

Carlos Manuel Abreu Gomes Ferreira

# Modelos Matemáticos do Processo de Moagem



Departamento de Matemática Aplicada  
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto  
2002

Carlos Manuel Abreu Gomes Ferreira

# Modelos Matemáticos do Processo de Moagem



*Tese submetida à Faculdade de Ciências da  
Universidade do Porto para obtenção do grau de Mestre  
em Matemática Aplicada*

Departamento de Matemática Aplicada  
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto  
2002

Tese orientada por:

Professor Doutor Gueorgui Smirnov,  
Professor Auxiliar no  
Departamento de Matemática Aplicada da  
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

# Agradecimentos

Agradeço ao ISEP- Instituto Superior de Engenharia do Porto e ao PRODEP- Programa de Desenvolvimento Educativo para Portugal por terem facilitado a inscrição e frequência no curso de mestrado em Matemática Aplicada.

# Resumo

O objectivo deste trabalho é o estudo do processo de moagem.

Desenvolveram-se dois modelos matemáticos, um empírico outro geométrico.

Os modelos são testados experimentalmente e numericamente.

# Abstract

The aim of this work is the study of the grinding process.

Two mathematical models are considered. One of them is empiric and the other geometric.

The models are tested numerically and experimentally.

# Resumé

L'objective de ce travail a été l'étude des procédés de moulage.

On a déployé deux modèles mathématiques, un empirique l'autre géométrique.

Les models sont testé expérimentalment et numériquement.

# Conteúdo

<b>Agradecimentos</b>	<b>4</b>
<b>Resumo</b>	<b>5</b>
<b>Abstract</b>	<b>6</b>
<b>Resumé</b>	<b>7</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>10</b>
1.1 Descrição do sistema . . . . .	10
1.2 Organização da Tese . . . . .	11
<b>2 Modelo Empírico de Moagem</b>	<b>12</b>
2.1 A Roldana . . . . .	12
2.1.1 Operador de Moagem . . . . .	12
2.1.2 Operador de Pancada . . . . .	13
2.2 O separador . . . . .	15
2.2.1 Operador de passagem . . . . .	16
2.3 Saída da câmara de moagem . . . . .	17
2.3.1 Caracterização da saída . . . . .	17
2.4 Equação Integral de Moagem . . . . .	19
2.5 Escala logarítmica . . . . .	20
2.5.1 Granolómetro . . . . .	20
2.5.2 Dados . . . . .	21

2.5.3	Sistema de equações integrais na escala logarítmica . . . . .	21
<b>3</b>	<b>Modelo Geométrico</b>	<b>26</b>
3.1	Fundamentos do modelo . . . . .	26
3.2	Regras de partição . . . . .	26
3.3	Discrepância entre saídas . . . . .	29
<b>4</b>	<b>Estudos Numéricos</b>	<b>30</b>
4.1	Matérias . . . . .	30
4.2	Moinhos . . . . .	30
4.3	Experiências . . . . .	30
4.4	Dados . . . . .	31
4.4.1	Matéria Branca . . . . .	31
4.4.2	Matéria Cinza . . . . .	36
4.5	Estudo dos Modelos . . . . .	41
4.5.1	Modelo Empírico . . . . .	41
4.5.2	Resultados . . . . .	42
4.6	Modelo Geométrico . . . . .	45
4.6.1	Resultados . . . . .	45
4.7	Discrepâncias . . . . .	50
4.8	Comparação dos resultados . . . . .	52
<b>5</b>	<b>Conclusões</b>	<b>53</b>
	<b>Referências</b>	<b>54</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Este trabalho, desenvolvido em colaboração com a empresa CIN, resulta da necessidade de descrever e otimizar o processo de produção de tinta em pó, i.e., construir um modelo que descreva o processo de moagem e homogenizar a distribuição volumétrica (ou granulométrica) do produto sem prejudicar a produtividade.

### 1.1 Descrição do sistema

Após análise exaustiva do processo de produção, e considerando os meios disponíveis, constatou-se que a câmara de moagem é o elemento chave de todo o processo.

A câmara de moagem é um componente pertencente à embaladeira (nesta é obtido o produto final) e é constituída por: um recipiente de paredes rugosas, uma roldana que suporta um conjunto de pinos, sendo estes responsáveis pela fragmentação das partículas, um separador, elemento constituído por lâminas separadas uniformemente e cuja velocidade angular determina a saída das partículas em função do seu volume. Existem ainda duas entradas e uma saída, uma das entradas é responsável pela alimentação de partículas e a outra pela injeção de ar, sendo esta última responsável pelo fluxo do produto na embaladeira, não permitindo a estagnação do processo. O produto da câmara de moagem tem como destino o ciclone, que é responsável pela retenção do produto destinado à embalagem. Nesta fase surgem dois problemas, existem partículas que por serem demasiadamente pequenas (finos) não se conseguem separar do ar e daí resultarem perdas; inversamente as partículas demasiadamente grandes (grossos) apesar de serem retidas pelo ciclone não são embaladas por não ultrapassarem uma malha (peneiro) colocada na saída do ciclone. Estas últimas são reintroduzidas no sistema, não causando perdas.

Além destes elementos, existe outro elemento fundamental ao sistema: o granulómetro. Com ele obtêm-se distribuições granulométricas dos produtos, sendo estas utilizadas para da qualidade dos produtos.

## 1.2 Organização da Tese

Desenvolvem-se dois modelos: o Modelo Empírico de Moagem no capítulo 2, enquanto o Modelo Geométrica aparece no capítulo 3.

No capítulo 4 estão descritos os estudos numéricos, procedendo-se à divisão em duas secções, em função dos modelos. No capítulo 5 fazem-se conclusões ao trabalho desenvolvido e indicam-se caminhos a seguir.

## Capítulo 2

# Modelo Empírico de Moagem

Para a descrição do funcionamento da câmara de moagem, estabelecem-se alguns princípios orientadores: o funcionamento da câmara de moagem é linear, e as características probabilísticas de fracionamento das partículas não dependem do volume nem da forma destas.

Faz-se a modelação dos elementos constituintes da câmara de moagem: a roldana, o separador e a saída. Representa-se o modelo fazendo uso de um sistema de equações integrais, e com o auxílio dos dados resultantes das experiências procura-se o núcleo de tais equações.

### 2.1 A Roldana

É responsável pelo fracionamento das partículas, sendo o seu funcionamento descrito com a definição do operador de pancada.

#### 2.1.1 Operador de Moagem

Inicialmente a câmara de moagem é "alimentada" por um conjunto de partículas que serão fracionados por sucessivas colisões com os pinos da roldana, até atingirem uma dimensão que permita a passagem destas através do separador, rumo ao ciclone.

Define-se o operador de moagem  $M(E)$ ,

$$S(x) = M(E)(x), \quad (2.1)$$

onde  $E(x)$  e  $S(x)$  são funções densidade de probabilidade (f.d.p.) relativamente ao volume,  $x$ , das partículas. Correspondendo, respectivamente, à entrada e saída da câmara de moagem.

Estruturalmente (2.1), o operador de moagem, pode ser descrito como uma sucessão de pancadas

$$M = P \circ P \circ P \circ \dots \circ P,$$

onde  $P$  é um operador de pancada.

### 2.1.2 Operador de Pancada

Supondo que as características probabilísticas de fraccionamento das partículas não depende do tamanho nem da forma destas, desenvolveu-se um modelo baseado na divisão em dois pedaços para de seguida generalizarmos. Constroi-se a função densidade de probabilidade (f.d.p.),  $\varphi$ , que determina o modo de fraccionamento das partículas. Designa-se por  $f(x)$ , a f.d.p. que representa a distribuição das partículas, na câmara de moagem, para um volume  $x$ .

**Caso dois pedaços.** Uma partícula de volume  $x$  é fraccionada em duas partículas, por aplicação do operador de pancada, de volumes

$$[\xi, \xi + \Delta\xi]x \text{ e } [(1 - \xi) - \Delta\xi, (1 - \xi)]x,$$

para  $\xi \in [0, \frac{1}{2}]$ , com probabilidade  $\varphi(\xi)\Delta\xi$ .

Sendo que  $\varphi$  é simétrica em relação a  $\xi = \frac{1}{2}$  e que  $\int_0^{\frac{1}{2}} \varphi(\xi)d\xi = 1$ , define-se o operador de pancada para 2 pedaços,

$$P(f)(x) = \int_0^{\frac{1}{2}} \left( f\left(\frac{x}{\xi}\right) + f\left(\frac{x}{1-\xi}\right) \right) \varphi(\xi)d\xi.$$

Fazendo

$$\psi(\xi) = \begin{cases} \varphi(\xi) & , \xi \in [0, \frac{1}{2}] \\ \varphi(1 - \xi) & , \xi \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

e usando a simetria de  $\varphi(\xi)$  relativamente a  $\xi = \frac{1}{2}$  obtemos,

$$P(f)(x) = \int_0^1 f\left(\frac{x}{\xi}\right) \psi(\xi)d\xi.$$

**Caso  $n$  pedaços.** Analogamente ao caso anterior, cada partícula de volume  $x$  vai fraccionar-se em partículas de volumes

$$[\xi_1, \xi_1 + \Delta\xi_1]x, [\xi_2, \xi_2 + \Delta\xi_2]x, \dots, [\xi_n, \xi_n + \Delta\xi_n]x$$

para

$$\xi_1 + \dots + \xi_n = 1 \text{ e } \frac{1}{n!} \int_{\xi_k \in [0,1]_{k=\overline{1,n}}} \varphi(\xi_1, \dots, \xi_n) d\xi_1 \dots d\xi_n = 1, \quad (2.2)$$

onde  $\varphi$  está definida na superfície  $\xi_1 + \dots + \xi_n = 1$ , com  $\xi_k \in [0, 1], k = \overline{1, n}$ . A função  $\varphi$  é simétrica :  $\varphi(\xi_1, \dots, \xi_n) = \varphi(\xi_{k_1}, \dots, \xi_{k_n})$ , onde  $\begin{pmatrix} 1 \dots n \\ k_1 \dots k_n \end{pmatrix}$  é uma permutação arbitrária.

