Alguns Problemas Geométricos de Papo de Alexandria

Carla Maria Marques Soares Albuquerque

Dissertação de Mestrado em Matemática para Professores
apresentada à Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

2014

Alguns Problemas Geométricos de Papo de Alexandria

Carla Maria Marques Soares Albuquerque

Mestrado em Matemática para Professores

Departamento Matemática

2014

Orientador

Professor Doutor Carlos Correia de Sá

Professor Auxiliar Aposentado, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

Coorientador

Professora Doutora Maria do Rosário Machado Lema Sinde Pinto

Professora Auxiliar, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

U.PORTO

FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO

Todas as correções determinadas pelo júri, e só essas, foram efetuadas.

O Presidente do Júri,

Porto, ______/______/_________

MSc

Aos meus pais:

Joaquina Celeste Marques e

Carlos Alberto Soares Silvério

AGRADECIMENTOS

Um reconhecimento especial de gratidão à Professora Doutora Maria do Rosário Machado Lema Sinde Pinto, minha co-orientador da tese, pelo apoio e disponibilidade total na orientação e sugestão de todo este trabalho.

Agradeço reconhecidamente a todos os professores das Unidades Curriculares do Mestrado em Matemática para Professores, da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, em particular à Professora Doutora Leonor Moreira, a Diretora do Mestrado, pela força e apoio moral que me deu para a continuidade da tese e ao Professor Doutor Carlos Sá, que foi inicialmente o meu orientador da tese.

Aos meus filhos por terem compreendido o motivo do pouco tempo que lhes dediquei durante este longo percurso.

Aos meus colegas do Mestrado, com quem partilhei momentos de estudo e aprendizagens, em especial ao Isidro Ernesto, que me fez avivar as memórias de Moçambique, a terra onde nasci, com a sua simpatia e apoio.

RESUMO

Esta dissertação foi elaborada no âmbito do Mestrado em Matemática para Professores na Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, com o seguinte tema: *Alguns Problemas Geométricos da Coleção Matemática de Papo de Alexandria*.

Tem como principal finalidade divulgar alguns problemas geométricos da *Coleção Matemática* de Papo de Alexandria e criar recursos sobre esta temática para os alunos, em ambiente de sala de aula.

A importância de se criar situações didáticas pertinentes, no âmbito da geometria, que facilitam as aprendizagens dos alunos levou-nos ao estudo de alguns aspectos da história da matemática no sentido de se compreender as origens dos conceitos a ensinar, o tipo de problema que procuravam resolver, as dificuldades que surgiram e o modo como foram superadas.

A escolha dos problemas na área da Geometria, considerada um dos pilares da abordagem científica da realidade ([BGOT], p.7), e em particular da Matemática, teve como base essencialmente o caráter didático dos mesmos. Quer pela diversidade, na forma de resolução, ou seja, no método utilizado, e nos conceitos envolvidos, quer pelas aplicações a novos problemas, procuramos apresentar uma construção sequencial e coerente desta área do conhecimento.

Estruturada em três capítulos, apresentamos no primeiro capítulo uma breve referência à vida e obra de Papo de Alexandria. No segundo capítulo desta dissertação, apresentamos o estudo sobre alguns lugares geométricos de curvas, como as cónicas, a espiral de Arquimedes, a concóide de Nicomedes e a quadratriz de Hípias e de Dinóstrato. Estas curvas permitiram resolver muitos problemas geométricos, nomeadamente os *Três Problemas Clássicos da Geometria Grega.* No terceiro capítulo, apresentamos como exemplos de *Problemas Planos*, resultados sobre a *Geometria do Triângulo* e sobre a *Geometria do Círculo*. Este capítulo prossegue com a exposição de alguns resultados relacionados com *A divisão de um arco ou de um ângulo numa razão dada*, e com o problema da *Retificação da Circunferência,* como exemplos de *Problemas Lineares*. Como exemplo de um *Problema Sólido* apresentamos alguns resultados relacionados com a trisseção do ângulo.

Problemas relacionados com a semelhança e a congruência de triângulos bem como com o teorema de Pitágoras assumem um papel central, nos problemas apresentados nesta dissertação, pois são fundamentalmente estes conceitos que utilizamos para justificar/demonstrar resultados, no Ensino Básico.

Neste sentido, construímos algumas tarefas que poderão ser exploradas em contexto de sala de aula, com o objetivo de os alunos construírem geometricamente um segmento de reta de comprimento igual ao número irracional π e apresentarem um valor aproximado deste número.

A axiomática utilizada neste trabalho é a de Euclides.

As figuras geométricas - conjunto de pontos do espaço ([BGOT], p.10) - foram desenhadas com o Geogebra versão 4.0. e encontram-se em ficheiros, no mesmo CD-ROM que o trabalho.

Palavras-chaves: Papo de Alexandria, Alguns Problemas Geométricos.

ABSTRACT

This dissertation was written as part of the Master's Degree in Mathematics for School Teachers, from the Faculty of Sciences of Universidade do Porto, and it is entitled *Alguns Problemas Geométricos da Coleção Matemática de Papo de Alexandria*. Its main purpose is to disclose and spread some of the geometrical problems from the Mathematical Collection de Pappus of Alexandria as well as to create further resources for students to use in class, on this same theme.

The importance of creating didactic and pertinent situations, in geometry, that will allow students to easily understand them and learn, drove us to the study of some aspects of the history of mathematics, leading to the comprehension of the origin of some concepts, the problems they aimed to solve, the difficulties they found, and how they overcame them.

The choice of the problems, in geometry, considered as one of the supports for the scientific approach of reality ([BGOT], p.7), and in particular for mathematics, had as a starting point their own didactic features. Having in mind the diversity, methodical and conceptual, and the possible applications on new rising problems, we try to present a sequential and cohesive construction of this field of knowledge.

Structured in three chapters, we present in the first one a brief reference to the life and work of Pappus of Alexandria.

In the second chapter of this dissertation, we present the study of some curve geometrical places that allowed solving a lot of geometrical problems, namely *The Three Classical Problems of Greek Geometry*.

In the third chapter, we deal with some of the main subjects of Pappus work. Framed in the *Plan Problems*, we approach these relevant themes, being the first about the *Geometry of the Triangle*, following the *Geometry of the Circle* and some of its results.

This chapter also follows up with some examples of Solid Problems and Linear Problems, namely with angle trisection, the geometrical construction of a line segment with the same length as the perimeter of a circumference – The Rectification of the Circumference – and the division of and arch or angle of a given reason.

Problems related to the similarity and congruence of triangles, as well as the Pythagorean Theorem, assume a central role in the general problems presented in this dissertation, as they are used from early school years to demonstrate and justify some of these results.

In this sense, we built some tasks that could possibly be explored in the classroom environment. The goal would be for students to geometrically build a line segment with the same length as π and present an approximate value to this number.

The axiomatic used in this dissertation belongs to Euclid.

The geometric forms – set of points in a particular space ([BGOT], p.10) – were drawn with *Geogebra,* version 4.0 and can be found in the same file/ CD as this paper.

Keywords: Pappus of Alexandria, Geometrical Problems.

.

ÍNDICE

ÍNDICE DE FIGURAS

CAPÍTULO 1 – A COLEÇÃO MATEMÁTICA DE PAPO DE ALEXANDRIA

CAPÍTULO 2 – LUGARES GEOMÉTRICOS DE ALGUMAS CURVAS

CAPÍTULO 3 - ALGUNS PROBLEMAS GEOMÉTRICOS DA COLEÇÃO MATEMÁTICA DE PAPO DE ALEXANDRIA

INTRODUÇÃO

"Conhece-te a ti mesmo e nada em demasia"[1]

A fonte principal para a elaboração desta dissertação foi a obra *Pappus D'Alexandrie – La Collection Mathématique*, de Paul Ver Eecke, traduzida pela primeira vez do grego para o francês em 1933.

A *Coleção Matemática* de Papo constitui um precioso documento e uma referência valiosa para o estudo da História da Matemática pelos seus comentários sobre os trabalhos, muitos deles já desaparecidos, de Euclides, Ptolomeu, Arquimedes, Apolónio, Teodoro entre outros matemáticos da antiguidade.

Os teoremas/proposições e as respetivas demonstrações são, na sua generalidade, apresentados numa linguagem moderna e com notações atuais procurando, sempre que possível, manter as expressões e pensamentos dos antigos geómetras.

[1] Spinelli , Miguel *Filósofos pré-socráticos: primeiros mestres da filosofia e da ciência grega, 2ª Ed. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2003, p.16*

CAPÍTULO I

1.1 PAPO DE ALEXANDRIA: VIDA E OBRA

Papo de Alexandria foi “o último grande geómetra das Escolas helénicas” ([Www1]) um matemático como refere Boyer “(…) movido pelo mesmo espírito que animara Euclides, Arquimedes e Apolónio.” ([Boy], p.135).

Desconhece-se a data e o local exatos do nascimento de Papo de Alexandria. Segundo Ver Eecke, “podemos com alguma razoabilidade admitir que Papo viveu entre o fim do século III e a primeira metade do século IV da nossa era.” ([Ver1], p. XI). Terá, portanto, vivido num mundo dominado politicamente por Roma, em particular durante o reinado do imperador Diocleciano (284 - 305 d.C.). Desconhece-se também onde fez os seus estudos, bem como quem foram os seus mestres e discípulos. Proclo[2] diz que o geómetra terá ensinado em Alexandria, devendo ter aí publicado a *Coleção Matemática*.

Nas obras de Papo, conservadas até aos nossos dias, não há qualquer referência à sua personalidade ou ao seu modo de vida, a não ser que teve um filho chamado Hermódoro, a quem dedicou os prefácios dos Livros VII e VIII da *Coleção Matemática*. Também se sabe da sua amizade com Pandrósio e Megécio, dois geómetras vagamente mencionados na sua obra mas que, no entanto, são desconhecidos. ([Ver1], p. XI).

De acordo com Lintz, Papo viveu num “período de declínio da Geometria e que, portanto, não poderia fazer mais a não ser analisar as obras de seus predecessores e tentar generalizá-las e melhorá-las com a descoberta de novos resultados (…).”([Ver1], p. XI).

[2] Proclo de Lícia foi um filósofo neoplatônico grego do século V, que presidiu a Academia platónica de Atenas.

1.2 COLEÇÃO MATEMÁTICA


PAPPI
ALEXANDRINI
MATHEMATICAE
Collectiones.
A FEDERICO
COMMANDINO
VRBINATÆ
In Latinum Conuersæ, & Commentarijs
Illustratæ.

VENETIIS,
Apud Franciscum de Franciscis Senensem.
M. D. LXXXIX.

Figura 1.1- Frontispício da primeira edição da *Coleção Matemática* de Papo de Alexandria
(edição de 1589)

A *Coleção Matemática*, em grego *Mathematicon Synagogon*, de Papo de Alexandria é uma obra dividida em oito livros. Como refere Boyer, esta obra "fornece um registo histórico muito valioso de partes da matemática grega que de outro modo não conheceríamos. Por exemplo, é pelo Livro V da *Coleção* que temos conhecimento da descoberta por Arquimedes dos treze poliedros semirregulares ou "sólidos arquimedianos"". ([Boy], p.135).

A *Coleção Matemática* dá também informações preciosas acerca dos "problemas relacionados com a quadratura do círculo, a duplicação do cubo e a trisseção do ângulo."

([St], p.107). Segundo Struik[3] (1894 - 2000) esta obra era uma "espécie de manual para o estudo da Geometria grega juntamente com anotações históricas, aperfeiçoamentos e alterações de teoremas e demonstrações." ([St], p.107). Encontramos em Boyer outra referência à obra:

"A Colecção de Papus é o último tratado matemático antigo realmente significativo, pois a tentativa de ressuscitar a geometria não teve sucesso. Obras matemáticas continuaram a ser escritas em grego por mais de mil anos, continuando uma influência com início quase um milénio antes, mas os autores que vieram depois de Papus nunca mais chegaram ao seu nível. As suas obras têm quase exclusivamente a forma de comentários sobre tratados anteriores. O próprio Papus é em parte responsável pelos comentários que surgiram em seguida de todos os lados, pois ele escreveu comentários sobre os *Elementos* de Euclides e o *Almagesto* de Ptolomeu, entre outros, dos quais só restam fragmentos." ([Boy], p.139).

Relativamente à *Coleção Matemática* de Papo, Carlos Fonseca refere também:

"(…) é provável que Synagoge fosse uma espécie de resumo de aulas, escritas para facilitar o estudo dos grandes tratados dos matemáticos antigos; mas, é, sem dúvida, de um valor inestimável pelas informações históricas e bibliográficas que contém sobre toda a matemática grega e não só." ([Gl], p.158).

Em 1588 surge a primeira edição latina impressa da *Coleção Matemática* de Papo, por Federico Commandino (1509 - 1575), tradutor de diversos trabalhos matemáticos a partir do grego antigo. Este humanista e matemático italiano acrescenta, em notas de rodapé, comentários explicativos sobre os pensamentos de Papo, usando uma linguagem algébrica e referências explícitas a Euclides. O trabalho de Commandino, que passou por várias reimpressões até 1660, facilitou aos matemáticos do século XVII o conhecimento do método analítico dos geómetras da antiguidade, e das questões metodológicas de Papo, nomeadamente da parte do Livro IV que trata de *curvas superiores* e do Livro VII que trata do *Método da Análise e Síntese* dos antigos geómetras. A primeira edição crítica completa, traduzida para o latim, foi publicada por Friedrich Hultsch entre 1875 e 1878.

[3] Dirk Jan Struik foi um matemático e teórico da economia marxiana neerlandês.

O primeiro livro e parte do segundo encontram-se perdidos mas, pelo conteúdo que resta do Livro II, depreende-se que esses livros se ocupariam muito provavelmente de questões de aritmética e de logística, nome por que era designada a arte do cálculo ([Ver1], p. XIV). O fragmento que resta do Livro II começa com a proposição 14, que está incompleta, e é uma análise e um comentário a um tratado de Apolónio, atualmente perdido, relativo à multiplicação de grandes números. ([Ver1], pp. XIV- XV).

No Livro III da *Coleção Matemática*, que começa por uma introdução endereçada ao geómetra Pandrósio, de quem nada mais se sabe, e depois de classificar, no capítulo VII, os problemas, do ponto de vista das construções geométricas necessárias para a sua resolução, Papo expõe quatro soluções, umas aproximadas outras exatas, para a determinação dos dois meios proporcionais. Como solução para o problema célebre da antiguidade – a duplicação do cubo, apresenta as soluções, de Eratóstenes, de Nicomedes, de Herão e dele próprio.

Este livro prossegue com a teoria pitagórica das proporções.

A terceira parte do Livro (proposições 28 a 42) trata essencialmente de resultados obtidos pelo geómetra Ericino sobre a geometria do triângulo que Papo designou-os por paradoxos de Ericino.

Na quarta parte deste Livro, Papo apresenta as proposições relativas aos cinco sólidos regulares[4].

A quinta parte do Livro III é constituída apenas pela proposição 59, onde Papo expõe o seu próprio instrumento para a determinação dos dois meios proporcionais como solução para o problema da duplicação do cubo. ([Ver1], p. XXIV).

O quarto Livro não possui prefácio, onde provavelmente teria referências de Papo sobre os autores das proposições que expõe neste Livro e que foram retiradas de obras que atualmente se encontram perdidas.

Na primeira parte do quarto livro, encontra-se uma generalização do Teorema de Pitágoras, que permite determinar o lado de um paralelogramo que, construído sobre a base de um triângulo qualquer, é equivalente aos paralelogramos construídos sobre os outros dois lados do mesmo triângulo. Este resultado corresponde à proposição[5]

[4] A maioria das propriedades dos poliedros regulares eram conhecidas na escola pitagórica e referidas por Platão no *Timeu* ([Ver], **I,** p. XXIII). Euclides dedicou o Livro XIII dos *Elementos* a estes poliedros.

[5] ***Elementos* I, 47:** Em qualquer triângulo retângulo o quadrado construído sobre o lado oposto ao ângulo reto, é igual aos quadrados construídos sobre os outros lados, que fazem o mesmo ângulo reto.

Elementos I, 47 e sobretudo à proposição[6] *Elementos* VI, 31 de Euclides. Papo não atribui a si próprio este resultado pelo que Paul Tannery em *Sobre os Fragmentos de Heron de Alexandria conservados por Proclus* atribui a Heron.

As proposições 2 a 7, sobre a circunferência, são baseadas no Livro X dos *Elementos* de Euclides, das quais Papo demonstra cinco delas relativas a tangentes, secantes e cordas. ([Ver1], p. XXVI).

As proposições 8, 9 e 10 são relativas à teoria das circunferências tangentes, provenientes da obra *Contactos* de Apolónio. São problemas de construção da circunferência tangente a três outras circunferências diferentes, tangentes duas a duas, exteriormente.

O restante das proposições até à proposição 18 são relativas à teoria dos arbelos de Arquimedes proveniente da sua obra *O Livro dos Lemas*.

O Livro IV prossegue a partir do capítulo XXI com o estudo de três tipos de curvas: espiral, concóide e quadratriz. As proposições sobre a espiral constituem um pequeno comentário ao tratado *Das Espirais* de Arquimedes ([Ver1], p. XXVIII).

Este Livro termina com uma crítica à proposição 18 deste tratado sobre a utilização das construções por nêusis. A proposição 44 de Papo resolve o mesmo problema, mas usando duas curvas: uma hipérbole e uma parábola (lugares geométricos construídos de acordo com as condições referidas nas proposições 42 e 43).

No Livro V, cujo prefácio é dedicado ao geómetra Megécio, Papo apresenta um tema de grande relevância para a História da Matemática – Os Problemas Isoperimétricos. Este livro é totalmente dedicado às propriedades comparativas de superfícies planas com o mesmo perímetro, isto é, de *figuras isoperimétricas*, e de sólidos com a mesma superfície. Nas proposições 38 a 51, Papo retoma o tema dos cinco poliedros regulares inscritos numa esfera; nas proposições 52 a 57, compara os volumes de poliedros regulares que tenham a mesma superfície. Demonstra também que estes são os únicos sólidos regulares que podem ser inscritos numa esfera.

O Livro VI contém comentários às obras *As Esféricas* e *Os dias e as noites* de Teodósio, *A esfera móvel* de Autólico, *O Tratado das distâncias do Sol e da Lua* de Aristarco, a *Óptica* e os *Fenómenos* de Euclides.

[6] ***Elementos* VI, 31:** Em qualquer triângulo retângulo a figura retilínea, qualquer que seja, construída sobre o lado oposto ao ângulo reto, é igual à soma das outras figuras retilíneas, semelhantes à primeira, e semelhantemente descritas sobre os lados, que compreendem o ângulo reto.

Segundo Ver Eecke,

"O Livro VII da *Collection* é muito precioso para a história da geometria grega, pois constitui a única fonte daquilo que conhecemos sobre trabalhos perdidos de geometria superior que os antigos geómetras chamavam de *o lugar fixo* ou seja a análise geométrica." ([Ver1], p. LIV).

Neste Livro, dedicado ao seu filho Hermódoro, Papo transmite-nos o *método de análise e síntese* dos antigos geómetras, constituindo o *Tesouro da Análise*[7], que considera essencial para a resolução dos problemas de Geometria. Apresenta-nos as proposições de trinta e três obras, entre as quais se destacam: os *Dados*, os *Porismas* e os *Lugares de Superfície* de Euclides, os *Lugares Planos,* as *Cónicas,* as *Inclinações*, as *Tangências*, a *Secção de Razão*, a *Secção de Área* e a *Secção Determinada* de Apolónio, os *Lugares Geométricos* de Aristeu e *Sobre Médias* de Eratóstenes. Encontra-se também no Livro VII da *Coleção Matemática* o famoso teorema de Papo que é a génese do Teorema de Guldin e o problema de Papo *lugar relativo de três ou quatro retas*:

"(…) trata-se de uma extensão do problema tratado por Apolónio explicando Papo muito nitidamente que o lugar geométrico considerado é o *lugar geométrico dos pontos* tais que o produto das suas distâncias a duas retas dadas (distâncias medidas sobre as *perpendiculares* ou sobre *oblíquas* de direcções dadas) seja igual ao produto das suas distâncias a uma terceira *reta* ou ao produto das suas distâncias a outras duas *retas dadas*. O lugar geométrico procurado é então uma cónica; e tem-se $xz = Kyu$ ou $xz = Ky^2$ sendo K uma constante." ([Ver1], p. 352).

De facto, o lugar geométrico de três retas (em posição) é o dos pontos P tais que $d_1 d_2 = kd_3$, de acordo com a figura.

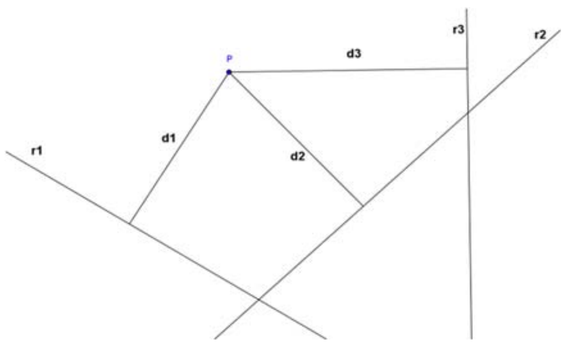


Figura 1.2 - Lugar Geométrico de três retas

Sejam $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ e $A_3x + B_3y + C_3 = 0$ as equações das retas r_1, r_2 e r_3 respetivamente. Como a distância de um ponto de coordenadas (x_0, y_0) à reta $Ax + By + C = 0$ é igual a $\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ então a igualdade $d_1 d_2 = kd_3$ pode ser escrita como:

[7] Arte de resolver problemas ou Heurística

$$\frac{|A_1x+B_1y+C_1|}{\sqrt{{A_1}^2+{B_1}^2}} \times \frac{|A_2x+B_2y+C_2|}{\sqrt{{A_2}^2+{B_2}^2}} = k\frac{|A_3x+B_3y+C_3|}{\sqrt{{A_3}^2+{B_3}^2}} \quad \text{(I).}$$

Fazendo $m = \frac{K\sqrt{{A_1}^2+{B_1}^2}\times\sqrt{{A_2}^2+{B_2}^2}}{\sqrt{{A_3}^2+{B_3}^2}}$ ou $m = -\frac{K\sqrt{{A_1}^2+{B_1}^2}\times\sqrt{{A_2}^2+{B_2}^2}}{\sqrt{{A_3}^2+{B_3}^2}}$ conforme o produto $(A_1x + B_1y + C_1)(A_2x + B_2y + C_2)$ é maior ou menor do que zero, a igualdade anterior (I) é equivalente a $(A_1x + B_1y + C_1)(A_2x + B_2y + C_2) = m(A_3x + B_3y + C_3)^2$, ou seja, $A_1A_2x^2 + A_1B_2xy + A_1C_2x + B_1B_2y^2 + A_2B_1xy + B_1C_2y + A_2C_1x + B_2C_1y + C_1C_2 = m(A_3^2x^2 + 2A_3B_3xy + B_3^2y^2 + 2A_3C_3x + 2B_3BC_3y + C_3^2) = (A_1A_2 - mA_3^2)x^2 + (B_1B_2 - mB_3^2)y^2 + (A_1B_2 + A_2B_1 - 2mA_3B_3)xy + (A_1C_2 + A_2C_1 - 2mA_3C_3)x + (B_1C_2 + B_2C_1 - 2mB_3C_3)y + (C_1C_2 - mC_3^2) = 0$.

Obtêm-se uma igualdade do tipo, $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$ (II) que é a equação de uma cónica.

No caso mais geral, em que se considera o comprimento do segmento $[PP']$ sendo PP' a reta que passa por P e interseta r no ângulo dado $\propto$, basta observar que $PP' = \frac{d}{sen\propto}$, logo a igualdade $\overline{PP_1'} \times \overline{PP_2'} = k\overline{PP_3'}^2$ pode ser escrita como $\frac{d_1}{sen\propto_1} \times \frac{d_2}{sen\propto_2} = k\frac{d_3}{sen\propto_3}$ e tomando $m' = \frac{sen\propto_1 \times sen\propto_2}{sen\propto_3}m$ obtemos uma igualdade do tipo (II), isto é, uma cónica.

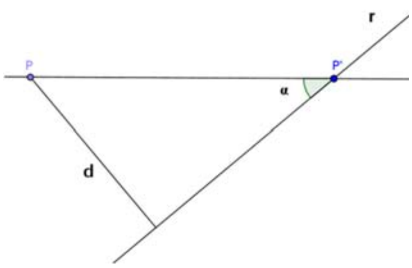


Figura 1.3 - Lugar Geométrico de três retas – Caso Geral

O caso do lugar geométrico de 4 retas (em posição) é análogo a este.

O Livro VIII, dedicado também a Hermódoro, refere-se à Mecânica. Depois de citar Arquimedes, Herão (10 d.C. - 70 d.C.) e Carpo[8], Papo transmite-nos o seguinte:

"Sendo a arte mecânica assim composta e repartida, julguei conveniente reunir as coisas que os antigos demonstraram geometricamente e expor, de modo melhor que o adoptado pelos que têm

[8] Carpo de Antioquia foi um antigo matemático grego. Poderá ter vivido em qualquer época entre o século II a.C. e o século II d.C. ([Www2]).

escrito sobre este argumento, mais concisamente e mais brevemente, os teoremas que são julgados úteis." ([Ver1], p. 354).

Depois desta breve apresentação biográfica de Papo e da sua obra procuraremos, de seguida, expor alguns problemas de geometria com uma estrutura sequencial de conteúdos diferente da apresentada na *Coleção Matemática* de Papo de Alexandria.

CAPÍTULO II

2.1 CURVAS ESPECIAIS

Acontecia frequentemente, na matemática grega, aos antigos geómetras gregos quando tentavam resolver um problema geométrico inventavam e estudavam uma nova curva.

Segundo Eduardo Veloso:

" (…) a história das curvas confunde-se em muitos momentos com a história da matemática" ([Ve], p. 105).

No Livro IV da *Coleção Matemática* de Papo de Alexandria a primeira referência a curvas transcendentes é sobre a Espiral[9] de Arquimedes.
Apresenta ainda um estudo sobre outras curvas, nomeadamente a concóide de Nicomedes, a quadratriz de Nicomedes e as cónicas, bem como a aplicação das mesmas na resolução dos três problemas clássicos da geometria.

2.1.1 AS CÓNICAS

O estudo sobre cónicas, apresentado por Papo, tem como principal objetivo sistematizar o que foi estudado por Apolónio. O estudo repetido, geração após geração, e a acumulação interpretativa sobre as designações das cónicas é-nos revelado, na riqueza de conteúdo das proposições mencionadas por Papo das quais apresentamos apenas cinco.

Para Apolónio, se uma reta g de comprimento indefinido e passando por um ponto fixo V,

[9] Para os matemáticos gregos, as curvas eram normalmente definidas através de uma propriedade ou através da descrição da trajetória de um ponto, que se move ao longo do plano. Gino Loria (1862 – 1954) refere que a origem da palavra espiral é muito antiga, proveniente de movimentos astronómicos descritos por Platão.

se move ao longo da circunferência de um círculo não complanar com esse ponto obtém-se duas superfícies – superfície cónica – verticalmente opostas, uma em relação à outra, isto é, dois cones[10] – atualmente designado por duplo cone oblíquo - . O ponto fixo V é o vértice do cone, a reta VO traçada do vértice V para o centro O (centro da circunferência) o eixo, a reta VP uma geratriz e o círculo de centro O e raio OP a base do cone. ([C], pp. 9-10).

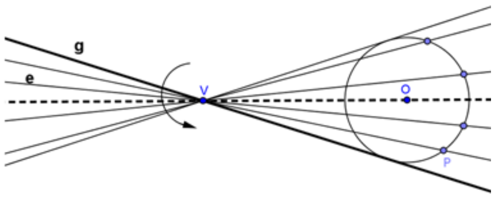


Figura 2.1 –Cone segundo Apolónio

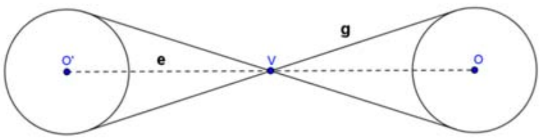


Figura 2.2 – Duplo Cone oblíquo

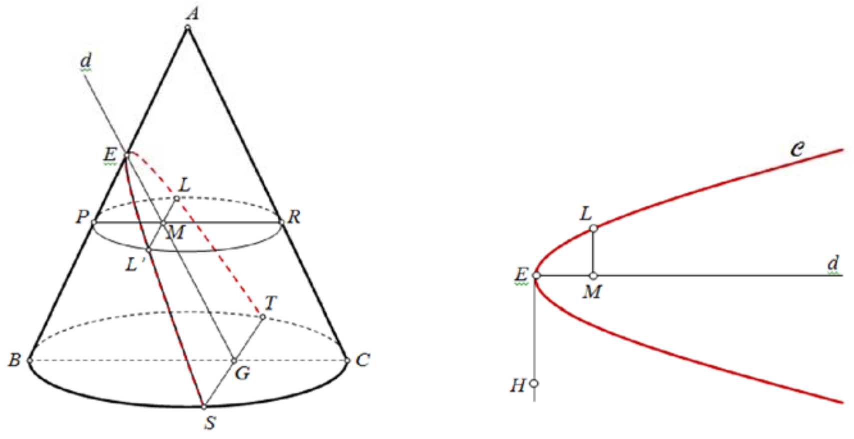
Apolónio define ainda o triângulo axial, como a interseção do cone com um plano perpendicular à base do cone e que contém o eixo VO.

No Livro I *As Cónicas* Apolónio define o diâmetro de todas estas curvas da seguinte forma:

"Chamo diâmetro de todas as linhas curvas situadas no mesmo plano, a reta que, traçada a linha curva, corta em duas partes iguais todos os segmentos traçados paralelamente a uma reta dada. Trata-se, portanto de uma reta traçada de uma certa maneira, o diâmetro, paralelas a cada uma das retas dadas." ([Ver2], nota de rodapé, p.847).

[10] ***Elementos* XI, Definição XVIII:** Pirâmide cônica é uma figura sólida, que se obtém pela revolução inteira de um triângulo retângulo em torno de um cateto (lado imóvel). Se o triângulo for isósceles, a pirâmide cônica se chamará ortogonia [parábola-secção obtida por um plano perpendicular a uma geratriz]; se o lado, que se imagina imóvel, for menor ao outro cateto que gira, a pirâmide cônica se chamará ambligonia [hipérbole-secção obtida por um plano perpendicular a uma geratriz]; se o lado, que se imagina imóvel, for maior ao outro cateto que gira, a pirâmide cônica se chamará oxigônia [elipse-secção obtida por um plano perpendicular a uma geratriz].

Na proposição 11 do Livro I *As Cónicas* Apolónio define a parábola da seguinte forma[11]:



(i) (ii)

Figura 2.3 – Dedução dos sintomas de uma parábola

"Se um cone é intersetado por um plano que passa pelo eixo, e se é intersetado por um outro plano que corta a base do cone [círculo, na linha reta ST perpendicular a BC ou BC prolongado] *segundo uma reta perpendicular* $[EG]$ *à base do triângulo axial* $[ABC]$ *e se, para além disto, o diâmetro da secção*[12] d *é paralelo a um dos lados do triângulo axial,* $[AC]$ *o quadrado de qualquer reta* [LM, sendo L um ponto arbitrário da curva] *traçada da secção do cone paralelamente à secção comum do plano secante* [traça por L um plano paralelo ao círculo da base] *e da base do cone* [círculo] *até ao diâmetro da secção* [PR] *equivale ao rectângulo* [$LM^2 = EH \times EM$, sendo M a interseção do plano com EG] *delimitado pela reta que ela corta sobre o diâmetro, do lado superior da secção, e por uma certa reta cuja razão entre a reta situada entre o ângulo do cone e a secção é a mesma que a do quadrado da base do triângulo axial pelo rectângulo limitado pelos outros dois lados* [$BC^2 = BA \times AC$]. *Chamaremos a tal secção uma parábola."*([Ver2], nota de rodapé, p.505).

Vejamos como Katz ([K], p.152) apresenta, mais pormenorizadamente, a dedução do sintoma padrão da parábola – relação entre EM e LM, a abcissa e a ordenada, respetivamente, do ponto L na curva – feita por Apolónio:

---

[11] As figuras foram gentilmente cedidas por ([C], p. 14).

[12] ***Cónicas* X, Definição IV:** Chamo diâmetro de uma linha curva situada num plano ao segmento que, traçado da linha curva, corta em duas partes iguais os segmentos traçados da linha curva paralelamente a uma reta qualquer; vértice da linha à extremidade deste segmento que está situada sobre a curva; por fim, chamo retas traçadas de uma maneira ordenada ao diâmetro a cada um destes segmentos paralelos

Considere-se [Figura 2.3 (i)] o plano que corta o plano da base do círculo na linha reta ST perpendicular a BC e seja EG a interseção deste plano com o triângulo axial ABC tal que EG seja perpendicular a um lado desse triângulo. Seja L um ponto arbitrário da secção assim produzida e por L definamos um plano paralelo ao círculo da base. A secção do cone produzida por este plano é um círculo com diâmetro PR. Seja M a interseção deste círculo com EG, pelo que LM é perpendicular a PR e, por definição de potência de um ponto, tem-se que, $\mathrm{LM}^2 = PM \times MR$. Da semelhança dos triângulos ABC , APR e EPM, tem-se que, $\frac{BC}{AB} = \frac{PR}{PA} = \frac{PM}{EP}$ ou seja, $\frac{PR-PM}{PA-EP} = \frac{MR}{EA} = \frac{BC}{AB}$ e $\frac{BC}{AC} = \frac{PR}{AR} = \frac{PM}{EM}$, pelo que, $\frac{BC}{AB} \times \frac{BC}{AC} = \frac{BC^2}{AB \times AC} = \frac{MR}{EA} \times \frac{PM}{EM} = \frac{\mathrm{LM}^2}{EA \times EM}$. Esta relação mostra que, a razão entre as áreas do quadrado de lado LM e do retângulo de lados EA e EM, é constante, isto é, depende apenas das razões entre os lados do triângulo axial ABC, e não do ponto genérico L sobre a cónica.

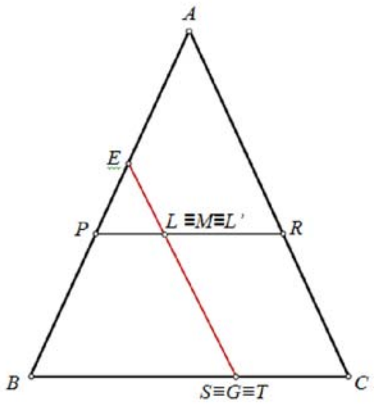


Figura 2.4 – Corte transversal segundo o plano axial (parábola)

Seja EH perpendicular a EM [Figura 2.3 (ii)] tal que, $\frac{EH}{EA} = \frac{BC^2}{AB \times AC}$, ou seja, $\frac{EH}{EA} = \frac{\mathrm{LM}^2}{EA \times EM}$. Então $\mathrm{LM}^2 = \frac{EH}{EA} \times EA \times EM$, ou seja, $\mathrm{LM}^2 = EH \times EM$.

Se fizermos $LM = y$, $EM = x$ e $EH = p$, deduzimos a equação algébrica da parábola[13]: $y^2 = px$, isto é, o quadrado da ordenada é igual ao retângulo aplicado na abcissa. A constante p, apenas depende do plano intersetante que determina a curva, e é chamada o parâmetro da parábola.

Na proposição 13 do Livro I *As Cónicas* Apolónio define a elipse evidenciando como principal propriedade desta curva a razão entre o diâmetro e a tangente, correspondente a este diâmetro, ser a mesma que a razão entre os eixos oblíquos destas coordenadas[14]:

[13] O nome "parábola" provém da palavra grega *paraboli (aplicado).*

[14] As figuras foram gentilmente cedidas por ([C], p. 16).

"Se um cone é intersetado por um plano passando pelo eixo e se é intersetado por um outro plano que, intersetando [nos pontos E e D] *cada um dos lados* $[AB$ e $AC]$ *do triângulo axial* $[ABC]$*, não é traçado paralelamente nem obliquamente à base do cone, e se, para além disso, o plano do cone e o plano secante se intersetam segundo uma reta* $[ST]$ *perpendicular à base do triângulo axial, ou perpendicularmente ao prolongamente desta base, então o quadrado de uma reta* $[LM^2]$ *traçada da secção do cone até ao diâmetro da secção* $[ED]$ *paralelamente à secção comum dos planos será equivalente a uma área aplicada sobre uma certa reta* $[EH]$ *para a qual a razão do diâmetro da secção* $[\frac{EH}{DE}]$ *é a mesma que a razão do quadrado da reta* $[\frac{BK\times KC}{AK^2}]$ *traçada do vértice do cone para a base do triângulo paralelamente ao diâmetro da secção com o rectângulo limitado pelas interseções desta reta (na base) com retas que contêm os lados do triângulo; uma área que tem como largura* $[EM]$ *a reta que interseta o diâmetro pela primeira reta, do lado superior da secção, e subtraída por uma figura semelhante ao retângulo limitado pelo diâmetro* $[ED]$ *e por um parâmetro* $[EH]$*. Chamaremos a tal secção uma elipse."* ([Ver2], nota de rodapé, p.504).

