

DINÂMICA MULTIDIMENSIONAL EM CRESCIMENTO ENDÓGENO

por

André Filipe Alves Almeida

Tese de Mestrado em Economia

Orientado por

Sofia Balbina Santos Dias de Castro Gothen

Pedro Rui Mazedo Gil

2014

Nota Biográfica

André Filipe Alves Almeida nasceu no Porto em 4 de Outubro de 1988. Licenciou-se em Economia, na Faculdade de Economia da Universidade do Porto, em Setembro de 2011. Em Setembro de 2012, nessa mesma instituição, ingressou no Mestrado em Economia. Em 2014 conclui a parte curricular do curso de Mestrado com média de 15 em 20 valores.

Em Abril de 2014 participou como orador no encontro “Modelação e simulação económica: problemas e abordagens”, organizado pela Professora Doutora Sofia Castro Gothen e pelo Professor Doutor Paulo Vasconcelos, nas instalações da faculdade.

Agradecimentos

Aos meus orientadores, a Professora Doutora Sofia Castro Gothen e o Professor Doutor Pedro Gil, agradeço por toda a disponibilidade, pelo acompanhamento contínuo e pelos valiosos ensinamentos ao longo desta etapa. Agradeço a oportunidade única que me proporcionaram e a confiança que sempre me transmitiram, assim como a amabilidade com que sempre me receberam. O benefício e privilégio de trabalhar com ambos superou o contributo para a presente dissertação.

Aos meus amigos, em especial ao João, à Hermínia e ao Gustavo, por todo o apoio, companheirismo e momentos de desconcentração que foram fundamentais para seguir em frente.

Aos meus pais, pelo apoio e por me proporcionarem esta oportunidade.

Em especial à Sofia, o meu equilíbrio estável, pelo exemplo, apoio e amor incondicional.

Resumo

O objetivo deste trabalho é o estudo do crescimento endógeno numa economia em que este decorre da investigação concretizada em inovação horizontal e vertical, em interligação com a acumulação de capital físico, revelando assim dinâmicas de transição ricas a vários níveis. Para este fim, usamos o modelo de Gil (2013), para o qual fazemos o estudo analítico da dinâmica local e simulações numéricas. Em Gil (2013) apenas é realizado o estudo do equilíbrio dinâmico de longo-prazo. Este modelo representa uma extensão de Gil *et al.* (2013) ao qual se acrescenta uma nova variável endógena, o capital físico. Esta alteração origina um sistema dinâmico tridimensional. Uma vez que se trata de um sistema não linear, este é analisado através de linearização, com o intuito de compreender as propriedades da convergência e estabilidade. Através do estudo analítico do modelo, constatamos que a existência de pelo menos uma dimensão estável não está garantida para o caso geral. Deste modo, definimos condições analíticas suficientes para que tal se verifique. A abordagem numérica realizada assenta nos resultados analíticos obtidos e ilustra, para melhor interpretação económica, a dinâmica de transição para valores plausíveis dos parâmetros. Constatamos que a endogeneização do processo de acumulação de capital se traduz em dinâmicas de transição mais ricas que no modelo de base, em Gil *et al.* (2013), em particular da taxa de crescimento do produto.

Palavras-chave: crescimento endógeno, conhecimento tecnológico, capital físico, dinâmica das empresas, dinâmica de transição não-monótona.

Código JEL: O41, D43, L16

Abstract

The aim of this thesis is the study of endogenous growth in an economy where it results from R&D activities, materialized in horizontal and vertical innovation. This study explores the interrelation between the two types of innovation and physical capital, revealing rich transitional dynamics at several levels. To this purpose, we use Gil (2013) model, which we analytically study the local dynamics and do numerical simulations. Gil (2013) only performs the study of the steady state. This model represents an extension of Gil *et al.* (2013) model to which it introduces a new endogenous variable, physical capital. This modification produces a three-dimensional system. Since this is a non-linear system, it's analyzed by linearization, in order to understand the stability and convergence properties. By the analytical study we found that, in general, the existence of at least one stable dimension isn't guaranteed. Thus, we determine analytical sufficient conditions so it can be guaranteed. The numerical approach performed is based on the analytical results obtained and shows, for better economic analysis, the transitional dynamics for plausible values of the parameters. We find that the endogenization of physical capital accumulation process translates in richer transitions than the base model Gil *et al.* (2013), specially the economic growth rate dynamics.

Keywords: endogenous growth, technological knowledge, physical capital, firm dynamics, non-monotonic transitional dynamics

JEL Classification: O41, D43, L16

Conteúdo

1	Introdução	1
2	Revisão da literatura	5
3	O Modelo	11
4	Estudo analítico	17
4.1	Equilíbrio	18
4.2	Estabilidade	22
4.3	Hiperbolicidade	27
5	Estudo numérico	29
5.1	Metodologia	31
5.2	Fase A	36
5.2.1	Região A_1	36
5.2.2	Região A_2	44
5.3	Fase D	51
5.4	Fase B	57
5.4.1	Região B_1	57
5.4.2	Região B_2	64
5.5	Fase C	70
5.6	Síntese de resultados	77
6	Interpretação alternativa da dinâmica de transição: choques	80
7	Conclusão	84
	Apêndice A	87
	Apêndice B	89
	Apêndice C	93

Bibliografía	97
Anexo	100

Lista de Figuras

5.1	Representação do espaço estável associado ao sistema linear.	31
5.2	Representação do diagrama de fase sobre o espaço estável	32
5.3	Representação da projeção do diagrama de fase num plano horizontal	33
5.4	Representação da projeção de uma trajetória pertencente a A_1	36
5.5	Representação da evolução da taxa de entrada horizontal, x , e da sua velocidade de convergência, ω_x , na região A_1	38
5.6	Representação da evolução de k e da respetiva velocidade de con- vergência, ω_k , na região A_1	39
5.7	Representação da evolução do índice agregado de qualidade corrigido pela tendência, Q_d , e da respetiva taxa de crescimento na região A_1 .	40
5.8	Representação da evolução do capital físico corrigido pela tendência, K_d , na região A_1	41
5.9	Representação da evolução, ao longo dos primeiros 50 instantes de tempo, do capital físico corrigido pela tendência, K_d , na região A_1 . .	41
5.10	Representação da evolução do número de bens intermédios corrigido pela tendência, N_d , na região A_1	42
5.11	Representação da evolução da taxa de crescimento da economia, g_Y , na região A_1	43
5.12	Representação da evolução da dimensão média das empresas corrigida pela tendência, $(K/N)_d$, na região A_1	44
5.13	Representação da projeção de uma trajetória pertencente a A_2	45
5.14	Representação da evolução da taxa de entrada horizontal, x , e da sua velocidade de convergência, ω_x , na região A_2	46
5.15	Representação da evolução de k e da respetiva velocidade de con- vergência, ω_k , na região A_2	46
5.16	Representação da evolução do índice agregado de qualidade corrigido pela tendência, Q_d , e da respetiva taxa de crescimento na região A_2 .	47
5.17	Representação da evolução do capital físico corrigido pela tendência, K_d , na região A_2	48

5.18	Representação da evolução do número de bens intermédios corrigido pela tendência, N_d , na região A_2	49
5.19	Representação da evolução, ao longo dos primeiros 50 instantes de tempo, do número de bens intermédios corrigido pela tendência, N_d , na região A_2	49
5.20	Representação da evolução da taxa de crescimento da economia, g_Y , na região A_2	50
5.21	Representação da evolução da dimensão média das empresas corrigida pela tendência, $(K/N)_d$, na região A_2	50
5.22	Representação da projeção de uma trajetória pertencente a D	51
5.23	Representação da evolução da taxa de entrada horizontal, x , e da sua velocidade de convergência, ω_x , na fase D	52
5.24	Representação da evolução de k e da sua velocidade de convergência, ω_k , na fase D	53
5.25	Representação da evolução do índice agregado de qualidade corrigido pela tendência, Q_d , e da respetiva taxa de crescimento na fase D . . .	54
5.26	Representação da evolução do capital físico corrigido pela tendência, K_d , na fase D	55
5.27	Representação da evolução do número de bens intermédios corrigido pela tendência, N_d , na fase D	55
5.28	Representação da evolução da taxa de crescimento da economia, g_Y , na fase D	56
5.29	Representação da evolução da dimensão média das empresas corrigida pela tendência, $(K/N)_d$, na fase D	57
5.30	Representação da projeção de uma trajetória pertencente a B_1	58
5.31	Representação da evolução da taxa de entrada horizontal, x , e da sua velocidade de convergência, ω_x , na região B_1	59
5.32	Representação da evolução de k e da respetiva velocidade de convergência, ω_k , na região B_1	60
5.33	Representação da evolução do índice agregado de qualidade corrigido pela tendência, Q_d , e da respetiva taxa de crescimento na região B_1 .	61
5.34	Representação da evolução do capital físico corrigido pela tendência, K_d , na região B_1	62
5.35	Representação da evolução do número de bens intermédios corrigido pela tendência, N_d , na região B_1	62
5.36	Representação da evolução da taxa de crescimento da economia, g_Y , na região B_1	63

5.37	Representação da evolução da dimensão média das empresas corrigida pela tendência, $(K/N)_d$, na região B_1	64
5.38	Representação da projeção de uma trajetória pertencente a B_2	65
5.39	Representação da evolução da taxa de entrada horizontal, x , e da sua velocidade de convergência, ω_x , na região B_2	66
5.40	Representação da evolução de k e da respetiva velocidade de convergência, ω_k , na região B_2	66
5.41	Representação da evolução do índice agregado de qualidade corrigido pela tendência, Q_d , e da respetiva taxa de crescimento na região B_2	67
5.42	Representação da evolução do capital físico corrigido pela tendência, K_d , na região B_2	68
5.43	Representação da evolução do número de bens intermédios corrigido pela tendência, N_d , na região B_2	68
5.44	Representação da evolução da taxa de crescimento da economia, g_Y , na região B_2	69
5.45	Representação da evolução da dimensão média das empresas corrigida pela tendência, $(K/N)_d$, na região B_2	70
5.46	Representação da projeção de uma trajetória pertencente a C	71
5.47	Representação da evolução da taxa de entrada horizontal, x , e da sua velocidade de convergência, ω_x , na fase C	72
5.48	Representação da evolução de k e da respetiva velocidade de convergência, ω_k , na fase C	73
5.49	Representação da evolução do índice agregado de qualidade corrigido pela tendência, Q_d , e da respetiva taxa de crescimento na fase C	74
5.50	Representação da evolução do capital físico corrigido pela tendência, K_d , na fase C	75
5.51	Representação da evolução do número de bens intermédios corrigido pela tendência, N_d , na fase C	75
5.52	Representação da evolução da taxa de crescimento da economia, g_Y , na fase C	76
5.53	Representação da evolução da dimensão média das empresas corrigida pela tendência, $(K/N)_d$, na fase C	77
5.54	Representação da evolução ao longo do tempo da taxa de crescimento do produto, g_Y , nas diferentes regiões do diagrama de fase.	78
7.1	Representação da evolução da taxa de chegada de uma inovação vertical, I , na região A_1	89

7.2	Representação da evolução da taxa de chegada de uma inovação vertical, I , na região A_2	90
7.3	Representação da evolução da taxa de chegada de uma inovação vertical, I , na fase D	90
7.4	Representação da evolução da taxa de chegada de uma inovação vertical, I , na região B_1	91
7.5	Representação da evolução da taxa de chegada de uma inovação vertical, I , na região B_2	91
7.6	Representação da evolução da taxa de chegada de uma inovação vertical, I , na fase C	92
7.7	Representação da evolução da taxa de crescimento de k, g_k , na região A_1	93
7.8	Representação da evolução da taxa de crescimento de k, g_k , na região A_2	94
7.9	Representação da evolução da taxa de crescimento de k, g_k , na fase D	94
7.10	Representação da evolução da taxa de crescimento de k, g_k , na região B_1	95
7.11	Representação da evolução da taxa de crescimento de k, g_k , na região B_2	95
7.12	Representação da evolução da taxa de crescimento de k, g_k , na fase C	96

Lista de Tabelas

5.1	Valores dos parâmetros assumidos para a ilustração numérica.	29
5.2	Valores verificados em equilíbrio de longo-prazo na ilustração numérica.	30
7.1	Lista de variáveis e parâmetros com os respetivos significados económicos e domínios de definição.	100

Capítulo 1

Introdução

A motivação para este trabalho resulta da importância do crescimento económico e do seu estudo, nomeadamente no que respeita às explicações conseguidas para as diferenças entre países e os determinantes do crescimento no longo-prazo. Para tal, a construção de modelos matemáticos é uma importante ferramenta para retirar conclusões neste contexto. Como afirma Fisher (1925):

“The economic world is a misty region. The first explorers used unaided vision. Mathematics is a lantern by which what before was dimly visible now looms up in firm, bold outlines. The old phantasmagoria disappear. We see better. We also see further.”

Aliar uma importante ferramenta metodológica, como a modelação, a um tema interessante e de grande importância como o crescimento económico, mais especificamente o crescimento endógeno, torna este trabalho desafiante e motivador.

Os modelos económicos, em particular os analíticos, representam uma simplificação cujo objetivo é compreender a complexidade da realidade através de um conjunto de variáveis explicativas. Sendo uma simplificação, os modelos não são extensivos de forma a explicar toda a realidade. A sua representação está sujeita a pressupostos simplificadores e a sua interpretação tem limitações. Uma vez que a solução do modelo pode não ser a solução do problema que motivou a sua construção, a sua interpretação exige algumas reservas. Existe a necessidade de compreender o que escapa à conceção do modelo. Apesar das suas limitações, os modelos analíticos são uma importante ferramenta metodológica em economia, e em particular no estudo do crescimento económico.

O estudo da dinâmica de modelos de crescimento económico nem sempre foi considerado relevante, privilegiando-se a análise da estática comparativa e as propriedades de equilíbrio. No entanto, durante a última década o estudo da dinâmica

tem ganho cada vez mais importância. O estudo da dinâmica é particularmente relevante uma vez que, empiricamente, a transição para o equilíbrio pode ser um processo longo. Assim como o estado mais frequente de uma economia não é no ponto de equilíbrio, devido aos vários choques que a afetam.

Os conceitos de Teoria Qualitativa utilizados de seguida podem ser encontrados com mais detalhe em Zhang (2005). Podemos interpretar o conceito da dinâmica como o comportamento de uma ou mais variáveis de estado ao longo do tempo. Na formulação em tempo contínuo (a mais habitual na literatura do crescimento económico), este comportamento é representado por equações diferenciais; caso a dinâmica seja representada por 2 ou mais equações, representando a evolução de duas ou mais variáveis, então denominamos o sistema que a caracteriza de multidimensional. Apesar do estudo deste comportamento poder ser realizado no sentido crescente ou decrescente do tempo, a grande maioria dos economistas analisa o comportamento das variáveis explicativas durante a convergência para o ponto de equilíbrio, no sentido crescente do tempo (futuro). O ponto de equilíbrio representa uma solução que permanece inalterada ao longo do tempo. Trata-se assim de uma solução de longo prazo. Este pode ser localmente assintoticamente estável, atraindo todos os estados iniciais próximos, ou instável, indicando a existência de pelo menos um estado inicial que não se aproxima do equilíbrio.

De forma a poder analisar sistemas dinâmicos representados por equações não lineares, o método mais frequentemente utilizado em modelação é a linearização. Esta é fundamentada pelo teorema de Hartman-Grobman segundo o qual, caso o ponto de equilíbrio seja hiperbólico, localmente perto do equilíbrio as soluções do sistema de equações diferenciais não lineares são semelhantes às soluções da sua linearização.

Tirando partido deste teorema, o sistema linear pode ser estudado como aproximação local do sistema original não linear perto do equilíbrio. O espaço estável do sistema linear será uma boa aproximação local da variedade estável para a dinâmica não linear. A variedade estável representa o conjunto de estados iniciais que na realidade convergem para o equilíbrio.

Tratando-se de uma aproximação, o uso da linearização implica que existirá sempre um erro. Caso o erro seja quantitativo e não qualitativo, este pode não ser relevante para a correta interpretação dos resultados do modelo. Com o objetivo de estudar a relevância dos erros de linearização para o caso particular de um modelo, Atolia *et al.* (2010) estudam a dinâmica de duas variações desse modelo após um choque moderado e um intenso. Posteriormente comparam os resultados com os obtidos através de uma técnica de análise numérica denominada *backward*

integration. Uma vez que a solução obtida por simulação numérica é mais precisa, os autores consideram que a diferença de resultados entre as duas técnicas expressa o erro associado à linearização. Atolia *et al.* (2010) concluem que o aumento de intensidade do choque provoca um aumento dos erros da linearização, tornando-os mais persistentes no tempo. Apesar disso, os autores defendem a utilidade da linearização, particularmente se os choques considerados forem moderados e o foco da análise for o longo-prazo, onde a trajetória obtida por linearização é mais próxima do caso não linear.

O trabalho que se segue debruça-se sobre modelos de crescimento endógeno baseados em atividades de investigação e desenvolvimento (I&D), em que o crescimento de longo-prazo é explicado pelo próprio modelo tendo como motor o progresso tecnológico gerado no setor de I&D. Será baseado no modelo de crescimento endógeno com dois tipos de I&D (vertical e horizontal) estudado por Gil *et al.* (2013), acrescentado de acumulação de capital físico como em Gil (2013).

O objetivo e contributo deste trabalho passa pelo estudo analítico da dinâmica local desse modelo, cujo sistema dinâmico autónomo é tridimensional, e pela respetiva ilustração numérica sustentada pelos resultados analíticos obtidos.

O propósito da investigação que define este trabalho é o de contribuir para uma melhor compreensão dos mecanismos de crescimento endógeno através da descrição da dinâmica local de um modelo. O modelo escolhido, por representar uma modelação não trivial, é o desenvolvido por Gil (2013).

Dessa forma, é um objetivo intermédio deste trabalho procurar respostas a um conjunto de questões: 1) Existe a possibilidade de, dependendo da escolha de valores para alguns parâmetros, estes afetarem o equilíbrio de longo-prazo ou as características da dinâmica do modelo?; 2) As velocidades de transição para o equilíbrio de longo-prazo são idênticas para todas as variáveis e constantes no tempo?; 3) A convergência para o equilíbrio processa-se sempre de forma monótona ou existe possibilidade de convergência não monótona, possivelmente com *overshooting*, ou oscilatória, mesmo no caso de uma versão linearizada do sistema dinâmico?; 4) Como se comporta a dimensão média das empresas, aferida pelo *stock* de capital por empresa, no processo de convergência?

Veremos de seguida que, na generalidade e dependendo dos valores dos parâmetros, é possível que não exista qualquer trajetória convergente para o equilíbrio. Caso a convergência seja possível, constataremos a possibilidade de um ajustamento monótono ou não monótono, em particular com *overshooting* ou *undershooting*, das principais variáveis endógenas do modelo, dependendo da situação inicial da economia. Este resultado representa um dos principais contributos associados ao modelo

Gil (2013), visto que permite explicar, em particular, o comportamento não linear da taxa de crescimento do produto, verificado empiricamente, assim como enunciar concretamente quais as características iniciais da economia que se encontrarão na origem dos diferentes tipos possíveis de ajustamento para o equilíbrio de longo-prazo. Os restantes resultados obtidos encontram-se descritos no Capítulo 7, referente às conclusões.

O presente trabalho encontra-se organizado da seguinte forma: no Capítulo 2, realizamos uma breve revisão de literatura focada nos modelos de crescimento endógeno e no estudo da dinâmica; no Capítulo 3, apresentamos o modelo Gil (2013) que servirá de base para o restante trabalho; no Capítulo 4, apresentamos os resultados analíticos obtidos através do estudo analítico da dinâmica local do modelo; no Capítulo 5, realizamos um estudo numérico ilustrativo, sustentado nos resultados analíticos obtidos; no Capítulo 6, apresentamos uma interpretação económica alternativa para o estudo numérico do capítulo anterior; no Capítulo 7, resumimos as conclusões obtidas, dando uma perspetiva global do trabalho.

Capítulo 2

Revisão da literatura

Os modelos de crescimento endógeno procuram ultrapassar uma forte limitação encontrada, por exemplo, em modelos como os de Solow (1956) ou Cass (1965) e Koopmans (1965). Nestes modelos, o crescimento de longo-prazo é determinado pelo crescimento do progresso tecnológico e este processo é encarado como exógeno ao próprio modelo, tornando-os incapazes de compreender os fundamentos que explicam o progresso tecnológico e consequentemente o crescimento de longo-prazo (Barro e Sala-i-Martin, 2004). O foco deste trabalho serão os modelos de crescimento endógeno em que o progresso tecnológico surge de um esforço de investigação, no setor de I&D, feito pelas empresas que desejam entrar no mercado. Estas são incentivadas pela expectativa de rendas monopolistas, assim que do seu esforço surja um novo produto (Barro e Sala-i-Martin, 2004).

Duas formas de inovação são usualmente consideradas neste tipo de modelos: horizontal ou vertical. A inovação horizontal resulta numa expansão do número de variedades de produtos. Cada novo produto não é substituto perfeito nem complementar de um já existente, gerando assim uma nova indústria, seguindo o conceito de Romer (1990). Neste caso, o número de indústrias ou de produtos de uma economia pode ser encarado como uma medida do grau de especialização dos fatores utilizados na produção por uma empresa (Barro e Sala-i-Martin, 2004). A inovação vertical resulta da criação de um produto de qualidade superior, tornando o anterior obsoleto dado serem substitutos perfeitos. Descrevem assim, consoante Aghion e Howitt (1992), o conceito Schumpeteriano de destruição criativa.

Para que surja uma inovação, as empresas necessitam alocar recursos à investigação; contudo, esta alocação só ocorre se existir um incentivo. Os modelos de inovação horizontal assumem tipicamente que, após uma invenção, existe um direito monopolista perpétuo sobre a produção deste, por exemplo por via de concessão de uma patente perpétua. Os modelos que consideram inovação vertical assumem tipi-

camente que, na sequência deste tipo de inovação, a empresa que inventou o produto de qualidade superior possui também o direito monopolista sobre a sua produção, por exemplo por via da concessão de uma patente; no entanto, o monopólio não será perpétuo, terminando no momento em que ocorra a próxima inovação que torne o produto do monopolista incumbente obsoleto.

Posto isto, em ambos os modelos as empresas vão decidir investigar caso considerem que o valor atualizado dos rendimentos futuros, provenientes das rendas monopolistas, supera as despesas presentes em investigação (Barro e Sala-i-Martin, 2004).

Alguns destes modelos, como os de Aghion e Howitt (1992) ou Romer (1990), concluem que o crescimento económico depende positivamente do tamanho da população ou da quantidade de trabalho alocada ao setor de investigação. Este resultado denomina-se efeitos de escala sobre o crescimento, existindo controvérsia quanto à sua validade empírica. Constatando este facto, Jones (1995) desenvolveu um modelo mantendo a estrutura básica dos anteriores (dado considerar que possuem fortes fundamentos microeconómicos), mas eliminando os efeitos de escala. O autor classifica-o como um modelo de crescimento semi-endógeno, porque, apesar do motor do crescimento ser o progresso tecnológico que resulta de um esforço em investigação, o modelo prevê que o crescimento de longo-prazo é determinado por variáveis exógenas ou parâmetros não sensíveis a ações de política de incentivo à I&D, como a taxa de crescimento da população ou o grau de externalidades da investigação.

Eicher e Turnovsky (2001) analisaram um modelo baseado em Jones (1995) mas caracterizado por um sistema dinâmico de dimensão superior, resolvido na perspectiva do planeador central. Os autores consideram a alocação de trabalho entre vários setores e a taxa de juro também endógenas, assim como a acumulação de capital e de tecnologia. O aumento de dimensão do sistema dinâmico (para dimensão 4) permite que a variedade estável se torne multidimensional (dimensão 2). Neste contexto, os autores concluem que a velocidade de convergência não será constante no tempo nem igual para todas as variáveis endógenas, compatibilizando assim a teoria com os factos empíricos conhecidos sobre a dinâmica de transição das economias. No seu modelo, Eicher e Turnovsky (2001) analisam a dinâmica de ajustamento como ainda não tinha sido feito em modelos sem efeitos de escala. Considerando diferentes tipos de choque de produtividade, recorrem à simulação numérica para proceder à análise da dinâmica multidimensional numa versão linearizada do sistema dinâmico. O modelo atende à possibilidade de alteração na monotonia da convergência e compatibiliza o crescimento com várias estruturas produtivas, não

sendo necessário considerar rendimentos constantes à escala na produção. Também relevante é a possibilidade de ajustamentos assimétricos na sequência de choques contrários mas de igual dimensão, considerada por Eicher e Turnovsky (2001). Estas considerações resultam do aumento de dimensão do sistema dinâmico. Arnold (2006) faz um estudo analítico sobre a dinâmica de transição do modelo de Jones (1995) considerando um sistema dinâmico de dimensão 4, mas na perspectiva do equilíbrio descentralizado. O autor constata que a variedade estável tem dimensão 2 como haviam afirmado Eicher e Turnovsky (2001). Observa também que para os valores de parâmetros mais plausíveis, a transição para o equilíbrio é monótona. No entanto, o autor prova que também é possível a existência de transição oscilatória através de ilustrações geradas por simulação numérica.

Um exemplo análogo é o artigo de Brito e Dixon (2009) no qual foi analisada a dinâmica de uma generalização do modelo de Ramsey (1928), acrescentando a entrada e o número de empresas na economia como variáveis endógenas. Não se tratando de um modelo de crescimento endógeno, é representado por um sistema dinâmico de dimensão 4 com uma variedade estável de dimensão 2, à semelhança do modelo de Eicher e Turnovsky (2001). Em Brito e Dixon (2009), a decisão de uma empresa entrar no mercado decorre de um processo de otimização intertemporal. As empresas consideram o valor atualizado dos lucros futuros auferidos pelo incumbente e comparam com o custo de entrada no presente. Dado a decisão não se prender exclusivamente com os lucros presentes, os autores observam que uma empresa pode decidir entrar mesmo que estes sejam negativos desde que antecipe que eventualmente subam no futuro. Este artigo apresenta um importante contributo em termos de estudo integralmente analítico do seu sistema dinâmico multidimensional, ao contrário de Eicher e Turnovsky (2001), cujo estudo da dinâmica é essencialmente numérico. Em particular, Brito e Dixon (2009) caracterizam analiticamente as condições iniciais que determinam trajetórias de transição não monótonas para o equilíbrio numa versão linearizada do sistema dinâmico.

Arnold e Kornprobst (2008) fazem um estudo analítico de uma alteração do modelo de Romer (1990). Os autores substituem a inovação horizontal nesse modelo pela inovação vertical, representada pelo acréscimo de qualidade segundo Grossman e Helpman (1991). Os autores mostram que os valores dos parâmetros para os quais existe um ponto de equilíbrio podem ser divididos em 2 subespaços. Um destes apresenta uma variedade estável de dimensão 2, enquanto o outro é caracterizado por instabilidade ou pela indeterminação local do equilíbrio. Os autores alertam para a possibilidade de existência de uma bifurcação de Hopf. Este tipo de bifurcação ocorre quando os valores próprios complexos cruzam o eixo imaginário. Nessa situação,

não estão reunidas as condições para a aplicação do teorema de Hartman-Grobman, não sendo possível utilizar a linearização como metodologia de análise. A dinâmica observada nesta variação do modelo não é observada nos modelos originais de Romer (1990) e Grossman e Helpman (1991).

Elíasson e Turnovsky (2004) analisam um modelo de crescimento endógeno representativo de uma pequena economia aberta com a dotação de um recurso renovável. Verificam que, se esta não possuisse o recurso, a taxa de crescimento em equilíbrio de longo-prazo para essa economia seria superior. Os autores fazem um estudo essencialmente analítico e analisam a dinâmica após a aplicação de alguns choques. Apesar da relação negativa de longo prazo entre a dotação do recurso e o crescimento económico, um choque provocado por um aumento do *stock* do recurso gera provavelmente um aumento de crescimento de curto-prazo, verificando-se um comportamento não monótono da taxa de crescimento da economia. O sistema que representa a dinâmica deste modelo é tridimensional, sendo que existe apenas uma trajetória estável que representa o subespaço estável, de dimensão 1, associado ao valor próprio negativo.

Sequeira (2011) apresenta outro exemplo metodológico da análise, em economia, de um sistema dinâmico de dimensão 4. O autor analisa uma vertente de modelos de crescimento endógeno que consideram simultaneamente como fatores de crescimento a acumulação de capital físico, o capital humano e o setor de I&D. Adiciona o efeito de externalidades no setor de I&D, o que origina o aumento de dimensão do sistema dinâmico, e deriva o equilíbrio e as condições que garantem pelo menos uma condição estável. Sequeira (2011) observa que para os valores mais prováveis dos parâmetros, geralmente usados para calibração, a variedade estável é bidimensional e está associada a dois valores próprios complexos com parte real negativa. Ou seja, o autor prevê, para esses valores dos parâmetros, uma trajetória oscilatória (não monótona) até ao equilíbrio. No entanto, alerta que não é possível excluir outros cenários como uma trajetória monótona ou instabilidade, gerando ilustrações numéricas que o comprovam.

Gomez e Sequeira (2012) analisam a mesma vertente de modelos que Sequeira (2011). Contudo, consideram a introdução de dois tipos de externalidades: um efeito positivo proveniente da I&D e um efeito negativo gerado pela sobreposição do esforço de investigação. Esta alteração origina um sistema dinâmico de dimensão 5. Posteriormente, comparam os resultados com os obtidos através da análise do mesmo modelo, considerando apenas a existência de uma externalidade e no caso de não existirem externalidades. Na ausência de externalidades, os autores conseguem definir uma condição necessária que garante a existência de um espaço estável não

vazio. No entanto, com o aumento da dimensão do sistema dinâmico devido à consideração de externalidades, os autores apenas conseguem definir condições suficientes para o espaço estável não vazio. Deste modo, reflete-se o aumento da complexidade da análise gerado pelo aumento da dimensão da dinâmica. Da mesma forma que em Sequeira (2011), a situação de instabilidade não pode ser afastada.

Todavia, empiricamente, a fração do produto destinada a I&D (denominada intensidade de I&D) e a taxa de crescimento económico apresentam uma correlação negativa ou não significativa, contrariando as conclusões a este respeito da literatura central do crescimento endógeno. Considerando simultaneamente o conceito de inovação horizontal e vertical num único modelo, Gil *et al.* (2013) propõem um modelo de crescimento endógeno com dinâmica de transição, consistente com aquela evidência empírica quer na ótica de séries temporais quer de dados seccionais. O modelo assume que a alocação de recursos entre inovações está relacionada com a divisão de despesa real em investigação, contrariamente a outros modelos que consideram a divisão entre alocação de trabalho. Os autores exploram a interligação entre os diferentes tipos de inovação, que possuem influências assimétricas no crescimento económico. Enquanto a inovação horizontal tem um impacto de um para um na economia, o impacto da inovação vertical é amortecido pelo efeito da destruição criativa.

Os autores concluem que a fonte última de crescimento é o aumento de qualidade gerado pela inovação vertical. Contudo, esta não ocorre se o número de variedades de produtos for muito baixo. Nessa situação, não existe possibilidade de crescimento em equilíbrio de longo prazo. Constata-se assim uma complementaridade entre os dois tipos de inovação: a inovação vertical permite a horizontal, mas só existe um aumento de qualidade se existir um número mínimo de variedades na economia. Relevante para estas conclusões é a condição de que em equilíbrio os dois tipos de entrada, horizontal ou vertical, possuem o mesmo retorno para uma empresa que pretenda entrar no mercado. O modelo permite também analisar a relação entre a dinâmica das empresas e o crescimento. Gil *et al.* (2013) concluem que a dimensão das empresas está positivamente relacionado com o crescimento económico ao longo do ajustamento. Estas entram no mercado de forma gradual, conforme os factos estilizados e contrariamente a modelos em que o ajustamento é instantâneo. A entrada em grande escala é penalizada pelos custos de ajustamento. De notar a ausência de relação entre os custos fixos de entrada horizontal e o crescimento económico, embora aqueles apresentem uma relação importante com a dimensão das empresas.

Em Gil (2013), o modelo de Gil *et al.* (2013) é estendido com a inclusão de

acumulação de capital físico. Deste modo, o modelo passa a exibir um sistema dinâmico de dimensão 3, com variedade estável (possivelmente) bidimensional (como em Eicher e Turnovsky (2001); Brito e Dixon (2009), e outros). Contudo, em Gil (2013), apenas é feito o estudo do *steady state* do modelo.

O modelo que servirá de base ao trabalho a desenvolver é Gil (2013). A motivação para a análise de Gil (2013) resulta da exigência do estudo analítico de um sistema tridimensional e do aliciante de poder contribuir de alguma forma para um artigo científico não publicado. Não menos importante o facto de Gil (2013) apresentar um *set-up* analítico mais geral relativamente a Eicher e Turnovsky (2001), Jones (1995) e outros. Concretamente, em Gil (2013) o crescimento endógeno resulta do esforço de I&D das empresas e a sua existência é independente da dinâmica da população. Esta consideração é mais realista relativamente a modelos cujo crescimento económico em equilíbrio de longo-prazo apenas existe se existir crescimento da população. Do mesmo modo, o modelo não considera efeitos de escala, sendo a sua remoção apenas paramétrica. Assim, a remoção destes efeitos não altera a dinâmica do modelo. Em contraste, noutros modelos como Eicher e Turnovsky (2001), é a própria remoção dos efeitos de escala que gera a dinâmica multidimensional.

Devido à sua relevância para o trabalho a desenvolver, segue-se uma descrição do modelo Gil (2013).

Capítulo 3

O Modelo

Nesta secção reproduzimos, de uma forma não exaustiva, o modelo desenvolvido em Gil (2013). O modelo representa uma economia fechada em que é produzido apenas um bem final homogéneo, Y . As empresas que produzem este bem utilizam como fatores de produção a força de trabalho, L , e um conjunto de N bens intermédios que se encontram disponíveis num dado instante de tempo na economia. Estas empresas são *price-takers* em todos os mercados e vendem o seu produto a um preço unitário. Possuem também uma tecnologia de rendimentos constantes à escala. Os bens intermédios, utilizados como fator de produção, são considerados não duráveis e são produzidos utilizando capital físico. Existe apenas um produtor por cada bem intermédio, explorando as rendas monopolistas que o incentivaram a inovar para entrar no mercado. Estes produtores estão sujeitos a uma procura isoelástica e fixam o preço de forma a maximizarem os seus lucros. Assim sendo, o preço é um *markup* sobre o custo marginal, refletindo o poder de mercado que possuem. O nível de conhecimento tecnológico da economia é medido pelo índice de qualidade agregado, Q . Este reflete não só o incremento de qualidade em todas as indústrias de bens intermédios (como resultado de I&D vertical), mas também a entrada de novas variedades de bens intermédios (como resultado de I&D horizontal). O total de lucros e produção no setor intermédio, assim como a produção do bem final, apresentam uma relação linear com este índice.

