Rui Pedro Teixeira da Costa

Geração automática de exercícios de Matemática

Departamento de Matemática Pura
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
2003

Rui Pedro Teixeira da Costa

Geração automática de exercícios de Matemática

Tese submetida à Faculdade de Ciências da Universidade do Porto para obtenção do grau de Mestre em Ensino da Matemática

Departamento de Matemática Pura
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
2003

Aos meus pais e ao meu irmão.

Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço ao Professor Doutor José Carlos Santos, não só pela sua disponibilidade e acompanhamento, mas também pelas suas sugestões e críticas que tiveram um contributo decisivo para o desenvolvimento desta tese.

Estou grato a toda a minha família, em especial aos meus pais, Emília e Delfim, e ao meu irmão, João, por sempre me terem incentivado à realização deste trabalho.

Agradeço também aos meus amigos por todo o apoio que me dispensaram quando mais dele necessitei.

Finalmente agradeço ao Departamento de Matemática Pura da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto por todas as condições de trabalho que me proporcionou para a elaboração desta tese.

Conteúdo

Introdução

Numa época em que as tecnologias estão em constante melhoramento e as necessidades dos alunos têm um papel cada vez mais importante no combate ao insucesso escolar, principalmente na disciplina de matemática, há que tirar partido desse avanços tecnológicos para criar propostas de trabalho efectivamente motivantes e que, simultaneamente, contribuam para o processo de consolidação da aprendizagem de determinado tema, indo de encontro às dificuldades específicas de cada aluno.

É neste contexto que nos surge o relatório «Generating Mathematics exercises by computer» (ver [20]), da autoria de Ana Paula Tomás e Pedro Vasconcelos, docentes do departamento de Ciência de Computadores da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, e o artigo «A CLP-based tool for computer aided generation and solving of maths exercises» (ver [19]), escrito pelos professores Ana Paula Tomás e José Paulo Leal, também ele docente do departamento de Ciência de Computadores da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, que servem de base à concepção desta tese.

No relatório [20], os autores dão-nos conta da investigação que está a ser feita para a elaboração de uma aplicação computacional, em CLP («Constraint Logic Programming»), que faça a geração de exercícios sobre determinado assunto relacionado com a disciplina de matemática e que, além de criar o exercício, forneça ao aluno uma resolução do mesmo, de acordo com os seus conhecimentos. A ideia base do método que está a ser investigado é tentar reproduzir os processos que os próprios professores por vezes utilizam para criar exercícios – partindo dos conhecimentos que o professor sabe que o aluno tem, constrói um problema que permita verificar se na realidade esses conhecimentos foram assimilados pelo aluno. É referido ainda neste relatório que nem todos os tópicos matemáticos se podem inserir nesta investigação, devido ao facto de se pretender dar ênfase a exercícios cuja resolução consista num processo algorítmico, ou seja, exercícios repetitivos, isto é, aqueles que visam a consolidação de conceitos e a prática de técnicas e processos algébricos. São também dados exemplos de temas que podem efectivamente ser usados (domínios de funções racionais, estudo de sinal, etc.) e de exercícios que se podem obter usando esta abordagem.

No artigo [19], os autores fazem uma sistematização mais pormenorizada sobre alguns aspectos já referidos no relatório. Assim, são referidos mais alguns aspectos fundamentais a ter em consideração na investigação realizada:

1. Apresentar os exercícios de forma a poderem ser resolvidos por processos ensinados aos alunos em diferentes níveis de ensino;
2. Possibilitar a aplicação de restrições de modo a adequar determinado problema ao grau de conhecimentos do aluno;
3. Ter alguma noção sobre a resolução do exercício gerado de modo a certificar o seu interesse pedagógico;
4. Implementar os processos de resolução para que o computador possa oferecer uma explicação da resolução do exercício ou as sucessivas etapas de resolução.

Outro aspecto focado neste artigo é o desenvolvimento do protótipo da aplicação que se encontra disponível online em `http://www.ncc.up.pt/~apt/demomath.html`, em que o utilizador pode seleccionar as restrições que pretende para determinado tipo de exercício e obter um documento com vários exemplos. Os autores dão ainda uma descrição da arquitectura do sistema, bem como dos diferentes tipos de linguagem computacional usada.

Para esta tese, tendo como ponto de partida os dois trabalhos acima referidos, pretendem-se investigar os processos matemáticos que podem e devem ser implementados num *software* para que seja possível gerar exercícios sobre um determinado tópico. Além disso, para cada tipo de exercício analisado neste trabalho, é dada a explicação de um possível método de resolução, em virtude de se pretender que o programa apresente também uma resolução do exercício gerado. De forma a sermos um pouco mais explícitos, vamos supor, por exemplo, que se pretendem gerar polinómios para que os alunos treinem o cálculo de raízes de funções polinomiais. Se não for imposta qualquer restrição o programa poderá gerar polinómios dos quais os alunos não sabem calcular os zeros. Note-se que ao nível do 12.º ano só é conhecida a fórmula resolvente de equações de segundo grau. Torna-se então pertinente a questão: que condições têm de satisfazer os polinómios para que os alunos consigam calcular os seus zeros? Repare-se que o grau do polinómio não tem, ao contrário do que se poderia pensar, um papel determinante, pois os alunos não sabem calcular os zeros de $R(x) = x^3 - 7x^2 + 3x + 4$, mas sabem de $Q(x) = 3x^5 + 4x^4 - 5x^3$, pois é razoável pedir a um aluno do Secundário que ponha em evidência potências de x e, assim, este polinómio poderá então ser escrito na forma $Q(x) = x^3(3x^2 + 4x - 5)$, sendo as suas raízes calculadas usando a regra do anulamento do produto e a fórmula resolvente. Portanto, os polinómios que o computador terá de gerar para este tipo de exercício são da forma $P(x) = x^n.S(x^m)$, em que $n, m \in \mathbb{N}$ e $S(x)$ é um polinómio de grau menor ou igual a dois, ou, mais geralmente, polinómios que estejam expressos como produtos de polinómios deste tipo.

Como já foi referido atrás, o *software* que se encontra em desenvolvimento está prioritariamente vocacionado para a geração de exercícios que se resolvam por métodos algorítmicos, mas nem todos os assuntos matemáticos se proporcionam a este tipo de abordagem. Por exemplo, o tema Probabilidades dificilmente pode ser usado neste estudo, pois a resolução, que pode eventualmente envolver métodos repetitivos, depende da própria semântica do enunciado e, portanto, não pode ser gerado aleatoriamente sem parecer demasiado «artificial». Devido a este facto, foram feitas algumas restrições: são focados temas referentes ao programa de 12.º ano de escolaridade, porque assim estamos simultaneamente a considerar assuntos relativos a anos lectivos anteriores, o que nos permite mais liberdade no tipo de exercícios a propor; dentro do programa de 12.º ano foram considerados os limites (de funções e de sucessões), as derivadas (aplicadas à determinação do sinal de uma função) e as assímptotas, por serem temas cuja parte prática se enquadra mais no estilo de exercício repetitivo que se pretende, além de que estes temas, no seu conjunto, nos permitem, em última análise, esboçar e analisar o gráfico de uma função, o que constitui em si um dos objectivos fundamentais do programa de matemática.

Notemos ainda que o que se quer é que o aluno aprenda o algoritmo de resolução do exercício e que isso só é conseguido com treino, fazendo muitos casos em que se aplique sempre a mesma regra ou o mesmo conjunto de regras e onde o papel do professor é, de certa forma, secundário, pois só o próprio aluno é que pode praticar. Daí a pertinência de um programa em que o aluno executa a quantidade de exercícios que mais lhe convém, sempre diferentes, sem depender da disponibilidade do professor para verificar as suas respostas.

Evidentemente que não estamos a defender a substituição do professor, apenas se deseja dar mais opções aos alunos para que solidifiquem os seus conhecimentos sem perderem a qualidade de um tempo lectivo dado pelo professor e que se revela, às vezes, manifestamente insuficiente.

Quanto à estrutura da tese em si, ela consiste numa revisão de literatura, numa parte dedicada ao estudo dos algoritmos de geração de exercícios e num pequeno capítulo com as conclusões. A parte que consiste no estudo de algoritmos encontra-se dividida em três capítulos. O primeiro destes trata de cálculo de limites, mais concretamente limites de funções e limites de sucessões: investigam-se os tipos de funções e de sucessões e as circunstâncias nas quais o aluno sabe calcular o limite, usando ou não limites notáveis, bem como as técnicas que tem ao seu dispor para resolver este tipo de problemas. No segundo capítulo temos o tema das derivadas; em particular, falamos sobre as condições para que uma função por ramos seja derivável no ponto de junção e nos vários tipos de funções que se podem usar. Poderá parecer estranho que se abordem os limites após as derivadas, mas técnicas baseadas em derivação (cálculo de limites usando a definição de derivada e regra de L'Hôpital) são por vezes empregues no cálculo de limites. Também são analisados os casos de funções em que é possível calcular a derivada de segunda ordem e respectivos zeros, visando o estudo da concavidade. Finalmente, no último dos três capítulos, abordamos o estudo das assímptotas: elaborou-se um levantamento do tipo de funções para as quais se pode pedir a um aluno para as calcular.

Capítulo 1

Revisão de literatura

O objectivo deste capítulo é fazer uma curta reflexão sobre alguns aspectos que tornaram relevante o assunto abordado nesta tese, bem como dar destaque a alguns estudos e artigos anteriormente efectuados que, de certa forma, são pertinentes para o tema em estudo.

Assim, as problemáticas que se vão abordar nesta revisão são as seguintes:

1. A emergência da utilização de Sistemas Computacionais Algébricos (ou, em inglês, CAS (Computer Algebraic Systems)) na aprendizagem da Matemática no ensino secundário e nos primeiros anos do ensino superior.

2. As características que se devem privilegiar no uso de CAS para que sejam efectivamente úteis na sala de aula e contribuam para a assimilação pelos alunos de conceitos e rotinas.

3. Consequências para os alunos e para a sua aprendizagem, da utilização de instrumentos que permitam um *feedback* imediato sobre os seus raciocínios e as conclusões que obtêm.

1.1 Utilização de CAS no ensino da Matemática

Nos dias de hoje, em que novos métodos e processos computacionais estão constantemente a ser desenvolvidos e melhorados deve-se procurar algum tipo de equilíbrio entre estes e a efectiva aprendizagem de conceitos pelo aluno.

Em Meirinhos (ver [9]), temos uma pequena retrospectiva sobre as primeiras utilizações do computador em educação: «As primeiras utilizações do computador no ensino, caracterizam-se pela procura de modelos de *software* que se limitavam a traduzir o esquema básico de ensino programado». Esta ideia de que o computador deveria poder cumprir a função tradicional do professor de transmitir informação, levou a que, segundo o autor, alguns sugerissem que os professores fossem simplesmente substituídos.

Entre as aplicações que melhor expressam o conceito de aprendizagem como aquisição de conhecimentos, o autor destaca os programas de «exercícios repetitivos», que «têm por finalidade proporcionar exercícios para reforçar os conhecimentos já adquiridos ou desenvolver determinada destreza, da mesma forma que o faziam as folhas de exercícios e os problemas em contexto tradicional». Neste artigo são ainda apontadas algumas vantagem deste tipo de ensino assistido por computador, tais como:

1. Facilidade de utilização: não requerem nenhuma aprendizagem prévia nem nenhum contacto com o material;

2. Utilidade em determinados contextos, para que o aluno adquira habilidades elementares que necessitam de exercitação prática e automatização;

3. Complemento de aprendizagem, quando acompanhando outro material didáctico.

Sobre a investigação e desenvolvimento que tem vindo a ser realizado sobre métodos computacionais de geração e apresentação de problemas, temos na introdução de [3] um resumo de algumas das suas etapas. Segundo os autores, as primeiras aplicações «apresentavam uma sequência de problemas ao aluno, analisavam as respostas e finalmente certificavam a qualidade da sua prestação». A constante procura de melhores métodos e programas tecnologicamente superiores levou, posteriormente, à introdução de algumas propriedades: «possibilidade de escolha do tema, uso de uma gramática formal e implementação de mecanismos adicionais que permitam controlar as afirmações geradas pela gramática usada». No entanto é referido que «este começo encorajador não levou a uma abundância de sistemas de geração de exercícios». A razão para tal acontecer deve-se, segundo os autores, à opinião de que «com a tecnologia actual, o uso de tais programas não é apelativa nem economicamente viável. Podem ser obtidos melhores resultados com menos esforço, recorrendo a uma (possivelmente grande) base de dados de tais problemas». Tal afirmação é, por um lado, «demasiado pessimista relativamente às possibilidades tecnológicas», em virtude de estarem actualmente disponíveis métodos que permitem ao programador dispensar a simples escolha aleatória de valores numéricos (que poderiam gerar problemas inadequados e sem sentido) e, por outro, «demasiado optimista quanto à viabilidade de se construir uma efectiva base de dados de problemas», visto que os alunos têm tendência a «decorar a resposta a determinado exercício, sem conhecer realmente os processos que estão na base da resolução. Para evitar isto teria de ser criada uma base de dados muito, muito grande; o que aumentaria drasticamente o trabalho de concepção de tal aplicação».

Segundo M. Kathleen Heid (ver [6]) as principais diferenças entre a aprendizagem através do uso de CAS e de outro tipo de material situam-se a três níveis:

1. Acesso a CAS permite, mais do que outro meio de resolução de problemas,

«transcender os limites da mente(...)em raciocínio, aprendizagem e resolução de problemas» ([13, p. 91], citado por [6]).

2. O uso de CAS por parte dos alunos implica uma reestruturação dos conteúdos programáticos das disciplinas de Matemática, pois temos de considerar as novas formas que estes têm de encontrar e desenvolver raciocínios sobre diferentes assuntos matemáticos.

3. Os CAS fornecem a tecnologia para gerar e manipular representações de funções, investigando possíveis relações entre elas, o que permite uma abordagem inovadora relativamente à representação gráfica e visual da Matemática.

Ainda segundo esta autora: «CAS fazem com que processos matemáticos mais avançados fiquem acessíveis aos alunos», «[estes]podem gerar e manipular expressões simbólicas que, de outra forma, seriam muito complicadas e demasiado morosas para os alunos analisarem» (ver [6]).

Michèle Artigue (ver [1]) identifica dois aspectos complementares disponibilizados pelo trabalho matemático acompanhado por CAS, ao nível da aquisição de conceitos e no desenvolvimento do conhecimento matemático:

1. O primeiro aspecto é o desenvolvimento do domínio de técnicas de equivalência algébrica e simplificação de expressões, o que, num primeiro impacto se revela ser de difícil assimilação por parte dos alunos.

2. O segundo, mais facilmente identificável, é todo o novo potencial disponibilizado pelo trabalho com parâmetros computacionais simbólicos e que permite acesso a generalizações.

Ainda no primeiro aspecto, a autora realça a possibilidade de o professor discutir com os alunos questões sobre a dualidade exacto/aproximado e a relação entre o valor lógico e a semântica de expressões algébricas. Questões estas que não são fáceis de abordar em sistemas tradicionais de ensino e nem mesmo com a ajuda de calculadoras gráficas e científicas.