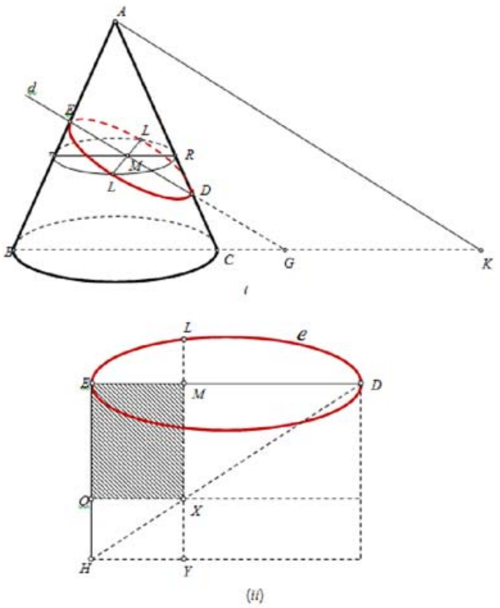


Figura 2.5 – Dedução do sintoma da elipse

Vejamos como Katz ([K], pp.153 - 154) apresenta, mais pormenorizadamente, a dedução do sintoma padrão da elipse – relação entre EM e LM, a abcissa e a ordenada, respetivamente, do ponto L na curva – feita por Apolónio:

Neste caso, o diâmetro d da cónica interseta ambos os lados do triângulo axial nos pontos D e E de modo que os pontos D, E, M e G sejam colineares na reta d [Figura 2.5 (i)]. Seja K o ponto do plano da base do cone resultante da interseção da reta que passa por A e é paralela a ED.

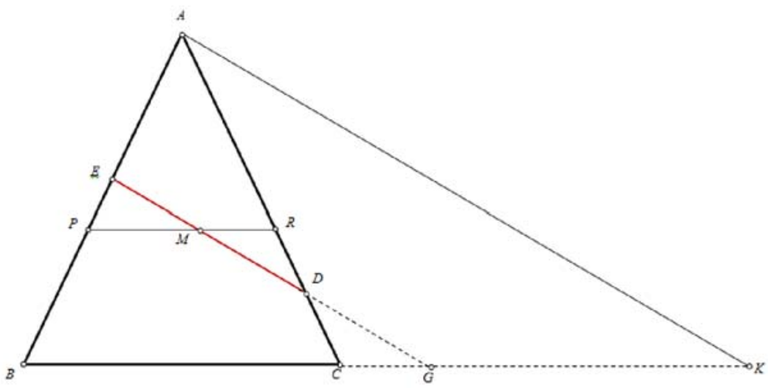


Figura 2.6 – Corte transversal segundo o plano axial (elipse)

Tendo em conta a semelhança dos triângulos ABK e EMP obtemos $\frac{MP}{EM} = \frac{BK}{AK}$ e da semelhança dos triângulos DMR e ACK obtemos $\frac{MR}{MD} = \frac{CK}{AK}$. Portanto, $\frac{LM^2}{EM \times MD} = \frac{MP}{EM} \times \frac{MR}{MD}$, ou seja, $\frac{LM^2}{EM \times MD} = \frac{BK}{AK} \times \frac{CK}{AK}$. Seja EH, traçado perpendicularmente a DE, de modo que, $\frac{EH}{ED} = \frac{BK \times CK}{AK^2}$.

Por outro lado, $\frac{EH}{ED} = \frac{MX}{DM} = \frac{EO}{DM} = \frac{EM \times EO}{EM \times MD}$, pelo que, $MP \times MR = EM \times EO$ e, portanto, $LM^2 = EM \times EO$ onde $EO = EH - HO$. Note-se que, o retângulo contido por EM e HO é semelhante ao contido por DE e EH. Em notação moderna, como $\frac{HO}{EM} = \frac{EH}{ED}$ temos que, $HO = \frac{EM \times EH}{ED}$. Assim, $LM^2 = EM \times \left(EH - \frac{EM \times EH}{ED}\right)$, ou seja, $LM^2 = EM \times EH - \frac{EH}{ED} \times EM^2$ podendo enunciar-se do seguinte modo:

A abcissa EM de um ponto genérico L da cónica obtém-se aplicando, por defeito, ao segmento de reta EH, a área do quadrado de lado LM, sendo esse defeito o retângulo de lados $\frac{EH}{ED} \times EM$ e EM, que é, por seu lado, semelhante ao retângulo de lados EH e ED [Figura 2.5 (ii)]. Fazendo, $LM = y$, $EM = x$, $EH = p$ e $\mathrm{ED} = 2a$ a equação algébrica da elipse[15] será: $y^2 = xp - \frac{p}{2a}x^2$ ou seja $y^2 = x\left(p - \frac{p}{2a}x\right)$. As constantes p e a são chamados parâmetros da elipse, e dependem apenas do plano secante que determina a curva.

Na proposição 12 do Livro I *As Cónicas* Apolóno define a hipérbole da seguinte forma:

"Se um cone é intersetado por um plano passando pelo eixo e se é intersetado por um outro plano que interseta a base do cone segundo uma reta perpendicular à base do triângulo axial, e se, para além disto, o diâmetro da seção prolongado interseta um dos lados do triângulo para lá do vértice do cone, então o quadrado de uma reta [LM^2] traçada desta secção do cone até ao diâmetro da secção [EG] paralelamente à interseção do plano secante com a base do cone, será equivalente a uma área aplicada sobre uma certa reta [EH] para a qual a razão da reta que prolonga o diâmetro da secção e

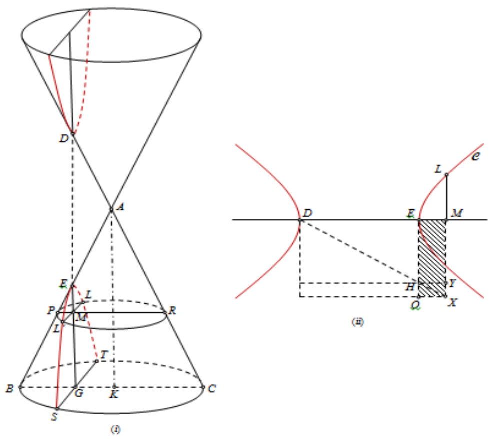


Figura 2.7 – Dedução dos sintomas de uma hipérbole

[15] O nome elipse (*ellipsis = falta*) é o original do grego que Apolónio adotou para *defeito.*

que subtende o ângulo exterior do triângulo [$\frac{EH}{DE}$] *é a mesma que a do quadrado da reta traçada até à base do triângulo paralelamente ao diâmetro da secção com o retângulo limitado pelos segmentos da base* [$\frac{BK \times KC}{AK^2}$]*; uma área que tem como largura* [EM] *a reta que intersecta o diâmetro* [ED] *pela primeira reta, do lado superior da secção, e aumentada por uma figura semelhante ao retângulo limitado pela reta que contém o ângulo exterior do triângulo, e por um parâmetro* [EH]. *Chamaremos a tal secção uma hipérbole.* ” ([Ver2], nota de rodapé, pp.504-505).

Vejamos como Katz ([K], pp.153 - 154) apresenta, mais pormenorizadamente, a dedução do sintoma padrão da hipérbole – relação entre EM e LM, a abcissa e a ordenada, respetivamente, do ponto L na curva – feita por Apolónio:

Como a [Figura 2.7(i)] sugere a única diferença, comparativamente à elipse, está na localização do ponto E entre M e D, pelo que $LM^2 = EM \times \left(EH + \frac{EM \times EH}{ED}\right)$, ou seja, $LM^2 = EM \times EH + \frac{EH}{ED} \times EM^2$ podendo enunciar-se do seguinte modo:

A abcissa EM de um ponto genérico L da cónica obtém-se aplicando, por excesso, ao segmento de reta EH, a área do quadrado de lado LM, sendo esse excesso o retângulo de lados $\frac{EH}{ED} \times EM$ e EM, que é, por seu lado, semelhante ao retângulo de lados EH *e* ED [Figura 2.7 (ii)]. Fazendo, $LM = y$, $EM = x$, $EH = p$ e $\mathrm{ED} = 2a$ a equação algébrica da hipérbole [16] será: $y^2 = xp + \frac{p}{2a}x^2$ ou seja $y^2 = x\left(p + \frac{p}{2a}x\right)$. As constantes p e a são chamados parâmetros da hipérbole, e dependem apenas do plano secante que determina a curva.

Papo também enuncia teoremas acerca dos focos, diretrizes e excentricidade das cónicas. No Livro VII da sua *Coleção* apresenta quatro Lemas (235 a 238) que caracterizam as três cónicas através de um ponto (foco) e de uma reta (diretriz), de acordo com o tratado *“Lugar geométrico na superfície”* de Euclides.

Carateriza na proposição 236 as secções cónicas baseado-se na razão constante entre duas distâncias, à qual chama excentricidade.

[16] O nome hipérbole (*yperboli* = *excesso*) é o original do grego que Apolónio adotou para *excesso*.

Proposição 236:

Sejam dados os pontos A e B e a perpendicular CD à reta que contém os pontos dados.

Então o ponto C pertence a uma secção cónica tal que se:

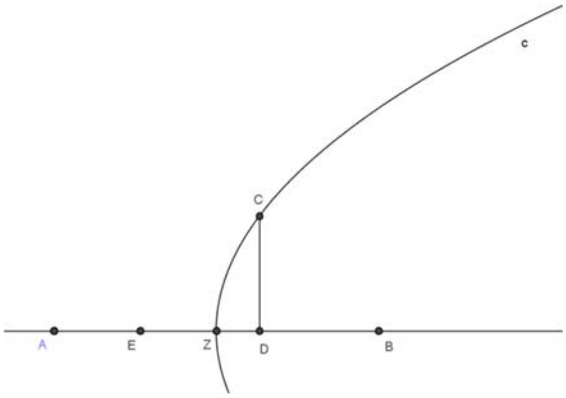


Figura 2.8 – Excentricidade das cónicas

- $\frac{AD^2}{CD^2+DB^2} = 1$ a secção cónica é uma parábola;
- $\frac{AD^2}{CD^2+DB^2} > 1$ a secção cónica é uma elipse;
- $\frac{AD^2}{CD^2+DB^2} < 1$ a secção cónica é uma hipérbole.

Prova:

Com efeito, seja $ED = DB$.

Considere-se o primeiro caso $\frac{AD^2}{CD^2+DB^2} = 1$, com $AD^2 = CD^2 + DB^2$ (I). Da proposição[17] *Elementos* II, 6 de Euclides obtemos:

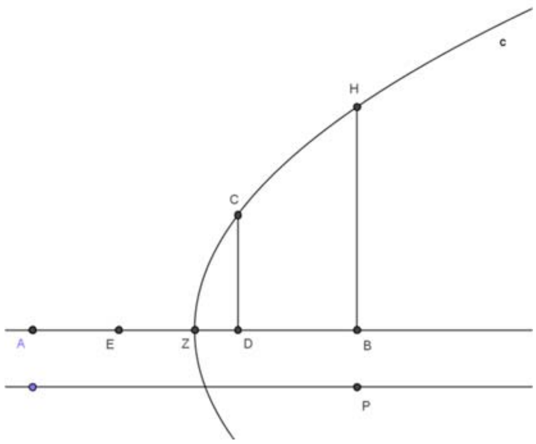


Figura 2.9 – Excentricidade da parábola

$AB \times AE + ED^2 = AD^2$ ou seja, $AB \times AE + DB^2 = AD^2$. Tendo em conta a relação (I) da hipótese, $AB \times AE + DB^2 = CD^2 + DB^2$, ou seja, $AB \times AE = CD^2$ (II). Mas $AE = AB - EB$ e, por construção, $AZ = ZB$. Como por hipótese, $ED = DB$ então $AB = 2ZB$ e $EB = 2DB$, pelo que, $AE = 2ZB - 2DB = 2ZD$. Assim, da relação (II) obtém-se $AB \times AE = 2AB \times ZD$ e, portanto, $CD^2 = 2AB \times ZD$. Tendo em conta a

[17] ***Elementos* II, 6**: Se uma linha reta for dividida em duas partes iguais, e se no seu prolongamento for traçada outra reta, será o retângulo compreendido pela reta toda e mais a adjunta, e pela mesma adjunta juntamente com o quadrado da metade da primeira reta, igual ao quadrado da reta, que se compõe da mesma metade, e da outra reta adjunta: $(a+b)b + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2} + b\right)^2$

proposição[18] 52 do Livro I *As Cónicas*, e sendo P o dobro de AB então o retângulo compreendido pelas retas P e ZD será equivalente ao quadrado de CD, isto é, $CD^2 = P \times ZD$ (III).

Considerando a perpendicular BH a parábola ZCH é o lugar geométrico do ponto C.

A relação (III) é a forma característica da equação $y^2 = 2px$ de uma parábola, isto é, o quadrado sobre a ordenada é igual ao retângulo sobre a abcissa x e o parâmetro $2p$ ao qual pertence o ponto C, como Apolónio demonstrou na proposição 11 do Livro I *As Cónicas*.

Papo utiliza as cónicas nas proposições 42 e 43 do Livro IV, capítulos LII e LIII, respetivamente, como um processo alternativo às construções por nêusis das proposições 6 a 9 apresentadas no tratado *Das Espirais* de Arquimedes. Com a interseção de duas cónicas, a hipérbole e a parábola, constrói segmentos com um determinado comprimento entre uma circunferência e uma linha reta cujo prolongamento passe num determinado ponto.

Proposição 42:

Seja dada uma reta AB e seja DC uma reta inclinada à reta dada. Pelo ponto C traça-se a perpendicular EC a AB tal que se conheça a razão entre EC e DC.

Então, o ponto E está sobre uma hipérbole.

Prova:

Por D traça-se DZ paralela a EC com Z o ponto de interseção da paralela traçada com a reta dada AB. Traça-se EH paralela a AB, sendo o ponto H obtido pela interseção desta paralela com o prolongamento de DZ.

[18] **Proposição 52:** Uma reta termina num ponto dado do plano, encontra, nesse plano, uma secção do cone chamada parábola, pelo que o diâmetro é a reta dada, e no qual o quadrado de qualquer reta traçada na secção sobre o diâmetro, e um ângulo dado, será equivalente ao retângulo limitado pela reta que ela interseta a partir da parte superior da secção, e sobre uma outra reta dada.

A razão de DZ com cada um dos segmentos iguais $Z\theta$ e ZK é a mesma que a razão entre

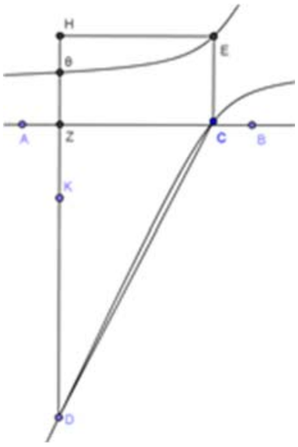


Figura 2.10 – Ponto sobre uma hipérbole

DC e CE, isto é, $\frac{DC}{CE} = \frac{DZ}{Z\theta} = \frac{DZ}{ZK}$ e igual a $DZ \times \frac{CE}{DC}$. Então, $\frac{DC^2}{CE^2} = \frac{DZ^2}{Z\theta^2}$ (I), e $\frac{DC^2 - DZ^2}{CE^2 - Z\theta^2} = \frac{ZC^2}{CE^2 - Z\theta^2}$, ou seja, a relação entre o quadrado restante de lado ZC, isto é, do quadrado de lado EH, com o retângulo restante compreendido entre as retas KH e $H\theta$.

Pela proposição[19] *Elementos* II, 4 de Euclides, tem-se $CE^2 = ZH^2 = Z\theta^2 + \theta H^2 + 2Z\theta \times \theta H$. Ora, $2Z\theta \times \theta H = K\theta \times \theta H$, pelo que, $CE^2 = Z\theta^2 + \theta H^2 + K\theta \times \theta H$, onde $CE^2 - Z\theta^2 = \theta H^2 + K\theta \times \theta H$. Da proposição[20] *Elementos II, 3* de Euclides aplicada à reta KH dividida em duas partes desiguais pelo ponto θ tem-se, $Z\theta^2 = KH \times \theta H$ e substituindo na expressão (I) obtem-se $\frac{DZ^2}{KH \times \theta H} = \frac{EH^2}{KH \times \theta H} = \frac{DZ^2}{Z\theta^2}$ igual ao comprimento dado. Como os pontos K e θ são dados, então o ponto E está sobre a hipérbole que passa pelos pontos θ e E.

Tem-se, $\frac{Parâmetro}{diâmetro\ K\theta} = \frac{EH^2}{KH \times \theta H}$ e, portanto, $Parâmetro = K\theta \times \frac{EH^2}{KH \times \theta H}$.

Proposição 43:

Seja dada uma reta AB. Perpendicular a AB traça-se CD. O retângulo compreendido entre AD e DB é equivalente àquele compreendido pela reta dada e CD.

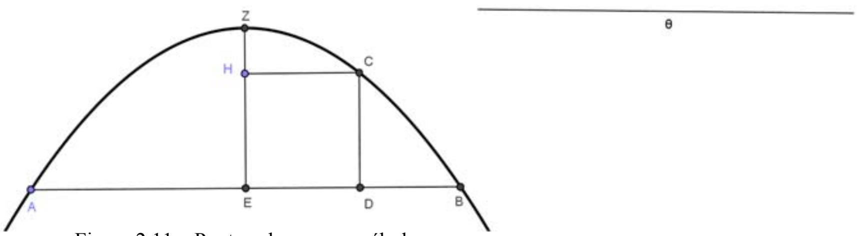


Figura 2.11 – Ponto sobre uma parábola

Então, o ponto C pertence a uma parábola pois, relativamente à perpendicular CD, se for conhecida a sua grandeza, $\frac{AD \times DB}{CD} = \theta$ também será conhecida.

[19] ***Elementos* II, 4:** Se uma uma reta for cortada em duas partes quaisquer, será o quadrado da toda igual aos quadrados das partes, juntamente com o retângulo das mesmas partes, tomado duas vezes.

[20] ***Elementos* II, 3:** Se uma linha reta for dividida, como se quiser, será o retângulo compreendido pela mesma reta, e por uma parte dela, igual ao retângulo das partes juntamente com o quadrado da dita parte.

Prova:

Seja E o ponto médio de AB e por E traça-se a perpendicular EZ. O retângulo compreendido entre AB e EZ é equivalente ao quadrado de lado EB. Desta forma o ponto Z fica determinado. Traça-se CH paralela a AB; o quadrado restante de lado ED é equivalente ao retângulo compreendido entre a reta dada e ZH. De facto, por construção $EB^2 = \theta \times EZ$. Pela proposição[21] *Elementos* II, 5 de Euclides e aplicando a identidade $ab + \left(\frac{a+b}{2} - b\right)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ à reta AB dividida em partes iguais em E e em partes desiguais em D tem-se: $AD \times DB + ED^2 = EB^2$, pelo que, $AD \times DB + ED^2 = \theta \times EZ$. Mas, por hipótese, $AD \times DB = \theta \times DC$ pelo que $\theta \times DC + ED^2 = \theta \times EZ$, ou seja, $ED^2 = \theta(EZ - DC) = \theta(EZ - HE) = \theta \times ZH$. Como o ponto Z é dado então o ponto C pertence à parábola que passa pelos pontos A, B, Z cujo eixo é a reta EZ. Note-se que das expressões anteriores temos: $\frac{EB^2}{HC^2} = \frac{\theta \times EZ}{\theta \times ZH} = \frac{EZ}{ZH}$ e da proposição *Cónicas I,* 20 de Apolónio, concluímos que o ponto C está sobre a parábola de eixo EZ.

No Livro VIII podemos encontrar na Proposição 13 a solução de Papo para o problema de construção de uma cônica dados cinco pontos.

Mais concretamente, a proposição seguinte descreve a elipse $\Theta K \Lambda \mathrm{MN}$ passando pelos pontos N, M, Λ, Φ e θ para o caso das retas ΘN e MK serem paralelas.

Proposição 13:

Dados os cinco pontos Θ, K, Λ, M e N no mesmo plano, descrever a elipse que os contém.

Prova:

Consideremos em primeiro lugar que os segmentos ΘN e MK são paralelos e dividamos cada um destes segmentos em duas partes iguais, sendo A e B os respetivos pontos médios

[21] ***Elementos* II, 5:** Se uma linha reta for dividida em duas partes iguais e duas desiguais, será o retângulo compreendido pelas partes desiguais, juntamente com o quadrado da parte entre as duas secções, igual ao quadrado da metade da linha proposta.

Prolonguemos a reta AB até encontrar a elipse nos pontos E e Z. Portanto, *As Cónicas* X definição IV[22], determina que, a reta EZ é um diâmetro da elipse e é dada a sua posição uma vez que é conhecida a dos pontos A e B. Tracemos pelo ponto Λ a reta $\Lambda\Xi$ paralela à reta EZ e consideremos os pontos Π e H de interseção do prolongamento do segmento $\Theta\mathrm{N}$ com as retas $\Xi\mathrm{K}$ e $\Lambda\mathrm{M}$, respetivamente. Seja Γ o ponto de interseção dos segmentos ΘN e $\Lambda\Xi$. Os pontos Γ, Π e H ficam definidos pois os pontos Λ, M, Θ, N são dados. Do paralelismo das retas $\Theta\mathrm{H}$ e KM, tem-se as seguintes relações entre os segmentos: $\frac{\Xi\Gamma}{\text{Ц}\Gamma\Pi}=\frac{\Xi\Delta}{\Delta\mathrm{K}}$ e $\frac{\Gamma\Lambda}{\mathrm{H}\Gamma}=\frac{\Delta\Lambda}{\mathrm{M}\Delta}$. Destas resulta que $\frac{\Xi\Gamma}{\text{Ц}\Gamma\Pi}\times\frac{\Gamma\Lambda}{\mathrm{H}\Gamma}=\frac{\Xi\Delta}{\Delta\mathrm{K}}\times\frac{\Delta\Lambda}{\mathrm{M}\Delta}$ e, portanto, $\frac{\Xi\Gamma\times\Gamma\Lambda}{\text{Ц}\Gamma\Pi\times\mathrm{H}\Gamma}=\frac{\Xi\Delta\times\Delta\Lambda}{\Delta\mathrm{K}\times\mathrm{M}\Delta}$ (I).

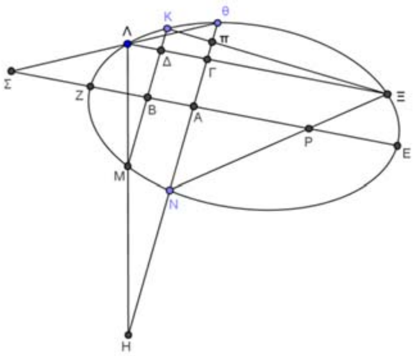


Figura 2.12 – Elipse definida por cinco pontos
1º caso: os segmentos ΘN e MK são paralelos

Por outro lado, se considerarmos os pontos Ξ, Θ e por eles traçarmos as retas $\Xi\Lambda$ e $\Theta\mathrm{N}$ paralelas, respetivamente, ao diâmetro EZ e ao seu diâmetro conjugado (não assinalado na figura), como estes diâmetros são paralelos a tangentes à elipse vem, pela proposição[23] *Cónicas* III, 17 que

$$\frac{\Xi\Gamma\times\Gamma\Lambda}{\mathrm{N}\Gamma\times\Gamma\Theta}=\frac{(tangente\ igual\ a\ metade\ do\ diâmetro\ EZ)^2}{(tangente\ igual\ \ a\ metade\ do\ diâmetro\ conjugado)^2}.$$

Analogamente, se considerarmos os pontos Ξ e K e por estes pontos traçarmos as retas $\Lambda\Xi$ e KM paralelas respetivamente, ao diâmetro EZ e ao seu diâmetro conjugado obtemos $\frac{\Xi\Delta\times\Delta\Lambda}{\mathrm{M}\Delta\times\Delta\mathrm{K}}=\frac{(tangente\ igual\ a\ metade\ do\ diâmetro\ EZ)^2}{(tangente\ igual\ \ a\ metade\ do\ diâmetro\ conjugado)^2}$ pelo que, $\frac{\Xi\Gamma\times\Gamma\Lambda}{\mathrm{N}\Gamma\times\Gamma\Theta}=\frac{\Xi\Delta\times\Delta\Lambda}{\mathrm{M}\Delta\times\Delta\mathrm{K}}$ (II).

Assim, das relações (I) e (II) temos que, $\frac{\Xi\Gamma\times\Gamma\Lambda}{\text{Ц}\Gamma\Pi\times\mathrm{H}\Gamma}=\frac{\Xi\Gamma\times\Gamma\Lambda}{\mathrm{N}\Gamma\times\Gamma\Theta}$ e, portanto, $\text{Ц}\Gamma\Pi\times\mathrm{H}\Gamma=\mathrm{N}\Gamma\times\Gamma\Theta$, isto é, o retângulo de lados $\Gamma\Pi$ e $\mathrm{H}\Gamma$ é equivalente ao retângulo de lados $\mathrm{N}\Gamma$ e $\Gamma\Theta$. Como os segmentos $\mathrm{N}\Gamma$, $\Gamma\Theta$ e $\mathrm{H}\Gamma$ são conhecidos, ponto $\Pi\text{Ц}$ fica definido. Como o ponto K é dado, a reta $K\Pi\Xi$ é conhecida. Assim, Ξ é conhecido e está sobre a elipse.

[22] Ver nota 13 na página 12

[23] ***Cónicas* III, 17:** Se duas retas tangentes a uma cónica se intersetam e se tomarmos dois pontos quaisquer sobre a cónica traçarmos por estes pontos paralelas às tangentes que se intersetam mutuamente e intersetam a cónica, então os retângulos compreendidos por estas retas estão na mesma razão que o quadrado das tangentes.

Por outro lado, sejam P e Σ, respetivamente, os pontos de interseção das retas $\mathrm{N\Xi}$ e $\Lambda\Xi$ com a reta EZ. Do paralelismo das retas $\Sigma\Sigma\mathrm{E}$ e $\Lambda\Xi$ temos que $\frac{\mathrm{NA}}{\mathrm{PA}}=\frac{\mathrm{N\Gamma}}{\Xi\Gamma}$ e $\frac{\mathrm{A\Theta}}{\mathrm{A}\Sigma\Sigma}=\frac{\Gamma\Theta}{\Gamma\Lambda}$, do que resulta $\frac{\mathrm{NA}}{\mathrm{PA}}\times\frac{\mathrm{A\Theta}}{\mathrm{A}\Sigma\Sigma}=\frac{\mathrm{N\Gamma}}{\Xi\Gamma}\times\frac{\Gamma\Theta}{\Gamma\Lambda}$ e, portanto , $\frac{\mathrm{NA}\times\mathrm{A\Theta}}{\mathrm{PA}\times\mathrm{A}\Sigma\Sigma}=\frac{\mathrm{N\Gamma}\times\Gamma\Theta}{\Xi\Gamma\times\Gamma\Lambda}$ (III).

Se considerarmos os pontos E e Θ, extremos, respetivamente do diâmetro EZ e de $\Theta\mathrm{N}$, paralela ao diâmetro conjugado, pela proposição[24] *Cónicas* III, 17, temos que:

$$\frac{\mathrm{NA}\times\mathrm{A\Theta}}{\mathrm{EA}\times\mathrm{AZ}}=\frac{(tangente\ igual\ a\ metade\ do\ diâmetro\ conjugado)^2}{(tangente\ igual\ \ a\ metade\ do\ diâmetro\ EZ\ )^2}$$

Analogamente, se considerarmos os pontos Θ e Ξ, de onde são traçadas as retas $\Theta\mathrm{N}$ e $\Xi\Lambda$, respetivamente, paralelamente ao diâmetro e ao diâmetro conjugado, pela proposição *Cónicas* III, 17, temos que:

$$\frac{\mathrm{N\Gamma}\times\Gamma\Theta}{\Xi\Gamma\times\Gamma\Lambda}=\frac{(tangente\ igual\ \ \text{à}\ metade\ do\ diâmetro\ conjugado)^2}{(tangente\ igual\ e\ paralela\ \text{à}\ metade\ do\ diâmetro\ EZ)^2}$$

e, portanto, $\frac{\mathrm{NA}\times\mathrm{A\Theta}}{\mathrm{EA}\times\mathrm{AZ}}=\frac{\mathrm{N\Gamma}\times\Gamma\Theta}{\Xi\Gamma\times\Gamma\Lambda}$ (IV).

Das relações (III) e (IV) segue que, $\frac{\mathrm{NA}\times\mathrm{A\Theta}}{\mathrm{PA}\times\mathrm{A}\Sigma}=\frac{\mathrm{NA}\times\mathrm{A\Theta}}{\mathrm{EA}\times\mathrm{AZ}}$ e, portanto, $\Pi\mathrm{PA}\times\mathrm{A}\Sigma=\mathrm{PA}\times\mathrm{A}\Sigma$.

Como os pontos P, A e Σ são conhecidos, os segmentos PA e $\mathrm{A}\Sigma$ ficam também definidos, pelo que, $\mathrm{PA}\times\Sigma\,\mathrm{A}\Sigma$ é conhecido, bem como $\mathrm{EA}\times\mathrm{AZ}$. Demonstra-se, igualmente, que $\mathrm{EB}\times\mathrm{BZ}$ é conhecido. Como os pontos A e B são conhecidos, os pontos E e Z ficam conhecidos, como se mostra na proposição seguinte. Fica assim definido o diâmetro EZ da elipse. Pela proposição[25] *Cónicas* I, 21, temos que

$$\frac{\mathrm{EA}\times\mathrm{AZ}}{\mathrm{NA}^2}=\frac{diâmetro\ transverso\ EZ}{parâmetro} \quad \text{e} \quad \frac{\left(\frac{1}{2}EZ\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\ do\ diâmetro\ conjugado\right)^2}=\frac{diâmetro\ transverso\ EZ}{parâmetro},$$

pelo que, $\frac{\left(\frac{1}{2}EZ\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\ do\ diâmetro\ conjugado\right)^2}=\frac{\mathrm{EA}\times\mathrm{AZ}}{\mathrm{NA}^2}$, ficando assim conhecido o diâmetro conjugado.

[24] Ver nota 24 na página 21

[25] ***Cónicas* I, 21**: Se numa hipérbole, uma elipse ou circunferência, forem traçados segmentos de forma ordenada sobre o diâmetro, os seus quadrados estão para as áreas limitadas pelos segmentos que cortam a partir das extremidades do eixo transverso da figura, como o eixo da figura está para o eixo transverso, e estes estão entre si como as áreas acima descritas.

Na proposição 14 é demonstrado o resultado utilizado, provisoriamente, na proposição 13 de que os pontos E e Z são conhecidos, quando se prova que os retângulos $\mathrm{EA} \times \mathrm{AZ}$ e $\mathrm{EB} \times \mathrm{BZ}$ e os pontos A e B também são conhecidos.

Nesta demonstração, considera-se a colinearidade dos pontos A, Γ, Δ e B e considera-se também que os pontos Γ e Δ bem como os retângulos $\mathrm{A}\Gamma \times \Gamma\mathrm{B}$ e $\mathrm{A}\Delta \times \Delta\mathrm{B}$ são conhecidos.

Proposição 14:

Dados os retângulos de lados $\mathrm{A}\Gamma$ e $\Gamma\mathrm{B}$ e de lados $A\Delta$ e $\Delta\mathrm{B}$, bem como os pontos Γ e Δ. Então os pontos A e B também ficam definidos.

Prova:

Consideremos o ponto E na semi reta BA tal que $\Delta\Gamma \times \Gamma\mathrm{E} = \mathrm{A}\Gamma \times \Gamma\mathrm{B}$ e o ponto Z na semi reta AB tal que $\Delta\Gamma \times \Delta\mathrm{Z} = \mathrm{A}\Delta \times \Delta\mathrm{B}$. De $\Delta\Gamma \times \Gamma\mathrm{E} = \mathrm{A}\Gamma \times \Gamma\mathrm{B}$ segue que $\frac{\Gamma\mathrm{E}}{\mathrm{A}\Gamma} = \frac{\Gamma\mathrm{B}}{\Delta\Gamma}$ e, assim, $\frac{\Gamma\mathrm{E}}{\Gamma\mathrm{E}-\mathrm{A}\Gamma} = \frac{\Gamma\mathrm{B}}{\Gamma\mathrm{B}-\Delta\Gamma}$, isto é, $\frac{\Gamma\mathrm{E}}{\mathrm{EA}} = \frac{\Gamma\mathrm{B}}{\mathrm{B}\Delta}$ (I). Analogamente, de $\Delta\Gamma \times \Delta\mathrm{Z} = \mathrm{A}\Delta \times \Delta\mathrm{B}$ segue que $\frac{\Gamma\Delta}{\mathrm{B}\Delta} = \frac{\mathrm{A}\Delta}{\Delta\mathrm{Z}}$ e, assim, $\frac{\Gamma\Delta+\mathrm{B}\Delta}{\mathrm{B}\Delta} = \frac{\mathrm{A}\Delta+\Delta\mathrm{Z}}{\Delta\mathrm{Z}}$, isto é, $\frac{\Gamma\mathrm{B}}{\mathrm{B}\Delta} = \frac{\mathrm{AZ}}{\Delta\mathrm{Z}}$ (II). De (I) e (II) segue que $\frac{\Gamma\mathrm{E}}{\mathrm{EA}} = \frac{\mathrm{AZ}}{\Delta\mathrm{Z}}$, ou seja, $\Gamma\mathrm{E} \times \Delta\mathrm{Z} = \mathrm{EA} \times \mathrm{AZ}$ e assim A fica definido.

Figura 2.13 - Os pontos **A**, **Γ**, **Δ** e **B** estão sobre a mesma reta

Analogamente, obtém-se o ponto B.

Consideremos de seguida que os segmentos ΘN e MK não são paralelos sendo Γ o de interseção das retas KN e $M\Theta$ e tracemos por Λ a reta $\Lambda\Upsilon\Phi$ paralela a $M\Theta$. Então, a razão entre o retângulo de lados $\mathrm{N}\Upsilon$ e $\Upsilon\mathrm{K}$ e o retângulo de lados $\Lambda\Upsilon$ e $\Upsilon\Phi$ é conhecida, pois pela proposição[26] *Cónicas* III, 17, $\frac{\mathrm{N}\Upsilon\times\Upsilon\mathrm{K}}{\Lambda\Upsilon\times\Upsilon\Phi} = \frac{\mathrm{N}\Gamma\times\Gamma\mathrm{K}}{\mathrm{M}\Gamma\times\Gamma\theta}$ e, como os pontos Θ, K, M e N são dados, são conhecidos os segmentos $M\Theta$ e NK, logo o ponto Γ também é conhecido e assim é conhecida a razão $\frac{\mathrm{NT}\times\mathrm{TK}}{\mathrm{MT}\times\mathrm{T}\theta}$, bem como a razão $\frac{\mathrm{N}\Upsilon\times\Upsilon\mathrm{K}}{\Lambda\Upsilon\times\Upsilon\Phi}$.

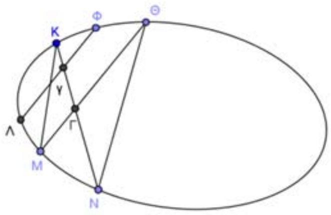


Figura 2.14 – Elipse definida por cinco pontos. **2º caso:** os segmentos ΘN e MK não são paralelos

Como o retângulo de lados $\mathrm{N}\Upsilon$ e $\Upsilon\mathrm{K}$ é conhecido, pois uma vez que as retas $\Lambda\Phi$, paralela

[26] Ver nota 24.na página 21

a $M\Theta$ por Λ , e NK são conhecidas, é conhecida a sua interseçãoΥ, também é conhecido $\Lambda\Upsilon \times \Upsilon\Phi$, de que resulta que o ponto Φ é conhecido. Então são conhecidos os pontos Θ, Φ, Λ, M e N da elipse e a primeira parte da prova mostra como é possível a sua construção.[27]

Papo também aplica, como veremos mais tarde, a hipérbole na obtenção da solução para o problema da trisseção do ângulo.

2.1.2 ESPIRAL DE ARQUIMEDES

Na segunda parte do Livro IV Papo apresenta um estudo sobre três curvas transcendentes, a espiral, a concóide e a quadratriz e inclui as suas aplicações na resolução dos três problemas clássicos. A primeira das curvas a que é feita referência é a espiral de Arquimedes que Papo define, no capítulo XXI, como um lugar linear, considerando a existência de uma sincronia de dois movimentos[28], o que não acontece no tratado *Das Espirais:*

"A geração desta linha é a seguinte:
Seja um círculo de centro no ponto B e raio o segmento [de reta] AB. Consideremos o ponto A da circunferência do círculo. Façamos mover o segmento AB de forma a que o ponto B fique fixo e que o ponto A se mova de modo uniforme segundo a circunferência do círculo; considere-se outro ponto que se move, no mesmo tempo, de modo uniforme a partir do ponto B até ao ponto A, isto é, há um ponto que parte do ponto B e percorre o segmento AB e outro ponto que parte de A e percorre a circunferência do círculo. O ponto que se move sobre o segmento AB descreverá, durante a revolução desse segmento, uma linha como $BEZA$; a sua origem será o ponto B, a posição inicial de revolução será o segmento AB, e essa linha será chamada espiral." ([Ver1], p.178)

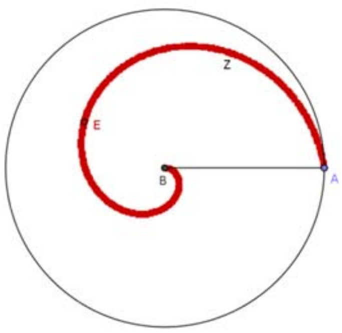


Figura 2.15 – Definição da espiral

[27] Na verdade, Papo considera na proposição 13 apenas o caso em que são paralelas duas das retas definidas pelos cinco pontos, mostrando o caso geral após a proposição 14 sem contudo enunciar uma proposição ou identificar o resultado como tal.

