



**MODELO OLIGOPOLÍSTICO HETEROGÉNEO EM TEMPO  
DISCRETO**

por

Selma Carvalho Pinto

Dissertação para obtenção do grau de Mestre em Economia pela  
Faculdade de Economia do Porto

Orientada por:

Sofia Balbina Santos Dias de Castro Gothen

2016

# Nota bibliográfica

Selma Carvalho Pinto nasceu em Vila-Fria a 30 de Abril de 1992.

Em Setembro de 2010, matriculou-se na Licenciatura em Física na Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, tendo concluído em Setembro de 2013.

Em Setembro de 2013 iniciou uma Pós-Graduação em Gestão Empresarial no Instituto Superior de Administração e Gestão, tendo concluído com sucesso em Julho de 2014.

Em Setembro de 2014 ingressou no Mestrado em Economia na Faculdade de Economia do Porto. Em Fevereiro de 2016 concluiu a componente curricular do mesmo com média de 15 valores em 20. Atualmente, concilia a execução da tese com um part-time num centro de explicações, dando explicações de matemática e física-química.

# Agradecimentos

Gostaria de manifestar os meus sinceros agradecimentos a todas as pessoas que contribuíram para a realização do presente trabalho.

À Professora Doutora Sofia Castro Gothen agradeço pela disponibilidade, ensinamentos, sugestões e dedicação constante para resolver qualquer dúvida surgida ao longo da elaboração desta tese. Agradeço todo o apoio constante, o incentivo demonstrado e o modo carinhoso com que sempre me recebeu.

Aos meus pais e à minha irmã Cátí, que ao longo destes anos me apoiaram e motivaram incondicionalmente em todos os momentos. Agradeço todo o amor deles porque, sem eles, não chegaria aqui.

Ao Vitor, um agradecimento especial pelo carinho, pelas palavras doces e pelo apoio incondicional.

A todos que fizeram parte desta jornada, aqui fica o meu sincero obrigada.

# Resumo

Estudamos um modelo oligopolístico heterogéneo constituído por uma empresa *naive* e um grupo de empresas sofisticadas, em tempo discreto. Desenvolvemos a análise sob dois regimes distintos: de equilíbrio e de desequilíbrio. Para este fim, recorremos ao trabalho de Huang (2008). Analisamos a solução de equilíbrio apresentada em Huang (2008) e constatamos que esta não corresponde à solução de equilíbrio de mercado. Neste sentido, construímos um modelo com equilíbrio de mercado. Relativamente a Huang (2008), introduzimos uma nova função procura, alteramos a dinâmica de output da empresa *naive* e acrescentamos custos de ajustamento de produção. Constatamos que a estabilidade do modelo depende do tamanho de mercado; verificamos que a introdução de custos de ajustamento não altera a estabilidade do modelo. Observa-se, no entanto, que permanecendo o equilíbrio instável, este é uma sela. Como tal, existe uma direção estável ao longo da qual se verifica a convergência das soluções para o equilíbrio. Através do estudo analítico do modelo, complementado com simulações computacionais, verificamos que, num regime de equilíbrio, a empresa *naive* apresenta lucros superiores ao das empresas sofisticadas dependendo dos valores atribuídos aos parâmetros. Quando o ponto fixo é instável, as empresas sofisticadas beneficiam sempre, no longo prazo, de um estado de desequilíbrio resultante do facto da empresa *naive* alterar de período a período a quantidade produzida; em contrapartida, para a empresa *naive* apenas é vantajoso um estado de desequilíbrio se enfrentar custos elevados. Observa-se uma perda do excedente económico. Mostramos assim que, como seria de esperar na realidade, a produção de quantidades em desequilíbrio não é sempre vantajosa.

**Palavras chave:** Oligopólio; Jogos dinâmicos; Agentes heterogéneos; Custos de ajustamento de produção; Desequilíbrio

**Código JEL:** C61; C73; D21; D43; L13

# Abstract

We study a heterogeneous oligopolistic model consisting of a naive firm and a group of sophisticated firms, in discrete time. We develop the analysis under two different regimes: equilibrium and disequilibrium. To this end, we use Huang's (2008) work. We analysed the equilibrium solution of Huang model and we found that it does not correspond to the market equilibrium solution. In this sense, we build a model with market equilibrium. Regarding Huang (2008), we introduced a new demand function, changed the dynamics of output of the naive firm and added production adjustment costs. We verified that the stability depends on the market size; we found that the introduction of adjustment costs does not affect the stability of the model. However, it is noted that unstable equilibrium is a saddle. As such, there is a stable direction along which there is convergence of the solutions to the equilibrium. Through the analytical study and computer simulations, we found that, under a state of disequilibrium, the naive firm has higher profits than the sophisticated firms, depending on the values of the parameters. In the long run, when the fixed point is unstable, sophisticated firms benefit always of a state of disequilibrium resulting from the fact that the naive firm changes continuously the quantity produced; for the naive firm, this state is only advantageous if the firm faces high costs. There is a loss of economic surplus. We show that the production under a state of disequilibrium is not always advantageous, as we would expect in reality.

**Keywords:** Oligopoly; Dynamic games; Heterogeneous agents; Adjustment production costs; Disequilibrium

**JEL classification:** C61; C73; D21; D43; L13

# Conteúdo

<b>Lista de Tabelas</b>	<b>vii</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>viii</b>
<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Revisão da Literatura</b>	<b>5</b>
1.1 Dinâmica temporal . . . . .	6
1.2 Formação de expectativas . . . . .	6
1.3 Colusão . . . . .	8
1.4 Custos de ajustamento de produção . . . . .	9
1.5 Comportamento caótico e cíclico . . . . .	10
<b>2 Modelo oligopolístico heterogéneo</b>	<b>11</b>
2.1 Dinâmica do oligopólio . . . . .	11
2.2 Principais resultados . . . . .	13
2.3 Equilíbrio dinâmico na ausência de equilíbrio de mercado . . . . .	14
<b>3 Construção de um modelo com equilíbrio de mercado</b>	<b>18</b>
3.1 Dinâmica do oligopólio . . . . .	18
3.2 Equilíbrio . . . . .	21
3.3 Estabilidade . . . . .	21
3.4 Lucro . . . . .	23
3.5 Quantidade e preço de mercado . . . . .	24
3.6 Excedente do consumidor, excedente do produtor e excedente económico	25
3.7 Introdução de um custo de ajustamento de produção . . . . .	26
3.7.1 Equilíbrio . . . . .	29
3.7.2 Estabilidade . . . . .	29

3.7.3	Lucro . . . . .	31
<b>4</b>	<b>Análise do modelo com equilíbrio de mercado</b>	<b>33</b>
4.1	Modelo com equilíbrio instável . . . . .	33
4.2	Modelo com equilíbrio estável . . . . .	41
4.3	Efeito dos parâmetros . . . . .	42
4.4	Efeito da introdução custo de ajustamento de produção . . . . .	51
4.5	Efeito da existência <i>versus</i> ausência de colusão . . . . .	52
<b>5</b>	<b>Simulação e interpretação</b>	<b>55</b>
5.1	Modelo com equilíbrio estável . . . . .	55
5.1.1	Ausência <i>versus</i> presença de um custo de ajustamento de produção	57
5.2	Modelo com equilíbrio e órbita periódica . . . . .	59
5.3	Modelo com equilíbrio instável . . . . .	60
5.3.1	1 empresa <i>naive</i> e 3 empresas sofisticadas . . . . .	60
5.3.2	1 empresa <i>naive</i> e 1 empresa sofisticada . . . . .	62
5.3.3	Ausência <i>versus</i> presença de um custo de ajustamento de produção	72
5.4	Colusão empresas sofisticadas <i>versus</i> ausência de colusão . . . . .	74
5.5	Modelo de Cournot . . . . .	77
	<b>Conclusão</b>	<b>80</b>
	<b>Apêndice A</b>	<b>82</b>
	<b>Apêndice B</b>	<b>84</b>
	<b>Apêndice C</b>	<b>85</b>
	<b>Apêndice D</b>	<b>87</b>
	<b>Apêndice E</b>	<b>89</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>92</b>

## Lista de Tabelas

4.1	Resultados obtidos para o caso em que $m - 1$ empresas formam uma colusão. . . . .	54
4.2	Resultados obtidos na ausência colusão. . . . .	54
5.1	Resultados obtidos para os lucros das empresas no caso em que é introduzido um custo de esforço de ajustamento de produção. . . . .	89

# Lista de Figuras

2.1	Representação gráfica da estratégia de ajustamento cauteloso para diferentes funções de $\theta$ . A inclinação de $\theta$ no equilíbrio determina a dinâmica ([15, Figura 1]). . . . .	13
2.2	Representação gráfica do lucro da empresa <i>naive</i> e das empresas sofisticadas para $m = 3$ , $\beta$ a variar entre 0 e 0.5 e $\sigma = 0.17129$ . Fonte:[15, Figura 2]. . . . .	14
2.3	Representação gráfica do a) excedente do consumidor e do b) excedente do produtor, para o equilíbrio do sistema dinâmico apresentado em Huang (2008). . . . .	16
4.1	Representação gráfica da quantidade da empresa <i>naive</i> em função de $\alpha$ para $0 < \alpha < 10$ , $m = 1$ , $\sigma = 1$ e $\beta = 0.1$ . . . . .	43
4.2	Representação gráfica da quantidade das empresas sofisticadas em função de $\alpha$ para $0 < \alpha < 10$ , $m = 1$ , $\sigma = 1$ e $\beta = 0.1$ . . . . .	43
4.3	Representação gráfica da quantidade da empresa <i>naive</i> em função de $\sigma$ para $\alpha = 2$ , $m = 1$ , $0 < \sigma < 2.2$ e $\beta = 0.5$ . . . . .	43
4.4	Representação gráfica da quantidade das empresas sofisticadas em função de $\sigma$ para $\alpha = 2$ , $m = 1$ , $0 < \sigma < 2.2$ e $\beta = 0.5$ . . . . .	44
4.5	Representação gráfica da média da quantidade produzida pela empresa <i>naive</i> e pelas empresas sofisticadas em função de $\beta$ para $\alpha = 2$ , $m = 1$ , $\sigma = 1$ e $0 < \beta < 1$ . . . . .	44
4.6	Representação gráfica da quantidade da empresa <i>naive</i> em função de $m$ para $\alpha = 2$ , $0 < m = 5$ , $\sigma = 1$ e $\beta = 0.5$ . . . . .	44
4.7	Representação gráfica da quantidade das empresas sofisticadas em função de $m$ para $\alpha = 2$ , $0 < m = 5$ , $\sigma = 1$ e $\beta = 0.5$ . . . . .	45
4.8	Representação gráfica do lucro da empresa <i>naive</i> em função de $\alpha$ para $0 < \alpha < 10$ , $m = 1$ , $\sigma = 1$ e $\beta = 0.1$ . . . . .	45

4.9	Representação gráfica do lucro das empresas sofisticadas em função de $\alpha$ para $0 < \alpha < 10$ , $m = 1$ , $\sigma = 1$ e $\beta = 0.1$ . . . . .	45
4.10	Representação gráfica do lucro da empresa <i>naive</i> em função de $\sigma$ para $\alpha = 2$ , $m = 1$ , $0 < \sigma < 2.2$ e $\beta = 0.5$ . . . . .	46
4.11	Representação gráfica do lucro das empresas sofisticadas em função de $\sigma$ para $\alpha = 2$ , $m = 1$ , $0 < \sigma < 2.2$ e $\beta = 0.5$ . . . . .	46
4.12	Representação gráfica do lucro das empresas sofisticadas em função de $\beta$ para $\alpha = 2$ , $m = 1$ , $\sigma = 1$ e $\beta = 0.5$ . . . . .	47
4.13	Representação gráfica do lucro da empresa <i>naive</i> em função de $m$ para $\alpha = 2$ , $0 < m < 5$ , $\sigma = 1$ e $\beta = 0.5$ . . . . .	47
4.14	Representação gráfica do lucro das empresas sofisticadas em função de $m$ para $\alpha = 2$ , $0 < m < 5$ , $\sigma = 1$ e $\beta = 0.5$ . . . . .	47
4.15	Representação gráfica do excedente económico em função de $\alpha$ para $0 < \alpha < 10$ , $m = 1$ , $\sigma = 1$ e $\beta = 0.1$ . . . . .	48
4.16	Representação gráfica do excedente do produtor em função de $\alpha$ para $0 < \alpha < 10$ , $m = 1$ , $\sigma = 1$ e $\beta = 0.1$ . . . . .	48
4.17	Representação gráfica do excedente do consumidor em função de $\alpha$ para $0 < \alpha < 10$ , $m = 1$ , $\sigma = 1$ e $\beta = 0.1$ . . . . .	48
4.18	Representação gráfica do excedente económico em função de $\sigma$ para $\alpha = 2$ , $m = 1$ , $0 < \sigma < 2.2$ e $\beta = 0.5$ . . . . .	49
4.19	Representação gráfica do excedente do produtor em função de $\sigma$ para $\alpha = 2$ , $m = 1$ , $0 < \sigma < 2.2$ e $\beta = 0.5$ . . . . .	49
4.20	Representação gráfica do excedente do consumidor em função de $\sigma$ para $\alpha = 2$ , $m = 1$ , $0 < \sigma < 2.2$ e $\beta = 0.5$ . . . . .	49
4.21	Representação gráfica do excedente económico em função de $\beta$ para $\alpha = 2$ , $m = 1$ , $\sigma = 1$ e $0 < \beta < 1$ . . . . .	50
4.22	Representação gráfica do excedente do produtor em função de $\beta$ para $\alpha = 2$ , $m = 1$ , $\sigma = 1$ e $0 < \beta < 1$ . . . . .	50
4.23	Representação gráfica do excedente do consumidor em função de $\beta$ para $\alpha = 2$ , $m = 1$ , $\sigma = 1$ e $0 < \beta < 1$ . . . . .	50
4.24	Representação gráfica do excedente económico em função de $m$ para $\alpha = 2$ , $0 < m < 5$ , $\sigma = 1$ e $\beta = 0.5$ . . . . .	51
4.25	Representação gráfica do excedente do produtor em função de $m$ para $\alpha = 2$ , $0 < m < 5$ , $\sigma = 1$ e $\beta = 0.5$ . . . . .	51

4.26	Representação gráfica do excedente do consumidor em função de $m$ para $\alpha = 2$ , $0 < m < 5$ , $\sigma = 1$ e $\beta = 0.5$ . . . . .	51
5.1	Representação gráfica do modelo para o caso em que $\alpha = 0.5$ , $\sigma = 1$ e $m = 1$ . O sistema converge para o ponto fixo $q^* = 0.667$ . . . . .	56
5.2	Representação gráfica do lucro das empresas para o caso em que a) $\alpha = 0.8$ , $m = 1$ , $0.2 < \sigma < 2.7$ ; b) $\alpha = 0.5$ , $m = 1$ , $0.5 < \sigma < 2.8$ ; c) $\alpha = 0.3$ , $m = 1$ , $0.7 < \sigma < 2.9$ ; e d) $\alpha = 0.1$ , $m = 1$ , $0.9 < \sigma < 2.9$ . . . . .	57
5.3	Representação gráfica da quantidade produzida pelas empresas para o caso em que $\alpha = 0.5$ , $m = 1$ , $0.5 < \sigma < 2.8$ . . . . .	57
5.4	Representação gráfica da quantidade produzida pela empresa <i>naive</i> em função do tempo para $m = 1$ , $\sigma = 1$ , $\beta = 0.5$ , $\alpha = 0.8$ , $x_0 = 0.2$ e $y_0 = 0.2$ . . . . .	58
5.5	Representação gráfica da quantidade produzida pela empresa sofisticada em função do tempo para $m = 1$ , $\sigma = 1$ , $\beta = 0.5$ , $\alpha = 0.8$ , $x_0 = 0.2$ e $y_0 = 0.2$ . . . . .	59
5.6	Representação gráfica do modelo para o caso em que $\alpha = 1$ , $m = 1$ e $\sigma = 1$ . . . . .	59
5.7	Representação gráfica dos lucros a) da empresa <i>naive</i> e b) de cada empresa sofisticada. . . . .	61
5.8	Representação gráfica dos lucros a) da empresa <i>naive</i> e b) de cada empresa sofisticada. . . . .	61
5.9	Representação gráfica dos excedentes a) económico, b) consumidor e c) produtor. . . . .	62
5.10	Representação gráfica da diferença entre $\langle \pi^x \rangle_\beta$ e $\langle \pi^y \rangle_\beta$ para $\alpha = 2$ , $m = 1$ e $\sigma$ a variar entre 0 e 2.5. . . . .	63
5.11	Representação gráfica da diferença entre $\bar{\pi}^x$ e $\bar{\pi}^y$ para $\alpha = 2$ , $m = 1$ e $\sigma$ a variar entre 0 e 2.5. . . . .	63
5.12	Representação gráfica da diferença entre $\langle \pi^x \rangle_\beta$ e $\bar{\pi}^x$ para $\alpha = 2$ , $m = 1$ e $\sigma$ a variar entre 0 e 2.5. . . . .	64
5.13	Representação gráfica da diferença entre $\langle \pi^y \rangle_\beta$ e $\bar{\pi}^y$ para $\alpha = 2$ , $m = 1$ e $\sigma$ a variar entre 0 e 2.5. . . . .	64
5.14	Representação gráfica da quantidade e preço de mercado para $\alpha = 2$ , $m = 1$ e $\sigma$ a variar entre 0 e 2.5. . . . .	65
5.15	Representação gráfica da quantidade da empresa <i>naive</i> e da empresa sofisticada para $\alpha = 2$ , $m = 1$ e $\sigma$ a variar entre 0 e 2.5. . . . .	66



5.25	Representação gráfica de $\bar{\pi}^x$ e $\bar{\pi}^y$ com colusão para: a) $\alpha = 0.1, m = 3, \sigma$ a variar entre 2.9 e 4.9; b) $\alpha = 0.5, m = 3, \sigma$ a variar entre 2.5 e 4.7; c) $\alpha = 2, m = 3, \sigma$ a variar entre 1 e 3; d) $\alpha = 5, m = 3, \sigma$ a variar entre 0 e 3.1. . . . .	75
5.26	Representação gráfica de $\bar{\pi}^y$ sem colusão e $\bar{\pi}^y$ com colusão para: a) $\alpha = 0.1, m = 3, \sigma$ a variar entre 2.9 e 4.9; b) $\alpha = 0.5, m = 3, \sigma$ a variar entre 2.5 e 4.7; c) $\alpha = 2, m = 3, \sigma$ a variar entre 1 e 3; d) $\alpha = 5, m = 3, \sigma$ a variar entre 0 e 3.1. . . . .	75
5.27	Representação gráfica de $\bar{\pi}^x$ sem colusão e $\bar{\pi}^x$ com colusão para: a) $\alpha = 0.1, m = 3, \sigma$ a variar entre 2.9 e 4.9; b) $\alpha = 0.5, m = 3, \sigma$ a variar entre 2.5 e 4.7; c) $\alpha = 2, m = 3, \sigma$ a variar entre 1 e 3; d) $\alpha = 5, m = 3, \sigma$ a variar entre 0 e 3.1. . . . .	76
5.28	Representação gráfica de $\bar{\pi}^x, \bar{\pi}^y$ e $\bar{\pi}^{Cournot}$ para: a) $\alpha = 0.3, m = 1, \sigma$ a variar entre 0.7 e 2.9; b) $\alpha = 0.8, m = 1, \sigma$ a variar entre 0.2 e 2.7; c) $\alpha = 2, m = 1, \sigma$ a variar entre 0 e 2.5; d) $\alpha = 5, m = 1, \sigma$ a variar entre 0 e 2.3. . . . .	78
5.29	Representação gráfica de $\bar{x}, \bar{y}$ e $\bar{q}_{Cournot}$ para: a) $\alpha = 0.3, m = 1, \sigma$ a variar entre 0.7 e 2.9; b) $\alpha = 0.8, m = 1, \sigma$ a variar entre 0.2 e 2.7; c) $\alpha = 2, m = 1, \sigma$ a variar entre 0 e 2.5; d) $\alpha = 5, m = 1, \sigma$ a variar entre 0 e 2.3. . . . .	78
5.30	Representação gráfica de $\bar{\pi}^y$ sem colusão e $\bar{\pi}^y$ com colusão para: a) $\alpha = 0.5, m = 4, \sigma$ a variar entre 0 e 3; b) $\alpha = 0.5, m = 10, \sigma$ a variar entre 0 e 3; c) $\alpha = 2, m = 4, \sigma$ a variar entre 0 e 10; d) $\alpha = 2, m = 10, \sigma$ a variar entre 0 e 10. . . . .	79
5.31	Representação gráfica da média dos lucros e dos lucros de equilíbrio para $\alpha = 1.1, m = 3, \sigma$ a variar entre 0 e 3.5 e $\beta$ a variar entre 0 e 1. . . . .	87
5.32	Representação gráfica da média dos lucros e dos lucros de equilíbrio para $\alpha = 1.1, m = 3, \sigma$ a variar entre 0 e 3.5 e $\beta$ a variar entre 0 e 1. . . . .	87
5.33	Representação gráfica da quantidade e do preço de mercado para $\alpha = 1.1, m = 3, \sigma$ a variar entre 0 e 3.5 e $\beta$ a variar entre 0 e 1. . . . .	88
5.34	Representação gráfica da quantidade da empresa <i>naive</i> e de uma empresa sofisticada para $\alpha = 1.1, m = 3, \sigma$ a variar entre 0 e 3.5 e $\beta$ a variar entre 0 e 1. . . . .	88
5.35	Representação gráfica de $\langle \pi^x \rangle_\beta, \bar{\pi}^x, \langle \pi^y \rangle_\beta$ e $\bar{\pi}^y$ para $\alpha = 2, m = 1, \sigma$ a variar entre 0 e 3 e $\beta$ a variar entre 0 e 1. . . . .	90

5.36	Representação gráfica de $\langle \pi^x \rangle_\beta$ , $\bar{\pi}^x$ , $\langle \pi^y \rangle_\beta$ e $\bar{\pi}^y$ para $\alpha = 5$ , $m = 1$ , $\sigma$ a variar entre 0 e 2.3 e $\beta$ a variar entre 0 e 0.25. . . . .	90
5.37	Representação gráfica de $\langle \pi^x \rangle_\beta$ , $\bar{\pi}^x$ , $\langle \pi^y \rangle_\beta$ e $\bar{\pi}^y$ para $\alpha = 10$ , $m = 1$ , $\sigma$ a variar entre 0 e 2 e $\beta$ a variar entre 0 e 0.1. . . . .	91

# Lista de variáveis e parâmetros

$q_t$	Quantidade de mercado
$p_t$	Preço de mercado
$x_t$	Quantidade produzida pela empresa <i>naive</i>
$y_t$	Quantidade produzida pela empresa sofisticada
$m$	Número de empresas sofisticadas
$\sigma$	Parâmetro da função custo
$\beta$	Taxa de crescimento de produção
$\pi^x$	Lucro da empresa <i>naive</i>
$\pi^y$	Lucro da empresa sofisticada
$EE$	Excedente económico
$EP$	Excedente do produtor
$EC$	Excedente do consumidor

# Introdução

A complexidade do estudo de oligopólios provém de diferentes fatores dos quais se pode salientar a formação de expectativas e estratégias que as empresas tomam em relação às suas rivais, a heterogeneidade das empresas e a incorporação de custos de ajustamento de produção.

O oligopólio é uma estrutura de mercado de concorrência imperfeita no qual existe um número finito de empresas, em que cada uma tem que considerar os comportamentos e reações das empresas rivais quando toma decisões de mercado. Nos problemas clássicos é considerado que as empresas são homogêneas e o tempo é estático, ou seja, não se leva em linha de conta que no mercado atuam empresas heterogêneas e que existe uma dinâmica temporal.

O modelo de Cournot é um modelo que procura descrever a estrutura da indústria considerando duas empresas que produzem o mesmo produto homogêneo e indiferenciado e que competem pela quantidade produzida, maximizando a sua função lucro.

Um outro modelo de interação entre empresas ao longo do tempo é o modelo de Cobweb que considera a existência de um desfasamento temporal entre a decisão de oferta e procura, isto é, considera que as empresas assumem que o preço esperado é igual ao preço atual do período anterior (Varian, 2009).

Investigações mais recentes procuram expandir e enriquecer o estudo de oligopólios, introduzindo conceitos como heterogeneidade e custos de ajustamento de produção, através de modelos dinâmicos (Ding et al. 2008, Merlone e Szidarovsky, 2015). Outro ramo de pesquisa de oligopólios é o estudo de comportamentos caóticos e cíclicos que podem advir, por exemplo, das funções de reações utilizadas nos modelos. A existência de caos implica que não se pode saber precisamente o que irá acontecer no futuro, apenas que este irá alterar-se.

A modelação económica e o estudo de sistemas dinâmicos apresentam-se como uma forte ferramenta no estudo compreensivo dos oligopólios. Além disso, a modelação aliada à simulação computacional permite demonstrar o movimento dos sis-

temas económicos e resolver problemas tecnicamente complicados.

Os sistemas dinâmicos económicos permitem modelar eventos que se alteram ao longo do tempo. Estes sistemas são descritos por parâmetros que descrevem as considerações particulares que o sistema toma (por exemplo, número  $N$  de empresas que atuam no mercado) e são caracterizados pela dependência de cada resultado com resultados anteriores. Na formulação em tempo discreto, o sistema descreve a relação de um estado no tempo com um no instante anterior, sendo possível olhar para o comportamento de longo prazo do modelo, com condições iniciais distintas. Estabilidade, periodicidade e regimes caóticos podem resultar da atribuição de diferentes valores para os parâmetros do modelo.

Num modelo que combina variação temporal de produção e heterogeneidade de empresas, Huang (2008) estuda os benefícios de longo prazo de um regime de produção caótico. O autor considera um modelo oligopolístico heterogéneo formado por uma empresa *naive*, que adota uma estratégia simples de Cobweb e uma estratégia de ajustamento cauteloso de produção, e por um grupo de empresas sofisticadas que formam uma colusão e que adotam um modelo de Cournot com expectativas racionais em tempo discreto. É verificado que, quando o equilíbrio é instável, e para um limite superior de taxa de crescimento de output (taxa máxima que a empresa *naive* aumenta a sua produção relativamente ao período anterior), a média dos lucros obtidos pelas empresas oligopolísticas é superior aos respetivos lucros de equilíbrio. É verificado que, no equilíbrio, a empresa *naive* apresenta sempre lucros superiores aos das empresas sofisticadas. Além disso, é evidenciado que o caos é benéfico para a economia como um todo existindo um excedente económico superior ao observado em equilíbrio.

No entanto, analisando a solução de equilíbrio apresentada em Huang (2008) constata-se que esta não corresponde à solução de equilíbrio de mercado, isto é, a oferta não iguala a procura. O facto resulta da forma como a dinâmica de output da empresa *naive* é obtido. Neste sentido, esta observação traz consequências ao nível da comparação dos lucros de longo prazo obtidos em equilíbrio e em desequilíbrio, na medida em que, a empresa *naive* não beneficia sempre da existência de um regime de desequilíbrio nem a economia como um todo beneficia desse estado.

O trabalho que se segue debruça-se sobre o estudo de modelos oligopolísticos heterogéneos em tempo discreto, em que é abordado o estudo de longo prazo de uma situação de equilíbrio e de uma situação de desequilíbrio. O foco desta dissertação assenta no estudo e numa melhor compreensão económica relativamente aos aspetos tratados em Huang (2008). Pretende-se tomar mais realistas as implicações e benefícios/prejuízos

da existência de um estado de desequilíbrio, bem como verificar o comportamento das empresas em equilíbrio. Relativamente a Huang (2008), é introduzida uma nova função procura de forma a ilustrarmos o efeito do tamanho de mercado na estabilidade do modelo, é alterada a dinâmica de output da empresa *naive* e são acrescentados custos de ajustamento de produção.

O presente trabalho procura estudar analiticamente e numericamente a dinâmica do novo modelo, procurando dar resposta a um conjunto de questões:

- Será que a empresa *naive* apresenta lucros superiores aos das empresas sofisticadas, numa situação de equilíbrio?
- Será que os lucros obtidos pelas empresas oligopolísticas, num regime de desequilíbrio, são superiores aos respetivos lucros de equilíbrio, quando existe instabilidade do ponto fixo ?
- Será que existe um aumento do excedente da economia quando as empresas produzem num estado de desequilíbrio, na presença de instabilidade do ponto fixo? Como se comportam os excedentes do consumidor e do produtor?
- Qual a diferença dos lucros obtidos pelas empresas perante a presença *versus* ausência de custos de ajustamento de produção? De que forma é alterada a convergência para o equilíbrio?
- Qual a diferença dos lucros obtidos pelas empresas, no equilíbrio, perante a presença *versus* ausência de colusão das empresas sofisticadas?
- Que alterações se verificam, no equilíbrio, comparativamente com o modelo de Cournot clássico?

Neste contexto, este trabalho de investigação surge como a junção de três pressupostos, ao apresentar um modelo que incorpore  $N$ -empresas com expectativas heterogéneas (uma empresa *naive* e um grupo de empresas sofisticadas) com custos de ajustamento de produção em tempo discreto, numa situação caótica. No equilíbrio, a análise é feita sob duas situações diferentes: considera-se o caso em que as empresas sofisticadas formam uma colusão e o caso em que não formam.

Com a execução deste trabalho pretende-se contribuir para uma melhor compreensão de estruturas de mercado heterogéneas em tempo discreto, em situações de equilíbrio e desequilíbrio.

O presente trabalho está estruturado da seguinte forma. No Capítulo 1 encontra-se uma breve revisão bibliográfica onde são apresentados os conceitos-chave, nomeadamente a distinção entre tempo discreto e tempo contínuo, formação de expectativas, custos de ajustamento de produção e comportamento caótico; e é elaborado um enquadramento histórico e teórico da questão de investigação. No Capítulo 2 é apresentado e analisado o modelo Huang (2008), referindo-se as principais conclusões do autor e problemas encontrados na sua abordagem. No Capítulo 3 é apresentado o novo modelo, em que o equilíbrio do sistema dinâmico corresponde ao equilíbrio de mercado. É estudada a estabilidade do modelo e são introduzidos custos de ajustamento de produção. No Capítulo 4 estão os correspondentes resultados analíticos. No Capítulo 5 encontra-se a simulação computacional sustentada nos resultados analíticos obtidos com recurso ao software *Wolfram Mathematica* e *Matlab*. No último capítulo são apresentadas sumariamente as principais conclusões obtidas com respetiva interpretação económica, proporcionando uma perspetiva generalizada do trabalho.

# 1 Revisão da Literatura

O oligopólio é uma estrutura de mercado no qual um pequeno número de empresas possui a grande maioria da quota de mercado. Existem diferentes formas dos oligopólios se comportarem, dependendo da natureza da interação entre as empresas, resultante dos padrões de comportamento aplicados.

Em 1838, Cournot introduziu a primeira teoria formal de oligopólio, considerando duas empresas (duopólio) em que estas produzem produtos homogêneos, competem pela quantidade produzida e procuram maximizar o seu lucro tendo em consideração as decisões tomadas pela empresa rival. No seu volume “Recherches sur les Principes Mathématiques de la Theorie des Richesses” Cournot mostra que o equilíbrio ocorre quando as funções de melhor resposta de cada empresa se intersectam (Cournot, 1838).

Nos anos 30 é introduzido o modelo de Cobweb, de forma a explicar a natureza cíclica dos preços e quantidades ao longo do tempo (Ezekiel, 1938). O modelo tradicional de Cobweb considera que uma empresa perfeitamente competitiva toma as suas decisões de output com um período em avanço relativamente às vendas, isto é, considera que a quantidade produzida tem como base o preço esperado que é igual ao preço do período anterior.

O estudo de oligopólios revela-se de particular importância na medida em que é crucial aproximar a observação e a prática à teoria. Por um lado, a observação permite verificar de que forma as empresas na realidade se comportam no mercado. Por outro lado, a teoria, descrita por parâmetros, permite descrever essa realidade, explicar a forma como as empresas evoluem, bem como verificar os impactos causados por determinadas condições e perturbações. Torna-se essencial analisar aspetos relevantes que afetam o comportamento das empresas como inovação, limites das empresas, regulação, incentivos gerenciais e enviesamentos de decisão (Borenstein, 2016).

A complexidade do estudo de oligopólios pode advir da formação de expectativas das empresas, da função procura e da função custo utilizadas. Deste modo serão apresentadas algumas variantes que são introduzidas no estudo de oligopólios e que serão

introduzidas no presente trabalho de investigação.

## 1.1 Dinâmica temporal

Na história da análise económica, muitas são as investigações que têm como base o estudo de oligopólio estático. A aplicação dos estudos em tempo dinâmico, contínuo ou discreto, não é tão usual. Em tempo contínuo pressupõe-se que o sistema evolui continuamente, isto é, as empresas ajustam continuamente a quantidade produzida; neste caso os modelos são descritos por equações diferenciais. Em tempo discreto pressupõe-se que o sistema evolui discretamente, isto é, as empresas ajustam a quantidade produzida de período a período; neste caso os modelos são descritos por equações às diferenças. Trabalhos primordiais tendo em conta sistemas dinâmicos foram levados a cabo por Theocharis (1959), Fisher (1961), Hahn (1962).

Através do estudo da dinâmica dos modelos é possível descrever como estes se alteram ao longo do tempo. A introdução da aplicação de equações diferenciais e às diferenças na análise de oligopólios permite não só estudar o equilíbrio, bem como constatar de que forma se processa a transição para esse ponto.

Além disso, pode inferir-se acerca da estabilidade dos estados de equilíbrio. Este pode ser localmente assintoticamente estável, caso em que todas as condições iniciais próximas convergem para o equilíbrio, ou instável, caso contrário. Por outro lado, o modelo pode apresentar comportamentos mais complicados, como soluções caóticas e periódicas. Todo o processo de estudo de sistemas dinâmicos pode ser complementado com recurso a simulações computacionais (Zhang, 2006).

## 1.2 Formação de expectativas

No modelo clássico de Cournot e no estudo original de Cobweb é considerado que no mercado atuam empresas que possuem a mesma expectativa quanto à quantidade produzida e preço esperado, isto é, expectativas homogéneas.