O modelo considera que as famílias apresentam um comportamento semelhante ao descrito em Ramsey (1928). No entanto, no modelo em análise supõe-se que a força de trabalho, além de exógena, é constante. A família é considerada imortal, englobando várias gerações. Estas transferem valor entre elas com base no altruísmo (Barro e Sala-i-Martin, 2004). Logo, a geração presente vai escolher uma trajetória de consumo, $\{C(t), t \geq 0\}$ que maximize o valor atualizado do somatório de todas

as utilidades futuras da sua família, incluindo a presente. Este valor é dado por

$$U = \int_0^\infty \left(\frac{C(t)^{1-\theta} - 1}{1-\theta} \right) e^{-\rho t} dt, \quad (3.1)$$

onde $C(t)$ representa o consumo num dado instante de tempo, ρ representa a taxa de desconto intertemporal e θ o inverso da elasticidade intertemporal de substituição do consumo, que se assumem positivos. Podemos interpretar θ como a disposição das famílias em alterar o seu padrão de consumo. Esta disposição será tanto maior quanto menor for θ (Barro e Sala-i-Martin, 2004). Por outro lado, as famílias estão sujeitas a uma restrição orçamental. Podem decidir alocar o seu rendimento a consumo ou poupança, com esta última a financiar a acumulação de capital físico ou, alternativamente, as despesas com os dois tipos de I&D. A partir da restrição das famílias, deriva-se a restrição orçamental ao nível agregado

$$Y(t) = C(t) + \dot{K}(t) + R_v(t) + R_h(t), \quad (3.2)$$

sendo $\dot{K}$ a variação de capital físico, $R_v(t)$ e $R_h(t)$ as despesas em I&D vertical e horizontal, respetivamente.

A trajetória de consumo ótimo segue a equação de Euler, de forma análoga a Ramsey (1928),

$$\frac{\dot{C}(t)}{C(t)} = \frac{1}{\theta} (r(Q, K) - \rho), \quad (3.3)$$

em que r representa a taxa de juro real que remunera os ativos financeiros. Em equilíbrio, $r(Q, K) = A\alpha^2 \left(\frac{K(t)}{LQ(t)} \right)^{\alpha-1}$, sendo A uma constante positiva representativa da produtividade total dos fatores. Deste modo, constatamos que r depende do índice agregado de qualidade, Q , e do capital físico, K .

A condição de transversalidade, que garante também a ausência de esquemas Ponzi, segue também a descrição de Ramsey (1928). Considerando as variáveis agregadas K e Q , a condição de transversalidade pode ser escrita como

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\rho t} C(t)^{-\theta} [K(t) + \zeta LQ(t)] = 0, \quad (3.4)$$

onde ζ representa o custo fixo de I&D vertical. Da mesma forma, podemos descrever a função produção agregada como

$$Y(t) = A [LQ(t)]^{1-\alpha} K(t)^\alpha, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (3.5)$$

em que α representa a elasticidade do produto face o capital.

O modelo considera simultaneamente dois tipos de I&D: horizontal e vertical. Assume que os agentes que realizam os dois tipos de I&D são diferentes e que a I&D é efetuada por empresas que tencionam entrar no mercado. Logo, após uma inovação, uma nova empresa será criada e entrará num mercado novo ou já existente, conforme o tipo de inovação realizada. Considera também que existe concorrência perfeita entre os potenciais entrantes e liberdade de entrada no setor de I&D. As empresas decidem investir em I&D, de forma a entrar no mercado, caso o valor atualizado da incumbência supere os custos de entrada. Em equilíbrio estes serão iguais. Uma vez que, no contexto deste modelo, estamos interessados numa situação de equilíbrio em que existem os dois tipos de inovação, os dois tipos de entrada, horizontal e vertical, deverão gerar o mesmo retorno esperado. Desta forma, os agentes são indiferentes em relação ao tipo de inovação a desenvolver. Esta condição de não arbitragem implicará que o custo total de entrada horizontal e o custo médio de entrada vertical sejam idênticos.

O índice de qualidade de um bem intermédio presente na economia num dado momento de tempo, denotado por $q(j)$, está indexado a j que representa o nível de qualidade dos bens intermédios. O modelo considera que este índice segue um processo de Poisson. Assim, a taxa de chegada de uma nova inovação vertical, definida por $I(j)$, é determinada endogenamente e depende da despesa efetuada num determinado instante de tempo neste tipo de I&D, $R_v(j)$, e da produtividade da I&D medida pelo fator $\Phi(j)$

$$I(j) = R_v(j) \cdot \Phi(j). \quad (3.6)$$

A produtividade da I&D, é representada por

$$\Phi(j) = \frac{1}{\zeta L \lambda^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} q(j)}, \quad (3.7)$$

sendo $\lambda > 1$ o salto de qualidade que ocorre quando se inova verticalmente. Deste modo, Φ varia inversamente com: custo fixo de entrada vertical, ζ ; dimensão da economia, medida pela força de trabalho, L ; presente nível de qualidade dos bens intermédios, representado por $q(j)$. Permite assim ultrapassar a questão dos efeitos de escala no crescimento, uma vez que o benefício que uma economia com maior população poderia ter é diluído pela dependência negativa do fator de produtividade de I&D relativamente a L . Por seu turno, a relação deste fator com o nível de qualidade dos bens intermédios expressa a dificuldade crescente em inovar à medida que se sobe na escada de qualidade.

Uma vez que a I&D e a acumulação de capital representam ambas alternativas ao

consumo, estas devem gerar o mesmo retorno real, r . Denotando o valor atualizado da incumbência por V , a livre entrada via inovação vertical exige

$$V(j+1) \cdot I(j) = R_v(j).$$

Obtém-se em Gil (2013) a condição de não arbitragem de I&D vertical

$$r(t) + I(t) = \frac{\pi_0 k(t)^\alpha}{\zeta},$$

em que $\pi_0 = A\alpha(1-\alpha)$ e $k(t) = \frac{K(t)}{LQ(t)}$, sendo k o *stock* de capital por *stock* tecnológico. Esta implica que a taxa de chegada de uma inovação vertical é simétrica para todas as indústrias, $I(t)$. Recordando a expressão de $r(Q, K) \equiv r(k)$ e substituindo na condição anterior obtemos

$$A\alpha^2 k(t)^{\alpha-1} + I(t) = \frac{\pi_0 k(t)^\alpha}{\zeta} \Leftrightarrow I(k) = \frac{\pi_0 k(t)^\alpha}{\zeta} - A\alpha^2 k(t)^{\alpha-1}.$$

Relativamente à I&D horizontal, o modelo considera que o número de novas entradas horizontais de bens intermédios num dado momento de tempo,

$$\dot{N}(t) = \frac{R_h(t)}{\eta(t)}, \quad (3.8)$$

é crescente com a despesa efetuada em I&D horizontal, denotado por $R_h(t)$, e decrescente com o custo de entrada horizontal, denotado por η . Por sua vez, considera que o custo de entrada horizontal é crescente com o número de variedades de bens intermédios existentes, funcionando na prática como uma barreira à entrada. É também crescente com o número de novas entradas horizontais a cada instante, o que induz que novas variedades entrem no mercado de forma gradual. Esta relação expressa-se como

$$\eta(t) = \phi N(t)^\sigma \cdot \dot{N}(t)^\gamma, \quad (3.9)$$

sendo que γ , ϕ e σ são parâmetros positivos. Assume-se que a variedade de bem intermédio criada pelo inovador possui a qualidade média das variedades existentes, $\bar{q}(t) = \frac{Q(t)}{N(t)}$.

A livre entrada neste tipo de I&D exige

$$\dot{N} \cdot V(\bar{q}) = R_h \Leftrightarrow V(\bar{q}) = \eta(t).$$

Em Gil (2013), obtém-se a condição de não arbitragem de I&D horizontal

$$r(t) + I(t) = \frac{\bar{\pi}(t)}{\eta(t)},$$

sendo $\bar{\pi}(t) = \pi_0 \cdot L \cdot k(t)^\alpha \cdot \bar{q}(t)$ o lucro médio do monopolista.

A condição de não arbitragem entre os dois tipos de I&D, referida anteriormente, é obtida igualando a taxa de retorno efetiva, $r(t) + I(t)$, das diferentes inovações

$$\frac{\pi_0 k(t)^\alpha}{\zeta} = \frac{\bar{\pi}(t)}{\eta(t)} \Leftrightarrow \bar{q}(t) L \zeta = \eta(t),$$

e iguala o custo médio de entrada vertical ao custo total de entrada horizontal. Esta condição pode ser reescrita da seguinte forma recorrendo à taxa de entrada horizontal, x , tal que

$$\dot{N}(t) = x(Q(t), N(t)) \cdot N(t), \quad (3.10)$$

em que

$$x(Q, N) = \left(\frac{\zeta L}{\phi} \right)^{\frac{1}{\gamma}} Q^{\frac{1}{\gamma}} N^{-\left(\frac{\sigma+\gamma+1}{\gamma}\right)}. \quad (3.11)$$

Daqui, observa-se que a taxa de entrada horizontal x , depende positivamente do índice agregado de qualidade, Q , e negativamente do número de variedades existentes, N (refletindo a barreira à entrada enunciada anteriormente).

Existe também uma segunda interação entre os dois tipos de entrada. Neste caso, entre o número de variedades e a taxa de crescimento do índice agregado, expressa por

$$\dot{Q}(t) = [I(t)\Xi + x(Q(t), N(t))] \cdot Q(t), \quad (3.12)$$

em que $\Xi = \lambda^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - 1$ representa o benefício resultante do aumento de qualidade.

O equilíbrio geral dinâmico do modelo exige que os consumidores e produtores de bens intermédios e finais escolham o comportamento ótimo. Desta forma irão maximizar a sua utilidade ou lucros, consoante o objetivo. Exige também que sejam cumpridas as condições que garantem a livre entrada nos dois tipos de I&D, assim como a condição que garante que estas proporcionarão o mesmo lucro aos agentes que ponderam entrar no mercado. Todas estas exigências foram mencionadas anteriormente, logo podemos descrevê-las através de um sistema dinâmico constituído pelas equações (3.3), (3.10), (3.12) e

$$\dot{K}(t) = LQ(t) \left(Ak(t)^\alpha - \frac{C(t)}{LQ(t)} - \zeta x(Q(t), N(t)) - I(t) \zeta \lambda^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \right). \quad (3.13)$$

A equação (3.13) é derivada da restrição orçamental agregada, substituindo (3.5), (3.6) e (3.8) em (3.2), resolvendo em ordem a $\dot{K}$ e usando (3.11). Recorde-se ainda que a condição de transversalidade (3.4) tem de ser verificada.

Considerando $z(t) = \frac{C(t)}{L \cdot Q(t)}$, que representa o consumo por *stock* tecnológico, assim como as variáveis x e k e $r(t) \equiv r(k)$ e $I(t) \equiv I(k)$ (como visto acima), o sistema anterior pode ser expresso de forma equivalente como

$$\begin{cases} \dot{x} = \left[I(k) \cdot \Xi \frac{1}{\gamma} - \left(\frac{\sigma}{\gamma} + 1 \right) x \right] x \\ \dot{z} = \left[\frac{1}{\theta} (r(k) - \rho) - \Xi \cdot I(k) - x \right] z \\ \dot{k} = \left[\frac{1}{k} \left(A k^\alpha - z - \zeta x - \zeta \lambda^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} I(k) \right) - \Xi \cdot I(k) - x \right] k \end{cases} \quad (3.14)$$

O sistema (3.14) descreve a evolução das variáveis económicas ao longo do tempo. Este sistema dinâmico envolve as duas variáveis de estado, x e k , e uma variável transformada da variável de controlo, z , associada ao consumo. Este sistema será o ponto de partida para o estudo da dinâmica (local) neste trabalho, permitindo a descrição do comportamento (local) das variáveis de estado em vários cenários.

Capítulo 4

Estudo analítico

No presente capítulo desenvolvemos, tanto quanto possível, o estudo analítico do modelo representado pelo sistema de equações diferenciais (3.14). Os resultados obtidos, para além da descrição rigorosa do comportamento das variáveis de estado, dão sustentação teórica ao estudo numérico do Capítulo 5.

Nos casos em que não for possível obter resultados gerais, serão fixados valores para alguns parâmetros, seguindo a literatura existente (por exemplo, Barro e Sala-i-Martin, 2004).

Em particular, o parâmetro α , representativo da elasticidade do produto face ao capital assume tipicamente valores entre 0,3 e 0,4 enquanto que λ , representativo do salto de qualidade que ocorre quando se inova verticalmente, assume geralmente valores entre 1,5 e 3. O valor de λ vai determinar o carácter drástico da inovação vertical.

No modelo Gil (2013) a inovação vertical é considerada drástica. Nesse sentido, assim que surja um bem intermédio de qualidade superior, o bem de menor qualidade torna-se instantaneamente obsoleto. No entanto, existem modelos em que o bem de qualidade inferior permanece no mercado após uma inovação, competindo e condicionando a estratégia de preço do inovador.

Em concreto, com $\lambda < 1/\alpha$, os produtores de um bem intermédio de qualidade inferior mantêm-se no mercado, competindo com o bem de qualidade superior. Desta forma, o inovador é condicionado pela presença de um concorrente, tendo de definir uma estratégia de preço limite de modo a eliminar a concorrência e tornar-se monopolista. A situação de charneira ocorre quando $\lambda = 1/\alpha$. Neste caso, os produtores de bem final são indiferentes em relação às duas alternativas do bem intermédio presentes no mercado, optando pelo bem de qualidade superior. Assim, no momento em que ocorre a inovação, o bem de qualidade inferior torna-se obsoleto e deixa de ser um concorrente para o inovador que se torna monopolista (Li, 2001).

Apesar das várias pistas empíricas existentes, em relação a γ , σ , ζ ou ϕ apenas podemos afirmar que são positivos. Assim, na impossibilidade de obter resultados gerais, assumimos $\alpha = 1/3$ seguindo a abordagem geralmente utilizada na literatura de crescimento económico. Adicionalmente, sempre que pertinente, será assumido para λ a situação charneira $\lambda = 1/\alpha$, dado o carácter drástico da inovação em Gil (2013).

O estudo analítico do modelo encontra-se organizado da seguinte forma: na Secção 4.1 são analisadas as propriedades do equilíbrio geral dinâmico de longo-prazo; na Secção 4.2 é realizado o estudo qualitativo da dinâmica local através da linearização do sistema original, assumindo que o ponto de equilíbrio do modelo é hiperbólico; para melhor exposição, a hiperbolicidade do equilíbrio é analisada na Secção 4.3.

4.1 Equilíbrio

Nesta secção, são analisadas as propriedades do equilíbrio geral dinâmico de longo-prazo do modelo. No contexto do modelo apenas são economicamente relevantes os equilíbrios interiores, ou seja, aqueles em que nenhuma variável endógena seja nula. O modelo possui a particularidade de o equilíbrio se definir implicitamente, não sendo possível a sua representação analítica. Esta característica representa um obstáculo no desenvolvimento do estudo analítico. Contudo, de acordo com Gil (2013), a resolução analítica permite obter a expressão de z^* assim como duas expressões que definem a variável x^* em função de k^* .

Lema 4.1. *O equilíbrio interior geral dinâmico de longo-prazo (steady state) do modelo é um estado (x^*, k^*, z^*) onde*

$$z^* = A(k^*)^\alpha - \left[1 + \lambda^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \left(\frac{\sigma + \gamma}{\Xi} \right) \right] \zeta x^* - (\sigma + \gamma + 1)x^*k^*. \quad (4.1)$$

e x^* e k^* satisfazem

$$x = f_1(k) = \frac{A\alpha^2 k^{\alpha-1} - \rho}{\theta(\sigma + \gamma + 1)}; \quad (4.2)$$

$$x = f_2(k) = \frac{\Xi}{(\sigma + \gamma)\zeta} (\pi_0 k^\alpha - \zeta A\alpha^2 k^{\alpha-1}). \quad (4.3)$$

Demonstração. O equilíbrio do modelo é solução do seguinte sistema de equações

algébricas:

$$\begin{cases} \left[I(k) \Xi \frac{1}{\gamma} - \left(\frac{\sigma}{\gamma} + 1 \right) x \right] x = 0 \\ \left[\frac{1}{\theta} (r(k) - \rho) - \Xi I(k) - x \right] z = 0 \\ \left[\frac{1}{k} \left(A k^\alpha - z - \zeta x - \zeta \lambda^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} I(k) \right) - \Xi I(k) - x \right] k = 0. \end{cases}$$

Os equilíbrios interiores são solução de:

$$\begin{cases} I(k) \Xi - \left(\frac{\sigma}{\gamma} + 1 \right) x = 0 \\ \frac{1}{\theta} (r(k) - \rho) - \Xi I(k) - x = 0 \\ \frac{1}{k} \left(A k^\alpha - z - \zeta x - \zeta \lambda^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} I(k) \right) - \Xi I(k) - x = 0. \end{cases} \quad (4.4)$$

Da última equação, vem o valor de z^* como função dos valores de x^* e k^* :

$$\begin{aligned} A k^{*\alpha} - z^* - \zeta x^* - \zeta \lambda^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} I(k^*) - k^* \Xi I(k^*) - k^* x^* &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow z^* &= A k^{*\alpha} - \zeta x^* - \zeta \lambda^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} I(k^*) - k^* \Xi I(k^*) - k^* x^*. \end{aligned}$$

Resolvendo a 1^a equação em ordem a $I(k)$ e substituindo na 2^a e na última, obtemos (4.1) e:

$$\frac{1}{\theta} (r(k) - \rho) - \Xi \left(\frac{\sigma + \gamma}{\Xi} \right) x^* - x^* = 0.$$

Dado $r(k)$, $I(k)$ e π_0 definidos no capítulo anterior e resolvendo as duas primeiras equações em ordem a x , obtemos (4.2) e (4.3). $\square$

Pressuposto 4.2. $\rho < A \alpha^2 \left(\frac{\zeta \alpha}{1-\alpha} \right)^{\alpha-1}$

Proposição 4.3. *Considerando o Pressuposto 4.2, o modelo possui pelo menos um equilíbrio interior tal que $k \in]\bar{k}_{min}; \bar{k}_{max}[$ onde*

$$\bar{k}_{min} = \frac{\zeta \alpha}{1-\alpha} \quad ; \quad \bar{k}_{max} = \left(\frac{\rho}{A \alpha^2} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}}. \quad (4.5)$$

Demonstração. A interseção de (4.2) e (4.3) permite obter os pontos $(k^*; x^*)$ que representam, respetivamente, os valores de k e x em equilíbrio. Substituindo estes em (4.1) obtemos o estado das variáveis em equilíbrio.

De acordo com o Lema 4.4, $f_1(k)$ decresce enquanto $f_2(k)$ cresce com k . Vendo, do Lema 4.5, que $f_1(k)$ tem um limite inferior negativo quando $k \rightarrow +\infty$ e que $f_2(k)$ cresce indefinidamente, os gráficos de f_1 e f_2 interseitam-se pelo menos uma vez. Donde, $f_1(k) = f_2(k)$ possui pelo menos uma solução. No entanto, essa solução apenas é economicamente relevante no contexto deste modelo se a taxa de entrada horizontal for positiva em equilíbrio ($x^* > 0$). Tal acontece se $f_2(k)$ se torna positivo antes de $f_1(k)$ se tornar negativo. Seja $\bar{k}_{min}$ tal que $f_2(\bar{k}_{min}) = 0$. Temos:

$$f_2(k) = 0 \Leftrightarrow \pi_0 k - \zeta A \alpha^2 = 0 \Leftrightarrow \bar{k}_{min} = \frac{\zeta \alpha}{1 - \alpha}.$$

Substituindo $k = \bar{k}_{min}$ em (4.2) obtemos:

$$f_1(\bar{k}_{min}) = \frac{A \alpha^2 \left(\frac{\zeta \alpha}{1 - \alpha} \right)^{\alpha-1} - \rho}{\theta(\sigma + \gamma + 1)},$$

onde $f_1(\bar{k}_{min}) > 0$ segue do Pressuposto 4.2. Dado que o equilíbrio ocorre para $f_1(k) > 0$, e dado que $f_1(k)$ é decrescente, o valor $\bar{k}_{max}$ tal que $f_1(\bar{k}_{max}) = 0$ estabelece um limite superior para o intervalo dos valores de k de equilíbrio. Assim, temos:

$$f_1(\bar{k}_{max}) = 0 \Leftrightarrow \frac{A \alpha^2 \bar{k}_{max}^{\alpha-1} - \rho}{\theta(\sigma + \gamma + 1)} = 0 \Leftrightarrow \bar{k}_{max} = \left(\frac{\rho}{A \alpha^2} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}}.$$

□

Lema 4.4. *As funções f_1 e f_2 são monótonas, respetivamente, decrescente e crescente.*

Demonstração. O sinal da derivada de f_1 e f_2 determina a monotonia. Temos

$$\frac{df_1}{dk} = \frac{1}{\theta(\sigma + \gamma + 1)} A \alpha^2 (\alpha - 1) k^{\alpha-2} < 0$$

$$\frac{df_2}{dk} = \frac{\Xi}{(\sigma + \gamma)\zeta} k^{\alpha-2} [\pi_0 \alpha k - \zeta A \alpha^2 (\alpha - 1)] > 0,$$

já que $\alpha \in]0; 1[$.

□

Lema 4.5. *Os valores-limite de f_1 e f_2 são*

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f_1(k) = - \left[\frac{\rho}{\theta(\sigma + \gamma + 1)} \right] \quad ; \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} f_2(k) = +\infty$$

$$\lim_{k \rightarrow 0^+} f_1(k) = +\infty \quad ; \quad \lim_{k \rightarrow 0^+} f_2(k) = -\infty.$$

Lema 4.6. *Se $\alpha = 1/3$ e*

$$\zeta > \frac{d}{(\sigma + \gamma)^3} \left(\frac{27}{4} \right) (d + \sigma + \gamma) \quad (4.6)$$

em que $d = \Xi\theta(\sigma + \gamma + 1)$, então o equilíbrio real é único, sendo possível obter as coordenadas de equilíbrio explicitamente.

Demonstração. A equação $f_1(k) = f_2(k)$ é equivalente ao seguinte polinómio:

$$f_1(k) = f_2(k) \Leftrightarrow k^\alpha + bk^{\alpha-1} + a = 0 \Leftrightarrow k + ak^{1-\alpha} + b = 0$$

onde:

$$a = \frac{(\sigma + \gamma)\zeta\rho}{\Xi\theta(\sigma + \gamma + 1)\pi_0} > 0 \quad ; \quad b = -\frac{\alpha[\Xi\theta(\sigma + \gamma + 1) + \sigma + \gamma]}{\Xi\theta(\sigma + \gamma + 1)(1 - \alpha)} < 0.$$

Considerando $1 - \alpha = \frac{m-n}{m}$ e $k = y^m$, o polinómio anterior pode ser reescrito como

$$y^m + ay^{m-n} + b = 0.$$

Considerando conforme o enunciado $\alpha = 1/3$, o polinómio anterior é de 3º grau: $n = 1; m = 3$ e

$$y^3 + ay^2 + b = 0.$$

O método de Cardano-Tartaglia determina as suas soluções. As suas soluções podem ser reais ou complexas, sendo que estas últimas surgem em pares conjugados. Consequentemente, podem existir duas soluções complexas e uma real ou, alternativamente, três soluções reais. Há unicidade de equilíbrio real quando há soluções complexas. Uma condição suficiente para a unicidade do equilíbrio real, resultante da aplicação do método de Cardano-Tartaglia, é:

$$\frac{a^3b}{27} + \frac{b^2}{4} < 0 \Leftrightarrow b \left(\frac{a^3}{27} + \frac{b}{4} \right) < 0 \Rightarrow_{(b<0)} \frac{a^3}{27} + \frac{b}{4} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \rho > \left(\frac{2}{9}\right) \frac{dA}{\zeta(\sigma + \gamma)} \left[\left(\frac{27}{8}\right) \frac{d + \sigma + \gamma}{d} \right]^{1/3} \quad (4.7)$$

Conciliando (4.7) com o Pressuposto 4.2 obtemos a condição (4.6). Esta garante a existência de apenas um equilíbrio real e a sua relevância económica.

A expressão de k^* é

$$k^* = \left(t - \frac{a}{3}\right)^3 \quad (4.8)$$

sendo:

$$t = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \quad ; \quad q = \frac{2a^3}{27} + b \quad ; \quad p = -\frac{a^2}{3}.$$

Os valores x^* e z^* obtêm-se deste por substituição em (4.3) e (4.1), respetivamente. $\square$

4.2 Estabilidade

A Secção 4.2 destina-se ao estudo qualitativo da dinâmica local do modelo através da linearização. Contudo, esta apenas é válida se o equilíbrio for hiperbólico. Um ponto de equilíbrio diz-se hiperbólico se a matriz jacobiana, nesse ponto, não possuir valores próprios com parte real nula (Zhang, 2005). Como veremos na Secção 4.3, existe apenas uma situação em que o ponto de equilíbrio não é hiperbólico. No entanto, podemos definir condições suficientes robustas que garantam a hiperbolicidade do equilíbrio.

Como tal, nesta secção admitimos por conveniência a hiperbolicidade do equilíbrio, cientes de que a linearização como abordagem metodológica apenas é válida se a hiperbolicidade se confirmar.

A estabilidade de um ponto de equilíbrio de um sistema de equações diferenciais como (3.14) depende do sinal da parte real dos valores próprios da sua matriz jacobiana no equilíbrio. Esta matriz foi calculada em Gil (2013) e é:

$$J = \begin{pmatrix} -\left(\frac{\sigma}{\gamma} + 1\right)x^* & 0 & J_{13}(x^*, k^*) \\ -z^* & 0 & J_{23}(x^*, z^*) \\ -\zeta - k^* & -1 & J_{33}(x^*, k^*) \end{pmatrix}$$

onde

$$J_{13} = B_0 \frac{\Xi}{\gamma} \left(\frac{k^*}{\zeta} + 1 \right) (k^*)^{\alpha-2} x^*$$

$$J_{23} = -B_0 \left(\frac{1}{\theta} + \Xi + \Xi \frac{k^*}{\zeta} \right) (k^*)^{\alpha-2} z^*$$

$$J_{33} = -B_1(k^*)^\alpha + B_2(k^*)^{\alpha-1} - B_3(k^*)^{\alpha-2} - x^*; \quad (4.9)$$

sendo $B_0 = A\alpha^2(1-\alpha)$; $B_1 = \frac{1}{\zeta\alpha}(1+\alpha)\Xi B_0$; $B_2 = A\alpha \left[1 - \lambda^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \alpha(1-2\alpha) - \alpha^2 \right]$ e $B_3 = \zeta \lambda^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} B_0$.

Observamos que $J_{13} > 0$ e $J_{23} < 0$ enquanto que o sinal de J_{33} varia consoante os valores escolhidos para os parâmetros. As expressões do traço e determinante da matriz J são:

$$\text{tr}(J) = - \left(\frac{\sigma}{\gamma} + 1 \right) x^* + J_{33} \quad (4.10)$$

$$\det(J) = z^* J_{13} - \left(\frac{\sigma}{\gamma} + 1 \right) x^* J_{23} > 0. \quad (4.11)$$

Existem 3 valores próprios que caracterizam a dinâmica do modelo, uma vez que esta é representada por um sistema em $\mathbb{R}^3$. Dado que o determinante de uma matriz é igual ao produto dos seus valores próprios, e considerando que $\det(J) > 0$, os valores próprios referentes à matriz jacobiana possuem todos parte real positiva ou, alternativamente, 2 valores próprios possuem parte real negativa. De acordo com o Teorema da Variedade Estável, as alternativas anteriores representam, respetivamente, uma situação de instabilidade total e uma situação de instabilidade na presença de uma variedade estável de dimensão 2 (Zhang, 2005). Do ponto de vista do problema económico em causa, a segunda alternativa é a única interessante. No que resta desta subsecção procuramos descrever situações em que ela ocorre.

Dadas as alternativas possíveis e atendendo a que o traço de uma matriz é a soma dos seus valores próprios, obtemos o resultado seguinte.

Proposição 4.7. *São condições suficientes para a existência de uma variedade estável de dimensão 2:*

$$\text{tr}(J) < 0 \quad (4.12)$$

ou

$$\text{tr}(J) > 0 \quad e \quad \det(J) > a_2 \cdot \text{tr}(J) \quad (4.13)$$

onde

$$a_2 = J_{23} - \left(\frac{\sigma}{\gamma} + 1 \right) x^* J_{33} + (\zeta + k^*) J_{13}. \quad (4.14)$$

Demonstração. A condição (4.12) garante a existência de pelo menos um valor próprio com parte real negativa. Dado $\det(J) > 0$, (4.12) representa uma condição suficiente para uma variedade estável de dimensão 2. $\square$

O único elemento capaz de tornar $\text{tr}(J)$ positivo é J_{33} . Analisando pormenorizadamente este termo, observamos que $B_2 > 0$ para todos os valores dentro do intervalo habitual de variação dos parâmetros α e λ :

$$B_2 > 0 \Leftrightarrow 1 - \lambda^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \alpha(1 - 2\alpha) - \alpha^2 > 0 \Leftrightarrow \lambda < \left[\frac{1 - \alpha^2}{\alpha(1 - 2\alpha)} \right]^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}. \quad (4.15)$$

Ou seja, a condição (4.15) é sempre verificada para os valores de $\alpha \in [0, 3; 0, 4]$ e $\lambda \in [1, 5; 3]$. Deste modo, B_2 é o fator determinante do sinal de $\text{tr}(J)$.

Lema 4.8. *Se $\alpha = 1/3$ e $\lambda = 1/\alpha$, então existe uma variedade estável de dimensão 2.*

Demonstração. Procurando os valores de k^* que anulam os elementos de J_{33} com dependência explícita de k encontramos:

$$\begin{aligned} -B_3 k^{*\alpha-2} + B_2 k^{*\alpha-1} - B_1 k^{*\alpha} &= 0 \Leftrightarrow k^{*\alpha-2}(-B_3 + B_2 k^* - B_1 k^{*2}) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow_{(k \neq 0)} k^* &= \frac{-B_2 \pm \sqrt{B_2^2 - 4B_1 B_3}}{-2B_1}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Uma condição suficiente para que $-B_3 k^{*\alpha-2} + B_2 k^{*\alpha-1} - B_1 k^{*\alpha}$ seja sempre negativo é garantir a inexistência de raízes reais já que $B_1 > 0$. Tal acontece se

$$B_2^2 - 4B_1 B_3 < 0. \quad (4.17)$$

Temos então $J_{33} < 0$ e consequentemente $\text{tr}(J) < 0$. Para $\alpha = 1/3$ e $\lambda = 1/\alpha = 3$, substituindo em (4.17) obtemos:

$$\left(\frac{A}{3}\right)^2 \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{9} - \frac{1}{9}\right)^2 - 16(\sqrt{3} - 1) \left(\frac{2A}{27}\right)^2 \sqrt{3} < 0 \Rightarrow$$

$$\left(1 - \frac{\sqrt{3} + 1}{9}\right)^2 - 16(\sqrt{3} - 1) \frac{4}{81} \sqrt{3} < 0$$

Asseguramos assim a existência de uma variedade estável bidimensional, dado que a condição (4.17) é satisfeita. $\square$

Os resultados seguintes apresentam condições suficientes para a existência de uma variedade estável de dimensão 2 em situações mais gerais do que $\alpha = 1/3$ e $\lambda = 1/\alpha = 3$. As expressões encontradas são mais complexas, mas podem servir de referência quando se queira trabalhar com outros valores para os parâmetros.

Lema 4.9. *Se $\alpha = 1/3$ e $\lambda \in [1, 5; 3]$, então uma condição suficiente para a existência de uma variedade estável de dimensão 2 é:*

$$k^* > \left[\frac{8 - \sqrt{1,5} + \sqrt{(8 - \sqrt{1,5})^2 - 64\sqrt{1,5}(\sqrt{1,5} - 1)}}{16(\sqrt{1,5} - 1)} \right] \zeta. \quad (4.18)$$

Demonstração. As soluções de (4.16), para o caso particular de $\alpha = 1/3$, são:

$$k^* = \left[\frac{8 - \sqrt{\lambda} \pm \sqrt{(8 - \sqrt{\lambda})^2 - 64\sqrt{\lambda}(\sqrt{\lambda} - 1)}}{16(\sqrt{\lambda} - 1)} \right] \zeta. \quad (4.19)$$

A solução de maior valor de (4.19), definida como k^{*+} , representa um limite inferior para k^* que garante a existência de um espaço estável não vazio. Uma vez que:

$$\frac{dk^{*+}}{d\lambda} = \left[\frac{-7\sqrt{-63\lambda + 48\sqrt{\lambda} + 64} + 39\sqrt{\lambda} - 88}{32(\sqrt{\lambda} - 1)^2 \sqrt{\lambda}\sqrt{-63\lambda + 48\sqrt{\lambda} + 64}} \right] \zeta < 0 \quad \text{em } \lambda \in [1, 5; 3],$$

para o intervalo de variação de λ , k^{*+} está negativamente relacionado com λ . Ou seja, k^{*+} será tanto maior quanto menor λ . Desta forma, substituindo λ pelo menor valor do seu intervalo de variação ($\lambda = 1, 5$) em (4.19) obtemos a condição (4.18). $\square$

Foram efetuadas outras abordagens analíticas na procura de condições adicionais para k . No entanto, estas não apresentam um contributo adicional, estando referidas em anexo.

Lema 4.10. *Se $\alpha = 1/3$ e $\lambda \in [1, 5; 3]$, então uma condição suficiente para a existência de uma variedade estável de dimensão 2 é:*

$$z^* > \left(\frac{\zeta + k^*}{\sigma + \gamma} \right) k^{*\alpha-2} \frac{A}{27} \left[-2\sqrt{1,5}\zeta + \frac{(8 - \sqrt{1,5})^2}{16(\sqrt{1,5} - 1)} - 8\frac{(\sqrt{1,5} - 1)}{\zeta} \right]. \quad (4.20)$$

Demonstração. Sendo $\alpha = 1/3$, vamos estabelecer um limite superior para a expressão:

$$-B_3 + B_2k^* - B_1k^{*2}. \quad (4.21)$$

Assim, o valor de k^* que maximiza (4.21), indicado por k^*_c , é:

$$\frac{\partial (-B_3 + B_2k^* - B_1k^{*2})}{\partial k} = 0 \Leftrightarrow k^*_c = \frac{8 - \sqrt{\lambda}}{16(\sqrt{\lambda} - 1)}.$$

Analisando a relação de (4.21) e λ :

$$\frac{\partial (-B_3 + B_2k^* - B_1k^{*2})}{\partial \lambda} = \frac{-\lambda^{\left(\frac{1-2\alpha}{\alpha-1}\right)} [(1-2\alpha)\alpha^3 A\zeta k + B_0 [(1+\alpha)k^2 + \alpha\zeta^2]]}{(1-\alpha)\zeta} < 0$$

observamos que possuem uma relação negativa. Deste modo, dado $\lambda \in [1, 5; 3]$, o valor máximo que (4.21) pode assumir é:

$$\begin{aligned} & -B_3 + B_2 \left[\frac{8 - \sqrt{1,5}}{16(\sqrt{1,5} - 1)} \right] - B_1 \left[\frac{8 - \sqrt{1,5}}{16(\sqrt{1,5} - 1)} \right]^2 = \\ & = \frac{A}{27} \left[-2\sqrt{1,5}\zeta + \frac{(8 - \sqrt{1,5})^2}{16(\sqrt{1,5} - 1)} - 8\frac{(\sqrt{1,5} - 1)}{\zeta} \right]. \end{aligned}$$

Desta forma, majorando (4.21) e substituindo em (4.22), obtemos a condição (4.20) para $\alpha = 1/3$. $\square$

Proposição 4.11. *Uma condição suficiente para a existência de uma variedade estável de dimensão 2 é:*

$$z^* > \left(\frac{\zeta + k^*}{\sigma + \gamma} \right) k^{*\alpha-2} (-B_3 + B_2k^* - B_1k^{*2}). \quad (4.22)$$

Demonstração. A condição (4.13) é satisfeita se $tr(J) > 0$ e:

$$a_2 < 0.$$

Atendendo ao Lema 4.12, podemos definir um limite mínimo para z^* que garanta $a_2 < 0$:

$$z^* > \frac{\zeta + k^*}{\gamma} x^*. \quad (4.23)$$

Uma vez que este limite inferior está positivamente relacionado com a taxa de entrada horizontal, x^* , definindo um limite máximo para x^* obtemos uma nova

condição suficiente para $a_2 < 0$. Desenvolvendo $\text{tr}(J) > 0$ obtemos:

$$x^* < \frac{-B_3 k^{*\alpha-2} + B_2 k^{*\alpha-1} - B_1 k^{*\alpha}}{\frac{\sigma}{\gamma} + 2} \quad (4.24)$$

cujos numeradores são positivos. Deste modo, majorando (4.24) tal que

$$\frac{-B_3 k^{*\alpha-2} + B_2 k^{*\alpha-1} - B_1 k^{*\alpha}}{\frac{\sigma}{\gamma} + 2} < \frac{-B_3 k^{*\alpha-2} + B_2 k^{*\alpha-1} - B_1 k^{*\alpha}}{\frac{\sigma}{\gamma} + 1}.$$

e substituindo em (4.23) obtemos a condição (4.22). $\square$

Lema 4.12. *Uma condição suficiente para $a_2 < 0$ é que (4.23) se verifique.*

Demonstração. A equação (4.14), que representa a expressão de a_2 , pode ser rearranjada da seguinte forma:

$$-\frac{B_0}{\theta} k^{*\alpha-2} z^* + B_0 \Xi \left(1 + \frac{k^*}{\zeta} \right) k^{*\alpha-2} \left(\frac{\zeta + k^*}{\gamma} x^* - z^* \right) - \left(\frac{\sigma}{\gamma} + 1 \right) x^* J_{33}.$$

Desta forma, podemos observar que, dado $J_{33} > 0$, a condição (4.23) garante $a_2 < 0$. $\square$

4.3 Hiperbolicidade

Nesta secção é abordada a questão relativa à hiperbolicidade do equilíbrio do modelo. Os conceitos de Teoria Qualitativa utilizados de seguida encontram-se com mais detalhe em Zhang (2005). Um ponto de equilíbrio diz-se hiperbólico se a matriz jacobiana, nesse ponto, não possuir valores próprios com parte real nula.