[28] O de um ponto percorrendo o raio - primeiro segmento - desde o centro da circunferência até à outra extremidade e, simultaneamente, o movimento de rotação do raio em torno do centro da circunferência. Este ponto irá descrever a espiral, mais concretamente a sua primeira revolução.

Esta definição limita-se apenas à primeira revolução da espiral, pois esta curva é apresentada num contexto de resolução dos três problemas clássicos da antiguidade.

Relativamente a esta curva, Papo refere que a sua descoberta se deve ao geómetra e astrólogo Cónon de Samos (século III a.C) que propôs o estudo das suas propriedades a Arquimedes:

"A teoria da hélice descrita no plano [hélice plana ou espiral] foi questionada por Cónon de Samos, e foi Arquimedes que a desenvolveu, usando um procedimento admirável [Método de Exaustão]"([Ver1], p.177).

Esta referência talvez se deva ao facto de Papo não ter tido acesso à carta ([V], p.258) de Arquimedes a Dositeu de Pelusa onde este afirma ter enviado algumas proposições, descobertas por ele próprio, a Cónon.

Atualmente, parece consensual que foi Arquimedes quem inventou e estudou as propriedades desta curva:

"A espiral pertence a Arquimedes, tanto na sua primeira conceção como na elaboração da sua teoria*."*([Ver1], p. XXVIII).

Algumas proposições enunciadas no tratado *Das Espirais*[29] são apresentadas por Papo com um método de investigação e argumentação diferente do de Arquimedes. Apresenta apenas as proposições 19 a 22 no Livro IV sobre a espiral de Arquimedes e não faz referência à proposição[30] 18, uma das mais importantes do referido tratado, que resolve o problema da quadratura do círculo. Apenas critica a prova de Arquimedes, para esta proposição, pelo uso de construções por nêusis.

A propriedade principal da espiral [existência de proporcionalidade entre raios de espiral e arcos de circunferências] é apresentada na proposição 19, que corresponde à

[29] Este tratado começa com onze proposições, sendo as nove primeiras utilizadas para a demonstração de resultados sobre tangentes à espiral e à aplicação da espiral na retificação de arcos de circunferências; as duas últimas são utilizadas para demonstrar resultados sobre a quadratura da espiral. ([M], p. 12).

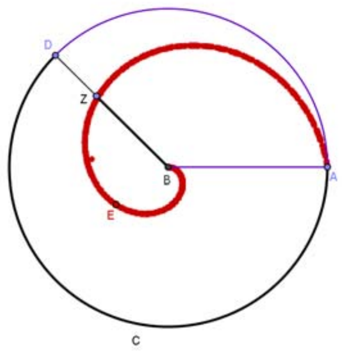
[30] **Proposição 18:** Consideremos a tangente à espiral na extremidade do primeiro segmento de reta. Se traçarmos uma reta perpendicular ao primeiro segmento de reta, pela origem da espiral, essa reta interseta a tangente. O comprimento do segmento de reta entre a origem da espiral e o ponto de interseção é igual ao perímetro da primeira circunferência.

proposição[31] 14 do tratado *Das Espirais* de Arquimedes, com uma explicação muito breve baseada apenas na forma como a espiral é gerada.

Esta proposição ilustra a transição dos problemas planos para os problemas de geometria linear (curvas em movimento).

Proposição 19:

Se do ponto inicial B da espiral BEZA, descrita por uma revolução, considerarmos duas retas BA e BZ [raio da espiral], prolongandas até à circunferência do primeiro círculo, estas retas estão na mesma razão que os arcos do círculo situados entre a extremidade da espiral e as extremidades das retas prolongadas:



$$\frac{\mathrm{BA}}{\mathrm{BZ}} = \frac{\text{circunferência ACD}}{\text{arco ACD}}$$

Figura 2.16 – Propriedade fundamental da espiral

Prova:

O ponto que parte de B demora, a percorrer o segmento BA, o mesmo tempo que o ponto A a percorrer toda a circunferência. De igual modo, o ponto que parte de B demora, a percorrer o segmento BZ, o mesmo tempo que o ponto A a percorrer o arco de circunferência ACD. As velocidades dos movimentos dos dois pontos terão de ser proporcionais às distâncias percorridas, pelo que haverá proporcionalidade entre as linhas retas e as curvas.
A demonstração desta proporcionalidade não é apresentada por Papo pois recorre à Proposição[32] 2 do tratado *Das Espirais* de Arquimedes.

[31] **Proposição 14:** Consideremos dois raios de espiral na primeira volta e a interseção dos prolongamentos desses raios com a primeira circunferência. Os raios de espiral considerados estão na mesma razão que os arcos de circunferência compreendidos entre o primeiro segmento e o prolongamento dos raios de espiral, no sentido da revolução.

[32] **Proposição 2:** Se dois pontos se moverem uniformemente ao longo de duas distâncias e percorrerem, novamente, duas outras distâncias com um movimento uniforme diferente do primeiro, mas durante tempos iguais, então as duas primeiras distâncias têm razão igual às duas últimas distâncias.

Papo refere que Arquimedes utilizou esta curva e não as secções de sólidos geométricos, para a retificação da circunferência:

"(…) o perímetro da circunferência é igual ao comprimento do segmento de reta que faz um ângulo reto como segmento inicial e tem a outra extremidade na tangente à espiral [noponto de intersecção do primeiro segmento com a circunferência]". ([Ver1], p.209).

Critica a demonstração de Arquimedes para este resultado, que corresponde à proposição 18 do seu tratado *Das Espirais,* pelo facto de ter usado construções por nêusis. Apresenta, como veremos na secção 3.2.2 uma solução alternativa para o Problema da rectificação da circunferência usando cónicas.

Na proposição 20, apresenta, sem qualquer prova, a progressão aritmética formada pelos raios vetores de uma espiral. Corresponde à Proposição[33] 12 demonstrada por Arquimedes no mesmo tratado.

Proposição 20:

Se forem traçados raios de espiral a partir da origem que façam ângulos iguais entre si, esses raios de espiral diferem o mesmo comprimento uns dos outros.

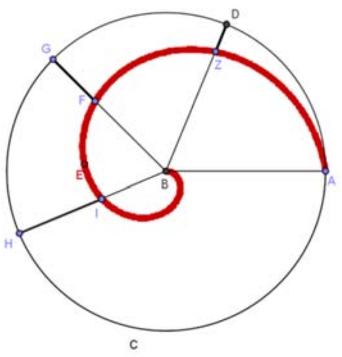


Figura 2.17 – Progressão aritmética dos raios vetores de uma espiral

As proposições seguintes comparam áreas limitadas por voltas de espiral, não necessariamente voltas inteiras, com áras de figuras mais simples como a de círculos.

[33] **Proposição 12:** Dados três raios de espiral da mesma volta, em que o primeiro e o segundo façam um ângulo igual ao ângulo feito entre o segundo e o terceiro, a diferença do comprimento do primeiro raio de espiral para o segundo é igual à diferença do comprimento do segundo raio de espiral para o terceiro.

A proposição 21, que no tratado de Arquimedes corresponde à Proposição[34] 24, estabelece a relação entre a área limitada pela espiral e pela linha reta, que voltou à sua posição inicial, com a área do círculo de centro no ponto fixo da espiral e raio igual ao comprimento percorrido pelo ponto ao longo da linha reta durante uma revolução. Isto é, esta proposição é dedicada à "quadratura" da região plana delimitada pela primeira volta da espiral e pelo raio gerador no final dessa primeira volta.
A demonstração, apresentada por Papo, desta proposição, tem as características de ser da autoria de Arquimedes já que usa sólidos de revolução. Calcula a razão entre o volume de um cone e de um cilindro com a mesma base e a mesma altura, para determinar a razão entre a primeira área e a área do primeiro círculo. Arquimedes, no entanto, usa o método mecânico – método de exaustão - , com figuras planas circunscritas e inscritas à espiral para provar, por dupla redução ao absurdo, esta proposição.

Proposição 21:

A figura compreendida entre a espiral e o segmento inicial de revolução [primeira área da espiral] é a terça parte do círculo que circunscreve a espiral [primeiro círculo].

Prova:

Com efeito, considere-se uma espiral BEZA e o primeiro círculo de centro B. No círculo dado, traçam-se os segmentos BA e BC e tome-se o arco AC, parte da circunferência do círculo. No paralelogramo retangular KNBA, representado na figura 2.19, considere-se um segmento de reta KP que tenha a mesma razão para KA, que o arco AC tem para a circunferência. Seja Z o ponto de interseção do raio BC com a espiral e H o ponto de interseção do arco de circunferência de centro B e raio BZ com o raio da espiral AB. Tracemos PT a paralela a KN e MG paralela a KA.

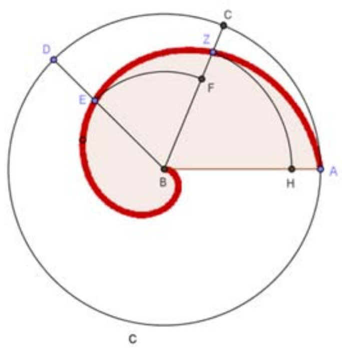


Figura 2.18 – Relação entre a área limitada pela espiral e a área do círculo.

Então, $\frac{\text{Circunferência de raio BA}}{\text{arco ADC}} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AH}} = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CZ}}$ (I)

[34] **Proposição 24:** A área limitada pela primeira volta e pelo primeiro segmento é igual a um terço da área do primeiro círculo.

Demonstrámos na proposição 19 que, $\frac{\text{Circunferência de raio BA}}{\text{arco ADC}}=\frac{\text{AB}}{\text{BZ}}=\frac{\text{AB}}{\text{BH}}$, logo $\frac{\text{Circunferência de raio BA}}{\text{Circunferência de raio BA}-\text{arco ADC}}=\frac{\text{AB}}{\text{AB}-\text{BH}}=\frac{\text{AB}}{\text{AH}}$, o que nos permite obter a relação (I).

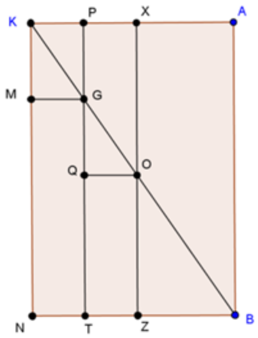


Figura 2.19 – Relação entre a área do cilindro obtido pela revolução do paralelogramo KNBA a rodar em torno do eixo NB e a área do cone obtido pela revolução do segmento KB, em torno do eixo NB.

Verificam-se no paralelogramo, pelo Teorema de Tales, as seguintes relações:

$\frac{\text{KB}}{\text{KG}}=\frac{\text{PT}}{\text{PG}}=\frac{\text{KA}}{\text{KP}}$.

Por construção, $\frac{\text{KA}}{\text{KP}}=\frac{\text{Circunferência de raio BA}}{\text{arco AC}}$ e da relação anterior (I) temos que, $\frac{\text{KA}}{\text{KP}}=\frac{\text{BC}}{\text{CZ}}$ (II). Ou seja, $\frac{\text{PT}}{\text{PG}}=\frac{\text{BC}}{\text{CZ}}$ e, convertendo $\frac{\text{PT}}{\text{PT}-\text{PG}}=\frac{\text{BC}}{\text{BC}-\text{CZ}}$, obtem-se $\frac{\text{PT}}{\text{TG}}=\frac{\text{BC}}{\text{BZ}}$. Portanto, $\frac{\text{PT}^2}{\text{TG}^2}=\frac{\text{BC}^2}{\text{BZ}^2}$.

Por se tratarem de dois setores semelhantes, isto é, determinados por arcos semelhantes temos

$\frac{\text{setor ABC}}{\text{setor HBZ}}=\frac{\text{Círculo de raio AB}}{\text{Círculo de raio HB}}=\frac{\text{BC}^2}{\text{BZ}^2}$.

Esta relação exprime que a razão das áreas é igual à razão dos quadrados dos seus raios. Não está demonstrada diretamente nos *Elementos* de Euclides mas deduz-se das proposições *Elementos*[35] *VI, 33* e *Elementos*[36] *XII, 2*

Imaginemos[37] o paralelogramo KNBA a rodar em torno do eixo NB originando um cilindro gerado por KA. De igual modo, obtemos os cilindros gerados pelos paralelogramos KT e MT em torno do eixo NT. Da proposição[38] *Elementos* XII, 11 temos que, $\frac{\text{o cilindro gerado pelo paralelogramo KT em torno do eixo NT}}{\text{o cilindro gerado pelo paralelogramo MT em torno do eixo NT}}=\frac{\text{PT}^2}{\text{TG}^2}$.

Consequentemente, $\frac{\text{o cilindro gerado pelo paralelogramo KT em torno do eixo NT}}{\text{o cilindro gerado pelo paralelogramo MT em torno do eixo NT}}=\frac{\text{setor ABC}}{\text{setor HBZ}}$.

Vimos anteriormente que, $\frac{\text{setor ABC}}{\text{setor HBZ}}=\frac{\text{PT}^2}{\text{TG}^2}$ e $\frac{\text{o cilindro de base }\pi\times\text{PT}^2\text{ e de altura NT}}{\text{o cilindro de base }\pi\times\text{TG}^2\text{ e de altura NT}}=\frac{\pi\times\text{PT}^2}{\pi\times\text{TG}^2}=\frac{\text{PT}^2}{\text{TG}^2}$ e, portanto, $\frac{\text{o cilindro de base }\pi\times\text{PT}^2\text{ e de altura NT}}{\text{o cilindro de base }\pi\times\text{TG}^2\text{ e de altura NT}}=\frac{\text{setor ABC}}{\text{setor HBZ}}$.

[35] ***Elementos* VI, 33:** Em círculos iguais, os ângulos têm a mesma razão que os arcos correspondentes quer sejam ângulos ao centro quer sejam ângulos inscritos.

[36] ***Elementos* XII, 2:** Os círculos estão entre si como os quadrados dos seus diâmetros.

[37] Animação em 3D deste resultado ([Www2]).

[38] ***Elementos* XII, 11:** Os cones e os cilindros que têm a mesma altura estão entre si como as respetivas bases.

De igual modo, se considerarmos $\text{arco CD} = \text{arco AC}$ e $\text{PX} = \text{KP}$ e efetuarmos as construções semelhantes às anteriores, também concluiremos que:

$\frac{\text{o cilindro gerado pelo paralelogramo PZ em torno do eixo TZ}}{\text{o cilindro gerado pelo paralelogramo QZ em torno do eixo TZ}} = \frac{\text{setor DBC}}{\text{setor EBF}}$ pois, usando a relação anterior, $\frac{\text{o cilindro de base } \pi \times \text{ZX}^2 \text{ e de altura TZ}}{\text{o cilindro de base } \pi \times \text{ZO}^2 \text{ e de altura TZ}} = \frac{\text{setor DBC}}{\text{setor EBF}}$.

Se este processo for continuado até o círculo estar todo dividido (e, consequentemente, todo o paralelogramo), e consideramos o cone obtido pela revolução do segmento KB, em torno do mesmo eixo NB obteremos

$$\frac{\text{o cilindro gerado pelo paralelogramo NA em torno do eixo NB}}{\text{cilindros inscritos no cone gerado pelo triângulo KNB em torno do eixo NB}} = \frac{\text{Círculo de raio AB}}{\text{setores inscritos na espiral}}$$

O mesmo acontecerá se consideramos setores circulares circunscritos à espiral e gerarmos, de forma semelhante ao procedimento anterior, cilindros circunscritos ao cone.

Generalizando, $\frac{\text{cilindro gerado pelo paralelogramo NA em torno do eixo NB}}{\text{cilindros circunscritos ao mesmo cone}} = \frac{\text{Círculo de raio AB}}{\text{setores circunscritos à espiral}}$, ou seja, $\frac{\text{cilindro gerado pelo paralelogramo NA em torno do eixo NB}}{\text{cone gerado por KB}} = \frac{\text{Círculo de raio AB}}{\text{região limitada pela espiral e pelo segmento AB}} = \frac{3}{1}$.

Ora, pela proposição[39] *Elementos* XII, 10, o cilindro é o triplo do cone então o círculo será também o triplo da espiral.

Papo não explica a convergência dos cilindros inscritos e circunscritos para o cone. Segundo Knorr ([Kn], pp. 43 - 75) bissetando sucessivamente o eixo NB a diferença entre o volume dos cilindros inscritos e dos cilindros circunscritos seria tão pequena quanto se queira, provando, desta forma, a convergência.

Se na proposição[40] 26 do tratado *Das Espirais* não fosse imposto que nenhum dos dois pontos considerados, que definem o setor de espiral, fosse a origem da espiral, então obter-se-ia o resultado apresentado por Papo no capítulo XXIII como um corolário desta proposição:

---

[39] ***Elementos* XII, 10:** Toda a pirâmide cónica é a terça parte do cilindro, que tem a mesma base e altura igual.

[40] **Proposição 26:** Consideremos a área delimitada por parte de uma espiral que não seja uma volta completa nem tenha uma extremidade na origem da espiral, e pelos raios de espiral considerados da sua extremidade à origem da espiral. Esta área está para a área do sector circular de raio igual ao maior dos raios de espiral considerados e de amplitude igual à feita pelos dois raios de espiral, assim como a área do rectângulo de comprimento igual ao maior raio de espiral e largura igual ao menor raio de espiral e mais um terço do quadrado da diferença entre os dois raios de espiral, está para o quadrado do maior raio de espiral aqui considerado.

Se traçarmos transversalmente uma reta BZ, relativamente à espiral $AZE\mathrm{B}$, e se traçarmos o círculo de centro B passando pelo ponto Z, a figura compreendida entre a espiral $ZE\mathrm{B}$ e a reta BZ é a terça parte da figura compreendida entre o arco ZHC do círculo e os segmentos de retas BZ e BC.

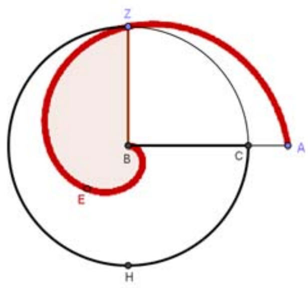


Figura 2.20 – Relação entre a área limitada por uma parte de espiral e por um arco

Este resultado não se encontra no tratado *Das Espirais* e a sua demonstração é análoga ao que foi exposto anteriormente.

A demonstração da proposição 22, "(…) uma pequena contribuição à obra de Arquimedes" ([Ver1], p.XXIX), não aparece em Arquimedes, sendo da autoria de Papo, sobre o tamanho dos setores numa espiral.

Proposição 22:

Considere-se o primeiro círculo cujo centro B é o ponto de origem da espiral $AZEB$ e o raio AB o segmento percorrido pelo ponto móvel que descreve a espiral.

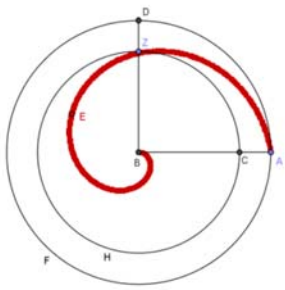


Figura 2.21 – Tamanho dos setores numa espiral

Se traçarmos transversalmente a reta BZ, tem-se que o cubo do comprimento do segmento que gera a espiral está para o cubo do comprimento do segmento traçado, assim como a área da figura compreendida entre toda a espiral e o segmento que a gera está para a área da figura compreendida entre a espiral e o segmento traçado. Ou seja, $\frac{\mathrm{AB}^3}{\mathrm{BZ}^3} = \frac{\text{região compreendida entre a espiral AZEB e a reta AB}}{\text{região compreendida entre a espiral ZEB e a reta BZ}}$, isto é, a área da região compreendida entre a espiral é proporcional ao cubo do seu raio.

Prova:

Com efeito, considere-se o círculo ZHC de centro B passando pelo ponto Z.

Da proposição anterior,

$$\frac{\text{círculo ADF}}{\text{região compreendida entre o arco ZHC e as retas BZ e BC}} = \frac{\text{região compreendida entre a espiral BEZA e a reta AB}}{\text{região compreendida entre a espiral BEZ e a reta BZ}}.$$

Mas, $\frac{\text{círculo ADF}}{\text{região compreendida entre o arco ZHC e as retas BZ e BC}} = \frac{\text{círculo ADF}}{\text{círculo ZHC}} \times \frac{\text{círculo ZHC}}{\text{região compreendida entre o arco ZHC e as retas BZ e BC}}$

Por outro lado, da Proposição *Elementos XII, 2* $\frac{\mathrm{AB}^2}{\mathrm{BZ}^2} = \frac{\text{círculo ADF}}{\text{círculo ZHC}}$,

Sendo os setores proporcionais aos arcos temos de *Elementos VI, 33*

$$\frac{\text{circunferência CZH}}{\text{arco ZHC}} = \frac{\text{círculo CZH de raio BC}}{\text{região compreendida entre o arco ZHC e as retas BZ e BC}}.$$

Tem-se também que, $\frac{\text{circunferência CZH}}{\text{arco ZHC}} = \frac{\text{circunferência ADF}}{\text{arco DFA}}$. Da proposição 19 temos que, $\frac{\text{circunferência ADF}}{\text{arco DFA}} = \frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{BZ}} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BZ}}$ donde por substituições sucessivas destas razões obtém-se,

$$\frac{\mathrm{AB}^2}{\mathrm{BZ}^2} \times \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BZ}} = \frac{\mathrm{AB}^3}{\mathrm{BZ}^3} = \frac{\text{região limitada pela espiral BEZA e a reta AB}}{\text{região limitada pela espiral BEZ e a reta BZ}}.$$

Nesta proposição é demonstrada uma proporção entre grandezas de tipos diferentes, a razão entre cubos do primeiro segmento e de um raio de espiral é igual à razão entre a primeira área e a área limitada pelo raio de espiral considerada.

No capítulo XXV, Papo reforça o que foi exposto anteriormente, apresentando dois corolários: um da proposição 19 e outro da proposição 21. Na sua obra, o corolário da proposição 21 aparece primeiro, injustificadamente pois este depende da proposição 19.

Como corolário da proposição 19 e considerando os quadrantes do círculo da primeira revolução da espiral, resulta que, se considerarmos o segmento de reta AB com quatro unidades, então o segmento de reta ZB mede três; o segmento de reta NB mede 2 e o segmento de reta BE mede um.

Como corolário da proposição 21 temos que:

Dada uma espiral e a circunferência circunscrita à primeira revolução da espiral (primeira circunferência) se prolongarmos a reta AB até C e, em seguida, traçarmos a perpendicular a esta reta passando por B, e tomando como unidade de área a área limitada pela espiral BFE e a reta BE tem-se as seguintes relações:

- A área limitada pelo arco de espiral NME e as retas NB e BE é sete vezes a unidade de área;
- A área limitada pelo arco de espiral $\mathrm{Z\theta N}$ e as retas ZB e BN é dezanove vezes a unidade de área;
- A área limitada pelo arco de espiral AGZ e as retas AB e BZ é trinta e sete vezes a unidade de área.

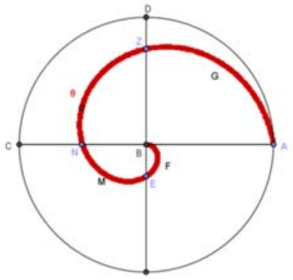


Figura 2. 22 – Proporção entre grandezas de tipo diferentes

Na proposição IV, 22 demonstramos que a área compreendida entre o raio vetor e a espiral é proporcional ao cubo desse raio, então temos:

$$\frac{\text{área limitada pelo arco de espiral BFE e a reta BE}}{\mathrm{BE}^3}=\frac{\text{área limitada pelo arco de espiral NMEFB e a reta BN}}{\mathrm{BN}^3}=$$
$$\frac{\text{área limitada pelo arco de espiral Z}\theta\text{NMEFBe a reta BZ}}{\mathrm{BZ}^3}=\frac{\text{área limitada pelo arco de espiral AZNEBe a reta BA}}{\mathrm{BA}^3}.$$

Isto é,

$$\frac{\text{área limitada pelo arco de espiral BFE e a reta BE}}{\text{área limitada pelo arco de espiral NMEFB e a reta BN}}=\frac{\mathrm{BE}^3}{\mathrm{BN}^3};$$

$$\frac{\text{área limitada pelo arco de espiral BFE e a reta BE}}{\text{área limitada pelo arco de espiral Z}\theta\text{NMEFBe a reta BZ}}=\frac{\mathrm{BE}^3}{\mathrm{BZ}^3};$$

$$\frac{\text{área limitada pelo arco de espiral BFE e a reta BE}}{\text{área limitada pelo arco de espiral AZNEB e a reta BA}}=\frac{\mathrm{BE}^3}{\mathrm{BA}^3}$$

Do corolário da proposição 19, temos que, $\frac{\mathrm{BE}}{1}=\frac{\mathrm{BN}}{2}=\frac{\mathrm{BZ}}{3}=\frac{\mathrm{BA}}{4}$, e portanto $\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{BN}}=\frac{1}{2}$; $\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{BZ}}=\frac{1}{3}$; $\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{BA}}=\frac{1}{4}$. As igualdades anteriores serão equivalentes às seguintes:

$$\frac{\text{área limitada pelo arco de espiral BFE e a reta BE}}{1}=\frac{\text{área limitada pelo arco de espiral NMEFB e a reta BN}}{8}=$$
$$\frac{\text{área limitada pelo arco de espiral Z}\theta\text{NMEFBe a reta BZ}}{27}=\frac{\text{área limitada pelo arco de espiral AZNEBe a reta BA}}{64}.$$

Ou seja, $\frac{\text{área limitada pelo arco de espiral BFE e a reta BE}}{\text{área limitada pelo arco de espiral NMEFB e a reta BN}}=\frac{1}{8}$.

Assim, tem-se as relações seguintes:

$$\frac{\text{área limitada pelo arco de espiral BFE e a reta BE}}{\text{área limitada pelo arco de espiral NMEFB e as retas BN e BE}} = \frac{1}{8-1} = \frac{1}{7};$$

$$\frac{\text{área limitada pelo arco de espiral BFE e a reta BE}}{\text{área limitada pelo arco de espiral Z}\theta\text{NMEFBe a reta BZ}} = \frac{1}{27};$$

$$\frac{\text{área limitada pelo arco de espiral BFE e a reta BE}}{\text{área limitada pelo arco de espiral AZNEBe as retas BZ e BN}} = \frac{1}{27-7-1} = \frac{1}{19};$$

$$\frac{\text{área limitada pelo arco de espiral BFE e a reta BE}}{\text{área limitada pelo arco de espiral AZNEBe a reta BA}} = \frac{1}{64};$$

$$\frac{\text{área limitada pelo arco de espiral BFE e a reta BE}}{\text{área limitada pelo arco de espiral AZNEBe as retas BA e BZ}} = \frac{1}{64-19-7-1} = \frac{1}{37}$$

Obtemos, desta forma, o que foi afirmado anteriormente, ou seja, a área compreendida entre o arco de espiral NME e as retas NB e BE é 7 $(8-1=7)$ da área compreendida entre a curva BFE e a reta BE;

A área compreendida entre o arco de espiral $\mathrm{Z\theta N}$ e as retas ZB e BN é 19 $(27-8=19)$ da área compreendida entre o arco de espiral BFE e a reta BE;

E, finalmente, a área compreendida entre o arco de espiral AGZ e as retas AB e BZ é 37 $(64-27=37)$ da área compreendida entre o arco de espiral BFE e a reta BE;

Apesar de Papo não referir a outras voltas da espiral estes dois corolários são semelhantes à Proposição[41] 27 do tratado *Das Espirais* onde Arquimedes relaciona a área dos vários anéis de espiral com a área do segundo anel.

Além da retificação da circunferência, e consequentemente, quadratura do círculo, a espiral de Arquimedes também resolve o problema da trisseção do ângulo, como Papo demonstra, no capítulo XLVI do quarto livro da *Coleção Matemática.*

Não encontramos nenhuma indicação de Papo ter abordado a espiral na resolução do problema da duplicação do cubo.

[41] **Proposição 27:** Numa espiral, a área do terceiro anel é o dobro da área do segundo anel; a área do quarto anel é o triplo da área do segundo anel; a área do quinto anel é o quádruplo da área do segundo anel, e assim sucessivamente. No entanto, a área do primeiro anel é um sexto da área do segundo anel.

2.1.3 CONCÓIDE DE NICOMEDES;

Papo associa o nome da concóide de uma curva a Nicomedes:

"(…) que descobriu as propriedades desta curva do 4º grau, para encontrar os dois meios proporcionais entre duas retas dadas a fim de resolver o problema da duplicação do cubo.

(…) Dando a entender que alguns geómetras, provavelmente o próprio Nicomedes, substituíram as cónicas por esta curva na resolução dos problemas sólidos, pela facilidade no seu traçado." ([Ver1], pp.XXIX-XXX).

Segundo o comentário de Eutócio de Ascalão (480 – 540) ao tratado da *Esfera e do cilindro* de Arquimedes (390 – 338 a.C) esta curva foi construída mecanicamente com o auxílio do instrumento de Eratóstenes de Cirene (276 - 194 a.C.) composto por dois triângulos móveis e um fixo, todos congruentes – o Mesolábio. ([Ver1], p.XVIII).

Papo apresenta na proposição 5 do Livro III o mesolabio com o triângulo fixo e os dois triângulos móveis numa ordem diferente da de Eutócio.

Proposição 5:

Seja dada uma placa rígida ABCD com três triângulos $\mathrm{AE\theta}$, MZK e NHF retângulos nos pontos E, Z e H, respetivamente. O triângulo $\mathrm{AE\theta}$ é fixo enquanto que os triângulos MZK e NHF se movem ao longo dos segmentos AB e DC, por meio de ranhuras.

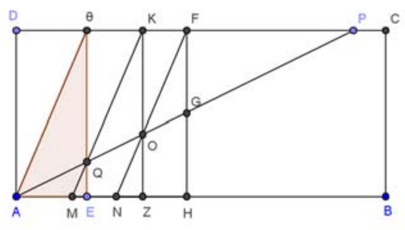


Figura 2.23 – Mesolábio

No Capítulo XXVI do Livro IV, Papo carateriza da seguinte forma a primeira concóide:

Seja AB uma reta dada e D um ponto móvel sobre AB. Tracemos a perpendicular CDZ à reta dada. Sobre esta perpendicular considere-se um ponto fixo E e o comprimento CD . Quando D se desloca sobre AB, o ponto C descreve uma curva FCM com a seguinte propriedade:

Qualquer reta traçada pelo ponto E interseta a curva num ponto G e na reta AB em H tal que $HG = CD$.

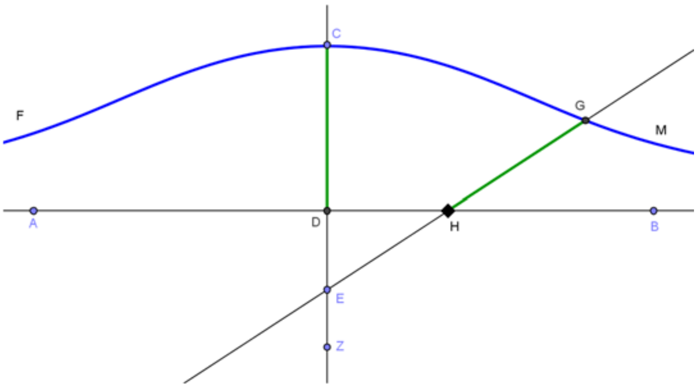


Figura 2.24 – Concóide

Quando o ponto D se aproxima do ponto H os segmentos de reta CD e HG coincidem.

Ao contrário da espiral de Arquimedes, a concóide é caraterizada pelo "*lugar geométrico* das posições de um ponto C duma reta que se move, passando sempre por um ponto fixo E – *pólo* – e cortando constantemente uma reta fixa AB – *base* [diretriz, ou assímtota da curva] –, de modo que o *intervalo* compreendido entre C e a base é *constante.*" ([V], p.281).

No entanto, o intervalo também pode ser marcado no sentido contrário, ou seja, a partir da base no sentido do pólo. Desta forma, a concoíde terá um segundo ramo que pode assumir diferentes formas consoante a distância do pólo à base seja maior, igual ou menor que o intervalo dado. As diversas formas da concóide também foram referidas por Papo:

"Com estas propriedades a curva designa-se por primeira concóide, já que outras, segunda, terceira e quarta, em que a distância constante é inferior, igual ou superior à distância do pólo à diretriz, foram utilizadas para outros teoremas." ([Ver1], p.XXX).

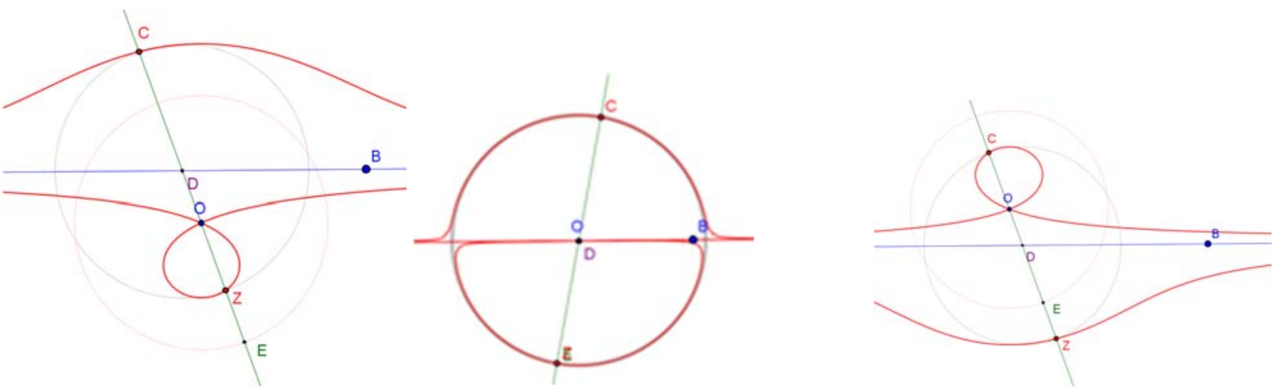


Figura 2.25 – Os vários ramos da concóide

A proposição 23 do Livro IV, provavelmente extraída de um tratado perdido de Nicomedes, refere-se à aplicação da Concóide na construção da neusis. Veremos, na secção 3.3, como esta construção permite resolver o problema da trisseção do ângulo.

Proposição 23:

Seja dado um ângulo compreendido entre HA e AB e um ponto C exterior ao ângulo. Então é possível traçar CH tal que o segmento KH compreendido entre AB e a concóide tenha o mesmo comprimento que um segmento dado.

Prova:

Com efeito, por C tracemos a perpendicular a AB que interseta a curva em D. Pela propriedade da primeira concóide EDH com pólo C e diretriz AB tem-se que $\theta D = \mathrm{K}H$, ou seja, o segmento de reta entre AB e a curva tem o mesmo comprimento que o segmento dado.

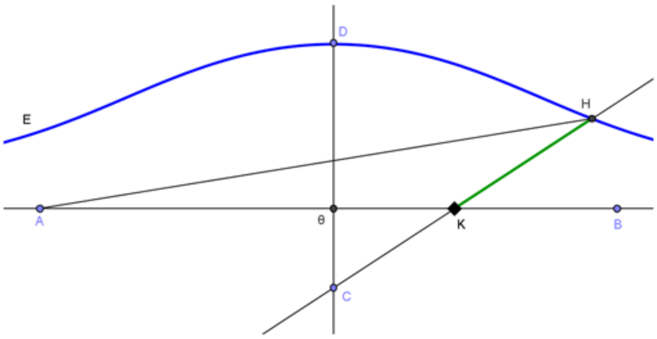


Figura 2.26 – Construção da neusis usando a Concóide

Esta solução foi publicada por Papo num comentário, atualmente perdido, da obra *Analemme* de Diodore de Alexandria.

As proposições 28 e 29 mostram, através da análise e da construção de neusis, como a concóide permitiu caraterizar outras curvas superiores, nomeadamente a quadratriz.

2.1.4 QUADRATRIZ DE HÍPIAS E DINÓSTRATO

Papo de Alexandria associa o nome da primeira curva notável da geometria grega a Dinóstrato (390 - 320 a.C) que juntamente com Nicomedes e outros geómetras a utilizaram para quadrar o círculo:

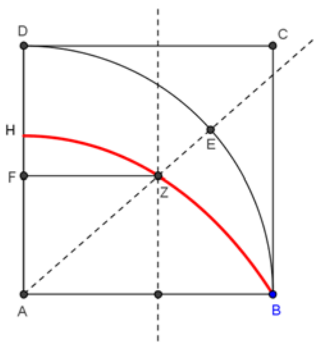
"Uma linha que adquire o nome a partir da sua propriedade foi utilizada por Dinóstrato e Nicomedes e por outros autores [geómetras] recentes para efetuar a quadratura do círculo. Eles denominaram-na quadratriz*, (…)*"([Ver1], pp.191-192).

