

A GEOMETRIA DAS RODAS CILÍNDRICAS DE ENGRENAGENS EXTERIORES COM PERFIL EM EVOLVENTE DE CÍRCULO

José António dos Santos Almacinha *
Pedro de Campos Faria **
Joaquim Oliveira Fonseca *
Jorge Humberto Oliveira Seabra ***

CETRIB - Unidade de Tribologia e Manutenção Industrial
Departamento de Engenharia Mecânica e Gestão Industrial
Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto
Rua dos Bragas - 4099 Porto codex - Portugal

RESUMO:

O projecto de modernos sistemas de engrenamento, para operarem em regimes de grandes potências e elevadas velocidades, recorre cada vez com maior frequência à Concepção Assistida por Computador apoiada em códigos do Método dos Elementos Finitos e do Método dos Elementos Fronteira. A correcta definição da geometria do perfil dos dentes das rodas é fundamental para a credibilidade dos resultados obtidos.

A definição geométrica do perfil dos dentes pode também assumir um papel importante no ensino tecnológico e na formação profissional, nomeadamente, na simulação visual de processos de talhagem por geração e na visualização da configuração dos dentes em função dos seus parâmetros caracterizadores.

Neste texto, desenvolve-se um tratamento unificado da geometria do perfil dos dentes de rodas cilíndricas exteriores (dentados recto e helicoidal), que inclui os efeitos da correcção do dentado e da protuberância da cabeça dos dentes da ferramenta de corte.

Em complemento, apresentam-se alguns exemplos de aplicação dos conceitos expostos.

* Assistente - DEMEGI - FEUP.

** Aluno Finalista - DEMEGI - FEUP.

*** Professor Auxiliar - DEMEGI - FEUP.

Nomenclatura

b	- Largura do dentado
g_{s1}, g_{s2}	- Escorregamentos específicos no pinhão e na roda
h_{ap}	- Altura da cabeça (dentado normal)
h_{a0}	- Altura da cabeça dos dentes da ferramenta de corte
h_{fp}	- Altura do pé (dentado normal)
m_n	- Módulo normal
p_z	- Passo helicoidal
r	- Raio primitivo de corte
r_a	- Raio da cabeça (addendum)
r_b	- Raio de base
r_f	- Raio do pé (dedendum)
r_{NfE}	- Raio activo de pé de corte
s	- Sobrespessura
s_{an}	- Espessura normal da cabeça do dente
s_{at}	- Espessura aparente da cabeça do dente
	$[s_{at} = r_a (s_f / r + 2 (\text{inv } \alpha_f - \text{inv } \alpha_{at}))]$
s_f	- Espessura aparente do dente
x	- Coeficiente de desvio (desvio)
x_c, y_c	- Coorden. do centro de curvatura de um ponto do arco de elipse no sistema (x, y)
x_{M'}, y_{M'}	- Coordenadas de um ponto do contorno elíptico da cabeça do dente da cremalheira no sistema (x, y)
z	- Número de dentes
z_v	- Número de dentes virtuais $[z / \cos^3 \beta]$
\overline{HC}	- Dimensão perpendicular à linha primitiva da cremalheira, medida a partir do centro de curvatura C
K	- Factor de alteração do addendum
P_{ro}	- Protuberância
X_c, Y_c	- Coorden. do centro de curvatura C de um ponto M' da trocoide, no sistema (X, Y)
X_{cab}, Y_{cab}	- Coorden. de um ponto do arco de circunferência da cabeça, no sistema (X, Y)
X_{env,M}, Y_{env,M}	- Coordenadas de um ponto M da evolvente de círculo, no sistema (X, Y)
X_{pe}, Y_{pe}	- Coordenadas de um ponto do arco de circunferência do pé, no sistema (X, Y)
X_{tro,M}, Y_{tro,M}	- Coordenadas de um ponto M' da trocoide, no sistema (X, Y)
α_{at}	- Ângulo de pressão aparente da cabeça $[\alpha_{at} = \arccos (r / r_a \cos \alpha_f)]$
α_n	- Ângulo de pressão normal
α_f	- Ângulo de pressão aparente $[\tan \alpha_f = \tan \alpha_n / \cos \beta]$
β	- Ângulo de hélice primitiva
δ	- Ângulo ao centro do arco de circunferência de pé

Δ	- Distância entre o centro de curvatura da cabeça de um dente da cremalheira e o seu eixo de simetria
Δ_t	- Projecção de Δ no plano transversal
ε_α	- Razão de condução aparente
ε_γ	- Razão de condução total
θ_n	- Âng. que a normal comum ao ponto de contacto, no plano normal, faz com a linha A
θ_t	- Ângulo que o raio de curvatura num ponto M' da elipse faz com o eixo dos yy
ξ_M	- Ângulo de rolamento da evolvente de círculo num ponto M
ξ'	- Ângulo de rolamento da trocoide
ρ_{a0}	- Raio de concordância da cabeça dos dentes da ferramenta de corte
$\rho_{e,M'}$	- Raio de curvatura de um ponto M' do arco de elipse da concordância da cabeça da ferramenta
τ	- Passo angular da roda dentada
ψ_a	- Semi-ângulo da espessura da cabeça
ψ_b	- Semi-ângulo da espessura da base
ψ_s	- Ângulo de posição entre o eixo dos YY e o raio vector do ponto de início do arco de trocoide
$\text{inv } \alpha$	- Involuta de α [$\tan \alpha - \alpha$]
índice 1	- para quantidades associadas à menor roda da engrenagem (PINHÃO)
índice 2	- para quantidades associadas à maior roda da engrenagem (RODA)

INTRODUÇÃO

O progresso tecnológico que se vem registando nas últimas décadas tem fomentado a procura de sistemas de engrenamento capazes de operar em condições cada vez mais exigentes, em termos de capacidade de carga e velocidade de funcionamento.

Em engrenagens modernas, para grandes potências e elevadas velocidades, os resultados obtidos por processos convencionais de cálculo à resistência de rodas dentadas têm-se mostrado, por vezes, inadequados. A difusão cada vez mais ampla, pelos meios industriais, de equipamento informático potente e com boas capacidades gráficas e de códigos do Método dos Elementos Finitos (FEM) e do Método dos Elementos Fronteira (BEM) permite, por exemplo, efectuar uma análise bastante completa do estado de tensão na base dos dentes de qualquer roda dentada. A correcta definição da geometria do perfil dos dentes das rodas em estudo é um dos requisitos fundamentais para a validação dos resultados obtidos por estas técnicas de análise estrutural.

Tal como na Concepção Assistida por Computador (CAD) de sistemas de engrenamento, a definição geométrica do perfil dos dentes pode ter um papel assinalável no ensino tecnológico e na formação profissional, quer em termos da simulação visual de processos de talhagem por geração de rodas dentadas, quer na visualização da configuração dos dentes em função dos respectivos parâmetros caracterizadores arbitrados. Em conferências da especialidade, têm sido apresentadas algumas comunicações versando este tipo de aplicações [1].