Quanto ao segundo aspecto, a autora refere em particular o uso de funções e equações. Situações que incluem parâmetros podem ser vistas como o primeiro passo rumo à generalização, mas computações algébricas que envolvem parâmetros parecem estar cada vez mais fora do alcance dos alunos que seguem o sistema de ensino tradicional, que ainda predomina. O aparecimento das calculadoras gráficas permitiu a introdução de famílias de funções, mas apenas com um tratamento gráfico. O aparecimento de CAS leva a uma interligação entre o tratamento gráfico e algébrico de um determinado assunto. Os alunos podem verificar simbolicamente o que observam graficamente.

Não se pode também deixar de referir as novas possibilidades que o acesso à Internet no domínio da discussão e consolidação de conhecimentos matemáticos. «A World

Wide Web fornece um meio cada vez mais importante para a transmissão de práticas e conhecimentos.» (ver [17]). Sharon J. Derry e Lori A. DuRussel, (ver [4]), falam das vantagens do trabalho em grupo com elementos de proveniências distintas, disponibilizado cada vez mais por serviços on-line, nomeadamente da «construção do conhecimento» que resulta da análise das diversas opiniões sobre determinado assunto. Ainda segundo estas autoras a existência de ferramentas de treino e sistematização de conceitos pode ser útil para uma boa discussão de ideias em ambientes on-line.

Um aspecto também interessante é referido por Werner Pechek e Edith Schneider (ver [14]), nomeadamente o facto de podermos considerar CAS como instrumentos operacionais em que «o utilizador não tem necessariamente de perceber os processos de execução» faz com que este se possa concentrar em outros aspectos eventualmente mais importantes de um determinado problema. Além disso, o facto de o CAS simplificar cálculos permite ao utilizador, mesmo que este não saiba como são obtidas tais simplificações, empregar métodos de resolução que de outra forma seriam demasiado complexos e trabalhosos. Relativamente ao nosso estudo, esta referência é importante, pois realça o facto de, sendo o computador a criar e a apresentar uma resolução do exercício, o professor passar a ter maior disponibilidade para trabalhar com os alunos outros aspectos da aprendizagem de determinado assunto.

Seguindo também esta linha de raciocínio, Lisa D. Murphy (ver [10]) chama-nos à atenção no seu artigo para alguns aspectos positivos que resultam do uso de CAS. Em especial realça o facto de «as novas tecnologias permitirem outras sequências de conteúdos programáticos», por exemplo abordar a integração antes da derivação, o que justifica a reflexão sobre possíveis «reestruturações dos programas lectivos» nos vários níveis de ensino que tirem partido destas novas técnicas.

1.2 Condições para o uso de CAS

No entanto, apesar da relação entre as novas tecnologias e a matemática parecer bastante forte, devemos ter alguns cuidado ao explorar novos materiais tecnológicos. Como Shelley Goldman refere no seu artigo (ver [5]), «O simples preenchimento da sala de aula com aparelhos tecnológicos não melhora a aprendizagem: é necessário um uso equilibrado de computadores, software, multimédia e Internet». Para melhor podermos fazer essa gestão de recursos a autora refere algumas ideias chave que se devem seguir:

1. A tecnologia deve ser uma parte integrante da aprendizagem e não apenas um apêndice ao currículo ou porque, simplesmente tem que se usar.

   «O uso de computadores e outros tipos de tecnologias isolado do programa curricular central cria uma separação desnecessária entre a tecnologia e conteúdos relevantes.»

   «Alunos e professores aprenderão a usar computadores para resolver problemas quando estes constituírem uma parte útil e importante do currículo»

2. A tecnologia deve ser concebida, escolhida e usada para facilitar a aprendizagem de determinados conteúdos e não de uma maneira generalista.

   «[C]onceber tecnologias considerando apenas aspectos sociais e cognitivos da aprendizagem não é suficiente; a necessidade particular de ensinar e aprender determinado assunto também tem de ser tida em conta.»

3. A tecnologia deve ser vista como um auxílio para o professor e não como um estorvo.

   «A contribuição dos computadores para melhorar a aprendizagem tem que ser evidente para que compense o tempo gasto pelo professor a dominar e a gerir os programas.»

   «[U]sar computadores na sala de aula pode ser visto como, e por vezes é-o, mais uma situação problemática que o professor tem que resolver»

Em [3], os autores sugerem ainda que, ao usar o computador para apresentar o exercício ou problema ao aluno, deve-se ter em consideração algumas características particulares do aluno, como sejam:

1. experiência (com computadores, com o assunto, etc.);
2. conhecimentos (aspectos que o aluno domina);
3. objectivos (obter um conhecimento profundo de determinado tema ou apenas superficial);
4. preferências (por exemplo, o estilo de aprendizagem que melhor se adequa ao aluno).

Ingrid Rewitzky refere (ver [16]) a constante procura, pelos professores, de «métodos inovadores que permitam aos alunos dominar os vários assuntos do programa lectivo». Tendo isso em consideração, a autora sugere um sistema de geração automática de questões e testes, escritos em LaTeX e guardados numa base de dados, que permita uma melhor aprendizagem por parte dos alunos, «minimizando o tempo gasto pelos professores na preparação e correcção de testes». Refira-se a propósito que o protótipo do programa de geração de exercícios disponível on-line, já anteriormente abordado, usa o LaTeX, embora não se trate de uma base de dados.

Embora o sistema esteja principalmente vocacionado para testes e perguntas de escolha múltipla, são fornecidas algumas ideias chave a que o método de geração deve obedecer para se tornar realmente efectivo e que pode ser relevante também para questões de desenvolvimento, que é o tipo abordado neste estudo:

1. Gerando diferentes testes e questões para cada aluno resolve-se o problema de os alunos copiarem entre si;

2. Deve ser feita uma estatística gerada pelo computador, baseada nas respostas, que realce as principais dificuldades dos alunos.

Este último aspecto é de particular importância, pois permite ao professor e aos alunos ter um *feedback* bastante preciso sobre os assuntos em que estes têm mais dificuldades.

1.3 Importância da ocorrência de feedback imediato no ensino e na aprendizagem

Um dos grandes desafios que muitos professores enfrentam é o de possibilitar aos alunos o conhecimento imediato sobre a qualidade do seu trabalho. As novas tecnologias parecem ser um instrumento de bastante relevo para se conseguir ultrapassar essa dificuldade.

No seu artigo, Jack McGourty, (ver [8]), chama a atenção para o facto de «Usar um meio computadorizado significa que as informações podem ser recolhidas e analisadas rapidamente, permitindo uma rápida disponibilização do *feedback*. Isto significa também que se pode gastar mais tempo a rever a informação e a tornar mais relevante o processo de *feedback* para alunos e professores». O autor refere ainda que a apresentação formal do *feedback* sobre o trabalho do aluno carrega consigo a mensagem de que deve melhorar a sua prestação e «Esta mensagem por si só pode muitas vezes encorajar as pessoas a fazer uma auto avaliação e a estabelecer objectivos para melhorarem a sua aprendizagem.»

Capítulo 2

Derivadas

2.1 Cálculo de derivadas

Consideremos o seguinte problema: dada uma função, qual é o domínio da sua derivada? Embora este problema não seja proposto explicitamente aos alunos do ensino secundário, é de facto muitas vezes proposto implicitamente. Consideremos o seguinte exemplo, particularmente simples:

Exemplo 2.1 *Determinar os intervalos de $\mathbb{R}$ onde a função*

$$f(x) = \log(2x + 1)$$

é crescente, bem como aqueles em que é decrescente.

Um aluno que resolva este problema mecanicamente, poderá argumentar do seguinte modo: visto que $f'(x) = {}^2/_{(2x+1)}$ e visto que ${}^2/_{(2x+1)} > 0$ (respectivamente < 0) quando $x > -{}^1/_2$ (resp. $x < -{}^1/_2$), a função f é crescente em $]-{}^1/_2, +\infty[$ e é decrescente em $]-\infty, -{}^1/_2[$. Logo, é necessário, nos problemas que envolvam derivação de funções, começar-se não só com a determinação da expressão analítica da derivada mas também do seu domínio.

Quando um aluno consegue derivar duas funções deriváveis f e g, que outras funções obtidas a partir destas é que ele também sabe derivar? Uma resposta simples é: todas! Mais precisamente, um aluno do secundário que saiba derivar f e g, também saberá derivar $f \pm g$, $f.g$, ${}^f/_g$ e $g \circ f$, recorrendo às expressões:

1. $(f \pm g)' = f' \pm g'$;
2. $(f.g)' = f'.g + f.g'$;
3. $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{g.f' - f.g'}{g^2}$;

4. $(g \circ f)' = (g' \circ f).f'$.

Assim sendo, se, por exemplo, se pedir a um aluno do ensino secundário que calcule a derivada de

$$f(x) = \log\left(\frac{\operatorname{sen}(x)e^{x^2+1}}{\tan(e^x)}\right),$$

ele deverá ser capaz de o fazer.

No entanto, se alguma das funções f ou g não for derivável em todos os pontos do seu domínio, a situação torna-se mais delicada.

Exemplo 2.2 *Calcular $f'^{+}(0)$ nos seguintes casos:*

1. $f(x) = \cos\left(\sqrt{x}\right)$.
2. $f(x) = \sqrt{1-\cos(x)}$;

Embora ambas as funções sejam deriváveis à direita no ponto 0 (sendo a primeira também derivável à esquerda, embora as derivadas à esquerda e à direita não coincidam), isto não resulta da aplicação mecânica das regras anteriores, visto que $\sqrt{x}$ não é derivável em $0(=1-\cos 0)$. Aparentemente, os métodos de cálculo de derivadas de que os alunos do ensino secundário dispõem não permitem abordar este tipo de derivadas, a menos que a função dada seja simplificável de uma maneira óbvia (como, por exemplo, no caso de $f(x) = |e^x| = e^x$). Por outro lado, considere-se o seguinte teorema (veja-se [18, cap. 11]):

Teorema 2.1 *Seja f uma função real de variável real contínua num ponto a do seu domínio e suponha-se que f é derivável em cada ponto x de algum intervalo do domínio que contenha a excepto, eventualmente, no próprio ponto a. Se o limite $\lim_{x\to a} f'(x)$ existir, então f é derivável em a e*

$$f'(a) = \lim_{x\to a} f'(x)$$

Este teorema permite realizar o cálculo do exemplo 2.2.1, pois tem-se então

$$f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} -\frac{\operatorname{sen}\left(\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen}\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}} = -\frac{1}{2}.$$

No entanto, se se tentar aplicar o mesmo método ao exemplo 2.2.2 deparar-nos-emos com um obstáculo, pois tem-se então

$$f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen} x}{2\sqrt{1-\cos x}}$$

e os métodos empregues pelos alunos do ensino secundário para levantarem indeterminações (veja-se o capítulo 3) não parecem permitir resolver este problema, embora este não seja particularmente difícil; basta ver que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{2\sqrt{1-\cos x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{2\sqrt{1-\cos x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1+\cos x}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Vejamos agora que problemas podem surgir relativamente à derivabilidade de somas e de produtos de funções. Se se somarem n funções tais que, para cada ponto a do domínio, $n-1$ delas são deriváveis em a enquanto que a restante função não o é, então a soma não é derivável em a. Com o produto, a situação já é mais complexa. De facto, se se multiplicam duas funções das quais uma é derivável num ponto a do domínio, enquanto que a outra não o é, nada se pode concluir quanto ao produto. Assim, por exemplo, se se tiver $f(x) = |x|$ e $g(x) = x$, então f não é derivável no ponto 0, enquanto que g e $f.g$ são-no. Por outro lado, se $h(x) = e^x$, então $f.h$ não é derivável no ponto 0. A não derivabilidade de $f.h$ no ponto 0 está ligada ao facto de $h'(0) \neq 0$; de facto, vejamos o seguinte teorema:

Teorema 2.2 *Sejam f e g duas funções reais de variável real e seja a um ponto dos respectivos domínios. Suponha-se que f não é derivável em a e que g é derivável em a, com $g'(a) \neq 0$. Então $f.g$ não é derivável em a.*

Demonstração: Vamos provar este teorema por redução ao absurdo.

Suponhamos que a função $f.g$ é derivável em a. Como g é derivável em a e $g'(a) \neq 0$, então a função $1/g$ também é derivável nesse ponto (ver [18, pp. 169–170]), donde $f = f.g.1/g$ é derivável em a, o que é absurdo. Concluímos então que $f.g$ não é derivável em a. ∎

Do que foi escrito acima, resulta que, numa primeira fase, talvez fosse preferível que o programa, ao criar problemas em que se peça para calcular derivadas de funções, que estas funções sejam obtidas somente a partir de funções «simples» que sejam deriváveis em todos os pontos do domínio ou então funções que se possam escrever como soma de funções «simples» de modo que, em cada ponto do domínio, haja, no máximo, uma única parcela não derivável. Caso se queira gerar uma função derivável à custa do produto de parcelas de funções «simples», teremos de ter também no máximo uma parcela não derivável em cada ponto do domínio e, nos pontos em que existir tal parcela, o computador terá de verificar se a derivada da função constituída pelo produto de todas as outras parcelas é nula nesse ponto.

2.2 Funções definidas por ramos

Ao nível do ensino secundário, quando se estuda a derivabilidade de uma função f definida por dois ou mais ramos, num dos pontos de junção, x_0, o que se pretende é que aluno calcule as derivadas laterais nesse ponto e verifique se são iguais ou não. Ou seja, tem de calcular $f'(x_0^-)$ e $f'(x_0^+)$ e a derivada em x_0 só existirá se $f'(x_0^-) = f'(x_0^+)$.

Exemplo 2.3 *Consideremos a função $f(x) = |x|$. Esta ainda pode ser definida por:*

$$f(x) = \begin{cases} -x & \textit{se } x < 0, \\ x & \textit{se } x \geq 0. \end{cases}$$

Vejamos se existe derivada no ponto 0, calculando as derivadas laterais; tem-se

$$f'(0^-) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x - 0}{x - 0} = -1$$

e

$$f'(0^+) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x - 0}{x - 0} = 1.$$

As derivadas laterais existem, mas não são iguais. Portanto a função não é derivável no ponto $x = 0$.

O que se pretende é que o computador gere funções definidas por ramos, cuja derivabilidade possa ser estudada por um aluno do nível secundário.

O que se poderia passar se déssemos total liberdade ao computador para gerar as funções seria que elas provavelmente não seriam deriváveis ou ainda os pontos de junção seriam demasiado «estranhos» para um aluno do ensino secundário, etc.

Pretende-se que o utilizador controle o mais possível as características desejadas em determinado exercício, sem perder alguns factores aleatórios que permitem ter à sua disposição um número relativamente grande de opções válidas. Neste caso particular das funções por ramos, poderíamos começar então por escolher o número de ramos desejado e o(s) ponto(s) de junção pretendidos num determinado intervalo (por exemplo $[-2, 2]$). Finalmente escolheríamos o tipo de funções que apareceria em cada ramo.

Uma questão importante que se levanta é como fazer com que o computador gere funções por ramos deriváveis no ponto de junção sem recorrer ao acaso, ou seja, que relação têm de ter as funções pertencentes a cada ramo para isso acontecer. Consideremos o seguinte teorema:

Teorema 2.3 *Seja h uma função definida do seguinte modo:*

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \textit{se } x \geq x_0 \\ g(x) & \textit{se } x < x_0, \end{cases}$$

sendo f e g funções deriváveis em x_0. Então h é derivável em x_0 se e só se $f(x_0) = g(x_0)$ e $f'(x_0) = g'(x_0)$.

