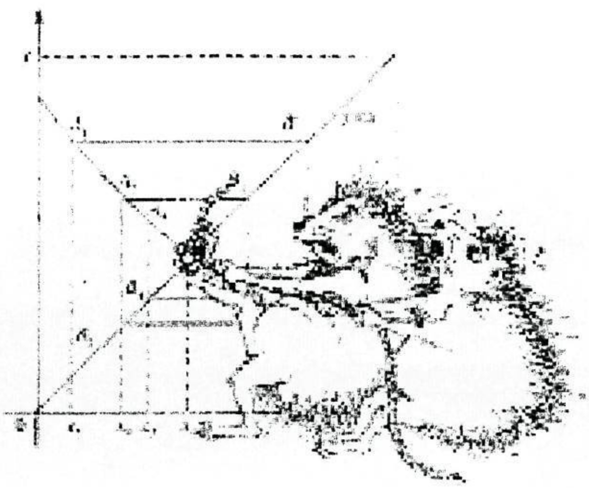
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

TEOREMA DO PONTO FIXO DE BANACH: ALGUMAS GENERALIZAÇÕES E APLICAÇÕES



RICARDO MIGUEL MOREIRA DE ALMEIDA

Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

Ricardo Miguel Moreira de Almeida

TEOREMA DO PONTO FIXO DE BANACH: ALGUMAS GENERALIZAÇÕES E APLICAÇÕES

Dissertação apresentada à Faculdade de Ciências da Universidade do Porto para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática – Fundamentos e Aplicações, realizado sob a orientação científica do Professor Doutor Jorge Rocha, Professor associado do Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

agradecimentos

À minha família e amigos, em especial ao André, Belmira e Isabel pelo apoio dado.

À Paula, por todas as suas sugestões e o acompanhamento.

Ao Professor Jorge Rocha, por orientar este trabalho e pelos seus ensinamentos.

À Universidade Portucalense.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

Esta tese insere-se na Teoria do Ponto Fixo. Tal área tem sido uma ferramenta útil na resolução de algumas equações não-lineares, de equações integrais, de equações diferenciais, etc.

Dois dos ramos principais da Teoria do Ponto Fixo são a Teoria Topológica do Ponto Fixo e Teoria Métrica do Ponto Fixo. Este trabalho enquadra-se neste último ramo.

Esta teoria teve início com o teorema do ponto fixo de Banach, o qual afirma que uma contracção, definida num espaço métrico completo, possui um único ponto fixo. Ao longo deste nosso trabalho estudaremos alguns resultados envolvendo teoremas métricos de ponto fixo e aplicações em diversos ramos da matemática.

Assim sendo, dividimos a tese em quatro capítulos.

No primeiro capítulo apresentamos algumas ferramentas necessárias e que serão utilizadas posteriormente, tais como espaços métricos completos e espaços de Banach. O teorema principal deste capítulo é o teorema do ponto fixo de Banach, base deste estudo. Veremos também que, para uma aplicação definida num espaço métrico completo ter um ponto fixo, não é necessário que seja uma contracção; basta que uma sua iterada o seja.

Estudaremos em que casos podemos garantir que os pontos fixos de uma sucessão de contracções $(f_n)_{n\in IN}$ convergentes para uma dada contracção f, convirjam para o ponto fixo de f.

No segundo capítulo examinaremos pontos fixos de outros tipos de funções: funções fracamente contractivas e funções não-expansivas. Ambos os conceitos são generalizações do conceito de contracção. Algumas hipóteses adicionais tais como existir uma órbita com um ponto de acumulação, serão suficientes para garantir a existência de um ponto fixo.

Veremos também que, em determinadas condições, uma família de funções não-expansivas que comutam entre si possuem um ponto fixo comum. A maior parte dos resultados expostos foram provados por M. Edelstein, L. Belluce e W. Kirk.

No terceiro capítulo fazemos o estudo das funções multivaluadas. Uma função multivaluada é uma aplicação definida entre A e as partes de B, onde A e B são conjuntos não vazios. Alguns dos resultados apresentados nos primeiro e segundo capítulos podem ser generalizados a estas funções.

Estes temas foram estudados principalmente por S. Nadler.

No quarto e último capítulo veremos algumas aplicações do teorema do ponto fixo de Banach à matemática:

- Teorema da função inversa
- Teorema da existência e unicidade local de soluções de equações diferenciais
- Teorema de Grobman-Hartman.

1. TEOREMAS DE PONTO FIXO DE CONTRACÇÕES EM ESPAÇOS MÉTRICOS

A finalidade deste primeiro capítulo é fornecer condições suficientes de modo que uma contracção definida num espaço métrico tenha um ponto fixo. Como veremos adiante, bastará impor uma estrutura adicional ao espaço métrico para responder ao problema anterior.

Para tal, começaremos por expor alguns resultados básicos da análise envolvendo espaço métricos completos e espaços de Banach. Após isto apresentaremos o teorema do ponto fixo de Banach e algumas das suas variantes. Finalizaremos este capítulo mostrando uma relação entre a convergência de contracções para uma dada contracção e a convergência dos respectivos pontos fixos.

1. ESPAÇOS MÉTRICOS COMPLETOS

Iniciamos com a apresentação de algumas definições e resultados simples, mas necessários ao longo deste nosso trabalho.

Seja X um conjunto não vazio.

Uma métrica d definida em X é uma aplicação $d: X \times X \to IR_0^+$ que satisfaz as seguintes condições:

- $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- $d(x,y) = d(y,x), \forall x,y \in X$
- $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z), \forall x.y,z \in X$

Ao par (X,d) dá-se a designação de espaço métrico.

Sejam (X,d) um espaço métrico e $(x_n)_{n\in IN}$ uma sucessão em X.

Definição 1.1.1 Uma sucessão $(x_n)_{n\in IN}$ em (X,d) diz-se ser uma *sucessão de Cauchy* se

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists p \in IN: \ \forall n,m \geq p \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

Definição 1.1.2 Seja $(x_n)_{n\in IN}$ uma sucessão em (X,d). Diz-se que tal *sucessão converge* para $a \in X$ e representa-se por $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ ou $x_n \underset{n\to\infty}{\to} a$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists p \in IN: \ \forall n \geq p \Rightarrow d(x_n, a) < \varepsilon$$

É imediato verificar que o limite de uma sucessão, caso exista, é único.

De facto, suponha-se que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ e que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, com $a \neq b$.

Tome-se $r = \dfrac{d(a,b)}{2} > 0$. Uma vez que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, então

$$\exists p_1 \in IN \; \forall n \geq p_1 : d(x_n, a) < r$$

De modo análogo,

$$\exists p_2 \in IN \; \forall n \geq p_2 : d(x_n, b) < r$$

Sejam $p = \max\{p_1, p_2\}$ e $n \geq p$. Então

$$d(a,b) \leq d(x_n, a) + d(x_n, b) < r + r = d(a,b)$$

o que é absurdo.

Portanto, o limite de uma sucessão, quando existir, é único.

É também imediato verificar que, se uma sucessão $(x_n)_{n\in IN}$ convergir para $a \in X$, então qualquer sua subsucessão também converge para a.

Teorema 1.1.3 Toda a sucessão convergente num espaço métrico (X,d) é de Cauchy.

Demonstração Se $(x_n)_{n\in IN}$ converge para $a \in X$, dado $\varepsilon > 0$, existe $p \in IN$ tal que, para $n \geq p$, $d(x_n, a) < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Seja agora $m \geq p$. Uma vez que

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, a) + d(a, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

conclui-se que a sucessão é de Cauchy.

Observação 1.1.4 O recíproco deste teorema é falso. Basta tomar $X = IR^+$, munido da métrica usual e $x_n = \dfrac{1}{n}$, $n \in IN$. Esta sucessão é de Cauchy e não converge em X.

Vamos agora apresentar a definição de espaço métrico completo, muitas vezes utilizada na formulação de teoremas de ponto fixo.

Definição 1.1.5 Um espaço métrico diz-se *completo* se toda a sucessão de Cauchy for convergente.

Exemplo 1.1.6 Sejam (X,d_1) um espaço métrico completo, (Y,d_2) um espaço métrico e $C_b(Y,X)$ o conjunto das aplicações de Y em X contínuas e limitadas, munido da seguinte distância:

- $d(f,g)=\sup\limits_{x\in Y} d_1(f(x),g(x))$

Com esta distância, $C_b(Y,X)$ é um espaço métrico completo.

De facto, seja $(f_n)_{n\in IN}$ uma sucessão de Cauchy em $C_b(Y,X)$. Dado $\varepsilon>0$

$$\exists p\in IN\ \forall n,m\geq p:\ d(f_n,f_m)<\varepsilon$$

ou seja

$$\exists p\in IN\ \forall n,m\geq p:\ \sup_{x\in Y} d_1(f_n(x),f_m(x))<\varepsilon$$

Daqui resulta que, para cada $x\in Y$, a sucessão $(f_n(x))_{n\in IN}$ é de Cauchy em X.
Como X é completo, a sucessão $(f_n(x))_{n\in IN}$ é convergente em X.
A função assim definida

$$\begin{array}{rccc} f: & Y & \to & X \\ & x & \mapsto & \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \end{array}$$

é contínua e limitada, ou seja, $f\in C_b(Y,X)$ e é o limite uniforme da sucessão $(f_n)_{n\in IN}$.
Provemos estas afirmações:

1) $(f_n)_{n\in IN}$ converge uniformemente para f.

Sejam $\varepsilon>0$ e $x\in Y$.

Uma vez que:

- $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, então

$$\exists p_1\in IN\ \forall n\geq p_1:\ d_1(f_n(x),f(x))<\frac{\varepsilon}{2}$$

- $(f_n)_{n\in IN}$ é uma sucessão de Cauchy, então

$$\exists p_2\in IN\ \forall n,m\geq p_2:\ d(f_n,f_m)<\frac{\varepsilon}{2}$$

Portanto, se $m\geq p_2$ (p_2 não depende de x) e $n\geq \max\{p_1,p_2\}$,

$$d_1(f_m(x),f(x))\leq d_1(f_m(x),f_n(x))+d_1(f_n(x),f(x))<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Donde se conclui que, para $m\geq p_2$,

$$d(f_m,f)=\sup_{x\in Y} d_1(f_m(x),f(x))\leq\varepsilon,$$

e $(f_m)_{m\in IN}$ converge uniformemente para f.

2) $f \in C_b(Y,X)$, isto é, f é limitada e contínua.

Comecemos por mostrar que, como $(f_n)_{n\in IN}$ converge uniformemente para f e cada f_n é contínua, f também é contínua.

Sejam $x \in Y$ e $\varepsilon > 0$.

- $\forall n \in IN$, f_n é contínua, logo
$$\exists \delta > 0 \, \forall y \in Y: \; d_2(x,y) < \delta \Rightarrow d_1(f_n(x), f_n(y)) < \frac{\varepsilon}{3}$$
- $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\to} f(x)$, logo
$$\exists p_1 \in IN \, \forall n \geq p_1: \; d_1(f_n(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$$
- $f_n(y) \underset{n\to\infty}{\to} f(y)$, logo
$$\exists p_2 \in IN \, \forall n \geq p_2: \; d_1(f_n(y), f(y)) < \frac{\varepsilon}{3}$$

Seja $n \geq \max\{p_1, p_2\}$ e $y \in Y$ tal que $d_2(x,y) < \delta$.

Portanto,
$$d_1(f(x),f(y)) \leq d_1(f(x),f_n(x)) + d_1(f_n(x),f_n(y)) + d_1(f_n(y),f(y)) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Concluímos então que f é contínua em x. Da arbitrariedade de x, resulta que f é contínua.

Finalmente, mostremos que f é limitada, isto é, que existe $M \in IR^+$ tal que
$$\sup_{x,y\in Y} d_1(f(x),f(y)) \leq M$$

Sejam então $x, y \in Y$.

- Para cada n, f_n é limitada; por conseguinte
$$\sup_{x,y\in Y} d_1(f_n(x),f_n(y)) \leq M_n$$
- Como $(f_n)_{n\in IN}$ converge uniformemente para f
$$\exists p \in IN \, \forall n \geq p: \; d_1(f_n(x), f(x)) < 1, \forall x \in Y$$

Seja $n \geq p$.

$$\sup_{x,y\in Y} d_1(f(x),f(y)) \leq \sup_{x\in Y} d_1(f(x),f_n(x)) + \sup_{x,y\in Y} d_1(f_n(x),f_n(y)) + \sup_{y\in Y} d_1(f_n(y),f(y)) \leq$$

$$\leq 1 + M_n + 1 = 2 + M_n.$$

Concluímos assim que f é limitada.

Acabámos de provar que $C_b(Y,X)$ é um espaço métrico completo.

Teorema 1.1.7 Sejam (X,d) um espaço métrico completo e $\emptyset \neq F \subseteq X$. O subconjunto F é completo se e só se F é fechado em X.

Demonstração Suponhamos, em primeiro lugar, que F é fechado em X e seja $(x_n)_{n\in IN}$ uma sucessão de Cauchy em F. Como X é completo, resulta que $(x_n)_{n\in IN}$ converge para $a \in X$. Mas como $x_n \in F, \forall n \in IN$, resulta que $a \in \overline{F} = F$. Portanto, $(x_n)_{n\in IN}$ converge para $a \in F$, donde se conclui que F é completo.

Suponhamos agora que F é completo e seja $a \in \overline{F} \supseteq F$. Logo existe uma sucessão $(x_n)_{n\in IN}$ em F convergindo para a. Pelo teorema 1.1.3, resulta que tal sucessão $(x_n)_{n\in IN}$ é de Cauchy em F. Como F é completo, a sucessão converge para um ponto b de F. Uma vez que o limite de uma sucessão, se existir, é único, conclui-se que $a \in F$. Portanto $\overline{F} \subseteq F$, ou seja, F é fechado, o que conclui a demonstração. □

2. ESPAÇOS DE BANACH

Seja E um espaço vectorial sobre o corpo IK, $IK = IR$ ou $\mathbb{C}$.

Uma *norma* em E é uma função $\| \ \| : E \to IR_0^+$ com as seguintes propriedades:

- $\|x\| = 0$ sse $x = 0$;
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in E$;
- $\|kx\| = |k| \, \|x\|, \forall k \in IK, \forall x \in E$.

Um espaço vectorial munido de uma norma é chamado *espaço normado*.

Exemplo 1.2.1 As seguintes funções representam normas em IR^n (ou $\mathbb{C}^n$).

$$\begin{array}{rccc} \| \ \|_1 : & IR^n & \to & IR_0^+ \\ & (x_1,\dots,x_n) & \mapsto & \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2} \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \| \ \|_2 : & IR^n & \to & IR_0^+ \\ & (x_1,\dots,x_n) & \mapsto & |x_1| + \dots + |x_n| \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \| \ \|_3 : & IR^n & \to & IR_0^+ \\ & (x_1,\dots,x_n) & \mapsto & \max\{|x_1|,\dots,|x_n|\} \end{array}$$

Exemplo 1.2.2 Sejam (X, d) um espaço métrico e $C_b(X)$ o conjunto das funções contínuas limitadas de X em IR. Então $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$ define uma norma em $C_b(X)$.

Seja $(E, \| \ \|)$ um espaço vectorial normado e seja $d(x, y) = \|x - y\|$, com $x, y \in E$. Então d é uma *métrica* em E. A d chama-se *métrica induzida* pela norma de E.

Portanto qualquer espaço normado é um espaço métrico. O recíproco é falso; por exemplo, IR com a métrica discreta não é um espaço normado.

Definição 1.2.3 Um espaço normado B diz-se ser um *Espaço de Banach* se é completo com respeito à métrica induzida pela norma de B.

Considere-se IR^n munido de uma norma. Seja $L(IR^n, IR^n)$ o espaço das aplicações lineares de IR^n em IR^n e tome-se $A \in L(IR^n, IR^n)$.

Definimos uma norma em $L(IR^n, IR^n)$ como sendo

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|A(x)\|$$

Observe-se que, se $x \neq \vec{0}$, então

$$\|A(x)\| = A\left(\|x\| \frac{1}{\|x\|} x\right) = \|x\| A\left(\frac{1}{\|x\|} x\right) \leq \|A\| \, \|x\|$$

pois $\left\| \frac{1}{\|x\|} x \right\| = 1$

Exemplo 1.2.4 ([21], pag 65)

Vejamos alguns exemplos de aplicações que representam normas em $L(IR^n, IR^n)$.

Tome-se $A \in L(IR^n, IR^n)$. Podemos associar a esta aplicação uma matriz $(a_{ij})_{i,j \in \{1,\ldots,n\}}$.

- (euclidiana) $\|A\|_1 = \sqrt{\lambda}$, onde λ é o maior valor próprio de $A^* \circ A$ (A^* representa a transposta de A)
- (soma) $\|A\|_2 = \max_j \left(\sum_i |a_{ij}| \right)$
- (máximo) $\|A\|_3 = \max_i \left(\sum_j |a_{ij}| \right)$

3. TEOREMA DO PONTO FIXO DE BANACH

É agora apresentada a definição de ponto fixo, conceito fundamental no nosso trabalho.

Definição 1.3.1 Sejam X um conjunto não vazio, $f : X \to X$ uma função e $a \in X$ tal que $f(a) = a$. Então a diz-se um *ponto fixo de f*.

Observação 1.3.2 Uma das razões da importância da existência de pontos fixos (como veremos à frente) é que, dada uma função $g : IR^n \to IR^n$, resolver a equação $g(x) = b$, onde $b \in IR^n$, é determinar os pontos fixos de $f(x) = g(x) + (x - b)$.

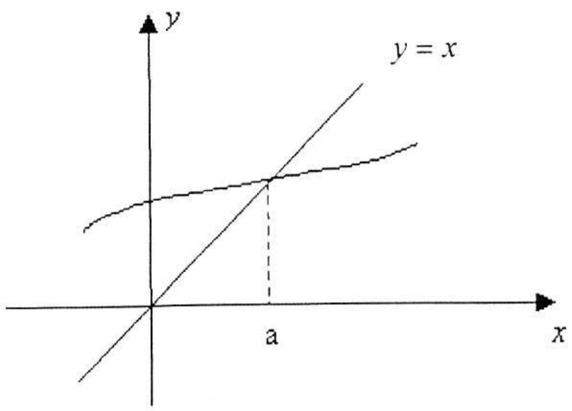


Figura 1: Ponto fixo de uma função de IR em IR

De seguida é introduzido o conceito de contracção, tema que será estudado ao longo deste primeiro capítulo.

Definição 1.3.3 Seja (X, d) um espaço métrico e $f : X \to X$ uma função. A função *f* diz-se ser uma *contracção* se existir um número real $k \in]0,1[$ tal que

$$d(f(x), f(y)) \leq k d(x, y), \forall x, y \in X \quad \textbf{(1)}$$

A k chamamos *razão de contracção.*

Vejamos que o conceito de contracção é um conceito métrico, isto é, depende da métrica considerada. De facto, dada uma função f e duas métricas equivalentes d e $\overline{d}$ (isto é, U é um aberto associado a d se e só se U é um aberto associado a $\overline{d}$), a condição "f é contracção para a métrica d" não é suficiente para garantir que f seja ainda uma contracção para a métrica $\overline{d}$, como se ilustra no próximo exemplo.

Exemplo 1.3.4 Considerem-se em IR_0^+ as métricas d e $\overline{d}$, sendo d a métrica usual e $\overline{d}$ a métrica definida por $\overline{d}(x,y) = \left|x^2 - y^2\right|$.

Comecemos por mostrar que as duas métricas são equivalentes.
Seja U um aberto associado a d e $x \in U$. Logo existe $\delta > 0$ tal que

$$B(x,\delta) = \left\{y \in IR_0^+ : d(x,y) < \delta\right\} \subset U \text{, isto é, } |x-y| < \delta \Rightarrow y \in U.$$

Pretende-se encontrar $\varepsilon > 0$ tal que, $\forall y$: $\left|x^2 - y^2\right| < \varepsilon \Rightarrow y \in U$.

Basta então encontrar $\varepsilon > 0$ de modo que:

$$\left|x^2 - y^2\right| < \varepsilon \Rightarrow |x-y| < \delta$$

<u>1º CASO</u>: $x = 0$;

$$\left|x^2 - y^2\right| < \varepsilon \Leftrightarrow y^2 < \varepsilon$$

Considere-se então $\varepsilon = \delta^2 > 0$.
Logo

$$y^2 < \delta^2 \Leftrightarrow y < \delta \Leftrightarrow |x-y| < \delta$$

<u>2º CASO</u>: $x \neq 0$;

$$\left|x^2 - y^2\right| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < x^2 - y^2 < \varepsilon \Leftrightarrow x^2 - \varepsilon < y^2 < x^2 + \varepsilon$$

Portanto,

$$y^2 > x^2 - \varepsilon$$

Tome-se $\varepsilon > 0$ de modo que $x^2 - \varepsilon > 0$.
Logo,

$$y > \sqrt{x^2 - \varepsilon}$$

Uma vez que

$$|x-y| = \frac{\left|x^2 - y^2\right|}{x+y} < \frac{\varepsilon}{x + \sqrt{x^2 - \varepsilon}}$$

basta então tomar $\varepsilon > 0$ de modo que $\varepsilon < x^2$ e $\dfrac{\varepsilon}{x + \sqrt{x^2 - \varepsilon}} < \delta$.

De modo análogo se prova que, se U é um aberto associado a $\overline{d}$, então U é também um aberto associado a d.

Seja agora

$$f: \; IR_0^+ \to IR_0^+$$
$$x \mapsto \frac{x}{2}+1$$

Relativamente à métrica d, é obvio que f é contracção de razão igual a $\frac{1}{2}$. Contudo, como

$$\frac{\bar{d}\left(f\left(\frac{1}{2}\right), f(0)\right)}{\bar{d}\left(\frac{1}{2},0\right)} = \frac{\bar{d}\left(\frac{5}{4},1\right)}{\bar{d}\left(\frac{1}{2},0\right)} = \frac{9}{4} > 1$$

f não é uma contracção relativamente à métrica $\bar{d}$.

Observação 1.3.5

- Uma contracção é uniformemente contínua. De facto, dado $\varepsilon > 0$ e tomando $\delta = \frac{\varepsilon}{k}$, obtém-se que $\forall x, y \in X : d(x,y) < \delta$

$$d(f(x), f(y)) \leq kd(x,y) < k\frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon .$$

- Se **(1)** é satisfeita para um dado k_0, também o é para $k \in]k_0, 1[$, o que nos permite afirmar que a razão de contracção não é única.

- Uma contracção tem no máximo um ponto fixo.
  De facto, se existissem dois pontos fixos distintos a e b da função f, teríamos $d(a,b) = d(f(a), f(b)) \leq kd(a,b) < d(a,b)$, o que é absurdo.

- É fácil verificar que a composta de duas contracções é ainda uma contracção.

- Num espaço métrico (X,d), uma aplicação constante é uma contracção. Dependendo da métrica, pode acontecer que não existam contracções para além das aplicações constantes. De facto, isso acontece por exemplo em IR com a métrica discreta (que é completo). Basta observar que, se $x \neq y$, então

$$d(f(x), f(y)) \leq kd(x,y) < d(x,y) = 1$$

Portanto $f(x) = f(y)$.

Em determinados contextos, para verificar se uma dada função derivável $f\colon X \to X$, onde X é um espaço normado, é ou não uma contracção, basta estudar se a sua derivada tem norma menor do que uma constante $k \in \left]0,1\right[$.

Comecemos por enunciar o Teorema do Valor Médio (ver, por exemplo, [1], pag 81).

Teorema 1.3.6 Sejam $U \subseteq IR^n$ um aberto convexo não vazio e

$$f : U \to IR^m$$

uma função de classe c^1, isto é, $\forall i \in \{1,\ldots,m\}, j \in \{1,\ldots,n\}$, existem e são contínuas as derivadas parciais $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$.

Então, quaisquer que sejam $x, y \in U$, tem-se

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \sup\|Df((1-t)x + ty)\| \, \|x - y\|, \text{ com } 0 \leq t \leq 1$$

sendo D o operador derivação.

Portanto, se $\|Df\|$ for limitada em U, isto é, existe $M \in IR^+$ tal que $\|Df(u)\| \leq M$, para todo $u \in U$, então para todo $x, y \in U$

$$\|f(x) - f(y)\| \leq M \, \|x - y\|$$

Se $U \subseteq IR$ e $f : U \to IR$, então

$$f(x) - f(y) = Df(c)(x - y)$$

para algum c pertencente ao segmento de recta que une x a y.

Note-se que, nas condições do teorema anterior, se $\|Df\| \leq k < 1$, resulta que f é uma contracção.

A condição de U ser convexo é essencial. Tome-se por exemplo

$$f : \left]-\infty,-1\right] \cup \left[1,+\infty\right[\to IR$$

definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x} + 10, & x \geq 1 \\ \dfrac{1}{2x} - 10, & x \leq -1 \end{cases}.$$

Neste caso, $|f'(x)| = \dfrac{1}{2x^2} \leq \dfrac{1}{2}$ e $|f(1) - f(-1)| = 21 > 2 = |1 - (-1)|$, isto é, f não é uma contracção.

Feita esta introdução, estamos aptos para apresentar o teorema do ponto fixo de Banach, tema central de todo o trabalho. Veremos que uma contracção definida num espaço métrico completo tem um único ponto fixo.

Posteriormente, no segundo capítulo, exibiremos outros teoremas de ponto fixo onde a condição de f ser uma contracção será enfraquecida.

Teorema 1.3.7 (Teorema do ponto fixo de Banach, [18], pag 83)
Sejam (X,d) um espaço métrico completo e $f: X \to X$ uma contracção. Então f tem um único ponto fixo.

Demonstração Seja k a razão de contracção de f e, para $x \in X$, seja

$$\lambda = d(x, f(x)).$$

Então,

$$d\left(f^n(x), f^{n+1}(x)\right) = d\left(f\left(f^{n-1}(x)\right), f\left(f^n(x)\right)\right) \le kd\left(f^{n-1}(x), f^n(x)\right) \le \ldots \le k^n \lambda .$$

De facto, podemos provar esta afirmação por indução.

Para $n=1$, $d\left(f(x), f^2(x)\right) = d(f(x), f(f(x))) \le k\lambda$

Suponhamos agora que a desigualdade é válida para n. Então

$$d\left(f^{n+1}(x), f^{n+2}(x)\right) = d\left(f\left(f^n(x)\right), f\left(f^{n+1}(x)\right)\right) \le kd\left(f^n(x), f^{n+1}(x)\right) \le k\left(k^n \lambda\right) = k^{n+1}\lambda$$

Usaremos esta desigualdade para mostrar que a sucessão $\left(f^n(x)\right)_{n \in IN}$ é de Cauchy.
Seja $m > n$.

$$d(f^m(x), f^n(x)) \le d(f^m(x), f^{m-1}(x)) + d(f^{m-1}(x), f^{m-2}(x)) + \ldots + d(f^{n+1}(x), f^n(x)) \le$$

$$\le \left(k^{m-1} + k^{m-2} + \ldots + k^n\right)\lambda = k^n\left(1 + k + \ldots + k^{m-1-n}\right)\lambda \le \frac{k^n}{1-k}\lambda$$

que converge para zero quando $n \to +\infty$, uma vez que $k \in \left]0,1\right[$.
Logo a sucessão $\left(f^n(x)\right)_{n \in IN}$ é de Cauchy.

Como X é um espaço métrico completo, a sucessão $\left(f^n(x)\right)_{n \in IN}$ converge para um $x_0 \in X$. Além disso, x_0 é ponto fixo de f. De facto, como qualquer contracção é contínua, resulta que

$$f(x_0) = f\left(\lim_{n\to\infty} f^n(x)\right) = \lim_{n\to\infty} f^{n+1}(x) = x_0 .$$

Pelo que foi visto atrás, f tem no máximo um ponto fixo, logo x_0 é o único ponto fixo de f, o que conclui a demonstração. $\square$

Observe-se que:

- Dado $x \in X$, a sequência $x, f(x), f^2(x), \ldots$ converge para o único ponto fixo de f.

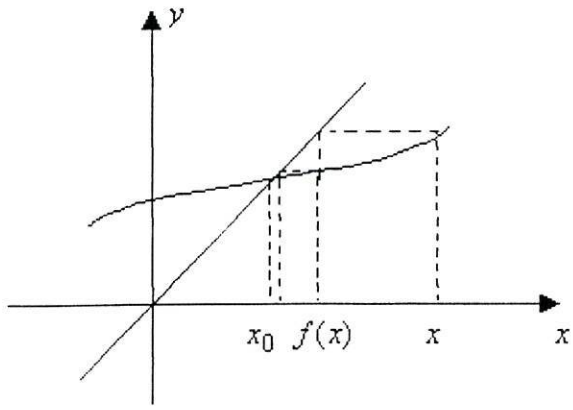


Figura 2: Convergência da sucessão $\left(f^n(x)\right)_{n \in IN}$

- Se o espaço X não for completo, não se pode garantir a existência do ponto fixo.

  Por exemplo, tome-se $X = IR \setminus \{0\}$ e $f(x) = \frac{1}{2}x$.

- É essencial que $f(X) \subseteq X$. Considere-se a aplicação

$$\begin{aligned} f: [0,1] &\rightarrow IR \\ x &\mapsto \frac{1}{2}x + 1 \end{aligned}$$

A função satisfaz a condição $d(f(x), f(y)) \leq \frac{1}{2} d(x,y)$, e contudo f não tem pontos fixos em $[0,1]$.

- Se $k = 1$, só com as restrições do teorema 1.3.7, nada se pode concluir. Basta tomar $X = IR$ e $f(x) = x + 1$ (posteriormente, no nosso trabalho, exibiremos condições suficientes para garantir a existência de um ponto fixo para funções deste tipo).

O Teorema de Banach fornece um procedimento para resolver algumas equações por aproximações sucessivas. Tome-se a equação $f(x) = x$, onde $f : (X,d) \rightarrow (X,d)$ é uma contracção e (X,d) um espaço métrico completo. Resolver tal equação consiste em determinar o ponto fixo x_0 de f. Como foi visto na demonstração do teorema do ponto fixo de Banach, a sequência $x, f(x), f^2(x), \ldots$ converge para x_0.

Além disto, a velocidade de convergência é exponencial, uma vez que

$$d(x_0, f^n(x)) = d(f^n(x_0), f^n(x)) \leq k^n d(x_0, x), \text{ com } 0 < k < 1$$

Portanto, o teorema do ponto fixo de Banach não só nos fornece condições suficientes para garantir a existência de um ponto fixo, bem como um processo iterativo para determinar tal ponto, através de aproximações sucessivas.

Seja, por exemplo

$$\begin{array}{rccc} f: & [2,6] & \rightarrow & [2,6] \\ & x & \mapsto & \ln x + 3 \end{array}$$

Uma vez que $|f'(x)| = \dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{2}$, pelo teorema do valor médio, resulta que f é contracção. Além disso, como f está definida num espaço métrico completo, pelo teorema anterior, f tem um ponto fixo.

Como determinar tal ponto, por aproximações sucessivas (por exemplo, com um erro inferior a 10^{-3})?

Fixe-se um ponto qualquer $x \in [2,6]$. Pelo que foi visto na demonstração, a sucessão $(f^n(x))_{n \in IN}$ converge para o ponto fixo x_0, e o erro da aproximação entre os iterados de x por f e o ponto fixo é controlado pela fórmula

$$d(x_0, f^n(x)) \leq k^n d(x_0, x) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n 4$$

uma vez que x e x_0 estão entre 2 e 6.

Portanto, se pretendemos que o erro seja inferior a 10^{-3}, basta iterar x por f n vezes, onde n é tal que

$$4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 10^{-3}$$

Cálculos simples permitem-nos afirmar que após 12 iterações, o erro cometido é inferior a 10^{-3}.

Por vezes a contracção f não está definida em todo o espaço X (métrico completo). Pelo que foi visto na demonstração do teorema do ponto fixo de Banach, se para $x \in X$, a sequência $f^n(x)$ estiver definida, $\forall n \in IN$, então essa sucessão é de Cauchy e portanto converge para algum x_0. Se x_0 pertencer ao domínio da aplicação f, então é um ponto fixo (único). No próximo resultado obtêm-se condições suficientes para que este argumento funcione.

Teorema 1.3.8 ([4], pag 152) Sejam (X,d) um espaço métrico completo, $\emptyset \neq U \subset X$ um aberto e $f: U \rightarrow X$ uma aplicação tal que $d(f(x), f(y) \leq kd(x,y)$, $\forall x, y \in U$, com $0 < k < 1$. Suponha-se que $\exists u \in U$ tal que $d(u, X \setminus U) > M > 0$ e que $d(u, f(u)) < M(1-k)$. Então f possui um único ponto fixo $a \in U$ e $d(u,a) < M$.

Demonstração Comecemos por notar que $f(u) \in U$, pois

$$d(u, f(u)) < M(1-k) < M < d(u, X \setminus U).$$

Vejamos que a sucessão

$$\begin{cases} u_0 = u \\ u_n = f^n(u) = f(u_{n-1}), n \in IN \end{cases}$$

está bem definida, isto é, se $u_n = f^n(u) \in U$, então $u_{n+1} = f^{n+1}(u) \in U$

A demonstração desta afirmação será feita por indução.

(a) $n = 0,\ u_0 = u \in U$, por hipótese do teorema;

(b) Suponhamos agora que $u_0, u_1, \ldots, u_n \in U$.

Uma vez que:

$$d(u, f(u_n)) = d(u, u_{n+1}) \le d(u, u_1) + d(u_1, u_2) + \ldots + d(u_n, u_{n+1}) =$$

$$= d(u, f(u)) + d(u_1, f(u_1)) + \ldots + d(u_n, f(u_n))$$

e que, para $0 \le p \le n$

$$d(u_p, f(u_p)) = d(f^p(u), f^p(f(u))) \le k^p d(u, f(u)) < k^p M(1-k)$$

resulta que

$$d(u, f(u_n)) \le M(1-k) + kM(1-k) + \ldots + k^n M(1-k) =$$

$$= (1 + k + \ldots + k^n) M(1-k) = \frac{1-k^{n+1}}{1-k} M(1-k) = M(1-k^{n+1}) < M.$$

Como $u_{n+1} = f(u_n)$ e $d(u, f(u_n)) < M$, concluímos que $u_{n+1} \in U$, o que conclui a prova por indução.

De modo análogo, resulta que

$$d(u_p, u_{p+q}) \le d(u_p, u_{p+1}) + d(u_{p+1}, u_{p+2}) + \ldots + d(u_{p+q-1}, u_{p+q}) =$$

$$= d(u_p, f(u_p)) + d(u_{p+1}, f(u_{p+1})) + \ldots + d(u_{p+q-1}, f(u_{p+q-1})) \le$$

$$\le (k^p + k^{p+1} + \ldots + k^{p+q-1}) M(1-k) = k^p \frac{1-k^q}{1-k} M(1-k) = Mk^p(1-k^q) < Mk^p.$$

Como $k^n \underset{n \to \infty}{\to} 0$, a sucessão $(u_n)_{n \in IN}$ é de Cauchy e como X é completo,

$$u_n \underset{n \to \infty}{\to} a \in X.$$

Uma vez que:

- por hipótese, $D(u,M) \subseteq U$, onde $D(u,M) = \{x \in X : d(x,u) \leq M\}$
- $u_n \in B(u,M), \forall n \in IN$
- $a = \lim_{n \to \infty} u_n \in D(u,M)$

concluímos que $a \in U$.

Falta verificar que a é um ponto fixo.