Apesar de existirem alguns trabalhos publicados em revistas técnicas da especialidade, de que as referências [2, 3 e 4] são exemplo, que abordam a definição geométrica para o caso do dentado recto, pareceu importante, aos autores deste texto, apresentar um tratamento unificado da geometria do perfil dos dentes de rodas cilíndricas exteriores (dentados recto e helicoidal), que inclua os efeitos da correcção do dentado e da protuberância da cabeça dos dentes da ferramenta de corte e seja de fácil aplicação. A única abordagem semelhante, conhecida dos autores, segue uma via não didáctica, encontrando-se desenvolvida numa tese de doutoramento [5].

1 - A GEOMETRIA DO PERFIL DO DENTE

A configuração geométrica do flanco dos dentes com perfil em evolvente de círculo, de rodas cilíndricas exteriores, é resultado do processo de geração de dentado utilizado. A análise efectuada, neste trabalho, tem por base a consideração de um processo de geração por cremalheira de corte ou por fresa-mãe.

A abordagem unificada dos dentados recto e helicoidal obriga a que esta análise seja feita num plano perpendicular ao eixo da roda considerada - a **secção transversal**.

Assim, os processos de geração de dentado enunciados podem ser tratados e visualizados através do rolamento da linha primitiva de uma cremalheira, com dentes de perfil recto, sobre o círculo primitivo do corpo da roda a talhar. As noções de linha e diâmetro primitivo de corte são essencialmente cinemáticas, estando ligadas à condição de rolamento sem escorregamento entre a ferramenta de corte e a roda dentada, o que implica a igualdade de arcos percorridos, nos dois corpos, pelo ponto de contacto.

Para determinar a geometria de uma roda dentada, é necessário conhecer os seus parâmetros independentes caracterizadores do dentado:

- z - número de dentes;
- m_n - módulo normal;
- α_n - ângulo de pressão normal;
- β - ângulo de hélice primitiva;
- x - coeficiente de desvio (desvio);
- K - factor de alteração do addendum;
- b - largura do dentado;

bem como, os seguintes parâmetros característicos da ferramenta de corte indicados na figura 1.1:

- h_{a0} - altura da cabeça dos dentes da ferramenta de corte;
- ρ_{a0} - raio de concordância da cabeça dos dentes da ferramenta de corte;
- P_{r0} - protuberância;
- s - sobresspessura.

As referências [6 e 7] contêm indicações sobre as características de diferentes tipos de cremalheiras de corte, utilizadas na prática industrial, para além da cremalheira normalizada ISO [8]. Os parâmetros característicos da ferramenta de corte permitem definir a altura da cabeça h_{ap} e a altura do pé h_{fp} (dentado normal) dos dentes da roda a talhar.

As ferramentas de corte com uma protuberância P_{r0} na cabeça dos seus dentes, figura 1.1 b), provocam uma ligeira interferência (desafogo) no pé dos dentes das rodas, sendo apropriadas para a talhagem de rodas dentadas que devem ser sujeitas a uma posterior operação de "shaving" ou de rectificação [7].

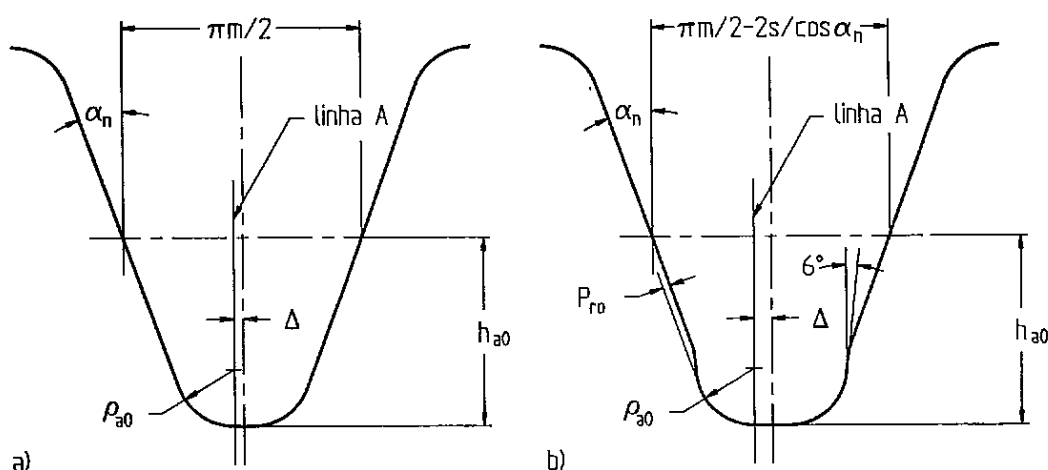


Figura 1.1 - Perfil do dente da ferramenta de corte: a) Normal; b) Com protuberância.

A partir destas características, é possível determinar os seguintes parâmetros necessários à definição geométrica do dentado [9 e 10]:

Raio primitivo de corte	- $r = z m_n / (2 \cos \beta)$
Raio de base	- $r_b = r \cos \alpha_t$
Raio da cabeça (addendum)	- $r_a = m_n (z / (2 \cos \beta) + x - K) + h_{ap}$
Raio do pé (dedendum)	- $r_f = m_n (z / (2 \cos \beta) + x) - h_{fp}$
Espessura aparente do dente	- $s_t = m_n / \cos \beta (\pi / 2 + 2 x \tan \alpha_n)$
Passo helicoidal	- $p_z = z m_n \pi / \sin \beta$

O perfil em evolvente de círculo de um dente é composto por quatro partes distintas, conforme se pode observar na figura 1.2:

- Arco de circunferência do pé;
- Trocoide (concordância de pé);
- Evolvente de círculo (perfil activo);
- Arco de circunferência da cabeça.

A geração das três primeiras partes do perfil assenta na propriedade que Colbourne [11] definiu como "Lei do Engrenamento" - "Para manter constante a relação entre a velocidade da ferramenta de corte e a velocidade angular da roda a talhar, em cada instante, a normal comum ao ponto de contacto entre os perfis dos dois corpos passa pelo ponto I, centro instantâneo de rotação do movimento relativo".

O sistema de eixos de referência global (X, Y) considerado tem a sua origem no centro da roda, estando o eixo dos YY coincidente com a linha de simetria do dente.

1.1 - Arco de circunferência do pé

A parte recta da cabeça do dente da cremalheira de corte, visível na figura 1.1, é a responsável pela geração do arco de circunferência do pé do dente. Neste processo, a cremalheira rola para a direita, desde a posição em que a projecção da linha A, num plano transversal, está disposta radialmente ao centro da roda, até ao ponto em que a linha de simetria do dente adopta igual posicionamento, ficando coincidente com a linha de simetria do espaçamento entre dentes da roda representada na figura 1.2.