Assim define-se

$$P(f)(x) = \frac{1}{n!} \int_{\Xi} \left( f\left(\frac{x}{\xi_1}\right) + \dots + f\left(\frac{x}{\xi_n}\right) \right) \varphi(\xi_1, \dots, \xi_n) d\xi_1 \dots d\xi_n,$$

$$\text{onde } \Xi = \{ \xi_k \in [0, 1] \mid \xi_1 + \dots + \xi_n = 1, k = \overline{1, n} \}.$$

**Inclusão do caso 2 pedaços no caso  $n$  pedaços.** Defina-se  $\psi(\eta)$  através de  $\varphi(\eta)$ . Fazendo  $\eta = 1 - \xi$ , tem-se que,

$$\psi(\eta) = \int_0^1 \varphi(1 - \xi, \xi) d\xi = \int_0^1 \varphi(\eta, \xi) d\xi = \varphi(\eta, 1 - \eta).$$

Para  $n$  pedaços temos,

$$\begin{aligned} P(f)(x) &= \\ &= \frac{1}{n!} n \int_{\Xi} f\left(\frac{x}{\xi_1}\right) \varphi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n \\ &= \frac{1}{n!} n \int_0^1 f\left(\frac{x}{\xi}\right) \left[ \int_{\Xi} \varphi(\xi, \xi_2, \dots, \xi_n) d\xi_2 \dots d\xi_n \right] d\xi \\ &= \int_0^1 f\left(\frac{x}{\xi}\right) \psi(\xi) d\xi \end{aligned}$$

com

$$\psi(\xi) = \frac{1}{(n-1)!} \int_{\substack{\xi_k \in [0,1] \\ 1 - (\xi_2 + \dots + \xi_n) = \xi}} \varphi(\xi, \xi_2, \dots, \xi_n) d\xi_2 \dots d\xi_n.$$

**Propriedades da função  $\psi$ .** A função  $\psi$  verifica as igualdades seguintes:

1.

$$\int_0^1 \psi(\eta) d\eta = \frac{1}{(n-1)!} \int_{\Xi} \varphi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n = n.$$

2.

$$\int_0^1 \eta \psi(\eta) d\eta = 1.$$

Demonstração:

1. Decorre da definição de integral de superfície.

2.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \eta \psi(\eta) d\eta &= \int_0^1 \eta \left[ \frac{1}{(n-1)!} \int_{\substack{1-(\xi_2+\dots+\xi_n)=\eta \\ \xi_k \in [0,1]}} \varphi(\eta, \xi_2, \dots, \xi_n) d\eta d\xi_2 \dots d\xi_n \right] d\eta = \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_{\Xi} \xi_1 \varphi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n, \end{aligned}$$

por simetria de  $\varphi$ ,

$$\int_0^1 \eta \psi(\eta) d\eta = \frac{1}{(n-1)!} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \int_{\Xi} \xi_m \varphi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n,$$

por  $\varphi$  ser uma f.d.p. temos

$$= \frac{1}{n!} \int_{\Xi} (\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n) \varphi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n = 1.$$

## 2.2 O separador

Colocado à saída da câmara de moagem o separador, em forma de cone fatiado, utiliza a distância entre as lamina e a velocidade de rotação para seleccionar as partículas que passam ao ciclone. O seu funcionamento é descrito construindo um operador de passagem.

### 2.2.1 Operador de passagem

Este determina a distribuição, a cada pancada, das partículas que permanecem na câmara de moagem e as que a deixam.

Definimos  $M_\alpha(f)(x) = \Pi_\alpha(x)f(x)$ , onde

$$\Pi_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & x < \alpha \\ 1 & x \geq \alpha \end{cases},$$

como sendo o operador de passagem para uma determinada distribuição,  $f(x)$ , das partículas existentes na câmara de moagem.

Para que todas as partículas deixem a câmara de moagem é necessário um processo que a cada iteração faz passagem seguida de pancada,

$$(P \circ M_\alpha) \circ (P \circ M_\alpha) \circ \dots \circ (P \circ M_\alpha).$$

**Processo de passagem.** Consideremos, para simplificar, o operador de pancada,

$$P_\xi(f)(x) = \int_0^1 f\left(\frac{x}{\eta}\right) \psi_\xi(\eta) d\eta,$$

onde

$$\xi \in ]0, 1[, \quad \psi_\xi(\eta) = 0, \text{ sempre que } \eta \in [1 - \xi, 1],$$

que é o mesmo que

$$P_\xi(f)(x) = \int_0^{1-\xi} f\left(\frac{x}{\eta}\right) \psi_\xi(\eta) d\eta.$$

Supondo que a distribuição de  $f$  é finita, i.e.,  $f(x) = 0, x > a > 0$  temos que

$$P_\xi(f)(x) = 0, \quad x > a(1 - \xi).$$

Resulta que após um número finito de iterações, para uma entrada finita,  $E(x)$ , obtemos  $(P_\xi \circ M_\alpha) \circ (P_\xi \circ M_\alpha) \circ \dots \circ (P_\xi \circ M_\alpha)(E)(x) = 0$ .

**Proposição.** Existe  $n$  tal que  $(P_\xi \circ M_\alpha)^n(E)(x) = 0$ .

Demonstração:

Se  $E(x) = 0, \forall x > a$  então

$$(P_\xi \circ M_\alpha)^n(E)(x) = 0, x > a(1 - \xi)^n.$$

Logo

$$(P_\xi \circ M_\alpha)^n(E)(x) = 0, \text{ sempre que } n \text{ verifica } a(1 - \xi)^n < a.$$

## 2.3 Saída da câmara de moagem

O produto da câmara de moagem será obviamente a soma das passagens relativas à aplicação do operador de pancada à entrada  $E(x)$ .

Define-se saída  $S(x)$ ,

$$S(x) = \sum_{k=0}^n (I - M_\alpha)(f_k)(x), f_0(x) = E(x),$$

com

$$f_{k+1}(x) = (P_\xi \circ M_\alpha)(f_k)(x) \text{ para } k = \overline{0, n-1}.$$

### 2.3.1 Caracterização da saída

Suponhamos que  $\psi(x) \geq 0$ . Verificam-se as propriedades seguintes:

1.

$$\int_0^\infty P(f)(x)dx = \int_0^\infty f(x)dx$$

2. Se  $f \geq 0$ , então  $P(f)(x) \geq 0, S(x) \geq 0$

3.  $S(x)$  é uma função densidade de probabilidade

Demonstração:

1. Utilizando a definição de operador de pancada,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty P(f)(x)dx &= \int_0^\infty \int_0^1 f\left(\frac{x}{\eta}\right)\psi(\eta)d\eta dx \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^\infty f\left(\frac{x}{\eta}\right)\frac{dx}{\eta}\right)\eta\psi(\eta)d\eta, \end{aligned}$$

fazendo  $y = \frac{x}{\eta}$ ,

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 \left(\int_0^\infty f(y)dy\right)\eta\psi(\eta)d\eta = \\ &= \int_0^\infty f(y)dy \int_0^1 \eta\psi(\eta)d\eta = \int_0^\infty f(y)dy \end{aligned}$$

2. Pela definição de operador integral,

$$P(f)(x) = \int_0^1 f\left(\frac{x}{\eta}\right)\psi(\eta)d\eta \geq 0$$

3. Utilizando a definição de saída,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty S(x)dx &= \int_0^\infty \sum_{k=0}^n (P_\xi \circ M_\alpha)^k(E)(x)dx - \int_0^\infty M_\alpha \sum_{k=0}^n (P_\xi \circ M_\alpha)^k(E)(x) = \\ &= \int_0^\infty \sum_{k=0}^n (P_\xi \circ M_\alpha)^k(E)(x)dx - \int_0^\infty (P_\xi \circ M_\alpha) \sum_{k=0}^n (P_\xi \circ M_\alpha)^k(E)(x) = \end{aligned}$$

como  $(P_\xi \circ M_\alpha)^{n+1} = 0$

$$= \int_0^\infty \sum_{k=0}^n (P_\xi \circ M_\alpha)^k(E)(x)dx - \int_0^\infty \sum_{k=0}^n (P_\xi \circ M_\alpha)^k(E)(x) = \int_0^\infty E(x)dx$$

## 2.4 Equação Integral de Moagem

Após modelação dos constituintes, fez-se a junção de todos os elementos por forma a descrever o funcionamento da câmara de moagem.

Seja  $f_k(x) = (P_\xi \circ M_\alpha)^k(E)(x)$  a distribuição das partículas na câmara de moagem após  $k$  iterações, onde cada iteração corresponde à aplicação do operador de passagem seguido do operador de pancada, então redefine-se a saída como

$$S(x) = \sum_{k=0}^n (I - M_\alpha)(P_\xi \circ M_\alpha)^k(E)(x) = (I - M_\alpha) \sum_{k=0}^n (P_\xi \circ M_\alpha)^k(E)(x),$$

fazendo

$$Q(x) = \sum_{k=0}^n (P_\xi \circ M_\alpha)^k(E)(x),$$

temos

$$S(x) = (I - M_\alpha)(Q)(x).$$

Como

$$(I - P_\xi \circ M_\alpha)(Q)(x) = (I - P_\xi \circ M_\alpha + P_\xi \circ M_\alpha - \dots - \underbrace{(P_\xi \circ M_\alpha)^{n+1}}_{=0})(E)(x) = E(x),$$

obtem-se a *Equação Principal de Moagem*

$$Q(x) = (P_\xi \circ M_\alpha)(Q)(x) + E(x).$$

É natural supor que no caso geral a saída também se descreve por

$$S(x) = (I - M_\alpha)(Q)(x),$$

onde

$$Q(x) = (P \circ M_\alpha)(Q)(x) + E(x).$$

Reescrevendo a equação principal de moagem fazendo uso da forma integral do operador de pancada, obtemos

$$Q(x) = \int_0^1 \Pi_\alpha \left( \frac{x}{\eta} \right) Q \left( \frac{x}{\eta} \right) \psi(\eta) d\eta + E(x).$$

Da definição da função  $\Pi_\alpha$  obtem-se a **Equação Integral de Moagem**

$$Q(x) = \int_0^{\frac{x}{\alpha}} Q\left(\frac{x}{\eta}\right) \psi(\eta) d\eta + E(x),$$

ou, na forma equivalente :

$$S(\alpha, x) = \int_0^{\frac{x}{\alpha}} g\left(\frac{x}{\eta}\right) \psi(\eta) d\eta, \quad x \in [0, \alpha],$$

onde,

$$g(x) = \int_0^1 g\left(\frac{x}{\eta}\right) \psi(\eta) d\eta + E(x), \quad \text{supp}E \subset [\alpha, \infty].$$

Substituindo  $\alpha$  por  $x_0$  e fazendo uso da propriedade 2 de  $\psi(\eta)$ , resulta, numa forma compacta, o sistema de equações integrais,

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_0^1 g\left(\frac{x}{\eta}\right) \psi(\eta) d\eta + E(x), \quad x > x_0, \\ S(x) &= \int_0^{\frac{x}{x_0}} g\left(\frac{x}{\eta}\right) \psi(\eta) d\eta + E(x), \quad x < x_0, \\ \int_0^1 \eta \psi(\eta) d\eta &= 1. \end{aligned} \tag{2.3}$$

## 2.5 Escala logarítmica

O modo de funcionamento do granulómetro, classificação das partículas e apresentação dos resultados, obriga à transformação do modelo desenvolvido.

