

**APROXIMAÇÕES PARA A PROBABILIDADE DE RUÍNA
DE UMA COMPANHIA SEGURADORA**

por

Margarida Barreiros de Castro Feijó

Tese de Mestrado

em

Modelação, Análise de Dados e Sistemas de Apoio à Decisão

Orientada por

Prof.^a Doutora Ana Cristina Moreira Freitas

Faculdade de Economia

Universidade do Porto

2015

À minha Mãe.

Agradecimentos

Esta dissertação foi proposta pela Professora Doutora Ana Cristina Moreira Freitas no âmbito do Mestrado em Modelação, Análise de Dados e Sistemas de Apoio à Decisão da Faculdade de Economia do Porto e foi desenvolvida sob a sua supervisão durante o ano lectivo de 2014/2015.

Agradeço à Professora Doutora Ana Cristina Moreira Freitas pela sugestão do tema para esta dissertação e pela possibilidade de trabalhar sob a sua orientação. Sem o seu acompanhamento dedicado e atencioso, este projecto não teria sido tão aliciante nem, naturalmente, tão bem sucedido.

Devo também agradecer a várias pessoas, não necessariamente pela sua contribuição para esta dissertação mas pelo papel que assumem no meu quotidiano. A toda a minha família, em especial à minha irmã, por ter sido sempre uma fonte de apoio, incentivo e segurança. Aos meus amigos, em particular à Inês e ao Pedro, pelos últimos sete anos de camaradagem, tertúlias e gargalhadas. E finalmente, àqueles amigos que já são família, especialmente à Ana e ao Alcino, com quem me sinto sempre em casa.

A todos os meus mais sinceros agradecimentos.

Resumo

A matemática actuarial começou a desenvolver-se no fim do século XVII, sendo que o seu maior progresso se deu a partir do início do século XX. O estudo de modelos matemáticos que se aproximem da realidade das companhias seguradoras é essencial do ponto de vista da companhia, pelo risco inerente à sua atividade.

Neste trabalho, o modelo considerado para as indemnizações colectivas é o modelo de risco colectivo, que corresponde a adicionar as indemnizações à medida que os sinistros ocorrem. Dentro deste modelo, é possível fazer variar a distribuição do montante das indemnizações a pagar bem como a distribuição do processo do número de indemnizações. Aqui é dado especial destaque ao caso em que o processo do número de indemnizações é de Poisson. Para este modelo é estudada a probabilidade de ruína, ou seja, a probabilidade de o montante recebido em prémios não ser suficiente para cobrir as indemnizações a pagar.

Este é um tópico que tem, além do interesse académico evidente, um interesse prático muito elevado. Ainda que o conceito de ruína e de insolvência não sejam equivalentes, qualquer companhia seguradora terá interesse em estimar o melhor possível a probabilidade da sua reserva atingir valores negativos.

São estudadas algumas aproximações para a probabilidade de ruína, sugeridas na literatura. O objetivo principal da dissertação é o desenvolvimento de um estudo de simulação de modo a comparar a qualidade das aproximações apresentadas. Neste estudo consideramos diferentes modelos para os montantes de indemnização individual. Para cada um deles, fazemos variar a reserva inicial da companhia seguradora, a taxa de prémios recebidos e a intensidade do processo do número de indemnizações.

Palavras-Chave: Modelo de Risco Colectivo, Probabilidade de Ruína, Teoria do Risco

Abstract

Actuarial mathematics started developing in the end of the 17th century, but its greatest progress occurred only in the early 20th century. The study of mathematical models that conveniently describe the reality of an insurance company is essential from the company's point of view, due to the risk inherent to its activity.

In this dissertation, the considered model for the collective claims will be the collective risk model, that corresponds to adding claims as its originating sinister occur. Within this model, we can vary the distribution of the amount of claims as well as the distribution of the process of the number of claims. We highlight the case in which the process of the number of claims is Poisson. For this model, we study the ruin probability, that is, the odds of the amount gathered in premium being insufficient to cover the compensation expenses.

This is a subject that has, besides the obvious academic relevance, a high practical interest. Even though the concepts of ruin and insolvency are not the same, any insurance company will have a great interest in estimating as well as possible the probability of its reserve reaching negative values.

We'll study several approximations to the ruin probability, suggested in literature. The main goal of the dissertation is to develop a simulation study in order to compare the quality of the approximations. In this study, we'll consider different models for the single compensations' amount. For each, we'll vary the insurance company's initial reserve, the received premium rate and the intensity of the number of compensations' process.

Keywords: Collective Risk Model, Risk Theory, Ruin Probability

Índice

Agradecimentos	ii
Resumo	iii
Abstract	iv
Lista de Tabelas	x
Lista de Figuras	xii
1 Introdução	1
2 Conceitos Básicos da Teoria da Probabilidade	3
2.1 Função de distribuição	3
2.2 Variável aleatória discreta	4
2.3 Variável aleatória absolutamente contínua	4
2.4 Valor esperado	4
2.5 Momentos	5
2.6 Função geradora de momentos	6
2.7 Variáveis aleatórias identicamente distribuídas	7
2.8 Variáveis aleatórias independentes	7
3 Modelos de Risco Colectivo	9
3.1 Noções básicas	9
3.1.1 Convolução	9
3.1.2 Esperança condicional	10
3.1.3 Processo de Poisson e processo de Poisson composto	12
3.2 Processo das Indemnizações Agregadas	14
3.3 Processo do Número de Indemnizações	20
3.4 Distribuição do Montante das Indemnizações Individuais	21
3.4.1 Exponencial	21
3.4.2 Uniforme	22
3.4.3 Normal	22

3.4.4	Gama	22
4	Teoria da Ruína	24
4.1	Processo de reserva, tempo de ruína e probabilidade de ruína	24
4.2	Probabilidade de ruína no modelo de Cramér-Lundberg	25
4.2.1	Modelo de Cramér-Lundberg	25
4.2.2	Coefficiente de ajustamento	26
4.3	Relação entre a probabilidade de ruína e a perda agregada máxima	30
5	Aproximações para a probabilidade de ruína	41
5.1	Aproximação de Lundberg	41
5.2	Aproximação de Crámer-Lundberg	42
5.3	Aproximação de De Vylder	42
5.4	Aproximação de Rényi	43
5.5	Aproximações no modelo exponencial	44
6	Estudo numérico e de simulação	49
6.1	Modelo Exponencial	51
6.1.1	Efeitos da variação de u	52
6.1.2	Efeitos da variação de c	54
6.1.3	Efeitos da variação de λ	56
6.1.4	Efeitos da variação de α	58
6.2	Modelo Uniforme	60
6.2.1	Efeitos da variação de u	61
6.2.2	Efeitos da variação de c	63
6.2.3	Efeitos da variação de λ	65
6.2.4	Efeitos da variação de a	67
6.2.5	Efeitos da variação de b	69
6.3	Modelo Normal	72
6.3.1	Efeitos da variação de u	73
6.3.2	Efeitos da variação de c	75
6.3.3	Efeitos da variação de λ	77
6.3.4	Efeitos da variação de μ	79
6.3.5	Efeitos da variação de σ^2	81
6.4	Modelo Gama	83
6.4.1	Efeitos da variação de u	84
6.4.2	Efeitos da variação de c	86
6.4.3	Efeitos da variação de λ	88
6.4.4	Efeitos da variação de α	90
6.4.5	Efeitos da variação de β	92
6.5	Conclusões	94

Anexo	96
A Códigos R	96
A.1 Modelo Exponencial	96
A.2 Modelo Uniforme	97
A.3 Modelo Normal	99
A.4 Modelo Gama	100
Bibliografía	103

Lista de Tabelas

6.1	Valores para a probabilidade de ruína, aproximação de Lundberg e respectivo erro, em função de u , quando $c = 1.25$, $\lambda = 1$ e $\alpha = 1$ (modelo exponencial)	52
6.2	Valores para a probabilidade de ruína, aproximação de Lundberg e respectivo erro, em função de c , quando $u = 3$, $\lambda = 1$ e $\alpha = 1$ (modelo exponencial)	54
6.3	Valores para a probabilidade de ruína, aproximação de Lundberg e respectivo erro, em função de λ , quando $u = 3$, $c = 1.25$, e $\alpha = 1$ (modelo exponencial)	56
6.4	Valores para a probabilidade de ruína, aproximação de Lundberg e respectivo erro, em função de α , quando $u = 3$, $c = 1.25$ e $\lambda = 1$ (modelo exponencial)	58
6.5	Valores para a probabilidade de ruína e respetivas aproximações numéricas, em função de u , quando $c = 1.25$, $\lambda = 1$, $a = 0$ e $b = 2$ (modelo uniforme)	61
6.6	Erros das aproximações da probabilidade de ruína, em função de u , quando $c = 1.25$, $\lambda = 1$, $a = 0$ e $b = 2$ (modelo uniforme)	61
6.7	Valores para a probabilidade de ruína e respetivas aproximações numéricas, em função de c , quando $u = 3$, $\lambda = 1$, $a = 0$ e $b = 2$ (modelo uniforme)	63
6.8	Erros das aproximações da probabilidade de ruína, em função de c , quando $u = 3$, $\lambda = 1$, $a = 0$ e $b = 2$ (modelo uniforme)	63
6.9	Valores para a probabilidade de ruína e respetivas aproximações numéricas, em função de λ , quando $u = 3$, $c = 1.25$, $a = 0$ e $b = 2$ (modelo uniforme)	65
6.10	Erros das aproximações da probabilidade de ruína, em função de λ , quando $u = 3$, $c = 1.25$, $a = 0$ e $b = 2$ (modelo uniforme)	65
6.11	Valores para a probabilidade de ruína e respetivas aproximações numéricas, em função de a , quando $u = 3$, $c = 1.25$, $\lambda = 1$ e $b = 2$ (modelo uniforme)	67
6.12	Erros das aproximações da probabilidade de ruína, em função de a , quando $u = 3$, $c = 1.25$, $\lambda = 1$ e $b = 2$ (modelo uniforme)	67

6.13	Valores para a probabilidade de ruína e respetivas aproximações numéricas, em função de b , quando $u = 3$, $c = 1.25$, $\lambda = 1$ e $a = 0$ (modelo uniforme)	69
6.14	Erros das aproximações da probabilidade de ruína, em função de b , quando $u = 3$, $c = 1.25$, $\lambda = 1$ e $a = 0$ (modelo uniforme)	70
6.15	Valores para a probabilidade de ruína e respetivas aproximações numéricas, em função de u , quando $c = 1.25$, $\lambda = 1$, $\mu = 1$ e $\sigma^2 = 1$ (modelo normal)	73
6.16	Erros das aproximações da probabilidade de ruína, em função de u , quando $c = 1.25$, $\lambda = 1$, $\mu = 1$ e $\sigma^2 = 1$ (modelo normal)	73
6.17	Valores para a probabilidade de ruína e respetivas aproximações numéricas, em função de c , quando $u = 3$, $\lambda = 1$, $\mu = 1$ e $\sigma^2 = 1$ (modelo normal)	75
6.18	Erros das aproximações da probabilidade de ruína, em função de c , quando $u = 3$, $\lambda = 1$, $\mu = 1$ e $\sigma^2 = 1$ (modelo normal)	75
6.19	Valores para a probabilidade de ruína e respetivas aproximações numéricas, em função de λ , quando $u = 3$, $c = 1.25$, $\mu = 1$ e $\sigma^2 = 1$ (modelo normal)	77
6.20	Erros das aproximações da probabilidade de ruína, em função de λ , quando $u = 3$, $c = 1.25$, $\mu = 1$ e $\sigma^2 = 1$ (modelo normal)	77
6.21	Valores para a probabilidade de ruína e respetivas aproximações numéricas, em função de μ , quando $u = 3$, $c = 1.25$, $\lambda = 1$ e $\sigma^2 = 1$ (modelo normal)	79
6.22	Erros das aproximações da probabilidade de ruína, em função de μ , quando $u = 3$, $c = 1.25$, $\lambda = 1$ e $\sigma^2 = 1$ (modelo normal)	79
6.23	Valores para a probabilidade de ruína e respetivas aproximações numéricas, em função de σ^2 , quando $u = 3$, $c = 1.25$, $\lambda = 1$ e $\mu = 1$ (modelo normal)	81
6.24	Erros das aproximações da probabilidade de ruína, em função de σ^2 , quando $u = 3$, $c = 1.25$, $\lambda = 1$ e $\mu = 1$ (modelo normal)	81
6.25	Valores para a probabilidade de ruína e respetivas aproximações numéricas, em função de u , quando $c = 1.25$, $\lambda = 1$, $\alpha = 2$ e $\beta = 2$ (modelo gama)	84
6.26	Erros das aproximações da probabilidade de ruína, em função de u , quando $c = 1.25$, $\lambda = 1$, $\alpha = 2$ e $\beta = 2$ (modelo gama)	84
6.27	Valores para a probabilidade de ruína e respetivas aproximações numéricas, em função de c , quando $u = 3$, $\lambda = 1$, $\alpha = 2$ e $\beta = 2$ (modelo gama)	86
6.28	Erros das aproximações da probabilidade de ruína, em função de c , quando $u = 3$, $\lambda = 1$, $\alpha = 2$ e $\beta = 2$ (modelo gama)	86

6.29	Valores para a probabilidade de ruína e respetivas aproximações numéricas, em função de λ , quando $u = 3$, $c = 1.25$, $\alpha = 2$ e $\beta = 2$ (modelo gama)	88
6.30	Erros das aproximações da probabilidade de ruína, em função de λ , quando $u = 3$, $c = 1.25$, $\alpha = 2$ e $\beta = 2$ (modelo gama)	88
6.31	Valores para a probabilidade de ruína e respetivas aproximações numéricas, em função de α , quando $u = 3$, $c = 1.25$, $\lambda = 1$ e $\beta = 2$ (modelo gama)	90
6.32	Erros das aproximações da probabilidade de ruína, em função de α , quando $u = 3$, $c = 1.25$, $\lambda = 1$ e $\beta = 2$ (modelo gama)	90
6.33	Valores para a probabilidade de ruína e respetivas aproximações numéricas, em função de β , quando $u = 3$, $c = 1.25$, $\lambda = 1$ e $\alpha = 2$ (modelo gama)	92
6.34	Erros das aproximações da probabilidade de ruína, em função de β , quando $u = 3$, $c = 1.25$, $\lambda = 1$ e $\alpha = 2$ (modelo gama)	92

Lista de Figuras

3.1	Gráfico da evolução de $N(t)$	16
3.2	Gráfico da evolução de $S(t)$	16
4.1	Gráfico da evolução de $U(t)$	25
4.2	Determinação gráfica do coeficiente de ajustamento R	27
4.3	Primeira descida das reservas $U(t)$ abaixo do nível inicial, u	31
4.4	Ilustração de L_1	32
4.5	Processo de Reserva	34
4.6	Processo de Perda Agregada	34
4.7	Ilustração da Perda Agregada Máxima L como soma dos recordes L_i	37
6.1	Valores para a probabilidade de ruína e aproximação de Lundberg, em função de u , quando $c = 1.25$, $\lambda = 1$ e $\alpha = 1$ (modelo exponencial)	52
6.2	Valores para a probabilidade de ruína e aproximação de Lundberg, em função de c , quando $u = 3$, $\lambda = 1$ e $\alpha = 1$ (modelo exponencial)	54
6.3	Valores para a probabilidade de ruína e aproximação de Lundberg, em função de λ , quando $u = 3$, $c = 1.25$, e $\alpha = 1$ (modelo exponencial)	56
6.4	Valores para a probabilidade de ruína e aproximação de Lundberg, em função de α , quando $u = 3$, $c = 1.25$ e $\lambda = 1$ (modelo exponencial)	58
6.5	Erros das aproximações da probabilidade de ruína, em função de u , quando $c = 1.25$, $\lambda = 1$, $a = 0$ e $b = 2$ (modelo uniforme)	62
6.6	Erros das aproximações da probabilidade de ruína, em função de c , quando $u = 3$, $\lambda = 1$, $a = 0$ e $b = 2$ (modelo uniforme)	64
6.7	Erros das aproximações da probabilidade de ruína, em função de λ , quando $u = 3$, $c = 1.25$, $a = 0$ e $b = 2$ (modelo uniforme)	66
6.8	Erros das aproximações da probabilidade de ruína, em função de a , quando $u = 3$, $c = 1.25$, $\lambda = 1$ e $b = 2$ (modelo uniforme)	68
6.9	Erros das aproximações da probabilidade de ruína, em função de b , quando $u = 3$, $c = 1.25$, $\lambda = 1$ e $a = 0$ (modelo uniforme)	70
6.10	Erros das aproximações da probabilidade de ruína, em função de u , quando $c = 1.25$, $\lambda = 1$, $\mu = 1$ e $\sigma^2 = 1$ (modelo normal)	74
6.11	Erros das aproximações da probabilidade de ruína, em função de c , quando $u = 3$, $\lambda = 1$, $\mu = 1$ e $\sigma^2 = 1$ (modelo normal)	76

6.12	Erros das aproximações da probabilidade de ruína, em função de λ , quando $u = 3$, $c = 1.25$, $\mu = 1$ e $\sigma^2 = 1$ (modelo normal)	78
6.13	Erros das aproximações da probabilidade de ruína, em função de μ , quando $u = 3$, $c = 1.25$, $\lambda = 1$ e $\sigma^2 = 1$ (modelo normal)	80
6.14	Erros das aproximações da probabilidade de ruína, em função de σ^2 , quando $u = 3$, $c = 1.25$, $\lambda = 1$ e $\mu = 1$ (modelo normal)	82
6.15	Erros das aproximações da probabilidade de ruína, em função de u , quando $c = 1.25$, $\lambda = 1$, $\alpha = 2$ e $\beta = 2$ (modelo gama)	85
6.16	Erros das aproximações da probabilidade de ruína, em função de c , quando $u = 3$, $\lambda = 1$, $\alpha = 2$ e $\beta = 2$ (modelo gama)	87
6.17	Erros das aproximações da probabilidade de ruína, em função de λ , quando $u = 3$, $c = 1.25$, $\alpha = 2$ e $\beta = 2$ (modelo gama)	89
6.18	Erros das aproximações da probabilidade de ruína, em função de α , quando $u = 3$, $c = 1.25$, $\lambda = 1$ e $\beta = 2$ (modelo gama)	91
6.19	Erros das aproximações da probabilidade de ruína, em função de β , quando $u = 3$, $c = 1.25$, $\lambda = 1$ e $\alpha = 2$ (modelo gama)	93

Capítulo 1

Introdução

Um dos primeiros documentos em que surge regulado um sistema de seguros é o Código de Hamurabi e foi escrito há cerca de três mil e setecentos anos na Babilónia. Segundo este código, que foi redigido "para que o forte não prejudique o mais fraco", por exemplo, um agricultor cuja colheita fosse afectada por uma catástrofe natural ficaria isento de pagar aos seus credores o correspondente a essa época.

Mil anos mais tarde, quando já muitos comerciantes utilizavam as rotas do Mediterrâneo, as leis de Rodes estabeleciam que se fosse necessário em qualquer altura tornar o barco mais leve, deitando ao mar alguma mercadoria, o comerciante lesado seria ressarcido da sua perda pelos restantes em partes iguais.

No século XIV, com a expansão do comércio marítimo, surge o conceito de seguro marítimo. Na verdade, o primeiro contrato de seguro de que se tem conhecimento é deste tipo e foi estipulado em Génova, por volta do ano de 1347.

Mais recentemente surgiu a matemática actuarial, nascimento habitualmente associado à publicação da primeira tabela de mortalidade, no século XVII. O seu verdadeiro impulso deu-se no início do século XX e os avanços tecnológicos recentes permitiram também que nas últimas décadas a teoria do risco tenha sofrido um desenvolvimento significativo e se tenha tornado numa ferramenta essencial à actividade seguradora.

Podemos dizer que a necessidade de controlar o risco a que se expõe é um conceito natural ao Homem desde os seus tempos mais primordiais. E é como consequência natural desse conceito que surge a motivação para esta dissertação.

A probabilidade de ruína indica-nos a possibilidade de, dada uma reserva inicial, as reservas da companhia seguradora se esgotarem em tempo finito, ou seja, de existir um momento em que o montante amealhado pela companhia em prémios deixa

de suficiente para cobrir as indemnizações a pagar.

O conceito de ruína, não sendo equivalente ao conceito de insolvência, é naturalmente um indicador bastante útil a qualquer companhia seguradora, dando-lhe oportunidade de rectificar o valor da reserva inicial ou mesmo calibrar a entrada de prémios.

Nesta dissertação, estudamos a probabilidade de ruína no caso do modelo de Crámer-Lundberg em que as indemnizações agregadas constituem um processo de Poisson. São apresentadas e discutidas quatro diferentes aproximações para a probabilidade de ruína - a aproximação de Lundberg, a aproximação de Crámer-Lundberg, a de De Vylder e a de Rényi. O objectivo principal deste trabalho é a comparação numérica destas quatro aproximações. Com esse intuito, desenvolvemos um estudo de simulação no qual são considerados quatro modelos diferentes para a distribuição do montante das indemnizações individuais. Para cada modelo, fazemos variar o valor da reserva inicial da companhia seguradora, a taxa de prémios recebidos e a intensidade do processo do número de indemnizações.

A dissertação encontra-se estruturada da forma que se segue. No capítulo 2 expomos, de forma sucinta, um conjunto de noções básicas de probabilidade, que surgirão várias vezes ao longo do trabalho e são, como tal, essenciais à compreensão dos capítulos seguintes. No capítulo 3 é apresentado o Modelo de Risco Coletivo para um período genérico. Incluímos neste capítulo o estudo do processo das indemnizações agregadas, incluindo o processo do número de indemnizações e a distribuição do montante das indemnizações individuais. No capítulo 4 entramos na Teoria da Ruína, expondo alguns conceitos importantes para a dissertação, como é o caso da probabilidade de ruína. Fazemos também o estudo desta probabilidade no modelo de Crámer-Lundberg e da sua relação com a perda agregada máxima. No capítulo 5 debruçamo-nos sobre as quatro aproximações para a probabilidade de ruína. Finalmente, no capítulo 6, apresentamos e comentamos os valores obtidos para a probabilidade de ruína, aproximações numéricas e respectivos erros relativos.

Capítulo 2

Conceitos Básicos da Teoria da Probabilidade

Neste capítulo vamos definir alguns dos conceitos básicos da Teoria da Probabilidade. São conceitos elementares que irão surgir várias vezes ao longo do trabalho.

Começamos com os conceitos de função de distribuição de variável aleatória, variável aleatória discreta e variável aleatória absolutamente contínua, seguindo-se posteriormente as definições de valor esperado, momento, variância, função geradora de momentos, variáveis aleatórias identicamente distribuídas e, finalmente, independência entre variáveis aleatórias. Estas noções podem ser consultadas em livros básicos da Teoria das Probabilidades (veja-se, por exemplo, Dudewicz e Mishra (1988) e Gonçalves e Mendes Lopes (2000)).

Uma variável aleatória será genericamente denotada por X e estará definida num espaço de probabilidade denotado por (Ω, \mathcal{A}, P) , em que Ω é o espaço amostral, \mathcal{A} é uma σ -álgebra e P é uma medida de probabilidade.

2.1 Função de distribuição

Dada uma variável X , a respetiva **função de distribuição** é uma função $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ definida por:

$$F_X(x) = P(X \leq x), \forall x \in \mathbb{R}$$

e respeita três importantes propriedades:

- F_X é não-decrescente, ou seja, $F_X(x) \leq F_X(y)$ se $x \leq y$;
- $F_X(-\infty) \equiv \lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$, $F_X(+\infty) \equiv \lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$;

- F_X é contínua à direita, ou seja, $\lim_{h \rightarrow 0^+} F_X(x+h) = F_X(x), \forall x$.

2.2 Variável aleatória discreta

Uma variável aleatória diz-se **discreta** quando assume apenas um número finito ou infinito numerável de valores. O conjunto de valores possíveis para X é designado por **suporte** de X e denotado por S_X .

A **função de probabilidade** de uma variável aleatória discreta X com suporte $S_X = \{x_1, x_2, \dots\}$ é dada por $p_X(x_i) = P(X = x_i), i \in \{1, 2, \dots\}$, e satisfaz $\sum_{x \in S_X} p_X(x) = 1$ (de notar que $P(X = y) = 0, \forall y \notin S_X$.)

2.3 Variável aleatória absolutamente contínua

Uma variável aleatória X diz-se **absolutamente contínua** quando a sua função de distribuição F_X puder ser representada como

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(y) dy, \forall x \in \mathbb{R}$$

onde a função f_X , designada por **função densidade de probabilidade** de X , respeita as seguintes propriedades:

- $f_X(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$;
- $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$.

2.4 Valor esperado

Seja X uma variável aleatória discreta com suporte $S_X = \{x_1, x_2, \dots\}$ e função de probabilidade dada por $p_X(x_i) = P(X = x_i), i \in \{1, 2, \dots\}$.

Se $\sum_{x \in S_X} |x|P(X = x) < +\infty$, então o **valor esperado** de X é definido por

$$E(X) = \sum_{x \in S_X} xP(X = x).$$

Seja X uma variável aleatória absolutamente contínua com função densidade de probabilidade f_X .

Se $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|f(x)dx < +\infty$, então o **valor esperado** de X é definido por

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx.$$

Fazemos notar que apesar de neste trabalho apresentarmos apenas as expressões para variáveis aleatórias discretas ou absolutamente contínuas, a formulação geral pode ser encontrada em vários livros, dos quais damos como exemplos Chung (2001) e Kingman e Taylor (1966).

De seguida é apresentada a forma de cálculo do valor esperado de uma função de uma variável aleatória, discreta ou absolutamente contínua, X .

Seja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e seja X uma variável aleatória.