Como f é contínua e $u_{n+1} = f(u_n)$, resulta que

$$a = \lim_{n \to \infty} (u_n) = \lim_{n \to \infty} f(u_n) = f\left(\lim_{n \to \infty} (u_n)\right) = f(a).$$

Portanto, $f(a) = a$. Pelo que foi visto anteriormente, a é único, o que conclui a demonstração. □

No seguinte corolário, para garantir a existência do ponto fixo não é exigido que f seja uma contracção. Basta que f^n o seja, para algum $n \in IN$.

Teorema 1.3.9 ([18], pag 85) Sejam (X,d) um espaço métrico completo, $f : X \to X$ uma função tal que f^n é uma contracção, para algum $n \in IN$. Então f tem um único ponto fixo.

Demonstração Pelo teorema do ponto fixo de Banach, f^n tem um único ponto fixo. Seja x_0 tal ponto, isto é, $f^n(x_0) = x_0$.

Uma vez que

$$f(x_0) = f\left(f^n(x_0)\right) = f^n(f(x_0))$$

concluímos que $f(x_0)$ é também um ponto fixo de f^n. Como o ponto fixo de uma contracção é único

$$f(x_0) = x_0$$

isto é, x_0 é um ponto fixo de f.

Vejamos finalmente que tal ponto fixo é único. Para tal, basta observar que, se y_0 é ponto fixo de f, então

$$y_0 = f(y_0) = f^2(y_0) = \ldots = f^n(y_0)$$

e portanto y_0 é também um ponto fixo de f^n, contrariando a unicidade.

Logo x_0 é o único ponto fixo de f, como queríamos provar. □

Corolário 1.3.10 Sejam (X,d) um espaço métrico completo e $f: X \to X$ uma aplicação. Supor que existem $m,n \in IN$ e $k \in]0,1[$ tal que

$$d\left(f^m(x), f^n(y)\right) \le kd(x,y), \quad \forall x,y \in X$$

Então f tem um único ponto fixo.

Demonstração Uma vez que, dados $x,y \in X$

$$d\left(f^{m+n}(x), f^{m+n}(y)\right) = d\left(f^m\left(f^n(x)\right), f^n\left(f^m(y)\right)\right) \le kd\left(f^n(x), f^m(y)\right) =$$

$$= kd\left(f^m(y), f^n(x)\right) \le k^2 d(y,x) = k^2 d(x,y)$$

com $k^2 \in]0,1[$, provamos assim que f^{m+n} é uma contracção de razão k^2.
Pelo teorema anterior, f tem um único ponto fixo. □

O exemplo seguinte dá-nos uma função F tal que F^n é uma contracção, para algum $n \in IN$.

Exemplo 1.3.11

Seja

$$\begin{array}{cccc} F: & C([a,b],IR) & \to & C([a,b],IR) \\ & g & \mapsto & Fg \end{array}$$

onde $Fg(x) = \int_a^x g(y)dy$.

Logo

$$d(Fg_1, Fg_2) = \sup_{x\in[a,b]} \left|Fg_1(x) - Fg_2(x)\right| \le \sup_{x\in[a,b]} \int_a^x \left|(g_1(y) - g_2(y))\right| dy \le m(b-a)$$

onde $m = d(g_1, g_2)$.

$$d(F^2 g_1, F^2 g_2) = \sup_{x\in[a,b]} \left|F(Fg_1(x)) - F(Fg_2(x))\right| = \sup_{x\in[a,b]} \left| F\left(\int_a^x g_1(y)dy\right) - F\left(\int_a^x g_2(y)dy\right)\right| =$$

$$= \sup_{x\in[a,b]} \left| \int_a^x \left(\int_a^y g_1(z)dz\right) dy - \int_a^x \left(\int_a^y g_2(z)dz\right) dy \right| = \sup_{x\in[a,b]} \left| \int_a^x \left(\int_a^y (g_1(z) - g_2(z))dz\right) dy \right| \le$$

$$\le \sup_{x\in[a,b]} \left| \int_a^x \left(\int_a^y m dz\right) dy \right| = \sup_{x\in[a,b]} m \left| \int_a^x \int_a^y 1 dz dy \right| = \sup_{x\in[a,b]} m \left| \int_a^x (y-a)dy \right| =$$

$$= \sup_{x\in[a,b]} m \frac{|x-a|^2}{2} \le m \frac{|b-a|^2}{2}$$

Repetindo o processo anterior, obtemos

$$d(F^n g_1, F^n g_2) \leq m \frac{|b-a|^n}{n!}$$

Para n suficientemente grande, $\frac{|b-a|^n}{n!} < 1$, donde concluímos que F^n é uma contracção. □

Corolário 1.3.12 (Dependência de um parâmetro) ([4], pag 153)

Sejam (X,d) um espaço métrico completo e $\varnothing \neq U \subset X$, com $U \neq X$, um aberto, *T* um espaço topológico e $f: U \times T \to X$ uma função com as seguintes condições:

(a) Para cada $t \in T$, a função

$$\begin{aligned} f_t :\ & U \to X \\ & x \mapsto f_t(x) = f(x,t) \end{aligned}$$

satisfaz as hipóteses do teorema 1.3.8 (para os mesmos M e k).

(b) Para cada $x \in U$, a função

$$\begin{aligned} f_x :\ & T \to X \\ & t \mapsto f_x(t) = f(x,t) \end{aligned}$$

é contínua.

Então, para cada $t \in T$, a função f_t tem um único ponto fixo $a_t \in U$, (isto é, $\exists^1 a_t \in U : f(a_t, t) = a_t$) e a função

$$\begin{aligned} g :\ & T \to X \\ & t \mapsto a_t \end{aligned}$$

é contínua.

Demonstração Pelo teorema 1.3.8, para cada $t \in T$, f_t tem um único ponto fixo $a_t \in U$.

Mostremos que a função g é contínua:

$$d(a_t, a_s) = d(f_t(a_t), f_s(a_s)) \leq d(f_t(a_t), f_s(a_t)) + d(f_s(a_t), f_s(a_s)) \leq$$

$$\leq d(f_t(a_t), f_s(a_t)) + kd(a_t, a_s).$$

(na primeira igualdade usou-se o facto de a_t ser o ponto fixo de f_t e de a_s ser o ponto fixo de f_s).

Portanto,

$$d(a_t, a_s) - kd(a_t, a_s) \leq d(f_t(a_t), f_s(a_t)) \Leftrightarrow d(a_t, a_s) \leq (1-k)^{-1} d(f_t(a_t), f_s(a_t))$$

Como a função f_x é contínua,

$$\lim_{s \to t} f_{a_t}(s) = f_{a_t}(t) = a_t$$

e portanto da desigualdade anterior decorre que $\lim_{s \to t} a_s = a_t$, isto é, a função g é contínua, o que conclui a demonstração. □

Observação 1.3.13 Naturalmente que o corolário anterior vale se $U = X$ trocando a condição a) pela condição de f_t ser contracção de razão k, $\forall t \in T$ (com k não dependente de t).

De seguida apresentaremos uma nova definição que provém da definição de contracção apresentada anteriormente. A diferença é que não é necessário impôr que a condição

$$d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$$

se verifique para quaisquer x e y. Basta que seja válida para x e y "suficientemente próximos".

Definição 1.3.14 Sejam (X, d) um espaço métrico, $f : X \to X$ uma aplicação e $\varepsilon > 0$.

f diz-se ser uma ε - *contracção* se existir $k \in]0,1[$ tal que

$$\forall x, y \in X,\ d(x, y) < \varepsilon \Rightarrow d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$$

Observe-se que, se f é uma ε - contracção, para algum $\varepsilon > 0$, então f é contínua.

Qualquer contracção é também uma ε - contracção. Contudo, o recíproco é falso como mostra o seguinte exemplo.

Exemplo 1.3.15 Seja

$$\begin{array}{cccc} f: & [0,2] \cup [4,6] & \to & [0,2] \cup [4,6] \\ & x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & \text{, se } x \in [0,2] \\ \frac{1}{2}x + 2 & \text{, se } x \in [4,6] \end{cases}$$

É fácil verificar que f é uma 1- contracção. No entanto, f não é uma contracção:

$$d(f(2), f(4)) = 3 > 2 = d(2,4)$$

O mesmo exemplo mostra que uma ε - contracção pode ter mais que um ponto fixo (0 e 4 são dois pontos fixos de f).

Definição 1.3.16 Sejam (X, d) um espaço métrico e $\varepsilon > 0$.

Uma sequência finita $x_0, x_1, \ldots, x_n$ de pontos de X diz-se uma ε - *cadeia* unindo x_0 a x_n se

$$d(x_{i-1}, x_i) < \varepsilon,\ i = 1, 2, \ldots, n$$

X diz-se ε - *encadeado* se $\forall x, y \in X$ existe uma ε - *cadeia* unindo x a y.

Observação 1.3.17

- Qualquer espaço métrico conexo por arcos é ε - encadeado.
- $[0,1]\cup[2,3]$ munido da métrica usual não é ε - encadeado para $\varepsilon \le 1$.
- Em (IR^n, d), qualquer ε - contracção é uma contracção. De facto, dados $x, y \in IR^n$, considere-se uma ε - *cadeia* $x = x_0, x_1, ..., x_s = y$ unindo x a y, onde os x_i são pontos consecutivos pertencentes ao segmento de recta unindo x a y.
  Por conseguinte,
  $$d(f(x), f(y)) \le \sum_{i=1}^{s} d(f(x_{i-1}), f(x_i)) \le k\sum_{i=1}^{s} d(x_{i-1}, x_i) = kd(x,y)$$

O seguinte teorema (M. Edelstein, [13]) fornece-nos condições suficientes para que uma ε - contracção tenha um ponto fixo.

Teorema 1.3.18 Sejam (X,d) um espaço métrico completo ε - encadeado e $f: X \to X$ uma ε - contracção. Então f tem um único ponto fixo $z \in X$.

Demonstração Seja $x \in X$. Por hipótese, X é ε - encadeado, logo existem $x = x_0, x_1, ..., x_s = f(x)$ com $d(x_{i-1}, x_i) < \varepsilon$, $i = 1, ..., s$.

Por hipótese, f é uma ε - contracção, logo para cada $i \in \{1, ..., s\}$, tem-se

$$d(f(x_{i-1}), f(x_i)) \le kd(x_{i-1}, x_i) < k\varepsilon < \varepsilon$$

Iterando sucessivas vezes, concluímos que

$$d(f^m(x_{i-1}), f^m(x_i)) \le kd(f^{m-1}(x_{i-1}), f^{m-1}(x_i)) \le ... \le k^m \varepsilon$$

Portanto,

$$d(f^m(x), f^{m+1}(x)) = d(f^m(x_0), f^m(x_s)) \le$$

$$\le d(f^m(x_0), f^m(x_1)) + d(f^m(x_1), f^m(x_2)) + ... + d(f^m(x_{s-1}), f^m(x_s)) \le$$

$$\le k^m\varepsilon + k^m\varepsilon + ... k^m\varepsilon = sk^m\varepsilon$$

Por conseguinte, para $n > m$, temos que

$$d(f^n(x), f^m(x)) \le d(f^n(x), f^{n-1}(x)) + d(f^{n-1}(x), f^{n-2}(x)) + ... d(f^{m+1}(x), f^m(x)) \le$$

$$\le s\varepsilon(k^{n-1} + k^{n-2} + ... + k^m) \le \frac{k^m}{1-k} s\varepsilon$$

Portanto, a sucessão $(f^n(x))_{n\in IN}$ é de Cauchy, e como X é completo, a sucessão converge para um $z \in X$.

Afirmamos que z é um ponto fixo de f. Como f é uma aplicação contínua,

$$f(z) = f\left(\lim_{n\to\infty} f^n(x)\right) = \lim_{n\to\infty} f^{n+1}(x) = z$$

o que prova que z é de facto um ponto fixo de f.

Finalmente, vejamos que z é o único ponto fixo de f.

Por redução ao absurdo, suponhamos que existe $y \neq z$ tal que y é também um ponto fixo de f.

Consideremos uma ε - cadeia

$$z = x_0, x_1, \dots, x_s = y.$$

Então

$$d(z,y) = d(f^m(z), f^m(y)) = d(f^m(x_0), f^m(x_s)) \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{s} d(f^m(x_{i-1}), f^m(x_i)) \leq \sum_{i=1}^{s} k^m \varepsilon = sk^m \varepsilon$$

Como $k \in \left]0,1\right[$, resulta que $\lim_{m\to\infty}\left(sk^m\varepsilon\right) = 0$, donde concluímos que $z = y$, isto é, o ponto fixo é único. □

Embora no teorema anterior ε seja o mesmo (de ε - contracção e ε - encadeado), o resultado continua a ser válido se X for ε_1 - encadeado e f uma ε_2 - contracção, com $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$.

A condição de X ser ε - encadeado é essencial. De facto, IR munido da métrica discreta não é ε - encadeado para $\varepsilon \leq 1$ e qualquer aplicação $f: IR \to IR$ é contínua e uma ε - contracção, com $\varepsilon \leq 1$, uma vez que $d(x,y) < \varepsilon \leq 1 \Rightarrow x = y$. Contudo tal aplicação pode não ter pontos fixos.

4. SUCESSÃO DE CONTRACÇÕES

Sejam (X,d) um espaço métrico completo e $f_i : X \to X$, com $i \in IN$, uma sequência de contracções. Pelo teorema do ponto fixo de Banach, cada função f_i tem um ponto fixo $x_i \in X$.

Suponhamos que a sucessão $(f_i)_{i\in IN}$ converge para uma contracção $f_0 : X \to X$ (pontualmente ou uniformemente). Será que a sucessão $(x_i)_{i\in IN}$ converge também para o ponto fixo de f_0?

O seguinte resultado fornece-nos uma resposta no caso de contracções com a mesma razão de contracção.

Teorema 1.4.1 ([18], pag 147) Sejam (X,d) um espaço métrico completo, f_0, f_n, com $n \in IN$, contracções de X em X. Suponha-se que as contracções f_n têm a mesma razão de contracção k.

Sejam ainda a_0 e a_n os pontos fixos de f_0 e f_n, respectivamente.

Se $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f_0(x)$, $\forall x \in X$, então $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a_0$.

Demonstração Atendendo que f_r é uma contracção de razão k, resulta que, dado $x \in X$ e $n < p$:

$$d(a_r, f_r^n(x)) \le d(a_r, f_r^p(x)) + d(f_r^p(x), f_r^n(x)) \le d(a_r, f_r^p(x)) + k^n d(x, f_r^{p-n}(x)) \le$$

$$\le d(a_r, f_r^p(x)) + k^n \left(d(x, f_r(x)) + \ldots + d(f_r^{p-n-1}(x), f_r^{p-n}(x))\right) \le$$

$$\le d(a_r, f_r^p(x)) + k^n \left(1 + k + \ldots + k^{p-n-1}\right) d(x, f_r(x)) \le d(a_r, f_r^p(x)) + \frac{k^n}{1-k} d(x, f_r(x))$$

Como $\lim\limits_{p\to\infty} f_r^p(x) = a_r$, fazendo $p \to \infty$, obtemos

$$d(a_r, f_r^n(x)) \le \frac{k^n}{1-k} d(x, f_r(x))$$

Tomando $n = 0$ e $x = a_0$

$$d(a_r, a_0) \le \frac{1}{1-k} d(a_0, f_r(a_0)) = \frac{1}{1-k} d(f_0(a_0), f_r(a_0))$$

Como $(f_n)_{n\in IN}$ converge pontualmente para f_0, concluímos então que

$$\lim_{r\to\infty} d(f_0(a_0), f_r(a_0)) = 0$$

logo

$$\lim_{r\to\infty} d(a_0, a_r) = 0$$

provando assim o pretendido. □

O teorema anterior supõe que as contracções tenham todas a mesma razão de contracção. Os dois teoremas seguintes, provados por S. Nadler em [26], não impõem esta condição, desde que a convergência das funções seja uniforme ou que o espaço seja localmente compacto.

Teorema 1.4.2 Sejam (X,d) um espaço métrico e $f_i : X \to X$ funções com pelo menos um ponto fixo a_i, com $i \in IN$.

Seja ainda $f_0 : X \to X$ uma contracção de razão k_0 com um ponto fixo a_0.

Se $(f_i)_{i \in IN}$ convergir uniformemente para f_0, então $(a_i)_{i \in IN}$ converge para a_0.

Demonstração Seja $\varepsilon > 0$. Uma vez que, por hipótese, $(f_i)_{i \in IN}$ converge uniformemente para f_0, existe $N \in IN$ tal que,

$$\forall i \geq N : d(f_i(x), f_0(x)) < \varepsilon(1-k_0), \forall x \in X$$

Logo, para $i \geq N$,

$$d(a_i, a_0) = d(f_i(a_i), f_0(a_0)) \leq d(f_i(a_i), f_0(a_i)) + d(f_0(a_i), f_0(a_0)) <$$

$$< \varepsilon(1-k_0) + k_0 d(a_i, a_0)$$

ou seja

$$(1-k_0) d(a_i, a_0) < \varepsilon(1-k_0) \Leftrightarrow d(a_i, a_0) < \varepsilon$$

donde concluímos que $(a_i)_{i \in IN}$ converge para a_0, o que termina a demonstração do teorema. □

Teorema 1.4.3 Sejam (X,d) um espaço métrico localmente compacto (isto é, todos os pontos de X têm uma vizinhança compacta) e $f_i : X \to X$ uma família de contracções com ponto fixo a_i, com $i \in IN$.

Seja ainda $f_0 : X \to X$ uma contracção de razão k_0 com um ponto fixo a_0.

Se $(f_i)_{i \in IN}$ convergir pontualmente para f_0, então $(a_i)_{i \in IN}$ converge para a_0.

Demonstração Seja $\varepsilon > 0$. Uma vez que X é localmente compacto, a_0 tem uma vizinhança compacta V_0. Podemos supor que ε é suficientemente pequeno de modo que

$$D(a_0, \varepsilon) = \{x \in X : d(a_0, x) \leq \varepsilon\} \subseteq V_0$$

Como $D(a_0, \varepsilon)$ é um fechado e V_0 é compacto, concluímos que $D(a_0, \varepsilon)$ é também compacto.

Atendendo a que $(f_i)_{i\in IN}$ são equicontínuas (isto é,

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x, y \in X\, \forall f \in \{f_i : i \in IN\}: d(x,y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon\,)$$

convergindo pontualmente para f_0 e $D(a_0,\varepsilon)$ é compacto, afirmamos que $(f_i)_{i\in IN}$ converge uniformemente para f_0 em $D(a_0,\varepsilon)$.

De facto, pretende-se provar que, fixado $\gamma > 0$

$$\exists N \in IN\, \forall i \geq N : d(f_i(x), f_0(x)) < \gamma,\, \forall x \in D(a_0,\varepsilon)$$

- $(f_i)_{i\in IN}$ são equicontínuas, logo
$$\exists \delta > 0 : d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d(f_i(x), f_i(x_0)) < \gamma$$
(posso supor que $\delta < \gamma$);

- $\{B(x,\delta) : x \in D(a_0,\varepsilon)\}$ formam uma cobertura de $D(a_0,\varepsilon)$ e como $D(a_0,\varepsilon)$ é compacto, resulta que existem $x_1,\ldots,x_k$ tal que $D(a_0,\varepsilon) \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} B(x_i,\delta)$ (logo, $\forall x \in D(a_0,\varepsilon)\, \exists x_i : x \in B(x_i,\delta)$, isto é, $d(x,x_i) < \delta$);
- Além disso, para cada
$$j \in \{1,\ldots,k\}\, \exists n_j \in IN\, \forall i \geq n_j : d(f_i(x_j), f_0(x_j)) < \gamma$$

Portanto,

$$d(f_i(x), f_0(x)) \leq d(f_i(x), f_i(x_j)) + d(f_i(x_j), f_0(x_j)) + d(f_0(x_j), f_0(x)) <$$

$$< \gamma + \gamma + k_0\, d(x_j, x) < 2\gamma + k_0\gamma = \gamma(2 + k_0)$$

provando assim o pretendido.

Seja $N \in IN$ tal que $\forall i \geq N$

$$d(f_i(x), f_0(x)) < (1 - k_0)\varepsilon,\, \forall x \in D(a_0,\varepsilon)$$

Logo, $\forall x \in D(a_0,\varepsilon)$,

$$d(f_i(x), a_0) \leq d(f_i(x), f_0(x)) + d(f_0(x), f_0(a_0)) <$$

$$< (1 - k_0)\varepsilon + k_0\, d(x, a_0) \leq (1 - k_0)\varepsilon + k_0\, \varepsilon = \varepsilon$$

Concluímos então que $\forall i \geq N$

$$f_i(D(a_0,\varepsilon)) \subseteq D(a_0,\varepsilon)$$

Para $i \geq N$, seja

$$\begin{array}{rccc} g_i : & D(a_0,\varepsilon) & \rightarrow & D(a_0,\varepsilon) \\ & x & \mapsto & f_i(x) \end{array}$$

É obvio que g_i é uma contracção e como $D(a_0,\varepsilon)$ é compacto (logo completo), resulta que g_i tem um ponto fixo b_i. Mas então b_i também é um ponto fixo de f_i, e como f_i é uma contracção, $b_i = a_i$.

Provamos assim que, para $i \geq N$, $a_i \in D(a_0,\varepsilon)$. Como no disco $D(a_0,\varepsilon)$, $(f_i)_{i\in IN}$ converge uniformemente para f_0, pelo teorema anterior, $(a_i)_{i\in IN}$ converge para a_0, o que conclui a demonstração do teorema. $\square$

De seguida exibiremos um exemplo de uma sucessão de contracções, convergindo para uma contracção.

Exemplo 1.4.4 Sejam

$$\begin{array}{rccc} f_n: & [1,+\infty[& \to & [1,+\infty[\\ & x & \mapsto & e^{-x}+1+\dfrac{1}{n} \end{array}$$

- f_n está bem definida, $\forall n \in IN$, pois $f_n(x) \geq 1, \forall x \in [1,+\infty[$, $\forall n \in IN$, uma vez que $e^{-x} > 0$ e $\dfrac{1}{n} > 0$.

- $\forall n \in IN$, f_n é uma contracção de razão de contracção $\dfrac{1}{e}$.

$$|f_n'(x)| = e^{-x} \leq \frac{1}{e} < 1$$

Portanto, $\forall n \in IN$, f_n tem um único ponto fixo a_n.

Facilmente se verifica que $(f_n)_{n\in IN}$ converge pontualmente para

$$\begin{array}{rccc} f_0: & [1,+\infty[& \to & [1,+\infty[\\ & x & \mapsto & e^{-x}+1 \end{array}$$

e que f_0 é uma contracção de razão de contracção $\dfrac{1}{e}$. Seja a_0 o ponto fixo de f_0.

Pelo teorema 1.4.1, a sucessão $(a_n)_{n\in IN}$ de pontos fixos de $(f_n)_{n\in IN}$ converge para o ponto fixo de f_0, a_0.

Note-se que os teoremas 1.4.2 e 1.4.3 também são válidos neste exemplo, uma vez que $(f_n)_{n\in IN}$ converge uniformemente para f_0 e que $[1,+\infty[$ é localmente compacto.

Sejam X e Y dois espaços métricos não vazios, munidos das métricas d_x e d_y, respectivamente.

Considere-se agora o conjunto $X \times Y$, munido da métrica produto d, definida por:

- dados $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in X \times Y$
$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \sqrt{d_x^2(x_1,x_2) + d_y^2(y_1,y_2)}$$

Uma função $f : X \times Y \to X \times Y$ diz-se uma contracção em relação à primeira variável se
$$\forall y \in Y\ \exists k(y) \in]0,1[: d(f(x_1,y),f(x_2,y)) \leq k(y)d((x_1,y),(x_2,y)),\ \forall x_1,x_2 \in X$$

De modo análogo podemos definir contracção em relação à segunda variável.

Finalmente, uma função diz-se ser uma contracção para cada variável separadamente se é uma contracção em relação à primeira e segunda variável.

Definição 1.4.5 Seja T um espaço topológico não vazio. Diz-se que T tem a *propriedade do ponto fixo* se toda a aplicação contínua de T em T tem um ponto fixo.

Por exemplo,
$$D(0,1) = \{x \in IR^n : d(x,0) \leq 1\}$$
tem a propriedade do ponto fixo (Teorema do ponto fixo de Brouwer).

O seguinte teorema deve-se a S. Nadler ([26]).

Teorema 1.4.6 Sejam (X,d_x) um espaço métrico completo e (Y,d_y) um espaço métrico com a propriedade do ponto fixo.
Seja ainda $f : X \times Y \to X \times Y$ uma aplicação.

1. Se f é uniformemente contínua em $X \times Y$ e se é uma contracção em relação à primeira variável, então f tem um ponto fixo.
2. Se X é localmente compacto, f é contínua em $X \times Y$ e se é uma contracção em relação à primeira variável, então f tem um ponto fixo.

Demonstração Provemos 1 e 2 em simultâneo.

Para cada $y \in Y$, definimos $f_y : X \to X$ dada por $f_y(x) = \pi_1 \circ f(x,y)$, para $x \in X$, onde π_1 é a projecção natural de $X \times Y$ em X.

Para cada $y \in Y$, f_y é uma contracção e uma vez que X é completo, f_y tem um único ponto fixo.

Seja
$$\begin{array}{rccc} F: & Y & \to & X \\ & y & \mapsto & F(y) \end{array}$$
onde $F(y)$ é o único ponto fixo de f_y.

Tome-se $y_0 \in Y$. Vejamos que F é contínua em y_0. Para tal, considere-se uma sucessão em *Y*, $(y_n)_{n\in IN}$, convergindo para y_0.

- Por 1, $(f_{y_n})_{n\in IN}$ converge uniformemente para f_{y_0}. Pelo teorema 1.4.2, $(F(y_n))_{n\in IN}$ converge para $F(y_0)$;
- Por 2, uma vez que *f* é contínua, logo $(f_{y_n})_{n\in IN}$ converge pontualmente para f_{y_0}, e como X é localmente compacto, pelo teorema 1.4.3, $(F(y_n))_{n\in IN}$ converge para $F(y_0)$.

Em ambos os casos, concluímos que $(F(y_n))_{n\in IN}$ converge para $F(y_0)$, isto é, F é contínua em *Y*.

Seja agora $G: Y \to Y$ dada por:

$$G(y) = \pi_2 \circ f(F(y), y)$$

onde π_2 é a projecção natural de $X \times Y$ em *Y*.

G é contínua porque π_2, F e *f* o são. Além disso, por hipótese, *Y* tem a propriedade do ponto fixo. Logo G tem um ponto fixo, isto é,

$$\exists y_0 \in Y : G(y_0) = y_0 \Leftrightarrow \pi_2 \circ f(F(y_0), y_0) = y_0$$

Mas $F(y_0)$ é o único ponto fixo de f_{y_0}, isto é,

$$f_{y_0}(F(y_0)) = F(y_0) \Leftrightarrow \pi_1 \circ f(F(y_0), y_0) = F(y_0)$$

donde se conclui que

$$(F(y_0), y_0) = (\pi_1 \circ f(F(y_0), y_0), \pi_2 \circ f(F(y_0), y_0)) \Leftrightarrow (F(y_0), y_0) = f(F(y_0), y_0)$$

portanto $(F(y_0), y_0)$ é um ponto fixo de *f*, o que conclui a demonstração. □

2. OUTROS TEOREMAS DE PONTO FIXO PARA CERTAS CLASSES DE FUNÇÕES

No capítulo anterior tratamos unicamente de contracções e vimos condições suficientes para garantir a existência de um único ponto fixo para tais funções. Iremos agora estudar outros tipos de funções: as funções fracamente contractivas e as não-expansivas. Veremos que a completude do espaço métrico X não é suficiente para garantir a existência de um ponto fixo. Teremos portanto de adicionar algumas hipóteses quer ao espaço métrico quer à função estudada.

1. FUNÇÕES FRACAMENTE CONTRACTIVAS

Neste capítulo será enfraquecido o conceito de contracção, ao definirmos função fracamente contractiva, como se apresenta de seguida:

Definição 2.1.1 Sejam (X,d) um espaço métrico e $f: X \to X$ uma aplicação.
f diz-se *fracamente contractiva* se, para quaisquer $p, q \in X$, com $p \neq q$,

$$d(f(p), f(q)) < d(p,q)$$

Note-se que qualquer contracção é fracamente contractiva. O recíproco é falso. Observe-se também que qualquer aplicação fracamente contractiva é contínua.

Além disso, o teorema do ponto fixo de Banach é falso se substituirmos uma contracção por uma aplicação fracamente contractiva, como o exemplo seguinte mostra.

Exemplo 2.1.2 Seja

$$\begin{array}{cccc} f: & IR_0^- & \to & IR_0^- \\ & x & \mapsto & x - e^x \end{array}$$

f está bem definida uma vez que $f(x) < x$, portanto $f\left(IR_0^-\right) \subseteq IR_0^-$.
Vejamos que f é fracamente contractiva. Para tal, mostremos que $|f'(x)| < 1$.

$$0 \leq f'(x) = 1 - e^x < 1$$

Note-se que não é possível garantir que f seja uma contracção, uma vez que $\lim_{x \to -\infty} f'(x) = 1$ e, pelo teorema do valor médio, $d(f(x), f(y)) = f'(\zeta) d(x,y)$, logo, para $x \neq y$

$$\lim_{x,y \to -\infty} \frac{d(f(x), f(y))}{d(x,y)} = 1$$

Portanto, f é uma aplicação fracamente contractiva definida num espaço métrico completo e, no entanto, f não tem pontos fixos.

Contudo, em determinadas condições, pode-se garantir a existência e unicidade de um ponto fixo em aplicações fracamente contractivas, como mostra o seguinte teorema de M. Edelstein ($[12]$):

Teorema 2.1.3 Sejam (X,d) um espaço métrico e $f : X \to X$ uma função fracamente contractiva tal que, para um dado $x \in X$, a sucessão $\left(f^n(x)\right)_{n\in IN}$ tem uma subsucessão convergente. Seja z o seu limite.
Então z é o único ponto fixo de f.

Demonstração Suponhamos, por redução ao absurdo, que $f(z) \neq z$.

Como $f^{n_i}(x) \underset{i\to\infty}{\to} z$, então $f^{n_i+1}(x) = f\left(f^{n_i}(x)\right) \underset{i\to\infty}{\to} f(z)$, pois f é uma aplicação contínua.

Seja

$$Y = \{(p,q) \in X \times X : p \neq q\}$$

subespaço de $X \times X$ e $r : Y \to IR$ a aplicação contínua definida por

$$r(p,q) = \frac{d(f(p), f(q))}{d(p,q)}.$$

r está bem definida pois $d(p,q) \neq 0, \forall (p,q) \in Y$.

Como $(z, f(z)) \in Y$, r é contínua e $r(z, f(z)) = \dfrac{d\left(f(z), f^2(z)\right)}{d(z, f(z))} < 1$ (pois f é fracamente contractiva), existem uma vizinhança U de $(z, f(z))$ em Y e $0 < R < 1$ tais que, para todo $(p,q) \in U$, $0 \leq r(p,q) < R < 1$.

Sejam $B_1 = B(z, \rho)$ e $B_2 = B(f(z), \rho)$ as bolas abertas centradas em z e $f(z)$, respectivamente, de raio $\rho > 0$, com ρ suficientemente pequeno de modo que $\rho < \frac{1}{3} d(z, f(z))$ (o que implica que $B_1 \cap B_2 = \varnothing$) e $B_1 \times B_2 \subseteq U$.

Como $f^{n_i}(x) \underset{i\to\infty}{\to} z$, existe $N \in IN$ tal que, para todo $i > N$, $f^{n_i}(x) \in B_1$ e sendo f fracamente contractiva, resulta que

$$d\left(f^{n_i+1}(x), f(z)\right) \leq d\left(f^{n_i}(x), z\right) < \rho,$$

isto é, $f^{n_i+1}(x) \in B_2$.

Uma vez que

- $f^{n_i}(x) \in B_1$
- $f^{n_i+1}(x) \in B_2$
- $\rho < \frac{1}{3} d(z, f(z))$

conclui-se que

$$d\left(f^{n_i}(x), f^{n_i+1}(x)\right) > \rho, \forall i > N. \qquad \textbf{(1)}$$

Por outro lado, para $i > N$,

$$d\left(f^{n_i+1}(x), f^{n_i+2}(x)\right) = r\left(f^{n_i}(x), f^{n_i+1}(x)\right) d\left(f^{n_i}(x), f^{n_i+1}(x)\right) < R\, d\left(f^{n_i}(x), f^{n_i+1}(x)\right)$$

pois $\left(f^{n_i}(x), f^{n_i+1}(x)\right) \in U$.

Sejam agora $k > j > N$. Pelo facto de f ser fracamente contractiva e da desigualdade anterior, obtém-se:

$$d\left(f^{n_k}(x), f^{n_k+1}(x)\right) \leq d\left(f^{n_{k-1}+1}(x), f^{n_{k-1}+2}(x)\right) < Rd\left(f^{n_{k-1}}(x), f^{n_{k-1}+1}(x)\right) \leq \ldots \leq$$

$$\leq R^{k-j} d\left(f^{n_j}(x), f^{n_j+1}(x)\right) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

o que contradiz **(1)**.

Portanto $f(z) = z$.

Vejamos agora que z é o único ponto fixo de f. Se existisse $z' \in X$ com $f(z') = z'$ e $z' \neq z$, então $d(z, z') = d(f(z), f(z')) < d(z, z')$, o que é absurdo.

Conclui-se assim a demonstração do teorema. □

Corolário 2.1.4 ([12]) Sejam (X, d) um espaço métrico compacto e $f : X \to X$ uma função fracamente contractiva, então existe um único ponto fixo de f em X.

Demonstração Basta atender a que, se X é um espaço métrico compacto, então para qualquer $x \in X$, $\left(f^n(x)\right)_{n\in IN}$ tem uma subsucessão convergente. □

Corolário 2.1.5 ([12]) Suponhamos que as condições do teorema 2.1.3 são satisfeitas. Então $\left(f^n(x)\right)_{n\in IN}$ converge para o único ponto fixo de f.

Demonstração Pelo teorema anterior, $\lim\limits_{i\to\infty} f^{n_i}(x) = z$, isto é,

$$\forall \delta > 0\, \exists N_0 \in \mathrm{IN}\, \forall i \geq N_0 : d\left(z, f^{n_i}(x)\right) < \delta$$

Seja agora $m = n_{N_0} + l$ (n_{N_0} fixo, $l \in IN$ variável).

Resulta então que

$$d\left(z, f^m(x)\right) = d\left(f^l(z), f^{n_{N_0}+l}(x)\right) \leq d\left(z, f^{n_{N_0}}(x)\right) < \delta$$

(na igualdade usou-se o facto de z ser ponto fixo de f), o que prova que $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x) = z$. □

Corolário 2.1.6 Sejam (X,d) um espaço métrico compacto e $f: X \to X$ uma função fracamente contractiva. Então f tem um único ponto fixo z e $\forall x \in X: \left(f^n(x)\right)_{n\in IN}$ converge para z.

Demonstração Pelo corolário 2.1.4, $\forall x \in X$, $\left(f^n(x)\right)_{n\in IN}$ tem uma subsucessão convergente para z, sendo z o único ponto fixo de f.

Pelo corolário 2.1.5, $\left(f^n(x)\right)_{n\in IN}$ converge para z. □

Corolário 2.1.7 Seja $f: IR^n \to IR^n$ uma função fracamente contractiva, IR^n munido da métrica usual. Suponhamos ainda que existe $x \in IR^n$ tal que $\left(f^n(x)\right)_{n\in IN}$ tem uma subsucessão convergente para $z \in IR^n$.