### 2.5.1 Granulómetro

A variedade de formas das partículas e as limitações tecnológicas, determinam o funcionamento do granulómetro. Assim, este procede à medição do volume de cada partícula, através de um sistema de raios laser, classificando-a, por aproximação, relativamente a um conjunto de 45 esferas, i.e., classificar uma partícula com determinado volume, não significa que este seja o seu volume exacto, apenas significa que aquele é o volume da esfera que mais se aproxima, em volume, da partícula [Raw90].

Embora os dados obtidos representem volumes, por opção dos construtores do granulómetro, estes apresentam-se numa escala de diâmetros.

### 2.5.2 Dados

Das medições efectuadas resultam dados representados na forma de tabela com 45 linhas e duas colunas. A primeira coluna representa o diâmetro das partículas, com valores compreendidos entre  $10^0\mu$  e  $10^{2.9172}\mu$ , e a segunda a distribuição acumulada (f.d.a.) de diâmetros destas, no lote analisado. Em consequência desta representação resulta a construção da escala logarítmica e de uma f.d.p. associada à f.d.a..

**Escala.** A escala logarítmica tem por base a relação,

$$d_k = 10^{\lambda_k}$$

com

$$\lambda_k = k \times 0.0663, k = \overline{0, 44},$$

onde  $d_k$  corresponde ao diâmetro da partícula  $k$ .

**F.d.p..** Definindo  $F(d_k)$  como a f.d.a., define-se a f.d.p.,  $f(\lambda_k)$ , usando as propriedades do operador integral. Fazendo  $\Delta_k = 10^{\lambda_k} - 10^{\lambda_{k-1}}$  e  $\theta_k = \lambda_k - \lambda_{k-1}$ , define-se

$$F(10^{\lambda_k}) \times \Delta_k = f(\lambda_k) \times \theta_k,$$

i.e.,

$$f(\lambda_k) = \frac{\theta_k}{\Delta_k} \times F(10^{\lambda_k}).$$

### 2.5.3 Sistema de equações integrais na escala logarítmica

Sendo que o modelo desenvolvido tem por base a representação da distribuição das partículas em função do seu volume e não do seu diâmetro, o sistema de equações integrais (2.3) foi equacionado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} g^{(3)}(x) &= \int_0^1 g^{(3)}\left(\frac{x}{\eta}\right) \psi^{(3)}(\eta) d\eta + E^{(3)}(x), \quad x \geq x_0, \\ S^{(3)}(x) &= \int_0^{\frac{x}{x_0}} g^{(3)}\left(\frac{x}{\eta}\right) \psi^{(3)}(\eta) d\eta + E^{(3)}(x), \quad x < x_0, \\ \int_0^1 \eta \psi^{(3)}(\eta) d\eta &= 1, \end{aligned} \tag{2.4}$$

onde  $x_0$  é o volume da maior partícula que não passa através do separador e o índice (3) indica que o argumento da função corresponde ao volume.

Transforma-se (2.4) com base na relação entre o volume e diâmetro da esfera,

$$x = \frac{\pi}{6}d^3. \quad (2.5)$$

Defina-se a f.d.a.,  $F^{(k)}$ , relativamente à f.d.p.  $f^{(k)}$ ,

$$F^{(k)}(x) = \int_0^x f^{(k)}(t)dt,$$

então,

$$F^{(3)}(x) = F^{(1)}\left(\sqrt[3]{\frac{6x}{\pi}}\right), \quad (2.6)$$

sendo que os índices (3) e (1) representam, respectivamente, f.d.a. para volume e diâmetro.

Utilizando (2.5) e derivando ambos os membros de (2.6),

$$[F^{(3)}(x)]' = f^{(3)}(x)$$

e

$$\left[F^{(1)}\left(\sqrt[3]{\frac{6x}{\pi}}\right)\right]' = \frac{2}{\pi} \left(\frac{6x}{\pi}\right)^{-\frac{2}{3}} f^{(1)}\left(\sqrt[3]{\frac{6x}{\pi}}\right)$$

resulta,

$$f^{(3)}(x) = \frac{2}{\pi}d^{-2}f^{(1)}(d). \quad (2.7)$$

Utilizando estas relações transforma-se o sistema de equações integrais (2.4).

Por (2.7) obtemos

$$g^{(3)}\left(\frac{\pi}{6}d^3\right) = \int_0^1 g^{(3)}\left(\frac{\pi}{6}\frac{d^3}{\eta}\right)\psi^{(3)}(\eta)d\eta + \frac{2}{\pi}d^{-2}E^{(1)}(d), \quad d \geq d_0,$$

$$S^{(3)}\left(\frac{\pi}{6}d^3\right) = \int_0^{\frac{d}{d_0}} g^{(3)}\left(\frac{\pi}{6}\frac{d^3}{\eta}\right)\psi^{(3)}(\eta)d\eta + \frac{2}{\pi}d^{-2}E^{(1)}(d), \quad d < d_0,$$

onde  $d_0$  corresponde ao diâmetro de uma esfera com volume  $x_0$ .

Multiplicando ambas as equações por  $\frac{2}{\pi}d^2$ , temos

$$\frac{2}{\pi}d^2g^{(3)}\left(\frac{\pi}{6}d^3\right) = \frac{2}{\pi}d^2 \int_0^1 g^{(3)}\left(\frac{\pi}{6}\frac{d^3}{\eta}\right)\psi^{(3)}(\eta)d\eta + E^{(1)}(d), \quad d \geq d_0,$$

$$\frac{2}{\pi}d^2 S^{(3)}\left(\frac{\pi}{6}d^3\right) = \frac{2}{\pi}d^2 \int_0^{\frac{d}{d_0}} g^{(3)}\left(\frac{\pi}{6}\frac{d^3}{\eta}\right) \psi^{(3)}(\eta)d\eta + E^{(1)}(d), \quad d < d_0.$$

Simplificando,

$$\frac{2}{\pi}d^2 g^{(3)}\left(\frac{\pi}{6}d^3\right) = \int_0^1 \frac{2}{\pi} \left(\frac{d}{\eta^{\frac{1}{3}}}\right)^3 g^{(3)}\left(\frac{\pi}{6} \left(\frac{d}{\eta^{\frac{1}{3}}}\right)^3\right) \eta^{\frac{2}{3}} \psi^{(3)}(\eta)d\eta + E^{(1)}(d), \quad d \geq d_0,$$

$$\frac{2}{\pi}d^2 S^{(3)}\left(\frac{\pi}{6}d^3\right) = \int_0^{\frac{d}{d_0}} \frac{2}{\pi} \left(\frac{d}{\eta^{\frac{1}{3}}}\right)^3 g^{(3)}\left(\frac{\pi}{6} \left(\frac{d}{\eta^{\frac{1}{3}}}\right)^3\right) \eta^{\frac{2}{3}} \psi^{(3)}(\eta)d\eta + E^{(1)}(d), \quad d < d_0,$$

tomando

$$g^{(1)}(d) = \frac{2}{\pi}d^2 g^{(3)}\left(\frac{\pi}{6}d^3\right)$$

e

$$S^{(1)}(d) = \frac{2}{\pi}d^2 S^{(3)}\left(\frac{\pi}{6}d^3\right),$$

obtem-se

$$g^{(1)}(d) = \int_0^1 g^{(1)}\left(\frac{d}{\eta^{\frac{1}{3}}}\right) \eta^{\frac{2}{3}} \psi^{(3)}(\eta)d\eta + E^{(1)}(d), \quad d \geq d_0,$$

$$S^{(1)}(d) = \int_0^{\frac{d}{d_0}} g^{(1)}\left(\frac{d}{\eta^{\frac{1}{3}}}\right) \eta^{\frac{2}{3}} \psi^{(3)}(\eta)d\eta + E^{(1)}(d), \quad d < d_0.$$

Substituindo

$$\eta^{\frac{1}{3}} = \xi \quad \text{e} \quad d\eta = 3\xi^2 d\xi,$$

obtem-se

$$g^{(1)}(d) = \int_0^1 g^{(1)}\left(\frac{d}{\xi}\right) 3\xi^4 \psi^{(3)}(\xi^3)d\xi + E^{(1)}(d), \quad d \geq d_0,$$

$$S^{(1)}(d) = \int_0^{\frac{d}{d_0}} g^{(1)}\left(\frac{d}{\xi}\right) 3\xi^4 \psi^{(3)}(\xi^3)d\xi + E^{(1)}(d), \quad d < d_0.$$

Substituindo

$$\psi^1(\xi) = 3\xi^4 \psi^3(\xi^3), \tag{2.8}$$

obtem-se

$$g^{(1)}(d) = \int_0^1 g^{(1)}\left(\frac{d}{\xi}\right) \psi^1(\xi)d\xi + E^{(1)}(d), \quad d \geq d_0,$$

$$S^{(1)}(d) = \int_0^{\frac{d}{d_0}} g^{(1)}\left(\frac{d}{\xi}\right) \psi^{(1)}(\xi) d\xi + E^{(1)}(d), \quad d < d_0.$$

A transformação para a escala logarítmica é feita com base na igualdade (ver secção 2.5.2)

$$d = 10^\lambda, \quad \lambda \in [0, 2.9172] \quad (2.9)$$

$$g^{(1)}(10^\lambda) = \int_0^1 g^{(1)}\left(\frac{10^\lambda}{\xi}\right) \psi^{(1)}(\xi) d\xi + E^{(1)}(10^\lambda), \quad \lambda \geq \lambda_\theta,$$

$$S^{(1)}(10^\lambda) = \int_0^{\frac{10^\lambda}{10^{\lambda_\theta}}} g^{(1)}\left(\frac{10^\lambda}{\xi}\right) \psi^{(1)}(\xi) d\xi + E^{(1)}(10^\lambda), \quad \lambda < \lambda_\theta,$$

onde  $d_0 = 10^{\lambda_\theta}$ .