As empresas formam expectativas distintas e, deste modo, quando se estuda um oligopólio escolhemos de entre várias técnicas possíveis aquelas que melhor se adaptam à realidade que queremos estudar. Podemos optar por formação de:

- expectativas simples - como por exemplo, estratégia de Cournot com expectativas *naive*, em que a empresa considera que a quantidade produzida pelas rivais se

mantém igual à do período corrente; expectativas *naive* em relação ao preço; expectativas *naive* com limitador de output em que as empresas impõe um limite superior e/ou inferior no crescimento/decrescimento da quantidade produzida;

- ou complexas - como por exemplo, estratégia de Cournot com expectativas racionais, em que a empresa conhece a procura do mercado e o output exato da empresa rival; expectativas com racionalidade limitada, em que as empresas não têm uma compreensão do mercado completa e portanto tomam a sua decisão de produção a partir de uma estimativa local de lucro marginal; expectativas adaptativas, em que a empresa toma decisões em relação ao seu output atribuindo um peso ao produto do último período e à sua função de reação; modelo de Cobweb com expectativas adaptativas, em que as expectativas são adaptadas a cada período com base na discrepância entre o valor do preço observado e o preço anterior esperado.

De facto, no mercado atuam empresas heterogéneas com diferentes expectativas para maximizarem o seu lucro e, neste sentido, surgem estudos que levam em linha de conta este pressuposto (Agiza e Elsadany, 2002, Agiza e Elsadany, 2004, Ding et. al, 2009, Fan et. al, 2012, Du et al., 2013, Tramontana et al., 2015).

Agiza e Elsadany (2002) analisaram a dinâmica de um modelo não linear em tempo discreto do duopólio de Cournot. Utilizaram dois agentes heterogéneos, um com racionalidade limitada e outro *naive*. Mostraram que, quando existe heterogeneidade dos jogadores, a dinâmica do modelo torna-se complicada na medida em que resultam trajetórias caóticas. Além disso, a estabilidade do ponto de equilíbrio é perdida.

Ding et al. (2009) estudaram um sistema dinâmico utilizando dois grupos de empresas: um grupo com duas empresas com racionalidade limitada e outro grupo com uma empresa *naive*. Demonstraram que, quando alguns parâmetros do modelo são variados, a estabilidade do equilíbrio perde-se, surgindo comportamentos complexos, como bifurcação do período e fenómenos caóticos. Também mostram numericamente a influência dos parâmetros do modelo sobre a velocidade de convergência para o equilíbrio.

Tramontana et al. (2015) mostram que, se admitirem heterogeneidade das expectativas formadas pelas empresas, o aumento do número de jogadores pode aumentar a região de estabilidade.

Intuitivamente podemos pensar que quanto mais sofisticado for o processo de formação de expectativas pelas empresas, mais lucrativas as empresas se tornam. No entanto, existem estudos que contrariam esta hipótese. Um exemplo é o artigo de Shaffer (1989) em que demonstra, através de um modelo Darwiniano de seleção natural económica,

que uma empresa a não maximizar o seu lucro pode obter resultados superiores àquelas que maximizam racionalmente o seu lucro uma vez que, os custos incorridos dessa maximização podem ser superiores ao aumento dos ganhos. O autor demonstra, por outro lado, que se uma empresa não possuir poder de mercado então, nesse caso, justifica-se que esta conduza uma política racional de maximização de lucro.

Um outro exemplo é apresentado no artigo Huang (2002). O autor mostra que uma empresa ao comportar-se como *naive price-taker*, sendo desconhedora do impacto do seu output no mercado, obtém lucros iguais ou superiores aos das empresas rivais que optam por estratégias mais sofisticadas, como Cournot.

A existência de heterogeneidade na formação de expectativas das empresas ocorre naturalmente devido a novas entrantes. Estas quando entram no mercado podem optar por seguir uma estratégia de imitação ou então escolher uma estratégia diferente das empresas que já se encontram no mercado (Shaffer, 1989). Como exemplo, podemos considerar que no mercado existe um conjunto de  $m$  empresas sofisticadas que produzem um determinado produto e competem entre si à Cournot, uma vez que possuem conhecimento total do mercado relativamente às quantidades produzidas. Uma empresa entra nesse mercado e segue uma estratégia *naive* considerando que o preço esperado é igual ao preço corrente  $e$ , portanto, que a quantidade esperada é igual à quantidade no período corrente. As considerações da empresa *naive* relativamente à quantidade podem ser justificadas, por exemplo, pela existência de assimetria de informação. Uma outra vertente será pensar que no mercado existem  $n$  empresas *naive* que possuem poder no mercado e tomam uma atitude mais conservadora quanto à perceção da quantidade produzida pelas empresas rivais, isto é consideram que a quantidade produzida pelas rivais se mantém igual à do período corrente. Um conjunto de novas empresas entra nesse mercado e, de forma a maximizarem o seu lucro, optam por uma estratégia racional de Cournot.

### 1.3 Colusão

Uma outra extensão do estudo de oligopólios é considerar que algumas empresas formam uma colusão. Colusão refere-se à situação em que duas ou mais empresas colaboram entre si para benefício próprio, tendo impactos ao nível do mercado (Varian, 2009).

À partida, é de esperar que as empresas ao optarem por formar uma colusão, obtenham lucros superiores aos que obteriam fora da colusão, daí o incentivo à formação de

colusões. No entanto, apesar das empresas beneficiarem de cooperarem entre si, cada empresa tem incentivos para se desviar da estratégia de colusão de forma a aumentarem a sua quota de mercado.

No artigo Huang (2008), é demonstrado que, na presença de formação de expectativas heterogéneas, a empresa naive apresenta lucros superiores às empresas sofisticadas que formam uma colusão. Lundgren (1996) descreve um método que elimina os incentivos para a formação de colusões “fazendo os prémios de gestão dependerem dos lucros relativos ao invés dos lucros absolutos”.

## 1.4 Custos de ajustamento de produção

Uma outra generalização do estudo de oligopólios é a introdução de custos de ajustamento de produção, devido à existência de novos custos pela alteração da quantidade produzida de um período para outro. Estes custos estão relacionados, por exemplo, com a reorganização de linhas de produção, ajustamento de mão de obra, equipamentos. Assim, pode-se salientar os estudos de Howroyd e Rickard (1981), Macleod (1985), Szidarovszky e Yen (1995), Zhao e Szidarovsky (2008) e Merlone e Szidarovsky (2015).

Howroyd e Rickard (1981) consideram um oligopólio com  $n$ -empresas com uma função de preço linear e funções de custo quadráticas, sendo que os custos de ajustamento de produção são também quadráticos. Os autores mostram que os custos de ajustamento não têm qualquer efeito no equilíbrio apenas um efeito estabilizador no mercado.

No modelo de Macleod (1985) o custo de ajustamento adicional tem um efeito limitador no output das empresas.

Merlone e Szidarovsky (2015) introduzem dois tipos de custos de ajustamento de produção, aqueles que advêm da alteração da quantidade produzida e aqueles para os quais são necessários investimentos adicionais incluindo a aquisição de novas máquinas, equipamentos e construção de edifícios. Os autores mostram que, com um pequeno número de empresas e com velocidade de ajustamento baixa, as trajetórias convergem para um estado de equilíbrio. Esta convergência já não se verifica com o aumento do número de empresas e/ou com o aumento da velocidade de ajustamento, podendo mesmo constatar-se comportamentos cíclicos e caóticos.

## 1.5 Comportamento caótico e cíclico

Estudos mais recentes têm demonstrado que o modelo de Cournot pode levar a comportamentos caóticos e cíclicos resultantes da instabilidade local (Rand, 1977, Puu, 1991, Puu, 1998, Agiza e Elsadany, 2004, Gao et. al, 2014) em que, sob certos pressupostos, podem apresentar benefícios económicos no longo prazo (Matsumoto e Nonaka (2006), Huang, 2008; Du et al., 2013).

Comportamentos caóticos (comportamento estocástico/aleatório que ocorre num sistema determinístico) estão relacionados com o facto de ao existir instabilidade de um determinado ponto de equilíbrio, o comportamento do sistema dinâmico torna-se muito sensível a condições iniciais sendo que, a previsão do seu comportamento a longo-prazo seja quase impossível de inferir. Rand (1977) descreve a natureza caótica de um processo dinâmico como “não existem movimentos regulares estáveis e periódicos mas um número infinito de movimentos instáveis. Apesar de teoricamente ser possível mover de forma regular ao longo da órbita de um ponto periódico instável, não há maneira de prever o seu período além de que, uma pequena perturbação pode desviar-nos da órbita, causando o movimento caótico”.

No entanto, propriedades dinâmicas de longo prazo permitem obter mais informação acerca de um processo dinâmico. De facto, propriedades estatísticas de longo prazo, como a média de longo prazo, permitem analisar processos económicos caóticos (Huang, 2005). Através da dinâmica de distribuição e dinâmica estatística, é possível uma comparação analítica das médias de longo prazo das variáveis económicas e do respetivo equilíbrio (Huang,2005, Huang, 2008).

O comportamento caótico no modelo de Cournot pode ser explicado pela formação de expectativas. Isto é, a competição no mercado pode estar associada a movimentos turbulentos das quantidades produzidas pelas empresas devido às funções de reação das empresas concorrentes (Witteloostuijn e Lier, 1990).

## 2 Modelo oligopolístico heterogéneo

Situações de desequilíbrio e flutuações caóticas apresentam-se como regimes que desafiam as suposições naturais de estabilidade e equilíbrio, levando a uma interpretação contra intuitiva por parte da comunidade científica.

No capítulo que se inicia é apresentado o modelo exposto em Huang (2008). O modelo procura explicar a vantagem da existência de caos na economia, através de um modelo oligopolístico heterogéneo. A análise do modelo é apresentada através da comparação dos lucros das empresas no equilíbrio e fora do equilíbrio.

Na Secção 2.1 é descrito o modelo de uma forma não exaustiva, na Secção 2.2 são apresentados os principais resultados e na última secção o problema do modelo.

### 2.1 Dinâmica do oligopólio

No artigo Huang (2008) é apresentado um modelo em que  $N = 1 + m$  empresas (1 empresa *naive* e  $m$  empresas sofisticadas) produzem o mesmo produto homogéneo. A empresa *naive* segue uma estratégia de ajustamento cauteloso isto é, adota uma estratégia simples de Cobweb em que assume que o preço esperado é igual ao preço do período anterior ( $p_t^e = p_{t-1}$ ), juntamente com um ajustamento cauteloso de produção, limitando a taxa de crescimento de output  $\beta$ . As empresas sofisticadas adotam a estratégia convencional de Cournot com expectativas racionais, cuja função de reação é derivada da condição de maximização do lucro.

O output total da indústria no período  $t$  é  $\sum_{i=1}^N q_t^i$ . É considerada uma economia linear, sendo o inverso da função procura dada por  $D^{-1}(q_t) = 1 - q_t = 1 - (x_t + my_t)$ , onde  $x_t$  representa o output da empresa *naive* e  $y_t$  o output de uma empresa sofisticada. A função custo para a empresa *naive* e para cada empresa sofisticada é igual e dada por  $C(q_t) = \frac{\sigma}{2}q_t^2$ , onde  $\sigma > 0$ .

As  $m$  empresas sofisticadas formam uma colusão e produzem a quantidade ótima  $y_t$ . A colusão adopta uma estratégia de Cournot com expectativas racionais, cuja função

de reação é derivada da condição de primeira ordem de maximização do lucro. Sendo a função lucro dada por  $\pi_y(q_t) = \pi_y(x_t + my_t) = p_t y_t - C(y_t) = D^{-1}(x_t + my_t)y_t - C(y_t)$ , resulta:

$$\begin{aligned}
\frac{d\pi_y(q_t)}{dy_t} &= 0 \\
\Leftrightarrow D^{-1}(x_t + my_t) + \frac{dD^{-1}(x_t + my_t)}{dy_t}y_t &= C'(y_t) \\
\Leftrightarrow 1 - (x_t + my_t) - my_t - \frac{\sigma}{2}y_t &= 0 \\
\Leftrightarrow y_t = \frac{1 - x_t}{2m + \sigma}. & \quad (2.1)
\end{aligned}$$

O nível ótimo de output da empresa *naive*,  $x_t$ , é determinado igualando o custo marginal,  $MC(x_t)$ , ao preço esperado,  $p_t^e = MC(x_t)$ , isto é,  $x_t = MC^{-1}(p_t^e)$ , onde  $MC^{-1}$  representa o inverso da função custo marginal. Note-se que o preço esperado iguala o preço do período anterior,  $p_t^e = p_{t-1}$ . Seja  $\theta(x_{t-1}) = x_t$  o nível ótimo de output da empresa *naive*, temos,

$$\begin{aligned}
x_t = \theta(x_{t-1}) &= MC^{-1}(p_t^e) \\
\Leftrightarrow x_t &= MC^{-1}(D(x_{t-1})) \\
\Leftrightarrow x_t &= \frac{1 - x_{t-1} - my_{t-1}}{\sigma} \\
\Leftrightarrow x_t &= \frac{(m + \sigma)(1 - x_{t-1})}{\sigma(2m + \sigma)}, & \quad (2.2)
\end{aligned}$$

onde substituímos  $y_{t-1}$  por (2.1).

Considera-se que a empresa *naive* segue uma estratégia de ajustamento cauteloso de produção impondo um limite superior  $\beta$  na taxa de alteração de produção,  $\frac{x_t}{x_{t-1}} \leq (1 + \beta)$ , sendo  $\beta \geq 0$ .

Assim, resulta o modelo cauteloso de Cobweb:

$$\begin{aligned}
x_t &= \min\{(1 + \beta)x_{t-1}, \theta(x_{t-1})\} \\
&= \begin{cases} (1 + \beta)x_{t-1} & \text{para } 0 < x < \hat{x} \\ \frac{(m + \sigma)(1 - x_{t-1})}{\sigma(2m + \sigma)} & \text{para } \hat{x} < x < 1. \end{cases} \tag{2.3}
\end{aligned}$$

em que  $\hat{x}$  é o valor que garante a continuidade da função. Na Figura 2.1 temos a ilustração da estratégia de ajustamento cauteloso.

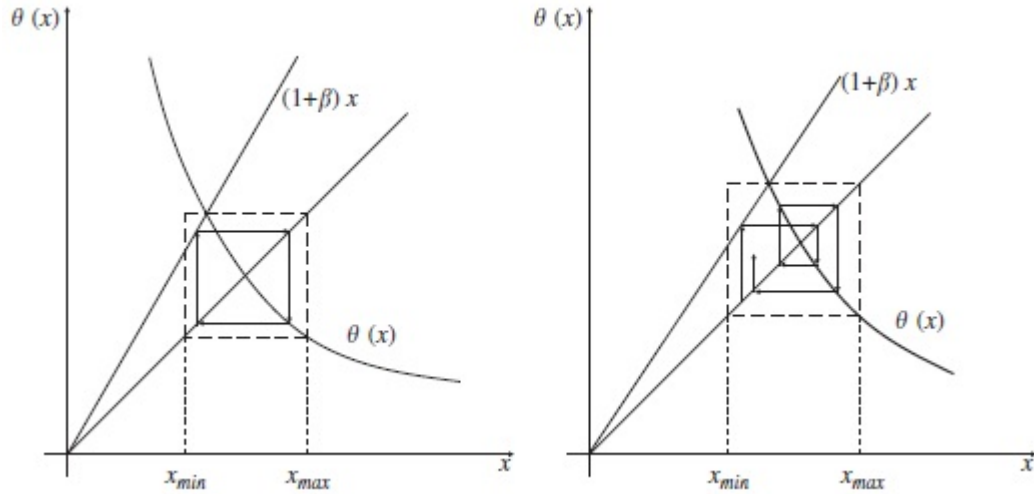


Figura 2.1: Representação gráfica da estratégia de ajustamento cauteloso para diferentes funções de  $\theta$ . A inclinação de  $\theta$  no equilíbrio determina a dinâmica ([15, Figura 1]).

## 2.2 Principais resultados

Huang (2008) conclui que, para o modelo oligopolístico cauteloso considerado, existe um limite superior de  $\beta$  para o qual todas as empresas podem obter lucros superiores numa situação caótica aos de uma situação de equilíbrio. Ou seja, para valores de ajustamento de produção menores que  $\hat{\beta}$  ( $\beta < \hat{\beta}$ ), a média dos lucros da empresa *naive*,  $\langle \pi^x \rangle$ , e da empresa sofisticada,  $\langle \pi^y \rangle$ , são superiores aos respetivos lucros de equilíbrio ( $\bar{\pi}^x$  e  $\bar{\pi}^y$ ), isto é,  $\langle \pi^x \rangle > \bar{\pi}^x$  e  $\langle \pi^y \rangle > \bar{\pi}^y$ . Além disso, conjectura que para valores de custo pequenos ( $\sigma$ ) a média do lucro da empresa *naive* é sempre superior ao lucro de equilíbrio.

Relativamente ao equilíbrio, Huang (2008) conclui que para qualquer combinação dos parâmetros número de empresas,  $m$ , e custos,  $\sigma$ , a quantidade e o lucro da empresa *naive* em equilíbrio são sempre superiores aos de qualquer empresa sofisticada, isto é,  $\bar{x} > \bar{y}$  e  $\bar{\pi}^x > \bar{\pi}^y$ .

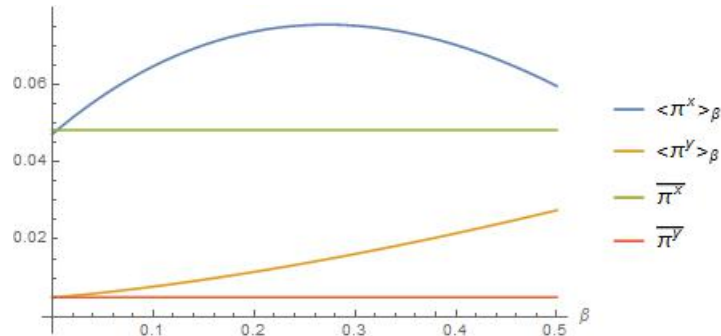


Figura 2.2: Representação gráfica do lucro da empresa *naive* e das empresas sofisticadas para  $m = 3$ ,  $\beta$  a variar entre 0 e 0.5 e  $\sigma = 0.17129$ . Fonte:[15, Figura 2].

Huang (2008) também retira conclusões acerca do excedente económico e observa que o caos é benéfico para a economia, existindo um excedente económico superior do que numa situação de equilíbrio para  $\sigma < \sigma^*$ , apesar do excedente do consumidor ser menor, onde  $\sigma^*$  corresponde ao limite superior para o qual existe instabilidade do equilíbrio.

### 2.3 Equilíbrio dinâmico na ausência de equilíbrio de mercado

Analisamos a solução de equilíbrio do sistema dinâmico. Huang (2008) obtém a condição de equilíbrio  $\bar{x} = (m + \sigma)/((1 + \sigma)(m + \sigma) + m\sigma)$  resolvendo  $\theta(\bar{x}) = \bar{x}$ . Substituindo o valor de  $\bar{x}$  em (2.1) obtendo,

$$\bar{y} = \frac{\sigma}{(1 + \sigma)(m + \sigma) + m\sigma}.$$

Introduzindo as expressões de equilíbrio nas funções procura e oferta de mercado

verificamos que estas não são iguais,

$$D(\bar{x}) = \frac{\sigma(m + \sigma)}{m + \sigma(\sigma + 2m + 1)}$$

$$S(\bar{x}) = \frac{m + \sigma(1 + m)}{m + \sigma(\sigma + 2m + 1)},$$

no que resulta num excesso de oferta para o estudo numérico apresentado, isto é:

$$S(\bar{x}) > D(\bar{x}) \Leftrightarrow m + \sigma + \sigma m > \sigma m + \sigma^2 \Leftrightarrow m > \sigma^2 - \sigma = \sigma(\sigma - 1),$$

que depende do número de empresas sofisticadas ( $m$ ) e do custo ( $\sigma$ ). Mas se  $\sigma < 1$  como apresentado em Huang (2008), então verifica-se que existe sempre um excesso de oferta.

Assim, podemos concluir que  $(\bar{x}, \bar{y})$  são solução de equilíbrio do sistema dinâmico apresentado mas não são condição de equilíbrio de mercado, uma vez que o ponto de equilíbrio de mercado corresponde à situação em que a oferta iguala a procura.

Num contexto em que se admite livre entrada de empresas no mercado, o número de entrantes é tal que o lucro é zero na presença de equilíbrio de mercado. Não sendo objetivo de Huang (2008) estudar o equilíbrio de livre entrada, a ausência de equilíbrio de mercado reduz-se à constatação de um facto.

Parece, porém, relevante a construção e estudo de um modelo de oligopólio que, mantendo a heterogeneidade das empresas, acomode a igualdade da oferta e da procura.

Analisámos os excedentes do produtor, consumidor e económico para visualizarmos quais as alterações decorrentes do facto das empresas produzirem num estado de equilíbrio ou num estado caótico.

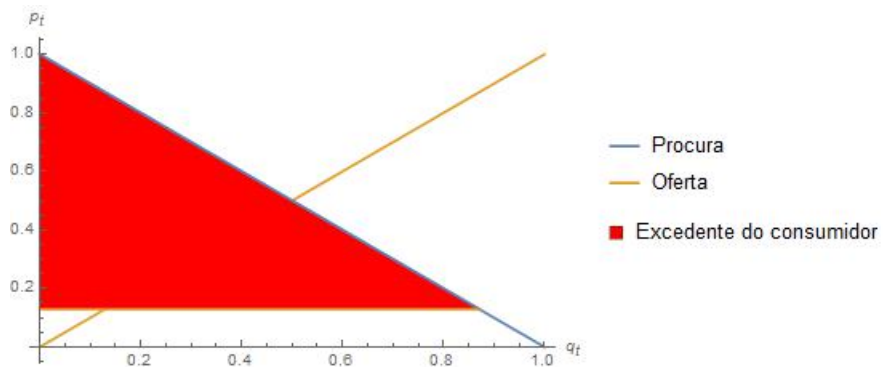
Huang (2008) calcula o excedente económico numa situação de equilíbrio e numa situação caótica e compara as duas situações tendo em conta variações do número de empresas sofisticadas,  $m$ , e do custo,  $\sigma$ .

Para o equilíbrio dinâmico apresentado em Huang (2008), em que a quantidade de equilíbrio obtida é superior à de equilíbrio de mercado, o preço de mercado é menor. Deste modo, os consumidores usufruem da diminuição dos preços enquanto que os produtores vêem o seu excedente diminuir e tornar-se até negativo (contribuição negativa correspondente ao segundo triângulo amarelo da Figura 2.3-a). Quanto ao excedente económico, este é igual ao que seria obtido em equilíbrio de mercado, uma vez que,

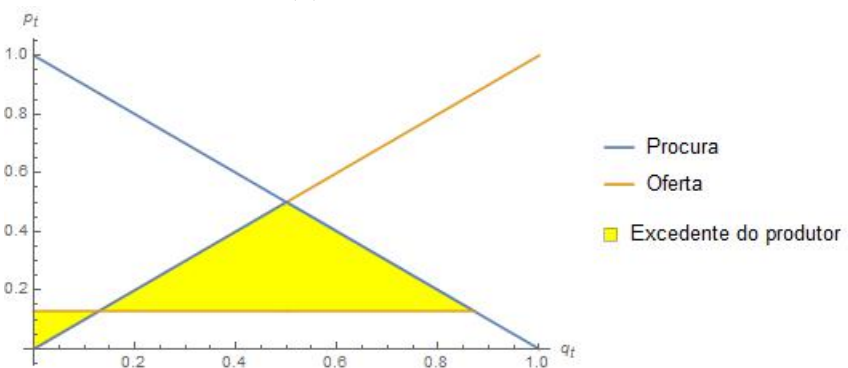
a contribuição negativa do excedente do produtor é compensada com o aumento do excedente do consumidor (Figura 2.3).

Comparando esta situação com a situação caótica, a que corresponde uma quantidade total produzida menor (mas superior à quantidade de equilíbrio de mercado), verificamos que existe uma diminuição do excedente do consumidor, um aumento do excedente do produtor (continuando, no entanto, negativo) e uma manutenção do excedente económico.

No entanto, é indicado no artigo Huang (2008) que o excedente económico é maior numa situação caótica relativamente a uma situação de equilíbrio. O problema resulta da forma como está calculado o excedente: primeiro, considera que o excedente do produtor é dado pelo custo das empresas e, como vimos anteriormente, não podemos tratar o problema desta forma; segundo, apresenta erros de cálculo na expressão analítica apresentada.



(a)



(b)

Figura 2.3: Representação gráfica do a) excedente do consumidor e do b) excedente do produtor, para o equilíbrio do sistema dinâmico apresentado em Huang (2008).

Não sendo objetivo deste trabalho a correção, ou mesmo a enumeração detalhada, dos problemas observados em Huang (2008), esperamos que a sua identificação e descrição acima sirvam como motivação para o estudo de um oligopólio modelado de forma a evitar as questões identificadas.

### 3 Construção de um modelo com equilíbrio de mercado

Vamos construir um modelo, tão semelhante quanto possível, ao apresentado em Huang (2008), mas tal que, em equilíbrio, a quantidade produzida corresponda à de equilíbrio de mercado.

Utilizamos os elementos apresentados no modelo de Huang (2008) e introduzimos uma nova função procura inversa descrita por  $D^{-1}(q_t) = 1 - \alpha q_t = 1 - \alpha(x_t + my_t)$ , em que  $\alpha > 0$ . Com esta nova função procuramos estudar o efeito do tamanho de mercado na estabilidade do modelo e verificar quais os efeitos no lucro das empresas *naive* e sofisticadas quando estas produzem quantidades fora do equilíbrio na presença de um ponto fixo instável. Note-se que  $\alpha = 1$  corresponde à função procura utilizada em Huang (2008).

#### 3.1 Dinâmica do oligopólio

Consideramos que no mercado atuam  $N = 1 + m$  empresas (1 empresa *naive* e  $m$  empresas sofisticadas) que produzem o mesmo produto homogéneo. Conjeturamos uma economia linear, sendo o inverso da função procura dado por  $p_t = D^{-1}(q_t^d) = 1 - \alpha q_t^d$ .

Sob o ponto de vista da empresa *naive*, que adota uma estratégia simples de Cobweb juntamente com um ajustamento cauteloso de produção, a quantidade oferecida no período  $t$  é  $q_t^s = S(p_t^e) = p_t^e$ , onde  $p_t^e$  é o preço esperado. Assumimos que o preço esperado é igual ao preço do período anterior,  $p_t^e = p_{t-1}$ .

Neste sentido, a dinâmica do output da empresa *naive* é dada pela igualdade entre a oferta e a procura, isto é,  $q^s(t) = S(p_t^e) = S(p(t-1))$ , no que resulta:

$$\begin{aligned}
q_t &= 1 - \alpha q_{t-1} \\
&\Leftrightarrow x_t + my_t = 1 - \alpha(x_{t-1} + my_{t-1}).
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Considera-se que a empresa *naive* segue uma estratégia de ajustamento cauteloso de produção impondo um limite superior  $\beta$  na taxa de crescimento,

$$\frac{x_t}{x_{t-1}} \leq (1 + \beta), \tag{3.2}$$

onde consideramos que  $0 \leq \beta \leq 1$ . Limitamos o valor que  $\beta$  toma em 1, uma vez que assumimos que a empresa pode aumentar a sua produção não mais que o dobro relativamente ao período anterior.

As empresas sofisticadas formam uma colusão <sup>1</sup> e adoptam uma estratégia de Cournot com expectativas racionais, cuja função de reação decorre da condição de maximização do lucro:

$$\begin{aligned}
\frac{d\pi_y(x_t + my_t)}{dy_t} &= 0 \\
&\Leftrightarrow D^{-1}(x_t + my_t) + \frac{dD^{-1}(x_t + my_t)}{dy_t}y_t = C'(y_t) \\
&\Leftrightarrow 1 - \alpha(x_t + my_t) - \alpha my_t - \sigma y_t = 0
\end{aligned} \tag{3.3}$$

no que resulta,

$$y_t = \frac{1 - \alpha x_t}{2\alpha m + \sigma}. \tag{3.4}$$

Substituindo a condição de otimização em (3.1) temos,

$$x_t = \theta(x_{t-1}) = \frac{m(\alpha - 1) + \sigma}{\alpha m + \sigma} - x_{t-1}\alpha, \tag{3.5}$$

Das equações (3.2) e (3.5) obtemos o modelo cauteloso de Cobweb:

---

<sup>1</sup>Optamos por calcular a otimização das empresas que formam a colusão (empresas sofisticadas) tal como enunciado em Huang (2008). Na otimização consideramos o número de empresas  $m$ , e calculámos o máximo individualmente para cada empresa sofisticada. Uma vez que existe heterogeneidade e a empresa *naive* não faz parte da colusão, é possível, através deste processo, afetar o seu lucro, consoante o número de empresas sofisticadas a atuar no mercado.

$$x_t = \min\{(1 + \beta)x_{t-1}, \theta(x_{t-1})\}. \quad (3.6)$$

onde  $\theta$  representa a dinâmica do output da empresa *naive*.

Assim, o output  $x_t$  vem dado por:

$$x_t = \min\left\{(1 + \beta)x_{t-1}, \frac{m(\alpha - 1) + \sigma}{\alpha m + \sigma} - x_{t-1}\alpha\right\} \\ = \begin{cases} (1 + \beta)x_{t-1} & \text{para } x_{min} \leq x \leq \hat{x} \\ \frac{m(\alpha - 1) + \sigma}{\alpha m + \sigma} - x_{t-1}\alpha & \text{para } \hat{x} < x \leq x_{max}. \end{cases} \quad (3.7)$$

Obtém-se  $\hat{x}$  igualando as duas equações do sistema (3.7), de forma a garantir a continuidade da função, originando

$$\hat{x} = \frac{m(-1 + \alpha) + \sigma}{(1 + \alpha + \beta)(m\alpha + \sigma)}. \quad (3.8)$$

Tomamos o sistema restrito a  $J_\beta = [x_{min}, x_{max}]$ , com

$$x_{max} = (1 + \beta)\hat{x} = \frac{(1 + \beta)(m(-1 + \alpha) + \sigma)}{(1 + \alpha + \beta)(m\alpha + \sigma)}, \quad (3.9)$$

$$x_{min} = \theta(x_{max}) = \frac{-(-1 + \beta(-1 + \alpha))(m(-1 + \alpha) + \sigma)}{(1 + \alpha + \beta)(m\alpha + \sigma)}. \quad (3.10)$$

O sistema é restrito de forma a que, na presença de um ponto fixo instável, seja possível delimitar os valores entre os quais o sistema diverge. Deste modo, sabemos que num determinado período a quantidade não será superior/inferior a  $x_{max}/x_{min}$ . Note-se que  $x_{min} \geq 0$  se e só se  $\beta \leq \beta_{max}$ :

$$0 \leq \beta_{max} \leq \frac{1}{\alpha - 1} \quad \text{se } \alpha > 2 \\ 0 \leq \beta_{max} \leq 1 \quad \text{se } \alpha \leq 2 \quad (3.11)$$

## 3.2 Equilíbrio

A análise do equilíbrio concentra-se na interação entre a quantidade oferecida pelas empresas *naive* e sofisticadas de tal forma que, no mercado, a oferta iguala a procura.

**Definição 3.1.** *Um ponto  $\bar{x}$  diz-se um ponto estacionário ou um ponto de equilíbrio se  $\bar{x} = \theta(\bar{x})$ .*

Neste sentido, decorre que a quantidade de equilíbrio obtém-se resolvendo:

$$\begin{aligned}\theta(\bar{x}) &= \bar{x} \\ \Leftrightarrow \bar{x} &= \frac{m(\alpha - 1) + \sigma}{\alpha m + \sigma} - \bar{x}\alpha \\ \Leftrightarrow \bar{x} &= \frac{m(\alpha - 1) + \sigma}{(1 + \alpha)(m\alpha + \sigma)}\end{aligned}\tag{3.12}$$

Substituindo  $\bar{x}$  em (3.4), resulta:

$$\bar{y} = \frac{1}{(1 + \alpha)(m\alpha + \sigma)}\tag{3.13}$$

Introduzindo as expressões de equilíbrio  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  nas funções procura e oferta verificamos que estas são iguais,

$$\begin{aligned}D(\bar{x}) &= S(\bar{x}) \\ \Leftrightarrow 1 - \alpha \left( \frac{m(\alpha - 1) + \sigma}{(1 + \alpha)(m\alpha + \sigma)} + m \frac{1}{(1 + \alpha)(m\alpha + \sigma)} \right) &= \frac{m(\alpha - 1) + \sigma}{(1 + \alpha)(m\alpha + \sigma)} + m \frac{1}{(1 + \alpha)(m\alpha + \sigma)} \\ \Leftrightarrow 0 &= 0\end{aligned}$$

sendo que, no presente caso, o equilíbrio do sistema dinâmico corresponde ao equilíbrio de mercado.

## 3.3 Estabilidade

A análise do movimento das equações às diferenças permite-nos não só determinar os seus pontos de equilíbrio bem como inferir acerca da estabilidade dos mesmos.

Estudamos a estabilidade do equilíbrio através de

$$\delta = |\theta'(\bar{x})| = |\partial\theta(x_{t-1})/\partial x_{t-1}| = \alpha. \quad (3.14)$$

**Definição 3.2.** *Seja  $\bar{x}$  um ponto de equilíbrio do sistema com  $\theta(\cdot)$  continuamente diferenciável numa vizinhança de  $\bar{x}$ . Seja  $\bar{x}$  um ponto de equilíbrio hiperbólico, isto é,  $\delta \neq 1$ .*

- *Se  $\delta < 1$ , então  $\bar{x}$  é localmente assintoticamente estável e diz-se um ponto fixo atrator. A convergência é monótona se e só se  $0 < \theta'(\bar{x}) < 1$ ; a convergência é oscilatória se e só se  $-1 < \theta'(\bar{x}) < 0$ .*
- *Se  $\delta > 1$ , o equilíbrio  $\bar{x}$  é instável e diz-se um ponto fixo repulsor. A divergência é monótona se e só se  $\theta'(\bar{x}) > 1$ ; a divergência é oscilatória se e só se  $\theta'(\bar{x}) < -1$ .*

O equilíbrio é estável se  $\alpha < 1$ , existindo uma convergência oscilatória para o ponto de equilíbrio. Economicamente, a estabilidade do ponto de equilíbrio corresponde ao caso em que a curva da oferta é mais elástica do que a curva da procura, isto é,

$$\frac{dQ^S/Q}{dP^S/P} < \frac{dQ^D/Q}{dP^D/P}.$$

O equilíbrio é instável se  $\alpha > 1$ , existindo uma divergência oscilatória. Economicamente, a instabilidade do ponto de equilíbrio corresponde ao caso em que a curva da procura é mais elástica do que a curva da oferta, isto é,

$$\frac{dQ^S/Q}{dP^S/P} > \frac{dQ^D/Q}{dP^D/P}.$$

Se  $\delta = 1$ , que corresponde a  $\alpha = 1$ , estamos perante um ponto de equilíbrio não hiperbólico pelo que a estabilidade não pode ser determinada através da primeira derivada. Neste caso, analisamos a função  $\theta(x)$ . Uma vez que  $\partial\theta(x_{t-1})/\partial x_{t-1} = -1$ , então  $x_t = \pm x_0$ , temos, portanto, uma dinâmica oscilatória constante. Esta análise também pode ser retirada através do estudo da inclinação das funções procura e oferta. Uma vez que estas apresentam inclinação em módulo iguais ( $=1$ ), resulta um processo de ajustamento quantidade-preço de ciclo contínuo.

