mostram na tabela 5.7

Data (quinzenal)	Declinação do Sol (graus)	Declinação da Lua (graus)	Data (quinzenal)	Declinação do Sol (graus)	Declinação da Lua (graus)
0	-23,00	22,75	180	23,10	-13,50
15	-21,00	-18,00	195	21,50	7,50
30	-17,50	12,50	210	18,50	-0,50
45	-12,75	-6,50	225	14,50	9,00
60	-7,50	-3,00	240	9,50	13,00
75	-1,50	6,00	255	4,00	-22,00
90	4,50	-17,25	270	-2,00	23,00
105	10,00	19,00	285	-7,50	-25,50
120	15,00	-24,50	300	-13,00	25,50
135	19,00	25,00	315	-17,50	-19,25
150	22,00	-22,75	330	-21,00	17,50
165	23,25	20,75	345	-23,00	-7,25

Tabela 5.7-Declinação do Sol e da Lua

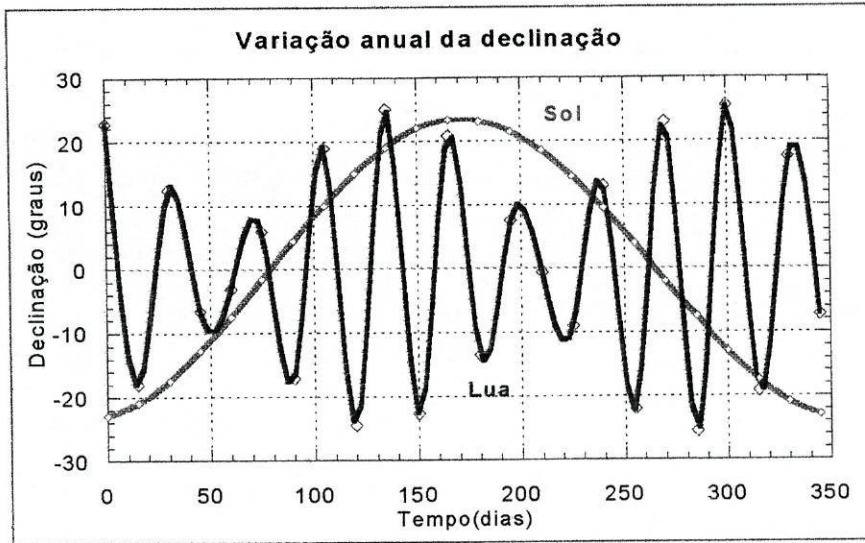


Fig.5.36 – Variação anual das declinações do Sol e da Lua

O comportamento algo irregular da Lua, implica uma relação mais complexa entre a sua declinação e o tempo, que aqui não iremos tratar quantitativamente mas apenas referir qualitativamente.

Esta situação, decorre do facto da Lua estar próxima da Terra (a distância média é de apenas 384000 Km) o que permite detectar as perturbações que periodicamente a afectam e que se reflectem na órbita, nomeadamente a sua inclinação bem como a posição da linha dos nodos.

Isto acontece devido ao deslocamento simultâneo da Terra e da Lua em torno do centro de massa do sistema Terra-Lua (fig.5.37) e que leva a uma variação algo irregular nas posições relativas, quer em distância quer na posição angular, relativamente ao plano da órbita terrestre ou seja, da declinação geocêntrica.

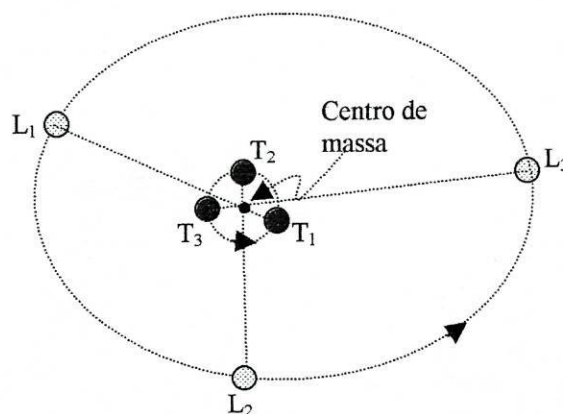


Fig.5.37 – Movimentos da Terra e da Lua em torno do centro de massa

## Questões sobre Funções Periódicas

1. Usando a relação que permite obter declinação a partir da altura máxima determina para a latitude do local onde habitas:
  - 1.1 A declinação num qualquer dia, medindo a altura máxima do Sol.
  - 1.2 A altura máxima nos Solstícios e nos Equinócios.
  
2. Estudar a variação da duração do dia  $T_d$ :
  - 2.1 Com a declinação para uma dada latitude (por ex<sup>o</sup> a do lugar de residência)
  - 2.2 Com a latitude nos Equinócios e Solstícios
  
3. Determina o azimute do Sol ao nascer:
  - 3.1 Nos Solstícios e nos Equinócios (no teu local de residência)
  - 3.2 Em dois locais com a mesma latitude (um no hemisfério Norte outro no Sul) nos dias 21 de Junho e 21 de Dezembro.
  
4. Regista a altura do Sol através da medição da sombra:
  - 4.1 Ao longo do dia numa qualquer data
  - 4.2 Ao longo dum mês medindo a sombra uma vez por dia sempre à mesma hora
  - 4.3 Elabora os gráficos respectivos e faz uma interpretação critica dos mesmos
  
5. Estuda a variação anual da insolação solar ao meio dia, para um local no Trópico de Capricórnio, estabelecendo uma função  $I(t)$  que descreva essa variação.
  - 5.1 Será de esperar uma variação próxima da do Equador ?
  - 5.2 O período é maior, igual ou menor que no Equador?
  - 5.3 Que valores tomam a amplitude e o valor médio ?

## Capítulo 6

### Análise matemática na radiação das estrelas

Neste capítulo relativo a fenómenos relacionados com as estrelas vamos encontrar conceitos como:

- Logaritmos
- Exponenciais
- Derivadas
- Regressão linear
- Integração

sendo todos eles à excepção da Integração, objecto de estudo nos temas "Funções e gráficos" "Função logarítmica" "Função exponencial" "Derivadas e aplicações". Estando estes conceitos integrados em modelos que explicam matematicamente os fenómenos em causa, a exploração destes modelos pode ser feita quer gráfica quer analiticamente, nomeadamente:

- Estudando a relação entre a magnitude e a distância como função (logarítmica)
- Usando as leis de Planck, Wien e de Stefan-Boltzman e explorando graficamente a variação de parâmetros como a temperatura .
- Calculando máximos de radiação através de derivadas

Esta abordagem pode revelar-se eficaz no sentido de dar a perceber como a Matemática facilita a compreensão e permite tirar conclusões sobre a forma como acontecem determinados fenómenos.

Apesar de inacessíveis fisicamente é possível com a tecnologia actual, recolher dados de grandezas (luminosidade e comprimentos de onda entre outras) cuja interpretação através de modelos matemáticos, permite conhecer mais e melhor a "física" dessas mesmas estrelas.

## 6.1. O brilho das estrelas

Devido á grande distância a que as estrelas se encontram da Terra o seu diâmetro aparente torna-se impossível de medir pelo que o seu aspecto é de um ponto brilhante independentemente do seu tamanho real. Por exemplo Próxima de Centauro é uma estrela que tem o mesmo raio do Sol mas que dista 271.300 vezes a distância do Sol o que torna o seu diâmetro aparente da ordem de 1/150 segundos de arco (0,006"). Sendo 0,1" o limite que as capacidades tecnológicas actuais permitem para a medida do diâmetro aparente, esta estrela como todas as outras á excepção do Sol aparecem-nos como pontos brilhantes.

### 6.1.1. Grandeza (magnitude)

Desde a Antiguidade que as estrelas foram repartidas em seis *grandezas (magnitudes)* segundo o seu *brilho*:

- de grandeza 1 as muito brilhantes
- de grandeza 6 as menos brilhantes ainda observáveis a olho nu.

Tendo-se revelado claramente insuficiente "medir" o brilho desta maneira os astrónomos procuraram uma relação entre a grandeza e a energia recebida das estrelas . Os resultados das observações levaram a duas conclusões:

1. a escala de grandezas não era linear mas aproximadamente *logarítmica*.
2. A energia recebida de uma estrela de grandeza 1 era cerca de 100 vezes maior que a recebida numa estrela de grandeza 6.

### 6.1.2. Equação de Pogson

Em 1856 Pogson propôs uma escala de grandezas caracterizada por :

1. A razão do brilho de duas estrelas de grandeza consecutiva ser constante

$$B_i/B_{i+1} = a > 1$$

2. A razão entre o brilho de uma estrela de grandeza 1 e de outra de grandeza 6 ser igual a 100

$$B_1/B_2 = B_2/B_3 = B_3/B_4 = B_4/B_5 = B_5/B_6$$

$$a^5 = 100 \Leftrightarrow a = 10^{2/5} \cong 2.512$$

Considerando duas estrelas de grandezas m e n a razão entre os brilhos será

$$B_m/B_n = a^{(n-m)} = 10^{2/5(n-m)}$$

$$m - n = -2.5 \text{ Log } (B_m/B_n) \quad \text{Equação de Pogson}$$

De salientar que desta equação resulta uma escala de grandezas relativas

### 6.1.2.1. Aplicações:

1. A magnitude aparente visual do Sol é  $-26.8$  e a da Lua Cheia é  $-12.7$ .  
Quantas vezes o Sol brilha mais que a Lua?

$$\frac{B_{Sol}}{B_{Lua}} = 10^{\frac{2}{5}(m_{lua} - m_{sol})} \text{ vem}$$

$$B_{Sol} = 10^{0,2 \times 14,1} \times B_{Lua} \text{ ou seja}$$

$$B_{Sol} = 660,7 \times B_{Lua}$$

2. As estrelas mais fracas visíveis a olho nu são de magnitude 6. Comparar o brilho do Sol com uma dessas estrelas.

$$B_{Sol} = 10^{0,2 \times (6 - (-26,8))} \times B_{estrela}$$

$$B_{Sol} = 3\,630\,780,6 \times B_{estrela}$$

3. A magnitude da estrela mais brilhante do céu, Sirius é  $-1.6$ . Comparar o seu brilho com o de uma estrela das mais fracas visíveis a olho nu.

$$B_{Sirius} = 10^{0,2 \times 7,6} \times B_{estrela}$$

$$B_{Sirius} = 33,1 \times B_{estrela}$$

### 6.1.3. Lei da Fotometria

A energia luminosa emitida por uma fonte (fig.6.1) espalha-se por uma área cada vez maior (proporcional ao quadrado da distância) à medida que nos afastamos da fonte. Daqui resulta que a energia recebida por unidade de área (fluxo) varia com o inverso do quadrado da distância.

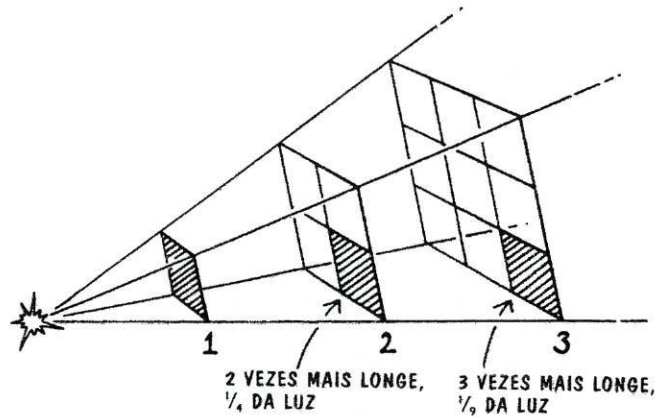


Fig.6.1- A mesma quantidade de luz que ilumina um quadrado em 1 dispersa-se e ilumina 4 quadrados iguais em 2 e 9 quadrados iguais em 3

Assim sendo a energia da estrela que chega até nós por unidade de área ( $E$ ) depende da distância a que ela se encontra ( $D$ ) e da luminosidade ( $L$ ) que é a energia total que ela emite ou seja:

$$E = \frac{L}{S} \text{ sendo } S = 4\pi D^2$$

$$E = \frac{L}{4\pi D^2}$$

À distância  $D_1$  a radiação espalha-se por uma esfera de raio  $D_1$  ao passo que à distância  $D_2$  ela espalha-se por uma esfera de raio  $D_2$  (fig.6.2).

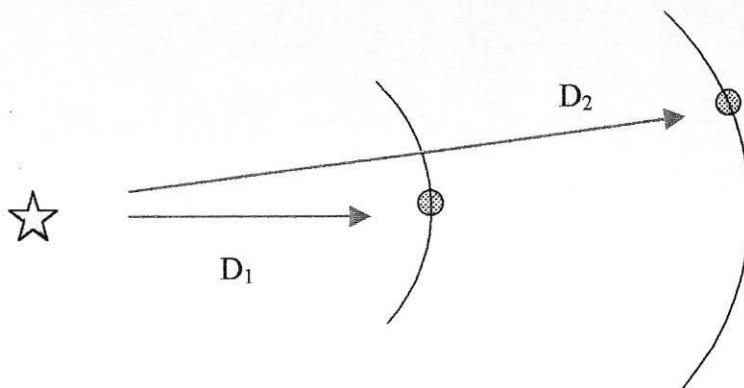


Fig.6.2 – Raios para diferentes distâncias

Nestas circunstâncias teremos:

$$E_1 = \frac{L}{4\pi D_1^2} \text{ e } E_2 = \frac{L}{4\pi D_2^2}$$

donde resulta

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{D_2^2}{D_1^2} \quad (1)$$

### Exemplos:

1. Qual a relação entre os brilhos aparentes de uma estrela observada de dois locais distintos estando um deles situado a uma distância da estrela, dupla da do outro?

Usando a relação (1):

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{D_2^2}{D_1^2}$$

e sendo

$$D_2 = 2D_1$$

resulta

$$E_1 = 4E_2$$

ou seja o observador 1 vê a estrela quatro vezes mais brilhante que o observador 2.

2. Duas estrelas com a mesma luminosidade são observadas pelo mesmo observador sendo uma delas 9 vezes mais brilhante que a outra. Qual a relação entre as distâncias?

Sendo:

$$L_1 = L_2$$

Usando novamente a relação (1)

vem

$$D_1^2 E_1 = D_2^2 E_2$$

e como

$$E_1 = 9 E_2$$

resulta

$$D_2 = 3 D_1$$

Isto é, a que se apresenta nove vezes menos brilhante está três vezes mais distante.

Significa isto que o brilho aparente (fluxo de energia que chega ao observador) sendo afectado pela distância, não permite comparar a luminosidade (brilho intrínseco) de diferentes estrelas. Para que isso seja possível, é necessário colocá-las à mesma distância.

### 6.1.4. Magnitude absoluta

Convencionou-se uma distância de referência (10 pc) e define-se magnitude absoluta ( $M$ ) de uma estrela, a magnitude aparente ( $m$ ) que ela teria se situada à distância de 10 parsecs. Com o efeito das distâncias anulados, podem-se comparar as grandezas absolutas e calcular a diferença na quantidade de luz real emitida pelas estrelas (fig.6.3).

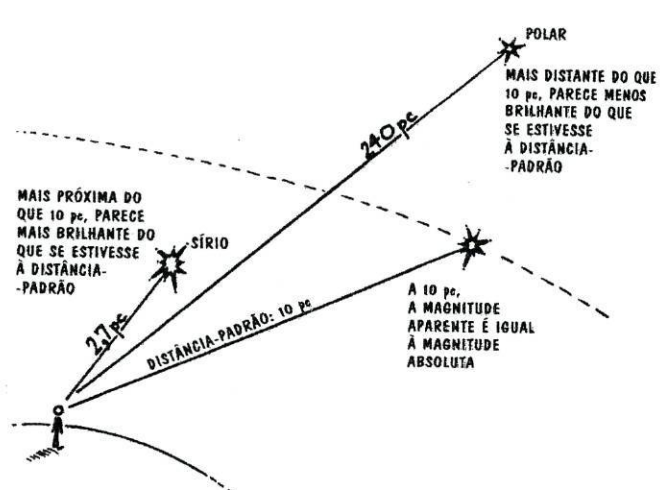


Fig.6.3.- Magnitude absoluta e aparente

Com base na relação (1) é possível estabelecer uma correspondência entre a distância de uma dada estrela ( $D$ ) e as suas magnitudes (aparente  $m$  e absoluta  $M$ ).

Usando a equação de Pogson podemos escrever

$$m - M = -2,5 \text{Log} \left( \frac{E_1}{E_2} \right)$$

$$m - M = -2,5 \text{Log} \left( \frac{100}{D^2} \right)$$

ou seja

$$m - M = 5 \text{Log} D - 5 \quad (2)$$

A partir daqui, é possível calcular distâncias às estrelas com base na determinação das magnitudes aparente e absoluta, usando métodos adequados como os que referimos em seguida.

## 6.2. Cálculo de distâncias às estrelas e galáxias

### 6.2.1. Método da paralaxe espectroscópica

A partir de (2) pode-se calcular  $D$ , obtidas  $m$  por observação, e  $M$  através do chamado diagrama H-R (Hertzprung-Russel - fig.6.4) elaborado com base na análise espectral das estrelas, diagrama no qual as estrelas ocupam uma posição de acordo com a sua temperatura e luminosidade.

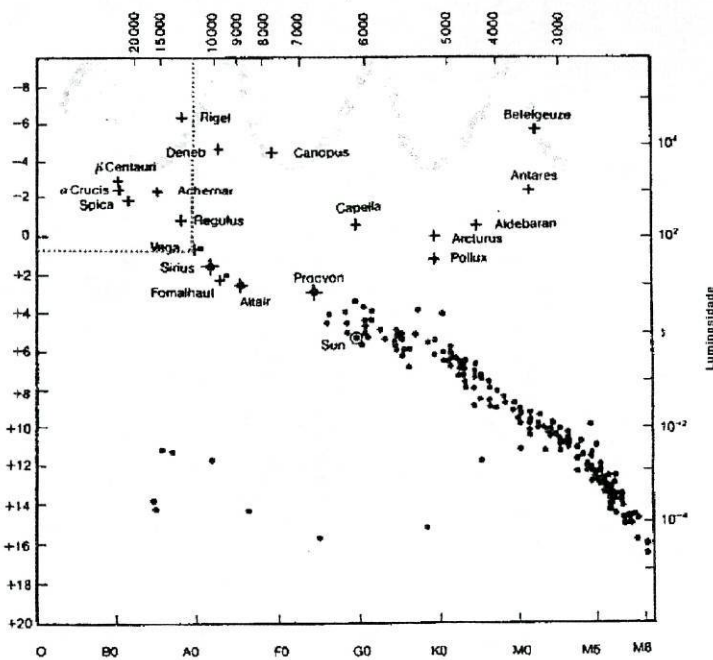


Fig.6.4 - Diagrama H-R

#### Exemplo:

Distância á estrela Vega situada na constelação de Lira

Por análise espectral trata-se duma estrela de classe A

- No diagrama H-R lê-se  $M \cong +0,5$  (ver fig.6.4)
- Por observação e comparando o brilho com estrelas vizinhas de magnitude conhecida obtemos  $m = 0,14$

Aplicando (2):

$$m - M = 5 \log D - 5 \quad \text{tiramos}$$

$$5 \log D = 0,14 - 0,5 + 5 = 4,64$$

$$\log D = 0,928$$

$$D = 8,5 \text{ pc}$$

$$D = 27,6 \text{ A.L.}$$

### 6.2.2. Paralaxe Fotométrica

Determinadas estrelas apresentam variação periódicas do brilho (luminosidade). Um grupo de estrelas com esta particularidade, é o grupo das chamadas estrelas Cefeidas (de Delta Cefeus) que se encontram quer na nossa Galáxia, quer noutras como na Pequena Nuvem de Magalhães, de cuja observação se obtiveram os dados que iremos considerar. Tipicamente o período varia entre 1 e 100 dias sendo de 5,4 dias para Delta Cefeus.

