

Ricardo Luís da Costa Gama

**Estudo Analítico-Numérico do
Problema de Difraccção por uma
Região Elíptica**



**Departamento de Matemática Aplicada
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
Outubro / 2003**

Ricardo Luís da Costa Gama

**Estudo Analítico-Numérico do
Problema de Difracção por uma
Região Elíptica**



*Tese Submetida à Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
para obtenção do grau de Mestre em Matemática Aplicada*

Departamento de Matemática Aplicada
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
Outubro / 2003

Aos meus pais...

**Trabalho realizado sob orientação de:
Prof. Doutor Gueorgui Smirnov**

Resumo

Este trabalho teve como objectivo a resolução, através de métodos analítico-numéricos, do problema matemático da difracção de uma onda plana por uma região circular e uma elíptica. Resolveram-se os dois problemas analiticamente, escrevendo as soluções em forma de séries. Numa segunda fase determinaram-se numericamente os coeficientes das séries, apresentando o cálculo dos erros de aproximação, para vários parâmetros do problema, numa tabela. Por fim, comparámos o comportamento assintótico das soluções do problema exterior nos dois casos.

Abstract

This work had as objective the resolution, through analytical-numerical methods, of the mathematical problem of diffraction of a plane wave by a circular region and an elliptic region. The two problems were solved analytically, writing the solutions in the form of series. In one second phase, the coefficients of the series were determined numerically, presenting the calculated errors of approximation, for some parameters of the problem, in a table. Finally, we compared the asymptotic behavior of the solutions of the exterior problem in the two cases.

Résumé

L'objet de ce travail c'est la résolution, par des méthodes d'analyse-numérique, du problème mathématique de la diffraction d' une onde plane par une région circulaire et une autre elliptique. On a résolu les deux problèmes analytiquement, écrivant les solutions en forme de série. Dans un deuxième moment, on a déterminé numériquement les coefficients des séries, avec la présentation du calcul des erreurs. Finalement, on a comparé le comportement asymptotic des solutions du problème extérieur dans les deux cas.

Conteúdo

Resumo	5
Abstract	6
Résumé	7
1 Enunciado do Problema e Ideia de Resolução	9
2 Difraccção Por Uma Região Circular	12
3 Difraccção Por Uma Região Elíptica	15
4 Cálculo Numérico das Soluções	19
5 Estudo do comportamento assintótico das soluções ψ_s	22
Referências	25

Capítulo 1

Enunciado do Problema e Ideia de Resolução

Neste trabalho vamos estudar a difracção de uma onda plana por um círculo e uma elipse. Antes de resolver os dois problemas propriamente ditos, vamos descrever brevemente o método utilizado. Para estudar a difracção de uma onda plana por um objecto, vamos ter que resolver a equação de onda

$$\Delta \psi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0,$$

onde v vai ser a velocidade da onda no meio considerado, sujeita a algumas condições de continuidade na fronteira do objecto. Para simplificar o problema, assumimos que

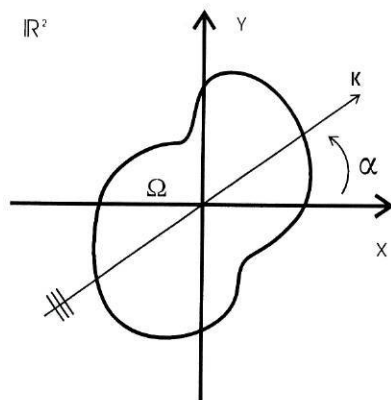


Figura 1.1: difracção de uma onda plana (com um vector de propagação $\mathbf{K} = k(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$, onde k é o número de onda) por um objecto Ω

as soluções procuradas tem uma dependência temporal de $e^{-i\omega t}$, onde ω vai ser a frequência angular (que nos dá o número de oscilações em cada 2π segundos) das soluções procuradas. Assim, reduzimos o problema inicial ao chamado problema matemático de difracção ([1]) de uma onda plana por uma região limitada $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, onde temos que encontrar as funções ψ_s e ψ_p que verificam as seguintes condições:

1. são soluções da equação de Helmholtz nos respectivos domínios:

- $\Delta \psi_s + k_0^2 \psi_s = 0$ em $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$
- $\Delta \psi_p + k_1^2 \psi_p = 0$ em Ω

onde os números de onda $k_0 = \frac{\omega}{v_0}$ (v_0 é a velocidade em $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$) e $k_1 = \frac{\omega}{v_1}$ (v_1 é a velocidade em Ω),

2. verificam as condições na fronteira $\partial\Omega$:

- $\psi_i + \psi_s = \psi_p$,
- $m^2 \frac{\partial}{\partial n}(\psi_i + \psi_s) = \frac{\partial}{\partial n}(\psi_p)$,

onde $m = \frac{v_0}{v_1}$,

3. ψ_s verifica a condição: $\lim_{r \rightarrow \infty} r^{1/2} \left[\frac{\partial \psi_s}{\partial r} - ik_0 \psi_s \right] = 0$

onde ψ_i vai ser uma onda plana que se propaga na direcção $(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$.