### 3.4 Lucro

O lucro obtido pela empresa *naive* e pelas empresas sofisticadas é definido pela diferença entre a receita corrente e o custo de produção,

$$\pi^x(x_t) = \left(p_t - \frac{\sigma}{2}x_t\right) x_t = x_t \left(1 - \frac{x_t\sigma}{2} - \frac{\alpha(m + mx_t\alpha + x_t\sigma)}{2m\alpha + \sigma}\right), \quad (3.15)$$

$$\pi^y(x_t) = \left(p_t - \frac{\sigma}{2}y_t\right) y_t = \frac{(-1 + x_t\alpha)^2}{2(2m\alpha + \sigma)}, \quad (3.16)$$

onde

$$p_t = 1 - \alpha(x_t + my_t) = \frac{(1 - x_t\alpha)(m\alpha + \sigma)}{2m\alpha + \sigma}. \quad (3.17)$$

No equilíbrio, as expressões do lucro são dadas por,

$$\bar{\pi}^x = \frac{-(m(\alpha - 1) + \sigma)(-2m\alpha + m\sigma(\alpha - 1) + \sigma(\sigma - 2))}{2(1 + \alpha)^2(m\alpha + \sigma)}$$

$$\bar{\pi}^y = \frac{2m\alpha + \sigma}{2(1 + \alpha)^2(m\alpha + \sigma)^2}.$$

Analogamente ao trabalho de Huang (2008), sob uma situação de desequilíbrio, a média do lucro no longo prazo é definida por <sup>2</sup>

$$\langle \pi^x \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \pi^x(x_t) = \frac{\int_{x_{min}}^{x_{max}} \pi^x(x) \varphi(x) dx}{\int_{x_{min}}^{x_{max}} \varphi(x) dx}, \quad (3.18)$$

$$\langle \pi^y \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \pi^y(x_t) = \frac{\int_{x_{min}}^{x_{max}} \pi^y(x) \varphi(x) dx}{\int_{x_{min}}^{x_{max}} \varphi(x) dx}, \quad (3.19)$$

onde  $\varphi(x)$  é a densidade invariante preservada por  $x_t$  ao longo do intervalo  $J_\beta = [x_{min}, x_{max}]$ , isto é:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & x \in [x_{min}, x_{max}] \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.20)$$

Serão efetuadas comparações analíticas e numéricas do lucro de equilíbrio e do lucro

---

<sup>2</sup>Expressões no apêndice A.

médio, sob um regime de desequilíbrio, nos Capítulos 4 e 5.

### 3.5 Quantidade e preço de mercado

Torna-se importante verificar de que forma evoluem a quantidade e preço de mercado num estado de equilíbrio e num estado de desequilíbrio. Deste modo, é possível averiguar se há uma diminuição/aumento da quantidade da oferecida e, conseqüentemente, se há um aumento/diminuição dos preços, comparando o equilíbrio relativamente à média num regime de desequilíbrio.

A quantidade de mercado,  $q_t$ , no período  $t$  corresponde à soma da quantidade produzida pela empresa *naive* e pelas empresas sofisticadas,

$$q_t = x_t + my_t = \frac{(2m\alpha + \sigma - \alpha)x_t + 1}{2m\alpha + \sigma}. \quad (3.21)$$

No longo prazo, a média da quantidade de mercado é definida por,

$$\begin{aligned} \langle q_t \rangle_\beta &= \frac{\int_{x_{min}}^{x_{max}} \frac{(2m\alpha + \sigma - \alpha)x + 1}{2m\alpha + \sigma} \varphi(x) dx}{\int_{x_{min}}^{x_{max}} \varphi(x) dx} \\ &= \frac{m\alpha(4 - \beta(\alpha - 3)) + \sigma(2 - \beta(\alpha - 2))}{2(1 + \alpha + \beta)(2m\alpha + \sigma)}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

O preço de mercado,  $p_t$ , no período  $t$  é dado por (3.17) e no longo prazo é dado por

$$\begin{aligned} \langle p_t \rangle_\beta &= \frac{\int_{x_{min}}^{x_{max}} \frac{(1 - x\alpha)(m\alpha + \sigma)}{2m\alpha + \sigma} \varphi(x) dx}{\int_{x_{min}}^{x_{max}} \varphi(x) dx} \\ &= \frac{m\alpha(4 + \beta(4 + \alpha(\alpha - 3))) + \sigma(2 + \beta(2 + \alpha(\alpha - 2)))}{2(1 + \alpha + \beta)(2m\alpha + \sigma)}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Será efetuado um estudo analítico e numérico nos Capítulos 4 e 5.

### 3.6 Excedente do consumidor, excedente do produtor e excedente económico

Uma forma de verificar qual o impacto na economia resultante das empresas produzirem quantidades fora do equilíbrio é através do cálculo do excedente do consumidor, produtor e bem-estar social.

O excedente do consumidor corresponde à diferença entre o valor máximo que o consumidor estaria disposto a pagar para consumir um bem e o montante que efectivamente paga (preço de mercado). Para o modelo em questão é descrito por:

$$\begin{aligned}
 \text{Excedente do consumidor} &= \int_0^{q_t} D(q) dq - p_t \times q_t \\
 &= q_t - \frac{1}{2} \alpha q_t^2 - (1 - \alpha q_t) q_t \\
 &= \frac{\alpha(m + x_t m \alpha + x_t \sigma)^2}{2(2m\alpha + \sigma)^2}.
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

O excedente do produtor é a diferença entre o valor que o produtor recebe pela venda de um bem (preço de mercado) e o valor mínimo que estaria disposto a aceitar. Para o modelo em questão é descrito por:

$$\begin{aligned}
 \text{Excedente do produtor} &= p_t \times q_t - \int_0^{q_t} S(q) dq \\
 &= (1 - \alpha q_t) q_t - \frac{1}{2} q_t^2 \\
 &= \frac{-(m + x_t m \alpha + x_t \sigma)(m + m \alpha(x_t - 2) + 2m x_t \alpha^2 + \sigma(2x_t \alpha + x_t - 2))}{2(2m\alpha + \sigma)^2}.
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

O excedente económico corresponde à soma do excedente do consumidor com o excedente do produtor, representando a utilidade total proporcionada por um produto.

$$\begin{aligned}
 \text{Excedente económico} &= \text{Excedente consumidor} + \text{Excedente produtor} \\
 &= \frac{-(m + x_t m \alpha + x_t \sigma)(m + m \alpha(x_t - 3) + m x_t \alpha^2 + \sigma(x_t \alpha + x_t - 2))}{2(2m\alpha + \sigma)^2}.
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

Substituindo o valor de equilíbrio  $\bar{x} = \frac{m(\alpha - 1) + \sigma}{(1 + \alpha)(m\alpha + \sigma)}$  nas expressões (3.24), (3.25) e (3.26) resulta,

$$\bar{EC} = \frac{\alpha}{2(1 + \alpha)^2},$$

$$\bar{EP} = \frac{1}{2(1 + \alpha)^2},$$

$$\bar{EE} = \frac{1}{2(1 + \alpha)}.$$

No longo prazo, sob um regime de desequilíbrio, as expressões são dadas por <sup>3</sup>,

$$\langle EC \rangle_{\beta} = \frac{\int_{x_{min}}^{x_{max}} EC(x)\varphi(x)dx}{\int_{x_{min}}^{x_{max}} \varphi(x)dx},$$

$$\langle EP \rangle_{\beta} = \frac{\int_{x_{min}}^{x_{max}} EP(x)\varphi(x)dx}{\int_{x_{min}}^{x_{max}} \varphi(x)dx},$$

$$\langle EE \rangle_{\beta} = \frac{\int_{x_{min}}^{x_{max}} EE(x)\varphi(x)dx}{\int_{x_{min}}^{x_{max}} \varphi(x)dx}.$$

Deste modo, é possível inferir acerca das mudanças ao nível económico que se verificam devido à alteração da produção dum estado de equilíbrio para um estado de desequilíbrio. Serão apresentadas ilustrações numéricas no Capítulo 5.

### 3.7 Introdução de um custo de ajustamento de produção

Nesta secção estamos interessados em visualizar qual o impacto nos lucros obtidos pelas empresas e na quantidade produzida quando se introduz na função custo um

---

<sup>3</sup>Expressões no apêndice A.

custo variável correspondente a um custo de ajustamento de produção <sup>4</sup>.

A nova função custo é dada por,

$$C(q_t) = \frac{\sigma}{2}q_t^2 + \beta(q_t - q_{t-1})^2, \quad (3.27)$$

onde o último termo corresponde ao custo de ajustamento de produção. Este custo advém da variação da quantidade de produção de um período para outro, e está relacionado com a reorganização de linhas de produção, ajustamento de mão de obra e equipamentos.

A modelação apresentada anteriormente concretiza-se agora num problema em duas variáveis.

Da condição de maximização do lucro obtemos a função de reação das empresas sofisticadas,

$$y_t = \frac{1 - \alpha x_t + 2\beta y_{t-1}}{2m\alpha + \sigma + 2\beta}. \quad (3.28)$$

Substituindo a condição em (3.1) obtemos,

$$\theta(x_{t-1}) = \frac{1}{m\alpha + 2\beta + \sigma} [(2m\alpha + 2\beta + \sigma - m) - x_{t-1}(2m\alpha^2 + 2\alpha\beta + \alpha\sigma) - y_{t-1}(2m^2\alpha^2 + 2m\beta + 2m\alpha\beta + m\alpha\sigma)], \quad (3.29)$$

Assim, o output  $x_t$  é dado por,

$$x_t = \min\left\{(1 + \beta)x_{t-1}, \frac{1}{m\alpha + 2\beta + \sigma}[C1 - C2x_{t-1} - C3y_{t-1}]\right\} \\ = \begin{cases} (1 + \beta)x_{t-1} & \text{para } x_{min} \leq x \leq \hat{x} \\ \frac{1}{m\alpha + 2\beta + \sigma}[C1 - C2x_{t-1} - C3y_{t-1}] & \text{para } \hat{x} < x \leq x_{max}. \end{cases} \quad (3.30)$$

onde  $C1 = 2m\alpha + 2\beta + \sigma - m$ ,  $C2 = 2m\alpha^2 + 2\alpha\beta + \alpha\sigma$  e  $C3 = 2m^2\alpha^2 + 2m\beta + 2m\alpha\beta + m\alpha\sigma$ . O output  $y_t$  é dado por,

---

<sup>4</sup>No Apêndice E é apresentado uma alternativa à introdução de um custo variável.

$$y_t = \begin{cases} \frac{1 - \alpha(1 + \beta)x_{t-1} + 2\beta y_{t-1}}{2m\alpha + \sigma + 2\beta} & \text{para } x_{min} \leq x \leq \hat{x} \\ \frac{1}{m\alpha + 2\beta + \sigma} [1 - \alpha + x_{t-1}\alpha^2 + y_{t-1}(2\beta + m\alpha^2)] & \text{para } \hat{x} < x \leq x_{max}. \end{cases} \quad (3.31)$$

Obtemos  $\hat{x}$  igualando as duas equações do sistema (3.30) e  $\hat{y}$  através de (3.28),  $\hat{y} = \frac{1 - \alpha\hat{x} + 2\beta y_{t-2}}{2m\alpha + \sigma + 2\beta}$ . Temos então que,

$$\begin{aligned} \hat{x} &= \frac{2\beta + \sigma - m + 2\alpha m - \hat{y}m(2m\alpha^2 2\beta + 2\alpha\beta + \sigma\alpha)}{m\alpha(1 + 2\alpha + \beta) + (1 + \alpha + \beta)(2\beta + \sigma)} \\ &= \frac{2m^2(-1 + \alpha - 2y_{t-2}\alpha\beta)\alpha - 2m\beta(2 - 3\alpha + 2y_{t-2}(1 + \alpha)\beta)}{2m^2\alpha^2(1 + \alpha + \beta) + (1 + \alpha + \beta)(2\beta + \sigma)^2 + m\alpha(2\beta(2 + 3\alpha + 3\beta) + 3(1 + \alpha + \beta)\sigma)} + \\ &+ \frac{m(-1 + \alpha(3 - 2y_{t-2}\beta))\sigma + (2\beta + \sigma)^2}{2m^2\alpha^2(1 + \alpha + \beta) + (1 + \alpha + \beta)(2\beta + \sigma)^2 + m\alpha(2\beta(2 + 3\alpha + 3\beta) + 3(1 + \alpha + \beta)\sigma)}. \end{aligned}$$

Tomamos o sistema restrito a  $J_\beta = [x_{min}, x_{max}]$ , em que quando  $x = x_{min}$ ,  $y = y_{max}$  e quando  $x = x_{max}$   $y = y_{min}$ . Resolvemos o seguinte sistema de forma a obtermos  $x_{min}$ ,  $x_{max}$ ,  $y_{min}$  e  $y_{max}$ :

$$\begin{cases} x_{max} = (1 + \beta)\hat{x} \\ x_{min} = \frac{1}{m\alpha + 2\beta + \sigma}(C1 - C2x_{max} - C3y_{min}) \\ y_{max} = \frac{1 - \alpha x_{min} + 2\beta y_{min}}{2m\alpha + \sigma + 2\beta} \\ y_{min} = \frac{1 - \alpha x_{max} + 2\beta y_{max}}{2m\alpha + \sigma + 2\beta} \end{cases}$$

Note-se que  $x_{min} \geq 0$  se e só se  $\beta \leq \beta_{max}$ . Devido à complexidade da inequação esta deverá ser resolvida numericamente.

### 3.7.1 Equilíbrio

A condição de equilíbrio obtém-se resolvendo o seguinte sistema de equações,

$$\begin{cases} \bar{x} = \frac{1}{m\alpha + 2\beta + \sigma} [C1 - C2\bar{x} - C3\bar{y}] \\ \bar{y} = \frac{1}{m\alpha + 2\beta + \sigma} [1 - \alpha + \bar{x}\alpha^2 + \bar{y}(2\beta + m\alpha^2)], \end{cases} \quad (3.32)$$

no que resulta:

$$\begin{cases} \bar{x} = \frac{m(\alpha - 1) + \sigma}{(1 + \alpha)(m\alpha + \sigma)} \\ \bar{y} = \frac{1}{(1 + \alpha)(m\alpha + \sigma)}. \end{cases} \quad (3.33)$$

Como podemos verificar, a solução encontrada é igual à que obtivemos quando não consideramos no modelo o custo de ajustamento de produção. Seria de esperar esta solução uma vez que, no equilíbrio, não existem diferenças de quantidades produzidas em instantes de tempo diferentes, pelo que na função custo o último termo, correspondente ao custo de ajustamento de produção, é cancelado.

### 3.7.2 Estabilidade

Para o ramo da função  $\hat{x} < x < x_{max}$ , que corresponde ao ramo onde se encontra a solução de equilíbrio, temos o seguinte sistema de equações às diferenças:

$$\begin{cases} x_t = \frac{1}{m\alpha + 2\beta + \sigma} [C1 - C2x_{t-1} - C3y_{t-1}] \\ y_t = \frac{1}{m\alpha + 2\beta + \sigma} [1 - \alpha + x_{t-1}\alpha^2 + y_{t-1}(2\beta + m\alpha^2)] \end{cases} \quad (3.34)$$

A estabilidade de um ponto de equilíbrio de um sistema de equações descrito por (3.30) e (3.31) depende do sinal da parte real dos valores próprios da jacobiana no ponto

de equilíbrio. A matriz jacobiana é:

$$J(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{pmatrix} -(2m\alpha^2 + 2\alpha\beta + \alpha\sigma) & -m(2m\alpha^2 + 2\beta + 2\alpha\beta + \alpha\sigma) \\ \alpha^2 & 2\beta + m\alpha^2 \end{pmatrix} \times \frac{1}{m\alpha + 2\beta + \sigma}$$

Existem dois valores próprios que caracterizam a dinâmica do modelo, uma vez que esta é representada por um sistema em  $\mathbb{R}^2$ ,  $\lambda_1 = -\alpha$  e  $\lambda_2 = \frac{2\beta}{m\alpha + 2\beta + \sigma}$ .

Seja  $(\bar{x}, \bar{y})$  um ponto de equilíbrio hiperbólico. O ponto de equilíbrio  $(\bar{x}, \bar{y})$  é localmente assintoticamente estável se os valores próprios da matriz jacobiana  $J(\bar{x}, \bar{y})$  se encontram dentro do círculo unitário. O estado  $(\bar{x}, \bar{y})$  é instável se existe um valor próprio de  $J(\bar{x}, \bar{y})$  fora do círculo unitário.

Neste caso temos que o equilíbrio é estável se:

$$\begin{aligned} -1 < \lambda_1 < 1 \wedge -1 < \lambda_2 < 1 \\ \Leftrightarrow -1 < -\alpha < 1 \wedge -1 < \frac{2\beta}{m\alpha + 2\beta + \sigma} < 1 \end{aligned}$$

Sabendo que  $\beta > 0$ ,  $\sigma > 0$ ,  $\alpha > 0$  e  $m \geq 1$ , resulta que o equilíbrio é estável se e só se:

$$0 < \alpha < 1$$

Caso contrário o equilíbrio é instável. De notar que  $0 \leq \lambda_2 < 1$  para todos os parâmetros.

Verifica-se que o intervalo para o qual existe estabilidade não é alterado com a introdução dos custos de ajustamento, continuando a depender do tamanho de mercado. Podemos interpretar este resultado da seguinte forma: para tamanhos de mercado grandes, como o intervalo de quantidades produzidas é elevado, o sistema continua a ser estável uma vez que é de esperar apenas que a introdução de custos de ajustamento de produção tenha um efeito na convergência para o equilíbrio. Para tamanhos de mercado mais pequenos e na presença de heterogeneidade das empresas, a introdução de custos de ajustamento de produção não revela ser um fator totalmente estabilizador uma vez que pequenas perturbações das quantidades produzidas pelas empresas acabam

por não ser amortecidas por esta nova componente; pequenas alterações têm um peso relativo grande devido à dimensão do mercado.

Note-se, no entanto, que como  $0 \leq \lambda_2 < 1$ , o equilíbrio exige uma direção estável, associada ao vetor próprio correspondente a  $\lambda_2$ . Tratando-se de um sistema linear, ao longo desta direção há convergência para o equilíbrio, apesar da sua instabilidade. Esta direção é a do vetor  $(-m, 1)$ .

### 3.7.3 Lucro

O lucro obtido pela empresa *naive* e pelas empresas sofisticadas é definido pela diferença entre a receita corrente e o custo de produção,

$$\pi^x(x_t, y_t) = p_t x_t - \frac{\sigma}{2} x_t^2 - \beta(x_t - x_{t-1})^2, \quad (3.35)$$

$$\pi^y(x_t, y_t) = p_t y_t - \frac{\sigma}{2} y_t^2 - \beta(y_t - y_{t-1})^2, \quad (3.36)$$

onde  $p_t = 1 - \alpha(x_t + m y_t)$ .

Sob um estado de desequilíbrio, a média temporal iguala a média espacial, sendo que a média do último termo da função custo, correspondente ao custo de ajustamento de produção, será dada:

- para a empresa *naive* por  $\langle \beta(x - x_2)^2 \rangle = \langle \beta(\langle x \rangle - x_2)^2 \rangle$ , em que  $x_2 = (1 + \beta)x_0$  ou  $x_2 = \frac{1}{m\alpha + 2\beta + \sigma}[C1 - C2x_0 - C3y_0]$ ;
- e para empresa sofisticada por  $\langle \beta(y - y_2)^2 \rangle = \langle \beta(\langle y \rangle - y_2)^2 \rangle$ , em que  $y_2 = \frac{1 - \alpha x_2 + 2\beta y_0}{2m\alpha + \sigma + 2\beta}$

onde  $(x_0, y_0)$  são valores iniciais atribuídos às quantidades produzidas pelas empresas. Deste modo, a média do lucro no longo prazo é definida por

$$\begin{aligned} \langle \pi^x \rangle &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \pi^x(x_t, y_t) = \frac{\int_{x_{min}}^{x_{max}} \int_{y_{min}}^{y_{max}} \pi^x(x, y) \varphi(x, y) dx dy}{\int_{x_{min}}^{x_{max}} \int_{y_{min}}^{y_{max}} \varphi(x, y) dx dy} \\ &= \frac{\int_{x_{min}}^{x_{max}} \int_{y_{min}}^{y_{max}} \left( (1 - \alpha x - \alpha m y)x - \frac{\sigma}{2} x^2 - \beta(x - x_2)^2 \right) \varphi(x, y) dx dy}{\int_{x_{min}}^{x_{max}} \int_{y_{min}}^{y_{max}} \varphi(x, y) dx dy}, \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned}
\langle \pi^y \rangle &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \pi^y(x_t, y_t) = \frac{\int_{x_{min}}^{x_{max}} \int_{y_{min}}^{y_{max}} \pi^y(x, y) \varphi(x, y) dx dy}{\int_{x_{min}}^{x_{max}} \int_{y_{min}}^{y_{max}} \varphi(x, y) dx dy} \\
&= \frac{\int_{x_{min}}^{x_{max}} \int_{y_{min}}^{y_{max}} ((1 - \alpha x - \alpha m y) y - \frac{\sigma}{2} y^2 - \beta (y - y_2)^2) \varphi(x, y) dx dy}{\int_{x_{min}}^{x_{max}} \int_{y_{min}}^{y_{max}} \varphi(x, y) dx dy}, \quad (3.38)
\end{aligned}$$

onde  $\varphi(x, y)$  é a densidade invariante preservada ao longo do intervalo  $J_\beta = [x_{min}, x_{max}]$ , isto é:

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} 1 & x \in [x_{min}, x_{max}] \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.39)$$

## 4 Análise do modelo com equilíbrio de mercado

Neste capítulo desenvolvemos a análise da dinâmica do modelo com equilíbrio de mercado. Os resultados analíticos obtidos descrevem o comportamento das variáveis do sistema e sustentam a simulação do Capítulo 5.

### 4.1 Modelo com equilíbrio instável

Nesta secção, são analisadas as condições para as quais se verifica que o lucro e quantidade das empresas *naive* e sofisticadas no longo prazo, sob uma situação de desequilíbrio, são superiores/inferiores a uma situação de equilíbrio, para o caso em que existe instabilidade do ponto de equilíbrio. Também é abordado qual o impacto na economia, nomeadamente no excedente económico, excedente do produtor e excedente do consumidor.

Huang (2008) apresenta o seguinte teorema de forma a comparar o retorno no equilíbrio com o retorno da média de longo prazo, isto é,  $\langle r \rangle_\beta = \lim_{T \rightarrow \infty} 1/T \sum_{t=1}^T r(x_t) = \int_X r(x)\varphi(x)dx$ :

**Teorema 4.1** (Teorema 1 Huang(2008)). *Considere-se um processo dinâmico discreto instável unidimensional descrito por  $x_{t+1} = \min \{(1 + \beta)x_t, \theta(x_t)\}$  no domínio  $J_\beta = [x_{\min}, x_{\max}]$ ; existe sempre uma constante positiva  $\hat{\beta}$  de modo que, quando o parâmetro  $\beta$  é definido no intervalo aberto  $(0, \hat{\beta})$ , o retorno da média de longo prazo  $\langle r \rangle_\beta$  será superior(inferior) ao retorno de equilíbrio  $\bar{r}$  para qualquer valor inicial  $x \in J_\beta$ , desde que a função  $r$  seja negativamente inclinada (positivamente inclinada) no equilíbrio  $\bar{r}$ .*

Com a aplicação do teorema anterior reunimos as condições necessárias para visualizarmos em que situações as empresas oligopolísticas obtêm lucros superiores em

desequilíbrio comparativamente a uma situação de equilíbrio, bem como verificar as alterações ao nível das quantidades produzidas e qual o impacto na economia.

**Proposição 4.2.** *A função de reação  $R_y(x_t) = y_t$  definida pela condição (3.4) é negativamente inclinada se:*

- apresenta concavidade voltada para cima,  $\frac{d^2 C(R_y(x_t))}{d^2 R_y(x)} \geq 0$ ;
- e  $\frac{dD^{-1}(q_t)}{dq_t} + mR_y(x_t) \frac{d^2 D^{-1}(q_t)}{d^2 q_t} \leq 0$ .

*Se a função de reação  $R_y(x_t) = y_t$  possui inclinação negativa, então a função  $\theta(x_{t+1})$  definida em (3.5) goza da mesma propriedade se  $1 + m \frac{dR_y(x_t)}{dx_t} > 0$ .*

*Demonstração.* Seja,

$$\begin{aligned} D^{-1}(x_t + my_t) + \frac{dD^{-1}(x_t + my_t)}{dy_t} y_t &= C'(y_t) \\ \Leftrightarrow D^{-1}(x_t + mR_y(x_t)) + mR_y(x_t) \frac{dD^{-1}(q_t)}{dq_t} &= C'(R_y(x_t)). \end{aligned}$$

Derivando a expressão anterior em ordem a  $x_t$  resulta,

$$\begin{aligned} \left(1 + m \frac{dR_y(x_t)}{dx_t}\right) \frac{dD^{-1}(q_t)}{dq_t} + mR_y(x_t) \left(1 + m \frac{dR_y(x_t)}{dx_t}\right) \frac{d^2 D^{-1}(q_t)}{d^2 q_t} + \\ + m \frac{dR_y(x_t)}{dx_t} \frac{dD^{-1}(q_t)}{dq_t} = \frac{dR_y(x_t)}{dx_t} \frac{d^2 C(R_y(x_t))}{d^2 R_y(x_t)}. \end{aligned}$$

Resolvendo em ordem a  $\frac{dR_y(x_t)}{dx_t}$  obtemos,

$$\begin{aligned} \frac{dR_y(x_t)}{dx_t} \left(2m \frac{dD^{-1}(q_t)}{dq_t} + m^2 R_y(x_t) \frac{d^2 D^{-1}(q_t)}{d^2 q_t} - \frac{d^2 C(R_y(x_t))}{d^2 R_y(x_t)}\right) = \\ - \frac{dD^{-1}(q_t)}{dq_t} - mR_y(x_t) \frac{d^2 D^{-1}(q_t)}{d^2 q_t} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dR_y(x_t)}{dx_t} = \frac{\frac{dD^{-1}(q_t)}{dq_t} + mR_y(x_t)\frac{d^2D^{-1}(q_t)}{d^2q_t}}{\frac{d^2C(R_y(x_t))}{d^2R_y(x_t)} - 2m\frac{dD^{-1}(q_t)}{dq_t} - m^2R_y(x_t)\frac{d^2D^{-1}(q_t)}{d^2q_t}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dR_y(x_t)}{dx_t} = \frac{\frac{dD^{-1}(q_t)}{dq_t} + mR_y(x_t)\frac{d^2D^{-1}(q_t)}{d^2q_t}}{\frac{d^2C(R_y(x_t))}{d^2R_y(x_t)} - m(mR_y(x_t)\frac{d^2D^{-1}(q_t)}{d^2q_t} + 2\frac{dD^{-1}(q_t)}{dq_t})}.$$

Concluimos que  $\frac{dR_y(x_t)}{dx_t} < 0$  se  $\frac{d^2C(R_y(x_t))}{d^2R_y(x)} \geq 0$  e  $\frac{dD^{-1}(q_t)}{dq_t} + mR_y(x_t)\frac{d^2D^{-1}(q_t)}{d^2q_t} \leq 0$ , sendo que  $\frac{dD^{-1}(q_t)}{dq_t} < 0$ .

Tendo em conta  $\theta(x_{t+1}) = S(D^{-1}(q_t)) - my_t$  e tomando a derivada em relação a  $x_t$  resulta,

$$\frac{d\theta(x_{t+1})}{dx_t} = \left(1 + m\frac{dR_y(x_t)}{dx_t}\right) \frac{dD^{-1}(q_t)}{dq_t} - m\frac{dR_y(x_t)}{dx_t}.$$

Se  $\frac{dR_y(x_t)}{dx_t} < 0$  e sabendo que  $\frac{dD^{-1}(q_t)}{dq_t} < 0$  então verifica-se que  $\frac{d\theta(x_{t+1})}{dx_t} < 0$  se e só se  $1 + m\frac{dR_y(x_t)}{dx_t} > 0$  e  $\left(1 + m\frac{dR_y(x_t)}{dx_t}\right) \frac{dD^{-1}(q_t)}{dq_t} < m\frac{dR_y(x_t)}{dx_t}$ .

□

**Lema 4.3.** *Para a economia descrita na Secção 3.1 verifica-se sempre que  $R_y(x_t)$  apresenta inclinação negativa e  $\theta(x_{t+1})$  inclinação positiva.*

*Demonstração.* Tendo em conta o teorema anterior constata-se que  $\frac{dR_y(x_t)}{dx_t} < 0$  se e só se:

- $\frac{d^2C(R_y(x_t))}{d^2R_y(x)} \geq 0 \Rightarrow \sigma > 0;$
- $\frac{dD^{-1}(q_t)}{dq_t} + mR_y(x_t)\frac{d^2D^{-1}(q_t)}{d^2q_t} \leq 0 \Rightarrow \alpha > 0.$

E  $\theta'(x_{t+1}) < 0$  se e só se:

- $\left(1 + m\frac{dR_y(x_t)}{dx_t}\right) \frac{dD^{-1}(q_t)}{dq_t} < m\frac{dR_y(x_t)}{dx_t} \Rightarrow \left(1 - m\frac{\alpha}{2\alpha m + \sigma}\right)(-\alpha) < m\frac{-\alpha}{2\alpha m + \sigma} \Leftrightarrow 2\alpha m + \sigma - \alpha m < m \Leftrightarrow \sigma + m(\alpha - 1) < 0.$

Portanto, verifica-se sempre que  $\frac{dR_y(x_t)}{dx_t} < 0$  e  $\theta'(x_{t+1}) > 0$ , uma vez que  $\sigma > 0$  (existência de custos) e  $\alpha > 1$  (equilíbrio instável). □

**Teorema 4.4.** *Se se verificar a Proposição 4.2 então, pelo Teorema 4.1, as quantidades produzidas pela empresas oligopolísticas em desequilíbrio são superiores comparativamente com as quantidades produzidas em equilíbrio, isto é,  $\bar{y} < \langle y_t \rangle$  e  $\bar{x} < \langle x_t \rangle$ .*

**Teorema 4.5.** *Se a função quantidade de mercado relativa à soma das quantidades produzidas pelas empresas for negativamente inclinada, então verifica-se que a quantidade produzida em equilíbrio é inferior à quantidade produzida em desequilíbrio, ou seja,  $\bar{q} < \langle q_t \rangle$ .*

*Demonstração.* Seja a quantidade de mercado no equilíbrio dada por  $\bar{q} = \bar{x} + mR_y(\bar{x})$ . Da sua derivada em  $\bar{x}$  resulta,

$$\frac{d\bar{q}}{d\bar{x}} = 1 + m \frac{dR_y(\bar{x})}{d\bar{x}}$$

Conclui-se que  $\bar{q} < \langle q_t \rangle$  se  $\frac{d\bar{q}}{d\bar{x}} < 0$ , isto é, quando se verifica a Proposição 4.2; caso contrário,  $\bar{q} > \langle q_t \rangle$ . □

**Lema 4.6.** *Para a economia descrita na Secção 3.1, no longo prazo, a quantidade produzida numa situação de desequilíbrio é sempre menor do que quantidade de equilíbrio.*

*Demonstração.*

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{q}}{d\bar{x}} &= 1 + m \frac{dR_y(\bar{x})}{d\bar{x}} \\ &= 1 - \frac{m\alpha}{2\alpha m + \sigma}, \end{aligned}$$

que, como podemos verificar,  $\frac{d\bar{q}}{d\bar{x}}$  é sempre positivo uma vez que  $\frac{m\alpha}{2\alpha m + \sigma}$  é sempre menor que 1 (do Lema 4.3 verifica-se sempre que  $R_y(x_t)$  apresenta sempre inclinação negativa). Logo, para a economia em questão, no longo prazo, a quantidade produzida numa situação de desequilíbrio é sempre menor do que quantidade de equilíbrio. □

Comparando as soluções das empresas *naive* e sofisticadas no equilíbrio do sistema dinâmico concluímos:

**Teorema 4.7.** No equilíbrio  $(\bar{x}, \bar{y})$ , temos que:

- a quantidade produzida pela empresa *naive* é superior à da empresa *sofisticada*,  $\bar{x} > \bar{y}$ , se  $S(D^{-1}(\bar{x} + m\bar{y})) > \bar{y}(1 + m)$ ;
- os lucros obtidos pela empresa *naive* são superiores aos obtidos pelas empresas *sofisticadas*,  $\bar{\pi}^x > \bar{\pi}^y$ , se  $D^{-1}(\bar{x} + m\bar{y}) > \frac{C(\bar{x}) - C(\bar{y})}{S(D^{-1}(\bar{x} + m\bar{y})) - \bar{y}(m+1)}$ ;
- a empresa *naive* apresenta lucros positivos,  $\bar{\pi}^x > 0$ , se  $D^{-1}(\bar{x} + m\bar{y}) > \frac{C(\bar{x})}{\bar{x}}$ ;
- as empresas *sofisticadas* apresentam lucros positivos,  $\bar{\pi}^y > 0$ , se  $D^{-1}(\bar{x} + m\bar{y}) > \frac{C(\bar{y})}{\bar{y}}$ .