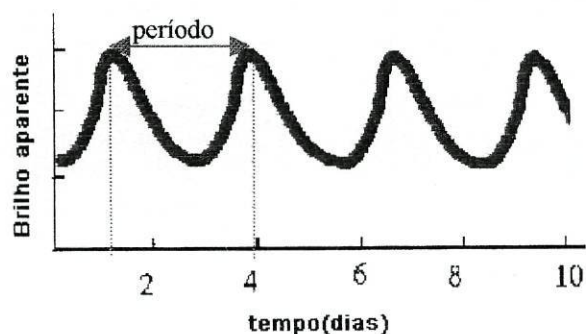


Fig.6.5 - Curva de luz típica numa estrela Cefeida variável (período 3 dias)

Este fenómeno, permitiu aos astrónomos descobrir uma relação entre o período e a magnitude  $m$ . Concretamente essa relação é entre o brilho observado (magnitude aparente  $m$ ) e o logaritmo do período ( $p$ ) sendo essa relação linear:

$$\log p = k m + c \quad \text{com } k \text{ e } c \text{ constantes}$$

Na fig.6.6 mostra-se um registo de observações onde é evidente esta linearidade

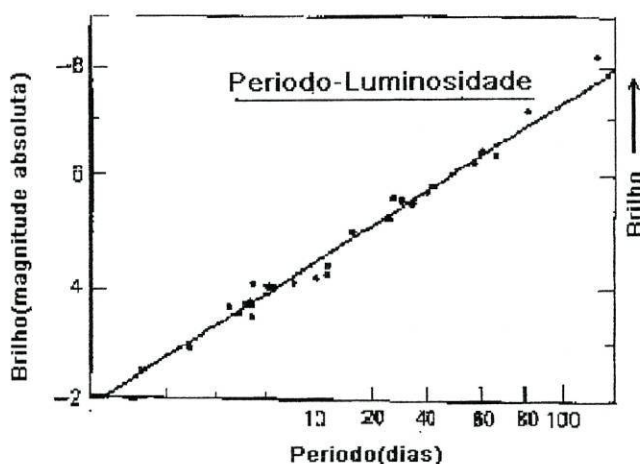


Fig.6.6 - Relação período - luminosidade

Vejamos como se estabelece a relação (período–luminosidade) a partir de dados observados

### 6.2.2.1. Obtenção de p (m)

Na tabela 6.1 estão registados os valores de m e log p (resultantes da observação de Cefeidas na Pequena Nuvem de Magalhães)

log p	m	log p	m	log p	m
0,21	16,8	0,71	15,6	1,60	13,6
0,30	16,7	0,81	15,2	1,63	13,1
0,35	16,3	1,01	14,3	1,70	13,1
0,41	16,0	1,11	14,7	1,62	13,2
0,45	16,1	1,22	13,8	1,46	13,5
0,50	16,0	1,44	13,8	1,16	15,1
0,63	15,6	1,52	13,4	1,06	14,4

Tabela 6.1- m versus log p para Cefeidas na pequena nuvem de Magalhães

- Fazendo uma representação gráfica, verifica-se que os pontos estão dispostos de forma tal, sendo possível traçar uma recta que represente aproximadamente, a variação da magnitude aparente (m) com o log p (fig.6.7).

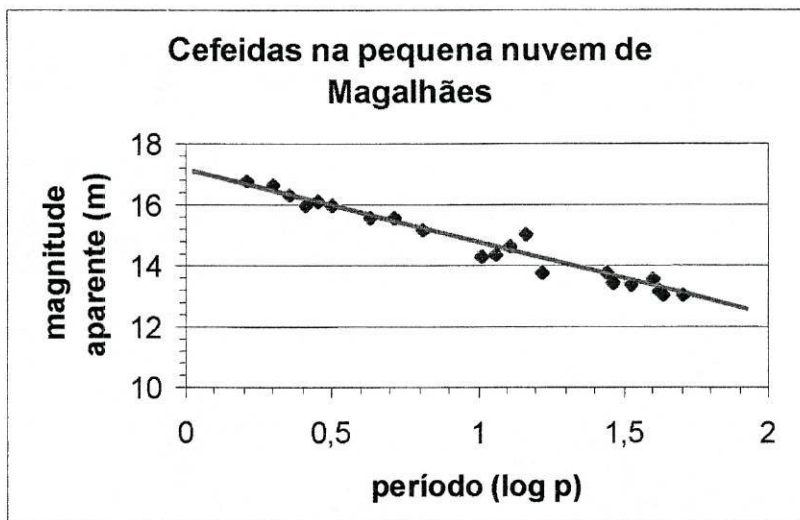


Fig.6.7 – Aproximação linear para os dados da tabela 6.1

- Usando uma calculadora (TI-92) obtemos os seguintes parâmetros no modelo de regressão linear:

$$a = -2,448742$$

$$b = 17,2123272$$

$$\text{corr} = -0,970769$$

$$R^2 = 0,959948$$

Ou seja a equação da recta de regressão será:

$$\log p \cong -2,5 m + 17,2 \quad (3)$$

### 6.2.2.2. Obtenção de $p(M)$

Como estas estrelas estão sensivelmente á mesma distância a recta obtida serve também para representar a variação da magnitude absoluta ( $M$ ) mas com uma diferença constante nas ordenadas, pois para cada estrela  $m - M = 5 \log D - 5$  e sendo  $D$  igual para todas as estrelas resulta  $m - M = C^{\text{te}}$ .

A determinação desta constante é o que se chama calibrar o gráfico, e para tal será suficiente determinar  $m$  e  $\log p$  para uma Cefeida. Como nenhuma destas estrelas está suficientemente próxima para ser possível determinar a distância por paralaxe trigonométrica, e como estas estrelas têm propriedades comuns, é suficiente estudar algumas que se localizem numa dada região da qual se saiba a distância, o que permitirá obter  $M$ .

Na tabela 6.2 estão os resultados da observação dum grupo de Cefeidas localizadas numa região da nossa Galáxia.

$\log p$	$M$	$\log p$	$M$	$\log p$	$M$
0,29	-1,7	0,71	-3,0	0,99	-3,7
0,49	-2,4	0,73	-3,0	1,04	-4,1
0,56	-2,4	0,81	-3,4	1,17	-4,5
0,58	-2,8	0,83	-3,5	1,23	-5,3
0,64	-2,8	0,86	-3,5	1,34	-5,6
0,65	-3,1	0,90	-3,7	1,65	-6,4
0,69	-3,4	0,90	-3,7		

Tabela 6.2 –  $M$  versus  $\log p$  para Cefeidas na nossa Galáxia.

- Fazendo uma representação gráfica verifica-se que os pontos estão praticamente alinhados, o que permite traçar uma recta representativa da variação da magnitude absoluta ( $M$ ) em função do  $\log p$ .(fig.6.8).

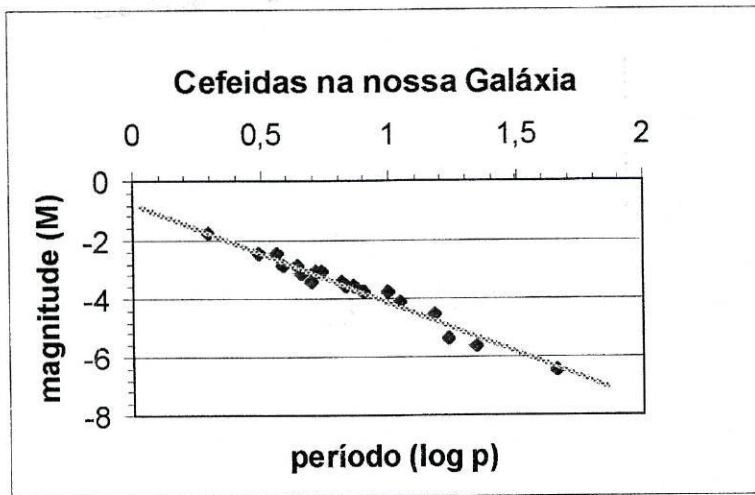


Fig.6.8 - Aproximação linear para os dados da tabela 6.1

- Aplicando novamente o modelo de regressão linear (TI-92) obtemos:

$$a = -3,516049$$

$$b = -0,60081$$

$$\text{corr} = -0,984513$$

$$R^2 = 0,969266$$

Donde a equação da recta de regressão

$$\log p \cong -3,5 M - 0,6 \quad (4)$$

### 6.2.2.3. Cálculo do módulo da distância ( $m - M$ )

No gráfico (fig.6.9) onde estão representados os dados de ambas as tabelas (a azul a tabela 1 e a rosa a tabela 2) vamos obter rectas (vermelha e roxa) praticamente paralelas em que a diferença de ordenadas nos dá ( $m - M$ ).

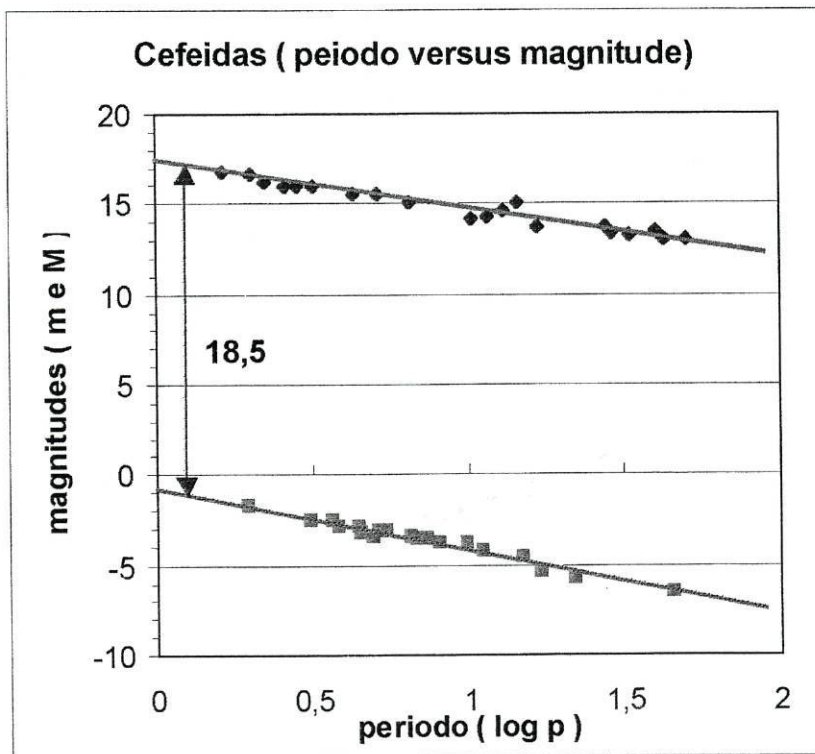


Fig.6.9 - Rectas obtidas graficamente paras os dados das tabelas 1 e 2

Da fig.6.9 obtém-se aproximadamente 18,5 para a diferença de ordenadas entre as duas rectas isto é:

$$m - M = 18,56.$$

#### 6.2.2.4. Cálculo da distância

##### 1 Graficamente

Lendo as ordenadas na origem

na recta inferior - 0,1

na recta superior 17,5

fazendo a diferença obtemos

$$m - M = 18,5$$

$$18,5 = 5 \log D - 5 \text{ e}$$

$$\log D = 1 + 0,2 \times 18,5$$

$$\log D = 4,7$$

$$D = 50.118 \text{ pc}$$

$$D = 163 \text{ 386 A.L.}$$

## 2 Usando o modelo de regressão linear

Com os valores obtidos em (3) e (4) obtemos

$$m - M = 17,2 + 0,6 = 17,8$$

$$m - M = 5 \log D - 5$$

$$\log D = 1 + 0,2 (m - M)$$

$$\log D = 4,56$$

$$D = 36.308 \text{ pc}$$

$$D = 118\,365 \text{ A.L.}$$

A diferença das distâncias obtidas pelos dois métodos, sendo significativa não é de admirar dada a ordem de grandeza da distância que se quer medir.

Tendo a nossa Galáxia um raio da ordem de 50.000 A.L. constatamos que a Pequena Nuvem de Magalhães está situada para lá da nossa Galáxia, e portanto é um objecto extra galáctico

### 6.3. A radiação das estrelas

A luz que as estrelas emitem é composta por radiações de várias frequências, correspondendo a cada frequência uma dada intensidade, sendo a radiação mais intensa a determinar a cor da estrela. No caso do Sol, a radiação mais abundante corresponde ao amarelo.

Na radiação estelar, a forma como a intensidade varia com a frequência (ou comprimento de onda) é aproximada daquilo que sucede no chamado corpo negro (objecto ideal) em que a intensidade da radiação por ele emitida, depende apenas da temperatura e da frequência  $\nu$  (ou comprimento de onda  $\lambda$ ).

Na fig.6.10 estão representadas as curvas de radiação do corpo negro, para  $5000^\circ$  e  $6000^\circ$  e também a do Sol onde se pode ver a semelhança de forma entre as curvas.

A sombreado assinala-se a radiação visível, que varia entre os 4000 e 8000 angstroms aproximadamente.

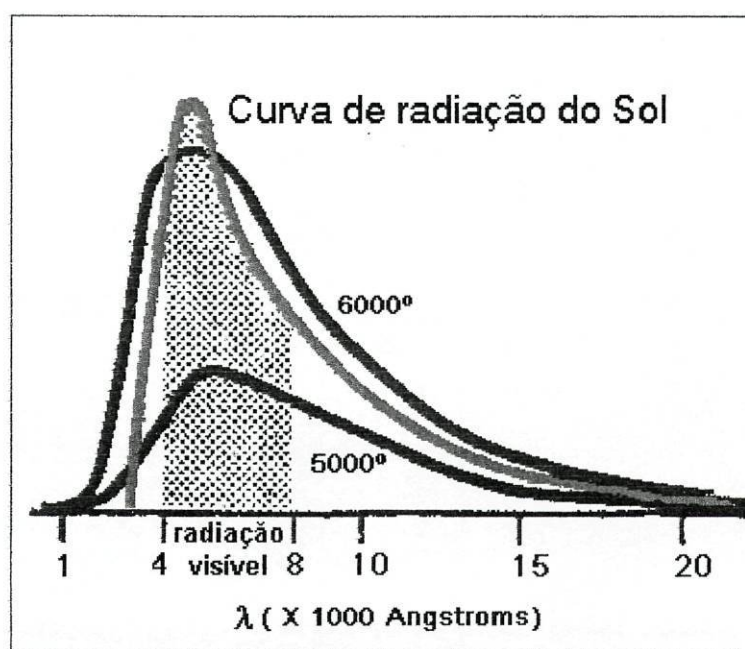


Fig.6.10 – Curvas de radiação do corpo negro e do Sol

O tratamento matemático que iremos fazer das leis que descrevem as estrelas, contemplam ferramentas matemáticas mais complexas como a integração e os desenvolvimentos em série, bem como uma referência a funções especiais, que não estando contempladas no ensino secundário, são indispensáveis à compreensão dos fenómenos aqui considerados e daí o seu interesse em serem abordados, sempre na perspectiva de mostrar o lado prático da Matemática.

### 6.3.1. Lei de Planck

A relação entre a intensidade da radiação  $I_\nu$  e a frequência  $\nu$  é descrita pela **Lei de Planck**

$$I_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

$h = 6.63 \times 10^{-34}$  J (constante de Planck)

$c \approx 3 \times 10^8$  Km/s (velocidade da Luz)

$k = 1.38 \times 10^{-23}$  J K<sup>-1</sup> (constante de Boltzman)

$\nu$  - frequência da radiação Hertz/ s

$T$  - Temperatura em graus Kelvin K

Na Fig. 6.11 mostra-se para diferentes temperaturas, as curvas de radiação traçadas a partir da Lei de Planck :

$$I_\lambda = \frac{1,19 \times 10^{27}}{\lambda^5 \left( e^{1,44 \times 10^8 / \lambda T} - 1 \right)}$$

Sendo  $\lambda$  (comprimento de onda:  $\lambda = \frac{c}{\nu}$ ) em angstroms e vindo  $I_\lambda$  em ergs s<sup>-1</sup> K<sup>-4</sup> cm<sup>-2</sup>

Nota: 1 erg = 10<sup>-7</sup>J

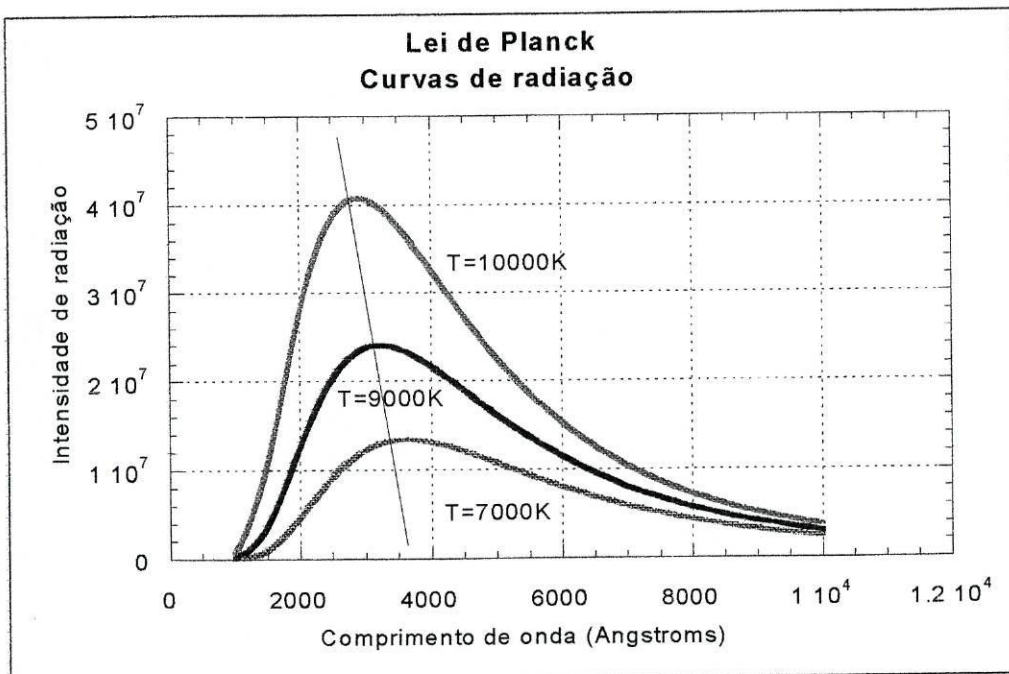


Fig.6.11 - Curvas de radiação onde se mostra numa recta como os máximos de radiação se deslocam para a direita com o decréscimo da temperatura (Lei de Wien).

Esta lei toma formas mais simples nos seguintes casos:

- Aproximação de Rayleigh-Jeans (para comprimentos de onda longos,  $\nu$  bastante pequenos, isto é  $\frac{h\nu}{kT} \ll 1$ )

Desenvolvendo  $e^{h\nu/kT}$  em série de Taylor:

$$e^{h\nu/kT} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{h\nu}{kT}\right)^n}{n!} = 1 + \frac{h\nu}{kT} + \frac{\left(\frac{h\nu}{kT}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{h\nu}{kT}\right)^3}{3!} + \dots$$

Como  $\frac{h\nu}{kT} \ll 1$  podemos desprezar todos os termos a partir do grau dois, donde:

$$e^{h\nu/kT} \cong 1 + \frac{h\nu}{kT} \Leftrightarrow e^{h\nu/kT} - 1 \cong \frac{h\nu}{kT} \quad e:$$

$$I_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{kT}{h\nu}$$

- Aproximação de Wien – (para comprimentos de onda curtos,  $\nu$  bastante grandes isto é  $\frac{h\nu}{kT} \gg 1$ ).