Uma vez que o sistema (3.14) não é linear, a abordagem metodológica utilizada para estudar a dinâmica local é a linearização em torno do ponto de equilíbrio. De acordo com o teorema de Hartman-Grobman, se um ponto de equilíbrio é hiperbólico então, localmente próximo do equilíbrio, as soluções do sistema de equações diferenciais não lineares são qualitativamente equivalentes às soluções da sua linearização em torno do equilíbrio. Assim, o sistema linear representa uma boa aproximação local ao sistema não linear. É assim essencial garantir a hiperbolicidade do equilíbrio.

Sendo o sistema linear uma boa aproximação local do caso não linear, então o espaço estável, E^s , representa uma boa aproximação local da variedade estável. Em concreto, E^s representa um plano tangente à variedade estável no ponto de

equilíbrio, gerado pelos dois vetores próprios associados aos valores próprios de parte real negativa. No entanto, apenas os pontos que se encontram na variedade estável convergem para o equilíbrio. Assim, apesar de E^s representar uma boa aproximação para a análise das trajetórias dos pontos que convergem para o equilíbrio, os pontos que se encontram no plano E^s não irão convergir para este. O espaço estável encontra-se representado na Secção 5.1.

Proposição 4.13. *Se todos os valores próprios forem reais, então o equilíbrio é hiperbólico.*

Demonstração. Dado $\det(J) \neq 0$, se todos os valores próprios forem reais, então nenhum será nulo. Como tal, o ponto de equilíbrio é hiperbólico. $\square$

Proposição 4.14. *Se existem valores próprios complexos, então uma condição suficiente para a hiperbolicidade do equilíbrio é $\operatorname{tr}(J) < 0$.*

Demonstração. Sejam $\mu, \alpha \pm i\beta$ os valores próprios. Como:

$$\det(J) = \mu(\alpha^2 + \beta^2) > 0$$

temos $\mu > 0$. Logo, $\operatorname{tr}(J) < 0 \Rightarrow \alpha < 0$ e o equilíbrio é hiperbólico. $\square$

Lema 4.15. *Se existem valores próprios complexos, então uma condição necessária e suficiente para a hiperbolicidade do equilíbrio é $\operatorname{tr}(J) \neq \mu$ em que μ representa o valor próprio real da matriz jacobiana.*

Demonstração. Sejam $\mu, \alpha \pm i\beta$ os valores próprios de J . Já vimos que $\mu \neq 0$. Teremos $\alpha = 0$ se e só se $\operatorname{tr}(J) = \mu + 2\alpha = \mu$. $\square$

Corolário 4.16. *Se $\alpha = 1/3$ e $\lambda = 1/\alpha$, então o ponto de equilíbrio do modelo é hiperbólico.*

Demonstração. Basta verificar $\operatorname{tr}(J) < 0$ e invocar a Proposição 4.14. $\square$

Capítulo 5

Estudo numérico

No presente capítulo encontra-se representado o estudo numérico realizado através do *software* Matlab. O objetivo desta análise numérica é ilustrar os resultados analíticos obtidos no Capítulo 4 e detalhar o seu estudo para melhor interpretação económica.

Nesta abordagem computacional consideramos $\alpha = 1/3$ e $\lambda = 1/\alpha$. A sustentação analítica efetuada garante que os resultados obtidos são robustos para valores próximos a estes. Para os restantes parâmetros existentes no modelo, adotamos valores tipicamente utilizados na literatura de crescimento económico, em particular utilizados nas ilustrações numéricas de Gil *et al.* (2013) (ver também: Barro e Sala-i-Martin, 2004). A exceção é o parâmetro representativo do custo fixo de entrada vertical, definido por ζ . O valor definido para ζ visa a calibração do modelo, de forma a replicar uma taxa de crescimento de longo-prazo da economia próxima de 2,5%. Esta calibração procura aproximar o comportamento descrito no modelo da evidência empírica relativa à taxa de crescimento de longo-prazo das economias desenvolvidas (Barro e Sala-i-Martin, 2004).

A Tabela 5.1 apresenta os diferentes valores assumidos para os parâmetros:

α	λ	ρ	σ	γ	θ	A	L	ϕ	ζ
1/3	3	0,02	1,2	1,2	1,5	1	1	1	3,75

Tabela 5.1: Valores dos parâmetros assumidos para a ilustração numérica.

Dados os valores dos parâmetros fixados na Tabela 5.1, encontram-se na Tabela 5.2 os valores gerados pelo modelo em equilíbrio de longo-prazo:

x^*	k^*	z^*	g_Y^*	$\det(J)$	$\text{tr}(J)$	μ_1	μ_2	μ_3
0,0074	2,6634	1,1330	0,0252	$5,9419 \times e^{-4}$	- 0,0757	-0,2064	-0,0192	0,1499

Tabela 5.2: Valores verificados em equilíbrio de longo-prazo na ilustração numérica.

em que g_Y^* representa a taxa de crescimento de longo-prazo da economia e μ_i , $i = 1, 2, 3$, os valores próprios da matriz jacobiana, J , avaliada no equilíbrio de longo-prazo considerado.

Observação: Constatamos que, para os valores de parâmetros fixados, o modelo gera apenas valores próprios reais. Todavia, a possibilidade de uma ilustração alternativa gerar valores próprios complexos não é excluída. Deste modo e a título de exemplo, *ceteris paribus*, se $\sigma = \gamma = 0,2$ e $\zeta = 4,6$ temos:

$$\mu_1 = -0,1275 + 0,0576i \quad , \quad \mu_2 = -0,1275 - 0,0576i \quad , \quad \mu_3 = 0,1426,$$

sendo μ_i , $i = 1, 2, 3$, os valores próprios de J . Nesta situação a convergência para o equilíbrio ocorre de forma oscilatória, uma vez que os valores próprios complexos estão associados à estabilidade, dado possuírem parte real negativa. Contudo, existem indícios numéricos de que, caso exista convergência oscilatória, esta é praticamente impercetível à escala utilizada e não altera a interpretação económica. O facto do aumento de ζ e diminuição de σ e γ gerar comportamento oscilatório reflete a tensão existente entre as barreiras à entrada horizontais e verticais.

Para a presente ilustração verificamos que a maioria das condições analíticas enunciadas no Capítulo 4 são satisfeitas. Em concreto, o Pressuposto 4.2 ($\rho < 0,0731$) e a Proposição 4.3 ($1,8750 < k^* < 13,0946$) da Secção 4.1 relativa ao equilíbrio. Da Secção 4.2 relativa à estabilidade: Proposição 4.7 ($\text{tr}(J) < 0$), Lema 4.8 ($\mu_1, \mu_2 < 0 < \mu_3$), Lema 4.10 ($z^* > 0,06$), Proposição 4.11 ($z^* > -0,1427$) e Lema 4.12 ($z^* > 0,0396$). O Lema 4.15 ($-0,0757 \neq 0,1499$) da Secção 4.3 repete que o ponto de equilíbrio do modelo é hiperbólico, conforme enunciado no Corolário 4.16. As condições suficientes enunciadas no Lema 4.6 ($\zeta > 11,1812$) e Lema 4.9 ($k^* > 12,6121$) não se verificam.

Deste modo, sabemos *a priori* que, para os valores fixados na Tabela 1, o ponto de equilíbrio é hiperbólico e existe uma variedade estável bidimensional. É com base nesta sustentação analítica que realizamos a abordagem computacional de forma a detalhar o processo de convergência dos pontos que se encontram sobre a variedade estável.

O estudo numérico está organizado da seguinte forma: na Secção 5.1 é apresentada a metodologia utilizada para a análise do processo de convergência; nas Secções 5.2, 5.3, 5.4 e 5.5 são analisadas e interpretadas individualmente as diferentes regiões do diagrama de fase. Por último, na Secção 5.6 recapitulamos resumidamente as principais características de cada fase do ponto de vista da taxa de crescimento da economia, g_Y .

5.1 Metodologia

Na presente secção é descrita a abordagem metodológica utilizada para analisar o processo de convergência. A Figura 5.1 ilustra o espaço estável do sistema linear, representado por um plano tangente à variedade estável no ponto de equilíbrio.

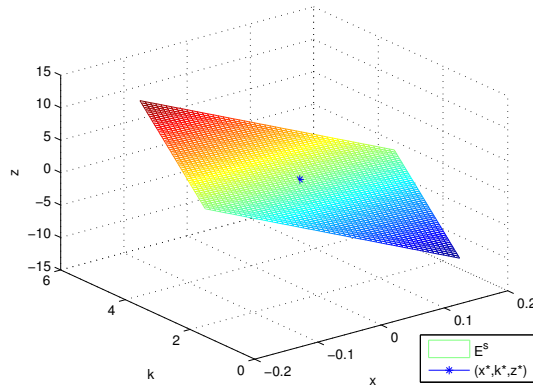


Figura 5.1: Representação do espaço estável associado ao sistema linear.

Os subespaços próprios associados aos valores próprios estáveis encontram-se sobre este plano e dividem o espaço de fase em 4 regiões distintas, denominadas fases. Assim, as trajetórias para o equilíbrio são qualitativamente diferentes consoante o ponto de partida inicial.

A Figura 5.2 ilustra o diagrama de fase representado sobre o espaço estável, E^s .

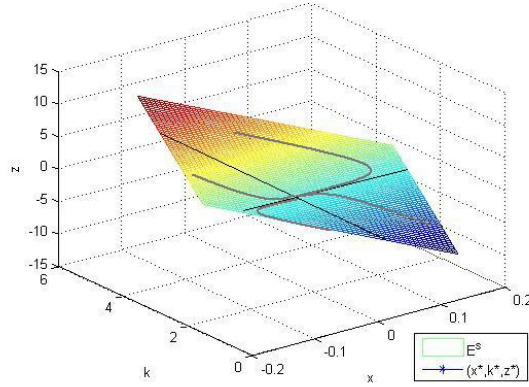


Figura 5.2: Representação do espaço estável e diagrama de fase associado ao sistema linear.

No contexto do modelo procuramos compreender o comportamento ao longo do tempo das variáveis de estado x e k , associadas à estabilidade. A análise da variável fluxo z , associada à instabilidade e representativa do consumo por *stock* tecnológico, não é particularmente relevante em termos do modelo em análise. Apesar de z representar uma variável de controlo no problema de otimização do consumo das famílias, não o representa do ponto de vista do sistema dinâmico agregado, dado que este é derivado na ótica do equilíbrio geral descentralizado e não do equilíbrio geral de planeador central.

Assim, seguindo a abordagem de Eicher e Turnovsky (2001) vamos analisar a dinâmica de x e k através da projecção do espaço estável, E^s , no plano horizontal (x, k) . Uma vez que esta projecção não é ortogonal ao espaço estável, a componente instável associada a z continua a exercer influência na dinâmica observada de x e k . Cientes deste facto e por abuso de linguagem, no seguinte estudo será utilizado o termo projecção como referência à projecção não ortogonal no plano horizontal (x, k) .

Conforme descrito no Apêndice A, segundo Eicher e Turnovsky (2001) a dinâmica de x e k no espaço de fase (x, k) pode ser descrita por:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mu_1 v_{(2,2)} v_{(1,1)} - \mu_2 v_{(2,1)} v_{(1,2)}}{v_{(2,2)} v_{(1,1)} - v_{(2,1)} v_{(1,2)}} & \frac{(\mu_2 - \mu_1) v_{(1,2)} v_{(1,1)}}{v_{(2,2)} v_{(1,1)} - v_{(2,1)} v_{(1,2)}} \\ \frac{(\mu_1 - \mu_2) v_{(2,1)} v_{(2,2)}}{v_{(2,2)} v_{(1,1)} - v_{(2,1)} v_{(1,2)}} & \frac{\mu_2 v_{(2,2)} v_{(1,1)} - \mu_1 v_{(2,1)} v_{(1,2)}}{v_{(2,2)} v_{(1,1)} - v_{(2,1)} v_{(1,2)}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x^* \\ k - k^* \end{pmatrix}$$

sendo μ_1 e μ_2 os valores próprios associados à estabilidade e $v_{(i,j)}$ o elemento i do vetor próprio associado ao valor próprio j . As projecções dos subespaços próprios

associados aos valores próprios negativos são definidas como

$$E_{\mu_1}^s : k(t) - k^* = \frac{v_{(2,1)}}{v_{(1,1)}}(x(t) - x^*)$$

$$E_{\mu_2}^s : k(t) - k^* = \frac{v_{(2,2)}}{v_{(1,2)}}(x(t) - x^*)$$

e dividem o espaço de fase em 4 regiões distintas denominadas fases, representadas pelas letras A, B, C e D.

A Figura 5.3 representa a projeção do diagrama de fase no espaço de fase (x, k) e ilustra a projeção neste plano horizontal de várias trajetórias possíveis, dependendo da situação inicial, assim como a projeção dos subespaços próprios associados aos valores próprios negativos.

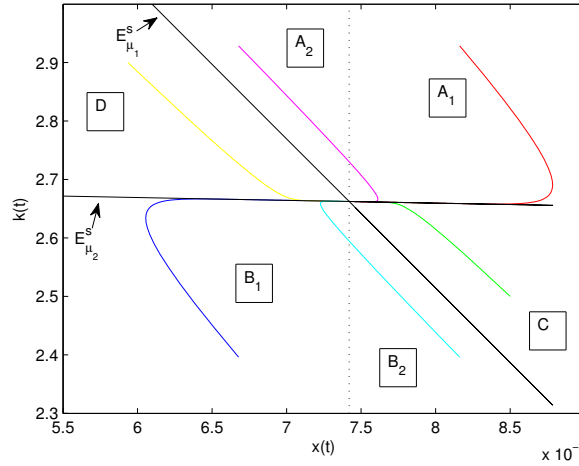


Figura 5.3: Representação gráfica da projeção do diagrama de fase num plano horizontal. As linhas a preto representam a projeção dos subespaços próprios associados aos valores próprios estáveis. Estes dividem em quatro fases distintas (A, B, C e D) a dinâmica de convergência para o equilíbrio. As fase A e B são divididas em duas regiões cada. As linhas coloridas ilustram a projeção das diferentes trajetórias dependendo do ponto de partida inicial. As fases A e B são caracterizadas por uma convergência não monótona em ambas as variáveis. Por outro lado, nas fases C e D a convergência é monótona.

Dividimos as fases A e B em duas regiões cada que, apesar de pertencerem à mesma fase, representam situações económicas distintas. As regiões A_2 e B_1 representam as situações iniciais em que $x(0) < x^*$. Por outro lado, as regiões A_1 e B_2 representam as situações iniciais em que $x(0) > x^*$.

Dada a relação inversa entre a taxa de entrada horizontal, x , e o número de bens intermédios, N , expressa em (3.11), se $x(0) < x^*$ então existe um elevado número de variedades iniciais de bens intermédios na economia relativamente ao *stock* total de conhecimento tecnológico, e vice-versa para $x(0) > x^*$.

Assim, no que se segue consideramos a análise das situações iniciais em termos de número de variedades iniciais de bens intermédios. Deste modo, uma economia pode ser inicialmente pobre ou rica em variedades de bens intermédios, consoante se encontre à direita ou à esquerda da reta a tracejado. Adicionalmente, dado $v_{2,2} \simeq 0$, consideramos $k(0) > k^*$ nas fases A e D e $k(0) < k^*$ nas fases B e C, que correspondem respetivamente a economias ricas e economias pobres em *stock* de capital físico relativamente ao *stock* de conhecimento tecnológico e por trabalhador no momento inicial.

Apesar de impercetível na Figura 5.3, o declive de $E_{\mu_2}^s$ é negativo ($v_{2,2} < 0$). Deste modo, ambas as variáveis pré-determinadas x e k terão convergência monótona ou não monótona, dependendo do ponto de partida inicial. Tal poderá ser constatado na análise individual das regiões, apresentada abaixo.

Será também percetível que x e k podem realizar *overshooting* ou *undershooting* no processo de ajustamento. Estes termos, geralmente utilizados em Teoria de Controlo, descrevem processos não monótonos com a particularidade da variável atingir, instantaneamente, o respetivo valor de equilíbrio antes do próprio equilíbrio do modelo (Kuo e Golnaraghi, 2003).

No estudo que se segue consideramos, para cada fase, duas condições iniciais de magnitudes diferentes para realçar as diferenças quantitativas consoante o afastamento do equilíbrio. A escolha destas condições não é arbitrária devido ao carácter local do teorema de Hartman-Grobman. Deste modo, estas deverão ser relativamente próximas do equilíbrio de forma a reduzir os erros associados à linearização. Adicionalmente, esta escolha tem em consideração as condições $I(t) > 0$ e $N(t) > 0$ ao longo de toda a transição para o equilíbrio.

A análise de cada região segue a seguinte estrutura: num primeiro momento é analisado o processo de ajustamento de x e k e da respetiva velocidade de convergência¹; segue-se a análise das variáveis fundamentais do modelo, nomeadamente o capital físico, K , o número de bens intermédios, N , e o índice agregado de qualidade, Q ; por último, é analisada a dinâmica da taxa de crescimento da economia, g_Y , e da dimensão média das empresas, medida pelo *stock* médio de capital físico por empresa, $K(t)/N(t)$.

Contudo, como será percetível, nem todas as variáveis são estacionárias em equilíbrio. Dado $k = \frac{K(t)}{L \cdot Q(t)}$, (3.5) e (3.12), as taxas de crescimento das principais

¹Segundo Eicher e Turnovsky (2001) e Steger (2006), a velocidade de convergência das variáveis de estado x e k é respetivamente $\omega_x = -\left(\frac{x(t)-x(t-1)}{x(t)-x^*}\right)$ e $\omega_k = -\left(\frac{k(t)-k(t-1)}{k(t)-k^*}\right)$.

variáveis são

$$g_Q(t) = I(t) \cdot \Xi + x(t) \quad ; \quad g_K(t) = g_k(t) + g_Q(t) \quad ; \quad g_{K/N}(t) = g_K(t) - g_N(t) \quad ;$$

$$g_N(t) = x(t) \quad ; \quad g_Y(t) = (1 - \alpha)g_Q(t) + \alpha g_K(t) = g_Q(t) + \alpha g_k(t) \quad ;$$

sendo g_i a taxa de crescimento da variável i .²

Em equilíbrio dinâmico de longo-prazo x e k são estacionários, sendo $g_{x^*} = 0$ e $g_{k^*} = 0$. Deste modo, dado $g_k(t) = g_K(t) - g_Q(t)$, em equilíbrio temos:

$$g_{K^*} = g_{Q^*} = g_{Y^*} = (\sigma + \gamma + 1)x^* > 0$$

$$g_{K^*/N^*} = g_{K^*} - g_{N^*} = (\sigma + \gamma)x^* > 0.$$

Assim, em equilíbrio Q , N , K , K/N e Y crescem a uma taxa constante positiva, seguindo uma trajetória de crescimento sustentado denominada *balanced growth path*, correspondente ao *steady state* (x^*, k^*, z^*) .

Uma vez que estas variáveis não são estacionárias em equilíbrio, não existe um valor de referência para o qual convergem. Como tal, utilizamos como termo de comparação para a convergência observada, a trajetória que a respetiva variável teria caso se encontrasse em equilíbrio de longo-prazo desde o instante inicial de tempo, seguindo o respetivo *balanced growth path*. Esta abordagem é geralmente utilizada na literatura de crescimento económico (Barro e Sala-i-Martin, 2004).

Para permitir uma melhor análise gráfica, estas duas trajetórias são representadas corrigidas pela tendência considerando:

$$Q_d(t) = Q(0) \times e^{(g_Q(t) - g_{Q^*})t} \quad ; \quad K_d(t) = K(0) \times e^{(g_K(t) - g_{K^*})t}$$

$$N_d(t) = N(0) \times e^{(g_N(t) - g_{N^*})t} \quad ; \quad (K/N)_d(t) = K_d(t)/N_d(t)$$

sendo Q_d , K_d , N_d e $(K/N)_d$ as respetivas variáveis corrigidas pela tendência. Este método representa uma transformação matemática geralmente utilizada na literatura de ciclos económicos de forma a analisar a componente cíclica de curto-prazo da economia, abstraindo-se da tendência de longo-prazo.

Nas seguintes secções, são analisadas individualmente as diferentes regiões do

² $g_Q(t) = \dot{Q}(t)/Q(t)$, $g_N(t) = \dot{N}(t)/N(t)$, $g_K(t) = \dot{K}(t)/K(t)$, $g_k(t) = \dot{k}(t)/k(t)$ e $g_Y(t) = \dot{Y}(t)/Y(t)$.

diagrama de fase com base na metodologia exposta. Importa salientar as diferentes grandezas das variáveis, em particular das variáveis de estado, encontrando-se representadas em escalas de diferente dimensão. Em termos de interpretação económica, consideramos que a dotação inicial de k e x é diferente de equilíbrio de longo-prazo. Em primeiro lugar são analisadas as regiões que caracterizam uma economia rica em capital físico (as regiões A_1 , A_2 e D), seguidas da análise das regiões que caracterizam uma economia pobre em capital físico (as regiões B_1 , B_2 e C).

No Capítulo 6, é realizada uma interpretação económica alternativa, interpretando o efeito de choques exógenos: considerando que a economia se encontra inicialmente em equilíbrio de longo-prazo e que a ocorrência de um choque exógeno e não antecipado nos custos de entrada horizontal ou vertical altera esse equilíbrio.

5.2 Fase A

5.2.1 Região A_1

A região A_1 caracteriza uma economia inicialmente pobre em número de variedades de bens intermédios, implicando x inicial superior ao equilíbrio de longo-prazo, x^* , mas que possui um *stock* inicial de capital físico relativamente ao *stock* de conhecimento tecnológico, k , superior ao de equilíbrio de longo-prazo, k^* .

A Figura 5.4 ilustra o processo de convergência de uma condição inicial pertencente a esta região. Como será visível na análise individual das variáveis, a convergência das variáveis de estado x e k não é monótona.

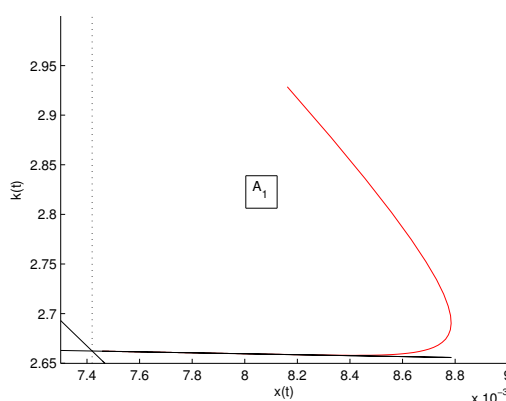


Figura 5.4: Representação gráfica da projeção da trajetória para o equilíbrio, ilustrada pela linha encarnada, considerando uma condição inicial pertencente à região A_1 . As linhas a preto representam a projeção dos subespaços próprios associados aos valores próprios estáveis. A reta vertical a tracejado representa a divisão efetuada entre as regiões A_1 e A_2 .

As condições iniciais consideradas na análise seguinte são $(1, 1x^*; 1, 1k^*)$ e $(1, 25x^*; 1, 25k^*)$, representando afastamentos de x e k relativamente ao valor de equilíbrio de igual magnitude. A magnitude destes afastamentos apenas tem efeitos quantitativos, sendo a convergência qualitativamente equivalente.

Dinâmica da taxa de entrada horizontal, x : Na Figura 5.5 observamos a evolução ao longo do tempo da taxa de entrada horizontal e da sua velocidade de convergência, denotada por ω_x . Verificamos a não monotonia do ajustamento de x , sendo inicialmente crescente e posteriormente decrescente até ao respetivo valor de equilíbrio, x^* . Conforme observado nos gráficos superiores da Figura 5.5, o ritmo de entrada horizontal está positivamente relacionado com o afastamento inicial relativamente ao equilíbrio.

Ao longo de todo o ajustamento, novas empresas entram na economia via inovação horizontal a um ritmo superior ao de equilíbrio de longo-prazo. Tal resulta da economia possuir um reduzido número de variedades iniciais de bens intermédios, $N(0)$, para dado $Q(0)$.

Segundo (3.9), o custo de entrada horizontal, η , é crescente com o número de variedades existente. Assim, à medida que novas empresas entram na economia via inovação horizontal, η cresce e atua como barreira à entrada. Deste modo, à medida que os custos de entrada aumentam, indústrias de novas variedades de bens intermédios são criadas a um ritmo cada vez menor, contudo superior ao de equilíbrio de longo-prazo.

No entanto, observamos que no início do ajustamento a taxa de entrada horizontal, x , é crescente. Este comportamento de x resulta da complementaridade existente entre os dois tipos de inovação. *Ceteris paribus*, o aumento do nível de conhecimento tecnológico da economia, Q , gerado pela inovação vertical facilita o surgimento de novas variedades de bens intermédios. Observamos a dinâmica da taxa de chegada de uma nova inovação vertical, I , na Figura 7.1 no Apêndice B. Assim, uma vez que na fase inicial do ajustamento o ritmo de entrada vertical é elevado, refletindo o elevado k inicial, o impacto positivo desta inovação em x , via aumento de Q , compensa o aumento dos custos de entrada horizontal, gerando x crescente.

À medida que o ritmo de entrada vertical diminui, diminui também o seu impacto positivo em x . Deste modo, a partir de determinado momento o efeito negativo de η domina, gerando x decrescente até atingir x^* .

Dado que x se encontra inicialmente a divergir do respetivo valor de equilíbrio, ω_x é negativa, tornando-se positiva a partir do momento em que x atinge o seu valor

máximo. As variáveis de estado x e k convergem assintoticamente para o respetivo valor de equilíbrio de longo-prazo à velocidade $-\mu_2$, que corresponde ao valor próprio negativo de menor valor absoluto³.

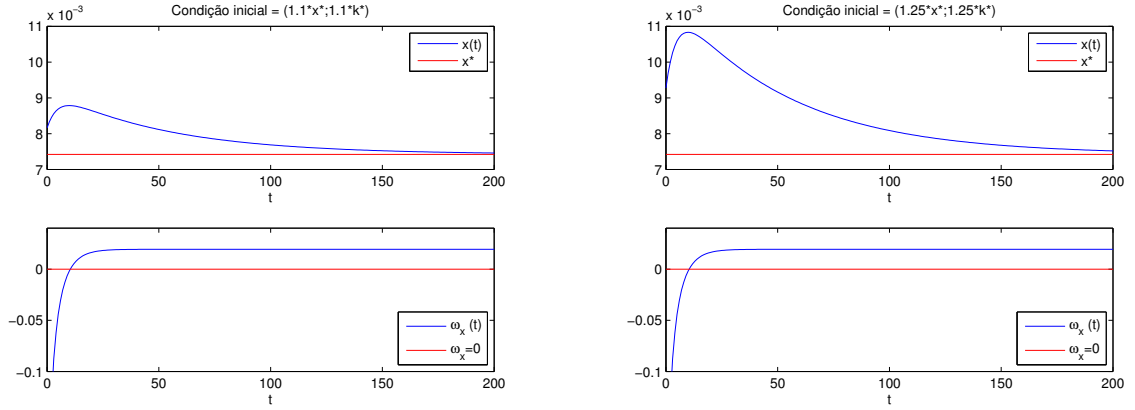


Figura 5.5: Representação gráfica da evolução da taxa de entrada horizontal, x , e da sua velocidade de convergência, ω_x , ao longo do tempo ilustradas pelas linhas a azul, admitindo que inicialmente ambas as variáveis de estado se encontram 10% (à esquerda) e 25% (à direita) acima do seu valor de equilíbrio de longo-prazo. As linhas encarnadas representam os respetivos valores de equilíbrio de longo-prazo.

Dinâmica do *stock* de capital físico por *stock* de conhecimento tecnológico, k : A Figura 5.6 ilustra o processo de convergência do *stock* de capital físico por unidade de *stock* de conhecimento tecnológico e por trabalhador, k , e da respetiva velocidade de convergência, ω_k , ao longo do tempo.

O valor de k começa por cair acentuadamente, como reflexo da sua produtividade marginal inicial relativamente reduzida. Verificamos a ocorrência de *undershooting*, uma vez que k atinge instantaneamente o respetivo valor de equilíbrio de longo-prazo próximo do 20º instante de tempo. Nesse instante de tempo, ω_k possui uma assíntota vertical, conforme visível nos gráficos inferiores da Figura 5.6. Este comportamento reflete o facto de k , que até esse instante de tempo havia convergido para o respetivo valor de equilíbrio de longo-prazo, decrescer de tal forma que começa a divergir de k^* . A divergência está associada a velocidade de convergência negativa. A partir do instante em que k atinge o valor mínimo, k converge novamente para k^* e ω_k torna-se positivo, refletindo os recursos libertados pela redução de x . Tal como x , k converge assintoticamente para o respetivo valor de equilíbrio de longo-prazo à velocidade $-\mu_2$.

³Na presente ilustração, obtemos para x e k a velocidade de convergência assintótica de 0,001938. A diferença relativamente a $-\mu_2$ pode dever-se a erros de aproximação associados ao código Matlab utilizado, representado em anexo.

O ajustamento de k é relativamente célere em comparação com o ajustamento observado de x , o qual assume valores relativamente próximos do valor de equilíbrio de longo-prazo aproximadamente a partir do 150^o instante de tempo (ver também Figura 7.7 no Apêndice C, com a dinâmica de g_k).

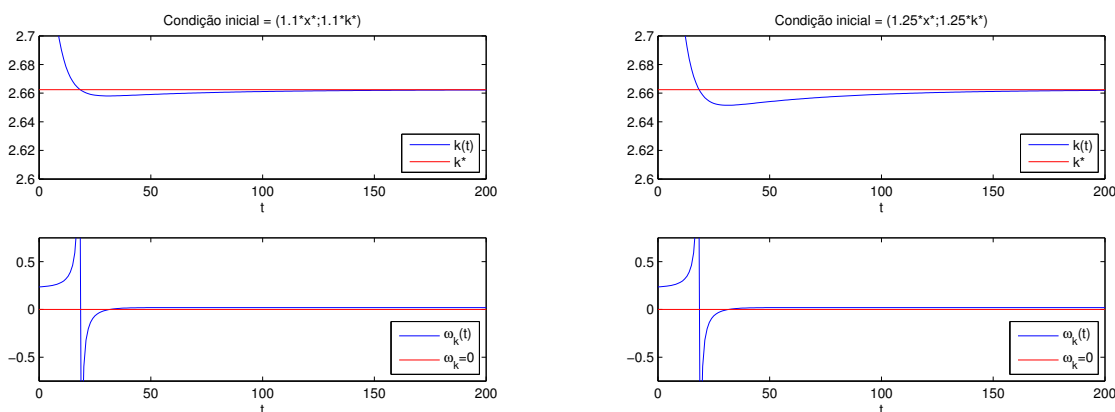


Figura 5.6: Representação gráfica da evolução de k e da sua velocidade de convergência, ω_k , ao longo do tempo, admitindo que inicialmente ambas as variáveis de estado se encontram 10% (à esquerda) e 25% (à direita) acima do seu valor de equilíbrio de longo-prazo. As linhas encarnadas representam os respectivos valores de equilíbrio de longo-prazo.

Dinâmica do índice agregado de qualidade, Q : O índice agregado de qualidade, Q , é uma medida do nível de conhecimento tecnológico e reflete o incremento de qualidade em todas as indústrias de bens intermédios, assim como a entrada de novas indústrias destes bens (novas variedades). Como tal, na Figura 5.7 está presente não apenas o efeito da entrada horizontal, observado na Figura 5.5, mas também o efeito da entrada vertical.

Observamos que o ajustamento de Q é monótono. Durante a totalidade do processo de convergência, Q cresce a um ritmo superior ao *balanced growth path* e respetiva taxa de crescimento de longo-prazo, aproximando-se da respetiva tendência.

O elevado crescimento de Q resulta do elevado ritmo de entrada em ambos os tipos de inovação. Os determinantes da elevada taxa de entrada horizontal, x , encontram-se na análise individual de x realizada anteriormente.

A célere entrada vertical resulta da complementaridade existente entre inovação vertical e capital físico. *Ceteris paribus*, quanto maior o k inicial, maior o produto e lucro por trabalhador; consequentemente maior o incentivo a inovar, ou seja, o lucro monopolista resultante de uma inovação. Assim, a taxa de chegada de uma inovação vertical, I , possui uma relação direta com k . Esta reflete o comportamento não monótono de k durante o ajustamento, conforme observado na Figura 7.1 no

apêndice B. Uma vez que a economia possui um elevado k inicial, o ritmo de entrada vertical é também elevado.

Ao longo do ajustamento, o crescimento de Q será cada vez menor devido à dificuldade crescente em inovar à medida que se sobe na escada de qualidade e ao menor incentivo para inovar resultante dos custos crescentes de entrada horizontal.