Demonstração: Vamos supor que h é derivável num ponto x_0. Temos então que

$$\begin{aligned}
h'(x_0^+) = h'(x_0^-) &\iff \lim_{x \to x_0^+} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^-} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} \\
&\iff \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^-} \frac{g(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\
&\iff \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^-} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\
&\iff g'(x_0) = f'(x_0)
\end{aligned}$$

■

No caso de termos a função h definida do seguinte modo:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x > x_0 \\ g(x) & \text{se } x \leq x_0. \end{cases}$$

o teorema também é válido fazendo uma demonstração análoga.

Consideremos uma função definida por ramos em que num deles temos uma função f qualquer e que o ponto de junção é $x = c$.

2.2.1 Função polinomial

Se pretendemos que no outro ramo esteja uma função g polinomial, de modo a que a função por ramos seja derivável em c, pelo teorema anterior, temos que ter

$$g'(c) = f'(c)$$

e

$$g(c) = f(c)$$

ou seja, como $g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$, obtemos

$$a_0 + a_1 c + a_2 c^2 + \cdots = f(c)$$

e

$$a_1 + 2a_2 c + 3a_3 c^2 + \cdots = f'(c).$$

Exemplo 2.4 *Consideremos a função definida por:*

$$h(x) = \begin{cases} f(x) = \log(2x + x^2) & se\ 0 < x \leq 1, \\ g(x) & se\ x > 1. \end{cases}$$

Vamos procurar agora uma função g polinomial que faça com que h seja derivável em $x = 1$.

Temos assim que $f(1) = \log 3$ e $f'(1) = 4/3$.

Então $g(x) = (x - 1)4/3 + \log 3$ é uma função com a propriedade designada.

Note-se ainda que qualquer função polinomial g do tipo:

$$g(x) = (x-1)^{4/3} + \log 3 + a_2(x-1)^2 + a_3(x-1)^3 + \cdots$$

com $a_2, a_3, \ldots \in \mathbb{R}$, também tem a propriedade procurada no exemplo.

2.2.2 Função racional

Passemos agora ao caso de g ser uma função racional, ou seja, da forma $g(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, com $P(x)$ e $Q(x)$ polinómios. Designemos por x_0 o ponto de junção; para termos então uma função por ramos derivável nesse ponto tem que se verificar:

$$g(c) = \frac{P(c)}{Q(c)} = \frac{a_0 + a_1 c + a_2 c^2 + \cdots}{b_0 + b_1 c + b_2 c^2 + \cdots} = f(c)$$

e

$$g'(c) = \frac{P'(c)Q(c) - Q'(c)P(c)}{Q^2(c)} = f'(c).$$

Vejamos um exemplo prático deste processo:

Exemplo 2.5 *Consideremos $f(x) = 2x - 3$, o ponto de junção $x_0 = 1$ e g uma função racional da forma $g(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$. Seja h a função*

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \leq 1, \\ g(x) & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Pretendemos encontrar a, b, c e d de modo que h seja derivável em 1. Usando as condições do teorema obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \frac{a+b}{c+d} = -1 \\ \frac{ad+cb}{(c+d)^2} = 2. \end{cases}$$

Para o podermos resolver, vamos dar valores a duas das incógnitas e resolver o sistema em ordem às outras duas, desde de que se considere sempre $c \neq -d$. Façamos então $c = 2$ e $d = 1$, ficando o sistema:

$$\begin{cases} \frac{a+b}{3} = -1 \\ \frac{a+2b}{9} = 2 \end{cases}$$

cuja solução é $a = -24$, $b = 21$. Logo a função g pode ser $g(x) = \frac{-24x+21}{2x+1}$. Mais geralmente, se não nos quisermos restringir a quocientes de funções polinomiais de primeiro grau, podemos considerar qualquer função da forma

$$g(x) = \frac{-24x + 21}{2x + 1} + \alpha(x-1)^2 + \beta(x-1)^3 + \cdots.$$

2.2.3 Função logarítmica

Vejamos agora o caso em que g é uma função logarítmica, isto é, da forma $g(x) = \log(u(x))$, onde $u(x)$ é um polinómio.

Para que a função seja derivável no ponto de junção $x = c$ façamos: $f(c) = g(c) = \log(u(c))$, tendo em atenção que o valor da função f no ponto de junção é não negativo, e $f'(c) = g'(c) = \frac{u'(c)}{u(c)}$. Assim, dependendo do ponto c, temos as condições que nos permitem construir o polinómio $u(x)$ e a função g.

Exemplo 2.6 *Consideremos $f(x) = x$ e o ponto de junção $c = 1$. Queremos encontrar uma função $g(x) = \log(u(x))$ tal que a função por ramos definida por f e g seja derivável. Das condições vistas anteriormente decorre o sistema:*

$$\begin{cases} \log(u(1)) = 1 \\ \frac{u'(1)}{u(1)} = 1, \end{cases}$$

que é equivalente a termos

$$\begin{cases} u(1) = e \\ u'(1) = e. \end{cases}$$

Portanto concluímos que a função g pode ser

$$g(x) = \log(e(x-1)+e) \Leftrightarrow g(x) = \log(e.x) = \log e + \log x = 1 + \log x.$$

Note-se que qualquer função do tipo $g(x) = \log(e.x + \gamma(x-1)^2 + \delta(x-1)^3 + \cdots) + \alpha(x-1)^2 + \beta(x-1)^3 + \cdots$ também pode ser usada.

2.2.4 Função exponencial

Se pretendermos que g seja uma função exponencial, $g(x) = e^{u(x)}$, onde $u(x)$ é um polinómio, considerando o ponto $x = c$ como ponto de junção, as condições para que a função por ramos seja derivável em c são: $f(c) = e^{u(c)}$, desde que a imagem do ponto c por f seja positiva, e $f'(c) = u'(c)e^{u(c)} = u'(c)f(c)$. Obtemos então as condições a que tem de obedecer o polinómio $u(x)$ e que nos permitem criar a função g.

Exemplo 2.7 *Seja $f(x) = 3x - 2$ e $c = 1$ o ponto de junção. Para encontrarmos a função $g(x) = e^{u(x)}$ de modo a que a função por ramos definida por f e g seja derivável temos que resolver o sistema:*

$$\begin{cases} e^{u(1)} = 1 \\ u'(1)e^{u(1)} = 3, \end{cases}$$

cuja solução é

$$\begin{cases} u(1) = 0 \\ u'(1) = 3. \end{cases}$$

Sendo assim, uma função com a propriedade pretendida é $g(x) = e^{3x-3}$ ou qualquer uma da forma $g(x) = e^{3x-3+\gamma(x-1)^2+\delta(x-1)^3+\cdots} + \alpha(x-1)^2 + \beta(x-1)^3 + \cdots$.

2.2.5 Função irracional

Consideremos agora o caso em que g é uma função irracional (ao nível do secundário aparece geralmente raiz quadrada, embora possa aparecer, muito raramente, uma raiz cúbica), $g(x) = \sqrt{u(x)}$, onde $u(x)$ é um polinómio; representemos uma vez mais por c o ponto de junção. Das condições de derivabilidade do teorema concluímos que $f(c) = \sqrt{u(c)}$, desde que a imagem de c por f não seja negativa, e $f'(c) = u'(c)/(2\sqrt{u(c)})$, que são as propriedades a que tem de obedecer o polinómio $u(x)$ para temos uma função por ramos derivável em c.

Exemplo 2.8 *Se tomarmos para f a função $f(x) = 2x - 3$ e como ponto de junção $c = 2$, para obtermos uma função $g(x) = \sqrt{u(x)}$ em que a função por ramos definida por f e g seja derivável em 2 temos de resolver o sistema:*

$$\begin{cases} \sqrt{u(2)} = 1 \\ \frac{u'(2)}{\sqrt{u(2)}} = 2, \end{cases}$$

donde se obtém

$$\begin{cases} u(2) = 1 \\ u'(2) = 4. \end{cases}$$

Portanto a função g pode ser $g(x) = \sqrt{1 + 4(x-2)}$ ou qualquer função da forma $g(x) = \sqrt{1 + 4(x-2) + \gamma(x-2)^2 + \delta(x-2)^3 + \cdots} + \alpha(x-2)^2 + \beta(x-2)^3 + \cdots$.

2.2.6 Função trigonométrica

Outro tipo de funções que se podem também usar são as funções trigonométricas: seno, cosseno, tangente e cotangente. Comecemos pela função seno e façamos $g(x) = \operatorname{sen}(u(x))$, sendo $u(x)$ um polinómio e c o ponto de junção. Para a função por ramos ser derivável nesse ponto, deduzem-se as condições $f(c) = \operatorname{sen}(u(c))$ e $f'(c) = u'(c)\cos(u(c))$, que nos permitirão encontrar o polinómio $u(x)$. Analogamente, para o caso de $g(x) = \cos(u(x))$, as condições de derivabilidade no ponto de junção $x = c$ são: $f(c) = \cos(u(c))$ e $f'(c) = -u'(c)\operatorname{sen}(u(c))$. Para o caso de $g(x) = \tan(u(x))$, as condições $f(c) = \tan(u(c))$ e $f'(c) = \frac{u(c)}{\cos^2(u(c))}$ têm de ser satisfeitas para a função por ramos ser derivável no ponto de junção $x = c$ e, finalmente, no caso de termos $g(x) = \cot(u(x))$, as condições de derivabilidade são: $f(c) = \cot(u(c))$ e $f'(c) = \frac{-u(c)}{\operatorname{sen}^2(u(x))}$.

Apesar de termos estabelecido as condições para gerarmos funções por ramos deriváveis com senos, cossenos, tangentes e cotangentes, só em casos muito particulares poderá uma tal função ser apresentada ao aluno sem que apareçam coeficientes ou pontos de junção demasiado «estranhos» (tipo: $\operatorname{arcsen}(2)$ ou ainda $\arccos(\sqrt{\arccos(5)/7})$). No caso do seno, da primeira condição obtemos que $u(c) = \operatorname{arcsen}(f(c))$ e, portanto, $f(c)$ tem que pertencer a um conjunto muito restrito de valores: 0, $\pm 1/2$, $\pm\sqrt{3}/2$, $\pm\sqrt{2}/2$ ou ± 1. Da segunda condição temos $u'(c) = \frac{f'(c)}{\cos(u(c))}$, logo o número $u(c)$ que resulta da fórmula anterior tem que ser um ângulo do qual se conheça o cosseno.

Exemplo 2.9 *Tomando para f a função $f(x) = {}^{e^x}/_2$ e como ponto de junção $c = 0$. Vamos procurar uma função $g(x) = \operatorname{sen}(u(x))$ em que a função por ramos definida por f e g seja derivável em 0. Vamos então resolver o sistema:*

$$\begin{cases} \operatorname{sen}(u(0)) = 1/2 \\ u'(0)\cos(u(0)) = 1/2, \end{cases}$$

donde se obtém, como uma das possíveis soluções,

$$\begin{cases} u(0) = \pi/6 \\ u'(0) = \sqrt{3}/3. \end{cases}$$

Logo, a função g pode ser $g(x) = \operatorname{sen}(\pi/6 + \sqrt{3}x/3)$ ou qualquer função da forma $g(x) = \operatorname{sen}(\pi/6 + \sqrt{3}x/3 + \gamma x^2 + \delta x^3 + \cdots) + \alpha x^2 + \beta x^3 + \cdots$.

No caso da tangente, dada uma função f e um ponto de junção c, as condições para se gerar uma função $g(x) = \tan u(x)$ são: $u(c) = \arctan(f(c))$ e $u'(c) = \frac{f'(c)}{1+\tan^2 u(c)}$, donde $f(c)$ só pode tomar um dos valores 0, ± 1, $\pm\sqrt{3}/3$ ou $\pm\sqrt{3}$ e o valor $u(c)$ resultante da primeira fórmula tem que ser um ângulo do qual se conheça a tangente.

Exemplo 2.10 *Seja f a função $f(x) = \log x + \sqrt{3}$ e como ponto de junção $c = 1$. Vamos procurar uma função $g(x) = \tan(u(x))$ em que a função por ramos definida por f e g seja derivável em 1. Vamos então resolver o sistema:*

$$\begin{cases} \tan(u(1)) = \sqrt{3} \\ u'(1)(\tan^2(u(0)) + 1) = 1, \end{cases}$$

logo, uma das possíveis soluções,

$$\begin{cases} u(1) = \arctan(\sqrt{3}) = \pi/3 \\ u'(1) = \frac{1}{1+\tan^2(\pi/3)} = 1/4. \end{cases}$$

Portanto, a função g pode ser $g(x) = \tan(\pi/3 + \sqrt{3}/3(x-1))$ ou qualquer função da forma $g(x) = \tan(\pi/6 + 1/4(x-1) + \gamma(x-1)^2 + \delta(x-1)^3 + \cdots) + \alpha(x-1)^2 + \beta(x-1)^3 + \cdots$.

O raciocínio para o caso do cosseno e da cotangente é análogo.

2.3 Derivadas de segunda ordem

As derivadas de ordem superior à primeira são introduzidas no ensino secundário no âmbito da análise de gráficos de funções, nomeadamente pontos de inflexão e sentidos da concavidade, que utiliza as derivadas de ordem dois.

No âmbito do nosso estudo, pretendemos que o computador gere funções, das quais seja razoável pedir a um aluno do secundário, ou de nível mais avançado, que calcule a segunda derivada e de seguida calcular os seus zeros e estudar o sinal. É evidente que não se pode dar total liberdade ao computador para que gere as funções aleatoriamente, em virtude de corrermos o risco de obtermos funções não deriváveis, derivadas demasiado complicadas para o aluno calcular e derivadas em que o aluno não sabe calcular os zeros ou o sinal. Portanto algumas restrições terão de ser feitas. Comecemos então por analisar o tipo de funções que podem ser usados neste nível de ensino.