Então z é ponto fixo e $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(y) = z, \forall y \in IR^n$.

Demonstração Basta demonstrar a última afirmação. Seja então z o ponto fixo de f e $y \in IR^n$ um ponto qualquer.

Como

$$d(f^n(y), z) = d(f^n(y), f^n(z)) \le d(y,z), \forall n \in IN$$

decorre que

$$f^n(y) \in D\left(z, \|z-y\|\right)$$

Como $D\left(z, \|z-y\|\right)$ é compacto, o resultado segue da aplicação directa dos corolários 2.1.4 e 2.1.5. □

Note-se que o corolário anterior é válido em espaços métricos para os quais a aderência de bolas seja compacta (por exemplo, qualquer espaço vectorial normado de dimensão finita).

Observação 2.1.8

(1) A completude do espaço X não é suficiente para garantir que uma função fracamente contractiva tenha um ponto fixo. Basta atender ao exemplo 2.1.2 (neste exemplo $\left(f^n(x)\right)_{n\in IN}$ diverge para $-\infty, \forall x \in IR_0^-$).

(2) Dada uma contracção f de X em X, onde (X,d) é um espaço métrico, para garantir que f tenha um ponto fixo basta que exista $x \in X$ tal que a sucessão de iterados de x por f tenha uma subsucessão convergente (não é exigido que X seja um espaço métrico completo).

Exemplo 2.1.9 Seja

$$f: \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \to \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$
$$x \to \cos x$$

Atendendo a que

$$f': \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \to \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$
$$x \to -\operatorname{sen} x$$

resulta que $|f'(x)| < 1, \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$. Portanto, pelo teorema do valor médio, f é fracamente contractiva.

No entanto, não se pode garantir que f seja uma contracção pois não existe $k \in]0,1[: |f'(x)| \leq k$. De facto, f não é contracção já que

$$\lim_{x \to \frac{\pi^-}{2}} \frac{d\left(f(x), f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)}{d\left(x, \frac{\pi}{2}\right)} = \lim_{x \to \frac{\pi^-}{2}} \frac{\cos x}{\left|x - \frac{\pi}{2}\right|} = 1$$

Tome-se agora, por exemplo, $x = \frac{\pi}{4}$ e considere-se $\left(f^n\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)_{n \in IN}$ os iterados de x por f.

Como $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ é compacto e

$$\left(f^n\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)_{n \in IN} \subseteq \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$

resulta que $\left(f^n\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)_{n \in IN}$ tem alguma subsucessão convergente.

Pelo teorema anterior, $\left(f^n\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)_{n \in IN}$ converge para x_0, onde x_0 é o ponto fixo de f.

Definição 2.1.10 Sejam (X,d) um espaço métrico, $f : X \to X$ uma aplicação e $\varepsilon > 0$.

f diz-se *ε - fracamente contractiva* se, para quaisquer $p, q \in X$, com $p \neq q$ e $d(p,q) < \varepsilon$

$$d(f(p), f(q)) < d(p,q)$$

Exemplo 2.1.11 Considere-se a função

$$\begin{array}{rccc} f: & [1,+\infty[& \to & [1,+\infty[\\ & x & \mapsto & x+e^{-x}-\varepsilon \end{array}$$

onde $\varepsilon = e^{-x_0}$, com $x_0 > 1$.

É claro que $f(x) = x \Leftrightarrow x = x_0$ e que $f'(x) = 1 - e^{-x} \in]0,1[$.

Atendendo a que $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 1$ decorre que, para a métrica usual, f é fracamente contractiva.

Também se tem que $\lim\limits_{n \to \infty} f^n(x) = x_0, \ \forall x \in [1,+\infty[$.

Considere-se agora $k \in IN, \ k \geq 2$ e seja

$$X = \bigcup_{j=0}^{k-1} \{(x,j) \in IR^2 : x \geq 1\}$$

com a métrica induzida pela métrica usual de IR^2.

Seja

$$\begin{array}{rccc} F: & X & \to & X \\ & (x,j) & \mapsto & (f(x),(j+1)\operatorname{mod} k) \end{array}$$

F não é fracamente contractiva já que

$$d(F(x,1),F(x,0)) = d((f(x),2\operatorname{mod} k),(f(x),1\operatorname{mod} k)) = 1 = d((x,1),(x,0))$$

No entanto, F é ε - fracamente contractiva para $\varepsilon \leq 1$ já que

$$d((x,i),(y,j)) < \varepsilon \leq 1 \Rightarrow i = j$$

Assim

$$d(F(x,i),F(y,i)) = d'(f(x),f(y)) < d'(x,y) = d((x,i),(y,i))$$

onde d' representa a métrica usual em IR.

Da construção decorre que o ponto $(x_0,0)$ é periódico de período k, isto é,

$$F^k(x_0,0) = (x_0,0) \text{ e } F^j(x_0,0) \neq (x_0,0), \text{ para } j \in \{1,\ldots,k-1\},$$

e que

$$\forall x > 1, \ \lim_{n \to \infty} F^{nk}(x,0) = (x_0,0)$$

No exemplo anterior, todas as afirmações resultam imediatamente da construção. No entanto, a existência de um ponto periódico para uma função ε - fracamente contractiva é um facto mais geral, como estabelece o seguinte teorema ([12]).

Teorema 2.1.12 Sejam (X,d) um espaço métrico e $f: X \to X$ uma função ε - fracamente contractiva tal que para um dado $x \in X$, a sucessão $\left(f^n(x)\right)_{n\in IN}$ tem uma subsucessão convergente para z. Então z é um ponto periódico de f, isto é, existe $k \in IN : f^k(z) = z$.

Demonstração Seja $x \in X$ tal que $f^{n_i}(x) \underset{i\to\infty}{\to} z$, logo

$$\exists N_1 \in \mathrm{IN}\ \forall i > N_1 : d\left(z, f^{n_i}(x)\right) < \frac{1}{4}\varepsilon.$$

Como $d\left(z, f^{n_i}(x)\right) < \frac{1}{4}\varepsilon < \varepsilon$ e f é ε - fracamente contractiva,

$$d\left(f(z), f^{n_i+1}(x)\right) = d\left(f(z), f\left(f^{n_i}(x)\right)\right) \leq d\left(z, f^{n_i}(x)\right) < \frac{1}{4}\varepsilon.$$

Portanto, $d\left(f(z), f^{n_i+1}(x)\right) < \frac{1}{4}\varepsilon$.

Iterando sucessivamente, conclui-se que

$$d\left(f^{n_{i+1}-n_i}(z), f^{n_{i+1}}(x)\right) < \frac{1}{4}\varepsilon,$$

logo

$$d\left(z, f^{n_{i+1}-n_i}(z)\right) \leq d\left(z, f^{n_{i+1}}(x)\right) + d\left(f^{n_{i+1}}(x), f^{n_{i+1}-n_i}(z)\right) < \frac{1}{4}\varepsilon + \frac{1}{4}\varepsilon = \frac{1}{2}\varepsilon$$

Seja agora $k = n_{i+1} - n_i$. Por conseguinte, $d\left(z, f^k(z)\right) < \frac{1}{2}\varepsilon$.

Vejamos que $f^k(z) = z$. Por redução ao absurdo, vamos supor que $z' = f^k(z) \neq z$.

Sejam Y o conjunto e r a aplicação definidos no teorema 2.1.3. Uma vez que $z' \neq z$, resulta que $(z,z') \in Y$ e r é contínua em (z,z').

$$r(z,z') = \frac{d(f(z), f(z'))}{d(z,z')} < 1$$

pois f é ε - fracamente contractiva e $d(z,z') = d\left(z, f^k(z)\right) < \frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon$

Logo existe uma vizinhança U de (z,z') em Y e existe $R < 1$ tais que, para todo $(p,q) \in U$, $0 \leq r(p,q) < R < 1$.

Sejam $B_1 = B(z,\rho)$ e $B_2 = B(z',\rho)$ as bolas abertas centradas em z e z', respectivamente, de raio $\rho > 0$, com ρ suficientemente pequeno de modo que $\rho < \frac{1}{3}d(z,z') < \frac{1}{6}\varepsilon$ e $B_1 \times B_2 \subseteq U$.

Como $f^{n_i}(x) \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} z$, existe $N_2 \in IN$ tal que, para todo $j > N_2$, $f^{n_j}(x) \in B_1$, isto é, $d\left(f^{n_j}(x), z\right) < \rho < \varepsilon$.

Por hipótese, f é ε - fracamente contractiva, logo

$$d\left(f^{n_j+1}(x), f(z)\right) \leq d\left(f^{n_j}(x), z\right) < \rho < \varepsilon.$$

Iterando sucessivamente, conclui-se que

$$d\left(f^{n_j+k}(x), z'\right) = d\left(f^{n_j+k}(x), f^k(z)\right) < \rho$$

isto é, $f^{n_j+k}(x) \in B_2$. Portanto

$$\left(f^{n_j}(x), f^{n_j+k}(x)\right) \in B_1 \times B_2 \subseteq U$$

Assim sendo

$$r\left(f^{n_j}(x), f^{n_j+k}(x)\right) < R,$$

isto é,

$$d\left(f^{n_j+1}(x), f^{n_j+k+1}(x)\right) < Rd\left(f^{n_j}(x), f^{n_j+k}(x)\right).$$

Seja $l > j > N_2$ ($\Rightarrow l-1 > N_2$). Por conseguinte

$$\left(f^{n_{l-1}}(x), f^{n_{l-1}+k}(x)\right) \in B_1 \times B_2.$$

Como $d(z, z') < \frac{1}{2}\varepsilon$, resulta que

$$d\left(f^{n_{l-1}}(x), f^{n_{l-1}+k}(x)\right) < \varepsilon.$$

Uma vez que f é ε - fracamente contractiva,

$$d\left(f^{n_{l-1}+1}(x), f^{n_{l-1}+k+1}(x)\right) \leq d\left(f^{n_{l-1}}(x), f^{n_{l-1}+k}(x)\right) < \varepsilon$$

Novamente, iterando sucessivamente, conclui-se que

$$d\left(f^{n_l}(x), f^{n_l+k}(x)\right) \leq d\left(f^{n_{l-1}+1}(x), f^{n_{l-1}+k+1}(x)\right) < Rd\left(f^{n_{l-1}}(x), f^{n_{l-1}+k}(x)\right) <$$

$$< \ldots < R^{l-j} d\left(f^{n_j}(x), f^{n_j+k}(x)\right)$$

que converge para zero, quando $l \to +\infty$, o que contradiz o facto de $\rho < \frac{1}{3}d(z, z')$.

Portanto, $f^k(z) = z$, o que conclui a demonstração. □

Observação 2.1.13 Na demonstração do teorema anterior, foi fixado $n_i > n_{N_1}$ e definiu-se $k = n_{i+1} - n_i$. Como $f^k(z) = z$ decorre que o período de z, s, divide k. Logo, $\forall i > N_1$, tem-se que s divide $(n_{i+1} - n_i)$.

O próximo corolário é consequência do teorema anterior.

Corolário 2.1.14 ([12]) Sejam (X,d) um espaço métrico compacto e $f : X \to X$ uma função ε - fracamente contractiva.

Então f tem pelo menos um ponto periódico.

Sob certas condições pode-se mesmo garantir que o ponto z, limite da sucessão, é um ponto fixo:

Corolário 2.1.15 ([12]) Suponha-se que, nas condições do teorema anterior, $d(z, f(z)) < \varepsilon$. Então z é um ponto fixo.

Demonstração Por redução ao absurdo, suponhamos que $f(z) \neq z$. Assim sendo, resulta que

(a) $d\left(f^k(z), f^{k+1}(z)\right) = d(z, f(z)) < \varepsilon$

(b) f é ε - fracamente contractiva, logo

$$d\left(f(z), f^2(z)\right) < d(z, f(z)) < \varepsilon$$

Continuando a iterar, conclui-se que

$$d\left(f^k(z), f^{k+1}(z)\right) < d(z, f(z))$$

o que é absurdo.

Portanto, $f(z) = z$, isto é, z é um ponto fixo de f. □

2. FUNÇÕES NÃO – EXPANSIVAS

Iremos agora enfraquecer ainda mais o conceito de contracção, ao permitir que k possa ser igual a 1.

Definição 2.2.1 Sejam (X,d) um espaço métrico e $f: X \to X$ uma aplicação. f diz-se *não – expansiva* se

$$d(f(x),f(y)) \leq d(x,y), \ \forall x,y \in X$$

Note-se que quaisquer contracções ou funções fracamente contractivas são, em particular, não - expansivas. O recíproco é obviamente falso (basta tomar $f(x)=x+1$, com $x \in IR$).

O seguinte teorema é uma aplicação imediata do teorema do ponto fixo de Banach, onde é garantido que uma função não – expansiva que envie o disco unitário em si próprio tem um ponto fixo.

Teorema 2.2.2 ([8], pag 83) Sejam $D=\{x \in IR^n : \|x\| \leq 1\}$ e $f: D \to D$ uma aplicação não – expansiva. Então f tem pelo menos um ponto fixo.

Demonstração Para cada $n \in IN$ considere-se

$$F_n(x)=\left(1-\frac{1}{n}\right)f(x)$$

que envia D em D, já que

$$\|F_n(x)\| = \left(1-\frac{1}{n}\right)\|f(x)\| < \|f(x)\| \leq 1.$$

Vejamos que F_n é uma contracção, para todo $n \in IN$.

$$\|F_n(x)-F_n(y)\| = \left\|\left(1-\frac{1}{n}\right)f(x)-\left(1-\frac{1}{n}\right)f(y)\right\| = \left(1-\frac{1}{n}\right)\|f(x)-f(y)\| \leq \left(1-\frac{1}{n}\right)\|x-y\|$$

Portanto, tomando $k=1-\dfrac{1}{n}<1, \ \forall n \in IN$, resulta que

$$\|F_n(x)-F_n(y)\| \leq k\,\|x-y\|$$

isto é, F_n é uma contracção, para todo $n \in IN$.

Como D é um espaço métrico completo, $F_n(D) \subseteq D$ e F_n é contracção, pelo teorema do ponto fixo de Banach, resulta que F_n tem um único ponto fixo x_n, isto é,

$$F_n(x_n) = x_n \Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{n}\right) f(x_n) = x_n .$$

Uma vez que D é compacto e $(x_n)_{n \in IN} \subseteq D$, então $(x_n)_{n \in IN}$ possui uma subsucessão $(x_{n_i})_{i \in IN}$ convergente para $x_0 \in D$.

Logo, como $\left(1 - \frac{1}{n_i}\right) f(x_{n_i}) = x_{n_i}$ e f é contínua (pois é não – expansiva),

$$x_0 = \lim_{i \to \infty} x_{n_i} = \lim_{i \to \infty} \left(1 - \frac{1}{n_i}\right) f(x_{n_i}) = f(x_0)$$

conclui-se que

$$f(x_0) = x_0$$

Portanto, x_0 é ponto fixo de f, o que conclui a demonstração. □

É obvio que não se pode afirmar que o ponto fixo seja único (basta tomar $f : D \to D$ dada por $f(x) = x$).

O próximo teorema generaliza o teorema anterior:

Teorema 2.2.3 ([18], pag 98)) Sejam B um espaço de Banach, $K \subseteq B$ um subconjunto fechado, convexo e limitado e $f : K \to K$ uma aplicação não – expansiva.

Se $(f - I)(K)$ é um subconjunto fechado de B, onde I representa a função identidade, então f tem um ponto fixo em K.

Demonstração Podemos supor que $0 \in K$ (caso contrário consideramos $K - x_0, x_0 \in K$ e $f(x + x_0) - x_0$). Como K é limitado existe $r > 0$ tal que K está contido numa bola de centro 0 e raio r.

Sejam $(t_n)_{n \in IN}$ uma sucessão de reais positivos menores que 1, convergindo para 1, e

$$\begin{array}{rccc} f_n : & K & \to & K \\ & x & \mapsto & t_n f(x) \end{array}$$

f_n está bem definida pois K é convexo, $t_n \in]0,1[$, 0 e $f(x) \in K$, logo

$$t_n f(x) + (1 - t_n) 0 = t_n f(x) \in K$$

Vejamos que $\forall n \in IN$, f_n é contracção.

Para $x, y \in K$,

$$\|f_n(x) - f_n(y)\| = t_n \|f(x) - f(y)\| \leq t_n \|x - y\|$$

com $t_n \in]0,1[$.

Logo f_n é uma contracção definida num espaço métrico completo K.

Pelo teorema do ponto fixo de Banach, cada f_n tem um único ponto fixo $x_n \in K$.

Atendendo a que

$$\|f(x_n) - x_n\| = \|f(x_n) - t_n f(x_n)\| = (1 - t_n)\|f(x_n)\| \leq (1 - t_n)r$$

e que $t_n \underset{n \to \infty}{\to} 1$, concluímos que

$$\|f(x_n) - x_n\| = \|(f - I)(x_n)\| \underset{n \to \infty}{\to} 0.$$

Como $(f - I)(K)$ é fechado, decorre que $0 \in (f - I)(K)$ e portanto

$$\exists x_0 \in K : (f - I)(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = x_0$$

o que prova o pretendido. $\square$

O teorema seguinte garante a existência de um ponto fixo para determinadas aplicações não – expansivas.

Começaremos por apresentar algumas definições necessárias para o próximo teorema.

Definição 2.2.4 Sejam (X,d) um espaço métrico e $A \subseteq X$ um subconjunto não vazio.

O *diâmetro de* A, $\delta(A)$, é dado por $\sup\{d(x,y); x, y \in A\}$.

A diz-se limitado se $\delta(A) < +\infty$

Definição 2.2.5 Sejam X um conjunto não vazio e $f : X \to X$ uma aplicação.

Para cada $x \in X$ e $n \in IN_0$, a órbita de $f^n(x)$ por f é

$$O(f^n(x)) = \{f^i(x), i \geq n\}.$$

Sejam (X,d) um espaço métrico e $f : X \to X$ uma aplicação. Observe-se que para $n > m$, $O(f^n(x)) \subseteq O(f^m(x))$, portanto $\delta(O(f^n(x))) \leq \delta(O(f^m(x)))$, isto é, a sucessão de números reais não negativos $(\delta(O(f^n(x))))_{n \in IN}$ é decrescente, logo convergente.

Seja $r(x) = \lim\limits_{n \to \infty} \delta(O(f^n(x))) \geq 0$; observe-se que se pode ter $r(x) = +\infty$ e que $r(x) = r(f(x)), \forall x \in X$.

A $r(x)$ chama-se o *limite do diâmetro da órbita* de f em x.

Observação 2.2.6 Suponha-se que $f:(X,d)\to(X,d)$ é não – expansiva. Então

$$\forall x\in X\ \forall k\in IN_0 : \delta\left(O\left(f^k(x)\right)\right)=\sup_{\substack{n\in IN\\ n>k}} d\left(f^k(x),f^n(x)\right)$$

De facto, fixados $n>m\geq k$, observe-se que

$$d\left(f^n(x),f^m(x)\right)=d\left(f^{m-k}\left(f^{n-m+k}(x)\right),f^{m-k}\left(f^k(x)\right)\right)\leq$$

$$\leq d\left(f^{n-m+k}(x),f^k(x)\right)\leq \sup_{\substack{j\in IN\\ j>k}} d\left(f^j(x),f^k(x)\right)\leq \delta\left(O\left(f^k(x)\right)\right)$$

Portanto, como

$$\delta\left(O\left(f^k(x)\right)\right)=\sup_{n,m\geq k} d\left(f^n(x),f^m(x)\right)\leq \delta\left(O\left(f^k(x)\right)\right)$$

temos que

$$\sup_{\substack{j\in IN\\ j>k}} d\left(f^j(x),f^k(x)\right)=\delta\left(O\left(f^k(x)\right)\right).$$

Definição 2.2.7 Sejam (X,d) um espaço métrico e $f:X\to X$ uma aplicação.

Diz-se que f tem *diâmetro de órbita decrescente* se

$$r(x)<\delta(O(x)),\ \forall x\in X \text{ desde que } \delta(O(x))>0.$$

Observe-se que $\delta(O(x))=0$ sse x é ponto fixo de f. Por outro lado, se f tem diâmetro de órbita decrescente, então $\delta(O(x))$ é finito, $\forall x\in X$.

Exemplo 2.2.8

(1) Seja

$$\begin{array}{rccc} f: & \left]0,\frac{1}{2}\right[& \to & \left]0,\frac{1}{2}\right[\\ & x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

Tem-se que

$$\forall x\in\left]0,\frac{1}{2}\right[,\ 0=r(x)<\delta(O(x))=x$$

(2) ([6]) Sejam (X,d) um espaço métrico, f e α aplicações de X em X tais que:

(a) $\forall x \in X$, $0 \leq \alpha(x) < 1$

(b) Fixado $x \in X$, para cada $y \in X$ tem-se $d(f(x), f(y)) \leq \alpha(x)\, d(x,y)$

Então, atendendo à observação 2.2.6,

$$\delta(O(f(x))) = \sup_{n \in IN} d\left(f(x), f^n(x)\right) \leq \sup_{n \in IN} \alpha(x) d\left(x, f^{n-1}(x)\right) = \alpha(x)\delta(O(x)).$$

Portanto, uma vez que $O\left(f^n(x)\right) \subseteq O(f(x))$, resulta que

$$r(x) = \lim_{n \to \infty} \delta\left(O\left(f^n(x)\right)\right) \leq \delta(O(f(x))) \leq \alpha(x)\delta(O(x)) < \delta(O(x))$$

se $\delta(O(x)) > 0$, e f tem diâmetro de órbita decrescente.

Seja agora $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) = x_0$.

Vejamos, por indução, que

$$d\left(x_0, f^n(x)\right) \leq (\alpha(x_0))^n d(x_0, x).$$

i) para $n = 1$, $d(x_0, f(x)) = d(f(x_0), f(x)) \leq \alpha(x_0) d(x_0, x)$

ii) suponhamos que a desigualdade é válida para $n-1$. Então

$$d\left(x_0, f^n(x)\right) = d\left(f(x_0), f\left(f^{n-1}(x)\right)\right) \leq \alpha(x_0) d\left(x_0, f^{n-1}(x)\right) \leq$$

$$\leq \alpha(x_0)(\alpha(x_0))^{n-1} d(x_0, x) = (\alpha(x_0))^n d(x_0, x)$$

Como $0 \leq \alpha(x) < 1$, $\forall x \in X$, concluímos que $\lim_{n \to \infty} f^n(x) = x_0$, isto é, a sucessão de iterados de x por f converge para o único ponto fixo de f.

Feita esta introdução, estamos preparados para apresentar o teorema principal desta secção, apresentado por L. Belluce e por W. Kirk, em ([6]).

Teorema 2.2.9 Sejam (X,d) um espaço métrico e $f : X \to X$ uma aplicação não – expansiva com diâmetro de órbita decrescente.

Suponha-se que existe $x \in X$ tal que a subsucessão $\left(f^{n_i}(x)\right)_{i \in IN}$ converge para $z \in X$.

Então z é um ponto fixo de f e $\left(f^n(x)\right)_{n \in IN}$ converge para z.

Demonstração

Por hipótese, $\lim_{k\to\infty} f^{n_k}(x) = z$.

Vejamos que z gera uma sequência isométrica, isto é,

$$\forall m,n \in IN \quad d\left(f^m(z), f^n(z)\right) = d\left(f^{m+k}(z), f^{n+k}(z)\right), \quad k = 1,2,\ldots$$

Para tal, recorreremos aos dois seguintes lemas (M. Edelstein, [14]):

Lema 1 Sejam (X,d) um espaço métrico e $f : X \to X$ uma função não – expansiva. Suponha-se que existe $x \in X$ tal que $\left(f^n(x)\right)_{n\in IN}$ contém uma subsucessão $\left(f^{n_i}(x)\right)_{i\in IN}$ convergente para $z \in X$. Então existem $(m_i)_{i\in IN}$ tal que $m_1 < m_2 < \ldots$, com $m_i \in IN$, e $\lim_{i\to\infty} f^{m_i}(z) = z$.

Demonstração Por hipótese, $\lim_{i\to\infty} f^{n_i}(x) = z$.

Se existir $m \in IN$ tal que $f^m(x) = z$, então tomando $m_i = n_i - m$ resulta que

$$\lim_{i\to\infty} f^{m_i}(z) = \lim_{i\to\infty} f^{n_i - m}\left(f^m(x)\right) = \lim_{i\to\infty} f^{n_i}(x) = z$$

o que prova o pretendido.

Suponha-se agora que $\forall m \in IN$, $f^m(x) \neq z$ e tome-se $\delta > 0$ (qualquer, mas fixo).

Uma vez que $\lim_{i\to\infty} f^{n_i}(x) = z$, existe $i = i(\delta)$ tal que

$$d\left(z, f^{n_{i+j}}(x)\right) < \frac{\delta}{4}, \quad j = 0,1,2,\ldots \tag{1}$$

Para tal i e $k = 1,2,\ldots$

$$d\left(f^{n_i}(x), f^{n_{i+k}}(x)\right) \leq d\left(z, f^{n_i}(x)\right) + d\left(z, f^{n_{i+k}}(x)\right) < \frac{\delta}{2} \tag{2}$$

De **(1)** (tomando $j = 0$) e atendendo que f é não – expansiva, resulta que

$$d\left(f^{n_{i+k}-n_i}(z), f^{n_{i+k}}(x)\right) \leq d\left(f^{n_{i+k}-n_i-1}(z), f^{n_{i+k}-1}(x)\right) \leq \ldots \leq d\left(z, f^{n_i}(x)\right) < \frac{\delta}{4} \tag{3}$$

Portanto, de **(1)**, **(2)** e **(3)** conclui-se que

$$d\left(z, f^{n_{i+1}-n_i}(z)\right) \leq d\left(z, f^{n_i}(x)\right) + d\left(f^{n_i}(x), f^{n_{i+1}}(x)\right) + d\left(f^{n_{i+1}}(x), f^{n_{i+1}-n_i}(z)\right) <$$

$$< \frac{\delta}{4} + \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{4} = \delta$$

Tome-se $m_1 = n_{i+1} - n_i$, então $d\left(z, f^{m_1}(z)\right) < \delta$.

Vamos agora construir a sucessão $(m_i)_{i \in IN}$ do seguinte modo:
Suponha-se que $n_{i_1} < n_{i_2} < \ldots < n_{i_k}$ já estão definidos tais que

$$m_j = n_{i_j+1} - n_{i_j},\ j \in \{1,\ldots,k\}$$

$$d\left(f^{m_j}(z), z\right) < \frac{\delta}{2^{j-1}}$$

Trocando em **(1)** $\frac{\delta}{4}$ por $\frac{\delta}{2^{k+2}}$ e escolhendo $n_{i_{k+1}} > n_{i_k}$ satisfazendo **(1)**, decorre que $m_{k+1} = n_{i_{k+1}+1} - n_{i_{k+1}}$ satisfaz

$$d\left(f^{m_{k+1}}(z), z\right) < \frac{\delta}{2^k}$$

Se $\lim_{k \to \infty} m_k \neq +\infty$, isto é,

$$\exists M > 0\ \forall p \in IN\ \exists k \geq p : m_k \leq M$$

(observe-se que os m_k's são inteiros positivos).

Portanto existem infinitos m_k's pertencentes ao conjunto $\{1,2,\ldots,M\}$, donde concluímos existirem uma infinidade de repetições:

$$m_{k_i} = s, \forall i \in IN$$

logo $d\left(f^{m_{k_i}}(z), z\right) = d\left(f^s(z), z\right) \underset{i \to \infty}{\to} 0$. Portanto $f^s(z) = z$ e o resultado é trivial com $m_k = ks$.

Se $\lim_{k \to \infty} m_k = +\infty$, basta considerar uma subsucessão injectiva.

Conclui-se assim a demonstração do lema 1. □

Lema 2 Sejam (X,d) um espaço métrico e $f: X \to X$ uma função não - expansiva. Suponha-se que existe $x \in X$ tal que $\left(f^n(x)\right)_{n \in IN}$ contém uma subsucessão $\left(f^{n_i}(x)\right)_{i \in IN}$ convergente para $z \in X$. Então z gera uma sucessão isométrica.

Demonstração Suponha-se, por redução ao absurdo, que existiam $m,n,k \in IN$ tais que

$$\delta = d\left(f^m(z), f^n(z)\right) - d\left(f^{m+k}(z), f^{n+k}(z)\right) \neq 0$$

Notemos que $\delta > 0$ porque

$$d\left(f^{m+k}(z), f^{n+k}(z)\right) \leq \ldots \leq d\left(f^m(z), f^n(z)\right)$$

Tome-se $l = k, k+1, \ldots$

Como f é não – expansiva

$$d\left(f^{m+l}(z), f^{n+l}(z)\right) \leq \ldots \leq d\left(f^{m+k}(z), f^{n+k}(z)\right)$$

portanto

$$d\left(f^{m}(z), f^{n}(z)\right) - d\left(f^{m+l}(z), f^{n+l}(z)\right) \geq \delta . \qquad \textbf{(4)}$$

Pelo lema anterior, existe uma sucessão $(n_i)_{i \in IN}$ tal que

$$\lim_{i \to \infty} f^{n_i}(z) = z$$

Portanto, $\forall l \in IN$

$$\lim_{i \to \infty} f^{n_i + l}(z) = \lim_{i \to \infty} f^{l}\left(f^{n_i}(z)\right) = f^{l}(z)$$

Seja então $j \in IN$ tal que $n_j \geq k$ e

$$d\left(f^{m+n_j}(z), f^{m}(z)\right) < \frac{\delta}{2}$$

$$d\left(f^{n+n_j}(z), f^{n}(z)\right) < \frac{\delta}{2}$$

Logo

$$d\left(f^{m}(z), f^{n}(z)\right) \leq d\left(f^{m}(z), f^{m+n_j}(z)\right) + d\left(f^{m+n_j}(z), f^{n+n_j}(z)\right) + d\left(f^{n+n_j}(z), f^{n}(z)\right) <$$

$$< \frac{\delta}{2} + d\left(f^{m+n_j}(z), f^{n+n_j}(z)\right) + \frac{\delta}{2} = \delta + d\left(f^{m+n_j}(z), f^{n+n_j}(z)\right)$$

o que contradiz **(4)**.

Portanto $\delta = 0$, o que conclui a demonstração do lema 2. □

Provamos assim, pelo lema 2, que z gera uma sequência isométrica.

Logo, para $k \in IN$,

$$\delta(O(f(z))) = \sup_{n \in IN} d\left(f(z), f^{n}(z)\right) = \sup_{n \in IN} d\left(f^{k+1}(z), f^{k+n}(z)\right) = \delta\left(O\left(f^{k+1}(z)\right)\right)$$

Por conseguinte,

$$r(z) = \lim_{k \to \infty} \delta\left(O\left(f^{k}(z)\right)\right) = \delta(O(f(z)))$$

Mas $r(z) = r(f(z))$, donde se conclui que $r(f(z)) = \delta\left(O\left(f(z)\right)\right)$.

Por hipótese, f tem diâmetro de órbita decrescente. Portanto $\delta\left(O\left(f(z)\right)\right) = 0$, isto é, $f\left(f(z)\right) = f(z)$. Provamos assim que $f(z)$ é um ponto fixo por f.

Uma vez que f é contínua, resulta que

$$\lim_{k\to\infty} f^{n_k+1}(x) = f\left(\lim_{k\to\infty} f^{n_k}(x)\right) = f(z).$$

Logo

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists k \in IN : d\left(f^{n_k+1}(x), f(z)\right) < \varepsilon$$

Seja $n \geq n_k + 1$. Como

$$d\left(f^n(x), f(z)\right) = d\left(f^n(x), f(f(z))\right) \leq d\left(f^{n-1}(x), f(z)\right) \leq d\left(f^{n-2}(x), f(z)\right) \leq \ldots \leq$$

$$\leq d\left(f^{n_k+1}(x), f(z)\right) < \varepsilon$$

conclui-se que $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = f(z)$.

Mas como $\lim_{k\to\infty} f^{n_k}(x) = z$, resulta que $f(z) = z$, isto é, $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = z$ e z é um ponto fixo de f, como queríamos mostrar. □

Corolário 2.2.10 ([6]) Sejam (X,d) um espaço métrico compacto e $f: X \to X$ uma aplicação não–expansiva com diâmetro de órbita decrescente.

Então, $\forall x \in X$, $r(x) = 0$ e a sucessão $\left(f^n(x)\right)_{n\in IN}$ converge para um ponto fixo de f.

Demonstração Como X é compacto, então $\forall x \in X$, $\left(f^n(x)\right)_{n\in IN}$ tem uma subsucessão convergente para algum ponto z.

Pelo teorema anterior, $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = z$ e $f(z) = z$.

Finalmente, $r(x) = \lim_{n\to\infty} \delta\left(O\left(f^n(x)\right)\right) = \delta(\{z\}) = 0$. □

Observe-se que a condição de f ter diâmetro de órbita decrescente é essencial, como mostra o seguinte exemplo:

Exemplo 2.2.11 Sejam

$$D = \left\{X \in IR^2 : 1 \leq \|X\| \leq 2\right\}$$

e

$$\begin{array}{rccc} f: & D & \to & D \\ & X & \mapsto & -X \end{array}$$

f é não – expansiva, D é compacto e f não tem pontos fixos.

A condição de a órbita de algum ponto conter uma subsucessão convergente também é essencial (basta atender ao exemplo 2.2.8 (1)).

3. PONTOS FIXOS EM FAMÍLIAS DE FUNÇÕES COMUTATIVAS

Neste capítulo provaremos a existência de um ponto fixo comum para uma certa família de funções, desde que certas condições sejam satisfeitas. Começamos por apresentar alguns conceitos requeridos para tal:

Definição 2.3.1 Seja S um conjunto não vazio. Diz-se que S é *parcialmente ordenado* se existe uma relação de ordem, denotada por $\leq$, tal que:

- se $a \leq b$ e $b \leq c$, então $a \leq c$;
- $a \leq a$;
- se $a \leq b$ e $b \leq a$, então $a = b$.

para todos $a, b, c \in S$.

Por exemplo, sejam S um conjunto não vazio e $T = P(S)$, isto é, T é o conjunto formado por todos os subconjuntos de S. Dados $A, B \in T$, diz-se que $A \leq B$ se $A \subseteq B$.

Lema 2.3.2 (Lema de Zorn) Seja S um conjunto parcialmente ordenado. Suponha-se que $\forall T \subseteq S$ subconjunto ordenado (isto é, $\forall x, y \in T, x \leq y \vee y \leq x$) existe $m \in S$ tal que $\forall x \in T$, $x \leq m$.

Então S tem elemento maximal, isto é,

$\exists M \in S$ tal que se $M \leq Z$, com $Z \in S$, então $M = Z$.

Analogamente faz-se uma formulação equivalente ao lema de Zorn para elemento minimal.

Definição 2.3.3 Sejam X um conjunto não vazio e $f,\ g : X \to X$ duas funções.

f e g dizem-se *comutativas* se $f \circ g = g \circ f$.

Definição 2.3.4 Sejam B um espaço de Banach e A um subconjunto não vazio de B. A *envolvente convexa* de A é o menor convexo de B que contém A e representa-se por $co(A)$. O *fecho convexo* de A é o menor convexo fechado de B que contém A e representa-se por $\overline{co}(A)$.

Apresentamos de seguida um teorema de L. P. Belluce e W. A. Kirk ([7]).

Teorema 2.3.5 Sejam B um espaço de Banach e $\emptyset \neq X \subseteq B$ um subconjunto fechado, limitado e convexo.