Sendo  $e^{h\nu/kT} \cong 1 + \frac{h\nu}{kT}$  e  $\frac{h\nu}{kT} \gg 1$  resulta

$$e^{h\nu/kT} \cong \frac{h\nu}{kT} \quad \text{ou seja}$$

$$I_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} e^{-h\nu/kT}$$

### 6.3.2. Lei de Wien

Como podemos ver (fig.6.11) a frequência para a qual a intensidade é máxima, varia com a temperatura. O máximo (e o mínimo) de uma função é dado para o ponto em que a derivada é nula. Derivando a Lei de Planck  $I_\lambda(T)$  e igualando a derivada a zero:

$$\frac{dI_\lambda}{d\lambda} = -\frac{10hc^2}{\lambda^6 \left(e^{hc/\lambda kT} - 1\right)} + \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{\frac{hc}{\lambda^2 kT} e^{hc/\lambda kT}}{\left(e^{hc/\lambda kT} - 1\right)^2} = 0 \quad (5)$$

logo

$$\frac{hc}{\lambda kT} \frac{e^{hc/\lambda kT}}{\left(e^{hc/\lambda kT} - 1\right)} = 5 \quad (6)$$

*Mostra como de (5) se obtém (6)*

Fazendo-se em (6) a substituição de variáveis

$$x = \frac{hc}{\lambda kT}$$

obtem-se uma equação transcendental:

$$x e^x = 5e^x - 5 \quad (7)$$

donde multiplicando por  $e^{-x}$

$$e^{-x} (x e^x) = e^{-x} (5e^x - 5)$$

vindo

$$5 e^{-x} = 5 - x \quad (8)$$

que pode ser resolvida numericamente (ver 3.7.3) obtendo-se:

$$x \cong 4,97$$

(resultado obtido com uma calculadora TI-85) daí resultando :

$$\lambda_{\text{máx}} T = \frac{hc}{kx} = \frac{6,63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{1,38 \times 10^{-23} \times 4,97} \cong 0,0029028 \text{ K m}$$

Na figura seguinte (fig.6.12) mostra-se a solução gráfica de (8)

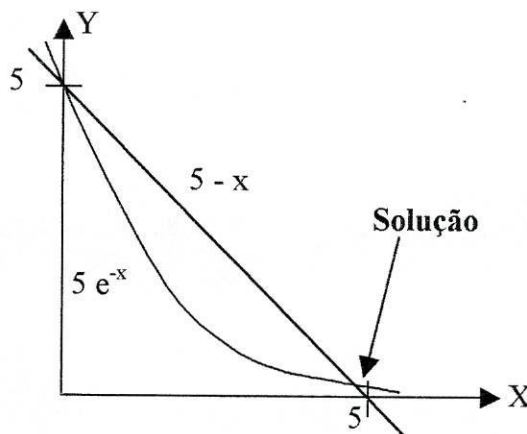


Fig. 6.12 - Solução gráfica da equação  $5 e^{-x} = 5 - x$

Cálculos mais exactos estabelecem que

$$\lambda_{\text{máx}} T = 0,0028978 \text{ K m}$$

Esta relação encontrada empiricamente por Wilhelm Wien (1864-1928) mostra que à medida que  $T$  aumenta,  $\nu_{\text{max}}$  aumenta ou  $\lambda_{\text{max}}$  diminui. Isto permite determinar a temperatura duma estrela, sabido o comprimento de onda do pico da radiação e vice-versa. Daqui resulta, ocorrer o pico de intensidade para um comprimento de onda que varia inversamente com a temperatura. Graficamente "vemos" esse pico deslocar-se (daí chamar-se lei do deslocamento) para a direita à medida que a temperatura desce.

Desta maneira se explica, porque é que ao aquecer uma barra de ferro, ela se torna primeiro vermelha, depois esverdeada e por fim azulada. O comprimento de onda para a cor vermelho é superior ao da cor verde, que por sua vez é maior que o da cor azul, ao contrário das temperaturas. Esta relação entre  $\lambda_{\text{máx}}$  (comprimento de onda máximo) e  $T$  pode ser obtida também a partir de

$$I_{\nu} = \frac{2h\nu^3}{c^2} e^{-h\nu/kT} \text{ (aproximação de Wien):}$$

e sendo

$$\lambda\nu = c \text{ vem}$$

$$I_{\lambda} = C_1 \lambda^{-5} e^{-C_2/\lambda T} \lambda \quad (C_1 = 2hc^2 \text{ e } C_2 = hc/k)$$

Derivando e igualando a 0

$$\frac{dI_{\lambda}}{d\lambda} = -5C_1 \lambda^{-6} e^{-C_2/\lambda T} + C_1 \lambda^{-5} \frac{C_2}{\lambda^2 T} e^{-C_2/\lambda T} = 0$$

$$e^{-C_2/\lambda T} (-5C_1 \lambda^{-6} + C_1 \lambda^{-5} \frac{C_2}{\lambda^2 T}) = 0$$

$$\lambda^{-7} (-5C_1 \lambda + \frac{C_1 C_2}{T}) = 0$$

$$\lambda T = \frac{C_2}{5} = \frac{hc}{5k} = \frac{6,63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{5 \times 1,38 \times 10^{-23}} = 0,0028826 \text{ Km (Kelvin, metro)}$$

Comparando esta relação  $\lambda_{\text{máx}} T = 0,0028826 \text{ km}$  com  $\lambda_{\text{máx}} T = 0,0028978 \text{ km}$  obtida numericamente, verificamos que a diferença é inferior a 0,00001.

### 6.3.3. Lei de Stefan – Boltzman

Integrando a função  $I_{\nu}$  para todas as frequências, obtemos a densidade de fluxo  $F$

$$F = \int_0^{\infty} \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} d\nu$$

Fazendo uma mudança de variável

$$x = \frac{h\nu}{kT} \text{ vem } \nu = \frac{kT}{h}; dx = \frac{h}{kT} d\nu$$

$$F = \frac{2h}{c^2} \times \left(\frac{kT}{h}\right)^4 \int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{2k^4}{c^2 h^3} \int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx \times T^4$$

daqui pode concluir-se que

$$F \propto T^4 \text{ pois } \frac{2k^4}{c^2 h^3} \text{ é uma constante tal como } \int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx$$

cujo valor não é facilmente calculado, estando envolvidas no seu cálculo funções especiais, como a função gama  $\Gamma$  e a função zeta de Riemman  $\xi$ .

$$\text{Nota : } \int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \int_0^{\infty} x^3 e^{-x} (1 + e^{-x} + e^{-2x} + \dots) dx = \Gamma(4)\xi(4) = 4! \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = 6 \frac{\pi^4}{15}$$

Como resultado é possível estabelecer uma relação entre o fluxo (quantidade de energia produzida pela estrela por unidade de tempo e de área) e a sua temperatura efectiva, a chamada **lei de Stefan-Boltzman**:

$$F = \sigma T^4 : \sigma = \frac{2k^4}{c^2 h^3} \times \frac{6\pi^4}{15} = 1,07751 \times 10^{-7} \text{ J s}^{-1} \text{ K}^{-4} \text{ m}^{-2}$$

Como o valor do integral coincide com o valor da área limitada pela curva de radiação, vamos determinar numa forma aproximada através de rectângulos (fig.6.13) as áreas limitadas pelas curvas para  $T=10.000 \text{ K}$   $T=9.000 \text{ K}$  e  $T= 8.000 \text{ K}$  usando intervalos para  $\lambda$  de  $1000 \text{ \AA}$  e tomando os valores de  $I_\lambda$  nos extremos superiores dos intervalos.

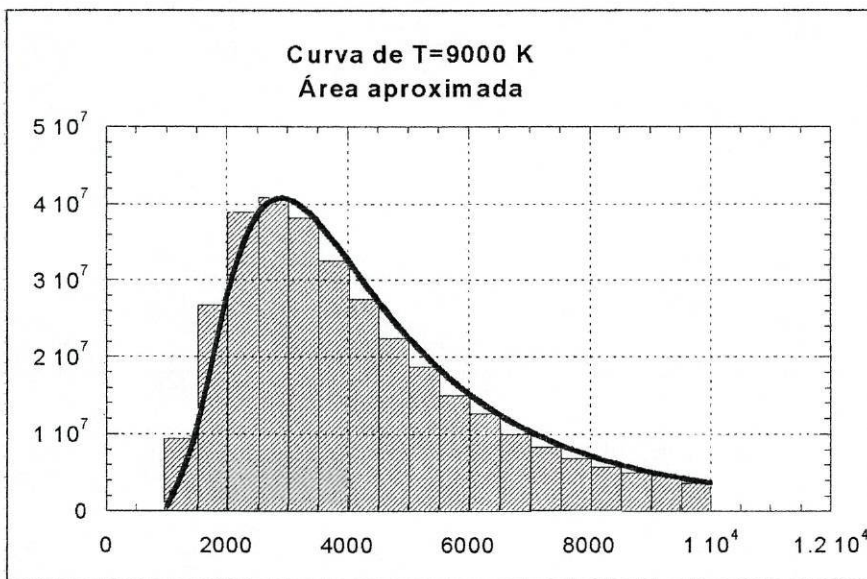


Fig.6.13 - A soma das áreas dos rectângulos dão-nos um valor aproximado da área limitada pela curva

Na tabela 6.3 estão registados os valores calculados com o Kaleidagraph, que nos dão as áreas para as curvas já referidas.

$\lambda$	$\lambda \times I_\lambda$	$\lambda \times I_\lambda$	$\lambda \times I_\lambda$
	T=10000 K	T=90000 K	T=8000 K
1000	6,6329e+08	1,3392e+08	1,8124e+07
1500	1,5922e+10	5,4792e+09	1,4443e+09
2000	5,5569e+10	2,4958e+10	9,1797e+09
2500	9,6299e+10	5,0702e+10	2,2761e+10
3000	1,2191e+11	7,1273e+10	3,6507e+10
3500	1,3171e+11	8,2879e+10	4,6591e+10
4000	1,3058e+11	8,6728e+10	5,2220e+10
4500	1,2332e+11	8,5335e+10	5,4144e+10
5000	1,1324e+11	8,0909e+10	5,3486e+10
5500	1,0231e+11	7,4997e+10	5,1233e+10
6000	9,1609e+10	6,8564e+10	4,8110e+10
6500	8,1647e+10	6,2170e+10	4,4602e+10
7000	7,2634e+10	5,6113e+10	4,1013e+10
7500	6,4611e+10	5,0531e+10	3,7523e+10
8000	5,7534e+10	4,5473e+10	3,4229e+10
8500	5,1323e+10	4,0935e+10	3,1179e+10
9000	4,5882e+10	3,6890e+10	2,8388e+10
9500	4,1120e+10	3,3294e+10	2,5855e+10
10000	3,6949e+10	3,0103e+10	2,3566e+10
$\sum \lambda \times I_\lambda$	1,4348e+12	9,8747e+11	6,4205e+11

Tabela 6.3 – Áreas dos rectângulos ( $\lambda \times I_\lambda$ ) e áreas totais  $\sum \lambda \times I_\lambda$

Designando por  $F_1$ ,  $F_2$  e  $F_3$  os fluxos correspondentes às temperaturas  $T_1$ ,  $T_2$  e  $T_3$  respectivamente 10.000 9.000 e 8.000 teremos

$$F_1 \cong 1,435 \times 10^{12} \quad F_2 \cong 9,875 \times 10^{11} \quad F_3 \cong 6,421 \times 10^{11}$$

pela Lei de Stefan-Boltzman

$$\frac{F_1}{T_1^4} = \frac{F_2}{T_2^4} = \frac{F_3}{T_3^4}$$

Substituindo pelos valores aproximados obtemos

$$\frac{1,435 \times 10^{12}}{10.000^4} = 1,435 \times 10^{-4} \quad \frac{9,875 \times 10^{11}}{9.000^4} = 1,505 \times 10^{-4} \quad \frac{6,421 \times 10^{11}}{8.000^4} = 1,567 \times 10^{-4}$$

ou seja

$$\frac{F_1}{T_1^4} \cong \frac{F_2}{T_2^4} \cong \frac{F_3}{T_3^4}$$

com diferenças pouco significativas, na ordem dos 4% 5% e 9%

$$\frac{1,505 \times 10^{-4}}{1,435 \times 10^{-4}} \cong 1,05$$

$$\frac{1,567 \times 10^{-4}}{1,435 \times 10^{-4}} \cong 1,09$$

$$\frac{1,567 \times 10^{-4}}{1,505 \times 10^{-4}} \cong 1,04$$

Em conclusão, estamos perante uma confirmação da Lei de Stefan – Boltzman dado que estas diferenças acontecem pelo facto de as áreas calculadas, serem aproximadas e não exactas.

#### 6.3.4. Luminosidade versus Raio e Temperatura

Sendo a luminosidade, o fluxo total emitido pela estrela de raio R e cuja superfície é  $S = 4\pi R^2$ , a partir da lei anterior podemos estabelecer que

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4$$

o que mostra a dependência da luminosidade com o raio e a temperatura, numa estrela.

Da lei de Stefan-Boltzman resulta claramente que a temperatura influencia bastante a quantidade de energia produzida pela estrela. Comparando os fluxos  $F_1$  e  $F_2$  de duas estrelas do mesmo raio e temperatura s  $T_1$  e  $T_2$  vamos ter

$$F_1 = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^4 \times F_2$$

o que significa que duplicando a temperatura, a energia produzida por unidade de área aumenta  $2^4$  ou seja 16 vezes.

No caso da luminosidade, além da temperatura interfere o raio embora numa forma menos acentuada. Para a mesma temperatura duas estrelas de raio s  $R_1$  e  $R_2$  terão uma relação entre as luminosidades  $L_1$  e  $L_2$

$$L_1 = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 \times L_2$$

ou seja duplicando o raio a energia total quadruplica.

Com esta lei é possível estimar o raio das estrelas comparado ao do Sol, uma vez obtidas por observação quer a luminosidade quer a temperatura .

### Exemplo 1

- Sirius                      Temperatura 9.150K                      Luminosidade  $23 \times L_{sol}$

$$F_{Sirius} = \left(\frac{9.150}{5.800}\right)^4 \times F_{sol}$$

$$\frac{L_{Sirius}}{L_{sol}} = \left(\frac{R_{Sirius}}{R_{sol}}\right)^2 \times \left(\frac{9.150}{5.800}\right)^4$$

$$\frac{R_{Sirius}}{R_{sol}} = \sqrt{23 \times \left(\frac{5.800}{9.150}\right)^4} = 1,9$$

### Exemplo 2

- Estrela polar                      Temperatura 6.150K                      Luminosidade  $1629 L_{sol}$

$$F_{Polar} = \left(\frac{6.150}{5.800}\right)^4 \times F_{sol}$$

$$\frac{L_{Polar}}{L_{sol}} = \left(\frac{R_{Polar}}{R_{sol}}\right)^2 \times \left(\frac{6.150}{5.800}\right)^4$$

$$\frac{R_{Polar}}{R_{sol}} = \sqrt{1629 \times \left(\frac{5.800}{6.150}\right)^4} = 35,9$$

Por outro lado verifica-se uma relação linear entre  $\log L$  e  $\log T$  para cada valor do raio ou seja, com raio constante resulta

$$\log L = \log(4\pi\sigma R^2 T^4)$$

$$\log L = \log 4\pi\sigma R^2 + \log T^4$$

$$\log L = \log 4\pi\sigma R^2 + 4\log T$$

que corresponde à equação duma recta num gráfico de coordenadas( $\log L$ ,  $\log T$ )

Isto tem como consequência a possibilidade de obter num diagrama H-R o raio duma estrela sabida a sua posição, como se mostra na fig.6.14 em que a escala da luminosidade tem como unidade a luminosidade do Sol e em que no eixo das temperaturas,  $T$  decresce para a direita

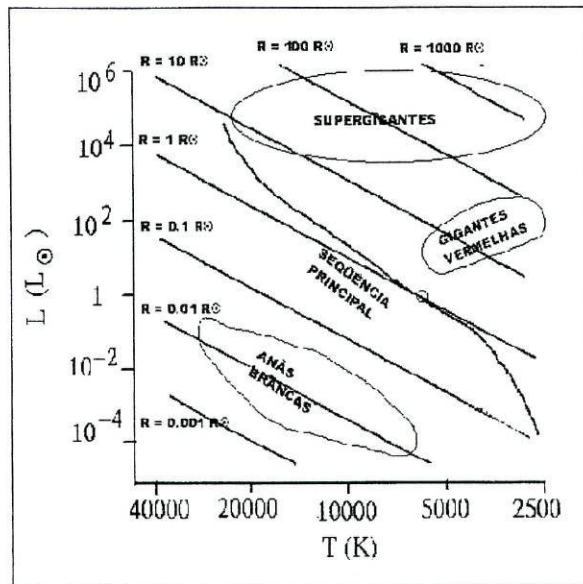


Fig. 6.14 – Diagrama H-R com valores para os raios, medidos em raios solares

Com base neste diagrama concluímos por exemplo, que uma estrela com uma temperatura de 10.000K e 1 centésimo da luminosidade do Sol, terá um raio entre 100 e 10 vezes menor que o do Sol, ou que uma estrela com raio 10 vezes maior que o Sol e temperatura superior a 5.000K, terá seguramente uma luminosidade 100 vezes superior à do Sol.

### 6.3.5. Exemplos de aplicação das leis de Wien e de Stefan-Boltzman:

1. Sendo a temperatura do Sol de 6.000 K e da Terra de 300 K calcular o comprimento de onda da radiação mais abundante

- Para o Sol

$$\lambda_{\text{máx}} = \frac{0,0029}{6.000} = \frac{2,9 \times 10^{-3}}{6 \times 10^3} = 0,48 \times 10^{-6} \text{ m}$$

- Para a Terra

$$\lambda_{\text{máx}} = \frac{0,0029}{300} = \frac{2,9 \times 10^{-3}}{3 \times 10^2} = 0,96 \times 10^{-5} \text{ m}$$

2. Qual a temperatura da Terra devido á energia Solar?

- Energia do Sol na Terra

A energia que atinge a Terra por unidade de área e de tempo, por definição de fluxo, é:

$$F_T = \frac{L_S}{4\pi r^2}$$

onde  $r$  é a distância do Sol à Terra, de 1 unidade astronómica (UA) = 150 milhões de km, e

$$L_S = 3,9 \times 10^{33} \text{ ergs / seg}$$

- Potência luminosa

Portanto a potência luminosa interceptada pela Terra, que tem uma secção recta  $\pi R_T^2$  onde  $R_T = 6370$  Km é o raio da Terra, é dada por:

$$P = \pi R_T^2 F_T = \pi R_T^2 \frac{L_S}{4\pi r^2}$$

- Fluxo incidente

Devido à rotação da Terra, o fluxo médio incidente é obtido dividindo a potência interceptada na Terra pela área total da Terra,  $4\pi R_T^2$ .

$$\overline{F_T} = \frac{P}{4\pi R_T^2} = \frac{L_S}{16\pi r^2} = 3,5 \times 10^5 \text{ ergs / s}^{-1} \text{ cm}^{-2}$$

- Temperatura

A Terra absorve 61% da luz incidente, reflectindo os outros 39%. A energia absorvida aquece a Terra, que irradia como um corpo negro a uma taxa  $\sigma T^4$  por unidade de área. Logo

$$\sigma T_T^4 = 0,61 \overline{F_T}$$

o que resulta em uma temperatura para a Terra de  $T_T = 249 \text{ K}$ .

De facto, devido ao efeito estufa do gás carbónico ( $CO_2$ ) e da água, a temperatura da Terra é de 290 K. Portanto o efeito estufa mantém a água na superfície da Terra acima do ponto de congelação, de 273 K.

3. Considerando que o aumento da luz solar e os aumentos de luz reflectida e absorvida pelo planeta é constante (ignorando os efeitos sazonais)

- Qual a variação da temperatura superficial de Marte da posição no periélio para o afélio?
- Comparar com o que sucede na Terra, nas mesmas circunstâncias.

Segundo a lei de Stefan-Boltzman, a temperatura é proporcional ao fluxo elevado a  $1/4$ . Precisamos então de saber como varia o fluxo. A energia emitida pelo Sol que chega ao planeta, decresce de acordo com o inverso do quadrado da distância, pelo que:

$$\frac{\text{Fluxo}_{\text{sol(periélio)}}}{\text{Fluxo}_{\text{sol(afélio)}}} = \left( \frac{1,666}{1,382} \right)^2 = 1,453$$

Com este resultado calculamos a razão das temperaturas:

$$\frac{T_{\text{periélio}}}{T_{\text{afélio}}} = \left( \frac{1,453}{1} \right)^{\frac{1}{4}} = 1,098$$

Que mostra haver uma variação de 10% na temperatura mesmo desprezando outros efeitos.

Na Terra, sendo a excentricidade orbital de 0,0017, implica para o periélio uma distância de 0,983 UA, e para o afélio 1,017 UA.

Assim sendo a razão entre os fluxos será:

$$\frac{\text{Fluxo}_{\text{sol(periélio)}}}{\text{Fluxo}_{\text{sol(afélio)}}} = \left( \frac{1,017}{0,983} \right)^2 = 1,034$$

E a conseqüente variação na temperatura:

$$\frac{T_{\text{periélio}}}{T_{\text{afélio}}} = \left( \frac{1,034}{1} \right)^{\frac{1}{4}} = 1,008$$

Ou seja menos de 1% o que é pouco significativo.

4. Sem uma atmosfera a provocar o efeito de estufa, a temperatura de Vénus seria de 297 K, no entanto a temperatura actual é de 737 K.

Usando a lei de Stefan-Boltzman, calcula a razão dos fluxos

- O absorvido pela superfície de Vénus com efeito estufa
- O que absorveria sem efeito estufa.