As funções polinomiais são uma escolha óbvia quando se faz uma introdução a este assunto, mas algumas restrições têm de ser consideradas para que o aluno, ao derivar duas vezes, seja confrontado com um polinómio do qual saiba calcular os zeros. Sendo assim, convém que o computador gere apenas polinómios da forma $x^n(P(x^m))$, onde $n, m \in \mathbb{N}$ e $P(x)$ é um polinómio de grau não superior a dois. Note-se que a derivada de segunda ordem de um polinómio deste tipo é do tipo $kx^{2m+n-2} + px^{m+n-2} + qx^{n-2}$, que constitui um polinómio do qual o aluno sabe calcular os zeros (coloca-se x^{n-2} em evidência e usa-se a regra do anulamento do produto e a fórmula resolvente). Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 2.11 *Calcule os zeros da segunda derivada das seguintes funções:*

1. $f(x) = x^4 - 12x + 1$
2. $g(x) = x^2 - 6x + 8$
3. $h(x) = 3x^7 + 7x^6$

Um tipo de funções muito mais usado neste assunto são as funções racionais. Nesse caso, o que aparece habitualmente é uma fracção com dois polinómios em que a segunda derivada é uma fracção do tipo

$$\frac{x^n P(x^m)}{Q(x)},$$

em que $P(x)$ é um polinómio de grau menor ou igual a 2 e $Q(x)$ é um polinómio qualquer diferente do polinómio nulo. Embora seja um caso de maior dificuldade e não seja propriamente uma função racional, ainda que o aluno calcule os seus zeros de uma forma análoga, podemos apresentar também funções em que se tenha em denominador ou em numerador um polinómio até grau dois e uma raiz quadrada de um polinómio de grau um. Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 2.12 *Calcule os zeros da segunda derivada das seguintes funções e estude o sentido das concavidades:*

1. $f(x) = \dfrac{x-1}{x}$
2. $g(x) = \dfrac{x+3}{x^2 - 4x + 3}$

3. $h(x) = \dfrac{\sqrt{5x-6}}{x-1}$

4. $i(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x}}$

2.3.1 Funções racionais com segunda derivada racional e cálculo dos zeros da função

Procuremos agora um método de o computador gerar funções racionais, cuja segunda derivada é uma função racional, da qual o aluno sabe calcular os zeros e é do tipo descrito acima. Para tal começamos por gerar uma função racional do tipo

$$f(x) = \frac{a}{(x-c)^3} + \frac{b}{(x-d)^3},$$

sendo $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Se a primitivarmos duas vezes obtemos a função

$$g(x) = \frac{1}{2}\frac{(a+b)x - ad - bc}{(x-c)(x-d)} + \alpha x + \beta,$$

com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, que é ainda uma função racional, ou seja, ao apresentarmos ao aluno uma função racional da forma de g, sabemos que a segunda derivada resulta numa função do tipo de f. Resta então saber em que circunstâncias é possível calcular os zeros de f. Ao reduzirmos ao mesmo denominador essa função, obtemos em numerador o polinómio $(a+b)x^3 + (-3ad - 3bc)x^2 + (3ad^2 + 3bc^2)x + (-bc^3 - ad^3)$ que sendo de grau três e se estiver completo, inibe o cálculo dos zeros de f pelos métodos «convencionais». Sendo assim devemos fazer algumas restrições para que isso não aconteça:

1. fazendo $a = -b$, o coeficiente de x^3 torna-se nulo e portanto o polinómio em numerador passa a ser de grau dois;

2. podemos anular os termos de grau dois e um, desde que façamos $ad = -bc$ e $ad^2 = -bc^2$, respectivamente;

3. de modo análogo, anular o termo independente, logo que se imponha $bc^3 = -ad^3$.

Concluímos então que para ser possível ao aluno calcular os zeros da segunda derivada temos de fazer algumas restrições relativamente aos valores de a, b, c e d.

2.3.2 Funções racionais com primeira derivada racional

Suponhamos agora que se pretende um método de gerar funções que os alunos consigam derivar e cuja primeira derivada é uma função racional. Uma forma de o conseguir é gerando funções do tipo $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, em que $P(x)$ e $Q(x)$ são polinómios, primitivar f e o resultado será a função a apresentar ao aluno. A questão que se coloca é a de saber se os polinómios $P(x)$ e $Q(x)$ podem ser quaisquer ou se, pelo contrário, temos de fazer algumas restrições para que, depois de primitivar f, não apareçam funções que os alunos não conheçam ou não saibam derivar. Vejamos então o seguinte teorema:

Teorema 2.4 *Sejam A um aberto de $\mathbb{R}$ e f uma função de A em $\mathbb{R}$ tal que:*

$$(\forall x \in A) : f(x) = \frac{P(x)}{(x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2}\cdots(x-a_m)^{n_m}},$$

onde P é uma função polinomial, $m, n_1, n_2, \ldots, n_m \in \mathbb{N}$ e $a_1, a_2, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$. Então existe uma primitiva de f que pode ser escrita à custa de funções racionais e logarítmicas. Mais precisamente, existe uma primitiva de f da forma

$$r(x) + C_1 \log|x-a_1| + C_2 \log|x-a_2| + \cdots + C_m \log|x-a_m|,$$

onde r é uma função racional e $C_1, C_3, \ldots, C_m \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Comecemos por supor que o grau do numerador é menor que o do denominador. Para primitivarmos f façamos a sua decomposição em fracções parciais, obtendo então:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_m} \frac{A_{i,j}}{(x-a_i)^j},$$

onde cada $A_{i,j}$ é um número real. Uma primitiva das parcelas em que $j = 1$ é $A_{i,j}\log|x-a_i|$, para $i \in \{1, \ldots, m\}$. Nas parcelas em que $j \neq 1$, qualquer primitiva é uma função racional. Concluímos então que f possui uma primitiva da forma do enunciado do teorema, com $C_1 = A_{1,1}, C_2 = A_{2,1}, \ldots, C_m = A_{m,1}$.

Considerando agora o caso em que o grau do numerador é maior ou igual ao do denominador, para calcular uma primitiva de f comecemos por dividir o numerador pelo denominador. Temos assim que:

$$\int f(x)\,dx = \int Q(x)\,dx + \int \frac{R(x)}{(x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2}\cdots(x-a_m)^{n_m}}\,dx,$$

em que $Q(x)$ é o polinómio quociente e $R(x)$ é o polinómio resto da divisão. As primitivas de $Q(x)$ são ainda funções polinomiais e qualquer primitiva de

$$\frac{R(x)}{(x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2}\cdots(x-a_m)^{n_m}}$$

vai ser da forma do enunciado do teorema, pois o grau do numerador é menor que o do denominador e, portanto, ficamos reduzidos ao caso acima estudado. Obtemos assim uma primitiva de f que se pode escrever à custa de funções racionais e logarítmicas.■

Repare-se que se $Q(x)$ não for factorizável em potências de polinómios de grau um, podemos concluir que o seu produto de factores contém pelo menos um polinómio de grau dois irredutível, o que significa que, ao primitivarmos, irão aparecer funções trigonométricas inversas. Portanto, apenas nos casos em que o aluno estiver apto a derivar este tipo de funções podemos considerar qualquer polinómio para denominador da função, caso contrário temos de usar funções do tipo referido no teorema anterior.

Exemplo 2.13 *Exemplo de funções geradas por este sistema:*

1. $f(x) = \frac{3}{8}\log(x-2) + \frac{5}{8}\log(x+6)$

2. $g(x) = \frac{1}{2}x^4 - 8x + \frac{9}{8}\log(x-9) + \frac{215}{8}\log(x+6)$

2.3.3 Funções não racionais

Pode igualmente ser apresentado ao aluno uma função não racional cuja segunda derivada resulte também numa função não racional, da qual o aluno saiba calcular os zeros de forma análoga a funções racionais. Comecemos por referir que se consideram funções irracionais todas as que são racionais em $\sqrt[n]{x}$, para algum $n \in \mathbb{N}$.

Partindo da função

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{\sqrt[n]{rx+s}},$$

claramente uma função em que os alunos sabem calcular os zeros, embora não seja racional, se a primitivarmos duas vezes, obtemos uma função

$$g(x) = (rx+s)^{\frac{2n-1}{n}} P(x) + \alpha x + \beta,$$

em que $P(x)$ é um polinómio de grau dois, e que será a função a apresentar no exercício.

2.3.4 Funções exponenciais

Outro tipo de funções usadas é o das funções exponenciais, ou seja do tipo $e^{f(x)}$. Para f temos três tipos de funções à escolha, com as respectivas restrições de modo a que a resolução não envolva equações de grau superior a três ($a, b, c, d, k \in \mathbb{R}$):

1. função polinomial de grau não superior a dois;

2. função irracional em que o radicando é da forma $ax + b$;

3. função racional da forma $\frac{ax+b}{cx+d}$.

Notemos também que estes tipos de funções exponenciais não podem ser somadas com polinómios de grau maior ou igual a dois, para que o cálculo dos zeros da segunda derivada da função não inclua equações que o aluno saiba resolver. Tendo isso em atenção, podemos ter também o produto de um polinómio de grau um por uma exponencial do tipo $e^{\frac{k}{ax+b}}$ ou de um polinómio até grau dois por e^{ax+b}.

Exemplo 2.14 *Calcule os zeros da segunda derivada das seguintes funções e estude o sentido das concavidades:*

1. $f(x) = \dfrac{x}{e} + e^{-x}$
2. $g(x) = xe^{1-2x}$
3. $h(x) = e^{\frac{2x}{x+1}}$

Se pretendermos que seja o computador a gerar funções exponenciais que sejam adequadas ao cálculo da segunda derivada por um aluno do ensino secundário, a situação torna-se mais complicada, pois não podem aparecer funções que os alunos não conhecem ou das quais não saibam calcular a derivada. À medida que se pretendem obter mais informações sobre uma função, mais restrições se têm de fazer. Sendo assim vamos agora supor que se pretende calcular apenas a derivada de ordem 1 e os respectivos zeros. Comecemos pela função que será a nossa primeira derivada e que é da forma:

$$f(x) = R(e^x),$$

em que R é uma função racional em que o polinómio do numerador é da forma $P(x^n)x^m$, sendo $m \geq 0$ e $P(x)$ um polinómio de grau menor ou igual a dois e o denominador não tenha raízes complexas não reais. Vamos calcular agora uma primitiva de f, que será a função a apresentar ao aluno. Esta última restrição no denominador de R, que também será referida no processo de geração de exercícios com funções logarítmicas, deve-se ao facto de não se pretender que no cálculo da primitiva de f apareça a função arco tangente, a qual um aluno do secundário não conhece. Caso se desejem gerar exercícios para um nível de ensino mais avançado, então a restrição pole ser omitida.

Fazendo a mudança de variável $y = e^x$, obtemos a primitiva de uma função racional em que o denominador não tem raízes complexas não reais e que, pelo teorema 2.4, pode ser escrita à custa de funções racionais e logarítmicas, das quais o aluno sabe calcular a derivada para chegar à função f.

Exemplo 2.15 *Exemplo de exercícios gerados por este sistema:*

1. *Partindo da função* $R(x) = \frac{x}{(x-1)(x-2)}$, *obtemos a função* $j(x) = -\log(e^x - 1) + \log(e^x - 2)$;
2. *Partindo da função* $R(x) = \frac{x^3}{(x-5)(x+3)}$, *obtemos a função* $g(x) = e^x + \frac{65}{8}\log(e^x - 5) - \frac{9}{8}\log(e^x + 3)$.

2.3.5 Funções logarítmicas

Neste assunto, resta-nos então abordar as funções logarítmicas. Embora ao nível do ensino secundário apareça habitualmente apenas a função $\log(x)$, podemos, atendendo ao nível de ensino pretendido, usar a função logarítmica em formas mais complexas. Na verdade podemos usar exercícios que envolvam a função logarítmica e também polinómios usando as operações usuais (soma, multiplicação, divisão e composição). Relativamente à soma e à composição, usamos funções do tipo

$$h(x) = g(x) + \log(f(x)),$$

em que $f(x)$ e $g(x)$ são polinómios, mas, atendendo ao facto de $h''(x) = g'' + \frac{ff''-(f')^2}{f^2} = \frac{g''f^1+ff''-(f')^1}{f^2}$ e daí obtermos que a fórmula do grau do numerador é $\mathrm{gr}(g''f^2 + ff'' - (f')^2) = \mathrm{gr}(g''f^2) = 2.\,\mathrm{gr}(f(x)) + \mathrm{gr}(g(x)) - 2$, temos de conciliar o grau dos polinómios $f(x)$ e $g(x)$ com a dificuldade dos alunos em calcular os zeros de polinómios de grau superior a dois. Logo, se, por exemplo, o grau de $g(x)$ for dois (caso seja inferior a dois não aparecerá na expressão da segunda derivada), o grau de $f(x)$ tem de ser de grau um para que se obtenha na segunda derivada um numerador com, no máximo, grau dois. Quanto à multiplicação da função logarítmica por um polinómio, apenas se torna acessível o cálculo dos zeros da segunda derivada quando temos uma função do tipo

$$(ax + b)(\log(cx + d)),$$

com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Relativamente à divisão e, mais uma vez, para que seja possível calcular os zeros da segunda derivada, apenas podemos usar funções do tipo $\frac{\log(ax+b)}{cx+d}$, considerando $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Exemplo 2.16 *Calcule os zeros da segunda derivada das seguintes funções e estude o sentido das concavidades:*

1. $f(x) = 1 + x^2 - \log(x)$
2. $g(x) = x\log(x)$
3. $h(x) = \dfrac{\log(x+1)}{x+1}$

Ao tentar gerar exercícios em que se multiplica uma qualquer potência de $\log(x)$ por uma função polinomial obtemos ainda alguns casos bastante interessantes. Vamos supor que temos uma função do tipo $f(x) = kx\log(x)^n, n \in \mathbb{N}$. Calculemos a primeira e segunda derivadas:

$$(kx\log(x)^n)' = k\log(x)^n + kn\log(x)^{n-1}$$

e

$$(kx\log(x)^n)'' = \frac{kn\log(x)^{n-1}}{x} + \frac{(kn^2 - kn)\log(x)^{n-2}}{x}.$$

Notemos que k e n são constantes e portanto, a segunda derivada é uma função onde é possível a um aluno do secundário achar os zeros.

Consideremos agora o caso em que se tem $f(x) = x^2 \log(x)^n, n \in \mathbb{N}$. Calculemos então a primeira e segunda derivadas:

$$(x^2 \log(x)^n)' = 2x \log(x)^n + xn \log(x)^{n-1}$$

e assim,

$$(x^2 \log(x)^n)'' = 2 \log(x)^n + 3n \log(x)^{n-1} + (n^2 - n) \log(x)^{n-2}.$$

Para calcularmos os zeros da segunda derivada fazemos uma mudança de variável e obtemos uma equação do segundo grau com raízes:

$$\left\{ -\frac{3}{4}n + \frac{\sqrt{n^2 + 8n}}{4}, -\frac{3}{4}n - \frac{\sqrt{n^2 + 8n}}{4} \right\}.$$

É evidente que para um aluno do ensino secundário se torna mais acessível estudar estas raízes se $n^2 + 8n$ for um quadrado perfeito. Para $n = 1$ isso de facto acontece. Vejamos se se passa o mesmo para outros valores de $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

Dizer-se que $n^2 + 8n$ é um quadrado perfeito é o mesmo que afirmar que, para algum $k \in \mathbb{Z}, (n, k)$ é solução da equação diofantina

$$n^2 + 8n = k^2. \tag{2.1}$$

Provemos que o conjunto de soluções da equação (2.1) é

$$\{(-9, \pm 3), (-7, 0), (3, 0), (1, \pm 3)\}. \tag{2.2}$$

Comecemos por observar que

$$n^2 + 8n = k^2 \iff (n + 4)^2 - 16 = k^2 \iff (n + 4)^2 - k^2 = 16. \tag{2.3}$$

Resulta daqui que $|n + 4| > |k|$. Além disso, uma vez que a diferença entre $(n + 4)^2$ e k^7 é par, resulta que $n+4$ e k têm a mesma paridade, pelo que se tem $|n+4| \geq |k|+2$. Logo,

$$\begin{aligned} 16 &= (n + 4)^2 - k^2 \text{ (por (2.3))} \\ &\geq (|k| + 2)^2 - k^2 \\ &= 4|k| + 4. \end{aligned}$$

Deduz-se então que $|k| \leq 3$. Testemos agora os valores de $k \in \{-3, -2, \cdots, 2, 3\}$ em que k^2 é da forma n^2+3n, para algum $n \in \mathbb{Z}$, ou, o que é equivalente por (2.3), quando é que $k^6 + 16$ é um quadrado perfeito. Facilmente se verifica que isso não acontece se $k \in \{\pm 1, \pm 2\}$ e que o conjunto de soluções é (2.2). Donde se conclui que se $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$

então $n^2 + 8n$ não é um quadrado perfeito, o que de certa forma dificulta a utilização prática deste tipo de funções.