Sejam ainda $M \subseteq X$ um compacto e $F \neq \emptyset$ uma família de funções de X em X não – expansivas e comutativas, tal que

$$\exists f_1 \in F : \overline{\{f_1^n(x),\ n = 1, 2, \ldots\}} \cap M \neq \emptyset, \forall x \in X$$

Então existe $x \in M : f(x) = x, \forall f \in F$, isto é, x é um ponto fixo comum da família F.

Demonstração Seja $K \neq \emptyset$ um fechado convexo de X, tal que $f(K) \subseteq K$, $\forall f \in F$.

Tome-se $x \in K$. Uma vez que $f_1(K) \subseteq K$, resulta que $\left(f_1^n(x)\right)_{n \in IN} \subseteq K$. Podemos ainda afirmar que

$$\overline{\left(f_1^n(x)\right)_{n \in IN}} \subseteq K \text{, pois } K \text{ é fechado.}$$

Logo

$$\emptyset \neq \overline{\{f_1^n(x),\ n = 1, 2, \ldots\}} \cap M \subseteq K \cap M$$

Concluímos então que $K \cap M \neq \emptyset$.

O lema de Zorn garante a existência de um subconjunto $X^* \subseteq X$ minimal, tal que $X^* \neq \emptyset$, fechado, convexo e $f\left(X^*\right) \subseteq X^*, \forall f \in F$.

Seja $M^* = X^* \cap M$; é claro que $M^* \neq \emptyset$.

Por um teorema de Göhde ([15]), existe um conjunto não vazio H constituído por pontos fixos de f_1 em M^*.

Vejamos que H é fechado.

Atendendo a que $\forall x \in H,\ f_1(x) = x$, resulta que tomando $x_0 \in X \setminus H$,

$$f_1(x_0) \neq x_0.$$

Seja $h(x) = f_1(x) - x$; portanto $h(x_0) \neq 0$. Logo $\|h(x_0)\| \geq k > 0$, e uma vez que h é um aplicação contínua, é possível encontrar uma vizinhança V de x_0 tal que para todo x em V, $\|h(x)\| > 0$, isto é, $h(x) \neq 0 \Leftrightarrow f_1(x) \neq x$. Portanto $V \subset X \setminus H$, o que prova que H é fechado.

Sejam agora $x \in H,\ f \in F$ e $y = f(x)$.

Uma vez que F é uma família de funções comutativas e x é um ponto fixo de f_1, concluímos que

$$f_1(y) = f_1(f(x)) = f(f_1(x)) = f(x) = y$$

Logo y é também um ponto fixo de f_1, isto é, $y \in H$.

Consequentemente $f(H) \subseteq H$.

Novamente, pelo lema de Zorn, existe um subconjunto $H^* \subseteq H$ minimal, tal que $H^* \neq \emptyset$ é fechado e $f(H^*) \subseteq H^*, \forall f \in F$.

Tome-se $g \in F$; como H^* é fechado, M é compacto e $H^* \subseteq H \subseteq M^* \subseteq M$, resulta que H^* é também compacto. Como g é contínua, $g(H^*)$ é compacto, logo fechado.

Além disso, para todo $f \in F$

$$f(g(H^*)) = g(f(H^*)) \subseteq g(H^*).$$

Portanto, o conjunto $g(H^*)$ é:

- não vazio;
- $g(H^*) \subseteq H^*$;
- fechado;
- $f(g(H^*)) \subseteq g(H^*)$, $\forall f \in F$

Pela minimilidade de H^*, resulta que $g(H^*) = H^*$, $\forall g \in F$.

Seja W o fecho convexo de H^*.

Uma vez que H^* é compacto e o fecho convexo de um compacto é ainda compacto, resulta que W é compacto (uma demonstração pode ser vista em [2], pag 174).

Suponha-se que $\delta(W) > 0$.

O seguinte lema é apresentado por R. DeMarr em [11]:

Lema 1 Seja B um espaço de Banach, $M \subseteq B$ um conjunto compacto não vazio e K a envolvente convexa de M.

Seja ρ o diâmetro de M. Se $\rho > 0$, então existe um elemento $u \in K$ tal que $\sup\{\|x-u\| : x \in M\} < \rho$.

Demonstração Uma vez que M é compacto, existem $x_1, x_2 \in M$ tais que $\|x_1 - x_2\| = \rho$. Seja $M_0 \subseteq M$ o maior conjunto (no sentido da inclusão) que contém x_1, x_2 e $\forall x, y \in M_0$, se $x \neq y$ então $\|x - y\| = \rho$.

Como M é compacto e $\rho > 0$, afirmamos que M_0 é finito. De facto, caso contrário, M_0 conteria uma sucessão $(x_n)_{n \in IN}$ cujos termos são todos distintos. Logo tal sucessão teria um ponto de acumulação, o que contraria o facto de $\|x_n - x_m\| = \rho > 0$, $\forall x_n \neq x_m$.

Podemos então escrever $M_0 = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$.

Seja agora

$$u=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}x_k .$$

Portanto $u \in K$, uma vez que:

- por hipótese, como $K \supseteq M$, consequentemente, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in K$.
- K é convexo, $\frac{1}{n} \geq 0$ e $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}=1$, então $u=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}x_k \in K$.

Novamente, por hipótese, M é compacto, logo existe $y_0 \in M$ tal que

$$sup\left\{\|x-u\| : x \in M\right\}=\|y_0-u\| .$$

Resulta então que

$$\|y_0-u\|=\left\|y_0-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}x_k\right\|=\left\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(y_0-x_k)\right\|\leq\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\|y_0-x_k\|\leq\rho$$

uma vez que como $y_0, x_k \in M$ e o diâmetro de M é ρ, então $\|y_0-x_k\|\leq\rho$, $k=1,\ldots,n$.

Finalmente, suponhamos que $\|y_0-u\|=\rho$. Então,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\|y_0-x_k\|=\rho .$$

Como, para todo $k=1,\ldots,n$, $\|y_0-x_k\|\leq\rho$, resulta que $\|y_0-x_k\|=\rho$, isto é, $y_0 \in M_0$. Conclui-se portanto que $y_0=x_k$, para algum $k\in\{1,\ldots,n\}$, o que é absurdo pois $\|y_0-x_k\|=\rho>0$, para todo $k=1,\ldots,n$.

Logo $\|y_0-u\|<\rho$, o que conclui a demonstração do lema. □

Portanto, pelo lema anterior, existe $x \in W$ tal que

$$r=\sup\left\{\|x-z\| : z\in W\right\}<\delta(W)$$

Vejamos que isto é um absurdo, concluindo assim que $\delta(W)=0$.
Sejam

$$D_1=\left\{w\in W : \|w-z\|\leq r, \forall z\in H^*\right\}$$
$$D_2=\left\{w\in X^* : \|w-z\|\leq r, \forall z\in H^*\right\}$$

Tome-se $w\in D_1$, então $w\in X^*$ porque W é o fecho convexo de H^*, $H^*\subseteq M^*\subseteq X^*$ e X^* é fechado e convexo. Além disso, $\forall z\in H^*, \|w-z\|\leq r$, isto é, $w\in D_2\cap W$.

Reciprocamente, se $w\in D_2\cap W$, resulta que $w\in D_1$.

Logo $D_1 = D_2 \cap W$.

Seja $y \in D_2$; vejamos que $f(y) \in D_2$, $\forall f \in F$:

- como $y \in X^*$ e $f(X^*) \subseteq X^*$, resulta que $f(y) \in X^*$;
- uma vez que $f(H^*) = H^*, \forall f \in F$, dado $z \in H^*$, existe
$$z' \in H^* : f(z') = z$$
Logo
$$\|f(y) - z\| = \|f(y) - f(z')\| \leq \|y - z'\| \leq r$$

Portanto, $f(y) \in D_2$ e da arbitrariedade de y resulta que $f(D_2) \subseteq D_2$, $\forall f \in F$.
Além disso, D_2 é:

- não vazio pois $x \in D_2$. De facto, $x \in W \subseteq X^*$ e $\|x - z\| \leq r, \forall z \in H^* \subseteq W$;
- fechado pois $D_2 = \bigcap_{z \in H^*} D(z,r) \cap X^*$ e a intersecção de fechados é ainda um fechado;
- convexo pois dados $x, y \in D_2$, $z \in H^*$ e $0 \leq \alpha \leq 1$:

$$\|\alpha x + (1-\alpha)y - z\| = \|\alpha x - \alpha z + (1-\alpha)y - (1-\alpha)z\| \leq$$

$$\leq \alpha\|x - z\| + (1-\alpha)\|y - z\| \leq \alpha r + (1-\alpha)r = r$$

Portanto, D_2 é não vazio, fechado, convexo, $f(D_2) \subseteq D_2$ e $D_2 \subseteq X^*$.
A minimilidade de X^* garante que $D_2 = X^*$.
Logo $D_1 = D_2 \cap W = X^* \cap W = W$.

Observe-se que $\delta(H^*) = \delta(W)$ (conforme apêndice 3)

Atendendo que $\delta(H^*) = \delta(W) > r$ e H^* é compacto, existem $a, b \in H^*$:
$$\|a - b\| > r$$

Mas como $H^* \subseteq W = D_1$, resulta que
$$\|a - b\| \leq r$$

o que é absurdo.

Portanto, $\delta(W) = 0$, $H^* = \{x_0\}$ e $f(x_0) = x_0$, $\forall f \in F$, o que conclui a demonstração do teorema. □

O seguinte resultado é consequência imediata do teorema anterior (R. DeMarr, [11]).

Corolário 2.3.6 Sejam B um espaço de Banach e $X \subseteq B$ um compacto, convexo e não vazio. Seja F uma família não vazia de funções comutativas de X em X, tal que para $\forall f \in F$, f é não - expansiva.
Então a família de funções F tem um ponto fixo comum em X.

Exemplo 2.3.7 Seja

$$F = \left\{ f_n : \left[\frac{9}{10}, +\infty\right[\to \left[\frac{9}{10}, +\infty\right[: f_n(x) = \sqrt[n]{x}, n \in IN \setminus \{1\} \right\}$$

uma família de funções comutativas.

É obvio que $x = 1$ é o único ponto fixo de $f_n \in F, n \in IN \setminus \{1\}$.

Vejamos que $\forall f_n \in F$, f_n é não – expansiva. Para tal, basta mostrar que

$$|f_n'(x)| \leq 1, \forall x \in \left]\frac{9}{10}, +\infty\right[$$

Mas

$$|f_n'(x)| = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}} \leq 1 \Leftrightarrow \sqrt[n]{x^{n-1}} \geq \frac{1}{n} \Leftrightarrow x^{n-1} \geq \frac{1}{n^n}$$

e, uma vez que $x \in \left]\frac{9}{10}, +\infty\right[$, é suficiente notar que

$$x^{n-1} > \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} = \frac{10}{9}\left(\frac{9}{10}\right)^n \geq \frac{1}{n^n} \text{ sse } \left(\frac{9n}{10}\right)^n \geq \frac{9}{10}$$

concluindo assim o pretendido.

3. FUNÇÕES MULTIVALUADAS

Neste capítulo abordaremos um novo tipo de contracções: as contracções multivaluadas. Veremos adiante que, enquanto numa contracção, a cada elemento do espaço de partida se associa um único elemento do espaço de chegada, numa contracção multivaluada, a cada elemento do espaço de partida se associa um subconjunto do espaço de chegada. Esta modificação na própria definição de função obriga-nos a redefinir alguns conceitos já abordados anteriormente, tal como o conceito de ponto fixo. Posteriormente, à semelhança do que foi feito no primeiro capítulo, estudaremos sequências de contracções multivaluadas convergindo para uma dada contracção multivaluada.

1. CONTRACÇÕES MULTIVALUADAS

Definição 3.1.1 Sejam B um conjunto não vazio e $P(B)$ o conjunto formado por todos os subconjunto de B.

Sejam A e B dois conjuntos não vazios. Uma *função multivaluada* F de A em $P(B)$ é uma aplicação que a cada $x \in A$ associa um subconjunto de B, isto é, $F(x)$ é um subconjunto de B.

A imagem de $U \subset A$ por F é

$$F(U) = \bigcup_{x \in U} F(x)$$

e o gráfico é

$$GrF = \{(x, y) \in A \times B : y \in F(x)\}$$

Observe-se que, se para cada $x \in A$, $F(x)$ consiste apenas em um ponto, então o gráfico define uma função de A em B.

A maior diferença entre uma função e uma função multivaluada tem a ver com a definição de imagem recíproca. A imagem recíproca de um conjunto U por uma função $f : A \to B$ é o conjunto $f^{-1}(U) = \{x \in A : f(x) \in U\}$.

Para uma função multivaluada $F : A \to P(B)$ existem duas definições para imagem recíproca:

- A *recíproca superior* de U, que é $F^s(U) = \{x \in A : F(x) \subset U\}$
- A *recíproca inferior* de U, que é $F^i(U) = \{x \in A : F(x) \cap U \neq \emptyset\}$

Note-se que $F^s(U) \subseteq F^i(U)$.

Se $F(x)$ consiste apenas em um ponto, $\forall x \in A$, ambas as definições reduzem-se à inversa de U, considerando F como uma função de A em B.

Em termos topológicos, a existência de duas definições distintas para a imagem recíproca de um conjunto irá implicar que existam duas definições de continuidade. Sendo assim, uma função multivaluada $F : A \to P(B)$ diz-se ser *contínua superiormente* se a recíproca superior de qualquer aberto é um aberto e *contínua inferiormente* se a recíproca inferior de qualquer aberto é um aberto.

Fixadas topologias em A e B e $F: A \to P(B)$, define-se continuidade pontual e continuidade do seguinte modo:

- F diz-se *contínua superiormente em* x se para cada vizinhança aberta U de $F(x)$, a sua recíproca superior é uma vizinhança de x em A.
  F diz-se contínua superiormente se é contínua superiormente para todo $x \in A$.
- F diz-se *contínua inferiormente em* x se para cada aberto U tal que $F(x) \cap U \neq \varnothing$, a sua recíproca inferior é uma vizinhança de x em A.
  F diz-se contínua inferiormente se é contínua inferiormente para todo $x \in A$.
- F diz-se *contínua em* x se é contínua superiormente e inferiormente em x.
  F diz-se contínua se é contínua para todo $x \in A$.

Exemplo 3.1.2 ([2], pag 527) Sejam F, G e H três funções multivaluadas de $[0,1]$ em $P([0,1])$ definidas por:

$$F(x) = \begin{cases} \{0\} & ,x < 1 \\ [0,1] & ,x = 1 \end{cases} \qquad G(x) = \begin{cases} [0,1] & ,x < 1 \\ \{0\} & ,x = 1 \end{cases} \qquad H(x) = [0,x]$$

É fácil verificar que F é contínua superiormente. Vejamos que F não é contínua inferiormente em 1. Para tal, considere-se o aberto $U = \left]\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right[$ (observe-se que $F(1) \cap U \neq \varnothing$). Mas $F^i(U) = \{x \in [0,1] : F(x) \cap U \neq \varnothing\} = \{1\}$ não é vizinhança de 1.

Em relação à função multivaluada G, é fácil de verificar que é contínua inferiormente. Afirmamos que G não é contínua superiormente em 1. De facto, tome-se o aberto $U = \left[0, \frac{1}{2}\right[$ (observe-se que $G(1) \subset U$).

No entanto, $G^s(U) = \{x \in [0,1] : G(x) \subset U\} = \{1\}$ não é vizinhança de 1.

Finalmente, mostremos que H é contínua.

Seja $x \in [0,1[$ (o caso $x = 1$ é trivial); H é contínua superiormente em x:

Seja U um aberto contendo $H(x)$; podemos tomar $U = [0, x + \delta[$, com $\delta > 0$ tal que $x + \delta \leq 1$ (o caso de $U = [0,1]$ é trivial).

$$H^s(U) = \{y \in [0,1] : H(y) \subset [0, x + \delta[\} \supset \left[0, x + \frac{\delta}{2}\right[$$

que é uma vizinhança de x.

H é contínua inferiormente em x:

Seja U um aberto tal que $H(x) \cap U \neq \varnothing$; podemos considerar $U =]a, b[$, com $0 \leq a < x < b \leq 1$ (os restantes casos são análogos).

$$H^i(U) = \{y \in [0,1] : H(y) \cap]a, b[\neq \varnothing\} =]a, 1],$$

que é vizinhança de x.

Portanto H é contínua.

Definição 3.1.3 Sejam A um conjunto não vazio, $F: A \to P(A)$ uma função multivaluada e $x \in A$. x diz-se um *ponto fixo* de F se $x \in F(x)$.

Note-se que, se para todo $x \in A$, $F(x)$ consistir em apenas um elemento, então

$$x \in F(x) \Leftrightarrow x = F(x)$$

que é a definição já apresentada anteriormente para ponto fixo de uma função.

Por exemplo, para a função F apresentada anteriormente, 0 e 1 são os únicos pontos fixos de F.

Seja (X,d) um espaço métrico. A *métrica de Hausdorff* em relação à métrica d, h_d, é definida por:

Dados A e B dois subconjuntos não vazios, fechados e limitados de X, então

$$h_d(A,B) = \max\left\{\sup_{a\in A} d(a,B), \sup_{b\in B} d(b,A)\right\}$$

O conjunto formado por todos os subconjuntos de X não vazios, fechados e limitados representa-se por $FL(X)$.

Vamos agora introduzir a definição de contracção multivaluada.

Definição 3.1.4 Seja (X,d) um espaço métrico e considere-se a métrica de Hausdorff h_d em $FL(X)$. $F: X \to FL(X)$ diz-se uma *contracção multivaluada* se existir $c \in]0,1[$ tal que

$$h_d(F(x),F(y)) \leq cd(x,y), \ \forall x,y \in X.$$

A c chama-se *coeficiente de contracção.*

É fácil mostrar que se $F: (X,d) \to (FL(X),h_d)$ é uma contracção multivaluada, então F é contínua.

Exemplo 3.1.5 Seja

$$\begin{array}{rccc} F: & [0,1] & \to & FL([0,1]) \\ & x & \mapsto & \left[0,\dfrac{x}{2}\right] \end{array}$$

F é uma contracção multivaluada.

De facto, tome-se $x, y \in [0,1]$.

$$h_d(F(x),F(y)) = \frac{|x-y|}{2} = \frac{1}{2}d(x,y)$$

Portanto, F é uma contracção multivaluada de coeficiente $\frac{1}{2}$.

Ao contrário das contracções, nas contracções multivaluadas não se pode garantir que o ponto fixo (quando existir) seja único, como o seguinte exemplo mostra:

Exemplo 3.1.6 ([25])
Sejam

$$\begin{aligned} f: \ [0,1] &\rightarrow [0,1] \\ x &\mapsto \begin{cases} \frac{1}{2}x+\frac{1}{2} & ,0 \le x \le \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}x+1 & ,\frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F: \ [0,1] &\rightarrow FL([0,1]) \\ x &\mapsto \{0\} \cup \{f(x)\} \end{aligned}$$

Vejamos que F é uma contracção multivaluada de coeficiente $\frac{1}{2}$.

<u>1º caso</u>: Sejam $0 \le y \le x \le \frac{1}{2}$

$$h_d(F(x),F(y)) = \max\left\{ \sup_{a \in \{0\} \cup \{\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\}} d\left(a, \{0\} \cup \{\tfrac{1}{2}y+\tfrac{1}{2}\}\right), \sup_{b \in \{0\} \cup \{\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}\}} d\left(b, \{0\} \cup \{\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{2}\}\right) \right\} =$$

$$= \max\left\{ \sup\left\{0, \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y\right\}, \sup\left\{0, \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y\right\} \right\} = \frac{1}{2}(x-y) = \frac{1}{2}d(x,y)$$

<u>2º caso</u>: Sejam $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ e $y \in \left]\frac{1}{2}, 1\right]$

$$h_d(F(x),F(y)) = \max\left\{ \sup_{a \in \{0\} \cup \{\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\}} d\left(a, \{0\} \cup \{-\tfrac{1}{2}y+1\}\right), \sup_{b \in \{0\} \cup \{-\frac{1}{2}y+1\}} d\left(b, \{0\} \cup \{\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{2}\}\right) \right\} =$$

$$= \max\left\{ \sup\left\{0, \frac{1}{2}|x+y-1|\right\}, \sup\left\{0, \frac{1}{2}|x+y-1|\right\} \right\} = \frac{1}{2}|x+y-1| \le \frac{1}{2}|x-y| = \frac{1}{2}d(x,y)$$

<u>3º caso</u> Sejam $x, y \in \left]\frac{1}{2}, 1\right]$ (análogo ao 1º caso).

Logo,

$$\forall x, y \in [0,1], \ h_d(F(x),F(y)) \le \frac{1}{2}d(x,y)$$

No entanto, $\left\{0, \frac{2}{3}\right\}$ são dois pontos fixos de F.

O teorema seguinte, devido a S. B. Nadler, generaliza o teorema do ponto fixo de Banach para funções multivaluadas.

Teorema 3.1.7 (Teorema do ponto fixo de Nadler, [25]) Sejam (X,d) um espaço métrico completo e $F: X \to FL(X)$ uma contracção multivaluada. Então F tem um ponto fixo.

Demonstração Seja $x_0 \in X$ e considere-se $x_1 \in F(x_0)$.

Agora tome-se $x_2 \in F(x_1)$ tal que $d(x_1,x_2) \leq h_d(F(x_0),F(x_1))+c$, onde c é o coeficiente de contracção (note-se que existe sempre tal x_2 uma vez que, como $c>0$ e

$$d(x_1,F(x_1)) = \inf_{y\in F(x_1)} d(x_1,y)$$

temos que

$$\exists\, y \in F(x_1):\ d(x_1,F(x_1)) \leq d(x_1,y) < d(x_1,F(x_1))+c \leq h_d(F(x_0),F(x_1))+c$$

A este y dá-se a designação de x_2).

Vamos agora construir uma sucessão $(x_n)_{n\in IN}$ dada por:

$$x_{n+1} \in F(x_n) \text{ e } d(x_n,x_{n+1}) \leq h_d(F(x_{n-1}),F(x_n))+c^n$$

Portanto,

$$d(x_n,x_{n+1}) \leq h_d(F(x_{n-1}),F(x_n))+c^n \leq cd(x_{n-1},x_n)+c^n \leq$$

$$\leq c\left(h_d(F(x_{n-2}),F(x_{n-1}))+c^{n-1}\right)+c^n = ch_d(F(x_{n-2}),F(x_{n-1}))+2c^n \leq$$

$$\leq c^2 d(x_{n-2},x_{n-1})+2c^n \leq \ldots \leq c^n d(x_0,x_1)+nc^n$$

Assim, para $m>n$, tem-se

$$d(x_m,x_n) \leq \sum_{j=n}^{m-1} d(x_{j+1},x_j) \leq \sum_{j=n}^{m-1}\left(c^j d(x_0,x_1)+jc^j\right) \leq \sum_{j\geq n}\left(c^j d(x_0,x_1)+jc^j\right)$$

que converge para zero quando $n \to +\infty$, já que $c \in \left]0,1\right[$ implica que

$$\sum_{j\geq 1}\left(c^j d(x_0,x_1)+jc^j\right) = \sum_{j\geq 1} c^j\left(d(x_0,x_1)+j\right)$$

seja convergente.

Assim, $(x_n)_{n\in IN}$ é uma sucessão de Cauchy, e sendo X completo, $(x_n)_{n\in IN}$ é convergente. Seja x o limite de $(x_n)_{n\in IN}$.

Afirmamos que x é um ponto fixo de F. Para tal, note-se que para todo $n \in IN$, se tem:

$$0 \leq d(x_{n+1},F(x)) \leq h_d(F(x_n),F(x)) \leq cd(x_n,x)$$

Portanto,

$$d(x,F(x)) = \lim_{n\to\infty} d(x_{n+1},F(x)) \leq \lim_{n\to\infty} cd(x_n,x) = cd(x,x) = 0$$

Por conseguinte, $x \in \overline{F(x)} = F(x)$ (por hipótese, $F(x)$ é fechado).

Provamos assim que x é um ponto fixo de F. □

No teorema anterior enunciamos condições suficientes para que uma contracção multivaluada tenha um ponto fixo (com o coeficiente de contracção constante).

Nos dois seguintes teoremas, provados por Yu-Qing em [33], vamos permitir que o coeficiente de contracção varie com x e com y.
Para começar, vamos definir uma função multivaluada para-contractiva (f.m.p.c.).

Definição 3.1.8 Sejam (X,d) um espaço métrico não vazio e $F: X \to FL(X)$ uma função multivaluada. F diz-se uma f.m.p.c. se $\forall x, y \in X$, com $x \neq y$

$$h_d(F(x),F(y)) \leq K(d(x,y))d(x,y)$$

onde

$$K:]0,+\infty[\to [0,1[\text{ e } \limsup_{r \to t^-} K(r) < 1,\ \forall t > 0$$

Teorema 3.1.9 Sejam (X,d) um espaço métrico completo e $F: X \to FL(X)$ uma f.m.p.c.. Suponhamos que, para todo $Y \subseteq X$ subconjunto não vazio, fechado e limitado tal que $F(x) \cap Y \neq \emptyset$, $\forall x \in Y$, implica

$$d(x,F(x)) = d(x,F(x) \cap Y),\ \forall x \in Y$$

Então F tem um ponto fixo.

Demonstração Seja $(t_n)_{n \in IN}$ uma sucessão em $]0,+\infty[$ estritamente decrescente, convergindo para zero.

Uma vez que $\limsup_{r \to t_n^-} K(r) < 1$, existem $0 \leq k_n < 1$ e $\delta_n > 0$ tais que $K(r) \leq k_n$, $\forall r \in]t_n, t_n + \delta_n[$, $\forall n \in IN$.

Sejam $\eta_n = \min\left\{\frac{\delta_n}{4}, \frac{1}{n}\right\}$ e $\varepsilon_n = t_n + \eta_n$.

Então $K(r) \leq k_n$, $\forall r \in \left[\varepsilon_n - \frac{\eta_n}{2}, \varepsilon_n + \eta_n\right]$, $\forall n \in IN$.

Além disso, quando $n \to \infty$,

- $t_n \to 0^+$;
- $\eta_n \leq \frac{1}{n} \to 0^+$

Portanto, $\varepsilon_n \to 0^+$.

A prova será agora dividida em três passos:

PASSO 1

Provemos que, para $\varepsilon_1 > 0$ $\exists x_1 \in X$:

$$F(x) \cap D_1 \neq \emptyset, \ \forall x \in D_1 = \{x \in X : d(x, x_1) \leq \varepsilon_1\}$$

Suponha-se, por redução ao absurdo, que

$$\forall x \in X \ \exists x_0 \in X \text{ com } d(x, x_0) \leq \varepsilon_1 \text{ e } F(x_0) \cap D_1 = \emptyset$$

isto é,

$$\forall y \in F(x_0), \ d(x, y) > \varepsilon_1$$

1º caso: Suponha-se que $d(x, x_0) < \varepsilon_1 - \frac{\eta_1}{2}$

Atendendo a que:

- $d(x, F(x_0)) \leq d(x, F(x)) + h_d(F(x), F(x_0))$
- $\forall y \in F(x_0)$, $d(x, y) > \varepsilon_1$
- F é uma f.m.p.c

resulta que

$$d(x, F(x)) \geq d(x, F(x_0)) - h_d(F(x_0), F(x)) \geq \varepsilon_1 - K(d(x_0, x))d(x_0, x) > \varepsilon_1 - d(x_0, x) > \frac{\eta_1}{2}.$$

2º caso: Suponha-se que $d(x, x_0) \geq \varepsilon_1 - \frac{\eta_1}{2}$

Novamente, atendendo a que:

- $d(x, F(x_0)) \leq d(x, F(x)) + h_d(F(x), F(x_0))$
- $\forall y \in F(x_0)$, $d(x, y) > \varepsilon_1$
- F é uma f.m.p.c
- $d(x, x_0) \leq \varepsilon_1 < \varepsilon_1 + \eta_1$, logo

$$d(x, x_0) \in \left[\varepsilon_1 - \frac{\eta_1}{2}, \varepsilon_1 + \eta_1\right]$$

concluindo-se assim que $K(d(x, x_0)) \leq k_1$

resulta que

$$d(x, F(x)) \geq d(x, F(x_0)) - h_d(F(x_0), F(x)) \geq \varepsilon_1 - K(d(x_0, x))d(x_0, x) \geq$$

$$\geq \varepsilon_1 - k_1 \varepsilon_1 = (1 - k_1)\varepsilon_1$$

Portanto, dos casos 1 e 2, concluímos que

$$d(x,F(x)) \geq \min\left\{\frac{\eta_1}{2},(1-k_1)\varepsilon_1\right\} > 0, \forall x \in X \qquad \textbf{(1)}$$

(note-se que $\frac{\eta_1}{2}$ e $(1-k_1)\varepsilon_1$ não dependem de x).

Agora, fixemos $x_0 \in X$ e $x_1 \in F(x_0)$.
Uma vez que

$$d(x_1,F(x_1)) \leq h_d(F(x_0),F(x_1)) \leq K(d(x_0,x_1))d(x_0,x_1) < d(x_0,x_1)$$

existe $x_2 \in F(x_1)$ tal que

$$d(x_1,F(x_1)) - \frac{1}{2^2} \leq d(x_1,x_2) \leq d(x_0,x_1)$$

e

$$d(x_1,x_2) \leq h_d(F(x_0),F(x_1)) + \frac{1}{2^2} \leq K(d(x_0,x_1))d(x_0,x_1) + \frac{1}{2^2}$$

Por indução constrói-se uma sucessão $(x_n)_{n\geq 3}$ tal que

- $x_n \in F(x_{n-1})$;
- $d(x_{n-1},F(x_{n-1})) - \frac{1}{2^n} \leq d(x_{n-1},x_n) \leq d(x_{n-2},x_{n-1})$;
- $d(x_{n-1},x_n) \leq K(d(x_{n-2},x_{n-1}))d(x_{n-2},x_{n-1}) + \frac{1}{2^n}$.

Como $0 \leq d(x_{n-1},x_n) \leq d(x_{n-2},x_{n-1}), \forall n \geq 3$, resulta que a sucessão $(d(x_n,x_{n-1}))_{n\in IN}$ é decrescente e limitada em IR, logo converge para algum S_0, isto é,

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,x_{n-1}) = S_0$$

Suponha-se que $S_0 > 0$. Então,

$$S_0 = \lim_{n\to\infty} d(x_{n-1},x_n) \leq \lim_{n\to\infty} \sup\left(K(d(x_{n-2},x_{n-1}))d(x_{n-2},x_{n-1}) + \frac{1}{2^n}\right) \leq$$

$$\leq \lim_{r\to S_0^+} \sup K(r) \lim_{n\to\infty} d(x_{n-2},x_{n-1}) = S_0 \lim_{r\to S_0^+} \sup K(r) < S_0$$

o que é absurdo.

Portanto $S_0 = 0$, isto é, $\lim_{n\to\infty} d(x_n,x_{n-1}) = 0$.

Concluímos então que

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} d(x_{n-1}, F(x_{n-1})) \leq \lim_{n\to\infty}\left(d(x_{n-1}, x_n) + \frac{1}{2^n} \right) = 0$$

o que contradiz **(1)**, provando assim o passo 1.

PASSO 2

Provemos que, para $\varepsilon_2 > 0 \ \exists x_2 \in D_1$:

$$F(x) \cap D_2 \neq \varnothing, \ \forall x \in D_2 = \{x \in D_1 : d(x, x_2) \leq \varepsilon_2\}$$

Novamente, por redução ao absurdo, suponha-se que

$$\forall x \in D_1 \ \exists y_0 \in D_1 \text{ tal que } d(x, y_0) \leq \varepsilon_2 \text{ e } d(x, y) > \varepsilon_2 \text{ , } \forall y \in F(y_0)$$

De modo análogo ao que foi visto para o primeiro passo, resulta que

$$d(x, F(x)) \geq \min\left\{ \frac{\eta_2}{2}, (1 - k_2)\varepsilon_2 \right\} > 0 \text{ , } \forall x \in D_1 \qquad \textbf{(2)}$$

Sejam $x_0 \in D_1$ e $x_1 \in F(x_0) \cap D_1$ (x_1 existe pelo passo 1). Pelas hipóteses do teorema

$$d(x_1, F(x_1) \cap D_1) = d(x_1, F(x_1)) \leq h_d(F(x_0), F(x_1)) \leq K(d(x_0, x_1))d(x_0, x_1) < d(x_0, x_1)$$

Portanto existe $x_2 \in F(x_1) \cap D_1$ tal que

$$d(x_1, F(x_1)) - \frac{1}{2^2} = d(x_1, F(x_1) \cap D_1) - \frac{1}{2^2} \leq d(x_1, x_2) \leq d(x_0, x_1)$$

e

$$d(x_1, x_2) \leq h_d(F(x_0), F(x_1)) + \frac{1}{2^2} \leq K(d(x_0, x_1))d(x_0, x_1) + \frac{1}{2^2}$$

De modo análogo, construímos uma sucessão $(x_n)_{n\geq 3}$ tal que

- $x_n \in F(x_{n-1}) \cap D_1$
- $d(x_{n-1}, F(x_{n-1})) - \frac{1}{2^n} \leq d(x_{n-1}, x_n) \leq d(x_{n-2}, x_{n-1})$
- $d(x_{n-1}, x_n) \leq K(d(x_{n-2}, x_{n-1}))d(x_{n-2}, x_{n-1}) + \frac{1}{2^n}$

Analogamente se prova que $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n-1}) = 0$ e que $\lim_{n\to\infty} d(x_{n-1}, F(x_{n-1})) = 0$,

o que contradiz **(2)**, concluindo assim a demonstração do passo 2.

PASSO 3

Por indução, sejam $\varepsilon_{n+1} > 0$ e $x_{n+1} \in D_n$ tais que

$$F(x) \cap D_{n+1} \neq \emptyset, \ \forall x \in D_{n+1} = \{x \in D_n : d(x, x_{n+1}) \leq \varepsilon_{n+1}\}, n \geq 2$$

Por definição de $(D_n)_{n \in IN}$, resulta que

$$D_1 \supseteq D_2 \supseteq D_3 \supseteq \ldots.$$

Como (X,d) é completo, $\lim_{n \to \infty} \varepsilon_n = 0$ (isto é, $\lim_{n \to \infty} \delta(D_n) = 0$), concluímos que

$$\bigcap_{n \in IN} D_n = \{x_0\}$$

conforme o apêndice 1.

Como $F(x_0) \cap D_n \neq \emptyset, \ \forall n \in IN$, resulta que $x_0 \in F(x_0)$, isto é, x_0 é ponto fixo de F, o que conclui a demonstração do teorema. □

O próximo resultado dá-nos uma condição necessária e suficiente para que uma função multivaluada para-contractiva. tenha pontos fixos.

Teorema 3.1.10 Sejam (X,d) um espaço métrico completo e $F : X \to FL(X)$ uma f.m.p.c..
Então F tem um ponto fixo se e só se existir um subconjunto fechado $Y \subseteq X$ tal que
(a) $F(x) \cap Y \neq \emptyset, \ \forall x \in Y$
(b) para qualquer subconjunto fechado $Z \subseteq Y$ tal que $F(x) \cap Z \neq \emptyset, \ \forall x \in Z$, tem-se

$$d(x, F(x) \cap Z) = d(x, F(x)), \ \forall x \in Z$$

Demonstração
$(\Rightarrow)$ Suponha-se que F tem um ponto fixo x_0. Tome-se então

$$Y = \{x \in X : x \in F(x)\} \subseteq X$$

Vejamos que Y satisfaz as condições do teorema:
(1) $Y \neq \emptyset$ porque $x_0 \in Y$;
(2) Y é fechado:
Seja $x \in X \setminus Y$, isto é, $x \notin F(x)$.
Tome-se $d = \dfrac{d(x, F(x))}{2} \neq 0$ pois $F(x) = \overline{F(x)}$.