Se X for uma variável aleatória discreta, com suporte $S_X = \{x_1, x_2, \dots\}$ e função de probabilidade dada por $p_X(x_i) = P(X = x_i), i \in \{1, 2, \dots\}$, $E(g(X))$ existe se e só se $\sum_{x \in S_X} |g(x)|p_X(x) < +\infty$. Nesse caso, $E(g(X)) = \sum_{x \in S_X} g(x)p_X(x)$.

Se X for uma variável aleatória absolutamente contínua com função densidade de probabilidade f_X , $E(g(X))$ existe se e só se $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|f_X(x)dx < +\infty$. Nesse caso, $E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_X(x)dx$.

O valor esperado é um operador linear, ou seja, respeita as seguintes propriedades:

- sendo a uma constante, $E(a) = a$;
- sendo b uma constante e X uma variável aleatória, $E(bX) = bE(X)$;
- sendo a e b constantes e X uma variável aleatória, $E(aX + b) = aE(X) + b$.

2.5 Momentos

Os momentos são usados para caracterizar as distribuições das variáveis.

O **k -ésimo momento** ordinário da variável aleatória X , ou momento ordinário de ordem k , é definido por $m_k = E(X^k)$.

É possível também calcular os momentos centrados em relação à média, que servem para medir assimetrias (quando são de ordem ímpar) e dispersão (quando são de ordem par).

O k -ésimo momento centrado da variável aleatória X (ou momento centrado de ordem k) é então definido por $\mu_k = E((X - E(X))^k)$.

O primeiro momento ordinário de uma variável aleatória coincide com o respectivo valor esperado.

Ao momento centrado de ordem 2 chamamos **variância**. A variância de uma variável aleatória, denotada por $V(X)$, a par com o valor esperado, $E(X)$, é uma das suas características mais relevantes - é uma medida de dispersão em torno da média, ou seja, avalia quão dispersos em relação ao valor médio se encontram os valores da variável aleatória.

A variância, contrariamente ao valor esperado, não é um operador linear, e verifica as propriedades seguintes:

- sendo c uma constante, $V(c) = 0$;
- sendo b uma constante e X uma variável aleatória, $V(bX) = b^2V(X)$;
- sendo a e b constantes e X uma variável aleatória, $V(aX + b) = a^2V(X)$.

2.6 Função geradora de momentos

A **função geradora de momentos** de uma variável aleatória X é dada, para todos os reais t , por:

$$M_X(t) = E(e^{tX}).$$

Visto que $M_X(t) = E(g(X))$ em que $g(X) = e^{tX}$, tem-se que

$$M_X(t) = \sum_{x \in S_X} e^{tx} p_X(x)$$

se X for uma v.a. discreta, e que

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_X(x) dx$$

se X for uma v.a. absolutamente contínua.

Pode mostrar-se que se a função geradora de momentos $M_X(t)$ da variável aleatória X existir para $|t| \leq T$ (para algum $T > 0$), então o momento ordinário de ordem k , $E(X^k)$, existe ($k = 1, 2, \dots$) e

$$E(X^k) = M_X^{(k)}(0) \equiv \left. \frac{d^k}{dt^k} M_X(t) \right|_{t=0}.$$

2.7 Variáveis aleatórias identicamente distribuídas

Duas variáveis X e Y dizem-se identicamente distribuídas quando as respetivas funções de distribuição, F_X e F_Y , coincidem, ou seja:

$$F_X(x) = F_Y(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

2.8 Variáveis aleatórias independentes

Seja (X, Y) um vector aleatório bidimensional. A sua **função de distribuição conjunta** $F_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$ é dada por:

$$F_{X,Y}(x, y) = P[X \leq x, Y \leq y], \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (2.1)$$

O vector aleatório (X, Y) é considerado **discreto** se assume apenas um número finito ou infinito numerável de valores. O conjunto de valores possíveis para (X, Y) é designado por suporte de (X, Y) e denota-se por $S_{X,Y}$.

A **função de probabilidade conjunta** de (X, Y) , com suporte $S_{X,Y} = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots\}$ é dada por $p_{X,Y}(x_i, y_i) = P(X = x_i \wedge Y = y_i)$, $i \in \{1, 2, \dots\}$. (À semelhança do caso univariado, $P(X = x, Y = y) = 0 \forall (x, y) \notin S_{X,Y}$.)

O vector aleatório (X, Y) é considerado **absolutamente contínuo** se a sua função de distribuição puder ser representada da forma seguinte:

$$F_{X,Y}(x, y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x f_{X,Y}(s, t) ds dt, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

onde a função $f_{X,Y}$ é designada por **função densidade de probabilidade conjunta** de (X, Y) , e respeita as seguintes propriedades:

- $f_{X,Y}(x, y) \geq 0, \forall (x, y)$;
- $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y) dx dy = 1$.

Seja (X, Y) um vector aleatório bidimensional. Assumamos que existe $E(g(X, Y))$. Temos que

$$E(g(X, Y)) = \sum_{(x,y) \in S_{X,Y}} g(x, y) p_{X,Y}(x, y)$$

se (X, Y) for um vector aleatório discreto e

$$E(g(X, Y)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) f_{X,Y}(x, y) dx dy$$

se (X, Y) for um vector aleatório absolutamente contínuo.

Proposição 2.1. *Seja (X, Y) um vector aleatório bidimensional. Assumindo que os valores esperados em causa existem, tem-se que $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.*

Duas variáveis aleatórias X e Y são **independentes** se e só se $F_{X,Y}(x, y) = F_X(x) \times F_Y(y)$.

Se as variáveis aleatórias X e Y forem independentes, observam-se também as consequências seguintes (desde que os valores esperados envolvidos existam):

- $E(g_1(X)g_2(Y)) = E(g_1(X))E(g_2(Y))$ para quaisquer funções g_1 e g_2 contínuas;
- $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$;
- $M_{X+Y}(t) = M_X(t) \times M_Y(t), t \in \mathbb{R}$;
- a função de distribuição da variável aleatória X dado que $Y \leq y$ ($X|Y \leq y$) coincide com a função de distribuição de X , ou seja, $P(X \leq x|Y \leq y) = \frac{F_{X,Y}(x, y)}{F_Y(y)} = \frac{F_X(x)F_Y(y)}{F_Y(y)} = F_X(x)$.

Capítulo 3

Modelos de Risco Colectivo

Neste capítulo serão estudados modelos de risco colectivo para um período genérico.

Como tal, começaremos com uma secção de noções e propriedades básicas, usadas especialmente neste capítulo. Depois seguiremos para a apresentação do processo das indemnizações agregadas, cuja distribuição dependerá da distribuição do número de indemnizações, estudada na secção seguinte, e da distribuição do montante individual das indemnizações, que será discutida na última secção.

3.1 Noções básicas

Nesta secção incluímos noções e propriedades importantes no domínio dos modelos de risco colectivo, como a convolução, a esperança condicional, o processo de Poisson e o processo de Poisson composto.

3.1.1 Convolução

Consideremos duas variáveis aleatórias X e Y independentes, com funções de distribuição F_X e F_Y respetivamente. Seja $S = X + Y$. A função de distribuição da variável aleatória S é dada pelo **produto de convolução** de F_X por F_Y , descrito de seguida, e escreve-se $F_S = F_X \star F_Y$.

No caso de Y ser discreta, com suporte S_Y e função de probabilidade p_Y , a função de distribuição de S obtém-se da seguinte forma:

$$F_S(s) = \sum_{y \in S_Y} F_X(s - y)p_Y(y).$$

No caso de Y ser absolutamente contínua, com função densidade de probabilidade

f_Y , a função de distribuição de S obtém-se a partir da seguinte expressão:

$$F_S(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_X(s-y)f_Y(y)dy.$$

Se X e Y forem variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com função de distribuição comum F_X , a função de distribuição F_S é o produto de convolução de F_X por F_X denotado por $F_X^{2\star}$.

Mais geralmente, sendo $S_n = X_1 + \dots + X_n$ a soma de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com função de distribuição comum F_X , temos que a função de distribuição de S_n é dada por

$$F_{S_n} = F_X^{n\star} = F_X^{(n-1)\star} \star F_X, n \geq 2,$$

em que $F_X^{1\star} \equiv F_X$.

3.1.2 Esperança condicional

Sejam X e Y duas variáveis aleatórias. A **esperança condicional de X dado Y** , que se pode escrever como $E(X|Y)$, é uma função de Y e, portanto, uma variável aleatória que assume valores $E(X|Y = y)$, sendo que:

- no caso em que a variável aleatória $X|Y = y$ é discreta, com suporte $S_{X|Y=y}$,

$$E(X|Y = y) = \sum_{x \in S_{X|Y=y}} xp_{X|Y}(x|y),$$

em que $p_{X|Y}$ é a função de probabilidade condicional de X dado $Y = y$.

- no caso em que a variável aleatória $X|Y = y$ é absolutamente contínua,

$$E(X|Y = y) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf_{X|Y}(x|y)dx,$$

em que $f_{X|Y}$ é a função densidade de probabilidade condicional de X dado $Y = y$.

Seguem-se duas propriedades importantes da esperança condicional e as suas demonstrações. Note-se que a demonstração da primeira propriedade será feita apenas no caso do vector aleatório (X, Y) ser absolutamente contínuo. Para uma formulação e provas gerais pode consultar-se Feller (1971) ou Chung (2001).

Proposição 3.1. *Sejam X e Y duas variáveis aleatórias e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Então,*

$$E(g(X)) = E(E(g(X)|Y)).$$

Demonstração. Como referido anteriormente, a prova será feita apenas no caso em que o vector (X, Y) é absolutamente contínuo. Neste caso,

$$\begin{aligned} E(E(g(X)|Y)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} E(g(X)|Y = y) f_Y(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_{X|Y}(x|y) dx \right) f_Y(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_{X|Y}(x|y) f_Y(y) dx dy, \end{aligned}$$

em que $f_{X|Y}(x, y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$ representa a função densidade de probabilidade da variável aleatória $X|Y = y$, $f_{X,Y}$ é a função densidade de probabilidade do par aleatório (X, Y) e f_Y é a função densidade de probabilidade da variável aleatória Y . Assim sendo,

$$\begin{aligned} E(E(g(X)|Y)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_{X,Y}(x, y) dx dy, \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y) dy \right) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) dx \\ &= E(g(X)). \end{aligned}$$

$$\therefore E(E(g(X)|Y)) = E(g(X)).$$

□

Proposição 3.2. *Sendo X e Y duas variáveis aleatórias,*

$$V(X) = E(V(X|Y)) + V(E(X|Y)).$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} E(V(X|Y)) &= E(E(X^2|Y) - (E(X|Y))^2) \\ &= E(X^2) - E((E(X|Y))^2) \\ &= E(X^2) - (E(X))^2 - E((E(X|Y))^2) + (E(X))^2 \\ &= V(X) - E((E(X|Y))^2) + (E(E(X|Y)))^2 \\ &= V(X) - V(E(X|Y)). \end{aligned}$$

$$\therefore V(X) = E(V(X|Y)) + V(E(X|Y)).$$

□

3.1.3 Processo de Poisson e processo de Poisson composto

Processo estocástico

Um **processo estocástico** é uma família de variáveis aleatórias $Y(t)$, onde t é um parâmetro tomando valores sobre um conjunto T , designado por conjunto de índices do processo. Um processo estocástico é normalmente denotado por $\{Y(t)\}_{t \in T}$.

Se $T = \{0, 1, 2, \dots\}$ então $\{Y(t)\}_{t \in T}$ diz-se um **processo estocástico em tempo discreto**.

Se $T = [0, +\infty[$ então $\{Y(t)\}_{t \in T}$ diz-se um **processo estocástico em tempo contínuo**.

Nota. Ainda que do ponto de vista matemático não haja nenhuma restrição quanto à natureza de T , na maioria das aplicações, nomeadamente no caso da atividade seguradora, t representa o tempo.

Quando o espaço dos valores possíveis para cada $Y(t)$ coincide com o conjunto dos números inteiros, o processo estocástico designa-se por **processo de contagem** (ou processo de valores inteiros). Usualmente neste contexto a letra Y é substituída pela letra N .

Incrementos independentes e estacionários

Diz-se que um processo estocástico em tempo contínuo, $\{Y(t)\}_{t \geq 0}$, tem **incrementos independentes** quando qualquer que seja a escolha dos índices $t_0 < t_1 < \dots < t_n$, as n variáveis aleatórias $Y(t_1) - Y(t_0), Y(t_2) - Y(t_1), \dots, Y(t_n) - Y(t_{n-1})$ são independentes.

Diz-se que um processo estocástico tem **incrementos estacionários** se as variáveis aleatórias $Y(t_2 + h) - Y(t_1 + h)$ e $Y(t_2) - Y(t_1)$ têm a mesma distribuição, quaisquer que sejam t_1 e t_2 , com $t_1 < t_2$, e para todo o $h > 0$. Isto equivale a dizer que a distribuição de $Y(t_2) - Y(t_1)$ depende apenas da amplitude do intervalo $t_2 - t_1$ e não da sua localização.

Distribuição de Poisson

Diz-se que uma variável aleatória X tem **distribuição de Poisson de parâmetro** λ , $X \sim Po(\lambda)$, se a respetiva função de probabilidade for dada por

$$p_X(x) = P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}, x = 0, 1, 2, \dots$$

Neste caso,

- $E(X) = \lambda$;
- $V(X) = \lambda$;
- $M_X(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}, t \in \mathbb{R}$.

Processo de Poisson

Um processo de contagem $\{N(t)\}_{t \geq 0}$, com $N(0) = 0$, diz-se um **processo de Poisson homogêneo**, ou simplesmente **processo de Poisson**, de intensidade λ , se verificar os seguintes postulados (veja-se Karlin and Taylor (1975)):

- $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ tem incrementos independentes;
- $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ tem incrementos estacionários;
- para qualquer $h \rightarrow 0^+$, $P(N(h) \geq 1) = \lambda h + o(h)$;
- para qualquer $h \rightarrow 0^+$, $P(N(h) \geq 2) = o(h)$.

Proposição 3.3. *Se $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ é um processo de Poisson de intensidade λ , então a variável aleatória $N(t)$ tem distribuição de Poisson de média λt , para todo $t > 0$, ou seja,*

$$P(N(t) = n) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!}, n = 0, 1, 2, \dots$$

Em particular,

- $E(N(t)) = \lambda t$;
- $V(N(t)) = \lambda t$;
- $M_{N(t)}(r) = e^{\lambda t(e^r - 1)}, r \in \mathbb{R}$.

Proposição 3.4. *Os tempos decorridos entre acontecimentos sucessivos num processo de Poisson de intensidade λ , são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com distribuição exponencial de média $\frac{1}{\lambda}$.*

Reciprocamente, se os tempos decorridos entre acontecimentos sucessivos num processo de contagem são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com distribuição exponencial de média $\frac{1}{\lambda}$, então o processo de contagem é um processo de Poisson de intensidade λ .

Processo estocástico composto e processo de Poisson composto

Um processo estocástico $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ diz-se um **processo estocástico composto** se

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i,$$

onde $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ é um processo de contagem e $X_1, X_2, \dots, X_{N(t)}$ é uma coleção de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas e independentes de $N(t)$. No caso em que $N(t) = 0$, considera-se $S(t) = 0$.

Um processo estocástico $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ diz-se um **processo de Poisson composto** se for um processo estocástico composto e o respetivo processo de contagem, $\{N(t)\}_{t \geq 0}$, for um processo de Poisson.

3.2 Processo das Indemnizações Agregadas

Um dos problemas fundamentais em Teoria do Risco é o estudo dos modelos que descrevem as indemnizações pagas pelas companhias seguradoras. A matemática actuarial começou a desenvolver-se no fim do século XVII, sendo que o seu maior progresso se deu a partir do início do século XX.

Neste capítulo estaremos particularmente interessados nos modelos que descrevem as indemnizações agregadas, que correspondem ao montante total pago em indemnizações pela companhia seguradora num certo intervalo de tempo. Estas indemnizações são relativas a todos os sinistros ocorridos (e que originaram uma indemnização) nesse intervalo de tempo, com respeito a uma carteira bem definida de apólices.

Iremos agora apresentar o designado modelo de risco colectivo que corresponde a adicionar as indemnizações à medida que os sinistros ocorrem. Neste modelo assume-se que a indemnização é paga no instante em que ocorre o sinistro. Admite-se portanto que os instantes de pagamento das indemnizações coincidem com os

instantes de ocorrência dos sinistros respectivos.

Denote-se então por $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ o **processo das indemnizações agregadas**, em que $S(t)$ representa o montante total pago em indemnizações no intervalo de tempo $]0, t]$.

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i,$$

onde X_i , com $i = 1, 2, \dots, N(t)$, representa o montante da i -ésima indemnização cujo sinistro ocorreu no intervalo $]0, t]$. No caso em que $N(t) = 0$, toma-se $S(t) = 0$. Admite-se que $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ é um processo estocástico composto, em que:

- $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ é um processo de valores inteiros que conta o número de indemnizações pagas até ao instante t ;
- $\{X_i\}_{i=1,2,\dots,N(t)}$ é uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas a X , com função de distribuição comum F_X , e independentes de $N(t)$.

Consideremos agora $t \geq 0$ e $h > 0$. Para um dado instante t , tem-se que:

- $N(t+h) - N(t)$ é o número de indemnizações pagas entre os instantes t e $t+h$;
- $S(t+h) - S(t)$ é o montante agregado de indemnizações pagas entre os instantes t e $t+h$.

Denotemos por:

- V_i - instante da i -ésima indemnização X_i , $i = 1, 2, \dots$. Admitamos que V_1, V_2, \dots são variáveis aleatórias tais que $V_1 < V_2 < \dots$, para excluir a possibilidade de duas (ou mais) indemnizações ocorrerem no mesmo instante;
- T_i - tempo decorrido entre duas indemnizações sucessivas X_{i-1} e X_i , $i = 1, 2, \dots$. Admitamos que $T_1 = V_1$.

Desta forma,

$$T_1 = V_1, \quad T_i = V_i - V_{i-1}, i = 2, 3, \dots,$$

e

$$V_i = \sum_{j=1}^i T_j, i = 1, 2, \dots$$

As figuras seguintes ilustram o aspeto usual do processo do número de indemnizações e do montante das indemnizações agregadas. Note-se que tanto $N(t)$ como $S(t)$ são funções "em escada", cujas descontinuidades ocorrem nos instantes V_i , $i = 1, 2, \dots$, em que as indemnizações são pagas. A amplitude de cada "salto" é igual a 1 no caso de $N(t)$ e igual ao montante da indemnização X_i , $i = 1, 2, \dots$, no caso de $S(t)$.

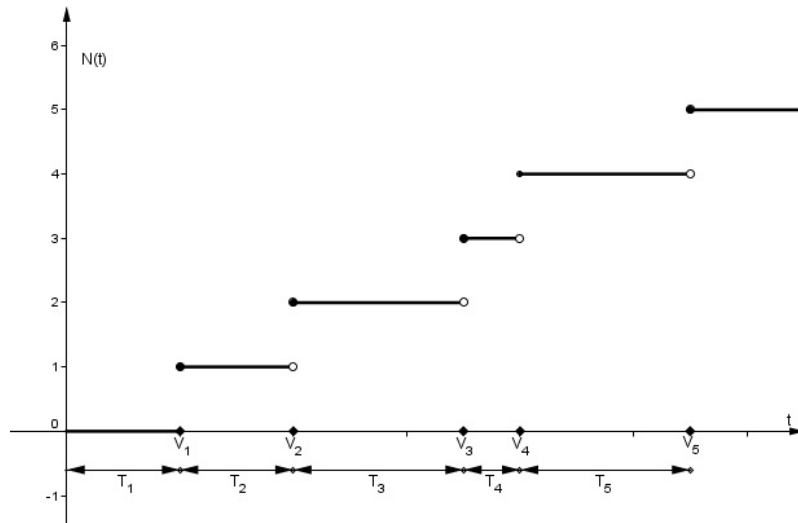


Figura 3.1: Gráfico da evolução de $N(t)$

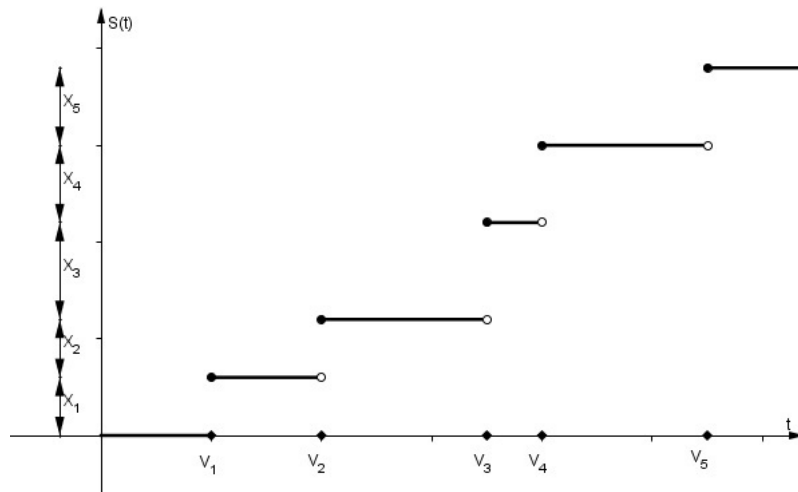


Figura 3.2: Gráfico da evolução de $S(t)$

De seguida são deduzidas expressões para o valor esperado, variância, função geradora de momentos e função de distribuição de $S(t)$ em função do valor esperado, variância, função geradora de momentos e função de distribuição de $N(t)$.

Proposição 3.5.

$$E(S(t)) = E(X)E(N(t))$$

Demonstração. Começamos por encontrar o valor da esperança condicional de $S(t)$ dado o valor de $N(t)$.

$$\begin{aligned} E(S(t)|N(t) = n) &= E(X_1 + X_2 + \dots + X_{N(t)}|N(t) = n) \\ &= E(X_1 + X_2 + \dots + X_n|N(t) = n) \\ &= E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) \\ &= \sum_{i=1}^n E(X_i) \\ &= nE(X) \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} E(S(t)) &= E(E(S(t)|N(t))) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} E(S(t)|N(t) = n)P(N(t) = n) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} nE(X)P(N(t) = n) \\ &= E(X) \sum_{n=0}^{+\infty} nP(N(t) = n) \\ &= E(X)E(N(t)) \end{aligned}$$

$$\therefore E(S(t)) = E(X)E(N(t))$$

□

Proposição 3.6.

$$V(S(t)) = E(N(t))V(X) + V(N(t))E(X)^2$$

Demonstração. Para esta demonstração, começamos por determinar o segundo momento condicional de $S(t)$, dado o valor de $N(t)$.

$$\begin{aligned}
E(S(t)^2|N(t) = n) &= E((X_1 + \dots + X_{N(t)})^2|N(t) = n) \\
&= E((X_1 + \dots + X_n)^2|N(t) = n) \\
&= E((X_1 + \dots + X_n)^2) \\
&= E\left(X_1^2 + \dots + X_n^2 + 2\sum_{i<j} X_i X_j\right) \\
&= nE(X^2) + n(n-1)(E(X))^2 \\
&= n(E(X^2) - E(X)^2) + n^2E(X)^2 \\
&= nV(X) + n^2E(X)^2.
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
V(S(t)) &= E(S(t)^2) - E(S(t))^2 \\
&= E(E(S(t)^2|N(t))) - E(S(t))^2 \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} E(S(t)^2|N(t) = n)P(N(t) = n) - (E(N(t))E(X))^2 \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (nV(X) + n^2(E(X))^2)P(N(t) = n) - E(N(t))^2E(X)^2 \\
&= V(X) \sum_{n=0}^{+\infty} nP(N(t) = n) + (E(X))^2 \sum_{n=0}^{+\infty} n^2P(N(t) = n) - E(N(t))^2E(X)^2 \\
&= E(N(t))V(X) + (E(N(t)^2) - E(N(t))^2)E(X)^2 \\
&= E(N(t))V(X) + V(N(t))E(X)^2
\end{aligned}$$

$$\therefore V(S(t)) = E(N(t))V(X) + V(N(t))E(X)^2$$

□

Proposição 3.7.

$$M_{S(t)}(r) = M_{N(t)}(\log M_X(r))$$

Demonstração. À semelhança do primeiro caso, vamos calcular a esperança condi-

cional de $e^{rS(t)}$ quando $N(t) = n$.

$$\begin{aligned}
E(e^{rS(t)}|N(t) = n) &= E(e^{r\sum_{i=1}^{N(t)} X_i}|N(t) = n) \\
&= E(e^{r\sum_{i=1}^n X_i}) \\
&= E\left(\prod_{i=1}^n e^{rX_i}\right) \\
&= \prod_{i=1}^n E(e^{rX_i}) \\
&= (M_X(r))^n
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
M_{S(t)}(r) &= E(e^{rS(t)}) \\
&= E(E(e^{rS(t)}|N(t))) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} E(e^{rS(t)}|N(t) = n)P(N(t) = n) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (M_X(r))^n P(N(t) = n) \\
&= E(M_X(r)^{N(t)}).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
M_{S(t)}(r) &= E(M_X(r)^{N(t)}) \\
&= E(e^{\log(M_X(r))^{N(t)}}) \\
&= E(e^{N(t)\log(M_X(r))}) \\
&= M_{N(t)}(\log(M_X(r)))
\end{aligned}$$

$$\therefore M_{S(t)}(r) = M_{N(t)}(\log M_X(r))$$

□

Proposição 3.8.

$$F_{S(t)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} F_X^{n*}(x)P(N(t) = n),$$

com $F_X^{0*}(x) = 1 \forall x \geq 0$.