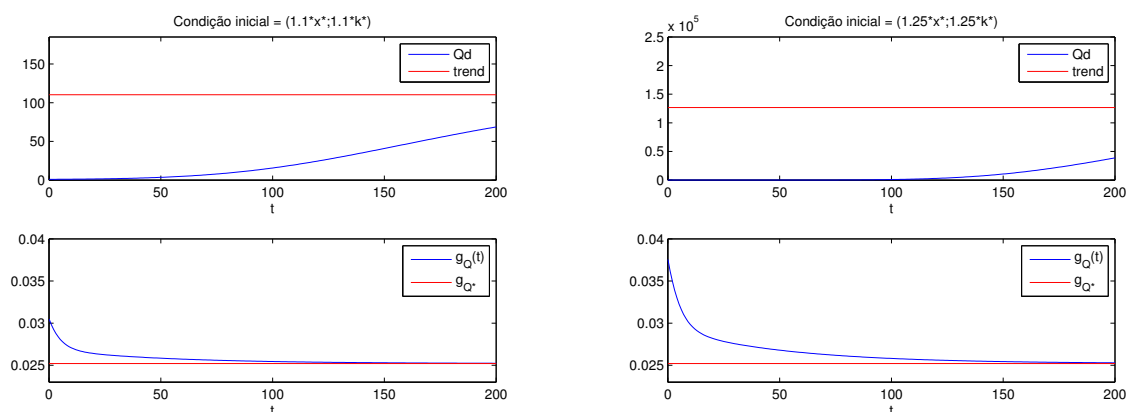


Figura 5.7: Representação gráfica do índice agregado de qualidade, corrigido pela tendência, e da respetiva taxa de crescimento, admitindo que inicialmente ambas as variáveis de estado se encontram 10% (à esquerda) e 25% (à direita) acima do seu valor de equilíbrio de longo-prazo. O conceito teórico de tendência representa os valores que uma variável assumiria caso se encontrasse em equilíbrio dinâmico de longo-prazo desde o momento inicial. A linha azul ilustra o valor de Q corrigido pela tendência; a linha encarnada representa a projeção da tendência de Q .

Dinâmica do capital físico, K : A Figura 5.8 ilustra o processo de convergência ao longo do tempo do capital físico corrigido pela tendência. A Figura 5.9 representa o mesmo ajustamento apenas durante os primeiros 50 instantes de tempo, numa escala mais reduzida. Conforme constatado na Figura 5.9, o ajustamento de K não é monótono. Numa fase inicial, K cresce a uma taxa inferior ao *balanced growth path*, afastando-se da respetiva tendência. Posteriormente, o crescimento de K é superior ao *balanced growth path* até atingir o equilíbrio dinâmico de longo-prazo.

A reduzida acumulação inicial de capital físico resulta da produtividade marginal decrescente de K , P_{mg_K} . *Ceteris paribus*, quanto maior o valor de K menor P_{mg_K} . Dado $k = \frac{K}{L \cdot Q}$ e uma vez que o valor inicial de k é elevado, então o valor inicial de K também é elevado. Assim, a acumulação inicial de K ocorre a um ritmo inferior ao *balanced growth path*.

Ao longo do ajustamento, o aumento do nível de conhecimento tecnológico, Q , tem um efeito positivo em P_{mg_K} , tornando o capital físico mais produtivo. Em

concreto, com o mesmo K é possível produzir mais produto final, Y . Consequentemente, aumenta o incentivo à sua acumulação. A partir de certo momento, o efeito do aumento deste incentivo domina, gerando um crescimento de K superior ao de Q e, também, ao *balanced growth path*, aproximando K_d da respectiva da tendência. O célere crescimento de K é impulsionado pela libertação de recursos na economia resultante do abrandamento da entrada via I&D horizontal.

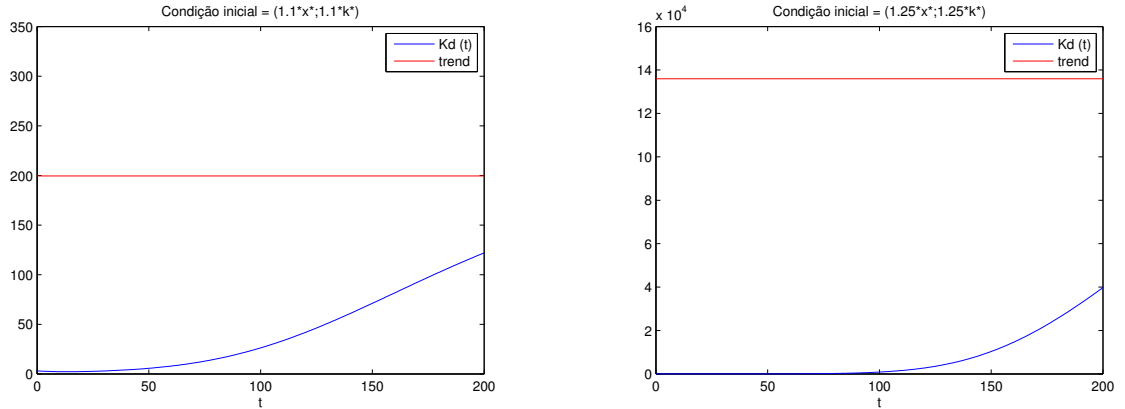


Figura 5.8: Representação gráfica do capital físico ao longo do tempo corrigido pela tendência, admitindo que inicialmente ambas as variáveis de estado se encontram 10% (à esquerda) e 25% (à direita) acima do seu valor de equilíbrio de longo-prazo. O conceito teórico de tendência representa os valores que uma variável assumiria caso se encontrasse em equilíbrio dinâmico de longo-prazo desde o momento inicial. A linha azul ilustra o valor de K corrigido pela tendência; a linha encarnada representa a projeção da tendência de K .

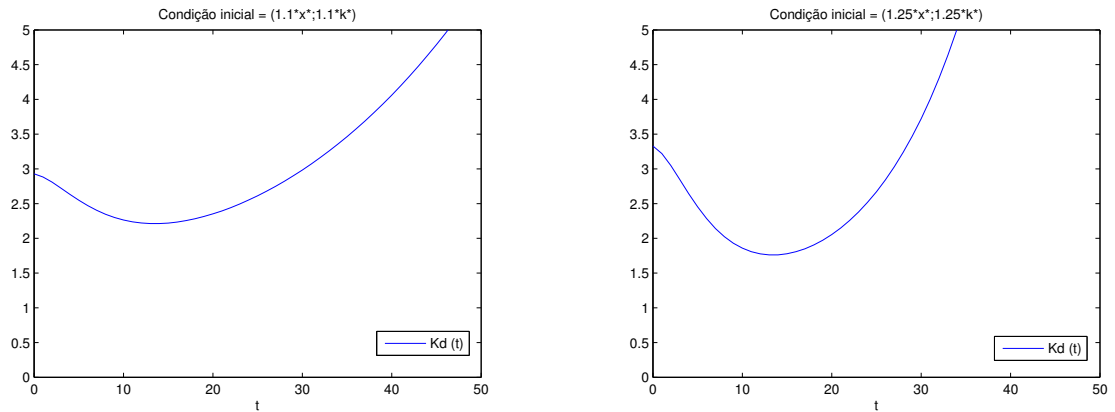


Figura 5.9: Representação gráfica do capital físico corrigido pela tendência durante os primeiros 50 instantes de tempo, admitindo que inicialmente ambas as variáveis de estado se encontram 10% (à esquerda) e 25% (à direita) acima do seu valor de equilíbrio de longo-prazo. O conceito teórico de tendência representa os valores que uma variável assumiria caso se encontrasse em equilíbrio dinâmico de longo-prazo desde o momento inicial.

Dinâmica do número de bens intermédios, N : A Figura 5.10 representa a evolução ao longo do tempo do número de variedades de bens intermédios corrigido pela tendência. Este apresenta um comportamento monótono, crescendo a um ritmo superior ao *balanced growth path* durante a totalidade do ajustamento.

Em equilíbrio de longo-prazo a taxa de entrada horizontal, x , é estacionária, ou seja, novas empresas entram no mercado via inovação horizontal a uma taxa constante positiva x^* . Deste modo, nesse equilíbrio o número de bens intermédios, N , encontra-se sempre em crescimento, seguindo uma trajetória de crescimento sustentado, i.e. de *balanced growth path*.

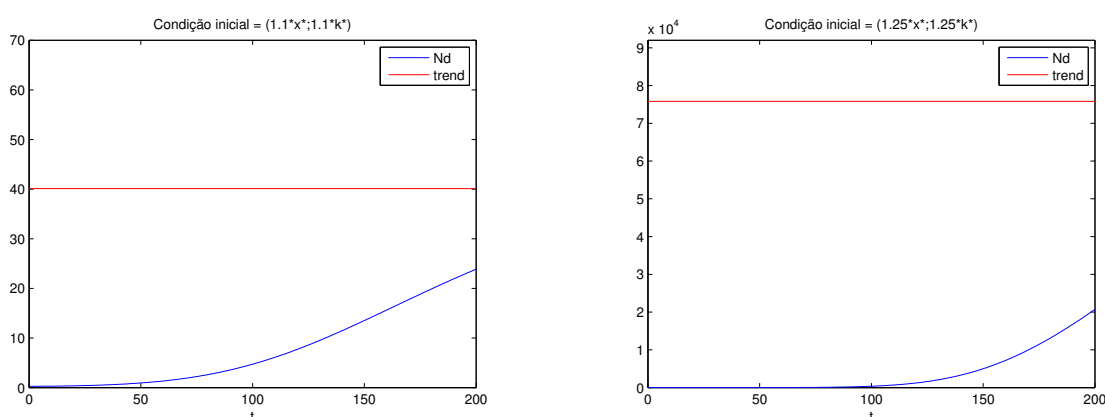


Figura 5.10: Representação gráfica do número de variedades de bens intermédios ao longo do tempo corrigida pela tendência, admitindo que inicialmente ambas as variáveis de estado se encontram 10% (à esquerda) e 25% (à direita) acima do seu valor de equilíbrio de longo-prazo. O conceito teórico de tendência representa os valores que uma variável assumiria caso se encontrasse em equilíbrio dinâmico de longo-prazo desde o momento inicial. A linha azul ilustra o valor de N corrigido pela tendência; a linha encarnada representa a projeção da tendência de N .

Dinâmica da taxa de crescimento da economia, g_Y : A Figura 5.11 ilustra o comportamento da taxa de crescimento da economia ao longo do tempo. Observamos a não monotonia do ajustamento de g_Y , em particular a ocorrência de *overshooting*. Durante a maioria do ajustamento $g_Y > g_Y^*$, contudo a amplitude de variação de g_Y é relativamente reduzida, em particular para um afastamento inicial de 10% representado no gráfico esquerdo da Figura 5.11.

Nos instantes iniciais do ajustamento, g_Y é reduzido devido a g_k negativo (como explicado acima, k começa por cair significativamente). À medida que a queda de k se atenua e g_Q ainda é elevado (devido a x a crescer e I ainda alto), g_Y eleva-se acima do valor de equilíbrio de longo-prazo. Nos períodos seguintes, começa a reduzir-se,

com a queda de I e de x (e, logo, de g_Q) a mais que compensar a (ligeira) subida de k em direção ao equilíbrio de longo-prazo.

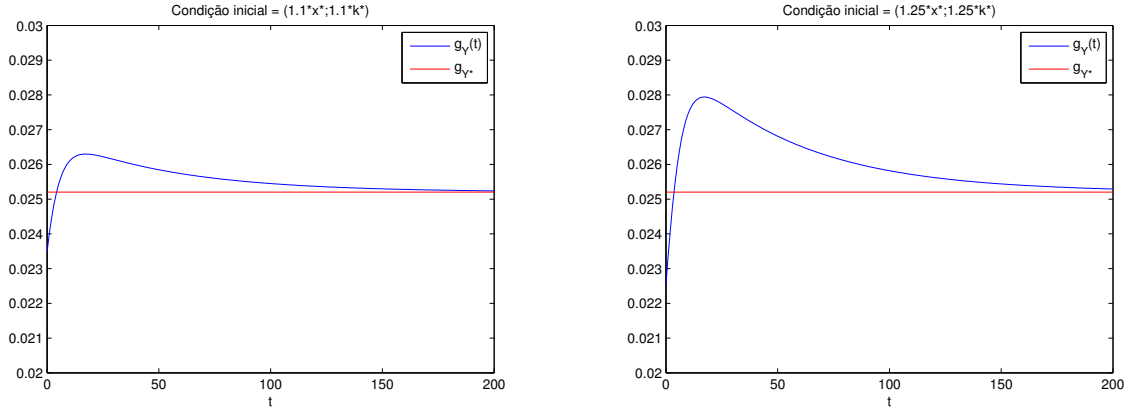


Figura 5.11: Representação gráfica da evolução da taxa de crescimento da economia ao longo do tempo, admitindo que inicialmente ambas as variáveis de estado se encontram 10% (à esquerda) e 25% (à direita) acima do seu valor de equilíbrio de longo-prazo. As linhas encarnadas representam os respectivos valores de equilíbrio de longo-prazo.

Dinâmica da dimensão média das empresas, K/N : A Figura 5.12 representa a evolução da dimensão média das empresas corrigida pela tendência, $(K/N)_d$. Esta é medida pelo *stock* médio de capital físico por empresa. No momento inicial, a economia possui empresas de dimensão média elevada fruto do elevado *stock* de capital físico, $K(0)$, e do reduzido número de variedades de bens intermédios existente, $N(0)$ face a $Q(0)$. Durante a totalidade do ajustamento K/N evolui a um ritmo inferior ao observado em *balanced growth path*, aproximando-se da respetiva tendência.

Notando que N cresce à taxa x e K à taxa $g_k + g_Q$ e que, como já visto acima, x converge para o equilíbrio de longo-prazo de modo significativamente mais lento que g_k e g_Q , resulta então que N estará mais tempo a crescer acima da tendência de longo-prazo que K . Logo, $(K/N)_d$, a dimensão média das empresas corrigida pela tendência, exibirá um comportamento monótono decrescente ao longo da dinâmica de transição.

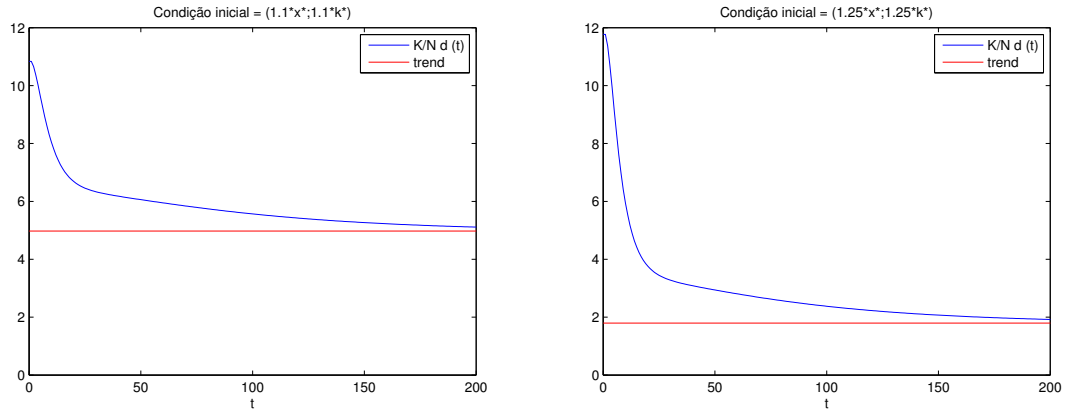


Figura 5.12: Representação gráfica da dimensão média das empresas ao longo do tempo corrigida pela tendência, admitindo que inicialmente ambas as variáveis de estado se encontram 10% (à esquerda) e 25% (à direita) acima do seu valor de equilíbrio de longo-prazo. O conceito teórico de tendência representa os valores que uma variável assumiria caso se encontrasse em equilíbrio dinâmico de longo-prazo desde o momento inicial. A linha azul ilustra o valor de K/N corrigido pela tendência; a linha encarnada representa a projeção da tendência de K/N .

5.2.2 Região A_2

A região A_2 representa o espaço da Fase A que caracteriza uma economia inicialmente rica em número de variedade de bens intermédios, implicando x inicial inferior ao equilíbrio de longo-prazo, x^* , cujo *stock* de capital físico relativamente ao *stock* de conhecimento tecnológico é superior ao respetivo valor de equilíbrio de longo-prazo, k^* .

A Figura 5.13 ilustra o ajustamento de x e k caracterizado por não monotonia em ambas as variáveis de estado, assim como observado na região A_1 . Apesar de impercetível na Figura 5.13, a não monotonia de k será visível na análise individual desta variável.

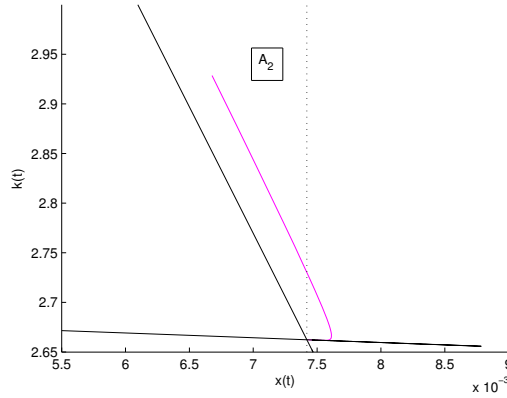


Figura 5.13: Representação gráfica da projeção da trajetória para o equilíbrio, ilustrada pela linha rosa, considerando uma condição inicial pertencente à região A_2 . As linhas a preto representam a projeção dos subespaços próprios associados aos valores próprios estáveis. A reta vertical a tracejado representa a divisão efetuada entre as regiões A_1 e A_2 .

Consideramos nesta análise as seguintes condições iniciais $(0, 9x^*; 1, 1k^*)$ e $(0, 75x^*; 1, 25k^*)$, representando afastamentos opostos de x e k relativamente ao valor de equilíbrio, mas de igual magnitude.

Dinâmica da taxa de entrada horizontal, x : A Figura 5.14 representa o ajustamento não monótono da taxa de entrada horizontal, x , e da respetiva velocidade de convergência, ω_x . Esta não monotonia traduz-se em *overshooting*, uma vez que x atinge instantaneamente o respetivo valor de equilíbrio de longo-prazo na fase inicial do ajustamento. Nesse instante, a sua velocidade de convergência, ω_x , possui uma assíntota vertical, característica dos fenómenos de *over/undershooting*.

Inicialmente os custos de entrada horizontal, η , são elevados devido à relação direta, descrita em (3.9), entre η e o número de variedades de bens intermédios, N . Estes funcionam como uma barreira à entrada e, como tal, na fase inicial do ajustamento temos $x < x^*$.

No entanto, dada a complementaridade existente entre os dois tipos de inovação (referida na análise da região A_1), o elevado ritmo inicial de entrada vertical, reflexo do elevado k inicial, possui um impacto positivo em x (via aumento de Q). Este efeito mais que compensa os elevados custos de entrada horizontal, gerando x crescente, de tal forma que se verifica um *overshooting*. A dinâmica da taxa de chegada de uma inovação vertical, I , encontra-se representada no Apêndice B, na Figura 7.2.

À medida que o ritmo de entrada vertical diminui, reduz-se o seu impacto positivo em x e o efeito negativo gerado pelo crescimento dos custos de entrada horizontal torna-se dominante. Consequentemente, x decresce aproximando o seu valor de

equilíbrio de longo-prazo.

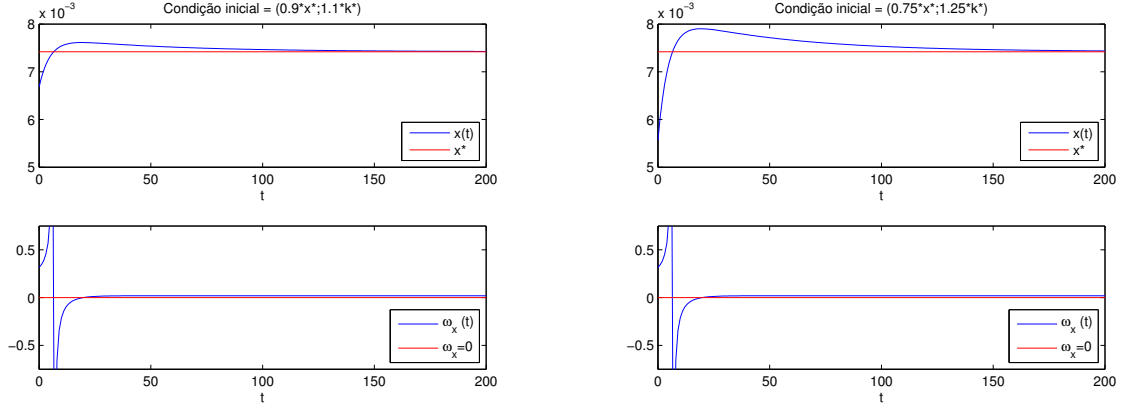


Figura 5.14: Representação gráfica da evolução da taxa de entrada horizontal, x , e da sua velocidade de convergência, ω_x , ao longo do tempo, admitindo que inicialmente o afastamento de x e k tem igual dimensão mas sentidos opostos. À esquerda é representado o afastamento de 10%, à direita o afastamento de 25%. As linhas encarnadas representam os respectivos valores de equilíbrio de longo-prazo.

Dinâmica do *stock* de capital físico por *stock* de conhecimento tecnológico, k : A Figura 5.15 ilustra o ajustamento ao longo do tempo do *stock* de capital físico relativamente ao *stock* de conhecimento tecnológico, k , e da respetiva velocidade de convergência, ω_k . A dinâmica de transição de k é qualitativamente idêntica à descrita na região A_1 (ver também Figura 7.8 no Apêndice C, com a dinâmica de g_k). De forma análoga a ω_x , ω_k possui uma assintota vertical quando k atinge instantaneamente o respetivo valor de equilíbrio de longo-prazo.

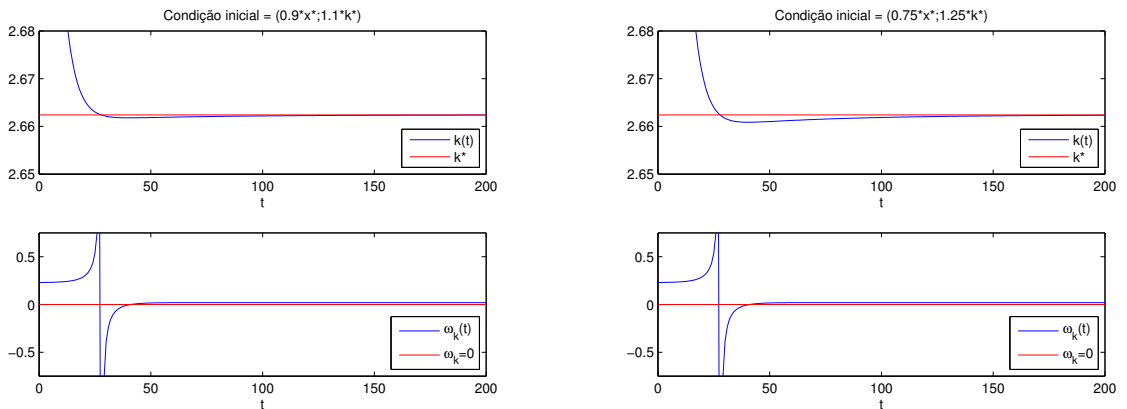


Figura 5.15: Representação gráfica da evolução de k e da sua velocidade de convergência (ω_k) ao longo do tempo, admitindo que inicialmente o afastamento de x e k tem igual dimensão mas sentidos opostos. À esquerda é representado o afastamento de 10%, à direita o afastamento de 25%. As linhas encarnadas representam os respectivos valores de equilíbrio de longo-prazo.

Dinâmica do índice agregado de qualidade, Q : A Figura 5.16 ilustra o ajustamento ao longo do tempo do índice agregado de qualidade, Q , corrigido pela tendência, e da respetiva taxa de crescimento, g_Q . O ajustamento de Q reflete o contributo dos dois tipos de inovação para o aumento do nível de conhecimento tecnológico. A dinâmica da taxa de chegada de uma inovação vertical, I , encontra-se representada no Apêndice B, na Figura 7.2.

O índice Q evolui a um ritmo decrescente, contudo superior ao *balanced growth path* durante a totalidade do ajustamento, aproximando-se da tendência. Apesar do menor ritmo de entrada horizontal nesta região, a dinâmica de transição de Q é qualitativamente equivalente à descrita na região A_1 .

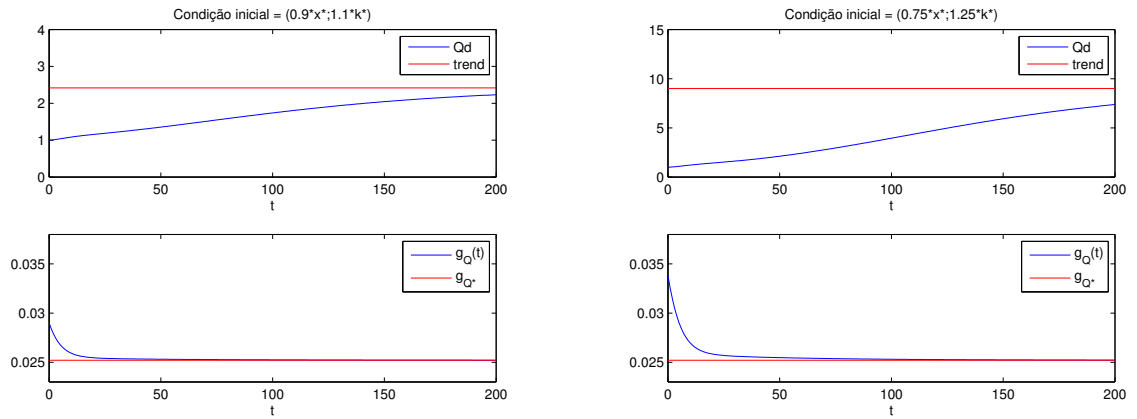


Figura 5.16: Representação gráfica do índice agregado de qualidade, corrigido pela tendência, e da respetiva taxa de crescimento, admitindo que inicialmente o afastamento de x e k tem igual dimensão mas sentidos opostos. À esquerda é representado o afastamento de 10%, à direita o afastamento de 25%. O conceito teórico de tendência representa os valores que uma variável assumiria caso se encontrasse em equilíbrio dinâmico de longo-prazo desde o momento inicial. A linha azul ilustra o valor de Q corrigido pela tendência; a linha encarnada representa a projeção da tendência de Q .

Dinâmica do capital físico, K : A Figura 5.17 ilustra o ajustamento não monótono do capital físico corrigido pela tendência. Contrariamente à região A_1 , nesta região existe um elevado número de variedades iniciais de bens intermédios, no entanto, a dinâmica de transição de K é qualitativamente idêntica à descrita na região A_1 .

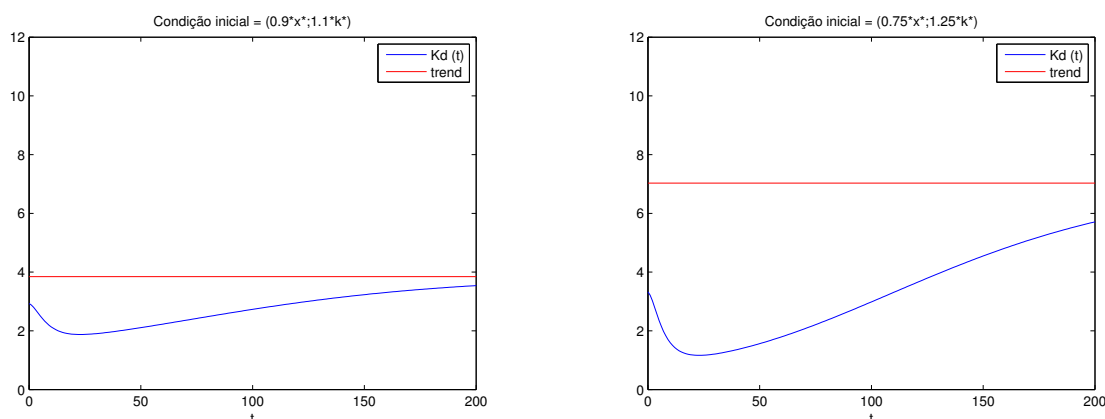


Figura 5.17: Representação gráfica do capital físico ao longo do tempo corrigido pela tendência, admitindo que inicialmente o afastamento de x e k tem igual dimensão mas sentidos opostos. À esquerda é representado o afastamento de 10%, à direita o afastamento de 25%. O conceito teórico de tendência representa os valores que uma variável assumiria caso se encontrasse em equilíbrio dinâmico de longo-prazo desde o momento inicial. A linha azul ilustra o valor de K corrigido pela tendência; a linha encarnada representa a projeção da tendência de K .

Dinâmica do número de bens intermédios, N : A Figura 5.18 representa o comportamento ao longo do tempo do número de variedades de bens intermédios, N , corrigido pela tendência. A Figura 5.19 representa o mesmo ajustamento apenas durante os primeiros 50 instantes de tempo, numa escala mais reduzida. Este reflete o comportamento da taxa de entrada horizontal, x , observado na Figura 5.14. Inicialmente N cresce a um ritmo inferior, afastando-se da respetiva tendência, e posteriormente superior ao *balanced growth path* até atingir o respetivo equilíbrio dinâmico de longo-prazo.

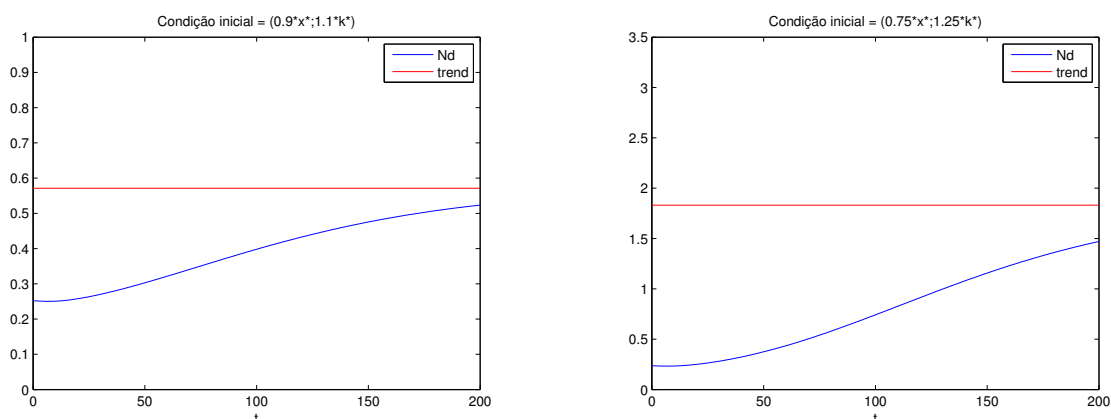


Figura 5.18: Representação gráfica do número de variedades de bens intermédios ao longo do tempo corrigida pela tendência, admitindo que inicialmente o afastamento de x e k tem igual dimensão mas sentidos opostos. À esquerda é representado o afastamento de 10%, à direita o afastamento de 25%. O conceito teórico de tendência representa os valores que uma variável assumiria caso se encontrasse em equilíbrio dinâmico de longo-prazo desde o momento inicial. A linha azul ilustra o valor de N corrigido pela tendência; a linha encarnada representa a projeção da tendência de N .

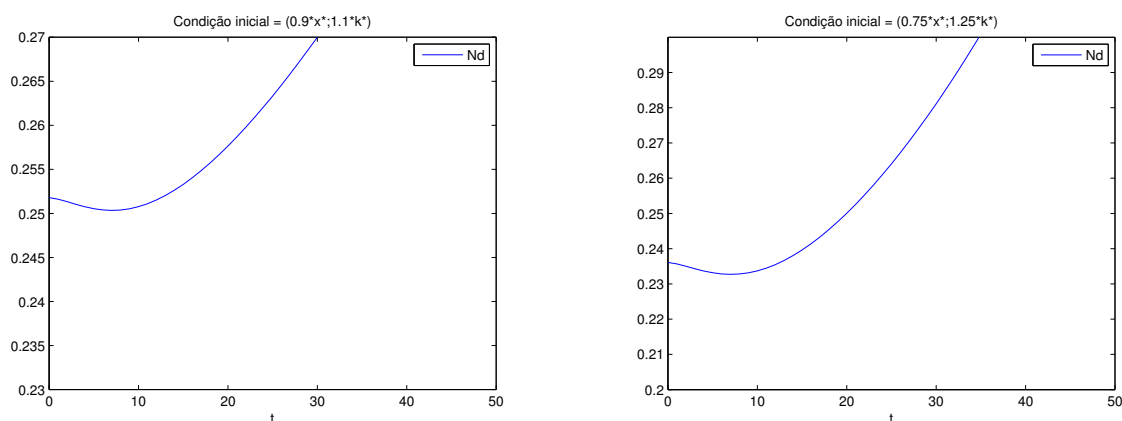


Figura 5.19: Representação gráfica do número de variedades de bens intermédios corrigido pela tendência durante os primeiros 50 instantes de tempo, admitindo que inicialmente o afastamento de x e k tem igual dimensão mas sentidos opostos. À esquerda é representado o afastamento de 10%, à direita o afastamento de 25%. O conceito teórico de tendência representa os valores que uma variável assumiria caso se encontrasse em equilíbrio dinâmico de longo-prazo desde o momento inicial.

Dinâmica da taxa de crescimento da economia, g_Y : A Figura 5.20 ilustra o comportamento não monótono, em particular o *overshooting*, da taxa de crescimento da economia, g_Y , ao longo do tempo. A dinâmica de transição de g_Y é qualitativamente idêntica à descrita na região A_1 , embora as taxas de crescimento sejam inferiores nesta região para cada instante do tempo (devido ao menor x e, logo, g_Q).

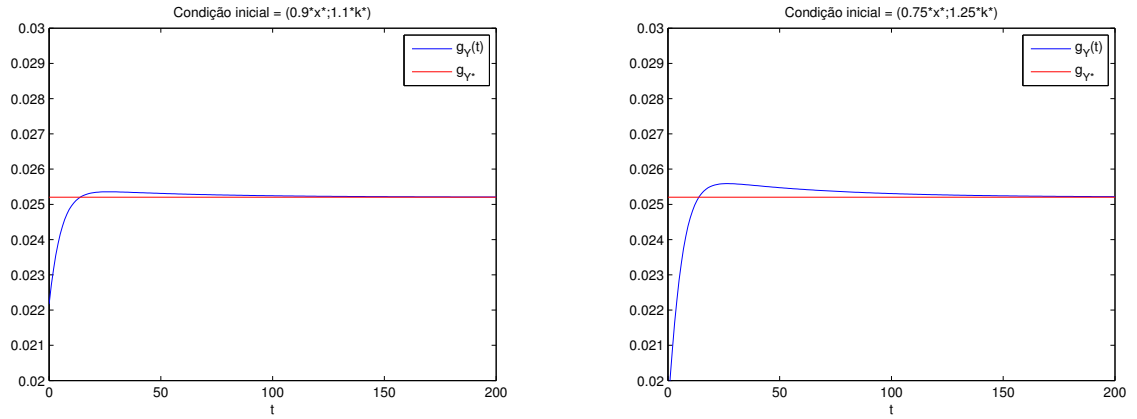


Figura 5.20: Representação gráfica da evolução da taxa de crescimento da economia ao longo do tempo, admitindo que inicialmente o afastamento de x e k tem igual dimensão mas sentidos opostos. À esquerda é representado o afastamento de 10%, à direita o afastamento de 25%. As linhas encarnadas representam os respectivos valores de equilíbrio de longo-prazo.

Dinâmica da dimensão média das empresas, K/N : A Figura 5.21 representa o comportamento ao longo do tempo da dimensão média das empresas corrigida pela tendência, $(K/N)_d$. Durante o ajustamento, K/N evolui a ritmo inferior ao observado em *balanced growth path*, aproximando-se da respetiva tendência. A dinâmica de transição de K/N é qualitativamente equivalente à descrita na região A_1 .