A temperatura é proporcional ao fluxo elevado a 1/4

$$T_{\text{Vénus, com ef. estufa}} = 737 \sigma = N^{1/4}$$

$$T_{\text{Vénus, sem ef. estufa}} = N^{1/4} \times 297 \sigma$$

$$N = \left( \frac{737}{297} \right)^4 = 37,9$$

Conclui-se então, que a superfície de Vénus recebe 38 vezes mais energia (devido ao efeito estufa da atmosfera) do que a que Vénus recebe do Sol actualmente. Visto doutra maneira, a atmosfera de Vénus provoca um efeito equivalente ao de 38 Sóis que iluminassem Vénus simultaneamente.

## Questões sobre estrelas

- Explicar por que é que o Sol, nos parece mais brilhante do que a estrela Rigel da constelação de Oriente, sabendo-se que é 60 000 mais luminosa do que o Sol
- Estando o Sol a 150 milhões de Km da Terra qual a distância a que se situa Rigel?
- Completar a tabela 6.4

Estrela	m	M	Paralaxe(")
Alfa Centauro	-0,3		0,750
Thuban	4,7	5,9	0,176
Estrela de Barnard		13,2	0,545
Altair	0,8	2,3	0,202

Tabela 6.4

Qual a estrela que parece mais brilhante? E a que parece menos brilhante?

Qual a que apresenta maior luminosidade? E a de menor luminosidade?

Qual a mais próxima? E a mais distante?

Qual a magnitude M dum estrela que dista 15,2 pc e cuja magnitude aparente é de 12,3?

- Qual a distância dum enxame de Galáxias cujas magnitudes aparente e absoluta são respectivamente 8,0 e 5,8?
- Representa graficamente a função  $m - M = 5 \log d - 5$  com  $m - M$  no eixo vertical e  $d$  no eixo horizontal.

Para que valores de  $d$  a função é positiva? E negativa?

Para que distâncias o módulo da distância  $m - M$  cresce mais rapidamente?

Qual o significado físico da função ser crescente.

- O Sol tem um máximo de intensidade na região amarela do espectro, para  $\lambda = 5600$  Angstroms. Usando a Lei de Wien, estime no caso de uma estrela com temperatura dupla da do Sol (Rigel por ex.) onde se situa o máximo da radiação.
- Qual será o excesso de energia emitida por Rigel relativamente ao Sol
- Qual a frequência da radiação cujo comprimento de onda é igual à tua altura.
- Qual é a luminosidade dum estrela anã branca de temperatura efectiva 12000 K sabendo que o seu raio é aproximadamente o da Terra. Usar as seguintes relações:  $L = 4\pi R^2 \sigma T^4$ ;  $F = \sigma T^4$

## Capítulo 7

### O declive da recta e a idade do Universo

Neste capítulo, mostra-se como estimar uma idade para o Universo partindo de dados observados e usando um modelo simples de regressão linear.

Os conceitos chave são:

- Declive da recta
- Regressão linear

Isto pode ser introduzido no estudo das " Funções lineares " para mostrar através do declive a variabilidade e imprecisão das estimativas, conforme os dados sobre os quais se trabalha.

Uma forma de explorar este modelo será fazer um estudo comparativo:

- Partir de dados diferentes
- Fazer as correspondentes estimativas
- Com base no modelo usado explicar o porquê das diferenças obtidas

Tratando-se duma questão sempre em aberto e em constante evolução, a determinação da idade do Universo, pode constituir um bom exemplo de motivação para os alunos se interessarem no estudo e aplicação de modelos matemáticos, tomando simultaneamente consciência das suas limitações e da necessidade do seu constante aperfeiçoamento.

## 7.1. Lei de Hubble

Em 1929 após anos de observação de várias galáxias, Edwin Hubble encontrou uma correlação entre a velocidade de afastamento (ou velocidade de recessão das galáxias) e a distância a que se encontram, na qual a velocidade é directamente proporcional á distância. Ou seja, quanto mais distantes estão as galáxias mais depressa se afastam. Essa correlação linear, a chamada Lei de Hubble é traduzida da seguinte maneira:

$$V = H D \quad \text{sendo:}$$

$V$  = velocidade de recessão (em km/seg)

$D$  = distância (em megaparsecs)

$H$  = constante de Hubble

Por esta relação, sabida a velocidade pode-se calcular facilmente a distância resolvendo a equação para  $D$ . É desta maneira que se podem obter distâncias às galáxias e aos enxames globulares. O valor original calculado para  $H$  por Hubble foi de 550 km/seg/megaparsec. Isto implica que uma galáxia ou enxame, se afasta de nós a uma velocidade de 55 km/seg por cada milhão de parsecs da sua distância. Intuitivamente isto faz sentido, quanto mais rapidamente uma galáxia ou enxame se afasta de nós mais longe se encontrará. Contudo o valor de  $H$  tem sido rederterminado, sendo actualizado sucessivamente para um valor inferior ao anteriormente aceite (ver tabela 7.1).

Ano	Autor	$H_0(\text{Kms}^{-1}\text{Mpc}^{-1})$
1936	Hubble	536
1950	Baade	200
1958	Sandage	100
1975	Sandage	55
1993	Sandage	45
1996	HST	30

Tabela 7.1 - Estimativas efectuadas ao longo dos anos para o valor da constante de Hubble. HST é a abreviatura para Hubble Space Telescope.

A determinação precisa da distância às galáxias não é fácil. Métodos que usamos frequentemente no dia a dia revelam-se pouco eficazes para tão grandes distâncias.

Distâncias a algumas das galáxias mais próximas são afectadas de erros da ordem dos 10% enquanto as distâncias aos enxames mais distantes são estimadas com uma incerteza de pelo menos 50%, o que não é de surpreender pois quanto mais longe se situa um objecto tanto menos precisa se torna a medida da sua distância.

Os métodos pelos quais é possível medir distâncias galácticas, são indirectos e estão dependentes em larga medida das propriedades das estrelas mais brilhantes, presentes nessas galáxias. De modo a tirar partido destas estrelas, assume-se que tanto nas galáxias próximas como nas distantes, estas estrelas são basicamente semelhantes às da nossa Galáxia.

### 7.1.1 O efeito Doppler

A determinação da velocidade baseia-se na medição do desvio para o vermelho (redshift) que se observa no comprimento de onda da radiação emitida pelas galáxias, desvio esse cuja componente principal é devida à expansão do Universo (componente cosmológica) e que pode ter uma componente devida ao chamado efeito Doppler <sup>1</sup>

Segundo este efeito, uma fonte de radiação (neste caso uma galáxia) que se afaste dum observador (nós aqui na Terra) apresenta a esse observador, uma radiação cujo comprimento de onda é mais longo do que seria se a fonte fosse estacionária (fig.7.1)

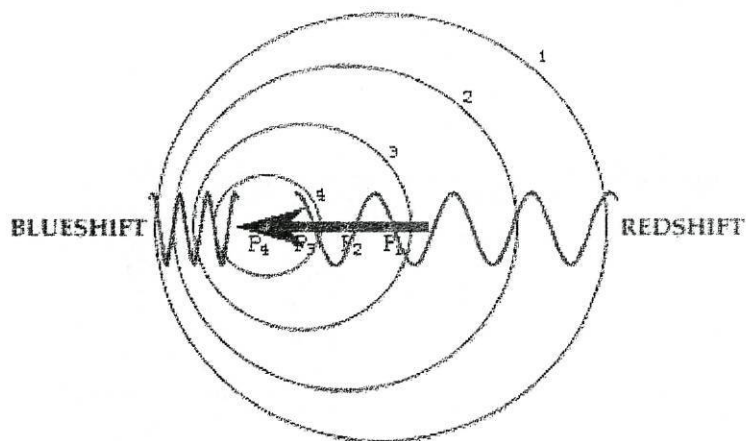


Fig.7.1 - Efeito Doppler

<sup>1</sup> A componente devido ao efeito Doppler, é apenas consequência de movimentos locais das Galáxias, e tanto pode provocar um desvio para o azul como para o vermelho, ao contrário da componente cosmológica cujo desvio é sempre para o vermelho.

### 7.1.2. Velocidade de recessão<sup>2</sup>

Esta diferença no comprimento de onda, deve-se à velocidade de deslocamento (chamada de recessão) em relação ao observador como se mostra na fig.7.2.

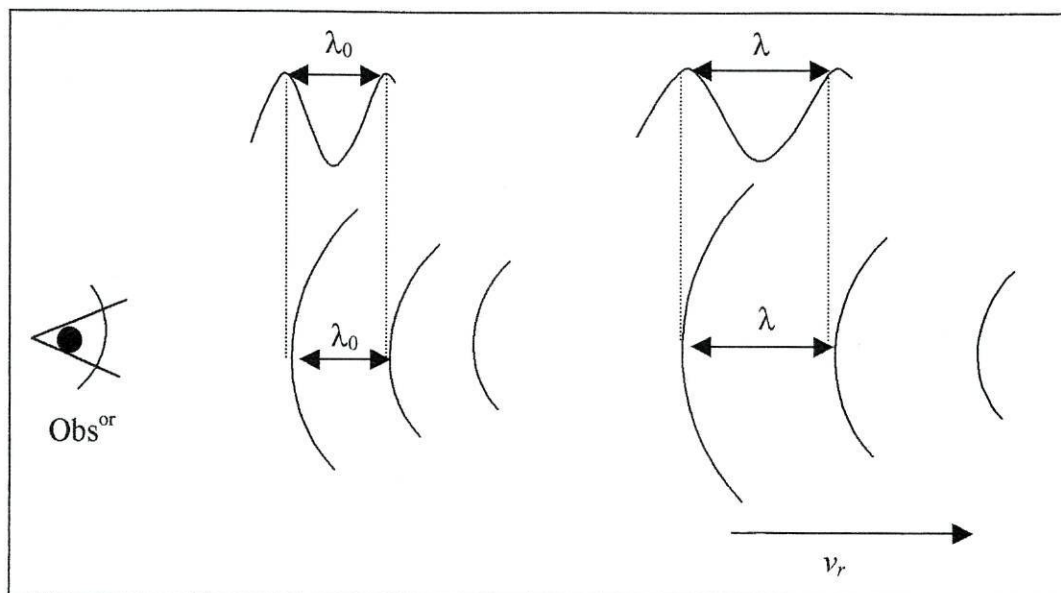


Fig.7.2 - Variação do comprimento de onda visto pelo observador: quanto mais afastado maior é o comprimento de onda  $\lambda > \lambda_0$

Como a radiação viaja á velocidade da luz  $c$  e  $c = \lambda \times \nu$  sendo  $\nu$  a frequência da radiação vamos ter

$$\nu_0 = \frac{c}{\lambda_0} \text{ e } \nu = \frac{c}{\lambda}$$

sendo  $\nu$  e  $\nu_0$  as frequências respectivas. Assim sendo vem

$$\nu_0 - \nu = \frac{c}{\lambda_0} - \frac{c}{\lambda} = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda \times \lambda_0} \times c$$

$$(\nu_0 - \nu) \times \lambda = c \times \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}$$

onde  $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$  é o desvio entre o comprimento de onda observado e o de referência que é fixo, e  $(\nu_0 - \nu) \times \lambda$  é a velocidade de afastamento em relação ao observador fixo, chamada velocidade de recessão  $\nu_r$ . Daqui resulta finalmente<sup>3</sup>

$$\nu_r = c \times \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}$$

<sup>2</sup> Esta velocidade é independente do efeito Doppler

<sup>3</sup> Isto é apenas válido para velocidades baixas, quando comparadas com a velocidade da luz, que é o caso das galáxias, sendo o efeito relativístico (contração do espaço e dilatação do tempo) desprezável.

Com base em observações registaram-se os seguintes dados relativos a alguns enxames e galáxias que constam da tabela 7.2

	Distância (Mpc)	Velocidade (km/sec)		Distância (Mpc)	Velocidade (km/sec)
Pegasus I	57	3.810	Pegasus II	218	12.800
"	69	3.860	Gemini	450	23.400
Perseus	80	5.430	"	552	22.400
"	120	4.960	Leo	460	19.200
Coma	87	6.657	Ursa MajorII	685	40.400
"	180	7.200	"	830	40.000
Hercules	158	10.400			

Tabela 7.2 - Distâncias e Velocidades Aproximadas de Enxames e Galáxias

Fazendo a média para as observações repetidas

	Distância (Mpc)	Velocidade (km/sec)		Distância (Mpc)	Velocidade (km/sec)
Pegasus I	63	3.835	Pegasus II	218	12.800
Perseus	100	5.195	Gemini	501	22.900
Coma	133,5	6.928,5	Leo	460	19.200
Hercules	158	10.400	Ursa Major II	757,5	40.200

Tabela 7.3 - Distâncias e Velocidades Aproximadas de Enxames e Galáxias

Com base nos dados recolhidos e registados na tabela 7.3 corrigida vamos usar o método dos mínimos quadrados que nos permite obter a equação da recta

$$V = aD + b$$

que melhor se ajusta ao conjunto de dados. Para isso vamos construir a tabela 7.4

Distância	Velocidade	Distância x Velocidade	Quadrado da distância
D	V	D x V	D <sup>2</sup>
63	3.835	241.605	3.969
100	5.195	519.500	10.000
133,5	6.928,5	924.954,75	17.822,25
158	10.400	1.643.200	24.964
218	12.800	2.790.400	47.524
501	22.900	11.472.900	251.001
460	19.200	8.832.000	211.600
757,5	40.200	30.451.500	573.806,25
$\sum D=2.391$	$\sum V=121.458,5$	$\sum D \times V=56.876.059,75$	$\sum D^2=1.140.686,5$

Tabela 7.4 - Somatórios dos dados necessários ao modelo de regressão

e calcular  $a$  e  $b$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} a = \frac{N \sum DV - \sum D \sum V}{N \sum D^2 - \sum D^2} = 48,29 \\ b = \frac{\sum V \sum D^2 - \sum D \sum DV}{N \sum D^2 - \sum D^2} = 749,69 \end{array} \right.$$

Daqui obtém-se

$$H \cong 48,3 \text{ Km /s / Mpc}$$

Gráfico dos dados com a respectiva aproximação linear (fig.7.3).

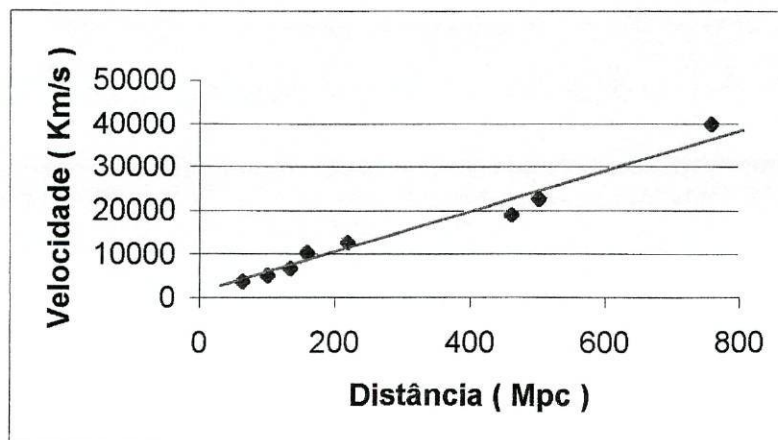


Fig.7.3 - Velocidade versus distância

Com base no gráfico obtemos o declive da recta (usando os 1º e 3º pontos)

Declive esse que corresponde à constante de Hubble, H:

$$H = \frac{6.928,5 - 3.835}{133,5 - 63} \cong 43,9 \text{ Km/seg/Mpc}$$

Comparando os valores obtidos pelos 2 processos, verifica-se uma diferença de aproximadamente 5 Km/s/Mpc que não é desprezável dados os valores envolvidos. Como é óbvio o valor mais fiável corresponde ao obtido por regressão (48,3)

#### 7.1.4. Cálculo da distância às galáxias

A fig.7.5 mostra-nos o espectro de 5 enxames de galáxias.

Na fig.7.4 é mostrado para comparação um espectro de Hidrogénio.

A determinação do redshift (desvio para o vermelho) dos cinco enxames da fig.7.5 faz-se de acordo com os seguintes passos:

- Calcula-se o intervalo de valores para o comprimento de onda na fig.7.4
- Mede-se em cm a distância dum padrão na fig.7.5. Determina-se o factor de escala para o espectro da fig.7.5, dividindo o intervalo de valores do comprimento de onda na fig.7.4 pela correspondente distância em cm no padrão da fig.7.5.

Intervalo de valores para o comprimento de onda na fig.7.4

$$(5015 - 3888) = 1127 \text{ \AA}$$

Medida em cm do mesmo intervalo na fig.7.5 - 8,8 cm.

Factor de escala 128.068 \text{ \AA} / \text{cm} .

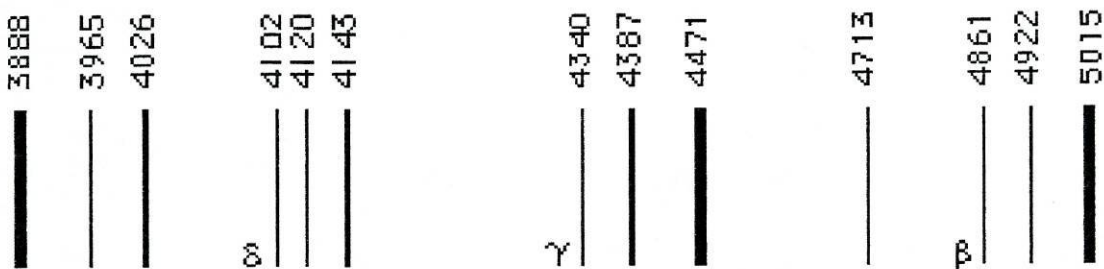


Fig.7.4 - Espectro de comparação do Hidrogénio

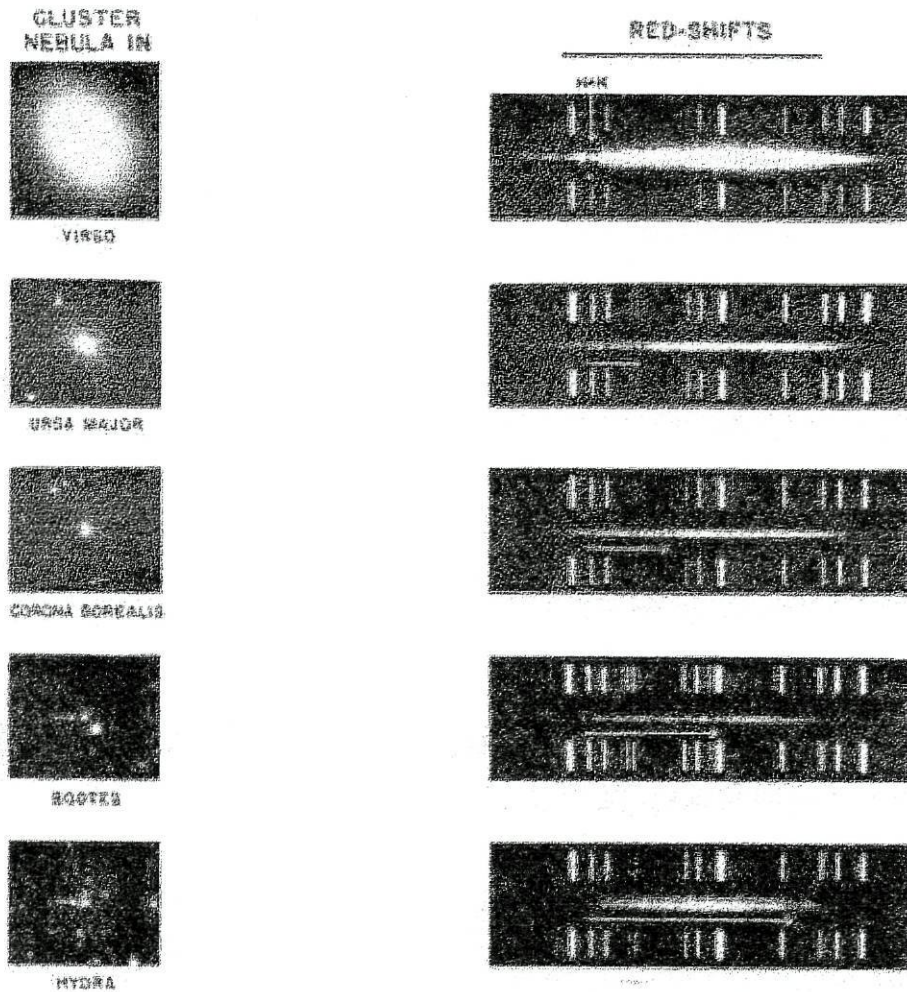


Fig.7.5 - Red-shift de vários enxames.