*Demonstração.* Seja a quantidade da empresa *naive*  $\bar{x} = \theta(\bar{x}) = S(D^{-1}(\bar{x} + m\bar{y})) - m\bar{y}$ . Então,

$$\begin{aligned}\bar{x} > \bar{y} &\Leftrightarrow S(D^{-1}(\bar{x} + m\bar{y})) - m\bar{y} > \bar{y} \\ S(D^{-1}(\bar{x} + m\bar{y})) &> \bar{y}(1 + m).\end{aligned}$$

A diferença de lucros entre as empresas *naive* e *sofisticadas* é obtida através de,

$$\begin{aligned}\bar{\pi}^x - \bar{\pi}^y &= \bar{p}\bar{x} - C(\bar{x}) - \bar{p}\bar{y} + C(\bar{y}) \\ &= D^{-1}(\bar{x} + m\bar{y})(S(D^{-1}(\bar{x} + m\bar{y})) - m\bar{y}) - C(\bar{x}) - D^{-1}(\bar{x} + m\bar{y})\bar{y} + C(\bar{y}) \\ &= D^{-1}(\bar{x} + m\bar{y})(S(D^{-1}(\bar{x} + m\bar{y})) - \bar{y} - m\bar{y}) - C(\bar{x}) + C(\bar{y})\end{aligned}$$

no que resulta que  $\bar{\pi}^x > \bar{\pi}^y$  se e só se  $D^{-1}(\bar{x} + m\bar{y}) > \frac{C(\bar{x}) - C(\bar{y})}{S(D^{-1}(\bar{x} + m\bar{y})) - \bar{y}(m+1)}$ . □

**Lema 4.8.** Para a economia descrita em 3.1, no equilíbrio  $(\bar{x}, \bar{y})$  temos que:

- a quantidade produzida pela empresa *naive* é superior à da empresa *sofisticada* se  $\sigma > 1 - m(\alpha - 1) \wedge m < \frac{1}{\alpha - 1}$ ;
- os lucros obtidos pela empresa *naive* são superiores aos obtidos pelas empresas *sofisticadas* se verificar (4.1);
- a empresa *naive* apresenta lucros positivos se verificar (4.2);

- as empresas sofisticadas apresentam sempre lucros positivos, independentemente dos parâmetros.

*Demonstração.* Para a economia descrita na Secção 3.1,

$$\begin{aligned}\bar{x} > \bar{y} &\Leftrightarrow \frac{m(\alpha - 1) + \sigma}{(1 + \alpha)(m\alpha + \sigma)} > \frac{1}{(1 + \alpha)(m\alpha + \sigma)} \\ &\Leftrightarrow m(\alpha - 1) + \sigma > 1 \Leftrightarrow \sigma > 1 - m(\alpha - 1) \quad \wedge \quad m < \frac{1}{\alpha - 1}.\end{aligned}$$

E,

$$\begin{aligned}\bar{\pi}^x > \bar{\pi}^y &\Leftrightarrow \frac{-(m(\alpha - 1) + \sigma)(-2m\alpha + m\sigma(\alpha - 1) + \sigma(\sigma - 2))}{2(1 + \alpha)^2(m\alpha + \sigma)} > \frac{2m\alpha + \sigma}{2(1 + \alpha)^2(m\alpha + \sigma)^2} \\ &\Leftrightarrow m = 1 \quad \wedge \quad \left[ \left( 1 < \alpha \leq 2 \quad \wedge \quad 2 - \alpha < \sigma \leq \frac{2 - \alpha}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4 + 4\alpha + \alpha^2} \right) \vee \right. \\ &\quad \left. \left( \alpha > 2 \quad \wedge \quad 0 < \sigma < \frac{2 - \alpha}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4 + 4\alpha + \alpha^2} \right) \right] \\ &\vee \quad m \geq 2 \quad \wedge \quad \left[ \left( 1 < \alpha < \frac{1 + m}{m} \quad \wedge \quad 1 + m - m\alpha < \sigma < \frac{1}{2}(1 + m - m\alpha) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2}\sqrt{1 + 2m + m^2 + 6m\alpha - 2m^2\alpha + m^2\alpha^2} \right) \vee \left( \alpha \geq \frac{1 + m}{m} \quad \wedge \right. \right. \\ &\quad \left. \left. 0 < \sigma < \frac{1}{2}(1 + m - m\alpha) + \frac{1}{2}\sqrt{1 + 2m + m^2 + 6m\alpha - 2m^2\alpha + m^2\alpha^2} \right) \right]. \quad (4.1)\end{aligned}$$

E,

$$\begin{aligned}\bar{\pi}^x > 0 &\Leftrightarrow \frac{-(m(\alpha - 1) + \sigma)(-2m\alpha + m\sigma(\alpha - 1) + \sigma(\sigma - 2))}{2(1 + \alpha)^2(m\alpha + \sigma)} > 0 \\ &\Leftrightarrow 0 < \sigma < \frac{1}{2}(2 + m - m\alpha) + \frac{1}{2}\sqrt{4 + 4m + m^2 + 4m\alpha - 2m^2\alpha + m^2\alpha^2}. \quad (4.2)\end{aligned}$$

E por último,

$$\begin{aligned}\bar{\pi}^y > 0 &\Leftrightarrow \frac{2m\alpha + \sigma}{2(1 + \alpha)^2(m\alpha + \sigma)^2} > 0 \\ &\Leftrightarrow \sigma > 0 \quad \wedge \quad m \geq 1 \quad \wedge \quad \alpha > 1.\end{aligned}$$

Portanto, verifica-se sempre que  $\bar{\pi}^y > 0$ , uma vez que  $\sigma > 0$  (existência de custos),  $\alpha > 1$  (equilíbrio instável) e  $m \geq 1$  (existência de empresas sofisticadas). □

Quando estamos perante um equilíbrio instável e aplicando o Teorema 4.1 podemos verificar em que situações um estado de desequilíbrio é benéfico para as empresas.

**Teorema 4.9.** *Para o modelo definido pelas equações (3.3) e (3.6) e aplicando o Teorema 4.1, conclui-se que:*

- Se  $\pi^{lx}(\bar{x}) < 0$ , então a empresa naive beneficia do estado de desequilíbrio e, desta forma,  $\langle \pi^x \rangle_\beta > \bar{\pi}^x$ ;
- Se  $\pi^{ly}(\bar{x}) < 0$ , a empresa sofisticada beneficia do estado de desequilíbrio e, desta forma,  $\langle \pi^y \rangle_\beta > \bar{\pi}^y$ .

*Demonstração.* A função lucro da empresa naive é dada por  $\pi^x(x_t) = D^{-1}(x_t + mR_y(x_t))x_t - C(x_t)$ . Derivando em ordem a  $x_t$  resulta:

$$\frac{d\pi^x(x_t)}{dx_t} = \frac{dD^{-1}(q_t)}{dq_t} \left( 1 + m \frac{dR_y(x_t)}{dx_t} \right) x_t + D^{-1}(q_t) - MC(x_t).$$

No equilíbrio  $\bar{x}$  a expressão é dada por:

$$\left. \frac{d\pi^x(x_t)}{dx_t} \right|_{x_t=\bar{x}} = \frac{dD^{-1}(\bar{q})}{d\bar{q}} \left( 1 + m \frac{dR_y(\bar{x})}{d\bar{x}} \right) \bar{x} + D^{-1}(\bar{q}) - MC(\bar{x}).$$

Aplicando o Teorema 4.1,  $\langle \pi^x \rangle > \bar{\pi}^x$  se e só se  $\left. \frac{d\pi^x}{dx_t} \right|_{x_t=\bar{x}} < 0$ , ou seja,

$$\frac{dD^{-1}(\bar{q})}{d\bar{q}} \left( 1 + m \frac{dR_y(\bar{x})}{d\bar{x}} \right) \bar{x} + D^{-1}(\bar{q}) - MC(\bar{x}) < 0$$

caso contrário,  $\langle \pi^x \rangle < \bar{\pi}^x$ .

Relativamente às empresas sofisticadas, a função lucro é dada por  $\pi^y(x_t) = D^{-1}(x_t + mR_y(x_t))R_y(x_t) - C(R_y(x_t))$ . Derivando em ordem a  $x_t$  resulta:

$$\frac{d\pi^y(x_t)}{dx_t} = \left( 1 + m \frac{dR_y(x_t)}{dx_t} \right) \frac{dD^{-1}(q_t)}{dq_t} R_y(x_t) + D^{-1}(q_t) \frac{dR_y(x_t)}{dx_t} - \frac{dC(R_y(x_t))}{dR_y(x_t)} \frac{dR_y(x_t)}{dx_t}$$

No equilíbrio a expressão é dada por:

$$\frac{d\pi^y(x_t)}{dx_t}\Big|_{x_t=\bar{x}} = \left(1 + m \frac{dR_y(\bar{x})}{d\bar{x}}\right) \frac{dD^{-1}(\bar{q})}{d\bar{q}} R_y(\bar{x}) + D^{-1}(\bar{q}) \frac{dR_y(\bar{x})}{d\bar{x}} - \frac{dC(R_y(\bar{x}))}{dR_y(\bar{x})} \frac{dR_y(\bar{x})}{d\bar{x}}$$

Só se verifica  $\langle \pi^y \rangle > \bar{\pi}^y$  se  $\frac{d\pi^y(\bar{x})}{d\bar{x}} < 0$ , isto é:

$$\left(1 + m \frac{dR_y(\bar{x})}{d\bar{x}}\right) \frac{dD^{-1}(\bar{q})}{d\bar{q}} R_y(\bar{x}) + D^{-1}(\bar{q}) \frac{dR_y(\bar{x})}{d\bar{x}} - \frac{dC(R_y(\bar{x}))}{dR_y(\bar{x})} \frac{dR_y(\bar{x})}{d\bar{x}} < 0$$

caso contrário,  $\langle \pi^y \rangle < \bar{\pi}^y$ .

□

**Lema 4.10.** *Para a economia descrita na Secção 3.1 verifica-se que:*

- *As empresas naive beneficiam de um estado de desequilíbrio se  $\pi'(\bar{x}) < 0 \Rightarrow \bar{x} > \frac{m\alpha + \sigma}{2m\alpha^2 + 2\alpha\sigma + 2m\alpha\sigma + \sigma^2}$ ;*
- *As empresas sofisticadas beneficiam sempre de um estado de desequilíbrio,  $\langle \pi^y \rangle > \bar{\pi}^y$ .*

*Demonstração.* Substituindo as equações dadas na Secção 3.1, resulta:

$$\begin{aligned} \frac{d\pi^{x_t}}{dx_t}\Big|_{x_t=\bar{x}} &< 0 \\ \Leftrightarrow (-\alpha) \left(1 - m \frac{\alpha}{2\alpha m + \sigma}\right) \bar{x} + 1 - \alpha \left(\bar{x} + m \frac{1 - \alpha\bar{x}}{2\alpha m + \sigma}\right) - \sigma\bar{x} &< 0 \\ \bar{x} &> \frac{m\alpha + \sigma}{2m\alpha^2 + 2\alpha\sigma + 2m\alpha\sigma + \sigma^2}. \end{aligned}$$

E,

$$\begin{aligned} \frac{d\pi^{x_t}}{dx_t}\Big|_{x_t=\bar{x}} &< 0 \\ \Leftrightarrow (-\alpha) \left(1 - m \frac{\alpha}{2\alpha m + \sigma}\right) \frac{1 - \alpha\bar{x}}{2\alpha m + \sigma} + \left(1 - \alpha \left(\bar{x} + m \frac{1 - \alpha\bar{x}}{2\alpha m + \sigma}\right)\right) \frac{-\alpha}{2\alpha m + \sigma} - \\ -\sigma \frac{1 - \alpha\bar{x}}{2\alpha m + \sigma} &< 0 \\ \Leftrightarrow \bar{x} &< \frac{1}{\alpha}. \end{aligned}$$

Portanto verifica-se sempre que  $\langle \pi^y \rangle > \bar{\pi}^y$  uma vez que  $\bar{x}$  é sempre menor que  $1/\alpha$ .  $\square$

Comparando os resultados analíticos obtidos anteriormente com os resultados apresentados em Huang (2008), podem-se salientar as seguintes conclusões, para um modelo em que existe equilíbrio de mercado:

- A empresa *naive* não beneficia sempre da existência de flutuações caóticas, não sendo suficiente apenas garantir que  $\beta < \tilde{\beta}$ ;
- Na nova formulação, não se verifica sempre que  $\bar{\pi}^x > \bar{\pi}^y$  para qualquer combinação de parâmetros;
- Não se constata um aumento do excedente económico uma vez que a média de longo prazo da quantidade produzida em desequilíbrio é inferior à quantidade de equilíbrio de mercado. Assim, o excedente económico e o excedente do consumidor diminuem (quantidade menor, preço aumenta); em contrapartida, o excedente do produtor aumenta.

Deste modo, na presença de equilíbrio de mercado, não se verifica uma vantagem incondicional ao produzir sob um regime de desequilíbrio.

## 4.2 Modelo com equilíbrio estável

Nesta secção, são analisadas as condições para as quais se verifica que o lucro e quantidade das empresas *naive* são superiores/inferiores aos da empresa sofisticada, no ponto de equilíbrio estável.

**Lema 4.11.** *No ponto de equilíbrio estável  $(\bar{x}, \bar{y})$ , tendo em conta o Teorema 4.7, temos que:*

- $\bar{x} > \bar{y}$  se  $\sigma > 1 - m(\alpha - 1)$
- $\bar{\pi}^x > \bar{\pi}^y$  se  $1 - m(\alpha - 1) < \sigma < \frac{1}{2}(1 + m - m\alpha) + \frac{1}{2}\sqrt{1 + 2m + m^2 + 6m\alpha - 2m^2\alpha + m^2\alpha^2}$

*Demonstração.* Para a economia descrita na Secção 3.1,

$$\begin{aligned} \bar{x} > \bar{y} &\Leftrightarrow \frac{m(\alpha - 1) + \sigma}{(1 + \alpha)(m\alpha + \sigma)} > \frac{1}{(1 + \alpha)(m\alpha + \sigma)} \\ &\Leftrightarrow m(\alpha - 1) + \sigma > 1 \Leftrightarrow \sigma > 1 - m(\alpha - 1), \end{aligned}$$

uma vez que  $\alpha - 1 < 0$  porque  $0 < \alpha < 1$ .

E,

$$\begin{aligned} \bar{\pi}^x &> \bar{\pi}^y \\ \Leftrightarrow \frac{-(m(\alpha - 1) + \sigma)(-2m\alpha + m\sigma(\alpha - 1) + \sigma(\sigma - 2))}{2(1 + \alpha)^2(m\alpha + \sigma)} &> \frac{2m\alpha + \sigma}{2(1 + \alpha)^2(m\alpha + \sigma)^2} \\ \Leftrightarrow 1 - m(\alpha - 1) < \sigma < \frac{1}{2}(1 + m - m\alpha) + \frac{1}{2}\sqrt{1 + 2m + m^2 + 6m\alpha - 2m^2\alpha + m^2\alpha^2}. \end{aligned}$$

□

### 4.3 Efeito dos parâmetros

Esta secção destina-se ao estudo do efeito dos parâmetros correspondentes ao tamanho de mercado, custo, número de empresas sofisticadas e taxa de crescimento de produção ( $\alpha$ ,  $\sigma$ ,  $m$  e  $\beta$ ) no lucro, na quantidade das empresas e nos excedentes <sup>1</sup>. Como tal, vamos agrupar os parâmetros de forma a que seja possível visualizar em que situações estes proporcionam um efeito positivo ou negativo. No equilíbrio, as observações são válidas tanto no regime estável como no regime instável.

Comparamos as quantidades produzidas pelas empresas *naive* e sofisticadas, no equilíbrio e a média fora do equilíbrio ( $\bar{q}(\alpha_1, \sigma_1, m_1, \beta_1)$  e  $\bar{q}(\alpha_2, \sigma_2, m_2, \beta_2)$ ,  $\langle q \rangle(\alpha_1, \sigma_1, m_1, \beta_1)$  e  $\langle q \rangle(\alpha_2, \sigma_2, m_2, \beta_2)$ ). Considerando tudo o resto constante:

- com uma diminuição do tamanho de mercado ( $\alpha$  maior), o produto da empresa *naive* ( $\langle x \rangle$  e  $\bar{x}$ ) atinge um máximo, a partir do qual se verifica uma diminuição do seu valor. Por outro lado, um aumento de  $\alpha$  proporciona a diminuição do produto das empresas sofisticadas ( $\langle y \rangle$  e  $\bar{y}$ );

---

<sup>1</sup>Esta análise resultou do estudo de derivadas parciais, através de simulações numéricas, conjuntamente com reprodução gráfica.

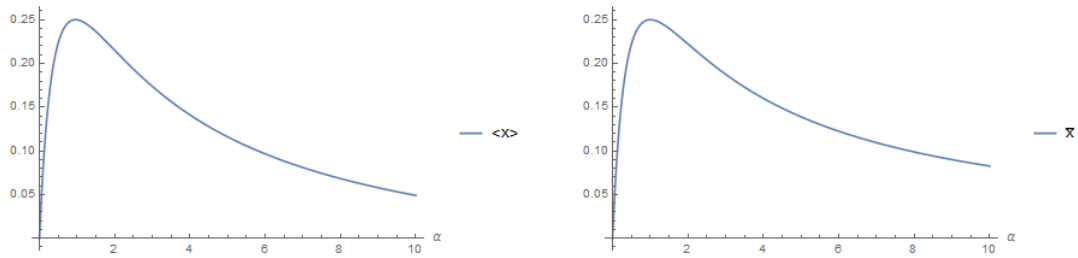


Figura 4.1: Representação gráfica da quantidade da empresa *naive* em função de  $\alpha$  para  $0 < \alpha < 10$ ,  $m = 1$ ,  $\sigma = 1$  e  $\beta = 0.1$ .

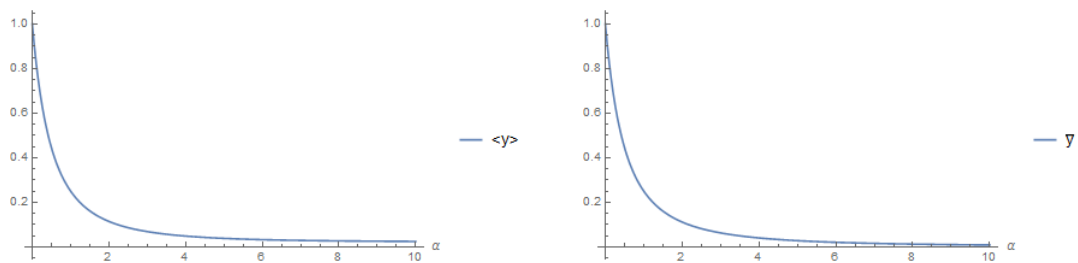


Figura 4.2: Representação gráfica da quantidade das empresas sofisticadas em função de  $\alpha$  para  $0 < \alpha < 10$ ,  $m = 1$ ,  $\sigma = 1$  e  $\beta = 0.1$ .

- um aumento do custo ( $\sigma$ ) afeta de forma diferente as empresas: proporciona um aumento da quantidade produzida pela empresa *naive* ( $\langle x \rangle$  e  $\bar{x}$ ), e uma diminuição da quantidade produzida pela empresa sofisticada ( $\langle y \rangle$  e  $\bar{y}$ );

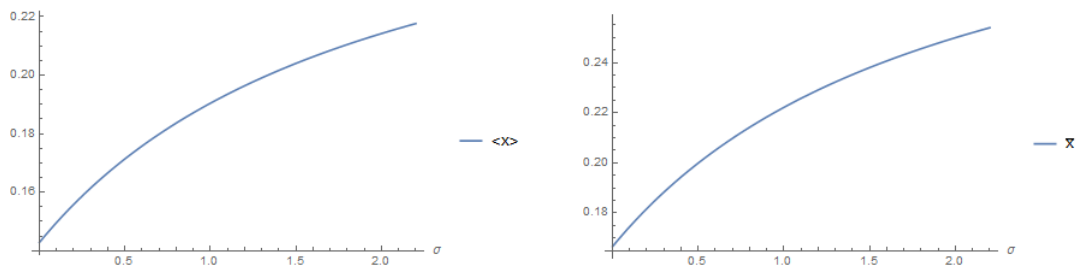


Figura 4.3: Representação gráfica da quantidade da empresa *naive* em função de  $\sigma$  para  $\alpha = 2$ ,  $m = 1$ ,  $0 < \sigma < 2.2$  e  $\beta = 0.5$ .

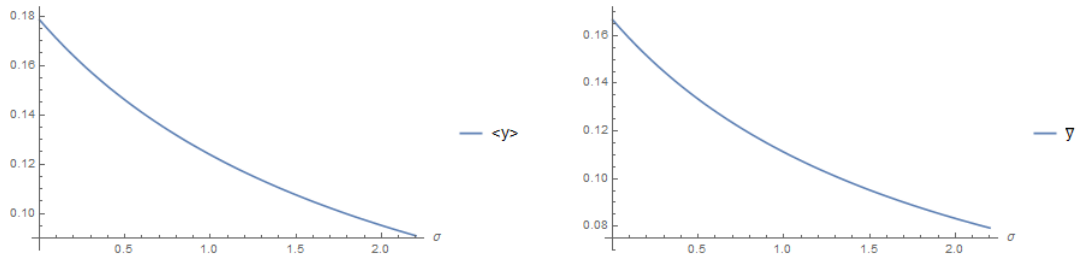


Figura 4.4: Representação gráfica da quantidade das empresas sofisticadas em função de  $\sigma$  para  $\alpha = 2$ ,  $m = 1$ ,  $0 < \sigma < 2.2$  e  $\beta = 0.5$ .

- um aumento da restrição da taxa de crescimento de produção,  $\beta$ , da empresa *naive*, proporciona uma diminuição da média produzida em desequilíbrio pela empresa *naive*,  $\langle x \rangle$ , e um aumento da média produzida pelas empresas sofisticadas,  $\langle y \rangle$ ;

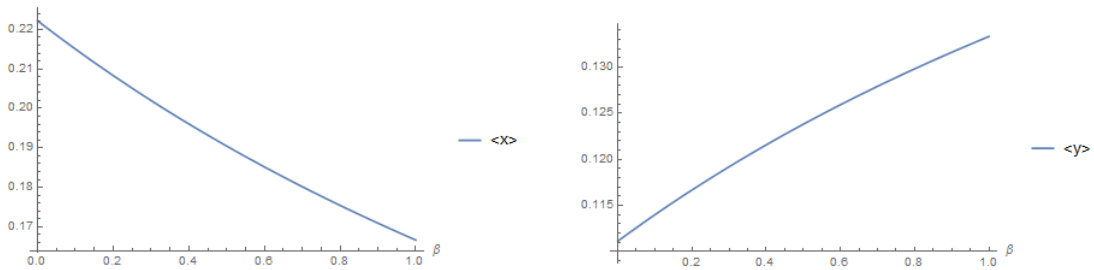


Figura 4.5: Representação gráfica da média da quantidade produzida pela empresa *naive* e pelas empresas sofisticadas em função de  $\beta$  para  $\alpha = 2$ ,  $m = 1$ ,  $\sigma = 1$  e  $0 < \beta < 1$ .

- um aumento do número de empresas sofisticadas ( $m$ ) proporciona uma diminuição de  $\langle x \rangle$ ,  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$ , e um aumento de  $\langle y \rangle$ .

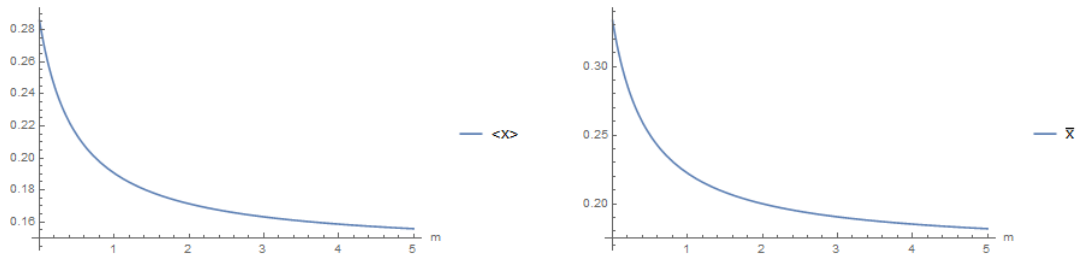


Figura 4.6: Representação gráfica da quantidade da empresa *naive* em função de  $m$  para  $\alpha = 2$ ,  $0 < m = 5$ ,  $\sigma = 1$  e  $\beta = 0.5$ .

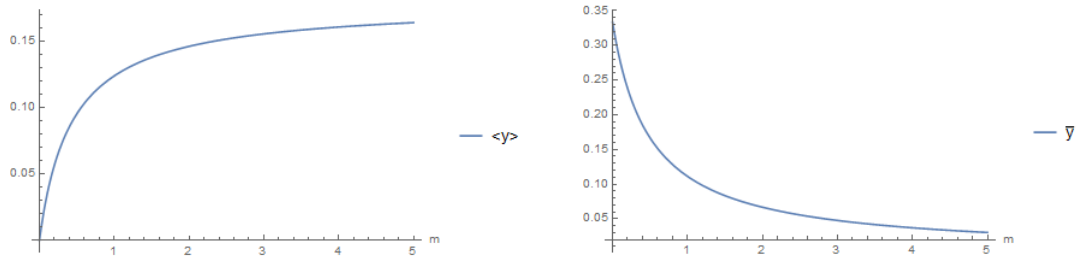


Figura 4.7: Representação gráfica da quantidade das empresas sofisticadas em função de  $m$  para  $\alpha = 2$ ,  $0 < m = 5$ ,  $\sigma = 1$  e  $\beta = 0.5$ .

Comparamos os lucros obtidos pelas empresas *naive* e sofisticadas ( $\langle \pi \rangle(\alpha_1, \sigma_1, m_1, \beta_1)$  e  $\langle \pi \rangle(\alpha_2, \sigma_2, m_2, \beta_2)$ ,  $\bar{\pi}(\alpha_1, \sigma_1, m_1, \beta_1)$  e  $\bar{\pi}(\alpha_2, \sigma_2, m_2, \beta_2)$ ). Considerando tudo o resto constante:

- com uma diminuição do tamanho de mercado ( $\alpha$  maior), as funções  $\langle \pi^x \rangle$  e  $\bar{\pi}^x$  atingem um máximo, a partir do qual se verifica uma diminuição dos seus valores. Para as funções  $\langle \pi^y \rangle$  e  $\bar{\pi}^y$  verifica-se sempre uma diminuição do seu valor, para  $\alpha$  crescente;

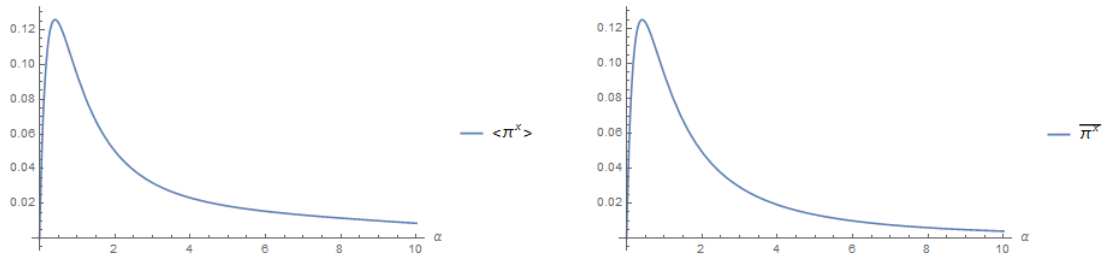


Figura 4.8: Representação gráfica do lucro da empresa *naive* em função de  $\alpha$  para  $0 < \alpha < 10$ ,  $m = 1$ ,  $\sigma = 1$  e  $\beta = 0.1$ .

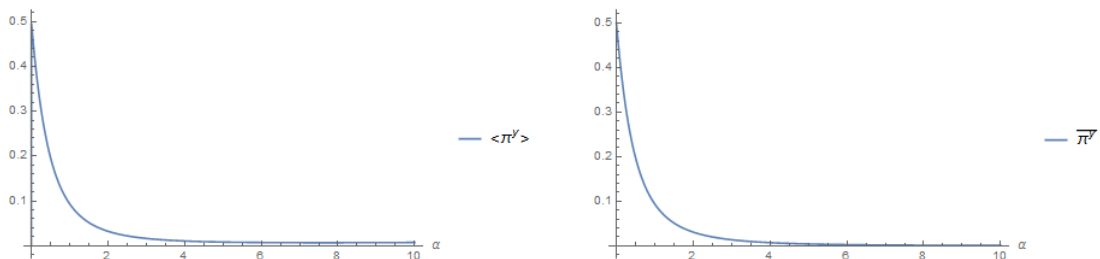


Figura 4.9: Representação gráfica do lucro das empresas sofisticadas em função de  $\alpha$  para  $0 < \alpha < 10$ ,  $m = 1$ ,  $\sigma = 1$  e  $\beta = 0.1$ .

- para o parâmetro  $\sigma$  do custo, a função lucro da empresa *naive* ( $\langle \pi^x \rangle$  e  $\bar{\pi}^x$ ) apresenta concavidade voltada para baixo pelo que, à medida que o custo aumenta, as função atinge um máximo a partir do qual diminui; para as empresas sofisticadas, um aumento do custo provoca uma diminuição do lucro ( $\langle \pi^y \rangle$  e  $\bar{\pi}^y$ );

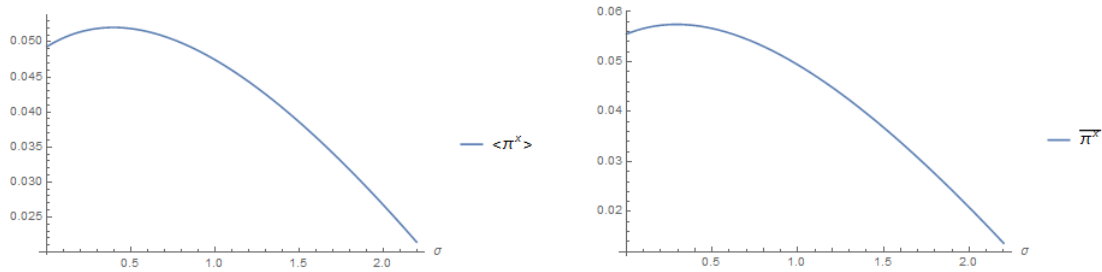


Figura 4.10: Representação gráfica do lucro da empresa *naive* em função de  $\sigma$  para  $\alpha = 2$ ,  $m = 1$ ,  $0 < \sigma < 2.2$  e  $\beta = 0.5$ .

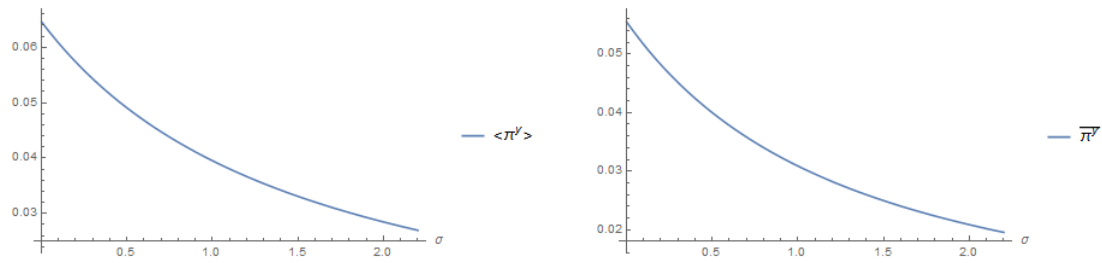


Figura 4.11: Representação gráfica do lucro das empresas sofisticadas em função de  $\sigma$  para  $\alpha = 2$ ,  $m = 1$ ,  $0 < \sigma < 2.2$  e  $\beta = 0.5$ .

- para o parâmetro  $\beta$ , a função da média do lucro da empresa *naive*,  $\langle \pi^x \rangle$ , apresenta concavidade voltada para baixo pelo que, à medida que aumenta a restrição da taxa de crescimento de produção  $\beta$ , a função atinge um máximo a partir do qual diminui; a função da média do lucro das empresas sofisticadas,  $\langle \pi^y \rangle$ , aumenta com um aumento de  $\beta$ ;

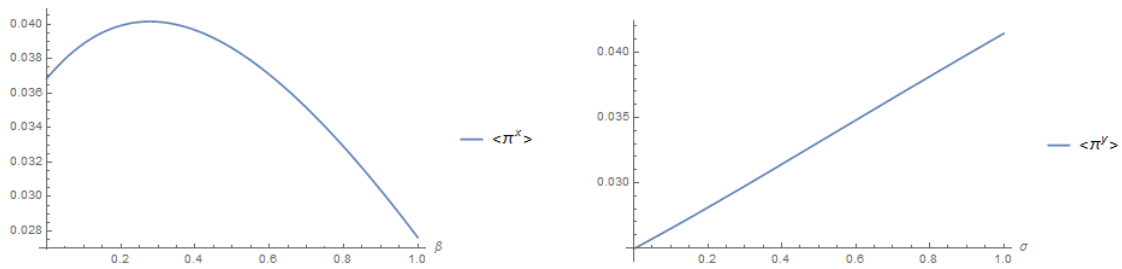


Figura 4.12: Representação gráfica do lucro das empresas sofisticadas em função de  $\beta$  para  $\alpha = 2$ ,  $m = 1$ ,  $\sigma = 1$  e  $\beta = 0.5$ .

- um aumento do número de empresas sofisticadas ( $m$ ) proporciona uma diminuição das funções lucro das empresas *naive* e sofisticadas ( $\langle \pi^x \rangle$ ,  $\bar{\pi}^x$ ,  $\langle \pi^y \rangle$  e  $\bar{\pi}^y$ ).

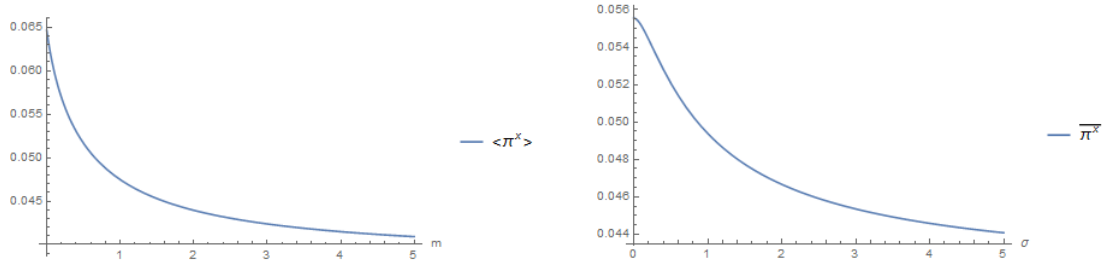


Figura 4.13: Representação gráfica do lucro da empresa *naive* em função de  $m$  para  $\alpha = 2$ ,  $0 < m < 5$ ,  $\sigma = 1$  e  $\beta = 0.5$ .