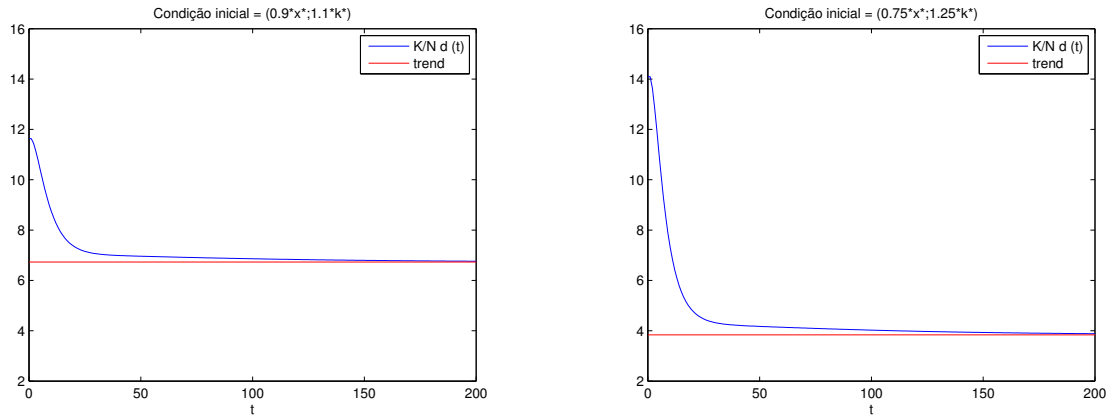


Figura 5.21: Representação gráfica da dimensão média das empresas ao longo do tempo corrigida pela tendência, admitindo que inicialmente o afastamento de x e k tem igual dimensão mas sentidos opostos. À esquerda é representado o afastamento de 10%, à direita o afastamento de 25%. O conceito teórico de tendência representa os valores que uma variável assumiria caso se encontrasse em equilíbrio dinâmico de longo-prazo desde o momento inicial. A linha azul ilustra o valor de K/N corrigido pela tendência; a linha encarnada representa a projeção da tendência de K/N .

5.3 Fase D

A fase D representa uma economia semelhante à analisada na região A_2 , caracterizada por um *stock* inicial de capital físico relativamente ao *stock* de conhecimento tecnológico, k , superior ao de equilíbrio de longo-prazo, k^* , e considerada rica em número de variedades de bens intermédios, implicando x inicial inferior ao equilíbrio de longo-prazo, x^* . Contudo, comparativamente com a região A_2 , para o mesmo valor de k , esta economia é caracterizada por um maior número de bens intermédios, $N(0)$ para dado $Q(0)$, de tal forma que a dinâmica de transição é qualitativamente diferente.

A Figura 5.22 ilustra este processo de convergência caracterizado por monotonia em ambas as variáveis de estado, conforme será visível na análise individual das variáveis.

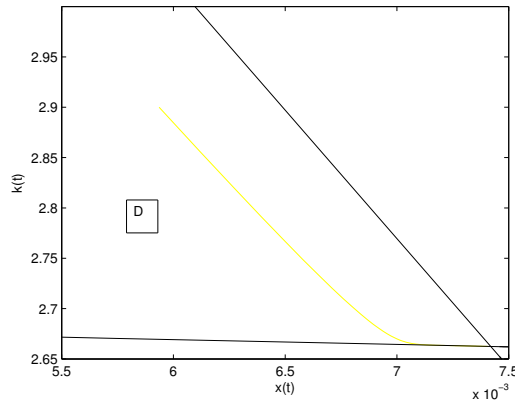


Figura 5.22: Representação gráfica da projeção da trajetória para o equilíbrio ilustrada pela linha amarela, considerando uma condição inicial pertencente à fase D. As linhas a preto representam a projeção dos subespaços próprios associados aos valores próprios estáveis.

Desta forma, observamos que a proporcionalidade dos afastamentos de x e k em relação ao respetivo valor de equilíbrio de longo-prazo pode ditar trajetórias de convergência qualitativamente distintas. Nesse sentido, uma condição suficiente para a monotonia do ajustamento é

$$\frac{v_{(2,2)}}{v_{(1,2)}}(x(t) - x^*) + k^* < k(0) < \frac{v_{(2,1)}}{v_{(1,1)}}(x(t) - x^*) + k^*.$$

As condições iniciais consideradas na seguinte análise são $(0, 85x^*; 1, 1k^*)$ e $(0, 75x^*; 1, 15k^*)$, representando afastamentos opostos, com magnitudes distintas, de x e k relativamente ao valor de equilíbrio de longo-prazo.

Dinâmica da taxa de entrada horizontal, x : A Figura 5.23 representa a evolução ao longo do tempo da taxa de entrada horizontal, x , e da respetiva velocidade de convergência, denotada por ω_x . Observamos a monotonia do ajustamento de x , contrariamente às regiões anteriores. Deste modo, a velocidade de convergência é sempre positiva e não apresenta assintotas verticais. A velocidade de convergência assintótica de x é $-\mu_2$, correspondente ao valor próprio negativo de menor valor absoluto.

Ao longo do ajustamento, empresas entram na economia via inovação horizontal a um ritmo inferior ao de equilíbrio de longo-prazo, x^* . Tal resulta da economia possuir um elevado número inicial de variedades de bens intermédios, $N(0)$ para dado $Q(0)$. Este comportamento resulta dos elevados custos de entrada horizontal, η , devido à relação direta entre η e o número de variedades iniciais de bens intermédios.

O ritmo de entrada horizontal é crescente como consequência da complementaridade existente entre os dois tipos de inovação, referida na análise da região A_1 . A dinâmica da taxa de chegada de uma inovação vertical, I , encontra-se representada no Apêndice B, na Figura 7.3. Deste modo, dado I elevado, refletindo o elevado k inicial, o impacto positivo da inovação vertical em x (via aumento de Q) mais que compensa o elevado η , gerando x crescente. No entanto, contrariamente ao observado na região A_2 , este impacto positivo contraria o efeito do aumento de η ao longo de toda a dinâmica de transição.

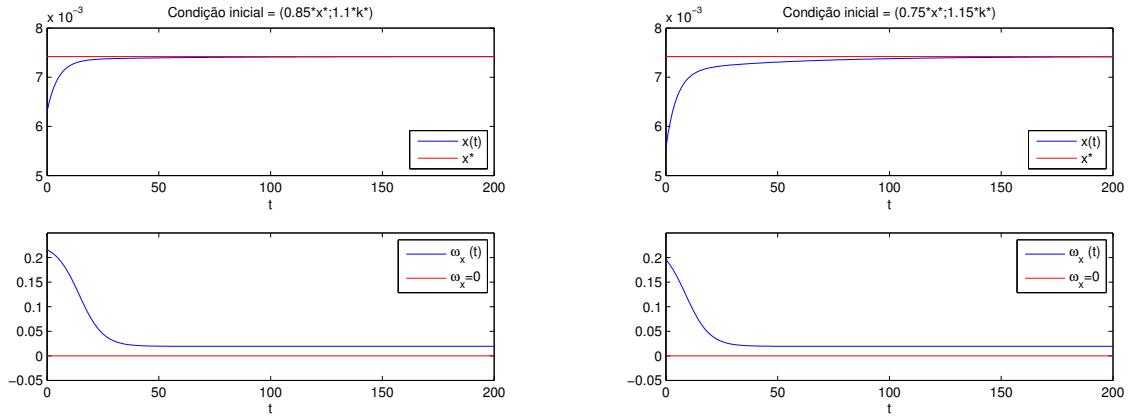


Figura 5.23: Representação gráfica da evolução da taxa de entrada horizontal, x , e da sua velocidade de convergência, ω_x , ao longo do tempo, ilustradas pelas linhas a azul. Consideramos uma condição inicial em que x é 15% inferior a x^* e k 10% superior a k^* (à esquerda), e uma condição inicial em que x é 25% inferior a x^* e k é 15% superior a k^* (à direita). As linhas encarnadas representam os respetivos valores de equilíbrio de longo-prazo.

Dinâmica do *stock* de capital físico por *stock* de conhecimento tecnológico, k : Na Figura 5.24 observamos o processo de convergência ao longo do tempo do *stock* de capital físico relativamente ao *stock* de conhecimento tecnológico, k , e da respetiva velocidade de convergência, ω_k . Verificamos que k decresce monotona-mente até atingir o respetivo valor de equilíbrio de longo-prazo, k^* , como reflexo da sua produtividade marginal inicial relativamente baixa (ver também Figura 7.9 no Apêndice C, com a dinâmica de g_k). Como tal, a sua velocidade de convergência é sempre positiva, não apresentando assíntotas verticais. Tal como x , k converge assintoticamente à velocidade $-\mu_2$.

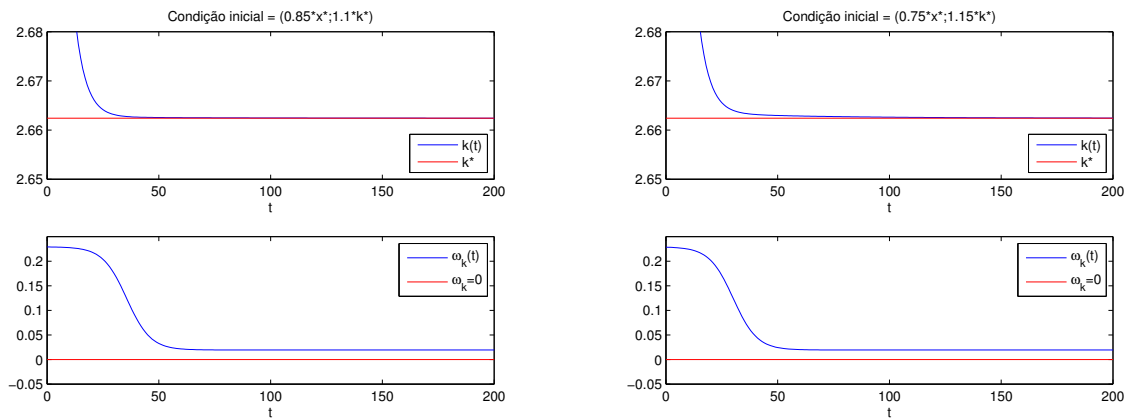


Figura 5.24: Representação gráfica da evolução de k e da sua velocidade de convergência, ω_k , ao longo do tempo, ilustradas pelas linhas a azul. Consideramos uma condição inicial em que x é 15% inferior a x^* e k é 10% superior a k^* (à esquerda), e uma condição inicial em que x é 25% inferior a x^* e k é 15% superior a k^* (à direita). As linhas encarnadas representam os respetivos valores de equilíbrio de longo-prazo.

Dinâmica do índice agregado de qualidade, Q : A Figura 5.25 ilustra o ajustamento ao longo do tempo do índice agregado de qualidade, Q , corrigido pela tendência, e da respetiva taxa de crescimento, g_Q . Esta apresenta um comportamento não monótono distinto do observado nas regiões anteriores, convergindo de forma célere para valores relativamente próximos do equilíbrio de longo-prazo, g_Q^* .

O crescimento de Q reflete o contributo dos dois tipos de inovação para o aumento do nível de conhecimento tecnológico. A taxa de chegada de uma inovação vertical, I , é superior ao respetivo valor de equilíbrio de longo-prazo durante todo o processo de ajustamento. Tal resulta da relação de complementaridade existente entre inovação vertical e capital físico, descrita na análise da região A_1 . Por outro lado, verificamos que a taxa de entrada horizontal, x , é inferior ao respetivo valor de equilíbrio de longo-prazo, x^* , durante a totalidade do ajustamento. Assim, à medida que se

acentua a queda de I e x ainda reduzido, g_Q decresce atingindo valores inferiores a g_{Q^*} . Nos períodos seguintes, g_Q começa a aumentar, com o crescimento de x a mais que compensar a queda de I em direção ao equilíbrio de longo-prazo.

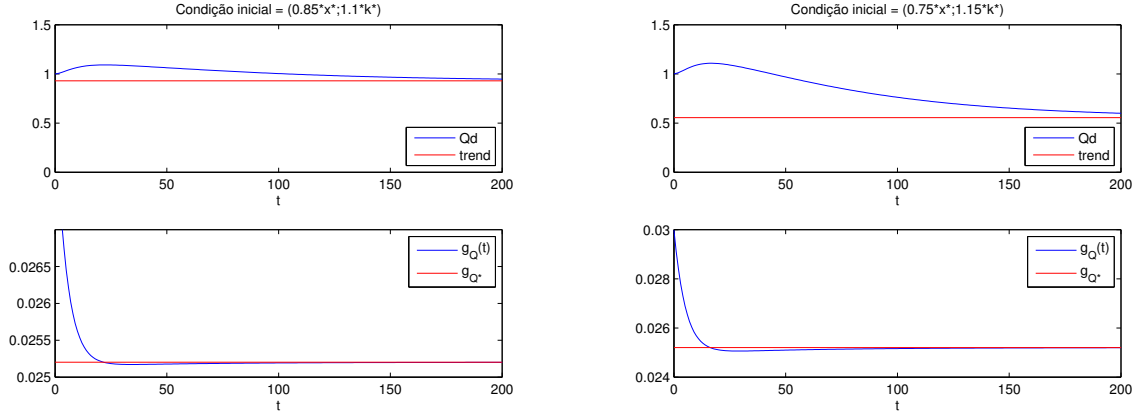


Figura 5.25: Representação gráfica do índice agregado de qualidade, corrigido pela tendência, e da respetiva taxa de crescimento. Consideramos uma condição inicial cujo x é 15% inferior a x^* e k é 10% superior a k^* (à esquerda), e uma condição inicial cujo x é 25% inferior a x^* e k é 15% superior a k^* (à direita). O conceito teórico de tendência representa os valores que uma variável assumiria caso se encontrasse em equilíbrio dinâmico de longo-prazo desde o momento inicial. A linha azul ilustra o valor de Q corrigido pela tendência; a linha encarnada representa a projeção da tendência de Q .

Dinâmica do capital físico, K : A Figura 5.26 representa o processo de convergência do capital físico corrigido pela tendência. Contrariamente às regiões anteriores, durante a totalidade do ajustamento o capital físico, K , cresce a uma taxa inferior ao *balanced growth path*, aproximando-se da tendência por cima.

Tal deve-se ao maior número de variedades iniciais de bens intermédios, $N(0)$ para dado $Q(0)$, por *stock* de capital físico relativamente ao *stock* de conhecimento tecnológico, k . Devido aos custos de entrada horizontal crescentes com N , menor será a taxa de entrada horizontal, x , e o seu efeito positivo no nível de conhecimento tecnológico, Q . Por esta via, menor será o crescimento da produtividade marginal de K , P_{mg_K} , (gerado pelo aumento de Q) reduzindo o incentivo à sua acumulação, de tal forma que o crescimento de K é inferior ao *balanced growth path* ao longo do ajustamento.

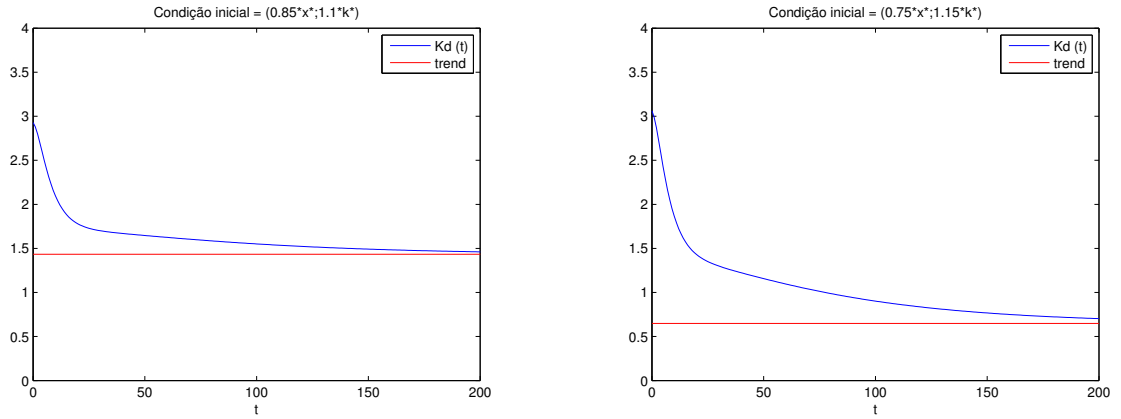


Figura 5.26: Representação gráfica do capital físico, corrigido pela tendência, ao longo do tempo. Consideramos uma condição inicial cujo x é 15% inferior a x^* e k é 10% superior a k^* (à esquerda), e uma condição inicial cujo x é 25% inferior a x^* e k é 15% superior a k^* (à direita). O conceito teórico de tendência representa os valores que uma variável assumiria caso se encontrasse em equilíbrio dinâmico de longo-prazo desde o momento inicial. A linha azul ilustra o valor de K corrigido pela tendência; a linha encarnada representa a projeção da tendência de K .

Dinâmica do número de bens intermédios, N : Na Figura 5.27 observamos o comportamento ao longo do tempo do número de variedades de bens intermédios, N , corrigido pela tendência. Este reflete o comportamento monótono da taxa de entrada horizontal, x , observado na Figura 5.23. Durante a totalidade do ajustamento, N cresce a um ritmo inferior ao *balanced growth path*.

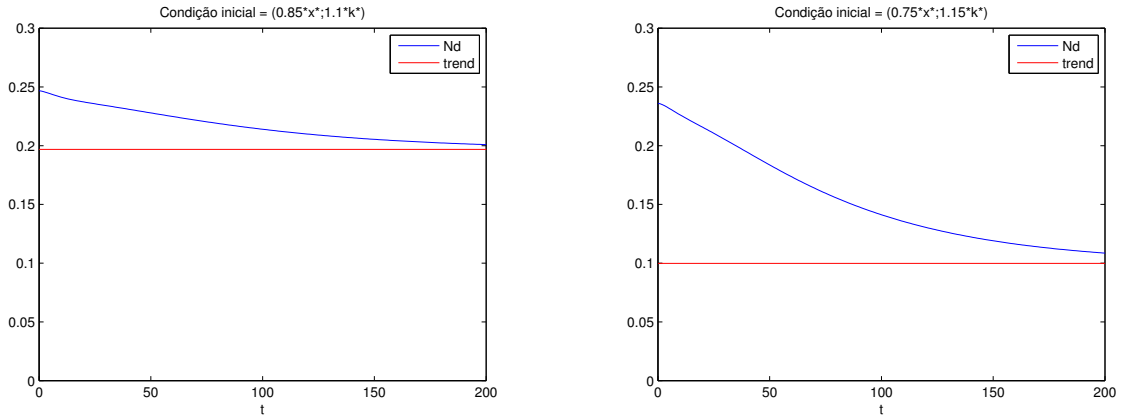


Figura 5.27: Representação gráfica do número de variedades de bens intermédios, corrigido pela tendência, ao longo do tempo. Consideramos uma condição inicial cujo x é 15% inferior a x^* e k é 10% superior a k^* (à esquerda), e uma condição inicial cujo x é 25% inferior a x^* e k é 15% superior a k^* (à direita). O conceito teórico de tendência representa os valores que uma variável assumiria caso se encontrasse em equilíbrio dinâmico de longo-prazo desde o momento inicial. A linha azul ilustra o valor de N corrigido pela tendência; a linha encarnada representa a projeção da tendência de N .

Dinâmica da taxa de crescimento da economia, g_Y : A Figura 5.28 representa o ajustamento da taxa de crescimento da economia, g_Y , ao longo do tempo. Contrariamente às regiões anteriores, g_Y apresenta um comportamento monótono, evoluindo a uma taxa crescente e inferior à de equilíbrio de longo-prazo, g_Y^* . Deste modo, constatamos que a dotação inicial de K e N pode determinar ajustamentos qualitativamente distintos da própria taxa de crescimento da economia.

Nos instantes iniciais, g_Y é reduzido devido a g_k negativo (conforme explicado anteriormente, k começa por cair significativamente). À medida que a queda de k se atenua e g_Q começa a crescer impulsionado por x , g_Y eleva-se em direção ao equilíbrio de longo-prazo.

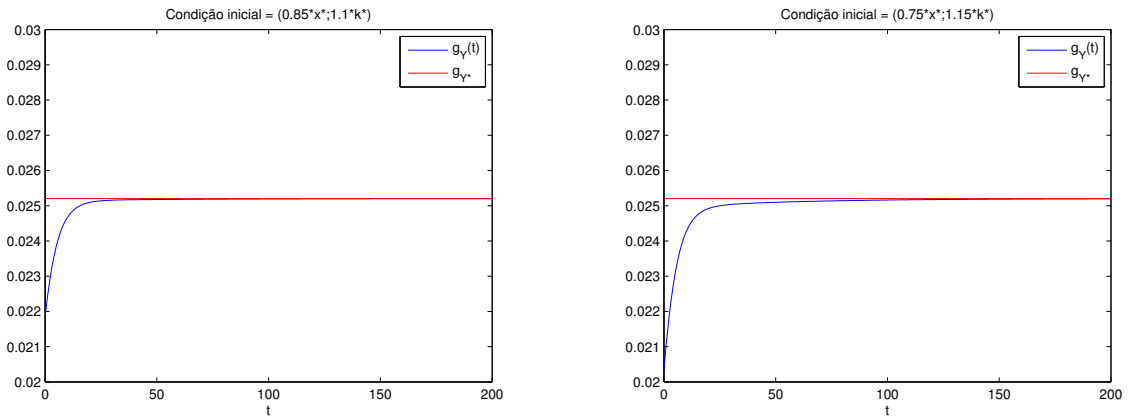


Figura 5.28: Representação gráfica da evolução da taxa de crescimento da economia ao longo do tempo, admitindo que inicialmente os afastamentos de x e k têm magnitudes distintas e sentidos opostos. Consideramos uma condição inicial cujo x é 15% inferior a x^* e k é 10% superior a k^* (à esquerda), e uma condição inicial cujo x é 25% inferior a x^* e k é 15% superior a k^* (à direita). As linhas encarnadas representam os respetivos valores de equilíbrio de longo-prazo.

Dinâmica da dimensão média das empresas, K/N : A Figura 5.29 ilustra a evolução ao longo do tempo da dimensão média das empresas corrigida pela tendência, $(K/N)_d$. Contrariamente às regiões anteriores, o ajustamento de K/N não é monótono. Num primeiro momento, K/N cresce a um ritmo inferior ao *balanced growth path*, de tal forma que é ultrapassado pela respetiva tendência e começa a afastar-se desta. Posteriormente, K/N cresce a um ritmo superior ao *balanced growth path*, reaproximando-se da tendência.

Dado que N cresce à taxa x e K à taxa $g_k + g_Q$, o relativamente baixo g_k inicial mais que compensa o alto g_Q , gerando um crescimento de K inferior a x e de $(K/N)_d$ inferior ao *balanced growth path*. Todavia, à medida que a queda de g_k se atenua e g_Q

começa a crescer (fruto do crescimento de x e I ainda alto), o ritmo de crescimento de $(K/N)_d$ eleva-se para valores superiores ao *balanced growth path*.

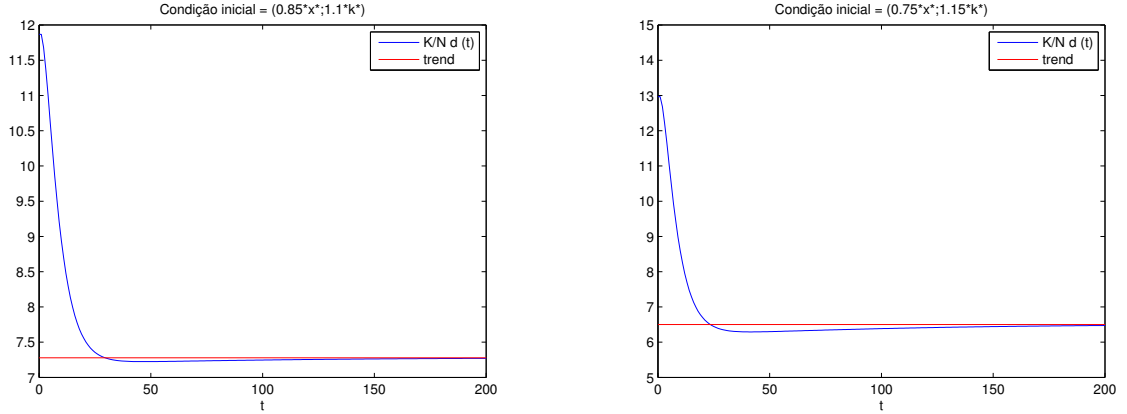


Figura 5.29: Representação gráfica da dimensão média das empresas, corrigida pela tendência, ao longo do tempo. Consideramos uma condição inicial cujo x é 15% inferior a x^* e k é 10% superior a k^* (à esquerda), e uma condição inicial cujo x é 25% inferior a x^* e k é 15% superior a k^* (à direita). O conceito teórico de tendência representa os valores que uma variável assumiria caso se encontrasse em equilíbrio dinâmico de longo-prazo desde o momento inicial. A linha azul ilustra o valor de K/N corrigido pela tendência; a linha encarnada representa a projeção da tendência de K/N .

5.4 Fase B

5.4.1 Região B_1

A região B_1 caracteriza uma economia inicialmente rica em número de variedades de bens intermédios, implicando x inicial inferior ao equilíbrio de longo-prazo, x^* , que possui um *stock* inicial de capital físico relativamente ao *stock* de conhecimento tecnológico, k , inferior ao valor de equilíbrio de longo-prazo, k^* .

Encontra-se representado na Figura 5.30 o processo de convergência de uma condição inicial pertencente a esta região. O ajustamento de x e k não é monótono, como será observado na análise individual das variáveis.

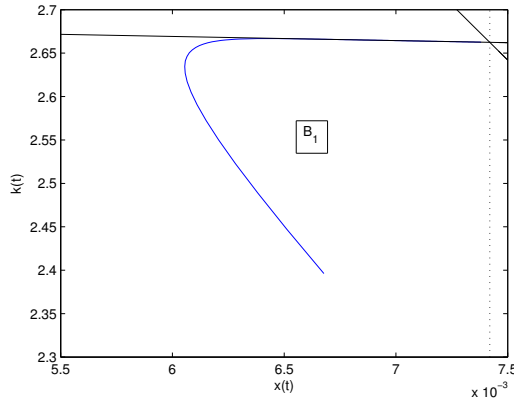


Figura 5.30: Representação gráfica da projeção da trajetória para o equilíbrio, ilustrada pela linha azul, considerando uma condição inicial pertencente à região B_1 . As linhas a preto representam a projeção dos subespaços próprios associados aos valores próprios estáveis. A reta vertical a tracejado representa a divisão efetuada entre as regiões B_1 e B_2 .

As condições iniciais consideradas na análise seguinte são $(0, 9x^*; 0, 9k^*)$ e $(0, 75x^*; 0, 75k^*)$, representando afastamentos de x e k relativamente ao respetivo valor de equilíbrio de igual sentido e magnitude.

Dinâmica da taxa de entrada horizontal, x : Na Figura 5.31 observamos a convergência não monótona da taxa de entrada horizontal, x , e da respetiva velocidade de convergência, denotada por ω_x . Dado o elevado número de variedades iniciais de bens intermédios na economia, os elevados custos de entrada horizontal funcionam como barreira à entrada gerando, ao longo de todo o ajustamento, uma entrada horizontal em menor escala do que em equilíbrio de longo-prazo.

Verificamos adicionalmente que x é decrescente nos instantes iniciais do ajustamento. Tal resulta da complementaridade existente entre os dois tipos de inovação, referida na análise da região A_1 . A dinâmica da taxa de chegada de uma inovação vertical, I , encontra-se representada na Figura 7.4, no Apêndice B. Uma vez que I é inicialmente relativamente reduzida, refletindo o reduzido k inicial, o impacto positivo da inovação vertical em x (via aumento de Q) não é suficiente para compensar os elevados custos de entrada horizontal, gerando x decrescente.

Todavia, à medida que I aumenta, cresce o impacto positivo da inovação vertical em x (via aumento de Q), mais que compensando os altos custos de entrada horizontal e gerando x crescente até atingir o equilíbrio de longo-prazo, x^* .

Uma vez que x diverge inicialmente de x^* , ω_x é negativa, tornando-se positiva a partir do instante em que x atinge o seu valor mínimo. A velocidade de convergência assintótica de x é $-\mu_2$.

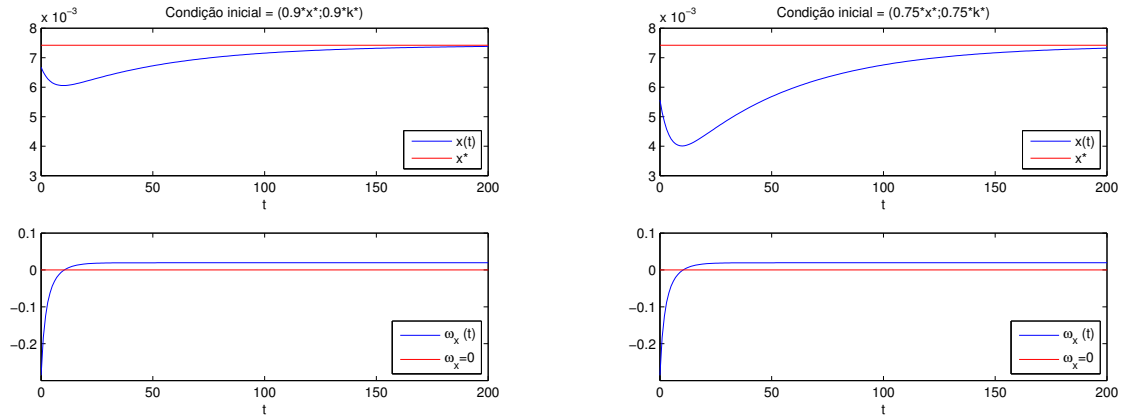


Figura 5.31: Representação gráfica da evolução da taxa de entrada horizontal, x , e da sua velocidade de convergência, ω_x , ao longo do tempo, admitindo que inicialmente ambas as variáveis de estado se encontram 10% (à esquerda) e 25% (à direita) abaixo do seu valor de equilíbrio de longo-prazo. As linhas encarnadas representam os respectivos valores de equilíbrio de longo-prazo.

Dinâmica do *stock* de capital físico por *stock* de conhecimento tecnológico, k : A Figura 5.32 ilustra o comportamento ao longo do tempo do *stock* de capital físico relativamente ao *stock* de conhecimento tecnológico, k , e da respetiva velocidade de convergência, ω_k . Observamos que o ajustamento de k não é monótono, ocorrendo um *overshooting*. A variável de estado k começa por crescer acentuadamente, refletindo a sua relativamente elevada produtividade marginal inicial, atingindo instantaneamente o respetivo valor de equilíbrio de longo-prazo na fase inicial do ajustamento. Nesse mesmo instante, ω_k possui uma assíntota vertical, particularidade deste tipo de processos não monótonos. Nos instantes seguintes, k começa a decrescer, refletindo o desvio de recursos dedicados ao aumento de x . A velocidade de convergência assintótica de k é $-\mu_2$. Tal como nas regiões anteriores, verificamos que o ajustamento de k é relativamente célere comparativamente com o ajustamento observado de x (ver também Figura 7.10, no Apêndice C, com a dinâmica de g_k).

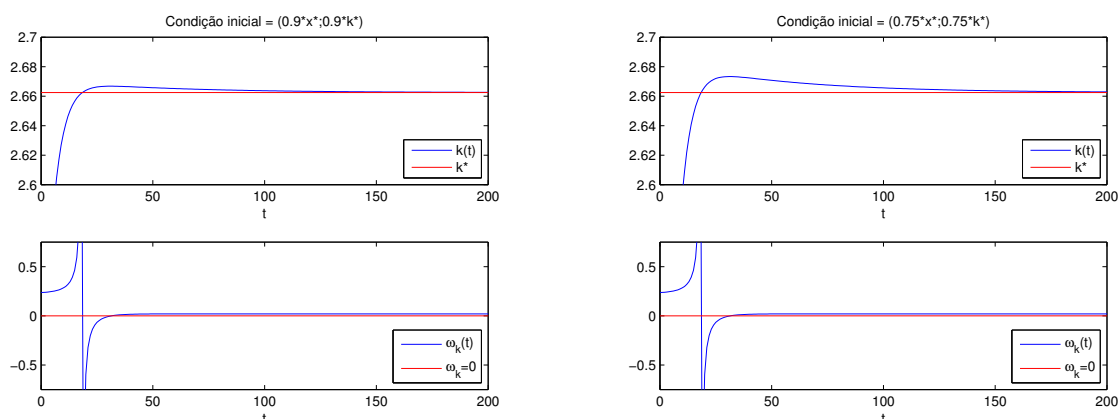


Figura 5.32: Representação gráfica da variável de k e da sua velocidade de convergência, ω_k , ao longo do tempo, admitindo que inicialmente ambas as variáveis de estado se encontram 10% e 25% abaixo do seu valor de equilíbrio de longo-prazo. As linhas encarnadas representam os respectivos valores de equilíbrio de longo-prazo.

Dinâmica do índice agregado de qualidade, Q : A Figura 5.33 representa a evolução do índice agregado de qualidade, Q , corrigido pela tendência, e da respetiva taxa de crescimento, g_Q . O crescimento de Q reflete o incremento de qualidade em todas as indústrias de bens intermédios (via inovação vertical), assim como a entrada de novas indústrias destes bens (via inovação horizontal). O ajustamento de Q é monótono, crescendo a um ritmo inferior mas cada vez mais próximo do *balanced growth path* e respetiva taxa de crescimento de longo-prazo.

O reduzido crescimento de Q resulta do baixo ritmo de entrada face ao *balanced growth path* em ambos os tipos de inovação. A entrada horizontal é lenta ao longo de todo o processo de ajustamento, conforme observado na Figura 5.31. A lenta entrada vertical na fase inicial do ajustamento resulta da complementaridade existente entre inovação vertical e capital físico, referida na análise da região A_1 . Uma vez que o valor inicial de k é reduzido, o ritmo de entrada vertical é baixo. A dinâmica da taxa de chegada de uma inovação vertical, I , encontra-se representada na Figura 7.4, no Apêndice B. À medida que o crescimento de I e x se acentua, g_Q aumenta até Q atingir o respetivo *balanced growth path*.

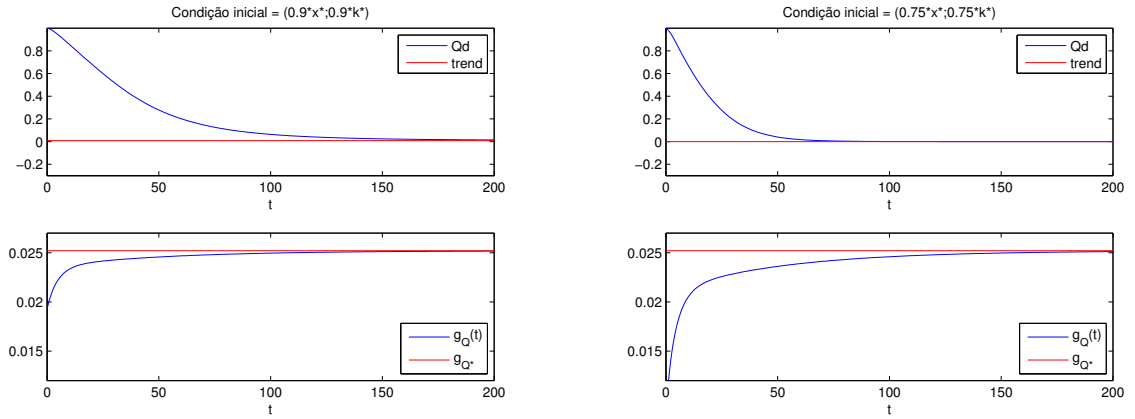


Figura 5.33: Representação gráfica do índice agregado de qualidade, corrigido pela tendência, e da respetiva taxa de crescimento, admitindo que inicialmente ambas as variáveis de estado se encontram 10% (à esquerda) e 25% (à direita) abaixo do seu valor de equilíbrio de longo-prazo. O conceito teórico de tendência representa os valores que uma variável assumiria caso se encontrasse em equilíbrio dinâmico de longo-prazo desde o momento inicial. A linha azul ilustra o valor de Q corrigido pela tendência; a linha encarnada representa a projeção da tendência de Q .