A partir da distância Δ , indicada na figura 1.1, medida num plano normal da cremalheira de corte, entre o centro de curvatura da cabeça do dente e o seu eixo de simetria,

$$\Delta = \pi m_n / 4 - (h_{a0} - \rho_{a0}) \tan \alpha_n - (\rho_{a0} - (P_{r0} - s)) / \cos \alpha_n \quad (1.1)$$

pode obter-se a sua projecção num plano transversal $\Delta_t = \Delta / \cos \beta$ e, conseqüentemente, o ângulo ao centro $\delta = \Delta_t / r$, dos arcos primitivo percorrido e de circunferência do pé gerado.

Atendendo a que, o semi-passo angular da roda dentada é igual a $\tau / 2 = \pi / z$, as coordenadas cartesianas dos pontos extremos do arco de circunferência do pé podem ser definidas através das expressões:

$$X_{pe,l} = r_f \sin (\tau / 2) \quad (1.2)$$

$$Y_{pe,l} = r_f \cos (\tau / 2)$$

e

$$X_{pe,F} = r_f \sin \psi_s \quad (1.3)$$

$$Y_{pe,F} = r_f \cos \psi_s$$

em que $\psi_s = \tau / 2 - \delta$ é o ângulo de posição entre o eixo dos YY e o raio vector do ponto de início do arco de trocoide.

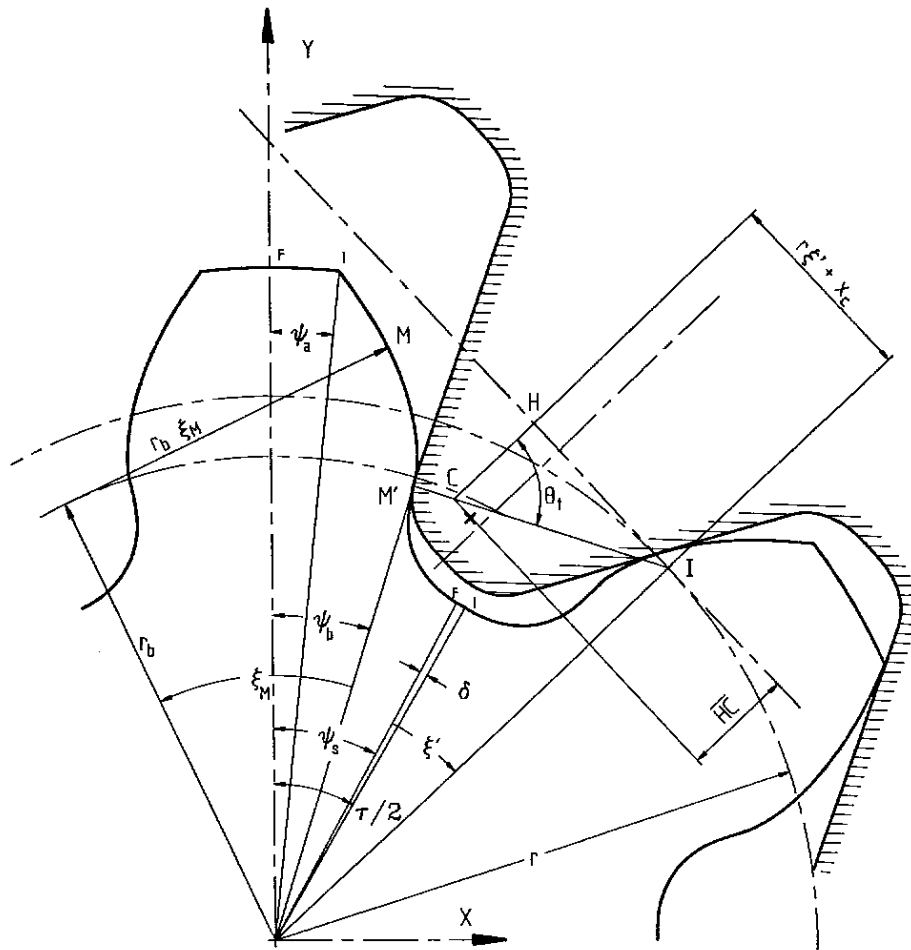


Figura 1.2 - Geração de um dente com perfil em evolvente de círculo.

1.2 - Trocoide (concordância de pé)

A geração do arco de trocoide, no pé da roda, é executada pela concordância da cabeça do dente da cremalheira de corte, iniciando-se simultaneamente com a do arco de circunferência do pé. Num plano transversal, a projecção da concordância da cabeça do dente da cremalheira apresenta uma forma elíptica, centrada geometricamente na projecção do correspondente centro de curvatura. A trocoide gerada é a envolvente das sucessivas posições do arco de elipse da cabeça da cremalheira, ao longo do movimento.

A posição angular do centro instantâneo de rotação **I** do movimento relativo cremalheira / roda a talhar pode ser descrita pelo ângulo de rolamento ξ' , medido a partir do raio vector posição do ponto início do arco de trocoide, de acordo com a figura 1.2. O ponto **M'** é o ponto do arco de elipse que, em cada instante, está mais afastado do ponto **I**. O seu trajecto é a envolvente das diferentes posições do arco de elipse do dente da ferramenta de corte, ao longo da geração do perfil da concordância da raiz.

Considerando um sistema de eixos (x, y) , com a sua origem no centro geométrico do arco de elipse de eixos $a = \rho_{a0} / \cos \beta$ e $b = \rho_{a0}$ representado na figura 1.3, as coordenadas do ponto **M'** podem ser obtidas através das equações paramétricas da elipse, [12]:

$$x_{M'} = (\rho_{a0} / \cos \beta) \sin \theta_n \quad (1.4)$$

$$y_{M'} = \rho_{a0} \cos \theta_n$$

em que $0 \leq \theta_n \leq \pi/2 - \alpha_n$ é o ângulo que a normal comum ao ponto de contacto, no plano normal, faz com a linha **A**.

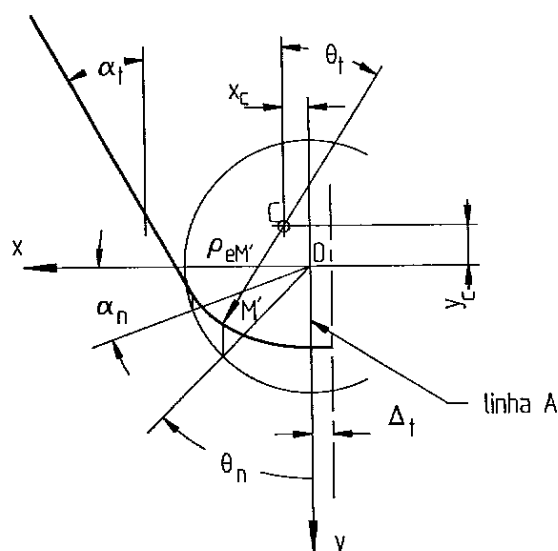


Figura 1.3 - Projecção da cabeça do dente da ferramenta de corte num plano transversal ao eixo da roda a talhar.

