Sandra Cristina de Pinto Vaz

EXISTÊNCIA SEM CONVEXIDADE EM CÁLCULO DAS VARIAÇÕES

Departamento de Matemática Aplicada
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

Julho de 2001

Sandra Cristina de Pinto Vaz

EXISTÊNCIA SEM CONVEXIDADE EM CÁLCULO DAS VARIAÇÕES

Tese submetida à Faculdade de Ciências da Universidade do Porto para obtenção do grau de Mestre em Matemática Aplicada

Departamento de Matemática Aplicada
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
Julho de 2001

Tese orientada pelo
Professor Doutor Gueorgi Smirnov

aos Meus Pais e ao Meu Irmão

Agradeço

ao meu orientador, Prof. Doutor Gueorgi Smirnov que supervisionou este trabalho, o seu apoio e sugestões na sua realização;

aos Prof. Doutores José Basto Gonçalves, Isabel Laboriau, Maria João Costa, Maria Helena Matos e Maria João Rodrigues pela sua disponibilidade e incentivo;

aos meus amigos Conceição Leite, Jorge Miguel Gonçalves, Patrícia Beites e César Silva e à minha família pela constante preocupação e apoio em todas as ocasiões.

Índice

Resumo

Consideramos o Problema de Cálculo das Variações $(\mathcal{P})$:

$$\mathcal{I}(x) = \int_a^b L(x(t), \dot{x}(t))\, dt,$$
$$x(a) = A, \; x(b) = B,$$

onde a função $L(x(t), \dot{x}(t))$ é analítica, não convexa relativamente a $\dot{x}(t)$ e satisfaz a condição de crescimento: $L(x(t), \dot{x}(t)) > c\,(1 + |\dot{x}|)^{(1+\epsilon)}$; $c, \epsilon > 0$.

Neste trabalho demonstramos condições suficientes para a existência de solução do problema anterior.

Palavras chave: cálculo das variações, não convexidade, existência de soluções.

Abstract

We consider the Problem of Calculus of Variations $(\mathcal{P})$:

$$\mathcal{I}(x) = \int_a^b L(x(t), \dot{x}(t))\, dt,$$
$$x(a) = A,\; x(b) = B,$$

where the function $L(x(t), \dot{x}(t))$ is analitic, non-convex in $\dot{x}(t)$, and satisfies the growth condition: $L(x(t), \dot{x}(t)) > c\,(1 + |\dot{x}|)^{(1+\epsilon)};\; c, \epsilon > 0$.

In this work we prove sufficient conditions for the existence of solution to $(\mathcal{P})$.

Key words: calculus of variations, non-convexity, existence of solutions.

1 Introdução

O problema elementar do Cálculo das Variações é o seguinte: entre todas as funções absolutamente contínuas $x(\cdot)$, num dado intervalo [a,b], com $x(a) = A$, $x(b) = B$, encontrar aquela que minimiza o integral

$$\mathcal{I}(x(\cdot)) = \int_a^b L(t, x(t), \dot{x}(t))dt.$$

A convexidade de L em $\dot{x}(t)$ é crucial para a existência de solução: se a assumirmos, o Teorema de Existência de Tonelli garante a existência de solução. A não convexidade de L em $\dot{x}(t)$ impede a existência de solução em muitos problemas de Cálculo das Variações. Um deles é:

$$\mathcal{I}(x(\cdot)) = \int_0^1 (1 - \dot{x}(t)^2)^2 + x(t)^2 dt,$$
$$x(0) = 0, x(1) = 0,$$

onde $I(x(\cdot)) > 0$, para todo $x(\cdot)$. Mas $\lim_{n\to\infty} I(x_n(\cdot)) = 0$, onde:

$$x_n(t) = \begin{cases} t - \frac{2i}{k} & ; \ \frac{2i}{k} \leq t < \frac{2i+1}{k} \\ \frac{2i+2}{k} - t & ; \ \frac{2i+1}{k} \leq t < \frac{2i+2}{k} \end{cases} \quad i = 1, ..., \frac{k}{2}; \ k = 2, 4, ...$$

Logo o problema não tem solução.

Supondo L não convexa em $\dot{x}(t)$ mas assumindo que

$$L(t, x(t), \dot{x}(t)) = f(t, x(t)) + g(t, \dot{x}(t)) \tag{1}$$

onde f é côncava em x, Cellina e Colombo [2], mostram a existência de solução. Em problemas de controlo óptimo (problemas de Lagrange e Bolza), sem convexidade em $\dot{x}$, onde L tem a forma (1), Raymond [7] prova a existência de solução.

Neste trabalho demonstramos condições suficientes para a existência de solução do problema de Cálculo das Variações $(\mathcal{P})$:

$$\mathcal{I}(x(\cdot)) = \int_a^b L(x(t), \dot{x}(t))\, dt,$$
$$x(a) = A, \ x(b) = B,$$

onde $L(x(t), \dot{x}(t))$ é analítica, não convexa relativamente a $\dot{x}(t)$ e satisfaz a condição de crescimento: $L(x(t), \dot{x}(t)) > c\,(1 + |\dot{x}|)^{(1+\epsilon)}$; $c, \epsilon > 0$.

Para isso, vamos recorrer a um lema que pode ser obtido de Gamkrelidze [5]. Este lema reduz o problema de Cálculo das Variações $(\mathcal{P})$ ao problema de tempo mínimo $(\mathcal{P}^*)$,

$$
\begin{aligned}
&\Theta \to \inf, \\
&\frac{dt}{d\theta}(\theta) = \frac{1}{L(y(\theta), u(\theta))}, \theta \in [0, \Theta], \\
&\frac{dy}{d\theta}(\theta) = \frac{u(\theta)}{L(y(\theta), u(\theta))}, \\
&u(\theta) \in \mathbb{R}, \\
&(t(0), y(0)) = (a, A), \\
&(t(\Theta), y(\Theta)) = (b, B),
\end{aligned}
$$

demonstrando que a existência de solução de $(\mathcal{P}^*)$ implica a existência de solução de $(\mathcal{P})$.

Num *problema de tempo mínimo*,

$$T \to \inf, \tag{2}$$

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)),\ t \in [0, T], \tag{3}$$

$$u(t) \in \mathrm{U} \subset \mathbb{R}^k, \tag{4}$$

$$x(0) = x_0, x(T) = x_1, \tag{5}$$

onde $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$, a *trajectória* $x(t) \in \mathbb{R}^n$ descreve a posição do sistema e o *controlo* é a função $u(t) \in \mathrm{U} \subset \mathbb{R}^k$.

O *espaço das funções absolutamente contínuas*, $AC([0, T], \mathbb{R}^n)$, é o conjunto das funções $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, que verificam: dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $\{(a_k, b_k)\}_{k=1,2,\ldots,n} \subset [a, b]$, é uma família de intervalos disjuntos, satisfazendo

$$\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta,$$

então tem-se

$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \epsilon.$$

O trio $(x(t), u(t), T)$ diz-se um *processo de controlo* se $x(t) \in AC([0, T], \mathbb{R}^n)$, $T > 0$, e verifica as condições (3) e (4). Um processo de controlo diz-se *admissível* se verifica (5). Um processo admissível $(\hat{x}(t), \hat{u}(t), \hat{T})$ diz-se um *processo óptimo* se não existir um processo admissível $(x(t), u(t), T)$ com $T < \hat{T}$. Vamos designar por $\hat{x}(\cdot)$ a *trajectória óptima* e por $\hat{u}(\cdot)$ o *controlo óptimo*.

Antes de enunciar o nosso resultado principal, de forma precisa, vamos relembrar o *Princípio de Máximo de Pontriaguin*, um resultado fundamental no estudo de problemas de controlo óptimo. O *Princípio de Máximo de Pontriaguin* será apresentado aplicado a problemas de tempo mínimo, visto ser com $(\mathcal{P}^*)$ que vamos alcançar os nossos objectivos. Se a existência de um processo óptimo para um problema de tempo mínimo estiver garantida, o *Princípio de Máximo de Pontriaguin* permite encontrar o processo óptimo para esse problema. Seja

$$H(x(t), u, p(t)) = \langle p(t), f(x(t), u)\rangle.$$

Teorema 1.1 (Princípio de Máximo de Pontriaguin) *Suponha-se que* $f : \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^n$ *e as suas derivadas parciais em ordem a* x *são contínuas. Seja* $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot), \hat{T})$ *um processo óptimo no problema de tempo mínimo. Então existe uma função, não nula,* $p(\cdot) \in \mathrm{AC}([0, \hat{T}], \mathbb{R}^n)$ *que satisfaz:*

1. *o sistema conjugado,*
$$\dot{p}(t) = -(\nabla_x \hat{f}(t))^* p(t);$$

2. *e o princípio de máximo,*
$$H(\hat{x}(t), u, p(t)) \leq H(\hat{x}(t), \hat{u}(t), p(t)) \equiv \text{const} \geq 0$$

para quase todo $t \in [0, \hat{T}], \forall u \in U$.