Fazendo  $\xi = 10^\mu$ , obtem-se

$$\mu = \frac{\log \xi}{\log 10} \text{ e } d\xi = 10^\mu \log 10 d\mu.$$

Substituindo  $G(\lambda) = g^{(1)}(10^\lambda)$ , tem-se

$$G(\lambda) = \int_{-\infty}^0 G(\lambda - \mu) \psi^{(1)}(10^\mu) 10^\mu \log 10 d\mu + E(\lambda), \quad \lambda \geq \lambda_\theta,$$

$$S(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda - \lambda_\theta} G(\lambda - \mu) \psi^{(1)}(10^\mu) 10^\mu \log 10 d\mu + E(\lambda), \quad \lambda < \lambda_\theta,$$

$$\int_{-\infty}^0 10^\mu \psi^{(1)}(10^\mu) 10^\mu \log 10 d\mu = 1,$$

onde  $E(\lambda) = E^{(1)}(10^\lambda)$  e  $S(\lambda) = S^{(1)}(10^\lambda)$ .

Como  $\int_a^b f(\xi) d\xi = \int_{-b}^{-a} f(-\xi) d\xi$ , temos

$$G(\lambda) = \int_0^\infty G(\lambda + \mu) \psi^{(1)}(10^{-\mu}) 10^{-\mu} \log 10 d\mu + E(\lambda), \quad \lambda \geq \lambda_\theta,$$

$$S(\lambda) = \int_{\lambda_\theta - \lambda}^\infty G(\lambda + \mu) \psi^{(1)}(10^{-\mu}) 10^{-\mu} \log 10 d\mu + E(\lambda), \quad \lambda < \lambda_\theta,$$

$$\int_0^\infty 10^{-2\mu} \psi^{(1)}(10^{-\mu}) \log 10 d\mu = 1.$$

Fazendo

$$\psi^{(1)}(10^{-\mu}) = \phi(\mu), \quad (2.10)$$

resulta o sistema de equações integrais (2.4) na escala logarítmica,

$$\begin{aligned} G(\lambda) &= \int_0^\infty G(\lambda + \mu) \phi(\mu) 10^{-\mu} \log 10 d\mu + E(\lambda), \quad \lambda \geq \lambda_\theta, \\ S(\lambda) &= \int_{\lambda_\theta - \lambda}^\infty G(\lambda + \mu) \phi(\mu) 10^{-\mu} \log 10 d\mu + E(\lambda), \quad \lambda < \lambda_\theta, \\ \int_0^\infty 10^{-2\mu} \phi(\mu) \log 10 d\mu &= 1. \end{aligned} \quad (2.11)$$

# Capítulo 3

## Modelo Geométrico

Tendo por base a dinâmica de um conjunto fechado de formas geométricas, procuram-se outros operadores de pancada. Com a multiplicidade de operadores de pancada obtidos, faz-se a análise da discrepância, para cada um, entre a saída da experiência e a saída obtida utilizando os núcleos do modelo geométrico.

### 3.1 Fundamentos do modelo

As partículas, neste modelo, são representadas por um conjunto de três formas: uma bola, uma semi-bola e um quarto de bola. Estas partículas fraccionam-se de acordo com determinadas regras de partição.

### 3.2 Regras de partição

As regras de partição estabelecem-se com base na seguinte relação,

$$(m, l) \longrightarrow \left( m'(m, l), m''(m, l), \frac{v'}{v''} \right), \quad v' + v'' = v, \quad v' \leq v'', \quad (3.1)$$

i.e., uma partícula da forma  $m$  e volume  $v$  é dividida em dois, por pancada com ângulo  $l$ , obtendo-se formas  $m'$  e  $m''$  com volumes  $v'$  e  $v''$ , respectivamente.

Tendo por base a relação (3.1), estabelecem-se regras de partição na seguinte tabela :

$m$	$l$	$m'$	$V'/V''$	$m''$
1	1	2	1	2
1	2	2	1	2
1	3	2	1	2
1	4	2	1	2
1	5	2	1	2
1	6	2	1	2
2	1	3	1	3
2	2	3	1	3
2	3	3	1	3
2	4	3	1	3
2	5	3	1	3
2	6	3	1	3
3	1	1	1	1
3	2	1	1	1
3	3	1	1	1
3	4	1	1	1
3	5	$\emptyset$	0	3
3	6	$\emptyset$	0	3

A.Regras de partição

Fazendo uso da tabela A, o operador de pancada escreve-se como

$$P(f_k)(w) = \tau \sum_{l=1}^6 \sum_{(m,\theta v) \in \Theta(k,l,w)} \theta f_m(\theta v), \tag{3.2}$$

onde

$$\Theta(k, l, w) = \{(m, v) \mid (k, w) = ((m'(m, l), v') \vee (m''(m, l), v''))\},$$

$f_k(v)$  representa a distribuição da forma  $k$ , e  $\tau$  é uma constante.

Com base na fórmula (3.2), relacionam-se os momentos das distribuições das partículas e o operador de pancada.

**Momentos das distribuições de formas.** Para cada forma,  $m$ , calculam-se os momentos,  $k$ , para  $f_m$

$$\mu_k^m = \int_0^1 w^k f_m(w) dw.$$

Analogamente calculamos os momentos para  $P(f_m)$ ,

$$\nu_k^m = \int_0^1 w^k P(f_m)(w) dw.$$

Podemos agora estabelecer uma relação entre os momentos das f.d.p., antes e após aplicação do operador de pancada :

$$\nu_k^m = M_k \mu_k^m, \quad k = \overline{1, \infty}, \quad (3.3)$$

onde

$$M_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} \frac{1}{2^{k-1}} \\ \frac{1}{2^k} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^k} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

tem polinómio característico

$$\theta^3 - \frac{\theta^2}{3} - \frac{2}{3} \frac{1}{8^k} = 0, \quad k = 0, 1, \dots \quad (3.5)$$

É possível verificar que para qualquer  $k$ ,  $M_k^4 > 0$ . Logo para qualquer  $\begin{pmatrix} \mu_k^1 \\ \mu_k^2 \\ \mu_k^3 \end{pmatrix}$ ,  $\mu_k^j > 0$ , existe o limite

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{M_k^N \begin{pmatrix} \mu_k^1 \\ \mu_k^2 \\ \mu_k^3 \end{pmatrix}}{\left| M_k^N \begin{pmatrix} \mu_k^1 \\ \mu_k^2 \\ \mu_k^3 \end{pmatrix} \right|} = \begin{pmatrix} \nu_k^1 \\ \nu_k^2 \\ \nu_k^3 \end{pmatrix},$$

onde  $(\nu_k^1, \nu_k^2, \nu_k^3)$  é um vector próprio positivo da matriz  $M_k$ , que corresponde ao valor próprio  $\theta_k$  [Mañ87, corolário 10.3].

Se existe  $f$  com  $\mu_k(f) = \sum_{m=1}^3 \mu_0^m \mu_k^m$  então

$$\mu_k(P(f)) = \theta_k \mu_k(f),$$

onde  $\theta_k > 0$  é raiz máxima do polinómio característico (3.5). E o operador de pancada,  $P$ , transforma esta f.d.p.,  $f$ , segundo a fórmula  $P(f)(x) = \int_0^1 f\left(\frac{x}{\eta}\right) \psi(\eta) d\eta$ , onde  $\psi$  tem os momentos

$$\theta_k = \int_0^1 \eta^{k+1} \psi(\eta) d\eta, \quad k = 0, 1, \dots \quad (3.6)$$

A necessidade de comparação com os resultados obtidos no Modelo Empírico implica a conversão de (3.6).

Por (2.8) e (2.10) sabemos que

$$\phi(\mu) = \psi^{(1)}(10^{-\mu}) = 3 \times 10^{-4\mu} \psi^{(3)}(10^{-3\mu}),$$

resultando que,

$$\psi^{(3)}(\eta) = \frac{1}{3\eta^{\frac{4}{3}}} \psi^{(1)}(\eta^{\frac{1}{3}}) = \frac{1}{3\eta^{\frac{4}{3}}} \phi\left(\frac{-\log \eta}{3 \log 10}\right).$$

Assim,

$$\int_0^1 \eta^k \psi(\eta) d\eta = \log 10 \int_0^\infty 10^{-\mu(3k-1)} \phi(\mu) d\mu = \theta_k. \quad (3.7)$$

A função,  $\psi$ , será utilizado com o objectivo de aproximar saídas conhecidas (dados das experiências). Sendo que o número de pancadas,  $\sigma$ , a aplicar, antes de cada saída, pode variar, reescreve-se (3.7), obtendo

$$\log 10 \int_0^\infty 10^{-\mu(3k-1)} \phi(\mu) d\mu = \theta_k^\sigma, \quad \sigma \in [0.5, \infty[. \quad (3.8)$$

### 3.3 Discrepância entre saídas

Por forma a testar a qualidade dos operadores de pancada obtidos em (3.7), define-se discrepância,  $\Omega$ , da saída experimental,  $S(\lambda)$ , relativamente à saída teórica,  $S_\sigma(\lambda)$  onde  $\sigma$  corresponde ao número de pancadas, como sendo

$$\Omega = \int_0^{\lambda_\theta} |S(\lambda) - S_\sigma(\lambda)| d\lambda. \quad (3.9)$$

# Capítulo 4

## Estudos Numéricos

Após o desenvolvimento dos Modelos Matemáticos de Moagem, testa-se a sua robustez. Para atingir este objectivo realizaram-se várias experiências em resultado da utilização de dois moinhos, dois tipos de matéria e um granulómetro.