Demonstração. Começamos por calcular $P(S(t) \leq x | N(t) = n)$:

$$\begin{aligned} P(S(t) \leq x | N(t) = n) &= P\left(\sum_{i=1}^{N(t)} X_i \leq x | N(t) = n\right) \\ &= P\left(\sum_{i=1}^n X_i \leq x | N(t) = n\right) \\ &= P\left(\sum_{i=1}^n X_i \leq x\right) \\ &= F_X^{n*}(x), \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} F_{S(t)}(x) &= P(S(t) \leq x) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(S(t) \leq x | N(t) = n) P(N(t) = n) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} F_X^{n*}(x) P(N(t) = n), \end{aligned}$$

com $F_X^{0*}(x) = 1 \quad \forall x \geq 0$.

$$\therefore F_{S(t)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} F_X^{n*}(x) P(N(t) = n)$$

□

3.3 Processo do Número de Indemnizações

Neste trabalho iremos estudar o caso em que processo das indemnizações agregadas $\{S(t)\}_{t \geq 0}$, considerado na Secção 3.2, constitui um processo de Poisson composto, ou seja, em que o número de indemnizações até ao instante t constitui um processo de Poisson, digamos de intensidade λ . Isto é equivalente a dizer, pela Proposição 3.4, que os tempos decorridos entre indemnizações sucessivas, T_1, T_2, \dots (definidos como na Secção 3.2, ou seja, em que T_1 representa o instante da primeira indemnização e T_i o tempo decorrido entre a indemnização $i - 1$ e a indemnização i , $i = 2, 3, \dots$) são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com distribuição exponencial de média $\frac{1}{\lambda}$ (veja-se Beard et al. (1984)).

Assim sendo, como consequência das propriedades demonstradas na Secção 3.2, bem como da Proposição 3.3 relativa ao processo de Poisson, podemos escrever as seguintes igualdades respeitantes ao processo de Poisson composto das indemnizações agregadas, $\{S(t)\}_{t \geq 0}$:

$$\begin{aligned} E(S(t)) &= \lambda t E(X); \\ V(S(t)) &= \lambda t E(X^2); \\ M_{S(t)}(r) &= e^{\lambda t (M_X(r) - 1)}; \\ F_{S(t)}(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} F_X^{n*}(x) \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!}. \end{aligned}$$

Note-se também que o facto do processo de Poisson $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ ter incrementos independentes e estacionários implica que o mesmo aconteça com o processo de Poisson composto $\{S(t)\}_{t \geq 0}$.

3.4 Distribuição do Montante das Indemnizações Individuais

Vamos agora apresentar alguns modelos possíveis de distribuição para o montante de indemnização individual, para os quais a função geradora de momentos existe e que serão explorados no capítulo das simulações.

3.4.1 Exponencial

Diz-se que uma variável aleatória X tem **distribuição Exponencial de parâmetro** α , $X \sim Exp(\alpha)$, $\alpha > 0$, se a respetiva função de probabilidade for dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

Neste caso,

- $E(X) = \frac{1}{\alpha}$;
- $V(X) = \frac{1}{\alpha^2}$;
- $M_X(t) = \frac{\alpha}{\alpha - t}$, $t < \alpha$.

3.4.2 Uniforme

Diz-se que uma variável aleatória X tem **distribuição Uniforme entre a e b** , com $a < b$, $X \sim U(a, b)$, se a respetiva função densidade de probabilidade for dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 0, & x \notin [a, b] \end{cases}.$$

Neste caso,

- $E(X) = \frac{a+b}{2}$;
- $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$;
- $M_X(t) = \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}$, $t \in \mathbb{R}$.

3.4.3 Normal

Diz-se que uma variável aleatória X tem **distribuição Normal de parâmetros $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$** , $X \sim N(\mu, \sigma)$, se a respetiva função de probabilidade for dada por

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, x \in \mathbb{R}.$$

Neste caso,

- $E(X) = \mu$;
- $V(X) = \sigma^2$;
- $M_X(t) = e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2} + \mu t}$, $t \in \mathbb{R}$.

3.4.4 Gama

Diz-se que uma variável aleatória X tem **distribuição Gama com parâmetros $\alpha > 0$ e $\beta > 0$** , $X \sim G(\alpha, \beta)$, se a respetiva função de probabilidade for dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases},$$

onde $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$. Neste caso,

- $E(X) = \frac{\alpha}{\beta}$;
- $V(X) = \frac{\alpha}{\beta^2}$;
- $M_X(t) = \left(\frac{\beta}{\beta - t}\right)^\alpha, t < \beta$.

Capítulo 4

Teoria da Ruína

4.1 Processo de reserva, tempo de ruína e probabilidade de ruína

Seja $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ o processo das indemnizações agregadas de uma determinada companhia seguradora estudado na Secção 3.2, cujas notações serão mantidas ao longo deste capítulo.

Seja $\{U(t)\}_{t \geq 0}$ o **processo de reserva** da seguradora para fazer face a determinado risco. Designando a reserva inicial $U(0)$ por u e supondo que os prémios são recebidos continuamente a uma taxa constante $c > 0$, isto é, que o montante total de prémios recebidos entre 0 e t é igual a ct , a **reserva de risco** no instante t é

$$U(t) = u + ct - S(t), \quad t \geq 0. \quad (4.1)$$

Diz-se que ocorre ruína se em algum instante a reserva for negativa. Seja então

$$\mathcal{T} = \inf\{t : t \geq 0 \text{ e } U(t) < 0\}$$

o instante da ocorrência da ruína, com o pressuposto de que $\mathcal{T} = \infty$ se $U(t) \geq 0$ para todo o t . Desta forma, a **probabilidade de ruína** é dada por

$$\psi(u) = P(\mathcal{T} < \infty).$$

O objectivo deste trabalho prende-se com o estudo da probabilidade anterior, que corresponde à probabilidade de, em algum instante t , a reserva se esgotar.

A Figura 4.1 ilustra o aspeto usual de um processo de reserva: a taxa de prémios é constante ao longo do tempo, ct , pelo que o gráfico tem declive c e cresce linearmente,

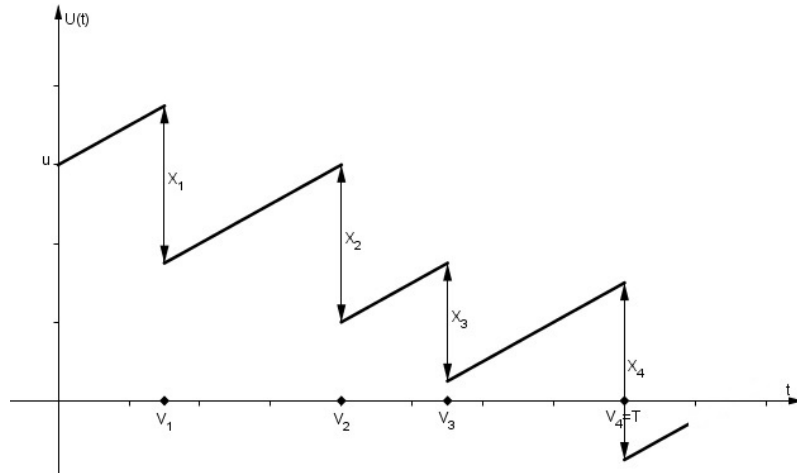


Figura 4.1: Gráfico da evolução de $U(t)$

exceto nos momentos V_i em que ocorre uma indenização. Nesse momento, o valor da reserva decresce no montante correspondente à indenização X_i . A ruína ocorre no instante em que a reserva se torna negativa. Nesse caso, a soma da reserva inicial com o total angariado em prêmios não é suficiente para cobrir as indenizações a pagar.

4.2 Probabilidade de ruína no modelo de Cramér-Lundberg

4.2.1 Modelo de Cramér-Lundberg

O processo de reservas $\{U(t)\}_{t \geq 0}$ pode ser estudado através da sua relação com o processo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$, dada pela igualdade (4.1).

Daqui para a frente iremos centrar-nos no caso em que $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ constitui um processo de Poisson composto. Neste caso, o modelo é denominado **Modelo de Cramér-Lundberg**.

As notações usadas serão as mesmas das Secções 3.2 e 3.3.

Vamos admitir que c excede o valor esperado das indenizações pagas num período, isto é que $c > \lambda E(X)$.

Definimos o **coeficiente de segurança** $\theta > 0$ através da equação

$$c = (1 + \theta)\lambda E(X).$$

Designamos por η o supremo dos valores ν para os quais a função geradora de momentos de X , $M_X(r)$, existe no intervalo $] -\infty, \nu[$.

Exemplo 4.1. Lembrando a Secção 3.4.1, se $X \sim \text{Exp}(\alpha)$, com $\alpha > 0$, então

$$M_X(r) = \frac{\alpha}{\alpha - r}, \quad r < \alpha,$$

e portanto, neste caso, $\eta = \alpha$.

Na secção que se segue vamos supor que $\eta > 0$ e que $M_X(r)$ tende para ∞ quando $r \rightarrow \eta$, $\lim_{r \rightarrow \eta} M_X(r) = \infty$.

4.2.2 Coeficiente de ajustamento

No seguimento das condições da secção anterior, definimos **coeficiente de ajustamento** como a única raiz positiva $r = R$ da equação

$$\lambda + rc = \lambda M_X(r), \quad r < \eta, \quad (4.2)$$

que é equivalente a

$$1 + (1 + \theta)E(X)r = M_X(r), \quad r < \eta. \quad (4.3)$$

Proposição 4.1. Sob as condições anteriores, a equação (4.3) tem apenas uma raiz positiva.

Demonstração. Observando o primeiro membro da equação (4.3), é fácil identificar que se trata de uma reta com declive positivo $(1 + \theta)E(X)$ e ordenada na origem 1.

Observemos agora o segundo membro, lembrando que $M_X(r) = E(e^{rX})$. Daqui tiramos como conclusão imediata que as duas funções se intersectam no ponto $(0, 1)$, pois $M_X(0) = 1$. Temos assim que a equação admite a solução trivial.

Devemos então de seguida estudar o comportamento da função $M_X(r)$ para $r > 0$, com recurso às suas derivadas de primeira e de segunda ordem:

- $M'_X(r) = E(Xe^{rX}) > 0$;
- $M'_X(0) = E(X)$;
- $M''_X(r) = E(X^2e^{rX}) > 0$.

Daqui concluímos que a função $M_X(r)$ é crescente e convexa.

Notemos agora que, para $r = 0$, o declive da recta (que é igual a $(1 + \theta)E(X)$), é maior que o declive da curva $M_X(r)$ (que é igual a $M'_X(0) = E(X)$), uma vez que $\theta > 0$.

Finalmente, como $\lim_{r \rightarrow \eta} M_X(r) = \infty$, podemos inferir que as duas funções se interseçam num único ponto à direita de $r = 0$.

A Figura 4.2 ilustra o que foi descrito e permite concluir que existe uma solução positiva e esta solução é única.

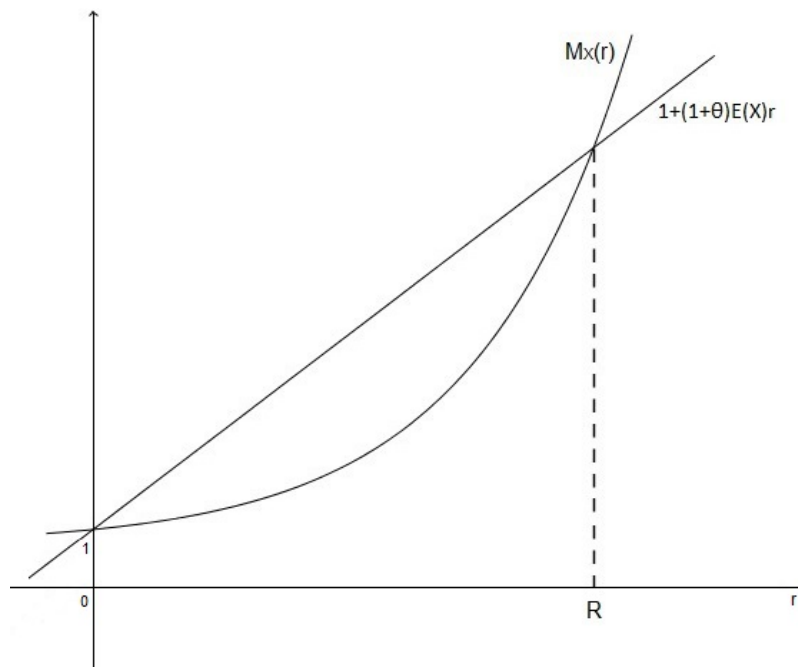


Figura 4.2: Determinação gráfica do coeficiente de ajustamento R

□

Exemplo 4.2. *Determinaremos de seguida o coeficiente de ajustamento no caso da distribuição do montante das indemnizações individuais ser exponencial de parâmetro α .*

Lembrando a secção 3.4.1, quando $X \sim \text{Exp}(\alpha)$, $E(X) = \frac{1}{\alpha}$ e $M_X(r) = \frac{\alpha}{\alpha - r}$, $r < \alpha$.

Como tal, substituindo na equação (4.3) os valores de $E(X)$ e de $M_X(r)$, temos que:

$$1 + (1 + \theta) \frac{1}{\alpha} r = \frac{\alpha}{\alpha - r}$$

que é equivalente a

$$r((1 + \theta)r - \theta\alpha) = 0$$

As raízes da equação anterior são a raiz nula e o coeficiente de ajustamento

$$R = \frac{\theta\alpha}{1 + \theta}. \quad (4.4)$$

Tendo em conta que $c = (1 + \theta)\lambda E(X)$ e que neste caso $E(X) = \frac{1}{\alpha}$, podemos escrever R da seguinte forma:

$$R = \alpha - \frac{\lambda}{c}.$$

De seguida, iremos enunciar e demonstrar o **Teorema Fundamental do Risco** e um exemplo da sua aplicação.

Teorema 4.2. *Para $u \geq 0$*

$$\psi(u) = \frac{e^{-Ru}}{E(e^{-RU(\mathcal{T})} | \mathcal{T} < \infty)}, \quad (4.5)$$

onde R denota o coeficiente de ajustamento.

Demonstração. Para $t > 0$ e $r > 0$ quaisquer,

$$E(e^{-rU(t)}) = E(e^{-rU(t)} | \mathcal{T} < t) P(\mathcal{T} < t) + E(e^{-rU(t)} | \mathcal{T} \geq t) P(\mathcal{T} \geq t). \quad (4.6)$$

Como $U(t) = u + ct - S(t)$, e relembrando a expressão da função geradora de momentos das indemnizações agregadas no caso do processo ser de Poisson de intensidade λ , $E(e^{rS(t)}) = e^{\lambda t(M_X(r) - 1)}$ (veja-se Secção 3.3), tem-se que

$$E(e^{-rU(t)}) = e^{-ru - rct} E(e^{rS(t)}) = e^{-ru - rct + \lambda t(M_X(r) - 1)}. \quad (4.7)$$

Para $t > \mathcal{T}$, podemos escrever

$$U(t) = U(\mathcal{T}) + c(t - \mathcal{T}) - (S(t) - S(\mathcal{T})).$$

Uma vez que $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ tem incrementos independentes, temos que $U(\mathcal{T})$ é independente de $S(t) - S(\mathcal{T})$. Para além disso, esta diferença tem distribuição de Poisson composta, de parâmetro $\lambda(t - \mathcal{T})$. Assim sendo,

$$E(e^{-rU(t)} | \mathcal{T} < t) = E(e^{-rU(\mathcal{T}) - rc(t-\mathcal{T}) + \lambda(t-\mathcal{T})(M_X(r)-1)} | \mathcal{T} < t). \quad (4.8)$$

As expressões (4.7) e (4.8) simplificam-se para $r = R$, ou seja, no caso em que r é o coeficiente de ajustamento, obtendo-se da igualdade (4.6)

$$e^{-Ru} = E(e^{-RU(\mathcal{T})} | \mathcal{T} < t) P(\mathcal{T} < t) + E(e^{-RU(t)} | \mathcal{T} \geq t) P(\mathcal{T} \geq t). \quad (4.9)$$

Fazendo $t \rightarrow \infty$ na equação (4.9), a segunda parcela do segundo membro tende para 0, pois se não ocorreu ruína então $\lim_{t \rightarrow \infty} U(t) = \infty$ (a prova deste facto pode ser consultada em Bowers et al. (1986), capítulo 13). Obtém-se então

$$e^{-Ru} = E(e^{RU(\mathcal{T})} | \mathcal{T} < \infty) \psi(u),$$

ou seja

$$\psi(u) = \frac{e^{-Ru}}{E(e^{-RU(t)} | \mathcal{T} < \infty)}.$$

□

Exemplo 4.3. *Determinaremos de seguida a probabilidade de ruína no caso em que as indemnizações individuais têm distribuição exponencial de média $\frac{1}{\alpha}$.*

Seja \mathcal{T} o instante de ruína. Seja \hat{u} a reserva imediatamente antes de \mathcal{T} , e considere-se $y > 0$. Como o acontecimento $-U(\mathcal{T}) > y$ dado que $\mathcal{T} < \infty$ é equivalente a que X , o montante da indemnização que causou a ruína, seja superior a $\hat{u} + y$, dado que é superior a \hat{u} , então

$$\begin{aligned} P(-U(\mathcal{T}) > y | \mathcal{T} < \infty) &= P(X > \hat{u} + y | X > \hat{u}) \\ &= \frac{1 - F_X(\hat{u} + y)}{1 - F_X(\hat{u})} \\ &= \frac{e^{-\alpha(\hat{u}+y)}}{e^{-\alpha\hat{u}}} \\ &= e^{-\alpha y}, \quad y > 0, \end{aligned}$$

e conseqüentemente

$$P(-U(\mathcal{T}) < y | \mathcal{T} < \infty) = 1 - e^{-\alpha y}, \quad y > 0.$$

Portanto

$$E(e^{-RU(\mathcal{T})} | \mathcal{T} < \infty) = \frac{\alpha}{\alpha - R}.$$

Tendo em conta o resultado (4.4) do Exemplo 4.2, assim como o enunciado do Teorema Fundamental do Risco, obtém-se

$$\psi(u) = \frac{\alpha - R}{\alpha} e^{-\frac{\alpha\theta u}{1+\theta}} = \frac{1}{1+\theta} e^{-\frac{\alpha\theta u}{1+\theta}}.$$

Uma vez que $c = (1 + \theta)\lambda E(X)$ e que neste caso $E(X) = \frac{1}{\alpha}$, podemos reescrever $\psi(u)$ da seguinte forma:

$$\psi(u) = \frac{\lambda}{\alpha c} e^{-(\alpha - \frac{\lambda}{c})u}.$$

4.3 Relação entre a probabilidade de ruína e a perda agregada máxima

Relembramos que continuamos a estudar o caso em que o processo das indemnizações agregadas $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ é um processo de Poisson composto.

Estudemos agora o montante de reserva no instante em que esta desce abaixo do seu nível inicial u (note-se que esta situação pode eventualmente nunca ocorrer).

Começemos por relembrar que $c = (1 + \theta)\lambda E(X)$, onde c denota a taxa de entrada de prémios, θ o coeficiente de segurança e λ a intensidade do processo de contagem $\{N(t)\}$.

Teorema 4.3. *A probabilidade da reserva alguma vez descer abaixo do valor inicial u e tomar um valor entre $u - y$ e $u - y - dy$ da primeira vez em que isso ocorre é dada por*

$$\frac{\lambda}{c} [1 - F_X(y)] dy = \frac{1 - F_X(y)}{(1 + \theta)E(X)} dy, \quad y > 0.$$

A demonstração do resultado anterior pode ser consultada em Bowers et al. (1986).

O resultado seguinte é uma consequência do Teorema 4.3.

Corolário 4.4. *A probabilidade das reservas alguma vez serem inferiores ao seu nível inicial, u , é $\frac{1}{1 + \theta}$.*

Demonstração. Pelo Teorema 4.3, tem-se

$$P(U(t) < u \wedge u - y - dy < U(t) < u - y) = \frac{\lambda}{c} (1 - F_X(y)) dy$$

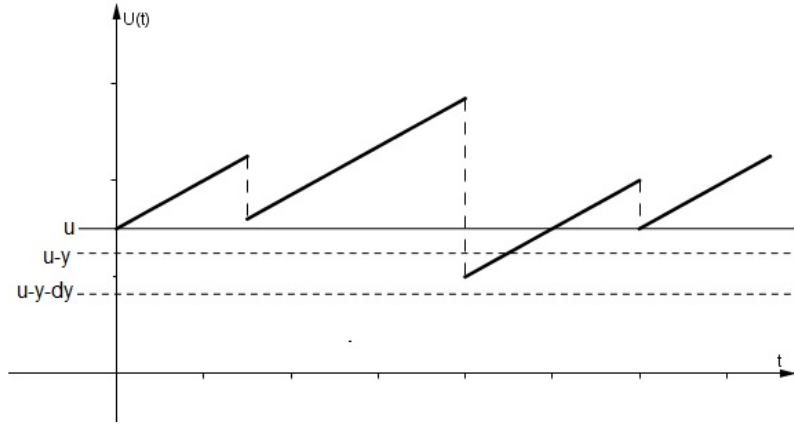


Figura 4.3: Primeira descida das reservas $U(t)$ abaixo do nível inicial, u

para $y > 0$. Pelo que

$$\begin{aligned} P(U(t) < u) &= \int_0^{+\infty} \frac{\lambda}{c} (1 - F_X(y)) dy \\ &= \frac{\lambda}{c} \int_0^{+\infty} (1 - F_X(y)) dy. \end{aligned}$$

Ora, $E(X) = \int_0^{+\infty} (1 - F_X(y)) dy$, já que X é uma variável aleatória não negativa. Tem-se então

$$P(U(t) < u) = \frac{\lambda E(X)}{c} = \frac{\lambda E(X)}{(1 + \theta)\lambda E(X)} = \frac{1}{1 + \theta}.$$

□

O Corolário 4.4 permite concluir que a probabilidade da reserva alguma vez descer abaixo do seu nível inicial não depende desse valor, u , mas apenas do coeficiente de segurança θ .

No caso particular em que $u = 0$, a probabilidade da reserva descer abaixo desse nível inicial coincide com a probabilidade de ruína quando o nível inicial é zero. Portanto,

$$\psi(0) = \frac{1}{1 + \theta}.$$

Note-se que $\psi(0)$ depende apenas do coeficiente de segurança e não da forma da distribuição das indenizações individuais.

Denote-se agora por L_1 a variável aleatória que corresponde ao "montante pelo qual as reservas descem abaixo do seu nível inicial, na primeira vez em que tal ocorre, dado que tal acontece".

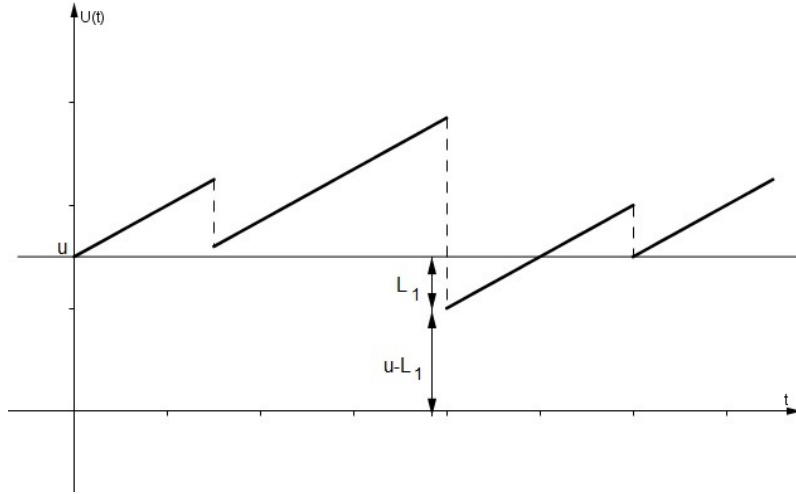


Figura 4.4: Ilustração de L_1

Corolário 4.5. A função densidade de probabilidade f_{L_1} da variável aleatória L_1 é

$$f_{L_1}(y) = \frac{1}{E(X)}[1 - F_X(y)], \quad y > 0.$$

Demonstração. Começemos por notar que $L_1 \equiv u - U(t) | \{U(t) < u\}$. Assim, e como consequência do Teorema 4.3 e do Corolário 4.4,

$$\begin{aligned} f_{L_1}(y)dy &= P(y < u - U(t) < y + dy | U(t) < u) \\ &= P(-y - dy < U(t) - u < -y | U(t) < u) \\ &= P(u - y - dy < U(t) < u - y | U(t) < u) \\ &= \frac{P(U(t) < u \wedge u - y - dy < U(t) < u - y)}{P(U(t) < u)} \\ &= \frac{\frac{\lambda}{c}(1 - F_X(y))dy}{\frac{1}{1+\theta}} \\ &= \frac{(1 + \theta)\lambda}{(1 + \theta)\lambda E(X)}(1 - F_X(y))dy \\ &= \frac{1}{E(X)}(1 - F_X(y))dy. \end{aligned}$$

Portanto, a função densidade de probabilidade de L_1 é dada por

$$f_{L_1}(y) = \frac{1}{E(X)}(1 - F_X(y)), \quad y > 0.$$

□

Corolário 4.6. A função geradora de momentos de L_1 , $M_{L_1}(r)$, e a função geradora de momentos de X , $M_X(r)$ verificam a seguinte relação

$$M_{L_1}(r) = \frac{1}{E(X)r} [M_X(r) - 1].$$

Demonstração. A função geradora de momentos da variável aleatória L_1 é dada por

$$\begin{aligned} M_{L_1}(r) &= E(e^{rL_1}) \\ &= \frac{1}{E(X)} \int_0^{+\infty} e^{ry}(1 - F_X(y))dy \\ &= \frac{1}{E(X)r} \left\{ e^{ry}(1 - F_X(y)) \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{ry} f_X(y)dy \right\} \\ &= \frac{1}{E(X)r} (M_X(r) - 1), \end{aligned}$$

uma vez que $\lim_{y \rightarrow +\infty} e^{ry}(1 - F_X(y)) = 0$ □

Definimos agora a **perda agregada máxima** como sendo a variável aleatória

$$L = \max_{t \geq 0} \{S(t) - ct\},$$

que corresponde ao excesso máximo do montante das indemnizações agregadas sobre o montante de prémios recebidos. A variável aleatória L é uma variável não negativa, ou seja, $L \geq 0$, visto que $S(t) - ct = 0$ para $t = 0$.