Podemos agora enunciar o resultado principal deste trabalho.

Teorema A *Suponha-se que*

1. *A função* L *é analítica em ordem a* (y, u) *e* $L(y, u) > c(1 + |u|)^{1+\epsilon}$, $c, \epsilon > 0$;

2. *Se* $\frac{\partial H}{\partial u}(y, u, p_t, p_y) = 0$ *e* $(p_t, p_y) \neq (0, 0)$, *então* $\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}(y, u, p_t, p_y) \neq 0$;

3. *Para todo* $(y, u_1, u_2, p_t, p_y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, *com* $(p_t, p_y) \neq (0, 0)$ *e*
$$\max_u H(y, u, p_t, p_y) = H(y, u_1, p_t, p_y) = H(y, u_2, p_t, p_y)$$
tem-se $\nabla_y L(y, u_1) u_2 \neq \nabla_y L(y, u_2) u_1$.

Então o problema $(\mathcal{P})$ *tem solução.*

Em muitos trabalhos, onde se investiga a existência de soluções em problemas de tempo mínimo, no plano, demonstra-se que a trajéctoria óptima é do tipo bang-bang. Em problemas de tempo mínimo considerando sistemas

$$\dot{x} = f(x) + ug(x). \tag{6}$$

Sussmann [8], mostra que as trajectórias óptimas são concatenações finitas de arcos bang-bang e arcos singulares com $f,\ g \in C^{\infty}$ e em [9], prova o análogo, para sistemas analíticos. Este é o elemento chave que o mesmo autor usa, em [10], na prova de existência de síntese regular nos problemas de tempo mínimo analíticos.

Se o número de trocas de controlos for grande, em curtos espaços de tempo, então perde-se a optimalidade das trajectórias bang-bang. Piccoli [6], prossegue o estudo de Sussmann e classifica todos os tipos de singularidades que podem surgir, sob condições genéricas. Para o mesmo problema, juntamente com Bressan [1], fornece uma classificação genérica dos controlos óptimos.

Também no plano, só que para problemas de Bolza, Crasta e Piccoli [3], consideram um caso mais geral do que o estudado por Sussmann e mostram, sob certas condições, que as trajectórias óptimas são do tipo Bang-Bang. Como corolário, obtêm resultados de existência para problemas de optimização, sem convexidade. Os mesmos autores, em [4], mostram a existência de duas soluções do tipo Bang-Bang, que sob certas condições e com um número finito de trocas enquadram uma dada solução x, definida em $[a, b]$, do problema de controlo considerado. Estes resultados não são suficientes para resolver o problema que consideramos. Portanto é necessário investigar mais para resolver o problema de tempo mínimo.

Este trabalho está organizado como se segue. Os resultados preliminares, definições e teoremas, estão na secção 2. A secção 3 consiste na demonstração do teorema principal (Teorema A). Finaliza-se este trabalho com a secção 4, onde se fazem algumas considerações sobre as hipóteses do Teorema A.

2 Resultados Preliminares

Nesta secção, apresentamos os resultados que auxiliam a demonstração do resultado principal. Iniciamos com o lema que reduz o problema de Cálculo das Variações $(\mathcal{P})$ a um problema de tempo mínimo equivalente, $(\mathcal{P}^*)$.

Lema 2.1 (Gamkrelidze [5]) *Dado:*

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \phi(x(t),u(t))dt \to \inf,\\
&\dot{x}(t) = u(t), \quad t \in [a,b],\\
&x(a) = A, \quad x(b) = B.
\end{aligned}$$

Suponha-se que $\phi(\cdot,\cdot)$ *é contínua e* $\phi(x,u) \geq c > 0$ *para todo* (x,u). *Seja* $(\hat{t}(\cdot), \hat{z}(\cdot), \hat{\rho}(\cdot), \hat{q}(\cdot), \hat{\Theta}(\cdot))$ *o processo de controlo óptimo no problema*

$$\begin{aligned}
&\Theta \to \inf,\\
&\frac{dt}{d\theta}(\theta) = \frac{\rho(\theta)}{\phi(y(\theta),q(\theta))}, \quad \theta \in [0,\Theta],\\
&\frac{dy}{d\theta}(\theta) = \frac{\rho(\theta)q(\theta)}{\phi(y(\theta),q(\theta))},\\
&q(\theta) \in \mathbb{R}, \quad \rho(\theta) \in [0,1],\\
&(t(0),y(0)) = (a,A),\\
&(t(\Theta),y(\Theta)) = (b,B)
\end{aligned}$$

$$e \quad \frac{\hat{\rho}(\theta)}{\phi(\hat{y}(\theta),\hat{q}(\theta))} \geq \sigma > 0, \ \theta \in [0,\Theta].$$

Então existe a função $\hat{\theta}(t)$, *a função inversa de* $\hat{t}(\theta)$ *e o processo de controlo* $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot), \hat{T})$, *onde* $\hat{x}(t) = \hat{y}(\hat{\theta}(t))$, $\hat{u}(t) = \hat{q}(\hat{\theta}(t))$, $\hat{T} = \hat{t}(\hat{\Theta})$, *é solução do problema original.*

Consideremos o problema $(\mathcal{P}^*)$:

$$\begin{aligned}
&\Theta \to \inf,\\
&\frac{dt}{d\theta}(\theta) = \frac{1}{L(y(\theta),u(\theta))}, \theta \in [0,\Theta],\\
&\frac{dy}{d\theta}(\theta) = \frac{u(\theta)}{L(y(\theta),u(\theta))},\\
&u(\theta) \in \mathbb{R},\\
&(t(0),y(0)) = (a,A),\\
&(t(\Theta),y(\Theta)) = (b,B).
\end{aligned}$$

O problema $(\mathcal{P}^*)$ não é convexo. No entanto, a cada conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ é possivel associar um conjunto convexo, $\operatorname{co} C$, designado por *invólucro convexo de* C, que é a intersecção de todos os conjuntos convexos de $\mathbb{R}^n$ que contêm C.

Pelo teorema que se segue, todo o elemento do invólucro convexo de um conjunto de $\mathbb{R}^n$ pode ser escrito como combinação convexa de, no máximo, $n+1$ elementos do conjunto original.

Teorema 2.2 (Carathéodory) *Seja $A \subset \mathbb{R}^n$. Para todo $x \in \operatorname{co} A$ existem $x_1, \ldots, x_m \in A$, tais que $m \leq n+1$, e*

$$x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i,$$

onde $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, ..., m$, e $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$.

O teorema seguinte garante a existência de um processo óptimo no problema de tempo mínimo caso este seja convexo.

Teorema 2.3 (Existência para o Problema de Tempo Mínimo) *Dado o problema de tempo mínimo:*

$$\begin{aligned}
&T \to \inf, \\
&\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \ t \in [0, T], \\
&u(t) \in U \subset \mathbb{R}^k, \\
&x(0) = x_0, x(T) = x_1.
\end{aligned}$$

Sejam $f(x,u)$ uma aplicação contínua, $c > 0$ tal que $f(x,u) \leq c(1+|x|)$, U um conjunto fechado e $f(x, U)$ convexo e compacto para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Se existe um processo admissível, então existe um processo óptimo para o problema de tempo mínimo.

O *Teorema de Fillipov* pode ser considerado como uma versão do teorema da função implícita sob condições muito fracas.