A partir da expressão $\rho = [1 + (dy/dx)^2]^{1.5} / |d^2y/dx^2|$, que define o raio de curvatura de uma curva genérica e da equação cartesiana de uma elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, pode deduzir-se o raio de curvatura de qualquer ponto **M'** do arco de elipse da concordância da cabeça:

$$\rho_{e,M'} = (\rho_{a0} / \cos \beta)^2 \rho_{a0}^2 (x_{M'}^2 / (\rho_{a0} / \cos \beta)^4 + y_{M'}^2 / \rho_{a0}^4)^{1.5} \quad (1.5)$$

As coordenadas do ponto **C**, centro da curvatura do arco de elipse num ponto **M'**, no sistema (x, y) , são determinadas através das expressões:

$$x_C = x_{M'} - \rho_{e,M'} \sin \theta_t \quad (1.6)$$

$$y_C = y_{M'} - \rho_{e,M'} \cos \theta_t$$

em que $\theta_t = \arctan(\tan \theta_n \cos \beta)$ é o ângulo que o raio de curvatura num ponto M' da elipse faz com o eixo dos yy .

A dimensão da perpendicular à linha primitiva da cremalheira, medida a partir do ponto C , vem dada por:

$$\overline{HC} = h_{a0} - \rho_{a0} - x m_n + y_c \quad (1.7)$$

Deste modo, as coordenadas do centro de curvatura de um ponto genérico M' da trocoide, no sistema de eixos (X, Y) podem ser definidas por:

$$\begin{aligned} X_c &= -(r \xi' + x_c) \cos(\psi_s + \xi') + (r - \overline{HC}) \sin(\psi_s + \xi') \\ Y_c &= (r \xi' + x_c) \sin(\psi_s + \xi') + (r - \overline{HC}) \cos(\psi_s + \xi') \end{aligned} \quad (1.8)$$

onde, atendendo a que o triângulo IHC é sempre rectângulo em H , o ângulo de rolamento ξ' pode ser expresso como uma função do parâmetro θ_t , através da relação:

$$\xi' = 2 \cos \beta (\overline{HC} \tan \theta_t - x_c) / (z m_n) \quad (1.9)$$

Finalmente, atendendo à "Lei do Engrenamento", enunciada por Colbourne, que pressupõe a existência de colinearidade entre os pontos M' , C e I , as coordenadas cartesianas de um ponto M' do perfil da trocoide, no referencial (X, Y) , podem ser expressas como:

$$\begin{aligned} X_{tro, M'} &= X_c - \rho_{e, M'} (\overline{HC} \sin(\psi_s + \xi') + (r \xi' + x_c) \cos(\psi_s + \xi')) / (\overline{HC}^2 + (r \xi' + x_c)^2)^{0.5} \\ Y_{tro, M'} &= Y_c + \rho_{e, M'} (-\overline{HC} \cos(\psi_s + \xi') + (r \xi' + x_c) \sin(\psi_s + \xi')) / (\overline{HC}^2 + (r \xi' + x_c)^2)^{0.5} \end{aligned} \quad (1.10)$$

1.3 - Evolvente de círculo (perfil activo)

A caracterização cinemática da geração do perfil activo do dente em evolvente de círculo fundamenta-se também na "Lei do Engrenamento". As coordenadas cartesianas de um ponto M do perfil em evolvente podem ser determinadas em função do ângulo de rolamento ξ_M , de acordo com a figura 1.2:

$$\begin{aligned} X_{env, M} &= -r_b \sin(\xi_M - \psi_b) + r_b \xi_M \cos(\xi_M - \psi_b) \\ Y_{env, M} &= r_b \cos(\xi_M - \psi_b) + r_b \xi_M \sin(\xi_M - \psi_b) \end{aligned} \quad (1.11)$$

em que, $\psi_b = \pi / (2z) + 2x / z \tan \alpha_n + \text{inv } \alpha_t$ é o semi-ângulo da espessura da base medido entre o raio vector posição do ponto de reversão da evolvente e o eixo de simetria do dente.

A determinação do ponto de união dos arcos de trocoide e de evolvente implica a prévia verificação da existência ou não de interferência de corte. Esta operação pode ser efectuada através da expressão (1.12), que traduz a condição de não interferência [10, 11].

$$(h_{a0} - \rho_{a0} (1 - \sin \alpha_n) - x m_n) / \sin \alpha_t \leq r_b \tan \alpha_t \quad (1.12)$$

No caso da não existência de interferência de corte, figura 1.4 a), as duas curvas são tangentes exteriormente num ponto, que tem como raio vector posição, o raio activo de pé de corte,

$$r_{NIE} = ((r \sin \alpha_t - (h_{a0} - \rho_{a0} (1 - \sin \alpha_n) - x m_n) / \sin \alpha_t)^2 + r_b^2)^{0.5} \quad (1.13)$$

A partir de r_{NIE} , pode determinar-se o ângulo de rolamento nesse ponto, que é o limite inferior do tramo do perfil activo, a partir do qual poderá existir engrenamento com qualquer roda conjugada.

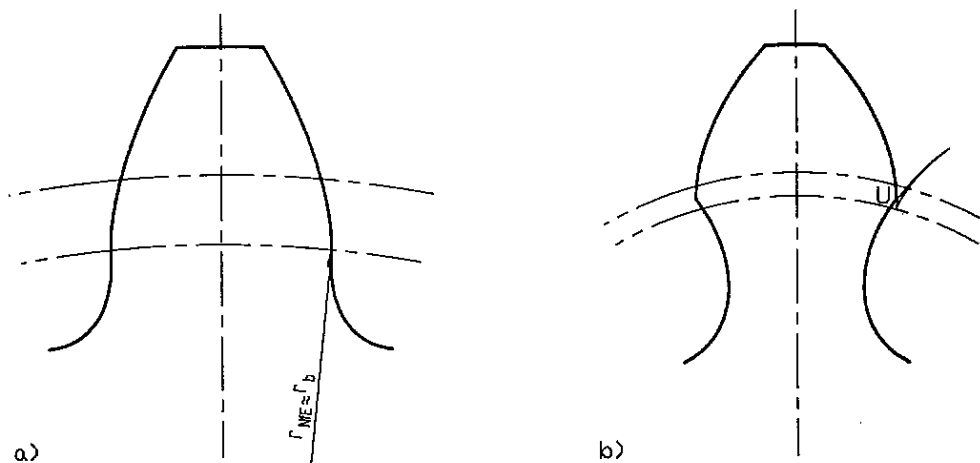


Figura 1.4 - Perfil do dente: a) Sem interferência de corte ($z = 18$); b) Com interferência de corte ($z = 6$).

No caso da ocorrência de interferência de corte, a trocoide é tangente interiormente num ponto do tramo virtual da evolvente desenvolvido para lá do ponto de reversão. Simultaneamente, a trocoide intercepta, o perfil activo da evolvente num ponto U que será o limite inferior da zona de possível engrenamento, conforme se constata na figura 1.4 b). As coordenadas deste ponto não podem ser determinadas analiticamente, havendo necessidade de recorrer ao cálculo numérico, utilizando, por exemplo, um processo de bissecções sucessivas.