$$\psi_i = \exp[ik_0(x \cos(\alpha) + y \sin(\alpha))]. \quad (1.1)$$

Para resolver o problema, começamos por resolver as equações de Helmholtz para o caso exterior ($\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$) e para o interior (Ω). Para isso vamos utilizar o método de separação de variáveis e procurar soluções da equação de Helmholtz da forma $\psi(\xi_1, \xi_2) = f_1(\xi_1)f_2(\xi_2)$ nos respectivos domínios. O método de separação de variáveis pode ser utilizado sempre que a mudança de coordenadas aplicada à equação de Helmholtz leva a uma equação que pode ser separada, e a fronteira $\partial\Omega$ do domínio em causa pode ser escrita como, por exemplo, $\xi_1 = \text{constante}$. Assim, assumindo que a equação de Helmholtz escrita nas coordenadas (ξ_1, ξ_2) admite separação, e que as coordenadas (ξ_1, ξ_2) são ortogonais, escrevemos as coordenadas cartesianas em função de (ξ_1, ξ_2) , ou seja:

$$\begin{cases} x = \varphi_1(\xi_1, \xi_2), \\ y = \varphi_2(\xi_1, \xi_2), \end{cases}$$

onde as funções φ_1 e φ_2 são contínuas e diferenciáveis.

Transformando a equação de Helmholtz para as mesmas coordenadas obtemos:

$$\frac{1}{h_{\xi_1} h_{\xi_2}} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{h_{\xi_2}}{h_{\xi_1}} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{h_{\xi_1}}{h_{\xi_2}} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_2} \right) \right\} + k^2 \psi = 0, \quad (1.2)$$

onde

$$h_{\xi_1} = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi_1} \right)^2, \quad (1.3)$$

e

$$h_{\xi_2} = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi_2} \right)^2, \quad (1.4)$$

são os factores de escala do sistema de coordenadas (ξ_1, ξ_2) .

Separando a equação (1.2) vamos obter duas equações diferenciais ordinárias da forma:

$$\frac{d}{d\xi_i} \left[p_i(\xi_i) \frac{df_i}{d\xi_i} \right] - [q_i(\xi_i) - \lambda r_i(\xi_i)] f_i = 0, \quad i = 1, 2. \quad (1.5)$$

Nos casos que vamos tratar, o domínio Ω é limitado e a função f_2 vai ser periódica. Esta condição vai levar-nos à resolução de um problema de Sturm-Liouville periódico ([2]), restringindo o conjunto de valores possíveis para a constante de separação a um conjunto infinito numerável, $\{\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots\}$ onde $\lambda_{n+1} > \lambda_n$. Assim, indexamos as soluções de (1.5) conforme a constante de separação considerada, e vamos ter que cada função $\psi_n(\xi_1, \xi_2) = f_{1n}(\xi_1) f_{2n}(\xi_2)$ vai ser solução de (1.2), notando que as funções $f_{1n}(\xi_1)$ são escolhidas conforme se esteja a resolver o problema interior ou o exterior (vão ter que ser limitadas para o problema interior e obedecer à condição de radiação no problema exterior) e logo podemos escrever a solução geral na forma:

$$\psi(\xi_1, \xi_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \psi_n(\xi_1, \xi_2),$$

onde as constantes vão ser determinadas a partir das condições na fronteira do problema de difracção. Esta igualdade é escrita de uma maneira formal, pois a "convergência" da série deve ser interpretada, no geral, no seguinte sentido: $\forall \varepsilon > 0 \exists \alpha_1 \dots \alpha_{N_\varepsilon}$:

$$\left\| \psi - \sum_{n=0}^{N_\varepsilon} \alpha_n \psi_n \right\|_{L_2} < \varepsilon.$$

Capítulo 2

Difracção Por Uma Região Circular

Nesta secção vamos estudar o caso em que Ω é um círculo.

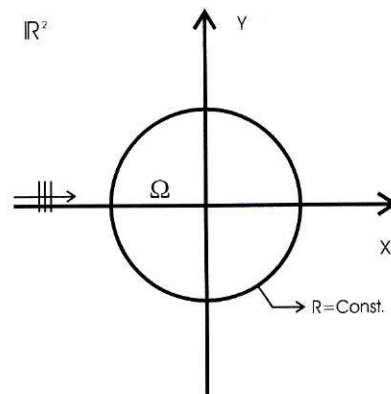


Figura 2.1: difracção de uma onda plana por um círculo

Para isso vamos escolher coordenadas polares para trabalhar:

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta), \\ y = r \sin(\theta). \end{cases}$$

Escrevendo a equação de Helmholtz nas mesmas:

$$\frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + k^2 \psi = 0$$

e assumindo $\psi(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$,

$$\frac{r \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right)}{R} + \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + k^2 r = 0,$$

separando as variáveis vamos obter as duas equações:

$$\frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + \lambda \Theta = 0, \quad (2.1)$$

e

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \left(k^2 - \frac{\lambda}{r^2} \right) R = 0 \quad (2.2)$$

Como queremos soluções de (2.1) periódicas, $\Theta(\theta) = \Theta(\theta + 2\pi)$, vamos ter $\lambda = n^2$ (n inteiro) e assim temos que a equação vai ter como soluções as funções $\sin(n\theta)$ e $\cos(n\theta)$. Tomando agora $\rho = kr$ e reescrevendo (2.2) vamos obter a equação diferencial de Bessel:

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + \left(1 - \frac{\lambda}{\rho^2} \right) R = 0,$$

que vai ter como soluções as funções de Bessel, $J_n(\rho)$, e as funções de Hankel de primeira e segunda ordem, $H_n^1(\rho)$, $H_n^2(\rho)$.