Teorema 2.4 (Fillipov) *Sejam $f : A \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma função contínua, onde $A \subset \mathbb{R}$, é um conjunto compacto e $v : A \to \mathbb{R}^m$ uma função mensurável. Suponhamos que $U \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto fechado e que $v(t) \in f(t, U)$ para quase todo $t \in A$. Então, existe uma função mensurável $u : A \to U$ que verifica $v(t) = f(t, u(t))$ em quase todos os pontos $t \in A$.*

3 Demonstração do Teorema Principal

Seja $z = (t, y)$. A trajectória de $(\mathcal{P}^*)$ será denotada por $z(\theta) = (t(\theta), y(\theta))$. Deste modo $(\mathcal{P}^*)$ toma a seguinte forma:

$$\begin{aligned}
&\Theta \to \inf,\\
&\frac{dz}{d\theta}(\theta) = \left(\frac{1}{L(y(\theta), u(\theta))}, \frac{u(\theta)}{L(y(\theta), u(\theta))}\right), \quad \theta \in [0, \Theta],\\
&u(\theta) \in \mathbb{R},\\
&z(0) = (a, A),\\
&z(\Theta) = (b, B).
\end{aligned}$$

Seja $\hat{z}(\theta) = (\hat{t}(\theta), \hat{y}(\theta))$ a trajectória óptima do problema de tempo mínimo, $(\mathcal{P}')$,

$$\begin{aligned}
&\Theta \to \inf,\\
&\frac{dz}{d\theta}(\theta) \in \mathrm{cl\ co} \bigcup_{u \in \mathbb{R}} \left(\frac{1}{L(y(\theta), u)}, \frac{u}{L(y(\theta), u)}\right), \theta \in [0, \Theta],\\
&z(0) = (a, A),\\
&z(\Theta) = (b, B).
\end{aligned} \tag{7}$$

isto é, $(\mathcal{P}^*)$ convexificado. Seja $f(z, u) = \left(\frac{1}{L(y,u)}, \frac{u}{L(y,u)}\right)$. É fácil ver que

$$H(z, u, p_t, p_y) = \langle p, f(z, u)\rangle = \frac{p_t + p_y u}{L(y, u)}.$$

Consideremos

$$U(y, p_t, p_y) = \left\{u \in \mathbb{R} \middle| H(y, u, p_t, p_y) = \max_{q \in \mathbb{R}} H(y, q, p_t, p_y)\right\}.$$

Como L é analítica, o conjunto $U(y, p_t, p_y)$ contém um número finito de pontos.

A próxima proposição mostra uma condição suficiente para $\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}(y, u, p_t, p_y)$ ser diferente de zero.

Proposição 3.1 *Se* $\frac{\partial^2 L}{\partial u^2}(y, u) \neq 0$ *e* $(p_t, p_y) \neq (0, 0)$ *então* $\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}(y, u, p_t, p_y) \neq 0$.

Demonstração:

Seja $H(y, u, p_t, p_y) = \frac{p_t + u p_y}{L(y,u)}$, então

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial u}(y, u, p_t, p_y) &= \frac{1}{L^2(y, u)} \left\{p_y L(y, u) - (p_t + u p_y)\frac{\partial L}{\partial u}(y, u)\right\};\\
\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}(y, u, p_t, p_y) &= (p_t + u p_y)\frac{\partial^2 L}{\partial u^2}(y, u).
\end{aligned}$$

Como

$$(p_t, p_y) \neq (0,0) \quad \text{e} \quad \frac{\partial L}{\partial u}(y,u) = \frac{p_y L(y,u)}{p_t + u p_y}$$

tem-se

$$\frac{\partial^2 L}{\partial u^2}(y,u) \neq 0 \quad \text{que é equivalente a} \quad \frac{\partial^2 H}{\partial u^2}(y,u,p_t,p_y) \neq 0.$$

□

Portanto, pelo teorema da função implícita, pode-se escrever u como função analítica de (y, p_t, p_y), isto é, $u = u(y, p_t, p_y)$.

O conjunto $U(y, p_t, p_y)$ localmente é uma união finita de funções analíticas:

$$U(y, p_t, p_y) = \bigcup_{m=1}^{M} u_m(y, p_t, p_y). \tag{8}$$

portanto se $y(\cdot)$, $p_t(\cdot)$ e $p_y(\cdot)$ são funções absolutamente contínuas, então a função $u(\theta) = u(y(\theta), p_t(\theta), p_y(\theta))$ é absolutamente contínua.

O *Teorema de Existência de Tempo Mínimo* garante a existência de $\hat{z}(\theta) = (\hat{t}(\theta), \hat{y}(\theta))$, solução para $(\mathcal{P}')$. Na trajectória óptima $\hat{z}(\theta) = (\hat{t}(\theta), \hat{y}(\theta))$, $\theta \in [0, \theta_1]$, sem perda de generalidade, considera-se $M = 2$ em (8), isto é:

$$U(\hat{y}(\theta), p_t(\theta), p_y(\theta)) = \{u_1(\theta), u_2(\theta)\},$$

onde $p(\cdot) = (p_t, p_y)$ é definida no *Princípio de Máximo de Pontriaguin.*

Suponhamos que as funções $\lambda(\cdot)$ e $u_k(\cdot)$, $k = 1, 2$ são diferenciáveis no intervalo $[0, +\infty[$. Seja $F_1(z(\theta), \theta) = f(y(\theta), u_1(\theta))$ e $F_2(z(\theta), \theta) = f(y(\theta), u_2(\theta))$. Pelo *Teorema de Fillipov* existe uma função mensurável, $\lambda(\cdot)$, tal que a relação (7) de $(\mathcal{P}')$ é dada por:

$$\begin{aligned} &F(\hat{z}(\theta), \theta, \lambda(\theta)) = \lambda(\theta)\, F_1(\hat{z}(\theta), \theta) + (1 - \lambda(\theta))\, F_2(\hat{z}(\theta), \theta), \quad \lambda(\theta) \in [0,1], \\ &F(\hat{z}(\theta), \theta) = F(\hat{z}(\theta), \theta, \lambda(\theta)). \end{aligned}$$

Pelo *Princípio do Máximo de Pontriaguin*

$$\begin{cases} \dfrac{dp_t}{d\theta}(\theta) &= 0, \\ \\ \dfrac{dp_y}{d\theta}(\theta) &= \left(\frac{\lambda(\theta) D_1(\theta)}{L_1(\theta)^2} + \frac{(1-\lambda(\theta)) D_2(\theta)}{L_2(\theta)^2} \right) p_t(\theta) + \left(\frac{\lambda(\theta) u_1(\theta) D_1(\theta)}{L_1(\theta)^2} + \frac{(1-\lambda(\theta)) u_2(\theta) D_2(\theta)}{L_2(\theta)^2} \right) p_y(\theta), \end{cases}$$

em que $L_k(\theta) = L(\hat{y}(\theta), u_k(\theta))$ e $D_k(\theta) = \nabla_y L(\hat{y}(\theta), u_k(\theta))$, $k = 1, 2$.

Proposição 3.2 *Seja* $d_k(\theta) = \nabla_u L(\hat{y}(\theta), u_k(\theta))$, *para* $k = 1, 2$. *Então*

$$d_k(\theta) = \frac{L_2(\theta) - L_1(\theta)}{u_2(\theta) - u_1(\theta)};\quad k = 1, 2.$$

Demonstração: Pelo segundo item do *Princípio de máximo de Pontriaguin*,

$$H(\hat{z}(\theta), u_1(\theta), p_t(\theta), p_y(\theta)) = H(\hat{z}(\theta), u_2(\theta), p_t(\theta), p_y(\theta)),$$

isto é,

$$\frac{p_t(\theta) + p_y(\theta)u_1(\theta)}{L_1(\theta)} = \frac{p_t(\theta) + p_y(\theta)u_2(\theta)}{L_2(\theta)}.$$

Sem perda de generalidade, seja $L_1(\theta) \neq L_2(\theta)$. Então,

$$(p_t(\theta) + p_y(\theta)u_1(\theta))L_2(\theta) = (p_t(\theta) + p_y(\theta)u_2(\theta))L_1(\theta)$$

isto é,

$$p_t(\theta)(L_2(\theta) - L_1(\theta)) = p_y(\theta)(u_2(\theta)L_1(\theta) - u_1(\theta)L_2(\theta)).$$

Portanto

$$p_t(\theta) = \left(\frac{u_2(\theta)L_1(\theta) - u_1(\theta)L_2(\theta)}{L_2(\theta) - L_1(\theta)}\right) p_y(\theta). \tag{9}$$

Os controlos $u_1(\theta)$ e $u_2(\theta)$ são máximos da função $H(z(\theta), u(\theta), p_t(\theta), p_y(\theta))$, portanto,

$$\frac{\partial H}{\partial u_k}(z(\theta), u(\theta), p_t(\theta), p_y(\theta)) = 0,\ k = 1, 2;$$

então

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial u_1}(z(\theta), u(\theta), p_t(\theta), p_y(\theta)) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{p_y(\theta)}{L_1(\theta)} - \frac{p_t(\theta) + p_y(\theta)u_1(\theta)}{L_1(\theta)^2} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{p_y(\theta)L_1(\theta) - (p_t(\theta) + p_y(\theta)u_1(\theta))d_1(\theta)}{L_1(\theta)^2} = 0.\end{aligned}$$