Repare-se de seguida na simetria existente entre os gráficos correspondentes ao Processo de Reserva, $\{U(t) = u + ct - S(t)\}_{t \geq 0}$, e ao Processo de Perda Agregada, $\{S(t) - ct = u - U(t)\}_{t \geq 0}$ (veja-se, por exemplo, Fraga Alves (1997)).

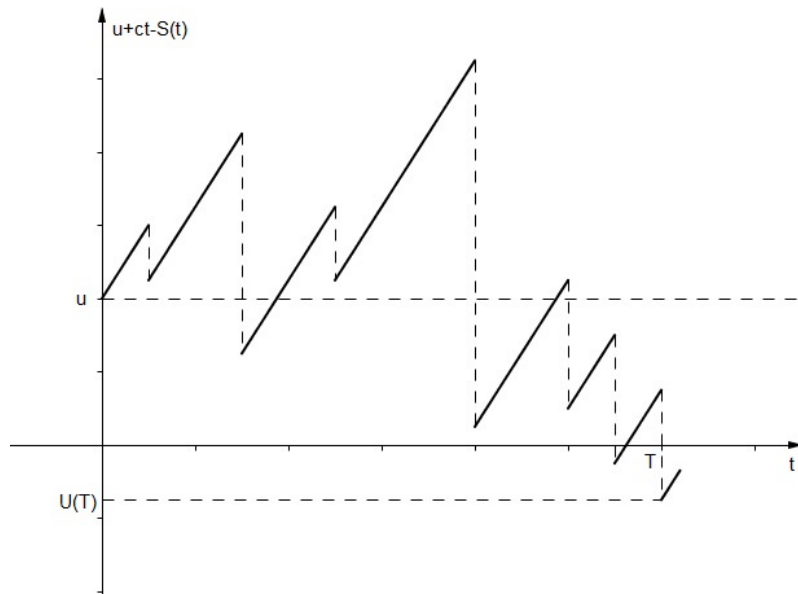


Figura 4.5: Processo de Reserva

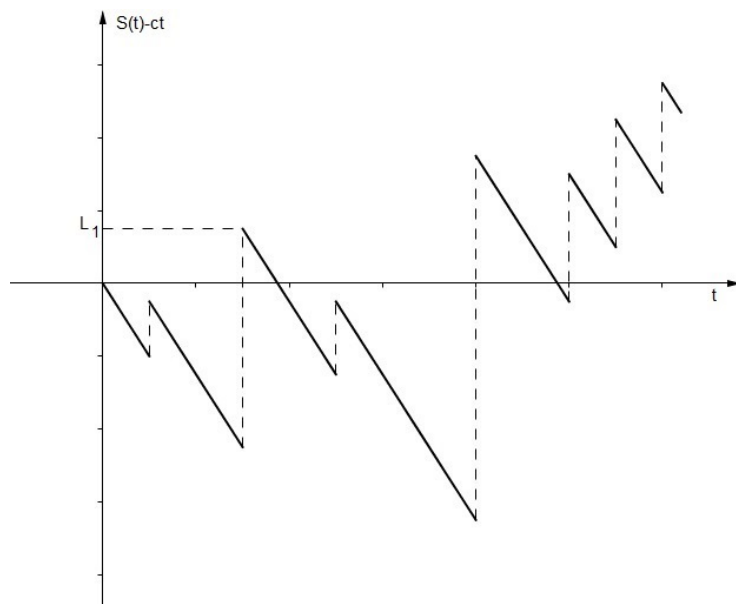


Figura 4.6: Processo de Perda Agregada

É possível deduzir então a seguinte relação entre a distribuição da Perda Agregada Máxima e a Probabilidade de Ruína.

Teorema 4.7. *A função de distribuição da variável aleatória L e a probabilidade*

de ruína $\psi(u)$ verificam a igualdade

$$\psi(u) = 1 - F_L(u)$$

para toda a reserva inicial $u \geq 0$.

Demonstração.

$$\begin{aligned} F_L(u) &= P(L \leq u) \\ &= P(\max_{t \geq 0} \{S(t) - ct\} \leq u) \\ &= P(S(t) - ct \leq u, \forall t \geq 0) \\ &= P(u + ct - S(t) \geq 0, \forall t \geq 0) \\ &= P(U(t) \geq 0, \forall t \geq 0) \\ &= 1 - \psi(u), \end{aligned}$$

para toda a reserva inicial $u \geq 0$. □

A probabilidade de ruína, $\psi(u)$, é uma função decrescente do nível inicial u , partindo de $\psi(u) = \frac{1}{1+\theta}$. Do teorema anterior, é possível tirar então o seguinte corolário.

Corolário 4.8. *A variável aleatória L é mista, tendo ponto de massa de probabilidade em $L = 0$, com*

$$P(L = 0) = \frac{\theta}{1 + \theta}.$$

Demonstração. Trata-se de uma consequência direta do teorema anterior, visto que

$$\begin{aligned} P(L = 0) &= P(L \leq 0) = F_L(0) \\ &= 1 - \psi(0) = 1 - \frac{1}{1 + \theta} \\ &= \frac{\theta}{1 + \theta}, \end{aligned}$$

pelo que L é uma variável aleatória mista, tendo um ponto de massa em $L = 0$, sendo contínua para $u > 0$. □

Pelos resultados anteriores, é possível concluir que a distribuição da perda agregada máxima pode ser utilizada para obter informação sobre a probabilidade de ruína.

O teorema seguinte evidencia o caráter misto da variável aleatória L , através da respectiva função geradora de momentos, assim como uma representação de L como soma aleatória de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas a L_1 .

Teorema 4.9. *A função geradora de momentos da variável aleatória L é*

$$M_L(r) = \frac{\theta E(X)r}{1 + (1 + \theta)E(X)r - M_X(r)}.$$

Demonstração. Considerem-se os instantes em que o processo de perda agregada, $S(t) - ct$, atinge novos recordes.

Dado que ocorreu um valor recorde, existe uma probabilidade $\psi(0)$ de que seja ultrapassado e existe uma probabilidade $1 - \psi(0)$ de que permaneça o mesmo. Esta conclusão é, na verdade, uma consequência do facto de $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ ser um processo de Poisson composto e, portanto, de incrementos estacionários e independentes.

Assim, a ocorrência de um valor recorde para o processo da perda agregada tem igual probabilidade à da ocorrência de uma descida abaixo do nível de que parte o processo de reservas, ou seja, uma probabilidade igual a $\psi(0) = \frac{1}{1 + \theta}$.

Considere-se agora a variável aleatória denotada por V , que conta o "número de vezes que a perda agregada bate um recorde", contando a origem como o recorde número 0.

Temos então

$$P(V = n) = (1 - \psi(0))(\psi(0))^n = \left(\frac{\theta}{1 + \theta}\right) \left(\frac{1}{1 + \theta}\right)^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Trata-se de uma variável aleatória com distribuição geométrica,

$$V \sim Geo\left(\frac{\theta}{1 + \theta}\right).$$

A sua função geradora de momentos é dada por

$$\begin{aligned} M_V(r) &= E(e^{rV}) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{rn} \left(\frac{\theta}{1 + \theta}\right) \left(\frac{1}{1 + \theta}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\theta}{1 + \theta}\right) \left(\frac{1}{1 + \theta} e^r\right)^n \\ &= \frac{\frac{\theta}{1 + \theta}}{1 - \frac{e^r}{1 + \theta}} \\ &= \frac{\theta}{1 + \theta - e^r}. \end{aligned}$$

A perda agregada máxima, L , pode ser representada através da soma aleatória de V variáveis aleatórias, referentes aos montantes pelos quais os recordes são ultrapassados, isto é,

$$L = \sum_{i=1}^V L_i. \quad (4.10)$$

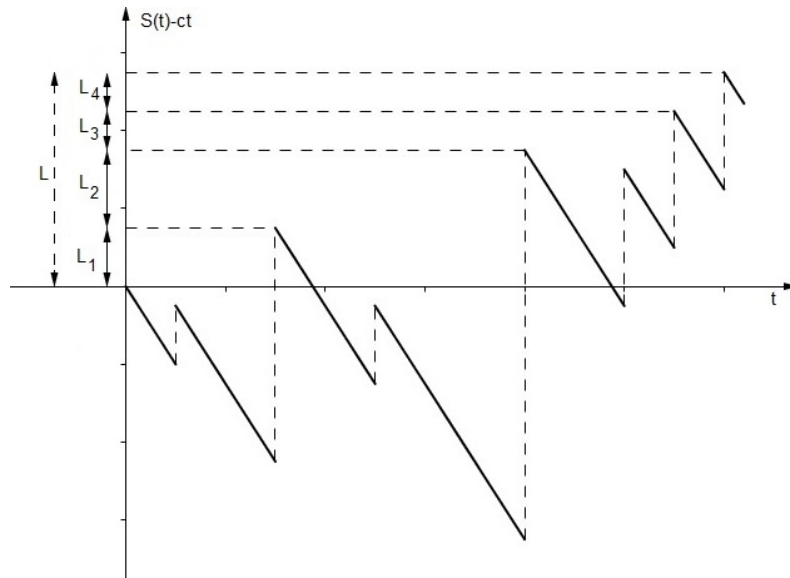


Figura 4.7: Ilustração da Perda Agregada Máxima L como soma dos recordes L_i

As variáveis aleatórias L_i são independentes e identicamente distribuídas a L_1 , montante pelo qual as reservas descem abaixo do nível inicial pela primeira vez, dado que tal sucede. Temos então que

- L_i são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas a L_1 , com função densidade de probabilidade

$$f_{L_1}(y) = \frac{1}{E(X)}(1 - F_X(y)), y \geq 0;$$

- L_i são independentes de V .

Então, usando um raciocínio análogo ao da demonstração da Proposição 3.7 obtemos que a função geradora de momentos de L é dada por

$$M_L(r) = M_V(\log(M_{L_1}(r))) = \frac{\theta}{1 + \theta - M_{L_1}(r)}.$$

Substituindo $M_{L_1}(r)$ pela expressão obtida no Corolário 4.6, obtemos

$$M_L(r) = \frac{\theta E(X)r}{1 + (1 + \theta)E(X)r - M_X(r)}.$$

□

Teorema 4.10. *A seguinte igualdade é verificada*

$$\int_0^{+\infty} e^{ur}(-\psi'(u))du = \frac{1}{1 + \theta} \times \frac{\theta(M_X(r) - 1)}{1 + (1 + \theta)E(X)r - M_X(r)}. \quad (4.11)$$

Demonstração. Com base no Teorema 4.9, podemos escrever a função geradora de momentos de L da seguinte forma:

$$M_L(r) = \frac{\theta}{1 + \theta} + \frac{1}{1 + \theta} \times \frac{\theta(M_X(r) - 1)}{1 + (1 + \theta)E(X)r - M_X(r)}. \quad (4.12)$$

Por outro lado,

$$M_L(r) = P(L = 0) \times E(e^{rL}|L = 0) + P(L > 0) \times E(e^{rL}|L > 0),$$

o que é equivalente a

$$\begin{aligned} M_L(r) &= P(L = 0) \times E(e^0) + P(L > 0) \times \int_0^{+\infty} e^{ru} \frac{f_L(u)}{P(L > 0)} du \\ &= P(L = 0) + \int_0^{+\infty} e^{ru} f_L(u) du. \end{aligned}$$

Note-se agora que a função de probabilidade de L é dada por

$$f_L(u) = \begin{cases} P(L = 0) = 1 - \psi(0) & u = 0 \\ -\psi'(u) & u > 0 \end{cases},$$

e portanto

$$M_L(r) = P(L = 0) + \int_0^{+\infty} e^{ru}(-\psi'(u))du.$$

A igualdade pretendida é então obtida por comparação da segunda parcela com a expressão (4.12), ou seja,

$$\int_0^{+\infty} e^{ru}(-\psi'(u))du = \frac{1}{1 + \theta} \times \frac{\theta(M_X(r) - 1)}{1 + (1 + \theta)E(X)r - M_X(r)}.$$

□

A expressão (4.11) pode ser usada com vista a determinar a probabilidade de ruína $\psi(u)$, mas apenas em certos casos particulares. Na verdade, a sua utilidade é comprovada nos casos em que as indemnizações particulares têm distribuição exponencial, gama ou são uma mistura de exponenciais.

CASO PARTICULAR: Vamos aqui desenvolver o caso em que X é mistura de Exponenciais, ou seja,

$$f_X(x) = \sum_{i=1}^n A_i \beta_i e^{-\beta_i x}, \quad x > 0, \quad (4.13)$$

com $\beta_i > 0$, $A_i > 0$, $\forall i = 1, 2, \dots, n$, e $\sum_{i=1}^n A_i = 1$.

Então,

$$M_X(r) = \sum_{i=1}^n A_i \frac{\beta_i}{\beta_i - r},$$

para $r < \min\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$.

Substituindo a expressão de $M_X(r)$ na equação (4.11), surge no segundo membro da mesma um quociente de polinómios em r , sendo n o grau do denominador. Pode então escrever-se

$$\int_0^{+\infty} e^{ru} (-\psi'(u)) du = \sum_{i=1}^n \frac{C_i r_i}{r_i - r},$$

para constantes C_i , e em que os r_i , $i = 1, 2, \dots, n$ são as raízes do denominador do segundo membro, ou seja, satisfazem a equação que define o coeficiente de ajustamento

$$1 + (1 + \theta)E(X)r = M_X(r), \quad (4.14)$$

sendo $R \equiv \min\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$.

Corolário 4.11. *No caso de X ser uma mistura de exponenciais definida em (4.13) e nas condições anteriores, a função que satisfaz simultaneamente (4.14) e $\psi(\infty) = 0$ é*

$$\psi(u) = \sum_{i=1}^n C_i e^{-ur_i} \quad (4.15)$$

Demonstração. Derivando ambos os membros de (4.15), obtém-se

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{ur}(-\psi'(u))du &= \int_0^{+\infty} e^{ur} \left(\sum_{i=1}^n C_i r_i e^{-ur_i} \right) du \\ &= \sum_{i=1}^n C_i r_i \int_0^{+\infty} e^{(r-r_i)u} du \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{C_i r_i}{r_i - r}.\end{aligned}$$

□

Capítulo 5

Aproximações para a probabilidade de ruína

Neste capítulo, começamos por fazer notar que a expressão para a probabilidade de ruína dada pelo Teorema 4.2 só é passível de ser obtida em casos particulares como o do Exemplo 4.3.

Como tal, têm sido estudadas na literatura várias aproximações para a probabilidade de ruína e, neste trabalho, iremos explorar algumas delas (veja-se, por exemplo, Dickson (2005)).

5.1 Aproximação de Lundberg

Na generalidade dos casos, não é possível determinar o denominador da equação do Teorema 4.2. No entanto, nos casos em que o coeficiente de ajustamento existe, este teorema pode ser utilizado na obtenção de desigualdades, que serão apresentadas seguidamente.

Corolário 5.1.

$$\psi(u) < e^{-Ru}.$$

Demonstração. Basta notar que para $\mathcal{T} < \infty$, tem-se que $U(\mathcal{T}) < 0$. Como tal, o denominador de (4.5) é maior que 1. \square

Corolário 5.2. *Se as indemnizações particulares forem limitadas de tal modo que $F_X(m) = 1$ para algum m finito, então*

$$\psi(u) > e^{-R(u+m)}$$

Demonstração. Para $\mathcal{T} < \infty$, e dado que $F_X(m) = 1$, tem-se que $U(\mathcal{T}) > -m$. Assim,

$$e^{-RU(\mathcal{T})} < e^{Rm},$$

e portanto

$$E(e^{-RU(\mathcal{T})} | \mathcal{T} < \infty) < e^{Rm}.$$

Combinando este resultado com o Teorema 4.2, obtém-se o pretendido. \square

Apesar de se tratar de um majorante, tendo em conta os dois corolários anteriores, alguns autores sugerem a aproximação

$$\psi(u) \simeq e^{-Ru},$$

que neste trabalho será designada por **aproximação de Lundberg** e denotada por $\psi_L(u)$.

5.2 Aproximação de Crámer-Lundberg

A aproximação considerada nesta secção baseia-se no seguinte resultado (veja-se, por exemplo, Rolski et al. (1999), Grandell (1991) ou Asmussen e Albrecher (2010)).

Teorema 5.3. *Admitamos que o coeficiente de ajustamento R existe e que, para além disso,*

$$\int_0^{+\infty} xe^{Rx}(1 - F_X(x))dx < \infty.$$

Então,

$$\psi(u) \simeq \left(1 - \frac{\lambda E(X)}{c}\right) \left(\frac{\lambda}{c} M'_X(R) - 1\right)^{-1} e^{-Ru}$$

quando $u \rightarrow \infty$.

A aproximação sugerida pelo teorema anterior foi originalmente demonstrada por Crámer-Lundberg, sendo portanto designada neste trabalho por **aproximação de Crámer-Lundberg** e denotada por $\psi_{CL}(u)$.

5.3 Aproximação de De Vylder

Em 1978, De Vylder sugeriu aproximar o modelo de risco colectivo $S(t)$ por um modelo $\tilde{S}(t)$ que constitui um processo de Poisson composto de intensidade $\tilde{\lambda}$ e em que as indemnizações individuais têm distribuição exponencial de parâmetro $\tilde{\alpha}$.

O modelo de reserva $U(t) = u + ct - S(t)$ foi então aproximado pelo modelo

$$\tilde{U}(t) = u + \tilde{c}t - \tilde{S}(t)$$

para uma taxa constante $\tilde{c} > 0$.

De Vylder (1978) propôs igualar os três primeiros momentos de $U(t)$ aos de $\tilde{U}(t)$, tendo obtido a aproximação

$$\psi(u) \simeq \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\alpha}\tilde{c}} e^{-(\tilde{\alpha}-\frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{c}})u}, \quad u \geq 0,$$

em que

- $\tilde{\lambda} = \frac{9\lambda E(X^2)^3}{2E(X^3)^2}$;
- $\tilde{\alpha} = \frac{3E(X^2)}{E(X^3)}$;
- $\tilde{c} = c - \lambda E(X) + \frac{3\lambda E(X^2)^2}{2E(X^3)}$.

Denotamos esta aproximação por $\psi_{DV}(u)$ e designamo-la por **aproximação de De Vylder**.

5.4 Aproximação de Rényi

A aproximação que apresentaremos nesta secção foi obtida por Rényi (veja-se, por exemplo, Grandell (2000) ou Bowers et al. (1986)) conjugando a desigualdade $\psi(u) < e^{-Ru}$ com os seguintes factos, mostrados na Secção 4.3:

- $F_L(u) = 1 - \psi(u)$, em que L é a perda agregada máxima definida na Secção 4.3;
- $\psi(0) = \frac{1}{1+\theta}$, onde θ é o coeficiente de segurança.

A aproximação referida é dada por

$$1 - F_L(u) = \psi(u) \simeq \frac{1}{1+\theta} e^{-ku}, \quad u \geq 0,$$

em que k é obtido de forma a que os valores médios coincidam, ou seja,

$$\int_0^{+\infty} (1 - F_L(u)) du = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\theta} e^{-ku} du. \quad (5.1)$$

O segundo membro da igualdade anterior é igual a

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\theta} e^{-ku} du &= \frac{1}{1+\theta} \int_0^{+\infty} e^{-ku} du \\ &= \frac{1}{1+\theta} \left[-\frac{1}{k} e^{-ku} \right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{1+\theta} \left[\frac{-1}{k} (e^{-\infty} - e^0) \right] \\ &= \frac{1}{(1+\theta)k}. \end{aligned}$$

O primeiro membro coincide com $E(L)$ que, usando a relação (4.10), se pode mostrar que é igual a $\frac{E(X^2)}{2\theta E(X)}$.

Aplicando a igualdade (5.1) temos

$$\frac{E(X^2)}{2\theta E(X)} = \frac{1}{(1+\theta)k},$$

obtendo-se assim

$$k = \frac{2\theta E(X)}{(1+\theta)E(X^2)}.$$

A aproximação da probabilidade de ruína, que designamos por **aproximação de Rényi** e denotamos por $\psi_R(u)$, é então dada por

$$\psi(u) \simeq \frac{1}{1+\theta} e^{-\frac{2\theta E(X)}{(1+\theta)E(X^2)}u}, \quad u \geq 0.$$

Esta aproximação pode ser reescrita em função de λ e de c (relembrando que $c = (1+\theta)\lambda E(X)$):

$$\psi_R(u) = \frac{\lambda E(X)}{c} e^{-2\frac{E(X)}{E(X^2)}\left(1-\frac{\lambda E(X)}{c}\right)u}, \quad u \geq 0.$$

5.5 Aproximações no modelo exponencial

Nesta secção iremos determinar o valor exato da probabilidade de ruína, assim como o valor obtido usando cada uma das aproximações apresentadas anteriormente, no caso em que o montante das indemnizações individuais segue uma distribuição exponencial de parâmetro α (e portanto com valor esperado $E(X) = \alpha^{-1}$).

VALOR EXACTO

O valor exato da probabilidade de ruína, no caso do montante das indemnizações individuais ser exponencial, foi determinado no Exemplo 4.3, recorrendo ao teorema fundamental da ruína (Teorema 4.2). Nesse exemplo obtivemos

$$\psi(u) = \frac{\lambda}{\alpha c} e^{-(\alpha - \frac{\lambda}{c})u}.$$

APROXIMAÇÃO DE LUNDBERG

Observando a aproximação de Lundberg,

$$\psi_L(u) = e^{-Ru},$$

notamos que para a obter necessitamos do valor do coeficiente de ajustamento. Relembrando o Exemplo 4.2, referente ao caso em que a distribuição do montante das indemnizações individuais é exponencial de parâmetro α , o coeficiente de ajustamento é dado por $R = \alpha - \frac{\lambda}{c}$. Nesse caso,

$$\psi_L(u) = e^{-(\alpha - \frac{\lambda}{c})u}.$$

APROXIMAÇÃO DE CRÁMER-LUNDBERG

Além do coeficiente de ajustamento, a aproximação de Crámer-Lundberg,

$$\psi_{CL} = \left(1 - \frac{\lambda E(X)}{c}\right) \left(\frac{\lambda}{c} M'_X(R) - 1\right)^{-1} e^{-Ru},$$

utiliza o valor de $M'_X(R)$. Lembrando o que foi visto na Secção 3.4.1,

$$M_X(t) = \frac{\alpha}{\alpha - t}, \quad t < \alpha.$$

$$\text{Assim, } M'_X(t) = \frac{\alpha}{(\alpha - t)^2}.$$

Avaliando a derivada anterior em $t = R$ obtemos $M'_X(R) = \frac{\alpha}{(\alpha - R)^2}$. Tendo em conta que $R = \alpha - \frac{\lambda}{c}$,

$$\begin{aligned} M'_X(R) &= \frac{\alpha}{(\alpha - (\alpha - \frac{\lambda}{c}))^2} \\ &= \frac{\alpha}{\frac{\lambda^2}{c^2}} \\ &= \frac{\alpha c^2}{\lambda^2}. \end{aligned}$$

Neste caso, a aproximação de Crámer-Lundberg é dada por

$$\begin{aligned}
 \psi_{CL}(u) &= \left(1 - \frac{\lambda}{\alpha c}\right) \left(\frac{\lambda \alpha c^2}{c \lambda^2} - 1\right)^{-1} e^{-(\alpha - \frac{\lambda}{c})u} \\
 &= \left(\frac{\alpha c - \lambda}{\alpha c}\right) \left(\frac{\alpha c - \lambda}{\lambda}\right)^{-1} e^{-(\alpha - \frac{\lambda}{c})u} \\
 &= \frac{\alpha c - \lambda}{\alpha c} \frac{\lambda}{\alpha c - \lambda} e^{-(\alpha - \frac{\lambda}{c})u} \\
 &= \frac{\lambda}{\alpha c} e^{-(\alpha - \frac{\lambda}{c})u}
 \end{aligned}$$

e coincide com a probabilidade de ruína exata $\psi(u)$.

APROXIMAÇÃO DE DE VYLDER

Relembramos que, no caso geral, a aproximação de De Vylder é dada por

$$\psi_{DV}(u) = \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\alpha} \tilde{c}} e^{-(\tilde{\alpha} - \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{c}})u}, \quad u \geq 0,$$

onde

- $\tilde{\lambda} = \frac{9\lambda E(X^2)^3}{2E(X^3)^2}$;
- $\tilde{\alpha} = \frac{3E(X^2)}{E(X^3)}$;
- $\tilde{c} = c - \lambda E(X) + \frac{3\lambda E(X^2)^2}{2E(X^3)}$.

No caso da distribuição exponencial de parâmetro α , $E(X) = \frac{1}{\alpha}$, $E(X^2) = \frac{2}{\alpha^2}$ e $E(X^3) = \frac{6}{\alpha^3}$. Usando estes valores, podemos simplificar as expressões de $\tilde{\lambda}$, de $\tilde{\alpha}$ e de \tilde{c} .

$$\begin{aligned}
 \tilde{\lambda} &= \frac{9\lambda E(X^2)^3}{2E(X^3)^2} \\
 &= \frac{9\lambda \left(\frac{2}{\alpha^2}\right)^3}{2\left(\frac{6}{\alpha^3}\right)^2} \\
 &= \lambda \frac{9 \times 2^3}{\alpha^6} \times \frac{\alpha^6}{2 \times 6^2} \\
 &= \lambda.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\alpha} &= \frac{3E(X^2)}{E(X^3)} \\
&= \frac{3 \times \frac{2}{\alpha^2}}{\frac{6}{\alpha^3}} \\
&= \frac{6}{\alpha^2} \times \frac{\alpha^3}{6} \\
&= \alpha.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{c} &= c - \lambda E(X) + \frac{3\lambda E(X^2)^2}{2E(X^3)} \\
&= c - \frac{\lambda}{\alpha} + \frac{3\lambda(\frac{2}{\alpha})^2}{2\frac{6}{\alpha^3}} \\
&= c - \frac{\lambda}{\alpha} + \frac{\frac{12\lambda}{\alpha^4}}{\frac{12}{\alpha^3}} \\
&= c - \frac{\lambda}{\alpha} + \frac{\lambda}{\alpha} \\
&= c.
\end{aligned}$$

Temos portanto $\psi_{DV}(u) = \frac{\lambda}{\alpha c} e^{-(\alpha - \frac{\lambda}{c})u}$.