Papo mostra como este problema depende apenas da determinação do ponto de interseção da curva com o raio de um quadrante do círculo onde a curva está descrita. Não atribui a descoberta da curva a Hípias de Elis (460 - 400 a.C), ao contrário de Proclo Lício no seu *Comentário ao Primeiro Livro dos Elementos de Euclides* (Proposição III, 9) que refere:

"Outros fizeram o mesmo por meio da quadratriz de Hípias e de Nicomedes, os quais também usaram linhas compostas, nomeadamente quadratrizes.*"*([Pr], p.212).

A construção aproximada da quadratriz é apresenta no Capítulo XXX do Livro IV, da seguinte forma:

Considere-se um quadrado $ABCD$ e, no seu interior, um arco BED, quadrante de uma circunferência de centro em A. Considere-se o segmento de reta AB movendo-se, de uma forma uniforme, de modo que o ponto A fique fixo e o ponto B percorra o arco BED e, simultaneamente, o segmento de reta BC movendo-se paralelamente à reta AD, de forma uniforme, de modo que o ponto B se desloca sobre a reta AB.



Figur 2.27 – Construção da quadratriz

Os segmentos de reta AB e BC intersetar-se-ão até se sobreporem ao segmento de reta AD. Consequentemente, obter-se-á com tais movimentos um ponto Z, que descreverá uma linha côncava - a curva BZH - compreendida entre os segmentos de reta AB e AD e o arco BED.

A sua principal propriedade é que, se considerarmos um qualquer segmento de reta AZE, tem-se:

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{ZF}} = \frac{\text{arco BED}}{\text{arco ED}}$$ [42]

Chama-se Quadratriz de Dinóstrato à curva gerada pelo ponto Z, conveniente para encontrar um quadrado equivalente a um círculo dado e para trissetar um ângulo, reduzindo estas construções às correspondentes construções referidas a segmentos de reta, como veremos.

Antes de caracterizar a quadratriz, Papo reproduz as críticas de Esporo de Nicea (finais do século III a.C) à construção desta curva e à sua utilização na quadratura do círculo:

(…) a impossibilidade de determinar matematicamente o ponto de intersecção da curva com o eixo das abcissas sem conhecer previamente a razão entre o perímetro da circunferência e o seu raio, e também pela dificuldade em determinar mecanicamente este ponto na ausência de um procedimento que permita traçar a curva num movimento contínuo."([Ver], I, p. XXXI).

Refere ainda([Ver1], p. 1933):

"*Esporos não aprova esta linha porque assume-se apenas a sua utilidade.*

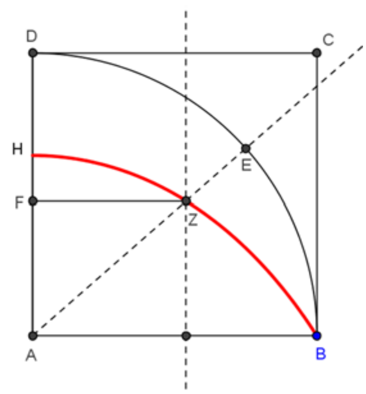


Figura 2.28 – Crítica à construção da quadratriz

Como é possível, com dois pontos a partir de B, conseguir que ele se mova ao longo de uma reta até A e o outro ao longo de um arco de circunferência até D, em tempos iguais, a menos que se saiba a priori a razão entre a linha [segmento de] reta AB e o arco de circunferência BED? De facto, esta razão tem de ser também a das velocidades dos movimentos. Porque se não empregarmos velocidades ajustadas de um modo claro [a esta razão], como poderemos obrigar os movimentos a acabar no mesmo instante, a menos que isso ocorra fruto do acaso? Não é tal coisa [a construção], deste modo, mostrada ser um absurdo?"

Estas críticas, fundamentam-se neste procedimento mecânico da construção da curva que não permite traçá-la de modo contínuo, e portanto determinar o ponto H.

[42] Relações entre medidas lineares e angulares num círculo dado estão mencionadas nos últimos enunciados de *Os Data*, de Euclides, cuja determinação não é exata, para Descartes.

Para Heath, o ponto H de interseção entre a quadratriz e o eixo só poderia ser encontrado pelo método de exaustão[43], caracterizado na proposição[44] *Elementos* X,1 de Euclides ou usando o conceito atual de limite.

A proposição seguinte prova, por dupla redução ao absurdo, o teorema de Dinóstrato que considera o lado do quadrado o meio proporcional entre o arco BED e o segmento de reta AH, isto é, $\frac{\text{arco BED}}{\text{AB}} = \frac{\text{AB}}{\text{AH}}$ (I).

Proposição 26:

Considere-se um quadrado $ABCD$, o arco BED descrito de centro A e a quadratriz obtida da forma anteriormente exposta.

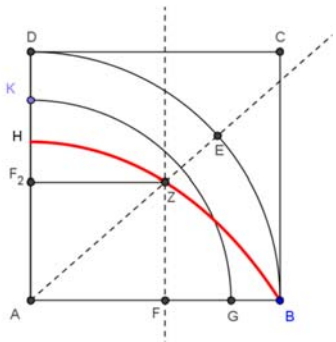


Figura 2.29 – Propriedade fundamental da quadratriz

Então, a razão entre o arco BED e o segmento AB é a mesma que entre AB e um segmento de reta AH, isto é, $\frac{\text{arco BED}}{\text{AB}} = \frac{\text{AB}}{\text{AH}}$.

Suponhamos que a igualdade $\frac{\text{arco BED}}{\text{AB}} = \frac{\text{AB}}{\text{AH}}$ não se verifica, isto é, existe um segmento maior do que AH, ou menor do que AH.

Seja AK o referido segmento, vamos supor que se verifica uma das duas desigualdades: $AK > AH$ ou $AK < AH$.

Suponhamos primeiro que se verifica $AK > AH$.

Traça-se o arco GZK de centro A, e o segmento ZF_2 perpendicular a AD passando pelo ponto Z.

[43] "(…) não se trata de um método para se realizar descobertas, mas de um método para se fazer demonstrações, isto é, é necessário ter-se um conhecimento prévio do resultado que se quer demonstrar para que seja possível realizar uma demonstração rigorosa." (BALIEIRO FILHO, 2004, p. 41.)

[44] ***Elementos* X,1:** Se, à maior de duas grandezas desiguais, mas da mesma espécie, se tirar metade ou mais da sua metade, e, ao que ficar ainda, mais que a sua metade, repetindo esta operação um número suficiente de vezes, chega-se a obter um resto menor que a mais pequena das duas grandezas propostas, por menor que esta seja.

Assumindo-se que[45] arcos correspondentes a ângulos iguais estão na mesma proporção que os raios dos círculos correspondentes então tem-se $\frac{\text{arco BED}}{\text{arco GZK}} = \frac{\text{AB}}{\text{AK}}$, pelo que $\frac{\text{arco BED}}{\text{arco GZK}} = \frac{\text{arco BED}}{\text{AB}}$.

Assim, o arco GZK é equivalente a AB, e pela propriedade da curva, temos que $\frac{\text{AB}}{\text{ZF}_2} = \frac{\text{arco BED}}{\text{arco } ED}$. Como $\frac{\text{arco GZK}}{\text{arco ZK}} = \frac{\text{arco BED}}{\text{arco ED}}$ então $\frac{\text{arco GZK}}{\text{arco ZK}} = \frac{AB}{\text{arco ZK}} = \frac{\text{AB}}{\text{ZF}_2}$

Então, arco ZK é igual a ZF_2 o que é absurdo.

Papo, no capítulo XXXII, reforça ainda que também não se verifica a desigualdade:

$$AK < AH$$

Traça-se o arco GMK de centro A, e o segmento ZK perpendicular a AD passando pelo ponto Z.

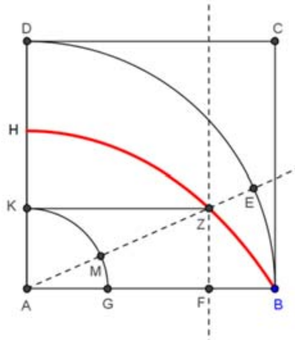


Figura 2.30 – Propriedade fundamental da quadratriz

Uma vez que, $\frac{AB}{\text{AK}} = \frac{\text{arco BED}}{AB}$ e $\frac{AB}{\text{AK}} = \frac{\text{arco BED}}{\text{arco GMK}}$, então arco GMK $= AB$.

Pela propriedade da curva, $\frac{\text{AB}}{\text{ZK}} = \frac{\text{arco BED}}{\text{arcoED}}$, então $\frac{\text{AB}}{\text{ZK}} = \frac{\text{arco GMK}}{\text{arcoMK}}$. Desta forma, arco MK = ZK, o que é absurdo.

Logo, o segmento de reta AK não será mais pequeno nem maior que AH, logo é igual a AH.

O teorema de Dinóstrato fica assim provado, isto é, $\frac{\text{arco BED}}{\text{AB}} = \frac{\text{AB}}{\text{AH}}$.

Com este resultado, consegue-se determinar um segmento de reta de comprimento igual ao arco BED pelo que o seu quádruplo será igual à circunferência do círculo inteiro. O problema da retificação da circunferência fica assim resolvido.

Papo apresenta-nos, nas Proposições 28 e 29 do Livro IV duas construções não mecânicas da quadratriz, uma usando a esfera e outra a espiral de Arquimedes.

[45]Em *Coleção Matemática* V, 2 e VIII, 22, Papo apresenta duas demonstrações deste resultado, anteriormente demonstrado por Euclides em **Elementos XII, 2** (Ver nota 36 página 29).

Proposição 28:

Consideremos um quadrante $AB\Gamma$ de um círculo de centro B e seja $B\Delta$ um raio do círculo. Seja EZ um reta perpendicular a $B\Gamma$ tal que E está sobre $B\Delta$ e $\frac{EZ}{\text{arco } \Delta\Gamma}$ verifica uma razão previamente fixada. Então o ponto E está sobre a curva caraterizada por essa constante.

No caso particular da constante ser $\frac{AB}{\text{arco } A\Delta\Gamma}$, a curva assim caraterizada é a quadratriz de Dinóstrato.

Prova:

Consideremos a superfície cilíndrica de revolução gerada pela rotação de um segmento perpendicular ao quadrante $AB\Gamma$ em Γ em torno do eixo perpendicular a esse quadrante que contém B, de tal modo que Γ descreve o arco $A\Delta\Gamma$ nessa rotação.

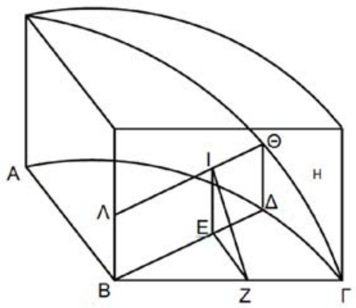


Figura 2.31 – Construção da quadratriz usando a esfera

Seja $\Gamma H\Theta$ a hélice descrita na superfície cilíndrica, com origem em Γ e e definida por a ordenada $\Theta\Delta$ de um seu ponto qualquer Θ ser proporcional ao arco $\Delta\Gamma$ numa razão dada. Seja $\Theta\Delta$ uma geratriz da superfície cilíndrica. Tracemos os segmentos EI e $B\Lambda$ perpendiculares ao plano do círculo e $\Theta\Lambda$ paralelo a $B\Delta$. A constante dada pela razão $\frac{\Theta\Delta}{\text{arco } \Delta\Gamma}$ que carateriza a hélice é conhecida e como, por construção, $EI = \Theta\Delta$ então também é conhecida a razão $\frac{EI}{\text{arco } \Delta\Gamma}$. Assim, a razão $\frac{EZ}{EI}$ é conhecida por ser, por hipótese, conhecida a razão $\frac{EZ}{\text{arco } \Delta\Gamma}$. Pela definição 13 dos *Dados* de Euclides, EZ e EI são justapostos[46] e o segmento junção ZI fica definido[47]. Como EI é perpendicular ao quadrante $AB\Gamma$, o plano IEZ é também perpendicular ao quadrante, ZI está num plano secante do cilindro, e, portanto o ponto I também está. Como o ponto E é a projeção ortogonal do ponto I sobre o plano do quadrante, então E está sobre a curva que é a projeção ortogonal da curva a que pertence o ponto I.Ora *I* está também numa

[46]***Dados,* Definição 15:** Diz-se que uma reta está justaposta quando é traçada por um ponto paralelamente a uma reta dada. Neste caso, EZ é paralelo a AB e EI é paralelo a $\Theta\Delta$.

[47] Resulta das seguintes proposições de Dados de Euclides:

Proposição 41: Se é dado um dos ângulos de um triângulo e é conhecida a razão entre os lados que lhe são adjacentes, então o triângulo é conhecido.

Proposição 29: Dados uma reta e um ponto nessa reta, a reta que contém esse ponto e faz com a primeira reta um ângulo conhecido é dada.

superfície helicoidal, uma vez que o segmento $\Theta\Lambda$ foi traçado entre a hélice $\Gamma\mathrm{H}\Theta$ e a reta $\mathrm{B}\Lambda$, de forma continuamente paralela ao plano abaixo. Desta forma, o ponto *I* está na curva definida pela interseção da superfície helicoidal gerada por $\Theta\Lambda$ com um plano que contém $\Theta\Lambda$,de modo que E está também sobre uma curva.

A construção é descrita no caso geral mas, se se verificar a igualdade $\frac{\mathrm{EZ}}{\text{arco } \Delta\Gamma} = \frac{\mathrm{AB}}{\text{arco } \mathrm{A}\Delta\Gamma}$, a curva é a quadratriz.

Proposição 29:

Podemos descrever geometricamente a quadratriz de Dinóstrato através da espiral de Arquimedes.

Prova:

Consideremos o quadrante $\mathrm{AB}\Gamma$ do círculo de centro B e raio $\mathrm{B}\Delta$ e o segmento EZ, como na proposição anterior, mas tal que $\frac{\mathrm{EZ}}{\text{arco } \Delta\Gamma} = \frac{\mathrm{AB}}{\text{arco } \mathrm{A}\Delta\Gamma}$.

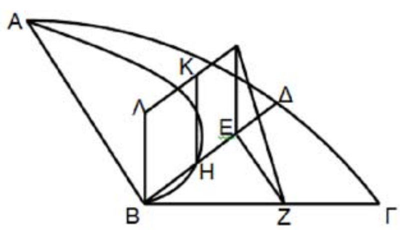


Figura 2.32 – Construção da quadratriz usando a espiral

Consideremos ainda que o segmento AB roda em torno de B no plano $\mathrm{AB}\Gamma$ e com A a descrever o arco $\mathrm{A}\Delta\mathrm{B}$.Consideremos também que um ponto no segmento $A\mathrm{B}$, partindo de A, atinge B quando $A\mathrm{B}$ coincide com $\mathrm{B}\Gamma$, produzindo esse ponto a espiral BHA. Assim, $\frac{\text{arco } \mathrm{A}\Delta\Gamma}{\text{arco } \Delta\Gamma} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BH}}$ e, portanto, $\frac{\mathrm{BH}}{\text{arco } \Delta\Gamma} = \frac{\mathrm{AB}}{\text{arco } \mathrm{A}\Delta\Gamma}$. Mas o segmento EZ relaciona-se também com o arco $\Delta\Gamma$, pois, por hipótese, $\frac{\mathrm{EZ}}{\text{arco } \Delta\Gamma} = \frac{\mathrm{AB}}{\text{arco } \mathrm{A}\Delta\Gamma}$ e, portanto, $\frac{\mathrm{BH}}{\text{arco } \Delta\Gamma} = \frac{\mathrm{EZ}}{\text{arco } \Delta\Gamma}$ pelo que, $\mathrm{BH} = \mathrm{EZ}$.

Tracemos, perpendicularmente ao plano ABC o segmento KH igual ao segmento BH. O ponto K pertence à superfície cilindroide obtida quando um segmento perpendicular ao plano do quadrante roda em torno de B de tal forma que o pé dessa perpendicular percorre a espiral nessa rotação. Mas o ponto K pertence também à superfície cónica com vértice B, eixo $\Delta\mathrm{B}$ e inclinada 45º. De facto, por construção $\mathrm{KH} = \mathrm{BH}$, sendo o ângulo FBH reto, pelo que, $FBH\mathrm{K}$ é um quadrado e a diagonal $B\mathrm{K}$ é a bissetriz do ângulo e a geratriz do cone de revolução. Assim, K pertence à curva obtida pela interseção da superfície cónica com a superfície cilindróide.

Por K tracemos a reta $\Lambda\mathrm{KI}$ paralela à reta EB e as retas $\mathrm{B}\Lambda$ e EI perpendiculares ao plano. Segue que a reta $\Lambda\mathrm{KI}$ está sobre a superfície helicoidal que gera quando se desloca paralelamente ao plano do quadrante, com K percorrendo a hélice cónica e Λ o segmento $B\Lambda$. Assim, I é um ponto desta superfície. Mas como $\mathrm{ZE} = \mathrm{EI}$ e estes segmentos são perpendiculares, o triângulo ZEI é um triângulo retângulo isósceles e ZI pertence ao plano que interseta o plano do quadrante na reta $\mathrm{B\Gamma}$, incidindo com um ângulo de 45º. Consequentemente, o ponto I pertence à interseção deste plano com a superfície. Assim, o ponto I está assim sobre uma linha e, por consequência, o ponto E que é a projeção ortogonal do ponto I também.

Como o ponto E está situado como refere a proposição anterior, o ponto E está situado sobre uma quadratriz constituída pela projeção ortogonal do ponto I da curva.

Esta proposição também demonstra uma outra propriedade da superfície helicoidal, ou seja, que a sua interseção com um cone de revolução com o mesmo eixo é uma linha de dupla curvatura cuja projeção sobre o plano perpendicular ao eixo é uma espiral de Arquimedes e, portanto, ela resolve o problema de construir geometricamente a espiral da mesma forma que resolve o problema da construção da quadratriz.

CAPÍTULO III

ALGUNS PROBLEMAS GEOMÉTRICOS DA COLEÇÃO MATEMÁTICA DE PAPO DE ALEXANDRIA

Papo, na primeira parte do Livro III, distingue três tipos de problemas geométricos, classificando-os consoante o tipo de curvas necessária à sua resolução:

Chamamos problemas planos aos que podem ser resolvidos com retas e circunferências (são problemas que têm a sua origem no plano). Quanto aos problemas cuja solução é obtida com uma ou duas secções do cone (secções cónicas de sólidos geométricos), são chamados problemas sólidos. E os problemas lineares ou grâmicos são problemas cuja construção tem origem mais variada e complexa, com a utilização da espiral, quadratriz, concóide e cissóide, que possuem inúmeras e surpreendentes propriedades. Estas curvas derivam de superfícies pouco regulares e têm movimentos mais complicados. ([Ver1], p.38).

3.1 PROBLEMAS PLANOS

Nesta secção, trataremos de resultados relativos à construção de triângulos, que Papo apresenta no Livro III, nas proposições 28 a 42 da *Coleção,* de resultados relativos às propriedades geométricas da circunferência, que Papo apresenta no Livro IV nas proposições[48] 2 a 10, bem como de resultados relativos à teoria dos arbelos, que Papo apresenta nas proposições 13 a 18 do Livro IV.

[48] A proposição 1 surge de forma isolada, como uma generalização do Teorema de Pitágoras.

3.1.1 A GEOMETRIA DO TRIÂNGULO – ALGUNS PARADOXOS

Papo divide o Livro III da *Coleção* em cinco partes, sendo a terceira dedicada a problemas relativos à construção de triângulos, com régua e compasso, e às condições necessárias à sua construção. Papo refere que estes problemas correspondem a alguns dos paradoxos geométricos apresentados por Ericino[49], respeitantes à impossibilidade da construção de triângulos.

Retomando, fundamentalmente, a proposição[50] *Elementos* I, 21, nas proposições 28 e 34 Papo constrói, sobre a base de um triângulo, dois segmentos de reta no interior do mesmo e estabelece relações entre a soma das medidas dos seus comprimentos com as medidas dos comprimentos dos outros dois lados do triângulo. Papo mostra que o resultado das proposições 29 a 31, apenas é válido se os segmentos interiores ao triângulo forem construídos sobre os extremos da sua base, exceto no caso do triângulo equilátero.

A proposição seguinte mostra como construir, num triângulo retângulo escaleno, dois segmentos no interior do triângulo, de modo a que a soma dos mesmos seja superior à soma dos lados exteriores.

Proposição 28:

Consideremos o triângulo ABC, retângulo em B. Seja D um ponto do lado BC. Tracemos AD e sobre este segmento consideremos o ponto E tal que $DE = AB$. Seja Z o ponto médio de AE.

Então $CZ + ZD > AB + AC$.

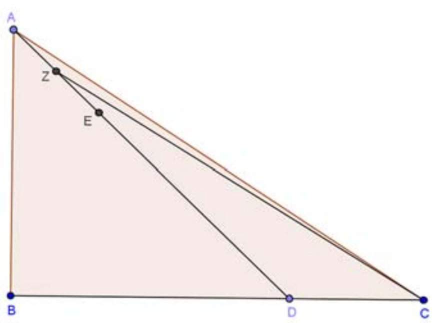


Figura 3.1

[49] Ericino foi um matemático grego do qual se conhece apenas esta referência.

[50] ***Elementos* I, 21:** Se sobre os extremos de um lado de um triângulo estiverem postas duas retas dentro do mesmo triângulo, estas serão menores que os outros dois lados do triângulo, mas compreenderão um ângulo maior do que o ângulo que fica oposto ao lado, sobre cujos extremos estão postos as ditas retas.

Prova:

Da desigualdade triangular tem-se que, $CZ + ZE = CZ + ZA > AC$, e adicionando a ambos os membros da desigualdade $ED = AB$ obtém-se $CZ + ZE + ED > AC + AB$ ou seja $CZ + ZD > AB + AC$.

A proposição seguinte mostra como construir, num triângulo escaleno ou num triângulo isósceles cuja base seja maior que os lados iguais, dois segmentos no interior do triângulo, de modo a que a soma dos mesmos seja igual à soma dos outros dois lados.

Proposição 29:

Em qualquer triângulo, exceto no triângulo equilátero ou isósceles se a base for menor que os lados iguais, é possível determinar dois pontos, θ e K, na base do triângulo e dois segmentos, $H\theta$ e HK, no seu interior, cuja soma é igual à soma dos dois lados do triângulo, isto é, $H\theta + HK = AB + BC$.

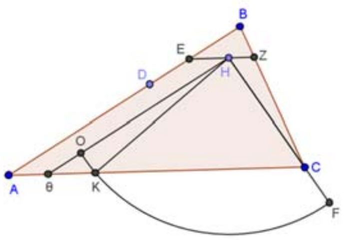


Figura 3.2

Prova:

Seja ABC um triângulo não isósceles, tal que, $AB > BC$. Seja D o ponto sobre *AB* tal que *AD* é metade de $AB + BC$. Considere-se um ponto qualquer E entre D e B. Por E traça-se EZ a paralela a AC. Considere-se um ponto qualquer H de EZ. Por H traça-se $H\theta$ a paralela a EA. Tem-se, da desigualdade triangular, $EB + BZ > EZ$ e $HZ + ZC > HC$. Adicionando os membros destas desigualdades obtém-se $EB + BZ + HZ + ZC > EZ + HC$ ou seja, $EB + BC + HZ > EZ + HC$ e subtraindo HZ a ambos os membros, desta desigualdade, obtém-se $EB + BC + HZ > EZ + HC$ Seja F um ponto construído no prolongamento de BC de modo que $HF = EB + BC$. Descrevemos a circunferência de centro H e passando por F que interseta $H\theta$ no ponto O e $C\theta$ em K.

Tem-se que, $AE = H\theta > HF = EB + BC$ e, adicionando a ambos os membros da igualdade $HF = HK$, obtém-se $AE + HF = H\theta + HK = AE + EB + BC$, ou seja, $H\theta + HK = AB + BC$.

Consideremos agora um triângulo isósceles ABC, com $AB = BC$ e a base AC maior que qualquer um dos outros lados, e mostremos que é possível determinar dois pontos na base do triângulo e dois segmentos, no seu interior, cuja soma é igual à soma dos dois lados do triângulo.

Descrevamos o arco BED da circunferência de centro A passando por B. Prolonguemos AE até intersetar o lado BC no ponto Z. Marquemos um ponto qualquer H do segmento EZ. Tracemos $H\theta$ paralela a AC e considere-se um ponto qualquer K do segmento $H\theta$. Seja N o ponto construído sobre BC que verifica a igualdade $BN = EH$. Tracemos KF paralelo a AZ e KC que prolongamos até ao ponto M de modo que $KM = NC$. Tem-se, por construção, que $KF = AH = AB + BN$ e $NC < KF$. Pela desigualdade triangular, $\theta Z + ZH > H\theta$ e $C\theta + \theta K > KC$. Adicionando ambos os membros destas desigualdades, obtemos $CZ + ZH + \theta K > KC + H\theta$. Subtraindo a ambos os membros da desigualdade θK obtemos $CZ + ZH > KC + KH$ e adicionando a ambos os membros da desigualdade AH obtemos $CZ + ZH + AH > AH + KC + KH$, ou seja, $AZ + CZ > AH + KC + KH$. Ora de *Elementos* I, 21 temos: $AB + BC > AZ + ZC$ pelo que $AB + BC > AH + KC + KH$. Por construção, temos $AH = KF = AB + BN$, e subtraindo a ambos os membros da desigualdade anterior AH, obtemos $AB + BC - (AB + BN) > AH + KC + KH - AH$, ou seja, $NC > KC + KH$ e, portanto, $NC > KC$. Sendo $KM = NC$ e adicionando a ambos os membros desta igualdade KF, $KM + KF = NC + KF$. Mas, por construção, $KF = AB + BN$ e $KG = KM$. Logo, $KG + KF = AB + BN + NC$, ou seja, $KF + KG = AB + BC$.

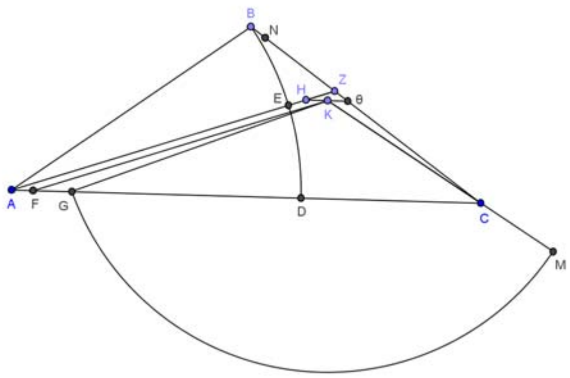


Figura 3.3

A proposição 30 mostra que a construção anterior é impossível num triângulo equilátero ou num triângulo isósceles com a base menor que os lados iguais.

Proposição 30:

Se o triângulo é equilátero ou isósceles com base menor que os outros lados então é impossível encontrar no seu interior dois segmentos cuja soma seja igual aos dois lados do triângulo. Neste caso, a soma dos dois segmentos interiores é inferior à soma dos dois lados do triângulo.

Prova:

Seja ABC um triângulo equilátero ou isósceles cuja base AC é menor que os lados AB e BC, queremos provar que $DE + EH < AB + BC$.

Prolonguemos o segmento DE até intersetar o lado BC no ponto Z e consideremos o segmento AZ. Tem-se que $\angle BCA = \angle BAC > ZAC$. Como $\angle ZDA > ZAD$ pois $\angle ZDA > \angle BCA$, $AZ > DZ$.

Por outro lado, $\angle AZB > \angle ACB$ e, por hipótese, $\angle BCA \geq \angle ABC$, logo$\angle AZB > \angle ABC = \angle ABZ$ e portanto $AB > AZ$. Como $AZ > DZ$ então $AB > DZ > DE$.

De igual modo, se demonstra que $BC > EH$ pelo que $EH + DE < AB + BC$.

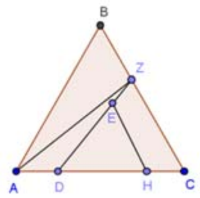


Figura 3.4 – Triângulo equilátero

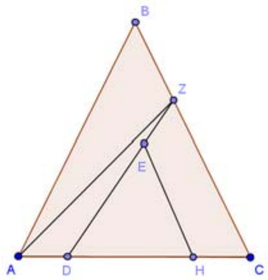


Figura 3.5 – Triângulo isósceles

Por fim, a proposição seguinte estabelece que, se for possível construir dois segmentos no interior do triângulo cuja soma seja igual à soma de dois lados então também é possível construir dois segmentos no interior do triângulo cuja soma seja superior à dos dois lados do triângulo.

Proposição 31:

Reciprocamente, se num triângulo construirmos dois segmentos no seu interior cuja soma seja igual à soma de dois lados exteriores então podemos também encontrar outros dois segmentos no interior do triângulo cuja soma seja superior à soma de dois lados exteriores.

Prova:

Considerem-se no triângulo ABC os segmentos DE e EZ tal que $DE + EZ = AB + BC$ e prolongue-se DE, um dos segmentos interiores, até intersetar um lado exterior do triângulo num ponto H. Considere-se, em seguida, um ponto qualquer K entre E e H e trace-se KZ.

Então, $DK + KZ > DE + EZ = AB + BC$.

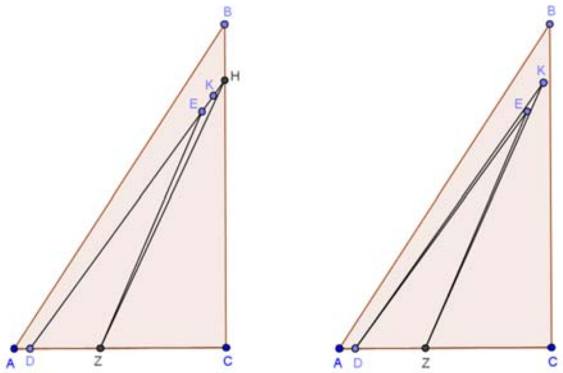


Figura 3.6

É evidente que, o ponto K está no interior do triângulo ABC de forma que os segmentos DE e EZ estão, respetivamente, entre os pontos Ke D e os pontos K e Z.

Continuando a considerar resultados aparentemente paradoxais relativos a triângulos, Papo mostra nas duas proposições seguintes que cada um dos segmentos no interior do triângulo pode ser igual ou superior a um dos lados exteriores desse triângulo.

Proposição 32:

É possível construir dois segmentos no interior de um triângulo de tal modo que não só a sua soma seja igual ou superior à soma dos lados exteriores, como também cada um dos segmentos interiores seja igual ou superior a cada um dos lados exteriores.

Prova:

Consideremos o triângulo ABC com AB superior ou igual a BC e AC superior aos outros dois lados. Descrevamos a circunferência de centro em A passando por B. Consideremos um ponto qualquer D entre a circunferência e o lado BC e os segmentos AD e DC. Por construção, AD é superior a AB e, por hipótese, superior a BC. De *Elementos* I, 21 resulta que $DC < BC$.

Prolonguemos DC até ao ponto K de modo que $DK = BC = D\theta$ onde θ é o ponto de interseção da circunferência, de centro em D passando por K, com o segmento AD. Seja *H* o ponto em que esta circunferência interseta o lado AC. Entre os pontos A e H consideremos o ponto F. Do que foi exposto, anteriormente, torna-se evidente que não só $AD + DF > AB + BC$ como $AD > AB$ e $DF > BC$.

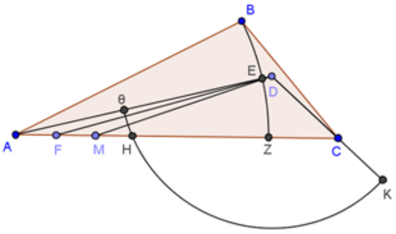


Figura 3.7

Proposição 33:

Se os dois segmentos traçados no interior do triângulo ABC sobre a sua base AC forem, respetivamente, iguais aos lados desse triângulo, então a base do triângulo é maior que cada um dos outros dois lados, isto é, $AB > BC$ e $AC > AB$.

Prova:

Descrevamos a circunferência BEZ com centro em *A*.

Da mesma forma que na proposição anterior, consideremos o ponto D, os segmentos DA e DC e $DK = BC$. Sejam θ e H os pontos em que a circunferência interseta, respetivamente, os segmentos AD e AZ. Consideremos o ponto F em AD tal que $DF = AB$ e a circunferência de centro D passando por F. Seja M o ponto no qual esta circunferência interseta o segmento AH. Portanto, $DM = AB > DK = BC$, logo $AB > BC$. Por outro lado, $DH = BC = D\theta$ e como $AD = DF + AF$, tem-se que $AB < AB + AF = AD$ logo $AB < AD$, ou seja, $AB < AC$.

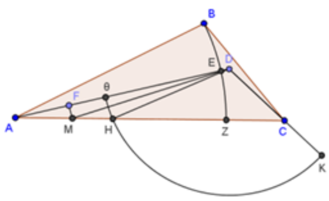


Figura 3.8

Na proposição seguinte, Papo mostra que os segmentos interiores podem ser determinados de modo que a sua soma esteja numa dada razão com a soma dos segmentos exteriores.

Proposição 34:

Os segmentos no interior de um triângulo podem ser construídos de forma que a sua soma e a soma de dois dos seus lados estejam numa razão previamente definida.

Prova:

Com efeito, considere-se a construção $EZ + ZK = AB + BC$ obtida na proposição 29 onde G é um ponto em AB tal que $AG = \frac{1}{2}(AB + BC)$. Consideremos um ponto D entre H e B tal que $\frac{AB}{AD}$ seja a razão dada. Tracemos o segmento DN paralelo a AC. Seja M um ponto qualquer de DN de modo que MO seja paralelo a AB e MF paralelo a BC.

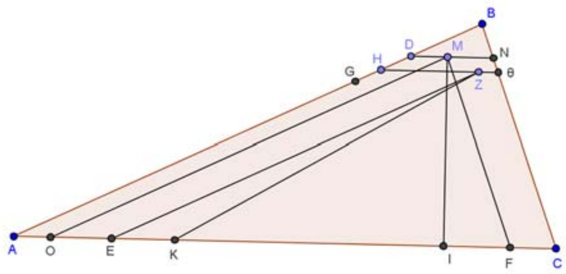


Figura 3.9

Então, $\frac{AB+BC}{OM+MF} = \frac{AB}{AD}$.

De facto, da semelhança dos triângulos ABC e DBN tem-se:

$\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{NC}$, ou seja, $\frac{AB}{AD} = \frac{AB+BC}{AD+NC}$. Mas, por construção, $EZ + ZK = AB + BC$ e os segmentos OM e MF são, respetivamente, paralelos a AB e BC e, portanto, $OM + MF = AD + NC$, ou seja, $\frac{AB}{AD} = \frac{EZ+ZK}{OM+MF}$. Consequentemente, a soma dos segmentos OM e MF no interior do triângulo ABC está na razão dada com a soma dos lados AB e BC do triângulo ABC, ou seja, com $\frac{AB}{AD} = \frac{AB+BC}{OM+MF}$.

Papo observa que, por construção, $AB + BC = 2AG$ pelo que $AB < 2AG$. Mas $AD > AG$, logo $AB < 2AD$ e $\frac{AB}{AD} < \frac{2}{1}$. Consequentemente, a razão dada deverá ser mais pequena que o seu dobro.

Papo observa ainda que, por construção a soma $AB + BC = 2AG$ é constante, pelo que, se AB aumenta BC diminui e AB aproxima-se do dobro de AG, ou seja, $AB = 2AG$ e $EZ + ZK$ é aproximadamente igual a $2(OM + MF)$.

Caso contrário, se $AB + BC$ é constante e se a base AC aumenta ou se o ângulo com vértice em B for cada vez mais obtuso, então $EZ + ZK$ aumenta e o ponto M estará mais abaixo sendo $OM + MF$ menor, ou seja, $EZ + ZK > AB + BC$. Mas, por construção, $EZ + ZK = AB + BC$ logo $EZ + ZK$ aproxima-se de $2(OM + MF)$ por valores inferiores.

Papo generaliza, os resultados expostos anteriormente para um polígono qualquer, com um número grande de lados. A proposição seguinte corresponde à aplicação deste resultado ao caso de um quadrilátero, afirmando que a soma de dois ou mais segmentos interiores pode ser superior à soma de três lados exteriores do polígono.

Proposição 35:

Num quadrilátero é possível construir dois segmentos no seu interior de modo que a sua soma seja superior à soma de três lados do quadrilátero.

Prova:

Seja $AF\theta C$ um quadrilátero e consideremos o triângulo ABC, onde B é a interseção das semirretas AF e $C\theta$. Construímos no triângulo ABC dois segmentos interiores a partir do ponto E, tais que $DE + EZ > AB + BC$, seguindo a construção da proposição 32.

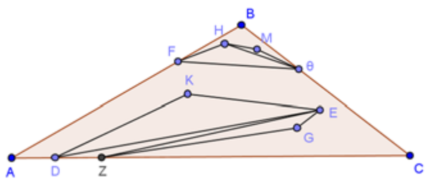


Figura 3.10

Observemos que $AB + BC = AF + FB + B\theta + C\theta$. Como, pela desigualdade triangular, $FB + B\theta > F\theta$, obtemos $DE + EZ > AF + F\theta + C\theta$ (I).

Papo observa que, é possível construir três segmentos interiores ao quadrilátero cuja soma é superior aos três lados.