F é uma aplicação uniformemente contínua (pois é uma contracção). Logo existe $\delta > 0$ tal que

$$d(x,y) < \delta \Rightarrow h_d(F(x), F(y)) < d, \ \forall x, y \in X$$

Tome-se $r = \min\{\delta, d\}$. Vejamos que $B(x,r) \subseteq X \setminus Y$. Por redução ao absurdo, suponha-se que existia

$$y \in X : d(x,y) < r < \delta \wedge y \in F(y)$$

Portanto

$$h_d(F(x),F(y)) \geq d(F(x),y) \geq -d(x,y) + d(x,F(x)) > -r + 2d > -d + 2d = d$$

o que contradiz a continuidade da aplicação F.

(3) Para $x \in Y$ (logo $x \in F(x)$),

$$F(x) \cap Y \supseteq \{x\} \neq \varnothing$$

(4) Seja $Z \subseteq Y$ um fechado tal que $F(x) \cap Z \neq \varnothing$, $\forall x \in Z$. Tome-se $x \in Z \subseteq Y$. Mas se $x \in Y$, $x \in F(x)$ e $x \in F(x) \cap Z$, logo

$$d(x,F(x)) = 0 = d(x, F(x) \cap Z)$$

Concluímos assim que Y satisfaz as condições do teorema.

($\Leftarrow$) Suponha-se que existia um fechado $Y \subseteq X$ tal que $F(x) \cap Y \neq \varnothing$, $\forall x \in Y$ e $\forall Z \subseteq Y$ fechado, se $F(x) \cap Z \neq \varnothing$, $\forall x \in Z$, então $d(x, F(x) \cap Z) = d(x, F(x))$, $\forall x \in Z$.

Seja $(\varepsilon_n)_{n \in IN}$ como no teorema anterior.

PASSO 1

Tome-se $D_1 = Y$ (note-se que agora D_1 não é necessariamente uma bola fechada). Então $d(x,F(x)) = d(x, F(x) \cap D_1)$, $\forall x \in D_1$ (por hipótese).

PASSO 2

De modo análogo ao passo 2 do teorema anterior, existe $x_2 \in D_1$ tal que

$$F(x) \cap D_2 \neq \varnothing, \ \forall x \in D_2,$$

onde $D_2 = \{x \in D_1 : d(x,x_2) \leq \varepsilon_2\}$.

Por indução, obtemos $x_{n+1} \in D_n$ tal que $F(x) \cap D_{n+1} \neq \varnothing$, $\forall x \in D_{n+1}$.

Logo, $\bigcap_{n \in IN} D_n = \{x_0\}$, que é um ponto fixo de F, o que conclui a demonstração do teorema. □

Iremos agora estender o conceito de funções fracamente contractivas às funções multivaluadas.

Definição 3.1.11 Sejam (X,d) um espaço métrico e $F : X \to FL(X)$ uma função multivaluada. F diz-se uma *função multivaluada fracamente contractiva* se

$$\forall x, y \in X : h_d(F(x),F(y)) < d(x,y), \text{ com } x \neq y$$

Note-se que qualquer contracção multivaluada é uma função multivaluada fracamente contractiva.

Exemplo 3.1.12 Seja

$$\begin{array}{rccc} f: & IR_0^+ & \to & IR_0^+ \\ & x & \mapsto & x - arctgx \end{array}$$

f está bem definida pois:

- $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{x^2}{1+x^2} > 0$
- $f(0) = 0$

donde concluimos que $f(IR_0^+) \subseteq IR_0^+$

Seja agora

$$\begin{array}{rccc} F: & IR_0^+ & \to & FL(IR_0^+) \\ & x & \mapsto & [0, f(x)] \end{array}$$

Pelo que foi visto atrás, F está bem definida.

Afirmamos que F é uma função multivaluada fracamente contractiva. De facto, sejam $x, y \in IR_0^+$, com $x \neq y$.

$$h_d(F(x), F(y)) = |f(x) - f(y)| < |x - y|$$

pois

$$f'(x) = \frac{x^2}{1+x^2} < 1$$

isto é, f é uma função fracamente contractiva.

Iremos agora definir órbita e órbita regular de uma função multivaluada, noções que serão necessárias para o próximo teorema.

Definição 3.1.13 Sejam (X,d) um espaço métrico e $F: X \to FL(X)$ uma função multivaluada. Uma *órbita* de F em $x \in X$ é

$$O(x) = \{x_n : x_n \in F(x_{n-1}), n \in IN\}$$

onde $x_0 = x$.

Uma órbita é *regular* se

$$d(x_{n+1}, x_{n+2}) \leq d(x_n, x_{n+1}) \text{ e } d(x_{n+1}, x_{n+2}) \leq h_d(F(x_n), F(x_{n+1}))$$

O teorema seguinte foi obtido por R. Smithson em ([32]), onde o autor recorre aos métodos usados por Edelstein em ([12]).

Teorema 3.1.14 Sejam (X,d) um espaço métrico e $F: X \to FL(X)$ uma função multivaluada fracamente contractiva.

Se existir $x \in X$ tal que

- $O(x)$ é regular
- $O(x) \supseteq \{x_{n_i} : i \in IN\}$ tal que $\lim_{i\to\infty} x_{n_i} = y_0$ e $\lim_{i\to\infty} x_{n_i+1} = y_1$

então F tem um ponto fixo.

Demonstração Seja $O(x)$ uma órbita regular tal que

$$\lim_{i\to\infty} x_{n_i} = y_0 \text{ e } \lim_{i\to\infty} x_{n_i+1} = y_1$$

Afirmamos que $y_1 \in F(y_0)$. Basta notar que, $\forall i \in IN$

- $x_{n_i+1} \in F(x_{n_i})$
- $\lim_{i\to\infty} x_{n_i+1} = y_1$
- $\lim_{i\to\infty} x_{n_i} = y_0$

Logo $y_1 = \lim_{i\to\infty} x_{n_i+1} \in \overline{F\left(\lim_{i\to\infty} x_{n_i}\right)} = \overline{F(y_0)} = F(y_0)$, pois $F(x)$ é fechado, para todo $x \in X$.

Sejam $Y = \{(p,q) \in X \times X : p \neq q\}$ e $r: Y \to IR$ a aplicação contínua definida por

$$r(p,q) = \frac{h_d(F(p),F(q))}{d(p,q)}$$

Suponhamos que $y_0 \neq y_1$. Atendendo a que r é uma aplicação contínua, $(y_0,y_1) \in Y$ e $r(y_0,y_1) < 1$, existem $0 < a < 1$ e uma vizinhança aberta U de (y_0,y_1) em Y tais que,

$$\forall (p,q) \in U : 0 \leq r(p,q) < a$$

Seja $\rho > 0$ tal que

i) $\rho < \frac{1}{3} d(y_0,y_1)$

ii) Se $B_0 = B(y_0,\rho)$ e $B_1 = B(y_1,\rho)$, então $B_0 \times B_1 \subseteq U$

Uma vez que $\lim_{i\to\infty} x_{n_i} = y_0$ e $\lim_{i\to\infty} x_{n_i+1} = y_1$, existe $N \in IN$ tal que, $\forall i \geq N$:

$$x_{n_i} \in B_0 \text{ e } x_{n_i+1} \in B_1$$

donde concluímos que, para $i \geq N$,

$$d(x_{n_i}, x_{n_i+1}) > \rho \qquad \textbf{(1)}$$

Como $(x_{n_i}, x_{n_i+1}) \in U$, para $i \geq N$ e $\forall (p,q) \in U : r(p,q) < a$, resulta que

$$h_d(F(x_{n_i}), F(x_{n_i+1})) < ad(x_{n_i}, x_{n_i+1}) \qquad \textbf{(2)}$$

Por outro lado, $O(x)$ é regular, logo

$$d(x_{n_i+1}, x_{n_i+2}) \leq h_d(F(x_{n_i}), F(x_{n_i+1})) \qquad \textbf{(3)}$$

De **(2)** e **(3)** obtemos

$$d(x_{n_i+1}, x_{n_i+2}) < ad(x_{n_i}, x_{n_i+1})$$

Sejam $k > j > N$

$$d(x_{n_k}, x_{n_k+1}) \leq d(x_{n_{k-1}+1}, x_{n_{k-1}+2}) < ad(x_{n_{k-1}}, x_{n_{k-1}+1})$$

Repetindo o processo, concluímos que

$$d(x_{n_k}, x_{n_k+1}) < a^{k-j} d(x_{n_j}, x_{n_j+1})$$

Como $0 < a < 1$, $\lim_{k \to \infty} a^{k-j} = 0$, o que implica que $\lim_{k \to \infty} d(x_{n_k}, x_{n_k+1}) = 0$, contrariando **(1)**.

Portanto $y_0 = y_1$ e $y_0 \in F(y_0)$, o que prova que y_0 é um ponto fixo de F. □

No exemplo 3.1.12, 0 é o <u>único</u> ponto fixo de F.

É obvio que 0 é um ponto fixo. Vejamos que é único.

$$x \text{ ponto fixo de } F \Leftrightarrow x \in F(x) \Leftrightarrow x \leq x - arctgx \Leftrightarrow arctgx \leq 0$$

Mas $arctgx \geq 0$, para $x \in IR_0^+$, logo $arctgx = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Generalizaremos agora o conceito apresentado em 1.3.14 às funções multivaluadas.

Definição 3.1.15 Sejam (X,d) um espaço métrico, $\varepsilon > 0$ e $F : X \to FL(X)$ uma função multivaluada. F diz-se uma ε - *contracção multivaluada* se

$$\forall x, y \in X : d(x,y) < \varepsilon \Rightarrow h_d(F(x), F(y)) \leq kd(x,y), \text{ com } k \in \left]0,1\right[$$

O seguinte resultado deve-se a S. Nadler ([25]) e é uma versão análoga a 1.3.18.

Teorema 3.1.16 Sejam (X,d) um espaço métrico completo ε - encadeado e $F : X \to FL(X)$ uma ε - contracção multivaluada de coeficiente de contracção k. Então F tem um ponto fixo.

Demonstração A demonstração deste teorema será dividida em três passos:

<u>PASSO 1</u> Construção de uma métrica d_ε.

Considere-se a aplicação $d_\varepsilon : X \times X \to IR$ dada por:

$$d_\varepsilon(x,y) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{n} d(x_{i-1},x_i) : x_0 = x, x_1,\dots,x_n = y \text{ é uma } \varepsilon \text{ - cadeia unindo } x \text{ a } y\right\}$$

Vejamos que d_ε é uma métrica.

- É obvio que $d_\varepsilon(x,y) \geq 0$ e que se $x = y$, então $d_\varepsilon(x,y) = 0$.

Suponhamos agora que $d_\varepsilon(x,y) = 0$. Fixado $\delta > 0$, existe uma ε - cadeia tal que

$$\sum_{i=1}^{n} d(x_{i-1},x_i) < \delta, \text{ onde } x_0 = x \text{ e } x_n = y$$

É imediato que

$$d(x,y) \leq \sum_{i=1}^{n} d(x_{i-1},x_i) < \delta$$

logo $x = y$.

- $$d_\varepsilon(x,y) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{n} d(x_{i-1},x_i) : x_0 = x, x_1,\dots,x_n = y \text{ é uma } \varepsilon \text{ - cadeia unindo } x \text{ a } y\right\} =$$

$$= \inf\left\{\sum_{i=1}^{n} d(x_{i-1},x_i) : x_n = y, x_{n-1},\dots,x_0 = x \text{ é uma } \varepsilon \text{ - cadeia unindo } y \text{ a } x\right\} = d_\varepsilon(y,x)$$

- Sejam $x,y,z \in X$.

$$d_\varepsilon(x,z) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{n} d(x_{i-1},x_i) : x_0 = x, x_1,\dots,x_n = z \text{ é uma } \varepsilon \text{ - cadeia unindo } x \text{ a } z\right\}$$

Considerem-se as seguintes ε - cadeias:

$x = x_0', x_1',\dots,x_m' = y$ e $y = x_0'', x_1'',\dots,x_l'' = z$.

Logo,

$$x = x_0', x_1',\dots,x_m', x_0'',\dots,x_l'' = z$$

é uma ε - cadeia unindo x a z.

É então óbvio que

$$d_\varepsilon(x,z) \leq d_\varepsilon(x,y) + d_\varepsilon(y,z)$$

Logo d_ε é uma métrica.

Além disso, dados $x, y \in X$, pela desigualdade triangular da métrica d, resulta que

(1) $d(x,y) \le d_\varepsilon(x,y)$

(2) se $d(x,y) < \varepsilon \Rightarrow d(x,y) = d_\varepsilon(x,y)$

<u>PASSO 2</u> X, munido da métrica d_ε, é completo.

Dada uma sucessão $(x_n)_{n\in IN}$ de Cauchy para a métrica d_ε, atendendo a (1), concluímos que $(x_n)_{n\in IN}$ também é uma sucessão de Cauchy para a métrica d. Uma vez que X é completo para a métrica d, tal sucessão converge para $a \in X$. Então, por (2), $(x_n)_{n\in IN}$ também é convergente para a métrica d_ε.

Seja h a métrica de Hausdorff associada à métrica d e h_ε a métrica de Hausdorff associada à métrica d_ε. Sejam ainda $A, B \in FL(X)$ tais que $h(A,B) < \varepsilon$, isto é,

$$\max\left\{\sup_{a\in A} d(a,B), \sup_{b\in B} d(b,A)\right\} < \varepsilon$$

Mas

$$\sup_{a\in A}\inf_{b\in B} d(a,b) < \varepsilon \Leftrightarrow \forall a \in A,\ \inf_{b\in B} d(a,b) < \varepsilon \Leftrightarrow \forall a \in A\, \exists b \in B : d(a,b) < \varepsilon$$

Por (2), se $d(x,y) < \varepsilon \Rightarrow d(x,y) = d_\varepsilon(x,y)$. Logo

$$\sup_{a\in A}\inf_{b\in B} d(a,b) = \sup_{a\in A}\inf_{b\in B} d_\varepsilon(a,b)$$

De modo análogo se mostra que

$$\sup_{b\in B}\inf_{a\in A} d(a,b) = \sup_{b\in B}\inf_{a\in A} d_\varepsilon(a,b)$$

Portanto, $h(A,B) = h_\varepsilon(A,B)$, sempre que $h(A,B) < \varepsilon$.

<u>PASSO 3</u> F é uma contracção multivaluada com respeito às métricas d_ε e h_ε.

Sejam $x, y \in X$ e consideremos uma $\varepsilon-$ cadeia $x_0 = x, x_1, \dots, x_n = y$ unindo x a y.

Como $d(x_{i-1}, x_i) < \varepsilon$, $\forall i = 1, \dots, n$

$$h(F(x_{i-1}), F(x_i)) \le kd(x_{i-1}, x_i) < k\varepsilon < \varepsilon.$$

Logo

$$h_\varepsilon(F(x), F(y)) \le \sum_{i=1}^{n} h_\varepsilon(F(x_{i-1}), F(x_i)) = \sum_{i=1}^{n} h(F(x_{i-1}), F(x_i)) \le k\sum_{i=1}^{n} d(x_{i-1}, x_i)$$

isto é,

$$h_\varepsilon(F(x), F(y)) \le k\sum_{i=1}^{n} d(x_{i-1}, x_i)$$

Uma vez que a $\varepsilon-$cadeia era qualquer, segue que

$$h_\varepsilon(F(x), F(y)) \le kd_\varepsilon(x,y)$$

provando assim que F é uma contracção multivaluada com respeito às métricas d_ε e h_ε. Pelo teorema do ponto fixo de Nadler, F tem um ponto fixo, o que conclui a demonstração do teorema. □

2. SUCESSÃO DE CONTRACÇÕES MULTIVALUADAS

Seja (X,d) um espaço métrico; representamos por $K(X)$ o conjunto formado por todos os subconjuntos compactos e não vazios de X.

Se (X,d) for um espaço métrico completo, então $K(X)$, com a métrica h_d, também é completo (ver apêndice 2).

O seguinte teorema (S. Nadler, [25]) generaliza, para funções multivaluadas, os teoremas 1.4.1, 1.4.2 e 1.4.3.

Teorema 3.2.1 Sejam (X,d) um espaço métrico completo e $F_i : X \to K(X)$ uma família de contracções multivaluadas com ponto fixo x_i, $i \in IN$.

Seja ainda $F_0 : X \to K(X)$ uma contracção multivaluada.

Suponha-se que uma das seguintes condições é satisfeita:

1. As funções $F_1, F_2, \ldots$ têm o mesmo coeficiente de contracção k e a sucessão $(F_n)_{n\in IN}$ converge pontualmente para F_0;
2. A sucessão $(F_n)_{n\in IN}$ converge uniformemente para F_0;
3. X é localmente compacto e a sucessão $(F_n)_{n\in IN}$ converge pontualmente para F_0;

Então existe uma subsucessão $(x_{i_k})_{k\in IN}$ de $(x_i)_{i\in IN}$ convergente para o ponto fixo de F_0.

Demonstração Nesta demonstração utilizaremos os teoremas 1.4.1, 1.4.2 e 1.4.3.

Comecemos por definir, para $i = 0, 1, 2, \ldots$

$$\begin{array}{rccc} \overline{F}_i : & K(X) & \to & K(X) \\ & A & \mapsto & \bigcup\limits_{a\in A} \{F_i(a)\} \end{array}$$

Como F_i é contínua e A é compacto, resulta que $\overline{F_i}(A)$ é compacto.

Vejamos que $\overline{F}_i$ é uma contracção.

$$h_d\left(\overline{F}_i(A), \overline{F}_i(B)\right) = h_d\left(\bigcup_{a\in A}\{F_i(a)\}, \bigcup_{b\in B}\{F_i(b)\}\right) =$$

$$= \max\left\{ \sup_{x\in \bigcup\limits_{a\in A}\{F_i(a)\}} d\left(x, \bigcup_{b\in B}\{F_i(b)\}\right), \sup_{x\in \bigcup\limits_{b\in B}\{F_i(b)\}} d\left(x, \bigcup_{a\in A}\{F_i(a)\}\right) \right\} \le$$

$$\le k_i \max\left\{ \sup_{x\in \bigcup\limits_{a\in A}\{a\}} d\left(x, \bigcup_{b\in B}\{b\}\right), \sup_{x\in \bigcup\limits_{b\in B}\{b\}} d\left(x, \bigcup_{a\in A}\{a\}\right) \right\} = k_i h_d(A,B)$$

Como $K(X)$ é completo, pelo teorema do ponto fixo de Banach, $\overline{F}_i$ tem um único ponto fixo $A_i \in K(X)$, para $i \in IN_0$.

Suponhamos que $(F_i)_{i \in IN}$ converge pontualmente para F_0 (conforme é suposto em 1 e 3), então $(F_i)_{i \in IN}$ converge uniformemente para F_0 em subconjuntos compactos de X (análogo ao que foi visto na demonstração do teorema 1.4.3). Seja $A \in K(X)$. Uma vez que A é compacto, concluímos que $(\overline{F}_i)_{i \in IN}$ converge pontualmente para $\overline{F}_0$ em $K(X)$, isto é,

$$\lim_{i \to \infty} \overline{F}_i(A) = \overline{F}_0(A)$$

É também verdade que, supondo que $(F_i)_{i \in IN}$ converge uniformemente para F_0 (como é suposto em 2), então $(\overline{F}_i)_{i \in IN}$ converge uniformemente para $\overline{F}_0$ em $K(X)$.

Atendendo aos teoremas 1.4.1, 1.4.2 e 1.4.3, $(A_i)_{i \in IN}$ (sucessão de pontos fixos de $(\overline{F}_i)_{i \in IN}$) converge para A_0 (ponto fixo de $\overline{F}_0$).

Afirmamos que $K = \bigcup_{i \in IN_0} A_i$ é compacto.

De facto, seja $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$ uma cobertura de K. Logo existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tal que $A_0 \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}$. Atendendo que $(A_i)_{i \in IN}$ converge para A_0, $U_{\alpha_i}, i = 1, \ldots, n$ são abertos e a reunião de abertos é um aberto, concluímos que existe $p \in IN$ tal que

$$A_j \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i},\ j \geq p$$

Mas $A_1, \ldots, A_{p-1}$ também admitem uma subcobertura finita, pois cada um deles é compacto. Logo K tem uma subcobertura finita, provando assim o pretendido.

Conforme o que foi visto na demonstração do teorema do ponto fixo de Banach, $\left(\overline{F}_i^n(\{x_i\})\right)_{n \in IN}$ converge para A_i.

Mas x_i é o ponto fixo de F_i, isto é, $x_i \in F_i(x_i)$, logo

$$F_i(x_i) \subseteq F_i^2(x_i) \Rightarrow x_i \in F_i^2(x_i)$$

Repetindo este processo, concluímos que $x_i \in F_i^n(x_i) = \overline{F}_i^n(\{x_i\})$, $\forall n \in IN$.

Portanto, $x_i \in A_i, \forall n \in IN$ (A_i é o ponto fixo de $\overline{F}_i$)

Logo $(x_i)_{i \in IN} \subseteq K$ e como K é compacto, $(x_i)_{i \in IN}$ admite uma subsucessão $(x_{i_k})_{k \in IN}$ convergente. Vejamos que, se $(x_{i_k})_{k \in IN}$ convergir para x_0, então x_0 é o ponto fixo de F_0.

Sejam então $x_0 = \lim\limits_{k \to \infty} x_{i_k}$ e $\varepsilon > 0$.

Seja $M > 0$ tal que, para $k \geq M$

$$h_d\left(\overline{F}_{i_k}(\{x_0\}), \overline{F}_0(\{x_0\})\right) < \frac{\varepsilon}{2} \wedge d\left(x_{i_k}, x_0\right) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Por conseguinte, para $k \geq M$

$$h_d\left(\overline{F}_{i_k}\left(\{x_{i_k}\}\right), \overline{F}_0(\{x_0\})\right) \leq h_d\left(\overline{F}_{i_k}\left(\{x_{i_k}\}\right), \overline{F}_{i_k}(\{x_0\})\right) + h_d\left(\overline{F}_{i_k}(\{x_0\}), \overline{F}_0(\{x_0\})\right) \leq$$

$$\leq d(x_{i_k}, x_0) + h_d\left(\overline{F}_{i_k}(\{x_0\}), \overline{F}_0(\{x_0\})\right) < \varepsilon$$

Logo

$$\lim_{k \to \infty} \overline{F}_{i_k}\left(\{x_{i_k}\}\right) = \overline{F}_0(\{x_0\}) \Leftrightarrow \lim_{k \to \infty} F_{i_k}(x_{i_k}) = F_0(x_0)$$

Mas $x_{i_k} \in F_{i_k}(x_{i_k}), \forall k \in IN$, donde se conclui que $x_0 = \lim\limits_{k \to \infty} x_{i_k} \in F_0(x_0)$, isto é, x_0 é um ponto fixo de F_0, o que prova o pretendido. □

4. APLICAÇÕES DO TEOREMA DO PONTO FIXO DE BANACH

No quarto e último capítulo veremos algumas aplicações do teorema do ponto fixo de Banach. Tal teorema, apesar de ser relativamente simples, tem sido uma ferramenta bastante útil para obter alguns resultados.

O teorema do ponto fixo de Banach e o corolário 1.3.12 contêm elementos bastante importantes para o tratamento de certas equações matemáticas, como:

1. Existência e unicidade das soluções;
2. Estabilidade da solução provocada por pequenas perturbações na equação (corolário 1.3.12);
3. Existência de um método para encontrar soluções por aproximações;
4. Cálculo do valor estimado do erro.

Iniciamos vendo algumas aplicações mais directas e concluímos com três grandes resultados em diferentes áreas da matemática.

1. ALGUMAS CONSEQUÊNCIAS DO TEOREMA DO PONTO FIXO DE BANACH

Dado um conjunto não vazio X e f, g duas funções de X em IR, dizemos que $f \leq g$ sse $f(x) \leq g(x), \forall x \in X$.

O seguinte teorema é um resultado fundamental na teoria da programação dinâmica.

Teorema 4.1.1 (Teorema de Blackwell, [2], pag 92) Seja (X,d) um espaço vectorial métrico e $C_b(X)$ o espaço das funções reais, contínuas e limitadas, munido da seguinte distância:

$$d(f,g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$$

Sejam L um subespaço linear fechado de $C_b(X)$ que contém as aplicações constantes e $T : L \to L$ uma aplicação (não necessariamente linear) tal que

1. T é monótona crescente, isto é, $f \leq g \Rightarrow T(f) \leq T(g)$
2. Existe $k \in \left]0,1\right[$ tal que, para toda a função constante c e $\forall f \in L$:

$$T(f + c) \leq T(f) + kc$$

Então T tem um ponto fixo.

Demonstração Pelo que foi visto atrás, $C_b(X)$ é completo uma vez que IR é completo.

Vejamos agora que

$$d(T(f),T(g)) \leq kd(f,g), \forall f,g \in L$$

isto é, T é uma contracção de razão k.

Tome-se então $f, g \in L$ e $c = d(f,g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$.

Por conseguinte, $f - g \leq c \wedge f - g \geq -c$, onde c representa a função

$$\begin{array}{rccc} c: & X & \to & IR \\ & x & \mapsto & c \end{array}$$

Portanto, $f \leq g + c \wedge g \leq f + c$.

Pelas hipóteses 1 e 2 do teorema, resulta que

a) $T(f) \leq T(g+c) \leq T(g) + kc$
b) $T(g) \leq T(f+c) \leq T(f) + kc$

donde se conclui que

$$|T(f(x)) - T(g(x))| \leq kc, \ \forall x \in X$$

Provamos assim que

$$d(T(f), T(g)) = \sup_{x \in X} |T(f(x)) - T(g(x))| \leq kc = kd(f,g)$$

Finalmente, atendendo que L é um fechado de um espaço métrico completo, logo completo, pelo teorema do ponto fixo de Banach, T tem um único ponto fixo, o que conclui a demonstração. □

De seguida apresentamos um exemplo de uma aplicação do teorema do ponto fixo de Banach às matrizes reais.

Exemplo 4.1.2
Considere-se a função linear

$$\begin{array}{rccc} A: & IR^n & \to & IR^n \\ & x & \mapsto & Ax \end{array}$$

e $b = (b_1, ..., b_n) \in IR^n$, sendo $(a_{ij})_{i,j \in \{1,...,n\}}$ a matriz de A relativamente à base canónica de IR^n.

Defina-se F por $F(x) = A(x) + b$.

Suponhamos que pretendíamos encontrar a solução da equação $F(x) = x$ pelo método de sucessivas aproximações. Se F for uma contracção, uma vez que IR^n é completo, então, dado $x_0 \in IR^n$, a sucessão $x_0, F(x_0), F^2(x_0), ...$ converge para a solução procurada, conforme foi visto na demonstração do teorema do ponto fixo de Banach.

Que condições devemos então impor a F de modo que seja uma contracção?

Atendendo a que, dados $x, y \in IR^n$:

$$\|F(x) - F(y)\| = \|A(x) - A(y)\| = \|A(x-y)\| \leq \|A\| \; \|x-y\|$$

basta então que $\|A\| \leq 1$, o que naturalmente depende da norma que se fixar em IR^n.

Assim, pelo que foi visto em 1.2.4, se fixarmos:

1. a norma euclidiana, $\| \; \|_1$, então $\sqrt{\lambda} < 1$, onde λ é o maior valor próprio de $A^* \circ A$, garante que $\|A\|_1 < 1$;

2. a norma da soma, $\| \; \|_2$, então $\sum_i |a_{ij}| < 1$, $\forall j \in \{1, \ldots, n\}$ garante que $\|A\|_2 < 1$;

3. a norma do máximo, $\| \; \|_3$, então $\sum_j |a_{ij}| < 1$, $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$ garante que $\|A\|_3 < 1$.

Note-se que a existência (ou não) da solução não depende da norma. A aplicação (ou não) do teorema do ponto fixo de Banach é que depende da norma.

2. TEOREMA DA FUNÇÃO INVERSA

Considere-se o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = y_1 \\ \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n = y_n \end{cases}$$

A solução $x = (x_1, \ldots, x_n)$ do sistema é única se e só se a matriz $A = \left(a_{ij}\right)_{i,j=1,\ldots,n}$ tiver determinante não nulo.

O mesmo problema pode ser colocado agora no sistema de funções

$$\begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n) = y_1 \\ \\ f_n(x_1, \ldots, x_n) = y_n \end{cases}$$

Considere-se, como exemplo, uma função $f : IR \to IR$ contínua, derivável com derivada contínua e $x_0 \in IR$ tal que $f'(x_0) \neq 0$. Suponhamos, por exemplo, que $f'(x_0) > 0$. Como f' é contínua,

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall x \in \left]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon\right[= U, f'(x) > 0$$

Uma vez que $\forall x \in U, f'(x) > 0$, a função f é estritamente crescente, logo é injectiva. Portanto, denotando por $W = f(U)$, resulta que $f|_U : U \to W$ é uma bijecção, donde se conclui que $f|_U$ é invertível. Para $y_0 \in W$, podemos garantir a existência e unicidade da solução da equação $f(x) = y_0$, com $x \in U$.

Dados x_0 e y_0 em IR tal que $f(x_0) = y_0$, pretende-se encontrar condições suficientes para que $\exists U \in Vx_0$, $\exists W \in Vy_0$ (onde Vx_0 e Vy_0 representam os conjuntos formados pelas vizinhanças de x_0 e y_0, respectivamente) e dada a equação $f(x) = y$, com $x \in U$ e $y \in W$, esta tenha uma e uma só solução, isto é, $f|_U : U \to W$ seja invertível.

Pelo que foi visto atrás, se $f'(x_0) \neq 0$, $f|_U$ é invertível. Diz-se então que a aplicação f é *localmente invertível* em x_0 (note-se que não se pode tirar qualquer conclusão quanto à inversão global de f).

Além disso, f^{-1} é também derivável em W.

De facto, dado $y_1 \in W$ $\left(\text{o que implica que } y_1 = f(x_1), \text{ para algum } x_1 \in U\right)$ e $y = f(x)$:

$$\left(f^{-1}\right)'(y_1) = \lim_{y \to y_1} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_1)}{y - y_1} = \lim_{x \to x_1} \frac{x - x_1}{f(x) - f(x_1)} = \frac{1}{\underbrace{f'(x_1)}_{\neq 0}} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_1))}$$

Portanto, f^{-1} é derivável e $\left(f^{-1}\right)'(y)=\dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}$.

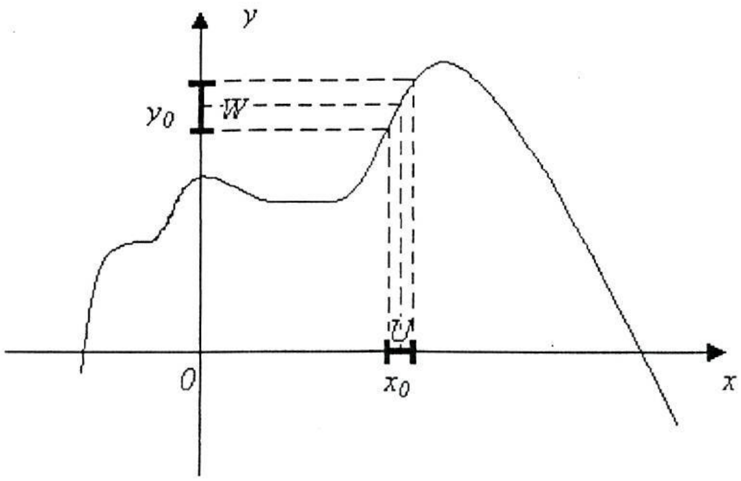


Figura 3: Inversão local.

Suponha-se agora que $f'(x_0)=0$. Neste caso, não se pode concluir nada sobre a função f ser ou não invertível numa vizinhança de x_0. Tomem-se, por exemplo, as funções f e g dadas por $f(x)=x^3$ e $g(x)=x^2$ e $x_0=0$.

O teorema da função inversa é um pilar da análise funcional não - linear. O teorema que iremos enunciar é válido para conjuntos de dimensão finita (IR^n) e generaliza o que foi visto antes para funções reais de variável real. A reformulação do mesmo teorema para conjuntos de dimensão infinita foi feita em 1927 por Hildebrandt e Graves.

Definição 4.2.1 Seja U um aberto de IR^n, $f:U\to IR^n$ uma função derivável e $x\in U$. O *determinante Jacobiano* $Jf(x)$ é o determinante da matriz associada à derivada da função $f=(f_1,\dots,f_n)$ no ponto $x=(x_1,\dots,x_n)$.

$$Jf(x)=\det(Df(x))=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n}\end{vmatrix}$$

Definição 4.2.2 Sejam U e W dois abertos de IR^n. Diz-se que $f:U\to W$ é um *difeomorfismo* se f é bijectiva e se f e f^{-1} são de classe c^1.

Teorema 4.2.3 (Teorema da Função Inversa, [23], pag 230) Seja $A \subset IR^n$ um aberto e $f : A \to IR^n$ uma função de classe c^1.
Seja $x_0 \in A$ e suponha-se que $Jf(x_0) \neq 0$.

Então existem $U \in Vx_0$ em A e $W \in Vf(x_0)$ tais que:

- $f|_U : U \to W$ é bijectiva;
- $(f|_U)^{-1} : W \to U$ é de classe c^1.

Além disso, para $y \in W$ e $x = (f|_U)^{-1}(y)$, tem-se $D(f|_U)^{-1}(y) = [Df(x)]^{-1}$.

Observação 4.2.4

- O resultado do teorema é local; nada afirma sobre o comportamento global da função.

  Por exemplo, tome-se a função de classe c^1 $f : IR^2 \to IR^2$ dada por

  $$f(x,y) = \left(e^x \cos y, e^x \operatorname{sen} y\right)$$

  Portanto,

  $$Jf(x,y) = \begin{vmatrix} e^x \cos y & -e^x \operatorname{sen} y \\ e^x \operatorname{sen} y & e^x \cos y \end{vmatrix} = e^{2x} \neq 0, \forall (x,y) \in IR^2$$

  Logo a função é localmente invertível em $(x,y) \in IR^2$. No entanto, f não é invertível (não é injectiva uma vez que $f(x,y) = f(x, y+2\pi)$).

- O teorema fornece condições suficientes mas não necessárias para que uma função admita inversa local. Tome-se, por exemplo, a função $g : IR \to IR$ dada por $g(x) = x^3$. g é localmente invertível em zero (até é globalmente invertível) e contudo $g'(0) = 0$. No entanto, as condições são necessárias para que a inversa local seja de classe c^1.

Demonstração (do Teorema)

A prova do teorema irá ser dividida em vários passos:

PASSO 1 Simplificação para um caso especial:

Suponhamos que $x_0 = 0$, $f(x_0) = 0$ e $Df(x_0)$ é a identidade. Basta substituir $f(x)$ por $h(x) = (Df(x_0))^{-1}[f(x_0 + x) - f(x_0)]$.

Note-se que, tomando $T_1(x) = x_0 + x$, $T_2(x) = x - f(x_0)$ e $T_3(x) = (Df(x_0))^{-1} x$, (estas três aplicações são globalmente invertíveis) resulta que $h = T_3 \circ T_2 \circ f \circ T_1$.