Assim, vamos ter como soluções do problema interior e exterior:

$$\psi_p^c = \beta_0 J_0(k_1 r) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(k_1 r) (\beta_n \cos(n\theta) + \beta'_n \sin(n\theta)),$$

e

$$\psi_s^c = \alpha_0 H_0^1(k_0 r) + \sum_{n=1}^{\infty} H_n^1(k_0 r) (\alpha_n \cos(n\theta) + \alpha'_n \sin(n\theta)),$$

onde a escolha das funções radiais $J_n(k_1 r)$ e $H_n^1(k_0 r)$ para as respectivas soluções foi devida ao facto de estas funções serem limitadas nos respectivos domínios e de se constatar que a solução ψ_s^c verifica, como veremos mais tarde, a condição de radiação com esta escolha.

Agora, para resolver completamente o problema, temos que determinar os coeficientes das séries de forma a que as soluções encontradas verifiquem as condições na fronteira. Para isso, primeiro expandimos a onda plana incidente na sua série de Fourier em relação à coordenada angular θ :

$$\begin{aligned} \psi_i^c &= e^{ik_0(r \cos(\theta) \cos(\alpha) + r \sin(\theta) \sin(\alpha))} = \\ &= e^{i\rho \cos(\theta - \alpha)} = \end{aligned}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} A_n(\rho, \alpha) \cos(n\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n(\rho, \alpha) \text{sen}(n\theta),$$

onde

$$A_n(\rho, \alpha) = \frac{\gamma_n}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\rho \cos(\theta-\alpha)} \cos(n\theta) d\theta,$$

em que γ_n é o factor de Neumann sendo igual a 1 para $n = 0$ e a 2 para $n > 0$, e

$$B_n(\rho, \alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\rho \cos(\theta-\alpha)} \text{sen}(n\theta) d\theta,$$

vão ser os coeficientes de Fourier. Atendendo agora à igualdade ([4]):

$$\begin{pmatrix} \cos(n\alpha) \\ \text{sen}(n\alpha) \end{pmatrix} J_n(\rho) = \frac{1}{2\pi i^n} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\rho \cos(\theta-\alpha)} \begin{pmatrix} \cos(n\theta) \\ \text{sen}(n\theta) \end{pmatrix} d\theta,$$

e considerando na caso que vamos estudar $\alpha = 0$ podemos escrever a onda plana da seguinte forma:

$$\psi_i^c(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n i^n J_n(k_0 r) \cos(n\theta).$$

Escrevendo as condições na fronteira para este exemplo, ou seja:

$$\psi_i^c + \psi_s^c = \psi_p^c,$$

$$m^2 \frac{\partial}{\partial r} (\psi_i^c + \psi_s^c) = \frac{\partial}{\partial r} (\psi_p^c),$$

em $\partial\Omega$, verificamos que α'_n e β'_n vão ser iguais a zero e que podemos determinar α_n e β_n escrevendo o sistema e equações:

$$\gamma_n i^n J_n(k_0 a) = \beta_n J_n(k_1 a) - \alpha_n H_n^1(k_0 a),$$

$$m^2 k_0 \gamma_n i^n J'_n(k_0 a) = \beta_n k_1 J'_n(k_1 a) - \alpha_n m^2 k_0 H_n^{1'}(k_0 a),$$

resolvendo o sistema em ordem a α_n e β_n obtemos:

$$\alpha_n = \gamma_n i^n \frac{m J'_n(k_0 a) J_n(k_1 a) - J_n(k_0 a) J'_n(k_1 a)}{H_n^1(k_0 a) J'_n(k_1 a) - m H_n^{1'}(k_0 a) J_n(k_1 a)} \quad (2.3)$$

e

$$\beta_n = \gamma_n i^n m \frac{J'_n(k_0 a) H_n^1(k_0 a) - J_n(k_0 a) H_n^{1'}(k_0 a)}{H_n^1(k_0 a) J'_n(k_1 a) - m H_n^{1'}(k_0 a) J_n(k_1 a)} \quad (2.4)$$

concluindo assim a resolução deste problema.

Capítulo 3

Difracção Por Uma Região Elíptica

Nesta secção vamos resolver o caso em que $\partial\Omega$ vai ser uma elipse com parâmetros e (excentricidade) e a (semi-eixo maior).