De facto, se consideramos agora a linha quebrada DKE sobre DE tem-se $DK + KE > DE$ e, adicionando EZ a ambos os membros desta desigualdade obtém-se $DK + KE + EZ > DE + EZ$, ou seja, $DK + KE + EZ > AB + BC$, e da relação (I), $DK + KE + EZ > AF + F\theta + C\theta$.

Iterando este processo, podemos obter qualquer número de segmentos interiores ao quadrilátero cuja soma seja superior à dos três lados.

Para o caso de um pentágono, é possível construir dois segmentos no seu interior de modo que a sua soma seja superior à soma de quatro lados do pentágono.

De facto, se considerarmos a linha quebrada $FH\theta$ sobre $F\theta$, de *Elementos* I, 21 tem-se $FB > FH$ e, adicionando a ambos os membros desta desigualdade $H\theta + AF + \theta C$ obtém-se $FB + H\theta + AF + \theta C > FH + H\theta + AF + \theta C$, ou seja, $AB + BC > FH + H\theta + AF + \theta C$ e, portanto $DE + EZ > AF + FH + H\theta + \theta C$.

Iterando este processo podemos estender este resultado a um polígono com qualquer número de lados.

As proposições 36 e 37 mostram a possibilidade da soma de segmentos interiores ser igual à soma de um qualquer número de lados do polígono.

Proposição 36:

É possível construir num polígono, independentemente do número de lados, segmentos no seu interior de modo que a soma desses segmentos seja igual à dos lados desse polígono.

Prova:

Se construirmos, como na demonstração anterior, uma linha quebrada $H\theta KGM$ no polígono $ABCDEZ$, tal que, $H\theta + \theta K + KG + GM > AB + BC + CD + DE + EZ$, para se obter um polígono e os segmentos interiores onde se verifique a igualdade, basta considerar, uma linha quebrada $BNFE > BCDE$ que exceda $BCDE$ o mesmo comprimento que a linha quebrada $H\theta KGM$ excede a soma dos lados do polígono $ABCDEZ$, isto é, $BN + NF + FE - (BC + CD + DE) = H\theta + \theta K + KG + GM - (AB + BC + CD + DE + EZ)$. Então, tem-se que $H\theta + \theta K + KG + GM = AB + BN + NF + FE + EZ$.

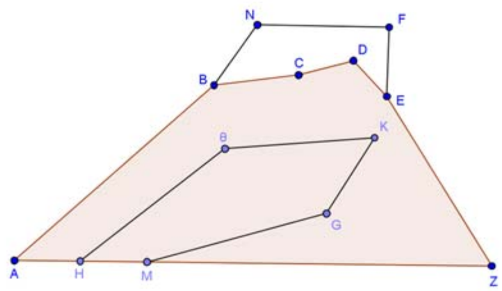


Figura 3.11

A construção da linha quebrada $BNFE$ igual a um segmento dado será objeto da proposição 37.

Proposição 37:

Construir uma linha quebrada $AZH\theta B$, entre dois pontos dados A e B, igual a um segmento dado AC, dividido num número dado de partes.

Prova:

Com efeito, sejam A e B dois pontos dados e AC um segmento cuja grandeza é conhecida, tal que $AC > AB$. Dividamos o segmento BC em BD, DE e EC, sendo o número de partes inferior em uma unidade ao número dado.

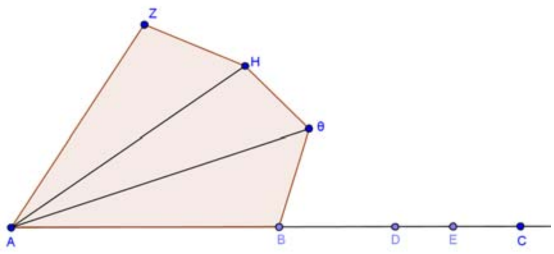


Figura 3.12

Consideremos um triângulo $A\theta B$ de base AB tal que $A\theta + \theta B = AB + BD$.

Se construirmos duas outras linhas quebradas, $A\theta H$ e AZH tais que se verificam, respetivamente, as igualdades $A\theta + \theta B = AB + BD$, $AH + H\theta = A\theta + DE$ e $AZ + ZH = AH + EC$, adicionando, membro a membro, obtemos $AZ + ZH + H\theta + \theta B = AB + BD + DE + EC = AC$.

Nas proposições 38 e 39 Papo retoma as três proposições anteriores e mostra que é possível construir um paralelogramo tal que sobre a sua base são construídos interiormente dois segmentos cuja soma é igual ou superior à soma de três dos seus lados, sendo as demonstrações provavelmente da autoria de Papo.

Proposição 38:

Seja ABC um triângulo e o lado AB maior que uma dada razão com o lado BC, isto é, $AB = k \times BC + l$ sendo a razão dada $k = \frac{m}{n}$ e l um segmento.

Então, é possível construir um segmento DE paralelo a AC de modo que AD e $DE + BC$ estejam na mesma razão dada, isto é, $\frac{AD}{DE+BC} = k$.

Prova:

Supondo o problema resolvido e, portanto, a existência do segmento DE ,consideremos o paralelogramo $ADEC$. Seja o segmento Z tal que $AB > BC$ e $BC + Z$ estejam na razão dada, isto é, $\frac{AB}{BC+Z} = k$.

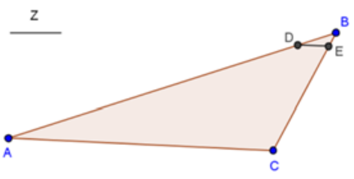


Figura 3.13

Sendo, esta razão a mesma que a razão do segmento AD e a soma $DE + BC$, tem-se $\frac{AB}{BC+Z} = \frac{AD}{DE+BC} = \frac{AB-AD}{(BC+Z)-(BC+DE)} = \frac{BD}{Z-DE}$, (I).

Como o segmento Z é dado, então o segmento DE é conhecido e portanto dado em posição.

Observamos que Papo não explica como o segmento Z é dado, mas é verdade que resulta da razão dada $\frac{m}{n} = k$ e do segmento dado l, onde $\frac{AB-l}{BC} = \frac{m}{n}$.

Commandino, à semelhança dos antigos geómetras, apresenta uma longa demonstração que em termos algébricos pode ser simplificada da seguinte forma:

De $k = \frac{AB-l}{BC} = \frac{AB}{BC+Z} = \frac{AD}{DE+BC}$ (II) vem que $\frac{AB-l}{BC} = \frac{AB-(AB-l)}{(BC+Z)-BC} = \frac{l}{z}$, logo $Z = \frac{1}{k}\, l$ (III). E, portanto $Z = \frac{l\times BC}{AB-l}$.

Suponhamos, então que $\frac{AB}{AC} = k'$ e da semelhança dos triângulos ABC e DBE temos $\frac{BD}{DE} = \frac{AB}{AC} = k'$, ou seja, $BD = k' \times DE$ e, da relação (I) obtemos $BD = k \times (Z - DE)$, pelo que $k \times (Z - DE) = k' \times DE$. Assim, $DE = \frac{kZ}{k+k'}$ e da relação (III) obtemos $DE = \frac{l}{k+k'}$, ou seja, o segmento DE é conhecido e portanto dado em posição

Assim, se o segmento AB for maior que o dobro do segmento BC, é possível traçar DE a paralela a AC de modo que o segmento AD seja o dobro de $DE + BC$.

De facto, se $AB > 2 \times BC$, sendo $\frac{m}{n} = k = 2$, tem-se, $\frac{AB-l}{BC} = 2$, ou seja, $AB = 2 \times BC + l$.

Por outro lado, da relação (II) temos que $\frac{AD}{DE+BC} = 2$ ou seja, $AD = 2 \times (DE + BC)$.

Proposição 39:

É possível construir um paralelogramo tal que sobre a sua base são construídos interiormente dois segmentos cuja soma é igual ou superior à soma dos outros três dos seus lados.

Prova:

Consideremos um triângulo ABC de modo que $AB > 2 \times BC$ e $AC = 2 \times BC$.

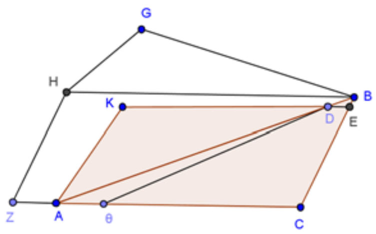


Figura 3.14

Tracemos DE paralela a AC de modo que $AD = 2 \times (DE + BC)$. Seja Z um ponto do prolongamento do lado AC de modo que $AZ = 2 \times DE$ e completemos o paralelogramo CD.

Com efeito, como por construção, $AZ = 2 \times DE$ e, por hipótese, $AC = 2 \times BC$ vem que $ZA + AC = ZC = 2 \times (DE + CB) = AD$, ou seja, $HB = 2 \times (DE + BC)$. Por outro lado, por hipótese temos que $AD = 2 \times (DE + BC)$, ou seja, $HB = AD$ (I). Como $AD > 2 \times BC$, tracemos $D\theta = 2 \times BC$ com $D\theta = HZ + BC$ (II). Das igualdades (I) e (II) obtemos $AD + D\theta = HZ + HB + BC$, sendo estes segmentos os lados do paralelogramo $ZHBC$ no interior do qual definimos AD e $D\theta$.

Em virtude da proposição 31, torna-se evidente que também é possível traçar $D\theta$ de tal modo que $AD + D\theta > HZ + HB + BC$.

Considerando o ponto K, no interior do paralelogramo mas não sobre os segmentos AD e $D\theta$, temos que $AK + KD + D\theta > HZ + HB + BC$. Se considerarmos a linha quebrada HGB sobre HB igual ao excesso à soma dos segmentos exteriores HZ, HB e BC, então $AK + KD + D\theta = HZ + HG + BG + BC$, obtendo o resultado para um pentágono. E da mesma forma, é possível estender o resultado a um polígono com qualquer número de lados, analogamente ao que vimos anteriormente para os segmentos interiores de um qualquer quadrilátero.

A segunda parte do Livro III termina com as três proposições seguintes que estão relacionadas com os paradoxos de Ericino.

Proposição 40:

Dada a área de um paralelogramo, é possível construir outro paralelogramo que seja uma parte deste e cujos são múltiplos dos respetivos lados do paralelogramo dado, segundo números dados.

Prova:

Consideremos que a área do paralelogramo ABC é dada. Sejam ED e DZ múltiplos dos lados AB e BC, respetivamente, do paralelogramo dado, segundo os números fixados. Por E tracemos a perpendicular a DE e consideremos K, um ponto dessa perpendicular, de modo que a área do retângulo limitado por ED e EK seja inferior à área do paralelogramo dado. Completemos o paralelogramo de lados ED e DZ, para tal, descrevemos a circunferência com centro em D passando por Z e pelo ponto K tracemos a paralela a DE. Seja θ o ponto de interseção da circunferência com esta paralela.

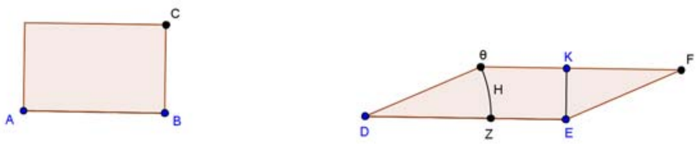


Figura 3.15

Tracemos EF paralelo a $D\theta$. Resulta desta construção que o paralelogramo DF é a parte do paralelogramo dado AC cujos lados são respetivamente múltiplos dos lados dados.

Proposição 41:

Construir um triângulo com área inferior a um triângulo dado onde cada um dos lados é maior que os correspondentes lados do triângulo dado.

Prova:

Com efeito, seja ABC o triângulo dado e prolonguemos BC em ambas as direções de modo que $BD = BA$ e $CE = AC$. Sobre o segmento DE apliquemos o retângulo DH equivalente ao triângulo ABC. Consideremos um ponto qualquer θ em BC e definamos os segmentos θZ e θH. Como $ZH = D\theta + E\theta$ com

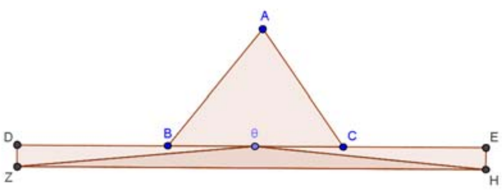


Figura 3.16

$D\theta > AB$ e $\theta E > AC$, então $ZH > AB + AC$ e, portanto $ZH > BC$ pel que $\theta Z + ZH + H\theta > AB + BC + CA$, pelo que, o retângulo DH é o dobro do triângulo $ZH\theta$ mas equivalente ao triângulo ABC de lados, respetivamente, inferiores aos lados do triângulo $Z\theta H$.

Proposição 42:

Construir um novo triângulo a partir de um triângulo dado que seja uma parte desse triângulo e em que cada lado do triângulo construído é múltiplo, segundo números previamente fixados, do correspondente lado do triângulo dado.

Prova:

Consideremos o triângulo ABC e construamos um triângulo EZH onde cada um dos lados é múltiplo do correspondente lado do triângulo ABC. Em seguida, descrevamos as circunferências concêntricas de centro H e passando, respetivamente, por E e por Z. Pelo ponto H tracemos KM paralela a EZ e HN a perpendicular a EZ.

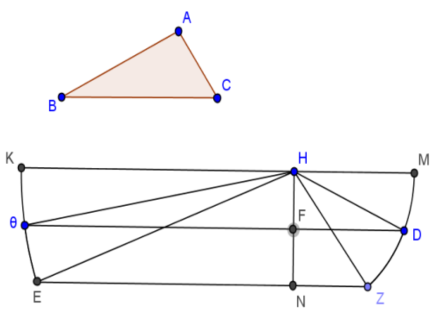


Figura 3.17

Consideremos F em HN tal que o retângulo compreendido entre KM e HF é a parte do triângulo dado ABC. Tracemos, por F, θD paralela a KM e consideremos os segmentos θH e HD. Por construção o triângulo θHD é menor que a parte do triângulo ABC, pois $\theta F < \theta H = KH$ e $FD < DH = HM$ pelo que $\theta D < KM$ e assim $triângulo\ \theta HD < \frac{KM \times HF}{2}$, e cada um dos seus lados é múltiplo do lado correspondente do triângulo dado ABC ou maior do que esse múltiplo.

3.1.2 A GEOMETRIA DO CÍRCULO

As primeiras seis proposições do Livro IV da *Coleção Matemática* de Papo retomam resultados dos *Elementos* de Euclides, tratando a primeira proposição, que surge de forma isolada, de uma generalização do Teorema de Pitágoras, apresentada na proposição[51] *Elementos* I, 47 de Euclides. A sua demonstração é um exemplo de uma prova sintética clássica.

Proposição 1:

Seja ABC um triângulo retângulo e sobre cada um dos lados AB e BC descrevamos, respetivamente, paralelogramos quaisquer $ABDE$ e $BCZH$. Se DE e ZH forem prolongados até à sua interseção no ponto θ então os paralelogramos $ABDE$ e $BCZH$ são equivalentes aos que são construídos sobre os lados AC e θB, os quais formam um ângulo igual à soma dos ângulos formados, respetivamente, pelos lados AB e AC e pelos lados $D\theta$ e θB.

Prova:

Seja K o ponto de interseção de θB com o lado do triângulo AC. Pelos pontos A e C tracemos AF e CM paralelas a θK. Então $AF\theta B$ é um paralelogramo pois AF e θB são iguais e paralelas. De igual modo, CM e θB são iguais e paralelas pelo que AF e CM são iguais e paralelas e, portanto também FM e AC são iguais e paralelas. Consequentemente, $AFMC$ é um paralelogramo e o ângulo compreendido pelos lados AF e AC é igual ao ângulo compreendido por AB e AC aumentado do ângulo compreendido pelos lados $D\theta$ e θB (este ângulo é igual ao ângulo compreendido pelos lados AF e AB). Também, o paralelogramo $ADEB$ é equivalente ao paralelogramo $AF\theta B$, (pois ambos são construídos sobre a mesma base AB e com as mesmas paralelas AB e $D\theta$), o paralelogramo $AF\theta B$ é equivalente ao paralelogramo $FAKN$ (pois ambos são construídos sobre a mesma base FA e com as mesmas paralelas AF e θK) e, consequentemente, o paralelogramo $ADEB$ é equivalente ao paralelogramo $FAKN$. De

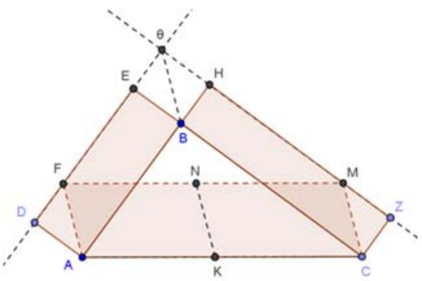


Figura 3.18 - Generalização do Teorema de Pitágoras

[51] Ver nota 6 página 6.

igual modo, o paralelogramo $BHZC$ é equivalente ao paralelogramo $NKCM$ pelo que a soma dos paralelogramos $ADEB$ e $BHZC$ é equivalente ao paralelogramo $AFMC$.

As cinco proposições seguintes são resultados, que Papo demonstra, sobre relações existentes entre tangentes, secantes e cordas num círculo. Baseiam-se no Livro X [Www 6] dos *Elementos* de Euclides e são de difícil interpretação pelas notações utilizadas. São, no entanto, interessantes se forem utilizadas notações atuais.

As proposições 2 e 3 são problemas de construção de segmentos irracionais, de acordo com a proposição[52] *Elementos* X, 3 de Euclides.

Na proposição 2, Papo utiliza a trisseção do ângulo reto para mostrar que um segmento de reta é irracional. A construção deste segmento irracional não está contida em *Elementos* X e baseia-se na proposição[53] *Elementos* XIII, 11.

Proposição 2:

Seja ABC um semi círculo de diâmetro racional[54] AB e seja BD um segmento igual ao raio do semi círculo, situado no prolongamento de AB. Considere-se a tangente CD e a corda CB. Seja E o ponto médio do arco CB. Então, o segmento de reta ED é irracional e designa-se por menor.

Prova:

Com efeito, seja Z o centro do semi círculo dado e C o ponto de tangencia determinado pela interseção do semi círculo dado e do semi círculo de igual raio e centro no ponto B. Traçam-se os raios ZC e ZE. Então, o ângulo compreendido entre ZC e CD é reto pois ZC é um raio e CD uma tangente ao semi círculo, logo o ângulo ZCD está inscrito no semi círculo de diâmetro ZD e centro no ponto B. Tem-se então, $ZB = BD = BC$ pelo que, o triângulo BCD

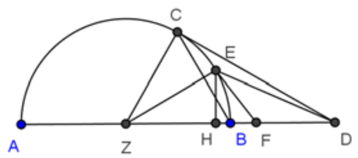


Figura 3.19

[52] ***Elementos* X, 3:** Se um ângulo de um triângulo for dividido em partes iguais por uma reta que divida ao mesmo tempo a base em dois segmentos, estes segmentos estarão entre si na razão dos outros dois lados do triângulo. E se os segmentos da base tiverem a mesma razão, que têm os outros lados do triângulo, também, a reta que do vértice do triângulo for tirada para o ponto da seção e separa os ditos segmentos, dividirá igualmente o ângulo que fica oposto à mesma base".

[53] ***Elementos* XIII, 11:** Se um pentágono equilátero está inscrito num círculo com diâmetro racional então o lado do pentágono é um segmento irracional chamado menor.

[54] ***Elementos* X, Definição 6:** Um segmento de reta racional é comensurável, se é comensurável com um segmento de reta dado, quer em comprimento e em potência, quer apenas em potência."

é isósceles com $\angle BCD = \angle BDC$. Uma vez que $\angle \mathrm{ZBC}$ é ângulo externo do triângulo CBD tem-se, pela proposição *Elementos* I, 32 de Euclides, que: $\angle \mathrm{ZBC} = \angle \mathrm{BCD} + \angle \mathrm{BDC} = 2\angle \mathrm{BDC} = \angle \mathrm{ZCB}$, pois o triângulo BZC é equilátero. A amplitude do ângulo compreendido entre as retas ZC e ZB é $\frac{2}{3}$ do ângulo reto e o ângulo compreendido entre ZE e ZB é a terça parte do ângulo reto. Do ponto E traça-se a perpendicular HE sobre o diâmetro AB. O triângulo DZC é equiângulo com o triângulo EZH, com $\angle CZB = \frac{2}{3}$ do ângulo reto, e $\angle EZH = \frac{1}{2}\angle CZB = \frac{1}{3}$ do ângulo reto, pelo que $\angle EZH = \angle ZDC$ e da proposição[55] *Elementos* VI, 4 de Euclides tem-se que $\frac{EZ}{ZH} = \frac{ZD}{DC}$.

Portanto, $ZD^2 = \frac{4}{3}DC^2$ e $EZ^2 = \frac{4}{3}ZH^2$.

De facto, $BD = ZC$, logo, $ZD = 2ZC$ e $ZD^2 = 4ZC^2$ e, pelo Teorema de Pitágoras, $ZC^2 = ZD^2 - DC^2$. Assim, $ZD^2 = 4(ZD^2 - DC^2)$ ou seja, $ZD^2 = \frac{4}{3}DC^2$. Consequentemente, $\frac{EZ^2}{ZH^2} = \frac{16}{12}$ ou seja, $\frac{EZ}{ZH} = \frac{4}{\sqrt{12}}$ e, por construção, $ZD = 2EZ$ ou seja $ZD^2 = 4EZ^2$ pelo que, $\frac{ZD^2}{EZ^2} = 4$, donde se conclui que $\frac{ZD^2}{ZH^2} = \frac{64}{12}$. Os segmentos de reta racionais ZD e ZH são comensuráveis apenas em potência.

Seja F o ponto em BD tal que o segmento BF verifica $ZB = 4BF$. Então $ZD = 2ZB = 8BF$ e $ZF = ZB + BF = 4BF + BF = 5BF$. Como $\frac{ZD}{ZF} = \frac{8}{5}$ e $\frac{ZF}{FD} = \frac{5}{3}$ tem-se $\frac{ZD^2}{ZF^2} = \frac{64}{25}$. Além disso, $\frac{ZF^2}{ZH^2} = \frac{25}{12}$, ou seja, $\frac{ZF}{ZH} = \frac{5}{\sqrt{12}}$. Portanto, os segmentos de reta ZF e ZH não são comensuráveis em comprimento, mas apenas em potência.

Com efeito, da relação $\frac{ZF^2}{ZH^2} = \frac{25}{12}$ podemos obter $\frac{ZF^2}{ZF^2 - ZH^2} = \frac{25}{13}$. Assim ZF^2excede ZH^2em 13 unidades de área quadrada. Portanto, o lado do quadrado ZH é incomensurável com o segmento de reta racional ZF.

O segmento de reta ZF é comensurável com o segmento de reta racional AB.

De facto, $ZF = ZB + BF$, ou seja, $ZB = 4BF$. Donde $BF = \frac{1}{4}ZB$, ou seja, $ZF = ZB + \frac{1}{4}ZB = \frac{5}{4}ZB$. Mas, $ZB = \frac{1}{2}AB$ logo $ZF = \frac{5}{8}AB$. E, portanto, os segmentos de reta ZF e AB são racionais comensuráveis.

[55] ***Elementos* VI, 4:** Nos triângulos equiângulos os lados, que formam ângulos iguais, são proporcionais; e os lados opostos a ângulos iguais são homólogos.

O segmento de reta FH é o quarto apótema[56] e ZD é um racional bem como o seu dobro. Assim, pela proposição[57] *Elementos* X, 94, como o segmento de reta DE é o lado do quadrado cuja área é o dobro do retângulo compreendido pelas retas ZD e FH, como mostraremos a seguir, DE é também menor.

Consideremos o triângulo obtusângulo EFD. Pela proposição[58] *Elementos* II, 12 de Euclides, temos que $DE^2 = EF^2 + FD^2 + 2FD \times FH$ (I).

Por outro lado, considerando o triângulo ZEF acutângulo em F, segue da proposição[59] *Elementos* II, 13 de Euclides que $EZ^2 = EF^2 + FZ^2 - 2FZ \times FH$, ou seja, verifica-se a igualdade $EF^2 + FZ^2 = EZ^2 + 2FZ \times FH$ (II).

Das relações (I) e (II) tem-se $DE^2 + EF^2 + FZ^2 = EZ^2 + EF^2 + FD^2 + 2FD \times FH + 2FZ \times FH = EZ^2 + EF^2 + FD^2 + 2(FD + FZ)FH = EZ^2 + EF^2 + FD^2 + 2ZD \times FH$. Ou seja, $DE^2 + FZ^2 = EZ^2 + FD^2 + 2ZD \times FH$ (III).

Mas, por hipótese, $ZB = 4BF$, logo $FZ = ZB + BF = 5BF$, ou seja, $FZ^2 = 25BF^2 = 9BF^2 + 16BF^2$(IV). Como $FD = DB - BF = ZB - BF = 3BF$ e $EZ = ZB = 4BF$, de (IV) obtém-se que $FZ^2 = EZ^2 + FD^2$ assim da igualdade (III) vem que $DE^2 = 2ZD \times FH$, como queríamos mostrar.

Proposição 3:

Considere-se um semi círculo de diâmetro racional AC e centro H. Com o mesmo raio deste trace-se outro semi círculo com centro em C. Seja B o ponto de interseção dos dois semi círculos e D o ponto de intersecção do semi círculo com o prolongamento de HC.

[56] ***Elementos* X; 73**: Se um segmento de reta racional for subtraído de um segmento incomensurável com o primeiro mas sendo os seus quadrados comensuráveis, então a diferença dos dois segmentos é irracional e chamada apótema. Ainda em Elementos X, na definição 4 das terceiras definições, Euclides define quarto apótema da seguinte forma:
Se o quadrado do segmento de reta excede o quadrado de um segmento de reta incomensurável em comprimento com o segmento dado, e se o segmento dado é comensurável em comprimento com o segmento racional dado, o excesso é o quarta apótema".

[57] ***Elementos* X, 94**: Se uma área é definida como a de um retângulo cujos lados são um segmento racional e um quarto apótema, então o lado do quadrado equivalente é um menor.

[58] ***Elementos* II, 12**: Nos triângulos obtusângulos, o quadrado do lado oposto ao ângulo obtuso equivale aos quadrados sobre os outros dois lados do triângulo acrescido do dobro do retângulo compreendido pelo lado do ângulo obtuso sobre o qual cai a perpendicular e pela projeção do outro lado no seu prolongamento.

[59] ***Elementos* II, 13**: Nos triângulos acutângulos, o quadrado do lado oposto a um ângulo agudo equivale aos quadrados sobre os outros dois lados do triângulo retirado o dobro do retângulo compreendido pelo lado do ângulo agudo sobre o qual cai a perpendicular e pela altura do triângulo relativa ao ângulo agudo. Este resultado é válido em qualquer triângulo para o lado oposto a um ângulo agudo.

Seja DB a tangente ao semi circulo de diâmetro AC no ponto B[60] e consideremos a bissetriz DZ do ângulo compreendido entre CD e DB. Então o segmento de reta DZ é o excedente do segmento binomial[61] KD relativamente ao segmento KZ que origina com uma superfície racional $\mathrm{E}F \times HD$ um conjunto medial[62].

Prova:

Tracemos o segmento de reta HB e prolonguemos DZ até ao ponto K de modo que $HK = KB$. Por K, tracemos a perpendicular KE a AC. Pela proposição[63] *Elementos* IV, 15 o segmento de reta BH é o lado do hexágono regular inscrito no círculo de diâmetro AC, pois BH é o raio do semi círculo HBD. Por outro lado, $KE = \frac{1}{2}HB$ pois se prolongarmos até ao dobro o arco KH, obtendo o arco KS e prolongarmos KE até KS, então o segmento KS tem o dobro do comprimento de KE e é igual a HB. Assim, tem-se que $HB = 2KE$, ou seja, $KC = 2KE$. Considerando o triângulo KEC, rectângulo em E, da última igualdade resulta que o ângulo HCK é um terço de um ângulo reto, pelo que $KC^2 = \frac{4}{3}EC^2$, e como $CD = KC$, tem-se $CD^2 = \frac{4}{3}EC^2$. Portanto, CD e EC são comensuráveis apenas em potência, pois $\frac{CD}{EC} = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Como $\frac{CD^2}{EC^2} = \frac{4}{3}$, ou seja, $\frac{CD^2}{CD^2 - EC^2} = \frac{4}{1}$, diz-se que a potência do segmento de reta CD excede a potência do segmento de reta EC em uma unidade de área e, portanto, o lado do quadrado é comensurável com o segmento CD. Como CD é comensurável com AC, por *Elementos* X, 36 ED é um binómio. Mas, por hipótese, $HD = AC$ é racional e assim a área compreendida por HD e ED é irracional, designando-se por bimedial o lado do quadrado com igual área[64]. Mas KD é em potência essa área, pois o triângulo HDK é

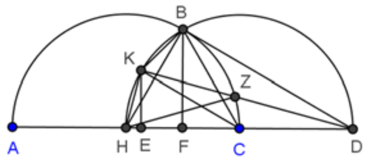


Figura 3.20

[60] Também nesta proposição o ponto de tangencia foi determinado pela interseção das duas circunferências de igual raio. Poder-se-ia ter traçado a tangente a um circunferência sendo conhecido o ponto de tangencia da seguinte forma: dada a circunferência de centro O e ponto de tangencia T. Com centro em T traça-se a circunferência que passa pelo ponto O. Seja R a interseção das duas circunferências. Traça-se a semi reta OR. Traça-se a circunferência com centro em R e passando por O. Seja S o ponto de interseção da semi reta OR com esta circunferência. ST é a reta tangente à circunferência no ponto dado.

[61] ***Elementos* X, 36:** Se dois segmentos são incomensuráveis mas os seus quadrados são comensuráveis e se esses segmentos forem justapostos, o segmento resultante é irracional e é designado por segmento binomial.

[62] ***Elementos* X, 21:** O retângulo compreendido entre segmentos racionais incomensuráveis cujos quadrados são comensuráveis é irracional e o lado do quadrado que lhe é equivalente também é irracional. O lado desse quadrado é designado por medial.

[63] ***Elementos* IV, 15:** Inscrever num círculo dado um hexágono equilátero e equiângulo.

[64] ***Elementos* X, 55:** O retângulo compreendido entre um segmento racional e um binomial é irracional e o lado do quadrado que lhe é equivalente também é irracional. O lado desse quadrado é designado por bimedial.

equiângulo com o triângulo EDK e, portanto, $\frac{KD}{ED} = \frac{HD}{KD}$, ou seja, $KD^2 = ED \times HD$ logo KD é o bimedial.

Por outro lado, como o ângulo compreendido entre BH e HC é $\frac{2}{3}$ do ângulo reto pois, BH é o lado de um hexágono regular inscrito numa circunferência, pois como Papo demonstrou, sendo BH e HC iguais, o triângulo BHC é equilátero. Considere-se a perpendicular BF e $HC = CD = 2\mathrm{FC}$. Como os triângulos BHD e HFB são semelhantes, então $\frac{BH}{HD} = \frac{BD}{BF} = \frac{HF}{BH}$, pelo que, $HD \times HF = BH^2$. Mas como $BH = HC$ e $HD = 2HC$, então $\frac{HF}{HC} = \frac{1}{2}$ ou seja, $HF = \frac{1}{2}HC$, isto é, $HC = 2HF = 2\mathrm{FC}$. Como $CD = 2\mathrm{FC}$ tem-se que $CD^2 = 4FC^2$ e, como vimos anteriormente, $CD^2 = \frac{4}{3}EC^2$ donde se conclui que $EC^2 = 3FC^2$, ou seja, $\frac{EC^2}{FC^2} = \frac{3}{1}$ e, portanto, os segmentos EC e FC são comensuráveis apenas em potência e não em comprimento. Além disso, obtém-se $\frac{EC^2}{EC^2 - FC^2} = \frac{3}{2}$ pelo que, EC^2 excede FC^2 em duas unidades de área, ou seja a potência do segmento EC excede a potência de FC pelo quadrado de um segmento incomensurável com ele, pois $\sqrt{2}\,\mathrm{EC}$ é incomensurável em comprimento com EC. Por hipótese, AC é racional e, como FC e AC são comensuráveis em comprimento então o resto $EC - \mathrm{FC} = EF$ é o quinto apótema.[65]

Os triângulos KHE e KHD são semelhantes, pelo que o retângulo compreendido entre HD e HE é equivalente a KH^2, isto é, $HD \times HE = KH^2$ conclui-se que $\frac{BH^2}{KH^2} = \frac{HF}{HE}$ e, como $BH = HZ$, tem-se $\frac{HZ^2}{KH^2} = \frac{HF}{HE}$. Desta igualdade obtemos $\frac{HZ^2 - KH^2}{KH^2} = \frac{HF - HE}{HE}$, isto é, $\frac{KZ^2}{KH^2} = \frac{EF}{HE}$, pois $HZ^2 - KH^2 = KZ^2$ uma vez que o ângulo HKZ é reto. Mas como $HD \times HE = KH^2$, $\frac{KZ^2}{HD \times HE} = \frac{EF}{HE}$, ou seja, $\frac{KZ^2}{HD \times HE} = \frac{EF \times HD}{HE \times HD}$ e, portanto, $KZ^2 = \mathrm{E}F \times HD$.

Como o segmento $\mathrm{E}F$ é o quinto apótema e HD é racional então o segmento KZ origina com uma superfície racional $\mathrm{E}F \times HD$ um conjunto medial[66]. Como demonstramos anteriormente, KD é binomial e DZ é o excedente de KD em KZ, isto é $KD - KZ = DZ$, com KZ gerador da superfície $\mathrm{E}F \times HD$ em medial.

[65] Ver nota 56 63.

***Elementos* X Def 5:** Dado um segmento racional e um apótema, se o quadrado no todo (segmento obtido por justaposição dos dois) é maior do que o quadrado do segmento racional sendo a diferença o quadrado de um segmento que é incomensurável com o quadrado do todo, se esse segmento é comensurável com o primeiro segmento racional considerado, então o apótema é chamado quinto apótema.

[66] Ver nota 21 página 19.

As proposições 4 a 6 ilustram o esquema estrutural análise-síntese[67], mas de conteúdo matemático pouco interessante.

Proposição 4:

Considere-se o círculo ABC de centro em E , diâmetro BC e D o ponto de interseção do prolongamento BC com a tangente à circunferência em A. Considere-se AH outro diâmetro do círculo e seja Z o ponto de interseção do círculo com a perpendicular a BC traçada do ponto H. Seja G o ponto de interseção da reta secante ZD com a circunferência. Se forem traçadas as cordas HZ e HG que intersetam o diâmetro BC nos pontos K e F, respetivamente, então $KE = \mathrm{EF}$.

Prova:

Consideremos MG paralelo a KF e I o ponto médio de MG, ou seja, $MI = IG$. Seja EN a perpendicular a ZG. Então, pela proposição[68] *Elementos* III, 3, $ZN = NG$. Por hipótese, $MI = \mathrm{IG}$ então, pela proposição[69] *Elementos* VI, 2, NI é paralela a MZ. Assim, os ângulos GNI e NZM são iguais por serem ângulos de lados paralelos, e o ângulo NZM é igual ao ângulo GAE porque estão inscritos no mesmo arco[70] e, pelo recíproco de *Elementos* III, 21, os pontos A, N, I e G estão sobre uma circunferência. Também os pontos A, N, E e D estão sobre uma mesma circunferência pois, por construção, os ângulos EAD e END são ambos retos.

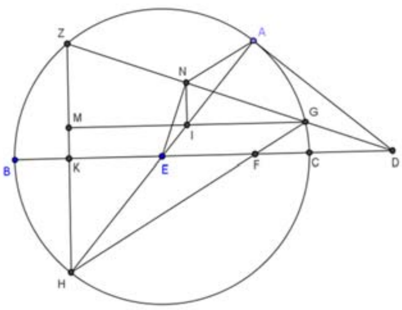


Figura 3.21

[67] Método para obter uma prova dedutiva, onde se supõe o problema resolvido *"apagoge"*, na segunda fase da análise (resolução) chega-se ao pretendido e invertendo o processo faz-se a síntese.

[68] ***Elementos* III, 3:** Se numa circunferência o diâmetro divide uma corda em duas partes iguais então o diâmetro é perpendicular à corda e, inversamente, se o diâmetro é perpendicular a uma corda então divide-a em duas partes iguais.

[69] ***Elementos* VI, 2:** Se for traçada uma paralela a um dos lados de um triângulo, essa reta interseta os outros dois lados desse triângulo proporcionalmente e, inversamente se dois lados de um triângulo forem intersetados proporcionalmente por uma reta então esta será paralela ao outro lado.

[70] ***Elementos* III, 21:** Num círculo, ângulos inscritos com o mesmo arco correspondente são congruentes entre si.

A síntese far-se-á da seguinte maneira: Como os ângulos HAD e END são retos, os pontos A, N, E e D estão sobre uma mesma circunferência; assim, o ângulo AND é igual AED. Mas o ângulo AED é igual ao ângulo AIG porque as retas ED e IG são paralelas; portanto os pontos A, N, I e G estão sobre uma circunferência, e deste modo o ângulo GAI é igual ao ângulo GNI. Mas o ângulo GNI é igual ao ângulo GZM logo a reta ZM é paralela à reta NI, e assim, por *Elementos* III, 3[71], $ZN = NG$ o que implica que $MI = IG$. Do paralelismo das retas BD e MG segue que $\frac{MI}{KE} = \frac{IG}{EF}$ e como $MI = \mathrm{IG}$ então $KE = EF$.