Portanto, f é invertível numa vizinhança de x_0 se e só se h for invertível numa vizinhança de zero.

Além disso,

$$Dh(0) = (Df(x_0))^{-1} Df(x_0) = I$$

Ou seja, o passo 1 mostra que é suficiente mostrar o teorema supondo que $x_0 = 0$, $f(x_0) = 0$ e $Df(x_0)$ é a identidade.

Estas suposições serão mantidas durante a demonstração.

PASSO 2 Aplicação do teorema do ponto fixo de Banach para obter uma inversão local.

Pretende-se provar que é possível encontrar duas vizinhanças U e W de zero de modo que $\forall y \in W\, \exists^1 x \in U : f(x) = y$. Para tal, tome-se a função g_y definida por $g_y(x) = y + x - f(x)$ (para y fixo, existir x tal que $g_y(x) = x$ é equivalente a existir x tal que $f(x) = y$).

Se existir alguma vizinhança fechada de zero invariante por g_y de modo que g_y seja uma contracção, então pelo teorema do ponto fixo de Banach, g_y possui um único ponto fixo, isto é, existe um único x de modo que $g_y(x) = x$, ou seja, $f(x) = y$, provando o pretendido.

Qual a vizinhança de zero a considerar então?

Seja g a função definida por $g(x) = x - f(x)$; então $Dg(0) = 0$.

Como f é de classe c^1, resulta que a função g também o é. Logo Dg é uma função contínua; em particular, é contínua em zero.

Daqui resulta que

$$\exists r > 0 \forall x : \|x\| \le r \Rightarrow \|Dg_i(x)\| \le \frac{1}{2n}, \forall i \in \{1,\dots,n\}, \text{ onde } g = (g_1,\dots,g_n)$$

Pelo teorema do valor médio, dado $x \in D(0,r)$, existem $c_1, c_2, \dots, c_n \in D(0,r)$ tais que

$$g_i(x) - g_i(0) = Dg_i(c_i)(x - 0) \Leftrightarrow g_i(x) = Dg_i(c_i)x$$

pois g é derivável e $g(0) = 0 - f(0) = 0 \Rightarrow g_i(0) = 0, i = 1,\dots,n$.

Logo, para $x \in D(0,r)$,

$$\|g(x)\| \le \sum_{i=1}^{n} \|g_i(x)\| = \sum_{i=1}^{n} \|Dg_i(c_i)x\| \le \sum_{i=1}^{n} \|Dg_i(c_i)\| . \|x\| \le \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2n} . \|x\| = \frac{\|x\|}{2} \le \frac{r}{2}$$

Portanto, $g(D(0,r)) \subseteq D\left(0,\frac{r}{2}\right)$.

Seja $y \in D\left(0,\frac{r}{2}\right)$. Como $g_y(x) = y + g(x)$, resulta que $g_y(D(0,r)) \subseteq D(0,r)$.

De facto, dado $x \in D(0,r)$ e $y \in D\left(0,\frac{r}{2}\right)$, resulta que

$$\|g_y(x)\| = \|y + g(x)\| \leq \|y\| + \|g(x)\| \leq \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r.$$

Pelo que foi visto atrás, para $\|x\| \leq r$, tem-se $\|Dg(x)\| \leq \frac{1}{2}$. Pelo teorema do valor médio, conclui-se então que

$$\|g(x_1) - g(x_2)\| \leq \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|, \text{ onde } x_1, x_2 \in D(0,r).$$

Como

$$\|g_y(x_1) - g_y(x_2)\| = \|y + g(x_1) - y - g(x_2)\| = \|g(x_1) - g(x_2)\| \leq \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|$$

resulta que g_y é uma contracção no espaço $D(0,r)$.

g_y é uma contracção, $D(0,r) \subseteq IR^n$ é completo pois é um fechado e $g_y(D(0,r)) \subseteq D(0,r)$, então pelo teorema do ponto fixo de Banach, g_y possui um único ponto fixo, o que implica existir um único $x \in D(0,r)$ tal que $f(x) = y$.

Para $y \in D\left(0,\frac{r}{2}\right)$, temos

- se $x \in D(0,r)$ com $\|x\| = r$ é tal que $g_y(x) = x$, então

$$r = \|x\| = \|g_y(x)\| = \|y + g(x)\| \leq \|y\| + \|g(x)\| \leq \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$$

Portanto, $\|y\| = \frac{r}{2}$, donde concluímos que se $y \in B\left(0,\frac{r}{2}\right)$, então $x \in B(0,r)$.

Tome-se então

- $W = B\left(0,\frac{r}{2}\right)$
- $U = f^{-1}\left(B\left(0,\frac{r}{2}\right)\right) \cap B(0,r)$, que é um aberto pois f é uma aplicação contínua.

É agora claro que $f|_U : U \to W$ é invertível.

PASSO 3 A inversa é contínua.

Sejam $x_1, x_2 \in U$. Como

$$\|x_1 - x_2\| = \|g(x_1) + f(x_1) - g(x_2) - f(x_2)\| \leq \|g(x_1) - g(x_2)\| + \|f(x_1) - f(x_2)\| \leq$$
$$\leq \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\| + \|f(x_1) - f(x_2)\|,$$

resulta que

$$\|x_1 - x_2\| \leq 2\|f(x_1) - f(x_2)\|.$$

Portanto, para $y_1, y_2 \in W$, tem-se que

$$\left\|(f|_U)^{-1}(y_1) - (f|_U)^{-1}(y_2)\right\| \leq 2\|y_1 - y_2\|,$$

Logo $(f|_U)^{-1}$ é contínua.

PASSO 4 Para r suficientemente pequeno, $(f|_U)^{-1}$ é derivável em $B\left(0, \frac{r}{2}\right)$.

Seja $L(IR^n, IR^n)$ o espaço das aplicações lineares de IR^n em IR^n e $GL(IR^n, IR^n) \subset L(IR^n, IR^n)$ o espaço das aplicações lineares invertíveis.

De seguida serão apresentados dois lemas necessários para concluir a demonstração do teorema.

Lema 1 $L(IR^n, IR^n)$, munido da norma do supremo:

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|A(x)\|$$

é um espaço de Banach.

Demonstração Seja $(A_n)_{n \in IN}$ uma sucessão de Cauchy, isto é

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists p \in IN\ \forall n, m \geq p : \|A_n - A_m\| < \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists p \in IN\ \forall n, m \geq p : \sup_{\|x\| \leq 1} \|A_n(x) - A_m(x)\| < \varepsilon$$

Portanto, para cada $x \in IR^n$, $(A_n(x))_{n \in IN}$ é uma sucessão de Cauchy. De facto, se $\|x\| > 1$, observe-se que

$$\|A_n(x) - A_m(x)\| = \|x\| \left\| A_n\left(\frac{1}{\|x\|} x\right) - A_m\left(\frac{1}{\|x\|} x\right) \right\|$$

Como IR^n é completo, a sucessão $(A_n(x))_{n \in IN}$ é convergente.

Seja

$$\begin{array}{rccl} A: & IR^n & \to & IR^n \\ & x & \mapsto & A(x) = \lim\limits_{n\to\infty} A_n(x) \end{array}$$

Vejamos que $A_n \underset{n\to\infty}{\to} A$ e que A é linear.

(i) $A_n \underset{n\to\infty}{\to} A$

Análogo ao exemplo 1.1.6.

(ii) A é linear

Sejam $x, y \in IR^n$:

$$A(x) + A(y) = \lim_{n\to\infty} (A_n(x) + A_n(y)) = \lim_{n\to\infty} (A_n(x+y)) = A(x+y)$$

pois, para todo $n \in IN$, A_n é linear.

Analogamente se prova que, para $\lambda \in IR$ e $x \in IR^n$:

$$A(\lambda x) = \lambda A(x)$$

Portanto, $L(IR^n, IR^n)$ é um espaço de Banach. □

Lema 2 $GL(IR^n, IR^n)$ é um subconjunto aberto de $L(IR^n, IR^n)$.

Demonstração

Seja $H \in GL(IR^n, IR^n)$ e $A \in L(IR^n, IR^n)$. Vejamos que $H + A \in GL(IR^n, IR^n)$ se $\|A\| < \frac{1}{\|H^{-1}\|}$.

Como $H \in GL(IR^n, IR^n)$, $H + A = H(I + H^{-1}A)$, e tomando $G = -H^{-1}A$, basta provar que

$$(I - G) \in GL(IR^n, IR^n)$$

quando

$$\|G\| = \|H^{-1}A\| \leq \|H^{-1}\| \|A\| < \|H^{-1}\| \frac{1}{\|H^{-1}\|} = 1.$$

Para tal, considere-se a sucessão $(X_n)_{n\in IN_0}$ definida por:

$X_0 = I$,

$X_1 = I + G$,

$X_2 = I + G + G^2$,

...

$X_n = I + ... + G^n$.

Atendendo a que $\|G\| < 1$, resulta que

$$\left\|X_{p+q} - X_p\right\| = \left\|G^{p+1} + \ldots + G^{p+q}\right\| \le \left\|G^{p+1}\right\| + \ldots + \left\|G^{p+q}\right\| \le \|G\|^{p+1} + \ldots + \|G\|^{p+q} \underset{p \mapsto \infty}{\to} 0$$

Portanto $(X_n)_{n \in I\!N_0}$ é uma sucessão de Cauchy. Pelo lema 1, $L(I\!R^n, I\!R^n)$ é completo, donde concluímos que $X_n \underset{n \mapsto \infty}{\to} X$.

Uma vez que $(I - G)X_n = I - G^{n+1}$, o produto de matrizes é contínuo e $G^{n+1} \underset{n \mapsto \infty}{\to} 0$, onde 0 representa a matriz nula, (pois $\|G\| < 1$) concluímos que $(I - G)X = I$.

Logo $(I - G)^{-1} = X$, isto é, $I - G \in GL(I\!R^n, I\!R^n)$.

Provou-se assim que se $H \in GL(I\!R^n, I\!R^n)$ e $A \in L(I\!R^n, I\!R^n)$, com $\|A\| < \dfrac{1}{\left\|H^{-1}\right\|}$,

então $H + A \in GL(I\!R^n, I\!R^n)$ implica que $B\left(H, \dfrac{1}{\left\|H^{-1}\right\|}\right) \subseteq GL(I\!R^n, I\!R^n)$, o que conclui a demonstração do lema 2. □

Atendendo a que:

(a) $Jf(0) \ne 0$,

(b) Df é uma aplicação contínua,

(c) $GL(I\!R^n, I\!R^n)$ é um aberto de $L(I\!R^n, I\!R^n)$ (lema 2),

conclui-se que existe uma vizinhança V de 0 tal que $\forall x \in V, Df(x)$ é invertível. Podemos supor que $B(0,r) \subset V$ (senão tomemos $r' < r$ de modo que $B(0,r') \subset V$).

Portanto, $\forall x \in B(0,r)$, $Df(x)$ é invertível.

Podemos ainda supor que $\left\|[Df(x)]^{-1}(y)\right\| \le M\|y\|$. De facto, seja

$M_1 = \max\left\{ \left\|[Df(x)]^{-1}(e_1)\right\|, \ldots, \left\|[Df(x)]^{-1}(e_n)\right\| \right\}$, onde $e_1, \ldots, e_n$ é a base canónica de $I\!R^n$.

Então, para $y = (y_1, \ldots, y_n)$,

$$\left\|[Df(x)]^{-1}(y)\right\| = \left\|y_1[Df(x)]^{-1}(e_1) + \ldots + y_n[Df(x)]^{-1}(e_n)\right\| \le$$

$$\le |y_1| \left\| [Df(x)]^{-1}(e_1) \right\| + \ldots + |y_n| \left\| [Df(x)]^{-1}(e_n) \right\| \le M_1\left(|y_1| + \ldots + |y_n|\right) \le M_1\left(\|y\| + \ldots + \|y\|\right) \le$$

$$\le M_1 n \|y\|.$$

Portanto,

$$\left\|[Df(x)]^{-1}(y)\right\| \le M\|y\|\text{, onde } M = M_1 n$$

Sejam

$$y, y_0 \in B\left(0, \frac{r}{2}\right) \text{ e } x = \left(f|_U\right)^{-1}(y),\ x_0 = \left(f|_U\right)^{-1}(y_0)\text{, com } x, x_0 \in U \subseteq B(0,r).$$

Então

$$\frac{\left\|\left(f|_U\right)^{-1}(y) - \left(f|_U\right)^{-1}(y_0) - \left[Df\left(f^{-1}(y_0)\right)\right]^{-1}(y - y_0)\right\|}{\|y - y_0\|} = \frac{\left\|x - x_0 - [Df(x_0)]^{-1}(f(x) - f(x_0))\right\|}{\|f(x) - f(x_0)\|} =$$

$$= \frac{\|x - x_0\|}{\|f(x) - f(x_0)\|} \frac{\left\|[Df(x_0)]^{-1}[Df(x_0)(x - x_0) - (f(x) - f(x_0))]\right\|}{\|x - x_0\|} \le$$

$$\le 2M \frac{\|Df(x_0)(x - x_0) - (f(x) - f(x_0))\|}{\|x - x_0\|}.$$

Nesta última parte usou-se o facto de que

$$\|x - x_0\| \le 2\|f(x) - f(x_0)\|$$

e

$$\left\|[Df(x_0)]^{-1}(y)\right\| \le M\|y\|.$$

Como f é derivável em x_0,

$$\lim_{x \mapsto x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - Df(x_0)(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = 0,$$

logo $\left(f|_U\right)^{-1}$ é derivável em y_0 e $D\left(f|_U\right)^{-1}(y_0) = \left[Df\left(f^{-1}(y_0)\right)\right]^{-1}$, o que conclui a demonstração do teorema. □

Exemplo 4.2.5 Tome-se $f: IR^2 \to IR^2$ dada por $f(x,y) = \left(x + xy - x^3, y + y^4\right)$; f não é invertível porque não é injectiva $\left(f(0,0) = f(1,0) = (0,0)\right)$.

A função f tem as seguintes propriedades:

(a) f é de classe c^1, $f(0,0) = (0,0)$ e $Df(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$.

(b) Para aplicar o teorema basta que:

$W = B\left(0, \frac{r}{2}\right)$, onde r é tal que:

i) $B\left(0, \frac{r}{2}\right) \subset V$, onde V é vizinhança de $(0,0)$ tal que $\forall (x,y) \in V : Jf(x,y) \neq 0$;

ii) $\forall (x,y) \in B(0,r) : \|Dg_i(x,y)\| < \frac{1}{4}$, onde $g(x,y) = (x,y) - f(x,y)$;

o que é verificado tomando $r = \frac{1}{10}$

Tome-se $(x_0, y_0) \in B\left((0,0), \frac{1}{20}\right)$.

Pretende-se encontrar $(a,b) \in f^{-1}(W) \cap B\left((0,0), \frac{1}{10}\right) : f(a,b) = (x_0, y_0)$.

Pelo que foi visto na demonstração do teorema, tal (a,b) é o ponto fixo de $g_{(x_0,y_0)}(x,y) = (x_0, y_0) + (x,y) - f(x,y)$, onde $g_{(x_0,y_0)}$ é uma contracção de razão $\frac{1}{2}$. Tome-se $(x,y) \in D\left((0,0), \frac{1}{10}\right) \cap f^{-1}(W)$.

Pelo que foi visto na demonstração do teorema do ponto fixo de Banach, a sucessão (x,y), $g_{(x_0,y_0)}(x,y)$, $g^2{}_{(x_0,y_0)}(x,y)$, ... converge para o ponto fixo (a,b). Quantas vezes será necessário iterar (x,y) por $g_{(x_0,y_0)}$ para garantir que a distância de $g^n{}_{(x_0,y_0)}(x,y)$ a (a,b) seja inferior a ε?

Note-se que

$$d\left(g_{(x_0,y_0)}(x,y),(a,b)\right) = d\left(g_{(x_0,y_0)}(x,y), g_{(x_0,y_0)}(a,b)\right) \leq \frac{1}{2} d((x,y),(a,b)).$$

Não é possível conhecer o valor de $d((x,y),(a,b))$, mas como

$$(x,y),(a,b) \in D\left((0,0), \frac{1}{10}\right)$$

e o diâmetro de $D\left((0,0), \frac{1}{10}\right)$ é $\frac{1}{5}$, pode-se garantir que $d((x,y),(a,b)) \leq \frac{1}{5}$.

De um modo geral,

$$d\left(g^n{}_{(x_0,y_0)}(x,y),(a,b)\right) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{1}{5}.$$

Portanto basta que

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{1}{5} \leq \varepsilon \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 5\varepsilon \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(5\varepsilon)}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{-\ln(5\varepsilon)}{\ln 2}.$$

3. TEOREMA DA EXISTÊNCIA E UNICIDADE LOCAL DE SOLUÇÕES DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Sejam U um aberto de IR^n e $f(t,x)$ uma aplicação de $[-a,a]\times U$ em IR^n com $a>0$.

Seja ainda $x(t)$ uma função derivável com valores em U definida em $[-a,a]$. Portanto, $x'(t)$ é uma aplicação de $[-a,a]$ em IR^n. Tomando $x=x(t)$, podemos considerar uma nova função $f(t,x(t))$ de $[-a,a]$ em IR^n.

Suponhamos que se pretendia resolver a equação diferencial

$$x'(t)=f(t,x(t)) \qquad \textbf{(1)}$$

com a condição inicial

$$x(0)=x_0 \qquad \textbf{(2)}$$

Em alguns casos podemos garantir a existência e unicidade da solução da equação diferencial resolvendo a dada equação, isto é, determinando a sua solução.

Pensemos agora em termos mais gerais. Muitas das vezes não é possível determinar a sua solução (porque não existe um método de resolução que se aplique a todos os casos)

Comece-se por notar que resolver a equação **(1)** com a condição inicial **(2)** é equivalente a resolver a seguinte equação integral

$$x(t)=x_0+\int_0^t f(s,x(s))ds$$

Logo, o problema inicial resolve-se determinando o ponto fixo da aplicação

$$F(x)=x_0+\int_0^t f(s,x(s))ds$$

Naturalmente somos levados a pensar no teorema do ponto fixo de Banach. Para tal, é necessário encontrar um espaço métrico completo (X,d) e que F seja uma contracção que envie o conjunto X nele próprio.

O próximo teorema fornece-nos condições suficientes para resolver a questão anterior. Veremos também que o mesmo fornece-nos um método para determinar a solução.

Para já, definamos condição de Lipschitz que será necessária para enunciar o teorema.

Definição 4.3.1 *A condição de Lipschitz*: Sejam (X_1,d_1) e (X_2,d_2) dois espaços métricos, $f:X_1\to X_2$ uma função e $k\in IR^+$. A função f diz-se que satisfaz a condição de Lipschitz com constante k se $\forall x,y\in X_1$, $d_2(f(x),f(y))\le kd_1(x,y)$. A k chama-se constante de Lipschitz.

Da definição resulta que qualquer função que satisfaça a condição de Lipschitz é uniformemente contínua.

Teorema 4.3.2 ([23], pag 238) Seja $f : [-a,a] \times D(x_0, r) \to IR^n$, com $x_0 \in IR^n$, uma função contínua não nula. Suponha-se que existe $k > 0$ tal que

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \le k\|x - y\|$$

$\forall t \in [-a,a]$, $\forall x, y \in D(x_0, r)$.

Sejam $c = \sup\{\|f(t,x)\| : t \in [-a,a], x \in D(x_0,r)\}$ e $b < min\left\{a, \frac{r}{c}, \frac{1}{k}\right\}$.

Então existe uma única função derivável $x : [-b,b] \to D(x_0, r)$ tal que

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

isto é, x é solução da equação diferencial $x'(t) = f(t, x(t))$ com a condição inicial $x(0) = x_0$.

Demonstração A equação

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

é equivalente à condição

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(s))ds.$$

Considere-se o conjunto das aplicações contínuas de $[-b,b]$ em $D(x_0, r)$, $C([-b,b], D(x_0,r))$, com a métrica da convergência uniforme, que é um espaço métrico completo.

Seja $X = \{\varphi \in C([-b,b], D(x_0,r)) : \varphi(0) = x_0\} \subseteq C([-b,b], D(x_0,r))$.

Vejamos que X é um fechado. Para tal, tome-se $\varphi_0 \in C([-b,b], D(x_0,r)) \setminus X$; então $\varphi_0(0) \neq x_0$.

Seja $d = \dfrac{d(\varphi_0(0), x_0)}{2} \neq 0$ e

$$U = \{\varphi \in C([-b,b], D(x_0,r)) : \|\varphi(t) - \varphi_0(t)\| < d, \forall t \in [-b,b]\}$$

que é um aberto e $\varphi_0 \in U \subseteq C([-b,b], D(x_0,r)) \setminus X$. Logo X é um fechado. Como $C([-b,b], D(x_0,r))$ é um espaço métrico completo e X é fechado, X (com a métrica induzida) também é um espaço métrico completo.

Seja

$$\begin{aligned} F:\ & X \to X \\ & \varphi \mapsto F(\varphi) \end{aligned}$$

onde $F(\varphi)(t) = x_0 + \int_0^t f(s, \varphi((s))ds$.

Vejamos que F está bem definida, isto é, $F(\varphi) \in X$, para $\varphi \in X$:

1) $F(\varphi)(0) = x_0 + \int_0^0 f(s, \varphi(s))ds = x_0$;

2) $F(\varphi) \in C([-b, b], IR^n)$;

2) $F(\varphi)(t) \in D(x_0, r)$, para $t \in [-b, b]$:

$$\|F(\varphi)(t) - x_0\| = \left\| \int_0^t f(s, \varphi(s))ds \right\| \leq \int_0^t \|f(s, \varphi(s))\| ds \leq \int_0^t c\, ds \leq bc \leq r$$

(nestas condições usou-se o facto de $c = \sup\{\|f(t,x)\| : t \in [-a, a], x \in D(x_0, r)\}$, $t \leq b$ e $b < \frac{r}{c}$).

Portanto $F(\varphi)(t) \in D(x_0, r)$, logo $F(\varphi) \in X$.

Vejamos agora que F é uma contracção:

Sejam $\varphi, \psi \in X$.

$$\|F(\varphi) - F(\psi)\| = \sup_{-b \leq t \leq b} \|F(\varphi)(t) - F(\psi)(t)\| =$$

$$= \sup_{-b \leq t \leq b} \left\| \int_0^t f(s, \varphi(s))ds - \int_0^t f(s, \psi(s))ds \right\| = \sup_{-b \leq t \leq b} \left\| \int_0^t (f(s, \varphi(s)) - f(s, \psi(s)))ds \right\| \leq$$

$$\leq \sup_{-b \leq t \leq b} \int_0^t \|f(s, \varphi(s)) - f(s, \psi(s))\| ds \leq \sup_{-b \leq t \leq b} \int_0^t k \|\varphi(s) - \psi(s)\| ds \leq$$

$$\leq \sup_{-b \leq t \leq b} k \int_0^t \|\varphi - \psi\| ds \leq kb \|\varphi - \psi\|.$$

Seja $k' = kb < 1$, pois $b < \frac{1}{k}$.

Portanto $\|F(\varphi) - F(\psi)\| \leq k' \|\varphi - \psi\|$, isto é, F é uma contracção definida num espaço métrico completo. Pelo teorema do ponto fixo de Banach, F possui um único ponto fixo x.

Como $F(x(t)) = x(t), \forall t$, resulta que $x(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(s))ds$, que é a solução pretendida, o que conclui a demonstração do teorema. □

Ainda é verdade que a solução depende continuamente da condição inicial. Esta questão é bastante importante, pois em problemas reais pode existir um certo grau de incerteza. Interessa então saber que se a condição inicial for ligeiramente alterada, a solução da equação diferencial também será apenas um pouco alterada. De outro modo, uma pequena alteração na condição inicial poderá originar soluções bastantes diferentes.

Para mostrar tal facto, irá ser usada a observação 1.3.13.

Tome-se a função F_1, definida por $F_1(x_1,\varphi)(t) = x_1 + \int_0^t f(s,\varphi(s))ds$.

1) Para $x_1 \in D(x_0,r_1)$, com r_1 suficientemente pequeno

$$\begin{aligned} F_{x_1} : \ & X \to X \\ & \varphi \mapsto F_{x_1}(\varphi) = F_1(x_1,\varphi) \end{aligned}$$

satisfaz as hipóteses do teorema do ponto fixo de Banach, uma vez que X é um espaço métrico completo e F é uma contracção, logo

$\|F_{x_1}(\varphi) - F_{x_1}(\psi)\| = \|F(\varphi) - F(\psi)\| \leq k\|\varphi - \psi\|$, com $k \in]0,1[$ que não depende de x_1.

Portanto F_{x_1} é uma contracção.

Concluímos então que F_{x_1} tem um único ponto fixo φ_{x_1}.

2) Vejamos agora que F_φ satisfaz a condição (b) do corolário 1.3.12. Para tal, tome-se $\varphi \in X$ e a função

$$\begin{aligned} F_\varphi : \ & D(x_0,r_1) \to X \\ & x_1 \mapsto F_\varphi(x_1) = F_1(x_1,\varphi) \end{aligned}$$

Mostremos que a função F_φ é contínua. Para tal, tome-se $x_1 \in D(x_0,r_1), \varepsilon > 0$ e $\delta = \varepsilon$. Então, para todo $x \in D(x_0,r_1)$:

$$\|x - x_1\| < \delta \Rightarrow \|F_1(x,\varphi) - F_1(x_1,\varphi)\| < \varepsilon,$$

uma vez que

$$\|F_1(x,\varphi) - F_1(x_1,\varphi)\| = \left\| x + \int_0^t f(s,\varphi(s))ds - x_1 - \int_0^t f(s,\varphi(s))ds \right\| = \|x - x_1\| < \delta = \varepsilon.$$

Portanto, a solução da equação diferencial varia continuamente com a condição inicial x_0, isto é, dadas duas equações diferenciais,

$$(1) \begin{cases} x'(t) = f(t,x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad \text{e} \quad (2) \begin{cases} x'(t) = f(t,x(t)) \\ x(0) = \overline{x}_0 \end{cases}$$

com φ solução de (1) definida em $[-b,b]$ e $\overline{\varphi}$ solução de (2) definida em $[-\overline{b},\overline{b}]$ (podemos supor que $\overline{b} > b$), então φ e $\overline{\varphi}$ estão definidas em $[-b,b]$ e se $\overline{x}_0 \to x_0$, a solução $\overline{\varphi}$ converge uniformemente para φ.

Como construir a solução $x(t)$ pretendida?

Considere-se a sucessão de funções $(x_n(t))_{n\in IN}$, chamada *sucessão de iterados de Picard*:

$$x_1(t) = x_0;$$

$$x_2(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x_1(s))ds;$$

$$x_3(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x_2(s))ds$$

$$\dots$$

$$x_n(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x_{n-1}(s))ds.$$

Então, pelo o que foi visto, tem-se que $x_n(t) \underset{n\to\infty}{\to} x(t)$.

Portanto, o teorema anterior não só nos fornece condições suficientes para garantir a existência e unicidade local da solução de uma equação diferencial, assim como fornece um algoritmo para encontrar uma solução aproximada da equação diferencial.

Exemplo 4.3.3 Considere-se a equação diferencial:

$$\begin{cases} x'(t) = x^3 e^x \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

Seja $f(t,x) = x^3 e^x$ (f não depende de t) definida em $[1-r, 1+r]$, $r > 0$

Nas condições do teorema anterior, seja

$$c = \sup\{|f(t,x)| : -r \le x - 1 \le r\} = \sup\{|x^3 e^x| : 1 - r \le x \le 1 + r\} = (1+r)^3 e^{1+r}.$$

Uma vez que $f'(x) = (3x^2 + x^3)\, e^x$, basta tomar

$$k = \sup\{|(3x^2 + x^3)\, e^x| : 1 - r \le x \le 1 + r\} = (3(1+r)^2 + 3(1+r)^3)\, e^{1+r}.$$

Portanto,

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{(3(1+r)^2 + 3(1+r)^3)\, e^{1+r}}$$

e

$$\frac{r}{c} = \frac{r}{(1+r)^3 e^{1+r}}$$

Logo, tome-se $b < \min\left\{\dfrac{1}{(3(1+r)^2 + 3(1+r)^3)\, e^{1+r}}, \dfrac{r}{(1+r)^3 e^{1+r}}\right\}$.

Portanto, existe uma única função derivável $x:[-b,b]\to D(1,r)$ tal que

$$\begin{cases} x'(t)=x^3e^x \\ x(0)=1 \end{cases}.$$

Exemplo 4.3.4 Tome-se a equação diferencial

$$\begin{cases} x'(t)=x \\ x(0)=1 \end{cases}$$

Os iterados de Picard são:

$x_1(t)=x_0=1$;

$x_2(t)=1+\int_0^t 1ds=1+t=\sum_{k=0}^{1}\frac{t^k}{k!}$;

$x_3(t)=1+\int_0^t (1+s)ds=1+t+\frac{t^2}{2}=\sum_{k=0}^{2}\frac{t^k}{k!}$;

$x_4(t)=1+\int_0^t \left(1+s+\frac{s^2}{2}\right)ds=1+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3!}=\sum_{k=0}^{3}\frac{t^k}{k!}$.

Provemos por indução que $x_n(t)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^k}{k!}$:

1) Para $n=1, x_1(t)=1$;

2) Suponhamos agora que $x_n(t)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^k}{k!}$. Então

$$x_{n+1}(t)=1+\int_0^t \sum_{k=0}^{n-1}\frac{s^k}{k!}ds=1+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^{k+1}}{(k+1)!}=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{t^k}{k!}=\sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k!}.$$

Portanto, $e^t=\lim_{n\to\infty}x_n(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}$ é a solução de $x'(t)=x$ com a condição inicial $x(0)=1$.

O teorema do ponto fixo de Banach também pode ser aplicado na resolução de algumas equações integrais. Seguidamente apresentamos alguns exemplos de tais aplicações.

Exemplo 4.3.5 ([20], pag 49)

I Considere-se a equação integral de Fredholm:

$$f(x)=\lambda\int_a^b K(x,y)f(y)dy+\varphi(x)$$

onde K e φ são duas funções dadas, f é a função a determinar e λ um parâmetro qualquer.

Suponhamos que $K(x,y)$ e $\varphi(x)$ são contínuas em $[a,b]\times[a,b]$ e $[a,b]$, respectivamente.

Uma vez que $[a,b]\times[a,b]$ é compacto e K é contínua em $[a,b]\times[a,b]$, resulta que $|K(x,y)|\leq M$, $\forall(x,y)\in[a,b]\times[a,b]$, com $M>0$.

Consideremos a seguinte aplicação:

$$\begin{array}{rccc} A: & C([a,b],IR) & \to & C([a,b],IR) \\ & g & \mapsto & Ag \end{array}$$

onde $Ag(x)=\lambda\int_a^b K(x,y)g(y)dy+\varphi(x)$.

Vejamos em que condições a aplicação A é uma contracção.

$$d(Ag_1,Ag_2)=\sup_{x\in[a,b]}|Ag_1(x)-Ag_2(x)|\leq$$

$$\leq|\lambda|M(b-a)\sup_{x\in[a,b]}|g_1(x)-g_2(x)|=|\lambda|M(b-a)d(g_1,g_2)$$

Logo, para $|\lambda|<\dfrac{1}{M(b-a)}$, A é uma contracção. Portanto, como $C([a,b],IR)$ é um espaço métrico completo, A tem um único "ponto fixo", isto é,

$$\exists^1 f\in C([a,b],IR): Af=f \Leftrightarrow f(x)=\lambda\int_a^b K(x,y)f(y)dy+\varphi(x)$$

Para encontrar a solução pretendida por sucessivas aproximações, basta considerar a sequência de funções $f_0(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$,..., onde

$$f_n(x)=\lambda\int_a^b K(x,y)f_{n-1}(y)dy+\varphi(x)$$

II Consideremos a seguinte equação integral:

$$f(x)=\lambda\int_a^b K(x,y,f(y))dy+\varphi(x)$$

onde K e φ são duas funções contínuas definidas em $[a,b]\times[a,b]\times \mathrm{IR}$ e em $[a,b]$, respectivamente.

Suponhamos ainda que existe $M>0$ tal que:

- $|K(x,y,z_1)-K(x,y,z_2)|\le M|z_1-z_2|$, $\forall (x,y)\in[a,b]\times[a,b]$
- $|\lambda|<\dfrac{1}{M(b-a)}$

Novamente, seja

$$\begin{array}{cccc} A: & C([a,b],IR) & \to & C([a,b],IR) \\ & g & \mapsto & Ag \end{array}$$

onde $Ag(x)=\lambda\int_a^b K(x,y,g(y))dy+\varphi(x)$.

A é uma contracção, pois dados $g_1,g_2\in C([a,b],IR)$

$$d(Ag_1,Ag_2)=\sup_{x\in[a,b]}|Ag_1(x)-Ag_2(x)|\le$$

$$\le|\lambda|M(b-a)\sup_{x\in[a,b]}|g_1(x)-g_2(x)|=|\lambda|M(b-a)d(g_1,g_2)$$

com $|\lambda|M(b-a)<1$.

Logo A possui um único "ponto fixo", provando assim a existência e unicidade da solução procurada.

III Consideremos a equação integral de Volterra:

$$f(x)=\lambda\int_a^x K(x,y)f(y)dy+\varphi(x)$$

onde K e φ são contínuas e definidas em $[a,b]\times[a,b]$ e $[a,b]$, respectivamente.

Ao contrário da equação de Fredholm, é possível garantir a existência da solução, para qualquer valor de λ.

Seja

$$\begin{array}{cccc} A: & C([a,b],IR) & \to & C([a,b],IR) \\ & g & \mapsto & Ag \end{array}$$

onde $Ag(x)=\lambda\int_a^x K(x,y)g(y)dy+\varphi(x)$.

Vejamos que A^n é uma contracção, para algum $n \in IN$:

$$d(Ag_1, Ag_2) = \sup_{x\in[a,b]} |Ag_1(x) - Ag_2(x)| \leq$$

$$\leq \sup_{x\in[a,b]} |\lambda| \int_a^x |K(x,y)(g_1(y) - g_2(y))| dy \leq |\lambda| Mm(b-a)$$

onde $M = \sup|K(x,y)|$ e $m = d(g_1, g_2)$.

$$d(A^2 g_1, A^2 g_2) = \sup_{x\in[a,b]} |A(Ag_1(x)) - A(Ag_2(x))| =$$

$$= \sup_{x\in[a,b]} \left| A\left(\lambda \int_a^x K(x,y) g_1(y) dy + \varphi(x) \right) - A\left(\lambda \int_a^x K(x,y) g_2(y) dy + \varphi(x) \right) \right| =$$

$$= \sup_{x\in[a,b]} \left| \lambda \int_a^x K(x,y) \left(\lambda \int_a^y K(y,z) g_1(z) dz + \varphi(y) \right) dy + \varphi(x) - \right.$$

$$\left. - \lambda \int_a^x K(x,y) \left(\lambda \int_a^y K(y,z) g_2(z) dz + \varphi(y) \right) dy - \varphi(x) \right| =$$

$$= \sup_{x\in[a,b]} |\lambda| \left| \int_a^x K(x,y) \left(\lambda \int_a^y K(y,z)(g_1(z) - g_2(z)) dz \right) dy \right| \leq \sup_{x\in[a,b]} |\lambda| \left| \int_a^x M \left(\lambda \int_a^y Mm dz \right) dy \right| =$$

$$= \sup_{x\in[a,b]} |\lambda|^2 M^2 m \left| \int_a^x \int_a^y 1 dz dy \right| = \sup_{x\in[a,b]} |\lambda|^2 M^2 m \left| \int_a^x (y-a) dy \right| =$$

$$= \sup_{x\in[a,b]} |\lambda|^2 M^2 m \frac{|x-a|^2}{2} \leq |\lambda|^2 M^2 m \frac{|b-a|^2}{2}$$

Repetindo o processo anterior, obtemos

$$d(A^n g_1, A^n g_2) \leq |\lambda|^n M^n m \frac{|b-a|^n}{n!}$$

Para n suficientemente grande, $|\lambda|^n M^n \frac{|b-a|^n}{n!} < 1$, donde concluímos que A^n é uma contracção, o que prova a existência e unicidade da solução da equação de Volterra.