A partir das expressões (1.4) a (1.10), que permitem determinar as coordenadas de um ponto da trocoide, obtém-se o raio vector de um ponto M' correspondente a um ângulo θ_n igual ao valor médio dos seus limites de variação, verificando-se, simultaneamente, se a condição de $r_{M'} > r_b$, necessária à possível intersecção, é satisfeita.

Para um ponto M da evolvente de círculo, em que $r_M = r_{M'}$, pode calcular-se o seu ângulo de rolamento, através da expressão:

$$\xi_M = ((r_M / r_b)^2 - 1)^{0.5} \quad (1.14)$$

determinando-se, em seguida, as suas coordenadas cartesianas, recorrendo às equações (1.11).

O processo numérico prossegue até que o erro relativo, entre as tangentes dos ângulos de posição dos pontos M e M' , seja inferior a uma constante especificada, o que equivale a considerar $M = M' = U$.

O caso da geração de dentado utilizando uma ferramenta com protuberância é tratado de maneira idêntica à situação de interferência de corte, considerando que $0 \leq \theta_n \leq \pi/2 - (\pi/180) 6^\circ$.

Finalmente, o ângulo de rolamento correspondente ao ponto limite superior do arco de evolvente resulta da igualdade $\xi_M = \tan \alpha_{at}$.

1.4 - Arco de circunferência da cabeça

O raio do arco de circunferência da cabeça r_a resulta de uma prévia operação de maquinagem do corpo da roda.

As coordenadas cartesianas dos pontos extremos do arco de circunferência da cabeça podem ser definidas através das expressões:

$$X_{cab,I} = r_a \sin \psi_a \quad (1.15)$$

$$Y_{cab,I} = r_a \cos \psi_a$$

e

$$X_{cab,F} = 0.0 \quad (1.16)$$

$$Y_{cab,F} = r_a$$

em que $\psi_a = s_{at} / (2 r_a)$ é o semi-ângulo da espessura da cabeça, indicado na figura 1.2.

2 - EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

Seguidamente, apresentam-se alguns exemplos de aplicação dos conceitos expostos. Os resultados indicados foram obtidos por intermédio de dois algoritmos desenvolvidos no DEMEGI.

Um dos algoritmos de cálculo foi desenvolvido na Unidade de Tribologia e Manutenção Industrial - CETRIB e permite a definição da geometria das rodas dentadas cilíndricas de uma engrenagem paralela de dentado com perfil em evolvente de círculo, para mecânica geral e mecânica pesada.

A partir da prévia definição dos parâmetros independentes de uma engrenagem é possível determinar:

- os coeficientes de desvio [13];
- as características da geometria do engrenamento;
- a folga entre dentes tendo em conta sistemas de precisão normalizados [14];
- o controlo dimensional da espessura dos dentes através da cota tangencial sobre k dentes e através da cota diametral sobre esferas ou roletes;
- a geometria do perfil dos dentes das rodas.

O segundo algoritmo foi desenvolvido em linguagem "Autolisp", no âmbito da disciplina de Concepção e Fabrico Assistidos por Computador, da licenciatura em Engenharia Mecânica da FEUP, e permite efectuar o desenho assistido por computador de rodas dentadas, através do recurso ao sistema AUTOCAD.

A partir da prévia definição dos parâmetros independentes de uma roda dentada é possível dispor das seguintes opções:

- representação do perfil de um dente;
- representação total ou parcial da roda;
- representação bidimensional (2D) ou tridimensional (3D).

2.1 - Verificação do efeito da protuberância dos dentes da ferramenta de corte

Na figura 2.1, pode observar-se o efeito de desafogo na base de um dente da roda talhada, provocado pela protuberância da cabeça dos dentes da ferramenta de corte, em comparação com outro talhado por uma ferramenta sem protuberância. Esta ligeira interferência de corte na base dos dentes facilita as operações de acabamento por "shaving" e rectificação dos seus flancos após talhagem.

Os parâmetros caracterizadores do dentado e da ferramenta de corte utilizados são os seguintes:

z	m_n	α_n	β	x	h_{a0}	ρ_{a0}	P_{ro}	s
40	5	20°	0°	+ 0.1	$1.4 m_n$	$0.4 m_n$	0.25	0.04

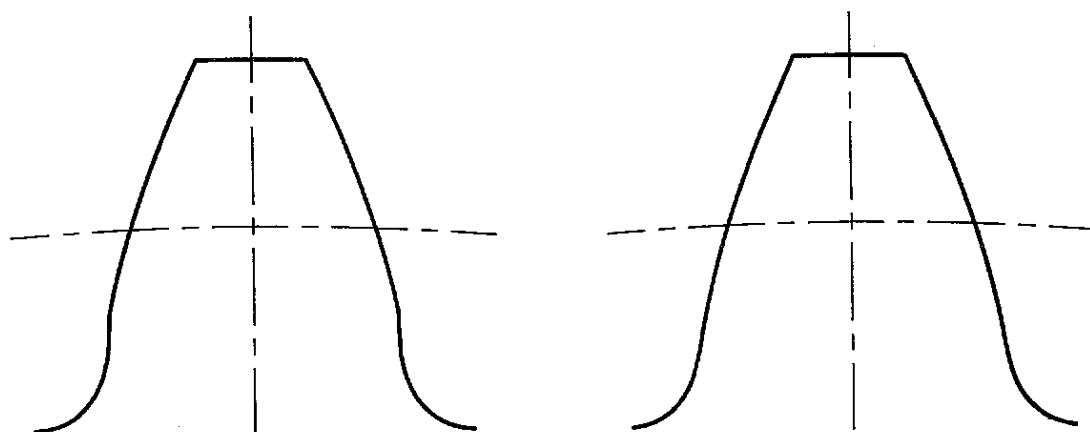


Figura 2.1 - Comparação entre dentes talhados por ferramentas com e sem protuberância da cabeça .

2.2 - Análise de uma engrenagem reductora

z_1	z_2	m_n	α_n	b	h_{a0}	ρ_{a0}	P_{ro}
10	92	5	20°	60	$1.25 m_n$	$0.38 m_n$	0.0

2.2.1 - A geometria do engrenamento

Na tabela 2.1, considerando simultaneamente os casos de aplicação de dentados recto e helicoidal, indicam-se em termos comparativos algumas das características da geometria do engrenamento com dentado normal e com dentados corrigidos para evitar a interferência de corte e para equilibrar os escorregamentos específicos. Como $\sum z_v \geq 60$, a correcção pode ser feita sem variação de entre-eixo, com a obtenção de bons resultados [13].

A correcção da interferência de corte, só por si, não permite a melhoria das condições de desgaste normal do pinhão, já que o escorregamento específico no seu pé atinge um valor muito

elevado. Por sua vez, o excelente equilíbrio dos valores dos escorregamentos específicos, obtidos pelo sistema de correcção de Henriot, é conseguido à custa de uma ligeira quebra da razão de condução aparente e de uma espessura normal da cabeça do pinhão $s_{an} < 0.2 m_n$.