- Agora mede-se o red shift que está assinalado nos espectros pela seta. Primeiro mede-se em cm e depois usa-se o factor de escala e converte-se para Å .

Medição do red shift  $\Delta\lambda$

Os valores obtidos estão registados na tabela 7.5

Enxame	(cm)	$\Delta\lambda$ (Å)
Virgo	0,1	12,81
Ursa Major	1,5	192,10
Corona Borealis	2,4	307,36
Bootes	4	512,27
Hydra	6,2	794,02

Tabela 7.5 - Redshift medido

- Calcula-se a velocidade  $v$  de cada enxame (tabela 7.6).

Para determinar a velocidade do enxame é usada a equação de Doppler

$$v = c \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \quad \text{onde :}$$

$v$  = velocidade de recessão da galáxia.

$C$  = velocidade da luz = 300 000 km/sec

$\Delta\lambda$  = Desvio no comprimento de onda em angstroms (Å)

$\lambda$  = 3933 Å (comprimento de onda de referência sem desvio em angstroms)

Enxame	$v$ (km/sec)
Virgo	976,89
Ursa Major	14.653,1
Corona Borealis	23.445
Bootes	39.075
Hydra	60.566,2

Tabela 7.6 – Velocidade de recessão das galáxias

- Determina-se a distância a cada enxame usando a Lei de Hubble e resolvendo para  $r$  com  $H = 48,3$  (tabela 7.7)

$$V = H \times r$$

$$r = \frac{V}{H}$$

Enxame	$r$ (Mpc)
Virgo	20,23
Ursa Major	300,45
Bootes	809,19
Hydra	1.254,24

Tabela 7.7 – Distância às galáxias

## 7.2. A constante de Hubble e a idade do Universo

Sendo a constante de Hubble a medida da velocidade de afastamento por cada unidade de distância (pc) dum dado objecto galáctico, é possível fazer uma estimativa do tempo que demorou a percorrer essa distância, admitindo que no instante da criação do universo toda a matéria se encontrava concentrada num ponto, e em consequência da explosão (o chamado Big Bang) a matéria terá sido expelida em todas as direcções não mais parando de se expandir. Significa isto que se uma galáxia está neste instante a uma dada distância  $r$  de nós e se move a uma dada velocidade  $v$ , o tempo que demorou a percorrer essa distância (admitindo velocidade constante) será:

$$T = \frac{r}{v} \quad \text{e} \quad \text{como}$$

$$v = H \times r \quad \text{Lei de Hubble}$$

resulta

$$H = \frac{v}{r} \quad \text{ou seja} \quad T = \frac{1}{H} = H^{-1}$$

sendo a unidade de  $H$  Km/seg /Mpc e  $1 \text{ Mpc} = 3 \times 10^{19} \text{ Km}$ .

Com base no valor de  $H$  obtido acima, a idade estimada para o Universo será:

$$T = \frac{1}{48,429} = 0,02 \times 3 \times 10^{19} \text{ seg} = \frac{6 \times 10^{17}}{365 \times 24 \times 3.600} = 19,5 \times 10^9 \text{ anos}$$

ou seja um valor na ordem dos **19,5 mil milhões de anos**.

O valor calculado da constante de Hubble depende de vários factores como :

1. Métodos utilizados na medição das distâncias ás galáxias e respectivas velocidades de recessão e que implicam uma maior ou menor fiabilidade dessas medidas
2. Grau de precisão e sofisticação da instrumentação utilizada na recolha dos dados.
3. Grupo de galáxias (ou outros objectos como Quasares) sobre o qual são feitos os registos como se pode ver na fig.7.6.

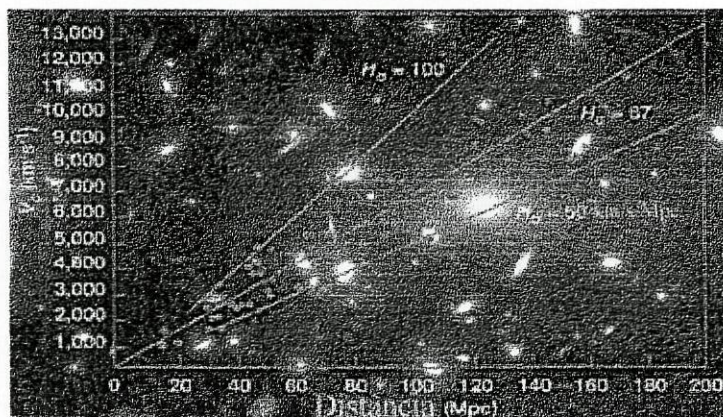


Fig.7.6 - Valores da constante de Hubble para diferentes grupos de galáxias

Na figura aparecem três valores para a constante de Hubble 50, 67 e 100, cada um deles associado a um grupo de galáxias. Os valores de 50 e 67 para as galáxias que se posicionam no gráfico na parte inferior e superior respectivamente, e o valor de 100 para as galáxias que ocupam a parte central.

Apesar destas diferenças é considerada como a mais aceitável, uma *idade para o Universo, entre 8 e 15 mil milhões de anos*, sujeita a constantes actualizações, fruto de novos dados e novas teorias da cosmologia actual.

### 7.3. Uma actividade experimental sobre a Lei de Hubble

Extraída de : Schlumberger SEED – Site Educacional sobre Ciência  
<http://www.slb.com/seed/pt/index.htm>

#### *A Constante de Hubble:*

#### *O Efeito da Distância sobre a Velocidade*

Na década de 20, Edwin Hubble descobriu que, além de todas as galáxias do universo se estarem a afastar de nós, quanto mais longe uma galáxia estivesse mais rápido ela se afastaria. Um elástico de borracha pode ser usado como modelo unidimensional do nosso universo e ajudar - nos a entender que a descoberta de Hubble faz sentido.

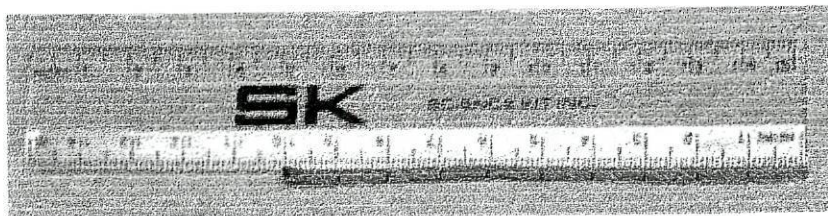
#### Ferramentas e Materiais

- Um Elástico de Borracha Grande (circunferência com cerca de 12 cm)
- Uma Régua
- Uma Caneta ou Marcador de Ponta Fina
- A Tabela de Dados abaixo (ou um papel) para anotar os resultados
- Tesoura

#### A Experiência:

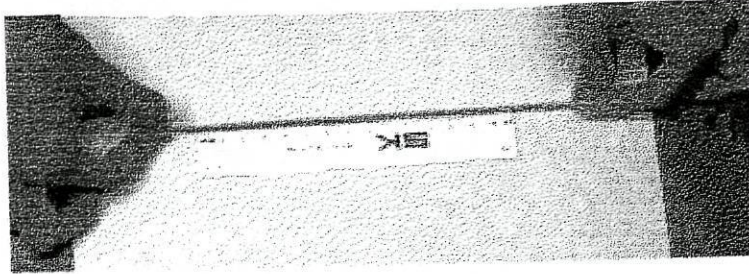
1. Cortar o elástico de modo que forme duas extremidades.
2. Colocar o elástico de borracha próximo da régua de modo que uma extremidade dele comece no zero e continue ao longo da régua.
3. Usando a caneta, fazer uma marca fina no elástico de borracha em cada centímetro.

OBS.: Não esticar o elástico de borracha ao fazer as marcas!



4. Assumir que a primeira marca no elástico de borracha é a Via Láctea e que as marcas seguintes são outras galáxias no universo que estão alinhadas com a Via Láctea.

5. Alinhar a Via Láctea com a marca de 1 cm. O restante das marcas no elástico de borracha deve coincidir com a coluna A na tabela de dados.
6. Esticar o elástico de borracha de modo que a Via Láctea permaneça em 1 cm, mas de tal forma que a marca mais próxima mude de 2 cm para a de 3 cm.



7. Anotar na tabela abaixo a nova posição de cada marca na régua após esticar o elástico. Essa é a coluna B.

Localização na Régua Antes de Esticar (cm)	Distância de Início a Partir da Via Láctea (cm)	Localização na Régua Após Esticar (cm)	Distância Movida (cm)	Velocidade (cm/s)
A		B	C = B - A	C/0,5
1 cm = Via Láctea	0			
2	1			
3	2			
4	3			
5	4			
6	5			

8. Calcular a distância percorrida por cada galáxia subtraindo a coluna A da coluna B. Essa é a coluna C.

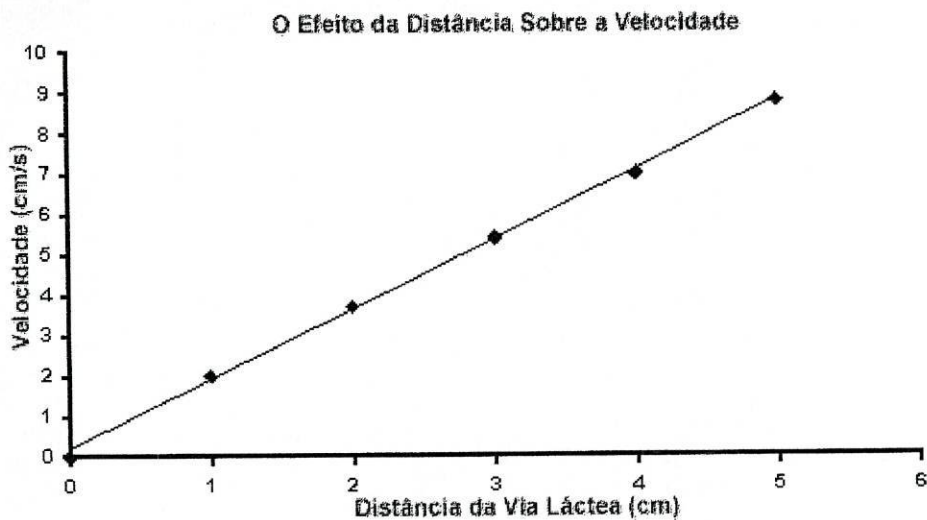
9. Calcular a velocidade de cada galáxia. Para fazer isso, assumir que ao esticar o elástico de borracha, as galáxias se moveram para as novas posições em 0,5 segundo. Então, como a velocidade é a distância percorrida dividida pelo tempo, a velocidade é simplesmente a coluna C dividida por 0,5. Dados obtidos na experiência:

Localização na Régua Antes de Esticar (cm)	Distância de Início a Partir da Via Láctea (cm)	Localização na Régua Após Esticar (cm)	Distância Movida (cm)	Velocidade (cm/s)
A		B	C = B - A	C / 0,5
1 cm = Via Láctea	0	0	0	0
2	1	3	1	2
3	2	4,85	1,85	3,7
4	3	6,7	2,7	5,4
5	4	8,5	3,5	7
6	5	10,4	4,4	8,8

Dos dados registados pode-se constatar o seguinte:

- A Via Láctea nunca se move.
- Quanto mais distante a galáxia está da Via Láctea, mais rápido ela se move.

A constatação está de acordo com as descobertas de Hubble. É possível ver isso no gráfico abaixo, que foi feito com os dados registados.



Analisando o gráfico, verifica-se:

- Uma relação quase linear entre a velocidade e a distância
- Uma proporcionalidade directa entre velocidade e distância  $V = k.D$  sendo  $k$  o declive da recta que neste caso vale 2.
- Quanto maior é a distância maior é a velocidade, conclusão retirada por Hubble

### Exercício

Escolher uma marca diferente no elástico para representar a galáxia de referência. Em seguida, repetir a experiência :

- Comparar os dados novos aos originais. Que se pode concluir?
- Quando se esticou o elástico de borracha, as marcas estavam a aproximar - se ou a afastar - se da marca de referência?
- A relação entre a velocidade e a distância alterou-se ou manteve-se? Qual o significado disso?

## Conclusões

Tendo como base a relação da Astronomia com a Matemática na definição de situações exploratórias, procura-se ao longo deste trabalho desenvolver uma estratégia possível a ser adoptada na sala de aula, tendo como objectivos

- Explicar matematicamente determinados fenómenos
- Usar a Matemática " experimentalmente "
- Fazer a ponte entre a Matemática e Astronomia
- Promover uma cultura científica de base

A explicação matemática de fenómenos poderá ser aproveitada para introduzir a Astronomia na sala de aula, permitindo deste modo concretizar e consolidar os conceitos matemáticos associados a esses fenómenos.

A opção de estruturar o trabalho na base de uma associação directa entre conceitos matemáticos e fenómenos astronómicos, permitirá expandir a ideia (pouco generalizada mesmo em contexto escolar) que a Matemática também pode ser "experimental".

Em concreto os modelos matemáticos e os cálculos associados na:

- Distâncias aos planetas ou às estrelas,
- Previsão dos eclipses
- Estimação da idade do Universo
- Determinação da temperatura duma estrela
- Caracterização das órbitas planetárias
- Descrição dos movimentos aparentes do Sol
- Astronomia de posição

podem ser explorados na sala de aula, constituindo uma motivação suplementar que estimule a curiosidade intelectual e científica de alunos e professores, para além do programaticamente estabelecido.

Tendo em atenção o contexto deste trabalho no ensino secundário, como forma de fazer a ponte entre Matemática e Astronomia, optou-se pelo estudo de fenómenos astronómicos conhecidos e observados naturalmente, por exemplo:

- Eclipses
- Movimentos aparentes do Sol

ou por fenómenos sobre os quais é possível aceder a informação actualizada e que pode ser trabalhada matematicamente, como por exemplo:

- Movimentos planetários
- Manchas Solares
- Galáxias

## **Perspectivas**

Tendo sido nosso propósito ao longo deste trabalho constituir uma base de apoio e inspiração/motivação quer para alunos quer para professores, isso poderá servir de suporte à dinamização dum "Atelier de Astronomia" vocacionado para a realização de trabalhos interdisciplinares, como por exemplo:

- Simulação dos movimentos de rotação e translação da Terra
- Construção dum relógio de Sol

A simulação dos movimentos da Terra pode ser usada para mostrar a influência da posição da Terra relativamente ao Sol nas estações do ano e na definição das zonas climáticas terrestres, em colaboração com a Geografia, e através das leis físicas explicar as órbitas dos planetas em colaboração com a Física.

Quanto ao relógio de Sol, o seu planeamento e construção constitui um desafio que obriga ao estudo e aplicação da Matemática necessária á sua concretização, pelo que a sua descrição irá ser referida em detalhe no Anexo II .

Por outro lado perspectiva-se também a utilização deste trabalho noutros domínios

- Colaborar com outras escolas da cidade (Básicas e Secundárias) na elaboração e proposta de actividades extra - curriculares.
- Dar continuidade ao trabalho desenvolvido no âmbito do programa "Ciência Viva", propondo por exemplo um projecto relacionado com observações astronómicas para recolhas de dados (posições estelares, brilhos e magnitudes , eclipses e movimentos planetários entre outros) a serem posteriormente tratados e interpretados matematicamente.
- Propor na área da formação de professores uma acção sobre "Astronomia e Matemática"

Esta última proposta materializa assim um dos principais objectivos deste trabalho, que é "divulgar a Astronomia e mostrar o seu lado matemático".

## Anexo I



Selo comemorativo dos 500 anos do  
nascimento de Pedro Nunes

## Pedro Nunes

## Pedro Nunes(1502-1578)

Nasceu em Alcácer do Sal em 1502, foi lente nas Universidades de Lisboa e Coimbra, cosmógrafo do Reino, cosmógrafo – mor e perceptor dos Infantes D.Luís e D.Henrique. Faleceu em Coimbra em 1578

**Pedro Nunes** foi um dos maiores e um dos mais influentes matemáticos do séc XVI, autor de uma obra notável com destaque para:

- "*Libro de Algebra*" que terá escrito em 1524.
- "*O Tratado da Sphera*" de 1537 onde refere a *curva loxodrómica* por si concebida.
- "*De crepusculis liber unus*" a sua obra mais considerada publicada em 1542 onde expõe a teoria dos crepúsculos e aborda problemas astronómicos envolvendo a declinação e ascensão recta dum astro e a latitude e longitude do local, fazendo referência a um novo instrumento destinado a medir ângulos com grande precisão: *o nónio*.

Entre outros assuntos preocupou-se com os problemas ligados à *navegação*, que nessa altura os descobridores portugueses necessitavam de resolver, nomeadamente problemas de orientação e de localização.

Uma das suas contribuições com o objectivo de medir a altura do Sol necessária à determinação da latitude, foi a engenhosa invenção dum instrumento que permitia medir a referida altura directamente num círculo graduado, instrumento esse que ele nomeou como "*instrumento jacente no plano*" também conhecido como "*instrumento de sombras*", pois o seu funcionamento que iremos descrever em detalhe, assenta na sombra projectada por um gnómon triangular sobre uma base plana horizontal.

Este instrumento tal como outro da sua autoria "*o anel graduado*" constam da obra

- "*Petrii Nonii Salaciensis, De arte ratione navigandis libri duo, etc*" publicado em 1573.

### Instrumento jacente no plano ou instrumento de sombras.

Este instrumento (fig.1) é constituído por uma base plana normalmente quadrada onde se inscreve um círculo, com a tangente  $HH'$  traçada no ponto  $G$  que é o vértice duma placa  $SGO$ , com a forma dum triângulo rectângulo em  $G$  e cujos catetos são iguais ao raio do círculo. Esta placa (funcionando como o gnómon nos relógios de Sol) serve para projectar a sombra, que terá também a forma triangular.

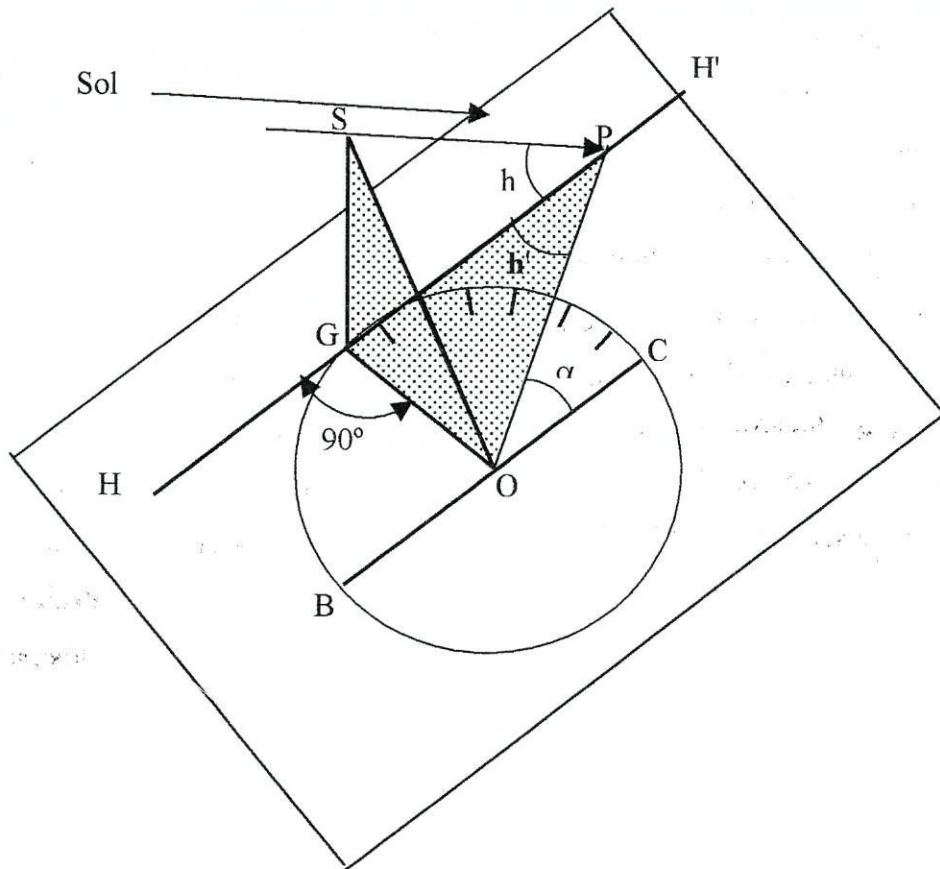


Fig.1- Instrumento de sombras: SGO – Gnómon triangular; CG – arco graduado de  $0^\circ$  a  $90^\circ$  de C para G; GPO – sombra projectada;  $HH'$  paralela ao diâmetro BC

Neste instrumento tira-se partido da geometria dos triângulos, o que permite transferir a medida de  $h$  que é a altura do Sol, para o ângulo  $\alpha$  que se mede directamente no círculo graduado. A forma como se consegue é bastante engenhosa.