### 4.1 Matérias

As matérias utilizadas foram, pelas suas características antagónicas, o polyester branco e o poxi/poliester cinza, que, para simplificar, são designadas, respectivamente, por "Branco" e "Cinza".

### 4.2 Moinhos

Utilizou-se o moinho O.M.C. (simulador da linha de produção) com separador e um moinho de café, marca Moulinex, sem separador. O separador permite a passagem a partículas de diâmetro inferior a  $140\mu$ , correspondendo na escala logarítmica a aproximadamente  $10^{2.14}\mu$ .

### 4.3 Experiências

Planearam-se experiências com matérias e moinhos por forma a obter dados representativos e úteis à luz dos modelos de moagem.

Realizaram-se as seguintes experiências:

1. Utilizando o moinho de café Moulinex, procede-se à moagem de dois lotes de "Chips" (partículas não sujeitas a qualquer tipo de moagem), um de matéria "Branco"

e outro de "Cinza".

2. De seguida filtram-se, através de malha de  $800\mu$ , o produto da moagem dos "Chips", resultando dois lotes : "Entrada O.M.C. Branco " e "Entrada O.M.C. Cinza " .
3. Utilizando o moinho O.M.C., sujeitam-se os lotes "Entrada Branco " e "Entrada Cinza " a nova moagem, sendo o produto desta designado por "Saída Branco " e "Saída Cinza " , respectivamente.
4. Parte não utilizada de cada lote "Entrada O.M.C. Branco" e "Entrada O.M.C. Cinza"(entrada do moinho O.M.C.), é sujeito a nova moagem, na máquina de café Moulinex, durante 30 segundos, resultando dois lotes : "Saída Moulinex 1 Branco " e "Saída Moulinex 1 Cinza", respectivamente.
5. Seguidamente, e utilizando os lotes "Saída Moulinex 1 " , procede-se a nova moagem, na máquina de café Moulinex, durante 30 segundos, tendo-se obtido dois lotes : "Saída Moulinex 2 Branco " e "Saída Moulinex 2 Cinza".

Antes e após cada moagem sujeitam-se os diferentes lotes de matérias ao granolómetro. Sendo a função deste classificar qualitativamente, através de f.d.a., os lotes de matérias quanto ao diâmetro das partículas.

## 4.4 Dados

Para cada lote obtido nas experiências, representam-se na forma de tabelas as respectivas f.d.a.. Em cada tabela apresenta-se, em percentagem, a distribuição acumulada da entrada,  $E_{(1)}(diam)$ , ou a distribuição acumulada de saída,  $S_{(1)}(diam)$ , de partículas relativamente ao diâmetro(diam). Utiliza-se o micron( $\mu$ ) como unidade de medida para o diâmetro das partículas.

Na construção das f.d.p.,  $E(\lambda)$  e  $S(\lambda)$ , associadas às f.d.a., utilizam-se os conceitos definidos na secção 2.2 ("Escala logarítmica"), sendo o diâmetro das partículas um valor aproximado ( $diam_k \simeq 10^{\lambda_k}$ ).

Apresentam-se graficamente as f.d.p., e na forma de tabela os respectivos momentos.

### 4.4.1 Matéria Branca

Relativamente aos lotes de "Matéria Branca" representa-se :

a f.d.a.,  $E_{(1)}(diam)$ , do lote "Entrada O.M.C. Branco" (entrada para o moinho O.M.C.),

diam	$E_{(1)}$	diam	$E_{(1)}$	diam	$E_{(1)}$	diam	$E_{(1)}$
1,06	0,06	6,63	0,78	41,43	7,76	258,95	47,27
1,24	0,08	7,72	0,99	48,27	9,20	301,68	53,66
1,44	0,10	9,00	1,25	56,23	10,88	351,46	60,74
1,68	0,12	10,48	1,56	65,51	12,84	409,45	68,56
1,95	0,14	12,21	1,91	76,32	15,11	477,01	76,75
2,28	0,17	14,22	2,32	88,91	17,72	555,71	84,76
2,65	0,20	16,57	2,78	103,58	20,67	647,41	91,84
3,09	0,24	19,31	3,31	120,67	23,99	754,23	97,17
3,60	0,30	22,49	3,93	140,58	27,69	878,67	100,00
4,19	0,37	26,20	4,66	163,77	31,82		
4,88	0,48	30,53	5,52	190,80	36,42		
5,69	0,61	35,56	6,55	222,28	41,54		

B. "Entrada O.M.C. Branco",  $E_{(1)}(diam)$

e a respectiva f.d.p.,  $E(\lambda)$  onde  $\lambda \in [0, 2.9172]$  (ver ( 2.9)), sendo o gráfico apresentado na figura 4.1;

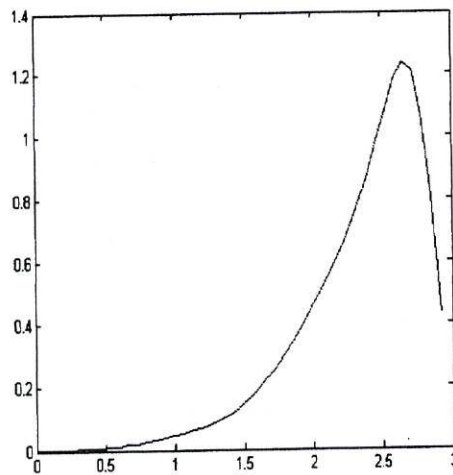


Figura 4.1: Entrada O.M.C. Branco,  $E(\lambda)$

a f.d.a. para o lote "Saída O.M.C. Branco",

diam	$S_{(1)}$	diam	$S_{(1)}$	diam	$S_{(1)}$	diam	$S_{(1)}$
1,06	0,34	6,63	4,85	41,43	52,54	258,95	98,64
1,24	0,42	7,72	6,16	48,27	58,58	301,68	99,60
1,44	0,51	9,00	7,80	56,23	64,26	351,46	100,00
1,68	0,62	10,48	9,85	65,51	69,46	409,45	100,00
1,95	0,75	12,21	12,38	76,32	74,15	477,01	100,00
2,28	0,91	14,22	15,46	88,91	78,40	555,71	100,00
2,65	1,13	16,57	19,16	103,58	82,33	647,41	100,00
3,09	1,43	19,31	23,51	120,67	86,00	754,23	100,00
3,60	1,82	22,49	28,51	140,58	89,39	878,67	100,00
4,19	2,33	26,20	34,07	163,77	92,44		
4,88	2,98	30,53	40,06	190,80	95,04		
5,69	3,80	35,56	46,30	222,28	97,12		

C. "Saída O.M.C Branco",  $S_{(1)}(diam)$

e a respectiva f.d.p.,  $S(\lambda)$  onde  $\lambda \in [0, 2.9172]$ , representadas na figura 4.2;

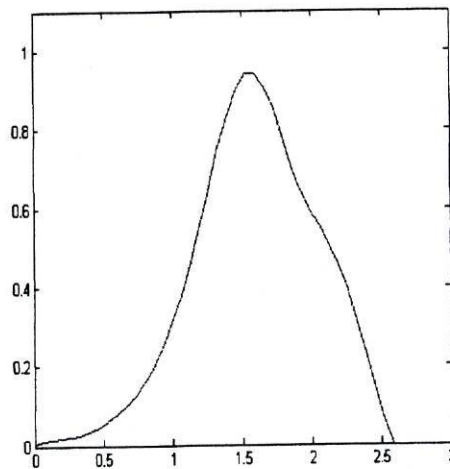


Figura 4.2: Saída O.M.C. Branco,  $S(\lambda)$

a f.d.a. para o lote "Saída Moulinex 1 Branco",

diam	$S_{(1)}$	diam	$S_{(1)}$	diam	$S_{(1)}$	diam	$S_{(1)}$
1,06	0,10	6,63	1,31	41,43	9,99	258,95	59,99
1,24	0,13	7,72	1,62	48,27	11,72	301,68	66,89
1,44	0,16	9,00	1,98	56,23	13,76	351,46	73,71
1,68	0,20	10,48	2,39	65,51	16,17	409,45	80,23
1,95	0,24	12,21	2,86	76,32	19,00	477,01	86,21
2,28	0,29	14,22	3,38	88,91	22,31	555,71	91,41
2,65	0,36	16,57	3,96	103,58	26,16	647,41	95,58
3,09	0,44	19,31	4,62	120,67	30,57	754,23	98,50
3,60	0,54	22,49	5,37	140,58	35,54	878,67	100,00
4,19	0,68	26,20	6,26	163,77	41,04		
4,88	0,85	30,53	7,30	190,80	47,00		
5,69	1,06	35,56	8,53	222,28	53,34		

D. "Saída Moulinex 1 Branco",  $S_{(1)}(diam)$

e a respectiva f.d.p.,  $S(\lambda)$  onde  $\lambda \in [0, 2.9172]$ , representadas na figura 4.3;