Note-se que o valor dado pela aproximação de De Vylder coincide neste caso com a probabilidade de ruína exata $\psi(u)$, o que seria expectável visto que o método sugerido por De Vylder consiste em aproximar o modelo de risco coletivo $S(t)$ por um modelo em que as indemnizações individuais têm distribuição exponencial.

APROXIMAÇÃO DE RÉNYI

Recordamos que a aproximação de Rényi é dada por

$$\psi_R(u) = \frac{\lambda E(X)}{c} e^{-2\frac{E(X)}{E(X^2)}(1 - \frac{\lambda E(X)}{c})u}, \quad u \geq 0,$$

e que, quando X tem distribuição exponencial de parâmetro α , $E(X) = \frac{1}{\alpha}$ e

$E(X^2) = \frac{2}{\alpha^2}$. Assim, neste caso,

$$\begin{aligned}\psi_R(u) &= \frac{\lambda}{\alpha c} e^{-2\frac{1/\alpha}{2/\alpha^2}(1-\frac{\lambda}{\alpha c})u} \\ &= \frac{\lambda}{\alpha c} e^{-2\frac{\alpha}{2}(1-\frac{\lambda}{\alpha c})u} \\ &= \frac{\lambda}{\alpha c} e^{-\alpha(1-\frac{\lambda}{\alpha c})u} \\ &= \frac{\lambda}{\alpha c} e^{-(\alpha-\frac{\lambda}{c})u},\end{aligned}$$

que coincide também com a probabilidade de ruína exata.

Capítulo 6

Estudo numérico e de simulação

Neste capítulo iremos avaliar a qualidade numérica das aproximações para a probabilidade de ruína estudadas no capítulo anterior. Mantendo as notações desse capítulo, a probabilidade de ruína para uma reserva inicial u será denotada por $\psi(u)$. A aproximação de Lundberg será denotada por $\psi_L(u)$. Usaremos a notação $\psi_{CL}(u)$ para a aproximação de Crámer-Lundberg e a notação $\psi_{DV}(u)$ para a de De Vylder. Finalmente, a aproximação de Rényi será denotada por $\psi_R(u)$.

Serão considerados quatro modelos diferentes para o montante de indemnizações individuais - o modelo exponencial, o modelo uniforme, o modelo normal e o modelo gama. Para cada modelo, iremos fazer variar vários parâmetros - média da distribuição das indemnizações individuais, $E(X)$, intensidade do processo de Poisson λ , taxa de entrada de prémios, c , e reserva inicial, u . Lembramos, no seguimento do que foi visto na Secção 4.2.1, que estamos a trabalhar sob a condição $c > \lambda E(X)$. Salientamos também que os quatro modelos de distribuição referidos para o montante de indemnização individual foram escolhidos por forma a ser possível calcular as quatro aproximações em estudo. Em particular, estas distribuições têm cauda leve. Para todas elas existe a respectiva função geradora de momentos e é possível calcular o coeficiente de ajustamento. Num trabalho futuro, poderá ser feita uma extensão do estudo de simulação que iremos apresentar, nomeadamente utilizando outros modelos.

Como já vimos, a probabilidade de ruína exacta nem sempre é calculável. Aliás, só em certos modelos particulares é que conseguimos obter esse valor. Neste estudo, no modelo exponencial a probabilidade de ruína é calculada recorrendo à sua forma exacta, enquanto que nos restantes modelos obtemos o seu valor por simulação. O processo de simulação passa por gerar aleatoriamente os valores de 20000 indemnizações (com uma distribuição determinada pelo modelo em causa) bem como os respectivos tempos de ocorrência e, dados os valores de u e c , determinar se ocorre ruína. Este processo é então repetido 100000 vezes.

Para cada aproximação, calcularemos o seu erro relativo, dado pela fórmula

$$e_a(u) = \frac{\psi_a(u) - \psi(u)}{\psi(u)}, \quad (6.1)$$

onde $\psi_a(u)$ denota o valor da aproximação. Este valor permitirá concluir se a aproximação é feita por defeito ($\psi_a(u) - \psi(u) < 0$) ou por excesso ($\psi_a(u) - \psi(u) > 0$).

O software utilizado para todas as simulações e cálculos foi o R (versão 3.1.2.) e os códigos utilizados encontram-se no Anexo A.

6.1 Modelo Exponencial

Como vimos na Secção 5.5, no caso em que as indemnizações seguem uma distribuição exponencial, as aproximações de Crámer-Lundberg, de De Vylder e de Rényi correspondem ao valor exato da probabilidade de ruína. Como tal, as tabelas apresentadas para este modelo terão apenas valores para a probabilidade exata e para a aproximação de Lundberg, assim como o erro relativo para esta aproximação. Apresentaremos também, para cada caso, um gráfico que permita uma leitura mais imediata dos resultados.

Lembramos aqui (veja-se Secção 5.5) que, quando $X \sim Exp(\alpha)$, a probabilidade de ruína exacta é dada por

$$\psi(u) = \frac{\lambda}{\alpha c} e^{-Ru},$$

e a aproximação de Lundberg é dada por

$$\psi(u) = e^{-Ru},$$

em que $R = \alpha - \frac{\lambda}{c}$.

Para este estudo, optámos por tomar como base os valores $u = 3$, $c = 1.25$, $\lambda = 1$ e $\alpha = 1$. Ao longo das próximas secções, o que faremos é fixar três destes parâmetros e avaliar o efeito da variação do quarto. Esta variação será escolhida por forma a cobrir uma grande gama de valores para a probabilidade de ruína.

6.1.1 Efeitos da variação de u

Estudaremos agora o efeito da variação do valor da reserva inicial, u , quando fixamos os valores de c , λ e α .

u	ψ	ψ_L	e_L
0	0.8	1	0.25
1	0.65498	0.81873	0.25
2	0.53627	0.67032	0.25
3	0.43905	0.54881	0.25
5	0.29430	0.36788	0.25
7	0.19728	0.24660	0.25
10	0.10827	0.13533	0.25
15	0.03983	0.04979	0.25
25	0.00539	0.00674	0.25

Tabela 6.1: Valores para a probabilidade de ruína, aproximação de Lundberg e respectivo erro, em função de u , quando $c = 1.25$, $\lambda = 1$ e $\alpha = 1$ (modelo exponencial)

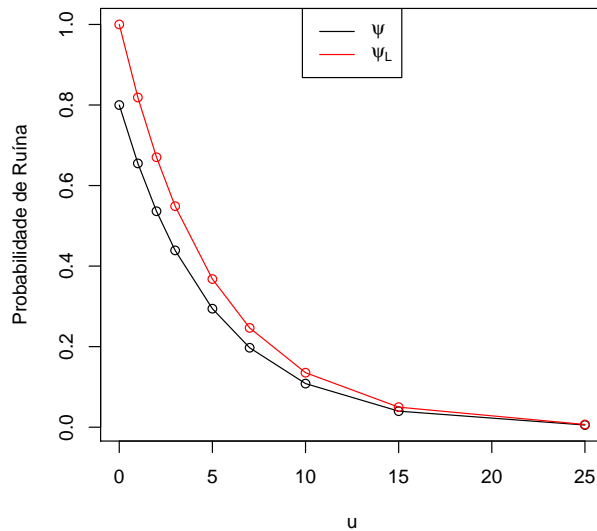


Figura 6.1: Valores para a probabilidade de ruína e aproximação de Lundberg, em função de u , quando $c = 1.25$, $\lambda = 1$ e $\alpha = 1$ (modelo exponencial)

Observando a Tabela 6.1 e o gráfico da Figura 6.1, começamos por notar a qualidade de majoração da aproximação de Lundberg - em todos os casos analisados,

esta aproximação dá um valor mais alto do que o valor real da probabilidade de ruína. Verificamos também que, à medida que o valor da reserva inicial aumenta, a probabilidade de ruína diminui, como poderíamos suspeitar empiricamente. Finalmente, observamos que o valor do erro é constante, o que nos leva a analisar a respectiva fórmula.

Usando a equação (6.1), e lembrando as fórmulas obtidas na Secção 5.5, obtemos o seguinte:

$$\begin{aligned}
 e_L(u) &= \frac{\psi_L(u) - \psi(u)}{\psi(u)} \\
 &= \frac{e^{-(\alpha - \frac{\lambda}{c})u} - \frac{\lambda}{\alpha c} e^{-(\alpha - \frac{\lambda}{c})u}}{\frac{\lambda}{\alpha c} e^{-(\alpha - \frac{\lambda}{c})u}} \\
 &= \frac{e^{-(\alpha - \frac{\lambda}{c})u} (1 - \frac{\lambda}{\alpha c})}{\frac{\lambda}{\alpha c} e^{-(\alpha - \frac{\lambda}{c})u}} \\
 &= \frac{e^{-(\alpha - \frac{\lambda}{c})u} (1 - \frac{\lambda}{\alpha c})}{e^{-(\alpha - \frac{\lambda}{c})u} \frac{\lambda}{\alpha c}} \\
 &= \frac{1 - \frac{\lambda}{\alpha c}}{\frac{\lambda}{\alpha c}} \\
 &= \frac{\alpha c}{\lambda} - 1.
 \end{aligned} \tag{6.2}$$

Notemos que da condição $c > \lambda E(X)$, que neste caso se pode reescrever como $c > \frac{\lambda}{\alpha}$, tiramos que $\frac{\alpha c}{\lambda} > 1$, ou seja, $\frac{\alpha c}{\lambda} - 1 > 0$. Isso implica que $\psi_L(u) - \psi(u) > 0$, o que já sabíamos ser verdade, em geral, atendendo a que $\psi_L(u)$ é um majorante de $\psi(u)$.

Atendendo a (6.2), verificamos que o valor do erro não depende do valor da reserva inicial u , mas apenas dos valores dos três outros parâmetros. Para $c = 1.25$, $\lambda = 1$ e $\alpha = 1$, tem-se $e_L(u)$ constante e igual a 0.25.

6.1.2 Efeitos da variação de c

Estudaremos agora o efeito da variação da taxa de entrada de prémios, c , quando fixamos os valores de u , λ e α .

c	ψ	ψ_L	e_L
1.05	0.82560	0.86688	0.05
1.10	0.69209	0.76130	0.10000
1.15	0.58798	0.67617	0.15000
1.20	0.50544	0.60653	0.20000
1.25	0.43905	0.54881	0.25000
1.30	0.38494	0.50042	0.30000
1.35	0.34032	0.45943	0.35000
1.40	0.30312	0.42437	0.40000
1.45	0.27182	0.39415	0.45000
1.50	0.24525	0.36788	0.50000

Tabela 6.2: Valores para a probabilidade de ruína, aproximação de Lundberg e respectivo erro, em função de c , quando $u = 3$, $\lambda = 1$ e $\alpha = 1$ (modelo exponencial)

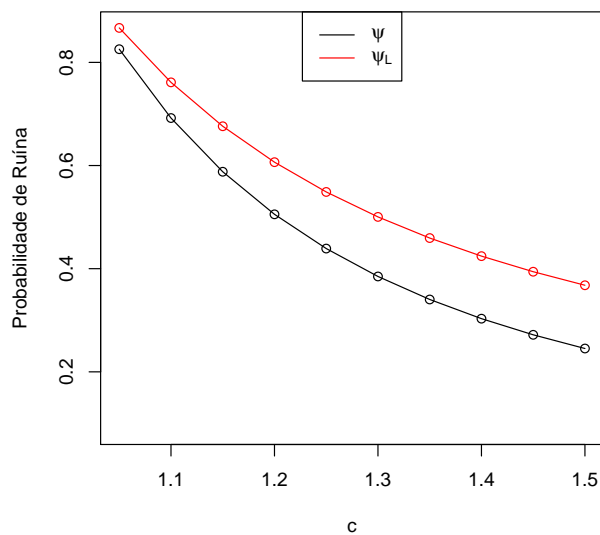


Figura 6.2: Valores para a probabilidade de ruína e aproximação de Lundberg, em função de c , quando $u = 3$, $\lambda = 1$ e $\alpha = 1$ (modelo exponencial)

Da análise da Tabela 6.2 e do gráfico da Figura 6.2 verificamos que quanto maior for a taxa de entrada de prémios menor é a probabilidade de ruína, algo que poderia

já ser uma conclusão intuitiva. No entanto, a qualidade da aproximação de Lundberg piora para valores de c mais elevados. Relembrando a expressão para o erro obtida na equação (6.2), e lembrando que estamos a estudar o caso em que $\lambda = 1$ e $\alpha = 1$, verificamos que $e_L(u) = c - 1$ e, como tal, o erro é crescente como função de c .

6.1.3 Efeitos da variação de λ

Esta secção é dedicada ao estudo do efeito da variação do parâmetro λ , que corresponde à intensidade do processo do número de indemnizações. Para este estudo, os restantes parâmetros serão fixos: $u = 3$, $c = 1.25$ e $\alpha = 1$.

λ	ψ	ψ_L	e_L
0.75	0.18072	0.30119	0.66667
0.80	0.21734	0.33960	0.56250
0.85	0.26037	0.38289	0.47059
0.90	0.31083	0.43171	0.38889
0.95	0.36993	0.48675	0.31579
1.00	0.43905	0.54881	0.25000
1.05	0.51978	0.61878	0.19048
1.10	0.61396	0.69768	0.13636
1.15	0.72370	0.78663	0.08696
1.20	0.85144	0.88692	0.04167

Tabela 6.3: Valores para a probabilidade de ruína, aproximação de Lundberg e respectivo erro, em função de λ , quando $u = 3$, $c = 1.25$, e $\alpha = 1$ (modelo exponencial)

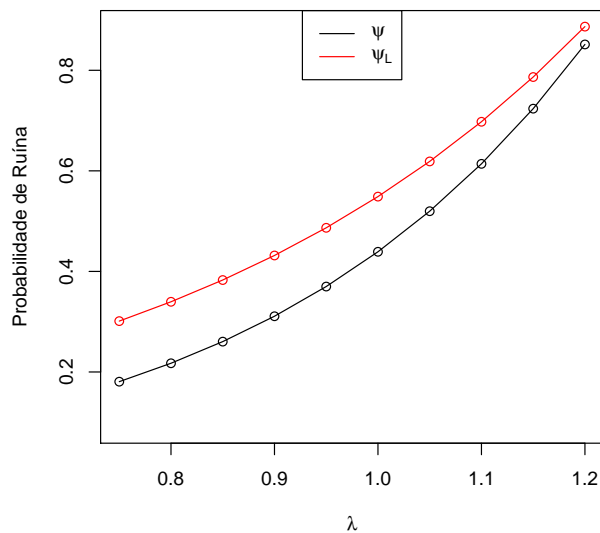


Figura 6.3: Valores para a probabilidade de ruína e aproximação de Lundberg, em função de λ , quando $u = 3$, $c = 1.25$, e $\alpha = 1$ (modelo exponencial)

Da Tabela 6.3 e do gráfico da Figura 6.3 podemos verificar que o aumento de λ , que corresponde ao aumento do número médio de indemnizações, leva, como seria expectável, ao aumento da probabilidade de ruína. Quanto à qualidade da aproximação de Lundberg, podemos percebê-la recorrendo à equação (6.2). No caso estudado, em que $c = 1.25$ e $\alpha = 1$, $e_L(u) = \frac{1.25}{\lambda} - 1$. Esta função do erro é decrescente em λ e, como tal, a majoração feita pela aproximação de Lundberg é cada vez menos grosseira.

6.1.4 Efeitos da variação de α

Finalmente, nesta secção, estudaremos os efeitos da variação de α , que corresponde ao parâmetro da distribuição exponencial, ou seja ao inverso do valor esperado das indemnizações individuais. Os restantes parâmetros estão fixos em $u = 3$, $c = 1.25$ e $\lambda = 1$.

α	ψ	ψ_L	e_L
0.85	0.81008	0.86071	0.0625
0.90	0.65851	0.74082	0.1250
0.95	0.53695	0.63763	0.1875
1.00	0.43905	0.54881	0.2500
1.05	0.35990	0.47237	0.3125
1.10	0.29569	0.40657	0.3750
1.15	0.24344	0.34994	0.4375
1.20	0.20080	0.30119	0.5000
1.25	0.16591	0.25924	0.5625
1.30	0.13731	0.22313	0.6250

Tabela 6.4: Valores para a probabilidade de ruína, aproximação de Lundberg e respectivo erro, em função de α , quando $u = 3$, $c = 1.25$ e $\lambda = 1$ (modelo exponencial)

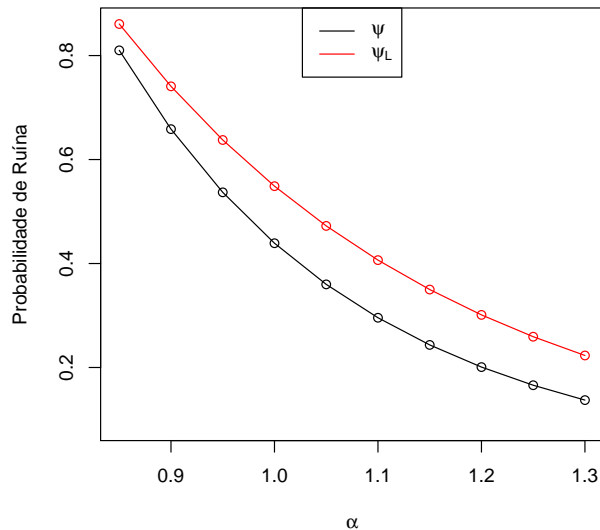


Figura 6.4: Valores para a probabilidade de ruína e aproximação de Lundberg, em função de α , quando $u = 3$, $c = 1.25$ e $\lambda = 1$ (modelo exponencial)

A Tabela 6.4, assim como o gráfico da Figura 6.4, permite observar algo que parece ser intuitivo - quanto maior o valor esperado das indenizações individuais, maior a probabilidade de ruína. Isto porque, convém lembrar, α é o parâmetro da distribuição exponencial, cujo valor esperado é $\frac{1}{\alpha}$. Além disso, o erro, dado pela expressão $e_L(u) = \frac{\alpha c}{\lambda} - 1$, é, neste caso, dado por $1.25\alpha - 1$. Como tal, para valores de $\alpha > \frac{1}{1.25} = 0.8$, como os tabelados, o erro é positivo e crescente. Ou seja, quanto maior for o parâmetro, menor será a probabilidade de ruína mas maior será o erro associado à aproximação de Lundberg.

6.2 Modelo Uniforme

Nesta secção, iremos considerar que as indemnizações individuais seguem uma distribuição uniforme. Começamos por lembrar que, quando $X \sim U(a, b)$, a respectiva função geradora de momentos é dada por

$$M_X(r) = \frac{e^{rb} - e^{ra}}{r(b-a)}.$$

Para as aproximações de Lundberg e de Crámer-Lundberg é necessário obter o valor do coeficiente de ajustamento que, fazendo uso da expressão (4.2), será a solução R da equação

$$\lambda + rc = \lambda \frac{e^{rb} - e^{ra}}{r(b-a)}.$$

A aproximação de Crámer-Lundberg requer também a primeira derivada da função geradora de momentos, que corresponde, neste caso, a

$$M'_X(r) = \frac{be^{rb} - ae^{ra}}{r(b-a)} - \frac{e^{rb} - e^{ra}}{r^2(b-a)}.$$

Para determinar a aproximação de Rényi é necessária a determinação do primeiro momento da distribuição, $E(X)$, que no caso da distribuição uniforme é $\frac{a+b}{2}$, assim como do segundo momento, $E(X^2)$, que é igual a $\frac{a^2 + ab + b^2}{3}$.

A aproximação de De Vylder requer, além dos momentos já referidos, o terceiro momento, $E(X^3)$, que no modelo uniforme é $\frac{a^3 + a^2b + ab^2 + b^3}{4}$.

Para este estudo, optámos por tomar como base os valores $u = 3$, $c = 1.25$, $\lambda = 1$, $a = 0$ e $b = 2$. Ao longo das próximas secções, o que faremos é fixar quatro destes parâmetros e avaliar o efeito da variação do quinto. Essa variação será ilustrada através de tabelas - uma para os valores das aproximações, outra para os valores dos erros (obtidos através da equação (6.1)) - e de um gráfico que permite uma melhor leitura da evolução do erro de cada aproximação.

6.2.1 Efeitos da variação de u

Iremos agora observar o efeito da variação do valor da reserva inicial, u , quando os restantes parâmetros estão fixos nos seguintes valores: $c = 1.25$, $\lambda = 1$, $a = 0$ e $b = 2$.

u	ψ	ψ_L	ψ_{CL}	ψ_{DV}	ψ_R
0	0.80043	1.0000	0.85132	0.84211	0.80000
1	0.62311	0.72799	0.61976	0.61407	0.59265
2	0.44692	0.52997	0.45118	0.44779	0.43905
3	0.32732	0.38582	0.32845	0.32653	0.32526
5	0.17380	0.20447	0.17407	0.17364	0.17850
7	0.09286	0.10836	0.09225	0.09233	0.09797
10	0.03625	0.04181	0.03559	0.03580	0.03983
15	0.00705	0.00855	0.00728	0.00738	0.00889
25	0.00030	0.00036	0.00030	0.00031	0.00044

Tabela 6.5: Valores para a probabilidade de ruína e respetivas aproximações numéricas, em função de u , quando $c = 1.25$, $\lambda = 1$, $a = 0$ e $b = 2$ (modelo uniforme)

Analisando a Tabela 6.5, verificamos que, à semelhança do modelo anterior, a probabilidade de ruína desce com o aumento do valor da reserva inicial. Para perceber melhor a qualidade das aproximações, apresentamos seguidamente uma tabela e um gráfico com os erros relativos de cada aproximação (calculados através da fórmula (6.1)).

u	e_L	e_{CL}	e_{DV}	e_R
0	0.24933	0.06358	0.05207	-0.00054
1	0.16832	-0.00538	-0.01450	-0.04888
2	0.18583	0.00953	0.00195	-0.01761
3	0.17871	0.00346	-0.00240	-0.00631
5	0.17648	0.00156	-0.00094	0.02707
7	0.16697	-0.00653	-0.00570	0.05498
10	0.15335	-0.01813	-0.01235	0.09875
15	0.21259	0.03230	0.04711	0.26060
25	0.19138	-0.01425	0.04618	0.47489

Tabela 6.6: Erros das aproximações da probabilidade de ruína, em função de u , quando $c = 1.25$, $\lambda = 1$, $a = 0$ e $b = 2$ (modelo uniforme)

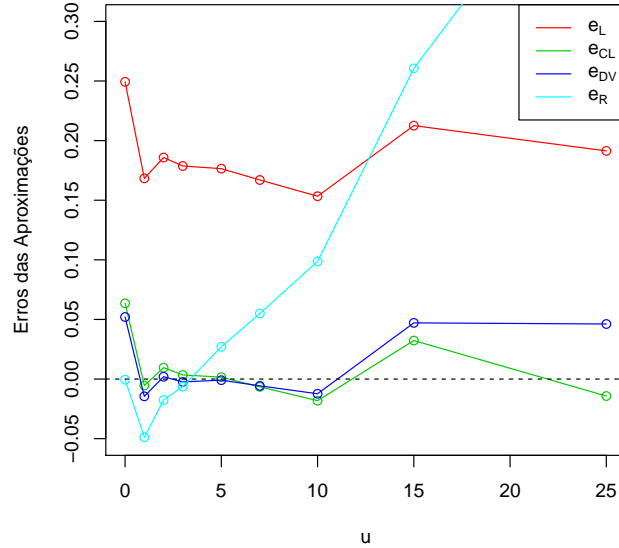


Figura 6.5: Erros das aproximações da probabilidade de ruína, em função de u , quando $c = 1.25$, $\lambda = 1$, $a = 0$ e $b = 2$ (modelo uniforme)

Após análise da Tabela 6.6 e do gráfico da Figura 6.5, verificamos que o erro associado à aproximação de Lundberg é sempre positivo, como seria esperado por se tratar de uma majoração. Verificamos também que a aproximação de Lundberg dá uma majoração bastante grosseira, com o erro a atingir a primeira casa decimal. As restantes aproximações têm um comportamento errático, oscilando entre aproximações por defeito e por excesso. As aproximações de Crámer-Lundberg e de De Vylder têm um comportamento muito semelhante, apresentando valores muito próximos na maior parte dos casos. Já a aproximação de Rényi, distingue-se por começar com um erro relativamente pequeno, próximo de zero, mas iniciando uma tendência crescente rápida a partir de $u = 5$, o que nos leva a suspeitar que esta aproximação não será a ideal para casos em que u toma valores mais elevados.