4. TEOREMA DE GROBMAN - HARTMAN

Ao longo desta secção veremos mais uma aplicação do teorema do ponto fixo de Banach, agora na área de Sistemas Dinâmicos. Para já, comecemos por apresentar alguns resultados e definições que serão necessários para tal.

As demonstrações deste capítulo seguem as apresentadas em [27].

Seja $L(IR^n, IR^n)$ o espaço vectorial das aplicações lineares de IR^n em IR^n, munido da norma usual:

$$\|L\| = \sup\{\|L(x)\| : \|x\| \leq 1\}$$

Pelo que já foi visto, $L(IR^n, IR^n)$, munido desta norma, é um espaço de Banach.

Teorema 4.4.1 (Forma Canónica de Jordan Real) Dado $L \in L(IR^n, IR^n)$, existe uma base de IR^n na qual a matriz de L tem a forma

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & A_r & & & \\ & & & B_1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & B_s \end{pmatrix}$$

onde

$$A_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & & & & 0 \\ 1 & \lambda_i & & & \\ & 1 & \lambda_i & & \\ & 0 & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & \lambda_i \end{pmatrix} \quad i=1,\ldots,r,\ \lambda_i \in IR \text{ e}$$

$$B_j = \begin{pmatrix} C_j & & & 0 \\ I & C_j & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & I & C_j \end{pmatrix} \quad \text{onde } C_j = \begin{pmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \end{pmatrix}, \alpha_j, \beta_j \in IR,\quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, j=1,\ldots,s$$

As submatrizes $A_1, \ldots, A_r, B_1, \ldots, B_s$ são únicas a menos da ordem.

Corolário 4.4.2 Seja $L \in L(IR^n, IR^n)$. Então, dado $\varepsilon > 0$ existe uma base de IR^n na qual a matriz de L tem a forma

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & & & 0 \\ & \cdots & & & & \\ & & A_r & & & \\ & & & B_1 & & \\ & 0 & & & \cdots & \\ & & & & & B_s \end{pmatrix}$$

onde

$$A_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & & & & 0 \\ \varepsilon & \lambda_i & & & \\ & \varepsilon & \lambda_i & & \\ & 0 & \cdots & \cdots & \\ & & & \varepsilon & \lambda_i \end{pmatrix} \quad i=1,\dots,r,\ \lambda_i \in IR \text{ e}$$

$$B_j = \begin{pmatrix} C_j & & & 0 \\ I_\varepsilon & C_j & & \\ 0 & \cdots & & \\ & & I_\varepsilon & C_j \end{pmatrix}, \text{ onde } C_j = \begin{pmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \end{pmatrix}, \alpha_j, \beta_j \in IR, \quad I_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix} \quad j=1,\dots,s$$

Seja $L \in L(IR^n, IR^n)$. O *espectro de* L é o conjunto formado pelas raízes complexas do polinómio de grau n, $\det(L - \lambda Id)$.

Definição 4.4.3 Um isomorfismo linear $A \in GL(IR^n, IR^n)$ é *hiperbólico* se o espectro de A é disjunto do círculo unitário $S^1 \subset \mathbb{C}$.

Proposição 4.4.4 Se $A \in GL(IR^n, IR^n)$ é um isomorfismo hiperbólico, então existe uma decomposição $IR^n = E^s \oplus E^u$, tal que os subespaços vectoriais E^s e E^u são invariantes por A e os valores próprios complexos de $A^s = A|_{E^s}$ e $A^u = A|_{E^u}$ são os valores próprios de A de módulo menor que um e maior que um, respectivamente.

Demonstração Seja $e_1, \dots, e_n$ uma base de IR^n na qual a matriz de A está na forma canónica de Jordan. Como, por hipótese, A é um isomorfismo hiperbólico, então os valores próprios complexos de A têm módulo diferente de um. Logo, se λ é um valor próprio de A, $|\lambda| < 1$ ou $|\lambda| > 1$.

Podemos ordenar os elementos da base de modo que a matriz de A seja da forma

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & & & & & & & & & \\ & \cdots & & & & & & & & \mathbf{0} & & \\ & & A_{s'} & & & & & & & & & \\ & & & B_1 & & & & & & & & \\ & & & & \cdots & & & & & & & \\ & & & & & B_{s''} & & & & & & \\ & & & & & & C_1 & & & & & \\ & & & & & & & \cdots & & & & \\ & \mathbf{0} & & & & & & & C_{u'} & & & \\ & & & & & & & & & D_1 & & \\ & & & & & & & & & & \cdots & \\ & & & & & & & & & & & D_{u''} \end{pmatrix}$$

onde:

$$A_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & & & 0 \\ 1 & \lambda_i & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & 1 & \lambda_i \end{pmatrix}, \quad |\lambda_i| < 1$$

$$B_j = \begin{pmatrix} M_j & & & 0 \\ I & M_j & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & I & M_j \end{pmatrix}, \quad M_j = \begin{pmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \end{pmatrix}, \quad \alpha_j^2 + \beta_j^2 < 1, \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & & & 0 \\ 1 & \lambda_k & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & 1 & \lambda_k \end{pmatrix}, \quad |\lambda_k| > 1$$

$$D_l = \begin{pmatrix} M_l & & & 0 \\ I & M_l & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & I & M_l \end{pmatrix}, \quad M_l = \begin{pmatrix} \alpha_l & \beta_l \\ -\beta_l & \alpha_l \end{pmatrix}, \quad \alpha^2{}_l + \beta^2{}_l > 1, \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sejam E^s o subespaço gerado por $e_1,\dots,e_s$, onde $e_1,\dots,e_s$ correspondem aos subespaços associados a $A_1,\dots,A_{s'},B_1,\dots,B_{s''}$ e E^u o subespaço gerado por $e_{s+1},\dots,e_n$, onde $e_{s+1},\dots,e_n$ correspondem aos subespaços associados a $C_1,\dots,C_{u'},D_1,\dots,D_{u''}$.

Portanto, a matriz de A^s na base $\{e_1,\dots,e_s\}$ é

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & & & \\ & \dots & & & \mathbf{0} & \\ & & A_{s'} & & & \\ & & & B_1 & & \\ & \mathbf{0} & & & \dots & \\ & & & & & B_{s''} \end{pmatrix}$$

e a matriz de A^u na base $\{e_{s+1},\dots,e_n\}$ é

$$\begin{pmatrix} C_1 & & & & & \\ & \dots & & & \mathbf{0} & \\ & & C_{u'} & & & \\ & & & D_1 & & \\ & \mathbf{0} & & & \dots & \\ & & & & & D_{u''} \end{pmatrix}$$

Além disso, $IR^n = E^s \oplus E^u$, pois $\{e_1,\dots,e_s,e_{s+1},\dots,e_n\}$ é uma base de IR^n.

É imediato verificar que E^s e E^u são invariantes por A.

Conclui-se assim a demonstração da proposição. □

Definição 4.4.5 Dado um isomorfismo hiperbólico A, à dimensão de E^s chama-se *índice do isomorfismo.*

Proposição 4.4.6 Se $A \in GL(IR^n, IR^n)$ é um isomorfismo hiperbólico, então existe uma norma, $\|\ \|_1$, em IR^n tal que $\|A^s\|_1 < 1$ e $\|(A^u)^{-1}\|_1 < 1$.

Demonstração Considere-se a forma canónica de A^s

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & & & & & \\ & \dots & & & \mathbf{0} & \\ & & A_{s'} & & & \\ & & & B_1 & & \\ & \mathbf{0} & & & \dots & \\ & & & & & B_{s''} \end{pmatrix}$$

onde

$$A_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & & & \mathbf{0} \\ 1 & \lambda_i & & \\ & & \dots & \\ \mathbf{0} & & 1 & \lambda_i \end{pmatrix}, \ |\lambda_i| < 1$$

$$B_j = \begin{pmatrix} M_j & & & \\ I & M_j & & \mathbf{0} \\ & & \dots & \\ \mathbf{0} & & I & M_j \end{pmatrix}, \ M_j = \begin{pmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \end{pmatrix}, \ \alpha_j^2 + \beta_j^2 < 1, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para cada $t \in IR$, considere-se a matriz

$$M(t) = \begin{pmatrix} A_1(t) & & & & & \\ & \dots & & & \mathbf{0} & \\ & & A_{s'}(t) & & & \\ & & & B_1(t) & & \\ & \mathbf{0} & & & \dots & \\ & & & & & B_{s''}(t) \end{pmatrix}$$

onde

$$A_i(t) = \begin{pmatrix} \lambda_i & & & \mathbf{0} \\ t & \lambda_i & & \\ & & \dots & \\ \mathbf{0} & & t & \lambda_i \end{pmatrix}, \ |\lambda_i| < 1$$

$$B_j(t) = \begin{pmatrix} M_j & & & \mathbf{0} \\ I_t & M_j & & \\ & & \dots & \\ \mathbf{0} & & I_t & M_j \end{pmatrix}, \ M_j = \begin{pmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \end{pmatrix}, \ \alpha_j^2 + \beta_j^2 < 1, \quad I_t = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$$

Seja M_0 uma transformação linear de E^s, cuja matriz na base $e_1,\ldots,e_s$ (base ortonormada de E^s) é $M(0)$.

Portanto, $\|M_0\| = \max\left\{|\lambda_i|, \sqrt{\alpha^2{}_j + \beta^2{}_j}\right\} < 1$, para $i = 1,\ldots,s'$ e $j = 1,\ldots,s''$.

Como as aplicações

$$t \to M(t) \to \|M(t)\|$$

são contínuas, pode-se garantir

$$\exists \delta > 0\ \forall t : -\delta < t < \delta, \|M(t)\| < 1$$

Pelo corolário 4.4.2, existe uma base $e_1,\ldots,e_s$ de E^s na qual a matriz de A^s é $M(\varepsilon)$, com $0 < \varepsilon < \delta$ fixado. Agora, em E^s, defina-se um novo produto interno

$$e_i | e_j = \delta_{ij}\ \ (i \neq j, \delta_{ij} = 0 \text{ e } \delta_{ii} = 1)$$

Seja $\|\ \|_s$ a norma associada a esse produto interno. Resulta que $\|A^s\|_s < 1$.

Analogamente se obtém uma norma $\|\ \|_u$ em E^u para a qual $\left\|\left(A^u\right)^{-1}\right\|_u < 1$.

Finalmente, como $IR^n = E^s \oplus E^u$ e E^s, E^u são invariantes por A, defina-se

$$\|x\|_1 = \|x^s\|_s + \|x^u\|_u,\ x = x^s + x^u \in IR^n$$

o que conclui a demonstração. □

Definição 4.4.7 Seja $p \in IR^n$ um ponto fixo de $f \in Dif^r\left(IR^n, IR^n\right)$, onde $Dif^r\left(IR^n, IR^n\right)$ representa o conjunto dos difeomorfismos de classe c^r de IR^n em IR^n. Diz-se que p é um *ponto fixo hiperbólico* se $Df_p : IR^n \to IR^n$ é um isomorfismo hiperbólico.

Apresentaremos de seguida o teorema de Grobman – Hartman, cuja demonstração envolve mais uma aplicação do teorema do ponto fixo de Banach.

Primeiramente, definamos conjugação entre duas aplicações.

Sejam então X e Y dois espaços topológicos e $f : X \to X$, $g : Y \to Y$ duas funções contínuas. Seja $h : X \to Y$ um homeomorfismo tal que $h \circ f = g \circ h$ (ou, de modo mais abreviado, $hf = gh$), isto é, o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccccc} & & f & & \\ & X & \to & X & \\ h & \downarrow & & \downarrow & h \\ & Y & \to & Y & \\ & & g & & \end{array}$$

Figura 4 : Diagrama comutativo

Então h diz-se ser uma *conjugação* e f e g dizem-se *conjugados*.

Note-se que $hf = gh$, implica que $hf^n = g^n h$, uma vez que

$$hf^2 = (hf)f = (gh)f = g(hf) = g^2 h$$

e assim sucessivamente.

A conjugação pode ser interpretada como uma mudança contínua das variáveis de f e g. É fácil ver que a conjugação é uma relação de equivalência.

Feita esta pequena introdução, estamos aptos para apresentar o teorema de Grobman – Hartman. Veremos que em determinadas condições, uma função e a sua derivada são localmente conjugadas.

Teorema 4.4.8 (Teorema de Grobman – Hartman)

Sejam $f \in Dif^r\left(IR^n, IR^n\right)$, $p \in IR^n$ um ponto fixo hiperbólico de f e $A = Df_p$.

Então existem vizinhanças V de p, U de 0 e um homeomorfismo $h: U \to V$ tal que $hA = fh$.

Demonstração Por uma mudança apropriada de coordenadas, podemos supor que $p = 0$.

A demonstração será feita usando três lemas seguidamente expostos:

Lema 1 Seja E um espaço de Banach, $L \in L(E,E)$ tal que $\|L\| \le a < 1$ e $G \in GL(E,E)$ um isomorfismo com $\left\|G^{-1}\right\| \le a < 1$. Então:

(a) $I + L$ é um isomorfismo e $\left\|(I+L)^{-1}\right\| \le \dfrac{1}{1-a}$.

(b) $I + G$ é um isomorfismo e $\left\|(I+G)^{-1}\right\| \le \dfrac{a}{1-a}$.

Demonstração

(a) Seja $y \in E$ e

$$\begin{aligned} f_y : \ & E \to E \\ & x \mapsto y - L(x) \end{aligned}$$

Portanto, $f_y(x_1) - f_y(x_2) = L(x_2 - x_1)$.

Vejamos que f_y é uma contracção de razão a.

$$\left\|f_y(x_1) - f_y(x_2)\right\| = \left\|L(x_2 - x_1)\right\| \le \|L\| \left\|x_2 - x_1\right\| \le a\left\|x_2 - x_1\right\|, \text{com } a < 1$$

Logo, f_y é uma contracção. Como E é completo, pelo teorema do ponto fixo de Banach, f_y possui um único ponto fixo $x \in E$, isto é:

$$\exists^1 x \in E : x = y - L(x).$$

Uma vez que

$$x = y - L(x) \Leftrightarrow x + L(x) = y \Leftrightarrow (I + L)(x) = y$$

conclui-se que, dado $y \in E$, existe um único $x \in E$ tal que $(I + L)(x) = y$.

Portanto, $I + L$ é bijectiva, logo um isomorfismo.

Vejamos agora que $\left\|(I + L)^{-1}\right\| \leq \dfrac{1}{1-a}$.

$$\left\|(I + L)^{-1}\right\| = \sup\left\{\left\|(I + L)^{-1}(y)\right\| : \|y\| \leq 1 \right\}$$

Tome-se então $y \in E$ com $\|y\| \leq 1$ e seja $x \in E$:

$$(I + L)^{-1}(y) = x \Leftrightarrow x + L(x) = y$$

Portanto,

$$1 \geq \|y\| = \|x + L(x)\| \geq \|x\| - \|L(x)\| \geq \|x\| - a\|x\|$$

pois $\|L\| \leq a$.

Conclui-se então que

$$\|x\| \leq \frac{1}{1-a}$$

Logo

$$\left\|(I + L)^{-1}\right\| = \left\|(I + L)^{-1}(y)\right\| = \|x\| \leq \frac{1}{1-a}$$

o que prova a primeira parte do lema 1.

(b) Comece-se por notar que, uma vez que G é um isomorfismo

$$I + G = G\left(I + G^{-1}\right)$$

Como $\left\|G^{-1}\right\| \leq a < 1$, por (a) $I + G^{-1}$ é invertível. Atendendo que G e $I + G^{-1}$ são invertíveis, $I + G = G\left(I + G^{-1}\right)$ e a composta de duas função invertíveis é ainda invertível, resulta que $I + G$ é invertível e

$$(I + G)^{-1} = \left(G\left(I + G^{-1}\right)\right)^{-1} = \left(I + G^{-1}\right)^{-1} G^{-1}$$

Daqui conclui-se que

$$\left\|(I+G)^{-1}\right\| \leq \left\|\left(I+G^{-1}\right)^{-1}\right\| \left\|G^{-1}\right\| \leq \frac{1}{1-a} a = \frac{a}{1-a}$$

o que conclui a demonstração do lema 1. □

Como $A = Df_0$ é um isomorfismo hiperbólico, pelo que foi visto atrás, podemos escrever $IR^n = E^s \oplus E^u$ e existe uma norma $\| \ \|$ em IR^n tal que

$$\left\|A^s\right\| \leq a < 1$$

$$\left\|\left(A^u\right)^{-1}\right\| \leq a < 1$$

Seja agora $C_b\left(IR^n, IR^n\right)$ o espaço de Banach das funções contínuas e limitadas de IR^n em IR^n com a norma $\|f\| = \sup\left\{\| f(x) \| : x \in IR^n\right\}$.

Como $IR^n = E^s \oplus E^u$, resulta que

$$C_b\left(IR^n, IR^n\right) = C_b\left(IR^n, E^s\right) \oplus C_b\left(IR^n, E^u\right)$$

onde $f = f^s + f^u$, sendo $f^s = \pi_s \circ f$, $f^u = \pi_u \circ f$,

$$\begin{array}{llll} \pi_s : & E^s \oplus E^u \to & E^s \\ & x+y \ \mapsto & x \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{llll} \pi_u : & E^s \oplus E^u \to & E^u \\ & x+y \ \mapsto & y \end{array}$$

Lema 2 Existe $\varepsilon > 0$ tal que, se $\Phi_1, \Phi_2 \in C_b\left(IR^n, IR^n\right)$ têm constante de Lipschitz menor ou igual a ε, então $A + \Phi_1$ e $A + \Phi_2$ são conjugados.

Demonstração Para que $A + \Phi_1$ e $A + \Phi_2$ sejam conjugados, deve existir um homeomorfismo $h : IR^n \to IR^n$ tal que $h(A + \Phi_1) = (A + \Phi_2)h$.

Tome-se então $h = I + f$, com $f \in C_b\left(IR^n, IR^n\right)$. Logo a equação

$$h(A + \Phi_1) = (A + \Phi_2)h$$

é equivalente a

$$(I + f)(A + \Phi_1) = (A + \Phi_2)(I + f) \Leftrightarrow A + \Phi_1 + f(A + \Phi_1) = A + Af + \Phi_2(I + f) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Af - f(A + \Phi_1) = \Phi_1 - \Phi_2(I + f) \qquad (1)$$

Afirmamos que existe uma única função $f \in C_b\left(IR^n, IR^n\right)$ que satisfaz a condição anterior.

De facto, considere-se a aplicação linear

$$\begin{array}{llll} L: & C_b(IR^n, IR^n) & \to & C_b(IR^n, IR^n) \\ & f & \mapsto & Af - f(A+\Phi_1) \end{array}$$

Vejamos que L é invertível e que $\|L^{-1}\| \leq \dfrac{\|A^{-1}\|}{1-a}$.

Para tal, considerem-se as funções

$$\begin{array}{llll} L^*: & C_b(IR^n, IR^n) & \to & C_b(IR^n, IR^n) \\ & f & \mapsto & f - A^{-1}f(A+\Phi_1) \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \overline{A}: & C_b(IR^n, IR^n) & \to & C_b(IR^n, IR^n) \\ & f & \mapsto & Af \end{array}.$$

Logo $\overline{A}L^* : C_b(IR^n, IR^n) \to C_b(IR^n, IR^n)$, e para $f \in C_b(IR^n, IR^n)$,

$$\overline{A}L^*(f) = \overline{A}(f - A^{-1}f(A+\Phi_1)) = Af - f(A+\Phi_1) = L(f)$$

Como A é um isomorfismo, $\overline{A}$ é invertível e $\|\overline{A}\| = \|A\|$. Basta então provar que L^* é também invertível.

Como E^s e E^u são invariantes por A^{-1}, resulta que $C_b(IR^n, E^s)$ e $C_b(IR^n, E^u)$ são invariantes por L^*. Logo podemos escrever $L^* = L^{*s} \oplus L^{*u}$, onde

$$L^{*s} = L^*\big|_{C_b(IR^n, E^s)} \text{ e}$$

$$L^{*u} = L^*\big|_{C_b(IR^n, E^u)}$$

Vejamos que, para ε suficientemente pequeno, $A + \Phi_1$ é um homeomorfismo.
De $A(x) + \Phi_1(x) = y$ vem $x = A^{-1}(y - \Phi_1(x))$; para y fixado, a aplicação

$$x \mapsto A^{-1}(y - \Phi_1(x))$$

é uma contracção de razão $\|A^{-1}\|\varepsilon < 1$ (para ε pequeno). Portanto, $A + \Phi_1$ é bijectiva. Por outro lado, a continuidade da inversa é consequência imediata da variação contínua do ponto fixo com o parâmetro y.

Portanto a função $\Omega : C_b(IR^n, IR^n) \to C_b(IR^n, IR^n)$ dada por

$$\Omega(f^s) = A^{-1}f^s(A+\Phi_1)$$

é invertível e a sua inversa

$$\Omega^{-1}\left(f^s\right)=A^s f^s\left(A+\Phi_1\right)^{-1}$$

é tal que

$$\left\|\Omega^{-1}\left(f^s\right)\right\|=\sup\left\{\left\|\Omega^{-1}\left(f^s\right)(x)\right\|:x\in IR^n\right\}=\sup\left\{\left\|A^s f^s\left(A+\Phi_1\right)^{-1}(x)\right\|:x\in IR^n\right\}\leq a<1$$

pois $\left\|A^s\right\|\leq a<1$.

Pela parte (b) do lema 1, resulta que L^{*s} é invertível e que $\left\|\left(L^{*s}\right)^{-1}\right\|\leq\dfrac{a}{1-a}$.

Pela parte (a) do mesmo lema e atendendo que $\left\|\left(A^u\right)^{-1}\right\|\leq a<1$, resulta que L^{*u} é invertível e que $\left\|\left(L^{*u}\right)^{-1}\right\|\leq\dfrac{1}{1-a}$.

Portanto, L^* é invertível e $\left\|\left(L^*\right)^{-1}\right\|\leq\dfrac{1}{1-a}=max\left\{\dfrac{1}{1-a},\dfrac{a}{1-a}\right\}$, pois $a<1$.

Como L^* é invertível, resulta que L é também invertível e

$$L=\overline{A}L^*\Leftrightarrow L^{-1}=\left(L^*\right)^{-1}\left(\overline{A}\right)^{-1}$$

logo

$$\left\|L^{-1}\right\|=\left\|\left(L^*\right)^{-1}\left(\overline{A}\right)^{-1}\right\|\leq\frac{\left\|\left(\overline{A}\right)^{-1}\right\|}{1-a}.$$

Uma vez que $\overline{A}(f)=Af\Rightarrow\left\|\left(\overline{A}\right)^{-1}\right\|=\left\|A^{-1}\right\|\Rightarrow\left\|L^{-1}\right\|\leq\dfrac{\left\|A^{-1}\right\|}{1-a}$.

Mostramos assim que L é invertível e que $\left\|L^{-1}\right\|\leq\dfrac{\left\|A^{-1}\right\|}{1-a}$.

Considere-se agora a aplicação

$$\begin{array}{llll}\mu: & C_b\left(IR^n,IR^n\right) & \to & C_b\left(IR^n,IR^n\right)\\ & f & \mapsto & L^{-1}\left(\Phi_1-\Phi_2(I+f)\right)\end{array}$$

Vejamos que μ é uma contracção:

$$\left\|\mu(f_1)-\mu(f_2)\right\|=\left\|L^{-1}\left(\Phi_2(I+f_2)-\Phi_2(I+f_1)\right)\right\|\leq\left\|L^{-1}\right\|\left\|\Phi_2(I+f_2)-\Phi_2(I+f_1)\right\|\leq$$

$$\leq\frac{\left\|A^{-1}\right\|}{1-a}\varepsilon\left\|f_2-f_1\right\|$$

pois Φ_2 tem constante de Lipschitz menor ou igual a ε.

Podemos tomar ε suficientemente pequeno de modo que $\dfrac{\|A^{-1}\|}{1-a}\varepsilon < 1$, logo μ é uma contracção.

Daqui conclui-se, pelo teorema do ponto fixo de Banach, que μ tem um único ponto fixo $f \in C_b(IR^n, IR^n)$.

Portanto, existe uma única função $f \in C_b(IR^n, IR^n)$ tal que

$$f = L^{-1}(\Phi_1 - \Phi_2(I+f)) \Leftrightarrow L(f) = \Phi_1 - \Phi_2(I+f) \Leftrightarrow Af - f(A+\Phi_1) = \Phi_1 - \Phi_2(I+f)$$

Conclui-se então que a equação (1) tem uma única solução $f \in C_b(IR^n, IR^n)$.

Falta ver que $h = I + f$ é um homeomorfismo.

Por um processo análogo ao anterior se mostra que a equação

$$(A+\Phi_1)(I+g) = (I+g)(A+\Phi_2)$$

tem uma única solução $g \in C_b(IR^n, IR^n)$.

Para mostrar que $h = I + f$ é um homeomorfismo, vejamos que

$$(I+f)(I+g) = (I+g)(I+f) = I$$

De facto,

$$(I+f)(I+g)(A+\Phi_2) = (I+f)(A+\Phi_1)(I+g) = (A+\Phi_2)(I+f)(I+g).$$

Por outro lado,

$$(I+f)(I+g) = I + g + f(I+g) = I + r$$

com $r = g + f(I+g) \in C_b(IR^n, IR^n)$.

Portanto,

$$(I+r)(A+\Phi_2) = (A+\Phi_2)(I+r). \tag{2}$$

Mas também

$$I(A+\Phi_2) = (A+\Phi_2)I \tag{3}$$

Atendendo a que a equação

$$(A+\Phi_1)(I+r) = (I+r)(A+\Phi_2)$$

tem uma única solução, tomando $\Phi_1 = \Phi_2$, resulta que a equação

$$(A+\Phi_2)(I+r)=(I+r)(A+\Phi_2)$$

também tem uma única solução.

De **(2)** e **(3)**, mostra-se que

$$I+r=I \Leftrightarrow (I+f)(I+g)=I.$$

Logo $I+f$ é um homeomorfismo, o que conclui a demonstração do lema 2. □

Lema 3 Dado $\varepsilon>0$, existe uma vizinhança U de 0 e uma extensão de $f|_U$ da forma $A+\Phi$, onde $\Phi \in C_b(IR^n, IR^n)$ é de Lipschitz com constante menor ou igual a ε.

Demonstração Considere-se uma aplicação $\alpha: IR \to IR$ de classe c^∞ tal que

$$\begin{aligned} &\alpha(t)=0, && t\geq 1 \\ &\alpha(t)=1, && t\leq \frac{1}{2} \\ &\alpha'(t)<k, && \forall t\in IR, k>2 \end{aligned}$$

Seja φ a aplicação definida por $\varphi=f-A$.

Daqui resulta que:
$\varphi(0)=f(0)-A(0)=0$, pois 0 é um ponto fixo de f e A é um aplicação linear;
$D\varphi_0=A-A=0$.
Considere-se a bola aberta de raio r, centrada na origem do referencial:

$$B(0,r)=\{x\in IR^n : \|x\|<r\}$$

Como $D\varphi_0=0$ e a aplicação derivada é contínua, é possível escolher r de modo que $\left\|D\varphi|_{B(0,r)}\right\|<\dfrac{\varepsilon}{2k}$.

Considere-se agora a aplicação

$$\begin{aligned} \Phi: \; IR^n &\to IR^n \\ x &\mapsto \alpha\left(\frac{\|x\|}{r}\right)\varphi(x) \end{aligned}$$

Vejamos que:

- $A+\Phi$ é uma extensão de $f|_{B(0,\frac{r}{2})}$:

(a) $\Phi(0)=\alpha(0)\varphi(0)=0$

(b) se $\|x\|<\frac{r}{2}\Rightarrow\frac{\|x\|}{r}<\frac{1}{2}\Rightarrow\alpha\left(\frac{\|x\|}{r}\right)=1\Rightarrow\Phi(x)=\varphi(x)=f(x)-A(x)$.

Portanto, a restrição de f a $B(0,\frac{r}{2})$ é igual à aplicação $A+\Phi$.

- Falta ver que Φ é de Lipschitz com constante menor ou igual a ε:

<u>1° caso</u>: se $x_1,x_2\in B(0,r)$:

$$\|\Phi(x_1)-\Phi(x_2)\|=\left\|\alpha\left(\frac{\|x_1\|}{r}\right)\varphi(x_1)-\alpha\left(\frac{\|x_2\|}{r}\right)\varphi(x_2)\right\|=$$

$$=\left\|\left[\alpha\left(\frac{\|x_1\|}{r}\right)-\alpha\left(\frac{\|x_2\|}{r}\right)\right]\varphi(x_1)+\alpha\left(\frac{\|x_2\|}{r}\right)[\varphi(x_1)-\varphi(x_2)]\right\|\leq$$

$$\leq\left\|\alpha\left(\frac{\|x_1\|}{r}\right)-\alpha\left(\frac{\|x_2\|}{r}\right)\right\|\|\varphi(x_1)\|+\left\|\alpha\left(\frac{\|x_2\|}{r}\right)\right\|\|\varphi(x_1)-\varphi(x_2)\|$$

Como

(1) $\left\|\alpha\left(\frac{\|x_1\|}{r}\right)-\alpha\left(\frac{\|x_2\|}{r}\right)\right\|\leq\|\alpha'\|\left\|\frac{\|x_1\|}{r}-\frac{\|x_2\|}{r}\right\|=\|\alpha'\|\frac{\|\|x_1\|-\|x_2\|\|}{r}\leq k\frac{\|x_1-x_2\|}{r}$

(2) $\|\varphi(x_1)-\varphi(0)\|\leq\|D\varphi\|\|x_1-0\|\Leftrightarrow\|\varphi(x_1)\|\leq\frac{\varepsilon}{2k}\|x_1\|$

(3) $0\leq\alpha\left(\frac{\|x_2\|}{r}\right)\leq1$

(4) $\|\varphi(x_1)-\varphi(x_2)\|\leq\|D\varphi\|\|x_1-x_2\|\leq\frac{\varepsilon}{2k}\|x_1-x_2\|$

resulta que

$$\|\Phi(x_1)-\Phi(x_2)\|\leq k\frac{\|x_1-x_2\|}{r}\frac{\varepsilon}{2k}\|x_1\|+\frac{\varepsilon}{2k}\|x_1-x_2\|\leq$$

$$\leq\frac{\|x_1-x_2\|}{r}\frac{\varepsilon}{2}r+\frac{\varepsilon}{2.2}\|x_1-x_2\|=\varepsilon\|x_1-x_2\|\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)<\varepsilon\|x_1-x_2\|$$

2º caso: se $x_1 \in B(0,r), x_2 \notin B(0,r)$:

$$\|\Phi(x_1)-\Phi(x_2)\| \leq \left\|\alpha\left(\frac{\|x_1\|}{r}\right)-\alpha\left(\frac{\|x_2\|}{r}\right)\right\| \|\varphi(x_1)\| + \left\|\alpha\left(\frac{\|x_2\|}{r}\right)\right\| \| \varphi(x_1)-\varphi(x_2) \| \leq$$

$$\leq \frac{\|x_1-x_2\|}{r}\frac{\varepsilon}{2}r + 0 \| \varphi(x_1)-\varphi(x_2) \| \leq \varepsilon \|x_1-x_2\|$$

3º caso: se $x_1, x_2 \notin B(0,r)$:

$$\|\Phi(x_1)-\Phi(x_2)\| = 0 < \varepsilon \|x_1-x_2\|$$

Portanto, Φ é de Lipschitz com constante menor ou igual a ε, o que conclui a demonstração do lema. □

Para concluir a demonstração do teorema, seja ε como no lema 3 e $A+\Phi$ uma extensão de $f|_{U(0)}$, onde $U(0)$ é uma vizinhança de 0 e Φ uma função de Lipschitz com constante menor ou igual a ε.

Pelo lema 2, existe um homeomorfismo $h: IR^n \to IR^n$ tal que

$$hA = (A+\Phi)h \Leftrightarrow hA = fh$$

numa vizinhança de zero, o que conclui a demonstração do teorema. □

O teorema anterior garante que, dada uma função $f: IR^n \to IR^n$ de classe c^r, f e Df_p são localmente conjugadas, sendo p um ponto fixo hiperbólico de f. Apesar de f ser de classe c^r, não se pode garantir que a conjugação seja de, pelo menos, classe c^1. De seguida é apresentado um exemplo de uma função $f: IR^2 \to IR^2$ onde a conjugação não pode ser de classe c^2.

Exemplo 4.4.9 Seja $f: IR^2 \to IR^2$ a aplicação definida por

$$f(x,y) = \left(\lambda x, \lambda^2 y + x^2\right), \text{ com } 0 < \lambda < 1$$

Vejamos então que a conjugação h não pode ser um difeomorfismo local de classe c^2. Para tal, suponhamos, por redução ao absurdo, que h é de classe c^2.

A matriz que representa a derivada de f, na base canónica, é

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 2x & \lambda^2 \end{pmatrix}$$

Portanto,

$$Df_{(0,0)} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix} \text{ e } A(x,y) = Df_{(0,0)}(x,y) = \left(\lambda x, \lambda^2 y\right)$$

- (0,0) é ponto fixo hiperbólico

(1) $f(0,0) = (0,0)$, isto é, (0,0) é um ponto fixo de *f*;
(2) Como $0 < \lambda < 1$, os valores próprios de $Df_{(0,0)}$ têm módulo menor que um, isto é, (0,0) é ponto fixo hiperbólico.

Por uma mudança apropriada da base, podemos supor que $Dh_{(0,0)} = I$.
De facto, observe-se que, de $f \circ h = h \circ A$, se obtém

$$A \circ h^{-1}(0,0) = h^{-1} \circ f(0,0) = h^{-1}(0,0)$$

e portanto $h(0,0) = (0,0)$.
Assim, recorrendo novamente à igualdade $f \circ h = h \circ A$, tem-se

$$Df_{(0,0)} \circ Dh_{(0,0)} = Dh_{(0,0)} \circ A$$

Se $B = Dh_{(0,0)}$, então da relação anterior obtemos $A \circ B = B \circ A$ e portanto a matriz de *B* é da forma

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

com *a* e *b* diferentes de zero. Considere-se então $h \circ B^{-1}$; tem-se que

$$D\left(h \circ B^{-1}\right)_{(0,0)} = Id$$

e

$$f \circ \left(h \circ B^{-1}\right) = (f \circ h) \circ B^{-1} = (h \circ A) \circ B^{-1} = h \circ \left(A \circ B^{-1}\right) = \left(h \circ B^{-1}\right) \circ A$$

Considere-se $h(x,y) = (h_1(x,y), h_2(x,y))$

Uma vez que *h* é uma conjugação entre *f* e *A*, $fh = hA \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(\lambda h_1(x,y), \lambda^2 h_2(x,y) + h_1^2(x,y)\right) = \left(h_1\left(\lambda x, \lambda^2 y\right), h_2\left(\lambda x, \lambda^2 y\right)\right)$$

Portanto,

$$\lambda h_1(x,y) = h_1\left(\lambda x, \lambda^2 y\right)$$

Como $f^n h = hA^n$, resulta que

$$\lambda^n h_1(x,y) = h_1\left(\lambda^n x, \lambda^{2n} y\right)$$

Derivando ambos os membros da última expressão em ordem a y, resulta

$$\lambda^n \frac{\partial h_1}{\partial y}(x,y) = \lambda^{2n} \frac{\partial h_1}{\partial y}\left(\lambda^n x, \lambda^{2n} y\right) \Leftrightarrow \frac{\partial h_1}{\partial y}(x,y) = \lambda^n \frac{\partial h_1}{\partial y}\left(\lambda^n x, \lambda^{2n} y\right)$$

Uma vez que $|\lambda| < 1$, $\lambda^n \frac{\partial h_1}{\partial y}\left(\lambda^n x, \lambda^{2n} y\right) \underset{n \mapsto \infty}{\rightarrow} 0$.