Dinâmica do capital físico, K : A Figura 5.34 ilustra o processo de convergência ao longo do tempo do capital físico, K , corrigido pela tendência. Este exibe um comportamento não monótono; inicialmente cresce a ritmo superior e posteriormente inferior ao *balanced growth path*.

Dada a produtividade marginal decrescente de K , P_{mg_K} , *ceteris paribus* quanto menor o valor de K maior será P_{mg_K} . Sendo $k = \frac{K}{L \cdot Q}$ e uma vez que o valor inicial de k é reduzido, concluímos que o valor inicial de K também é reduzido. Deste modo, inicialmente P_{mg_K} é elevada e existe um forte incentivo à acumulação de capital físico. Consequentemente, o crescimento inicial de K é célere e superior ao de Q e, também, ao *balanced growth path*, afastando-se da tendência. À medida que o valor de K aumenta e a queda de P_{mg_K} se acentua, o crescimento de K é cada vez menor, atingindo valores inferiores ao *balanced growth path* e aproximando-o da tendência.

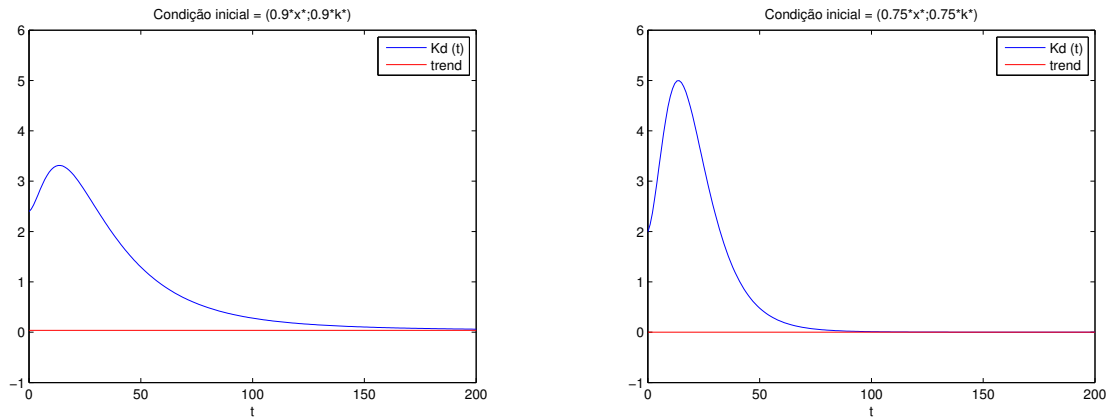


Figura 5.34: Representação gráfica do capital físico ao longo do tempo corrigido pela tendência, admitindo que inicialmente ambas as variáveis de estado se encontram 10% (à esquerda) e 25% (à direita) abaixo do seu valor de equilíbrio de longo-prazo. O conceito teórico de tendência representa os valores que uma variável assumiria caso se encontrasse em equilíbrio dinâmico de longo-prazo desde o momento inicial. A linha azul ilustra o valor de K corrigido pela tendência; a linha encarnada representa a projeção da tendência de K .

Dinâmica do número de bens intermédios, N : A Figura 5.35 representa a evolução ao longo do tempo do número de variedades de bens intermédios, N , corrigido pela tendência. Durante a totalidade do ajustamento N cresce a um ritmo inferior ao *balanced growth path*.

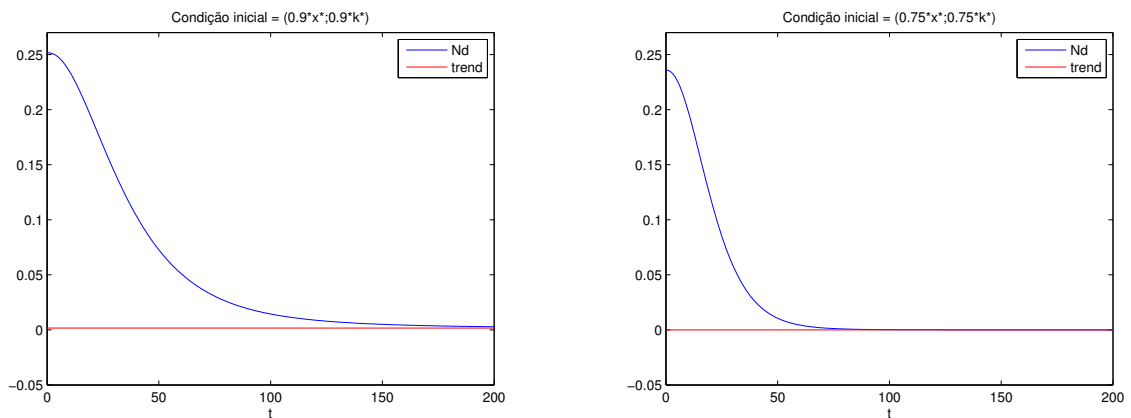


Figura 5.35: Representação gráfica do número de variedades de bens intermédios ao longo do tempo corrigido pela tendência, admitindo que inicialmente ambas as variáveis de estado se encontram 10% (à esquerda) e 25% (à direita) abaixo do seu valor de equilíbrio de longo-prazo. O conceito teórico de tendência representa os valores que uma variável assumiria caso se encontrasse em equilíbrio dinâmico de longo-prazo desde o momento inicial. A linha azul ilustra o valor de N corrigido pela tendência; a linha encarnada representa a projeção da tendência de N .

Dinâmica da taxa de crescimento da economia, g_Y : A Figura 5.36 representa a evolução ao longo do tempo da taxa de crescimento da economia, g_Y . Observamos a ocorrência de *undershooting* na fase inicial do ajustamento, sendo que, durante a maioria do ajustamento, g_Y é inferior à respetiva taxa de crescimento em equilíbrio de longo-prazo, g_Y^* .

Inicialmente, g_Y é elevado devido a g_k também elevado (como referido acima, k começa por crescer acentuadamente). À medida que a subida de k se atenua e g_Q ainda é reduzido (devido a x ainda baixo e I a crescer), g_Y reduz-se para valores abaixo de g_Y^* . Nos instantes seguintes, g_Y começa a crescer, com a subida de x e de I (e, logo, g_Q) a mais que compensar a (ligeira) queda de k em direção ao equilíbrio de longo-prazo.

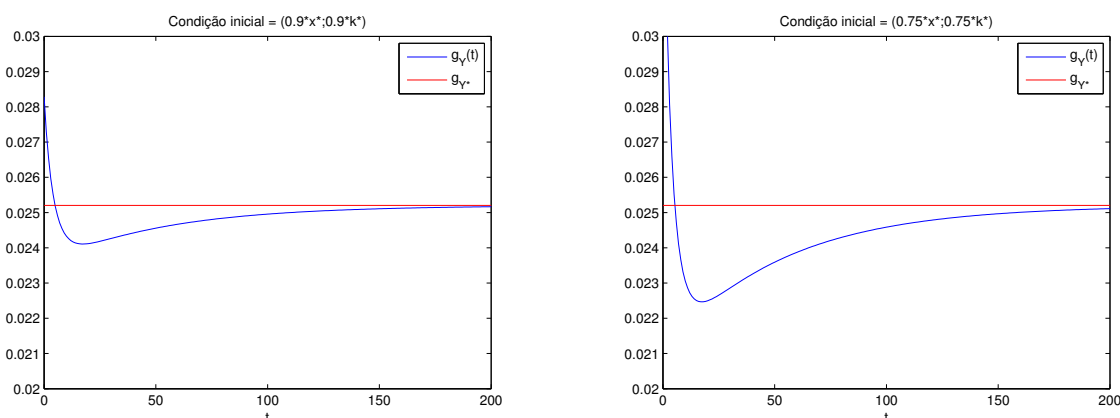


Figura 5.36: Representação gráfica da evolução da taxa de crescimento da economia ao longo do tempo, admitindo que inicialmente ambas as variáveis de estado se encontram 10% (à esquerda) e 25% (à direita) abaixo do seu valor de equilíbrio de longo-prazo. As linhas encarnadas representam os respetivos valores de equilíbrio de longo-prazo.

Dinâmica da dimensão média das empresas, K/N : A Figura 5.37 representa a evolução ao longo do tempo da dimensão média das empresas corrigida pela tendência, $(K/N)_d$. Inicialmente, a dimensão média das empresas é reduzida fruto do reduzido *stock* de capital físico, $K(0)$, e do elevado número de bens intermédios existente, $N(0)$ para dado $Q(0)$. Durante a totalidade do ajustamento K/N cresce a um ritmo superior ao *balanced growth path*, aproximando-se da respetiva tendência.

Sendo que, conforme referido anteriormente, N cresce à taxa x e K à taxa $g_k + g_Q$ e que, como visto acima, x converge para o equilíbrio de longo-prazo de modo significativamente mais lento que g_k e g_Q , resulta então que N estará mais tempo a crescer abaixo da tendência de longo-prazo que K . Deste modo, ao longo da dinâmica de transição $(K/N)_d$ exibirá um comportamento monótono crescente.

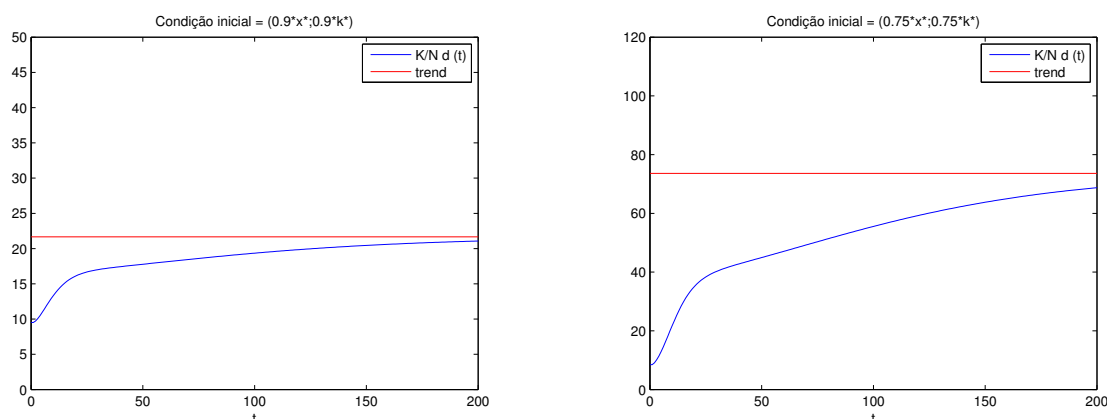


Figura 5.37: Representação gráfica da dimensão média das empresas ao longo do tempo corrigido pela tendência, admitindo que inicialmente ambas as variáveis de estado se encontram 10% (à esquerda) e 25% (à direita) abaixo do seu valor de equilíbrio de longo-prazo. O conceito teórico de tendência representa os valores que uma variável assumiria caso se encontrasse em equilíbrio dinâmico de longo-prazo desde o momento inicial. A linha azul ilustra o valor de K/N corrigido pela tendência; a linha encarnada representa a projeção da tendência de K/N .

5.4.2 Região B_2

A região B_2 caracteriza uma economia inicialmente pobre em número de variedades de bens intermédios, implicando x inicial superior ao equilíbrio de longo-prazo, x^* , e cujo *stock* de capital físico relativamente ao *stock* de conhecimento tecnológico, k , é inferior ao valor de equilíbrio de longo-prazo, k^* .

A Figura 5.38 ilustra o ajustamento de uma condição inicial pertencente a esta região. Este é caracterizado por uma convergência não monótona de ambas as variáveis de estado. Apesar de impercetível na Figura 5.38, a não monotonia do ajustamento de k será visível na análise individual desta variável.

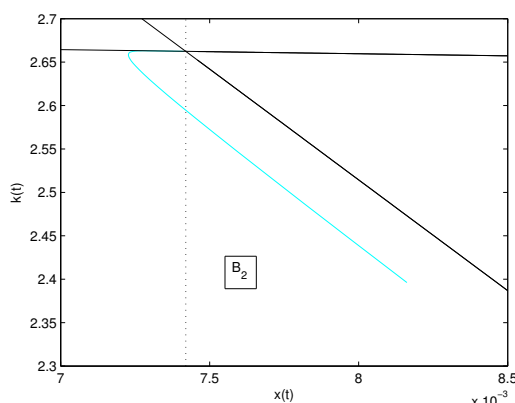


Figura 5.38: Representação gráfica da projeção da trajetória para o equilíbrio, ilustrada pela linha de tom azul claro, considerando uma condição inicial pertencente à região B_2 . As linhas a preto representam a projeção dos subespaços próprios associados aos valores próprios estáveis. A reta vertical a tracejado representa a divisão efetuada entre as regiões B_1 e B_2 .

Consideramos nesta análise as seguintes condições iniciais $(1, 1x^*; 0, 9k^*)$ e $(1, 25x^*; 0, 75k^*)$, representando afastamentos de x e k relativamente ao valor de equilíbrio de igual magnitude mas sentidos opostos.

Dinâmica da taxa de entrada horizontal, x : A Figura 5.39 ilustra a evolução não monótona da taxa de entrada horizontal, x , e da respetiva velocidade de convergência, ω_x , ao longo do tempo. Observamos a ocorrência de *undershooting*, como tal, ω_x possui uma assíntota vertical quando x atinge, instantaneamente, o respetivo valor de equilíbrio de longo-prazo.

Inicialmente os custos de entrada horizontal são relativamente reduzidos devido à relação direta entre o número de variedades de bens intermédios, N , e os custos de entrada horizontal, η . Deste modo, x é inicialmente superior ao respetivo valor de equilíbrio de longo-prazo, x^* . À medida que aumenta N (e, logo, η), a entrada horizontal evolui a ritmo decrescente e x reduz-se abaixo de x^* , exibindo um *undershooting*. Porém, dada a complementaridade existente entre os dois tipos de inovação, referida na análise da região A_1 , à medida que o ritmo de entrada vertical cresce, aumenta o seu impacto positivo em x (via aumento do nível de conhecimento tecnológico, Q), gerando x crescente e aproximando x^* . A dinâmica da taxa de chegada de uma inovação vertical, I , encontra-se representada na Figura 7.5, no Apêndice B.

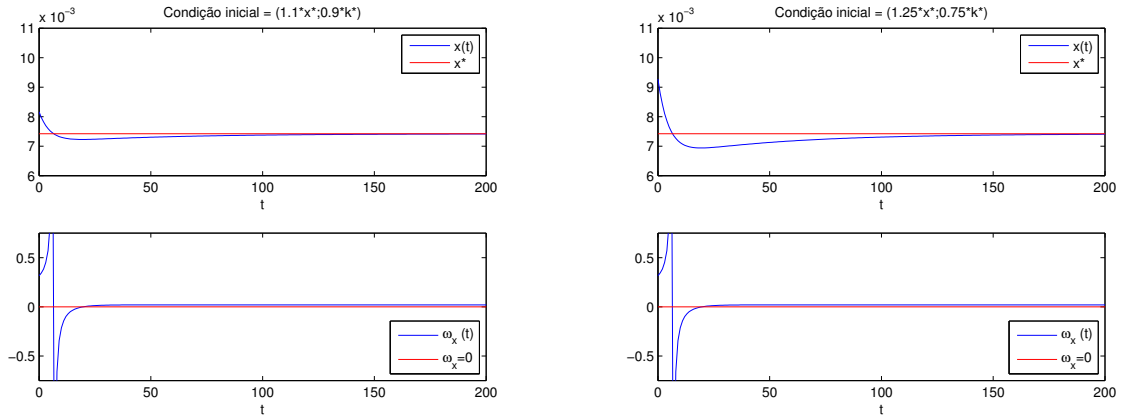


Figura 5.39: Representação gráfica da evolução da taxa de entrada horizontal, x , e da sua velocidade de convergência, ω_x , ao longo do tempo, admitindo que inicialmente o afastamento de x e k tem igual dimensão mas sentidos opostos. À esquerda é representado o afastamento de 10%, à direita o afastamento de 25%. As linhas encarnadas representam os respectivos valores de equilíbrio de longo-prazo.

Dinâmica do *stock* de capital físico por *stock* de conhecimento tecnológico,

k : A Figura 5.40 representa a evolução ao longo do tempo do *stock* de capital físico relativamente ao *stock* de conhecimento tecnológico, k , e da respetiva velocidade de convergência, ω_k . O ajustamento de k é qualitativamente idêntico ao descrito na região B_1 (ver também Figura 7.11, no Apêndice C, com a dinâmica de g_k). Observamos a ocorrência de um *overshooting* de k , conseqüentemente ω_k possui uma assíntota vertical quando k atinge, instantaneamente, o respetivo valor de equilíbrio de longo-prazo.

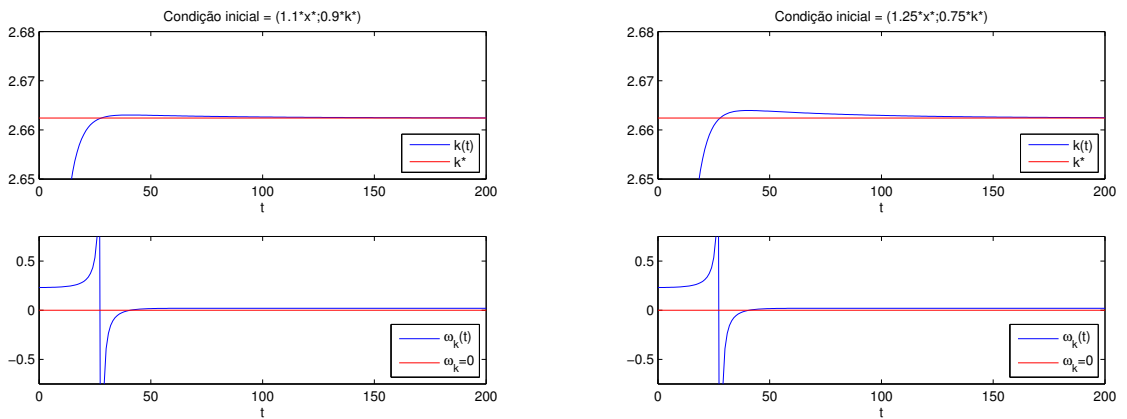


Figura 5.40: Representação gráfica da evolução de k e da sua velocidade de convergência, ω_k , ao longo do tempo, admitindo que inicialmente o afastamento de x e k tem igual dimensão mas sentidos opostos. À esquerda é representado o afastamento de 10%, à direita o afastamento de 25%. As linhas encarnadas representam os respectivos valores de equilíbrio de longo-prazo.

Dinâmica do índice agregado de qualidade, Q : A Figura 5.41 ilustra a evolução ao longo do tempo do índice agregado de qualidade, Q , corrigido pela tendência, e da respectiva taxa de crescimento, g_Q . O índice Q reflete o efeito da entrada horizontal, observado na Figura 5.39, assim como o efeito da entrada vertical no aumento de nível de conhecimento tecnológico. O ajustamento de Q é monótono, crescendo a um ritmo inferior mas cada vez mais próximo do *balanced growth path*. Apesar do maior ritmo de entrada horizontal nesta região, a dinâmica de transição de Q é qualitativamente idêntica à descrita na região B_1 .

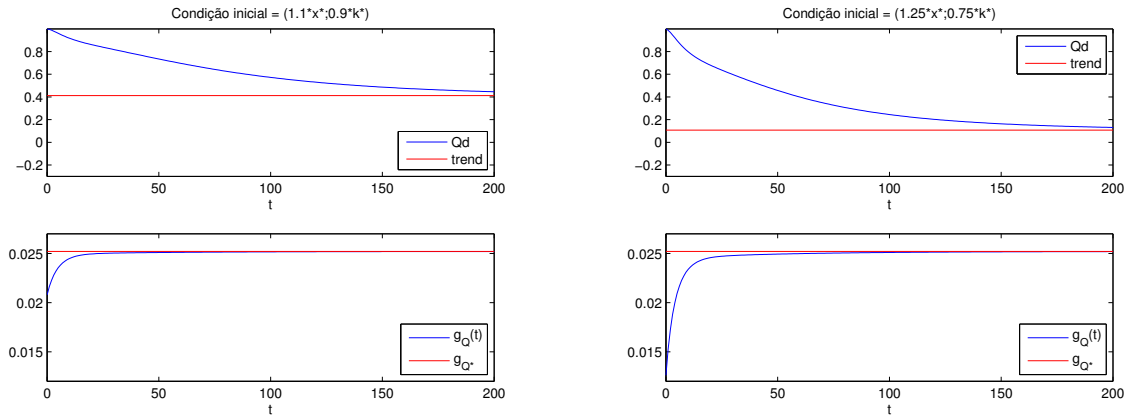


Figura 5.41: Representação gráfica do índice agregado de qualidade, corrigido pela tendência, e da respectiva taxa de crescimento, admitindo que inicialmente o afastamento de x e k tem igual dimensão mas sentidos opostos. À esquerda é representado o afastamento de 10%, à direita o afastamento de 25%. O conceito teórico de tendência representa os valores que uma variável assumiria caso se encontrasse em equilíbrio dinâmico de longo-prazo desde o momento inicial. A linha azul ilustra o valor de Q corrigido pela tendência; a linha encarnada representa a projeção da tendência de Q .

Dinâmica do capital físico, K : A Figura 5.42 representa o processo de convergência ao longo do tempo do capital físico corrigido pela tendência. O ajustamento de K não é monótono, sendo que K cresce inicialmente a um ritmo superior e posteriormente inferior ao respetivo *balanced growth path*. A análise do ajustamento de K é qualitativamente idêntica à realizada na análise da região B_1 .

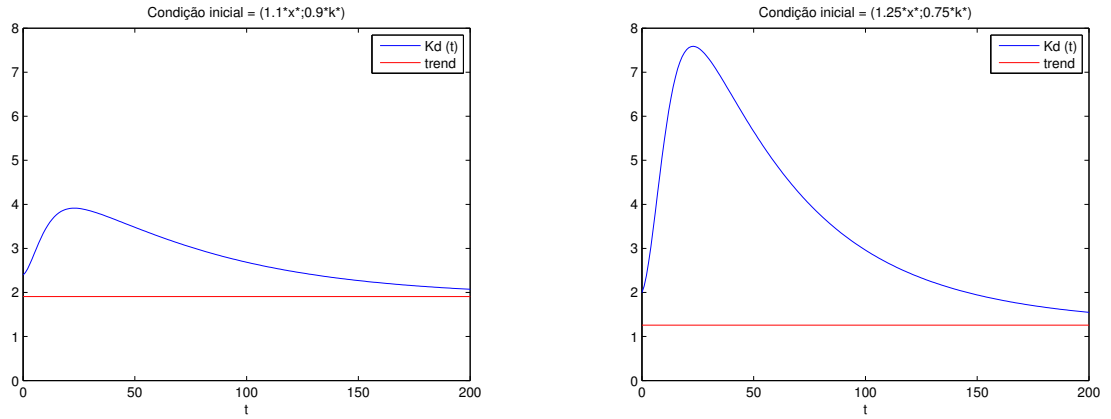


Figura 5.42: Representação gráfica do capital físico ao longo do tempo corrigido pela tendência, admitindo que inicialmente o afastamento de x e k tem igual dimensão mas sentidos opostos. À esquerda é representado o afastamento de 10%, à direita o afastamento de 25%. O conceito teórico de tendência representa os valores que uma variável assumiria caso se encontrasse em equilíbrio dinâmico de longo-prazo desde o momento inicial. A linha azul ilustra o valor de K corrigido pela tendência; a linha encarnada representa a projeção da tendência de K .

Dinâmica do número de bens intermédios, N : A Figura 5.43 ilustra o ajustamento do número de variedades de bens intermédios, N , corrigido pela tendência. Este reflete a não monotonia da taxa de entrada horizontal, x , observado na Figura 5.39. Inicialmente N cresce a um ritmo inferior (afastando-se da tendência) e posteriormente superior (aproximando-se da tendência) ao *balanced growth path*.

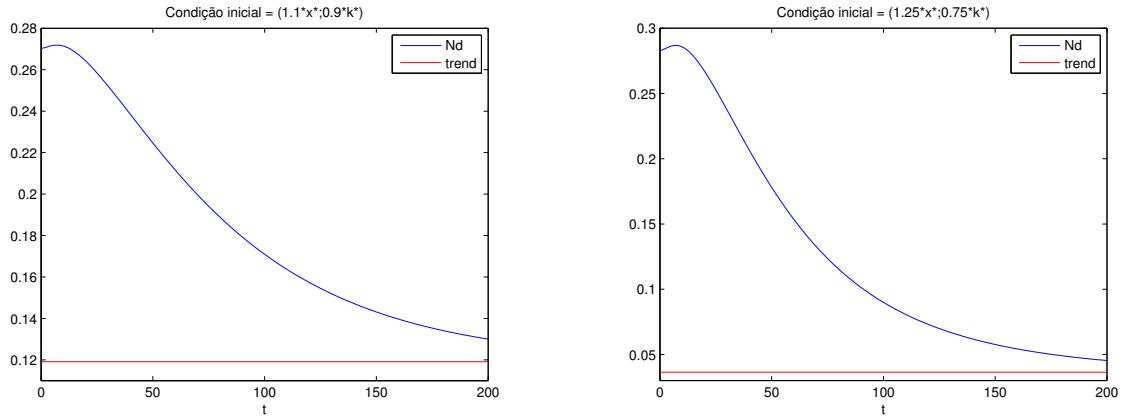


Figura 5.43: Representação gráfica do número de variedades de bens intermédios ao longo do tempo corrigido pela tendência, admitindo que inicialmente o afastamento de x e k tem igual dimensão mas sentidos opostos. À esquerda é representado o afastamento de 10%, à direita o afastamento de 25%. O conceito teórico de tendência representa os valores que uma variável assumiria caso se encontrasse em equilíbrio dinâmico de longo-prazo desde o momento inicial. A linha azul ilustra o valor de N corrigido pela tendência; a linha encarnada representa a projeção da tendência de N .

Dinâmica da taxa de crescimento da economia, g_Y : A Figura 5.44 ilustra o comportamento não monótono, em particular o *undershooting*, da taxa de crescimento da economia, g_Y . A dinâmica de transição de g_Y é qualitativamente idêntica à descrita na região B_2 . No entanto, para cada instante de tempo verificamos que as taxas de crescimento são superiores nesta região (devido ao maior x e, logo, g_Q).

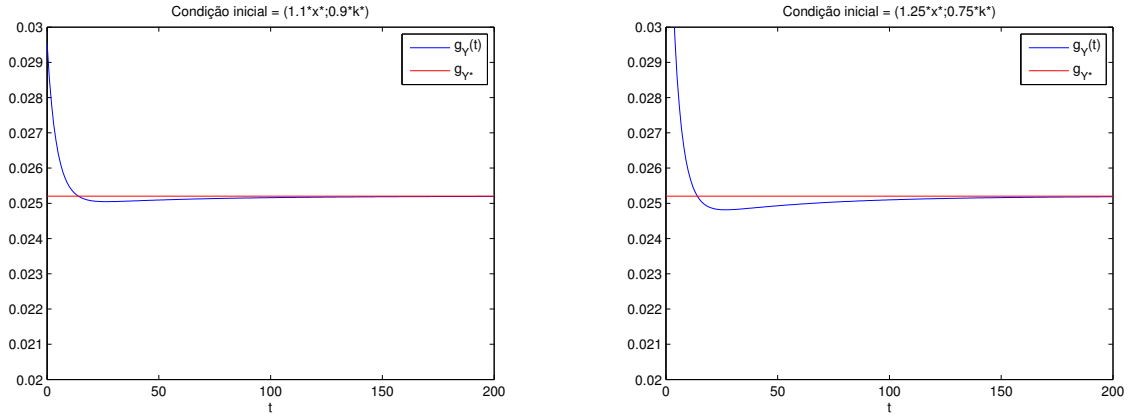


Figura 5.44: Representação gráfica da evolução da taxa de crescimento da economia ao longo do tempo, admitindo que inicialmente o afastamento de x e k tem igual dimensão mas sentidos opostos. À esquerda é representado o afastamento de 10%, à direita o afastamento de 25%. As linhas encarnadas representam os respectivos valores de equilíbrio de longo-prazo.

Dinâmica da dimensão média das empresas, K/N : A Figura 5.45 ilustra a evolução ao longo do tempo da dimensão média das empresas corrigida pela tendência, $(K/N)_d$. Durante a totalidade do ajustamento a dimensão média das empresas evolui a um ritmo superior ao *balanced growth path*. A dinâmica de transição de K/N é qualitativamente equivalente à descrita na análise da região B_1 .

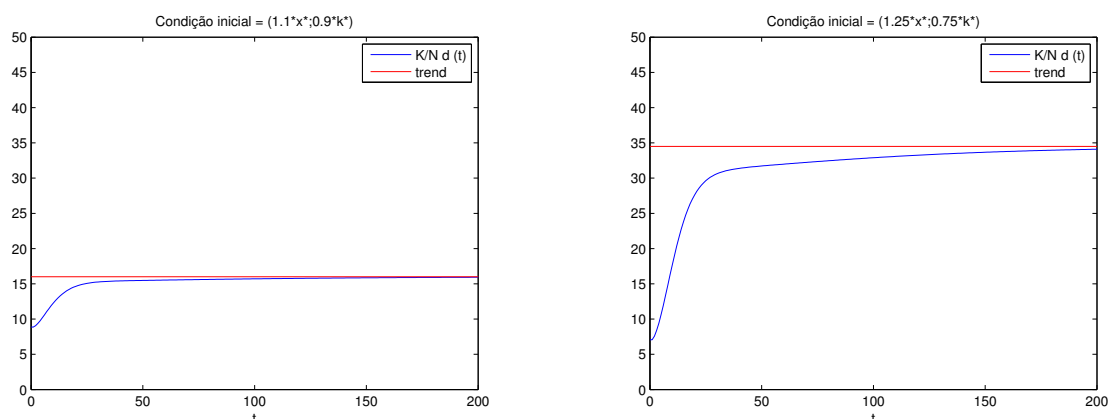


Figura 5.45: Representação gráfica da dimensão média das empresas ao longo do tempo corrigida pela tendência, admitindo que inicialmente o afastamento de x e k tem igual dimensão mas sentidos opostos. À esquerda é representado o afastamento de 10%, à direita o afastamento de 25%. O conceito teórico de tendência representa os valores que uma variável assumiria caso se encontrasse em equilíbrio dinâmico de longo-prazo desde o momento inicial. A linha azul ilustra o valor de K/N corrigido pela tendência; a linha encarnada representa a projeção da tendência de K/N .

5.5 Fase C

A Fase C, a par da região B_2 , caracteriza uma economia inicialmente pobre em número de variedades de bens intermédios, implicando x inicial superior ao equilíbrio de longo-prazo, x^* , e cujo *stock* de capital físico relativamente ao *stock* de conhecimento tecnológico, k , é inferior ao *stock* de equilíbrio de longo-prazo, k^* . No entanto, a Fase C é caracterizada por um menor número de variedades iniciais de bens intermédios, $N(0)$ para dado $Q(0)$, para o mesmo valor de k , de tal forma que a dinâmica de transição é qualitativamente diferente da região B_2 .

A Figura 5.46 representa o processo de convergência das variáveis de estado x e k . Estas apresentam um comportamento monótono, como será observado na análise individual das variáveis.

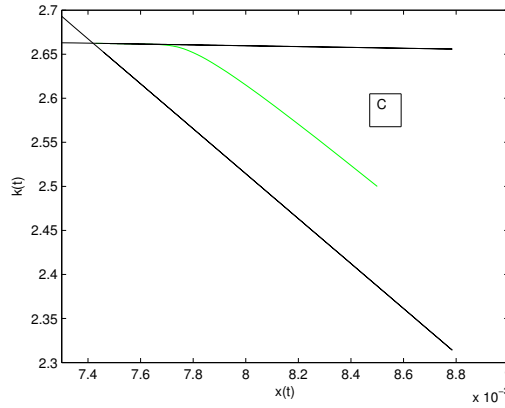


Figura 5.46: Representação gráfica da projeção da trajetória para o equilíbrio ilustrada pela linha a verde, considerando uma condição inicial pertencente à fase C. As linhas a preto representam a projeção dos subespaços próprios associados aos valores próprios estáveis.

Assim, constatamos que uma economia com as mesmas características, concretamente pobre em k e em N , pode convergir de forma monótona (Fase C) ou não monótona (região B_2), consoante a sua situação inicial. Em concreto, uma condição suficiente para a monotonia da convergência é

$$\frac{v_{(2,1)}}{v_{(1,1)}}(x(t) - x^*) + k^* < k(0) < \frac{v_{(2,2)}}{v_{(1,2)}}(x(t) - x^*) + k^*$$

As condições iniciais consideradas na seguinte análise são $(1, 15x^*; 0, 9k^*)$ e $(1, 25x^*; 0, 85k^*)$, representando afastamentos opostos de x e k relativamente ao valor de equilíbrio e de magnitudes distintas.

Dinâmica da taxa de entrada horizontal, x : A Figura 5.47 ilustra a convergência monótona da taxa de entrada horizontal, x , e da respetiva velocidade de convergência, ω_x , ao longo do tempo. Uma vez que x decresce monotonamente até ao respetivo valor de equilíbrio de longo-prazo, x^* , a sua velocidade de convergência é sempre positiva, não possuindo assíntotas verticais. A velocidade de convergência assintótica de x é $-\mu_2$.

Ao longo de todo o ajustamento, empresas entram na economia via inovação horizontal a um ritmo superior a x^* , como consequência da relação direta entre os custos de entrada horizontal, η , e o número de variedades iniciais de bens intermédios, N . Assim, à medida que aumenta N (e, logo, η), x decresce aproximando-se de x^* . Apesar do efeito resultante da complementaridade entre os dois tipos de inovação continuar presente, ao longo de todo o ajustamento o efeito de η é dominante.