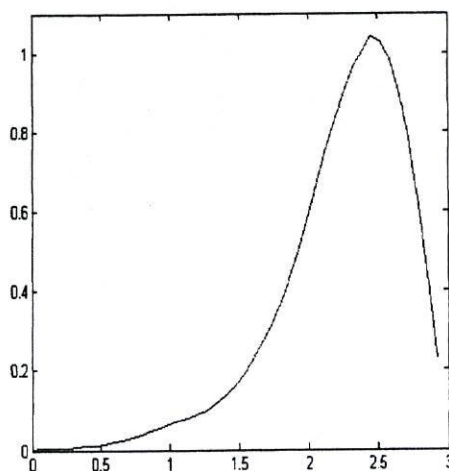


Figura 4.3: "Saída Moulinex 1 Branco",  $S(\lambda)$

a f.d.a. para o lote "Saída Moulinex 2 Branco",

diam	$S_{(1)}$	diam	$S_{(1)}$	diam	$S_{(1)}$	diam	$S_{(1)}$
1,06	0,14	6,63	1,93	41,43	13,55	258,95	69,65
1,24	0,19	7,72	2,36	48,27	15,68	301,68	76,16
1,44	0,24	9,00	2,86	56,23	18,15	351,46	82,08
1,68	0,30	10,48	3,43	65,51	21,02	409,45	87,25
1,95	0,36	12,21	4,07	76,32	24,36	477,01	91,56
2,28	0,44	14,22	4,78	88,91	28,23	555,71	94,99
2,65	0,54	16,57	5,58	103,58	32,70	647,41	97,54
3,09	0,66	19,31	6,49	120,67	37,79	754,23	99,21
3,60	0,82	22,49	7,53	140,58	43,44	878,67	100,00
4,19	1,02	26,20	8,72	163,77	49,57		
4,88	1,27	30,53	10,10	190,80	56,06		
5,69	1,57	35,56	11,70	222,28	62,78		

E. "Saída Moulinex 2 Branco",  $S_{(1)}(diam)$

e a respectiva f.d.p.,  $S(\lambda)$  onde  $\lambda \in [0, 2.9172]$ , representadas na figura 4.4;

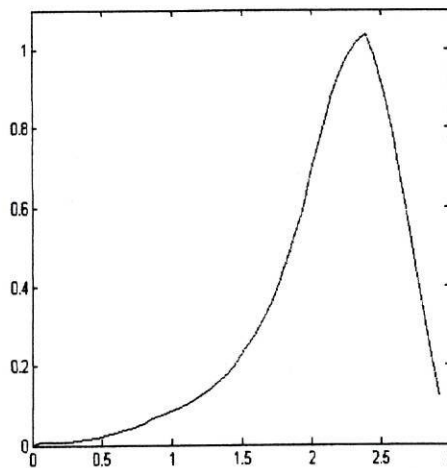


Figura 4.4: "Saída Moulinex 2 Branco",  $S(\lambda)$

Para cada uma das f.d.p. calculam-se os momentos

		<i>Saída</i>		
<i>Momento</i>	<i>Entrada</i>	<i>O.M.C.</i>	<i>Moulinex 1</i>	<i>Moulinex 2</i>
1	2.3363	1.5885	2.2310	2.1348
2	5.6613	2.7198	5.1920	4.7900
3	14.0546	4.9092	12.4186	11.0901
4	35.5269	9.2447	30.3248	26.2850

F. Momentos para matéria "Branco"

#### 4.4.2 Matéria Cinza

Relativamente aos lotes de "Matéria Cinza" representa-se :

a f.d.a. do lote "Entrada O.M.C. Cinza "(entrada para o moinho O.M.C.),

diam	$E_{(1)}$	diam	$E_{(1)}$	diam	$E_{(1)}$	diam	$E_{(1)}$
1,06	0,06	6,63	0,84	41,43	6,45	258,95	40,46
1,24	0,08	7,72	1,05	48,27	7,46	301,68	47,31
1,44	0,10	9,00	1,31	56,23	8,64	351,46	55,15
1,68	0,12	10,48	1,61	65,51	10,04	409,45	64,01
1,95	0,15	12,21	1,95	76,32	11,68	477,01	73,37
2,28	0,18	14,22	2,32	88,91	13,60	555,71	82,56
2,65	0,21	16,57	2,72	103,58	15,84	647,41	90,67
3,09	0,26	19,31	3,17	120,67	18,48	754,23	96,78
3,60	0,32	22,49	3,66	140,58	21,57	878,67	100,00
4,19	0,41	26,20	4,22	163,77	25,20		
4,88	0,52	30,53	4,85	190,80	29,49		
5,69	0,66	35,56	5,59	222,28	34,54		

G. "Entrada O.M.C. Cinza ",  $S_{(1)}(diam)$

e a respectiva f.d.p.,  $E(\lambda)$  onde  $\lambda \in [0, 2.9172]$  (ver ( 2.9)), sendo o gráfico apresentado na figura 4.5;

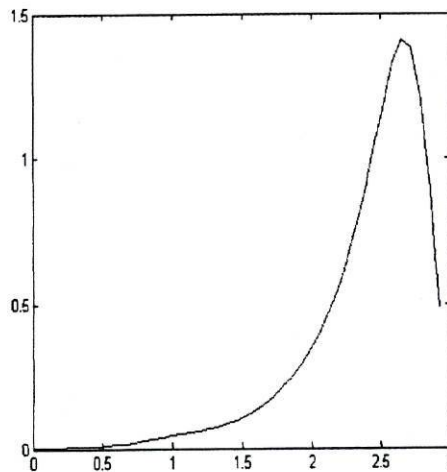


Figura 4.5: Entrada O.M.C. Cinza,  $E(\lambda)$

a f.d.a. para o lote "Saída O.M.C. Cinza ",

diam	$S_{(1)}$	diam	$S_{(1)}$	diam	$S_{(1)}$	diam	$S_{(1)}$
1,06	0,41	6,63	6,01	41,43	47,99	258,95	98,62
1,24	0,52	7,72	7,58	48,27	54,03	301,68	99,55
1,44	0,64	9,00	9,43	56,23	60,12	351,46	100,00
1,68	0,76	10,48	11,57	65,51	66,12	409,45	100,00
1,95	0,91	12,21	14,02	76,32	71,95	477,01	100,00
2,28	1,10	14,22	16,78	88,91	77,29	555,71	100,00
2,65	1,36	16,57	19,89	103,58	82,09	647,41	100,00
3,09	1,71	19,31	23,40	120,67	86,31	754,23	100,00
3,60	2,18	22,49	27,35	140,58	89,92	878,67	100,00
4,19	2,82	26,20	31,80	163,77	92,92		
4,88	3,65	30,53	36,76	190,80	95,34		
5,69	4,70	35,56	42,19	222,28	97,22		

H. "Saída O.M.C. Cinza ",  $S_{(1)}(diam)$

e a respectiva f.d.p.,  $S(\lambda)$  onde  $\lambda \in [0, 2.9172]$ , representadas na figura 4.6;

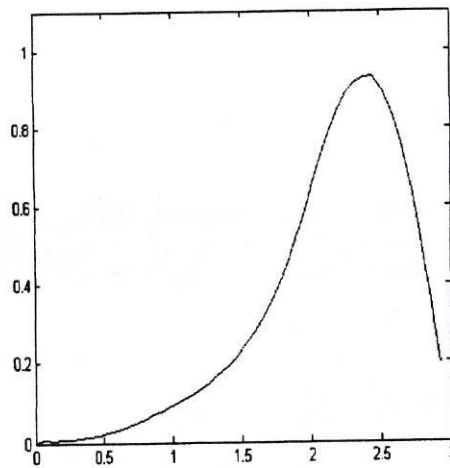


Figura 4.6: "Saída Moulinex 1 Cinza ",  $S(\lambda)$

a f.d.a. para o lote "Saída Moulinex 1 Cinza",

diam	$S_{(1)}$	diam	$S_{(1)}$	diam	$S_{(1)}$	diam	$S_{(1)}$
1,06	0,10	6,63	1,42	41,43	10,13	258,95	53,73
1,24	0,13	7,72	1,75	48,27	11,64	301,68	60,33
1,44	0,16	9,00	2,13	56,23	13,39	351,46	67,34
1,68	0,20	10,48	2,58	65,51	15,42	409,45	74,53
1,95	0,24	12,21	3,08	76,32	17,80	477,01	81,61
2,28	0,29	14,22	3,64	88,91	20,59	555,71	88,20
2,65	0,36	16,57	4,27	103,58	23,84	647,41	93,77
3,09	0,45	19,31	4,98	120,67	27,58	754,23	97,86
3,60	0,57	22,49	5,77	140,58	31,82	878,67	100,00
4,19	0,72	26,20	6,66	163,77	36,58		
4,88	0,91	30,53	7,67	190,80	41,84		
5,69	1,14	35,56	8,82	222,28	47,56		

I. "Saída Moulinex 1 Cinza ",  $S_{(1)}(diam)$

e a respectiva f.d.p.,  $S(\lambda)$  onde  $\lambda \in [0, 2.9172]$ , representadas na figura 4.7;

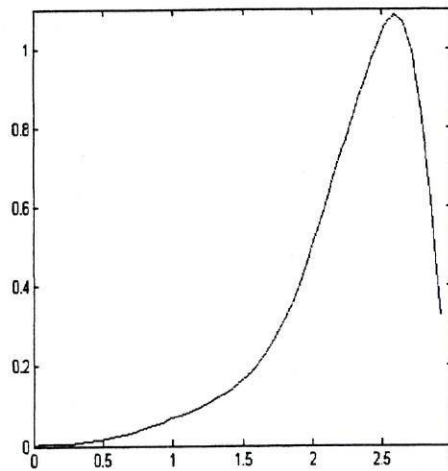


Figura 4.7: "Saída Moulinex 1 Cinza ",  $S(\lambda)$

a f.d.a. para o lote "Saída Moulinex 2 Cinza",

diam	$S_{(1)}$	diam	$S_{(1)}$	diam	$S_{(1)}$	diam	$S_{(1)}$
1,06	0,14	6,63	1,94	41,43	14,04	258,95	65,74
1,24	0,19	7,72	2,39	48,27	16,13	301,68	71,92
1,44	0,23	9,00	2,92	56,23	18,52	351,46	77,84
1,68	0,29	10,48	3,53	65,51	21,26	409,45	83,37
1,95	0,35	12,21	4,22	76,32	24,42	477,01	88,39
2,28	0,43	14,22	5,00	88,91	28,06	555,71	92,74
2,65	0,53	16,57	5,87	103,58	32,21	647,41	96,24
3,09	0,65	19,31	6,85	120,67	36,89	754,23	98,72
3,60	0,81	22,49	7,96	140,58	42,05	878,67	100,00
4,19	1,01	26,20	9,20	163,77	47,63		
4,88	1,26	30,53	10,61	190,80	53,51		
5,69	1,57	35,56	12,22	222,28	59,58		