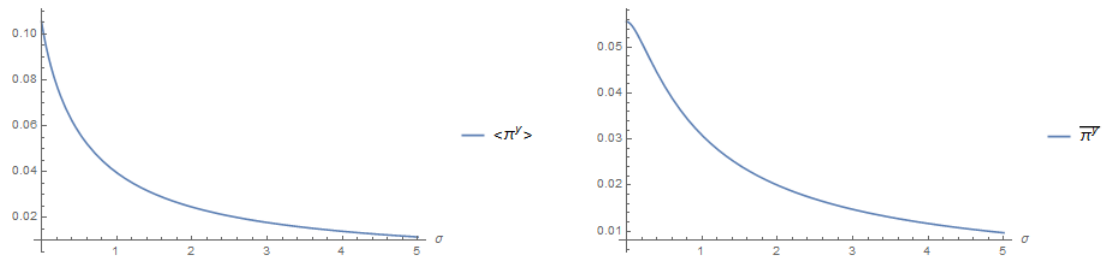


Figura 4.14: Representação gráfica do lucro das empresas sofisticadas em função de  $m$  para  $\alpha = 2$ ,  $0 < m < 5$ ,  $\sigma = 1$  e  $\beta = 0.5$ .

Por último, comparamos os excedentes económico, do consumidor e do produtor. Considerando tudo o resto constante:

- uma diminuição do tamanho de mercado (aumento de  $\alpha$ ) proporciona uma diminuição do excedente económico e do excedente do produtor ( $\langle EE \rangle$ ,  $\langle EP \rangle$ ,  $\bar{EE}$ ).

e  $\bar{EP}$ ). Relativamente ao excedente do consumidor ( $\langle EC \rangle$  e  $\bar{EC}$ ), a função apresentam um máximo a partir do qual existe uma diminuição dos seu valor;

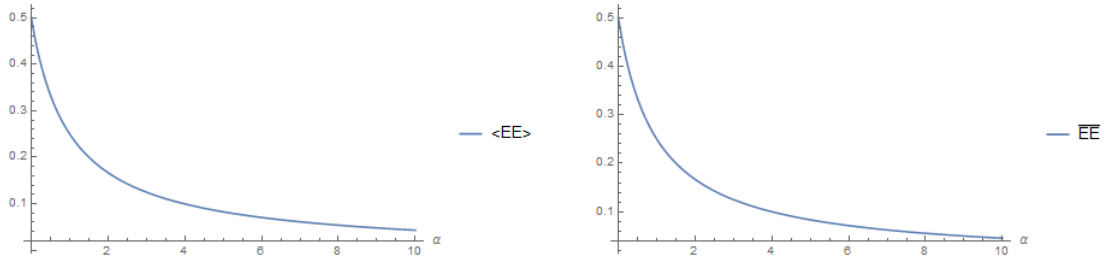


Figura 4.15: Representação gráfica do excedente económico em função de  $\alpha$  para  $0 < \alpha < 10$ ,  $m = 1$ ,  $\sigma = 1$  e  $\beta = 0.1$ .

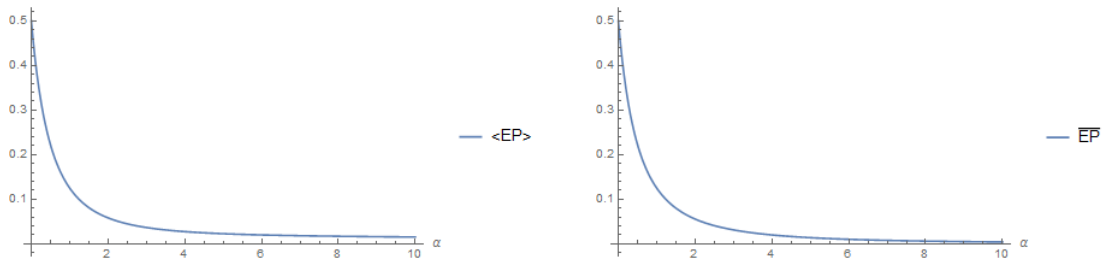


Figura 4.16: Representação gráfica do excedente do produtor em função de  $\alpha$  para  $0 < \alpha < 10$ ,  $m = 1$ ,  $\sigma = 1$  e  $\beta = 0.1$ .

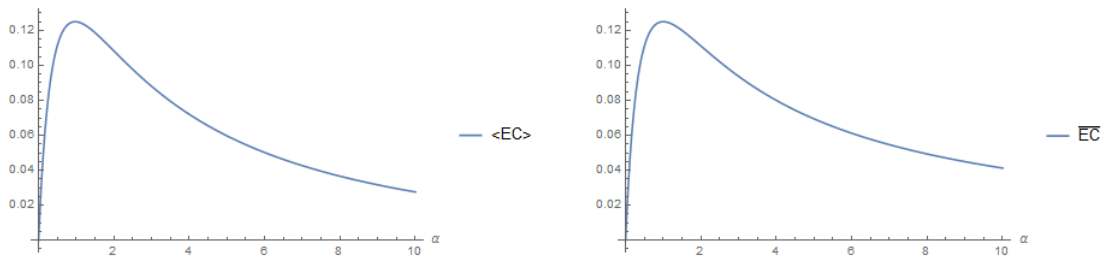


Figura 4.17: Representação gráfica do excedente do consumidor em função de  $\alpha$  para  $0 < \alpha < 10$ ,  $m = 1$ ,  $\sigma = 1$  e  $\beta = 0.1$ .

- para o parâmetro  $\sigma$  da função custo, a média do excedente do produtor ( $\langle EP \rangle$ ) aumenta e a média do excedente económico ( $\langle EE \rangle$ ) e do excedente do consumidor ( $\langle EC \rangle$ ) diminuem. Os excedentes no equilíbrio,  $\bar{EE}$ ,  $\bar{EC}$  e  $\bar{EP}$ , não sofrem alterações.

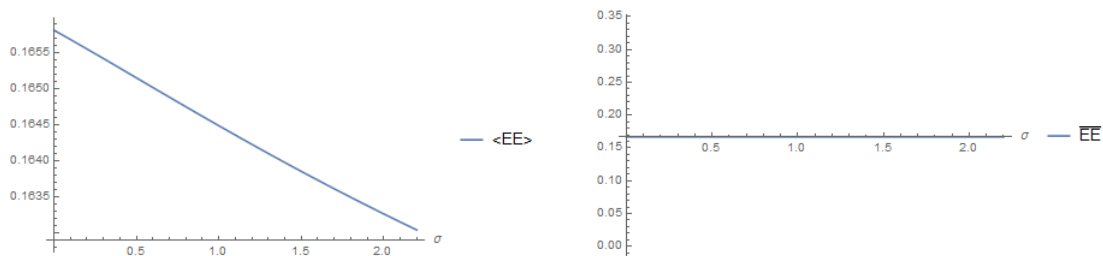


Figura 4.18: Representação gráfica do excedente económico em função de  $\sigma$  para  $\alpha = 2$ ,  $m = 1$ ,  $0 < \sigma < 2.2$  e  $\beta = 0.5$ .

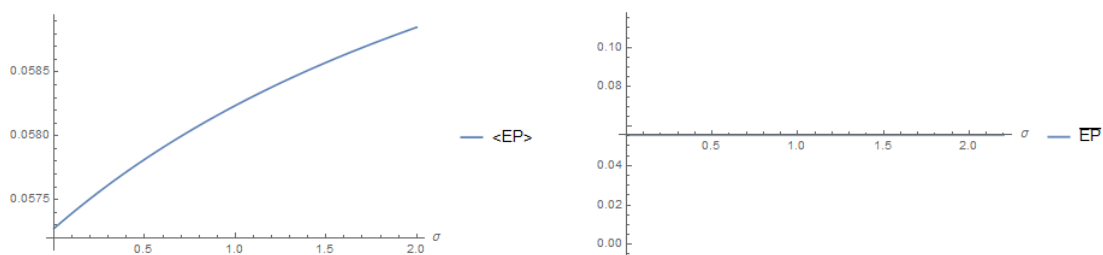


Figura 4.19: Representação gráfica do excedente do produtor em função de  $\sigma$  para  $\alpha = 2$ ,  $m = 1$ ,  $0 < \sigma < 2.2$  e  $\beta = 0.5$ .

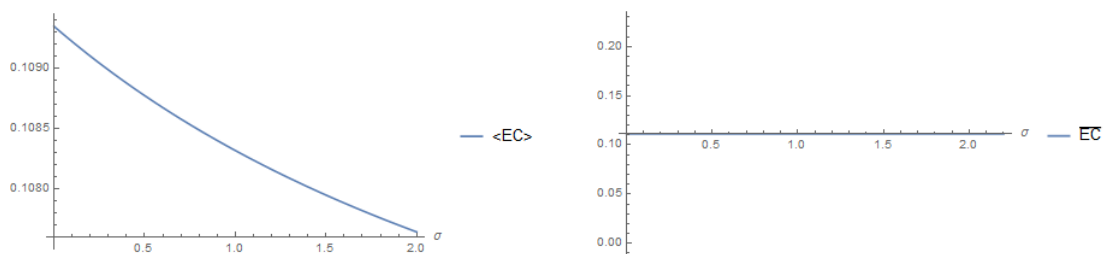


Figura 4.20: Representação gráfica do excedente do consumidor em função de  $\sigma$  para  $\alpha = 2$ ,  $m = 1$ ,  $0 < \sigma < 2.2$  e  $\beta = 0.5$ .

- um aumento da restrição da taxa de crescimento de produção,  $\beta$ , da empresa *naive* proporciona uma diminuição da média do excedente económico ( $\langle EE \rangle$ ) e do excedente do consumidor ( $\langle EC \rangle$ ); e um aumento da média do excedente do produtor ( $\langle EP \rangle$ ).

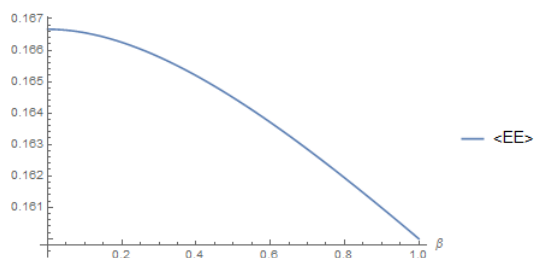


Figura 4.21: Representação gráfica do excedente económico em função de  $\beta$  para  $\alpha = 2$ ,  $m = 1$ ,  $\sigma = 1$  e  $0 < \beta < 1$ .

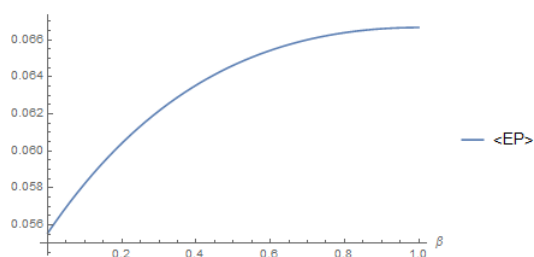


Figura 4.22: Representação gráfica do excedente do produtor em função de  $\beta$  para  $\alpha = 2$ ,  $m = 1$ ,  $\sigma = 1$  e  $0 < \beta < 1$ .

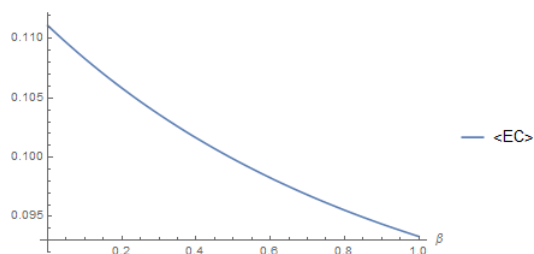


Figura 4.23: Representação gráfica do excedente do consumidor em função de  $\beta$  para  $\alpha = 2$ ,  $m = 1$ ,  $\sigma = 1$  e  $0 < \beta < 1$ .

- um aumento do número de empresas sofisticadas ( $m$ ), proporciona um aumento da média do excedente económico e do consumidor, e uma diminuição da média do excedente do produtor. No equilíbrio, assistimos a uma diminuição do excedente económico e do produtor e um aumento do excedente do consumidor.

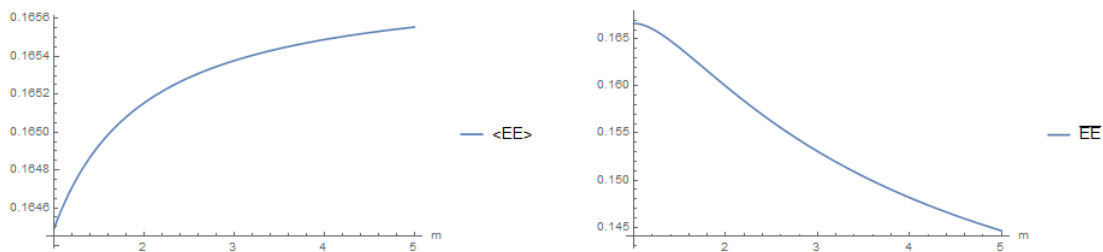


Figura 4.24: Representação gráfica do excedente económico em função de  $m$  para  $\alpha = 2$ ,  $0 < m < 5$ ,  $\sigma = 1$  e  $\beta = 0.5$ .

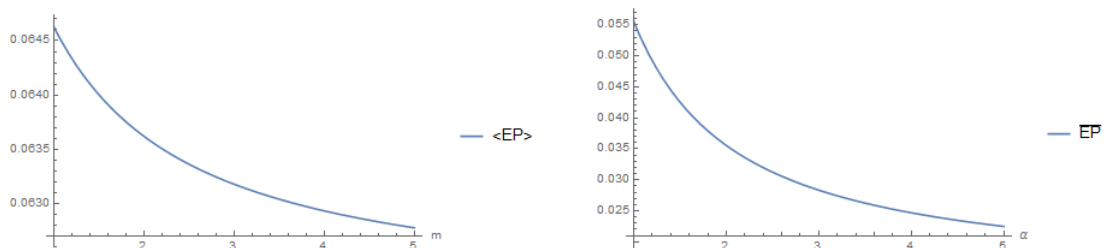


Figura 4.25: Representação gráfica do excedente do produtor em função de  $m$  para  $\alpha = 2$ ,  $0 < m < 5$ ,  $\sigma = 1$  e  $\beta = 0.5$ .

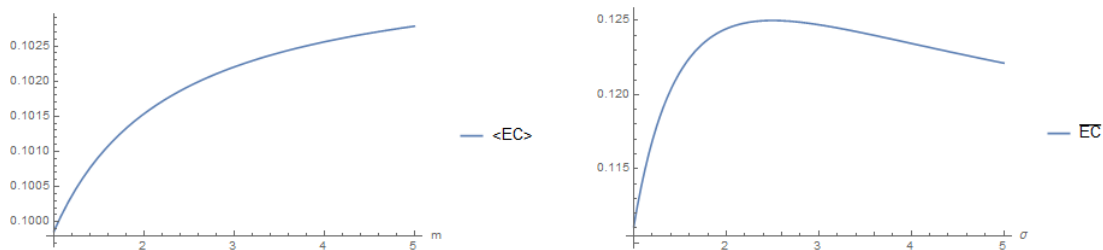


Figura 4.26: Representação gráfica do excedente do consumidor em função de  $m$  para  $\alpha = 2$ ,  $0 < m < 5$ ,  $\sigma = 1$  e  $\beta = 0.5$ .

## 4.4 Efeito da introdução custo de ajustamento de produção

Quando o equilíbrio é estável, a introdução de custos de ajustamento de produção faz com que existam diferenças nas quantidades produzidas relativamente ao sistema sem esses custos, ou seja, que existam diferenças ao nível da convergência para o equilíbrio. A velocidade de ajustamento para o ponto fixo é semelhante.

Quando o equilíbrio é instável e as empresas produzem num regime de desequilíbrio, a introdução do custo de ajustamento de produção faz com que:

- o intervalo de ajustamento de produção da empresa *naive* a ser considerado seja menor;
- a média dos lucros das empresas *naive* e sofisticadas seja menor comparativamente com a obtida sem este custo;

As conclusões apresentadas nesta secção foram alcançadas numericamente (ver Figuras 5.4, 5.5, 5.23 e 5.24), devido à complexidade das expressões analíticas obtidas.

## 4.5 Efeito da existência *versus* ausência de colusão

Nesta secção estamos interessados em comparar os lucros obtidos no equilíbrio <sup>2</sup> quando as  $m$  empresas sofisticadas formam uma colusão e quando não formam uma colusão, sendo a otimização de cada empresa sofisticada determinada por:

1. No primeiro caso, a quantidade de cada empresa sofisticada é dada por (3.13);
2. No segundo caso, é dada por  $\frac{1}{\alpha + \alpha^2 + \sigma + \alpha\sigma}$  <sup>3</sup>.

Este caso revela-se de particular importância tendo em vista que é interessante verificar em que medida a formação de colusão por parte das empresas se torna vantajosa, sob a hipótese de existência de heterogeneidade nas expectativas por elas formadas.

Comparamos esta situação com o modelo de Cournot construído classicamente: no mercado atuam apenas empresas sofisticadas (empresas homogéneas quanto à sua estratégia). Consideramos duas aplicações distintas do modelo de Cournot:

- existem  $m$  empresas sofisticadas, em que  $m - 1$  formam uma colusão (tabela 4.1);
- existem  $m$  empresas sofisticadas que não formam uma colusão (tabela 4.2).

---

<sup>2</sup>Apenas fizemos o estudo para o equilíbrio uma vez que fora do equilíbrio teríamos um sistema com  $m + 1$  equações. Não analisámos a estabilidade do ponto de equilíbrio: esta seria obtida resolvendo uma jacobiana  $(m + 1) \times (m + 1)$ .

<sup>3</sup>Cálculos no apêndice B.

Os resultados apresentados nas tabelas estão demonstrados no Apêndice C. A quantidade  $\bar{q}_{in}$  corresponde ao produto ótimo obtido em equilíbrio pelas empresas que formam a colusão e  $\bar{q}_{out}$  corresponde ao produto ótimo obtido em equilíbrio pela empresa que não faz parte da colusão.

**1 empresa *naive* + m empresas sofisticadas:** Verificamos em que situações as  $m$  empresas sofisticadas que formam uma colusão obtêm lucros superiores aos que obtêm na ausência de colusão.

$$\begin{aligned} \bar{\pi}_{colusão}^y &> \bar{\pi}_{sem colusão}^y \\ \Leftrightarrow \frac{2m\alpha + \sigma}{2(1 + \alpha)^2(m\alpha + \sigma)^2} &> \frac{2\alpha + \sigma}{2(1 + \alpha)^2(\alpha + \sigma)^2} \end{aligned}$$

Verifica-se sempre as empresas sofisticadas não beneficiam da formação de colusão, ou seja  $\bar{\pi}_{colusão}^y < \bar{\pi}_{sem colusão}^y$  (tendo em conta as restrições  $\alpha > 0$ ,  $m \geq 2$ ,  $\sigma > 0$ ,  $\bar{\pi}_{colusão}^y > 0$  e  $\bar{\pi}_{sem colusão}^y > 0$ ).

**m empresas sofisticadas:** Verificamos em que situações as  $m - 1$  empresas que formam uma colusão obtêm lucros superiores aos que obtêm na ausência de colusão:

$$\begin{aligned} \bar{\pi}_{colusão}^y &> \bar{\pi}_{sem colusão}^y \\ \Leftrightarrow \frac{(\alpha + \sigma)^2(2(-1 + m)\alpha + \sigma)}{2(3(-1 + m)\alpha^2 + 2m\alpha\sigma + \sigma^2)^2} &> \frac{2\alpha + \sigma}{2(\alpha + m\alpha + \sigma)^2} \\ \Rightarrow m &> \frac{12\alpha^3 + 16\alpha^2\sigma + 4\alpha\sigma^2 - \sigma^3}{4\alpha(\alpha + \sigma)^2} + \\ &+ \frac{1}{4} \sqrt{\frac{64\alpha^6 + 160\alpha^5\sigma + 160\alpha^4\sigma^2 + 88\alpha^3\sigma^3 + 32\alpha^2\sigma^4 + 8\alpha\sigma^5 + \sigma^6}{\alpha^2(\alpha + \sigma)^4}} \end{aligned}$$

com restrições numéricas em relação aos intervalos  $\alpha$  e  $\sigma$ . Por exemplo, se  $m = 4$ ,  $\alpha = 2$  e  $\sigma > 0.8$  as empresas que formam a colusão beneficiam da formação da colusão <sup>4</sup>.

---

<sup>4</sup>O valor  $\sigma$  foi obtido numericamente.

	Equilíbrio
$\bar{q}_{in}$	$\frac{\alpha + \sigma}{3(-1 + m)\alpha^2 + 2m\alpha\sigma + \sigma^2}$
$\bar{q}_{out}$	$\frac{(-1 + m)\alpha + \sigma}{3(-1 + m)\alpha^2 + 2m\alpha\sigma + \sigma^2}$
$\bar{\pi}^{q_{in}}$	$\frac{(\alpha + \sigma)^2(2(-1 + m)\alpha + \sigma)}{2(3(-1 + m)\alpha^2 + 2m\alpha\sigma + \sigma^2)^2}$
$\bar{\pi}^{q_{out}}$	$\frac{(2\alpha + \sigma)((-1 + m)\alpha + \sigma)^2}{2(3(-1 + m)\alpha^2 + 2m\alpha\sigma + \sigma^2)^2}$

Tabela 4.1: Resultados obtidos para o caso em que  $m - 1$  empresas formam uma colusão.

	Equilíbrio
$\bar{q}$	$\frac{1}{(m + 1)\alpha + \sigma}$
$\bar{\pi}^q$	$\frac{2\alpha + \sigma}{2(\alpha + m\alpha + \sigma)^2}$

Tabela 4.2: Resultados obtidos na ausência colusão.

## 5 Simulação e interpretação

No presente capítulo encontra-se a simulação computacional com recurso ao software *Wolfram Mathematica* e *Matlab*. O objetivo desta abordagem é ilustrar os resultados analíticos apresentados no capítulo anterior e interpretá-los economicamente.

Na simulação computacional selecionamos um conjunto de valores para os parâmetros tamanho de mercado  $\alpha$ , custo  $\sigma$  e número de empresas sofisticadas  $m$ . Consideramos diferentes valores de  $\alpha$  (tamanho de mercado) para visualizarmos quais as alterações na dinâmica do modelo quando o ponto de equilíbrio é estável, periódico ou instável. Os intervalos de  $\sigma$  relativos à função custo foram calculados de forma a que tivessem sentido económico na medida em que as empresas apresentassem receitas superiores aos custos.

O capítulo encontra-se estruturado da seguinte forma: na Secção 5.1 está representado o modelo para o caso em que existe estabilidade, na Secção 5.2 para o caso em que o modelo percorre uma órbita de período dois e na Secção 5.3 para o caso em que existe instabilidade. Na Secção 5.4 encontra-se uma comparação dos lucros das empresas para o caso em que existe colusão das empresas sofisticadas e para o caso em que não existe. Por último, apresenta-se uma breve simulação utilizando o modelo de Cournot apenas com empresas sofisticadas de forma a serem comparados alguns resultados obtidos.

### 5.1 Modelo com equilíbrio estável

Para a condição de estabilidade enunciada no Capítulo 3, se  $\alpha < 1$  o equilíbrio é estável, existindo convergência para o ponto de equilíbrio. A Figura 5.1 é construída usando  $\alpha = 0.5$  e  $q_0 = 0.8$  ( $x_0 = y_0 = 0.4$ ).

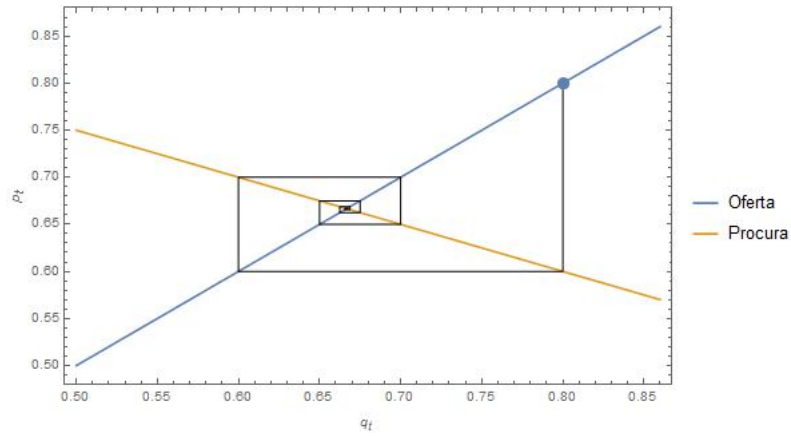


Figura 5.1: Representação gráfica do modelo para o caso em que  $\alpha = 0.5$ ,  $\sigma = 1$  e  $m = 1$ . O sistema converge para o ponto fixo  $q^* = 0.667$ .

A Figura 5.2 ilustra o comportamento das funções lucro das empresas *naive* e sofisticada em função do parâmetro  $\sigma$  da função custo. Verifica-se que, no ponto de equilíbrio estável, a empresa sofisticada apresenta lucros superiores ao da empresa *naive* em praticamente todo o domínio. Além disso, à medida que o tamanho de mercado aumenta ( $\alpha$  menor), o intervalo para o qual a empresa *naive* apresenta lucros superiores diminui. Pode-se ainda verificar que a função lucro da empresa sofisticada é decrescente e que a função lucro da empresa *naive* apresenta concavidade negativa.

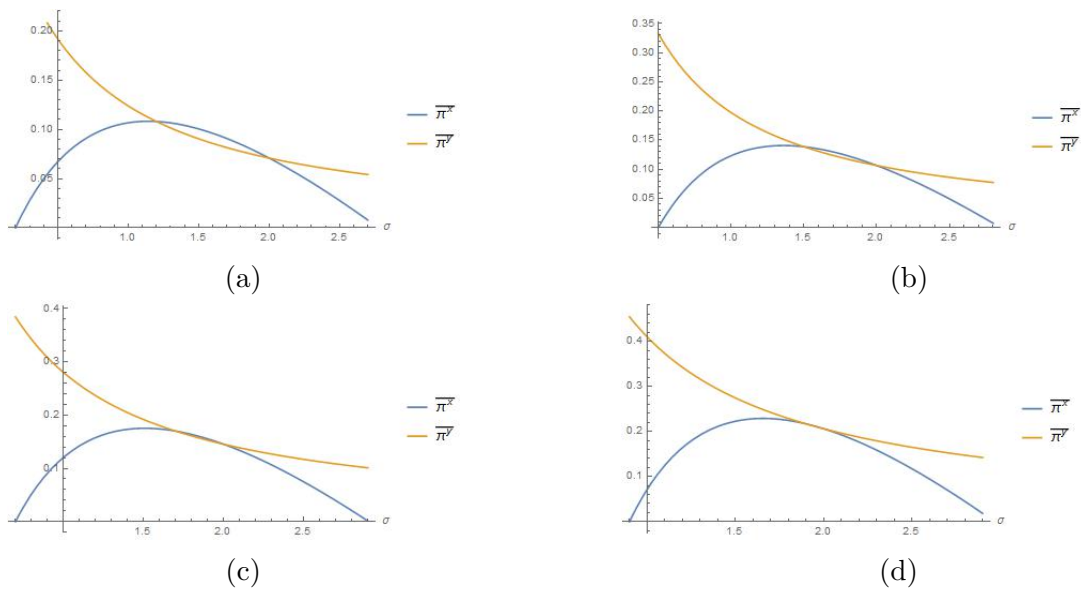


Figura 5.2: Representação gráfica do lucro das empresas para o caso em que a)  $\alpha = 0.8, m = 1, 0.2 < \sigma < 2.7$ ; b)  $\alpha = 0.5, m = 1, 0.5 < \sigma < 2.8$ ; c)  $\alpha = 0.3, m = 1, 0.7 < \sigma < 2.9$ ; e d)  $\alpha = 0.1, m = 1, 0.9 < \sigma < 2.9$ .

A Figura 5.3 representa a evolução das quantidades produzidas pelas empresas no ponto de equilíbrio ao longo do parâmetro  $\sigma$ . À medida que a função custo aumenta ( $\sigma$  maior), a quantidade produzida pela empresa *naive* aumenta e a da empresa sofisticada diminui.

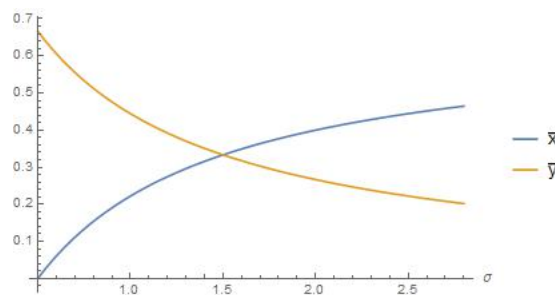


Figura 5.3: Representação gráfica da quantidade produzida pelas empresas para o caso em que  $\alpha = 0.5, m = 1, 0.5 < \sigma < 2.8$ .

### 5.1.1 Ausência *versus* presença de um custo de ajustamento de produção

Nesta secção verificamos como converge o sistema para o equilíbrio quando são introduzidos custos de ajustamento de produção.

Analisando a evolução das quantidades produzidas pela empresa *naive* ao longo do tempo observamos que, na ausência de custos de ajustamento de produção, a quantidade produzida oscila inicialmente em torno da quantidade de equilíbrio, convergindo para este; na presença desses custos, observa-se a ocorrência de *overshooting*, convergindo de seguida o sistema para o equilíbrio (Figura 5.4).

Analogamente, para a empresa sofisticada observamos que, na ausência de custos de ajustamento de produção, a quantidade produzida oscila inicialmente em torno da quantidade de equilíbrio, convergindo para este; na presença desses custos, observa-se um aumento da quantidade produzida, convergindo para o equilíbrio (Figura 5.5).

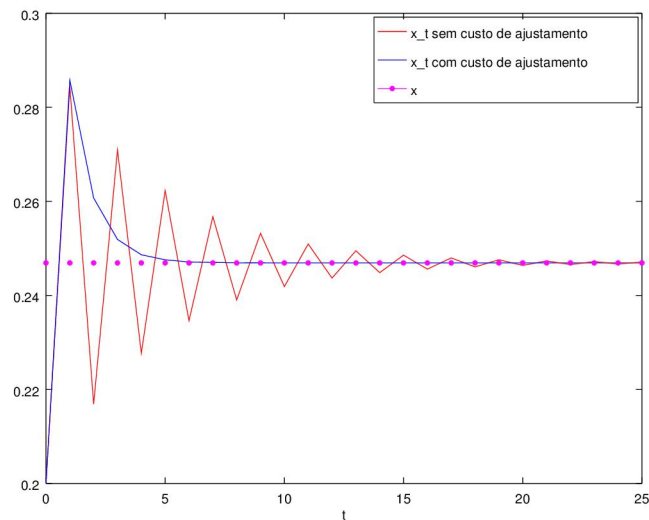


Figura 5.4: Representação gráfica da quantidade produzida pela empresa *naive* em função do tempo para  $m = 1$ ,  $\sigma = 1$ ,  $\beta = 0.5$ ,  $\alpha = 0.8$ ,  $x_0 = 0.2$  e  $y_0 = 0.2$

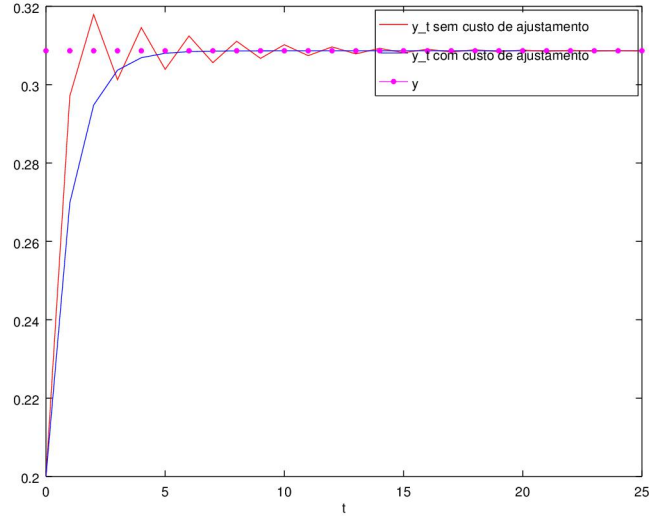


Figura 5.5: Representação gráfica da quantidade produzida pela empresa sofisticada em função do tempo para  $m = 1$ ,  $\sigma = 1$ ,  $\beta = 0.5$ ,  $\alpha = 0.8$ ,  $x_0 = 0.2$  e  $y_0 = 0.2$

## 5.2 Modelo com equilíbrio e órbita periódica

Como referido na Secção 3.3, se  $\alpha = 1$  estamos perante uma dinâmica oscilatória constante de período 2, simétrica em torno do ponto fixo  $q^*$ , em que  $q_t = q^* \pm q_0$ . A Figura 5.6 é construída usando  $\alpha = 1$  e  $q_0 = 0.8$  ( $x_0 = 0.7$  e  $y_0 = 0.1$ ).

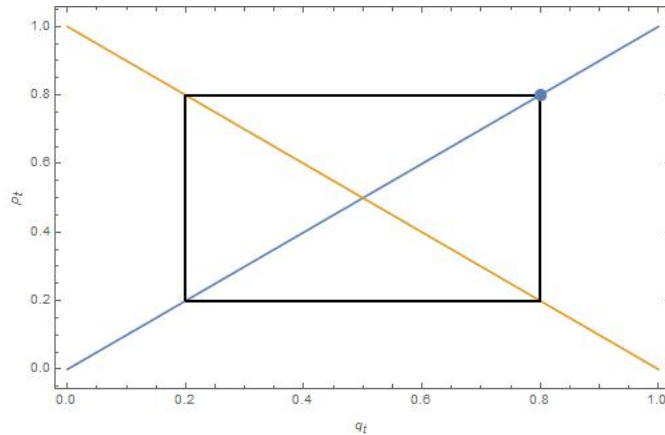


Figura 5.6: Representação gráfica do modelo para o caso em que  $\alpha = 1$ ,  $m = 1$  e  $\sigma = 1$ .

É importante referir que a situação em que  $\alpha = 1$  corresponde à economia ilustrada em Huang (2008). Podemos verificar que, quando existe equilíbrio de mercado, os

resultados obtidos são diferentes dos obtidos na ausência de equilíbrio de mercado, na medida em que não existe vantagem em produzir sob um regime de desequilíbrio.

Note-se que, para o presente caso, a média de longo prazo da quantidade e respetivo lucro das empresas *naive* e sofisticadas, quando estas percorrem a órbita, igualam o obtido numa situação de equilíbrio. Isto deve-se ao facto da órbita ser simétrica de período 2, em que o excesso obtido num período e a contenção no período seguinte se anulam.