Proposição 5:

Considere-se o círculo ABC de centro G e a corda AC. Sejam AD e CD as tangentes ao círculo nos pontos A e C, respetivamente. Considere-se uma secante EZ e seja H o ponto de interseção de EZ com a corda AC tal que $EH = \mathrm{HZ}$. Sejam F e K os pontos onde EZ interseta o círculo. Então o ponto médio H da secante EZ é também o ponto médio da corda FK, isto é, $\mathrm{FH} = \mathrm{HK}$.

Prova:

Considere-se a reta EN paralela a AC por E e a partir do centro G tracemos os segmentos de reta GA, GZ, GC, GN, GE e GH.

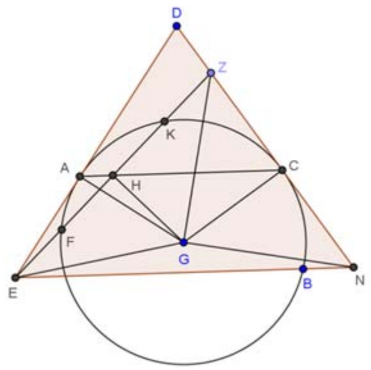


Figura 3.22

Por hipótese, $\mathrm{EH} = \mathrm{HZ}$ então, do paralelismo das retas AC e EN, resulta que $\mathrm{NC} = \mathrm{CZ}$ e $E\mathrm{A} = \mathrm{NC}$. Por outro lado, da proposição[72] *Elementos* III, 18, o ângulo GCN é reto, donde se conclui que, pela proposição[73] *Elementos* I, 4, $\mathrm{GZ} = \mathrm{GN}$ e, portanto, proposição[74] *Elementos* III, 36 $\mathrm{AD} = \mathrm{DC}$ Como $\mathrm{AG} = \mathrm{GC}$, pois são raios do círculo, e os ângulos EAG e NCG são ambos retos, então, pela proposição *Elementos* I, 4 $\mathrm{EG} = \mathrm{GN}$ pelo que $\mathrm{EG} = \mathrm{GZ}$. Por hipótese, $\mathrm{EH} = \mathrm{HZ}$, o que implica que GH é perpendicular a ZE, logo de *Elementos* III, 3 conclui-se o pretendido, ou seja, $\mathrm{FH} = \mathrm{HK}$.

[71] Ver nota 68 página anterior.

[72] ***Elementos* III, 18:** A tangente é perpendicular ao raio que passa no ponto de tangencia.

[73] ***Elementos* I, 4:** Se dois triângulos têm dois lados iguais, cada um a cada um, e o ângulo entre esses lados igual, estes triângulos terão as bases iguais; eles serão iguais entre si e os ângulos opostos aos lados iguais serão respetivamente iguais.

[74] ***Elementos* III, 36:** Se de um ponto exterior a um círculo se traçam duas retas, sendo uma secante ao círculo e a outra tangente, o retângulo cujos lados são a secante inteira e o segmento exterior entre o ponto e o círculo é igual ao quadrado da tangente.

Verificamos que, se a corda AC coincidir com o diâmetro então o ponto H será o centro do círculo.

O resultado da proposição 6 é o recíproco da proposição anterior.

Proposição 6:

Considere-se um círculo ABC, as tangentes AD e DC e a corda AC. Considere-se uma transversal EZ que interseta o círculo nos pontos F e K e seja H em EZ tal que $\mathrm{HF} = HK$. Então, $\mathrm{EH} = \mathrm{HZ}$.

Prova:

Seja G o centro do círculo e consideremos os segmentos GE, GA, GH, GZ e GC. De *Elementos* III,18[75] segue que o ângulo EAG é reto e de *Elementos* III, 3[76] que o ângulo EHG também é reto, pois $\mathrm{HF} = HK$ por hipótese. Assim os pontos E, A, H e G são pontos da circunferência do círculo de diâmetro EG, pelo que, da proposição[77] *Elementos* III, 21 decorre que os ângulos HAG e HEG são iguais. De igual modo, cada um dos ângulos GHZ e GCZ é reto, pois os pontos Z, C, H e G são pontos da circunferência do círculo de diâmetro GZ, e o ângulo HCG é igual ao ângulo HAG, pois o triângulo AGC é isósceles. Então o ângulo HEG é igual ao ângulo HZG. Portanto, $\mathrm{EG} = \mathrm{GZ}$. Como GH é perpendicular a EZ, $\mathrm{EH} = \mathrm{HZ}$

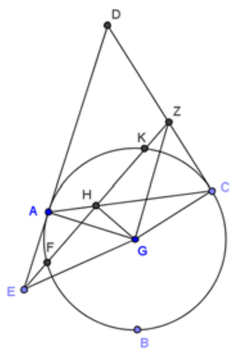


Figura 3.23

Papo apresenta-nos, em seguida, três lemas, que constituem a sétima, oitava e nona proposições do Livro IV, para a proposição 10 relativa ao Problema de Apolónio *Circunferência tangente a três circunferências* do seu tratado *Sobre Contatos,* atualmente perdido:

[75] Ver nota 72 da página anterior.

[76] Ver nota 68 da página 67.

[77] Ver nota 70. da página 67.

"Dados três elementos, que podem ser pontos, retas ou circunferências, traçar (usando exclusivamente régua e compasso) um ou mais circunferências (o problema pode ter mais do que uma solução) passando por ou sendo tangente(s) aos elementos dados".

Tendo em conta que uma reta é uma circunferência de raio infinito e um ponto é uma circunferência de raio nulo a construção de uma circunferência tangente a três circunferências dadas, possibilita a estas últimas que se degenerem independentemente em retas ou pontos. Existem dez soluções distintas para este problema, o número de combinações com repetição de três elementos tomados dois a dois. A existência e multiplicidade das soluções contribuíram para o interesse deste problema.

Embora se desconheçam as soluções de Apolónio, o problema foi tratado, para além de Papo, por vários outros matemáticos ao longo dos séculos. Euclides, em *Elementos* IV resolve os dois casos mais simples, nomeadamente, traçar uma circunferência passando por três pontos[78] não colineares - circuncentro do triângulo - e traçar uma ou mais circunferências tangentes a três retas, concorrentes duas a duas[79] - incentro do triângulo. O problema mais difícil consiste em encontrar a circunferência ou circunferências tangentes a três circunferências diferentes.
Dependendo da posição relativa das três circunferências este problema pode ter oito soluções, agrupadas em quatro tipos:

- A circunferência procurada contêm as três circunferências dadas (uma solução);
- A circunferência procurada contêm duas das circunferências dadas (três soluções);
- A circunferência procurada contêm uma só das circunferências dadas (três solução);
- A circunferência procurada não contêm qualquer das circunferências dadas (uma solução);

Vejamos o primeiro lema da Proposição 10 onde Papo considera que as três circunferências dadas são tangentes entre si.

[78] ***Elementos* IV, 5:** Circunscrever um círculo a um triângulo dado.

[79] ***Elementos* IV, 4:** Inscrever um círculo a um triângulo dado.

Proposição 7:

Considere-se um quadrilátero $ABCD$ em que o ângulo compreendido entre AB, BC é reto e cujos lados AB, BC, CD e AD são conhecidos. Então o comprimento do segmento de reta BD também é conhecido.

Prova:

Tracemos AC e as perpendiculares, respetivamente, AH a DC por A e BE a AC por B, seja H o ponto de interseção das retas AH e DC e suponhamos que o ponto Z de interseção do prolongamento de BE com DC pertence ao segmento DC. Por hipótese, os comprimentos AB e BC são dados e o ângulo por eles compreendido é reto. Como BE é perpendicular a AC então AE, EC e BE são conhecidos. Note-se que da semelhança dos triângulos BEC e ABC tem-se $\frac{AC}{BC} = \frac{BC}{CE}$, ou seja, $AC \times EC = BC^2$, isto é, o retângulo compreendido entre AC e EC é equivalente ao quadrado BC. Como os comprimentos AB e BC são dados e o ângulo por eles compreendido é reto, AC é dado[80] e assim EC também é conhecido. Por outro lado, da semelhança dos triângulos AEB e BEC tem-se $\frac{BE}{EC} = \frac{AB}{BC}$, e a razão $\frac{AB}{BC}$ é conhecida bem como EC, logo também BE é conhecido.

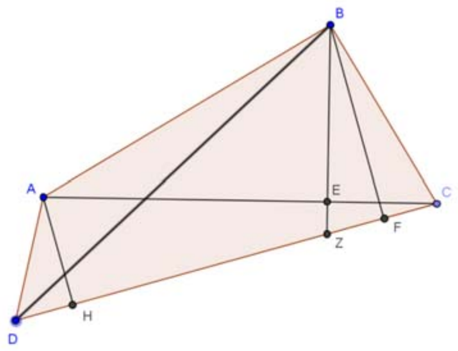


Figura 3.24

Por outro lado, como AC, CD e DA são conhecidos e AH é perpendicular a DC, também AH, DH e HC são conhecidos, como veremos de seguida. Da generalização da proposição[81] *Elementos* II, 13, como AC é o lado do triângulo ACD oposto ao ângulo agudo CDA, sabemos que[82] $AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2DC \times DH$ ou seja, $AC^2 - AD^2 = DC^2 - 2DC \times DH$, portanto, $AC^2 - AD^2 = DC \times (DC - 2DH)$. Como AC é conhecido e AD é dado, por hipótese, a área $DC \times (DC - 2DH)$ é conhecida. Ora, como CD é dado, por hipótese, esta área retangular, aplicada sobre DC, faz com $DC - 2DH$ seja conhecido, e assim DH também é conhecido. Logo, $HC = DC - DH$ é conhecida. Como, $AH^2 = AD^2 - DH^2$ então, AH é conhecida. Temos então que DH, HC e AH são conhecidos.

---

[80] Ver nota 7.da página 6.

[81] Ver nota 59 da página 64.

[82] Este resultado é válido para o lado oposto a um ângulo agudo, em qualquer triângulo.

Note-se que como o triângulo AHC é equiângulo com o triângulo ZEC, tem-se $\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{CZ}} = \frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{EZ}} = \frac{\mathrm{HC}}{\mathrm{EC}}$ com AC, AH e $\frac{\mathrm{HC}}{\mathrm{EC}}$ conhecidos. Então ZC e $E\mathrm{Z}$ são conhecidos. Ora já vimos que EB e BC são também conhecidos, assim o comprimento dos lados do triângulo ZBC é conhecido.

Tracemos BF perpendicular a ZC. Então $\mathrm{BF}^2 = \mathrm{ZB}^2 - (\mathrm{ZC} - \mathrm{FC})^2$. De igual modo, tem-se que $\mathrm{BF}^2 = \mathrm{BC}^2 - \mathrm{FC}^2$, ou seja, $\mathrm{ZB}^2 - \mathrm{ZC}^2 + 2\mathrm{ZC} \times \mathrm{FC} - \mathrm{FC}^2 = \mathrm{BC}^2 - \mathrm{FC}^2$ e, portanto, $\mathrm{ZB}^2 - \mathrm{BC}^2 = \mathrm{ZC}^2 - 2\mathrm{ZC} \times \mathrm{FC}$. Mas $\mathrm{ZB}^2 - \mathrm{BC}^2$ é conhecido. Logo também é conhecido $\mathrm{ZC}^2 - 2\mathrm{ZC} \times \mathrm{FC} = \mathrm{ZC} \times (\mathrm{ZC} - 2\mathrm{FC})$. Como ZC é conhecido, então FC também é conhecido. Do triângulo BDC tem-se $\mathrm{BD}^2 = \mathrm{DC}^2 + \mathrm{BC}^2 - 2\mathrm{DC} \times \mathrm{FC}$ pois o ângulo BFD é reto e, portanto, BD é conhecido.

Suponhamos agora que o ponto de interseção da reta perpendicular a DC por A não pertence ao segmento DC.

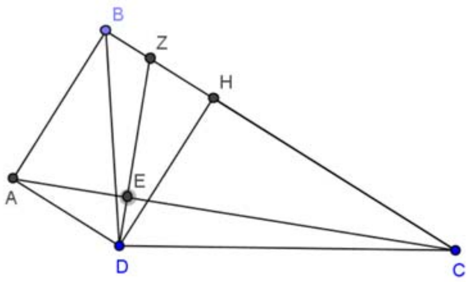


Figura 3.25

Tracemos a perpendicular ED a AC por D e seja Z o ponto de interseção de ED com BC. Assim, como os lados do quadrilátero são dados e o ângulo entre AB a BC é reto, os comprimentos AD, DC e AC são conhecidos. Como ED é perpendicular a AC, o comprimento de cada um dos segmentos ED, AE e EC é conhecido. Por outro lado, os triângulos ABC e ECZ são equiângulos, pelo que, $\frac{\mathrm{CB}}{\mathrm{BA}} = \frac{\mathrm{EC}}{\mathrm{EZ}}$. A razão $\frac{\mathrm{CB}}{\mathrm{BA}}$ é conhecida bem como EC então também $E\mathrm{Z}$ é conhecido. Como ED é conhecido então DZ é também conhecido. Pela relação $\frac{\mathrm{ZC}}{\mathrm{CE}} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BC}}$, com $\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BC}}$ conhecido, ZC é também conhecido. Considere-se agora a perpendicular DH a BC por D. Como ZH e HC são conhecidos então BH e DH são também conhecidos. Logo, BD é conhecido.

Ver Eecke observa que Papo não refere na prova todos os casos possíveis, nomeadamente o ponto Z pertencer ao segmento AB ou coincidir com B, bem como o ponto E coincidir com A ou não pertencer ao segmento AC mas sim ao seu prolongamento. Notamos que o primeiro caso é em tudo análogo ao caso de Z pertencer ao segmento BC. Observamos ainda que no caso de E coincidir com A ou não pertencer ao segmento AC, o ângulo ADC é agudo, logo o ponto de interseção da perpendicular a BC por B pertence ao segmento BC. No caso em falta, em que Z coincide com B, os triângulos AEB e ABC são equiângulos, donde $\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{BC}} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}}$, portanto $\mathrm{AE} \times \mathrm{AC} = \mathrm{AB}^2$ e $\mathrm{BE} \times \mathrm{AC} = \mathrm{AB} \times \mathrm{BC}$, logo AE e BE são dados. Por outro lado, DE é um cateto do triângulo retângulo AED e portanto $\mathrm{DE}^2 = \mathrm{AD}^2 - \mathrm{AE}^2$, logo DE é conhecido e assim $B\mathrm{D}$ é conhecido.

A circunferência de Apolónio ([S], p.138) é apresentado no seu tratado *Lugares Planos* como o lugar geométrico de pontos P tais que a razão entre as distâncias a dois pontos fixos A e B é constante, isto é, $\frac{\mathrm{PA}}{\mathrm{PB}} = \mathrm{k}$, com $\mathrm{k} > 0$ e $\mathrm{k} \neq 1$.

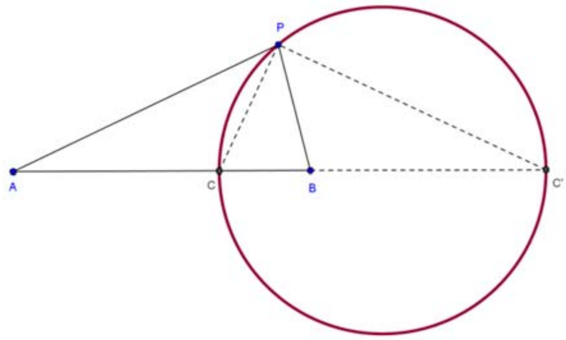


Figura 3.26 - circunferência de Apolónio

De facto, considerem-se dois pontos fixos A e B e o ponto P qualquer. Tracemos as bissetrizes, interiores e exteriores, ao ângulo $A\mathrm{PB}$ intersetando AB nos pontos C e C', respetivamente. Da proposição[83] *Elementos* VI, 3 estas bissetrizes dividem $A\mathrm{B}$, interna e externamente, na mesma relação $\frac{\mathrm{PA}}{\mathrm{PB}}$, ou seja, $\frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{CB}} = \frac{\mathrm{PA}}{\mathrm{PB}} = \frac{\mathrm{C'A}}{\mathrm{C'B}}$.

Por hipótese, $\frac{\mathrm{PA}}{\mathrm{PB}} = \mathrm{k}$, então os pontos C e C' são fixos, independentemente da posição de P. Como as bissetrizes são perpendiculares entre si, então o ângulo com vértice em P está inscrito numa semi circunferência de diâmetro CC' - circunferência de Apolónio.

Se $\mathrm{k} = 1$ a circunferência de Apolónio transforma-se numa reta perpendicular ao segmento AB passando pelo seu ponto médio - mediatriz.

A proposição 8 é a resolução do Problema de Apolónio para o caso da circunferência ser tangente a duas circunferências dadas.

Para este problema existem quatro soluções: circunferência tangente às circunferências dadas e que contém uma das circunferências dadas, onde nesta última construção há duas soluções.

[83] ***Elementos* VI, 3:** Se um ângulo de um triângulo for dividido em partes iguais por uma reta que, divida ao mesmo tempo a base em dois segmentos, estes segmentos estarão entre si na razão dos outros dois lados do triângulo. E se os segmentos da base tiverem a mesma razão, que têm os outros lados do triângulo, também, a reta, que do vértice do triângulo for tirada para o ponto da secção, que separa os ditos segmentos, dividirá igualmente o ângulo que fica oposto à mesma base.

Antes de nos debruçarmos na abordagem geométrica de Papo a este problema, apresentaremos duas soluções: a circunferência tangente e exterior às circunferências dadas e a circunferência tangente e que contém as circunferências dadas. Este problema tem mais duas soluções correspondentes à circunferência tangente e que contém uma das circunferências dadas.

De facto, considerem-se as circunferências C_1 e C_2 e o ponto P. Uma das soluções é a circunferência de centro C' tangente externamente às circunferências dadas nos pontos T_1 e T_2. A reta que passa por estes pontos de tangência interseta as circunferências dadas nos pontos A e B e passa pelo centro de semelhança H, exterior às circunferências dadas.

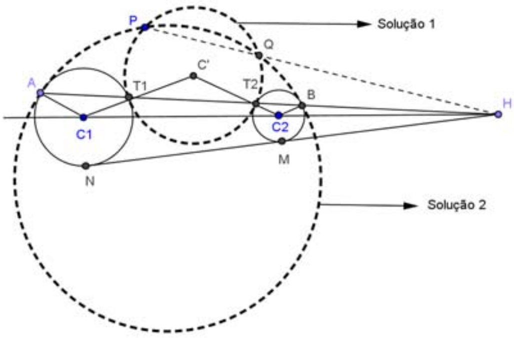


Figura 3.27

Da semelhança dos triângulos isósceles $A\mathrm{C}_1\mathrm{T}_1$, $\mathrm{T}_1\mathrm{C}'\mathrm{T}_2$ e $\mathrm{T}_2\mathrm{C}_2\mathrm{B}$ verificamos que $\mathrm{C}_1\mathrm{T}_1\mathrm{C}'$ e $\mathrm{C}'\mathrm{T}_2\mathrm{C}_2$ estão em linha reta e, portanto, os raios $\mathrm{C}_1\mathrm{T}_1$ e $\mathrm{C}_2\mathrm{B}$ das circunferências semelhantes em relação ao centro H são paralelos e homólogos, pelo que a reta $A\mathrm{T}_1\mathrm{T}_2\mathrm{B}$ passa por H. Por outro lado, tem-se que, $\mathrm{HB} \times \mathrm{HT}_2 = \mathrm{HM}^2$ e $H\mathrm{T}_1 \times \mathrm{HA} = \mathrm{HN}^2$, pelo que, $H\mathrm{T}_1 \times \mathrm{HT}_2 \times \mathrm{HA} \times \mathrm{HB} = \mathrm{HM}^2 \times \mathrm{HN}^2$. Da semelhança de triângulos, temos que, $\frac{\mathrm{HB}}{\mathrm{HM}} = \frac{H\mathrm{T}_1}{HN}$ e $\frac{\mathrm{HA}}{\mathrm{HN}} = \frac{H\mathrm{T}_2}{HM}$, ou seja, $\mathrm{HA} \times \mathrm{HB} = H\mathrm{T}_1 \times \mathrm{HT}_2$. Portanto, $\mathrm{HA} \times \mathrm{HB} = \mathrm{HM} \times \mathrm{HN} = H\mathrm{T}_1 \times \mathrm{HT}_2$, mas, $H\mathrm{T}_1 \times \mathrm{HT}_2 = H\mathrm{P} \times \mathrm{HQ} = \mathrm{HM} \times \mathrm{HN}$, permitindo encontrar, com régua e compasso, o ponto Q e, o problema reduz-se ao caso, apresentado na figura 3.28, onde os elementos são ponto, ponto, circunferência. Este processo gera duas soluções.

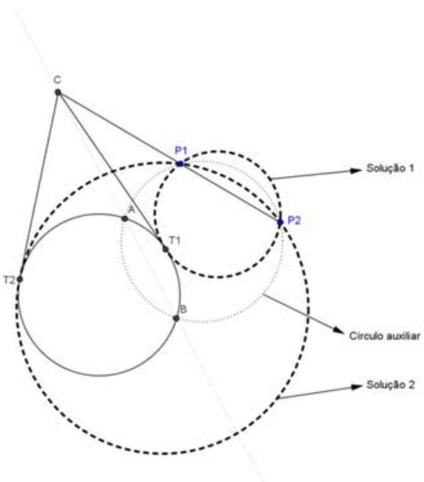


Figura 3.28

De forma análoga, se uma das circunferências dadas é interna e outra externa à solução do problema, H' o centro de semelhança interior das duas circunferências e N' e M' os pontos de tangência da tangente comum traçada às circunferências dadas a partir de H', demonstra-se, que $\mathrm{H}'\mathrm{P} \times \mathrm{H}'\mathrm{Q} = H'\mathrm{N}' \times \mathrm{H}'\mathrm{M}'$ permitindo determinar o ponto Q e, portanto, as duas outras soluções.

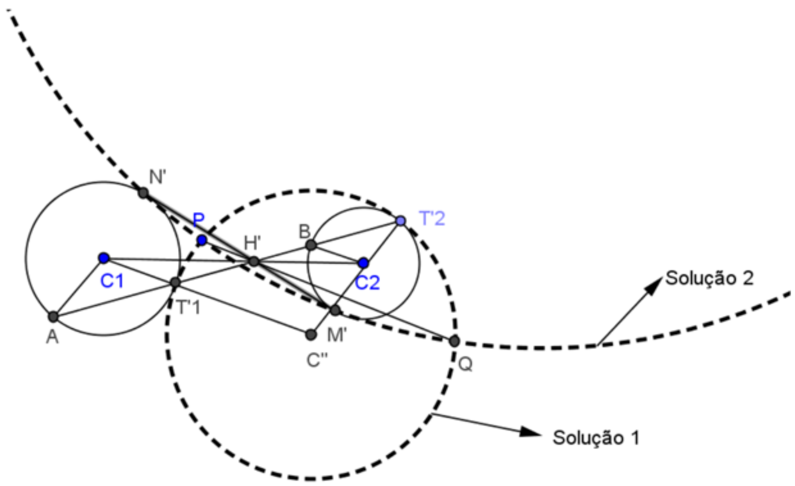


Figura 3.29

Resolve-se analogamente ao caso anterior, ponto, circunferência, circunferência, subtraindo a cada um dos raios das circunferências o menor dos seus raios.

Proposição 8:

Dados dois círculos iguais e com centros, respetivamente, nos pontos A e B e um ponto C exterior aos círculos, seja o círculo CEZ tangente aos dois círculos dados [tal que um dos círculos dados é interior ao círculo CEZ e o outro é exterior][84]. Então o diâmetro do círculo CEZ também é dado[85].

Prova:

Sejam E e Z, respectivamente, os pontos de tangência do círculo interior com o círculo tangente e do círculo exterior com o círculo tangente, e seja H o ponto de interseção de EZ com o círculo exterior diferente de Z. Sejam O e D, respetivamente, o ponto de interseção do círculo interior com EC e o ponto de interseção do círculo exterior com o prolongamento de CZ. Seja ainda F o ponto de intersecção da reta perpendicular a AB por C com o círculo tangente, sendo K o ponto de interseção de FZ com o círculo exterior.

[84] A condição entre parênteses não é explicitada por Papo.

[85] Note-se que, sendo dado o círculo, o seu diâmetro também é dado.

Consideremos os segmentos EC, EH, FC, FK, DZ, DK, DH e AB. Notemos que DH é paralela a EC pois os ângulos EZC e HZD são iguais, por serem verticalmente opostos. Observamos que os arcos EFZ e HKZ são semelhantes, pois seja Q o centro do círculo CEZ, então os triângulos ZAH e EQZ são equiângulos pois são isósceles e o ângulo QZE é igual ao ângulo HZA uma vez que são verticalmente opostos. Portanto os ângulos ECZ e ZDH são iguais, porque estão inscritos em arcos semelhantes, e os triângulos ZHD e ECZ são equiângulos. Analogamente se mostra que os triângulos DZK e FZC são equiângulos pelo que DK é paralela a FC. Por hipótese, os círculos de centro A e B são iguais, pelo que $\mathrm{ZH} = \mathrm{EG}$. De facto, seja O o ponto de interseção de EC com o círculo interior, então os triângulos GEO e ZEC são semelhantes, tal como os triângulos ZEC e ZHD, como referimos anteriormente, então também são semelhantes os triângulos GEO e ZHD. Assim, como os ângulos GOE e ZDH são iguais, de acordo com *Elementos* III, 26[86] o arco EG é igual ao arco HKZ e pela proposição[87] *Elementos* III, 28, $\mathrm{ZH} = \mathrm{EG}$.

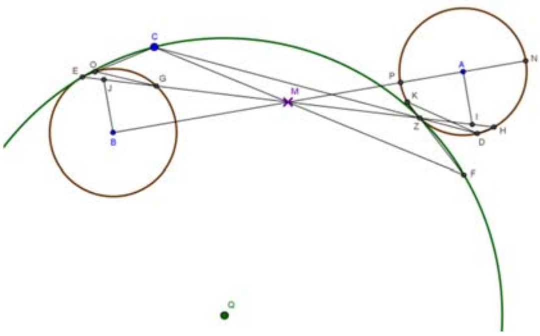


Figura 3.30

Tracemos os segmentos AI e BJ perpendiculares a AB, respetivamente, por A e por B, onde I e J pertencem a EH. Resulta da proposição[88] Elementos III, 14 que $\mathrm{AI} = \mathrm{BJ}$ pois já mostramos que as cordas EG e ZH são iguais. Como os triângulos retângulos BJM e AIM são equiângulos, segue que estes triângulos são iguais e assim $\mathrm{BM} = \mathrm{AM}$ e $\mathrm{JM} = \mathrm{MI}$. Como os segmentos AC e $C\mathrm{B}$ são conhecidos, uma vez que os pontos A, B e C são dados por hipótese, o triângulo ABC é conhecido e, portanto, o triângulo $BC\mathrm{M}$ é conhecido e CM é conhecido. Como o diâmetro NP do círculo exterior é conhecido assim como AM, segue que MP é conhecido e portanto $\mathrm{NM} = \mathrm{MP} + \mathrm{NP}$ é também conhecido. Então, o retângulo compreendido entre NM e MP é conhecido pois, por *Elementos* III, 36,[89] é igual ao quadrado da tangente do ponto M ao círculo $D\mathrm{HK}$. Decorre ainda da mesma proposição que $\mathrm{MN} \times \mathrm{MP} = \mathrm{MH} \times \mathrm{MZ} = \mathrm{EM} \times \mathrm{MZ}$, pois $\mathrm{HM} = \mathrm{EM}$.

---

[86] ***Elementos* III, 26:** Em círculos iguais, ângulos iguais correspondem arcos iguais.

[87] ***Elementos* III, 28:** Em círculos iguais, cordas iguais correspondem arcos iguais, à maior corda corresponde o maior arco e à menor corda corresponde o menor arco.

[88] ***Elementos* III, 14:** Em todo o círculo, as cordas iguais distam igualmente do centro e as que distam igualmente do centro são iguais.

[89] Ver nota 36 da página 68 ponto.

Consideremos as cordas CF e EZ do círculo $EFZC$. Pela proposição[90] *Elementos* III, 35, $\mathrm{EM} \times \mathrm{MZ} = \mathrm{CM} \times \mathrm{MF}$ e, portanto, $\mathrm{NM} \times \mathrm{MP} = \mathrm{CM} \times \mathrm{MF}$, ou seja, $\mathrm{CM} \times \mathrm{MF}$ é conhecido. Como CM é conhecido, resulta que CF é também dado, pois o retângulo $\mathrm{CM} \times \mathrm{MF}$ é dado logo MF é também conhecido e, portanto, $\mathrm{CF} = \mathrm{CM} + \mathrm{MF}$ é dado.

Consideremos, agora o círculo de centro A e o segmento CF. Já mostramos que $K\mathrm{D}$ é paralela a CF. Papo afirma que deste paralelismo se conclui o pretendido, ou seja, o diâmetro do círculo $C\mathrm{EZ}$ circunscrito ao triângulo EZF, é dado.

Ver Eecke observa em nota à sua tradução do Livro IV ([Ver1], p.150) que esta conclusão pressupõe a determinação do ponto Z de modo que seja possível conhecer o círculo $C\mathrm{EZ}$, e sugere que Papo devia estar a usar implicitamente algum resultado, ou resultados, conhecido(s) na época mas que não chegou até nós. Transcreve ainda, numa nota manuscrita endereçada a Hultsch a solução do problema da autoria de G. Amthor para construir um círculo passando por dois pontos F e C e tangente a um círculo dado de centro A, que reproduzimos a seguir.

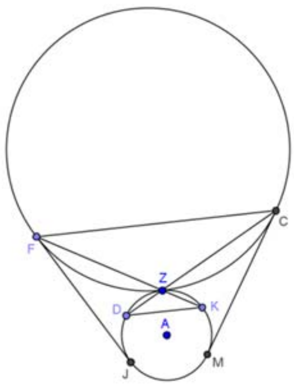


Figura 3.31 - Construção de uma circunferência que passa por dois pontos dados e é tangente a uma circunferência dada.

Seja Z o ponto de interseção do círculo procurado com o círculo dado de centro em A. Sejam K e D os pontos de interseção de $F\mathrm{Z}$ e $C\mathrm{Z}$ com o círculo dado. CF é paralela a DK e consequentemente, tem-se $\frac{FZ}{\mathrm{ZK}} = \frac{\mathrm{CZ}}{\mathrm{ZD}}$, ou seja, $\frac{\mathrm{FZ}}{\mathrm{FZ+ZK}} = \frac{\mathrm{CZ}}{\mathrm{CZ+ZD}}$ ou, $\frac{\mathrm{FZ}}{\mathrm{FK}} = \frac{\mathrm{CZ}}{\mathrm{CD}}$ e, multiplicando esta proporção por $\frac{\mathrm{FZ}}{\mathrm{FZ}} = \frac{\mathrm{CZ}}{\mathrm{CZ}}$, obtém-se $\frac{\mathrm{FZ}^2}{\mathrm{FZ\times FK}} = \frac{\mathrm{CZ}^2}{\mathrm{CZ\times CD}}$.

Por outro lado, sejam J e M os pontos de tangência das tangentes ao círculo respetivamente por F e C, então $\mathrm{FZ} \times \mathrm{FK} = \mathrm{FJ}^2$ e $\mathrm{CZ} \times \mathrm{CD} = \mathrm{CM}^2$, ou seja, $\frac{\mathrm{FZ}^2}{\mathrm{FJ}^2} = \frac{\mathrm{CZ}^2}{\mathrm{CM}^2}$ e, portanto, $\frac{\mathrm{FZ}}{\mathrm{CZ}} = \frac{\mathrm{FJ}}{\mathrm{CM}}$. Como os comprimentos de $F\mathrm{Z}$ e $C\mathrm{Z}$ são conhecidos, o ponto Z é conhecido.

A proposição seguinte é outro lema utilizado na prova da solução do problema de Apolónio.

[90] ***Elementos,* III, 35**:Se num círculo, duas retas se intersetam o retângulo compreendido pelos segmentos de uma é igual ao retângulo compreendido pelos segmentos formados pela outra- propriedade referente à potência de um ponto num plano de um círculo em relação a este ponto $\mathrm{pot(P, C)} = \mathrm{PA} \times \mathrm{PB} = \mathrm{PT}^2$, com A e B pontos da circunferência C e P o ponto de tangência.

.

Proposição 9:

Seja ABC um triângulo onde o comprimento de cada um dos lados é dado e seja D um ponto do seu interior. O excesso do segmento de reta $C\mathrm{D}$ sobre DB é igual ao excesso do segmento de reta $A\mathrm{D}$ sobre $C\mathrm{D}$, onde este excesso é dado. Então $A\mathrm{D}$, DC e DB são dados.

Prova:

Como o excedente dos segmentos de reta $A\mathrm{D}$ e $C\mathrm{D}$ são conhecidos, sejam os segmentos AE e BZ iguais a esse excedente, pelo que, $\mathrm{ED} = \mathrm{DC} = \mathrm{DZ}$. Tracemos o círculo CEZ de centro D. Pela proposição anterior, DZ é conhecido, e como BZ é também conhecido, consequentemente DB é conhecido.

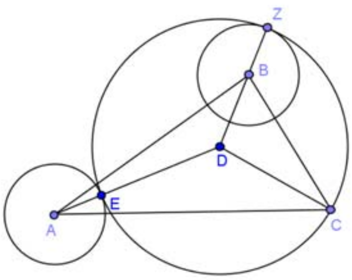


Figura 3.32

Tem-se, por hipótese, $\mathrm{BZ} = \mathrm{AD} - \mathrm{DC} = \mathrm{DC} - \mathrm{DB}$ conhecido. Ora $\mathrm{AD} = \mathrm{BZ} + \mathrm{DZ}$ e $\mathrm{DC} = \mathrm{DZ}$ são conhecidos. Assim $A\mathrm{D}$, DC e DB são conhecidos.

Proposição 10:

Dados três círculos tangentes entre si, com centro, respetivamente, nos pontos A, B e C e cujos diâmetros têm comprimentos desiguais. Seja o círculo DEZ tangente aos círculos dados. Então o diâmetro de DEZ é dado.

Prova:

Seja H o centro do círculo DEZ. Tracemos os segmentos HA, HB e HC que unem os centros A, B e C ao centro do círculo DEZ e prolonguemo-los até encontrar o círculo, respetivamente em D, Z e E .Pela proposição[91] *Elementos* III, 12, estes segmentos passarão pelos pontos de tangência dos círculos com o círculo DEZ. Como A, B e C são dados, os segmentos que os unem, designadamente AB, BC e AC, são também dados. Por outro lado, as diferenças $\mathrm{HB} - \mathrm{HA}$, $\mathrm{HB} - \mathrm{HC}$ e $\mathrm{HA} - \mathrm{HC}$ são também conhecidas pois $\mathrm{HB} + \mathrm{BZ} = \mathrm{HC} + \mathrm{CE}$ donde $\mathrm{HB} - \mathrm{HC} = \mathrm{CE} - \mathrm{BZ}$ e como CE e BZ são, respetivamente, os raios

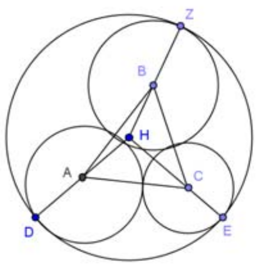


Figura 3.33

[91]***Elementos* III, 12:**Se dois círculos se tocam exteriormente o segmento que une os seus centros passa pelo ponto de tangência.

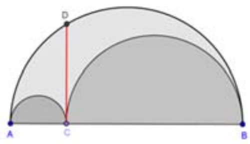
dos círculos com centro em B e C, CE e BZ são dados logo $\mathrm{HB} - \mathrm{HC}$ é conhecido, conhecendo-se analogamente as diferenças $\mathrm{HB} - \mathrm{HA}$ e $\mathrm{HA} - \mathrm{HC}$.

Consideremos F em AD tal que $\mathrm{HB} - \mathrm{HC} = \mathrm{HB} - (\mathrm{HA} + \mathrm{AF}) = \mathrm{HB} - \mathrm{HF}$. Supondo o triângulo FBC conhecido, da proposição 9 que vimos anteriormente decore que HF é também conhecido. Deste modo, como $\mathrm{HB} - \mathrm{HC} = \mathrm{HB} - \mathrm{HF}$ é conhecido, logo HB. Como DZ, o raio do círculo de centro em B, é conhecido, HZ é conhecido.

O conteúdo das proposições 11 e 12 não é matematicamente relevante. A proposição 11 é puramente sintética, refazendo a síntese os passos da análise, enquanto na proposição 12 a análise é puramente dedutiva.

A proposição 18, baseia-se na figura das proposições IV, V e VI do *Livro dos Lemas* de Arquimedes ([Ver1], p. XXVII):

A proposição IV demonstra que a área dos arbelos é igual à do círculo de diâmetro DC a perpendicular traçada do ponto de tangência dos dois semi círculos interiores ao diâmetro do semicírculo circunscrito.



A proposição V demonstra que os dois círculos descritos de um lado e de outro da perpendicular, tangentes a esta perpendicular e aos dois semi círculos são iguais.