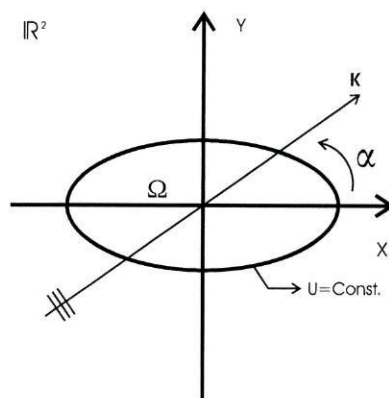


Figura 3.1: difracção de uma onda plana por uma elipse

Assim sendo, escolhemos trabalhar com coordenadas elípticas:

$$\begin{cases} x = \rho \cosh(u) \cos(v), \\ y = \rho \sinh(u) \sin(v) \end{cases}$$

onde u é a coordenada radial assumindo valores $u \in [0, \infty)$ e v a coordenada angular com valores $v \in [-\pi, \pi)$. Nestas coordenadas as superfícies $u = u_0$ vão ser elipses com semi-eixo $a = \rho \cosh(u_0)$ e semi-eixo menor $b = \rho \sinh(u_0)$ (ρ vai ser a semi-distância focal).

Ao optar por estas coordenadas, temos que reescrever a equação de Helmholtz. Atendendo a que os factores de escala, definidos em (1.3) e (1.4), são iguais a:

$$h_u(u, v) = \rho \sqrt{\frac{1}{2}(\cosh(2u) - \cos(2v))},$$

e

$$h_v(u, v) = \rho \sqrt{\frac{1}{2}(\cosh(2u) - \cos(2v))},$$

fica que:

$$\frac{2}{\rho^2(\cosh(2u) - \cos(2v))} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} \right) + k^2 \psi = 0 \quad (3.1)$$

Temos então que resolver a equação de Helmholtz para o problema interior (em Ω) e para o problema exterior (em $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$). Tal como anteriormente, vamos procurar soluções da forma $\psi(u, v) = f(u)g(v)$ e então, substituindo em (3.1) e separando as variáveis obtemos:

$$\frac{d^2 g}{dv^2} + (\lambda - 2q \cos(2v))g = 0, \quad (3.2)$$

e

$$\frac{d^2 f}{du^2} - (\lambda - 2q \cosh(2u))f = 0, \quad (3.3)$$

onde λ vai ser a constante de separação e q vai ser um parâmetro adimensional:

$$q = \frac{\rho^2 k^2}{4},$$

ou, escrito em função dos parâmetros da elipse:

$$q = \frac{k^2 a^2 e^2}{4}, \quad (3.4)$$

A equação (3.2) é conhecida como equação de Mathieu e tem como soluções periódicas as funções de Mathieu pares $Ce_n(v, q)$ e as funções Mathieu impares $Se_n(v, q)$ que podem ser escritas como series de Fourier da forma ([5]):

- $Ce_{2n}(v, q) = \sum_{j=0}^{\infty} A_{2j}(q) \cos(2jv),$
- $Ce_{2n+1}(v, q) = \sum_{j=0}^{\infty} A_{2j+1}(q) \cos((2j+1)v),$
- $Se_{2n+2}(v, q) = \sum_{j=0}^{\infty} B_{2j+2}(q) \text{sen}((2j+2)v),$
- $Se_{2n+1}(v, q) = \sum_{j=0}^{\infty} B_{2j+1}(q) \text{sen}((2j+1)v), n = 0, 1, 2, \dots$

Os coeficientes A_n, B_n vão ser determinados a partir de relações de recorrência encontradas se substituirmos as expansões anteriores na equação de Mathieu. As funções de Mathieu verificam também as seguintes relações de ortogonalidade:

$$\int_{-\pi}^{\pi} Ce_n(v, q)Ce_m(v, q)dv = \int_{-\pi}^{\pi} Se_n(v, q)Se_m(v, q)dv = \begin{cases} \pi, & n = m, \\ 0, & n \neq m \end{cases} \quad (3.5)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} Ce_n(v, q)Se_m(v, q)dv = 0, \quad (3.6)$$

e no limite $q \rightarrow 0$ vamos ter:

$$\lim_{q \rightarrow 0} Ce_0(v, q) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \lim_{q \rightarrow 0} Ce_n(v, q) = \cos(nv), \quad n \neq 0,$$

$$\lim_{q \rightarrow 0} Se_n(v, q) = \text{sen}(nv).$$

No que toca à equação (3.3), ela vai ter como soluções as funções radiais de Mathieu $Mc_n^i(u, q)$ e $Ms_n^i(u, q)$, onde i varia de 1 a 4 conforme as funções sejam escritas como expansões em funções de Bessel de tipos 1 a 4 ([5]).