Sistema	β	x_1+x_2	x_1	x_2	$g_{s1,B}$	$g_{s2,A}$	ε_α	ε_γ	K	s_{an1}	s_{an2}
Henriot	0°	0.0	+0.59	-0.59	2.318	2.318	1.379	/	0.0	<u>0.553</u>	4.203
Int. corte	0°	0.0	+0.41	-0.41	<u>27.98</u>	2.069	1.456	/	0.0	1.395	4.168
Normal	0°	0.0	0.0	0.0	*	*	*	*	0.0	2.939	4.022
Henriot	15°	0.0	+0.57	-0.57	2.098	2.098	1.334	2.322	0.0	1.004	4.200
Int. corte	15°	0.0	+0.37	-0.37	<u>14.83</u>	1.857	1.408	2.396	0.0	1.790	4.164
Normal	15°	0.0	0.0	0.0	*	*	*	*	0.0	3.043	4.040

Tabela 2.1 (*Pinhão talhado com interferência de corte e interferência no funcionamento)

Por outro lado, pode também verificar-se as condições menos severas em termos de escorregamentos específicos e melhores razões de condução totais existentes no dentado helicoidal e a necessidade de desvios menores, do que no dentado recto, para efectuar as correcções.

Na figura 2.2, apresentam-se os perfis dos dentes do pinhão e da roda resultantes da aplicação dos diferentes coeficientes de desvio indicados na tabela 2.1.

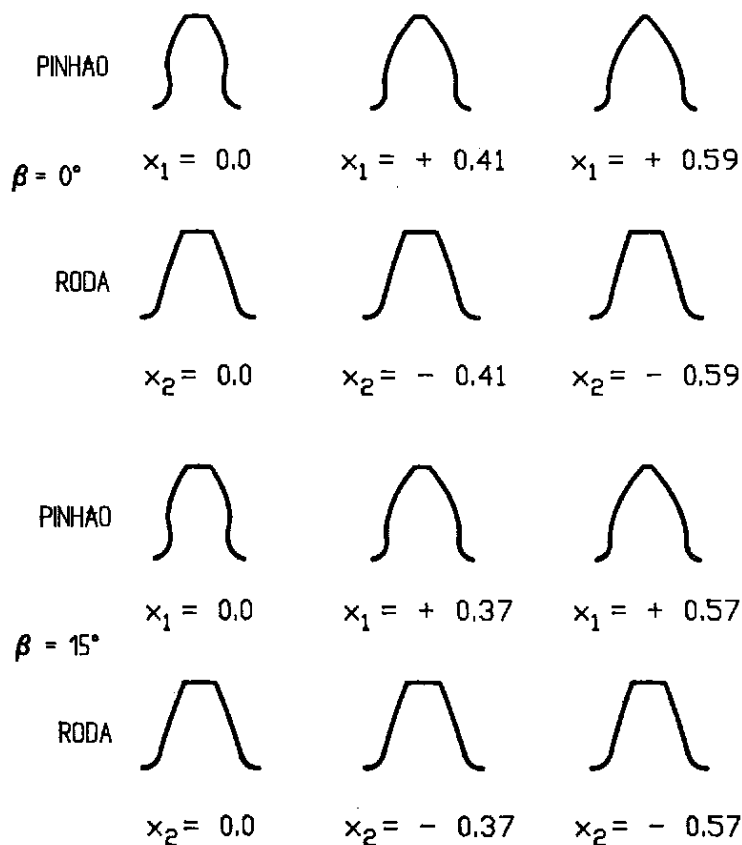


Figura 2.2 - Perfis dos dentes da engrenagem para os diferentes desvios especificados.

Nas figuras 2.3 e 2.4, mostra-se, respectivamente, uma roda de dentado recto e outra de dentado helicoidal nas suas representações bidimensional e tridimensional.

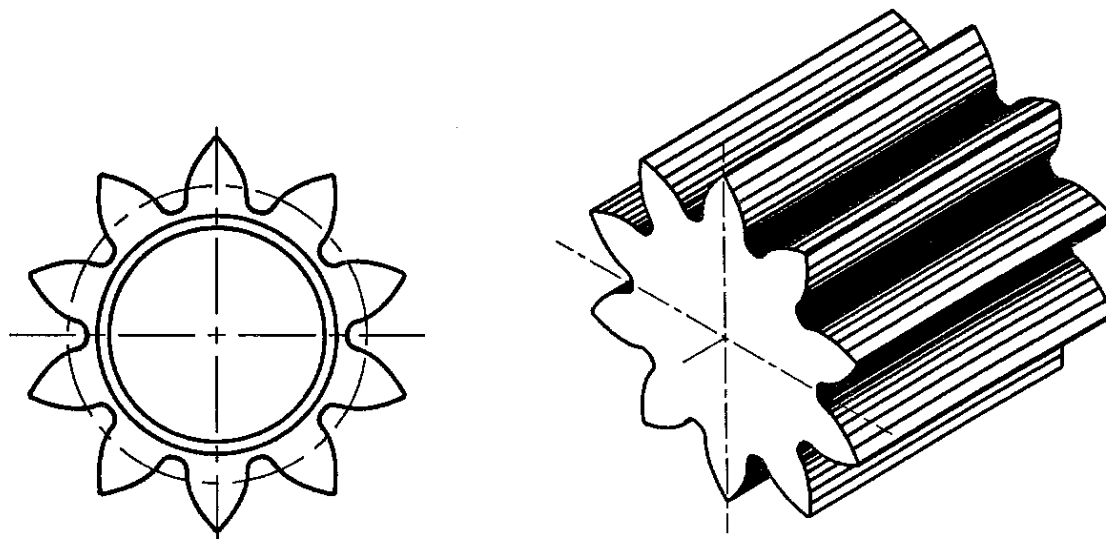


Figura 2.3 - Pinhão de dentado recto ($z_1 = 10$; $x_1 = + 0.59$).