A proposição VI demonstra que os diâmetros do semicírculo envolvente e do círculo que descreve o interior da figura, é tangente aos três semi círculos, estão entre eles como 19 esta para 6”

Suponhamos três semi-círculos ABC, ADE e EZC tangentes entre si e, inscrevamos no espaço compreendido entre estes arcos, círculos denominados Arbelos[92] de centro H, θ, K e F. Demonstraremos que a perpendicular traçada do centro H sobre AC é igual ao diâmetro do círculo de centro H; que a perpendicular traçada do centro θ sobre AC é igual ao dobro do diâmetro do círculo de centro θ; que a perpendicular traçada do centro K sobre AC é igual ao triplo do

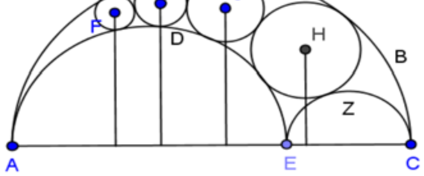


Figura 3.34

[92] Espaço curvilíneo compreendido entre três arcos de semi-círculos tangentes entre si.

diâmetro do círculo de centro K e, assim sucessivamente, isto é, as perpendiculares traçadas dos centros dos círculos são múltiplos dos respetivos diâmetros.

Proposição 18:

Considere-se o círculo com centro em Z tangente aos semi-círculos ABC e ADE tangentes entre si no ponto A e também tangente à base AC comum aos dois semi-círculos. Descrevamos tangencialmente a estes semi-círculos os círculos com centro em θ e H. A perpendicular traçada do ponto Z sobre AC é igual ao raio do círculo de centro Z, a perpendicular traçada do ponto H sobre AC é igual ao triplo do raio do círculo de centro H bem como a que é traçada do ponto θ é o quíntuplo do raio do círculo de centro θ, ou seja, as perpendiculares seguintes são múltiplas dos raios dos respetivos círculos [numa sequência de números ímpares].

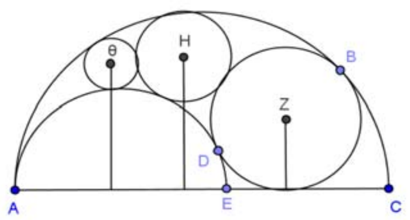


Figura 3.35

3.2 PROBLEMAS LINEARES

3.2.1 DIVISÃO DE UM ÂNGULO OU DE UM ARCO NUMA DADA RAZÃO

Relativamente a este problema Papo refere no capítulo XLV que:

"Dividir um ângulo ou um arco dado em três partes iguais é um problema sólido, como demonstrámos anteriormente, mas dividir um ângulo ou um arco dado numa razão dada é um problema linear" ([Ver1], p. 222).

Na proposição 35 e no capítulo XLV generaliza a divisão de um ângulo ou de um arco numa dada razão. Esta generalização é ilustrativa da transição dos problemas sólidos para os problemas lineares.

Como observa Papo, a divisão de um ângulo qualquer não pode ser resolvida através de cónicas, pelo que, apresenta na proposição 35 a solução para este problema usando a quadratriz.

Proposição 35:

Dividir o arco FG do quadrante do círculo $K\mathrm{FG}$ numa razão dada.

Prova:

Consideremos os segmentos FB e BG e a perpendicular BK a BG. Seja KADC a quadratriz que interseta BF no ponto A. Consideremos a reta AE perpendicular a BG por A e seja Z o ponto de AE tal que a razão $\frac{\mathrm{AZ}}{\mathrm{ZE}}$ é a razão em que se pretende dividir o ângulo ou o arco correspondente. Seja ZD paralela a BG, M o ponto de intersecção do prolongamento de BD com o arco da circunferência e DH a perpendicular a BG por D. Tendo em

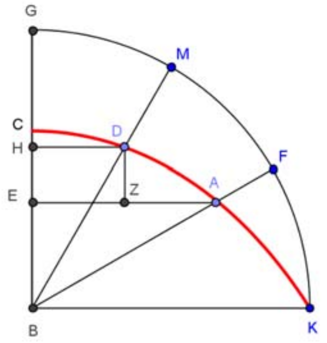


Figura 3.36

conta a principal propriedade da quadratriz[93], sabe-se que $\frac{\angle ABC}{\angle DBC} = \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{DH}}$, ou seja, $\frac{\text{arco FG}}{\text{arco MG}} = \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{DH}}$ e, da proposição[94] *Elementos* VI, 33 de Euclides, tem-se $\frac{\angle FBG}{\angle MBG} = \frac{\text{arco FG}}{\text{arco MG}}$, obtendo-se então $\frac{\angle ABC}{\angle DBC} = \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{DH}} = \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{ZE}}$, que é a razão dada.

Papo apresenta a seguir uma outra construção, utilizando a espiral de Arquimedes para a divisão de um ângulo ou de arco numa dada razão.

Divida-se o arco CA do círculo CHA de centro B da seguinte forma:

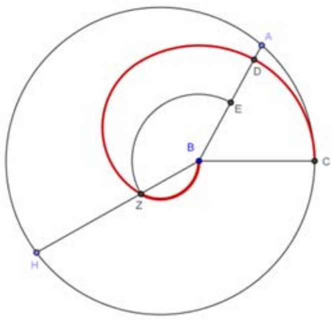


Figura 3.37

Tracemos os raios AB e BC e em torno do ponto B descrevamos a espiral $BZDC$ de raio vetor BC. Consideremos que a razão entre os segmentos DE e EB é a mesma que a razão dada. Com centro no ponto B e passando por E descrevemos o arco EZ sendo Z o ponto de interseção com a espiral. Designemos por H o ponto de interseção do círculo dado com o prolongamento de BZ.

Tendo em conta as propriedades[95] da espiral, tem-se que $\frac{Arco\ CHA}{Arco\ CH} = \frac{BD}{BZ} = \frac{BD}{BE}$ e, portanto, $\frac{Arco\ CHA - arco\ CH}{Arco\ CH} = \frac{BD-BE}{BE}$, ou seja, $\frac{Arco\ HA}{Arco\ CH} = \frac{DE}{BE}$ que é a razão dada.

Papo refere ([Ver1], p. XXXIX) a impossibilidade de resolução deste problema com régua e compasso, embora tivesse sido tentada pelos antigos geómetras, ao tentarem dividir a circunferência do círculo em partes iguais. Gauss viria a provar que os factores primos de um número, diferente de 2, em que se podia dividir o círculo em partes iguais, usando régua e compasso, teriam de ser da forma $2^{2^n} + 1$.

Proposição 36:

É possível retirar arcos iguais de dois círculos com diferentes raios.

---

[93] Ver Capítulo II, página 40.

[94] Ver nota 35 da página 29.

[95] Definidas na proposição 14 do tratado *Das espirais* de Arquimedes e na proposição 19 do Livro IV da *Coleção Matemática* de Papo.

Prova:

Sejam AHB e $C\theta D$ dois arcos iguais obtidos dos círculos com centro em E e Z, respetivamente, sendo E o centro do círculo maior. Assim o arco do círculo maior que é semelhante ao arco $C\theta D$ é maior que o arco AHB. Seja $C\theta$ o arco do círculo menor semelhante

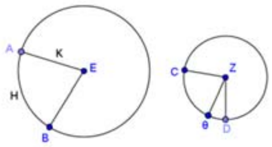


Figura 3.38

ao arco AHB, então, da proposição[96] *Elementos* V,7, temos que $\frac{\hat{a}ngulo\ AEB}{4\ \hat{a}ngulos\ retos} = \frac{\hat{a}ngulo\ CZ\theta}{4\ \hat{a}ngulos\ retos}$.

Mas, $\frac{\hat{a}ngulo\ AEB}{4\ angulos\ retos} = \frac{arc\ AHB}{c\acute{i}rculo\ de\ centro\ em\ E}$ e $\frac{\hat{a}ngulo\ C\theta Z}{4\ \hat{a}ngulos\ retos} = \frac{arc\ C\theta}{c\acute{i}rculo\ de\ centro\ em\ Z}$ donde $\frac{arc\ AHB}{c\acute{i}rculo\ de\ centro\ em\ E} = \frac{arc\ C\theta}{c\acute{i}rculo\ de\ centro\ em\ Z}$ e, portanto $\frac{arc\ AHB}{arc\ C\theta} = \frac{2AE}{2CZ}$, que são grandezas conhecidas[97].

Por hipótese, o arco AHB é igual ao arco $C\theta D$, então os arcos $C\theta D$ e $C\theta$ são também conhecidos e, $\frac{arc\ AHB}{arc\ C\theta} = \frac{AE}{CZ}$, ou seja, $\frac{arc\ C\theta D - arc C\theta}{arc\ C\theta} = \frac{arc\ \theta D}{arc\ CD} = \frac{AE - CZ}{CZ}$. Portanto, $C\theta D$ ficou assim dividido numa razão dada pelo ponto θ. Na proposição 35 vimos dois processos para decompor um arco numa razão dada.

[96] ***Elementos* V,7**: As grandezas iguais têm a mesma razão para uma mesma grandeza, e a mesma grandeza tem também a mesma razão para grandezas iguais.

[97] Esta expressão assume que a razão entre a circunferência e o seu diâmetro é constate, resultado que Papo demonstra na proposição V, 11 e na proposição VIII, 22.

3.2.2. PROBLEMA DA RETIFICAÇÃO DA CIRCUNFERÊNCIA

O problema da rectificação da circunferência, isto é, a construção de um segmento de reta com comprimento aproximadamente igual a π, está na base da dificuldade em obter uma solução para o problema da quadratura do círculo, usando régua e compasso.

Para o cálculo de π , Howard Eyes refere que:

"(…) *a primeira tentativa científica de calcular* π *parece ter sido a de Arquimedes* (…)".([EV], p.141)

Arquimedes apresenta no seu tratado *A Medida do Círculo,* constituído apenas de três proposições, um processo – Método de Exaustão - para enquadrar o π. Trata-se de inscrever e circunscrever[98], sucessivamente, numa circunferência unitária, polígonos regulares com o dobro do número de lados e, a partir dos seus perímetros, obter o perímetro da circunferência. Com este processo, Arquimedes chegou ao valor $\frac{223}{71}$ e $\frac{22}{7}$ para π.

No tratado *Almagesto* (*Syntaxis mathematica*) de Claudio Ptolomeu o valor de π é dado em notação sexagesimal por 38'30'', ou seja, $\frac{377}{120}$ ou 3,1416 que segundo Eyes:

"(…) esse valor foi obtido a partir de uma tábua de cordas que há no tratado. A tábua fornece os comprimentos das cordas de um círculo correspondentes aos ângulos centrais de 0^0 a 180^0, com incrementos de meio grau. Multiplicando-se o comprimento da corda do ângulo central de 1^0 por 36^0 e dividindo-se o resultado pelo comprimento do diâmetro do círculo, obtém-se o valor de π acima. (…)".([EV], p.142).

Muitos outros valores são atribuídos a π, nomeadamente nas placas encontradas em 1936 em Susa, capital do antigo Elam, cerca de 360 km a Este da Babilónia, há um texto que dá a seguinte relação entre o perímetro de um hexágono regular (P_6) e o perímetro P da circunferência circunscrita ao hexágono, isto é, $P_6 = \left(\frac{57}{60} + \frac{36}{60^2}\right) \times P$. Se substituirmos P_6 por 6r e P por $2\pi r$, onde r é o raio da circunferência circunscrita ao hexágono,

[98] Este processo iria dar origem ao desenvolvimento da teoria da integração.

obtemos $6r = \left(\frac{57}{60} + \frac{36}{60^2}\right) \times 2\pi r \Leftrightarrow \pi = \frac{3}{\frac{57}{60}+\frac{36}{60^2}}$ e, portanto, $\pi \cong 3\frac{1}{8}$. João Campano[99] (1220-1296) apresenta na sua obra *A Quadratura do Círculo* uma construção geométrica para o valor aproximado de π:

"Usando conhecimentos da Matemática e proposições verdadeiras da Física, um círculo pode dividir-se em 22 partes iguais e se a essas subtrairmos uma, por exemplo a 22ª, um terço do que sobrar [7 partes] constitui [em medida] um diâmetro. Então, se o diâmetro for triplicado e a esse resultado for adicionado um sétimo do diâmetro então a linha resultante, retificada, será igual à linha circular dada". ([Cl], p.591).

Na proposição 27 Papo refere que o retângulo compreendido pelo perímetro do círculo e o seu raio é o dobro do círculo, resultado demonstrado por Arquimedes. Inversamente, dado um círculo de raio r e um quadrado de área πr^2, constrói-se outro quadrado cujo lado é a diagonal do quadrado dado. A área deste novo quadrado é $2\pi r^2$. Aplicando este quadrado ao raio do círculo dado, obtemos um segmento de reta de comprimento $2\pi\, r$, e portanto retificamos a circunferência do círculo dado.

Este problema também ocupou os sofistas Antifonte[100] de Atenas (século V a. C) e Brisão de Heraclea[101] (450 a.C) filho do historiador Heródoto de Heracles. Para o resolver, o primeiro inscreveu polígonos regulares, *cujo número de lados aumentava numa progressão geométrica de razão 2*, concluindo erradamente[102] que, prosseguindo a construção o polígono se confundia por fim com a circunferência.

De acordo com Simplício:

"Para que a circunferência possa ser alcançada [pelo lado do polígono], o princípio geométrico que afirma que grandezas se podem sempre dividir seria violado. Foi este princípio que Eudemo disse ter sido violado por Antifonte." ([Th], p. 315).

Euclides refere-se a este processo de forma diferente da apresentada por Antifonte, como é observado por Knorr:

[99] Tradutor da primeira edição, em Latim, dos *"Elementos de Euclides"*, em 15 Livros.

[100] A questão da identidade de Antifonte, o orador ou o sofista, mantém-se em aberto.

[101] Possivelmente discípulo de Sócrates.

[102] A área entre o polígono inscrito e o círculo nunca será "exaurida" aplicando este método apenas um número finito de vezes.

"Euclides obtém cada polígono da sequência bissetando os arcos delimitados pelos vértices do polígono precedente. Antifonte, por outro lado, constrói cada novo polígono a partir do antecedente adicionando triângulos a cada um dos lados". ([Kn1], p. 28).

As proposições 37 e 38 mostram como é possível construir um polígono regular com qualquer número de lados, de forma semelhante à apresentada nas proposições[103] *Elementos* IV, 10, 11 de Euclides.

A proposição 37 resolve o problema de construir um triângulo isósceles em que cada um dos ângulos da base está numa razão dada com o ângulo restante. Isto é, trata-se do problema de dividir o arco de um círculo numa razão dada.

Proposição 37: Construir um triângulo isósceles dada a razão entre os ângulos da base e o outro ângulo.

Prova:

Consideremos o problema resolvido e seja ABC o triângulo isósceles construído. Com centro no ponto B tracemos a circunferência ACD, prolonguemos AB até encontrar a circunferência no ponto D e unamos D a C pelo segmento DC. Por hipótese, como a razão entre os ângulos BAC e ACB, da base do triângulo e o ângulo ABC é dada, e como, da proposição[104] *Elementos* III, 20, decorre que a amplitude do ângulo com vértice em D é metade da amplitude do ângulo ABC, pelo que a razão entre os ângulos BAC e ACB e o ângulo ADC é também dada.

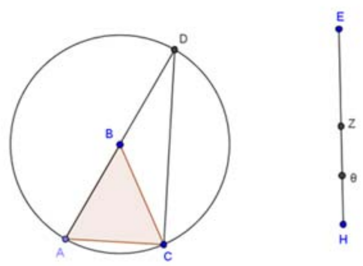


Figura 3.39

Consequentemente, da proposição[105] *Elementos* VI, 33 a razão entre a amplitude dos arcos DC e AC é conhecida, pelo que a semicircunferência ficou dividida pelo ponto C na razão dada, construindo-se, desta forma o triângulo isósceles ABC, conhecida a razão entre os ângulos da base e o outro ângulo.

[103] ***Elementos* IV, 10:** Construir um triângulo isósceles de modo a que cada um dos ângulos, que estão sobre a base, seja o dobro do ângulo do vértice.

***Elementos* IV, 11:** Inscrever num círculo dado um pentágono equilátero e equiângulo.

[104] ***Elementos* III, 20:** Em qualquer círculo, o ângulo com vértice no centro tem de amplitude o dobro do ângulo com vértice na circunferência, tendo cada um destes ângulos como por base o mesmo arco de circunferência.

[105] Ver nota 35 da página 29.

A proposição 38 é um corolário da proposição 37.

Proposição 38:

Podemos inscrever num círculo um polígono equilátero e equiângulo com qualquer número de lados.

Nas proposições 39 a 41 Papo usa a quadratriz para a retificação da circunferência.

A proposição 39 é o recíproco da proposição 26 que determina por meio da quadratriz, apresentada no capítulo II desta dissertação, um segmento de reta igual à circunferência do círculo.

Proposição 39:

Como traçar uma circunferência cujo perímetro é igual a um segmento dado.

Prova:

Considere-se o segmento de reta C e procuremos a circunferência do círculo A igual ao segmento dado. Seja o círculo B e usando a quadratriz[106] procuremos o segmento D igual a esta circunferência, tal como vimos na proposição 26. Então $\frac{\text{raio do círculo A}}{\text{raio do círculo B}} = \frac{C}{D}$ e, sendo conhecida a razão $\frac{C}{D}$ podemos, evidentemente, conhecer a razão $\frac{\text{raio do círculo A}}{\text{raio do círculo B}}$. Além disso, o raio do círculo B é conhecido, pelo que, se torna possível determinar o raio do círculo A, obtendo-se o pretendido.

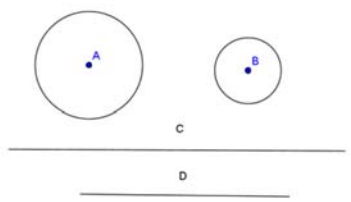


Figura 3.40

A proposição seguinte resolve, usando a quadratriz, o problema de descrever sobre uma corda dada, um arco de um círculo que está numa dada razão com essa corda.

[106] Ver proposição III, 26 da página 41.

Proposição 40:

Descrever sobre a corda AB um arco de um círculo que está numa dada razão com essa corda.

Prova:

Seja AB um segmento de reta. Pretendemos descrever o arco ACB de centro num ponto F com uma razão dada com o segmento AB. Considere-se ZGE o quadrante do círculo de centro em H e a quadratriz $\mathrm{Z\theta K}$. Definimos no arco ZE um ângulo EHG igual ao ângulo ao centro correspondente ao arco AC e tracemos as perpendiculares GM e $\mathrm{\theta N}$ a EH. Tendo em conta a propriedade da quadratriz temos que $\frac{\text{arco GE}}{\theta \text{N}}=\frac{\text{arco EGZ}}{\text{ZH}}$ e, pela proposição 26, $\frac{\text{arco EGZ}}{\text{ZH}}=\frac{\text{ZH}}{\text{HK}}=\frac{\text{GH}}{\text{HK}}$, pelo que $\frac{\text{arco GE}}{\theta\text{N}}=\frac{\text{GH}}{\text{HK}}$ (I). Por outro lado, pelo paralelismo das retas $\mathrm{\theta N}$ e GM, $\frac{\theta\text{N}}{GM}=\frac{\theta\text{H}}{HG}$ (II) e de *Elementos* V, 23, multiplicando membro a membro as relações (I) e (II) temos que $\frac{\text{arco GE}}{\theta\text{N}}\times\frac{\theta\text{N}}{GM}=\frac{\text{GH}}{\text{HK}}\times\frac{\theta\text{H}}{HG}$, ou seja, $\frac{\text{arco GE}}{\text{GM}}=\frac{\theta\text{H}}{HK}$.

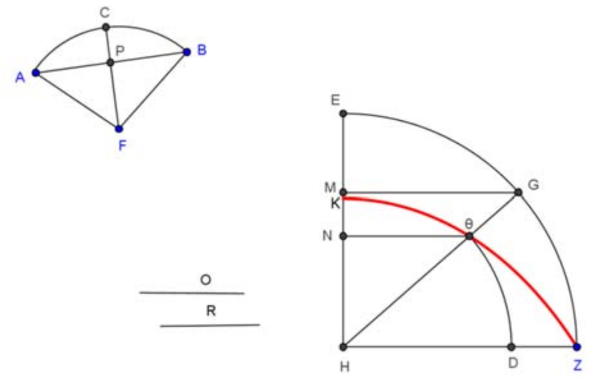


Figura 3.41

Tracemos a perpendicular FPC a AB pelo que, por construção, o ângulo $CF\mathrm{A}$ é igual ao ângulo EHG, portanto $\frac{\text{arco ACB}}{\text{AB}}=\frac{\text{arco AC}}{\text{AP}}$. Como os arcos GE e AC dos círculos de centros H e F, respetivamente, são arcos correspondentes a ângulos ao centro iguais, temos que, $\frac{\text{arco GE}}{\text{arco AC}}=\frac{\text{HG}}{\text{AF}}$. Por outro lado, da semelhança dos triângulos GHM e AFP temos que $\frac{\text{HM}}{\text{AP}}=\frac{\text{HG}}{\text{AF}}$, pelo que $\frac{\text{arco GE}}{\text{arco AC}}=\frac{\text{GM}}{\text{AP}}$, ou seja, $\frac{\text{arco GE}}{\text{GM}}=\frac{\text{arco AC}}{\text{AP}}$ e, tendo em conta a relação anterior, $\frac{\text{arco GE}}{\text{GM}}=\frac{\theta\text{H}}{HK}$, obtemos $\frac{\text{arco AC}}{\text{AP}}=\frac{\theta\text{H}}{HK}$, ou seja, $\frac{\text{arco ACB}}{\text{AB}}=\frac{\theta\text{H}}{HK}$. Por hipótese, é conhecida a razão entre o arco ACB e o segmento de reta AB pelo que a razão entre $\mathrm{\theta H}$ e HK é também conhecida e, pela quadratriz, a razão entre HK e HE é conhecida. Da proposição 2[107] do tratado "*Dados*" de Euclides $\mathrm{\theta H}$ é também conhecido pelo que o ponto θ fica determinado pois está sobre a circunferência de centro H e raio $\mathrm{\theta H}$ e também, por

[107] **Dados, 2:** Sejam dadas uma grandeza e a sua razão com outra grandeza esta última grandeza passa a ser conhecida.

hipótese, sobre a quadratriz $\mathrm{Z\theta K}$. Da proposição 26[108] de *"Dados"* o segmento de reta $H\theta\mathrm{G}$ fica determinado. De igual modo, pela proposição 30[109] do mesmo tratado o ângulo compreendido entre EH e HG fica determinado e será igual ao ângulo compreendido entre CF e FA. Consequentemente, ficam determinados os segmentos CF e FA e o ponto A. Da proposição 90[110] do mesmo tratado determinamos o arco ACB.

A síntese far-se-á da seguinte forma: HK fica determinada pela quadratriz e $D\mathrm{H}$ fica determinado de modo que $\frac{D\mathrm{H}}{\mathrm{HK}} = \frac{\mathrm{O}}{\mathrm{R}}$, sendo O e R segmentos dados, mas não mencionados no problema, como refere Commandino. Tracemos o arco de centro H passando pelo ponto D. Seja θ um ponto deste arco que interseta a quadratriz e consideremos o segmento $\theta\mathrm{H}$. Determinemos o ponto médio de AB e tracemos a perpendicular PF. Tracemos AF de tal modo que o ângulo compreendido entre AF e FP seja igual ao ângulo compreendido entre KH e $H\theta$. Com centro no ponto F e passando por A tracemos o arco ACB cuja razão entre AB será a mesma que a razão dada.

Do que foi exposto anteriormente, verificamos que podem ser determinados arcos incomensuráveis entre si de um mesmo círculo pois, supondo que um determinado ângulo ou arco é racional, o ângulo ou o arco restante é irracional.

Vejamos como podemos, através da quadratriz, encontrar ângulos incomensuráveis.

Proposição 41:

Podem ser determinados arcos de um mesmo círculo incomensuráveis entre si.

Prova:

Consideremos o quadrante ABC e sobre ele a quadratriz ADEZ. Tracemos BM e a paralela DH a BC. Consideremos um segmento $B\theta$ incomensurável com o segmento BH. Tracemos $E\theta$ a paralela a DH e o segmento BE. Mostremos que o ângulo DBZ é incomensurável com o ângulo EBZ.

[108] **Dados, 26**: Se a extremidade do segmento de reta é dado então o segmento fica determinado bem como a sua grandeza.

[109] **Dados, 30:** Por um ponto e um segmento dados tracemos outro segmento que determinará um ângulo entre eles.

[110] **Dados, 90:** Se na circunferência de um círculo considerarmos um ponto e, por esse ponto, traçarmos uma reta que interseta a circunferência segundo um ângulo dado, fica determinada a extremidade da reta traçada.

Tracemos a perpendicular EN a BC e, tendo em conta a propriedade da quadratriz ADEZ, $\frac{\text{arco MC}}{\text{arco FC}} = \frac{\mathrm{DK}}{\mathrm{EN}}$ e, da proposição[111] *Elementos* VI, 33 $\frac{\text{o ângulo MBC}}{\text{o ângulo FBC}} = \frac{\text{arco MC}}{\text{arco FC}}$ pelo que $\frac{\text{o ângulo DBZ}}{\text{o ângulo EBZ}} = \frac{\mathrm{DK}}{\mathrm{EN}}$. Mas DK é incomensurável com EN, pois HB é incomensurável com $B\theta$, pelo que, da proposição[112] *Elementos* X, 10, os ângulos EBZ e DBZ são incomensuráveis entre si. Assim, supondo que o ângulo DBZ é racional então o ângulo EBZ é irracional.

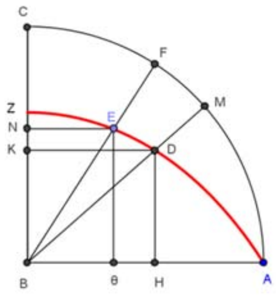


Figura 3.42

[111] Ver nota 35 da página 29.

[112] ***Elementos* X, 10**: Se quatro grandezas são proporcionais e se a primeira é comensurável com a segunda então a terceira será comensurável com a quarta; se a primeira é incomensurável com a segunda então a terceira será incomensurável com a quarta.

3.3 PROBLEMA SÓLIDO

TRISSEÇÃO DO ÂNGULO

É ao período compreendido entre os séculos V e IV a.C que remontam os três problemas clássicos relativos a construções geométricas na Matemática Grega: a trisseção do ângulo, a quadratura do círculo e a duplicação do cubo. Como se sabe desde o século XIX, são problemas impossíveis de resolver utilizando apenas régua não graduada e compasso. No entanto, foram as várias tentativas de resolução destes problemas, com régua não graduada e compasso, que os tornaram famosos pois possibilitaram a descoberta de novos resultados e processos matemáticos. Pensa-se que terá sido Platão o responsável por esta restrição nas construções geométricas gregas. Em *Vidas de Marcelo*[113] de Plutarco, refere-se a indignação de Platão na utilização de instrumentos mecânicos em geometria:

"(…) pura e simples corrupção e aniquilação do que há de bom na geometria, a desmaterialização da inteligência pura."

As construções que apenas fazem uso da régua não graduada e compasso chamam-se *construções euclidianas*. Para Papo, estas construções resolviam apenas um de três tipos de problemas geométricos, classificados anteriormente no início deste capítulo. Desde a Antiguidade que, muitos geómetras estavam convictos da impossibilidade de resolver o problema da trisseção do ângulo sob as condições platónicas, embora não se conhecesse uma demonstração rigorosa, como observa Papo na seguinte passagem do capítulo XXXVI do livro IV da *Coleção Matemática*:

Quando os antigos geómetras pretenderam dividir um ângulo rectilíneo dado em três ângulos iguais, sentiram-se embaraçados com este problema: já referimos que há três tipos de problemas geométricos que são os planos, sólidos e grâmicos. (…) Daí a incapacidade dos primeiros geómetras para encontrar a solução do problema, pois é de natureza sólida e eles tratavam-no como se de um problema plano se tratasse, utilizando rectas, circunferências e a intersecção destas linhas, pois as seções cónicas não eram familiares nessa altura. Foi só quando, mais tarde,

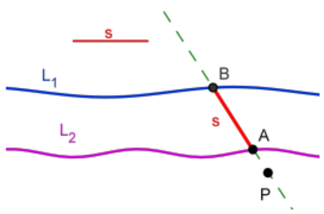
[113] Traduzido a partir de uma versão em língua inglesa de J. R. Newman (1988), in The World of Mathematics, Washington: Tempus Books, vol I, pp.175-179) em [Www5]

tiveram o conhecimento das construções por nêusis que surgiram várias soluções aproximadas. ([Ver1], pp.206-208)

O reconhecimento da ineficácia dos métodos usados motivou os geómetras gregos a resolveram este problema com o recurso a outras curvas: secções cónicas, concóide de Nicodemes, espiral de Arquimedes, cissóide de Diocles e quadratriz de Dinóstrato. Papo refere também que os antigos geómetras tinham instrumentos mecânicos apropriados para executar estas construções como se pode constatar no *Mesolábio* de Eratóstenes e nas *Mecânicas* de Fílon e de Herão. No capítulo XXXVII do Livro IV da *Colecção Matemática*, Papo apresenta-nos nas proposições 31 a 34, quatro construções para a resolução do problema da trisseção do ângulo, todas elas no âmbito da geometria sólida. Iremos apresentar, em primeiro lugar, a construção por nêusis, que pode ter sido inventada pelo próprio Papo, e, posteriormente, as outras três: a de Eratóstenes, a de Nicomedes e a de Herão. Por este ser um problema sólido, Papo critica as construções de Arquimedes, que num caso faz uso duma nêusis, e no outro duma espiral.

Segundo Estrada ([ESQSC], pp. 280-281) uma construção por nêusis consiste no seguinte:

D*ados um ponto P, um segmento de recta s e duas linhas L_1 e L_2, a construção de dois pontos A e B tais que A, B e P sejam colineares, os segmentos de reta AB e s tenham o mesmo comprimento, B esteja sobre L_1 e A esteja sobre L_2, diz-se uma construção por nêusis*.



Na proposição[114] 31 do Livro IV, Papo apresenta, por meio da analise, uma construção por nêusis[115] , para a trisseção de um ângulo, feita através da interseção de cónicas. Usa uma circunferência e uma hipérbole equilátera, obtida por determinados pontos dados e pelas assimtotas. Esta solução é, provavelmente, extraída do tratado *As Inclinações* de Apolónio. Paralelamente a este problema, Papo resolve o problema de construir uma hipérbole passando por um ponto dado entre as duas assimtotas. A construção da hipérbole apresentada por Papo é mais simples que a de Apolónio.

[114] Esta proposição garante a existência de um ponto sobre uma hipérbole.

[115] Do verbo grego *neuein* que significa apontar.

Proposição 31:

Seja ABCD um paralelogramo. É possível traçar uma transversal AE, com E em DC, de tal modo que sendo Z o ponto de interseção do prolongamento de BC com AE, EZ seja igual a um segmento dado.

Prova:

Suponhamos o problema resolvido e tracemos as retas DH e HZ paralelas às retas EZ e ED, respetivamente. Observemos que o ponto H fica definido pois $EZ = DH$ pelo que H é o ponto de interseção da semirreta DH com a circunferência de centro D e raio EZ.

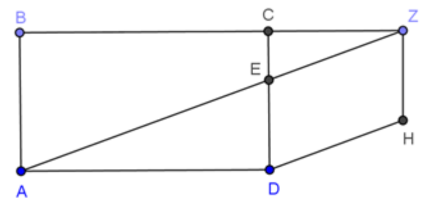


Figura 3.43

Por outro lado, se considerarmos as paralelas a AD respetivamente por H e por E da proposição[116] *Elementos* I, 43 $BC \times CE = ED \times EO$ com $BC \times CE + GE \times ED = ED \times EO + GE \times ED$ e, portanto, $BC \times CD = GO \times ED = BZ \times ED = BZ \times ZH$.

Supondo que os pontos D e H estão sobre um ramo de hipérbole cujas assímtotas são as retas BZ e BA e considerando que HZ e HD são traçadas paralelamente às retas CD e AZ, respectivamente, então, da proposição[117] *Cónicas* II, 12 temos que,

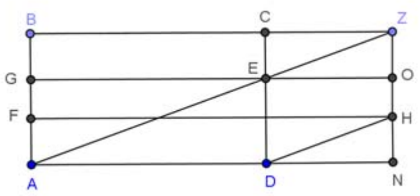


Figura 3.44

$AD \times CD = FH \times ZH$ ou seja $BC \times CD = BZ \times ZH$. Portanto o ponto H está sobre o ramo de hipérbole de assímtotas AB e BZ e sobre a circunferência do círculo dado.

O problema sintetiza-se da seguinte forma:

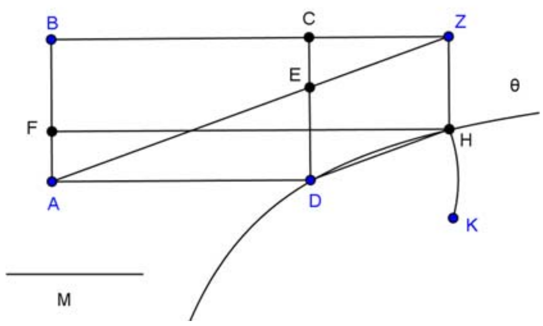
Seja $ABCD$ o paralelogramo dado e M o comprimento de segmento dado. Seja K o ponto no prolongamento do segmento AD tal que $DK = M$. Descrevemos a hipérbole $DH\theta$ de assimtotas AB e BC, e passando por de D, acordo com a proposição *Cónicas* II, 4 de

[116] **Elementos I, 43**: Em qualquer paralelogramo os complementos dos paralelogramos, que existem ao redor da diagonal, são iguais entre si.

[117] **Cónicas II, 12:** Se por um ponto de uma secção traçarmos duas retas formando um ângulo qualquer com as assimtotas, e se por outro ponto da secção traçarmos as paralelas a estas retas, o retângulo formado por estas paralelas será equivalente ao retângulo formado pelas retas pelas quais foram traçadas as referidas paralelas.

Apolónio[118]. Descrevamos o arco KH de centro em D que intersetará a hipérbole no ponto H.Tracemos HZ paralela a DC e a reta AZ que intersecta CD em E. Mostremos que $\mathrm{EZ} = \mathrm{M}$

Consideremos HD e tracemos HF paralela a KA. Então, $ZH \times HF = BZ \times ZH = CD \times DA$



ou seja, $BZ \times ZH = CD \times BC$. Portanto, $\frac{CD}{ZH} = \frac{BZ}{BC}$ e como $\frac{BZ}{CZ} = \frac{AB}{CE} = \frac{CD}{CE}$ temos que, $\frac{BZ}{BZ-CZ} = \frac{CD}{CD-CE}$ ou seja, $\frac{BZ}{BC} = \frac{CD}{DE}$ bem como $\frac{CD}{ZH} = \frac{CD}{DE}$. Além disso, $DE = ZH$ e, por construção, DE e ZH são paralelas então $DEZH$ é um paralelogramo, pelo que $EZ = DH = DK = M$.

Tal como Papo refere, no capítulo XXVII do Livro IV, a concóide de Nicomedes permite também resolver o problema da trisseção do ângulo:

"Nicomedes mostrou que podemos traçar esta curva de forma instrumental de modo que qualquer segmento que esteja entre a diretriz e a curva e apontado a um ponto fixo tenha sempre o mesmo comprimento. Iremos, por meio desta curva, decompor um ângulo em três partes iguais, ou seja resolver o problema da trisseção do ângulo utilizando a concóide". ([Ver1], p. 187).

Seja ABC o ângulo a trissecionar.

Por um ponto A de um dos lados do ângulo, tracemos uma paralela e uma perpendicular ao lado BC. Seja F a interseção da perpendicular com o lado BC. Traça-se a concóide de Nicomedes definida pela reta AF, pelo pólo B e constante $2AB$. Seja E a interseção do ramo da concóide, no lado oposto, com a reta paralela a BC, que passa por A[119]. Desta forma, inserimos o segmento DE duplo do segmento AB, entre as curvas AF e AE e apontado para o ponto B, que tal como vimos na proposição 32, trissecionamos o ângulo dado.

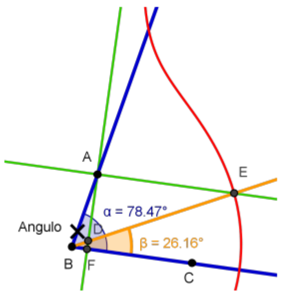


Figura 3.49

[118] **Cónicas II, 4::** Dadas duas retas, que formam um ângulo entre si, e um ponto no interior dessas retas, descrever por esse ponto uma secção cónica denominada hipérbole tal que as retas dadas sejam as suas assímtotas. ([Ver 1], pp. 214-216).

[119] O ponto E foi determinado, no Geogebra, pela interseção da reta paralela a BC e que passa por A com a reta resultante da rotação de BC em torno de B e de um ângulo igual a um terço do ângulo ABC, dado que o Geogebra não determina a interseção de uma curva com uma reta.

Proposição 32:

Trissetar um ângulo rectilíneo dado.