Para medir a altura do Sol, coloca-se a base na horizontal e roda-se essa base até fazer coincidir o bordo da sombra  $GP$  com a recta  $HH'$ , como se mostra na figura 1. Nestas circunstâncias o ângulo  $h$  pode medir-se no círculo graduado pois é igual a  $\alpha$ .

Vejamos porquê. Geometricamente temos:

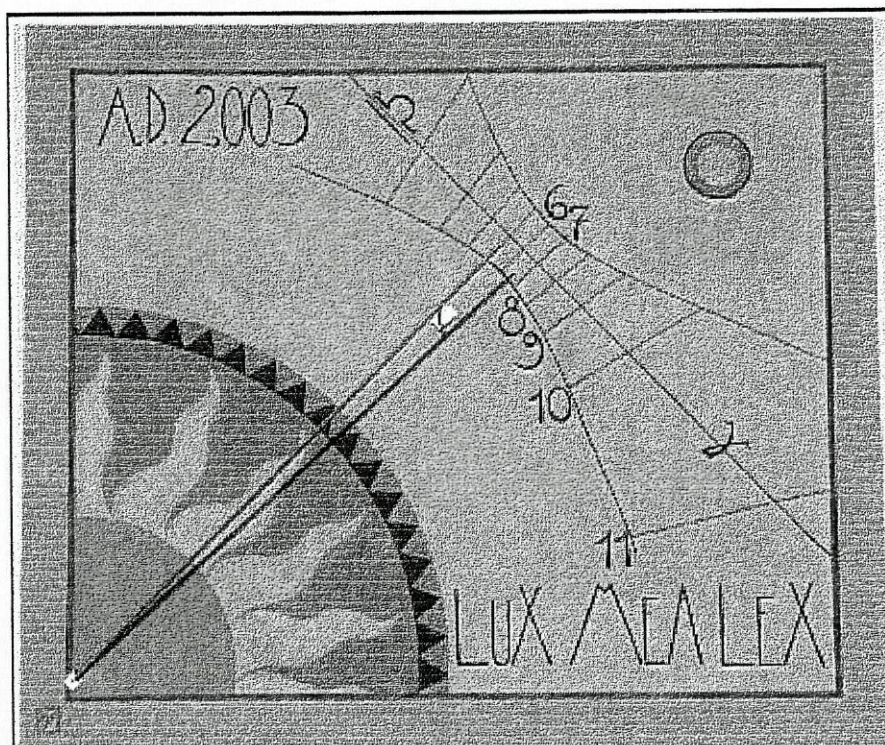
- O  $\Delta$  [SGP] e o  $\Delta$  [GOP] são iguais . *Porquê?*
- Os ângulos  $h$  e  $h'$  são iguais . *Porquê?*
- $h = \alpha$  *Porquê?*

Como  $\alpha$  se mede no arco CG do círculo graduado, a precisão da medida depende da graduação da escala que na época era algo problemático, pois a tecnologia disponível não permitia grande perfeição o que hoje em dia é conseguido facilmente.

Este instrumento foi testado em várias viagens marítimas, nomeadamente por D. João de Castro, sempre com bons resultados que o levaram a tecer-lhe constantes louvores.

No entanto, para se obter a latitude do lugar eram necessárias duas medições da altura do Sol em instantes diferentes, seguidas de cálculos morosos. Com o método habitual, obtinha-se a latitude a partir da medição da altura do Sol ao meio-dia solar ou da altura das estrelas, o que se tornava mais prático pois exigia apenas uma medição e cálculos simples através do uso de tabelas. Daí o motivo porque terá sido pouco utilizado pelos pilotos da época, apesar da sua comprovada eficácia.

## Anexo II



Extraída do site [www.cadrans-solaires.org](http://www.cadrans-solaires.org)

## Relógios de Sol

## **A matemática dos relógios de Sol**

Desde cedo que o homem teve necessidade de conhecer com rigor as estações do ano de forma a saber quando plantar e quando colher. Com o desenvolvimento das civilizações tornou-se também importante saber o tempo ao longo do dia. Dois instantes eram óbvios; o nascer e o por do Sol. Observações mais atentas do Sol, mostravam que nascia a Este, subia até ao seu ponto mais alto no céu (na direcção Sul, no hemisfério Norte) e descia até atingir o ocaso no Oeste. O instante em que o Sol atinge o seu ponto mais alto (quando a sombra é mínima) é o chamado meio-dia solar. O nascer, o meio-dia e o pôr do Sol, definem a manhã, a tarde e a noite.

Todas as civilizações se interessaram pela maneira como se movimenta o Sol, e Astronomia e Matemática sempre se desenvolveram complementarmente. Melhores observações pediam métodos matemáticos mais rápidos e eficientes e estes por sua vez permitiam observações mais rigorosas.

### **1. Porque deve ser o gnómon paralelo ao eixo da Terra ?**

O Sol no seu movimento diário aparente através do céu, mostra-nos como se pode medir e dividir o tempo em intervalos adequados através dos relógios de Sol.

Os relógios de Sol foram usados no antigo Egipto e muitas vezes não passavam de pequenas estacas cravadas na areia, ou então pilares na vertical.

Estes não eram muito fiáveis porque o Sol varia o seu trajecto no céu de acordo com a estação do ano. Uma vara espetada no chão pode ser usado para mostrar estas variações mês a mês, medindo o comprimento e a direcção da sombra que ela projecta devido á luz solar. Não podemos marcar no chão o ângulo da sombra ou a hora sem tabelas ou cálculos matemáticos, porque esse ângulo depende da declinação do Sol que varia com as estações ao longo do ano, como já se mostrou no capítulo 5.

Um grande avanço em fiabilidade e comodidade, foi feito pelos Árabes que tiveram a brilhante ideia de inclinarem o gnómon de forma a apontar para o Pólo Norte celeste - PNC ficando desse modo paralelo ao eixo da Terra.

Para explicar o porquê do gnómon ser paralelo ao eixo da Terra, vejamos o caso onde colocamos o gnómon com um dado ângulo para o eixo terrestre.

Quando o gnómon não é paralelo ao eixo da Terra:

1. A sombra projectada a uma dada hora aponta em diferentes direcções, dependendo da altura do ano.
2. O ângulo varrido pela sombra durante um certo intervalo de tempo, depende da altura do ano.

Estas inconsistências tornam impossível calibrar o relógio de Sol com um gnómon não paralelo ao eixo da Terra. Vamos ilustrar estas inconsistências para a latitude de  $45^\circ$  e com o gnómon a  $90^\circ$  (na vertical)

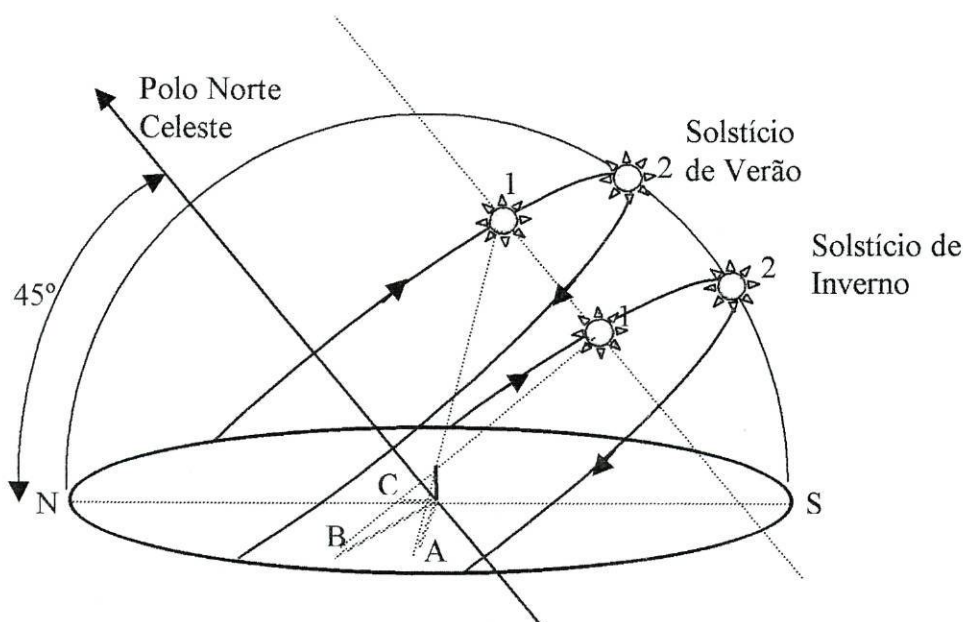


Fig.1 - Direcção da sombra nos solstícios para dois instantes 1 e 2 (meio-dia solar)

Como se pode ver na fig.1 temos:

- direcções diferentes (A e B) para a sombra à mesma hora (posição 1)
- ângulos varridos pela sombra diferentes, de A para C e de B para C.

O ângulo varrido pela sombra de A para C no Solstício de Verão, com o Sol a ir de 1 para 2, e de B para C no Solstício de Inverno (correspondendo ao mesmo intervalo de tempo, estando C na direcção Norte-Sul, que é a direcção da sombra ao meio – dia solar, posição 2) varia conforme o dia do ano .

## 2. Mudança na direcção da sombra de dia para dia á mesma hora.

Esta mudança na direcção da sombra á mesma hora ao longo do ano, deve-se á variação da posição aparente (declinação) do Sol, não acontecendo essa mudança se o gnómon for colocado paralelamente ao eixo de rotação terrestre (fig.2) o que permite calibrar as linhas

horárias no relógio de Sol, já que em qualquer dia a uma determinada hora, a sombra aponta sempre na mesma direcção.

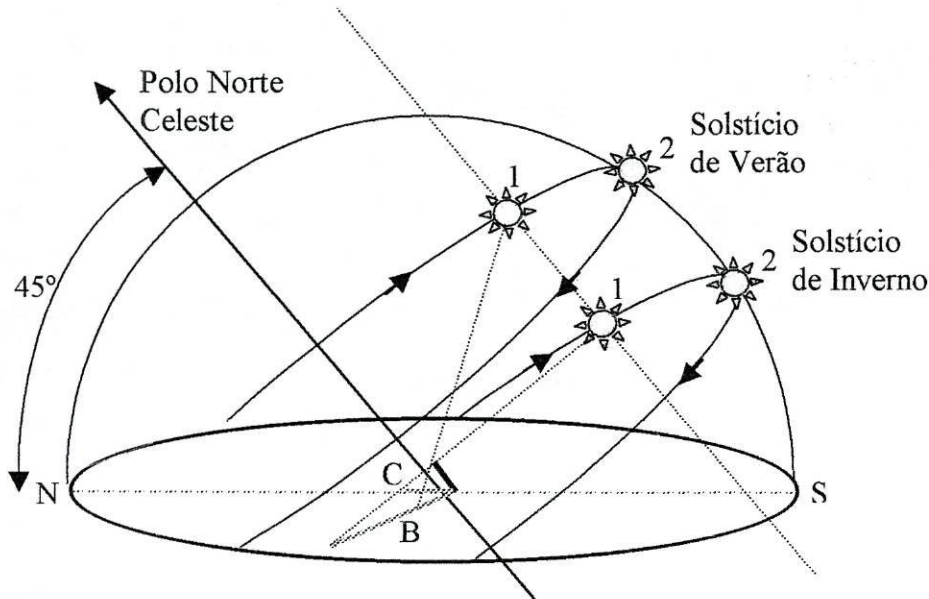


Fig.2 - Direcção da sombra em dias diferentes para dois instantes 1 e 2 (gnomôn paralelo)

### 3. Variação do ângulo da sombra em diferentes dias

Observando a fig.1 vemos que

- No Solstício de Verão a sombra projectada com o Sol na posição 1 aponta para A e ao meio – dia (posição 2) aponta para C.
- No Solstício de Inverno á mesma hora (posição 1) aponta para B e ao meio-dia novamente para C.

Temos assim a sombra a deslocar-se de A para C em 21 de Junho e de B para C em 21 de Dezembro ou seja, varre um ângulo maior em 21 de Junho do que em 21 de Dezembro isto é

- uma maior velocidade angular em Junho do que em Dezembro.

Aplicando este raciocínio aos outros dias do ano, concluímos pela variação da velocidade angular da sombra todos os dias, sempre que o gnómon faça um ângulo não nulo com o eixo terrestre (fig.1).

Contudo isto já não se passa com o gnómon colocado paralelamente ao eixo (fig.2).

## 4. Relógio de Sol Horizontal

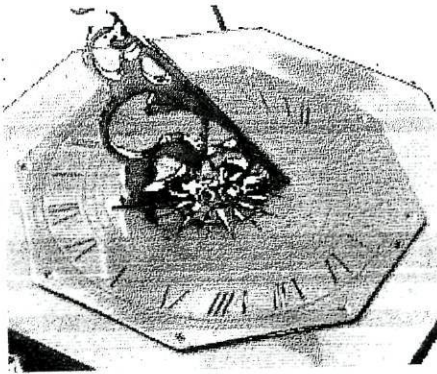


Fig.3 - Relógio de Sol Horizontal

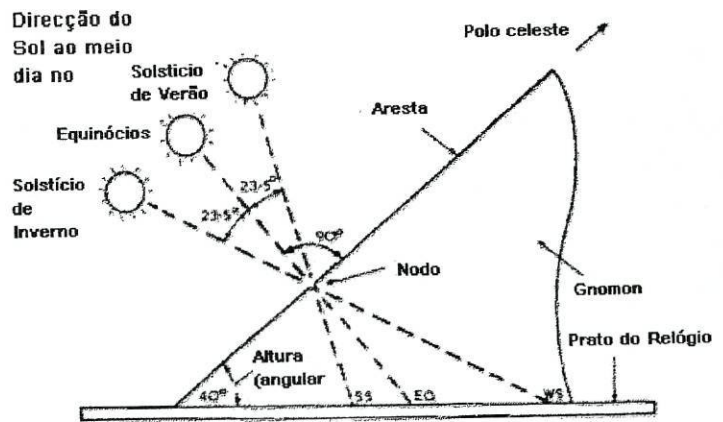


Fig.4 - Vista de perfil dum relógio de Sol horizontal

### 4.1 Características

O relógio horizontal é orientado para o Polo Norte. É um dos mais usados porque pode ser utilizado para ver as horas sempre que haja Sol e desde que o prato do relógio esteja colocado na horizontal. Relógios doutro tipo como os verticais só funcionam durante algumas horas do dia.

### 4.2 Aspecto Geral

Um relógio horizontal consiste numa base horizontal plana com as linhas horárias radiais partindo do vértice do gnómon que é uma cunha triangular, como se mostra na fig.5. Se a linha **OA** estiver orientada na direcção Norte-Sul, com **O** para Sul e **A** para Norte, a sombra da aresta **OB** vai cair entre as linhas horárias, indicando a hora do dia.

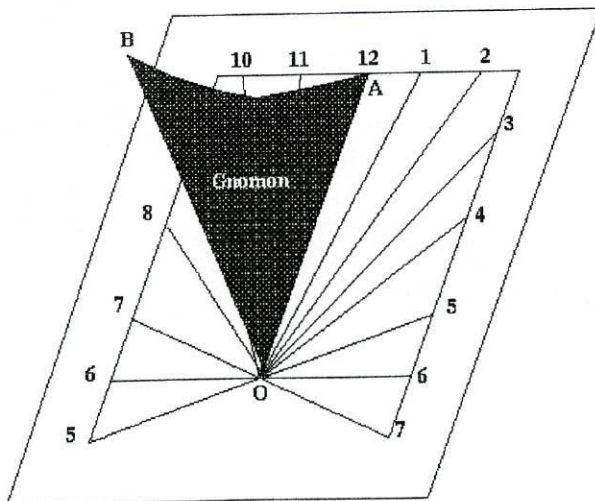


Fig.5 - Base plana dum relógio horizontal.

### 4.3 A Matemática dum Relógio Horizontal

Vamos mostrar matematicamente como são marcadas as linhas horárias num relógio horizontal.

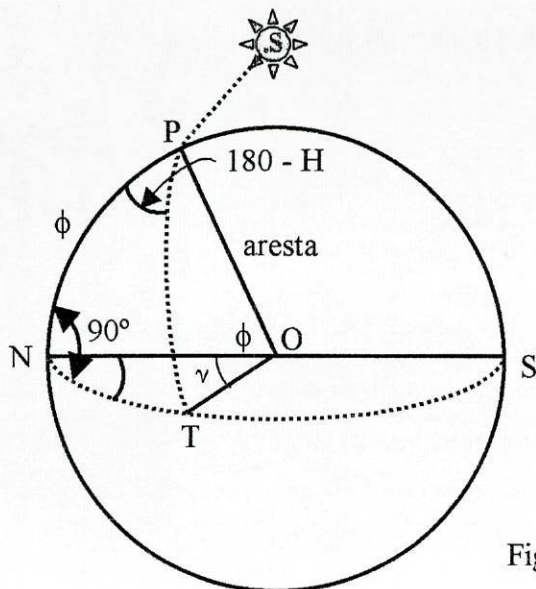


Fig.6

Na fig.6, OP é a aresta apontando para o pólo P. PNS é o meridiano, NPT é o suplementar do ângulo horário e TON é o ângulo da sombra.

Usando trigonometria esférica no triângulo NPT e aplicando a fórmula do 4 elementos consecutivos (ver4.1.4.)

$$\cos NP \cos PNT = \sin NP \cot TON - \sin PNT \cot NPT$$

$$\text{sendo } PNT = 90^\circ, NP = \emptyset \text{ e } TON = \gamma$$

Como  $\cos PNT = 0$  e  $\sin PNT = 1$  então

$$0 = \sin \emptyset \cot \gamma - \cot (180 - H)$$

$$\tan \gamma = \sin \emptyset \tan (180 - H)$$

Na tabela seguinte apresentam-se os cálculos que permitem traçar as linhas horárias para a latitude de  $41,8^\circ \text{ N}$

Hora solar	Ângulo horário	Ângulo da sombra
12	$0^\circ$	$0^\circ$
11/13	$15^\circ$	$169,87^\circ$
10/14	$30^\circ$	$158,95^\circ$
9/15	$45^\circ$	$146,31^\circ$
8/16	$0^\circ$	$130,9^\circ$
7/17	$15^\circ$	$111,9^\circ$
6/18	$90^\circ$	$90^\circ$
5/19	$105^\circ$	$68,1^\circ$
4/20	$120^\circ$	$49,1^\circ$
3/21	$135^\circ$	$33,69^\circ$

Tabela 1- Valores obtidos para uma latitude de  $41,8^\circ \text{ N}$  (Bragança)

#### 4.4 Ajustamento para várias latitudes

Muitos relógios disponíveis no mercado não funcionam sem um ajustamento, devido à inclinação do gnómon ser de  $45^\circ$  em relação ao plano da base e como tal adequado só para a latitude de  $45^\circ$ .

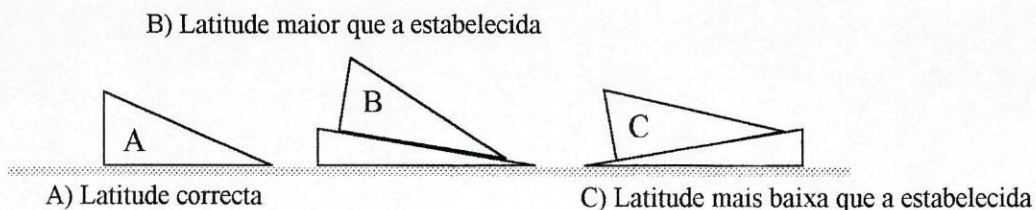


Fig.7 - Variação da posição de assentamento com a latitude

Como a aresta precisa de estar apontada para o Polo Norte celeste, isto significa que o relógio tem de ser colocado de tal forma, que o ângulo entre a aresta e a horizontal seja igual à latitude do lugar. Por isso ele deverá ser elevado no caso da latitude ser superior a  $45^\circ$  e o contrário no caso de ser inferior, como se mostra na fig.7.