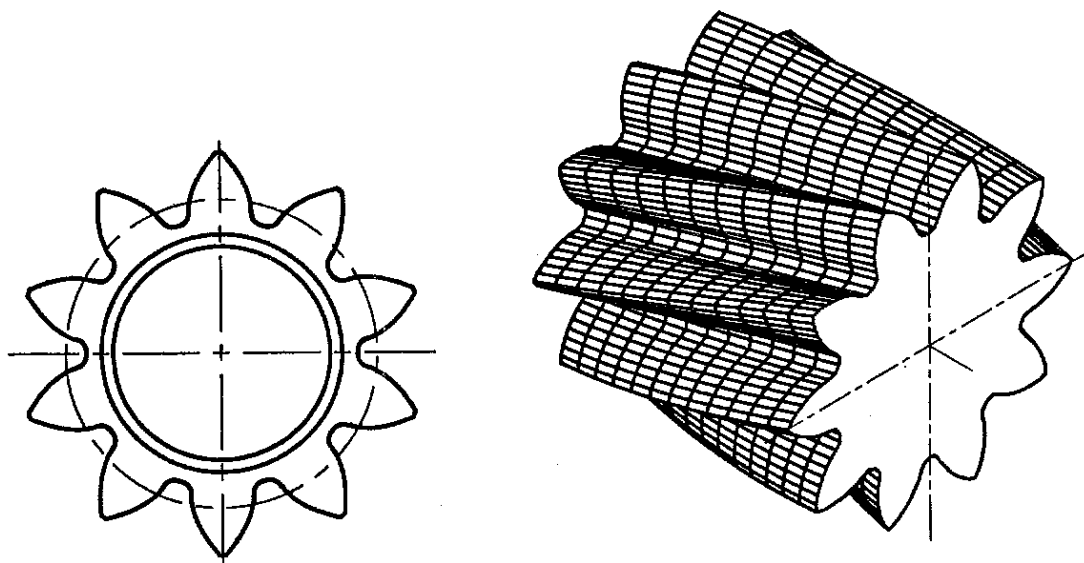


Figura 2.4 - Pinhão de dentado helicoidal ($z_1 = 10$; $x_1 = + 0.57$).

Na figura 2.5, apresenta-se uma representação mista (real / convencional) de uma das versões da engrenagem de dentado recto.

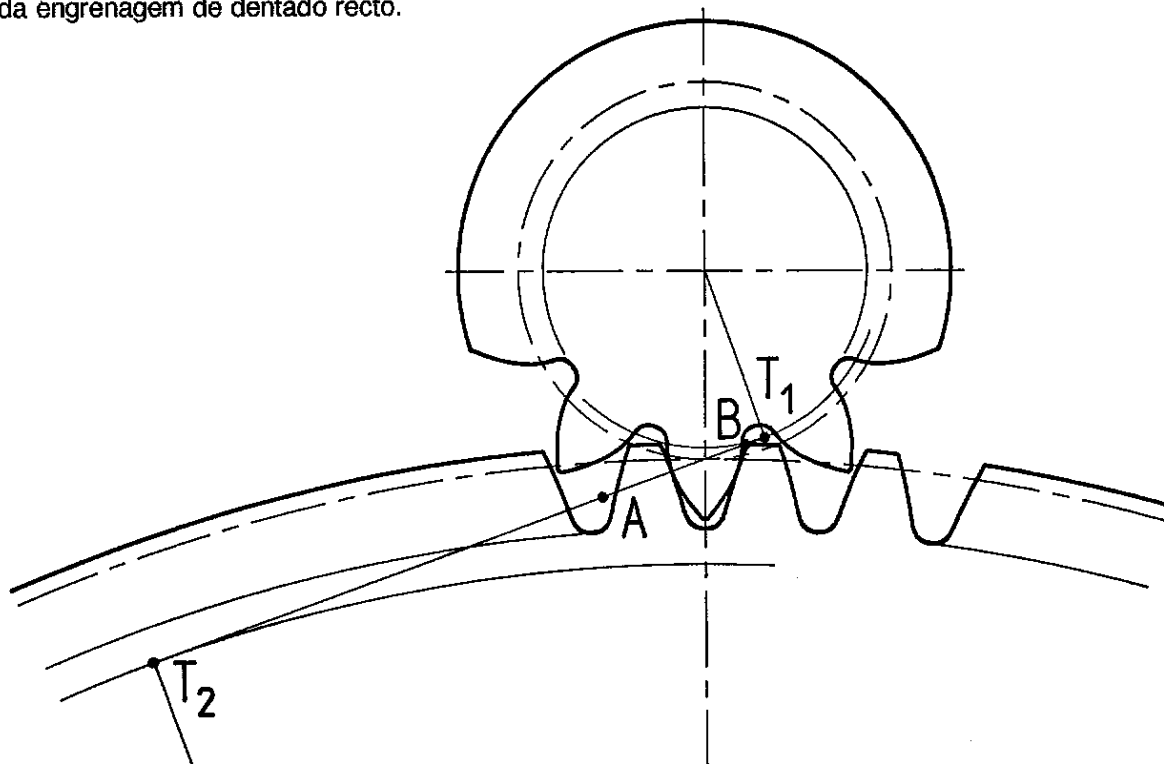


Figura 2.5 - Engrenagem de dentado recto ($z_1 = 10$; $z_2 = 92$; $x_1 = + 0.59$; $x_2 = - 0.59$).

2.2.2 - A modelação estrutural dos seus componentes

A aplicação do Método dos Elementos Finitos (FEM), no processo de concepção das rodas dentadas da engrenagem, pode ser efectuada com o recurso a modelações bidimensionais ou tridimensionais. A modelação de cada uma das rodas deve começar pelo estabelecimento do domínio de análise, que pode compreender apenas um único dente ou ser estendido até à inclusão de toda a roda e do respectivo veio.

As modelações bidimensionais só podem ser utilizadas no estudo de engrenagens de dentado recto. Na análise estática, a determinação da repartição de carga entre os dentes, no decurso do engrenamento, ou a selecção das modificações a introduzir nos seus perfis teóricos, de forma a diminuir a possibilidade de ocorrência de choques no início e no fim do engrenamento de cada par de dentes, necessitam do conhecimento da resposta da estrutura em termos de deslocamentos, em função de um determinado carregamento.

De acordo com o domínio de análise estabelecido e o tipo de discretização utilizado, podem determinar-se o deslocamento do ponto de aplicação da carga no sentido desta e, conseqüentemente, a rigidez do engrenamento, tendo em conta [5]:

- os efeitos devidos à flexão do dente carregado;
- os deslocamentos locais ou hertzianos, na vizinhança do ponto de contacto;
- o pivotamento do dente relativamente à jante, ao nível da sua base;
- a deformação da jante.

A determinação dos estados de deformação e de tensão nos dentes das rodas de dentado recto, e em particular das tensões máximas na sua base, resultantes do efeito de flexão dos dentes induzido por um carregamento estático, através da utilização de uma modelação completa da roda, é geralmente pouco eficiente em termos de custos e tempos de computação. Existem trabalhos nesta área que se debruçaram sobre a determinação de um domínio estrutural de análise capaz de assegurar um bom grau de precisão dos resultados e que, no entanto, fosse suficientemente simples para manter os custos de computação a níveis aceitáveis [4, 15]. Na figura 2.6 e de acordo com os conceitos expostos nas referências indicadas, apresenta-se uma discretização por elementos finitos da roda ($z_2 = 92$), obtida através do sistema AUTOCAD, que permite efectuar uma análise tendo em conta apenas o efeito de flexão do dente.