J. "Saída Moulinex 2 Cinza ",  $S_{(1)}(diam)$

e a respectiva f.d.p.,  $S(\lambda)$  onde  $\lambda \in [0, 2.9172]$ , representadas na figura 4.8;

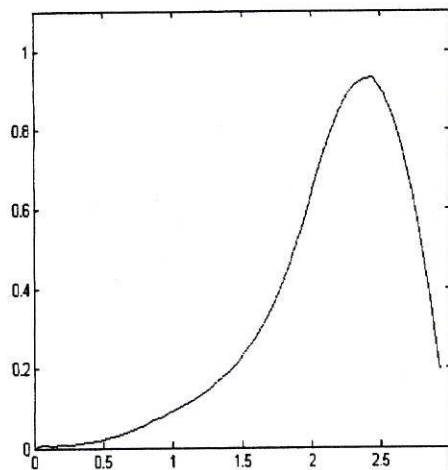


Figura 4.8: "Saída Moulinex 2 Cinza ",  $S(\lambda)$

Para cada uma das f.d.p. foram calculados os momentos

<i>Momento</i>	<i>Entrada</i>	<i>Saída</i>		
		<i>O.M.C.</i>	<i>Moulinex 1</i>	<i>Moulinex 2</i>
1	2.3927	1.5992	2.2708	2.1543
2	5.9152	2.7676	5.3886	4.8929
3	14.9257	5.0423	13.1439	11.4892
4	38.2280	9.5547	32.7096	27.6490

K. Momentos para matéria "Cinza"

## 4.5 Estudo dos Modelos

Tendo por base os modelos desenvolvidos, Empírico e Geométrico, constroem-se dois problemas de minimização. Apresentam-se os resultados dos estudos numéricos e faz-se a sua análise.

Para realizar os estudos numéricos utiliza-se o Matlab, programa de cálculo numérico da MathWorks.

### 4.5.1 Modelo Empírico

Com o objectivo de resolver o sistema de equações integrais (2.11), resulta o problema de minimização :

$$F(\phi(\mu), g(\lambda)) \rightarrow \min, \quad (4.1)$$

$$\int_0^{\infty} 10^{-2\mu} \phi(\mu) \log 10 d\mu = 1, \quad (4.2)$$

$$\mu \in [0, 2.9172],$$

$$\lambda \in [0, 2.9172],$$

onde

$$F(\phi(\mu), g(\lambda)) = \left[ g(\lambda) - \int_0^{\infty} g(\lambda + \mu) \phi(\mu) 10^{-\mu} \log 10 d\mu + E(\lambda) \right]^2 + \left[ S(\lambda) - \int_{\lambda_0 - \lambda}^{\infty} g(\lambda + \mu) \phi(\mu) 10^{-\mu} \log 10 d\mu + E(\lambda) \right]^2.$$

Na resolução deste problema é utilizado o **Método dos Gradientes Conjugados**, sendo a implementação feita através do uso da função "fmincon" do Matlab.

Na discretização das equações integrais utilizaram-se dois métodos, o método dos rectângulos e o método do trapézio[YG72], sendo as diferenças nos resultado insignificantes. O ponto óptimo foi obtido lançando o método de um conjunto aleatório de núcleos( funções  $\phi$ ) com distribuição uniforme e utilizando o método dos rectângulos.

### 4.5.2 Resultados

Na resolução do problema (4.1) verificou-se, que devido à utilização do separador,  $\lambda_\theta = 2.14$ , e ao domínio de  $g(\lambda)$ ,  $\lambda \geq \lambda_\theta$  onde  $\lambda \in [0, 2.9172]$ , a integração numérica poderia ser feita para  $\mu \in [0, 0.8]$ , com ganhos na qualidade dos resultados.

O mínimo para o problema (4.1)-(4.2) foi calculado para ambas as matérias relativamente aos lote "Entrada O.M.C."( $E(\lambda)$ ) e "Saída O.M.C."( $S(\lambda)$ ), apresentando-se as respectivas soluções,  $g(\lambda)$  e  $\phi(\mu)$ , e os momentos da função  $\psi(\eta)$  associada ao óptimo  $\phi(\mu)$  (ver (3.7)).

Mínimos para Matéria Branca

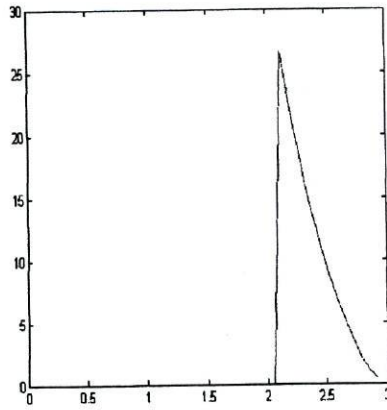


Figura 4.9:  $g(\lambda)$

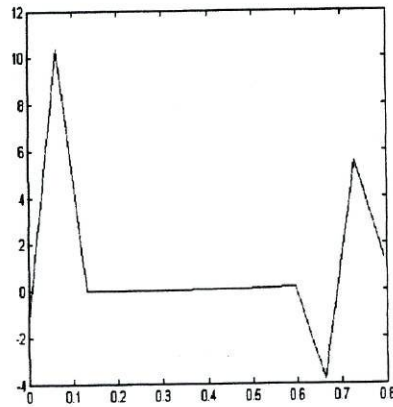


Figura 4.10:  $\phi(\mu)$

e respectivos momentos

<i>Momento</i>	<i>Valor</i>
1	1.0000
2	0.5579
3	0.2857
4	0.1135
5	0.0047

L. Momentos da função  $\psi$

Mínimo para a Matéria Cinza

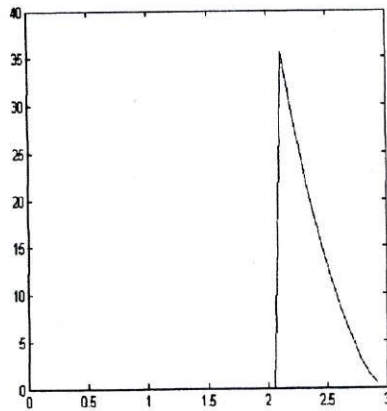


Figura 4.11:  $g(\lambda)$

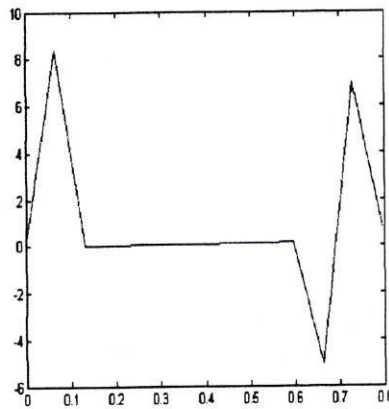


Figura 4.12:  $\phi(\mu)$

e respectivos momentos

<i>Momento</i>	<i>Valor</i>
1	1.0000
2	0.6387
3	0.4184
4	0.2795
5	0.1917

M. Momentos da função  $\psi$

## 4.6 Modelo Geométrico

Com o objectivo de aplicar o Modelo Geométrico de moagem (3.8), resulta o problema de minimização com regularização :

$$\begin{aligned} F(\phi(\mu)) &\rightarrow \min, \\ \sigma &\in [0.5, \infty[ \end{aligned} \quad (4.3)$$

onde

$$F(\phi(\mu)) = \left[ \log 10 \int_0^\infty 10^{-\mu(3k-1)} \phi(\mu) d\mu - \lambda_k^\sigma \right]^2 + \gamma \|\phi(\mu)\|,$$

e  $\gamma$  é o coeficiente de regularização.

Em paralelo define-se o problema de minimização

$$F(\phi(\mu)) \rightarrow \min, \quad (4.4)$$

onde

$$F(\phi(\mu)) = \left[ \log 10 \int_0^\infty 10^{-\mu(3k-1)} \phi(\mu) d\mu - \frac{1}{2^{k-1}} \right]^2 + \gamma \|\phi(\mu)\|,$$

e  $\gamma$  é o coeficiente de regularização.

Na resolução destes problemas foi utilizado o **Método dos Gradientes Conjugados**, estando os sistemas a resolver isentos de restrições, usamos as funções do Matlab "fmiunc" e "lroots" -obtenção do valor próprio dominante da matriz (3.4). Na discretização utilizou-se o método dos rectângulos.

### 4.6.1 Resultados

Apresentam-se, na tabela N, os momentos para a função  $\psi$ , associada ao óptimo  $\phi$  com  $\sigma = 1$ , e os gráficos da função  $\phi$ , associada ao mínimo do problema (4.3) para  $\sigma = 1$ , relativamente aos coeficientes de regularização  $\gamma = 0$  e  $\gamma = 10^{-4}$ . Para cada coeficiente representam-se três gráficos correspondentes a diferentes valores de  $\sigma$  : linha contínua corresponde a  $\sigma = 1$ , a tracejado  $\sigma = 2$  e pontado  $\sigma = 3$ .

Momentos da função  $\psi$ ,

<i>Momento</i>	<i>Valor</i>
1	1.0000
2	0.5806
3	0.3988
4	0.3443
5	0.3348

N. Momentos da função  $\psi$

Gráficos de  $\phi$ , para  $\gamma = 0$ , na figura 4.13,

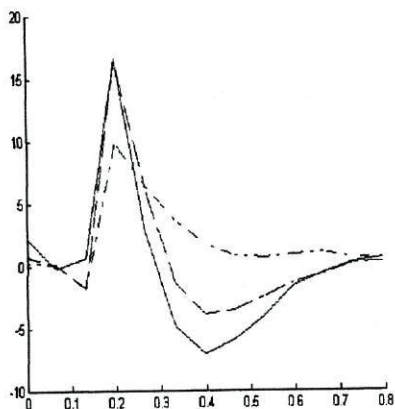


Figura 4.13:  $\phi(\mu)$

e gráficos para  $\gamma = 10^{-4}$  na figura 4.14.