Prova:

Suponhamos em primeiro lugar que o ângulo CAB a trissetar é agudo. Por um ponto qualquer C de um dos lados do ângulo, traçamos uma reta perpendicular ao outro lado, e completado o paralelogramo GF, prolonguemos GC até ao ponto D de tal forma que o segmento DE, o segmento compreendido entre as retas DC e CF, seja igual ao dobro do segmento CA pela construção descrita na proposição anterior.

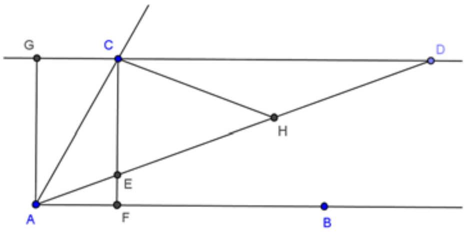


Figura 3.46

Então, Papo diz que o ângulo $\angle DAB$ é a terça parte do ângulo dado $\angle CAB.$

Com efeito, dividindo o segmento DE em duas partes iguais e sendo H o seu ponto médio tem-se que:

por um lado, $\angle HDC = \angle BAE$, pela proposição[120] *Elementos* I, 29 de Euclides, porque são dois ângulos alternos internos entre as retas paralelas AB, CD cortadas pela secante AD; por outro lado, como o ângulo $\angle DCE$ é reto, o triângulo DCE pode ser inscrito numa semicircunferência de centro em H e diâmetro DE logo os três segmentos $HE,\ CH$ e HD são iguais. Consequentemente, o segmento de reta DE é o dobro do segmento de reta CH. Logo, o segmento de reta AC é igual ao segmento de reta CH, pelo que o triângulo HCD é isósceles. Portanto, pela proposição[121] *Elementos* I, 5 de Euclides, o ângulo $\angle CHE$ é igual ao ângulo $\angle CAH$.

Uma vez que $\angle CHE$ é ângulo externo do triângulo HCD tem-se, pela proposição[122] *Elementos* I, 32 de Euclides, que:

$$\angle CHE = \angle HCD + \angle HDC = 2\,\angle HDC = 2\,\angle BAE.$$

Por construção, $DE = 2AC$ e, portanto, $AC = CH$, ou seja, o triângulo CHA é isósceles. Novamente, pela proposição *Elementos* I, 5 de Euclides, tem-se $\angle CAE = \angle CHE$. Portanto, tem-se $\angle CHE = 2\,\angle CDE = 2\,\angle EAF$, ou seja, $\angle CAE = 2\,\angle EAF$. Se, pela

[120] ***Elementos* I, 29 :** Uma linha reta que corta duas retas parelas fazem os ângulos alternos iguais entre si; o ângulo externo igual ao interno e oposto da mesma parte e finalmente os internos da mesma parte iguais a dois retos.

[121] ***Elementos* I, 5 :** Em qualquer triângulo isósceles os ângulos que estão sobre a base são iguais, e construidos os lados iguais, os ângulos que se formam debaixo da base, são também iguais.

[122] ***Elementos* I, 32 :** Em qualquer triângulo, prolongando um lado qualquer, o ângulo externo é igual aos dois internos e opostos e os três ângulos internos de um triângulo qualquer são iguais a dois retos.

proposição[123] *Elementos* I, 9 de Euclides, dividirmos o ângulo $\angle CAE$ em duas partes iguais, o ângulo $\angle CAF$ ficará dividido em três partes iguais.

Por outro lado, se o ângulo DAB a trissetar é reto, construamos um triângulo equilátero ABC sobre o segmento AB e dividindo o ângulo CAB em duas partes iguais, obtemos a trisseção do DAB.

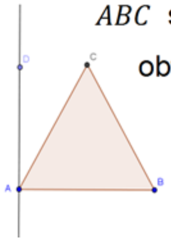


Figura 3.47

Suponhamos por fim que o ângulo é obtuso. Seja ABC o ângulo a trissectar e consideremos a perpendicular DB a BC por B o ângulo reto compreendido entre as retas BD e BC; considerando a sua terça parte, ou seja o ângulo compreendido entre as retas BD e BZ, bem como a terça parte do ângulo compreendido entre as retas AB e BD, o ângulo EBD, obtemos que o ângulo compreendido entre as retas EB e BZ é a terça parte do ângulo compreendido entre AB e BZ, então o ângulo EBZ é igual à terça parte do ânguloABC.

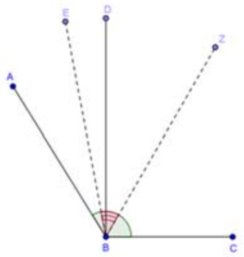


Figura 3.48

Portanto, o problema é plano para o caso do ângulo reto, isto é, é possível trissetá-lo, com régua não graduada e compasso, e da trisseção do ângulo agudo e do ângulo reto decorre a trisseção do ângulo obtuso.

Papo, inspirado talvez em Aristeu, foi provavelmente o autor da proposição 34, onde apresenta outra forma para trissetar um ângulo ou um arco[124] sem a construção por nêusis, usando uma hipérbole de dois modos diferentes. No primeiro caso, intersecta a hipérbole com uma reta e usa a propriedade diâmetro – ordenada da hipérbole e, no segundo caso, interseta a hipérbole com uma circunferência e usa a propriedade diretriz – foco da hipérbole.

Vejamos então a utilização da propriedade diâmetro – ordenada da hipérbole na trisseção do ângulo:

[123] ***Elementos* I, 9 :** Cortar em dois o ângulo retilíneo dado.

[124] Papo considera que trissetar um ângulo é o mesmo que trissetar o arco correspondente a esse ângulo

Proposição 34:

É possível trissetar um ângulo pela interseção de uma reta com uma cónica.

Prova:

Suponhamos que o ângulo AOC é o ângulo que se pretende trissetar.

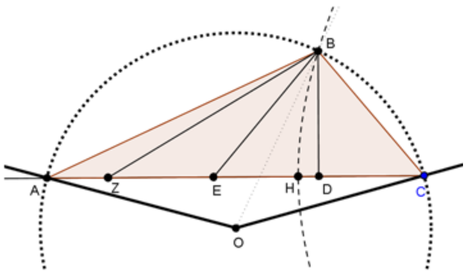


Figura 3.50

Consideremos A e C dois pontos da reta dada e determinemos o ponto B de modo que o triângulo ABC tenha os ângulos da base o dobro um do outro, isto é, $\angle ACB = 2\angle CAB$. Nestas condições o ponto B pertence a uma hipérbole.

Tracemos a perpendicular BD a AC e consideremos o ponto E tal que $DE = CD$.

Observemos que $BE = AE$.

De facto, por construção, $DE = CD$ e $\angle ACB = 2\angle CAB$, então $\angle BEC = 2\angle CAB$. Por outro lado, $\angle BEC = \angle CAB + \angle ABE$, logo $\angle CAB + \angle ABE = 2\angle CAB$, ou seja, $\angle ABE = \angle CAB$ e, portanto, $BE = AE$.

Consideremos agora $ZE = DE$, então $CZ = 3CD$. Seja H um ponto em AC tal que $AC = 3CH$, então $AC - CZ = 3(CH - CD)$, ou seja, $AZ = 3HD$.

Por outro lado, como $BD^2 = BE^2 - DE^2$ e $ZE = DE$, $BD^2 = BE^2 - ZE^2$. Como E é o ponto médio de ZD tem-se, pela proposição *Elementos* II, 6 de Euclides, que $DA \times AZ + ZE^2 = AE^2$, ou seja, $DA \times AZ = AE^2 - ZE^2$. Como $BE = AE$, então $DA \times AZ = BE^2 - ZE^2$, ou seja, $DA \times AZ = BD^2$.

Como $AZ = 3HD$, $3DA \times HD = BD^2$. Consequentemente, o ponto B está sobre a hipérbole de eixo transverso, ou seja, de diâmetro AH e ordenada o triplo do eixo transverso AH, pois, pela proposição[125] *Cónicas* I, 21 de Apolónio, $\frac{BD^2}{DA \times HD} = \frac{ordenada}{eixo\ transverso\ AH} = \frac{3}{1}$.

Por outro lado, $AC = 3HC$, ou seja, $AH + HC = 3HC$ e, portanto, $HC = \frac{1}{2}AH$.

Desta forma, AC foi dividida de modo a que $AH = 2HC$ e descrevemos em torno da reta AH a hipérbole com AH como eixo transverso e de ordenada o triplo de AH. A hipérbole, assim definida, divide um arco de um círculo em três partes iguais. Se considerarmos os

[125] Ver nota 26 da página 22.

pontos A e C as extremidades desse arco obtemos o arco AC dividido em três partes iguais.

No Capítulo XLIV do Livro IV, Papo expõe um método para a trisseção do ângulo ou do arco de uma outra forma, também sem utilizar a nêusis, que passamos a expor.

Consideremos o problema resolvido, sendo o arco BC a terça parte do arco ABC.

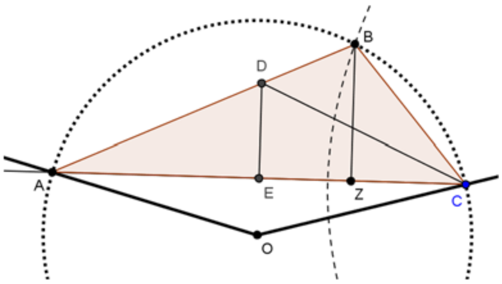


Figura 3.51

Consideremos no triângulo ABC o ângulo $\angle ACB = 2\angle BAC$. Seja CD a bissetriz do ângulo ACB e tracemos as perpendiculares DE e BZ ao lado AC. Temos que $AD = DC$, pois $\angle BAC = \angle DCE$ e, além disso, o ângulo com vértice no ponto E é reto, pelo que são iguais os triângulos DAE e DCE e, portanto, $AE = EC$.

Portanto, tendo em conta, a proposição[126] *Elementos* VI, 3 de Euclides, $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EZ} = \frac{AC}{BC}$, ou seja, $\frac{BC}{EZ} = \frac{AC}{AE}$. Como $AC = 2AE$ então $BC = 2EZ$. Consequentemente, pela proposição[127] *Elementos* I, 47 de Euclides, que corresponde ao Teorema de Pitágoras, temos que $BC^2 = BZ^2 + ZC^2$ e $BC^2 = 4EZ^2$, ou seja, $4EZ^2 = BZ^2 + ZC^2$, pelo que podemos concluir que o ponto B pertence a uma hipérbole.

Esta conclusão é apresentada por Papo sem demonstração. Contudo, usando a proposição[128] *Elementos* III, 35 Papo demonstra no Livro VII, nas proposições 236 e 237, que o ponto B está sobre uma parábola, elipse ou hipérbole se a razão $\frac{EZ^2}{BZ^2+ZC^2}$ é igual à unidade, maior ou mais pequena, respetivamente.

Como se tem $\frac{EZ^2}{BZ^2+ZC^2} = \frac{1}{4}$ então qualquer ponto F (não representado na figura) que se considere tal que $FZ = \frac{1}{2}ZC$, ou seja, $\frac{FZ^2}{ZC^2} = \frac{1}{4}$, tem-se que $\frac{EZ^2}{BZ^2+ZC^2} = \frac{FZ^2}{ZC^2} = \frac{1}{4}$, ou seja, $\frac{EZ^2-FZ^2}{BZ^2} = \frac{1}{4}$. Da proposição 34, determinamos sobre o lado AC dois pontos cujas distâncias ao ponto Z são, respetivamente, a e b verificando a relação $a \times b = EZ^2 - FZ^2$.

[126] **Elementos VI, 3:** Se um ângulo de um triângulo for dividido em partes iguais por uma reta que, divida ao mesmo tempo a base em dois segmentos, estes segmentos estarão entre si na razão dos outros dois lados do triângulo. E se os segmentos da base tiverem a mesma razão, que têm os outros lados do triângulo, também, a reta, que do vértice do triângulo for tirada para o ponto da seção, que separa os ditos segmentos, dividirá igualmente o ângulo que fica oposto à mesma base.

[127] Nota 6 da página 6.

[128] Ver nota 90 da página 77

Consequentemente, tem-se $\frac{a \times b}{BZ^2} = \frac{1}{4}$, que, em virtude da proposição[129] *Cónicas* I, 21 de Apolónio, define a hipérbole que passa pelo ponto B de eixo transverso $a - b$ e de ordenada $4(a - b)$.

Portanto, B é o ponto procurado.

[129] Ver nota 126 da página 98.

CONCLUSÃO

A imensa vastidão dos Problemas Geométricos da obra *Coleção Matemática* levou-nos à difícil opção de escolher apenas *Alguns problemas Geométricos de Papo de Alexandria.*

Dos *Problemas Planos* ficaram por apresentar as proposições 13 a 18 do Livro IV sobre Arbelos, apenas enunciamos sem demonstrar o resultado da proposição 18 por nos parecer interessante do ponto de vista didático.

Também não apresentamos o Teorema de Papo, percursor da Geometria projectiva, enunciado na proposição 129 do Livro VII. Papo distingue para esta proposição dois casos, quando as retas são paralelas – Proposição VII, 138 – e quando as retas não são paralelas - Proposição VII, 139.

Outro tema de grande relevância que ficou por abordar foram *Os Problemas Isoperimétricos*, onde Papo no Livro V identifica o polígono de área máxima de entre todos aqueles com o mesmo perímetro[130], e o sólido de volume máximo de entre todos aqueles com a mesma área de superfície.

Não nos foi também possível apresentar *A Heurística na Resolução dos Problemas Geométricos do Livro VII*, da *Coleção Matemática*, bem como a aplicação das curvas estudas no capítulo II na resolução dos dois problemas clássicos da geometria: a quadratura do círculo e a duplicação do cubo.

No entanto, foi muito gratificante o contacto com esta magnífica obra de Papo – *Coleção Matemática* – que possibilitou um enorme enriquecimento nos conhecimentos de temas relacionados com a Geometria, ainda que não permitindo o aprofundamento de todos eles. Esta foi a maior dificuldade que senti, dada a vastidão de temas, alguns bastante complexos, abordados nesta obra. Ficou, no entanto, a vontade de futuramente aprofundar estes temas para melhor reconhecer o contributo genial e original de Papo na resolução e na construção geométrica de alguns problemas.
Conhece-te a ti mesmo e nada em demasia talvez traduza bem a emoção final de toda esta batalha.

[130] Papo demonstra, na proposição V, 1 que, de dois polígonos regulares com o mesmo perímetro, o que tem maior área é o que tem maior número de lados.

BIBLIOGRAFIA

[A] **Aaboe, A.** (1984) – *Episódios da História Antiga da Matemática*, Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro.

[All] **Allan, G.** (1976) – *Greek Geometry from Thales to Euclid*, Arno Press, New York.

[BD] **Bkouche R. & Dellatre J.** (1977) – "Why Ruler and Compass?", History of Mathematics: History of Problems, Inter-IREM Commission, translated by Chris Weeks, Ellipses, Paris

[BGOT] **Bivar, A. & Grosso, C. & Oliveira, F. & Timóteo, M.** (2013) – *Metas Curriculares do Ensino Básico – Matemática – Caderno de Apoio 1.º ciclo*, Direção Geral de Educação.

[BJB] **Bunt, L. & Jones, P. & Bedient, J.** (1976) – *The Historical Roots of Elementary Mathematics*, Dover, New York.

[Boy] **Boyer**, Carl. (1993) - *História da Matemática.* Tradução: Elza F. Gomide. Edgard Blucher. São Paulo.

[C] **Correia,** Mário L. F. (2013) - *Diferentes Abordagens ao Estudo das Cónicas*. Tese de Mestrado. Faculdade de Ciência da Universidade do Porto.

[Cl] **Clagett, M.** (1964) – Archimedes in the Middle Ages, The University of Wisconsin, Madison.

[ESQSC] **Estrada, M. & Sá, C. & Queiró, J. & Silva, M. & Costa, M.** (2000) - *História da Matemática,* Universidade Aberta, Lisboa.

[EV] **Eves, H.** (1997) – *Introdução à História da Matemática*, Editora da Unicamp, São Paulo.

[G] **Garbi, Gilberto G.** (2009) - *A Rainha das Ciências: Um Passeio histórico pelo Maravilhosos Mundo da Matemática,* 3ª.ed revista. e ampliada – São Paulo: Editora Livraria da Física.

[Gl] **Galeria de Matemáticos** do Jornal de Matemática Elementar (2º volume), 1994.

[H1] **Heath, T.** (1912) – *The Works of Archimedes*, Dover, New York

[H2] **Heath, T.** (1981) – *A History of Greek Mathematics*, Dover, New York.

[K] **Katz, V.** (2010) – *História da Matemática*, Tradução Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa.

[Kn] **Knorr,** W. R. 5 (1978) - *Archimedes and the Spirals: the heuristic background"*, História Mathematica

[Kn1] **Knorr,** W. R. 5 (1993) - *The Ancient Tradition of Geometric Problems*, Dover, New York.

[Lo] **Lockwood,** E. (1978) - *A Book of Curves*, Cambridge University Press, Cambridge.

[M] **Mateus,** Isabel, F. (2002) - *O tratado Das espirais de Arquimedes,* Tese de Mestrado. Faculdade de Ciência da Universidade do Porto.

[N] **Newman, J. R.** (1988) - *The World of Mathematics,* volume I, Washington: Tempus Books; em [Www4].

[Pr] **Proclus de Lycie** (Séc. V d.C.) - *A Commentary on the First Book of Euclid's Elements*; *em [Www3].*

[S] ***Sá, C.*** *(1999)* – "*A Concóide de Nicomedes*", material da sessão prática "*O estudo da Concóide de Nicomedes e do Folium de Descartes, segundo Francisco Gomes Teixeira no Traité Des Courbes Spéciales Remarquables Planes et Gauches*", dinamizada por Maria Fernanda Estrada, Maria Graça Alves e Carlos Correia de Sá, ProfMat99, Portimão.

[Sa] **Sarmento,** Maria, I. (2007) - *Um Passeio Proveitoso Pelos Círculos de Apolónio*, Tese de Mestrado. Faculdade de Ciência da Universidade do Porto.

[So] **Sousa,** Miguel, J. (1991) - *Trissecção do Ângulo e Duplicação do Cubo: as Soluções na Antiga Grécia*, Tese de Mestrado. Faculdade de Ciência da Universidade do Porto.

[St] **Struik,** D. (1989) - *História Concisa das Matemáticas*, Tradução João Cosme Santos Guerreiro 1ªed., Gradiva, Lisboa.

[Th] **Thomas,** I. (1991-93) - *Greek Mathematical Works*, Harvard University Press, Cambridge

[To] **Toomer,** J. (1991) - *"Nicomedes", Biographical Dictionary of Mathematicians: Reference Biographies from The Dictionary of Scientific Biography*, Charles Scribner, New York.

[To3] **Toomer, J.** (1991) - "*Nicomedes",* Biographical Dictionary of Mathematicians: Reference Biographies from The Dictionary of Scientific Biography, Charles Scribner, New York, 4, pp. 1864-1867.

[V] **Vasconcelos, F.** (1925) – *História das Matemáticas na Antiguidade*, Aillaud e Bertrand, Lisboa.

[Ve] **Veloso, E.** (1998) – *Geometria: Temas Actuais - Materiais para Professores,* Instituto de Inovação Educacional, Lisboa.

[Ver1] **Ver,** Eecke, P. (1933) - *Pappus D'Alexandrie. La Collection Mathématique,* **I,** Albert Blanchard, Paris.

[Ver2] **Ver,** Eecke, P. (1982) - *Pappus D'Alexandrie. La Collection Mathématique,* **II,** Albert Blanchard, Paris.

[Wa] **Van Der , Waerden, B. L.** (1954) - *Science Awakening*, Noordhoff, Groningen.

INTERNET

[Www1] http://www.mat.uc.pt/~jaimecs/livrogt/intro.html

[Www2] **http://web.calstatela.edu/faculty/hmendel/Ancient%20Mathematics/Pappus/Bookiv/Pappus.iv.21-25/Pappus.iv.21_25.html**

[Www3] **http://www.math.harvard.edu/archive/archimedes09/pdf/Proclus.pdf**

[Www4] **http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/textosarquimedes/plutarco.h**

[Www5] **http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/apolonio/conicas.htmtm#marcelo**

[Www6] **http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/bookX/bookX.html**

ANEXOS

Em anexo, iremos apresentar algumas tarefas que poderão ser resolvidas pelos alunos do 9º ano de escolaridade, tendo como base tentativas recentes de construções geométricas, com os instrumentos euclidianos, de um segmento de reta com comprimento aproximadamente igual a π. Todas as construções são demonstradas algebricamente.

Plano de Aula

Escola____

Ano ____ Turma _____ Aula N.º ______________ ________ Data_____/_____ /_____

TEMA: Geometria e medida – Construção do número irracional π

SUMÁRIO: Determinação do valor aproximado de π: Resolução das tarefas 1 e 2

METAS: GM6-5.2; GM6-5.3; NO7-4.7; NO7-4.8; NO7-4.9; NO7-4.10; GM8-1.2; GM8-1.3; NO8-1.2; NO8-1.3; NO8-1.11

Atividades	– **Tarefa 1 – Método de Gelder** – Explicação (5 minutos) – Execução (30 minutos) – Síntese (10 minutos) – **Tarefa 2 – Método de Kochanski** – Explicação (10 minutos) – Execução (30 minutos) – Síntese (5 minutos)
Recursos disponíveis	• Fotocópia das tarefas • Programa Geogebra
Avaliação	• Observação formativa das produções efetuadas pelos alunos
TPC	• Sugere-se a construção, no programa Geogebra, das tarefas 1 e 2 desde que exista a possibilidade de os alunos possuírem estes recursos em casa.

Plano de Aula

Escola____

Ano _______ Turma __ Aula N.º ______________ __ Data _______/ ______/_______

TEMA: Geometria e medida – Construção do número irracional π

SUMÁRIO: Retificação da circunferência – construção de um segmento de reta de comprimento igual ao perímetro de uma circunferência.

Resolução das tarefas 3 e 4.

METAS: GM6-5.2; GM6-5.3; NO7-4.7; NO7-4.8; NO7-4.9; NO7-4.10; GM8-1.2; GM8-1.3; NO8-1.2; NO8-1.3; NO8-1.11

Tarefas	– **Tarefa 3 – Retificação da circunferência** – Explicação (5 minutos) – Execução (30 minutos) – Síntese (10 minutos) – **Tarefa 4 – Retificação da circunferência** – Explicação (10 minutos) – Execução (30 minutos) – Síntese (5 minutos)
Recursos disponíveis	• Fotocópia das tarefas • Programa Geogebra – Links:
Avaliação	• Observação formativa das produções efetuadas pelos alunos

TPC	• Sugere-se a construção, no programa Geogebra, das tarefas 3 e 4 desde que exista a possibilidade de os alunos possuírem estes recursos em casa.
Notas	

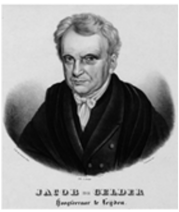
ANEXO I I

Papo de Alexandria, matemático do fim do século III e da primeira metade do século IV da nossa era, expõe na sua obra[131] *Mathematicon Synagogon – Coleção Matemática,* na Proposição 39 do Livro IV, um método para construir uma circunferência de perímetro igual a um segmento dado.

Veremos nas tarefas apresentadas a seguir, alguns métodos para obter um valor aproximado de π, problema que está na base da construção do segmento de reta de comprimento igual ao perímetro do circunferência.

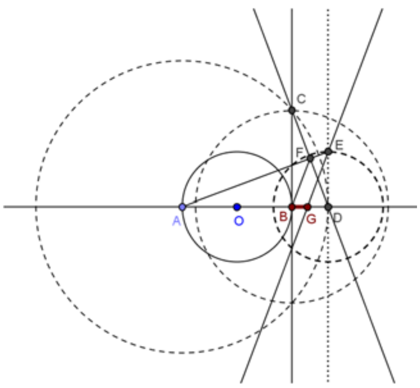
Tarefa 1: Método de Gelder[132]

Este método de retificação, desenvolvido por Jacob de Gelder (1765 – 1848), matemático holandês, permite construir um segmento cujo comprimento é um valor aproximado da parte decimal de π com 6 casas corretas.



Etapas da construção:

Considere uma circunferência de diâmetro AB igual a 1;



1) Trace o segmento $BC = \frac{7}{8}$ do diâmetro, perpendicular a AB em B;

2) No prolongamento de AB, marque $AD = AC$. Para isso, descreva um arco de raio AC e centro em A;

3)Trace $DE = \frac{1}{2}$, perpendicular a AD em D;

4)Trace o segmento AE e seja F o pé da perpendicular a AE por D;

5)Trace o segmento BF e uma paralela a BF passando pelo ponto E. Seja G o ponto de intersecção dessa paralela com BD;

Prova, usando a semelhança de triângulos e o Teorema de Pitágoras, que o segmento BG é aproximadamente a parte decimal de π, com precisão até a sexta casa decimal.

[131] Esta obra é composta por 8 Livros

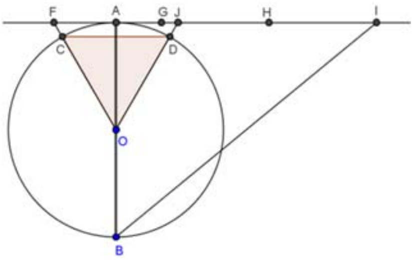
[132] Este método foi publicado em 1849, um ano após a sua morte.

Tarefa 2: Método de Kochanski

Nesta construção geométrica consegue-se encontrar um segmento de reta cujo comprimento é um valor aproximado para π, com quatro casas decimais corretas.

Etapas da construção:

Descreva uma circunferência de centro O e raio R;



1)Trace o diâmetro vertical marcando os extremos A e B;

2)Trace uma reta tangente à circunferência em A;

3)Construa um triângulo equilátero com um dos vértices em O e os outros dois vértices C e D na circunferência, de modo que o ponto médio E da aresta CD esteja no segmento AO;

4) Prolongue o segmento OC e marque o ponto F na interseção com a tangente;

5) Partindo de F, marque os ponto G, H e I sobre a tangente, de modo que os segmentos FG, GH e HI sejam iguais a R;

Meça o comprimento do segmento BI.

O que pode concluir?

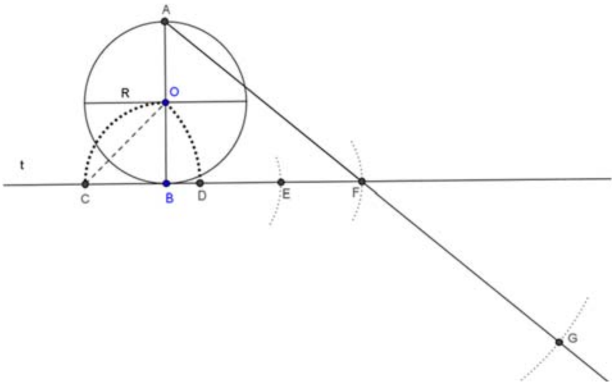
O segmento BI mede, aproximadamente, metade da circunferência, que mede 2π se o raio for $R = 1$, isto é, BI mede aproximadamente π .

Usando a semelhança de triângulos e o Teorema de Pitágoras prove o resultado obtido anteriormente.

Tarefa 3: Retificação da Circunferência

Etapas da construção:

Descreva uma circunferência com centro em O e raio R.



1) Trace o diâmetro vertical AB.

2) Trace a tangente t à circunferência em B.

3) Com centro em B e raio R, descreva o arco OC, marcando C na interseção com a tangente t.

4) Com centro em C e raio OC, descreva o arco OD, marcando D na interseção com a tangente t.

5) Partindo de D, marque os ponto E e F sobre a tangente, de modo que os segmentos DE e EF sejam iguais a R;

6) Trace um segmento de reta AF.

7) Prolongue o segmento AF e com centro em F e raio AF descreva um arco marcando G nesse prolongamento.

a. Determine o comprimento de OC;

b. Determine o comprimento de AF (pode considerar o caso particular de $R = 1$);

c. Determine o comprimento de AG

O que pode concluir?

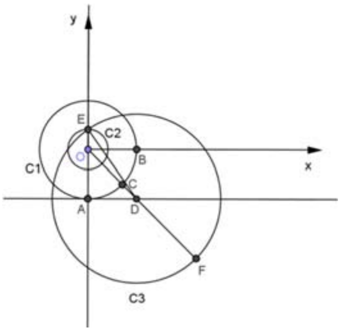
O segmento AG mede aproximadamente $2\pi R$.

Prove, analiticamente este resultado.

Tarefa 4: Retificação da Circunferência

Na construção geométrica seguinte, obtemos um valor aproximado para π com duas casas decimais corretas, isto é, $\pi = 3{,}14626$.

Etapas de construção:



1) Descreva a circunferência C_1 de raio unitário centrada na origem de um referencial cartesiano e marque o ponto A na interseção com a parte negativa do eixo das ordenadas e o ponto B na interseção com a parte positiva do eixo das abcissas;

2) Trace a tangente à circunferência em A;

3) Trace a bissetriz de AOB, intersetando a circunferência em C e a tangente em D;

4) Com centro em O e raio CD, descreva uma circunferência C_2 e marque o ponto de interseção E com a parte positiva do eixo das ordenadas;

5) Com raio DE e centro em D, descreva uma circunferência C_3 e marque F o ponto de interseção com a bissetriz de AOB

Determine o comprimento do segmento de reta OF.

O que pode concluir?

Mostre, algebricamente, o resultado obtido.

Guião do professor

Em 1882, F. Lindemann demonstrou que um segmento de reta de comprimento π unidades não pode ser obtido através de uma construção geométrica utilizando apenas régua e compasso.

Daí ser impossível a construção de um quadrado com a mesma área que um círculo utilizando instrumentos euclidianos. Os segmentos de retas construídos nas tarefas propostas são apenas boas aproximações para se obter o valor de π.

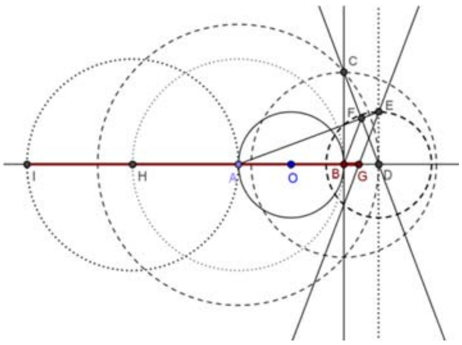
Tarefa 1: Método de Gelder

O segmento BG é aproximadamente a parte decimal de π, com precisão até a sexta casa decimal.

Demonstração:

Da semelhança dos triângulos GAE e BAF, temos que: $\frac{GB}{AB} = \frac{EF}{FA} = \frac{DE^2}{AD^2}$.

Como o triângulo ABC é retângulo em B, então $AC^2 = AB^2 + BC^2$, mas $AC = AD$, pelo que $AD^2 = AB^2 + BC^2$.



Assim, $\frac{GB}{AB} = \frac{DE^2}{AB^2+BC^2}$

Como, $AB = 1$, $DE = \frac{1}{2}$ e $BC = \frac{7}{8}$ então substituindo estes valores na relação anterior, obtêm-se:

$$GB = \frac{\frac{1}{4}}{1+\frac{49}{64}} = \frac{16}{113} \cong 0{,}1415929 \ldots.$$

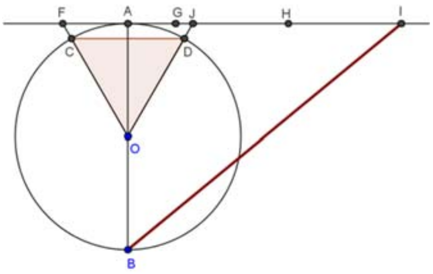
Obtemos o valor da parte decimal de π com 6 casas decimais corretas e, adicionando a sua parte inteira obtêm-se $\pi \cong 3 + \frac{16}{113} = \frac{355}{113} \cong 3{,}1415929 \ldots.$

Sendo $BG = 0{,}1415929$ e $AB = 1$ marcamos no prolongamento do segmento BA, o ponto H de interseção com o arco de raio igual a AB e centro em A e o ponto I de interseção com o arco de raio igual a AB e centro em H.

Assim, o segmento IG é a construção geométrica de π.

Tarefa 2: Método de Kochanski

O segmento BI mede, aproximadamente, metade da circunferência, que mede 2π se o raio R for igual a 1, isto é, BI mede aproximadamente π.



Demonstração:

Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo ABI, obtemos: $BI^2 = AB^2 + AI^2$. Mas, $AB = 2R$ e $AI = 3R - FA$ pelo que, $BI^2 = 4R^2 + (3R - FA)^2$ (I).

Por outro lado, no triângulo retângulo OAF, temos que $FA^2 + R^2 = OF^2$, ou seja, $FA^2 + R^2 = 4FA^2$, pois $OF = 2FA$ no triângulo equilátero OFJ.

Desta forma, $3FA^2 = R^2$ ou seja, $FA = \frac{R}{\sqrt{3}} = \frac{R\sqrt{3}}{3}$ e substituindo na relação (I) obtêm-se: $BI^2 = 4R^2 + \left(3R - \frac{R\sqrt{3}}{3}\right)^2$

$$BI^2 = 4R^2 + \left(9R^2 - \frac{6\sqrt{3}}{3}R^2 + \frac{R^2}{3}\right)$$

$$BI^2 = \frac{12R^2 + 27R^2 + R^2 - 6\sqrt{3}R^2}{3}$$

$$BI^2 = \frac{40R^2 - 6\sqrt{3}R^2}{3}$$

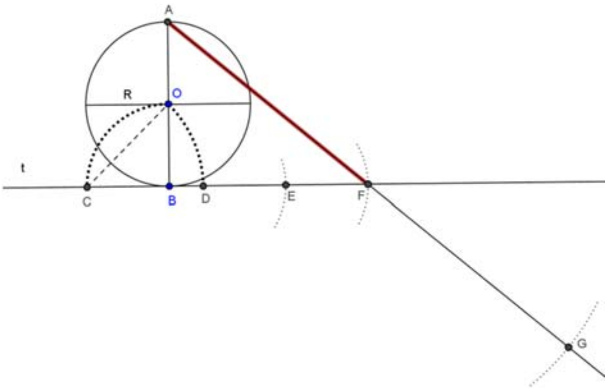
$$BI^2 = \frac{R^2(40 - 6\sqrt{3})}{3}$$

$$BI = R\sqrt{\frac{40 - 6\sqrt{3}}{3}}$$

Assim, se tivermos $R = 1$ temos que $BI = \sqrt{\frac{40-6\sqrt{3}}{3}} = 3{,}141533387 \ldots . \cong \pi$

Tarefa 3: Retificação da Circunferência

O segmento AG mede aproximadamente $2\pi R$. Como $AF = AG$, basta determinarmos o valor do segmento AF para encontrarmos uma aproximação de π. Temos que:



(1) $OB = CB = R$

(2) $OC = CD = R\sqrt{2}$

(3) $DE = EF = R$

(4) $BD = CD - CB = R\sqrt{2} - R$

(5) $BF = BD + BE + EF = (R\sqrt{2} - R) + R + R = R + R\sqrt{2}$

Iremos, de seguida, determinar o comprimento do segmento AF. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo ABF, obtemos:

$$AF^2 = AB^2 + BF^2$$

$$AF^2 = (2R)^2 + \left(R + R\sqrt{2}\right)^2$$

$$AF^2 = 4R^2 + R^2 + 2R^2\sqrt{2} + 2R^2$$

$$AF^2 = 7R^2 + 2R^2\sqrt{2}$$

$$AF^2 = R^2\left(7 + 2\sqrt{2}\right)$$

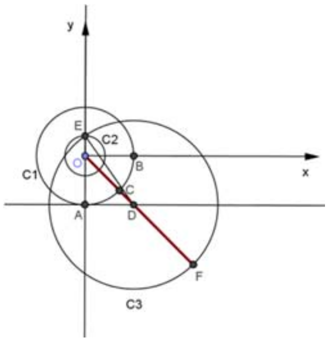
$$AF = R\sqrt{7 + 2\sqrt{2}}$$

O comprimento do segmento AF é igual a πR pelo que, $\pi R = R\sqrt{7+2\sqrt{2}}$, ou seja, $\pi = \sqrt{7+2\sqrt{2}}$,

Verificamos que, nesta construção, $\pi = 3{,}15$, uma aproximação bastante razoável para π, em termos geométricos.

Tarefa 4: Retificação da Circunferência

Nesta construção obtemos o valor de π como a soma das raízes quadradas de 2 e 3.



O segmento de reta OF mede aproximadamente π, ou seja, $\pi = 3{,}14626\ldots$

Demonstração:

Como a circunferência C_1 tem raio $OA = OB = 1$, pelo teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo retângulo OAD, temos:

$OD^2 = OA^2 + AD^2$

$OD^2 = 1^2 + 1^2$ ou seja, $OD = \sqrt{2}$

Portanto, o segmento $OE = CD = OD - OC$ é dado por $OE = CD = \sqrt{2} - 1$

Aplicamos novamente o teorema de Pitágoras, determinamos o raio da circunferência C_3:

$DE^2 = AD^2 + AE^2$

$DE^2 = 1^2 + (AO + OE)^2$

$DE^2 = 1 + \left(1 + \sqrt{2} - 1\right)^2$

$DE^2 = 1 + \left(\sqrt{2}\right)^2$

$DE^2 = 3$

$DE = \sqrt{3} = DF$

Assim, $OF = OD + DF = \sqrt{2} + \sqrt{3}$, isto é, $OF \cong \pi \cong 3{,}14626$