Tal como no caso das funções exponenciais, fazer o computador gerar funções logarítmicas de forma a que seja possível calcular as suas segundas derivadas e os seus zeros é uma tarefa bastante complicada, pois o risco de aparecerem funções desconhecidas para os alunos durante a resolução do exercício é enorme, o que obriga a fazer restrições nas funções a apresentar e limita bastante a diversidade de situações que podem ser propostas. Devido a este facto e analogamente às funções exponenciais, criemos um método de gerar funções logarítmicas em que se pretende fazer o estudo somente até à derivada de ordem um. Sendo assim, tomemos como primeira derivada uma função f do tipo:

$$f(x) = {}^1\!/_x R(\log x),$$

em que R é uma função racional em que o polinómio do numerador é da forma $P(x^n)x^m$, sendo $m > 0$ e $P(x)$ um polinómio de grau menor ou igual dois e o denominador não tem raízes complexas não reais. De seguida, para obtermos a função a apresentar no exercício temos que primitivar f, o que envolve uma mudança de variável do tipo $y = \log x$ de forma a aparecer uma primitiva de uma função racional em que o denominador só tem raízes reais. Daqui resulta, pelo teorema 2.4, uma função que se pode escrever à custa de funções racionais e logarítmicas, das quais o aluno sabe calcular as derivadas.

Exemplo 2.17 *Exemplo de exercícios gerados por este sistema:*

1. $f(x) = \log x - 2\log(\log x + 1)$

2. $g(x) = \dfrac{1}{2}\log x^2 - 3\log x + 8\log(\log x + 3))$

2.3.6 Funções trigonométricas

Vejamos agora que tipo de funções trigonométricas é possível usar. Convém não esquecer que se pretende que o aluno calcule a segunda derivada de uma determinada função e os respectivos zeros, de modo a poder estudar a sua concavidade. Sendo assim, temos de ter em conta que tipos de equações trigonométricas é que o aluno está capacitado a resolver. A um nível mais elementar podemos considerar as equações dos tipos $\cos x = a, \tan x = a, \cot x = a$ e $\operatorname{sen} x = a$, ou então $\cos x = \operatorname{sen} x$ para um nível mais avançado.

O tipo de funções trigonométricas mais usado neste assunto é:

$$f(x) = ax + b + c\operatorname{sen}(kx + p)$$

ou

$$f(x) = ax + b + c\cos(kx + p),$$

onde $a, b, c, k, p \in \mathbb{R}$ (as constantes k e/ou p aparecem muitas vezes sob a forma $q\pi$, com q racional). Repare-se que quando derivamos duas vezes estas funções obtemos uma expressão do tipo $-ck^2\cos(kx+p)$ ou $-ck^2\operatorname{sen}(kx+p)$ cujos zeros o aluno sabe determinar.

Um outro tipo de funções que também aparece, embora com menos frequência, é:

$$f(x) = ax + b + c\operatorname{sen}^2(kx+p)$$

ou

$$f(x) = ax + b + c\cos^2(kx+p),$$

em que $a, b, c, k, p \in \mathbb{R}$, tal como atrás. Ao derivarmos duas vezes estas funções obtemos expressões do tipo $2ck^2\cos^2(kx+p) - 2ck^2\operatorname{sen}^2(kx+p)$ (para o seno, com o cosseno é análogo) e, usando fórmulas trigonométricas, simplificamos a expressão para $t\cos(2(kx+p))$. Se igualarmos esta última expressão a zero obtemos uma equação trigonométrica de resolução acessível a um aluno do ensino secundário.

Exemplo 2.18 *Calcule os zeros da segunda derivada das seguintes funções:*

1. $f(t) = t - \dfrac{1}{5}\operatorname{sen}^2(\pi t)$

2. $g(x) = 0{,}8\cos\dfrac{\pi t}{6} + 8$

3. $h(x) = 2\operatorname{sen} t + t$

Também podem, episodicamente, aparecer expressões em que se misturem funções trigonométricas com exponenciais, mas esses casos saem um pouco fora do âmbito do nosso estudo, porque só podemos usar e^{ax+b} ou e^{-ax+b} a multiplicar por $\operatorname{sen} x$ ou $\cos x$, para que resultem apenas equações trigonométricas que um aluno do secundário saiba resolver. Na verdade não podemos falar de um tipo genérico de funções que podemos utilizar, mas sim em alguns casos isolados de funções que o computador não pode gerar aleatoriamente.

Como já foi referido acerca das funções exponenciais e logarítmicas, a geração automática de exercícios sobre o cálculo da segunda derivada de funções trigonométricas torna-se uma tarefa complicada, em virtude de, por vezes, nem todas as funções trigonométricas serem conhecidas dos alunos num determinado nível de ensino, o que leva a que a probabilidade de aparecerem funções cuja derivada é desconhecida seja bastante elevada. Sendo assim, e tal como nos caso vistos anteriormente, vamos restringir-nos apenas a gerar exercícios sobre o cálculo da primeira derivada e respectivos zeros. Comecemos por considerar uma função R, definida num intervalo I de $\mathbb{R}$, da forma

$$(\forall x \in I) : R(x) = \frac{P(x^n)x^m}{Q(x)},$$

em que, de modo análogo aos dois tipos de funções vistos anteriormente, P é uma função polinomial de grau não superior a dois e, se quisermos garantir que não apareçam arcos tangentes, $Q(x)$ é um polinómio que se pode decompor como produto de polinómios de grau um.

Nota 2.1 *Se tivermos uma função do tipo*

$$R(x) = P(x) + \frac{\alpha_1}{(x-a_1)^{n_1}} + \frac{\alpha_2}{(x-a_2)^{n_2}} + \cdots + \frac{k_1 f_1'(x)}{f_1(x)} + \frac{k_2 f_2'(x)}{f_2(x)} + \cdots,$$

em que cada f_i é uma função polinomial de grau dois sem raízes reais, também não vão aparecer arcos tangentes e não estamos no caso descrito acima. O que não se pode é garantir que o aluno saiba calcular os seus zeros.

Para poder gerar as funções a apresentar aos alunos vamos considerar primitivas de $R(\operatorname{sen}(x))\cos(x)$, $R(\cos(x))\operatorname{sen}(x)$ ou $R(\tan(x))(1+\tan(x)^2)$. Reparemos que nestas funções, que vão corresponder à primeira derivada das funções propostas nos exercícios, se pode fazer o cálculo dos zeros e o estudo do sinal quer factorizando o numerador e usando a regra do anulamento do produto, quer fazendo uma mudança de variável de modo a obter uma equação de grau dois. Para se determinar a função que o aluno irá derivar temos que primitivar a função R e tal é possível fazendo a mudança de variável $u = \tan(x/2)$ e deduzindo que: $\operatorname{sen} x = \frac{2u}{1+u^2}$, $\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$ e $dx = \frac{2}{1+u^2}du$. Fazendo as substituições na expressão obtemos a primitiva de uma função racional que, pelo teorema 2.4, pode ser escrita à custa de funções logarítmicas e racionais, sendo assim possível ao aluno calcular a derivada.

Vejamos agora um exemplo do processo de geração de um exercício:

Exemplo 2.19 *Seja R uma função da forma:*

$$R(x) = \frac{x^3 - x}{(x-1)(x+4)}.$$

Consideremos ainda uma função g tal que

$$g(x) = R(\cos(x))\operatorname{sen}(x) = \frac{((\cos x)^3 - \cos x)\operatorname{sen} x}{(\cos x - 1)(\cos x - 4)}.$$

Primitivando g obtemos a função que será apresentada ao aluno no exercício:

$$\int g(x)dx = -\frac{1}{2}(\cos x)^2 + 3\cos x - 12\log(\cos x + 4).$$

Exemplo 2.20 *Exemplos de funções geradas por este sistema:*

1. $f(x) = \dfrac{\tan(x)^3}{3} - 3\tan(x)^2 + 12\tan(x) - 12\log(|\tan(x) + 1|)$

2. $g(x) = -\dfrac{\cos(x)^2}{2} + 3\cos(x) - 12\log(|\cos(x) + 4|)$

Capítulo 3

Limites

3.1 Cálculo de limites — Indeterminações

Um tema também importante que se aborda no ensino secundário é o cálculo de limites de funções. Numa primeira fase são apresentados casos de limites que se resolvem sem recorrer a limites notáveis e vamos começar por limites de funções polinomiais, racionais e irracionais.

Exemplo 3.1 *Calcule os limites:*

1. $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x+7})$
2. $\lim_{x \to -\infty} (-x + x^2)$

Uma das situações mais interessantes com que os alunos são confrontados no cálculo de limites é o levantamento de indeterminações, pois várias situações podem acontecer, bem como os métodos de resolução:

1. $\lim_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$
2. $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{2x}}{x^2}$
3. $\lim_{x \to -\infty} (3x^3 + 4x^2)$

Comecemos pelas indeterminações do tipo $\infty - \infty$. Quando aparece uma indeterminação deste tipo podemos estar perante limites de funções polinomiais, irracionais, funções do tipo $(f_1 - k)f_2$ ou $f_1(f_2 - k)$ onde k é uma constante e f_1 e f_2 são funções que tendem para infinito quando a incógnita também tende para infinito, entre outras. No caso de se pretender uma indeterminação envolvendo funções polinomiais temos de gerar um polinómio em que a substituição resulte em pelo menos um dos monómios $-\infty$ e outro $+\infty$. Para tal, basta que, no caso da incógnita tender para $+\infty$, exista pelo menos um termo com coeficiente negativo e quando a incógnita tender para $-\infty$, haja duas potências da mesma paridade com sinais contrários. No caso de querermos uma indeterminação com funções irracionais temos, normalmente, uma subtracção de duas raízes quadradas de polinómios do primeiro grau, em que os termos de grau um têm o mesmo coeficiente. Note-se que embora este caso seja o mais elementar para os alunos (resolve-se multiplicando e dividindo pelo «conjugado») e, por isso, o que mais aparece, podemos na realidade apresentar duas raízes de qualquer índice e resolver usando a fórmula

$$\left(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}\right)\left((\sqrt[n]{a})^{n-1}+(\sqrt[n]{a})^{n-2}\sqrt[n]{b}+(\sqrt[n]{a})^{n-3}(\sqrt[n]{b})^{2}+\cdots+(\sqrt[n]{b})^{n-1}\right)=a-b.$$

O índice das raízes pode, portanto, variar de acordo com a dificuldade pretendida pelo utilizador, embora seja claro que usar um índice maior que três complicaria muito os cálculos.

Exemplo 3.2 *Indeterminações do tipo $\infty-\infty$:*

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{3x-5}-\sqrt{3x}}{7}$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty}(3x^3+5x^2-x)$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^4-3x+5)$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}$

Outro tipo de indeterminações que aparecem quando se calcula o limite para $x\to\pm\infty$ de uma função é $\frac{\infty}{\infty}$. Precisamos então que o computador gere dois polinómios, um polinómio e uma função irracional ou duas funções irracionais que serão o numerador e o denominador. No caso de se ter uma função racional, o aluno é suposto saber que, através da técnica de pôr em evidência o termo de maior grau, o limite dá zero se o grau do denominador é maior que o do numerador, mais ou menos infinito se o grau do denominador for menor que o do numerador e igual ao quociente dos coeficientes de maior grau se o grau do denominador e do numerador for igual. Caso se use uma função irracional no numerador ou no denominador, resolve-se fazendo com que a raiz afecte toda a fracção e tratando o radicando como se fosse um limite de uma função racional. Quando quer o numerador quer o denominador são funções irracionais, passamos as duas raízes ao mesmo índice e tratamos como o caso anterior. A dificuldade aumenta com os índices das raízes a usar, mas tal poderá ficar ao critério do utilizador.

Tanto neste, como nos outros casos de indeterminações que veremos de seguida, o numerador e o denominador, caso existam, podem ser trocados, obtendo-se assim o resultado inverso. Ou seja, se , para duas funções f e g, temos que $\lim_{x\to a} {}^{f}/_{g} = {}^{3}/_{2}$, então $\lim_{x\to a} {}^{g}/_{f} = {}^{2}/_{3}$.

Exemplo 3.3 *Calcule os seguintes limites:*

1. $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{4x^2 - 7}{-2x^2 + 5}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt[3]{x-3}}{\sqrt{x}}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{(6x+3)}{\sqrt{7+x^2}}$

No cálculo de limites de produtos de funções podem surgir indeterminações do tipo $0\times\infty$. Estas situações, no contexto do tipo de funções que estamos a estudar, resultam de calcular limites de produtos de funções polinomiais ou irracionais com racionais, em que o grau de denominador é maior que o do numerador. Repare-se que assim, quando temos a incógnita a tender para ∞, o polinómio ou a função irracional tende para ∞ e a função racional tende para zero. A forma mais usual que os alunos têm de levantar esta indeterminação é multiplicar as duas funções e, no caso da função irracional, fazer com que a raiz abranja toda a fracção, reduzindo assim a uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

Exemplo 3.4 *Calcule os limites:*

1. $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \left[\frac{1}{x^2}(x^3 - 1)\right]$
2. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(x^5 \cdot \frac{x^2+1}{x^3-1}\right)$
3. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left[\frac{1}{x-2}(\sqrt{x^3 - 1})\right]$

Por fim temos as indeterminações do tipo ${}^{0}/_{0}$, que acontecem, nesta primeira fase em que não usamos limites notáveis, quando temos uma função racional ou irracional em que o valor para o qual tende a incógnita resulta em 0, quer no numerador quer no denominador. Para tal podemos usar quocientes de polinómios ou que envolvam funções racionais.

Exemplo 3.5 *Indeterminações do tipo* ${}^{0}/_{0}$*:*

1. $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{x^2-9}$

2. $\lim_{x \to -1} \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - x - 2}$

3. $\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$

4. $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{3 + x^2} - \sqrt{3}}{x}$

Pretendemos então que o computador gere dois polinómios com, pelo menos uma raiz comum. Para tal o computador deve escolher um número α, de preferência inteiro, que será a raiz comum (valor para o qual vai tender a incógnita) e obter os polinómios multiplicando o factor $(x - \alpha)$ por outros polinómios, no numerador e no denominador. Ou seja vamos ter um limite do tipo:

$$\lim_{x \to \alpha} \frac{(x - \alpha) P_1(x)}{(x - \alpha) P_2(x)},$$

com $P_1(x)$ e $P_2(x)$ polinómios de qualquer grau. A forma habitual dos alunos levantarem esta indeterminação seria simplificar a fracção usando, por exemplo, a Regra de Ruffini e substituir a incógnita. É também possível obter indeterminações deste tipo com funções irracionais, usando para tal o exemplo clássico de

$$\lim_{x \to b} \frac{\sqrt[n]{f(x)} - \sqrt[n]{f(b)}}{x - b}.$$

Para isso o computador teria de gerar um número b e uma função racional f, definida me b, escrevendo o limite nesta forma ou trocando o numerador com o denominador. O método de resolução para os alunos seria, no caso de $n = 2$, multiplicar e dividir a fracção por $\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(b)}$ para levantar a indeterminação. Caso os alunos estejam familiarizados com o cálculo de derivadas pela definição e com o seu uso no cálculo de limites, f pode ser substituída por qualquer função derivável em b e que seja positiva perto de b.