6.2.2 Efeitos da variação de c

Nesta secção, iremos observar o efeito da variação da taxa de entrada de prémios, c , quando os restantes parâmetros estão fixos nos seguintes valores: $u = 3$, $\lambda = 1$, $a = 0$ e $b = 2$.

c	ψ	ψ_L	ψ_{CL}	ψ_{DV}	ψ_R
1.05	0.77520	0.80501	0.77647	0.77594	0.76868
1.10	0.61191	0.65771	0.61314	0.61206	0.60387
1.15	0.49077	0.54444	0.49156	0.49000	0.48349
1.20	0.39824	0.45593	0.39935	0.39758	0.39364
1.25	0.32912	0.38581	0.32845	0.32653	0.32526
1.30	0.27384	0.32953	0.27304	0.27118	0.27231
1.35	0.22885	0.28386	0.22926	0.22750	0.23067
1.40	0.19320	0.24640	0.19423	0.19263	0.19747
1.45	0.16689	0.21534	0.16582	0.16450	0.17065
1.50	0.14197	0.18941	0.14267	0.14159	0.14875

Tabela 6.7: Valores para a probabilidade de ruína e respetivas aproximações numéricas, em função de c , quando $u = 3$, $\lambda = 1$, $a = 0$ e $b = 2$ (modelo uniforme)

Observando a Tabela 6.7, constatamos que o aumento da taxa de entrada de prémios leva a uma diminuição da probabilidade de ruína, como seria expectável. Para uma melhor percepção da qualidade das aproximações, iremos agora analisar os erros para cada uma delas.

c	e_L	e_{CL}	e_{DV}	e_R
1.05	0.03845	0.00163	0.00095	-0.00841
1.10	0.07484	0.00201	0.00024	-0.01314
1.15	0.10936	0.00162	-0.00157	-0.01483
1.20	0.14485	0.00278	-0.00167	-0.01155
1.25	0.17227	-0.00202	-0.00785	-0.01174
1.30	0.20337	-0.00294	-0.00972	-0.00560
1.35	0.24036	0.00178	-0.00591	0.00795
1.40	0.27534	0.00534	-0.00295	0.02208
1.45	0.29029	-0.00640	-0.01430	0.02256
1.50	0.33418	0.00492	-0.00267	0.04778

Tabela 6.8: Erros das aproximações da probabilidade de ruína, em função de c , quando $u = 3$, $\lambda = 1$, $a = 0$ e $b = 2$ (modelo uniforme)

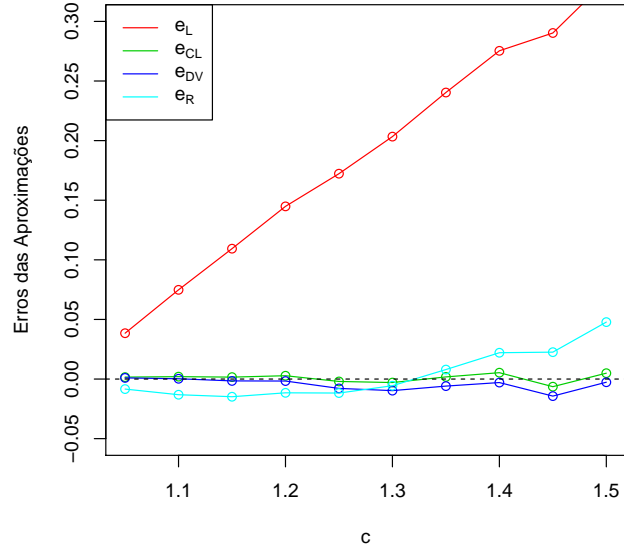


Figura 6.6: Erros das aproximações da probabilidade de ruína, em função de c , quando $u = 3$, $\lambda = 1$, $a = 0$ e $b = 2$ (modelo uniforme)

Observando a Tabela 6.8 e o gráfico da Figura 6.6, verificamos novamente que a aproximação de pior qualidade é a de Lundberg, que apresenta um erro sempre positivo e crescente em função de c . À semelhança do caso anterior, as aproximações de Crámer-Lundberg e de De Vylder têm uma evolução quase paralela, sendo a de Crámer-Lundberg um pouco melhor. A aproximação de Rényi começa por dar valores inferiores à probabilidade de ruína, mas a partir de $c = 1.25$ o erro apresenta uma tendência crescente, dando novamente a entender que, para valores mais elevados de c , se torna uma aproximação mais grosseira.

6.2.3 Efeitos da variação de λ

Observaremos agora a influência da intensidade do processo do número de indenizações, λ , na probabilidade de ruína quando os restantes parâmetros estão fixos da forma seguinte: $u = 3$, $c = 1.25$, $a = 0$ e $b = 2$.

λ	ψ	ψ_L	ψ_{CL}	ψ_{DV}	ψ_R
0.75	0.09093	0.12847	0.09047	0.09022	0.09918
0.80	0.11843	0.16266	0.11933	0.11858	0.12666
0.85	0.15450	0.20409	0.15570	0.15451	0.16111
0.90	0.20200	0.25410	0.20135	0.19973	0.20423
0.95	0.25966	0.31410	0.25814	0.25628	0.25809
1.00	0.33028	0.38582	0.32845	0.32653	0.32526
1.05	0.41404	0.47120	0.41503	0.41332	0.40887
1.10	0.52258	0.57255	0.52138	0.51992	0.51282
1.15	0.65517	0.69235	0.65083	0.65017	0.64186
1.20	0.80950	0.83370	0.80849	0.80849	0.80186

Tabela 6.9: Valores para a probabilidade de ruína e respetivas aproximações numéricas, em função de λ , quando $u = 3$, $c = 1.25$, $a = 0$ e $b = 2$ (modelo uniforme)

Da análise da Tabela 6.9, observamos que, a um aumento do número médio de indenizações corresponde, como seria presumível, um aumento da probabilidade de ruína. Para melhor avaliar a qualidade das aproximações, iremos agora observar os erros associados a cada uma.

λ	e_L	e_{CL}	e_{DV}	e_R
0.75	0.41288	-0.00505	-0.00777	0.09072
0.80	0.37346	0.00756	0.00124	0.06945
0.85	0.32098	0.00777	0.00006	0.04279
0.90	0.25791	-0.00324	-0.01122	0.01104
0.95	0.20966	-0.00585	-0.01303	-0.00604
1.00	0.16815	-0.00553	-0.01134	-0.01521
1.05	0.13805	0.00240	-0.00174	-0.01248
1.10	0.09562	-0.00230	-0.00508	-0.01868
1.15	0.05675	-0.00662	-0.00764	-0.02031
1.20	0.02990	-0.00125	-0.00125	-0.00944

Tabela 6.10: Erros das aproximações da probabilidade de ruína, em função de λ , quando $u = 3$, $c = 1.25$, $a = 0$ e $b = 2$ (modelo uniforme)

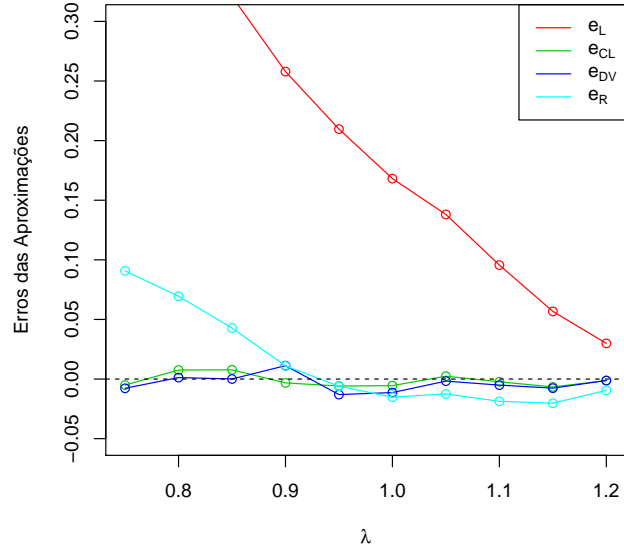


Figura 6.7: Erros das aproximações da probabilidade de ruína, em função de λ , quando $u = 3$, $c = 1.25$, $a = 0$ e $b = 2$ (modelo uniforme)

Analisando a Tabela 6.10 e o gráfico da Figura 6.7, apercebemo-nos novamente que a aproximação de Lundberg apresenta os erros mais elevados mas, no entanto, vemos que esse erro diminui à medida de λ cresce. Já a aproximação de Crámer-Lundberg apresenta erros reduzidos, em módulo, assim como a aproximação de De Vylder, estando os melhores repartidos pelas duas. A aproximação de Rényi começa por apresentar erros elevados mas, à medida que λ aumenta, passa a apresentar erros mais moderados, mas negativos.

6.2.4 Efeitos da variação de a

Nesta secção, iremos analisar os efeitos da variação de a , o limite inferior do intervalo da distribuição uniforme, na probabilidade de ruína, quando $u = 3$, $c = 1.25$, $\lambda = 1$ e $b = 2$.

a	ψ	ψ_L	ψ_{CL}	ψ_{DV}	ψ_R
0.00	0.32640	0.38582	0.32845	0.32653	0.32526
0.05	0.36926	0.42683	0.36962	0.36786	0.36496
0.10	0.41413	0.47193	0.41574	0.41409	0.40957
0.15	0.46608	0.52133	0.46718	0.46558	0.45953
0.20	0.52493	0.57513	0.52387	0.52271	0.51532
0.25	0.58896	0.63375	0.58720	0.58581	0.57741
0.30	0.65514	0.69703	0.65599	0.65519	0.64631
0.35	0.73261	0.76528	0.73162	0.73110	0.72252
0.40	0.81552	0.83851	0.81400	0.81377	0.80653

Tabela 6.11: Valores para a probabilidade de ruína e respetivas aproximações numéricas, em função de a , quando $u = 3$, $c = 1.25$, $\lambda = 1$ e $b = 2$ (modelo uniforme)

Observamos, após análise da Tabela 6.11, que o aumento de a , que implica em particular o aumento do valor esperado das indemnizações individuais, leva a um aumento da probabilidade de ruína, como podíamos prever. Para concluir sobre a qualidade das aproximações, iremos agora observar os erros.

a	e_L	e_{CL}	e_{DV}	e_R
0.00	0.18204	0.00629	0.00041	-0.00350
0.05	0.15590	0.00096	-0.00378	-0.01163
0.10	0.13956	0.00388	-0.00010	-0.01101
0.15	0.11854	0.00235	-0.00106	-0.01405
0.20	0.09564	-0.00201	-0.00422	-0.01831
0.25	0.07605	-0.00299	-0.00534	-0.01960
0.30	0.06394	0.00130	0.00007	-0.01348
0.35	0.04459	-0.00135	-0.00206	-0.01378
0.40	0.02819	-0.00186	-0.00214	-0.01102

Tabela 6.12: Erros das aproximações da probabilidade de ruína, em função de a , quando $u = 3$, $c = 1.25$, $\lambda = 1$ e $b = 2$ (modelo uniforme)

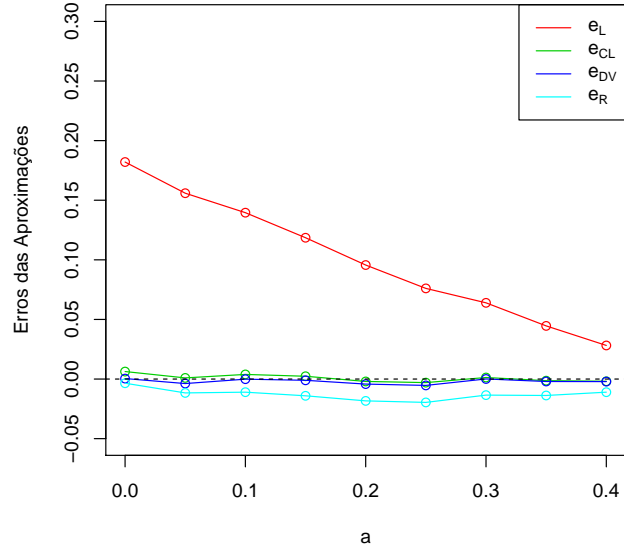


Figura 6.8: Erros das aproximações da probabilidade de ruína, em função de a , quando $u = 3$, $c = 1.25$, $\lambda = 1$ e $b = 2$ (modelo uniforme)

Analisando a Tabela 6.12 e o gráfico da Figura 6.8, apercebemo-nos que a majoração feita pela aproximação de Lundberg é, à medida que o parâmetro a aumenta, menos grosseira, ou seja, o erro diminui para valores mais elevados de a . À semelhança dos casos anteriores, as aproximações de Crámer-Lundberg e de De Vylder dividem entre si os melhores resultados, com os erros mais próximos de zero. A aproximação de Rényi apresenta resultados razoáveis mas não tão satisfatórios quanto as de Crámer-Lundberg e de De Vylder.

6.2.5 Efeitos da variação de b

Esta secção servirá para analisar o efeito da variação de b , o limite superior do intervalo da distribuição uniforme, na probabilidade de ruína, quando $u = 3$, $c = 1.25$, $\lambda = 1$ e $a = 0$.

b	ψ	ψ_L	ψ_{CL}	ψ_{DV}	ψ_R
1.50	0.04463	0.06482	0.04565	0.04632	0.05443
1.60	0.07575	0.10329	0.07576	0.07598	0.08448
1.70	0.11631	0.15420	0.11765	0.11722	0.12496
1.80	0.17283	0.21822	0.17291	0.17182	0.17755
1.90	0.24195	0.29551	0.24283	0.24124	0.24383
2.00	0.32897	0.38582	0.32845	0.32653	0.32526
2.10	0.43229	0.48839	0.43020	0.42835	0.42313
2.20	0.54834	0.60229	0.54835	0.54691	0.53862
2.30	0.68156	0.72639	0.68298	0.68208	0.67272
2.40	0.83269	0.85934	0.83310	0.83336	0.82628

Tabela 6.13: Valores para a probabilidade de ruína e respetivas aproximações numéricas, em função de b , quando $u = 3$, $c = 1.25$, $\lambda = 1$ e $a = 0$ (modelo uniforme)

Os resultados apresentados na Tabela 6.13 permitem verificar que o aumento do parâmetro b leva também ao aumento da probabilidade de ruína, algo que seria previsível, porque um aumento de b implica um aumento também do valor esperado das indemnizações individuais. Avaliemos agora a qualidade das aproximações, olhando para as informações relativas aos erros.

b	e_L	e_{CL}	e_{DV}	e_R
1.50	0.45247	0.02280	0.03792	0.21960
1.60	0.36354	0.00017	0.00307	0.11520
1.70	0.32573	0.01152	0.00781	0.07435
1.80	0.26260	0.00047	-0.00585	0.02731
1.90	0.22137	0.00366	-0.00294	0.00778
2.00	0.17280	-0.00157	-0.00740	-0.01129
2.10	0.12978	-0.00483	-0.00912	-0.02118
2.20	0.09839	0.00001	-0.00260	-0.01772
2.30	0.06577	0.00209	0.00076	-0.01297
2.40	0.03201	0.00050	0.00081	-0.00770

Tabela 6.14: Erros das aproximações da probabilidade de ruína, em função de b , quando $u = 3$, $c = 1.25$, $\lambda = 1$ e $a = 0$ (modelo uniforme)

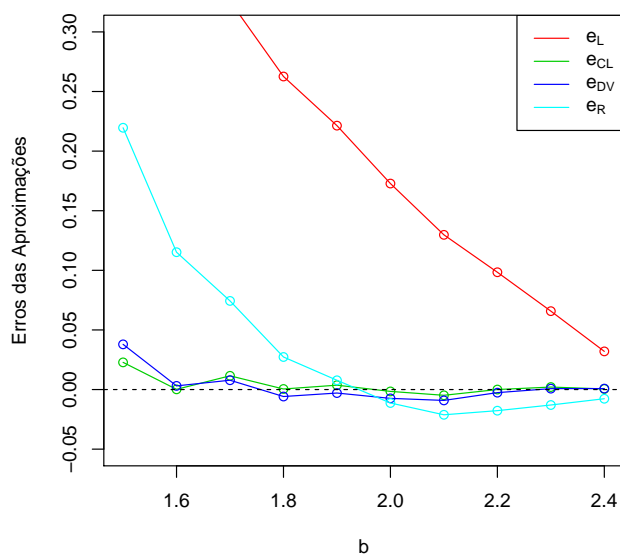


Figura 6.9: Erros das aproximações da probabilidade de ruína, em função de b , quando $u = 3$, $c = 1.25$, $\lambda = 1$ e $a = 0$ (modelo uniforme)

Após análise da Tabela 6.14 e do gráfico da Figura 6.9, é possível notar, mais uma vez, que os valores obtidos através da aproximação de Lundberg são os menos próximos do valor real da probabilidade de ruína, apesar do erro associado a esta aproximação ter uma tendência decrescente. Como já vem sendo habitual, as aproximações de Crámer-Lundberg e de De Vylder apresentam resultados muito

próximos e muito satisfatórios em termos de proximidade dos respectivos erros ao zero. A aproximação de Rényi começa por apresentar erros muito elevados, mas com tendência a decrescer conforme b aumenta.

6.3 Modelo Normal

Relembramos agora que, quando X segue uma distribuição Normal de média μ e variância σ^2 , $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, a respectiva função geradora de momentos é dada por

$$M_X(r) = e^{\mu r + \frac{\sigma^2 r^2}{2}}.$$

As aproximações de Lundberg e de Crámer-Lundberg necessitam do valor do coeficiente de ajustamento que, fazendo uso da expressão (4.2), será a solução R da equação

$$\lambda + rc = \lambda e^{\mu r + \frac{\sigma^2 r^2}{2}}.$$

Para a aproximação de Crámer-Lundberg, precisamos também da primeira derivada da função geradora de momentos, que corresponde, neste caso, a

$$M'_X(r) = (\mu + \sigma^2 r) e^{\mu r + \frac{\sigma^2 r^2}{2}}.$$

Para determinar a aproximação de Rényi é necessária a determinação do primeiro momento da distribuição, $E(X)$, que no caso da distribuição normal é μ , assim como do segundo momento, $E(X^2)$, que é igual a $\mu^2 + \sigma^2$.

A aproximação de De Vylder requer, além dos momentos já referidos, o terceiro momento, $E(X^3)$, que no modelo normal é $\mu(\mu^2 + 3\sigma^2)$.

Para este estudo, optámos por tomar como base os valores $u = 3$, $c = 1.25$, $\lambda = 1$, $\mu = 1$ e $\sigma^2 = 1$. Ao longo das próximas secções, o que faremos é fixar quatro destes parâmetros e avaliar o efeito da variação do quinto. Essa variação será ilustrada com recurso a duas tabelas e um gráfico - uma tabela contendo o valor exacto obtido por simulação e os resultados obtidos para as quatro aproximações, uma tabela apresentando o erro associado a cada aproximação (calculado recorrendo à equação (6.1)) e um gráfico destes mesmos erros, com vista a facilitar a leitura da evolução do erro de cada aproximação.

6.3.1 Efeitos da variação de u

Iremos, nesta secção, analisar os efeitos da variação do valor da reserva inicial u na probabilidade de ruína. Para isso, fixamos os restantes parâmetros da seguinte forma: $c = 1.25$, $\lambda = 1$, $\mu = 1$ e $\sigma^2 = 1$.

u	ψ	ψ_L	ψ_{CL}	ψ_{DV}	ψ_R
0	0.81468	1.00000	0.86045	0.85714	0.80000
1	0.68622	0.80683	0.69423	0.69182	0.65498
2	0.55850	0.65097	0.56013	0.55838	0.53626
3	0.44877	0.52522	0.45193	0.45068	0.43905
5	0.29173	0.34190	0.29419	0.29359	0.29430
7	0.19079	0.22257	0.19151	0.19125	0.19728
10	0.09875	0.11690	0.10058	0.10056	0.10827
15	0.03248	0.03997	0.03439	0.03444	0.03983
25	0.00400	0.00467	0.00402	0.00404	0.00539

Tabela 6.15: Valores para a probabilidade de ruína e respetivas aproximações numéricas, em função de u , quando $c = 1.25$, $\lambda = 1$, $\mu = 1$ e $\sigma^2 = 1$ (modelo normal)

À semelhança do que se passou nos modelos anteriores, podemos verificar, através da análise da Tabela 6.15, que o aumento do valor da reserva inicial leva a uma diminuição da probabilidade de ruína. Iremos agora observar os erros, que permitem inferir sobre a qualidade das aproximações.

u	e_L	e_{CL}	e_{DV}	e_R
0	0.22748	0.05618	0.05212	-0.01802
1	0.17575	0.01168	0.00815	-0.04552
2	0.16557	0.00291	-0.00022	-0.03983
3	0.17035	0.00703	0.00425	-0.02166
5	0.17198	0.00843	0.00637	0.00882
7	0.16656	0.00376	0.00243	0.03400
10	0.18376	0.01857	0.01832	0.09639
15	0.23051	0.05880	0.06045	0.22628
25	0.16800	0.00501	0.01022	0.34759

Tabela 6.16: Erros das aproximações da probabilidade de ruína, em função de u , quando $c = 1.25$, $\lambda = 1$, $\mu = 1$ e $\sigma^2 = 1$ (modelo normal)

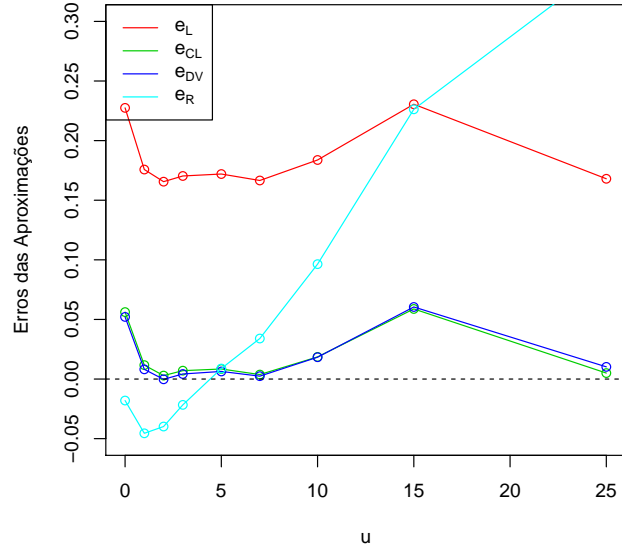


Figura 6.10: Erros das aproximações da probabilidade de ruína, em função de u , quando $c = 1.25$, $\lambda = 1$, $\mu = 1$ e $\sigma^2 = 1$ (modelo normal)

Após observar a Tabela 6.16 e o gráfico da Figura 6.10, realçamos a qualidade de majorante da aproximação de Lundberg. Podemos também apontar não só o paralelismo de comportamentos da aproximação de Crámer-Lundberg e de De Vylder, como já temos reparado, mas também a relação entre o comportamento destas duas aproximações e a de Lundberg, ainda que em valores mais elevados. Finalmente, a aproximação de Rényi acaba por ser a mais errática. Começa com erros negativos, próximos de zero, que aumentam um pouco em valor absoluto, sofrendo depois uma inflexão e acabando por cruzar o eixo horizontal numa tendência crescente rápida.

6.3.2 Efeitos da variação de c

Iremos agora analisar os efeitos da variação da taxa de entrada de prêmios, c , na probabilidade de ruína, quando os restantes parâmetros estão fixos da seguinte forma: $u = 3$, $\lambda = 1$, $\mu = 1$ e $\sigma^2 = 1$.

c	ψ	ψ_L	ψ_{CL}	ψ_{DV}	ψ_R
1.05	0.83683	0.86491	0.83761	0.83698	0.82560
1.10	0.70550	0.75484	0.70851	0.70766	0.69209
1.15	0.60241	0.66409	0.60458	0.60387	0.58798
1.20	0.51447	0.58861	0.52061	0.51966	0.50544
1.25	0.44583	0.52522	0.45193	0.45068	0.43905
1.30	0.39327	0.47149	0.39502	0.39364	0.38494
1.35	0.34406	0.42564	0.34763	0.34608	0.34032
1.40	0.30453	0.38624	0.30788	0.30613	0.30312
1.45	0.27393	0.35210	0.27412	0.27231	0.27182
1.50	0.24310	0.32239	0.24539	0.24349	0.24525

Tabela 6.17: Valores para a probabilidade de ruína e respectivas aproximações numéricas, em função de c , quando $u = 3$, $\lambda = 1$, $\mu = 1$ e $\sigma^2 = 1$ (modelo normal)

A análise da Tabela 6.17 permite-nos verificar que, à semelhança dos modelos anteriores, um aumento da taxa de entrada de prêmios leva a uma redução da probabilidade de ruína. Para avaliar a qualidade das aproximações, iremos agora apresentar os erros a elas associados.

c	e_L	e_{CL}	e_{DV}	e_R
1.05	0.03355	0.00093	0.00018	-0.01342
1.10	0.06994	0.00426	0.00306	-0.01901
1.15	0.10239	0.00360	0.00242	-0.02396
1.20	0.14410	0.01194	0.01009	-0.01755
1.25	0.17807	0.01367	0.01087	-0.01521
1.30	0.19891	0.00446	0.00094	-0.02119
1.35	0.23711	0.01036	0.00588	-0.01088
1.40	0.26832	0.01101	0.00524	-0.00462
1.45	0.28537	0.00070	-0.00593	-0.00769
1.50	0.32616	0.00941	0.00160	0.00886

Tabela 6.18: Erros das aproximações da probabilidade de ruína, em função de c , quando $u = 3$, $\lambda = 1$, $\mu = 1$ e $\sigma^2 = 1$ (modelo normal)

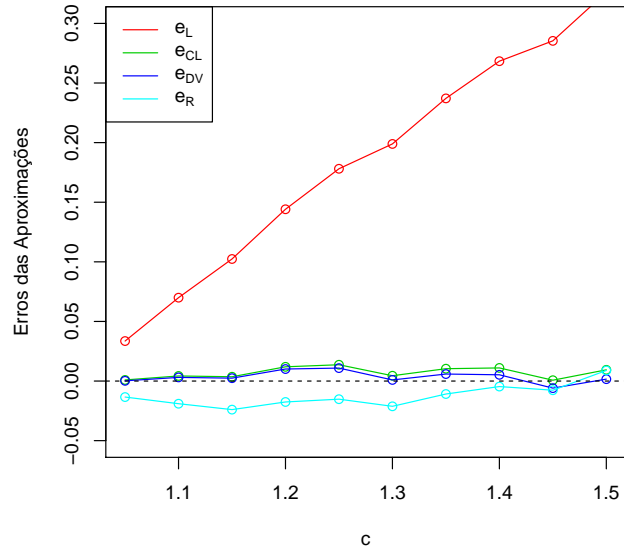


Figura 6.11: Erros das aproximações da probabilidade de ruína, em função de c , quando $u = 3$, $\lambda = 1$, $\mu = 1$ e $\sigma^2 = 1$ (modelo normal)

A análise da Tabela 6.18 e do gráfico da Figura 6.11 permite verificar, mais uma vez, que a aproximação de Lundberg é a que mais se afasta do eixo horizontal e como tal a que dá a aproximação mais grosseira, com o erro a crescer em função do parâmetro. As aproximações de Crámer-Lundberg e de De Vylder surgem, novamente, muito próximas uma da outra e do valor exacto da probabilidade de ruína. Finalmente, a aproximação de Rényi apresenta erros que não são grandes e com tendência a aproximar-se do valor exacto à medida que c aumenta.