Como $L_1(\theta)^2 \neq 0$ temos

$$p_y(\theta)\, L_1(\theta) = (p_t(\theta) + p_y(\theta)u_1(\theta))\, d_1(\theta). \tag{10}$$

Analogamente para o controlo $u_2(\theta)$,

$$p_y(\theta)\, L_2(\theta) = (p_t(\theta) + p_y(\theta)u_2(\theta))\, d_2(\theta). \tag{11}$$

Das relações (9), (10), (11) obtemos o resultado. □

Proposição 3.3 *Seja* $z(0) = z_*$. *A expressão geral da trajectória para o problema de tempo mínimo convexificado é:*

$$z(\theta) = z_* + \int_0^\theta F(z_*, s)ds + \frac{\theta^2}{2}\nabla_z F(z_*, 0)F(z_*, 0) + o(\theta^2)$$

Demonstração:

A velocidade de $(\mathcal{P}')$ é $\dfrac{dz}{d\theta}(\theta) = F(z(\theta),\theta)$ e

$$\int_0^\theta \frac{dz(\theta)}{d\theta}d\theta = \int_0^\theta F(z(s),s)ds.$$

Portanto $z(\theta) - z(0) = \displaystyle\int_0^\theta F(z(s),s)ds$. Logo

$$z(\theta) = z_* + \int_0^\theta F(z(s),s)ds.$$

Por substituição sucessiva:

$$\begin{aligned} z(\theta) &= z_* + \int_0^\theta F\left(z_* + \int_0^s F(z(r),r)dr, s\right) ds \\ &= z_* + \int_0^\theta \left(F(z_*,s) + \nabla_z F(z_*,s)\int_0^s F(z(r),r)dr + o(s)\right) ds. \end{aligned}$$

Pela fórmula de Taylor:

$$\int_0^s F(z(r),r)dr = \int_0^s (F(z_*,0) + o(r))dr = F(z_*,0)s + o(s).$$

Portanto:

$$\begin{aligned} z(\theta) &= z_* + \int_0^\theta (F(z_*,s) + \nabla_z F(z_*,s)F(z_*,0)s + o(s))ds \\ &= z_* + \int_0^\theta F(z_*,s)ds + \int_0^\theta \nabla_z F(z_*,0)F(z_*,0)sds + \\ &\quad + \int_0^\theta s(\nabla_z F(z_*,s) - \nabla_z F(z_*,0)F(z_*,0) + o(s))ds \\ &= z_* + \int_0^\theta F(z_*,s)ds + \frac{\theta^2}{2}\nabla_z F(z_*,0)F(z_*,0) + o(\theta^2). \end{aligned}$$

□

Suponhamos que $\hat{z}(\cdot)$ não é a trajectória de $(\mathcal{P}^*)$. Então vamos mostrar que $\hat{z}(\cdot)$ não é trajectória óptima do problema $(\mathcal{P}')$. Consideremos $\zeta = \zeta(\theta)$ a trajectória que verifica:

$$\begin{cases} \dfrac{d\zeta(\theta)}{d\theta} = F_1(\zeta(\theta),\theta), & \theta \in [0,\tau], \\ \dfrac{d\zeta(\theta)}{d\theta} = F_2(\zeta(\theta),\theta), & \theta \in [\tau,\hat{\theta}], \\ \zeta(0) = z_*. \end{cases}$$

Quando $\theta \in [0,\tau]$, a velocidade de $\zeta(\theta)$ é dada pela primeira equação. A segunda equação é a velocidade de $\zeta(\theta)$ quando $\theta \in [\tau, \hat{\theta}]$.

Pela proposição 3.2, a trajectória $\zeta(\theta)$ é:

$$
\begin{aligned}
\text{para } \theta &\in [0,\tau], \\
\zeta(\tau) &= z_* + \int_0^{\tau} F_1(z_*,s)ds + \frac{\tau^2}{2}\nabla_z F_1(z_*,0) + o(\theta^2),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{para } \theta &\in [\tau,\hat{\theta}], \\
\zeta(\hat{\theta}) &= \zeta(\tau) + \int_{\tau}^{\hat{\theta}} F_2(\zeta(\tau),s)ds + \frac{\tau^2}{2}\nabla_z F_2(z_*,0)F_2(z_*,0) + o(\hat{\theta}^2) \\
&= z_* + \int_0^{\tau} F_1(z_*,s)ds + \frac{\tau^2}{2}\nabla_z F_1(z_*,0)F_1(z_*,0) + \int_{\tau}^{\hat{\theta}} F_2(z_* + \int_0^{\tau} F_1(z_*,r)dr, s)ds + \\
&\quad + \frac{(\theta-\tau)^2}{2}\nabla_z F_2(z_*,0)F_2(z_*,0) + o(\hat{\theta}^2) \\
&= z_* + \int_0^{\tau} F_1(z_*,s)ds + \int_{\tau}^{\hat{\theta}} F_2(z_*,s)ds + \frac{\tau^2}{2}\nabla_z F_1(z_*,0)F_1(z_*,0) + \\
&\quad + (\hat{\theta}-\tau)\tau\nabla_z F_2(z_*,0)F_1(z_*,0) + \frac{(\hat{\theta}-\tau)^2}{2}\nabla_z F_2(z_*,0)F_2(z_*,0) + o(\hat{\theta}^2).
\end{aligned}
$$

Sejam $F_1 = F_1(z_*,0)$, $F_2 = F_2(z_*,0)$, $\nabla_z F_1 = \nabla_z F_1(z_*,0)$ e $\nabla_z F_2 = \nabla_z F_2(z_*,0)$. Assim, a trajectória $\zeta(\theta)$ no instante final, $\hat{\theta}$, é a seguinte:

Proposição 3.4 *Para todo* $0 < \tau < \hat{\theta}$*:*

$$\zeta(\hat{\theta}) = z_* + \int_0^{\tau} F_1(z_*,s)ds + \int_{\tau}^{\hat{\theta}} F_2(z_*,s)ds + \frac{\tau^2}{2}\nabla_z F_1 F_1 + (\hat{\theta}-\tau)\tau\nabla_z F_2 F_1 + \frac{(\hat{\theta}-\tau)^2}{2}\nabla_z F_2 F_2 + o(\hat{\theta}^2)$$

Para a trajectória $\zeta(\theta)$ o instante final é $\hat{\theta}$, e para a trajectória $\hat{z}(\theta)$ o instante final é $\check{\theta}$. Suponhamos que as trajectórias $\hat{z}(\theta) = (\hat{t}(\theta), \hat{y}(\theta)) = (\hat{z}^{(1)}(\theta), \hat{z}^{(2)}(\theta))$ e $\zeta(\theta) = (\zeta^{(1)}(\theta), \zeta^{(2)}(\theta))$ se intersectam em $\check{\theta}$ e $\hat{\theta}$, respectivamente, isto é,

$$\hat{z}^{(1)}(\check{\theta}) = T = \zeta^{(1)}(\hat{\theta}) \text{ e } \hat{z}^{(2)}(\check{\theta}) = \zeta^{(2)}(\hat{\theta}). \tag{12}$$

Consideremos $\Delta t = T - z_*^{(1)}$, a diferença entre o instante final e o instante inicial, $\omega = (\check{\theta}, \hat{\theta}, \tau)$, um vector composto pelos instantes finais e intermédios das trajectórias $\hat{z}(\theta)$ e $\zeta(\theta)$, e

$$F = F(z_*,0) = \left(\tfrac{\lambda(0)}{L(y(0),u_1(0))} + \tfrac{(1-\lambda(0))}{L(y(0),u_2(0))}, \tfrac{\lambda(0)u_1(0)}{L(y(0),u_1(0))} + \tfrac{(1-\lambda(0))u_2(0)}{L(y(0),u_2(0))}\right) = (F^{(1)}, F^{(2)}),$$

$$F_1 = F_1(z_*,0) = \left(\tfrac{\lambda(0)}{L(y(0),u_1(0))}, \tfrac{\lambda(0)u_1(0)}{L(y(0),u_1(0))}\right) = (F_1^{(1)}, F_1^{(2)})$$

$$F_2 = F_2(z_*,0) = \left(\tfrac{1-\lambda(0)}{L(y(0),u_2(0))}, \tfrac{(1-\lambda(0))u_2(0)}{L(y(0),u_2(0))}\right) = (F_2^{(1)}, F_2^{(2)}) \text{ e } \nabla_z F(z_*,0) = \nabla_z F.$$