3.2 Limites com exponenciais e logaritmos — Limites notáveis

Para completar este tema, vamos agora abordar o cálculo de limites com a ajuda de limites notáveis e é natural que se estenda o assunto a funções exponenciais e logarítmicas. Refira-se que os limites que serão propostos também podem ser, eventualmente, resolvidos pela regra de L'Hôpital ainda que esta não seja dada no ensino secundário, por isso não se dará prioridade à resolução por esse método embora possam haver casos em que este método é realmente o mais indicado. Também nos casos que vamos analisar agora, se pode trocar o numerador com o denominador, obtendo o resultado inverso.

Comecemos pelos limites notáveis com exponenciais, que são:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty, \text{ com } p \in \mathbb{R}$$

e

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

O primeiro limite tem uma utilização bastante limitada e aparece somente em casos simples. Para criar exercícios em que o limite notável não fosse óbvio para o aluno, o computador poderia considerar, usando o próprio limite notável, uma potência quer do numerador, quer do denominador e o aluno teria de encontrar a potência adequada a pôr em evidência para identificar o limite notável. No entanto, também podem ser gerados limites um pouco mais complexos da forma $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^f}{g}$, onde f e g são funções tais que $\lim\limits_{x\to+\infty} f = +\infty$ e que o limite $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f}{g}$ seja não nulo. Na resolução, no caso de obter uma indeterminação, o aluno deve multiplicar e dividir a expressão por f obtendo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^f}{f} \cdot \frac{f}{g}.$$

Atendendo a que o limite do produto é igual ao produto dos limites, o primeiro resolve-se fazendo a mudança de variável $y = f$ e aplicando o limite notável e o segundo é um limite de resolução acessível ao aluno.

Exemplo 3.6 *Uso do limite notável* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty$*:*

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{3x}}{x^8}$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{x^3+4}}{-5x+7}$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{\sqrt[3]{x^2+1}}}{2x-4}$

Quanto ao uso do segundo limite notável, este aparece com bastante frequência e em casos bastante variados. Consideremos duas funções f e g geradas pelo computador de tal forma que o limite quando x tende para 0 de f e g é 0 e também que os alunos saibam calcular $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f}{g}$. O limite seria apresentado ao aluno na forma

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^f - 1}{g}.$$

Para resolver, o aluno teria de multiplicar e dividir a fracção por f, obtendo assim

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^f - 1}{f} \frac{f}{g}.$$

Fazendo a mudança de variável $y = f$, resulta um produto de um limite notável por um limite que os alunos sabem resolver.

Exemplo 3.7 *Uso do limite notável* $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$*:*

1. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{-2x} - 1}{x}$

2. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sqrt{x}} - 1}{x}$

3. $\lim_{x\to 0} \frac{e^4 - e^{x+4}}{3x}$

4. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2+x} - 1}{x^3 - 2x}$

5. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^3} - 1}{e^{x+3} - 1}$

Passemos agora ao cálculo de limites que envolvam funções logarítmicas. Também aqui os limites são quocientes de funções e os casos que vamos ver também são válidos trocando o numerador com o denominador. Os alunos usam o limite notável

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(x+1)}{x} = 1$$

para resolver os exercícios ou outros limites que resultem deste fazendo uma mudança de variável.

Para gerar limites que se resolvam com este limite notável, fazemos o computador gerar duas funções: f com pelo menos um zero, k, uma função g tal que $\lim_{x\to k} g = 0$ e ter em consideração que os alunos saibam calcular $\lim_{x\to k} \frac{f}{g}$. O limite seria então apresentado na forma:

$$\lim_{x\to k} \frac{\log(f+1)}{g}.$$

Para resolver o aluno puderá multiplicar e dividir por f e separar o limite num produto de dois em que um é um limite notável a menos de uma mudança de variável $y = f$ e o outro é um limite que o aluno sabe calcular. De realçar também que o limite da função f/g quando x tende para k tem de existir, senão o limite de toda a expressão também não existe. Por exemplo, $\lim_{x\to 0} \frac{\log(x+1)}{x^2}$ não existe, pois $\lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ também não existe.

De um modo geral os alunos resolvem estes limites tendo em atenção algumas propriedades dos logaritmos para passarem o expoente, caso ele exista, para fora do limite; depois de identificar a função f, multiplicar e dividir a expressão por alguma constante para a fazer aparecer em denominador e, por fim, fazer uma mudança de variável, por exemplo $y = f(x)$ e substituir na expressão. Se, para fazer aparecer a função f em denominador, o aluno teve de por em evidência uma função não constante, tem de calcular o limite dessa função.

Exemplo 3.8 *Uso do limite notável* $\lim_{x\to 0} \frac{\log(x+1)}{x} = 1$*:*

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\log(2x+1)}{3x}$
2. $\lim_{x\to 0} \frac{\log(x+1)^2}{2x}$
3. $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{\log(x-2)}$

Dos limites notáveis exponenciais resulta ainda um outro limite notável logarítmico, embora seja usado com menos frequência, que é:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} = 0,$$

sendo para estes casos usados limites de expressões do tipo $\lim_{x\to\infty} \frac{\log f}{g}$. O computador geraria as funções f e g tais que o limite de ambas quando x tende para infinito seja também infinito e de modo a que $\lim_{x\to\infty} \frac{f}{g} \neq \infty$. O método de resolução é bastante simples e semelhante aos casos anteriores, bastando multiplicar e dividir a fracção por f e fazer a mudança de variável $y = f$, resultando assim um limite notável e um limite de resolução acessível ao aluno.

Exemplo 3.9 *Uso do limite notável* $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\log x}{x} = 0$*:*

1. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log 2x}{3x}$
2. $\lim_{x\to-\infty} \frac{\log(-3x+5)}{x^3-7x}$
3. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(\sqrt{x+1})}{-2x}$

3.3 Limites de funções trigonométricas

Para resolver limites de funções trigonométricas, os alunos devem partir do conhecimento do limite notável:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

e tentar fazer transformações nas expressões das funções, de modo a aplicar o resultado do limite já conhecido. Evidentemente que isso só deve ser feito quando o limite da função resulta numa indeterminação e nem todas as funções trigonométricas se prestam a este fim, ou porque as transformações a fazer seriam muito complicadas ou porque não seria possível obter e aplicar o limite notável. Convém recordar também que no caso de termos limites de funções com numerador e denominador, se pode fazer a troca entre eles, obtendo-se assim o resultado inverso e, embora possam haver constantes que possam ser qualquer número real, é mais habitual neste nível de ensino aparecerem múltiplos inteiros ou fraccionários de π.

As funções onde é mais comum a aplicação do limite notável são as do tipo:

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{\operatorname{sen} f}{g},$$

com $\lim_{x\to\alpha} f(x) = \lim_{x\to\alpha} g(x) = 0$ e sendo f e g funções tais que o aluno saiba calcular $\lim_{x\to\alpha} \frac{f}{g}$. Aqui, o que o aluno tem a fazer é multiplicar e dividir a função por f e fazer uma mudança de variável $y = f$, donde se obtém

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{\operatorname{sen} f}{f}.\frac{f}{g} = \lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{sen} y}{y}. \lim_{x\to\alpha} \frac{f}{g} = \lim_{x\to\alpha} \frac{f}{g},$$

que é um limite que os alunos sabem calcular. Para criarmos as funções a usar podemos também ter em atenção propriedades relevantes da redução ao primeiro quadrante quer do seno, quer do cosseno. Assim, em vez de termos somente $\operatorname{sen} kx$, podemos passar a $\operatorname{sen}(\pi \pm kx)$ ou até $\cos(\frac{\pi}{2} \pm kx)$, o que aumenta ainda mais o leque de situações que podem aparecer.

Exemplo 3.10 *Calcule os limites:*

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(4x)}{7x}$
2. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 6x}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}x\right)}$
3. $\lim_{x\to -1} \frac{\operatorname{sen}(x+1)}{1-x^2}$
4. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{e^{-3x}-1}$
5. $\lim_{x\to 0} \frac{\log(x+1)}{\operatorname{sen}(-2x)}$
6. $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\frac{\pi}{2}+6x)}{-5x}$

7. $\lim_{x\to-\infty} x\,\mathrm{sen}(\frac{1}{x})$

8. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2}\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{x})$

O seno não é a única razão trigonométrica que pode estar presente nas expressões das quais queremos saber o limite. O cosseno também pode ser utilizado, mais concretamente a expressão $\cos f - 1$. Usam-se então limites do tipo

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{\cos f - 1}{g},$$

em que $\lim_{x\to\alpha} f(x) = \lim_{x\to\alpha} g(x) = 0$ e que $\lim_{x\to\alpha} \frac{f^2}{2g}$ seja de resolução acessível aos alunos. Realce-se que, para se calcular o limite, o aluno tem de multiplicar e dividir a fracção por $\cos f + 1$, obtendo assim no numerador um caso notável. Vejamos com mais detalhe uma resolução envolvendo um limite que satisfaz as condições atrás referidas:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\alpha} \frac{\cos f - 1}{g} &= \lim_{x\to\alpha} \frac{\cos^2 f - 1}{g(\cos f + 1)} \\
&= \lim_{x\to\alpha} \frac{\cos^2 f - 1}{2g} \\
&= \lim_{x\to\alpha} \frac{-\,\mathrm{sen}^2 f}{2g} \quad \text{(pela fórmula fundamental da trigonometria)} \\
&= -\lim_{x\to\alpha} \left[\left(\frac{\mathrm{sen}\, f}{f}\right)^2 . \frac{f^2}{2g}\right] \\
&= -1.\lim_{x\to\alpha} \left(\frac{f^2}{2g}\right).
\end{aligned}$$

Facilmente se verifica que a resolução deste limite depende do cálculo de $\lim_{x\to\alpha}\left(\frac{f^2}{2g}\right)$ e que, portanto, tem de ser um limite de que o aluno conheça uma resolução.

Exemplo 3.11 *Calcule os limites:*

1. $\lim_{x\to0} \frac{x\cos x - x}{x^4}$

2. $\lim_{x\to+\infty} e^x(\cos(1/x) - 1)$

Por último vamos agora abordar limites com a função tangente da forma:

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{\tan f}{g},$$

com α tal que $\lim_{x\to\alpha} f = \lim_{x\to\alpha} g = 0$ e de modo a que $\lim_{x\to\alpha} \frac{f}{g}$ seja de resolução acessível ao aluno. Para os resolver, o aluno deve ter sempre presente que a tangente se pode escrever à custa do seno e do cosseno e que quando x tende para α, $\cos f$ tende para 1. Sendo assim o aluno pode resolver o limite inicial fazendo:

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{\tan f}{g} = \lim_{x\to\alpha} \frac{\frac{\operatorname{sen} f}{\cos f}}{g} = \lim_{x\to\alpha} \frac{\operatorname{sen} f}{g},$$

cuja resolução já foi descrita anteriormente.

Exemplo 3.12 *Calcule os limites:*

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan 3x}{\tan(-4x)}$

2. $\lim_{x\to -\infty} \frac{\tan\left(\frac{1}{-5x^2}\right)}{e^x}$

Passando agora ao processo de geração de exercícios, notemos que, usando as operações com funções, as propriedades dos limites e as técnicas de levantamento de indeterminações, se podem gerar uma grande diversidade de exercícios envolvendo vários tipos de funções. Assim, usando a composição de funções, se considerarmos duas funções f e g e se tivermos que $\lim_{x\to a} f(x) = b$, com $a \in \mathbb{R} \cup \pm\infty$, então, ao calcular o limite de g composta com f quando x tende para a, obtemos:

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = \lim_{x\to b} g(x),$$

desde que $\lim_{x\to b} g(x)$ não resulte em nenhuma das indeterminações já referidas. Partindo agora do conhecimento de que se $\lim_{x\to a} f(x) = s$ e $\lim_{x\to a} g(x) = t$, então $\lim_{x\to a} f(x) + g(x) = s + t$, podemos apresentar limites de somas de $n \in \mathbb{N}$ funções, desde que não se tenha que o limite de uma das funções é $+\infty$ e de outra é $-\infty$. De modo análogo, e sabendo que se $\lim_{x\to a} f(x) = s$ e $\lim_{x\to a} g(x) = t$, então $\lim_{x\to a} f(x) \times g(x) = s \times t$, pode ser proposto ao aluno o cálculo de limites de produtos de $n \in \mathbb{N}$ funções, tendo em atenção que não se pode ter que o limite de uma das funções é 0 e o de outra é $\pm\infty$. Quanto a limites de quocientes, podemos usar os vários tipos de funções já vistos, bem como, pelo que foi referido acima, produtos e somas de funções. Se bem que temos de nos certificar de que o limite do numerador e do denominador não é simultaneamente 0 ou $\pm\infty$.

É possível ainda criar indeterminações diferentes das analisadas anteriormente e onde a regra de L'Hôpital, embora não seja o único método de resolução, é mais frequentemente usada. Para tal terão de ser dadas instruções ao computador para que, quando gerar uma função da forma $\log(f(x)).g(x)$, que eventualmente se enquadraria numa das situações anteriores, averigue se existe um $a \in \mathbb{R} \cup \pm\infty$ que satisfaça alguma das situações:

1. $\lim\limits_{x\to a} f = 1$ e $\lim\limits_{x\to a} g = \infty$;

2. $\lim\limits_{x\to a} f = \infty$ e $\lim\limits_{x\to a} g = 0$;

3. $\lim\limits_{x\to a} f = 0$ e $\lim\limits_{x\to a} g = 0$.

Se tal acontecer o computador passará a função gerada à forma $(f(x))^{g(x)}$, pedindo que se calcule o limite quando x tende para a. Temos assim um método de gerar indeterminações do tipo 1^∞, 0^0 e ∞^0, que se podem resolver aplicando a função exponencial e logarítmica simultaneamente, usando uma propriedade dos logaritmos para obter uma indeterminação do tipo $0/0$ ou ∞/∞ e aplicando a regra de L'Hôpital.

Exemplo 3.13 *Calcule os limites:*

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} (3x+9)^{1/x}$

2. $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$

3. $\lim\limits_{x\to 0} x^{\operatorname{sen} x}$

3.4 Limites de sucessões

Tal como nos limites de funções, com sucessões todas as propriedades dos limites se mantêm, bem como alguns métodos de levantamento de indeterminações. É claro que também podem ser propostos limites que não resultem em indeterminação.

Exemplo 3.14 *Considere as sucessões definidas por:*

$$u_n = 5 + \frac{3}{n} \quad e \quad v_n = -3n.$$

Calcule:

1. $\lim u_n$ *e* $\lim v_n$

2. $\lim(u_n \times v_n)$

3. $\lim\left(-\frac{2v_n}{5}\right)$

Quanto a limites de sucessões que resultem em indeterminações, podem-se obter quando calculamos $\lim u_n/v_n$, onde u_n e v_n são duas sucessões da forma $a_0n^p + a_1n^{p-1} + \cdots + a_{n-1}n + a_n$, com $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R}$ e $p \in \mathbb{N}$. Se substituirmos a incógnita por $+\infty$, resulta uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ e o método de levantamento da indeterminação é semelhante ao caso de limites de funções racionais quando x tende para $\pm\infty$, ou seja, basta calcular o limite do quociente entre o termo de maior grau do numerador e do denominador. Além disso, podemos ter no numerador e/ou no denominador uma sucessão do tipo $\sqrt{an^2+bn+c}$, o que o aluno terá de fazer é pôr em evidência o termo em n^2 e colocá-lo fora da raiz.