Portanto, $\frac{\partial h_1}{\partial y}(x,y) = 0$

Derivando a mesma expressão, agora em ordem a x, resulta

$$\lambda^n \frac{\partial h_1}{\partial x}(x,y) = \lambda^n \frac{\partial h_1}{\partial x}\left(\lambda^n x, \lambda^{2n} y\right) \Leftrightarrow \frac{\partial h_1}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial h_1}{\partial x}\left(\lambda^n x, \lambda^{2n} y\right) \underset{n \mapsto \infty}{\rightarrow} \frac{\partial h_1}{\partial x}(0,0)$$

Conclui-se então que $\frac{\partial h_1}{\partial x}(x,y) = c$.

Logo $h_1(x,y) = cx$, uma vez que $h_1(0,0) = 0$.
Como $Dh_{(0,0)} = I$, tem-se que $c = 1$.

Portanto, $h_1(x,y) = x$, donde se conclui que

$$\left(\lambda x, \lambda^2 h_2(x,y) + x^2\right) = \left(\lambda x, h_2\left(\lambda x, \lambda^2 y\right)\right)$$

Vejamos, finalmente, que

(1) $f^n \circ h(x,y) = \left(\lambda^n x, \lambda^{2n} h_2(x,y) + n\lambda^{2n-2} x^2\right)$

Por indução sobre n:

Para $n = 1$, já foi visto atrás;

$$f^n \circ h(x,y) = f\left(f^{n-1} \circ h(x,y)\right) = f\left(\lambda^{n-1} x, \lambda^{2n-2} h_2(x,y) + (n-1)\lambda^{2n-4} x^2\right) =$$

$$\left(\lambda^n x, \lambda^2\left[\lambda^{2n-2} h_2(x,y) + (n-1)\lambda^{2n-4} x^2\right] + \lambda^{2n-2} x^2\right) = \left(\lambda^n x, \lambda^{2n} h_2(x,y) + n\lambda^{2n-2} x^2\right)$$

(2) $h \circ A^n(x,y) = h \circ \left(\lambda^n x, \lambda^{2n} y\right) = \left(h_1\left(\lambda^n x, \lambda^{2n} y\right), h_2\left(\lambda^n x, \lambda^{2n} y\right)\right) =$

$$= \left(\lambda^n x, h_2\left(\lambda^n x, \lambda^{2n} y\right)\right)$$

Portanto,

$$\lambda^{2n} h_2(x,y) + n\lambda^{2n-2} x^2 = h_2\left(\lambda^n x, \lambda^{2n} y\right)$$

Derivando ambos os membros em ordem a x, resulta

$$\lambda^{2n} \frac{\partial h_2}{\partial x}(x,y) + 2n\lambda^{2n-2} x = \lambda^n \frac{\partial h_2}{\partial x}\left(\lambda^n x, \lambda^{2n} y\right)$$

Tornando a derivar em ordem a x, obtém-se

$$\lambda^{2n} \frac{\partial^2 h_2}{\partial^2 x}(x,y) + 2n\lambda^{2n-2} = \lambda^{2n} \frac{\partial^2 h_2}{\partial^2 x}\left(\lambda^n x, \lambda^{2n} y\right) \Leftrightarrow$$

$$\frac{\partial^2 h_2}{\partial^2 x}(x,y) + 2n\lambda^{-2} = \frac{\partial^2 h_2}{\partial^2 x}\left(\lambda^n x, \lambda^{2n} y\right)$$

o que é absurdo, uma vez que quando $n \mapsto +\infty$:

- $\frac{\partial^2 h_2}{\partial^2 x}(x,y)$ é fixo;
- $2n\lambda^{-2} \to +\infty$
- $\frac{\partial^2 h_2}{\partial^2 x}\left(\lambda^n x, \lambda^{2n} y\right) \to \frac{\partial^2 h_2}{\partial^2 x}(0,0)$

Portanto, a conjugação h não pode ser de classe c^2, como se queria mostrar.

APÊNDICE A1

DOIS RESULTADOS EM ESPAÇOS MÉTRICOS

Neste apêndice mostraremos dois resultados envolvendo a completude de espaços métricos.

Primeiramente iremos tecer alguns comentários sobre o diâmetro de conjuntos não vazios.

Sejam (X,d) um espaço métrico e $A \subseteq X$ um conjunto não vazio. Então o diâmetro de A, $\delta(A)$, é

$$0 \leq \delta(A) = \sup_{x,y \in A} d(x,y)$$

Dizemos que A é limitado se $\delta(A) < +\infty$.

O diâmetro de um conjunto não vazio satisfaz as seguintes condições:

- $\delta(A) = 0 \Leftrightarrow A = \{x_0\}$.
- $\delta(A) = a > 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \, \exists x, y \in A\colon \; a - \varepsilon \leq d(x,y) \leq a$.
- $\delta(A) = \delta(\overline{A})$.
- Se F é fechado, podem não existir $x, y \in F : d(x,y) = \delta(F)$.
  Por exemplo, considere-se $(IR \setminus \{0\}, d)$, d métrica usual e $F = \left]0,1\right]$.
  $\delta(F) = 1$ e $\forall x, y \in F : d(x,y) < 1$.
- Se K é compacto, então existem $x_0, y_0 \in K : d(x_0, y_0) = \delta(K)$.
  Para provar tal afirmação, sejam $a = \delta(K) > 0$ (podemos supor que K tem, pelo menos, dois elementos) e $x_n, y_n \in K : d(x_n, y_n) \geq a - \dfrac{1}{n}$.
  Como $(x_n)_{n \in IN}, (y_n)_{n \in IN} \in K$ e K é compacto, $(x_n)_{n \in IN}$ e $(y_n)_{n \in IN}$ admitem subsucessões convergentes, convergindo para x_0 e y_0, respectivamente.
  Logo, $d(x_0, y_0) = a$. De facto, supondo que $d(x_0, y_0) = b < a$, dado $\varepsilon > 0$ tal que $b + \varepsilon < a$ e $n_0 \in IN$ tal que
  $$\forall k \geq n_0 : d(x_0, x_{n_k}) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ e } d(y_0, y_{n_k}) < \frac{\varepsilon}{2}$$
  resulta que, para $k \geq n_0$
  $$d(x_{n_k}, y_{n_k}) \leq d(x_{n_k}, x_0) + d(x_0, y_0) + d(y_0, y_{n_k}) < \frac{\varepsilon}{2} + b + \frac{\varepsilon}{2} = b + \varepsilon < a - \frac{1}{n}$$
  para n suficientemente grande, o que é absurdo.

Teorema A1.1 Seja (X,d) um espaço métrico. Então X é completo sse para toda a sucessão $(F_n)_{n\in IN}$ de fechados de X tais que

- $\varnothing \neq F_{n+1} \subseteq F_n, \forall n \in IN$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \delta(F_n) = 0$

então $\bigcap\limits_{n\in IN} F_n = \{x_0\}$.

Demonstração

($\Rightarrow$) Para cada $n \in IN$, seja $x_n \in F_n$. Vejamos que a sucessão $(x_n)_{n\in IN}$ é de Cauchy. Fixado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in IN$ tal que $\delta(F_{n_0}) < \varepsilon$, pois $\lim\limits_{n\to\infty} \delta(F_n) = 0$.

Atendendo que $F_{n+1} \subseteq F_n, \forall n \in IN$, resulta que para $m,n \geq n_0$, $F_m \subseteq F_{n_0}$ e $F_n \subseteq F_{n_0}$.

Concluímos então que $x_m, x_n \in F_{n_0}$, logo $d(x_m, x_n) \leq \delta(F_{n_0}) < \varepsilon$.

Como, por hipótese, X é completo, a sucessão $(x_n)_{n\in IN}$ converge para $x_0 \in X$.

Vejamos que $x_0 \in \bigcap\limits_{n\in IN} F_n$:

Fixado $n_1 \in IN$ qualquer, é claro que $x_n \in F_{n_1}, \forall n \geq n_1$, logo

$$x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n \in \overline{F_{n_1}} = F_{n_1}$$

Como n_1 era qualquer, concluímos que $x_0 \in \bigcap\limits_{n\in IN} F_n$.

Finalmente, observe-se que:

- $\lim\limits_{n\to\infty} \delta(F_n) = 0$;
- $F_{n+1} \subseteq F_n, \forall n \in IN$

por conseguinte, $\delta\left(\bigcap\limits_{n\in IN} F_n\right) = 0$. Mas $\{x_0\} \subseteq \bigcap\limits_{n\in IN} F_n$, logo $\bigcap\limits_{n\in IN} F_n = \{x_0\}$.

($\Leftarrow$) Sejam $(x_n)_{n\in IN}$ uma sucessão de Cauchy e $A_n = \{x_m : m \geq n\}$.

- $\overline{A_n}$ é fechado e limitado;
- $\overline{A_{n+1}} \subseteq \overline{A_n}, \forall n \in IN$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \delta(A_n) = 0$, pois $(x_n)_{n\in IN}$ é de Cauchy. Logo $\lim\limits_{n\to\infty} \delta(\overline{A_n}) = 0$.

Portanto, $\bigcap\limits_{n\in IN} \overline{A_n} = \{x_0\}$.

Provamos assim que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, já que $d(x_n, x_0) \leq \delta(\overline{A_n}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Da arbitrariedade da sucessão, conclui-se que X é completo. □

Observação A1.2

1. A hipótese de $\lim_{n\to\infty} \delta(F_n) = 0$ é essencial.

   Tome-se por exemplo (IR, d), sendo d a métrica usual e $d_1 = \dfrac{d}{1+d}$.

   d e d_1 são métricas equivalentes, isto é, geram a mesma topologia .

   Mais do que isso, $d_1 \le d$ e se $d(x,y) \le 1$,então $d(x,y) \le 2d_1(x,y)$, já que

   $$d_1(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \ge \frac{d(x,y)}{2}$$

   Logo, se $(x_n)_{n\in IN}$ for uma sucessão de Cauchy relativamente à métrica d_1, então também é uma sucessão de Cauchy para a métrica d.

   Portanto, (IR, d_1) também é completo.

   Seja agora $F_n = [n, +\infty[$. Então, $\forall n \in IN$:

   - F_n é fechado;
   - $\delta(F_n) = 1$, para a métrica d_1;
   - $F_{n+1} \subseteq F_n$

   e $\bigcap_{n\in IN} F_n = \varnothing$.

2. A hipótese de (X, d) ser completo também é essencial.

   Por exemplo, $(IR \setminus \{0\}, d)$, d métrica usual. Tome-se $F_n = \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right] \setminus \{0\}$

   fechado, $F_{n+1} \subseteq F_n$, $\lim_{n\to\infty} \delta(F_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0$ e $\bigcap_{n\in IN} F_n = \varnothing$.

Iremos de seguida apresentar o segundo resultado deste apêndice. Antes de tal, temos de introduzir um novo conceito: conjunto totalmente limitado.

Definição A1.3 Seja (X, d) um espaço métrico. X diz-se *totalmente limitado* se

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists n \in IN : X = X_1 \cup \ldots \cup X_n$$

onde $\varnothing \ne X_i \subseteq X$ e $\delta(X_i) < \varepsilon$.

Vejamos que X é totalmente limitado sse

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists x_1, \ldots, x_n \in X : X = B(x_1, \varepsilon) \cup \ldots \cup B(x_n, \varepsilon)$$

Para tal, observe-se que se $\delta(X_i) < \varepsilon \Rightarrow X_i \subseteq B(x_i, \varepsilon)$, onde $x_i \in X_i$.

Logo $X = B(x_1, \varepsilon) \cup \ldots \cup B(x_n, \varepsilon)$.

Reciprocamente, como $\delta\left(B\left(x_i, \frac{\varepsilon}{3}\right)\right) = \frac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon$, basta tomar $X_i = B\left(x_i, \frac{\varepsilon}{3}\right)$.

Se X é totalmente limitado, na decomposição $X = X_1 \cup ... \cup X_n$, podemos supor, se conveniente, que X_i é fechado pois $\delta(A) = \delta(\overline{A})$. Portanto, se $Y \subseteq X$ é totalmente limitado, então $\overline{Y}$ também o é.

Qualquer subconjunto de um espaço métrico totalmente limitado é ainda totalmente limitado e qualquer espaço métrico totalmente limitado é, em particular, limitado. O recíproco é falso. Para mostrar tal, consideremos IR munido da métrica discreta.

$$\delta(IR) = \sup_{x,y \in IR} d(x,y) = 1$$

donde se conclui que IR, munido da métrica discreta, é limitado. Mas se $\varepsilon \leq 1$, IR não pode ser escrito como reunião finita de subconjuntos de diâmetro menor que ε, pois se $A \subseteq IR$ é tal que $\delta(A) < 1$, então $A = \{x_0\}$. Portanto IR, munido da métrica discreta, não é totalmente limitado.

Teorema A1.4 ([22], pag 222) Seja (X,d) um espaço métrico. Então X é compacto sse é completo e totalmente limitado.

Demonstração

($\Rightarrow$) Suponha-se que X é compacto.

Seja $(x_n)_{n \in IN}$ uma sucessão de Cauchy. Como X é compacto, tal sucessão admite uma subsucessão $(x_{n_k})_{k \in IN}$ convergente para $a \in X$. Logo, para $\varepsilon > 0$:

$$\exists p_1 \in IN\ \forall k \geq p_1 : d(x_{n_k}, a) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\exists p_2 \in IN\ \forall n,m \geq p_2 : d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Tome-se $n,k \geq \max\{p_1, p_2\}$. Logo

$$d(x_n, a) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

donde se conclui que $\lim_{n \to \infty} x_n = a$. Portanto X é completo.

Vejamos agora que X é totalmente limitado.

Seja $\varepsilon > 0$. Uma vez que $\bigcup_{x \in X} B\left(x, \frac{\varepsilon}{3}\right)$ é uma cobertura de abertos de X, existem $x_1, ..., x_n \in X$ tais que $X = B\left(x_1, \frac{\varepsilon}{3}\right) \cup ... \cup B\left(x_n, \frac{\varepsilon}{3}\right)$, com $\delta\left(B\left(x_i, \frac{\varepsilon}{3}\right)\right) = \frac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon$. Portanto, X é totalmente limitado.

($\Leftarrow$) Suponhamos agora que X é um espaço métrico completo e totalmente limitado.

Suponhamos, por redução ao absurdo, que existia uma cobertura aberta $X = \cup A_\lambda$ que não possui uma subcobertura finita.

Como X é totalmente limitado, é possível escrever X como reunião finita de subconjuntos fechados não vazios de diâmetro menor que 1. Uma vez que a cobertura $\{A_\lambda\}_\lambda$ não admite subcobertura finita, a restrição desta cobertura a pelo menos um desses fechados não pode admitir uma subcobertura finita. Seja X_1 um tal fechado.

X_1 também é totalmente limitado, logo pode ser escrito como reunião finita de subconjuntos fechados não vazios de diâmetro menor que $\frac{1}{2}$. Pelo menos um desses subconjuntos - X_2 - não pode ser coberto por um número finito de A_λ.

Repetindo este processo, obtemos uma sucessão $(X_n)_{n \in IN}$ tal que

- $X_{n+1} \subseteq X_n, \forall n \in IN$;
- $\varnothing \neq X_n$ é fechado;
- $\delta(X_n) < \frac{1}{n} \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} \delta(X_n) = 0$.

Pelo teorema A1.1, $\bigcap\limits_{n \in IN} X_n = \{a\}$. Seja λ tal que $a \in A_\lambda$. Como A_λ é aberto, então para algum $n \in IN$, $B\left(a, \frac{1}{n}\right) \subseteq A_\lambda$.

Mas $a \in X_n$ e $\delta(X_n) < \frac{1}{n}$, logo $X_n \subseteq B\left(a, \frac{1}{n}\right) \subseteq A_\lambda$, o que é absurdo.

Portanto, X é compacto, o que conclui a demonstração. $\square$

APÊNDICE A2

A MÉTRICA DE HAUSDORFF

Ao longo do terceiro capítulo referimos por diversas vezes a métrica de Hausdorff. Neste apêndice começaremos por mostrar que tal aplicação é, de facto, uma métrica. Posteriormente veremos que, se um espaço métrico for completo, então o conjunto formado pelos subconjuntos não vazios e compactos, munido da métrica de Hausdorff, também é completo.

Sejam (X,d) um espaço métrico não vazio, $FL(X)$ o conjunto formado pelos subconjuntos não vazios, fechados e limitados de X e $K(X)$ o conjunto formado pelos subconjuntos não vazios e compactos de X.

Observe-se que, enquanto que $FL(X)$ depende da métrica, $K(X)$ já não.

De facto, seja d uma métrica não limitada, isto é, não existe

$$M \in IR : d(x,y) \leq M, \forall x,y \in X$$

Tome-se $d_1 = \dfrac{d}{1+d}$ $(0 \leq d_1 \leq 1)$.

d e d_1 são métricas equivalentes (geram a mesma topologia) e

$$FL_d(X) \subset FL_{d_1}(X), \text{ com } FL_d(X) \neq FL_{d_1}(X)$$

já que d não é limitada (logo nem todos os fechados são limitados) e d_1 é (portanto, todos os fechados são limitados).

Em relação a $K(X)$, se d e d_1 gerarem a mesma topologia, então (X,d) e (X,d_1) têm os mesmos compactos.

Observe-se que, se K é um compacto de (X,T), onde X é um espaço topológico e d é uma métrica que gera T (isto é, T é metrizável), então K é limitado para a métrica d. De facto, suponha-se que tal afirmação era falsa. Então, fixado $x_0 \in K$, $\forall n \in IN$ existe $x_n \in K$ tal que $d(x_0,x_n) > n$. Considere-se $U_n = B_d(x_0,n) \cap K$, que é uma cobertura aberta de K que não admite uma subcobertura finita, o que é absurdo pois K é compacto.

Consideremos a seguinte aplicação

$$\begin{array}{rccc} h_d : & FL(X) \times FL(X) & \rightarrow & IR_0^+ \\ & (A,B) & \mapsto & h_d(A,B) \end{array}$$

onde

$$h_d(A,B) = \max\left\{\sup_{a \in A} d(a,B), \sup_{b \in B} d(b,A)\right\}$$

Dado $A \in FL(X)$, definimos $B(A,r) = \bigcup_{a \in A} B(a,r)$.

Portanto,

$$h_d(A,B) < r \Leftrightarrow A \subseteq B(B,r) \wedge B \subseteq B(A,r)$$

De facto,

$$\begin{aligned} h_d(A,B) < r &\Leftrightarrow \sup_{a\in A} d(a,B) < r \wedge \sup_{b\in B} d(b,A) < r \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow d(a,B) < r, \forall a \in A \wedge d(b,A) < r, \forall b \in B \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a \in B(B,r), \forall a \in A \wedge b \in B(A,r), \forall b \in B \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow A \subseteq B(B,r) \wedge B \subseteq B(A,r) \end{aligned}$$

A aplicação h_d é uma métrica definida em $FL(X)$, como mostra a seguinte proposição.

Proposição A2.1 h_d é uma métrica em $FL(X)$.

Demonstração

- $h_d(A,B) \geq 0, \forall A,B \in FL(X)$ é consequência imediata da definição;
  $A = B \Rightarrow h_d(A,B) = 0$ é trivial;
  Suponha-se agora que $h_d(A,B) = 0$. Portanto
  $$\forall a \in A, d(a,B) = 0 \Rightarrow \forall a \in A, a \in \overline{B} = B$$
  $$\forall b \in B, d(b,A) = 0 \Rightarrow \forall b \in B, b \in \overline{A} = A$$
  Logo, $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$, isto é, $A = B$.

- $h_d(A,B) = h_d(B,A), \forall A,B \in FL(X)$ é imediato da partir da definição.

- $h_d(A,C) \leq h_d(A,B) + h_d(B,C), \forall A,B,C \in FL(X)$
  Sejam $\rho = h_d(A,B)$, $\sigma = h_d(B,C)$ e $\varepsilon > 0$.

  Portanto,
  $$\rho = h_d(A,B) \Rightarrow \begin{cases} A \subseteq B(B,\rho+\varepsilon) & \textbf{(1)} \\ B \subseteq B(A,\rho+\varepsilon) & \textbf{(2)} \end{cases}$$
  $$\sigma = h_d(B,C) \Rightarrow \begin{cases} C \subseteq B(B,\sigma+\varepsilon) & \textbf{(3)} \\ B \subseteq B(C,\sigma+\varepsilon) & \textbf{(4)} \end{cases}$$

  De **(1)** e **(4)** resulta que
  $$A \subseteq B(C,\rho+\sigma+2\varepsilon)$$

  De **(2)** e **(3)** resulta que
  $$C \subseteq B(A,\rho+\sigma+2\varepsilon)$$

  Das duas afirmações anteriores concluímos que
  $$h_d(A,C) \leq \rho+\sigma+2\varepsilon, \forall \varepsilon > 0$$

Logo

$$h_d(A,C) \leq \rho + \sigma = h_d(A,B) + h_d(B,C)$$

o que conclui a demonstração. □

Uma questão que é interessante colocar é a seguinte:

- Sendo (X,d) um espaço métrico completo, será que $(K(X),h_d)$ também é completo?

O seguinte teorema responde afirmativamente a esta questão.

Teorema A2.2 Seja (X,d) um espaço métrico completo. Então $(K(X),h_d)$ também é completo.

Demonstração Sejam $(K_n)_{n\in IN}$ uma sucessão de Cauchy em $(K(X),h_d)$ e $K = \overline{\bigcup_{n\in IN} K_n}$.

Afirmamos que K é compacto. Para provar tal, recorremos ao teorema A1.4, isto é, iremos provar que K é completo e $\forall \varepsilon > 0$, K pode ser coberto por um número finito de bolas de raio ε (portanto K é totalmente limitado).

a) Como K é fechado e (X,d) é completo, é imediato que K também é completo.

b) Tome-se agora $\varepsilon > 0$.

Como $(K_n)_{n\in IN}$ é uma sucessão de Cauchy, existe $n_0 \in IN : \forall n \geq n_0$:

$$h_d\left(K_n, K_{n_0}\right) < \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow K_n \subseteq B\left(K_{n_0}, \frac{\varepsilon}{3}\right) \subseteq B\left(K_0, \frac{\varepsilon}{3}\right)$$

onde $K_0 = \bigcup_{j=1}^{n_0} K_j$, que é compacto.

Decorre então que

$$\overline{\bigcup_{n\in IN} K_n} \subseteq B\left(K_0, \frac{\varepsilon}{2}\right) \qquad \textbf{(1)}$$

Como K_0 é compacto, existem $x_1,\ldots,x_s \in K_0$ tal que

$$K_0 \subseteq \bigcup_{i=1}^{s} B\left(x_i, \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

Afirmamos que

$$\overline{\bigcup_{n\in IN} K_n} \subseteq \bigcup_{i=1}^{s} B(x_i, \varepsilon)$$

De facto, seja $y \in \overline{\bigcup_{n \in IN} K_n}$.

Por **(1)**, resulta que $d(y, K_0) < \frac{\varepsilon}{2}$. Seja $z \in K_0$ tal que $d(y,z) = d(y, K_0) < \frac{\varepsilon}{2}$ (é possível pois K_0 é compacto).

Logo existe $i \in \{1,\ldots,s\}$ tal que $d(z, x_i) < \frac{\varepsilon}{2}$, donde decorre que

$$d(y, x_i) \le d(y,z) + d(z, x_i) < \varepsilon$$

Portanto $y \in B(x_i, \varepsilon)$. Uma vez que y era qualquer,

$$K = \overline{\bigcup_{n \in IN} K_n} \subseteq \bigcup_{i=1}^{s} B(x_i, \varepsilon).$$

Provamos assim que K é compacto.

Seja agora

$$G_n = \overline{\bigcup_{p \in IN_0} K_{n+p}}$$

Cada G_n é fechado e está contido em K, logo, $\forall n \in IN$, G_n é compacto.
Além disso, $G_{n+1} \subseteq G_n, \forall n \in IN$.
Portanto, $G_0 = \bigcap_{n \in IN} G_n$ é um compacto não vazio.
Finalmente, vejamos que $\lim_{n \to \infty} K_n = G_0$.
Seja $\varepsilon > 0$. Logo

$$\exists n_0 \in IN \; \forall m, n \ge n_0 : K_m \subseteq B\left(K_n, \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

Portanto

$$G_0 \subseteq G_m = \overline{\bigcup_{p \in IN_0} K_{m+p}} \subseteq B(K_n, \varepsilon)$$

Como $G_{n+1} \subseteq G_n, \forall n \in IN$ e $G_0 = \bigcap_{n \in IN} G_n$, existe $n_1 \in IN \; \forall n \ge n_1$

$$K_n \subseteq G_n \subseteq B(G_0, \varepsilon)$$

Seja $n \ge \max\{n_0, n_1\}$; então $G_0 \subseteq B(K_n, \varepsilon)$ e $K_n \subseteq B(G_0, \varepsilon)$, isto é,

$$h_d(K_n, G_0) < \varepsilon$$

como se queria provar. □

APÊNDICE A3

UM RESULTADO EM ESPAÇOS DE BANACH

O objectivo principal é provar que, dado um espaço de Banach B e $K \neq \emptyset$ um compacto de B, então o diâmetro de K é igual ao diâmetro do fecho convexo de K.

Recorde-se que, dado $\emptyset \neq A \subseteq B$, a envolvente convexa de A, $co(A)$, é o menor convexo que contém A e o fecho convexo de A, $\overline{co}(A)$, é o menor fechado convexo que contém A.

É ainda verdade que

$$co(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} t_i a_i;\ t_i \geq 0, \forall i \in \{1,\dots,n\}, \sum_{i=1}^{n} t_i = 1 \text{ e } a_i \in A, \forall i \in \{1,\dots,n\} \right\}$$

Lema A3.1 ([24], pag 21) $\overline{co}(A) = \overline{co(A)}$

Demonstração

Comece-se por observar que $\overline{co(A)}$ é convexo. De facto, sejam $x, y \in \overline{co(A)}$ e $0 \leq \alpha \leq 1$. Sejam ainda $(x_n)_{n\in IN}$ e $(y_n)_{n\in IN}$ duas sucessões em $co(A)$ convergindo para x e y, respectivamente. Então $(\alpha x_n + (1-\alpha)y_n)_{n\in IN}$ é uma sucessão em $co(A)$ convergindo para $(\alpha x + (1-\alpha)y)$; logo $(\alpha x + (1-\alpha)y) \in \overline{co(A)}$.

Como $\overline{co(A)}$ é convexo, fechado e contém A, conclui-se que $\overline{co}(A) \subseteq \overline{co(A)}$.

Mas

$$co(A) \subseteq \overline{co}(A) \Rightarrow \overline{co(A)} \subseteq \overline{co}(A)$$

pois $\overline{co}(A)$ é fechado. Portanto $\overline{co}(A) = \overline{co(A)}$. □

Definição A3.2 Seja $C \neq \emptyset$ um convexo e fechado. $x_0 \in C$ é *ponto extremo* de C se não existirem $x, y \in C$ e $t \in \left]0,1\right[$ tais que $x_0 = tx + (1-t)y$. Ao conjunto formado por todos os pontos extremos de C representa-se por C_e.

Pelo teorema de Krein-Milman ([24], pag 265), se $C \neq \emptyset$ for compacto e convexo, então $C = \overline{co}(C_e)$. Pelo que já foi visto no segundo capítulo, se $\emptyset \neq K \subseteq B$, onde B é um espaço de Banach e K um compacto, então $\overline{co}(K)$ é compacto ([2], pag 174).

Logo, o teorema de Milman ([24], pag 268) garante que os pontos extremos de $\overline{co}(K)$ pertencem a K.

Apresentados os requisitos necessários, iremos agora provar o pretendido para este apêndice:

Lema A3.3 Sejam B um espaço de Banach e $K \neq \emptyset$ um compacto. Então $\delta(K) = \delta\left(\overline{co}(K)\right)$

Demonstração Pelo teorema de Milman, os pontos extremos de $\overline{co}(K)$ pertencem a K. Além disso, pelo teorema de Krein-Milman, como $\overline{co}(K)$ é compacto e convexo, conclui-se que $\overline{co}(K) = \overline{co}(C_e)$, onde C_e representa o conjunto de pontos extremos de $\overline{co}(K)$.

Assim sendo,

$$\delta\left(\overline{co}(K)\right) = \delta\left(\overline{co}(C_e)\right) = \delta\left(\overline{co(C_e)}\right) = \delta\left(co(C_e)\right)$$

Vejamos agora que $\delta\left(co(C_e)\right) = \delta(C_e)$.

Sejam então $x, y \in co(C_e)$. Logo, podemos escrever x e y como:

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \text{, onde } \lambda_i \geq 0,\ \forall i \in \{1,\ldots,n\},\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \text{ e } x_i \in C_e,\ \forall i \in \{1,\ldots,n\};$$

$$y = \sum_{j=1}^{p} \mu_j y_j \text{, onde } \mu_j \geq 0,\ \forall j \in \{1,\ldots,p\},\ \sum_{j=1}^{p} \mu_j = 1 \text{ e } y_j \in C_e,\ \forall j \in \{1,\ldots,p\}.$$

Assim sendo,

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(\sum_{j=1}^{p} \mu_j x_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} \lambda_i \mu_j x_i$$

De modo análogo

$$y = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} \lambda_i \mu_j y_j$$

Por conseguinte

$$\|x - y\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} \lambda_i \mu_j (x_i - y_j) \right\| \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} \lambda_i \mu_j \|x_i - y_j\| \leq \delta(C_e) \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} \lambda_i \mu_j = \delta(C_e).$$

Logo

$$\delta\left(co(C_e)\right) = \sup_{x,y \in co(C_e)} \|x - y\| \leq \delta(C_e)$$

Por outro lado, como

$$C_e \subseteq co(C_e) \Rightarrow \delta(C_e) \leq \delta\left(co(C_e)\right)$$

Portanto

$$\delta(C_e) = \delta\left(co(C_e)\right)$$

Conclui-se então que

$$\delta\left(\overline{co}(K)\right) = \delta\left(co(C_e)\right) = \delta(C_e) \leq \delta(K)$$

já que $C_e \subseteq K$.

Finalmente, como $\overline{co}(K) \supseteq K \Rightarrow \delta\left(\overline{co}(K)\right) \geq \delta(K)$.

Portanto, $\delta\left(\overline{co}(K)\right) = \delta(K)$, como queríamos provar. □

BIBLIOGRAFIA

[1] R. Abraham, J. E. Marsden and Ratiu. *Manifold, Tensor Analysis and Applications*. Addison – Wesley Publishing Company, 1983

[2] C. D. Aliprantis and K. C. Border. *Infinite Dimensional Analysis*. Springer -Verlag, 2ª edição, 1999

[3] V. I. Arnold. *Ordinary Differential Equations*. The MIT Press, 1973

[4] A. Avez. *Differential Calculus*. John Wiley and Sons, 1986

[5] G. Beer. *Topoligies on Closed and Closed Convex Sets*. Kluwer Academic Publishers, 1993

[6] L. P. Belluce and W. A. Kirk. *Fixed Points Theorems for Certain Classes of Nonexpansive Mappings*. Proceedings of the American Mathematical Society, 1969, pág 141-146

[7] L. P. Belluce and W. A. Kirk. *Fixed Points Theorems for Families of Contractiom Mappings*. Pacific Journal of Mathematics, 1966, pág 213-217

[8] L. Bers. *Topology*. New York University, 1957

[9] W. E. Boyce and R. C. DiPrima. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. John Wiley, 1977

[10] W. W. Comfort and S. Negrepontis. *Chain Conditions in Topology*. Cambridge University Press, 1982

[11] R. Demarr. *Common Fixed Points For Commuting Contraction Mappings*. Pacific Journal of Mathematics, 1963, pág 1139-1141

[12] M. Edelstein. *On Fixed and Periodic Points Under Contractive Mappings*. Journal London Mathematical Society, 1962, pág 74-79

[13] M. Edelstein. *An Extension of Banach's Contraction Principle*. Proceedings of the American Mathematical Society, 1961, pág 7-10

[14] M. Edelstein. *On Nonexpansive Mappings*. Proceedings of the American Mathematical Society, 1964, pág 689-695

[15] D. Göhde. *Über Fixpunkte bei Stetigen Selbstabbildungen mit Kompakten Iterierten*, Mathematische Nachrichten, 1964, pág 45-55

[16] D. H. Griffel. *Applied Functional Analysis*. Ellis Horwood Limited, 1981

[17] S. I. Grossman. *Calculus-Multivariable Calculus, Linear Algebra and Differential Equations*. Academic Press, 1982

[18] M. C. Joshi and K. K. Bose. *Some Topics in Nonlinear Functional Analysis*. Wiley Eastern Limited, 1985

[19] D. W. Kahn. *Topology-An Introduction to the Point-Set and Algebraic Areas*. The Williams&Wilkins Company, 1975

[20] A. N. Kolmogorov and S. V. Fomin. *Functional Analysis*. Graylock Press, 1957

[21] Elon Lages Lima. *Curso de Análise*. Volume 2. Projecto Euclides, 1981

[22] Elon Lages Lima. *Espaços métricos*. Projecto Euclides, 1977

[23] J. E. Marsden. *Elementary Classical Analysis*. W. H. Freeman and Company, 1974

[24] R. E. Megginson. *An Introduction to Banach Space Theory*. Springer-Verlag, 1998

[25] S. B. Nadler, Jr. *Multivalued Contraction Mappings*. Pacific Journal of Mathematics, 1969, pág 475-488

[26] S. B. Nadler, Jr. *Sequences of Contractions and Fixed Points*. Pacific Journal of Mathematics, 1968, pág 579-585

[27] J. Palis Jr and W. Melo. *Introdução aos Sistemas Dinâmicos*. Projecto Euclides, 1978

[28] A. L. Rabenstein. *Introduction to Ordinary Differential Equations*. Academic Press, 2ª edição, 1972

[29] W. Rudin. *Principles of Mathematical Analysis*. Mcgraw-Hill, 3ª edição, 1976

[30] G. E. Shilov. *Elementary Functional Analysis*. The MIT Press, 1974

[31] M. Shub. *Global Stability of Dynamical Systems*. Springer-Verlag, 1987

[32] R. E. Smithson. *Fixed Points for Contractive Multifunctions*. Proceedings of the American Mathematical Society, 1971, pág 192-194

[33] C. Yu-Qing. *On a Fixed Point Problem of Reich*. Proceedings of the American Mathematical Society, 1996, pág 3085-3088

[34] E. Zeidler. *Nonlinear Functional Analysis and its Applications. I - Fixed Points Theorems*. Spinger-Verlag, 1986