Sejam

$$\phi_0(\Delta t) \quad = (-\Delta t, -\Delta t, 0);$$

$$\begin{aligned}
\phi_1(\omega) \quad &= (\phi_1^1(\omega), \phi_1^2(\omega), \phi_1^3(\omega)), \quad \text{onde} \\
&\phi_1^1(\omega) = \int_0^{\check\theta} F^{(1)}(z_*,s)ds; \\
&\phi_1^2(\omega) = \int_0^{\tau} F_1^{(1)}(z_*,s)ds + \int_\tau^{\hat\theta} F_2^{(1)}(z_*,s)ds; \\
&\phi_1^3(\omega) = \int_0^{\check\theta} F^{(2)}(z_*,s)ds - \left(\int_0^{\tau} F_1^{(2)}(z_*,s)ds + \int_\tau^{\hat\theta} F_2^{(2)}(z_*,s)ds\right);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_2(\omega) \quad &= (\phi_2^1(\omega), \phi_2^2(\omega), \phi_2^3(\omega)), \quad \text{onde} \\
&\phi_2^1(\omega) = \frac{\check\theta^2}{2}(\nabla_z F F)^{(1)}; \\
&\phi_2^2(\omega) = \frac{\tau^2}{2}(\nabla_z F_1 F_1)^{(1)} + (\hat\theta-\tau)\tau(\nabla_z F_2 F_1)^{(1)} + \frac{(\hat\theta-\tau)^2}{2}(\nabla_z F_2 F_2)^{(1)}; \\
&\phi_2^3(\omega) = \frac{\check\theta^2}{2}(\nabla_z F F)^{(2)} - \left(\frac{\tau^2}{2}(\nabla_z F_1 F_1)^{(2)} + (\hat\theta-\tau)\tau(\nabla_z F_2 F_1)^{(2)} + \frac{(\hat\theta-\tau)^2}{2}(\nabla_z F_2 F_2)^{(2)}\right).
\end{aligned}$$

e

$$\phi(\Delta t, \omega) = \phi_0(\Delta t) + \phi_1(\omega) + \phi_2(\omega).$$

Por (12), $\phi(\Delta t, \omega) + R(\omega) = 0$ onde $R(\omega)$ satisfaz:

$$|R(\omega)| = o(|\omega|^2), \ |\nabla R(\omega)| = o(|\omega|) \ \text{ e } |\nabla^2 R(\omega)| = o(1).$$

O primeiro elemento de $\phi(\Delta t, \omega) + R(\omega)$ consiste na primeira componente de

$$-\hat z(\check\theta) + z_* + \int_0^{\check\theta} F(z_*,s)ds + \frac{\check\theta^2}{2}\nabla_z F(z_*,0)F(z_*,0) + o(\check\theta^2) = 0,$$

isto é, usando (12),

$$-(T, z^{(2)}(\check\theta)) + (z_*^{(1)}, z_*^{(2)}) + \int_0^{\check\theta} F(z_*,s)ds + \frac{\check\theta^2}{2}\nabla_z F(z_*,0)F(z_*,0) + o(\check\theta^2) = 0.$$

O segundo elemento consiste na primeira componente de

$$\begin{aligned}
&-\zeta(\hat\theta) + z_* + \int_0^{\tau} F_1(z_*,s)ds + \int_\tau^{\hat\theta} F_2(z_*,s)ds + \frac{\tau^2}{2}\nabla_z F_1 F_1 + \\
&+(\hat\theta-\tau)\tau\nabla_z F_2 F_1 + \frac{(\hat\theta-\tau)^2}{2}\nabla_z F_2 F_2 + o(\hat\theta^2) = 0,
\end{aligned}$$

isto é, usando (12),

$$-(T,\zeta^{(2)}(\hat\theta)) + (z_*^{(1)}, z_*^{(2)}) + \int_0^\tau F_1(z_*,s)\,ds + \int_\tau^{\hat\theta} F_2(z_*,s)\,ds + \frac{\tau^2}{2}\nabla_z F_1\, F_1 +$$
$$+(\hat\theta-\tau)\tau\nabla_z F_2\, F_1 + \frac{(\hat\theta-\tau)^2}{2}\nabla_z F_2\, F_2 + o(\hat\theta^2) = 0.$$

Por fim, o terceiro elemento é a segunda componente da diferença $(\hat z(\check\theta) - \zeta(\hat\theta))$. Após o estudo das funções $\phi_0(\Delta t)$, $\phi_1(\omega)$ e $\phi_2(\omega)$ demonstraremos que $\hat\theta < \check\theta$.

A proposição seguinte mostra que é possivel escrever $\check\theta$, $\hat\theta$ e τ como função de Δt.

Proposição 3.5 *Se $u_1(0) \neq u_2(0)$, então a equação $\phi(\Delta t,\omega) + R(\omega) = 0$ pode ser resolvida em ordem a ω: $\omega = \omega(\Delta t)$.*

Demonstração: Consideremos $u_1(0) \neq u_2(0)$. Em $\omega = 0$ e $\Delta t = 0$:

$$\frac{\partial}{\partial\omega}(\phi(\Delta t,\omega) + R(\omega)) = \frac{\partial}{\partial\omega}(\phi_0(\Delta t) + \phi_1(\omega) + \phi_2(\omega)) = \frac{\partial\phi_1}{\partial\omega}(0)$$

e

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial\omega}(0) = \begin{pmatrix} F^{(1)}(0) & 0 & 0 \\ 0 & F_2^{(1)}(0) & (F_1^{(1)}(0) - F_2^{(1)}(0)) \\ F^{(2)}(0) & -F_2^{(2)}(0) & -(F_1^{(2)}(0) - F_2^{(2)}(0)) \end{pmatrix}.$$

Como o determinante

$$\begin{aligned} &\det\frac{\partial\phi_1}{\partial\omega}(0) = \\ &= F^{(1)}(0)(F_1^{(1)}(0)F_2^{(2)}(0) - F_1^{(2)}(0)F_2^{(1)}(0)) = \left(\frac{\lambda(0)}{L_1(0)} + \frac{(1-\lambda(0))}{L_2(0)}\right)\frac{(u_2(0)-u_1(0))}{L_1(0)L_2(0)} \end{aligned}$$

é diferente de zero, o teorema da função implícita garante a existência de $\omega = \omega(\Delta t)$. □

Portanto, pela fórmula de Taylor:

$$\begin{aligned} \check\theta(\Delta t) &= \check\theta(0) + \check\theta'(0)\Delta t + \frac{\check\theta''(0)}{2!}(\Delta t)^2 + o((Deltat)^2); \\ \hat\theta(\Delta t) &= \hat\theta(0) + \hat\theta'(0)\Delta t + \frac{\hat\theta''(0)}{2!}(\Delta t)^2 + o((\Delta t)^2) \text{ e} \\ \tau(\Delta t) &= \tau(0) + \tau'(0)\Delta t + \frac{\tau''(0)}{2!}(\Delta t)^2 + o((\Delta t)^2). \end{aligned}$$

Prosseguimos o estudo de $\check\theta(\Delta t)$ e $\hat\theta(\Delta t)$ comparando-os termo a termo. O instante inicial é comum a ambas as trajectórias, isto é, $\check\theta(0) = \hat\theta(0) = 0$. Analisando o segundo termo obtém-se a seguinte proposição:

Proposição 3.6 *Seja $\lambda = \lambda(0)$. Então,*

$$\omega'(0) = \frac{d\omega}{d\Delta t}(0) = \frac{L_1(0)L_2(0)}{\lambda L_2(0) + (1-\lambda)L_1(0)}(1,1,\lambda).$$