Exemplo 3.15 *Calcule cada um dos limites:*

1. $\lim \dfrac{-3+5n}{n^3-7}$

2. $\lim \dfrac{6n^4+5n}{-2n+9}$

3. $\lim \dfrac{\sqrt{3n^2-5}-4n+2}{n^3+3n-2}$

Com limites de sucessões também podemos ter indeterminações do tipo $\infty-\infty$. Como no caso das funções, tal pode resultar do limite de uma sucessão do tipo $u_n = a_0n^p + a_1n^{p-1} + \cdots + a_{n-1}n + a_n$ com $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R}$ e $p \in \mathbb{N}$, em que um dos coeficientes, excepto o termo independente, é negativo. Outra forma de obtermos este tipo de indeterminações é subtraindo, ou somando, sucessões do tipo $\sqrt{an^2+bn+c}$. Analogamente às funções, o aluno deve multiplicar e dividir a expressão pelo conjugado do numerador de forma a obter aí um caso notável, depois tem de pôr em evidência a maior potência do numerador e do denominador para simplificar a expressão e calcular o limite.

Exemplo 3.16 *Calcule cada um dos limites:*

1. $\lim n^4-5n^3+3$

2. $\lim \sqrt{2n+5}+\sqrt{n^2-7}$

3. $\lim \sqrt{3n^2+4n-2}-\sqrt{n^2-n+1}$

Devido ao conhecimento dos alunos de que $\lim a^n = 0$ se $0 < a < 1$ e $\lim a^n = +\infty$ se $a > 1$, podemos construir limites que resultem em indeterminações dos dois tipos anteriores. Para a indeterminação ser do tipo $\infty - \infty$ podemos usar uma sucessão do tipo $a^n \pm b^n$, com $a, b \in \mathbb{N}$, que se resolve pondo em evidência a potência de maior base. Relativamente a indeterminações do tipo $\frac{\infty}{\infty}$, podemos usar sucessões da forma:

$$\frac{a^{kn+p}+b^{tn+u}}{c^{jn+i}+d^{en+f}},$$

em que $a, b, c, d, e, f, i, j, k, p, t, u \in \mathbb{N}$. Na resolução do limite, o aluno tem de separar o numerador em duas fracções e colocar em evidência e simplificar a^{kn} na primeira fracção e b^{tn} na segunda fracção.

Exemplo 3.17 *Calcule cada um dos limites:*

1. $\lim 3^n - 5^n$
2. $\lim \dfrac{4^{2n+3} + 2^n}{3^{4n}}$
3. $\lim \dfrac{6^n + 7^{3n+1}}{7^n + 6^{3n+1}}$

O processo de geração de exercícios para estes tipos de limites de sucessões é muito similar ao caso, já referido, de limites de funções, em virtude de as propriedades dos limites serem válidas quer para funções, quer para sucessões. Assim, podemos criar limites que são limites da soma e produtos de várias sucessões, desde que seja possível ao aluno calcular o limite de cada uma delas e não resultem indeterminações.

As técnicas de levantamento de indeterminações não são os únicos conhecimentos que os alunos podem usar para resolver limites. Fazendo uso dos teoremas sobre infinitamente grandes e infinitésimos, estudados no secundário, é possível resolver limites que envolvam expressões um pouco diferentes das apresentadas até aqui.

Pegando numa sucessão que se sabe ser limitada ou que o aluno tem conhecimentos para provar que é limitada, como por exemplo: $\operatorname{sen} n$, $(-1)^n$, etc, podemos construir sucessões cujo limite pode ser analisado pelo aluno. Para tal basta multiplicar uma das sucessões que sabemos serem limitadas por outra sucessão cujo limite seja 0 ou então ∞ desde que se use uma sucessão limitada que nunca tome o valor 0, por exemplo, $2 + \operatorname{sen}(n)$.

Podemos usar ainda a sucessão $n!$, caso os alunos estejam devidamente familiarizado com ela e com algumas das suas propriedades, nomeadamente que $\lim n! = +\infty$ e que

$$(\forall n, k \in \mathbb{N}_0) : \frac{(n+k)!}{n!} = (n+k)(n+(k-1))\ldots(n+1).$$

Exemplo 3.18 *Classifique as sucessões em infinitamente grandes ou infinitésimos:*

1. $-\dfrac{3^n}{5^{2n}}$
2. $\dfrac{\cos n}{3^{3n}}$
3. $\dfrac{\operatorname{sen} 2n}{n!}$
4. $\left(-\dfrac{3}{2}\right)^n$
5. $\dfrac{(n+2)!\operatorname{sen}(5n)}{(n+3)!}$

Para resolver este tipo de exercícios, o aluno tem que identificar e pôr em evidência a sucessão que sabe ser limitada e de seguida calcular o limite da outra sucessão resultante. No caso da sucessão limitada ser $(-1)^n$ e o limite da outra sucessão ser ∞ o aluno apenas pode dizer que é um infinitamente grande em módulo.

Embora este processo que acabamos de descrever seja aparentemente simples, a questão de fazer o computador gerar sucessões limitadas sem recorrer a uma base de dados é bastante problemática. No entanto, usando apenas as sucessões $(-1)^n$, $\cos n$, $\operatorname{sen} n$, $\arctan n$ ou ainda do tipo ${}^{P(n)}/_{Q(n)}$, com $P(x)$ e $Q(x)$ polinómios tais que o grau de $P(x)$ não exceda o de $Q(x)$, podemos gerar uma grande variedade de sucessões limitadas, utilizando combinações lineares dos vários casos.

Capítulo 4

Assímptotas

No seguimento do estudo, feito ao nível do ensino secundário, sobre a continuidade de uma função num ponto e visando realçar possíveis consequências ao nível do esboço do gráfico, resultantes da descontinuidade de uma função num ponto ou da existência de pontos isolados que não pertencem ao domínio, os alunos são confrontados com o cálculo das assímptotas do gráfico de uma função.

Para determinarmos as assímptotas verticais do gráfico de uma função f devemos começar por calcular o seu domínio e, de seguida, identificar os pontos $x = a$ tais que a não pertence ao domínio, mas é seu ponto de acumulação ou a pertence ao domínio de f, mas a função é descontínua nesse ponto. Por fim, calcular $\lim_{x \to a^+} f(x)$ e/ou $\lim_{x \to a^-} f(x)$, caso a função esteja definida à direita e/ou à esquerda de a. Se algum destes limites (ou eventualmente os dois) der $\pm\infty$, então $x = a$ é assímptota vertical.

Quanto às assímptotas não verticais de uma função f, comecemos por notar que este tipo de assímptotas são, em particular, rectas não verticais e que, portanto, se podem apresentar na forma $y = mx + b$. Para identificarmos as assímptotas não verticais, temos então de calcular m e b, podendo recorrer às formulas:

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ e } b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - mx).$$

Convém ainda referir que, dentro das assímptotas não verticais, se costuma fazer a distinção entre assímptota horizontal, quando obtemos $m = 0$, e assímptota oblíqua caso contrário. Na eventualidade de m ou b não resultarem em número real quando $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$ então não existe assímptota não vertical.

Notemos ainda que o facto de ser gerada uma função que não tenha assímptotas não retira importância ao exercício, pois o aluno tem de mostrar tal ocorrência.

Outro aspecto a ter em consideração é o facto de, embora sejam referidos nas secções seguintes vários tipos de funções que são usados em exercícios sobre este assunto, há considerações que se aplicam à generalidade de funções com que se deparam os estudantes do Ensino Secundário. Assim, se o computador gerar duas quaisquer funções f e g tais que o aluno consiga calcular o sinal de f e de g em cada ponto dos respectivo domínios, sendo que para tal o aluno necessita de saber calcular os zeros de ambas as funções, pode-se pedir para determinar as assímptotas verticais de f/g. No caso de f e g terem raízes comuns, para se determinar a existência ou não de assímptotas verticais nesses pontos tem que se usar o que já foi escrito no capítulo 3 sobre levantamento de indeterminações.

4.1 Assímptotas de funções racionais

Ao nível do ensino secundário, este assunto é abordado no 11º ano e, numa primeira fase, apenas para funções racionais. Os alunos começam por visualizar gráficos de funções mais simples ($y = 1/x$, $y = \frac{x+1}{x-1}$, etc.) que lhes permite compreender não só a ideia intuitiva e a definição de assímptota mas também estarem aptos fazer o estudo para algumas funções do tipo:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \cdots}.$$

Embora possamos usar a definição de assímptota vertical e não vertical para as calcular, existem, no caso das funções racionais, certas características que levam a uma economia de tempo se se usarem outros métodos. Assim, para calcularmos as assímptotas verticais, basta simplificar a fracção o mais possível de forma a não existirem factores comuns ao numerador e ao denominador e, calculando de seguida os zeros deste, obtemos as assímptotas verticais existentes.

Quanto às assímptotas horizontais, pela definição se verifica que: se $m > n$, então a recta $y = 0$ é assímptota horizontal do gráfico de f; se $m = n$, então a assímptota horizontal é $y = a_0/b_0$. Finalmente, caso tenhamos $n < m$ o gráfico só terá assímptota, neste caso oblíqua, se $m = n + 1$. Para a calcular, o aluno terá de fazer a divisão algébrica de $P(x)$ por $Q(x)$ e apresentar o resultado na forma $f(x) = T(x) + R(x)/Q(x)$, considerando $R(x)$ e $T(x)$, com $a, b \in \mathbb{R}$, o resto e o quociente dessa divisão, respectivamente. A assímptota oblíqua pretendida terá equação $y = T(x)$. Observe-se também que se $m > n + 1$, o polinómio $T(x)$ que se obtém pela divisão algébrica é de grau maior ou igual a dois e, portanto, não resulta qualquer assímptota não vertical.

Exemplo 4.1 *Calcule as assímptotas do gráfico das funções:*

1. $y = \dfrac{3}{1 - x^2}$

2. $y = \dfrac{-2x^2 + 7}{3x^2 - 5}$

3. $y = \dfrac{x^3 - 1}{x^2 + 2}$

4. $y = \dfrac{x^2 - 4}{1 - 2x}$

Também se pode apresentar funções racionais em funções definidas por ramos, que podem estar definidos directamente ou então por uma única função em que no numerador ou no denominador teríamos uma função do tipo $|P(x)|$, em que $P(x)$ é um polinómio. O que o aluno deve começar por fazer para calcular as assímptotas é separar a função módulo e identificar os pontos de junção, construindo assim uma função por ramos. Ou seja, o polinómio $P(x)$ tem que ser tal que o aluno saiba estudar a variação de sinal, de acordo com o nível de ensino. De seguida, calculam-se as assímptotas em cada um dos ramos. Note-se ainda que as assímptotas verticais só são válidas se a abcissa pertencer ao domínio desse ramo.

Exemplo 4.2 *Calcule as equações das assímptotas do gráfico das funções:*

1. $y = \begin{cases} \dfrac{1}{x-3} & x > 0, \\ \dfrac{-x}{4x^2 - 9} & x \leq 0. \end{cases}$

2. $y = \dfrac{|x+3|}{x}$

4.2 Assímptotas de funções exponenciais e logarítmicas

Convém agora generalizarmos o cálculo de assímptotas para funções não racionais. Para tal vamos começar por analisar as funções exponenciais e logarítmicas.

As funções a usar não devem, evidentemente, ser quaisquer. Se repararmos nos limites a calcular para se obter m e b, facilmente se concluí que podem, eventualmente, resultar indeterminações que os alunos têm de resolver somente com a ajuda dos limites notáveis já referidos. Sendo assim, começando pelas exponenciais, funções do tipo

$$f(x) = \frac{e^{P(x)}}{Q(x)},$$

com $P(x)$ e $Q(x)$ polinómios, podem ser usadas, bem como trocando o numerador com o denominador, pois quer no cálculo de m quer no cálculo de b existe um limite notável que resolve o limite. No entanto, na medida em que o exercício também pode pedir o cálculo de assímptotas verticais, os alunos podem-se confrontar com a necessidade de resolverem a equação $Q(x) = 0$, pelo que ficará ao cuidado do utilizador adequar o grau de $Q(x)$ aos conhecimentos dos alunos. Podemos usar ainda funções da forma $e^{P(x)}$, em que $P(x)$ pode ser uma função polinomial ou racional, com coeficientes inteiros, e que se resolve, no caso do cálculo de m e de $P(x)$ tender para $+\infty$, multiplicando e dividindo por $P(x)$ e aplicando um limite notável.

Exemplo 4.3 *Calcule as assímptotas do gráfico das funções:*

1. $f(x) = \dfrac{e^{3x+7}}{x^2 - 5x}$

2. $f(x) = \dfrac{x^3 - 27}{e^{4x-9}}$

3. $f(x) = e^{\frac{-x^2+7}{3x-5}}$

4. $f(x) = e^{\frac{4x^5-3}{2x^2+3}}$

Relativamente a funções logarítmicas, partindo do limite notável $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\log x}{x} = 0$ e eventualmente trocando o numerador com o denominador, podem ser usadas funções do tipo

$$f(x) = \frac{\log P(x)}{Q(x)},$$

com $P(x)$ e $Q(x)$ polinómios. As indeterminações que possam ocorrer no calculo de m e/ou b resolvem-se, como já foi referido anteriormente, multiplicando e dividindo por $P(x)$ e usando um limite notável e propriedades dos limites. Verifica-se ainda que se podem usar funções logarítmicas com módulos da forma $f(x) = \log |P(x)|$, em que o aluno tem que separar em dois ramos, tratando cada um como no caso anterior. Mais uma vez se chama a atenção para o facto de ter de se restringir o grau dos polinómios de acordo com os métodos de resolução e os conhecimentos do aluno.

Exemplo 4.4 *Calcule as assímptotas do gráfico das funções:*

1. $f(x) = \dfrac{\log x^5 + 3x^2}{3x^2 - 7}$

2. $f(x) = \dfrac{-3x^7}{\log x^3 + 5}$

3. $f(x) = \log |6x - 2|$

Outro tipo de função que é possível gerar, mas que tem um uso mais restrito, em virtude de o estudo das suas assímptotas verticais resultar num limite que envolve uma dupla mudança de variável, é:

$$f(x) = P(x) \log P(x),$$

sendo $P(x)$ uma função qualquer. Para resolver, o aluno deve fazer a mudança de variável $y = \log(P(x))$, donde resulta que $y \to -\infty$, e de seguida substituir y por $-y$ para obter que $y \to +\infty$ de modo a poder usar o limite notável.

Exemplo 4.5 *Calcule as assímptotas do gráfico das funções:*

1. $f(x) = x \log x$

2. $f(x) = (x^2 - 2) \log(x^2 - 2)$

4.3 Assímptotas de funções irracionais

Um tipo de funções que também é usado são as da forma $\sqrt[n]{f}$, em que f é uma função polinomial ou racional.

No que diz respeito às restrições a fazer, o índice da raiz pode ser qualquer, ficando ao critério do utilizador o nível de complexidade a usar no exercício. No entanto, caso f seja uma função polinomial, é do seu grau que vai depender a existência ou não de assímptotas não verticais, já que facilmente se verifica que estas funções não têm assímptotas verticais. Se o grau da função for igual ao índice da raiz o gráfico tem assímptotas não verticais, caso contrário não existem assímptotas. Se f for uma função racional, o exercício ficará um pouco mais completo, pois aluno tem de calcular as assímptotas verticais (o que implica que o denominador seja um polinómio do qual o aluno saiba calcular as raízes) e as assímptotas não verticais, que existirão apenas no caso de a diferença entre o grau do numerador e do denominador ser igual ao índice da raiz que esteja a ser usado.