6.3.3 Efeitos da variação de λ

Serve esta secção para avaliarmos os efeitos da variação de λ , a intensidade do processo do número de indemnizações, quando os restantes parâmetros estão fixados em $u = 3$, $c = 1.25$, $\mu = 1$ e $\sigma^2 = 1$.

λ	ψ	ψ_L	ψ_{CL}	ψ_{DV}	ψ_R
0.75	0.17485	0.24687	0.17523	0.17337	0.18072
0.80	0.21203	0.29034	0.21507	0.21316	0.21734
0.85	0.26160	0.33938	0.26175	0.25989	0.26037
0.90	0.31413	0.39451	0.31616	0.31443	0.31083
0.95	0.37450	0.45625	0.37918	0.37770	0.36993
1.00	0.44693	0.52522	0.45193	0.45068	0.43905
1.05	0.52996	0.60196	0.53526	0.53441	0.51978
1.10	0.63084	0.68718	0.63074	0.63002	0.61396
1.15	0.73575	0.78146	0.73918	0.73865	0.72370
1.20	0.85961	0.88549	0.86178	0.86155	0.85144

Tabela 6.19: Valores para a probabilidade de ruína e respetivas aproximações numéricas, em função de λ , quando $u = 3$, $c = 1.25$, $\mu = 1$ e $\sigma^2 = 1$ (modelo normal)

Observando a Tabela 6.19, verificamos que, à semelhança dos modelos anteriores, o aumento da intensidade do processo do número de indemnizações leva ao crescimento da probabilidade de ruína. Para avaliar a qualidade das aproximações, iremos agora estudar o erro a elas associado.

λ	e_L	e_{CL}	e_{DV}	e_R
0.75	0.41187	0.00217	-0.00848	0.03355
0.80	0.36933	0.01432	0.00532	0.02505
0.85	0.29733	0.00058	-0.00653	-0.00471
0.90	0.25588	0.00647	0.00095	-0.01050
0.95	0.21830	0.01251	0.00854	-0.01220
1.00	0.17517	0.01118	0.00838	-0.01763
1.05	0.13585	0.01000	0.00840	-0.01921
1.10	0.08931	-0.00016	-0.00131	-0.02677
1.15	0.06212	0.00466	0.00394	-0.01638
1.20	0.03010	0.00252	0.00226	-0.00950

Tabela 6.20: Erros das aproximações da probabilidade de ruína, em função de λ , quando $u = 3$, $c = 1.25$, $\mu = 1$ e $\sigma^2 = 1$ (modelo normal)

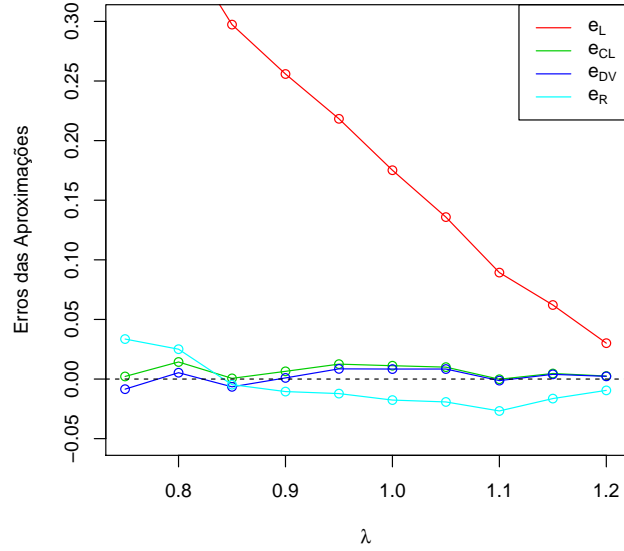


Figura 6.12: Erros das aproximações da probabilidade de ruína, em função de λ , quando $u = 3$, $c = 1.25$, $\mu = 1$ e $\sigma^2 = 1$ (modelo normal)

Após analisar a Tabela 6.20 e o gráfico da Figura 6.12, verificamos que a tendência da aproximação de Lundberg é de dar um valor superior à probabilidade de ruína com erro decrescente em função de λ . As aproximações de Crámer-Lundberg e de De Vylder apresentam valores de erro muito semelhantes e bastante satisfatórios, sendo a de De Vylder ligeiramente melhor. Finalmente, apesar da aproximação de Rényi não dar erros tão baixos como as duas anteriores, a sua qualidade é razoável.

6.3.4 Efeitos da variação de μ

Esta secção serve para analisar os efeitos da variação do valor médio das indemnizações individuais, μ , na probabilidade de ruína, quando temos os restantes parâmetros fixados em $u = 3$, $c = 1.25$, $\lambda = 1$ e $\sigma^2 = 1$.

μ	ψ	ψ_L	ψ_{CL}	ψ_{DV}	ψ_R
0.75	0.17838	0.24550	0.18026	0.17946	0.18960
0.80	0.21476	0.28844	0.21868	0.21785	0.22314
0.85	0.26025	0.33738	0.26411	0.26313	0.26365
0.90	0.31089	0.39283	0.31745	0.31632	0.31228
0.95	0.37424	0.45527	0.37967	0.37847	0.37028
1.00	0.44877	0.52522	0.45193	0.45068	0.43905
1.05	0.53076	0.60304	0.53508	0.53405	0.52007
1.10	0.62744	0.68916	0.63044	0.62967	0.61496
1.15	0.73630	0.78392	0.73934	0.73859	0.72538
1.20	0.86110	0.88746	0.86205	0.86176	0.85312

Tabela 6.21: Valores para a probabilidade de ruína e respetivas aproximações numéricas, em função de μ , quando $u = 3$, $c = 1.25$, $\lambda = 1$ e $\sigma^2 = 1$ (modelo normal)

A análise da Tabela 6.21 permite observar que o aumento do valor médio das indemnizações individuais leva, como poderíamos prever, a um aumento da probabilidade de ruína. A análise dos erros associados às aproximações permitir-nos-á avaliar a sua qualidade.

μ	e_L	e_{CL}	e_{DV}	e_R
0.75	0.37629	0.01052	0.00605	0.06291
0.80	0.34307	0.01827	0.01437	0.03903
0.85	0.29636	0.01482	0.01108	0.01307
0.90	0.26356	0.02109	0.01747	0.00446
0.95	0.21653	0.01450	0.01130	-0.01058
1.00	0.17035	0.00703	0.00425	-0.02166
1.05	0.13618	0.00814	0.00619	-0.02013
1.10	0.09837	0.00479	0.00356	-0.01990
1.15	0.06468	0.00412	0.00311	-0.01483
1.20	0.03061	0.00111	0.00076	-0.00927

Tabela 6.22: Erros das aproximações da probabilidade de ruína, em função de μ , quando $u = 3$, $c = 1.25$, $\lambda = 1$ e $\sigma^2 = 1$ (modelo normal)

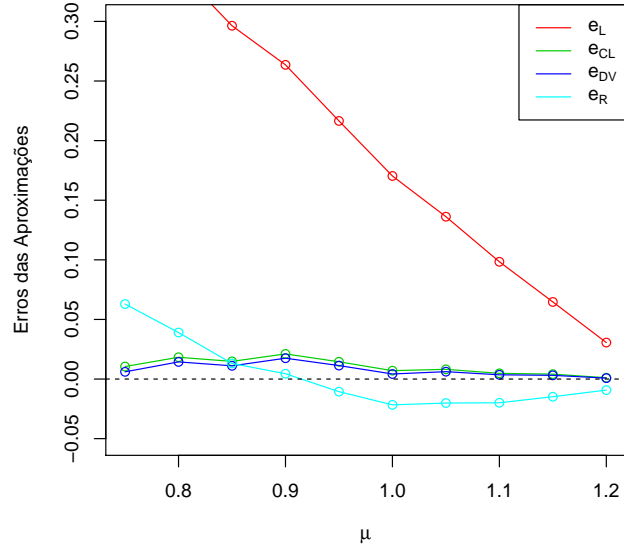


Figura 6.13: Erros das aproximações da probabilidade de ruína, em função de μ , quando $u = 3$, $c = 1.25$, $\lambda = 1$ e $\sigma^2 = 1$ (modelo normal)

Observando a Tabela 6.22 e o gráfico da Figura 6.13 podemos constatar que a majoração feita pela aproximação de Lundberg tende a ser menos grosseira à medida que μ aumenta. As aproximações de Crámer-Lundberg e de De Vylder apresentam um comportamento semelhante, com o erro a oscilar pouco acima do eixo horizontal. A aproximação de Rényi apresenta erros moderados, positivos para valores de μ até 0.9 e negativos para valores superiores.

6.3.5 Efeitos da variação de σ^2

Nesta secção analisaremos os efeitos da variação de σ^2 , o desvio padrão das indemnizações individuais, quando os restantes parâmetros estão fixos nos seguintes valores: $u = 3$, $c = 1.25$, $\lambda = 1$ e $\mu = 1$.

σ^2	ψ	ψ_L	ψ_{CL}	ψ_{DV}	ψ_R
0.01	0.23788	0.27462	0.23793	0.23699	0.24098
0.10	0.24060	0.27863	0.24106	0.24009	0.24384
0.50	0.30905	0.36203	0.30800	0.30655	0.30631
0.80	0.39321	0.45976	0.39201	0.39031	0.38487
1	0.44563	0.52522	0.45193	0.45068	0.43905
2	0.67579	0.75949	0.69429	0.69824	0.62930
3	0.79347	0.86698	0.82371	0.82785	0.70954
4	0.85677	0.91799	0.88844	0.89255	0.74548
5	0.88956	0.94504	0.92393	0.92756	0.76392
6	0.91395	0.96083	0.94500	0.94820	0.77447

Tabela 6.23: Valores para a probabilidade de ruína e respetivas aproximações numéricas, em função de σ^2 , quando $u = 3$, $c = 1.25$, $\lambda = 1$ e $\mu = 1$ (modelo normal)

Após analisar a Tabela 6.23, podemos verificar que a tendência da probabilidade de ruína é de aumentar rapidamente com o aumento de σ^2 . Para avaliar a qualidade das aproximações, olharemos agora para a informação relativa aos seus erros.

σ^2	e_L	e_{CL}	e_{DV}	e_R
0.01	0.15445	0.00023	-0.00374	0.01305
0.10	0.15807	0.00190	-0.00214	0.01345
0.50	0.17144	-0.00339	-0.00810	-0.00885
0.80	0.16925	-0.00306	-0.00737	-0.02121
1	0.17860	0.01413	0.01132	-0.01477
2	0.12386	0.02738	0.03322	-0.06879
3	0.09265	0.03811	0.04333	-0.10578
4	0.07145	0.03697	0.04176	-0.12990
5	0.06237	0.03864	0.04272	-0.14124
6	0.05129	0.03397	0.03747	-0.15261

Tabela 6.24: Erros das aproximações da probabilidade de ruína, em função de σ^2 , quando $u = 3$, $c = 1.25$, $\lambda = 1$ e $\mu = 1$ (modelo normal)

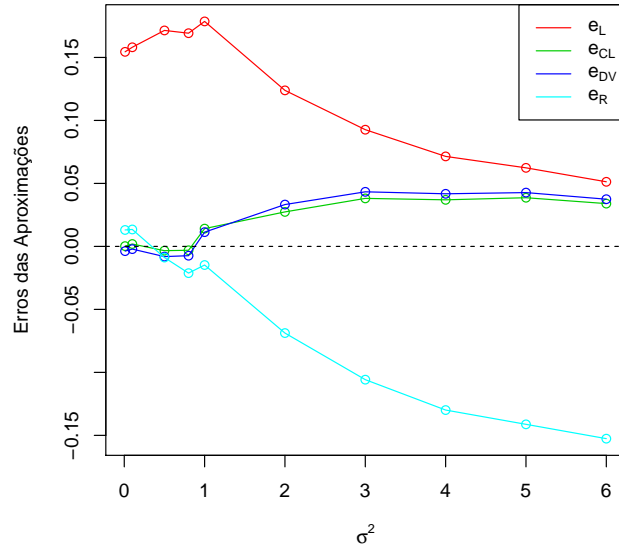


Figura 6.14: Erros das aproximações da probabilidade de ruína, em função de σ^2 , quando $u = 3$, $c = 1.25$, $\lambda = 1$ e $\mu = 1$ (modelo normal)

Da análise da Tabela 6.24 e do gráfico da Figura 6.14 podemos verificar que, independentemente da aproximação, o erro para a probabilidade de ruína quando fazemos variar σ^2 apresenta um comportamento distinto dos observados até agora. Para valores inferiores a 1, a aproximação de Lundberg apresenta erros elevados, mas as três restantes aproximações mantêm-se perto do eixo horizontal. Para valores superiores a 1, a aproximação de Lundberg começa a aproximar-se do valor exacto, a aproximação de Rényi dá erros cada vez maiores, e as aproximações de Crámer-Lundberg e De Vylder (que estão sempre muito próximas) tendem a estabilizar num erro positivo mas moderado.

6.4 Modelo Gama

Iremos agora estudar o caso em que o montante das indemnizações individuais segue uma distribuição Gama. Lembramos que, quando $X \sim G(\alpha, \beta)$, a função geradora de momentos é dada por

$$M_X(r) = \left(\frac{\beta}{\beta - r} \right)^\alpha.$$

Para as aproximações de Lundberg e de Crámer-Lundberg é necessário o valor do coeficiente de ajustamento que, fazendo uso da expressão (4.2), será a solução R da equação

$$\lambda + rc = \lambda \left(\frac{\beta}{\beta - r} \right)^\alpha.$$

Para a aproximação de Crámer-Lundberg, é também necessária a primeira derivada da função geradora de momentos, que corresponde, neste caso, a

$$M'_X(r) = \frac{\alpha \left(\frac{\beta}{\beta - r} \right)^\alpha}{\beta - r}.$$

Para determinar a aproximação de Rényi é necessário o primeiro momento da distribuição, $E(X)$, que no caso da distribuição gama é $\frac{\alpha}{\beta}$, assim como do segundo momento, $E(X^2)$ que é igual a $\frac{\alpha(\alpha + 1)}{\beta^2}$.

A aproximação de De Vylder requer, além dos momentos já referidos, o terceiro momento, $E(X^3)$, que no modelo gama é $\frac{\alpha(2 + 3\alpha + \alpha^2)}{\beta^3}$.

Para este estudo, optámos por tomar como base os valores $u = 3$, $c = 1.25$, $\lambda = 1$, $\alpha = 2$ e $\beta = 2$. Ao longo das próximas secções, o que faremos é fixar quatro destes parâmetros e avaliar o efeito da variação do quinto.

6.4.1 Efeitos da variação de u

Iremos agora estudar o efeito da variação de u , a reserva inicial, quando os restantes parâmetros estão fixos em $c = 1.25$, $\lambda = 1$, $\alpha = 2$ e $\beta = 2$.

u	ψ	ψ_L	ψ_{CL}	ψ_{DV}	ψ_R
0	0.79822	1.00000	0.82199	0.81818	0.80000
1	0.62533	0.76081	0.62538	0.62288	0.61274
2	0.47433	0.57884	0.47580	0.47420	0.46932
3	0.36350	0.44039	0.36200	0.36101	0.35946
5	0.21090	0.25491	0.20954	0.20923	0.21088
7	0.11849	0.14755	0.12129	0.12127	0.12371
10	0.05242	0.06498	0.05341	0.05351	0.05559
15	0.01313	0.01656	0.01362	0.01368	0.01465
25	0.00082	0.00108	0.00088	0.00089	0.00102

Tabela 6.25: Valores para a probabilidade de ruína e respetivas aproximações numéricas, em função de u , quando $c = 1.25$, $\lambda = 1$, $\alpha = 2$ e $\beta = 2$ (modelo gama)

Analisando a Tabela 6.25, verificamos, como seria esperado, que um aumento do valor da reserva inicial leva a uma diminuição da probabilidade de ruína. A qualidade das aproximações será avaliada seguidamente, através de uma análise dos seus erros.

u	e_L	e_{CL}	e_{DV}	e_R
0	0.25279	0.02978	0.02501	0.00223
1	0.21666	0.00009	-0.00391	-0.02013
2	0.22033	0.00310	-0.00027	-0.01057
3	0.21152	-0.00414	-0.00685	-0.01111
5	0.20869	-0.00646	-0.00790	-0.00011
7	0.24528	0.02361	0.02344	0.04406
10	0.23961	0.01896	0.02074	0.06041
15	0.26157	0.03700	0.04214	0.11596
25	0.31264	0.07898	0.09128	0.24160

Tabela 6.26: Erros das aproximações da probabilidade de ruína, em função de u , quando $c = 1.25$, $\lambda = 1$, $\alpha = 2$ e $\beta = 2$ (modelo gama)

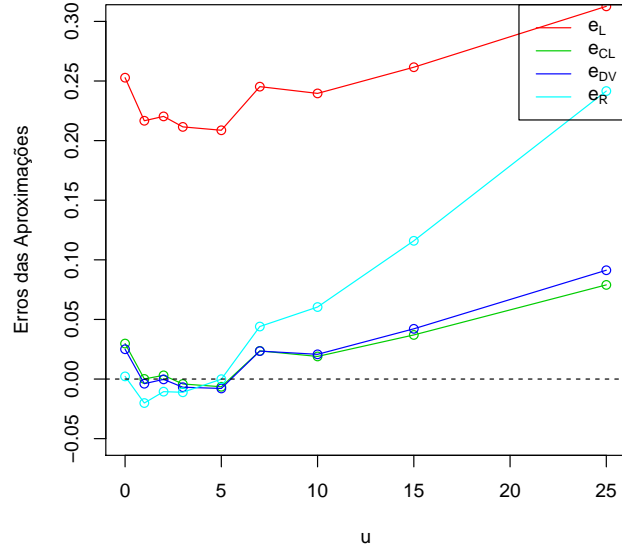


Figura 6.15: Erros das aproximações da probabilidade de ruína, em função de u , quando $c = 1.25$, $\lambda = 1$, $\alpha = 2$ e $\beta = 2$ (modelo gama)

Após observar a Tabela 6.26 e o gráfico da Figura 6.15 notamos que existe um paralelismo entre o comportamento da aproximação de Lundberg e o conjunto das aproximações de Crámer-Lundberg e de De Vylder. Ainda que os erros da primeira sejam mais elevados, como tem sido habitual, as três apresentam as mesmas oscilações. Já os erros da aproximação de Rényi que dão resultados razoáveis para os valores iniciais, a partir de $u = 5$ assumem uma tendência crescente.

6.4.2 Efeitos da variação de c

Nesta secção, iremos analisar que efeitos tem a variação da taxa de entrada de prémios, c , na probabilidade de ruína, quando os restantes parâmetros são fixos da seguinte forma: $u = 3$, $\lambda = 1$, $\alpha = 2$ e $\beta = 2$.

c	ψ	ψ_L	ψ_{CL}	ψ_{DV}	ψ_R
1.05	0.79185	0.82571	0.79075	0.79059	0.78721
1.10	0.63482	0.69244	0.63640	0.63603	0.63195
1.15	0.51953	0.58866	0.52039	0.51966	0.51608
1.20	0.43501	0.50649	0.43150	0.43047	0.42785
1.25	0.36593	0.44039	0.36200	0.36101	0.35946
1.30	0.30815	0.38662	0.30725	0.30613	0.30561
1.35	0.26323	0.34229	0.26332	0.26219	0.26260
1.40	0.22748	0.30539	0.22775	0.22661	0.22779
1.45	0.19931	0.27434	0.19857	0.19747	0.19930
1.50	0.17431	0.24797	0.17436	0.17337	0.17573

Tabela 6.27: Valores para a probabilidade de ruína e respetivas aproximações numéricas, em função de c , quando $u = 3$, $\lambda = 1$, $\alpha = 2$ e $\beta = 2$ (modelo gama)

Observando a Tabela 6.27, podemos verificar que, novamente, a probabilidade de ruína diminui conforme a taxa de entrada de prémios aumenta. A qualidade dos resultados será avaliada seguidamente, através da análise dos erros associados a cada aproximação.

c	e_L	e_{CL}	e_{DV}	e_R
1.05	0.04276	-0.00138	-0.00159	-0.00587
1.10	0.09077	0.00248	0.00191	-0.00452
1.15	0.13307	0.00165	0.00026	-0.00665
1.20	0.16432	-0.00808	-0.01043	-0.01646
1.25	0.20347	-0.01075	-0.01345	-0.01767
1.30	0.25464	-0.00292	-0.00657	-0.00824
1.35	0.30034	0.00034	-0.00394	-0.00241
1.40	0.34248	0.00120	-0.00384	0.00136
1.45	0.37644	-0.00373	-0.00925	-0.00005
1.50	0.42258	0.00027	-0.00541	0.00815

Tabela 6.28: Erros das aproximações da probabilidade de ruína, em função de c , quando $u = 3$, $\lambda = 1$, $\alpha = 2$ e $\beta = 2$ (modelo gama)

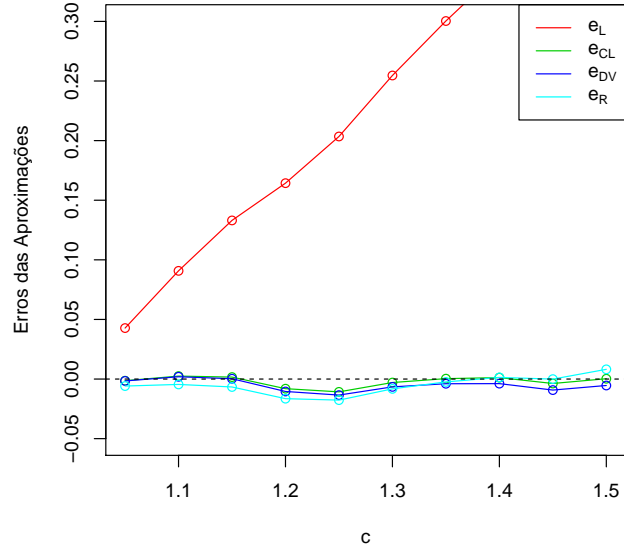


Figura 6.16: Erros das aproximações da probabilidade de ruína, em função de c , quando $u = 3$, $\lambda = 1$, $\alpha = 2$ e $\beta = 2$ (modelo gama)

A análise da Tabela 6.28 e do gráfico da Figura 6.16 permite notar que a aproximação de Lundberg é, mais uma vez, a pior aproximação à probabilidade de ruína. Como majorante, dá um erro bastante grande, crescente em função do parâmetro. As outras três aproximações apresentam comportamentos bastante semelhantes. Nos modelos anteriores traçamos um paralelismo entre as aproximações de Crámer-Lundberg e de De Vylder, mas é a primeira vez que a aproximação de Rényi tem um comportamento tão semelhante às restantes.

6.4.3 Efeitos da variação de λ

Iremos, ao longo desta secção, estudar os efeitos da variação de λ , a intensidade do processo das indemnizações individuais, na probabilidade de ruína, estando os restantes parâmetros fixos em $u = 3$, $c = 1.25$, $\alpha = 2$ e $\beta = 2$.

λ	ψ	ψ_L	ψ_{CL}	ψ_{DV}	ψ_R
0.75	0.11974	0.18403	0.11840	0.11768	0.12114
0.80	0.15014	0.22031	0.14964	0.14875	0.15163
0.85	0.18771	0.26296	0.18804	0.18700	0.18907
0.90	0.23658	0.31302	0.23502	0.23390	0.23492
0.95	0.29297	0.37173	0.29240	0.29121	0.29100
1.00	0.35924	0.44039	0.36200	0.36101	0.35946
1.05	0.44967	0.52074	0.44667	0.44575	0.44293
1.10	0.55185	0.61451	0.54876	0.54832	0.54453
1.15	0.67311	0.72400	0.67260	0.67212	0.66806
1.20	0.82032	0.85146	0.82044	0.82112	0.81806

Tabela 6.29: Valores para a probabilidade de ruína e respetivas aproximações numéricas, em função de λ , quando $u = 3$, $c = 1.25$, $\alpha = 2$ e $\beta = 2$ (modelo gama)

A análise da Tabela 6.29 permite verificar que, conforme aumenta o valor de λ , a probabilidade de ruína aumenta, como seria previsível. Para melhor avaliar a qualidade das aproximações, iremos agora analisar os erros a elas associados.

λ	e_L	e_{CL}	e_{DV}	e_R
0.75	0.53692	-0.01117	-0.01720	0.01167
0.80	0.46734	-0.00331	-0.00924	0.00995
0.85	0.40090	0.00178	-0.00378	0.00722
0.90	0.32312	-0.00659	-0.01133	-0.00701
0.95	0.26883	-0.00193	-0.00601	-0.00673
1.00	0.22589	0.00767	0.00492	0.00062
1.05	0.15806	-0.00668	-0.00872	-0.01500
1.10	0.11354	-0.00559	-0.00640	-0.01327
1.15	0.07561	-0.00076	-0.00148	-0.00751
1.20	0.03797	0.00014	0.00098	-0.00278

Tabela 6.30: Erros das aproximações da probabilidade de ruína, em função de λ , quando $u = 3$, $c = 1.25$, $\alpha = 2$ e $\beta = 2$ (modelo gama)

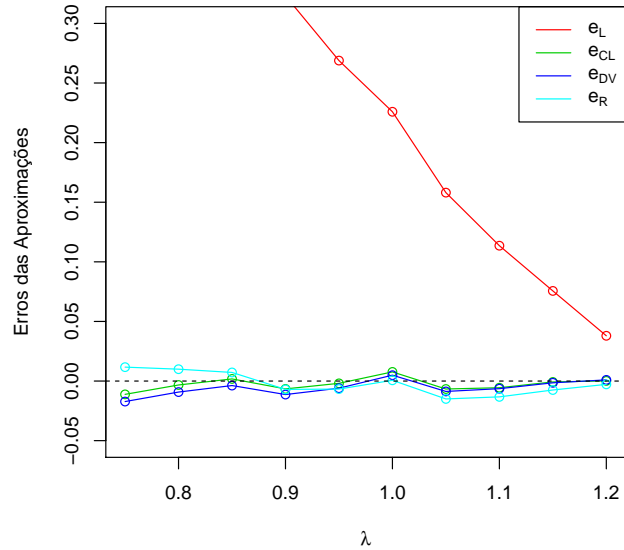


Figura 6.17: Erros das aproximações da probabilidade de ruína, em função de λ , quando $u = 3$, $c = 1.25$, $\alpha = 2$ e $\beta = 2$ (modelo gama)

Da análise da Tabela 6.30 e do gráfico da Figura 6.17, verificamos que a aproximação mais grosseira é, novamente, a de Lundberg, apesar do valor do erro ser decrescente. À semelhança do que se verificou no estudo da variação de c , também aqui a aproximação de Rényi se encontra muito próxima das aproximações de Crámer-Lundberg e de De Vylder e apresentam, as três, resultados muito satisfatórios.