Demonstração: Pelo teorema da função implícita,

$$\begin{aligned}\frac{d\phi}{d\Delta t}(\omega(\Delta t),\Delta t) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{\partial\phi}{\partial\omega}(\omega(\Delta t),\Delta t)\frac{\partial\omega}{\partial\Delta t}(\Delta t) + \frac{\partial\phi}{\partial\Delta t}(\omega(\Delta t),\Delta t) = 0\\ &\Leftrightarrow \quad \frac{\partial\phi_1}{\partial\omega}(\omega(\Delta t))\frac{\partial\omega}{\partial\Delta t}(\Delta t) = -\frac{\partial\phi_0}{\partial\Delta t}(\Delta t)\\ &\Leftrightarrow \quad \frac{\partial\omega}{\partial\Delta t}(\Delta t) = -\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial\omega}(\omega(\Delta t))\right)^{-1}\frac{\partial\phi_0}{\partial\Delta t}(\Delta t).\end{aligned}$$

Em $\Delta t = 0$,

$$\omega'(0) = -\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial\omega}(0)\right)^{-1}\phi_0'(0),$$

isto é,

$$\begin{pmatrix} F^{(1)}(0) & 0 & 0 \\ 0 & F_2^{(1)}(0) & (F_1^{(1)}(0) - F_2^{(1)}(0)) \\ F^{(2)}(0) & -F_2^{(2)}(0) & -(F_1^{(2)}(0) - F_2^{(2)}(0)) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega'^{(1)}(0) \\ \omega'^{(2)}(0) \\ \omega'^{(3)}(0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0\end{pmatrix}.$$

Resolvendo este sistema, obtemos o resultado. □

Da proposição anterior conclui-se que $\check{\theta}'(0)$ é igual a $\hat{\theta}'(0)$. Portanto é necessário estudar o terceiro termo calculando a segunda derivada do vector ω. Assim,

$$(\phi(\omega(\Delta t),\Delta t) + R(\omega))'' = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\partial\phi}{\partial\omega}(\omega(\Delta t),\Delta t)\omega'(\Delta t) + \phi_0'(\Delta t)\right)' = 0.$$

Em $\omega = 0$ e $\Delta t = 0$ é equivalente a

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial\omega^2}(0,0)[\omega'(0),\omega'(0)] + \frac{\partial\phi}{\partial\omega}(0,0)\omega''(0) = 0,$$

isto é,

$$\frac{\partial^2}{\partial\omega^2}\left(\phi_1(0) + \phi_2(0)\right)[\omega'(0),\omega'(0)] + \frac{\partial\phi_1}{\partial\omega}(0)\omega''(0) = 0.$$

Portanto

$$\omega''(0) = -\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial\omega}(0)\right)^{-1}\left(\frac{\partial^2}{\partial\omega^2}\left(\phi_1(0)+\phi_2(0)\right)[\omega'(0),\omega'(0)]\right). \tag{13}$$

Determinemos

$$\frac{\partial^2\phi_1}{\partial\omega^2}(0)[\omega'(0),\omega'(0)].$$

Sejam $\alpha = (\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \alpha^{(3)})$ e $\beta = (\beta^{(1)}, \beta^{(2)}, \beta^{(3)})$ então:

$$\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \omega^2}(0)[\alpha, \beta] = \begin{pmatrix} \alpha^{(1)} \frac{\partial^2}{\partial \hat{\theta}^2} \phi_1^{(1)}(0) & \alpha^{(1)} \frac{\partial^2}{\partial \hat{\theta}^2} \phi_1^{(1)}(0) & \alpha^{(1)} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \phi_1^{(1)}(0) \\ \alpha^{(2)} \frac{\partial^2}{\partial \hat{\theta}^2} \phi_1^{(2)}(0) & \alpha^{(2)} \frac{\partial^2}{\partial \hat{\theta}^2} \phi_1^{(2)}(0) & \alpha^{(2)} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \phi_1^{(2)}(0) \\ \alpha^{(3)} \frac{\partial^2}{\partial \hat{\theta}^2} \phi_1^{(3)}(0) & \alpha^{(3)} \frac{\partial^2}{\partial \hat{\theta}^2} \phi_1^{(3)}(0) & \alpha^{(3)} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \phi_1^{(3)}(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta^{(1)} \\ \beta^{(2)} \\ \beta^{(3)} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha^{(1)} \dot{F}^{(1)}(0) & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^{(2)} \dot{F}_2^{(1)}(0) & \alpha^{(3)} (\dot{F}_1^{(1)} - \dot{F}_2^{(1)})(0) \\ \dot{F}^{(2)}(0) & -\alpha^{(2)} \dot{F}_2^{(2)}(0) & -\alpha^{(3)} (\dot{F}_1^{(2)} - \dot{F}_2^{(2)})(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta^{(1)} \\ \beta^{(2)} \\ \beta^{(3)} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha^{(1)} \beta^{(1)} \dot{F}^{(1)}(0) \\ \alpha^{(2)} \beta^{(2)} \dot{F}_2^{(1)}(0) + \alpha^{(3)} \beta^{(3)} (F_1^{(1)} - F_2^{(1)})(0) \\ \alpha^{(1)} \beta^{(1)} \dot{F}^{(2)}(0) - \alpha^{(2)} \beta^{(2)} \dot{F}_2^{(2)}(0) - \alpha^{(3)} \beta^{(3)} (\dot{F}_1^{(2)} - \dot{F}_2^{(2)})(0) \end{pmatrix}.$$

Consideremos $\lambda = \lambda(0)$, $L_k = L_k(0)$, $\dot{F}^{(k)} = \dot{F}^{(k)}(0)$ para $k = 1, 2$, e $\dot{F}_{(j)}^{(k)} = \dot{F}_{(j)}^{(k)}(0)$ para $k = 1, 2$; $j = 1, 2$. Substituindo α, β por $\omega'(0)$, a expressão final é dada por:

$$\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \omega^2}(0)[\,\omega'(0), \omega'(0)] = \left(\frac{L_1 L_2}{\lambda L_2 + (1 - \lambda) L_1} \right)^2 \begin{pmatrix} \dot{F}^{(1)} \\ \dot{F}_2^{(1)} + (F_1^{(1)} - F_2^{(1)}) \\ \dot{F}_2^{(2)} - (\dot{F}_1^{(2)} - \dot{F}_2^{(2)}) \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{L_1L_2}{\lambda L_2+(1-\lambda)L_1}\right)^2 \begin{pmatrix} \lambda\dot{F}_1^{(1)}+(1-\lambda)\dot{F}_2^{(1)}+\dot{\lambda}(F_1^{(1)}-F_2^{(2)}) \\ \\ \dot{F}_2^{(1)}+\lambda^2(\dot{F}_1^{(1)}-\dot{F}_2^{(1)}) \\ \\ \lambda\dot{F}_1^{(2)}+(1-\lambda)\dot{F}_2^{(2)}+\dot{\lambda}(F_1^{(2)}-F_2^{(2)})-\dot{F}_2^{(2)}-\lambda^2(\dot{F}_1^{(2)}-\dot{F}_2^{(2)}) \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{L_1L_2}{\lambda L_2+(1-\lambda)L_1}\right)^2$$

$$\left((\lambda\dot{F}_1^{(1)}+(1-\lambda)\dot{F}_2^{(1)}) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \lambda(1-\lambda) \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{F}_1^{(1)}-\dot{F}_2^{(1)} \\ -(\dot{F}_1^{(2)}-\dot{F}_2^{(2)}) \end{pmatrix} + \dot{\lambda} \begin{pmatrix} F_1^{(1)}-F_2^{(1)} \\ 0 \\ F_1^{(2)}-F_2^{(2)} \end{pmatrix} \right)$$

A proposição que se segue, relaciona $\breve{\theta}''(0)$ com $\hat{\theta}''(0)$. O vector v, representa o termo $\left(\frac{\partial^2}{\partial\omega^2}(\phi_1(0)+\phi_2(0))\,[\omega'(0),\omega'(0)]\right)$ e w representa ω''.