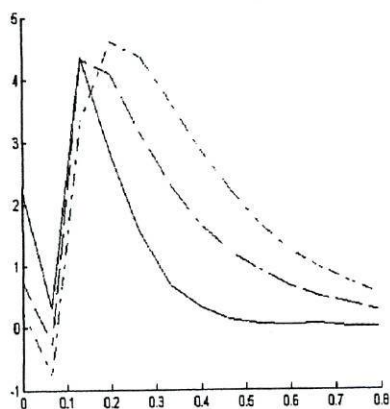
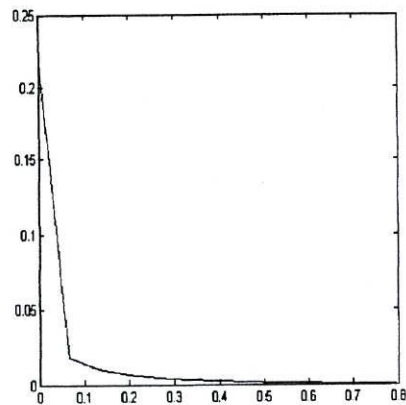
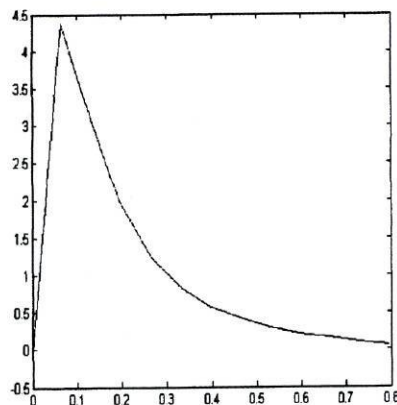


Figura 4.14:  $\phi(\mu)$

Para  $\gamma = 10$  apresenta-se apenas o gráfico(figura 4.15) correspondente a  $\sigma = 1$ , pois, com tal coeficiente, apenas se minimiza a parcela correspondente ao coeficiente de regularização, obtendo-se uma parábola

Figura 4.15:  $\phi(\mu)$ 

Na minimização do problema (4.4), em que o ótimo,  $\phi$ , é uma delta função conhecida, correspondente a  $\psi(\eta) = 2\delta\left(\eta - \frac{1}{2}\right)$ , obteve-se para os coeficientes  $\gamma = 10^{-4}$  o gráfico da figura 4.16,

Figura 4.16:  $\phi(\mu)$

e para  $\gamma = 0$  o gráfico da figura 4.17.

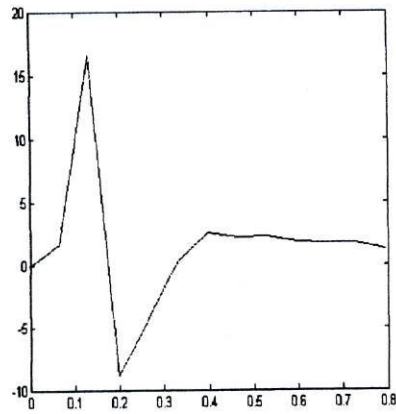


Figura 4.17:  $\phi(\mu)$

## 4.7 Discrepâncias

Na resolução do problema (4.3) resulta para cada  $\sigma$  um óptimo  $\phi$ .

Para aferir da qualidade dos diferentes óptimos, calcula-se a discrepância (ver secção 3.3) para todos os lotes resultantes das experiências. Os resultados,  $\Omega$ , apresentam-se na tabela O (matéria "Branco") e tabela P (matéria "Cinza"), e foram obtidos para o coeficiente de regularização  $\gamma = 0$ .

$\sigma$	<i>Saída</i>		
	<i>O.M.C.</i>	<i>Mouliner 1</i>	<i>Mouliner 2</i>
0	6.4473e+015	6.3654e+015	5.8928e+015
0.2000	3.5101	3.9626	3.9948
0.4000	14.8643	2.8923	2.8914
0.6000	2.4615	2.5808	2.5523
0.8000	2.3171	2.2859	2.3028
1.0000	2.1789	2.1047	2.0278
1.2000	2.0062	1.7639	1.7354
1.4000	2.3772	1.5498	1.5334
1.6000	1.8154	1.3276	1.3498
1.8000	1.6464	1.2022	1.2262
2.0000	1.5601	1.0324	1.0921
2.2000	1.4287	0.9252	0.9532
2.4000	1.2789	0.7934	0.8896
2.6000	1.2986	0.6879	0.7909
2.8000	1.3131	0.6281	0.7232
3.0000	1.3622	0.6216	0.6606
3.2000	1.3805	0.6043	0.6454
3.4000	1.4273	0.6438	0.6793
3.6000	1.4295	0.6773	0.7059
3.8000	1.4792	0.6938	0.6659
4.0000	1.5049	0.7269	0.7237
4.2000	1.5153	0.7562	0.7615
4.4000	1.5510	0.7768	0.7819
4.6000	1.5600	0.7895	0.7867
4.8000	1.5747	0.8133	0.8125
5.0000	1.6114	0.8313	0.8425
5.2000	1.6109	0.8456	0.8449
5.4000	1.6330	0.8661	0.8660
5.6000	1.6448	0.8822	0.8788
5.8000	1.8001	0.8930	0.9070
6.0000	1.6623	0.9029	0.9051

O. Discrepância,  $\Omega$ , para saídas verificadas no "Branco"

$\sigma$	Saída		
	O.M.C.	Moulinex 1	Moulinex 2
0	6.9337e+015	6.7228e+015	8.4352e+015
0.2000	3.9443	4.6705	12.5586
0.4000	2.9410	3.3130	3.2902
0.6000	2.7260	2.9359	2.8290
0.8000	2.6176	2.5719	2.5319
1.0000	2.4822	2.3412	2.2036
1.2000	2.2814	1.9389	2.0044
1.4000	2.1730	2.2780	1.7428
1.6000	2.0615	1.5025	1.9535
1.8000	1.9104	1.3576	1.4190
2.0000	1.7112	1.1695	1.2815
2.2000	1.6529	1.0273	1.1799
2.4000	1.5555	0.8926	1.0110
2.6000	1.3870	0.7864	0.8740
2.8000	1.4119	0.7613	0.8041
3.0000	1.4543	0.6915	0.7478
3.2000	1.5123	0.7434	0.8186
3.4000	1.5199	0.7902	0.7880
3.6000	1.5427	0.8237	0.8128
3.8000	1.5476	0.8537	0.8561
4.0000	1.5681	0.8847	0.8867
4.2000	1.6418	0.9111	0.9400
4.4000	1.6352	0.9317	0.9638
4.6000	1.6809	0.9630	0.9591
4.8000	1.7390	0.9884	0.9912
5.0000	1.7127	1.0022	1.0142
5.2000	1.7270	1.0125	1.0497
5.4000	1.7607	1.0349	1.0503
5.6000	1.7568	1.0518	1.0755
5.8000	1.7940	1.0860	1.2493
6.0000	1.7775	1.0767	1.0863

P. Discrepância,  $\Omega$ , para saídas verificadas no "Cinza"

Verifica-se que os valores óptimos, onde a discrepância é mínima, são obtidos para  $\sigma$  igual a 2.4 e 3.2, para a matéria "Branco", e 2.6 e 3.0, para a matéria "Cinza".

## 4.8 Comparação dos resultados

Os óptimos obtidos na resolução do problema (4.3), foram utilizados como pontos iniciais no problema de minimização (4.1)-(4.2), tendo-se, para cada matéria, uma solução idêntica à obtida com recurso a geração de pontos iniciais aleatórios. Representam-se no mesmo referencial, figura 4.18, os óptimos  $\phi$ , para os problemas (4.1)-(4.2) e (4.3). Sendo que na resolução do problema (4.1)-(4.2), existem dois óptimos, correspondentes a cada uma das matérias, representa-se  $\phi$ , a linha contínua para a matéria "Branco" e a linha tracejada para a matéria "Cinza".

O óptimo para o problema (4.3) foi obtido para o coeficiente  $\gamma = 0$  e  $\sigma = 1$ , representando-se o gráfico de  $\phi$  a linha pontuada.

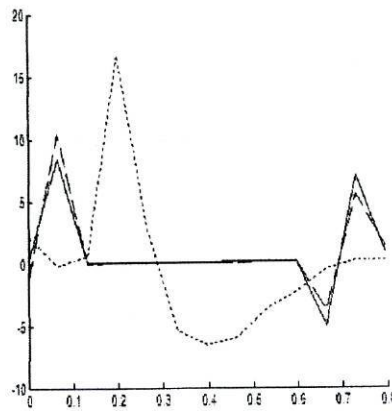


Figura 4.18: Núcleos,  $\phi$

Através da fórmula  $\tilde{\mu}_k = \theta_{k+1}^\alpha \mu_k$  (ver secção 3.3) relacionam-se os momentos da função  $\phi$ , para os diferentes operadores de pancada, inclusive para o operador em que  $\phi$  é uma delta função (4.4), com os momentos das f.d.p. de entrada,  $\mu_k$ , e saída,  $\tilde{\mu}_k$ , das diferentes experiências de moagem. A tabela seguinte estabelece estas relações com base na razão entre logaritmos  $\frac{\log \theta_k}{\log \theta_{k+1}}$ .

Modelo	$\log \theta_2 / \log \theta_3$	$\log \theta_3 / \log \theta_4$
"Branco"	0.47	0.58
"Cinza"	0.51	0.68
"Geométrico"	0.59	0.86
"Delta"	0.5	0.67

Q. Razão de logaritmos

# Capítulo 5

## Conclusões

Os modelos desenvolvidas são o primeiro passo para a descrição do processo de moagem. A obtenção de melhores resultados, e a optimização do processo produtivo, está dependente da criação de granulómetros com maior precisão e da realização de mais experiências.

Apesar do interesse da empresa CIN para adequir um granulómetro com maior precisão, constatou-se que, por limitações técnicas, não existem no mercado aparelhos com precisão superior ao utilizado.

O melhoramento dos actuais modelos matemáticos e a construção de granulómetros de maior precisão será objecto de trabalho futuro.

## Referências

- [Mañ87] R. Mañé. *Ergodic Theory and Differentiale Dynamics*. Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [Raw90] Alan Rawle. The importance of particle sizing in the coatings industry. *Malvern works*, 1990.
- [YG72] David M. Young and Robbert Todd Gregory. *A SURVEY OF NUMERICAL MATHEMATICS*. Dover Publications INC, New York, 1972.