Assim vamos ter como soluções gerais da equação de Helmholtz em coordenadas elípticas:

$$\psi_s^e = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n Ce_n(v, q_0) Mc_n^3(u, q_0)) + \sum_{n=1}^{\infty} (B_n Se_n(v, q_0) Ms_n^3(u, q_0)), \quad (3.7)$$

$$\psi_p^e = \sum_{n=0}^{\infty} (C_n Ce_n(v, q_1) Mc_n^1(u, q_1)) + \sum_{n=1}^{\infty} (D_n Se_n(v, q_1) Ms_n^1(u, q_1)), \quad (3.8)$$

onde as funções $Mc_n^3(u, q)$ e $Ms_n^3(u, q)$ foram escolhidas para a função $\psi_s^e(u, v)$ devido ao seu comportamento quando $u \rightarrow \infty$, e as funções $Mc_n^1(u, q)$ e $Ms_n^1(u, q)$ para $\psi_p^e(u, v)$ pelo seu comportamento quando $u \rightarrow 0$ (vão ser limitadas nos respectivos limites e tal como no caso anterior, a solução ψ_s^e verifica a condição de radiação (ver *Capítulo 5*)), e os parâmetros q_0 e q_1 são determinados a partir de (3.4) nos respectivos domínios.

Para resolver completamente o problema vamos ter que determinar os coeficientes A_n, B_n, C_n, D_n , utilizando as condições fronteira. Para isso, primeiro escrevemos a função onda plana em coordenadas elípticas:

$$\psi_i^e = \psi_i^e(u, v, \alpha) = \exp(2i\sqrt{q}(\cos(\alpha) \cosh(u) \cos(v) + \text{sen}(\alpha) \sinh(u) \text{sen}(v))),$$

reescrevendo-a na sua série de Fourier em relação a v obtemos:

$$\psi_i^e(u, v, \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n(u, \alpha) Ce_n(v, q_0)) + \sum_{n=1}^{\infty} (\beta_n(u, \alpha) Se_n(v, q_0)),$$

onde α_n e β_n vão ser os coeficientes de Fourier:

$$\alpha_n(u, \alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi_i^e(u, v, \alpha) Ce_n(v, q_0) dv,$$

$$\beta_n(u, \alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi_i^e(u, v, \alpha) Se_n(v, q_0) dv,$$

que vão ser iguais a:

$$\alpha_n(u, \alpha) = 2i^n Ce_n(\alpha, q_0) Mc_n^1(u, q_0),$$

$$\beta_n(u, \alpha) = 2i^n Se_n(\alpha, q_0) Ms_n^1(u, q_0),$$

temos então que a função ψ_i^e pode ser escrita da seguinte forma ([6]):

$$\begin{aligned} \psi_i^e(u, v, \alpha) = & \sum_{n=0}^{\infty} (2i^n Ce_n(\alpha, q_0) Mc_n^1(u, q_0) Ce_n(v, q_0)) + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} (2i^n Se_n(\alpha, q_0) Ms_n^1(u, q_0) Se_n(v, q_0)). \end{aligned}$$

Escrevendo agora as condições fronteira apercebemo-nos que, embora as funções de Mathieu apresentem as relações de ortogonalidade (3.5) e (3.6), as funções ψ_s^e e ψ_p^e vão ser séries de produtos entre funções de Mathieu com parâmetros q diferentes, consoante sejam soluções do problema interior ou exterior. Assim, não podemos determinar de uma forma explicita os coeficientes A_n , B_n , C_n , D_n , uma vez que em geral:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} Ce_n(v, q_i) Ce_m(v, q_j) dv & \neq 0, \quad q_i \neq q_j, \\ \int_{-\pi}^{\pi} Se_n(v, q_i) Se_m(v, q_j) dv & \neq 0, \quad q_i \neq q_j, \end{aligned}$$

apesar de se verificarem igualdades quando n e m tiverem paridades diferentes. Temos então que resolver o problema numericamente, o que será feito na proxima secção.

Capítulo 4

Cálculo Numérico das Soluções

Tendo resolvido os dois problemas anteriores analiticamente, vamos agora proceder ao cálculo numérico dos coeficientes das séries, completando assim a resolução dos problemas. Para o cálculo numérico utilizamos *software* MatLab ([7]) e no caso elíptico, rotinas pré-criadas para as funções de Mathieu ([8]). No caso da difracção por um círculo, os coeficientes α_n, β_n foram escritos explicitamente em (2.3) e (2.4) e assim sendo podemos facilmente criar um programa para determinar o seu valor numérico. No caso da difracção por uma elipse a situação deixa de ser tão simples, porque deixa de ser possível escrever os coeficientes A_n, B_n, C_n, D_n , explicitamente. Assim, para determinar os coeficientes, começamos por truncar as séries (3.8) e (3.7) até N (N esse a determinar à posteriori consoante o grau de aproximação desejado). De seguida, e atendendo que, mesmo para parâmetros q diferentes se tem:

$$\int_{-\pi}^{\pi} Ce_n(v, q_i) Se_m(v, q_j) dv = 0, \quad (4.1)$$

vamos calcular o produto interno, no sentido do espaço $L^2([-\pi, \pi])$,

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(\eta)g(\eta)d\eta, \quad \forall f, g \in L^2([-\pi, \pi]),$$

das funções $Ce_j(q_0)$ e $Se_k(q_0)$ com as condições na fronteira. Variando o j de 0 a N e o k de 1 a N e atendendo às relações de ortogonalidade (3.5), (3.6) e (4.1), obtemos dois grupos de sistemas de equações:

$$\begin{aligned} & 2i^j \pi Ce_j(\alpha, q_0) Mc_j^1(u_0, q_0) = \\ & = \sum_{l=0}^N (C_l \langle Ce_j(q_0), Ce_l(q_1) \rangle Mc_l^1(u_0, q_1)) - A_j \pi Mc_j^3(u_0, q_0), \end{aligned}$$

$$2m^2\pi i^j Ce_j(\alpha, q_0) Mc_j^1(u_0, q_0) =$$

$$= \sum_{l=0}^N (C_l \langle Ce_j(q_0), Ce_l(q_1) \rangle Mc_l^1(u_0, q_1) - m^2 \pi A_j Mc_j^3(u_0, q_0),$$

e

$$2i^k \pi Se_k(\alpha, q_0) Ms_k^1(u_0, q_0) =$$

$$= \sum_{l=1}^N (D_l \langle Se_k(q_0), Se_l(q_1) \rangle Ms_l^1(u_0, q_1)) - B_k \pi Ms_k^3(u_0, q_0),$$

$$2m^2 \pi i^k Se_k(\alpha, q_0) Ms_k^1(u_0, q_0) =$$

$$= \sum_{l=1}^N (D_l \langle Se_k(q_0), Se_l(q_1) \rangle Ms_l^1(u_0, q_1)) - m^2 \pi B_k Ms_k^3(u_0, q_0),$$

o primeiro com $2N + 2$ equações e $2N + 2$ incógnitas e o segundo com $2N$ equações e $2N$ incógnitas.

Como primeira aproximação consideramos $\alpha = 0$, o que simplifica o problema à resolução do primeiro grupo de $2N + 2$ equações, ou seja, vamos ter que resolver o sistema:

$$Ax = b. \quad (4.2)$$

Fixamos $m = 1.5$ e escolhemos como parâmetros livres a excentricidade da elipse e o produto $k_0 a$, a partir de agora chamado de Parâmetro de Escala, Pe , pois relaciona escalas características do problema, tamanho do semi-eixo maior da elipse (ou o raio do círculo no primeiro caso) e o número de onda de ψ_i^0 , (k_0):

$$Pe \equiv k_0 a,$$

todos os outros parâmetros podem ser determinados a partir destes. O valor de N foi tomado seguindo ([9]), ou seja

$$N = Pe + 4Pe^{\frac{1}{3}} + 2.$$

Desenvolvido o programa, fizemos o cálculo do erro das aproximações para vários valores de e e Pe , considerando $\delta = \max\{\delta_1, \delta_2\}$, onde

$$\delta_1 = \frac{\|\psi_i + \psi_s - \psi_p\|_{L_2}}{\|\psi_i\|_{L_2}} \quad \text{em } \partial\Omega$$

e

$$\delta_2 = \frac{\|m^2 \frac{\partial}{\partial n}(\psi_i + \psi_s) - \frac{\partial}{\partial n}(\psi_p)\|_{L_2}}{\|\psi_i\|_{L_2}} \quad \text{em } \partial\Omega$$

e \ Pe	1	10	20	30	40
0 (círculo)	10^{-29}	10^{-28}	10^{-28}	10^{-28}	10^{-28}
0.001	10^{-14}	10^{-12}	10^{-11}	10^{-10}	10^{-5}
0.1	10^{-14}	10^{-12}	10^{-6}	10^{-6}	10^{-5}
0.5	10^{-13}	10^{-11}	10^{-8}	10^{-5}	*
0.9	10^{-13}	10^{-8}	*	*	*

Tabela 4.1: Erros registados para os respectivos parâmetros

são os erros na verificação das condições fronteira, obtendo os seguintes resultados:

Na tabela anterior registaram-se só as experiências cujo $\delta < 0.05$, escrevendo (*) nos resultados que apresentavam $\delta \geq 0.05$. Alguns testes foram também realizados para valores de Pe entre 40 e 55 verificando-se que o erro nas aproximações obtidas era superior ao limite estabelecido (caso elíptico) e que as rotinas para as funções de Mathieu utilizadas deixavam de ser válidas. No caso circular, podemos observar que os erros encontrados são substancialmente menores e que mesmo aumentando o parâmetro Pe varias ordens de grandeza os valores dos erros permanecem entre o intervalo exigido.

Podemos concluir então que a aplicabilidade deste método, no caso elíptico, vai diminuindo à medida que a excentricidade e o parâmetro de escala vão aumentando, sendo esta situação devida principalmente a dois factores:

- a aplicabilidade das rotinas para o cálculo das funções de Mathieu utilizadas é limitada, deixando de funcionar para ordens superiores a 80,
- para ordens superiores a 60, a matriz do sistema de equações (4.2) tem tendência a tornar-se singular, criando problemas na sua inversão e logo na determinação das soluções do sistema.

Capítulo 5

Estudo do comportamento assimptótico das soluções ψ_s

Nesta parte do trabalho vamos estudar as soluções do problema exterior obtidas para os dois exemplos anteriores, verificando que realmente verificam a condição de radiação e comparando o seu comportamento quando a distancia ao "objecto" Ω tende para infinito.