Proposição 3.7 *Seja* $v=(v^{(1)},v^{(2)},v^{(3)})$, $w=(w^{(1)},w^{(2)},w^{(3)})$ *e* $u_1(0)\neq u_2(0)$. *Se*

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial\omega}(0)w=v$$

então

$$(u_2-u_1)(w^{(1)}-w^{(2)})=(v^{(1)}-v^{(2)})(u_2L_1-u_1L_2)+v^{(3)}(L_2-L_1). \tag{14}$$

Demonstração: O sistema

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial\omega}(0)w=v \Leftrightarrow \begin{pmatrix} F^{(1)}(0) & 0 & 0 \\ \\ 0 & F_2^{(1)}(0) & (F_1^{(1)}(0)-F_2^{(1)}(0)) \\ \\ F^{(2)}(0) & -F_2^{(2)}(0) & -(F_1^{(2)}(0)-F_2^{(2)}(0)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w^{(1)} \\ w^{(2)} \\ w^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v^{(1)} \\ v^{(2)} \\ v(3) \end{pmatrix}$$

isto é,

$$\begin{cases} F^{(1)}w^{(1)}=v^{(1)} \\ \\ F_2^{(1)}w^{(2)}+(F_1^{(1)}-F_2^{(1)})w^{(3)}=v^{(2)} \\ \\ F^{(2)}w^{(1)}-F_2^{(2)}w^{(2)}-(F_1^{(2)}-F_2^{(2)})w^{(3)}=v^{(3)} \end{cases}$$

simplificando as equações anteriores, temos

$$\begin{cases} w^{(1)} = \frac{v^{(1)}}{F^{(1)}} \\ \\ w^{(2)} = \frac{(F_1^{(2)}-F_2^{(2)})}{(F_2^{(1)}F_1^{(2)}-F_1^{(1)}F_2^{(2)})}v^{(2)} + \frac{(F_1^{(1)}-F_2^{(1)})}{(F_2^{(1)}F_1^{(2)}-F_1^{(1)}F_2^{(2)})}v^{(3)} + \frac{(F_1^{(1)}-F_2^{(1)})F^{(2)}}{(F_2^{(1)}F_1^{(2)}-F_1^{(1)}F_2^{(2)})F^{(1)}}v^{(1)} \\ \\ F^{(2)}w^{(1)} - F_2^{(2)}w^{(2)} - (F_1^{(2)} - F_2^{(2)})w^{(3)} = v^{(3)} \end{cases}$$

Da diferença entre a primeira equação e a segunda equação, tem-se:

$$w^{(1)} - w^{(2)} =$$
$$= \frac{v^{(1)}}{F^{(1)}} - \frac{(F_1^{(2)} - F_2^{(2)})v^{(2)}}{(F_2^{(1)}F_1^{(2)} - F_1^{(1)}F_2^{(2)})} - \frac{(F_1^{(1)} - F_2^{(1)})v^{(3)}}{(F_2^{(1)}F_1^{(2)} - F_1^{(1)}F_2^{(2)})} + \frac{(F_1^{(1)} - F_2^{(1)})F^{(2)}v^{(1)}}{(F_2^{(1)}F_1^{(2)} - F_1^{(1)}F_2^{(2)})F^{(1)}}.$$

Usando, na equação anterior, as notações previamente definidas, chegamos ao resultado. □

Proposição 3.8 *Seja* $v = (v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)})$ *e* $w = (w^{(1)}, w^{(2)}, w^{(3)})$. *Se*

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial \omega}(0)w + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \omega^2}(0)[\omega', \omega'] = 0$$

então $w^{(1)} = w^{(2)}$.

Demonstração: É suficiente mostrar que:

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial \omega}(0)w = v_k, \quad k = 1, 2, 3,$$

implica $w^{(1)} = w^{(2)}$, onde

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \; v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{F}_1^{(1)} - \dot{F}_2^{(1)} \\ -(\dot{F}_1^{(2)} - \dot{F}_2^{(2)}) \end{pmatrix} \text{ e } v_3 = \begin{pmatrix} F_1^{(1)} - F_2^{(1)} \\ 0 \\ F_1^{(2)} - F_2^{(2)} \end{pmatrix}.$$

Relembremos que todas as funções estão aplicadas em zero. Para v_1, a igualdade $w_1 = w_2$ é óbvia.

Para v_2, como

$$\dot{F}_1^{(1)} - \dot{F}_2^{(1)} = -\frac{d_1\dot{u}_1}{L_1^2} + \frac{d_2\dot{u}_2}{L_2^2} \text{ e}$$

$$\dot{F}_1^{(2)} - \dot{F}_2^{(2)} = -\frac{d_1u_1\dot{u}_1}{L_1^2} + \frac{d_2u_2\dot{u}_2}{L_2^2} + \frac{L_1\dot{u}_1}{L_1^2} - \frac{L_2\dot{u}_2}{L_2^2}$$

pela proposição 3.6

$$-(\dot F_1^{(1)} - \dot F_2^{(1)})(u_2L_1 - u_1L_2) - (\dot F_1^{(2)} - \dot F_2^{(2)})(L_2 - L_1) =$$

$$= -\frac{L_2 - L_1}{u_2 - u_1}\left(-\frac{\dot u_1}{L_1^2} + \frac{\dot u_2}{L_2^2}\right)(u_2L_1 - u_1L_2) -$$

$$-\left(\frac{L_2 - L_1}{u_2 - u_1}\left(-\frac{u_1\dot u_1}{L_1^2} + \frac{u_2\dot u_2}{L_2^2}\right) + \frac{L_1\dot u_1}{L_1^2} - \frac{L_2\dot u_2}{L_2^2}\right)(L_2 - L_1) = 0.$$

Por (14), $w^{(1)} = w^{(2)}$.

Por fim, no caso v_3:

$$(F_1^{(1)} - F_2^{(1)})(u_2L_1 - u_1L_2) + (F_1^{(2)} - F_2^{(2)})(L_2 - L_1) =$$

$$= \left(\frac{1}{L_1} - \frac{1}{L_2}\right)(u_2L_1 - u_1L_2) + \left(\frac{u_1}{L_1} - \frac{u_2}{L_2}\right)(L_2 - L_1) = 0$$

então por (14), $w^{(1)} = w^{(2)}$. □

Determinando agora $\frac{\partial^2}{\partial\omega^2}\phi_2(0)[\omega'(0),\omega'(0)]$ temos:

$$\frac{\partial^2\phi_2}{\partial\omega^2}(0)[\alpha,\beta] =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha^{(1)}(\nabla FF)^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \begin{array}{c} \alpha^{(2)}(\nabla F_2F_2)^{(1)} \\ +\alpha^3(\nabla F_2F_1)^{(1)} \\ -\alpha^3(\nabla F_2F_2)^{(1)} \end{array} & \begin{array}{c} \alpha^{(2)}(\nabla F_2F_1)^{(1)} \\ -\alpha^{(2)}(\nabla F_2F_2)^{(1)} \\ +\alpha^{(3)}((\nabla F_1F_1)^{(1)} \\ -2(\nabla F_2F_1)^{(1)} \\ +(\nabla F_2F_2)^{(1)}) \end{array} \\ \alpha^{(1)}(\nabla FF)^{(2)} & \begin{array}{c} -\alpha^{(2)}(\nabla F_2F_2)^{(2)} \\ -\alpha^{(3)}(\nabla F_2F_1)^{(2)} \\ +\alpha^{(3)}(\nabla F_2F_2)^{(2)} \end{array} & \begin{array}{c} -\alpha^{(2)}(\nabla F_2F_1)^{(2)} \\ +\alpha^{(2)}(\nabla F_2F_2)^{(2)} \\ -\alpha^{(3)}((\nabla F_1F_1)^{(2)} \\ +2(\nabla F_2F_1)^{(2)} \\ -(\nabla F_2F_2)^{(2)} \end{array} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta^{(1)} \\ \beta^{(2)} \\ \beta^{(3)} \end{pmatrix}$$

De novo, substituindo α e β por $\omega'(0)$,

$$\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial \omega^2}(0)[\omega', \omega'] =$$

$$= \left(\frac{L_1 L_2}{\lambda L_2 + (1-\lambda) L_1}\right)^2 \begin{pmatrix} (\nabla F F)^{(1)} \\ \\ (\nabla F_2 F_2)^{(1)} + 2\lambda((\nabla F_2 F_1)^{(1)} - (\nabla F_2 F_2)^{(1)}) \\ +\lambda^2((\nabla F_1 F_1)^{(1)} - 2(\nabla F_2 F_1)^{(1)} + (\nabla F_2 F_2)^{(1)}) \\ \\ (\nabla F F)^{(2)} - \\ ((\nabla F_2 F_2)^{(2)} + 2\lambda((\nabla F_2 F_1)^{(2)} - (\nabla F_2 F_2)^{(2)}) \\ +\lambda^2((\nabla F_1 F_1)^{(2)} - 2(\nabla F_2 F_1)^{(2)} + (\nabla F_2 F_2)^{(2)})) \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{L_1 L_2}{\lambda L_2 + (1-\lambda) L_1}\right)^2 \begin{pmatrix} \frac{D_2 u_2}{L_2^3} + \lambda\left(\frac{-D-2u_1}{L_1 L_2^2} - \frac{D_1 u_2}{L_1^2 L_2} + 2\frac{D_2 u_2}{L_2^3}\right) + \\ +\lambda^2\left(-\frac{D_1 u_1}{L_1^3} - \frac{D_2 u_2}{L_2^3} + \frac{D_1 u_2}{L_1^2 L_2} + \frac{D_2 u_1}{L_1 L_2^2}\right) \\ \\ \frac{D_2 u_2}{L_2^3} + 2\lambda\left(\frac{D_2 u_2}{L_2^3} - \frac{D_2 u_1}{L_1 L_2^2}\right) + \lambda^2\left(-\frac{D_1 u_1}{L_1^3} + 2\frac{D_2 u_1}{L_1 L_2^2} - \frac{D_2 u_2}{L_2^3}\right) \\ \\ \lambda\left(-\frac{D_1 u_1 u_2}{L_1 L_2^2} + \frac{D_2 u_1 u_2}{L_1 L_2^2}\right) + \lambda^2\left(\frac{D_1 u_1 u_2}{L_1^2 L_2} - \frac{D_2 u_1 u_2}{L_1 L_2^2}\right) \end{pmatrix} \tag{15}$$