### 5.3 Modelo com equilíbrio instável

Como referido na Secção 3.3, se  $\alpha > 1$  o equilíbrio é instável. Nesta secção estamos interessados em verificar se uma situação de desequilíbrio é benéfica para as empresas e para a economia quando o equilíbrio é instável.

Consideramos o caso em que no mercado atua uma empresa *naive* e três empresas sofisticadas e o caso em que atua uma empresa *naive* e uma empresa sofisticada, de forma a obtermos uma indicação sobre o impacto na economia devido a um aumento do número de empresas sofisticadas. Os intervalos de  $\beta$  avaliados foram calculados de acordo com a expressão (3.11).

#### 5.3.1 1 empresa *naive* e 3 empresas sofisticadas

Nesta subsecção vamos analisar qual o impacto nos lucros obtidos e quantidade produzidas pelas empresas *naive* e sofisticadas no caso em que  $\alpha$  é próximo de 1, onde existe perda da hiperbolicidade. Vamos fazer esta análise uma vez que, para o modelo em que existe equilíbrio de mercado e para  $\alpha = 1$ , não se torna interessante estudar a média de longo prazo devido à periodicidade da órbita.

Assim, utilizamos  $\alpha = 1.1$  de forma a ser próximo do valor utilizado em Huang (2008) e podermos verificar se realmente existem benefícios para as empresas e economia, para o caso em que estas produzem sob um regime de desequilíbrio. Fizemos simulações computacionais com os valores das constantes apresentados em Huang (2008):  $m = 3$ ,  $\sigma = 0.17129$  e  $\beta$  a variar entre 0 e 1<sup>1</sup>.

Da análise dos lucros da Figura 5.7, podemos verificar que  $\langle \pi^x \rangle_\beta < \langle \pi^y \rangle_\beta$  e  $\bar{\pi}^x < \bar{\pi}^y$ , ou seja, os lucros das empresas sofisticadas são sempre superiores aos da empresa *naive*. Além disso, uma vez que o valor de  $\alpha$  é próximo da condição de equilíbrio estável,

<sup>1</sup>No Apêndice D encontram-se ilustrações numéricas para todo o domínio  $\sigma$  e  $\beta$ .

podemos verificar que a média dos lucros é próxima dos lucros de equilíbrio, existindo diferenças apenas na ordem da quarta casa decimal. Contrariamente ao que é referido em Huang (2008),  $\bar{\pi}^x > \langle \pi^x \rangle_\beta$ , isto é, não se torna vantajoso para a empresa *naive* produzir quantidades fora do equilíbrio uma vez que a media dos lucros obtidos são menores aos de equilíbrio.

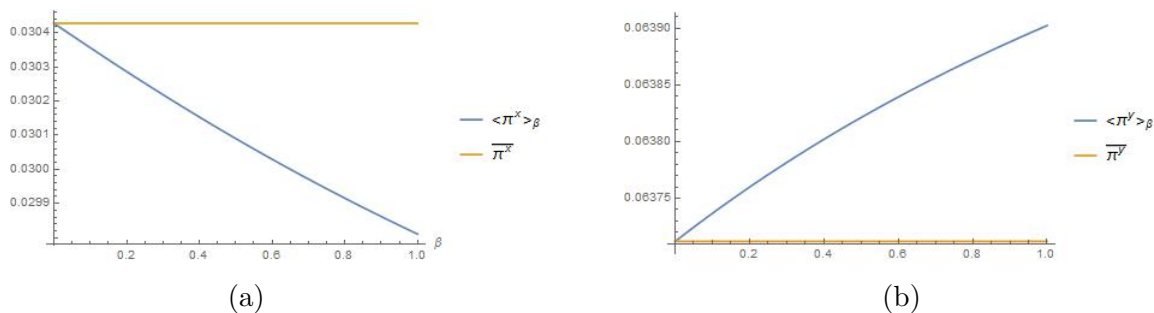


Figura 5.7: Representação gráfica dos lucros a) da empresa *naive* e b) de cada empresa sofisticada.

Relativamente às quantidades produzidas pelas empresas estas não sofrem alterações significativas, sendo a diferença entre a média de longo prazo e o equilíbrio da ordem da terceira casa decimal (Figura 5.8). Podemos verificar que, no equilíbrio, a quantidade produzida pela empresa *naive* é menor do que a produzida por cada empresa sofisticada ( $\bar{x} < \bar{y}$ ).

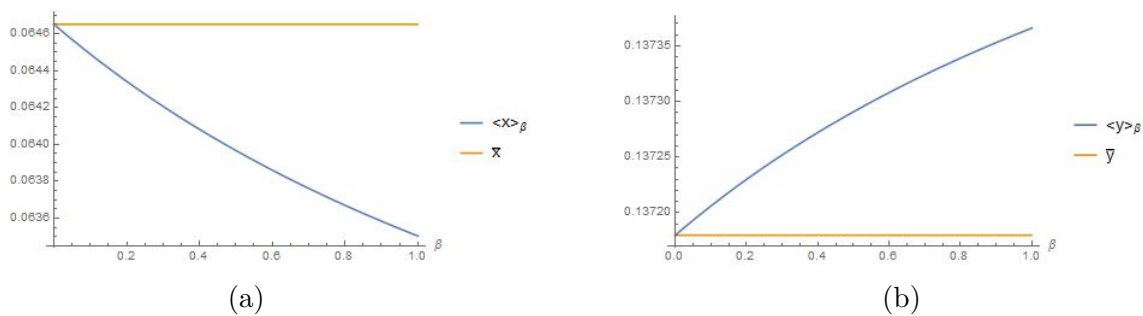


Figura 5.8: Representação gráfica dos lucros a) da empresa *naive* e b) de cada empresa sofisticada.

Constata-se uma diminuição do excedente económico e do consumidor e um aumento

do excedente do produtor, relativamente aos valores de equilíbrio (Figura 5.9). Mais uma vez, a diferença da média e do equilíbrio apenas é visível na quarta casa decimal.

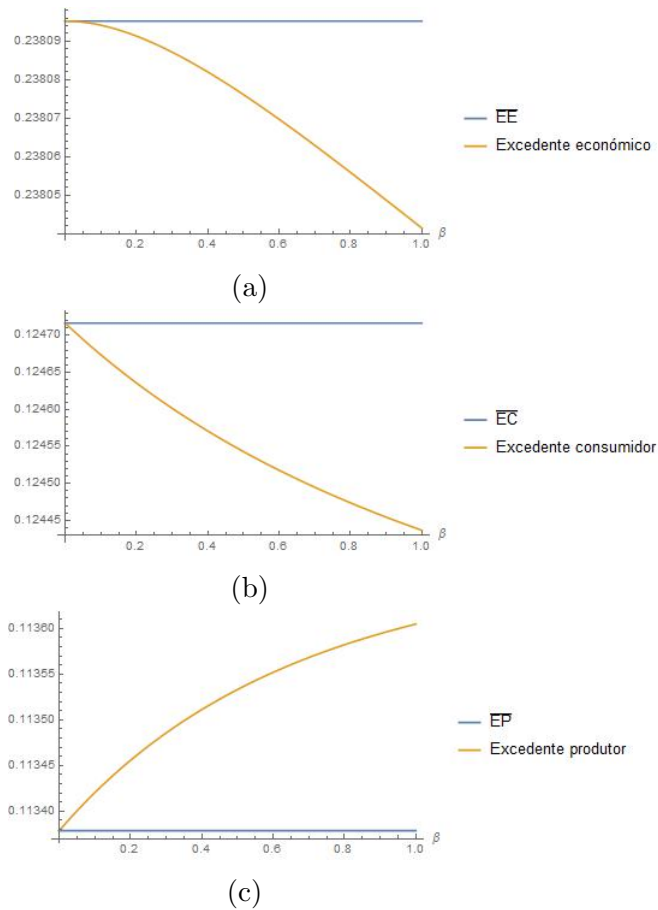


Figura 5.9: Representação gráfica dos excedentes a) económico, b) consumidor e c) produtor.

Tendo em conta a análise anterior, esta situação aparenta ser apenas favorável às empresas sofisticadas, em detrimento de todos os outros agentes, quando não se está em equilíbrio.

### 5.3.2 1 empresa *naive* e 1 empresa sofisticada

#### Variação do custo - parâmetro $\sigma$

Averiguámos qual a alteração no lucro e quantidades produzidas pelas empresas quando variamos o parâmetro  $\sigma$  correspondente à função custo e  $\beta$  correspondente ao

ajustamento de produção da empresa *naive*, sendo constantes os parâmetros  $\alpha = 2$  (tamanho de mercado) e  $m = 1$  (número de empresas sofisticadas).

As Figuras 5.10 e 5.11 representam a evolução dos lucros das empresas *naive* e sofisticada ao longo dos parâmetros  $\sigma$  e  $\beta$ . Podemos visualizar para que combinação de valores de  $\beta$  e  $\sigma$  é que a média do lucro da empresa *naive* e o lucro de equilíbrio são superiores aos da empresa sofisticada, isto é,  $\langle \pi^x \rangle_\beta > \langle \pi^y \rangle_\beta$  e  $\bar{\pi}^x > \bar{\pi}^y$ . Procedemos de forma análoga para visualizarmos quando o desequilíbrio é vantajoso para as empresas no longo prazo, ou seja,  $\langle \pi^x \rangle_\beta > \bar{\pi}^x$  e  $\langle \pi^y \rangle_\beta > \bar{\pi}^y$  (Figuras 5.12 e 5.13).

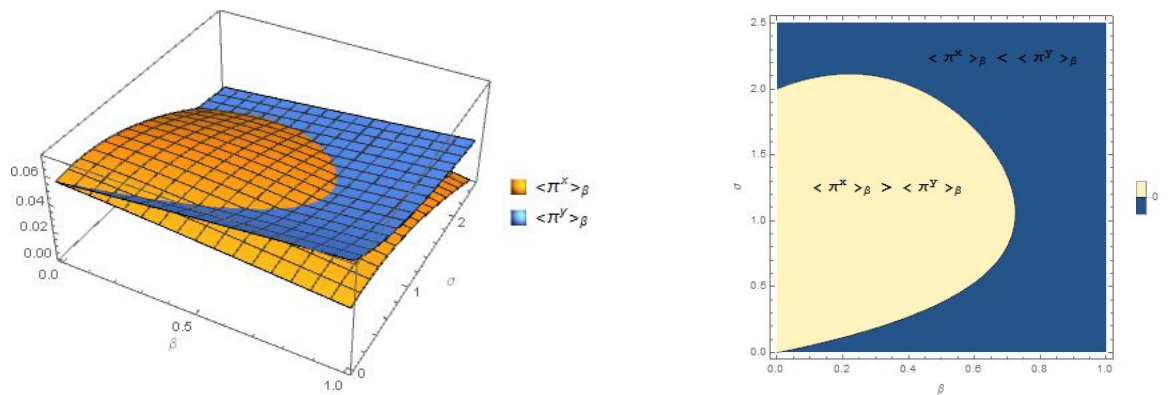


Figura 5.10: Representação gráfica da diferença entre  $\langle \pi^x \rangle_\beta$  e  $\langle \pi^y \rangle_\beta$  para  $\alpha = 2$ ,  $m = 1$  e  $\sigma$  a variar entre 0 e 2.5.

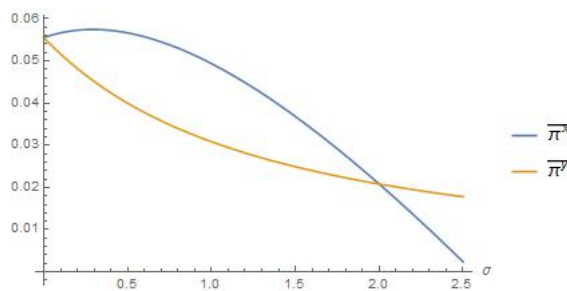


Figura 5.11: Representação gráfica da diferença entre  $\bar{\pi}^x$  e  $\bar{\pi}^y$  para  $\alpha = 2$ ,  $m = 1$  e  $\sigma$  a variar entre 0 e 2.5.

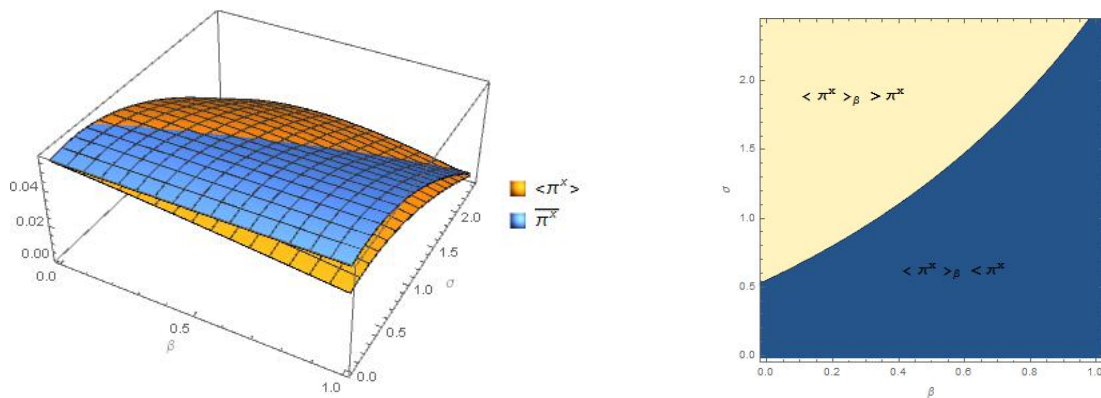


Figura 5.12: Representação gráfica da diferença entre  $\langle \pi^x \rangle_\beta$  e  $\bar{\pi}^x$  para  $\alpha = 2$ ,  $m = 1$  e  $\sigma$  a variar entre 0 e 2.5.

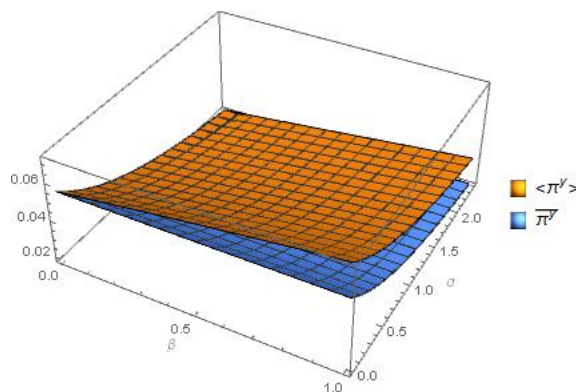


Figura 5.13: Representação gráfica da diferença entre  $\langle \pi^y \rangle_\beta$  e  $\bar{\pi}^y$  para  $\alpha = 2$ ,  $m = 1$  e  $\sigma$  a variar entre 0 e 2.5..

Observamos que a média dos lucros da empresa *naive* é superior à média dos lucros da empresa sofisticada apenas quando  $\sigma < 2$  e quando fazem um ajustamento de produção ( $\beta$ ) não superior a 0.73. No equilíbrio, a empresa *naive* apresenta lucros superiores aos da empresa sofisticada para  $\sigma$  menor que 2.

Comparando a média do lucro da empresa *naive* com o valor de equilíbrio, podemos verificar que quando a empresa enfrenta custos de produção baixos ( $\sigma < 0.53$ ), independentemente do ajustamento de produção  $\beta$  que aplique, não se torna vantajoso para a empresa produzir quantidades fora do equilíbrio. Para custos de produção superiores esta observação já não se aplica. Além disso, à medida que  $\sigma$  aumenta, o intervalo de  $\beta$ , para o qual se torna benéfico para a empresa o desequilíbrio a longo prazo, vai aumentando (Figura 5.12).

Comparando a média do lucro da empresa sofisticada com o valor de equilíbrio, podemos verificar que é sempre vantajoso para a empresa sofisticada produzir quantidades fora do equilíbrio, consequência da empresa *naive* ajustar a quantidade produzida por um fator de  $\beta$  (Figura 5.13).

A Figura 5.14 ilustra o comportamento da quantidade produzida pelas empresas para diferentes combinações de  $\sigma$  e  $\beta$ . Verificamos que a média da quantidade de mercado é sempre menor que a quantidade de mercado de equilíbrio,  $\langle Q \rangle_\beta < \bar{Q}$ . Deste modo, a conclusão relativa ao preço de mercado é oposta.

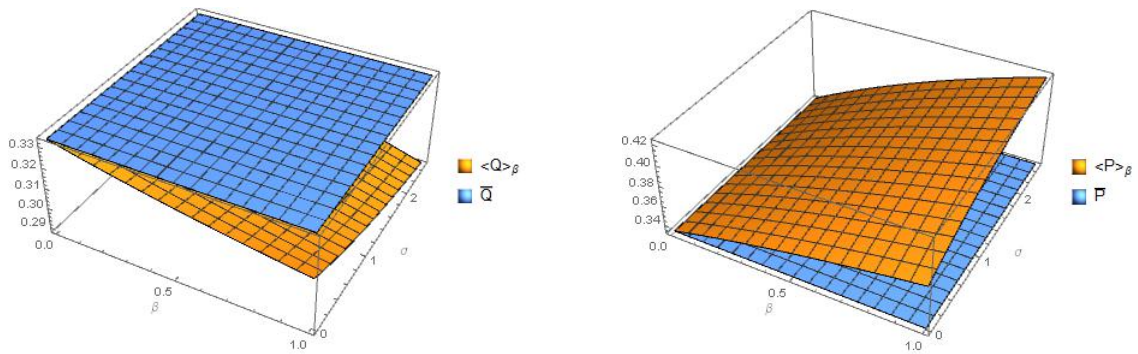


Figura 5.14: Representação gráfica da quantidade e preço de mercado para  $\alpha = 2$ ,  $m = 1$  e  $\sigma$  a variar entre 0 e 2.5.

Relativamente à empresa *naive*, a quantidade de equilíbrio é sempre superior à quantidade produzida fora do equilíbrio ( $\langle x \rangle_\beta < \bar{x}$ ) e, relativamente à empresa sofisticada, a conclusão é oposta ( $\langle y \rangle_\beta > \bar{y}$ ). No equilíbrio, a empresa *naive* produz sempre quantidades superiores à empresa sofisticada ( $\bar{x} > \bar{y}$ ) enquanto que, sob uma situação de desequilíbrio, esta conclusão já não se verifica (Figura 5.15).

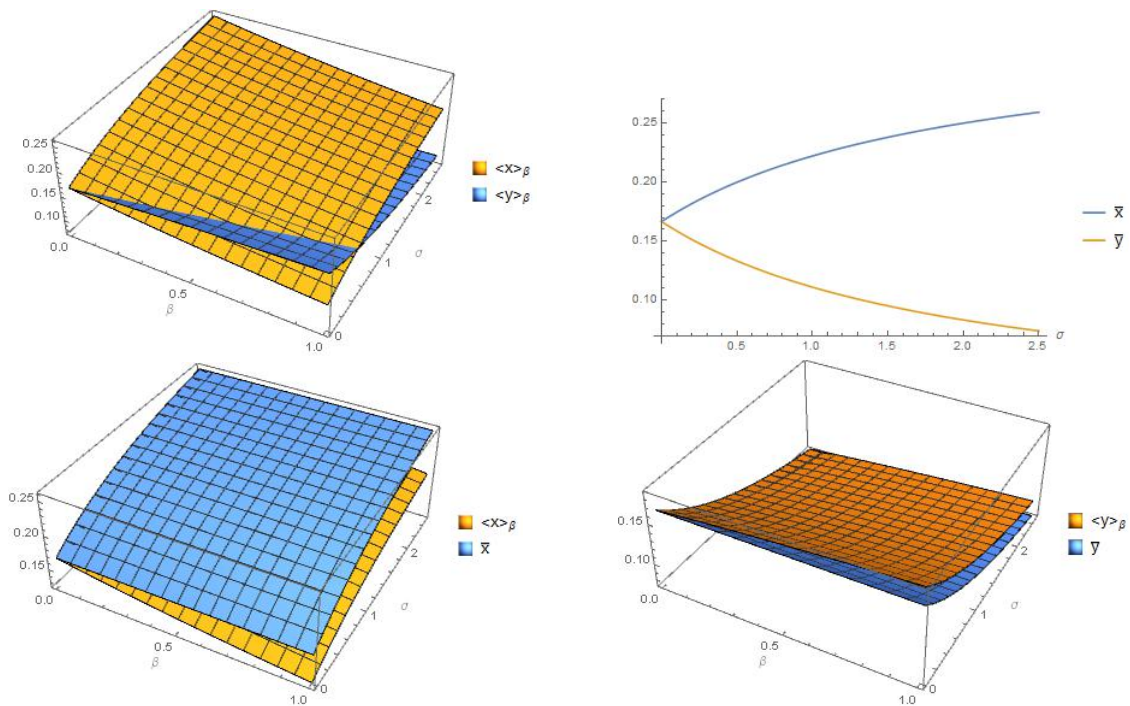


Figura 5.15: Representação gráfica da quantidade da empresa *naive* e da empresa sofisticada para  $\alpha = 2$ ,  $m = 1$  e  $\sigma$  a variar entre 0 e 2.5.

A Figura 5.16 retrata a evolução dos excedentes ao longo dos parâmetros custo e ajustamento de produção ( $\sigma$  e  $\beta$ ). Podemos verificar que, para qualquer valor de  $\sigma$  e  $\beta$ , o excedente do consumidor e o excedente económico no longo prazo diminuem, quando as empresas produzem quantidades fora do equilíbrio. Além disso, esta diminuição aumenta com o aumento dos custos de produção ( $\sigma$ ) e aumento do ajustamento de produção ( $\beta$ ). Deste modo, apenas o excedente do produtor aumenta. Note-se que, tendo em linha de conta as conclusões retiradas anteriormente, o aumento do excedente do produtor pode advir somente do aumento dos lucros obtidos pela empresa sofisticada.

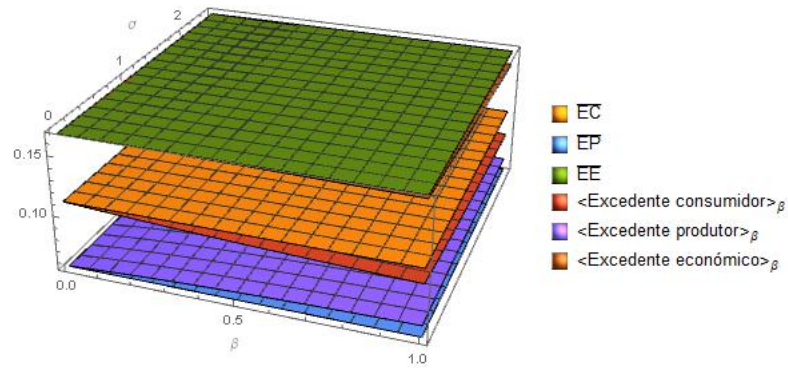


Figura 5.16: Representação gráfica da diferença entre a média e o equilíbrio do excedente do consumidor, produtor e económico para  $\alpha = 2$ ,  $m = 1$  e  $\sigma$  a variar entre 0 e 2.5..

### Variação tamanho de mercado - parâmetro $\alpha$

Examinamos qual o impacto do tamanho de mercado ( $\alpha$ ) nos lucros das empresas, fazendo simulações computacionais para  $\alpha = 2$ ,  $\alpha = 5$  e  $\alpha = 10$ . É importante referir que, à medida que o tamanho de mercado diminui ( $\alpha$  maior), o intervalo de ajustamento de produção  $\beta$  da empresa *naive* a considerar é menor (3.11), bem como o intervalo do parâmetro  $\sigma$  correspondente à função custo.

À medida que o tamanho de mercado diminui, o intervalo relativo para o qual se verifica que a empresa *naive* apresenta lucros superiores à empresa sofisticada,  $\langle \pi^x \rangle_\beta > \langle \pi^y \rangle_\beta$  e  $\bar{\pi}^x > \bar{\pi}^y$ , é maior (Figuras 5.17 e 5.18). Claro que o intervalo absoluto é menor uma vez que consideramos intervalos de ajustamento de produção e de custos menores ( $\beta$  e  $\sigma$ ).

As mesmas conclusões podem ser retiradas quanto à diferença entre os lucros obtidos pela empresa *naive* fora do equilíbrio e no equilíbrio  $\langle \pi^x \rangle_\beta$  e  $\bar{\pi}^x$  (Figura 5.19).

Relativamente à empresa sofisticada, verifica-se que, para qualquer combinação de tamanho de mercado ( $\alpha$ ), custo ( $\sigma$ ) e ajustamento de produção ( $\beta$ ), o lucro obtido fora do equilíbrio é sempre superior ao obtido em equilíbrio, isto é,  $\langle \pi^y \rangle_\beta > \bar{\pi}^y$  (Figura 5.20).

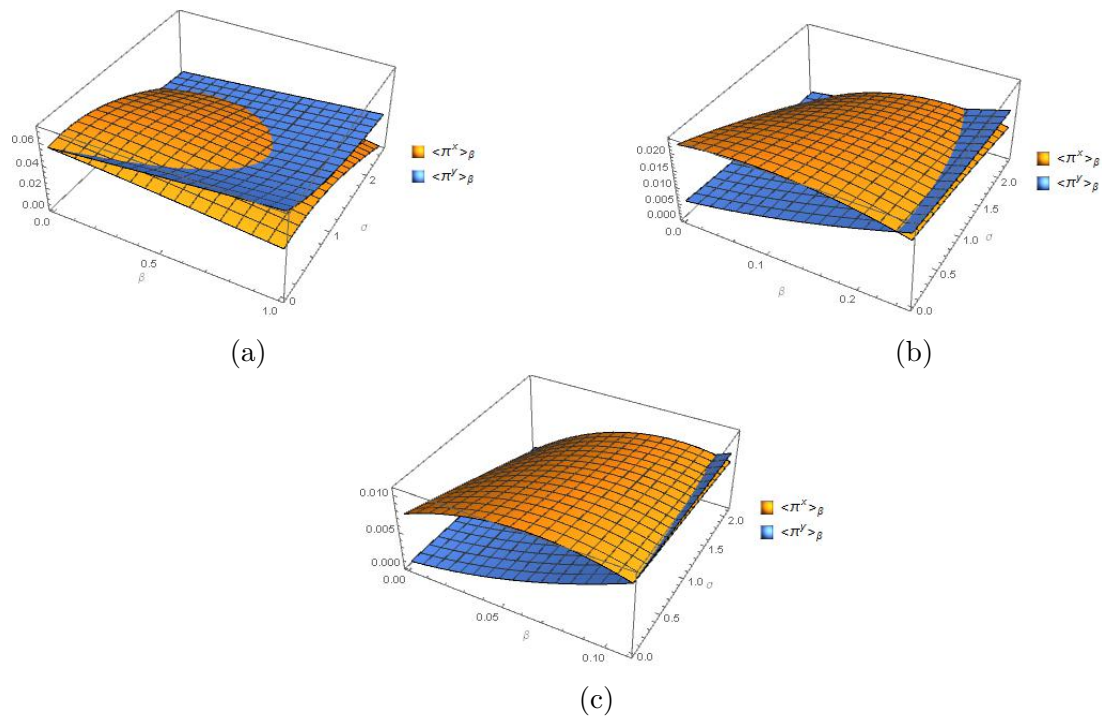


Figura 5.17: Representação gráfica de  $\langle \pi^x \rangle_\beta$  e  $\langle \pi^y \rangle_\beta$  para: a)  $\alpha = 2$ ,  $m = 1$ ,  $\sigma$  a variar entre 0 e 2.5 e  $\beta$  a variar entre 0 e 1; b)  $\alpha = 5$ ,  $m = 1$ ,  $\sigma$  a variar entre 0 e 2.3 e  $\beta$  a variar entre 0 e 0.25; c)  $\alpha = 10$ ,  $m = 1$ ,  $\sigma$  a variar entre 0 e 2.1 e  $\beta$  a variar entre 0 e 0.11.

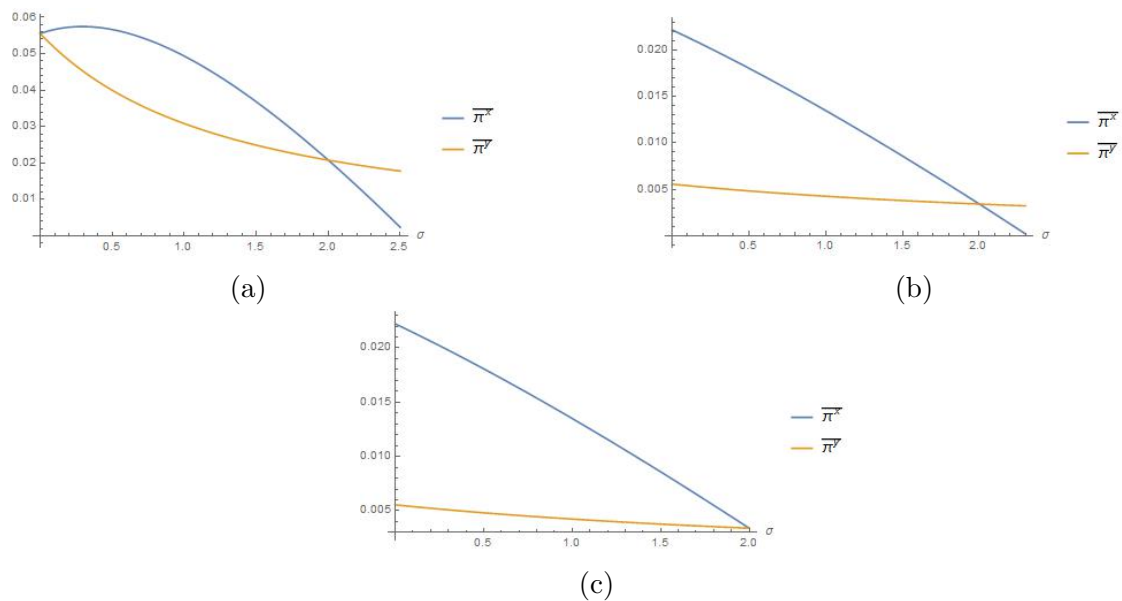


Figura 5.18: Representação gráfica de  $\bar{\pi}^x$  e  $\bar{\pi}^y$  para: a)  $\alpha = 2$ ,  $m = 1$ ,  $\sigma$  a variar entre 0 e 2.5 e  $\beta$  a variar entre 0 e 1; b)  $\alpha = 5$ ,  $m = 1$ ,  $\sigma$  a variar entre 0 e 2.3 e  $\beta$  a variar entre 0 e 0.25; c)  $\alpha = 10$ ,  $m = 1$ ,  $\sigma$  a variar entre 0 e 2.1 e  $\beta$  a variar entre 0 e 0.11.

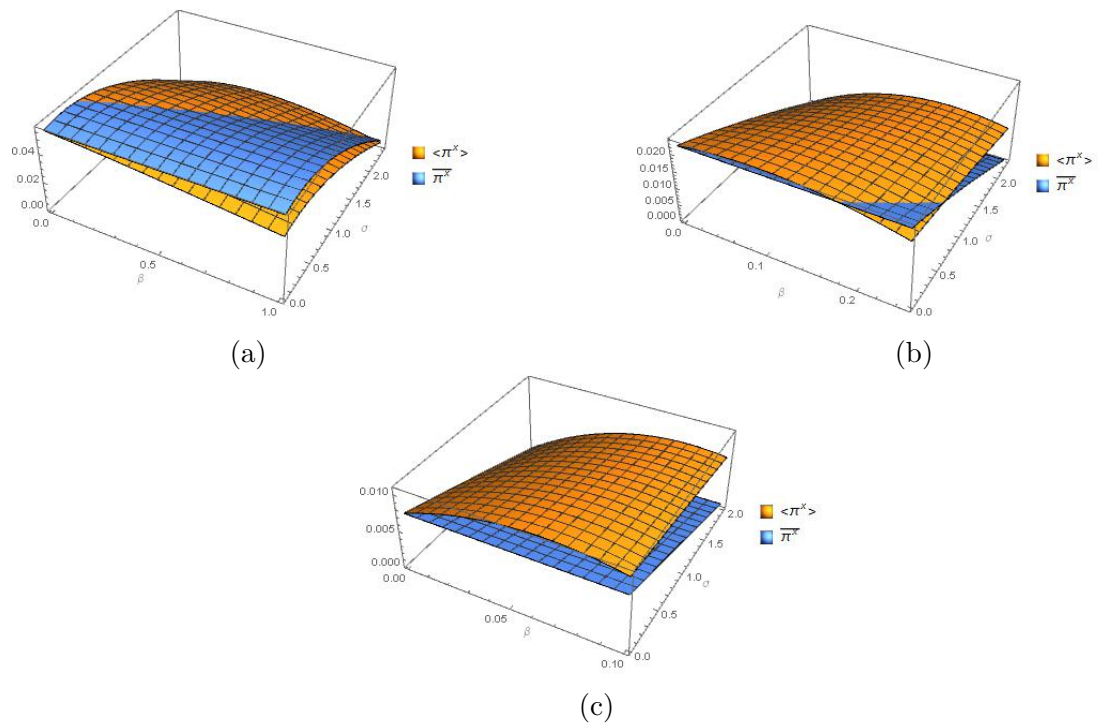


Figura 5.19: Representação gráfica de  $\langle \pi^x \rangle_\beta$  e  $\bar{\pi}^x$  para: a)  $\alpha = 2$ ,  $m = 1$ ,  $\sigma$  a variar entre 0 e 2.5 e  $\beta$  a variar entre 0 e 1; b)  $\alpha = 5$ ,  $m = 1$ ,  $\sigma$  a variar entre 0 e 2.3 e  $\beta$  a variar entre 0 e 0.25; c)  $\alpha = 10$ ,  $m = 1$ ,  $\sigma$  a variar entre 0 e 2.1 e  $\beta$  a variar entre 0 e 0.11.