### 5. Relógio de Sol Vertical (virado a Sul)

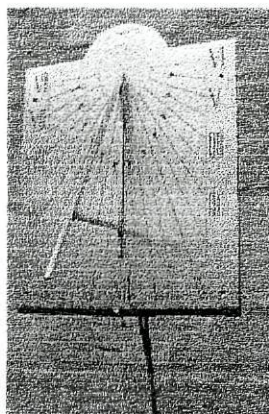


Figura 7-Relógio vertical

#### 5.1 Características

O relógio é colocado numa parede virada a Sul, pois pode medir o tempo durante a maior parte do dia.

#### 5.2 Aspecto Geral

As linhas horárias num relógio vertical virado a Sul são precisamente as mesmas dum relógio horizontal localizado à latitude  $90 - \varnothing$  (colatitude de  $\varnothing$ ). (Isto será explicado matematicamente mais abaixo). A linha horária das 6 horas está no topo na horizontal, e a do meio-dia está na vertical.

Nestes relógios não é possível medir o tempo antes das 6 horas da manhã nem depois das 6 horas da tarde, pelo que não é necessário incluir linhas horárias fora destes limites.

### 5.3 A Matemática do Relógio vertical

Da mesma forma que o relógio horizontal, para determinar as linhas horárias vamos usar a fig.9.

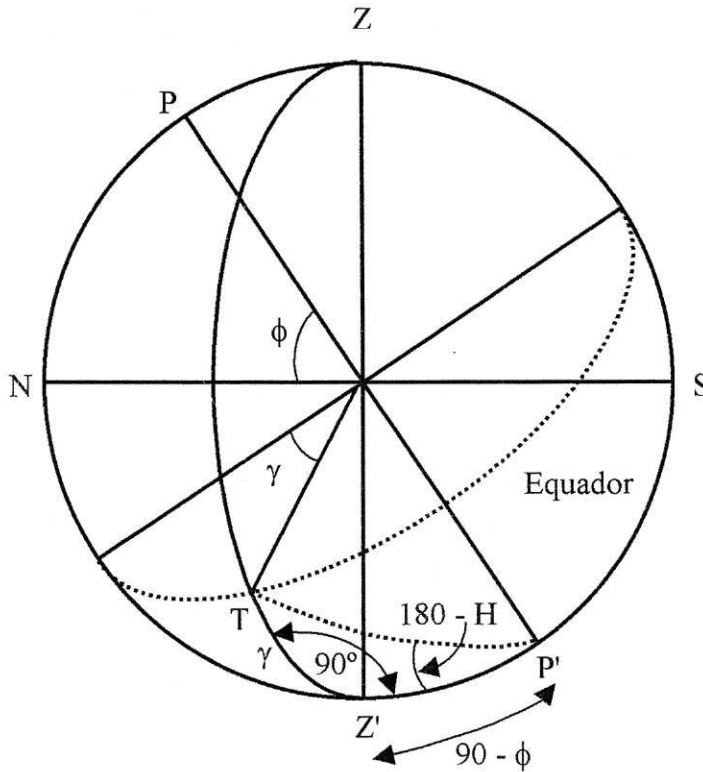


Fig.9

Na fig.9 Z é o zênite e Z' o nadir (Ponto da esfera celeste directamente por baixo do observador, logo diametralmente oposto ao zênite) P é o Polo Norte celeste e P' o Polo Sul. Usando trigonometria esférica:

Aplicando novamente a fórmula dos 4 elementos consecutivos ao triângulo TZ'P'

$$\cos Z'P' \cos TZ'P' = \sin Z'P' \cot Z'T - \sin P'Z'T \cot Z'PT$$

$$\text{como } TZ'P' = 90^\circ, Z'T = \gamma, \text{ então}$$

$$0 = \sin (90 - \emptyset) \cot \gamma - \cot (180 - H) \tag{0}$$

$$\tan \gamma = \tan (180 - H) \cos \emptyset$$

A equação (0) tem a mesma forma da do relógio horizontal com  $\sin (90 - \emptyset)$  no lugar do  $\sin \emptyset$ . Significa isto que as linhas horárias do relógio vertical na latitude  $\emptyset$  são as mesmas que as dum relógio horizontal para uma latitude de  $90 - \emptyset$ .

## 6. Relógio de Sol analemático

### 6.1 O que é um relógio de Sol analemático?

Um relógio deste tipo é um relógio horizontal no qual o objecto que projecta a sombra é vertical e a sua posição no relógio não é fixa, dependendo da data ou mais propriamente da declinação do Sol num dado dia. O tempo é medido observando qual dos pontos horários dispostos numa elipse é alcançado pela sombra do objecto vertical. Se construirmos o relógio suficientemente grande, por exemplo num jardim, podemos usar uma pessoa para projectar a sombra.

Isto torna-o bastante diferente do tradicional relógio visto em jardins e parques onde a sombra é projectada por uma cunha triangular

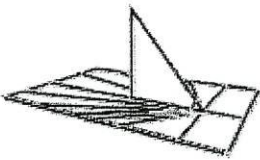

	Relógio tradicional	Relógio analemático
		
<b>Forma</b>	Linhas horárias radiam dum ponto central.	Elipse de pontos horários.
<b>Objecto projector de sombra</b>	Fixo, paralelo ao eixo da Terra.	Varia de dia para dia, vertical.

Tabela 2 - Características dos relógios de sol; Tradicionais e Analemáticos.

Num relógio de Sol normal, a sombra é projectada por um "gnómon" ou ponteiro que aponta directamente para a estrela Polar (Polo Norte). Se um disco de cartão estiver fixo ao ponteiro perpendicularmente a ele, então a sombra projectada é *de comprimento constante* ao longo do dia e move-se á volta do cartão no sentido directo com o ponto extremidade da sombra sobre um círculo. Um relógio como este (chamado relógio equatorial) é muito simples de fazer e está representado na fig.10. Vendo onde está a sombra podemos saber a hora.

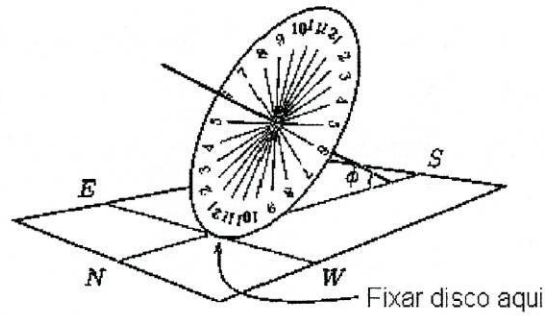


Fig.10 - Relógio de Sol equatorial.

Num relógio de Sol analemático o ponteiro é vertical e a sombra projectada pelo Sol numa superfície horizontal como o chão, move-se no sentido directo à volta do ponteiro, mas neste caso *varia o comprimento* durante o dia. O ponto extremidade da sombra já não está sobre um círculo. Realmente quando o Sol se põe, a sombra tem um comprimento infinito. Podemos mesmo assim obter a hora embora seja mais complicado.

## 6.2 Relógio de Sol Analemático

O relógio de Sol analemático está baseado numa elipse, na qual são marcados os pontos horários. A elipse tem um eixo maior de comprimento  $M$  na direcção  $E-W$  e um eixo menor de comprimento  $m=M\text{sen}(\phi)$  na direcção  $N-S$ . O ponteiro que projecta a sombra está colocado no eixo  $N-S$  numa posição que depende da data. Isto é dado por uma escala de datas que se obtém duma forma descrita mais adiante.

O ponteiro projecta a sombra que intercepta a elipse num dado ponto. Na elipse são marcados uma série de pontos horários, podendo dizer-se a hora vendo em que ponto horário está a sombra. Como exemplo, temos na fig.18, um relógio de Sol deste tipo visto de cima e localizado em Bragança.

## 6.3 A Elipse

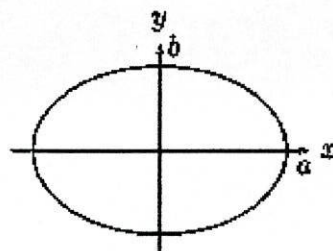


Fig.11 - Elipse

A elipse é fundamental para a compreensão dum relógio analemático pelo que vamos descrevê-la com algum detalhe. A elipse é o exemplo duma curva chamada *secção cónica*

pois resulta da secção que um plano inclinado relativamente à base, determina por intercepção na superfície dum cone. Outras *secções cônicas* como o círculo a hipérbole e a parábola, resultam da mesma maneira mas com posições diferentes do plano em relação à base do cone. A Terra descreve uma elipse no seu movimento à volta do Sol

Se os pontos dum elipse tiverem de coordenadas  $(x,y)$  então  $x$  e  $y$  estão relacionados da seguinte forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$

Se  $a = b$  então temos simplesmente um círculo. Se  $y = 0$  então  $x^2 = a^2$  logo  $x = a$ . Assumindo que  $a > b$  então o eixo dos  $x$ -é o eixo maior da elipse e o eixo dos  $y$ -é o eixo menor. Uma forma particular de descrever a elipse passa por introduzir uma terceira variável  $\Theta$ . Fazendo  $x = a\cos(\Theta)$  e  $y = b\sin(\Theta)$ ; vem

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2 \Theta + \sin^2 \Theta \quad (2)$$

Onde  $x$  e  $y$  estão numa elipse. Se variarmos  $\Theta$  de  $0^\circ$  a  $360^\circ$  então os pontos  $(a\cos(\Theta), b\sin(\Theta))$  traçarão uma elipse.

Consideremos agora uma régua com os pontos  $A$   $B$  e  $C$  marcados de forma a que o comprimento  $AC$  seja  $a$  e o comprimento  $AB$  seja  $b$ . Ao colocar esta régua de modo que  $B$  esteja no eixo dos  $x$ -e  $C$  esteja no eixo dos  $y$ , formará um ângulo  $\Theta$  com o eixo dos  $x$ . Se o ponto  $A$  tem de coordenadas  $(x,y)$  e por construção  $x = a\cos(\Theta)$  e  $y = b\sin(\Theta)$  então o ponto extremidade  $A$  deverá traçar automaticamente uma elipse. Este processo permite-nos traçar facilmente uma elipse e é mostrado na fig.12.

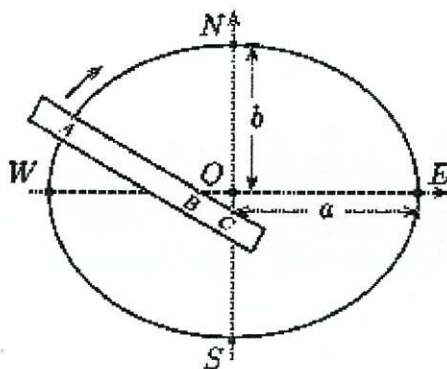


Fig.12 - Desenhando uma elipse.

Existem dois pontos  $F_1$  e  $F_2$  no eixo dos  $x$ , chamados *focos* da elipse cujas coordenadas são

$$F_1 = (-\sqrt{a^2 - b^2}, 0) ; F_2 = (\sqrt{a^2 - b^2}, 0) \quad (3)$$

Uma propriedade notável da elipse consiste no facto que para qualquer ponto  $A$  a soma das distâncias de  $A$  a  $F_1$ , e a  $F_2$  é constante, tal que

$$AF_1 + AF_2 = 2a \quad (4)$$

*Usando a definição da elipse mostra que a equação 4 é verdadeira.*

#### 6.4 Quão grande deve ser um relógio de Sol analemático?

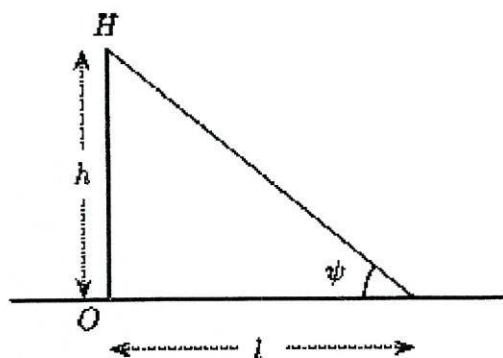


Fig.13 - A altura duma pessoa

Consideremos que o relógio vai ser construído num jardim e que o objecto que projecta a sombra é uma pessoa que se colocará no relógio. Observa o diagrama da esquerda. A linha  $OH$  representa o objecto vertical (uma pessoa) que consideramos ter altura  $h$ . A outra linha representa os raios solares com inclinação  $\psi$ .

*Mostra que se a declinação do Sol num dado dia for  $d$  então o comprimento  $l$  da sombra projectada pela pessoa ao meio-dia solar é dada por:  $l = h \tan(\phi - d)$*

Consideremos o caso de Bragança onde  $\phi = 41.8^\circ$ . Ao meio-dia solar no equinócio, com  $d = 0$  uma pessoa de altura  $h = 1,8\text{m}$  projectará uma sombra

$$l = 1,8 \times \tan(41.8^\circ) = 1,61\text{m}$$

Em 21 de Junho com  $d = 23,44^\circ$  a mesma pessoa no mesmo local projectará uma sombra

$$l = 1,8 \times \tan(41,8^\circ - 23,44^\circ) = 0,60 \text{ m.}$$

Podemos usar cálculos semelhantes, para o caso duma pessoa média com altura  $h$ , cuja sombra será projectada no relógio ao longo do ano. Tomando como referência do tamanho do eixo menor da elipse, o comprimento da sombra ao meio-dia solar no Solstício de Verão quando  $d$  é maior i.e.  $23,44^\circ$  (a sombra mais pequena durante o ano) teremos o valor que corresponderá a  $m$  para a construção seguinte.

## 7. Como se constrói um relógio de Sol analemático?

Estas são as duas fases de construção:

1. Posicionar os pontos horários
2. Desenhar a escala de datas.

### 7.1 Posição dos pontos horários

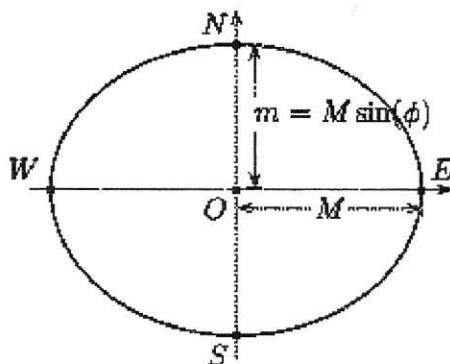


Fig.14 - Construção dum relógio de Sol analemático.

1. Encontrar a direcção do Norte verdadeiro e marcar a linha meridiana Norte-Sul no chão.
2. Marcar a linha Este-Oeste perpendicular à linha Norte-Sul no ponto que será o centro do relógio.
3. O eixo maior da elipse será ao longo da linha Este-Oeste e o eixo menor na linha Norte-Sul. Identificaremos o comprimento do eixo maior (isto é a distância de  $O$  a  $E$  na fig.14) por  $M$ . Em todos os cálculos tomaremos  $M = 1$ . Uma elipse assim, é mostrada na fig.16.
4. Para calcular o valor de  $m$ , o comprimento do eixo menor, precisamos de conhecer  $\phi$ , a latitude do local do relógio. Podemos calcular  $m$  através da relação

$$m = M \text{ sen}(\phi) \quad (5)$$

Por exemplo, Bragança está  $41.8^\circ N$  pelo que para  $M = 1$ ,  $m = 0,76$  (com 2 casas decimais).

5. Para começar a construção precisamos de desenhar uma elipse. Como mencionado previamente, uma maneira é pelo método do jardineiro mas na prática, usando uma régua é muito melhor.

Com uma régua marcar dois pontos  $A$  e  $C$  afastados de  $M$ . Marcar então o ponto  $B$  a uma distância  $M \text{ sen}(\phi)$  de  $A$ . A régua deverá ter este aspecto:

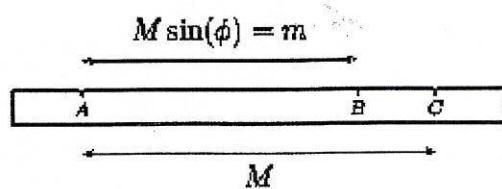


Fig.15 - Régua para desenhar a elipse.

Agora é desenhar pelo processo descrito anteriormente.

6. Ao construir um relógio de Sol é mais usual identificar as horas pelos seus *ângulos em relação ao meio-dia*. Vinte e quatro horas fazem um dia, ou seja uma revolução da Terra. Cada hora corresponde a  $15^\circ$  de revolução da Terra pelo que meio-dia é  $0^\circ$ , 13 h é  $15^\circ$ , 14 h são  $30^\circ$  e 9 h são  $45^\circ$  etc.

Seja  $\Theta$  o ângulo da hora. A distância do ponto desde  $O$  na direcção  $WE$  é dada por

$$x = M \text{sen}(\Theta) \quad (6)$$

Notar que depende apenas do instante e do tamanho do relógio e *não* da latitude. A distância do ponto desde  $O$  na direcção  $NS$  é dado por

$$y = m \cos(t) = M \text{sen}(\phi) \cos(\Theta) \quad (7)$$

$$x^2 + \frac{y^2}{\text{sen}^2 \phi} = M^2 \quad (8)$$

Isto está representado na fig.16 e será explicado porquê mais adiante.

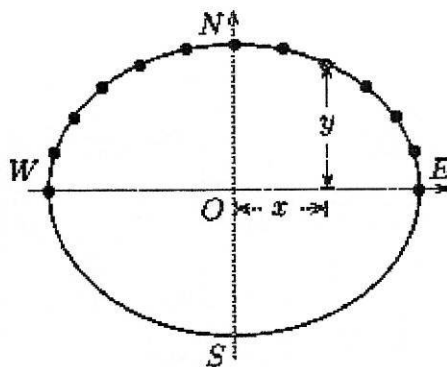


Fig.16 - Relógio com os seus pontos horários.

*Notar que  $\Theta$  NÃO é o ângulo desde a Linha NS ao ponto horário.*

*Mostrar que o ângulo desde a linha vertical ao ponto horário é dado por:*

$$\text{arctg} \left( \frac{\text{tg } \Theta}{\text{sen } \phi} \right)$$

7. Para localizar os pontos horários antes das 6 h ou depois das 18 h é preciso ter em conta que o relógio é simétrico. Desenhando uma linha desde um ponto horário já calculado a passar em  $O$  e a terminar na elipse do outro lado, obtemos qualquer um desses pontos horários como se mostra na fig.17, para as 19 h.

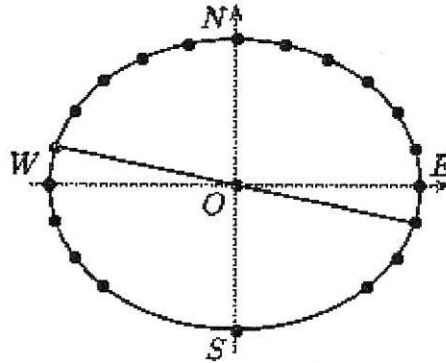


Fig.17- Pontos horários antes das 6 h e depois das 19 h

Exemplo: Bragança

Por exemplo, as posições dos pontos horários num relógio em Bragança, estão registadas na tabela 3.

Hora	$\Theta$	x	y	Hora	$\Theta$	x	y
6	-90	-1	0	13	15	0,26	0,72
7	-75	-0,97	0,19	14	30	0,5	0,65
8	-60	-0,87	0,37	15	45	0,71	0,53
9	-45	-0,71	0,53	16	60	0,87	0,37
10	-30	-0,5	0,65	17	75	0,97	0,19
11	-15	-0,26	0,72	18	90	1	0
12-MºDia.	0	0	0,75				

Tabela 3 – Coordenadas dos pontos horários

*Calcula a tabela 3 para a tua latitude*

## 7.2 Desenho da escala de datas

A sombra projectada num relógio anemático por um objecto, é variável e a sua posição depende da data. Para vermos onde colocá-lo vamos calcular uma escala de datas, para mostrar ao utilizador onde deve colocar-se a si ou ao ponteiro vertical, num qualquer dia do ano. Supondo o nosso relógio colocado num jardim e que é uma pessoa a projectar a sombra, teremos uma escala de datas no chão do jardim.