Exemplo 4.6 *Calcule as assímptotas do gráfico das funções:*

1. $f(x) = \sqrt{x}$

2. $f(x) = \sqrt{x^2 - 2}$

3. $f(x) = \sqrt[3]{x^4 - 2x}$

4. $f(x) = \sqrt[4]{\dfrac{3x^5 - 2x^3 - 7}{3x - 3}}$

4.4 Assímptotas de funções trigonométricas

Ao analisarmos a existência de assímptotas no gráfico de funções trigonométricas, depara-mo-nos com os casos da tangente e da cotangente, em que aparece um grande número de assímptotas verticais. Isto deve-se ao facto de não estarem definidas para $x = \pi/2 + k\pi$ e $x = k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$, respectivamente. Sendo assim podemos compor a função tangente e a cotangente com qualquer função f, tendo em atenção que, para existirem assímptotas verticais, já que, como veremos mais adiante, não vão existir assímptotas não verticais, o seu contradomínio tem de conter algum ponto da forma $\pi/2 + k\pi$, no caso da tangente, ou da forma $k\pi$, no caso da cotangente.

Para proceder ao cálculo das assímptotas o aluno deve analisar a função f, identificando os pontos que pertencem ao seu contradomínio e em que a tangente não está definida. Ou seja, no caso da tangente (cotangente), resolvendo a equação $f(x) = \pi/2 + k\pi$ ($f(x) = k\pi$) e dizendo que o gráfico tem uma assímptota vertical em cada uma das soluções resultantes. Mais uma vez a escolha de f ficará ao critério do utilizador, de acordo com o nível de dificuldade pretendido, mas deve ser tal que permita ao aluno resolver a equação referida acima. Podem (e devem) ainda ser usadas restrições ao domínio de forma a que o gráfico contenha apenas um determinado número de assímptotas.

Exemplo 4.7 *Calcule as assímptotas do gráfico das funções:*

1. $f(x) = \tan(x^2 + 5)$, *para* $x \in [-1, 1]$
2. $f(x) = \tan\left(\frac{x^2-2}{x}\right)$, *para* $x \in]1, 3[$
3. $f(x) = \cot\left(\frac{x^2-x}{-5x}\right)$, *para* $x \in]0, 2[$

Um raciocínio análogo pode ser feito no caso da secante e da cossecante. Sabendo o aluno que

$$\sec f(x) = \frac{1}{\cos f(x)} \text{ e } \operatorname{cosec} f(x) = \frac{1}{\operatorname{sen} f(x)},$$

facilmente se conclui que vão existir tantas assímptotas verticais quantas as abcissas que anulem o cosseno ou o seno, conforme estejamos a trabalhar com a secante ou a cossecante, respectivamente. Portanto, para proceder ao cálculo das assímptotas, o aluno tem que resolver uma equação do tipo $\cos f(x) = 0$ ou $\operatorname{sen} f(x) = 0$ e de seguida identificar as soluções que pertencem à restrição considerada. Note-se que, como está em causa a resolução de uma equação trigonométrica, a função f tem que estar de acordo com os conhecimentos do aluno sobre este assunto, podendo ficar ao cuidado do utilizador fazer essas restrições.

Exemplo 4.8 *Calcule as assímptotas do gráfico das funções:*

1. $f(x) = \sec(2x)$, *para* $x \in [-1, 1]$
2. $f(x) = \operatorname{cosec}(3x^2 - 5)$, *para* $x \in]0, 2[$

4.5 Geração de exercícios

Quanto ao processo de geração de exercícios, notemos que se as rectas $ax + b$ e $cx + d$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ são assímptotas não verticais à direita das funções f e g, respectivamente, então temos que:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - (ax + b) = 0$$

e

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) - (cx + d) = 0.$$

Logo

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) + g(x) - ((ax + b) + (cx + d) = 0,$$

donde se obtém que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) + g(x) - ((a + c)x + b + d) = 0.$$

Concluímos assim que a recta $(a+b)x+b+d$ é assímptota à direita da função soma das funções f e g. Sendo o raciocínio para assímptotas não verticais à esquerda análogo, induzimos então deste facto que é possível apresentar exercícios que envolvam a função soma de funções de vários tipos, pois, sabendo calcular as assímptotas não verticais de cada função, podemos facilmente calcular as assímptotas não verticais da soma. Relativamente ao produto e considerando, do mesmo modo, que as rectas $ax + b$ e $cx + d$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ são assímptotas não verticais à direita das funções f e g, respectivamente, quando $x \longrightarrow +\infty$, $f(x) \cdot g(x)$ comporta-se como

$$(ax + b).(cx + d) = acx^2 + (ad + cb)x + bd,$$

e poder-se-ia pensar que $(ad + cb)x + bd$ seria uma assímptota quando a ou c fossem iguais a 0. Tal não é verdade, porque, se definirmos $f, g_1, g_2, g_3 :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(x) = x,\ g_1(x) = \frac{1}{\sqrt{x}},\ g_2(x) = \frac{1}{x} \text{ e } g_3(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}},$$

então f tem uma assímptota oblíqua em $+\infty$ (nomeadamente $y = x$) e cada g_i tem em $+\infty$ a assímptota horizontal $y = 0$, mas

1. $f.g_1$ não tem qualquer assímptota em $+\infty$;

2. $f.g_2$ tem a assímptota horizontal $y = 1$ em $+\infty$;

3. $f.g_3$ tem a assímptota horizontal $y = 0$ em $+\infty$.

No que diz respeito às assímptotas verticais, podemos calcular as assímptotas da soma, desde que o limite seja sempre $+\infty$ ou $-\infty$ em todas as funções que formam a soma, quando x tende para alguma da(s) assímptota(s) de cada função (podendo, inclusive, algumas das parcelas serem constantes), e do produto, a menos que o limite de alguma das parcelas seja 0, quando x tende para alguma das assímptotas das funções que constituem o produto.

A composição de funções também pode ser usada para gerar exercícios sobre assímptotas, pois, no caso de assímptotas não verticais, não vai haver qualquer alteração, isto é, se uma função f tem uma assímptota não vertical à direita e se temos uma função g tal que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, então a função $f \circ g$ tem, à direita, essa mesma assímptota. O raciocínio e o resultado é análogo se a assímptota não vertical for à esquerda. Nas assímptotas verticais passa-se algo de bastante similar, embora haja uma alteração na assímptota. Mais concretamente, se temos que uma função f tem uma assímptota em $x = a$, isto é, $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$, e também que $\lim_{x \to b} g(x) = a$, então $\lim_{x \to b}(f \circ g)(x) = \lim_{x \to b} f(g(x)) = \pm\infty$. Concluímos assim que a recta $x = b$ é assímptota vertical de $f \circ g$.

Vejamos agora alguns exemplos de funções que podem ser geradas usando processo. Se usarmos a função $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, que possui duas assímptotas não verticais $y = x$ e $y = -x$, e a função $g(x) = \frac{x}{x+1}$ que tem uma única assímptota não vertical à esquerda e à direita, $y = 1$, então podemos facilmente calcular as assímptotas não verticais da função $(f + g)(x) = \sqrt{x^2 + 1} + \frac{x}{x+1}$, obtendo, pelo que foi visto acima, $y = x + 1$ e $y = -x + 1$.

Quanto a assímptotas verticais, usando a funções $f(x) = \frac{1}{x-3}$, que tem uma assímptota vertical em $x = 3$, e $g(x) = \sqrt{\frac{x}{x-3}}$, que também tem uma assímptota vertical em $x = 3$, concluímos que a função $(f + g)(x) = \frac{1}{x-3} + \sqrt{\frac{x}{x-3}}$ também tem uma única assímptota vertical $x = 3$, pois o limite quando x tende para 3 é em ambas as funções $+\infty$. Para o produto, podemos usar as funções $f(x) = \frac{x-5}{x^2-2x+1}$ e $g(x) = \log(x + 4)$, pois quando a incógnita tende para alguma das assímptotas, neste caso 1 ou -1, o limite de ambas as funções é diferente de 0. Temos então que a função $(f.g)(x) = \frac{x-5}{x^2-2x+1} . \log(x + 4)$ vai ter duas assímptotas verticais: $x = 1$ e $x = -1$.

Relativamente à composição de funções, quando abordamos o cálculo de assímptotas de funções trigonométricas referimos vários exemplos, tornando-se agora um pouco mais claro todo o processo de criação dessas funções bem como de resolução dos exercícios. No entanto as funções trigonométricas não são as únicas que se podem usar. Pegando na função $f(x) = \frac{x}{x-7}$, que tem uma assímptota em $x = 7$ e compondo-a com a função $g(x) = e^x$, resulta que $(f \circ g)(x) = \frac{e^x}{e^x-7}$ vai ter uma assímptota na solução da equação $e^x = 7$, ou seja, em $x = \log 7$.

Note-se que podemos ainda fazer combinações que envolvam mais do que um dos casos vistos. Por exemplo: considerando as funções $f(x) = \frac{x^3}{x-1}$, $g(x) = \log x$ e $h(x) = x + 5$, temos que f tem uma assímptota vertical em $x = 1$, $g(e) = 1$ e $\lim_{x \to e} h(x) \neq 0$. Podemos então pedir ao aluno que calcule as assímptotas verticais da função $h(x).(f \circ g)(x) = \frac{(x+5)(\log x)^3}{\log x - 1}$, que é a recta $x = e$, pelo raciocínio feito anteriormente.

Com estes exemplos pretendemos mostrar como o computador pode, a partir de funções mais simples criar exercícios mais complexos (sem serem necessariamente de resolução mais complicada), aumentando assim a diversidade de situações que podem ser propostas aos alunos sem sair fora do âmbito dos seus conhecimentos.

Capítulo 5

Conclusões

Ao construir um exercício que se adapte a determinado nível de ensino, notamos que temos de ter em conta os conhecimentos dos alunos que lhes permitem compreender e resolver o problema. Sendo assim há que impor restrições, nem sempre fáceis de identificar e implementar, que não tornem nem o enunciado nem a resolução em si demasiado «artificial» e estranha ao aluno. Claro está então que, apesar de se pretender que a máquina gere exercícios aleatoriamente para conseguirmos mais diversidade, o utilizador deve ter mecanismos de controlo para adaptar os exercícios resultantes ao nível de ensino que deseja. Note-se que os assuntos tratados neste estudo, embora sejam dados no 12.º ano, são muitas vezes ainda abordados nos primeiros anos de alguns cursos universitários. No entanto, a adaptação é possível alterando as restrições pretendidas e fazendo, por exemplo, com que sejam usadas funções trigonométricas inversas.

Já foi atrás referido que nem todos os assuntos têm uma resolução algorítmica dos exercícios correspondentes, mas o que acontece também é que muitos assuntos se prestam a exercícios que se resolvem sempre da mesma forma, como por exemplo os problemas de optimização, em que o aluno tem de pôr o problema em equação, identificar a restrição, deduzir a função a derivar e calcular máximos e mínimos, mas que se baseiam muito na interpretação de enunciados, que têm de ser claros e com termos que sejam entendidos pelos alunos. Estamos então perante questões de ordem semântica e de vocabulário que saem do âmbito deste trabalho.

Outro aspecto que importa realçar é o facto de o computador poder apresentar imediatamente uma resolução do exercício, o que ajuda o aluno a perceber ideias algébricas e métodos (ver [7]) e, além disso, identificar com relativa facilidade o passo do algoritmo da resolução do problema em que errou ou o obstáculo que não conseguiu ultrapassar.

Referências

[1] MICHÈLE ARTIGUE, «Learning Mathematics in a CAS Environment: The Genesis of a Reflection about Instrumentation and the Dialectics between Technical and Conceptual Work», CAME 2001, Freudenthal Institute, University of Utrecht

[2] ROBERT K. ATKINSON, SHARON J. DERRY, ALEXANDER RENKL e DONALD WORTHAM, «Learning from Examples: Instructional Principles from the Worked Examples Research», Review of Educational Research (RER), vol. 70, Nº 2 (Summer 2000)

[3] M.V. BELMONTE, E. GUZMÁN, L. MANDOW, E. MILLÁN e J.L. PÉREZ DE LA CRUZ «Automatic generation of problems in web-based tutors», *in* L.C. JAIN, N.S. ICHALKARANJE, R.J. HOWLETT e G. TONFONI (Eds.), *Virtual Environments for Teaching and Learning* Series on Innovative Intelligence 1, World Scientific Publishing, New Jersey, December 2002

[4] SHARON J. DERRY e LORI ADAMS DURUSSEL «Assessing Knowledge Construction in On-Line Learning Communities», AIED99, Conference of the International Society for Artificial Intelligence in Education, July 1999 – Lemans, France

[5] SHELLEY GOLDMAN, «Technology in the Mathematics Classroom: Guidelines from the Field», ERIC Clearinghouse on Information and Technology, Syracuse University, Winter 2001, vol. 22, no. 2

[6] M. KATHLEEN HEID, «Theories that Inform the Use of CAS in the Teaching and Learning of Mathematics», IJCAME vol. 9, no. 2, 2002

[7] YASUTO KAJIWARA, HITOSHI NISHIZAWA e TAKAYOSHI YOSHIOKA, «Effecttivness of the hints given at a WWW-based On-line Exercise System», Toyota National College of Technology

[8] JACK MCGOURTY, «Using Multisource Feedback in the Classroom: A Computer-Based Approach», IEEE Transactions on Education, vol. 43, Nº 2 (May 2000)

[9] MANUEL MEIRINHOS, `http://www.ipb.pt/~meirinhos/soft.doc`

[10] LISA DENISE MURPHY, «Computer Algebra Systems in Calculus Reform», `http://www.mste.uiuc.edu/users/Murphy/Papers/CalcReformPaper.html`

[11] MARIA AUGUSTA FERREIRA NEVES, *Matemática 12.º Ano*, Porto Editora, 2000

[12] MARIA AUGUSTA FERREIRA NEVES e MARIA LUÍSA MONTEIRO FARIA, *Exercícios – Matemática 12.º Ano*, Porto Editora, 2000

[13] ROY D. PEA, «Cognitive technologies for mathematics education», *in* Alan Schoenfeld, *Cognitive Science and Mathematics Education*, Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates

[14] WERNER PESCHEK e EDITH SCHNEIDER «CAS and Communication With Experts», University of Klagenfurt, Austria `http://ltsn.mathstore.ac.uk/came/events/freudenthal/3-Peschek-Schneider.pdf`

[15] DICK POUNTAIN, «Constraint Logic Programming», Byte (February 1995)

[16] INGRID M. REWITZKY, «Towards Automated Testing», Department of Mathematics and Applied Mathematics, University of Cape Town, South Africa

[17] MARCELLE SIEGEL E OUTROS, «Promoting Teacher's Flexible Use of the Learning Sciences through Case-Based Problem Solving in the WWW: A Theoretical Design Approach», STEP Project Group, National Institute for Science Education, University of Wisconsin-Madison

[18] MICHAEL SPIVAK, *Calculus* (third edition), Publish or Perish, Houston, 1994

[19] ANA PAULA TOMÁS e JOSÉ PAULO LEAL, «A CLP-based tool for computer aided generation and solving of maths exercises», *in* V. DAHL and P. WADLER (Eds.), *Practical Aspects of Declarative Languages*, Lecture Notes in Computer Science 2562, Springer-Verlag, New York, 2003

[20] ANA PAULA TOMÁS e PEDRO VASCONCELOS, «Generating Mathematics exercises by computer», Technical Report Series: DCC–01–06