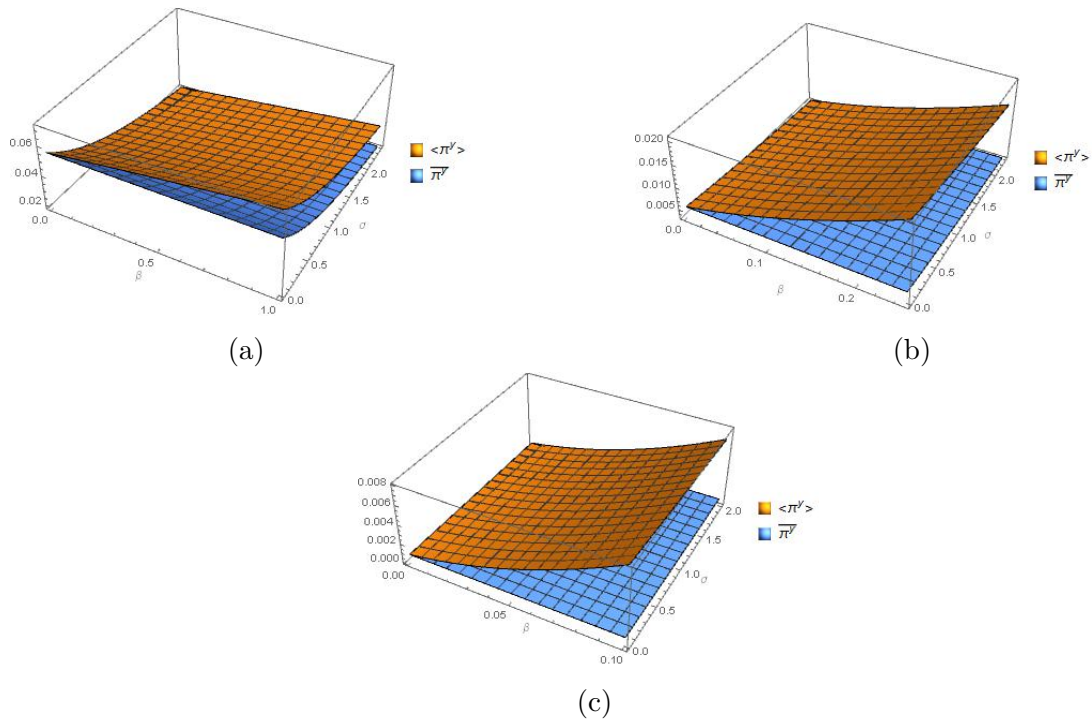


Figura 5.20: Representação gráfica de  $\langle \pi^y \rangle_\beta$  e  $\bar{\pi}^y$  para: a)  $\alpha = 2$ ,  $m = 1$ ,  $\sigma$  a variar entre 0 e 2.5 e  $\beta$  a variar entre 0 e 1; b)  $\alpha = 5$ ,  $m = 1$ ,  $\sigma$  a variar entre 0 e 2.3 e  $\beta$  a variar entre 0 e 0.25; c)  $\alpha = 10$ ,  $m = 1$ ,  $\sigma$  a variar entre 0 e 2.1 e  $\beta$  a variar entre 0 e 0.11.

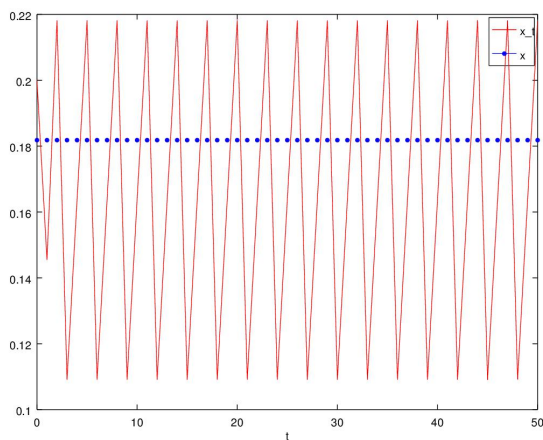
### Variação da quantidade em função do tempo

Observamos a evolução da quantidade produzida pelas empresas em função do tempo. Atribuímos diferentes valores aos parâmetros relativos ao custo, tamanho de mercado e taxa de ajustamento de produção de forma a serem visíveis as alterações na órbita (Figuras 5.21, 5.22).

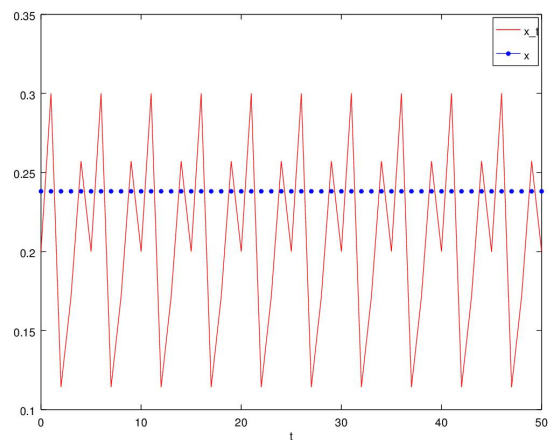
Constatamos que a órbita das quantidades produzidas pelas empresas é influenciada pelos valores atribuídos aos parâmetros e que apresenta comportamento cíclico.

Analisando a quantidade produzida pelas empresas *naive* em função do tempo, a empresa acaba por num período produzir bastante abaixo da quantidade de equilíbrio e no período seguinte aumentar a sua produção (em regra geral superior à média). Como consequência, o comportamento da empresa sofisticada acaba por ser oposto.

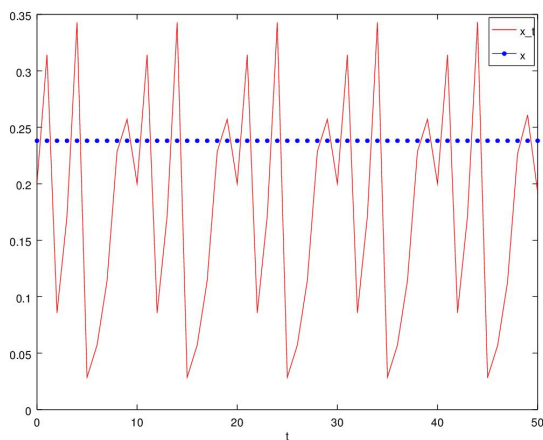
O aumento da taxa de ajustamento de produção da empresa *naive* faz com que a amplitude do intervalo de  $x_t$  aumente e que do intervalo  $y_t$  diminua.



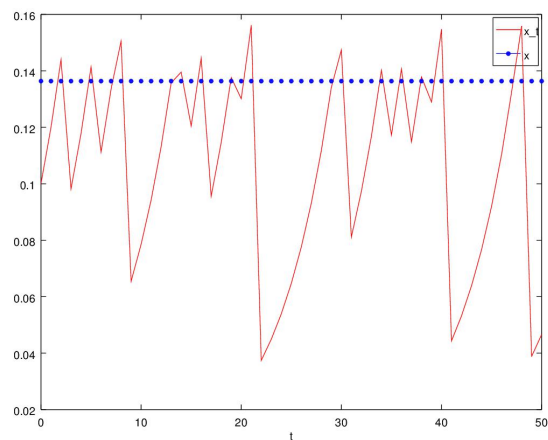
(a)



(b)

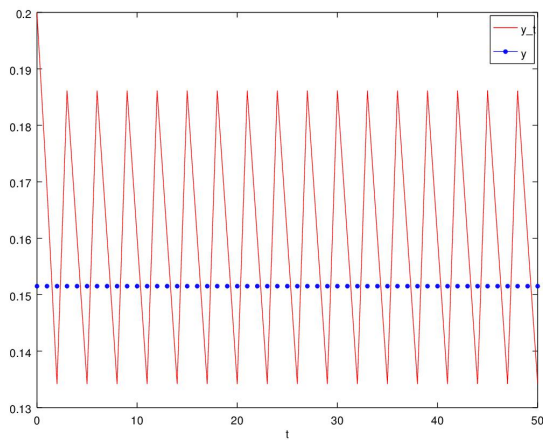


(c)

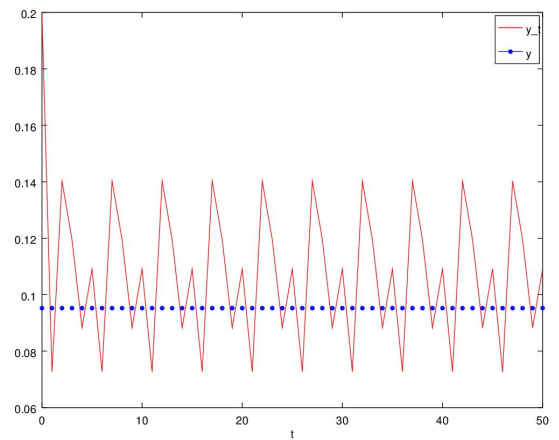


(d)

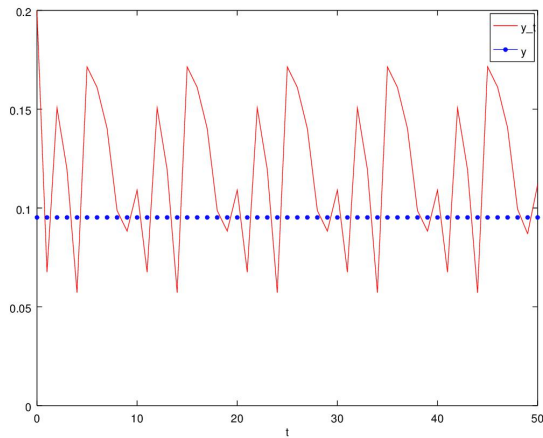
Figura 5.21: Representação gráfica de  $x_t$  para: a)  $\alpha = 2$ ,  $m = 1$ ,  $\beta = 0.5$  e  $\sigma = 0.2$ ; b)  $\alpha = 2$ ,  $m = 1$ ,  $\beta = 0.5$  e  $\sigma = 1.5$ ; c)  $\alpha = 2$ ,  $m = 1$ ,  $\beta = 1$  e  $\sigma = 1.5$ ; d)  $\alpha = 5$ ,  $m = 1$ ,  $\beta = 0.2$  e  $\sigma = 0.5$ . Nota: A linha azul corresponde ao valor de equilíbrio.



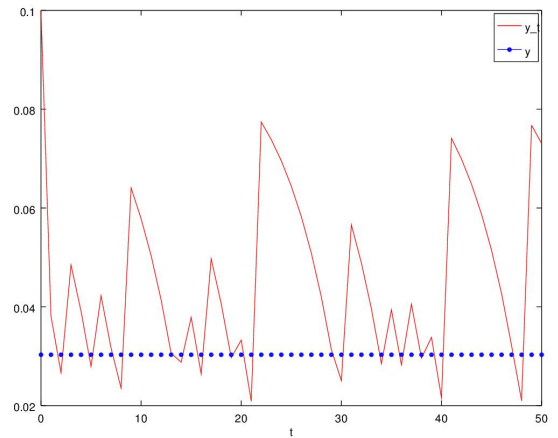
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 5.22: Representação gráfica de  $y_t$  para: a)  $\alpha = 2$ ,  $m = 1$ ,  $\beta = 0.5$  e  $\sigma = 0.2$ ; b)  $\alpha = 2$ ,  $m = 1$ ,  $\beta = 0.5$  e  $\sigma = 1.5$ ; c)  $\alpha = 2$ ,  $m = 1$ ,  $\beta = 1$  e  $\sigma = 1.5$ ; d)  $\alpha = 5$ ,  $m = 1$ ,  $\beta = 0.2$  e  $\sigma = 0.5$ . Nota: A linha azul corresponde ao valor de equilíbrio.

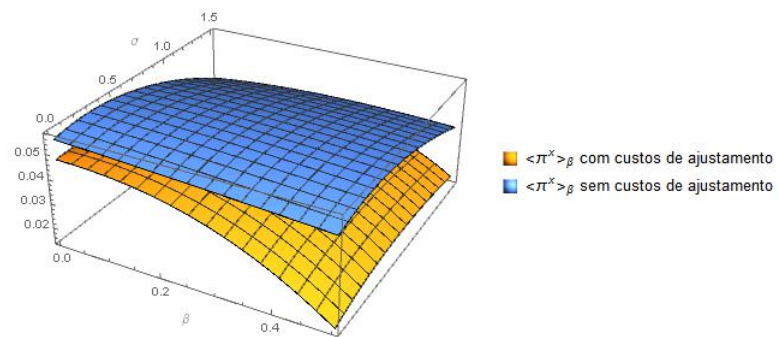
### 5.3.3 Ausência *versus* presença de um custo de ajustamento de produção

Os gráficos das Figuras 5.23 e 5.24 permitem comparar a média dos lucros obtidos pelas empresas *naive* e sofisticadas, quando são introduzidos no modelo custos de ajustamento de produção.

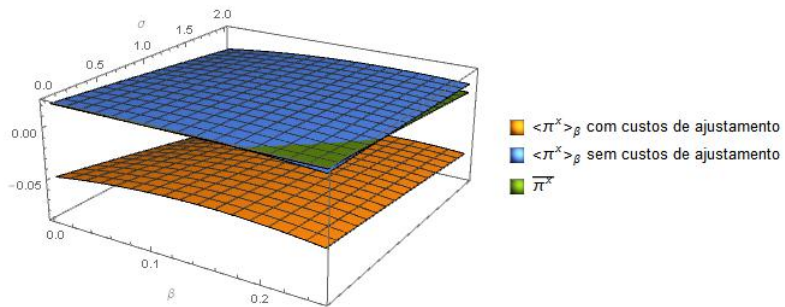
Para executarmos estas simulações utilizamos  $x_{t-2} = x_{min}$  e  $y_{t-2} = y_{max}$ . Verifica-se que, tanto as empresas *naive* como as empresas sofisticadas, obtêm a média do lucro

inferior quando são tidos em consideração custos de ajustamento de produção. Além disso, o intervalo para o qual as empresas obtêm lucros positivos diminui. Note-se que, para um tamanho de mercado mais pequeno ( $\alpha = 5$ ), tanto a empresa *naive* como as empresas sofisticadas não conseguem obter lucros positivos, para qualquer combinação dos parâmetros.

Podemos concluir que, ao serem introduzidos custos de ajustamento, as empresas ao produzirem num regime de desequilíbrio e, conseqüentemente, ao alterarem constantemente a quantidade produzida, os benefícios que eventualmente poderiam ter acabam por ser eliminados, refletindo-se numa diminuição acentuada dos lucros.

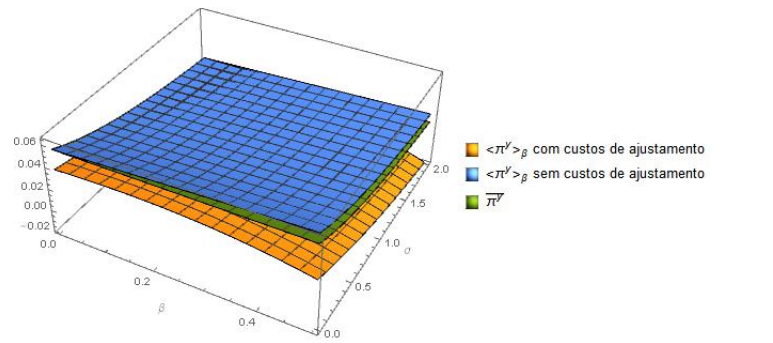


(a)

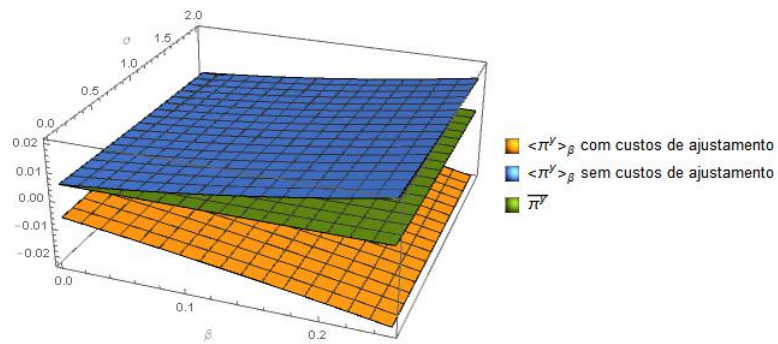


(b)

Figura 5.23: Representação gráfica da média dos lucros (com custo de ajustamento de produção e sem) e dos lucros de equilíbrio da empresa *naive* para: a)  $\alpha = 2$ ,  $m = 1$ ,  $\sigma$  a variar entre 0 e 2; e b)  $\alpha = 5$ ,  $m = 1$ ,  $\sigma$  a variar entre 0 e 2.



(a)



(b)

Figura 5.24: Representação gráfica da média dos lucros (com custo de ajustamento de produção e sem) e dos lucros de equilíbrio da empresa sofisticada para: a)  $\alpha = 2$ ,  $m = 1$ ,  $\sigma$  a variar entre 0 e 3; e b)  $\alpha = 5$ ,  $m = 1$ ,  $\sigma$  a variar entre 0 e 3.

## 5.4 Colusão empresas sofisticadas *versus* ausência de colusão

Os gráficos das Figuras 5.25, 5.26 e 5.27 apresentam as curvas dos lucros de equilíbrio para uma empresa *naive* e para uma empresa sofisticada, quando atuam no mercado 3 empresas sofisticadas (no caso em que formam uma colusão e no caso em que não formam uma colusão).

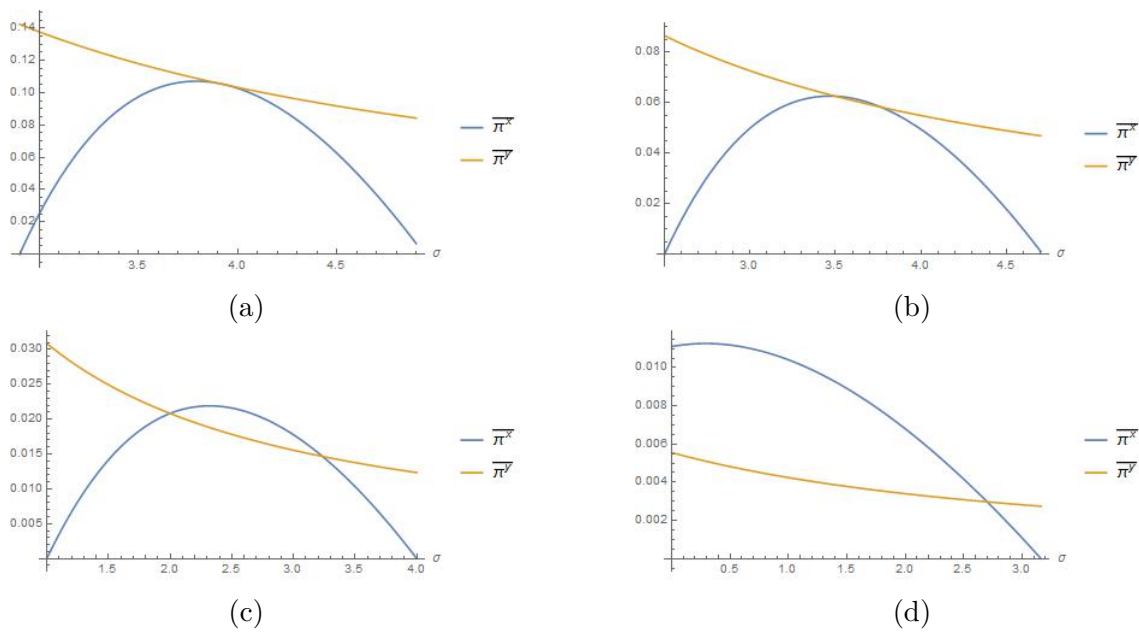


Figura 5.25: Representação gráfica de  $\bar{\pi}^x$  e  $\bar{\pi}^y$  com colusão para: a)  $\alpha = 0.1, m = 3, \sigma$  a variar entre 2.9 e 4.9; b)  $\alpha = 0.5, m = 3, \sigma$  a variar entre 2.5 e 4.7; c)  $\alpha = 2, m = 3, \sigma$  a variar entre 1 e 3; d)  $\alpha = 5, m = 3, \sigma$  a variar entre 0 e 3.1.

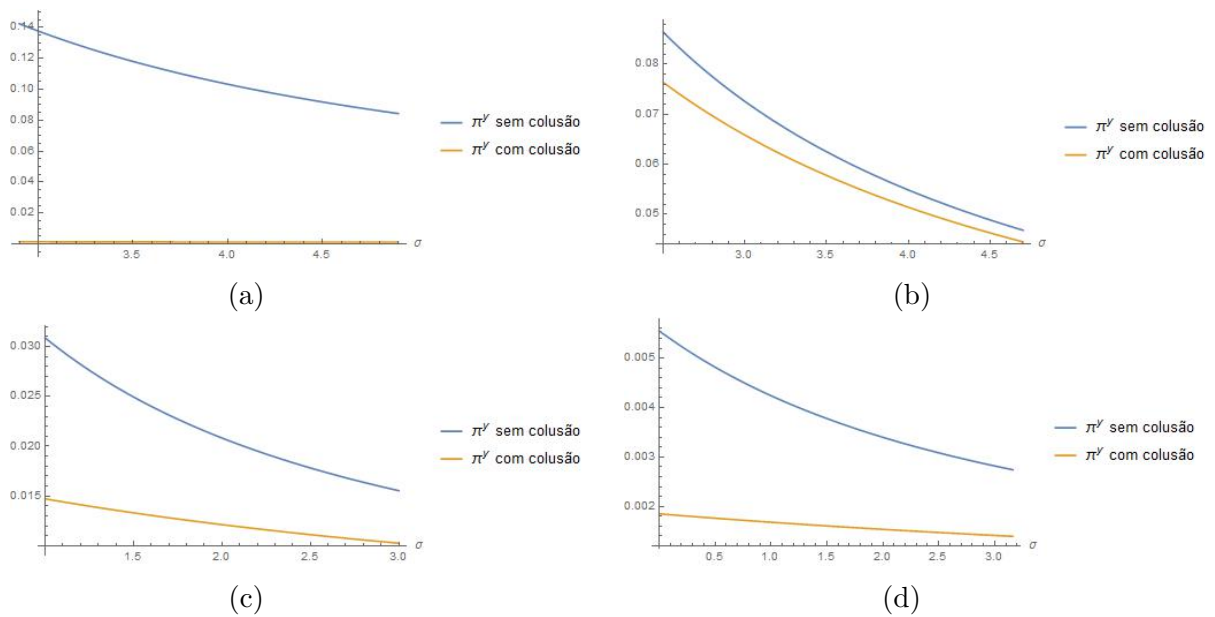


Figura 5.26: Representação gráfica de  $\bar{\pi}^y$  sem colusão e  $\bar{\pi}^y$  com colusão para: a)  $\alpha = 0.1, m = 3, \sigma$  a variar entre 2.9 e 4.9; b)  $\alpha = 0.5, m = 3, \sigma$  a variar entre 2.5 e 4.7; c)  $\alpha = 2, m = 3, \sigma$  a variar entre 1 e 3; d)  $\alpha = 5, m = 3, \sigma$  a variar entre 0 e 3.1.

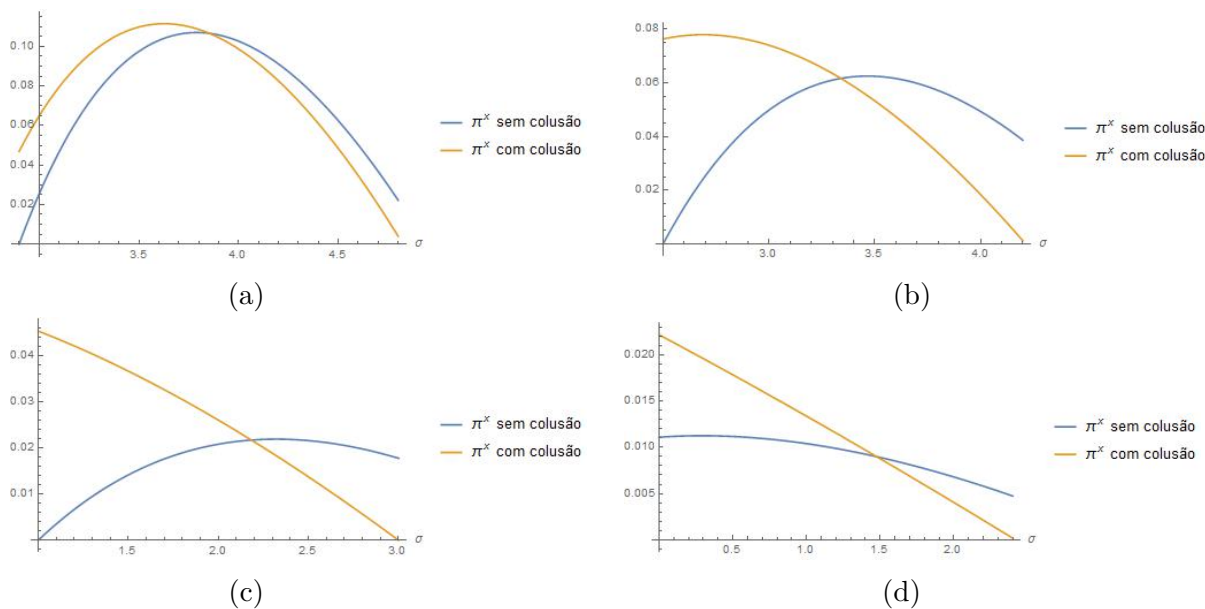


Figura 5.27: Representação gráfica de  $\bar{\pi}^x$  sem colusão e  $\bar{\pi}^x$  com colusão para: a)  $\alpha = 0.1$ ,  $m = 3$ ,  $\sigma$  a variar entre 2.9 e 4.9; b)  $\alpha = 0.5$ ,  $m = 3$ ,  $\sigma$  a variar entre 2.5 e 4.7; c)  $\alpha = 2$ ,  $m = 3$ ,  $\sigma$  a variar entre 1 e 3; d)  $\alpha = 5$ ,  $m = 3$ ,  $\sigma$  a variar entre 0 e 3.1.

Comparando os lucros de equilíbrio da empresa *naive* e de cada empresa sofisticada na ausência de colusão, verifica-se que quando os custos são menores (parâmetro  $\sigma$  menor), a empresa *naive* beneficia da existência de colusão (Figura 5.27). Quanto às empresas sofisticadas, estas obtêm sempre lucros superiores quando não formam uma colusão (Figura 5.26). Assim, uma vez que o equilíbrio sem colusão é superior, as empresas sofisticadas não têm incentivos à formação de uma colusão.

Numa primeira abordagem, seria de esperar que as empresas sofisticadas ao formarem uma colusão obtivessem lucros superiores comparativamente com a ausência de colusão. No entanto, ao atuarem no mercado um conjunto de empresas sofisticadas e uma empresa *naive* (olipólio heterogéneo), esta suposição já não se verifica, tal como demonstrado na Secção 4.5.

Economicamente, e sob o ponto de vista da regulação económica, a presença de uma empresa *naive* poderá torna-se positiva e vantajosa no sentido em que poderá prevenir a formação de colúses ou cessar um conluio, uma vez que não corresponde à situação que o lucro é máximo para as empresas que conluem.

## 5.5 Modelo de Cournot

Nesta secção estão representadas algumas simulações para o modelo de Cournot. Considera-se que no mercado atuam empresas homogéneas que competem pela quantidade e que escolhem quantidades simultaneamente. As empresas são economicamente racionais e atuam de forma a maximizarem o seu lucro (empresas sofisticadas). A função procura e a função custo são as enunciadas no Capítulo 3.

### Duopólio de Cournot

Consideramos o caso clássico de Cournot, em que atuam no mercado duas empresas homogéneas: duopólio. Comparámos os lucros de equilíbrio com os obtidos no modelo apresentado no Capítulo 3, em que atuam no mercado uma empresa *naive* e uma empresa sofisticada.

Na Figura 5.28 estão representados os lucros para uma empresa *naive* e sofisticada, e para o duopólio de Cournot. Verifica-se que, à medida que o tamanho de mercado diminui ( $\alpha$  maior), os lucros obtidos pelas empresas que formam o duopólio homogéneo aumenta comparativamente com os obtidos pelas empresas *naive* e sofisticadas, caso em que atuam no mercado empresas heterogéneas.

Relativamente à quantidade (Figura 5.29), constata-se que, à medida que o tamanho de mercado diminui, a quantidade produzida pelas empresas que formam o duopólio homogéneo aumenta comparativamente com a empresa sofisticada e diminui comparativamente com a empresa *naive*.

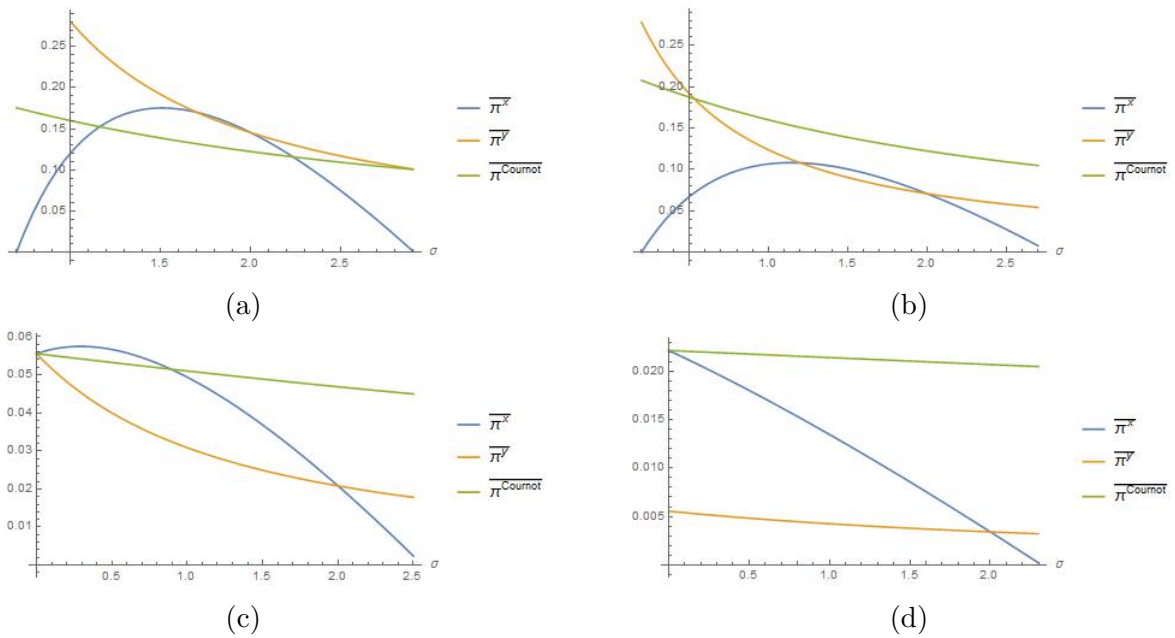


Figura 5.28: Representação gráfica de  $\bar{\pi}^x$ ,  $\bar{\pi}^y$  e  $\bar{\pi}^{Cournot}$  para: a)  $\alpha = 0.3$ ,  $m = 1$ ,  $\sigma$  a variar entre 0.7 e 2.9; b)  $\alpha = 0.8$ ,  $m = 1$ ,  $\sigma$  a variar entre 0.2 e 2.7; c)  $\alpha = 2$ ,  $m = 1$ ,  $\sigma$  a variar entre 0 e 2.5; d)  $\alpha = 5$ ,  $m = 1$ ,  $\sigma$  a variar entre 0 e 2.3.

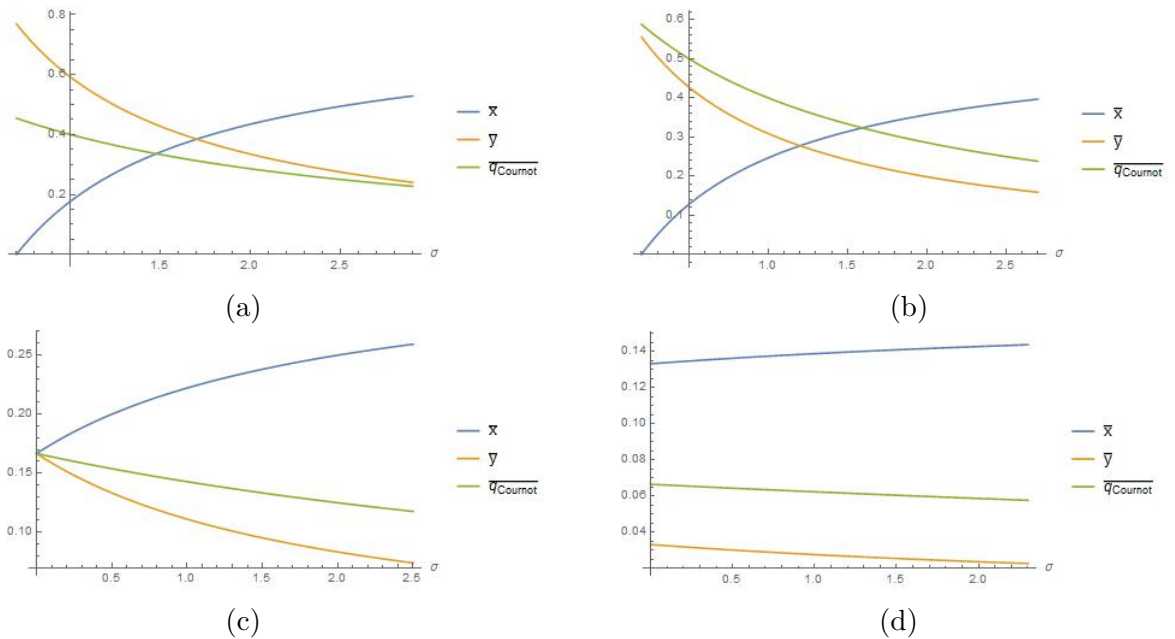


Figura 5.29: Representação gráfica de  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  e  $\bar{q}_{Cournot}$  para: a)  $\alpha = 0.3$ ,  $m = 1$ ,  $\sigma$  a variar entre 0.7 e 2.9; b)  $\alpha = 0.8$ ,  $m = 1$ ,  $\sigma$  a variar entre 0.2 e 2.7; c)  $\alpha = 2$ ,  $m = 1$ ,  $\sigma$  a variar entre 0 e 2.5; d)  $\alpha = 5$ ,  $m = 1$ ,  $\sigma$  a variar entre 0 e 2.3.

## Modelo de Cournot com $m$ empresas sofisticadas

Consideramos que atuam no mercado  $m$  empresas. Simulámos o caso em que existe colusão de  $m - 1$  empresas e comparamos ao oligopólio de Cournot sem colusão.

Os gráficos da Figura 5.30 permitem comparar os lucros de equilíbrio obtidos por uma empresa, que faz parte de uma colusão formada por  $m - 1$  empresas, com os lucros de uma empresa quando  $m$  empresas competem à Cournot sem formarem uma colusão.