6.4.4 Efeitos da variação de α

Esta secção servirá para estudar o efeito da variação de α , um dos parâmetros da distribuição Gama, na probabilidade de ruína, quando os restantes parâmetros são $u = 3$, $c = 1.25$, $\lambda = 1$ e $\beta = 2$.

α	ψ	ψ_L	ψ_{CL}	ψ_{DV}	ψ_R
1.5	0.08420	0.13726	0.0859273	0.08574	0.08796
1.6	0.12111	0.17921	0.1195652	0.11919	0.12150
1.7	0.16056	0.22989	0.1626018	0.16198	0.16400
1.8	0.21866	0.28996	0.2164257	0.21560	0.21686
1.9	0.28394	0.35999	0.2824248	0.28148	0.28152
2.0	0.36155	0.44039	0.3619960	0.36101	0.35946
2.1	0.45828	0.53138	0.4563199	0.45541	0.45216
2.2	0.56484	0.63297	0.5662709	0.56577	0.56111
2.3	0.69228	0.74518	0.6932716	0.69294	0.68778
2.4	0.83719	0.86764	0.8375181	0.83755	0.83360

Tabela 6.31: Valores para a probabilidade de ruína e respetivas aproximações numéricas, em função de α , quando $u = 3$, $c = 1.25$, $\lambda = 1$ e $\beta = 2$ (modelo gama)

A análise da Tabela 6.31 permite observar que, à medida que α cresce, a probabilidade de ruína aumenta. A qualidade das aproximações será avaliada através da análise dos erros a elas associados.

α	e_L	e_{CL}	e_{DV}	e_R
1.5	0.63011	0.02051	0.01833	0.04471
1.6	0.47974	-0.01276	-0.01588	0.00324
1.7	0.43180	0.01272	0.00884	0.02143
1.8	0.32609	-0.01022	-0.01402	-0.00823
1.9	0.26783	-0.00534	-0.00865	-0.00851
2.0	0.21805	-0.00123	-0.00150	-0.00577
2.1	0.15950	-0.00428	-0.00625	-0.01334
2.2	0.12063	0.00253	0.00164	-0.00660
2.3	0.07641	0.00143	0.00095	-0.00650
2.4	0.03637	0.00039	0.00043	-0.00429

Tabela 6.32: Erros das aproximações da probabilidade de ruína, em função de α , quando $u = 3$, $c = 1.25$, $\lambda = 1$ e $\beta = 2$ (modelo gama)

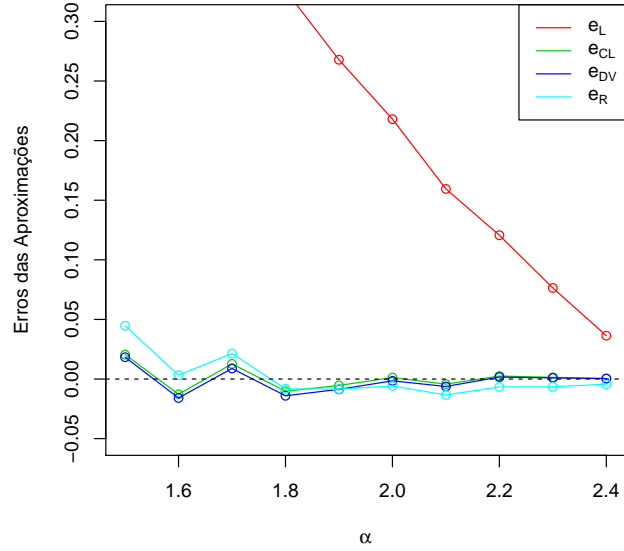


Figura 6.18: Erros das aproximações da probabilidade de ruína, em função de α , quando $u = 3$, $c = 1.25$, $\lambda = 1$ e $\beta = 2$ (modelo gama)

Após analisar a Tabela 6.32 e o gráfico da Figura 6.18, notamos que a aproximação de Lundberg é a que dá os maiores erros mas com tendência a decrescerem, ou seja, uma aproximação grosseira que melhora conforme α cresce. As aproximações de Crámer-Lundberg e de De Vylder apresentam, como tem sido habitual, comportamentos semelhantes e resultados satisfatórios. A aproximação de Rényi não dá resultados tão bons mas está bastante próxima das outras duas.

6.4.5 Efeitos da variação de β

Nesta secção iremos estudar o efeito da variação de β , o segundo parâmetro da distribuição Gama, na probabilidade de ruína, quando $u = 3$, $c = 1.25$, $\lambda = 1$ e $\alpha = 2$.

β	ψ	ψ_L	ψ_{CL}	ψ_{DV}	ψ_R
1.7	0.77450	0.81765	0.77509	0.77462	0.77057
1.8	0.60009	0.66679	0.60088	0.60028	0.59584
1.9	0.46962	0.54254	0.46647	0.46540	0.46216
2.0	0.36099	0.44039	0.36200	0.36101	0.35946
2.1	0.28109	0.35678	0.28117	0.28019	0.28029
2.2	0.21838	0.28849	0.21847	0.21758	0.21905
2.3	0.16899	0.23287	0.16980	0.16906	0.17155
2.4	0.13302	0.18762	0.13192	0.13143	0.13460
2.5	0.10217	0.15094	0.10253	0.10224	0.10579
2.6	0.07981	0.12123	0.07966	0.07957	0.08328

Tabela 6.33: Valores para a probabilidade de ruína e respetivas aproximações numéricas, em função de β , quando $u = 3$, $c = 1.25$, $\lambda = 1$ e $\alpha = 2$ (modelo gama)

Após analisar a Tabela 6.33, verificamos que a probabilidade de ruína é decrescente em β . Para melhor avaliar a qualidade de cada aproximação, iremos agora analisar os erros respectivos.

β	e_L	e_{CL}	e_{DV}	e_R
1.7	0.05571	0.00076	0.00015	-0.00507
1.8	0.11115	0.00131	0.00032	-0.00708
1.9	0.15527	-0.00671	-0.00899	-0.01589
2.0	0.21994	0.00279	0.00005	-0.00423
2.1	0.26926	0.00030	-0.00321	-0.00285
2.2	0.32107	0.00042	-0.00366	0.00307
2.3	0.37800	0.00478	0.00041	0.01512
2.4	0.41047	-0.00825	-0.01196	0.01186
2.5	0.47731	0.00351	0.00065	0.03544
2.6	0.51896	-0.00185	-0.00301	0.04352

Tabela 6.34: Erros das aproximações da probabilidade de ruína, em função de β , quando $u = 3$, $c = 1.25$, $\lambda = 1$ e $\alpha = 2$ (modelo gama)

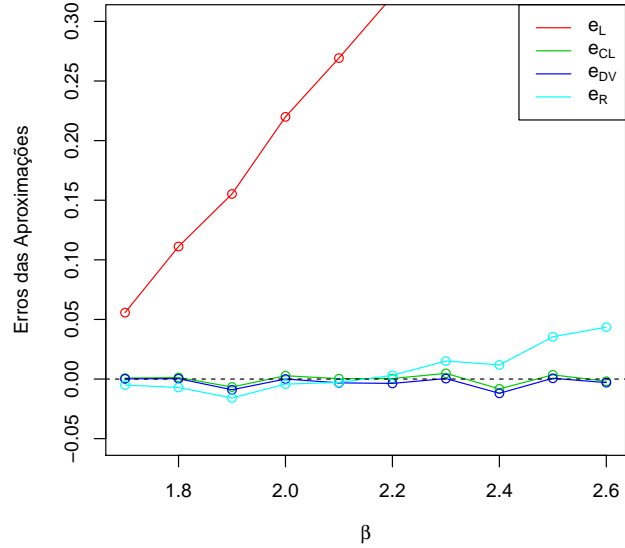


Figura 6.19: Erros das aproximações da probabilidade de ruína, em função de β , quando $u = 3$, $c = 1.25$, $\lambda = 1$ e $\alpha = 2$ (modelo gama)

Da análise da Tabela 6.34 e do gráfico da Figura 6.19, podemos verificar que a aproximação de Lundberg, além de dar a aproximação mais grosseira, tem tendência a dar erros cada vez maiores. Em contrapartida, as aproximações de Crámer-Lundberg e de De Vylder dão resultados bastante satisfatórios, com erros mínimos. A aproximação de Rényi dá erros baixos mas, aparentemente, com tendência para crescerem.

6.5 Conclusões

Finalizado o estudo numérico, iremos agora apresentar de forma sucinta as conclusões que se podem tirar sobre as probabilidades de ruína e as respectivas aproximações nos diferentes modelos e para os diversos parâmetros.

Começemos por analisar a correlação entre os parâmetros e a probabilidade de ruína. Em todos os modelos verificamos que o aumento da reserva inicial, u , leva, de forma mais ou menos acentuada, à diminuição da probabilidade de ruína. O mesmo se observa quando aumentamos a taxa de entrada de prémios, c , o que é natural pois estes dois parâmetros estão relacionados com o aumento da reserva que a companhia possui para fazer face ao risco. Já o aumento de λ , a intensidade do processo das indemnizações individuais, e do valor esperado das mesmas, levam sempre ao aumento da probabilidade de ruína, pois aumentam a despesa da companhia, reduzindo a sua reserva.

Falemos agora da qualidade das aproximações. Claramente, a mais fraca é a aproximação de Lundberg, que apesar de cumprir o seu papel de majorante, dá erros demasiado grandes para se poder considerar útil como aproximação. Seguidamente, surge a aproximação de Rényi, que apesar de não dar erros tão elevados quanto a de Lundberg, dá em alguns casos aproximações que são grosseiras, principalmente quando comparadas com os resultados dados pelas aproximações de Crámer-Lundberg e de De Vylder, cujos resultados são na maioria dos casos muito semelhantes e bastante satisfatórios.

Esta ordenação das aproximações em termos de qualidade, poderá eventualmente ser explicada pela quantidade de informação sobre o processo de reserva que cada aproximação tem em conta. Lembremos agora as fórmulas gerais de cada aproximação:

- $\psi_L(u) = e^{-Ru}$;
- $\psi_{CL}(u) = \left(1 - \frac{\lambda E(X)}{c}\right) \left(\frac{\lambda}{c} M'_X(R) - 1\right)^{-1} e^{-Ru}$;
- $\psi_{DV}(u) = \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\alpha}\tilde{c}} e^{-(\tilde{\alpha} - \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{c}})u}$, onde $\tilde{\lambda} = \frac{9\lambda E(X^2)^3}{2E(X^3)^2}$, $\tilde{\alpha} = \frac{3E(X^2)}{E(X^3)}$ e $\tilde{c} = c - \lambda E(X) + \frac{3\lambda E(X^2)^2}{2E(X^3)}$;
- $\psi_R(u) = \frac{\lambda E(X)}{c} e^{-2\frac{E(X)}{E(X^2)}\left(1 - \frac{\lambda E(X)}{c}\right)u}$.

Notemos que a aproximação de Lundberg apenas considera o coeficiente de ajustamento e a reserva inicial para estimar a probabilidade de ruína. Por sua vez, a

aproximação de Crámer-Lundberg utiliza, além destas duas quantidades e de outros factores, a primeira derivada da função geradora de momentos da distribuição das indemnizações individuais, avaliada em R . Esta informação traz vantagens notórias ao processo de aproximação, sendo os resultados desta substancialmente melhores que os da primeira. A aproximação de Rényi tem em conta, para além dos valores de u , c e λ , os dois primeiros momentos da distribuição das indemnizações individuais, $E(X)$ e $E(X^2)$, e é bastante melhor que a de Lundberg na maioria dos casos. Finalmente, a aproximação de De Vylder é mais completa do que a anterior na sua utilização da informação, pois recorre aos três primeiros momentos da distribuição e isso acaba por se refletir nos resultados. Deduz-se então que, não podendo prever todo o processo de reserva, é claramente benéfico extrair dele o máximo de informação possível, de modo a fazer aproximações o mais fidedignas possível.

Devemos salientar que a aproximação de Rényi, que é errática nos modelos uniforme e normal, no modelo gama apresenta resultados bastante satisfatórios, competindo com as aproximações de Crámer-Lundberg e de De Vylder na maioria dos casos.

Dos resultados da secção anterior, verificamos também que existem algumas regularidades no comportamento das aproximações em relação à variação de alguns parâmetros, independentemente do modelo. Observamos que, para qualquer modelo, o aumento da taxa de entrada de prémios leva a um erro maior na aproximação de Lundberg. Em contrapartida, para esta mesma aproximação, valores elevados da intensidade do processo das indemnizações individuais e do valor esperado das mesmas levam a aproximações melhores, ou seja, com erro menor. O que acontece nos casos referidos é que, em geral, a aproximação de Lundberg melhora quando a probabilidade de ruína aumenta. Verificamos também que para valores mais elevados de u o erro da aproximação de Rényi cresce bastante, chegando a originar aproximações demasiado grosseiras. Ainda sobre a aproximação de Rényi, verificamos que, em praticamente todos os casos existe um valor, normalmente situado entre 0.2 e 0.3, a partir do qual o erro muda de sinal positivo para negativo. Ou seja, para probabilidades relativamente baixas, a aproximação é feita por excesso, enquanto que para valores ligeiramente mais altos já são aproximações por defeito.

Anexo A

Códigos R

A.1 Modelo Exponencial

```
#n-> dimensao da carteira (numero de indemnizacoes)
#a-> media das indemnizacoes (alfa)
#c-> taxa de entrada de premios
#L-> intensidade do processo de Poisson (lambda)
#u-> reserva inicial
```

#RUINA DE 1 CARTEIRA

```
ruina_E<-function(n,a,c,L,u){
  flag<-0
  val<-u
  X<-rexp(n,a)
  T<-rexp(n,L)
  for (i in 1:n){
    if (flag==0){
      val<-val-X[i]+c*T[i]
      if (val<0){flag<-1}
    }
  }
  return(flag)}

```

#RUINA DE K CARTEIRAS

```
probabilidade_E<-function(n,a,c,L,u,K){
  P<-NULL
  for (j in 1:K){P[j]<-ruina_E(n,a,c,L,u)}
  mean(P)}

```

#AP.LUNDBERG

```
aprox_L<-function(a,c,L,u){
  Z<-a-(L/c)
  exp(-Z*u)}

```

```

#AP.CRAMER-LUNDBERG
#AP.DE VYLDER
#AP.RENYI

```

```

aprox_CL<-function(a,c,L,u){
K<-L/(a*c);
Z<-a-(L/c);
K*exp(-Z*u)}

```

A.2 Modelo Uniforme

```

#n-> dimensao da carteira (numero de indemnizacoes)
#min-> limite inferior do intervalo
#max-> limite superior do intervalo
#c-> taxa de entrada de premios
#L-> intensidade do processo de Poisson (lambda)
#u-> reserva inicial

```

```

#RUINA DE 1 CARTEIRA

```

```

ruina_U<-function(n,min,max,c,L,u){
flag<-0
val<-u
X<-runif(n,min,max)
T<-rexp(n,L)
for(i in 1:n){
if(flag==0){
val<-val-X[i]+c*T[i]
if(val<0){flag<-1}}}
return(flag)}

```

```

#RUINA DE K CARTEIRAS

```

```

probabilidade_U<-function(n,min,max,c,L,u,K){
P<-NULL
for(j in 1:K){P[j]<-ruina_U(n,min,max,c,L,u)}
mean(P)}

```

```

#DETERMINACAO DO COEFICIENTE DE AJUSTAMENTO R

```

```

coef_aj<-function(L,c,min,max){
E<-(min+max)/2
T<-(c/(L*E))-1
if(T<0) stop('theta menor que zero')
F<-function(r){1+(1+T)*E*r-((exp(r*max)-exp(r*min))/(r*(max-min)))}
CA<-uniroot(F,lower=0.0001,upper=1)
R<-as.numeric(CA[1])
R}

```

#DERIVADA DA FGM

```
deriv_fgmU<-function(r,a,b){
num1<-b*exp(b*r)-a*exp(a*r)
denom1<-(b-a)*r
num2<-exp(b*r)-exp(a*r)
denom2<-(b-a)*r^2
V<-num1/denom1 - num2/denom2
V}
```

#AP.LUNDBERG

```
aprox_L<-function(min,max,c,L,u){
R<-coef_aj(L,c,min,max)
AL<-exp(-R*u)
AL}
```

#AP.CRAMER-LUNDBERG

```
aprox_CL<-function(min,max,c,L,u){
R<-coef_aj(L,c,min,max)
D<-deriv_fgmU(R,min,max)
E1<-(min+max)/2
P1<-1-(L*E1/c)
P2<-(L/c)*D-1
ACL<-P1/P2 * exp(-R*u)
ACL}
```

#AP.DE VYLDER

```
aprox_DV<-function(min,max,c,L,u){
m1<-(min+max)/2
m2<-(min^2+min*max+max^2)/3
m3<-(min^3+min^2*max+min*max^2+max^3)/4
NL<-(9*L*m2^3)/(2*m3^2)
Na<-(3*m2)/m3
NC<-c-L*m1+(3*L*m2^2)/(2*m3)
ADV<-NL/(Na*NC)*exp(-(Na-NL/NC)*u)
ADV}
```

#AP.RENYI

```
aprox_R<-function(min,max,c,L,u){
E1<-(min+max)/2
E2<-(min^2+min*max+max^2)/3
K1<-L*E1/c
K2<-2*(E1/E2)*(1-K1)*u
AR<-K1*exp(K2)
AR}
```

A.3 Modelo Normal

```
#n-> dimensao da carteira (numero de indemnizacoes)
#m-> media
#dp-> desvio-padrao
#c-> taxa de entrada de premios
#L-> intensidade do processo de Poisson (lambda)
#u-> reserva

#RUINA DE 1 CARTEIRA

ruina_N<-function(n,m,dp,c,L,u){
  flag<-0
  val<-u
  X<-rnorm(n,m,dp)
  T<-rexp(n,L)
  for (i in 1:n){
    if(flag==0){
      val<-val-X[i]+c*T[i]
      if(val<0){flag<-1}}
  }
  return(flag)}

#RUINA DE K CARTEIRAS

probabilidade_N<-function(n,m,dp,c,L,u,K){
  P<-NULL
  for(j in 1:K){P[j]<-ruina_N(n,m,dp,c,L,u)}
  mean(P)}

#DETERMINACAO DO COEFICIENTE DE AJUSTAMENTO R

coef_aj<-function(L,c,m,dp){
  T<-(c/(L*m))-1
  if (T<0) stop ('theta menor que zero')
  F<-function(r){1+(1+T)*m*r-(exp((m*r)+(dp^2*r^2)/2))}
  CA<-uniroot(F,lower=0.001,upper=0.5)
  R<-as.numeric(CA[1])
  R}

#DERIVADA DA FGM

deriv_fgmN<-function(r,m,dp){
  C<-m+r*dp^2
  E<-m*r+(dp^2*r^2)/2
  V<-C*exp(E)
  V
}
```

```
#AP.LUNDBERG
```

```

aprox_L<-function(m,dp,c,L,u){
R<-coef_aj(L,c,m,dp)
AL<-exp(-R*u)
AL}

```

#AP.CRAMER-LUNDBERG

```

aprox_CL<-function(m,dp,c,L,u){
R<-coef_aj(L,c,m,dp)
D<-deriv_fgmN(R,m,dp)
E1<-m
P1<-1-(L*E1/c)
P2<-(L/c)*D-1
ACL<-P1/P2 * exp(-R*u)
ACL}

```

#AP.DE VYLDER

```

aprox_DV<-function(m,dp,c,L,u){
m1<-m
m2<-m^2+dp^2
m3<-m*(m^2+3*dp^2)
NL<-(9*L*m2^3)/(2*m3^2)
Na<-(3*m2)/m3
NC<-c-L*m1+(3*L*m2^2)/(2*m3)
ADV<-NL/(Na*NC)*exp(-(Na-NL/NC)*u)
ADV}

```

#AP.RENYI

```

aprox_R<-function(m,dp,c,L,u){
E1<- m
E2<- m^2+dp^2
K1<- L*E1/c
K2<- -2*(E1/E2)*(1-K1)*u
AR<-K1*exp(K2)
AR}

```

A.4 Modelo Gama

```

#n-> dimensao da carteira (numero de indemnizacoes)
#alf-> parametro alfa da dist. gama
#bet-> parametro beta da dist. gama
#c-> taxa de entrada de premios
#L-> intensidade do processo de Poisson (lambda)
#u-> reserva inicial

```

#RUINA DE 1 CARTEIRA

```

ruina_G<-function(n, alf, bet, c, L, u){
flag<-0
val<-u
X<-rgamma(n, alf, bet)
T<-rexp(n, L)
for (i in 1:n){
if (flag==0){
val<-val-X[i]+c*T[i]
if (val<0){flag<-1}}}}
return(flag)}

```

#RUINA DE K CARTEIRAS

```

probabilidade_G<-function(n, alf, bet, c, L, u, K){
P<-NULL
for(j in 1:K){P[j]<-ruina_G(n, alf, bet, c, L, u)}
mean(P)}

```

#DETERMINACAO DO COEFICIENTE DE AJUSTAMENTO R

```

coef_aj<-function(L, c, alf, bet){
E<-alf/bet
T<-(c/(L*E))-1
if (T<0) stop ('theta menor que zero')
F<-function(r){1+(1+T)*E*r-(bet/(bet-r))^alf}
CA<-uniroot(F, lower=0.001, upper=1)
R<-as.numeric(CA[1])
R}

```

#DERIVADA DA FGM

```

deriv_fgmU<-function(r, alf, bet){
num<-alf*(bet/(bet-r))^alf
V<-num/(bet-r)
V}

```

#AP.LUNDBERG

```

aprox_L<-function(alf, bet, c, L, u){
R<-coef_aj(L, c, alf, bet)
AL<-exp(-R*u)
AL}

```

#AP.CRAMER-LUNDBERG

```

aprox_CL<-function(alf, bet, c, L, u){
R<-coef_aj(L, c, alf, bet)
D<-deriv_fgmU(R, alf, bet)

```

```

E1<-alf/bet
P1<-1-(L*E1/c)
P2<-(L/c)*D-1
ACL<-P1/P2 * exp(-R*u)
ACL
}

```

#AP.DE VYLDER

```

aprox_DV<-function(alf,bet,c,L,u){
m1<-alf/bet
m2<-(alf+alf^2)/bet^2
m3<-(alf*(2+3*alf+alf^2))/bet^3
NL<-(9*L*m2^3)/(2*m3^2)
Na<-(3*m2)/m3
NC<-c-L*m1+(3*L*m2^2)/(2*m3)
ADV<-NL/(Na*NC)*exp(-(Na-NL/NC)*u)
ADV}

```

#AP.RENYI

```

aprox_R<-function(alf,bet,c,L,u){
E1<-alf/bet
E2<-(alf+alf^2)/bet^2
K1<-L*E1/c
K2<-2*(E1/E2)*(1-K1)*u
AR<-K1*exp(K2)
AR}

```

Bibliografia

- Asmussen, S. and Albrecher, H. (2010). *Ruin Probabilities*, volume 2 of *Advanced Series on Statistical Science and Applied Probability*. World Scientific.
- Beard, R., Pentikainen, T., and Pesonen, E. (1984). *Risk theory the stochastic basis of insurance*. New York: Chapman and Hall, Inc.
- Bowers, N., Gerber, H., Hickman, J., Jones, D., and Nesbitt, C. (1986). *Actuarial Mathematics*. Society of Actuaries.
- Chung, K. L. (2001). *A Course in Probability Theory*. Academic Press.
- De Vylder, F. (1978). A practical solution to the problem of ultimate ruin probability. *Scandinavian Actuarial Journal*, 1978(2):114–119.
- Dickson, D. (2005). *Insurance Risk and Ruin*. Cambridge University Press.
- Dudewicz, E. and Mishra, S. (1988). *Modern mathematical statistics*. Wiley series in probability and mathematical statistics: Probability and mathematical statistics. Wiley.
- Feller, W. (1971). *An introduction to probability theory and its applications*, volume 2. Wiley.
- Fraga Alves, M. (1997). *Introdução à Teoria do Risco*. Working Paper n°62. CE-MAPRE.
- Gonçalves, E. and Mendes Lopes, N. (2000). *Probabilidades - Princípios Teóricos*. Escolar Editora.
- Grandell, J. (1991). *Aspects of risk theory*. Springer.
- Grandell, J. (2000). Simple approximations of ruin probabilities. *Insurance: Mathematics and Economics*, 26(2):157–173.
- Karlin, S. and Taylor, H. (1975). *A first course in stochastic processes*. New York Academic, Inc.

Kingman, J. and Taylor, S. (1966). *Introduction to Measure and Probability*. Cambridge University Press.

Rolski, T., Schmidli, H., Schmidt, V., and Teugels, J. (1999). *Stochastic processes for insurance and finance*. Wiley.