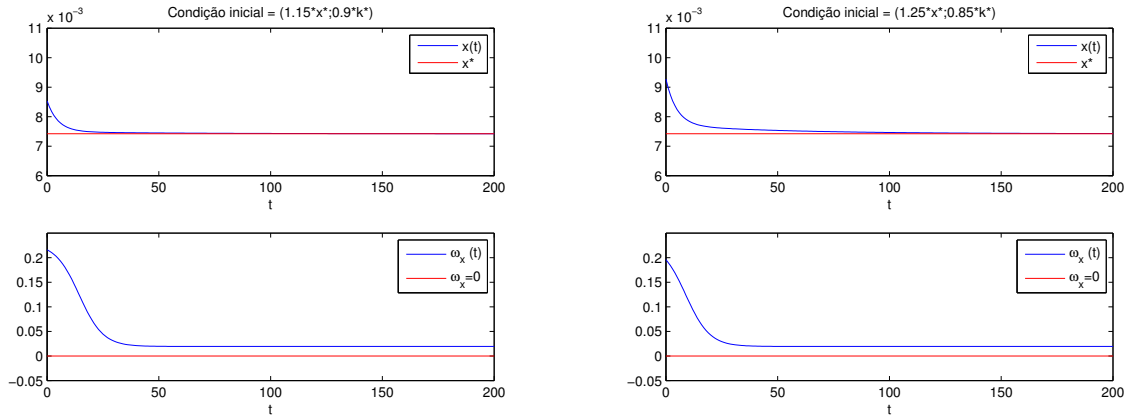


Figura 5.47: Representação gráfica da evolução da taxa de entrada horizontal, x , e da sua velocidade de convergência, ω_x , ao longo do tempo, ilustradas pelas linhas a azul. Consideramos uma condição inicial em que x é 15% superior a x^* e k é 10% inferior a k^* (à esquerda), e uma condição inicial em que x é 25% superior a x^* e k é 15% inferior a k^* (à direita). As linhas encarnadas representam os respectivos valores de equilíbrio de longo-prazo.

Dinâmica do *stock* de capital físico por *stock* de conhecimento tecnológico,

k : Na Figura 5.48 observamos o processo de convergência ao longo do tempo do *stock* de capital físico relativamente ao *stock* de conhecimento tecnológico, k , e da respetiva velocidade de convergência, ω_k . Contrariamente às regiões B_1 e B_2 , o ajustamento de k é monótono, crescendo acentuadamente nos instantes iniciais, como reflexo da sua relativamente alta produtividade marginal inicial (ver também Figura 7.12, no Apêndice C, com a dinâmica de g_k). Como tal, a sua velocidade de convergência é sempre positiva, não apresentando assíntotas verticais.

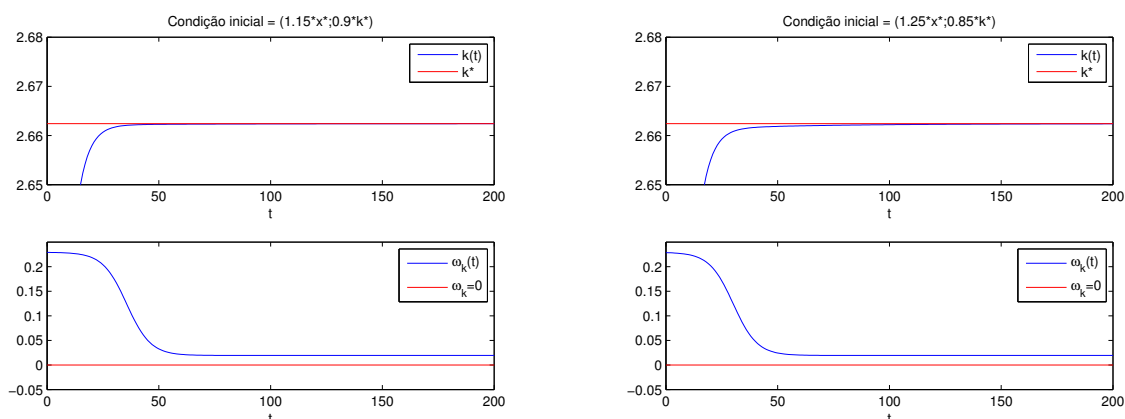


Figura 5.48: Representação gráfica da evolução de k e da sua velocidade de convergência, ω_k , ao longo do tempo, ilustradas pelas linhas a azul. Consideramos uma condição inicial em que x é 15% superior a x^* e k é 10% inferior a k^* (à esquerda), e uma condição inicial em que x é 25% superior a x^* e k é 15% inferior a k^* (à direita). As linhas encarnadas representam os respectivos valores de equilíbrio de longo-prazo.

Dinâmica do índice agregado de qualidade, Q : A Figura 5.49 representa o ajustamento não monótono do índice agregado de qualidade, Q , corrigido pela tendência, e da respetiva taxa de crescimento, g_Q . Ambos os tipos de inovação contribuem para o aumento do nível de conhecimento tecnológico, Q .

Ao longo do ajustamento, observamos uma elevada taxa de entrada horizontal, x , e uma reduzida taxa de chegada de inovação vertical, I . A dinâmica de I encontra-se representada no Apêndice B, na Figura 7.6. A lenta entrada vertical resulta da complementaridade existente entre inovação vertical e capital físico, referida na análise da região B_1 . Deste modo, à medida que se acentua o crescimento de I e x ainda alto, g_Q cresce elevando-se acima do respetivo valor de equilíbrio de longo-prazo. Nos períodos seguintes, g_Q começa a decrescer, com o decréscimo de x a mais que compensar a (ligeira) subida de I .

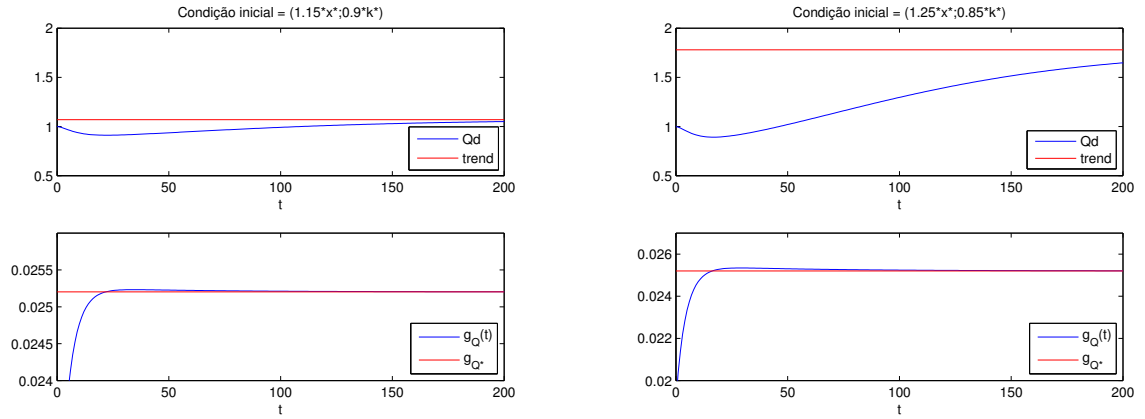


Figura 5.49: Representação gráfica do índice agregado de qualidade, corrigido pela tendência, e da respetiva taxa de crescimento. Consideramos uma condição inicial cujo x é 15% superior a x^* e k é 10% inferior a k^* (à esquerda), e uma condição inicial cujo x é 25% superior a x^* e k é 15% inferior a k^* (à direita). O conceito teórico de tendência representa os valores que uma variável assumiria caso se encontrasse em equilíbrio dinâmico de longo-prazo desde o momento inicial. A linha azul ilustra o valor de Q corrigido pela tendência; a linha encarnada representa a projeção da tendência de Q .

Dinâmica do capital físico, K : A Figura 5.50 representa o processo de convergência do capital físico corrigido pela tendência. Contrariamente às regiões B_1 e B_2 , durante a totalidade do ajustamento o capital físico cresce a uma taxa superior ao *balanced growth path*, aproximando-se da respetiva tendência.

Tal resulta do menor número de variedades iniciais de bens intermédios, $N(0)$ para dado $Q(0)$, por *stock* de capital físico relativamente ao *stock* de conhecimento tecnológico, k . Uma vez que os custos de entrada horizontal são crescentes com N , a entrada horizontal ocorre a um ritmo superior, gerando um maior crescimento do nível de conhecimento tecnológico, Q . Assim, o efeito positivo de Q na produtividade marginal do capital físico, P_{mgK} , é superior, elevando o incentivo à sua acumulação, de tal forma que o crescimento de K é superior ao *balanced growth path* durante a totalidade do ajustamento.

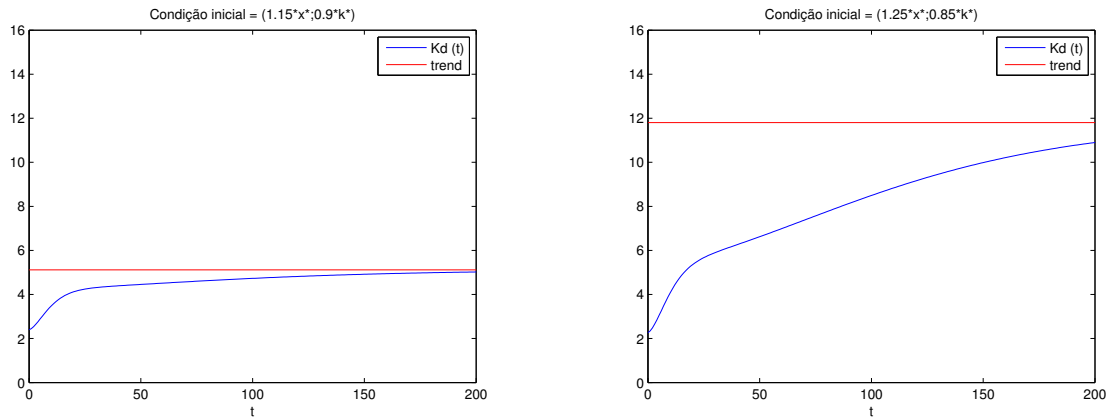


Figura 5.50: Representação gráfica do capital físico, corrigido pela tendência, ao longo do tempo. Consideramos uma condição inicial cujo x é 15% superior a x^* e k é 10% inferior a k^* (à esquerda), e uma condição inicial cujo x é 25% superior a x^* e k é 15% inferior a k^* (à direita). O conceito teórico de tendência representa os valores que uma variável assumiria caso se encontrasse em equilíbrio dinâmico de longo-prazo desde o momento inicial. A linha azul ilustra o valor de K corrigido pela tendência; a linha encarnada representa a projeção da tendência de K .

Dinâmica do número de bens intermédios, N : Observamos na Figura 5.51 o comportamento ao longo do tempo do número de variedades de bens intermédios, N , corrigido pela tendência. Novamente, fica evidente o comportamento monótono da taxa de entrada horizontal, x , observado na Figura 5.47. Concretamente, N cresce a um ritmo superior ao *balanced growth path* durante a totalidade do ajustamento.

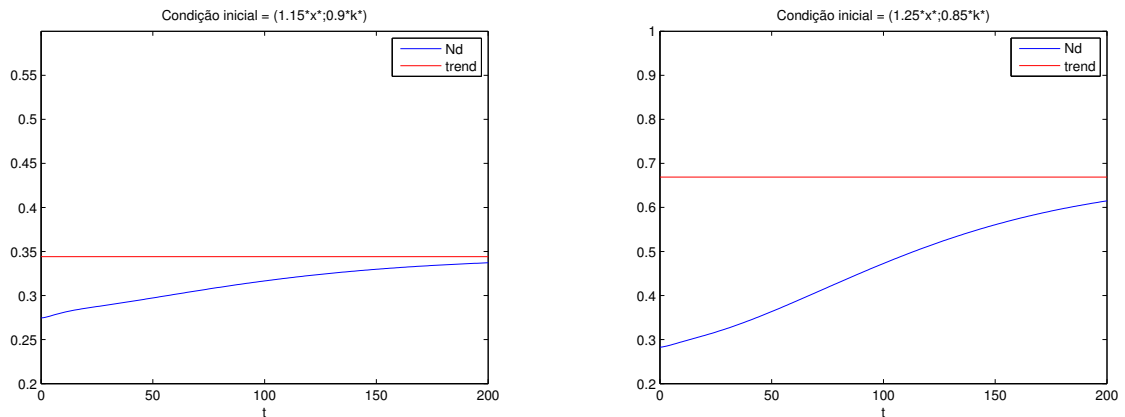


Figura 5.51: Representação gráfica do número de variedades de bens intermédios, corrigido pela tendência, ao longo do tempo. Consideramos uma condição inicial cujo x é 15% superior a x^* e k é 10% inferior a k^* (à esquerda), e uma condição inicial cujo x é 25% superior a x^* e k é 15% inferior a k^* (à direita). O conceito teórico de tendência representa os valores que uma variável assumiria caso se encontrasse em equilíbrio dinâmico de longo-prazo desde o momento inicial. A linha azul ilustra o valor de N corrigido pela tendência; a linha encarnada representa a projeção da tendência de N .

Dinâmica da taxa de crescimento da economia, g_Y : A Figura 5.52 representa o comportamento da taxa de crescimento da economia, g_Y , ao longo do tempo. Observamos um comportamento monótono de g_Y , crescendo a taxas superiores à de equilíbrio de longo-prazo, g_{Y^*} , contrariamente ao observado nas regiões B_1 e B_2 . Assim, tal como na fase D, constatamos que a dotação inicial de K e N pode determinar ajustamentos qualitativamente distintos da própria taxa de crescimento da economia.

Nos instantes iniciais do ajustamento, g_Y é elevado devido a g_k também elevado (conforme explicado anteriormente, k começa por crescer significativamente). À medida que a subida de k se atenua (g_k reduz-se), mais que compensando a subida de g_Q , g_Y reduz-se em direção ao equilíbrio de longo-prazo.

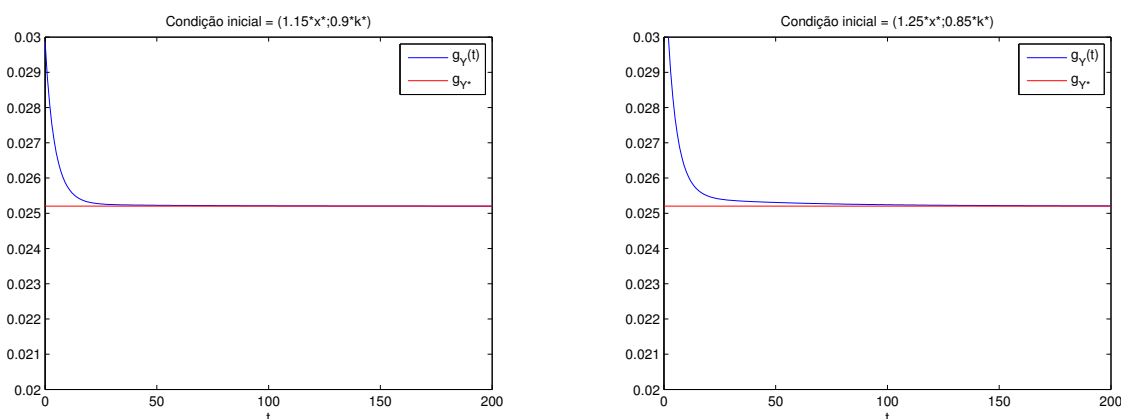


Figura 5.52: Representação gráfica da evolução da taxa de crescimento da economia ao longo do tempo, admitindo que inicialmente os afastamentos de x e k têm magnitudes distintas e sentidos opostos. Consideramos uma condição inicial cujo x é 15% superior a x^* e k é 10% inferior a k^* (à esquerda), e uma condição inicial cujo x é 25% superior a x^* e k é 15% inferior a k^* (à direita). As linhas encarnadas representam os respectivos valores de equilíbrio de longo-prazo.

Dinâmica da dimensão média das empresas, K/N : A Figura 5.53 representa a evolução ao longo do tempo da dimensão média das empresas corrigida pela tendência, $(K/N)_d$. Contrariamente às regiões B_1 e B_2 , K/N apresenta um comportamento não monótono. Inicialmente K/N cresce a um ritmo superior ao *balanced growth path*, de tal forma que ultrapassa a respetiva tendência e começa a afastar-se desta. Posteriormente, K/N cresce a um ritmo inferior ao *balanced growth path*, reaproximando-se da tendência.

Notando que N cresce à taxa x e K à taxa $g_k + g_Q$, o relativamente alto g_k inicial mais que compensa o reduzido g_Q , resultando num crescimento de K superior a x e

de $(K/N)_d$ superior ao *balanced growth path*. Contudo, à medida que o crescimento de g_k se atenua e g_Q começa a decrescer (devido ao decréscimo de x e I ainda baixo), o ritmo de crescimento de $(K/N)_d$ reduz-se abaixo do *balanced growth path*.

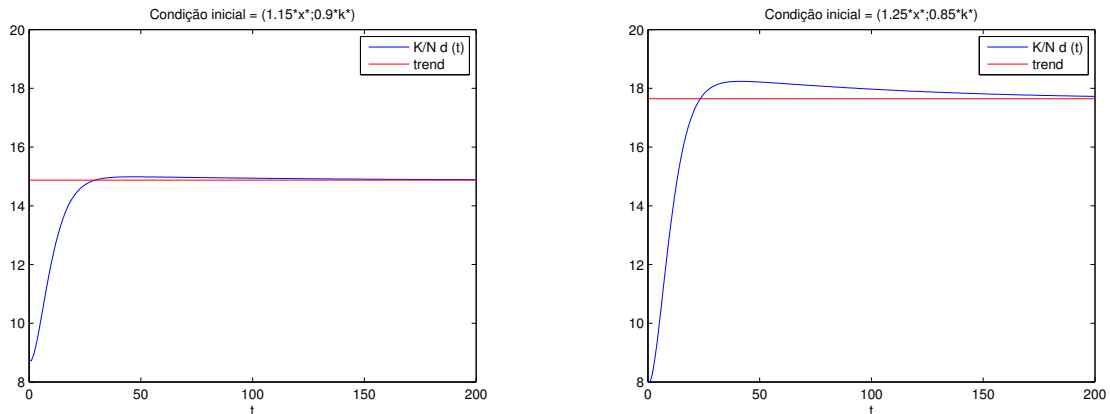


Figura 5.53: Representação gráfica da dimensão média das empresas, corrigida pela tendência, ao longo do tempo. Consideramos uma condição inicial cujo x é 15% superior a x^* e k é 10% inferior a k^* (à esquerda), e uma condição inicial cujo x é 25% superior a x^* e k é 15% inferior a k^* (à direita). O conceito teórico de tendência representa os valores que uma variável assumiria caso se encontrasse em equilíbrio dinâmico de longo-prazo desde o momento inicial. A linha azul ilustra o valor de K/N corrigido pela tendência; a linha encarnada representa a projeção da tendência de K/N .

5.6 Síntese de resultados

Após analisadas as diferentes regiões do diagrama de fase, constatamos que a maioria das variáveis pode exibir ajustamentos qualitativamente distintos, consoante o ponto de partida inicial. Uma vez que a análise efetuada foi exaustiva, nesta secção recapitulamos as principais características das diferentes regiões analisadas.

Na Fase A, que engloba as regiões A_1 e A_2 , e na Fase B, que engloba as regiões B_1 e B_2 , observamos um comportamento não monótono da taxa de entrada horizontal, x , e do *stock* de capital físico relativamente ao *stock* de conhecimento tecnológico, k . Maioritariamente estes processos não monótonos correspondem aos denominados *overshooting* ou *undershooting*, exceptuando o comportamento de x nas regiões A_1 e B_1 . Em caso de *over/undershooting* de x ou k verificamos que as respetivas velocidades de convergência possuem uma assíntota vertical quando a variável de estado atinge, instantaneamente, o respetivo valor de equilíbrio de longo-prazo. Nas restantes fases, observamos um comportamento monótono de x e k (Fases C e D). As variáveis de estado convergem assintoticamente à velocidade $-\mu_2$, que corresponde ao valor próprio negativo de menor valor absoluto.

O número de bens intermédios, N , evidencia um comportamento não monótono nas regiões em que ocorre *over/undershooting* da taxa de entrada horizontal, concretamente nas regiões A_2 e B_2 . Constatamos que a não monotonia do ajustamento de k transmite-se ao ajustamento do capital físico, K . Este apenas apresenta comportamento monótono nas Fases C e D. Relativamente ao índice agregado de qualidade, Q , e à dimensão média das empresas, K/N , observamos que apresentam comportamento não monótono nas regiões caracterizadas por monotonia nas variáveis de estado (Fases C e D), e evidenciam comportamento monótono nas restantes regiões.

Uma vez que K , N , Q e K/N não são estacionários em equilíbrio de longo-prazo, a monotonia do seu ajustamento significa que, durante a totalidade do ajustamento, crescem a taxas superiores ou inferiores ao *balanced growth path*.

Focando particularmente no comportamento da taxa de crescimento da economia, g_Y , constatamos que a monotonia ou não monotonia do ajustamento das variáveis de estado transmite-se ao ajustamento de g_Y . Na Figura 5.54 encontra-se representado o ajustamento de g_Y para condições iniciais pertencentes às diferentes regiões do diagrama de fase. Estas figuras foram apresentadas individualmente na análise da respetiva região, contudo são novamente apresentadas em conjunto de forma a ilustrar a variedade de ajustamentos possíveis de g_Y .

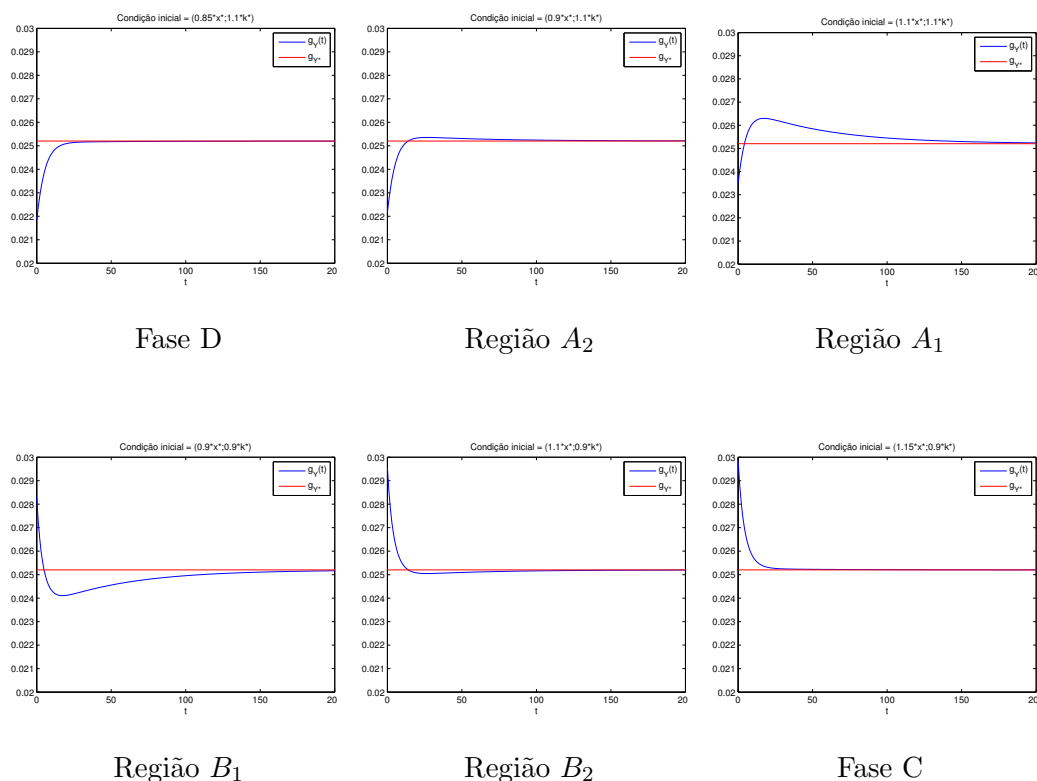


Figura 5.54: Representação da evolução ao longo do tempo da taxa de crescimento do produto, g_Y , nas diferentes regiões do diagrama de fase.

Os gráficos da Figura 5.54 encontram-se organizados consoante a posição da região no diagrama de fase. Os gráficos superiores representam as regiões onde existe um elevado valor inicial de k , os inferiores as regiões onde o valor inicial de k é reduzido. Dado $k(0)$ idêntico entre as regiões ricas e entre as regiões pobres em k , ao analisar os gráficos da esquerda para a direita observamos o efeito positivo da redução do número de variedades iniciais de bens intermédios no comportamento ao longo do tempo da taxa de crescimento do produto, g_Y , devido a relação negativa existente entre x e N .

Capítulo 6

Interpretação alternativa da dinâmica de transição: choques

No capítulo anterior, consideramos que a economia inicialmente não se encontra em equilíbrio de longo-prazo e, como tal, ajusta-se de forma a atingi-lo, dando origem a uma dinâmica de transição. Contudo, existem interpretações alternativas para a origem da dinâmica de transição. Neste capítulo ilustramos uma dessas alternativas.

Em concreto, consideramos que apesar de, inicialmente, a economia se encontrar em equilíbrio de longo-prazo, um choque não esperado nos custos tecnológicos, nomeadamente ζ na I&D vertical, σ ou γ na I&D horizontal, altera o próprio equilíbrio da economia. Assim, visto que o número de variedades iniciais de bens intermédios e o *stock* de capital físico relativamente ao *stock* de conhecimento tecnológico, $x(0)$ e $k(0)$ respetivamente, permanecem inalterados, no momento do choque a economia terá de se ajustar de forma a atingir o equilíbrio no longo-prazo.

Outros choques poderiam ser considerados, por exemplo nas preferências das famílias, ρ ou θ , ou na tecnologia existente, A ou α . No entanto, atendendo ao papel desempenhado pela inovação no modelo, consideramos mais pertinente a consideração de choques nos custos tecnológicos.

A perspetiva de choques iniciais difere da anterior apenas no que respeita à intuição económica do momento inicial. Como tal, todos os gráficos e a análise das variáveis do capítulo anterior permanecem válidos nesta perspetiva.

No entanto, nesta perspetiva, nem todas as regiões do diagrama de fase são necessariamente relevantes do ponto de vista económico. A sua relevância depende da forma como os valores de *steady state*, x^* e k^* , reagem ao tipo de choques considerados. Assim, podemos ter regiões onde a economia nunca se encontrará.

Nesse sentido, de seguida fazemos uma abordagem analítica, através de estática comparada, de forma a determinar as regiões economicamente interessantes nesta

perspetiva.

Lema 6.1. *O valor de steady state k^* é crescente com o custo fixo de entrada vertical, ζ .*

Demonstração. O sinal de $\frac{\partial k^*}{\partial \zeta}$ determina a relação entre k^* e ζ . Recordando (4.2) e (4.3), no *steady state* interior temos

$$f_1(k^*) - f_2(k^*) = 0 \Leftrightarrow \frac{A\alpha^2 k^{*\alpha-1} - \rho}{\theta(\sigma + \gamma + 1)} - \frac{\Xi}{(\sigma + \gamma)\zeta} (\pi_0 k^{*\alpha} - \zeta A\alpha^2 k^{*\alpha-1}) = 0. \quad (6.1)$$

Derivando ambos os membros de (6.1) em ordem a ζ resulta

$$\begin{aligned} & \frac{A\alpha^2(\alpha - 1)k^{*\alpha-2} \cdot \frac{\partial k^*}{\partial \zeta}}{\theta(\sigma + \gamma + 1)} - \frac{\Xi}{(\sigma + \gamma)\zeta^2} \\ & \cdot \left[\zeta \pi_0 \alpha k^{*\alpha-1} \frac{\partial k^*}{\partial \zeta} - \zeta^2 A\alpha^2(\alpha - 1)k^{*\alpha-2} \frac{\partial k^*}{\partial \zeta} - \pi_0 k^{*\alpha} \right] = 0. \end{aligned}$$

Deste modo, resolvendo em ordem a $\frac{\partial k^*}{\partial \zeta}$ obtemos

$$\frac{\partial k^*}{\partial \zeta} = \frac{\pi_0 k^\alpha}{\zeta \pi_0 \alpha k^{*\alpha-1} - \zeta^2 A\alpha^2(\alpha - 1)k^{*\alpha-2} - \frac{(\sigma + \gamma)\zeta^2}{\Xi} \left[\frac{A\alpha^2(\alpha - 1)k^{*\alpha-2}}{\theta(\sigma + \gamma + 1)} \right]}.$$

Dado $\alpha \in]0; 1[$, temos $\frac{\partial k^*}{\partial \zeta} > 0$. □

Lema 6.2. *O valor de steady state k^* é crescente com as elasticidades do custo de entrada horizontal, σ e γ .*

Demonstração. O sinal de $\frac{\partial k^*}{\partial \sigma}$ e de $\frac{\partial k^*}{\partial \gamma}$ determina respetivamente a relação entre k^* e σ e k^* e γ . De forma análoga ao Lema 6.1, derivando ambos os membros de (6.1) em ordem a σ e γ obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{A\alpha^2(\alpha - 1)k^{*\alpha-2} \frac{\partial k^*}{\partial \sigma} \theta(\sigma + \gamma + 1) - (A\alpha^2 k^{*\alpha-1} - \rho) \theta}{\theta^2(\sigma + \gamma + 1)^2} - \frac{\Xi}{\zeta} \\ & \cdot \left[\frac{\left[\pi_0 \alpha k^{*\alpha-1} \frac{\partial k^*}{\partial \sigma} - \zeta A\alpha^2(\alpha - 1)k^{*\alpha-2} \frac{\partial k^*}{\partial \sigma} \right] (\sigma + \gamma) - (\pi_0 k^{*\alpha} - \zeta A\alpha^2 k^{*\alpha-1})}{(\sigma + \gamma)^2} \right] = 0; \end{aligned}$$

$$\frac{A\alpha^2(\alpha-1)k^{*\alpha-2}\frac{\partial k^*}{\partial \gamma}\theta(\sigma+\gamma+1) - (A\alpha^2k^{*\alpha-1} - \rho)\theta}{\theta^2(\sigma+\gamma+1)^2} - \frac{\Xi}{\zeta} \cdot \left[\frac{\left[\pi_0\alpha k^{*\alpha-1}\frac{\partial k^*}{\partial \gamma} - \zeta A\alpha^2(\alpha-1)k^{*\alpha-2}\frac{\partial k^*}{\partial \gamma} \right](\sigma+\gamma) - (\pi_0k^{*\alpha} - \zeta A\alpha^2k^{*\alpha-1})}{(\sigma+\gamma)^2} \right] = 0.$$

Resolvendo em ordem a $\frac{\partial k^*}{\partial \sigma}$ e $\frac{\partial k^*}{\partial \gamma}$ temos

$$\frac{\partial k^*}{\partial \gamma} = \frac{\partial k^*}{\partial \sigma} = \frac{-\pi_0k^{*\alpha} + \zeta A\alpha^2k^{*\alpha-1} + \frac{\zeta(\sigma+\gamma)^2}{\Xi} \left[\frac{A\alpha^2k^{*\alpha-1}-\rho}{\theta(\sigma+\gamma+1)^2} \right]}{H}; \quad (6.2)$$

em que

$$H = \frac{\zeta(\sigma+\gamma)^2 A\alpha^2(\alpha-1)k^{*\alpha-2}}{\Xi\theta(\sigma+\gamma+1)} - [\pi_0\alpha k^{*\alpha-1} - \zeta A\alpha^2(\alpha-1)k^{*\alpha-2}](\sigma+\gamma).$$

Dado $\alpha \in]0; 1[$, então $H < 0$. Substituindo (4.2) e (4.3) em (6.2) resulta

$$\frac{\partial k^*}{\partial \gamma} = \frac{\partial k^*}{\partial \sigma} = \frac{\frac{\zeta(\sigma+\gamma)}{\Xi} \left[f_1(k^*) \left(\frac{\sigma+\gamma}{\sigma+\gamma+1} \right) - f_2(k^*) \right]}{H}.$$

Uma vez que em equilíbrio temos $f_1(k^*) = f_2(k^*)$, dado $\sigma + \gamma < \sigma + \gamma + 1$, então

$$f_1(k^*) \left(\frac{\sigma+\gamma}{\sigma+\gamma+1} \right) - f_2(k^*) < 0.$$

Juntamente com $H < 0$ obtemos $\frac{\partial k^*}{\partial \gamma} = \frac{\partial k^*}{\partial \sigma} > 0$. □

Lema 6.3. *O valor de steady state x^* é decrescente com o custo fixo de entrada vertical, ζ .*

Demonstração. O sinal de $\frac{\partial x^*}{\partial \zeta}$ determina a relação entre x^* e ζ . Resolvendo as duas primeiras equações de (4.4) em ordem a $I(k) \cdot \Xi$ resulta

$$\begin{cases} I(k^*)\Xi = \gamma \left(\frac{\sigma}{\gamma} + 1 \right) x^* \\ I(k^*)\Xi = \frac{1}{\theta}(r(k^*) - \rho) - x^* \end{cases} \Leftrightarrow \gamma \left(\frac{\sigma}{\gamma} + 1 \right) x^* = \frac{1}{\theta}(r(k^*) - \rho) - x^*. \quad (6.3)$$

Dado $r(k) = A\alpha^2 k^{\alpha-1}$, derivando (6.3) em ordem a ζ obtemos

$$\gamma \left(\frac{\sigma}{\gamma} + 1 \right) \frac{\partial x^*}{\partial \zeta} = \frac{1}{\theta} \frac{\partial r(k^*)}{\partial k^*} \frac{\partial k^*}{\partial \zeta} - \frac{\partial x^*}{\partial \zeta} \Leftrightarrow \frac{\partial x^*}{\partial \zeta} = \frac{A\alpha^2(\alpha-1)k^{*\alpha-2} \frac{\partial k^*}{\partial \zeta}}{\theta(\sigma + \gamma + 1)}.$$

De acordo com o Lema 6.1 sabemos $\frac{\partial k^*}{\partial \zeta} > 0$. Deste modo, dado $\alpha \in]0; 1[$, temos $\frac{\partial x^*}{\partial \zeta} < 0$. $\square$

Lema 6.4. *O valor de steady state x^* é decrescente com as elasticidades do custo de entrada horizontal, σ e γ .*

Demonstração. O sinal de $\frac{\partial x^*}{\partial \sigma}$ e de $\frac{\partial x^*}{\partial \gamma}$ determina respetivamente a relação entre x^* e σ e x^* e γ . Derivando (6.3) em ordem a σ e γ resulta, respetivamente

$$x^* + (\sigma + \gamma) \frac{\partial x^*}{\partial \sigma} = \frac{1}{\theta} \frac{\partial r(k^*)}{\partial k^*} \frac{\partial k^*}{\partial \sigma} - \frac{\partial x^*}{\partial \sigma}$$

$$x^* + (\sigma + \gamma) \frac{\partial x^*}{\partial \gamma} = \frac{1}{\theta} \frac{\partial r(k^*)}{\partial k^*} \frac{\partial k^*}{\partial \gamma} - \frac{\partial x^*}{\partial \gamma}$$

Dado $r(k) = A\alpha^2 k^{\alpha-1}$, resolvendo as equações anteriores obtemos

$$\frac{\partial x^*}{\partial \sigma} = \frac{\frac{A}{\theta} \alpha^2 (\alpha-1) k^{*\alpha-2} \frac{\partial k^*}{\partial \sigma} - x^*}{\sigma + \gamma + 1}$$

$$\frac{\partial x^*}{\partial \gamma} = \frac{\frac{A}{\theta} \alpha^2 (\alpha-1) k^{*\alpha-2} \frac{\partial k^*}{\partial \gamma} - x^*}{\sigma + \gamma + 1}$$

De acordo com o Lema 6.2 temos $\frac{\partial k^*}{\partial \sigma} > 0$ e $\frac{\partial k^*}{\partial \gamma} > 0$. Assim, dado $\alpha \in]0; 1[$, concluímos que $\frac{\partial x^*}{\partial \sigma} < 0$ e $\frac{\partial x^*}{\partial \gamma} < 0$. $\square$

Nos lemas anteriores demonstramos a relação entre os valores de *steady state*, x^* e k^* , e os parâmetros relativos aos custos tecnológicos, ζ , σ e γ . Constatamos que, qualitativamente, o efeito destes parâmetros é idêntico. Em concreto, um choque positivo num dos parâmetros afeta positivamente k^* e negativamente x^* .