À solução exterior do problema de difracção dá-se o nome de onda difractada, e impõe-se que verifique a condição:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{1/2} \left[\frac{\partial \psi_s}{\partial r} - ik\psi_s \right] = 0,$$

que no nosso caso (tratamento do problema a duas dimensões) é equivalente a requerer que a solução ψ_s tenha, no limite $r \rightarrow \infty$, a seguinte estrutura:

$$\psi_s \approx \frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}} f(\phi) \quad (5.1)$$

Consideremos primeiro o caso da difracção por um círculo. Tal como tínhamos visto, a onda difractada escreve-se:

$$\psi_s^c = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n H_n^1(k_0 r) \cos(n\theta).$$

Para estudarmos o seu comportamento quando $r \rightarrow \infty$, consideramos a representação assimptótica da função de Hankel, ([1],[10]):

$$H_n^1(k_0 r) = \sqrt{\frac{2}{\pi k_0 r}} e^{i(k_0 r - \frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2})} \left[1 + O\left(\frac{1}{k_0 r}\right) \right],$$

onde $O(\frac{1}{k_0 r})$ representa os termos de ordem superior, inferiores a $\frac{1}{k_0 r}$. Desprezando $O(\frac{1}{k_0 r})$, a função de Hankel vai ser aproximada por:

$$H_n^1(k_0 r) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi k_0 r}} e^{i(k_0 r - \frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2})},$$

e logo ψ_s^c vai realmente ter a estrutura (5.1):

$$\psi_s^c \approx \sqrt{\frac{2}{\pi k_0 r}} e^{i(k_0 r - \frac{\pi}{4})} \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \alpha_n \cos(n\theta).$$

Do mesmo modo, na solução do problema de difracção por uma região elíptica:

$$\psi_s^e = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n C e_n(v, q_0) M c_n^3(u, q_0)) + \sum_{n=1}^{\infty} (B_n S e_n(v, q_0) M s_n^3(u, q_0)),$$

podemos considerar as representações assintóticas das funções de Mathieu, ([10]):

$$\left(\begin{array}{c} M c_n^3(u, q_0) \\ (-1)^n M s_n^3(u, q_0) \end{array} \right) = \frac{e^{i(2\sqrt{q} \cosh(u) - \frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2})}}{\sqrt{\pi \cosh(u) \sqrt{q}}} \left[1 + O\left(\frac{1}{4\sqrt{q} \cosh(u)}\right) \right],$$

e tal como no caso anterior, desprezando os termos $O(\frac{1}{4\sqrt{q} \cosh(u)})$, aproximar as funções de Mathieu $M c_n^3(u, q_0)$ e $M s_n^3(u, q_0)$, verificando que ψ_s^e também vai ter a estrutura (5.1).

Para estudar agora as diferenças entre as duas soluções consideramos o factor de distribuição angular, definido como sendo:

$$F(\phi) = |f(\phi)|,$$

que vai ser proporcional à intensidade da onda difractada na direcção ϕ , e vamos calcular a razão:

$$RI = \frac{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |f(\phi)| d\phi}{\int_{-\pi}^{\pi} |f(\phi)| d\phi},$$

que nos vai dar informação sobre a percentagem de energia que passa entre $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Para o cálculo numérico de $F(\phi)$, RI utilizamos o mesmo grau de aproximação para as funções ψ_s^c , ψ_s^e que na secção anterior. Para que pudéssemos fazer comparações entre o exemplo circular e elíptico, alteramos o Parâmetro de Escala do caso circular de maneira a que, fixada a excentricidade da elipse e o Parâmetro de escala do caso elíptico (Pe_e), o problema de difracção por um círculo fosse resolvido para um círculo com a mesma área que a elipse, considerando um k_0 igual nos dois casos. Para que as áreas sejam iguais, os semi-eixos maior e menor da elipse têm que verificar a relação:

$$b = \frac{r^2}{a},$$

onde r é o raio do círculo, fixada a excentricidade (e) obtemos que:

$$e^2 = 1 - \frac{r^4}{a^4}$$

ou seja

$$\frac{a}{r} = (1 - e^2)^{-\frac{1}{4}},$$

calculando a razão entre os parâmetros de escala, considerando k_0 igual nos dois casos, temos:

$$\frac{Pe_e}{Pe_c} = \frac{a}{r} \Leftrightarrow$$

$$Pe_c = Pe_e \frac{r}{a} = Pe_e (1 - e^2)^{\frac{1}{4}}.$$

Tendo igualado as condições dos dois casos anteriores podemos ter uma ideia das diferenças do factor de distribuição angular dos dois casos para alguns parâmetros:

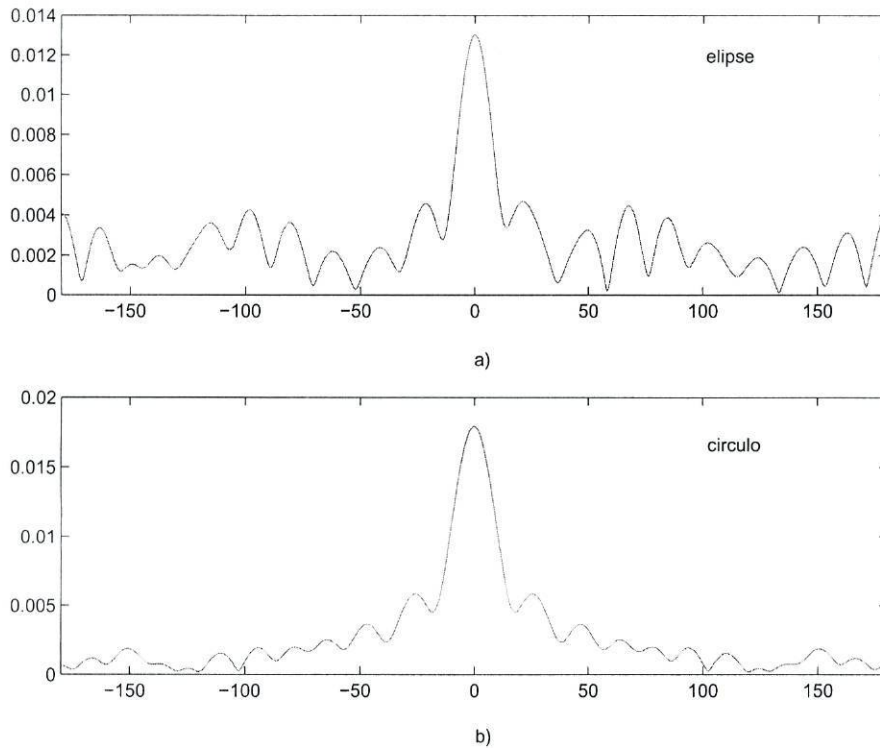
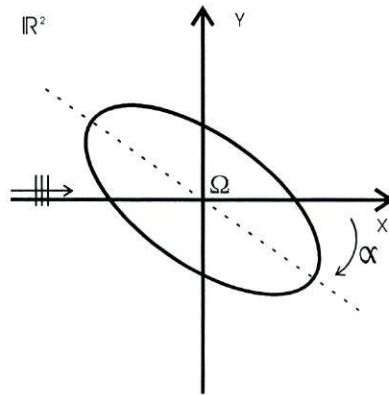


Figura 5.1: Gráficos de $F(\phi)$ com $ir = 1.5$, a) caso elíptico com $\alpha = 50^\circ$, $e = 0.6$, $pt_e = 12$, b) caso circular com $pt_c = 10.7331$.

onde, agora, damos uma interpretação diferente a α , tal como indicado na figura seguinte, em nada alterando o problema.



Podemos também calcular RI para vários parâmetros, construindo as seguintes tabelas (onde os valores dos integrais são calculados com um erro inferior a 10^{-6}):

$\alpha \backslash e$	0.001	0.1	0.5	0.9
0°	0.71053	0.71001	0.69612	0.64694
30°	0.71053	0.70957	0.68455	0.60528
45°	0.71053	0.70913	0.67366	0.57585
90°	0.71053	0.70826	0.65369	0.53448
círculo	0.71021	0.70881	0.67386	0.57541
Pe_c	1	0.99749	0.9306	0.66022

Tabela 5.1: $Pt_e = 1$

$\alpha \backslash e$	0.001	0.1	0.5	0.9
0°	0.60862	0.61437	0.82437	0.44071
30°	0.60862	0.61436	0.80424	0.56657
45°	0.60862	0.61439	0.76378	0.61003
90°	0.60862	0.61454	0.73794	0.63332
círculo	0.81985	0.82375	0.77062	0.70522
Pe_c	10	9.9749	9.306	6.6022

Tabela 5.2: $Pt_e = 10$

constatando que os valores de RI se alteram notoriamente com a variação dos parâmetros do problema, registrando-se uma maior diferença entre o caso circular e o de uma região elíptica com grande excentricidade.

Referências

- [1] Tychonov and Samarski, *Partial Differential Equations of Mathematical Physics*, Holden-Day Series in Mathematical Physics , (1967).
- [2] Tyn Myint-U, *Ordinary Differential Equations*, North-Holland , (1978).
- [3] P. M. Morse, H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics, Part I*, McGRAW-HILL, (1953).
- [4] P. M. Morse, H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics, Part II*, McGRAW-HILL, (1953).
- [5] J. C. Vega, *Theory and Numerical Analysis of the Mathieu Functions*, Instituto Tecnológico y de estudios Superiores de Monterrey, (2003).
- [6] W. Miller, *Symmetry and separation of Variables*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, (1970).
- [7] Matlab, *Version 6.0.0.68 Release 12* , The MathWorks,Inc. , (2000).
- [8] MatLab Routines for Computation of Special Functions, *http://ceta.mit.edu/comp_spec_func*
- [9] C. Mätzler, *MatLab Functions for Mie Scattering and Absorption, version 2*, Institut für Angewandte Physik, (2002).
- [10] Abramowitz M. and I.A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications, (1965).