Já é possivel determinar a segunda derivada de ω quando $\Delta t = 0$. A próxima proposição estabelece a relação que existe entre as suas duas primeiras componentes, representadas por $\omega''^{(1)}(0)$ e $\omega''^{(2)}(0)$, respectivamente. Notemos que todas as funções estão aplicadas em zero.

Proposição 3.9 *Tem-se*

$$\omega''^{(1)}(0) - \omega''^{(2)}(0) = \frac{L_1 L_2}{(\lambda L_2 + (1-\lambda) L_1)^2} \lambda(1-\lambda)(D_1 u_2 - D_2 u_1). \tag{16}$$

Demonstração: Sabe-se que $\omega''(0) = -\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial \omega}(0)\right)^{-1} \frac{\partial^2}{\partial \omega^2}(\phi_1(0) + \phi_2(0))[\omega'(0), \omega'(0)]$. Pela proposição 3.7,

$$\omega''^{(1)}(0) - \omega''^{(2)}(0) = w^{(1)} - w^{(2)},$$

onde $w = (w^{(1)}, w^{(2)}, w^{(3)})$ satisfaz

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial \omega}(0) w + \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial \omega^2}(0)[\omega'(0), \omega'(0)] = 0.$$

Por (14) e (15),

$$w''^{(1)}(0) - w''^{(2)}(0) = \frac{L_1 L_2}{(\lambda L_2 + (1-\lambda)L_1)^2}\lambda(1-\lambda)(D_1 u_2 - D_2 u_1).$$

□

A diferença anterior *não depende* de $\dot{\lambda}$ e $\dot{u}_k$, $k = 1, 2$. As funções $\breve{\theta}(\Delta t)$ e $\hat{\theta}(\Delta t)$ não são diferenciáveis em geral, mas a *diferença* $\breve{\theta}(\Delta t) - \hat{\theta}(\Delta t)$ *é duas vezes diferenciável* e da proposição anterior verificamos que:

$$\breve{\theta}(\Delta t) - \hat{\theta}(\Delta t) = \frac{L_1 L_2}{(\lambda L_2 + (1-\lambda)L_1)^2}\lambda(1-\lambda)(D_1 u_2 - D_2 u_1)(\Delta t)^2 + o(\Delta t^2). \tag{17}$$

A relação (17) implica que $\lambda(\theta) \in \{0, 1\}$ para todo θ ponto regular da função $\lambda(\cdot)$ uma vez que $(D_1 u_2 - D_2 u_1) \neq 0$ pela terceira condição do teorema. Portanto é sempre possivel tornar $\hat{\theta} < \breve{\theta}$.

Pelo lema de Gamkrelidze chegamos ao resultado.

4 Algumas considerações sobre as hipóteses do Teorema A

Até ao momento não foi possivel encontrar um problema de Cálculo das Variações que verificasse todas as condições do Teorema A. No entanto

$$L(y,u) = (1+\exp(y))q(u),$$

onde $q(u)$ é um polinómio de quarto grau, com dois pontos de inflexão distintos, não verifica as condições do teorema. A primeira e a terceira condição são facilmente satisfeitas quando $q(u) > 0$ para todo $u \in \mathbb{R}$ e os pontos de inflexão têm imagens distintas. A dificuldade aparece na verificação da segunda condição, onde os máximos u_1 e u_2 da função

$$H(y,u,p_t,p_y) = \frac{p_t + p_y u}{L(y,u)},$$

com $p_t \neq 0$ e $p_y \neq 0$ têm de satisfazer:

$$L(y,u_k) - u_k \frac{\partial L}{\partial u}(y,u_k) = 0 \text{ sempre que } \frac{\partial^2 L}{\partial u^2}(y,u_k) = 0, \; k = 1,2.$$

Portanto é necessário continuar a investigar para encontrar uma função L que verifique as condições do Teorema Principal.

Referências

[1] Bressan, A. e Piccoli, B. *A generic classification of time-optimal planar stabilizing feedbacks*, Siam Journal Control and Optimization, Vol 36, No 1, pp 12-32, January 1998

[2] Cellina, A. e Colombo, G. *On a classical problem of the calculus of variations without convexity assumptions*, Annales de l'Institut Henri Poincaré- Analyse non linéaire, Vol 7, No 2, pp 97-106, 1990

[3] Crasta, G. e Piccoli, B. *Bang-Bang property for bolza problems in two dimensions*, Journai of Optimization Theory and Applications, Vol 83, No 1, pp 155-165, October 1994

[4] Crasta, G. e Piccoli, B. *Special bang-bang solutions for nonlinear control systems*, Nonlinear Differencial Equations Appl., Vol 2, No 3, pp 323-339, 1995

[5] Gamkrelidze, R. V. *Principles of Optimal Control Theory*, Vol 7, Plenum Press, New York, 1978

[6] Piccoli, B. *Classification of generic singularities for the planar time-optimal synthesis*, Siam J. Control and Optimization, Vol 34, No 6, pp 1914-1946, December 1996

[7] Raymond, J. P. *Existence theorems in optimal control problems without convexity assumptions*, Journal of Optimization Theory and Applications, Vol 67, No 1, October 1990

[8] Sussmann, H. J. *The structure of time-optimal trajectories for single-input systems in the plane: the C^∞ nonsingular case*, Siam J. Control and Optimization, Vol 25, No 2, March 1987

[9] Sussmann, H. J. *The structure of time-optimal trajectories for single-input systems in the plane: the general real analitic case*, Siam. Journal and Optimization, Vol 25, No 4, July 1987

[10] Sussmann, H. J. *Regular synthesis for time optimal control of single- input real analytic systems in the plane*, Siam Journal Control and Optimization, Vol 25 ,No 3, September 1987

EXISTÊNCIA SEM CONVEXIDADE EM CÁLCULO DAS VARIAÇÕES

ERRATA:

Onde se lê:	Deve-se ler:
nas pag. 6, 7, linha 5:	nas pag. 6, 7, linha 5:
$L(x(t),\dot{x}(t)) > c\,(1+\lvert\dot{x}\rvert)^{(1+\epsilon)};\ c,\epsilon > 0.$	$L(x(t),\dot{x}(t)) > c\,(1+\lvert\dot{x}\rvert^{(1+\epsilon)});\ c,\epsilon > 0.$
na pag. 8, linha -3:	na pag. 8, linha -3:
$L(x(t),\dot{x}(t)) > c\,(1+\lvert\dot{x}\rvert)^{(1+\epsilon)};\ c,\epsilon > 0.$	$L(x(t),\dot{x}(t)) > c\,(1+\lvert\dot{x}\rvert^{(1+\epsilon)});\ c,\epsilon > 0.$
na pag. 10, linha -10:	na pag. 10, linha -10:
$L(y,u) > c\,(1+\lvert u\rvert)^{(1+\epsilon)};\ c,\epsilon > 0.$	$L(y,u) > c\,(1+\lvert u\rvert^{(1+\epsilon)});\ c,\epsilon > 0.$
na pág. 20, linha 19:	na pag. 20, linha 19:
$\check{\theta}(\Delta t) = \check{\theta}(0) + ... + o((Deltat)^2).$	$\check{\theta}(\Delta t) = \check{\theta}(0) + ... + o((\Delta t)^2).$