O objecto vertical (tal como uma pessoa) coloca-se sempre na linha  $NS$  a uma distância  $Z$  de  $O$ . Para calcular a distância  $Z$  precisamos de saber a declinação  $d$  do Sol num dado dia. Usando os valores de  $d$  da tabela 5.1(ver cap.5) e a relação (9).Esta relação será explicada adiante.

$$Z = M \operatorname{tg}(d) \cos(\phi) \quad (9)$$

Em Bragança teremos os seguintes valores para  $Z$

Data	d	Z	Data	d	Z
1 Jan°	-23,13	-0,32	1 Julho	23,00	0,32
1 Fev°	-17,30	-0,23	1 Ago°	18,00	0,24
1 Mar°	-8,00	-0,10	1 Set°	8,50	0,11
1 Abr	4,25	0,06	1 Out°	-2,90	-0,04
1 Maio	15,00	0,20	1 Nov°	-14,00	-0,19
1 Jun°	22,00	0,30	1 Dez°	-21,70	-0,30
21 Jun	23,44	0,32	21 Dez°	-23,44	-0,32

Tabela 4 – Valores de  $Z$  para um relógio analemático a 41,8 graus Norte.

*Calcula os valores de  $Z$  para a tua latitude*

A fig.18 mostra o relógio analemático resultante em Bragança (41,8°N)

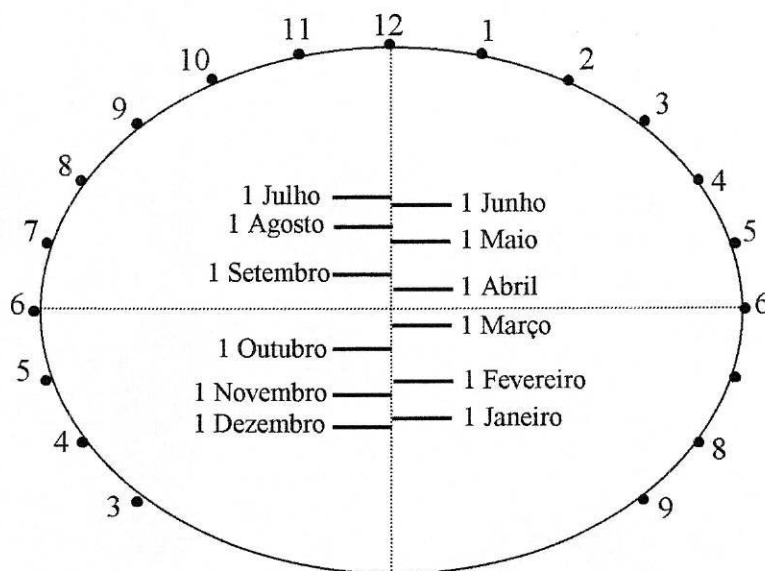


Fig.18 - Relógio completo em Bragança

## 8. Que espécie de tempo marca um relógio de sol?

A maioria dos relógios de Sol marca o que designamos por *tempo local*. Este difere do chamado *tempo médio standard* que nos é dado pelos relógios de pulso que usamos no dia a dia. Existem duas razões para essa diferença.

Primeiro, ter em conta que a Longitude é a distância angular Oeste do meridiano de Greenwich. O globo terrestre está dividido em 24 fusos horários, cada um com o seu tempo standard pelo que pessoas em fusos diferentes têm horas diferentes. Ao meio-dia no meridiano de Greenwich em Bragança faltam 27 minutos pois está a  $6,75^\circ$  Oeste. Um relógio de Sol fixo num dado local, está desenhado para marcar as 12 ao meio-dia solar pelo que é necessário fazer a correcção para o tempo legal (standard).

Em segundo lugar, os dias não têm a mesma duração ao longo do ano. Quer isto dizer que o tempo decorrido entre o meio-dia solar num dia, e o meio-dia solar no dia seguinte não é constante. Se dividirmos cada dia em 24 horas iguais, o "comprimento" dum segundo varia de dia para dia. Com os nossos relógios isso não acontece normalmente (a não ser por imprecisão de funcionamento) pelo que todos os segundos deverão ser iguais. Esta diferença não é significativa mas acumula-se ao longo do ano, o que implica que por exemplo em 21 Março um relógio esteja 7 minutos adiantado, e em 1 de Novembro esteja 17 minutos atrasado, relativamente ao movimento do sol. O gráfico da fig.19 chamado de Equação do Tempo, mostra como corrigir esta diferença. Para usar a figura mede-se o tempo num relógio de Sol e subtrai-se ao da figura na mesma data.

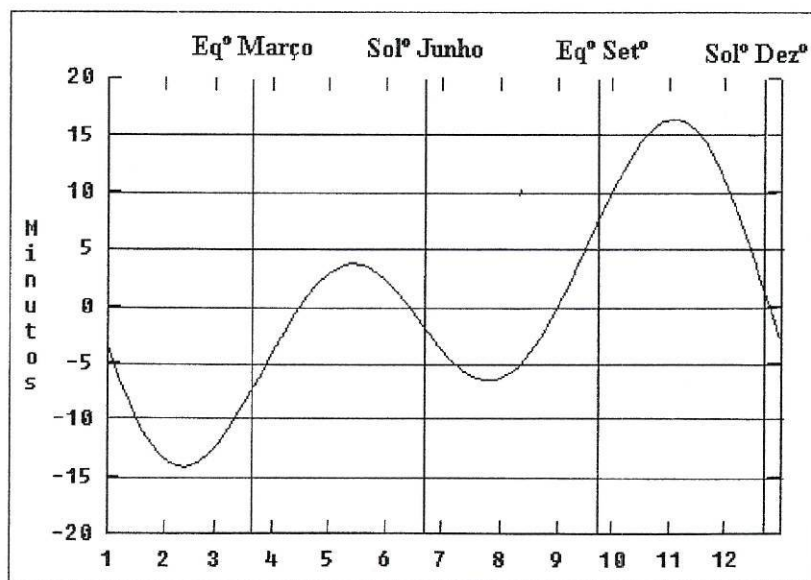


Fig.19 - A Equação do Tempo.

## 9. Porque funciona um relógio de Sol analemático?

Dissemos anteriormente que a extremidade dum ponteiro direccionado para a estrela Polar, projecta uma sombra que se move à volta dum círculo num disco paralelo ao Equador terrestre. Para recordar isto voltemos à fig.10.

O Sol parece mover-se em redor da estrela Polar num grande círculo. No equinócio quando  $d = 0$  este círculo é exactamente o Equador celeste. Podemos descrever a posição do Sol pelo seu ângulo relativamente a um qualquer ponto fixo de referencia (fig.20). Por conveniência tomemos o meio-dia, instante no qual o Sol atinge a sua altura máxima. O ângulo  $\Theta$  do Sol relativamente ao ponto meio-dia é o chamado *ângulo horário*, com  $\Theta = 0^\circ$  ao meio-dia. De facto  $\Theta = 15^\circ x$ , onde  $x$  é o tempo (em horas) após o meio-dia.

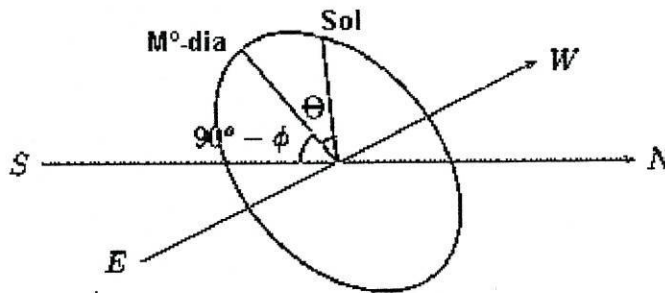


Fig.20 - Determinação do ângulo horário.

Vejamos agora, qual a forma obtida se observarmos a sombra projectada por um ponteiro vertical, numa superfície horizontal. Para isso vamos ter de projectar o círculo feito pelo Sol. Se  $d = 0$  este círculo faz um ângulo de  $90^\circ - \phi$  com a horizontal e intercepta-a às 6 e às 18 horas. Se for  $R$  o raio do círculo descrito pelo Sol, com o eixo- $x$  na direcção Este-Oeste e o eixo- $y$  na direcção Norte-Sul, então as coordenadas  $(x,y)$  do Sol são dadas por

$$x = R \sin(\Theta), y = R \cos(\Theta) \sin(\phi) \quad (10)$$

O ângulo que a sombra do Sol faz com o eixo- $y$  é o chamado *azimute* e representa-se por  $z$  sendo obtido a partir de

$$\cot(z) = \frac{y}{x} = \sin(\phi) \cot(\Theta) \quad (11)$$

Durante o dia,  $z$  varia o que permite obter o tempo calculando  $z$ . Por exemplo às 15 h,  $\Theta$  é dado por  $15^\circ \times 3 = 45^\circ$  e  $\cot(\Theta) = 1$ . O ângulo formado pela sombra do Sol é então:

$$\cot(z) = \tan(\phi) \quad (12)$$

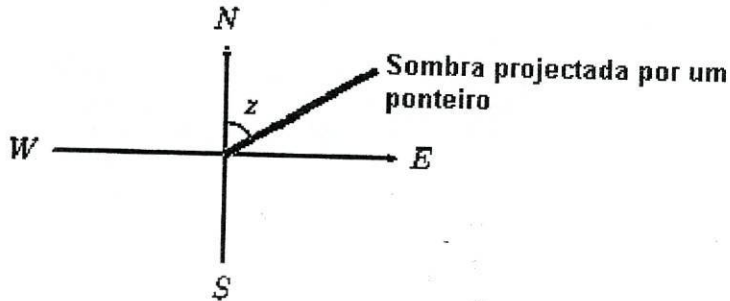


Fig.21 - Sombra.

Se a declinação  $d$  não for zero, o ângulo  $z$  que a sombra faz com a linha  $N-S$  pode ser calculado usando Geometria Esférica. Neste caso a equação (11) será modificada para obter

$$\cot(z) = \tan(\phi) \cot(\Theta) - \frac{\tan(d) \cos(\phi)}{\sin(\Theta)} \quad (13)$$

Notar que se  $d = 0$  então  $\tan(d) = 0$  e a equação reduz-se à equação(11). Supondo que vamos colocar o ponteiro na posição  $M \tan(d) \cos(\phi)$  na linha  $N-S$ .

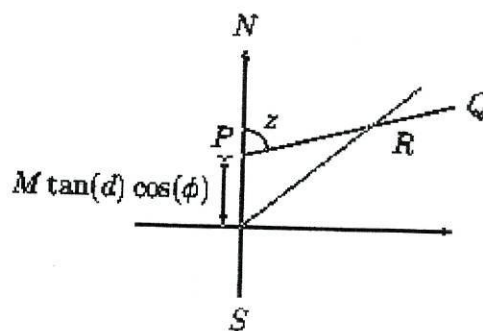


Fig.22 - Deslocamento do ponteiro.

A sombra será a linha  $PQ$  começando na base do ponteiro que está em  $P$ . Esta recta tem de equação

$$y = M \tan(d) \cos(\phi) + x \cot(z) \quad (14)$$

Ao mesmo tempo a sombra projectada num dia em que  $d = 0$  passará na origem com um ângulo  $z$ , dado pela equação (11). Isto é indicado na fig.22 pela linha que começa na origem. Usando a equação (11) esta recta tem de equação

$$y = x \operatorname{sen}(\phi) \cot(\Theta) \quad (15)$$

As duas rectas interceptam-se no ponto  $R$  se

$$x \operatorname{sen}(\phi) \cot(\Theta) = M \operatorname{tg}(d) \cos(\phi) + x \left( \operatorname{sen}(\phi) \cot(\Theta) - \frac{\operatorname{tg}(d) \cos(\phi)}{\operatorname{sen}(\Theta)} \right) \quad (16)$$

Simplificando a expressão resulta

$$x = M \operatorname{sen}(\Theta) \quad (17)$$

E como  $y = x \operatorname{sen}(\phi) \cot(\Theta)$  vamos ter

$$y = M \cos(\Theta) \operatorname{sen}(\phi) \quad (18)$$

O que isto mostra é que num dado instante do dia, as sombras projectada por um ponteiro localizado na origem num dia em que  $d = 0$ , e por um ponteiro localizado em  $M \tan(d) \cos(\phi)$  num dia com a declinação solar  $d$ , se interceptam sempre no ponto  $R$  de coordenadas  $(x,y)$

$$(x = M \operatorname{sen}(\Theta), y = M \cos(\Theta) \operatorname{sen}(\phi)) \quad (19)$$

e pertencente à elipse

$$x^2 + \frac{y^2}{\operatorname{sen}^2(\phi)} = M^2 \quad (20)$$

*Em conclusão* se desenharmos a elipse de equação (20) e marcarmos os pontos horários nos pontos dados pela equação (19) com  $\Theta = 15^\circ \times t$  sendo  $t$  o número de horas após o meio-dia, e se o ponteiro estiver na posição  $M \tan(d) \cos(\phi)$  então a sombra projectada intercepta sempre a elipse no ponto horário correcto



## Referências Bibliográficas

- Ferreira, Máximo e Almeida, Guilherme de – *Introdução à Astronomia e às observações astronómicas*, Plátano Edições Técnicas, 1993
- Bakulin, P. e Kononovitch, E. e Moroz, V. – *Curso de Astronomia*, Editora Mir Moscovo, tradução de A.Kutchmov e revisão de Rita Lima e Ana Maria Pedro, 1998
- Astronomie* – Bulletin Inter-Irem nº 24/Maio 1984
- .Roy, A.E e Clarke, D. – *Astronomy Principles and Praticce*, Institut of Phisics Publishing, 1997
- Costa, J.Félix – *Génese da Revolução Astronómica*, Escolar editora, 2000
- Vanzyl, J.E. – *Unveiling the Universe*, Springer editor, 1996
- Karttunen, H. e Kroger, P. e Oja, H. – *Fundamental Astronomy*, Springer editor, 2000
- Filho, Kepler de Sousa Oliveira e Silva, Maria de Fátima Oliveira – *Introdução à Astronomia e Astrofísica*, edição on-line em [http://astro.if.ufrgs.br./index htm](http://astro.if.ufrgs.br./index.htm)
- Carvalho, João Paulo Maurício de – *História da Astronomia*, apontamentos do curso de mestrado do C.A.U.P., 2001
- Lago, Teresa – *Estrelas e meio Inter Estelar*, apontamentos do curso de mestrado do C.A.U.P., 2001
- Lima, João – *Tópicos fundamentais de Astronomia*, apontamentos do curso de mestrado do C.A.U.P., 2001
- Carvalho, João Paulo Maurício de – *Cosmologia*, apontamentos do curso de mestrado do C.A.U.P., 2001
- Moché, Dinah L. – *Astronomia*, Gradiva, 2002"
- Oliveira, A.Franco de e Ralha, Elfrida e Bastos, Rita – *Geometria* – Brochura de apoio ao 11º ano, editada pelo Ministério da Educação, 1998
- Gazeta da Matemática nº 143*, Publicação da Sociedade Portuguesa de Matemática, Julho 2002

## Sites consultados

- "<http://athena.mat.u.f.r.s.br/>"
- "<http://www.mat.uc.pt/>"
- "<http://plus.maths.org/>"
- "<http://archive.nasa.uiuc.edu/>"
- "<http://www.physics.csulb.edu/>"

"http://astro.if.ufrgs.br./index htm"

"http:// campus.houghton.edu/"

Schlumberger SEED; site educacional sobre Ciência

"http://www.slb.com/seed/pt/index htm"

"http://www.venus-transit.de/"

"http://www.sunspot .com"

### **Software de Astronomia**

*Astronomy Lab 2*, versão 2.02, Personal Microcosmos, 1994

*Skymap 2.2*, Skymap software, 1996

### **Software de Matemática**

*Geometer's Sketchpad*, versão 3.01, Key Curriculum Press, 1997

*Kaleidagraph*, versão 3.09, Synergy Software ,1997

# Origem das Figuras<sup>1</sup>

## Capítulo 1

Fig. 1.2	"Introdução à astronomia e às observações astronómicas"	18
Fig. 1.20	" "	35
Fig. 1.7	"http://astro.if.ufrgs.br/index htm"	22
Fig. 1.8	" "	23
Fig. 1.9	" "	24
Fig. 1.15	"http://www.venus-transit.de/Halley/index.html"	31
Fig. 1.16	" "	32
Fig. 1.17	" "	33
Fig. 1.18	" "	34

## Capítulo 2

Fig. 2.1	"http://astro.if.ufrgs.br/index htm"	41
----------	--------------------------------------	----

## Capítulo 3

3.17	"Fundamental Astronomy"	82
------	-------------------------	----

## Capítulo 4

Fig. 4.3	"http://athena.mat.u.f.r.s.br/~porto/sil/curting htm"	96
Fig. 4.4	"Jornal Helios", "http://www.mat.uc.pt/~helios/"	99
Fig. 4.6	"Astronomy: Principles and Practice"	100
Fig. 4.7	"Introdução à astronomia e às observações astronómicas"	103
Fig. 4.13	" "	108
Fig. 4.8	"http://astro.if.ufrgs.br/index htm"	103
Fig. 4.9	" "	104
Fig. 4.10	"Curso de Astronomia"	105
Fig. 4.11	" "	106
Fig. 4.12	" "	107

## Capítulo 5

Fig. 5.1	"http://astro.if.ufrgs.br/index htm"	122
Fig. 5.2	" "	122
Fig. 5.6	" "	125
Fig. 5.18	" "	134
Fig. 5.19	" "	134
Fig. 5.20	" "	135
Fig. 5.4	"http://plus.maths.org/"	123
Fig. 5.26	"http://www.sunspot.com"	140
Fig. 5.27	" "	140
Fig. 5.28	" "	140
Fig. 5.29	" "	141

## Capítulo 6

Fig. 6.1	"Astronomia", Dinah L. Moché"	152
Fig. 6.3	" "	154
Fig. 6.4	"Apontamentos de Tópicos de Astronomia"	155
Fig. 6.5	"http://zebu.uoregon.edu/~soper/MilkWay/Chepeid.html"	156
Fig. 6.6	" "	156
Fig. 6.10	"Estrelas e meio interestelar"	162
Fig. 6.12	"http://astro.if.ufrgs.br/index htm"	165

<sup>1</sup> Todas as figuras mencionadas são adaptações do autor

Capitulo 7

Fig. 7.1	"http://archive.nasa.uiuc.edu/Cyberia/Bima/Doppler Efect.htm"	179
Fig. 7.4	"http:// www.physics.csulb.edu /Galatic Distances and Hubble's Law,htm"	183
Fig. 7.5	" "	184
Fig. 7.6	"http://astro.if.ufrgs.br/index htm"	187

Anexo II

Fig. 3	"http://www.math.nus.edu/aslak sem/projects/sundials"	202
Fig. 4	" "	202
Fig. 5	" "	202
Fig. 6	" "	203
Fig. 7	" "	204
Fig. 8	" "	204
Fig. 9	" "	205
Fig. 10	"http://plus.maths.org/issue 11/features/sundials7index html"	207
Fig. 11	" "	207
Fig. 12	" "	208
Fig. 13	" "	209
Fig. 14	" "	210
Fig. 15	" "	211
Fig. 16	" "	211
Fig. 17	" "	212
Fig. 20	" "	215
Fig. 21	" "	216
Fig. 22	" "	216

## Origem das Tabelas

### Capítulo 1

Tabela 1.1 "<http://www.venus-transit.de/Halley/index.html>" 31

### Capítulo 3

Tabela 3.1 "História da Astronomia" 60

Tabela 3.2 "<http://astro.if.ufrgs.br/index.htm>" 63

Tabela 3.4 "Remote Access Astronomy Project; University of California" 68

facultado pelo Prof<sup>or</sup> Jorge Carneiro do Obs<sup>o</sup> do Monte da Virgem.

Tabela 3.5 " " " 70

Tabela 3.6 "Introdução à astronomia e às observações astronómicas" 89

### Capítulo 5

Tabela 5.1 "[http://plus.maths.org/issue 11/features/sundials7index.html](http://plus.maths.org/issue%2011/features/sundials7index.html)" 124

Tabela 5.5 "<http://www.sunspot.com>" 141

Tabela 5.6 " " 145

### Capítulo 6

Tabela 6.1 "Astronomie, Bulletin Inter-Irem N<sup>o</sup>24/mai 1984" 157

Tabela 6.2 " " " 158

Tabela 6.4 "Astronomia, Dinah L. Moché, Gradiva, 2002" 175

### Capítulo 7

Tabela 7.1 "Apontamentos de Cosmologia" 178

Tabela 7.2 "[http:// campus.Houghton.edu/personnel/labs/hubble.pdf](http://campus.Houghton.edu/personnel/labs/hubble.pdf)" 181

Tabela 7.3 " " " 181