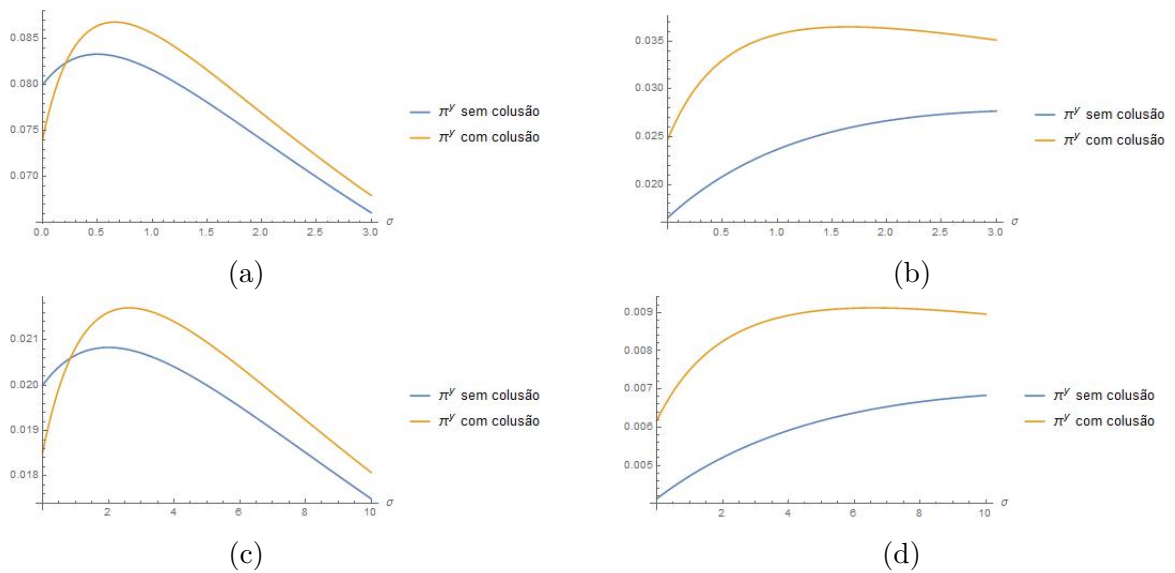


Figura 5.30: Representação gráfica de  $\bar{\pi}^y$  sem colusão e  $\bar{\pi}^y$  com colusão para: a)  $\alpha = 0.5$ ,  $m = 4$ ,  $\sigma$  a variar entre 0 e 3; b)  $\alpha = 0.5$ ,  $m = 10$ ,  $\sigma$  a variar entre 0 e 3; c)  $\alpha = 2$ ,  $m = 4$ ,  $\sigma$  a variar entre 0 e 10; d)  $\alpha = 2$ ,  $m = 10$ ,  $\sigma$  a variar entre 0 e 10.

Quando atuam no mercado empresas homogéneas, estas beneficiam da formação de colúões. No entanto, esta conclusão já não se verifica para o caso em que atuam no mercado grupos de empresas que seguem estratégias de maximização de produção distintas, tal como indicado na Secção 5.4.

## Conclusão

Com a elaboração do presente trabalho procuramos melhorar a compreensão de estruturas de mercado heterogéneas em tempo discreto, tanto no equilíbrio como no desequilíbrio. Para isso, recorremos ao modelo apresentado em Huang (2008), alteramos a otimização da empresa *naive* e construímos um novo modelo com equilíbrio de mercado. Introduzimos à função custo um custo de ajustamento de produção e, no equilíbrio, estudamos o modelo na presença e na ausência de colusão das empresas sofisticadas. Procuramos dar resposta às questões de investigação enunciadas na Introdução.

Estudamos o modelo para o caso em que existe estabilidade do ponto de equilíbrio e para o caso em que existe instabilidade. Neste último caso, comparamos o modelo num regime de equilíbrio com um regime de desequilíbrio, recorrendo à igualdade da média temporal com a média espacial.

Obtivemos o ponto de equilíbrio do novo modelo e verificamos que este coincidia com o equilíbrio de mercado, ou seja, a quantidade de equilíbrio do sistema proposto corresponde à quantidade de equilíbrio de mercado, não existindo nem escassez nem excesso de oferta. Mostramos que a condição de estabilidade do modelo depende do tamanho de mercado: para um tamanho de mercado grande ( $\alpha < 1$ ) o sistema é estável.

Demonstramos analiticamente que, numa situação de equilíbrio, a empresa *naive* apresenta lucros superiores ao das empresas sofisticadas dependendo dos valores atribuídos aos parâmetros. Através das simulações numéricas no Capítulo 5 constatamos que, quando o equilíbrio é estável, o intervalo para o qual a empresa *naive* apresenta lucros superiores aos das empresas sofisticadas é muito pequeno; quando o equilíbrio é instável, a empresa *naive* obtém lucros superiores em grande parte do domínio.

Relativamente às empresas oligopolísticas produzirem num estado de desequilíbrio quando o ponto fixo é instável, verificamos que as empresas sofisticadas beneficiam sempre, no longo prazo, de um estado de desequilíbrio resultante do facto da empresa *naive* alterar de período a período a quantidade produzida. Quanto à empresa *naive*, constatamos que, quando a empresa enfrenta custos de produção baixos que, indepen-

dentemente do ajustamento de produção que aplique, não se torna vantajoso para a empresa produzir quantidades fora do equilíbrio.

Observa-se, no longo prazo, uma perda do excedente económico quando as empresas produzem sob um regime de desequilíbrio. Por um lado, a média do excedente do produtor aumenta e, por outro lado, a média do excedente do consumidor diminui uma vez que a média da quantidade produzida em desequilíbrio é inferior à de equilíbrio, proporcionando um aumento do preço.

A introdução de um custo de ajustamento de produção não altera o valor de equilíbrio nem as condições de estabilidade. Verifica-se, no entanto, que permanecendo o equilíbrio instável, este é uma sela. Como tal, existe uma direção estável ao longo da qual se verifica a convergência das soluções para o equilíbrio. Sob uma situação de desequilíbrio, assiste-se a uma diminuição da média dos lucros das empresas oligopolísticas comparativamente com a obtida sem este custo.

No equilíbrio, observa-se que, na presença de um oligopólio heterógeno ( $m$  empresas sofisticadas e uma empresa *naive*), as empresas sofisticadas, ao formarem uma colusão não obtêm lucros superiores comparativamente com a situação em que não formam uma colusão. Neste sentido, a empresa *naive* pode funcionar como reguladora na medida em que pode prevenir a formação de colusões ou cessar uma colusão já existente.

A presente dissertação revela-se de particular importância na medida em que toma mais realistas as implicações e benefícios/ prejuízos das empresas oligopolísticas produzirem sob um regime de desequilíbrio. Note-se que é essencial que o equilíbrio do sistema dinâmico seja igual ao equilíbrio de mercado de forma a ser possível fazer uma interpretação económica comparável com os modelos mais usados; além disso, este pressuposto tem consequências ao nível da estabilidade do modelo, que passa a ser condicionada apenas pelo tamanho de mercado. A introdução de custos de ajustamento de produção revela-se como um fator que elimina o domínio para o qual um estado de desequilíbrio possa ser vantajoso para as empresas oligopolísticas.

Em trabalhos futuros, seria interessante estudar a dinâmica do modelo, considerando que as empresas sofisticadas não formam uma colusão (não só no equilíbrio, como executado neste trabalho); para estudar a estabilidade do sistema ter-se-ia de trabalhar com uma matriz  $(m + 1) \times (m + 1)$ . Seria também interessante considerar que as empresas oligopolísticas seguissem outras estratégias (expectativas). Sob o ponto de vista da distinção das empresas, seria interessante considerar a existência de diferenciação do produto uma vez que a sua qualidade é essencial para indústrias competitivas.

# Apêndice A

Neste apêndice encontram-se algumas expressões obtidas, através do *software Wolfram Mathematica*, para o modelo apresentado no Capítulo 3.

## Média lucro empresa *naive*

$$\begin{aligned} \langle \pi^x \rangle = & \frac{((\alpha - 1)m + \sigma) \left( \frac{2\alpha^2 m ((\alpha - 1)\beta - 1)^3 + (\beta + 1)^3 ((\alpha - 1)m + \sigma)}{2\alpha m + \sigma} + \frac{3\alpha^2 \beta m (\alpha + \beta + 1) ((\alpha - 2)\beta - 2)(\alpha m + \sigma)}{2\alpha m + \sigma} \right)}{6\alpha\beta(\alpha + \beta + 1)^2(\alpha m + \sigma)^2} + \\ & + \frac{-2\alpha \left( ((\alpha - 1)\beta - 1)^3 + (\beta + 1)^3 \right) ((\alpha - 1)m + \sigma) - 3\alpha\beta(\alpha + \beta + 1) \left( (\alpha - 2)\beta - 2 \right) (\alpha m + \sigma)}{6\alpha\beta(\alpha + \beta + 1)^2(\alpha m + \sigma)^2} + \\ & + \frac{-\sigma \left( ((\alpha - 1)\beta - 1)^3 + (\beta + 1)^3 \right) ((\alpha - 1)m + \sigma)}{6\alpha\beta(\alpha + \beta + 1)^2(\alpha m + \sigma)^2} \end{aligned}$$

## Média lucro empresa *sofisticada*

$$\langle \pi^y \rangle = \frac{(\alpha + \beta + 1)(\alpha m + \sigma) \left( \left( \frac{\alpha(\beta + 1)((\alpha - 1)m + \sigma)}{(\alpha + \beta + 1)(\alpha m + \sigma)} - 1 \right)^3 + \left( \frac{\alpha((\alpha - 1)\beta - 1)((\alpha - 1)m + \sigma)}{(\alpha + \beta + 1)(\alpha m + \sigma)} + 1 \right)^3 \right)}{6\alpha^2\beta((\alpha - 1)m + \sigma)(2\alpha m + \sigma)}$$

## Média excedente consumidor

$$\begin{aligned} \langle EC \rangle = & \frac{\alpha \left( \sigma^2 (\beta (\alpha ((\alpha - 3)\beta - 3) + 3(\beta + 2)) + 3) + \alpha^2 m^2 (\beta (\alpha ((\alpha - 5)\beta - 6) + 7\beta + 18) + 12) \right)}{6(\alpha + \beta + 1)^2(2\alpha m + \sigma)^2} + \\ & + \frac{\alpha m \sigma (\beta (\alpha (2(\alpha - 4)\beta - 9) + 9\beta + 21) + 12)}{6(\alpha + \beta + 1)^2(2\alpha m + \sigma)^2} \end{aligned}$$

## Média excedente produtor

$$\langle EP \rangle = \frac{\sigma^2(\beta(\alpha(\alpha((5-2\alpha)\beta+3)-6(\beta+1))+3(\beta+2))+3) + \alpha^2 m^2 ((\alpha((9-2\alpha)\alpha-15)+11)\beta^2)}{6(\alpha+\beta+1)^2(2\alpha m+\sigma)^2} +$$

$$+ \frac{6((\alpha-3)\alpha+4)\beta+12) + \alpha m \sigma (\beta(\alpha(\alpha((14-4\alpha)\beta+9)-19\beta-21)+12(\beta+2))+12)}{6(\alpha+\beta+1)^2(2\alpha m+\sigma)^2}$$

**Média excedente económico**

$$\langle EE \rangle = \frac{\sigma^2 (\alpha (3 - ((\alpha - 2)\alpha + 3)\beta^2) + 3(\beta + 1)^2) + \alpha^2 m^2 (-\alpha((\alpha - 4)\alpha + 8) - 11)\beta^2}{6(\alpha + \beta + 1)^2(2\alpha m + \sigma)^2} +$$

$$+ \frac{12(\alpha + 1) + 24\beta) + 2\alpha m \sigma (\alpha (6 - ((\alpha - 3)\alpha + 5)\beta^2) + 6(\beta + 1)^2)}{6(\alpha + \beta + 1)^2(2\alpha m + \sigma)^2}$$

# Apêndice B

## Modelo sem colusão

Efetuamos os cálculos para o caso em que as  $m$  empresas sofisticadas não formam uma colusão. Neste caso, o lucro de uma empresa sofisticada vem dado por:

$$\pi^{y_i} = (1 - \alpha x - \alpha y_i - \alpha \sum_{j \neq i}^m y_j) y_i - \frac{\sigma}{2} y_i^2.$$

Do processo de maximização do lucro resulta,

$$y_i = \frac{1 - \alpha x - \alpha \sum_{j \neq i}^m y_j}{2\alpha + \sigma}$$

No equilíbrio, a quantidade ótima de produção para cada empresa sofisticada é dada por,

$$\bar{y} = \frac{1 - \alpha \bar{x}}{(m + 1)\alpha + \sigma},$$

e para a empresa *naive* é dada por,

$$\bar{x} = \frac{-m + \alpha + \sigma}{(1 + \alpha)(\alpha + \sigma)}.$$

Substituindo em  $\bar{y}$  resulta,

$$\bar{y} = \frac{1}{\alpha + \alpha^2 + \sigma + \alpha\sigma}.$$

Substituindo as expressões de equilíbrio no lucro obtemos:

$$\bar{\pi}^x = \frac{-(-m + \alpha + \sigma)(\alpha(-2 + \sigma) + \sigma(-2 - m + \sigma))}{2(1 + \alpha)^2(\alpha + \sigma)^2},$$
$$\bar{\pi}^y = \frac{2\alpha + \sigma}{2(1 + \alpha)^2(\alpha + \sigma)^2}.$$

# Apêndice C

## Duopólio de Cournot

Os seguintes cálculos permitem obter os resultados implementados na Secção 5.5.

Considere-se que no mercado atuam duas empresas (duopólio). O lucro para uma empresa é dado por,

$$\pi = (1 - \alpha q_1 - \alpha q_2)q_1 - \frac{\sigma}{2}q_1^2.$$

Do processo de maximização resulta, no equilíbrio,

$$\bar{q}_1 = \bar{q}_2 = \frac{1}{3\alpha + \sigma}, \bar{\pi}^q = \frac{2\alpha + \sigma}{2(3\alpha + \sigma)^2}.$$

## m empresas sofisticadas

Os seguintes cálculos permitem obter os resultados implementados na Secção 4.5 e nas simulações na Secção 5.5.

Considere-se que  $m - 1$  empresas formam uma colusão. O lucro para uma empresa que faz parte da colusão é dado por,

$$\pi_{in} = (1 - \alpha q_{out} - \alpha(m - 1)q_{in})q_{in} - \frac{\sigma}{2}q_{in}^2,$$

e para a empresa que não faz parte da colusão por,

$$\pi_{in} = (1 - \alpha q_{out} - \alpha(m - 1)q_{in})q_{out} - \frac{\sigma}{2}q_{out}^2.$$

Do processo de otimização resulta, no equilíbrio:

$$\bar{q}_{in} = \frac{\alpha + \sigma}{3(-1 + m)\alpha^2 + 2m\alpha\sigma + \sigma^2},$$
$$\bar{q}_{out} = \frac{(-1 + m)\alpha + \sigma}{3(-1 + m)\alpha^2 + 2m\alpha\sigma + \sigma^2}.$$

Substituindo nas expressões do lucro obtemos:

$$\bar{\pi}_{in} = \frac{(\alpha + \sigma)^2(2\alpha(-1 + m) + \sigma)}{2(3\alpha^2(-1 + m) + 2m\alpha\sigma + \sigma^2)^2},$$
$$\bar{\pi}_{out} = \frac{(2\alpha + \sigma)((-1 + m)\alpha + \sigma)^2}{2(3\alpha^2(-1 + m) + 2m\alpha\sigma + \sigma^2)^2}.$$

## Apêndice D

As figuras seguintes ilustram a evolução do lucro e das quantidades produzidas pelas empresas *naive* e sofisticadas para todo o domínio  $\sigma$  e  $\beta$ , relativamente ao caso apresentado na secção 5.3.1.

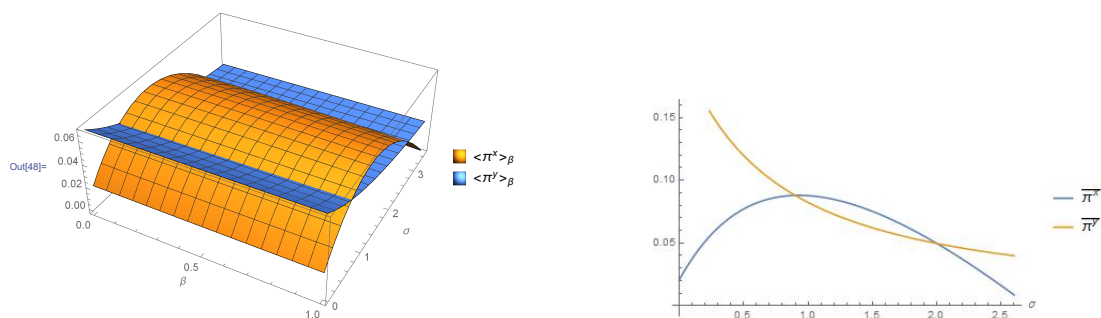


Figura 5.31: Representação gráfica da média dos lucros e dos lucros de equilíbrio para  $\alpha = 1.1$ ,  $m = 3$ ,  $\sigma$  a variar entre 0 e 3.5 e  $\beta$  a variar entre 0 e 1.

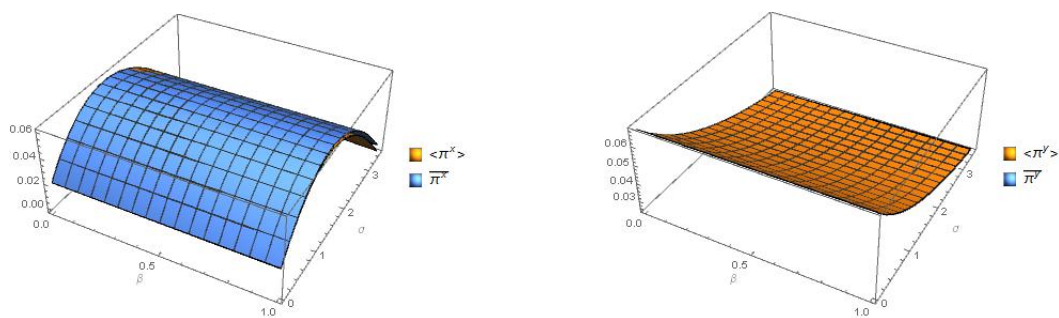


Figura 5.32: Representação gráfica da média dos lucros e dos lucros de equilíbrio para  $\alpha = 1.1$ ,  $m = 3$ ,  $\sigma$  a variar entre 0 e 3.5 e  $\beta$  a variar entre 0 e 1.

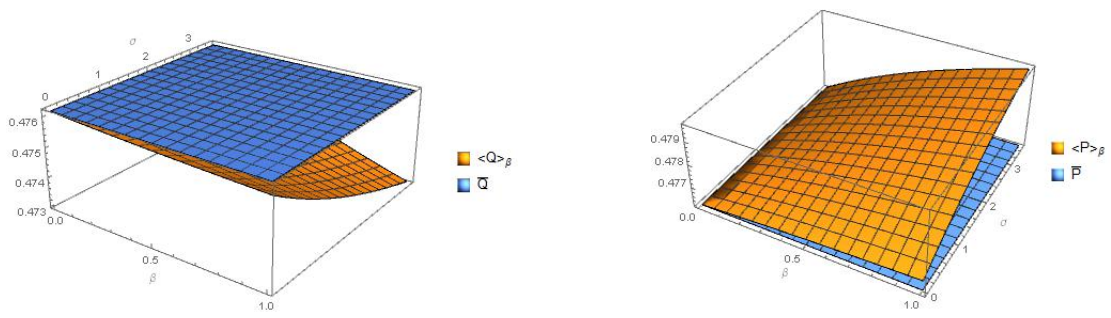


Figura 5.33: Representação gráfica da quantidade e do preço de mercado para  $\alpha = 1.1$ ,  $m = 3$ ,  $\sigma$  a variar entre 0 e 3.5 e  $\beta$  a variar entre 0 e 1.

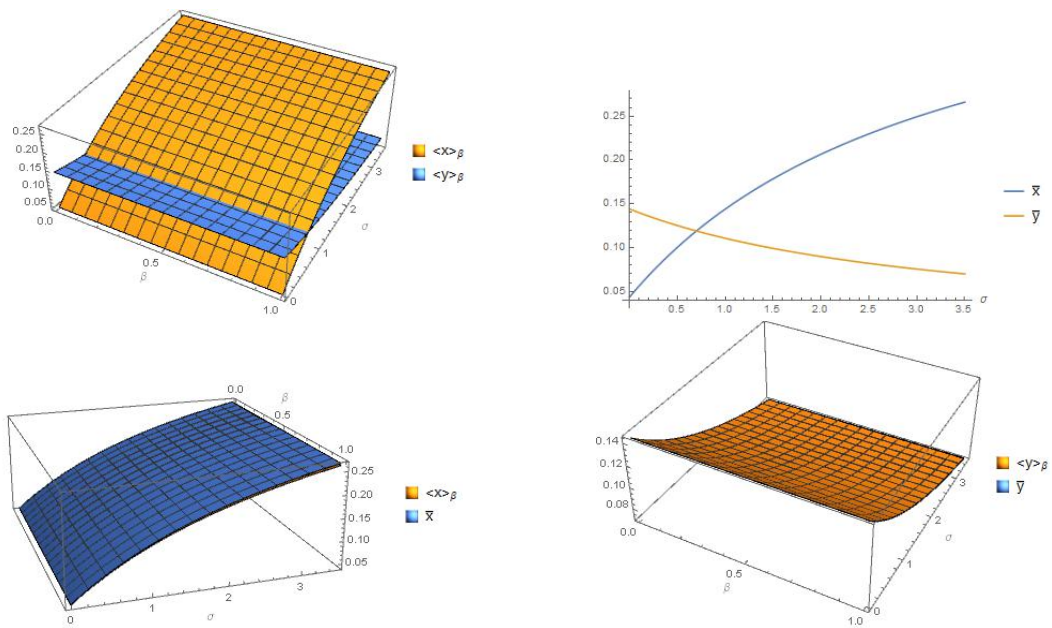


Figura 5.34: Representação gráfica da quantidade da empresa *naive* e de uma empresa sofisticada para  $\alpha = 1.1$ ,  $m = 3$ ,  $\sigma$  a variar entre 0 e 3.5 e  $\beta$  a variar entre 0 e 1.

## Apêndice E

Neste apêndice estamos interessados em visualizar qual o impacto nos lucros obtidos pelas empresas quando se introduz na função custo um custo variável correspondente a um custo de esforço de ajustamento de produção.

A nova função custo vem dada por,

$$C(q_t) = \frac{\sigma}{2}q_t^2 + \beta(q_t - \bar{q})^2, \quad (5.1)$$

onde o último termo corresponde ao custo de esforço de ajustamento de produção. Este custo pode ser interpretado da seguinte forma: as empresas adaptam a sua estrutura de forma a produzirem a quantidade ótima (quantidade de equilíbrio). Quando a produção é superior/inferior à quantidade de equilíbrio, a empresa acarreta custos superiores, devido ao ajustamento de mão-de-obra e equipamentos.

Utilizamos a mesma dinâmica apresentada no capítulo 3. Apresentamos, de seguida, apenas os resultados obtidos para os lucros das empresas, uma vez que a quantidade e preço não sofrem alterações.

	Dinâmica em $t$
Lucro empresa <i>naive</i>	$-\frac{x_t^2\sigma}{2} - \frac{x_t(x_t\alpha - 1)(m\alpha + \sigma)}{2m\alpha + \sigma} - \beta\left(x_t - \frac{m(\alpha - 1) + \sigma}{(1 + \alpha)(m\alpha + \sigma)}\right)^2$
Lucro empresa sofisticada	$\frac{(-1 + x_t\alpha)^2(2m\alpha + \sigma) - \frac{2\beta(m\alpha(1 + \alpha(-1 + x_t + x_t\alpha)) + \alpha(-1 + x_t + x_t\alpha)\sigma)^2}{(1 + \alpha)^2(m\alpha + \sigma)^2}}{2(2m\alpha + \sigma)^2}$

Tabela 5.1: Resultados obtidos para os lucros das empresas no caso em que é introduzido um custo de esforço de ajustamento de produção.

No equilíbrio, os resultados obtidos são iguais aos obtidos no caso em que não são considerados custos de esforço de ajustamento de produção.

Verificamos graficamente qual o impacto no modelo devido à presença de um custo de esforço de ajustamento de produção, quando temos 1 empresa *naive* e 1 empresa sofisticada.

Conferimos que, a introdução do esforço de ajustamento de produção provoca uma diminuição da média dos lucros obtidos pelas empresas quando estas produzem quantidades fora do equilíbrio.

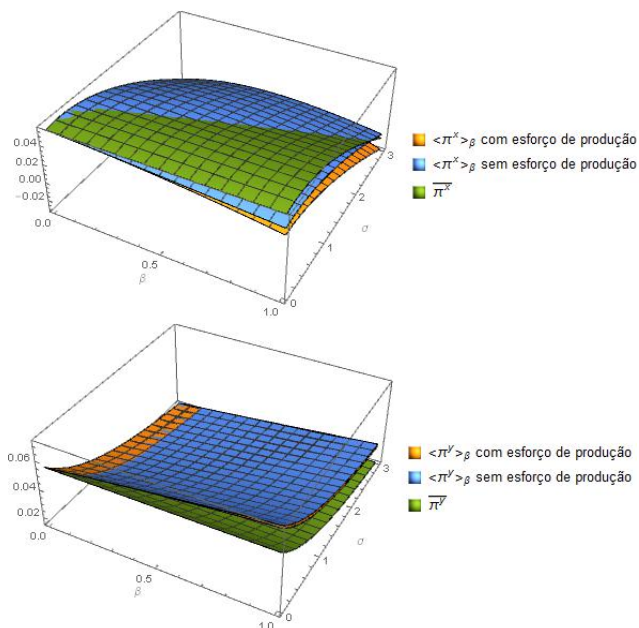


Figura 5.35: Representação gráfica de  $\langle \pi^x \rangle_\beta$ ,  $\bar{\pi}^x$ ,  $\langle \pi^y \rangle_\beta$  e  $\bar{\pi}^y$  para  $\alpha = 2$ ,  $m = 1$ ,  $\sigma$  a variar entre 0 e 3 e  $\beta$  a variar entre 0 e 1.

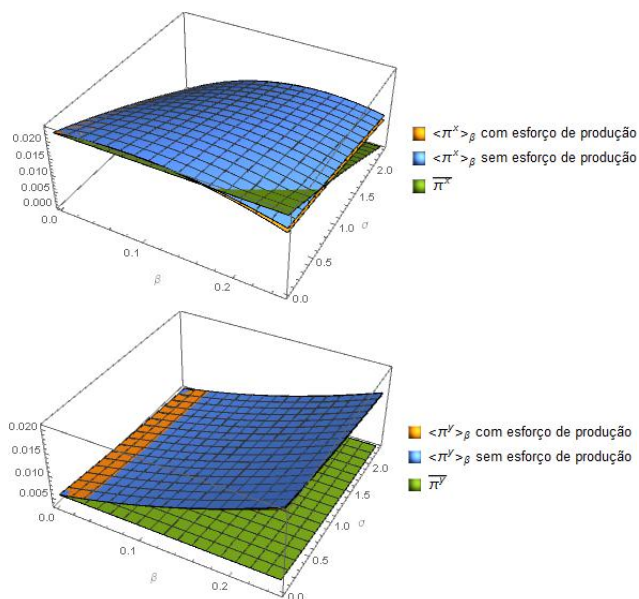


Figura 5.36: Representação gráfica de  $\langle \pi^x \rangle_\beta$ ,  $\bar{\pi}^x$ ,  $\langle \pi^y \rangle_\beta$  e  $\bar{\pi}^y$  para  $\alpha = 5$ ,  $m = 1$ ,  $\sigma$  a variar entre 0 e 2.3 e  $\beta$  a variar entre 0 e 0.25.

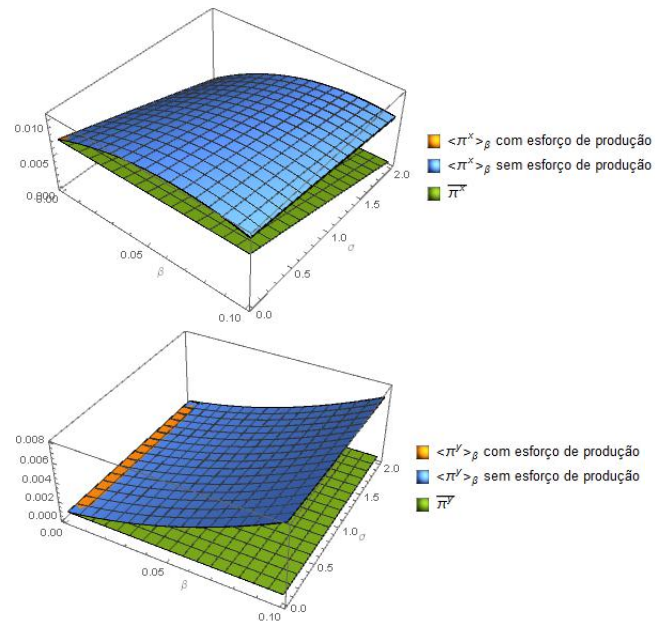


Figura 5.37: Representação gráfica de  $\langle \pi^x \rangle_\beta$ ,  $\bar{\pi}^x$ ,  $\langle \pi^y \rangle_\beta$  e  $\bar{\pi}^y$  para  $\alpha = 10$ ,  $m = 1$ ,  $\sigma$  a variar entre 0 e 2 e  $\beta$  a variar entre 0 e 0.1.

# Bibliografia

- [1] Agiza, H. e A. Elsadany (2002), “Nonlinear dynamics in the Cournot duopoly game with heterogeneous players”, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Vol. 320, pp. 512-524.
- [2] Agiza, H. e A. Elsadany (2004), “Chaotic dynamic in nonlinear duopoly game with heterogeneous players”, *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 149, pp. 843-860.
- [3] Borensteins, S. (2016), “The Power and the Limits of Industrial Organization”, *Review of Industrial Organization*, Vol. 48, pp. 241-246.
- [4] Cournot A. (1838), “Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth”, *The Macmillan Company* (Traduzido por Nathaniel T. Bacon, 1897).
- [5] Ding, Z., Hang, Q. e Tian, L. (2009), “Analysis of the dynamic of Cournot team-game with heterogeneous players”, *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 215, pp. 1098-1105.
- [6] Du, J., Y. Fan, Z. Sheng, Y. Hou (2013), “Dynamics analysis and chaos control of a duopoly game with heterogeneous players and output limit”, *Economic Modelling*, Vol. 33, pp. 507-516.
- [7] Ezekiel, M. (1938), “The Cobweb Theorem”, *The Quarterly Journal of Economics*, Vol. 52, pp. 255-280.
- [8] Fan, Y., Xie, T. e Du, J. (2012), “Complex Dynamics of duopoly game with heterogeneous players: a further analysis of the output model”, *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 218, pp. 7829-7839.
- [9] Fisher, F. (1961), “The Stability of the Cournot Oligopoly Solution: The Effects of Speeds of Adjustment and Increasing Marginal Costs”, *The Review of Economic Studies*, Vol. 28, N° 2, pp. 125-135.
- [10] Furth, D. (1986), “Stability and Instability Oligopoly”, *Journal of Economic Theory*, Vol. 40, N° 2, pp. 197-228.

- [11] Gao, Y., Liu, B. e Feng, W. (2014), “Bifurcation and chaos in a nonlinear discrete time cournot duopoly game”, *Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series*, Vol. 30, N°4, pp. 951-964.
- [12] Hahn, F. (1962), “The Stability of the Cournot Oligopoly Solutions”, *The Review of Economic Studies*, Vol. 29, N° 4, pp.329-331.
- [13] Howroyd, T. e Rickard, J. (1981), “Cournot Oligopoly and output adjustment costs”, *Economics Letters*, Vol. 7, pp. 113-117.
- [14] Huang (2002), “On the incentive for price-taking behavior”, *Management decision*, Vol. 40, N°7, pp. 682-692. Huang, W. (2005), “On the Statistical dynamics of economics”, *Journal of Economic Behavior & Organization*, Vol. 56, pp. 543-565.
- [15] Huang, W. (2008),”The long-run benefits of chaos to oligopolistic firms”, *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 32, N° 4, pp. 1332-1355.
- [16] Lundgren, C. (1996), “Using relative profit incentives to prevent collusion”, *Review of industrial organization*, Vol. 11, N°4, pp. 533-550.
- [17] Macleod, W. (1985), “On adjustment costs and the stability equilibria”, *Review of Economic Studies*, Vol. 52 N°4, pp. 575-591.
- [18] Matsumoto, A. e Nonaka, Y. (2006), “Statistical Dynamics in a chaotic Cournot model with complementary goods”, *Journal of Economic Behavior & Organization*, Vol. 61, pp. 769-783.
- [19] Merlone, U. e Szidarovsky, F. (2015), “Dynamic oligopolies with contingent workforce and investment costs”, *Mathematics and Computers in simulation*, Vol. 108, pp. 144-154.
- [20] Puu, T. (1991), “Chaos in Duopoly pricing”, *Chaos Solutions & Fractals*, Vol. 1, N°6, pp. 573-581.
- [21] Puu, T. (1998), “The chaotic solution duopolists revisited, *Journal of Economic Behavior & Organization*, Vol. 33, pp. 385-394.
- [22] Rand, D. (1977), “Exotic phenomena in games and duopoly models”, *Journal of Mathematics Economics*, Vol. 5, pp. 173-184.
- [23] Shaffer, M. (1988), “Are profit-maximisers the best survivors? A Darwinian Model of Economic Natural Selection. *Journal of Economic Behavior and Organization*. Vol. 12, pp. 29-45.

- [24] Szidarovsky, F. e J. Yen (1995), “Dynamic Cournot Oligopolies with production adjustment costs”, *Journal of Mathematical Economics*, Vol. 24, N° 1, pp. 95-101.
- [25] Theocharis, R. (1959), “On the Stability of the Cournot Solution on the oligopoly problem”, *Review of Economic Studies*, Vol. 27, N° 72-7, pp. 133-134.
- [26] Tramontana, F., Elsadany, E., Xin, B. e Agiza, H. (2015), “Local stability of the Cournot solution with increasing heterogeneous competitors”, *Nonlinear Analysis: Real world applications*, Vol. 26, pp. 150-60.
- [27] Varian, H. (2009), *Intermediate Microeconomics: A Modern Approach*, 8ªedição, Nova Iorque, W. W. Norton & Company.
- [28] Witteloostuijn, A. e Lier, A. (1990), “Chaotic patterns in Cournot competition”, *Metroeconomica*, Vol. 41, N°2, pp. 161-185.
- [29] Zhang, W. (2006), *Discrete Dynamical Systems, Bifurcation and Chaos in Economics*, 1ªedição, Elsevier Science.
- [30] Zhao, J. e Szidarovsky, F. (2008), “N-firm oligopolies with production adjustment costs: Best responses and equilibrium”, *Journal of Economic Behavior & Organization*, Vol. 68, pp. 87-99.