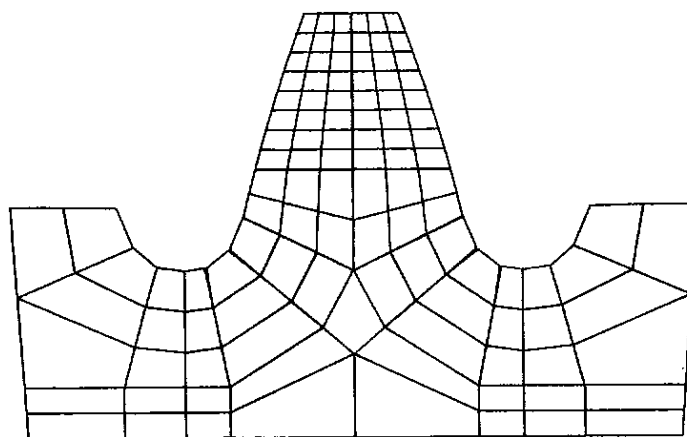


Figura 2.6 - Discretização por elementos finitos de roda de dentado recto ($z_2 = 92$; $x_2 = -0.59$).

Uma análise por elementos finitos, que pretenda contabilizar de forma suficientemente precisa o efeito dos deslocamentos locais ou hertzianos, necessita do recurso a uma discretização estrutural muito fina ao nível da zona de contacto, o que implica custos de computação muito elevados. Neste sentido, e com o objectivo de estudar a deformação dos dentes das rodas, Coy [16] desenvolveu um método de selecção do tamanho da malha, na proximidade do ponto de aplicação da carga, em que as dimensões dos elementos são relacionadas com a largura total do contacto hertziano.

As modelações tridimensionais permitem estender a análise às engrenagens de dentado helicoidal. A análise tridimensional possibilita incluir adicionalmente na modelação:

- o efeito da torção da jante;
- os efeitos da flexão e da torção do veio.

O Método dos Elementos Fronteira (BEM), que requer apenas a discretização da fronteira do domínio estrutural em estudo, fornece resultados idênticos aos obtidos por elementos finitos. A sua aplicação permite que a zona de contacto onde a carga é aplicada possa ser modelada com uma discretização muito fina sem aumentar de forma significativa o número de variáveis, [17].

CONCLUSÕES

A necessidade de sistemas de engrenamento cada vez mais sofisticados, provocada pelo desenvolvimento tecnológico, aliada à crescente implantação de sistemas computacionais potentes e com boas capacidades gráficas, no meio industrial, relançaram o interesse pela definição geométrica do perfil em evolvente de círculo dos dentes das rodas em análise.

A análise geométrica dos perfis, desenvolvida numa secção transversal da engrenagem (plano perpendicular aos eixos das rodas), permite efectuar uma abordagem unificada dos dentados recto e helicoidal e inclui os efeitos da correcção do dentado e da protuberância da cabeça dos dentes de uma ferramenta de pré-"shaving".

A concepção assistida por computador de sistemas de engrenamento pode estender-se desde a análise da geometria do engrenamento, com a visualização dos perfis dos dentes e dos componentes da engrenagem, até ao cálculo de tensões e deformações, através de métodos numéricos de elementos finitos e de elementos fronteira. O importante estudo do estado de tensão na base dos dentes, ao nível da concordância do pé, necessita de uma correcta definição do perfil da trocoide.

O ensino tecnológico e a formação permanente nesta área começam também a utilizar programas de simulação visual de processos de talhagem por geração e de visualização da influência dos parâmetros caracterizadores dos dentes das rodas, na configuração dos respectivos perfis.

A integração, neste tipo de análises, de programas comerciais de desenho assistido por computador, destinados a micro-computadores, já permite a obtenção de resultados gráficos interessantes, conforme se pode constatar pelos exemplos apresentados. O recurso a estações gráficas e a programas de CAD mais potentes possibilita o desenvolvimento de aplicações mais completas.

REFERÊNCIAS

- [1] - THE 1989 INTERNATIONAL POWER TRANSMISSION AND GEARING CONFERENCE, Chicago, 1989 - New Technologies for Power Transmissions for the 90' s: Proceedings. USA: ASME, 1989.
- [2] - LEROY, A.; VISEUR, B.; FLAMME, J.M. - Déformabilité de l' engrenage cylindrique ISO. Bulletin de la S.E.I.E. France. 1972, nº 64, p. 4 - 31.
- [3] - MITCHINER, R.G.; MABIE, H.H. - The Determination of the Lewis Form Factor and the AGMA Geometry Factor J for External Spur Gear Teeth. J. of Mechanical Design. 1982, 104, p. 148-158.
- [4] - ANDREWS, J.D. - A Finite Element Analysis of Bending Stresses Induced in External and Internal Involute Spur Gears. J. of Strain Analysis. 1991, 26 (3), p. 153-163.

- [5] - SAINOT, P. - Analyse du Contact Entre Dentures d' Engrenages Cylindriques de Reducteurs. Lyon: INSA. 1989. 205 p. Thèse de Doctorat.
- [6] - NF E 23-015. 1982 - Détermination de la capacité de charge des engrenages cylindriques extérieures de mécanique générale. AFNOR.
- [7] - HENRIOT, G. - Traité Théorique et Pratique des Engrenages. 5^a ed. Paris: Dunod, 1983, tome II.
- [8] - ISO 53. 1974 - Engrenages cylindriques de mécanique générale et de grosse mécanique - Crémaillère de référence. ISO.
- [9] - HENRIOT, G. - Traité Théorique et Pratique des Engrenages. 6^a ed. Paris: Dunod, 1979, tome I.
- [10] - DIN 3960. 1980 - Concepts and parameters associated with cylindrical gears and cylindrical gears pairs with involute teeth. DIN.
- [11] - COLBOURNE, J.R. - The Geometry of Involute Gears. USA: Springer-Verlag, 1987.
- [12] - TUMA, J.J. - Engineering Mathematics Handbook. USA: McGraw - Hill Book Company, 1979.
- [13] - ALMACINHA, J.; SEABRA, J. - A Correção de Dentado em Rodas Cilíndricas de Engrenagens Exteriores Redutoras e Multiplicadoras. Revista TECNOMETAL. Porto: AIMMN. 1992, 78, p. 15 - 27.
- [14] - ALMACINHA, J.; SEABRA, J. - Aplicação de Sistemas de Precisão Normalizados na Especificação da Folga Entre Dentes de Rodas Cilíndricas de Engrenagens Exteriores. O Controlo Dimensional da Espessura dos Dentes. Aceite para publicação na Revista TECNOMETAL. Porto: AIMMN. 1992, 79.
- [15] - CHABERT, G.; DANG TRAN, T.; MATHIS, R. - An Evaluation of Stresses and Deflection of Spur Gear Teeth Under Strain. J. of Engineering for Industry. 1974, 96, p. 85-93.
- [16] - COY, J.J.; HU-CHIH CHAO, C. - A Method of selecting Grid Size to Account for Hertz Deformation in Finite Element Analysis of Spur Gears. J. of Mechanical Design. 1982, 104, p. 759-766.
- [17] - BREBBIA, C.A. - The Boundary Element Method for Engineers. London: Pentech Press. 1980.