Consequentemente, no caso de um choque positivo a condição inicial encontrar-se-á a sudeste do novo equilíbrio de longo-prazo, nas regiões B_2 e C . Caso o choque seja negativo a condição inicial encontrar-se-á a noroeste do novo equilíbrio, nas regiões A_2 e D . Assim, nesta perspetiva a condição inicial nunca se encontra nas regiões A_1 e B_1 . Nesse sentido, a análise destas regiões não será economicamente relevante.

Capítulo 7

Conclusão

No decurso deste trabalho procuramos contribuir para uma melhor compreensão dos mecanismos da dinâmica de transição dos modelos de crescimento endógeno. Para esse fim descrevemos a dinâmica local do modelo Gil (2013), reproduzido no Capítulo 3. Este modelo representa uma extensão para a literatura de crescimento endógeno do modelo Ramsey (1928).

Deste modo, procuramos resposta às questões enunciadas no Capítulo 1, nomeadamente: 1) Existe a possibilidade de, dependendo da escolha de valores para alguns parâmetros, estes afetarem o equilíbrio de longo-prazo ou as características da dinâmica do modelo?; 2) As velocidades de transição para o equilíbrio de longo-prazo são idênticas para todas as variáveis e constantes no tempo?; 3) A convergência para o equilíbrio processa-se sempre de forma monótona ou existe possibilidade de convergência não monótona, *overshooting* ou oscilatória, mesmo no caso de uma versão linearizada do sistema dinâmico?; 4) Como se comporta a dimensão média das empresas, aferida pelo *stock* de capital por empresa, no processo de convergência?

Nesse sentido, estudamos o sistema linear como aproximação local do sistema original não linear, próximo do equilíbrio. Tratando-se de uma aproximação, existirá sempre erro. Contudo, dada a robustez dos resultados analíticos obtidos, acreditamos que este é apenas quantitativo e irrelevante para a correta interpretação dos resultados.

No Capítulo 4 abordamos a questão 1) e demonstramos que, na generalidade, existem valores dos parâmetros para os quais o equilíbrio interior do modelo não é único ou não existe qualquer trajetória convergente para o equilíbrio. Uma vez que estas situações não são interessantes do ponto de vista do problema económico em causa, definimos condições suficientes que garantem a unicidade do equilíbrio e a existência de um espaço estável não vazio. Provamos também que só existe um espaço estável não vazio através de uma variedade estável bidimensional.

No Capítulo 5 ilustramos numericamente o processo de convergência para valores determinados dos parâmetros. Esta abordagem numérica foi ilustrativa, assentando nos resultados analíticos obtidos no Capítulo 4.

Em termos gerais, verificamos que a endogeneização do processo de acumulação de capital resulta em dinâmicas de transição ricas. No seguimento da questão 3), constatamos a possibilidade de ajustamentos qualitativamente distintos, nomeadamente monótonos e não monótonos. Este comportamento não é exclusivo das variáveis de estado, sendo particularmente interessante o comportamento da taxa de crescimento do produto, g_Y . Este representa um dos principais contributos do modelo aqui explorado, uma vez que permite explicar os fundamentos do comportamento não linear de g_Y , observado empiricamente, assim como prever o tipo de ajustamento da taxa de crescimento do produto com base no número de variedades iniciais de bens intermédios e *stock* inicial de capital físico. A interligação entre os diferentes tipos de inovação e o capital físico é fundamental para o comportamento não linear das variáveis do modelo.

No que respeita à questão 4), verificamos que a dimensão média das empresas, medida pelo *stock* médio de capital físico por empresa, apresenta um comportamento qualitativamente distinto consoante o ponto de partida inicial. Esta apresenta um comportamento não monótono nas regiões caracterizadas pela monotonia do ajustamento das variáveis de estado, e evidencia um comportamento monótono nas restantes regiões. Uma vez que esta variável não é estacionária em equilíbrio, a monotonia do seu ajustamento implica que, durante a totalidade do ajustamento, esta cresce a taxas superiores ou inferiores à respetiva taxa de crescimento em equilíbrio de longo-prazo.

Relativamente à questão 2), concluímos que, durante o ajustamento, as taxas de crescimento e as velocidades de convergência das variáveis são distintas entre si, mesmo no caso do sistema linear. Em equilíbrio estas não são necessariamente iguais. Este comportamento resulta diretamente da dimensão da variedade estável. Caso a variedade estável fosse unidimensional tal não seria observado. Observamos que as variáveis de estado convergem assintoticamente à velocidade $-\mu_2$, correspondente ao valor próprio negativo de menor valor absoluto. Verificamos também que, em caso de *over/undershooting* das variáveis de estado, as respetivas velocidades de convergência apresentam uma assíntota vertical no momento em que a variável atinge, instantaneamente, o respetivo valor de equilíbrio.

No Capítulo 6 apresentamos uma interpretação económica alternativa, que difere da anterior apenas no conceito de situação inicial. Nesse sentido, a análise anterior permanece válida. Contudo, demonstramos que nem todas as regiões do diagrama

de fase são economicamente interessantes nesta perspectiva.

Em suma, o presente trabalho dá resposta às questões enunciadas no Capítulo 1 e permite uma melhor compreensão dos mecanismos de crescimento endógeno. Através da análise do modelo Gil (2013) focamos alguns aspetos que outros autores não observam. Nesse sentido, este trabalho não representa a replicação da análise de outros autores, referidos no Capítulo 2. Concretamente, a questão 4) é abordada por Brito e Dixon (2009) contudo num contexto de crescimento exógeno. Nesse sentido, a presente análise representa uma extensão dos resultados de Brito e Dixon (2009) ao contexto de crescimento endógeno. No que respeita a questão 2) e a análise das velocidades de convergência, existe uma complementaridade com Eicher e Turnovsky (2001). Este trabalho distancia-se dos restantes autores principalmente no que respeita à questão 3). Estudos como Arnold e Kornprobst (2008) e Eliasson e Turnovsky (2004) não se debruçam sobre esta problemática. Por outro lado, Arnold (2006) e Sequeira (2011) apresentam exemplos numéricos para a ocorrência de comportamento oscilatório; contudo não analisam a possibilidade de não monotonia sem oscilação, relacionada com alternativas situações iniciais do sistema dinâmico. Assim, as considerações relativamente à possibilidade de comportamento não monótono da própria taxa de crescimento do produto representam um contributo adicional para a literatura existente.

Apêndice A

Seguindo a abordagem de Eicher e Turnovsky (2001), descrevemos a dinâmica de x e k no espaço de fase (x, k) . Através do sistema linear obtemos as soluções das variáveis associadas à estabilidade:

$$\begin{cases} x - x^* = v_{(1,1)}D_1e^{\mu_1 t} + v_{(1,2)}D_2e^{\mu_2 t} \\ k - k^* = v_{(2,1)}D_1e^{\mu_1 t} + v_{(2,2)}D_2e^{\mu_2 t} \end{cases}, \quad (7.1)$$

em que D_1 e D_2 são constantes obtidas a partir dos valores iniciais $x(0)$ e $k(0)$.

Diferenciando as equações do sistema anterior, de forma a obter o seu comportamento ao longo do tempo, resulta:

$$\begin{cases} \frac{d(x - x^*)}{dt} = \mu_1 v_{(1,1)}D_1e^{\mu_1 t} + \mu_2 v_{(1,2)}D_2e^{\mu_2 t} \\ \frac{d(k - k^*)}{dt} = \mu_1 v_{(2,1)}D_1e^{\mu_1 t} + \mu_2 v_{(2,2)}D_2e^{\mu_2 t} \end{cases}. \quad (7.2)$$

A partir de (7.1) obtemos

$$\begin{cases} D_1e^{\mu_1 t} = \frac{v_{(2,2)}(x - x^*) - v_{(1,2)}(k - k^*)}{v_{(2,2)}v_{(1,1)} - v_{(2,1)}v_{(1,2)}} \\ D_2e^{\mu_2 t} = \frac{v_{(1,1)}(k - k^*) - v_{(2,1)}(x - x^*)}{v_{(2,2)}v_{(1,1)} - v_{(2,1)}v_{(1,2)}} \end{cases}. \quad (7.3)$$

Deste modo, substituindo (7.3) em (7.2) temos:

$$\begin{cases} \frac{d(x - x^*)}{dt} = \frac{(\mu_1 v_{(2,2)}v_{(1,1)} - \mu_2 v_{(2,1)}v_{(1,2)})(x - x^*) + (\mu_2 - \mu_1)v_{(1,2)}v_{(1,1)}(k - k^*)}{v_{(2,2)}v_{(1,1)} - v_{(2,1)}v_{(1,2)}} \\ \frac{d(k - k^*)}{dt} = \frac{(\mu_1 - \mu_2)v_{(2,1)}v_{(2,2)}(x - x^*) + (\mu_2 v_{(2,2)}v_{(1,1)} - \mu_1 v_{(2,1)}v_{(1,2)})(k - k^*)}{v_{(2,2)}v_{(1,1)} - v_{(2,1)}v_{(1,2)}} \end{cases},$$

que representa a evolução ao longo do tempo de $(x - x^*)$ e $(k - k^*)$, respetivamente. Assim, contruímos a seguinte matriz jacobiana calculando as derivadas parciais das equações anteriores para x e k :

$$J' = \begin{pmatrix} \frac{\mu_1 v_{(2,2)} v_{(1,1)} - \mu_2 v_{(2,1)} v_{(1,2)}}{v_{(2,2)} v_{(1,1)} - v_{(2,1)} v_{(1,2)}} & \frac{(\mu_2 - \mu_1) v_{(1,2)} v_{(1,1)}}{v_{(2,2)} v_{(1,1)} - v_{(2,1)} v_{(1,2)}} \\ \frac{(\mu_1 - \mu_2) v_{(2,1)} v_{(2,2)}}{v_{(2,2)} v_{(1,1)} - v_{(2,1)} v_{(1,2)}} & \frac{\mu_2 v_{(2,2)} v_{(1,1)} - \mu_1 v_{(2,1)} v_{(1,2)}}{v_{(2,2)} v_{(1,1)} - v_{(2,1)} v_{(1,2)}} \end{pmatrix}.$$

Podemos assim descrever a dinâmica de x e k no espaço de fase (x, k) por:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{k} \end{pmatrix} = J' \cdot \begin{pmatrix} x - x^* \\ k - k^* \end{pmatrix}.$$

Apêndice B

Dinâmica da taxa de chegada de uma inovação vertical, I : As seguintes figuras ilustram o processo de ajustamento da taxa de chegada de uma inovação vertical, I . Estas encontram-se organizadas pela ordem de análise das várias regiões, efetuada no Capítulo 5. A interpretação da dinâmica de I encontra-se integrada na secção destinada à análise da respetiva região.

- Região A_1 :

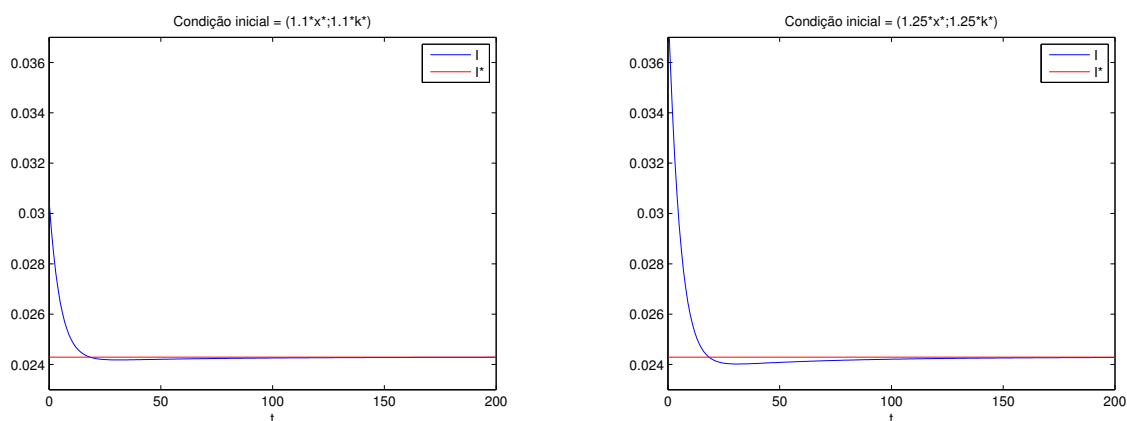


Figura 7.1: Representação gráfica da evolução da taxa de chegada de uma inovação vertical, I , admitindo que inicialmente ambas as variáveis de estado se encontram 10% (à esquerda) e 25% (à direita) acima do seu valor de equilíbrio de longo-prazo. As linhas encarnadas representam os respetivos valores de equilíbrio de longo-prazo.

• Região A_2 :

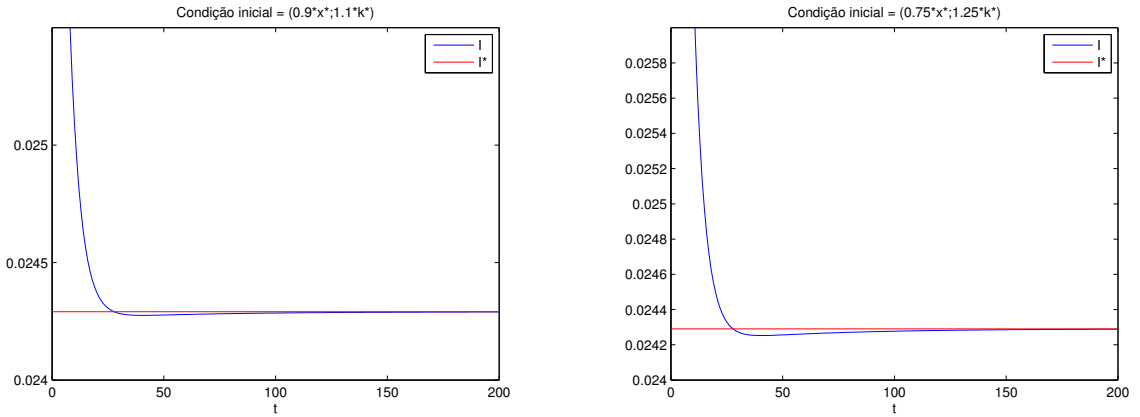


Figura 7.2: Representação gráfica da evolução da taxa de chegada de uma inovação vertical, I , admitindo que inicialmente o afastamento de x e k tem igual dimensão mas sentidos opostos. À esquerda é representado o afastamento de 10%, à direita o afastamento de 25%. As linhas encarnadas representam os respectivos valores de equilíbrio de longo-prazo.

• Fase D :

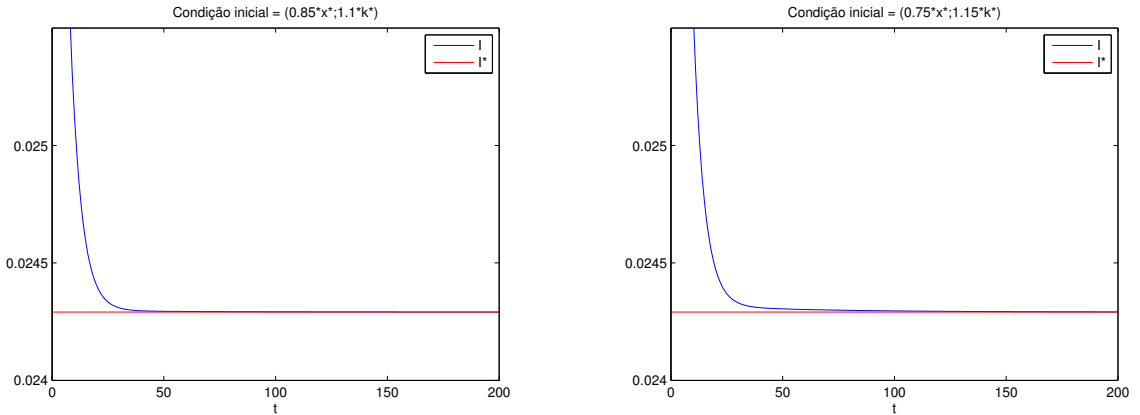


Figura 7.3: Representação gráfica da evolução da taxa de chegada de uma inovação vertical, I . Consideramos uma condição inicial em que x é 15% inferior a x^* e k 10% superior a k^* (à esquerda), e uma condição inicial em que x é 25% inferior a x^* e k é 15% superior a k^* (à direita). As linhas encarnadas representam os respectivos valores de equilíbrio de longo-prazo.

• Região B_1 :

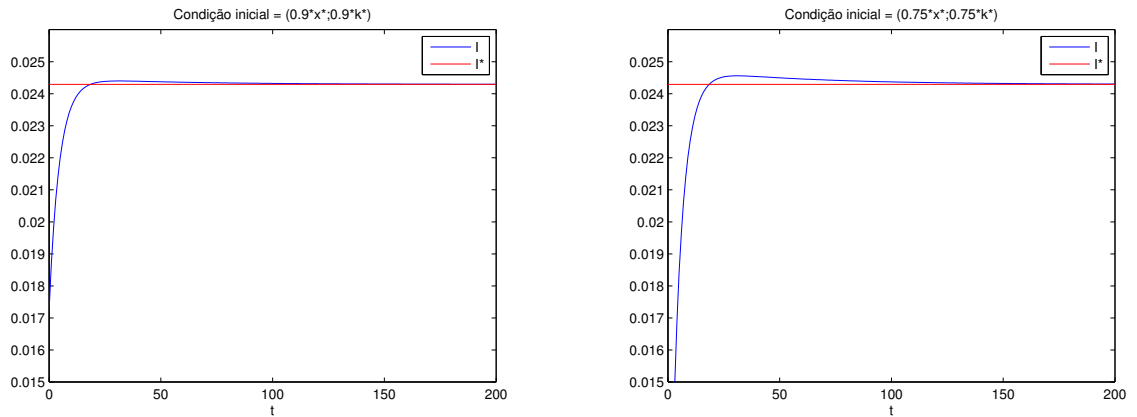


Figura 7.4: Representação gráfica da evolução da taxa de chegada de uma inovação vertical, I , admitindo que inicialmente ambas as variáveis de estado se encontram 10% (à esquerda) e 25% (à direita) abaixo do seu valor de equilíbrio de longo-prazo. As linhas encarnadas representam os respectivos valores de equilíbrio de longo-prazo.

• Região B_2 :

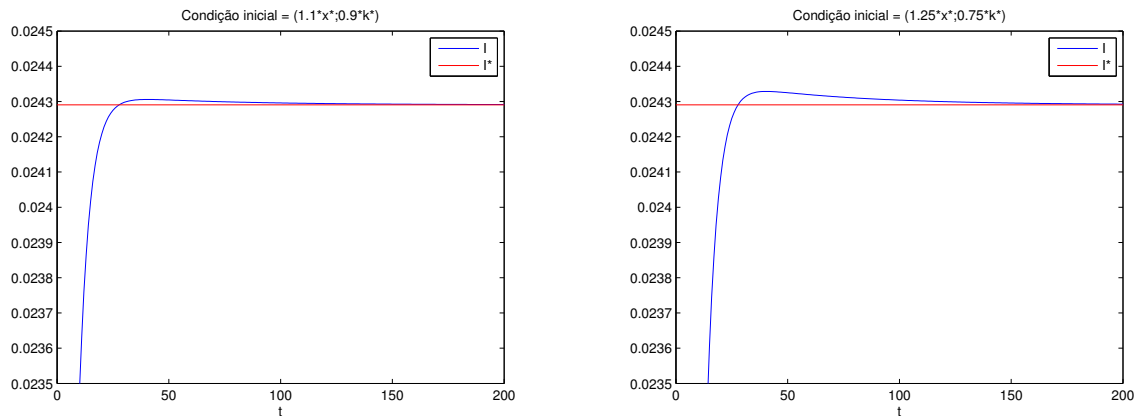


Figura 7.5: Representação gráfica da evolução da taxa de chegada de uma inovação vertical, I , admitindo que inicialmente o afastamento de x e k tem igual dimensão mas sentidos opostos. À esquerda é representado o afastamento de 10%, à direita o afastamento de 25%. As linhas encarnadas representam os respectivos valores de equilíbrio de longo-prazo.

• Fase C:

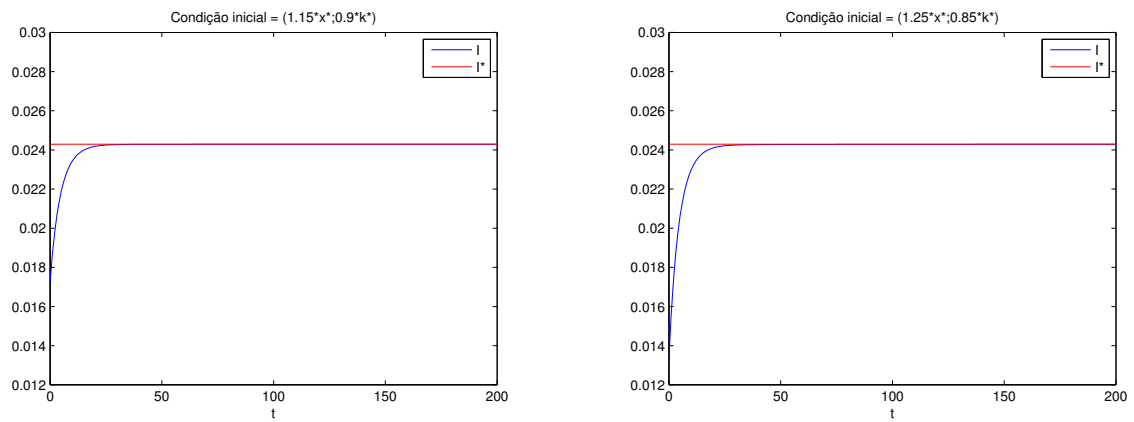


Figura 7.6: Representação gráfica da evolução da taxa de chegada de uma inovação vertical, I . Consideramos uma condição inicial em que x é 15% superior a x^* e k é 10% inferior a k^* (à esquerda), e uma condição inicial em que x é 25% superior a x^* e k é 15% inferior a k^* (à direita). As linhas encarnadas representam os respectivos valores de equilíbrio de longo-prazo.

Apêndice C

Dinâmica da taxa de crescimento do *stock* de capital físico por *stock* de conhecimento tecnológico, g_k : As seguintes figuras ilustram o ajustamento ao longo do tempo da taxa de crescimento do *stock* de capital físico relativamente ao *stock* de conhecimento tecnológico, k . Estas representam um complemento à análise das taxas de crescimento da economia, g_Y , efetuada no Capítulo 5, uma vez que $g_Y(t) = g_Q(t) + \alpha g_k(t)$. Assim, estas encontram-se organizadas pela ordem de análise das várias regiões.

- Região A_1 :

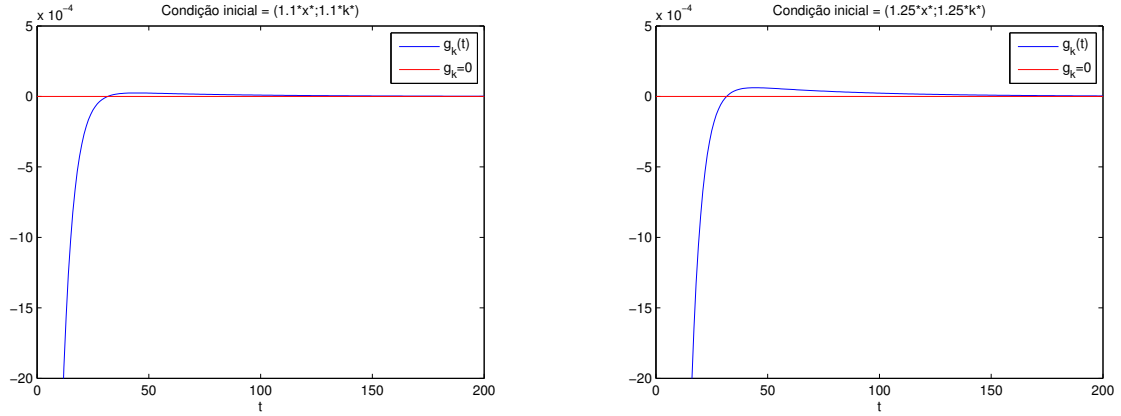


Figura 7.7: Representação gráfica da evolução da taxa de crescimento de k ao longo do tempo, admitindo que inicialmente ambas as variáveis de estado se encontram 10% (à esquerda) e 25% (à direita) acima do seu valor de equilíbrio de longo-prazo. As linhas encarnadas representam os respetivos valores de equilíbrio de longo-prazo.

• Região A_2 :

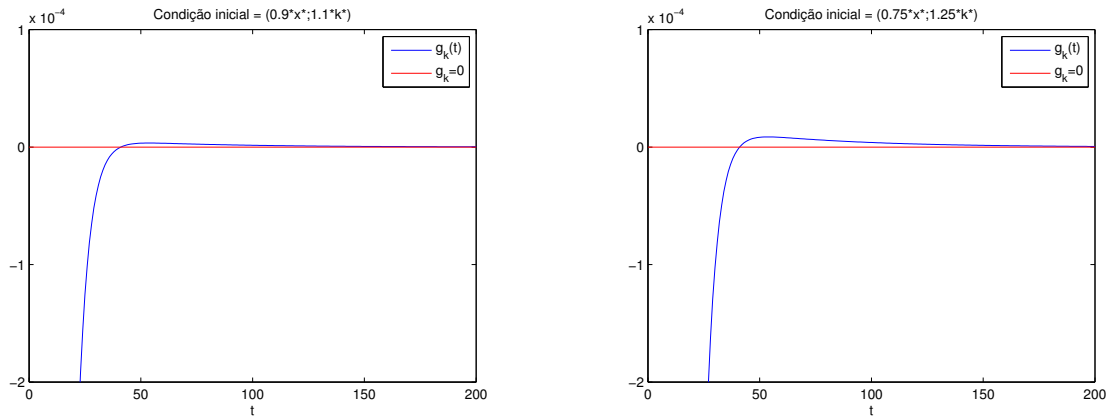


Figura 7.8: Representação gráfica da evolução da taxa de crescimento de k ao longo do tempo, admitindo que inicialmente o afastamento de x e k tem igual dimensão mas sentidos opostos. À esquerda é representado o afastamento de 10%, à direita o afastamento de 25%. As linhas encarnadas representam os respectivos valores de equilíbrio de longo-prazo.

• Fase D :

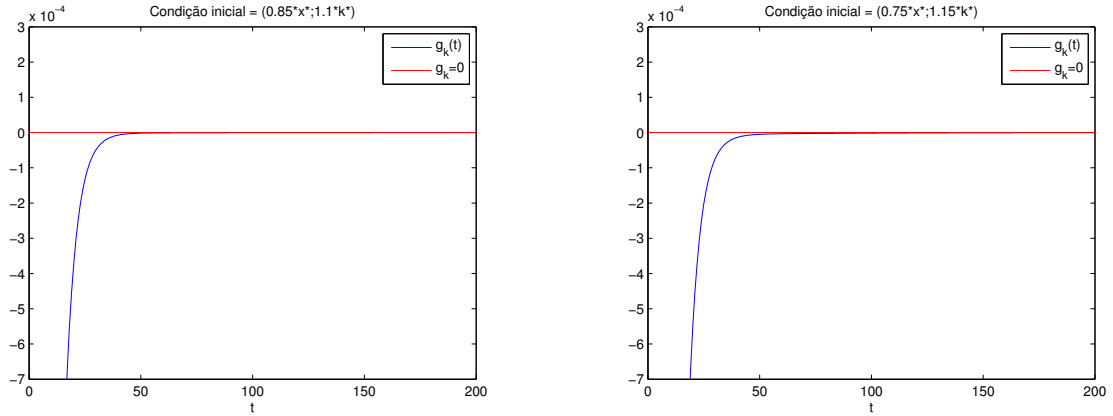


Figura 7.9: Representação gráfica da evolução da taxa de crescimento de k ao longo do tempo, admitindo que inicialmente os afastamentos de x e k têm magnitudes distintas e sentidos opostos. Consideramos uma condição inicial cujo x é 15% inferior a x^* e k é 10% superior a k^* (à esquerda), e uma condição inicial cujo x é 25% inferior a x^* e k é 15% superior a k^* (à direita). As linhas encarnadas representam os respectivos valores de equilíbrio de longo-prazo.

• Região B_1 :

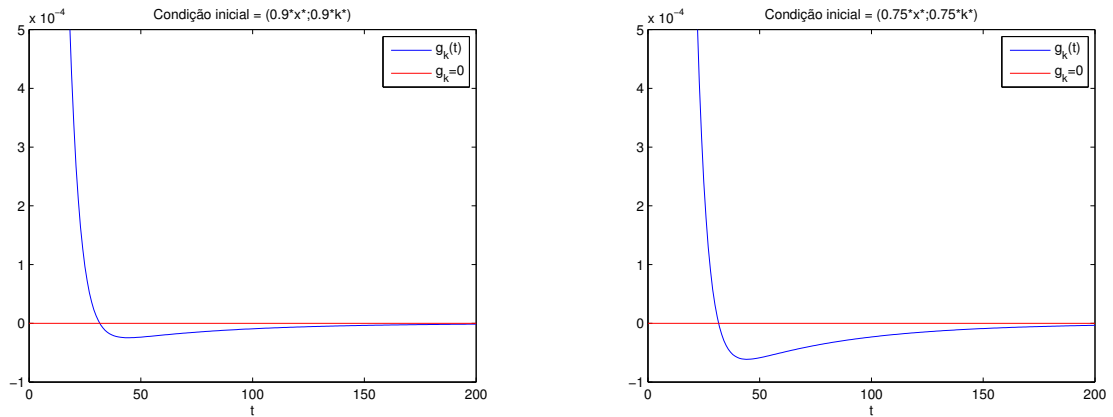


Figura 7.10: Representação gráfica da evolução da taxa de crescimento de k ao longo do tempo, admitindo que inicialmente ambas as variáveis de estado se encontram 10% (à esquerda) e 25% (à direita) abaixo do seu valor de equilíbrio de longo-prazo. As linhas encarnadas representam os respectivos valores de equilíbrio de longo-prazo.

• Região B_2 :

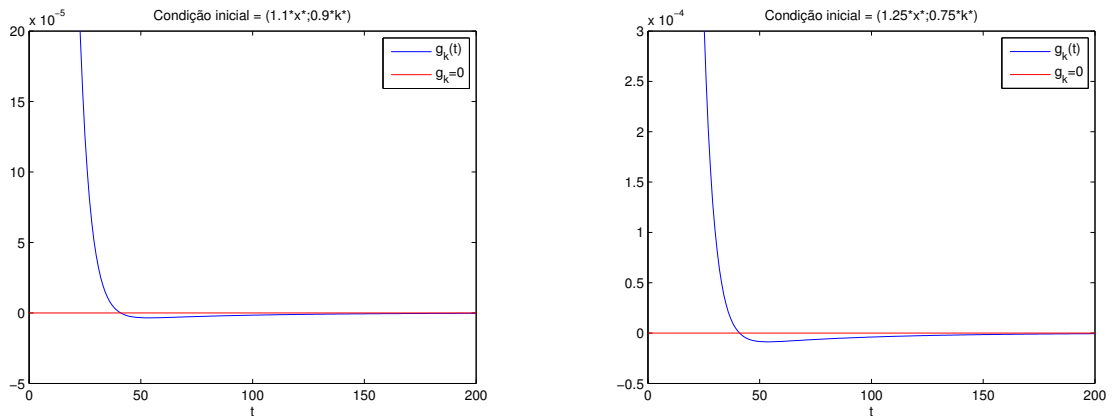


Figura 7.11: Representação gráfica da evolução da taxa de crescimento de k ao longo do tempo, admitindo que inicialmente o afastamento de x e k tem igual dimensão mas sentidos opostos. À esquerda é representado o afastamento de 10%, à direita o afastamento de 25%. As linhas encarnadas representam os respectivos valores de equilíbrio de longo-prazo.

• Fase C:

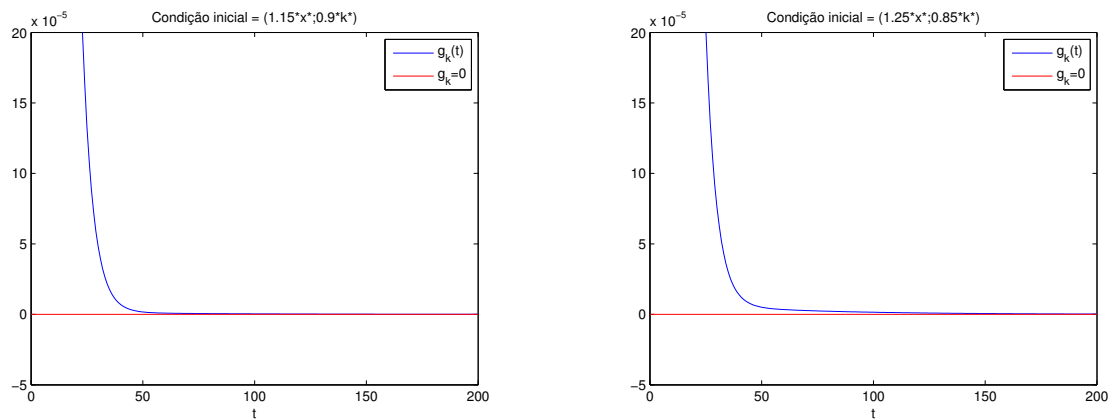


Figura 7.12: Representação gráfica da evolução da taxa de crescimento de k ao longo do tempo, admitindo que inicialmente os afastamentos de x e k têm magnitudes distintas e sentidos opostos. Consideramos uma condição inicial cujo x é 15% superior a x^* e k é 10% inferior a k^* (à esquerda), e uma condição inicial cujo x é 25% superior a x^* e k é 15% inferior a k^* (à direita). As linhas encarnadas representam os respectivos valores de equilíbrio de longo-prazo.

Bibliografia

- [1] Aghion, P. e P. Howitt (1992), “A model of growth through creative destruction”, *Econometrica*, Vol. 60, N° 2, pp. 323-351.
- [2] Arnold, L. G. (2006), “The dynamics of the Jones R & D growth model”, *Review of Economic Dynamics*, Vol. 9, N° 1, pp. 143-152.
- [3] Arnold, L. G. e W. Kornprobst (2008), “Comparative statics and dynamics of the Romer R&D growth model with quality upgrading”, *Macroeconomic Dynamics*, Vol. 12, N° 5, pp. 702-716.
- [4] Atolia, M. e E. F. Buffie (2009), “Reverse shooting made easy: automating the search for the global nonlinear saddle path”, *Computational Economics*, Vol. 34, N° 3, pp. 273-308.
- [5] Atolia, M., S. Chatterjee e S. J. Turnovsky (2010), “How misleading is linearization? Evaluating the dynamics of the neoclassical growth model”, *Journal of Economic Dynamics & Control*, Vol. 34, N° 9, pp. 1550-1571.
- [6] Barro, R. J. e X. Sala-i-Martin (2004), *Economic Growth*, (second edition), Cambridge, Massachusetts: MIT Press.
- [7] Brito, P. e H. Dixon (2009), “Entry and the accumulation of capital: a two state variable extension to the Ramsey model”, *International Journal of Economic Theory*, Vol. 5, N° 4, pp. 333-357.
- [8] Cass, D. (1965), “Optimum growth in an aggregative model of capital accumulation”, *Review of Economic Studies*, Vol. 32, N° 3, pp. 233-240.
- [9] Dunkel, O. (1908), “Sufficient conditions for imaginary roots of algebraic equations”, *Annals of Mathematics*, Vol. 10, N° 1, pp. 46-54.
- [10] Eicher, T. S. e S. J. Turnovsky (2001), “Transitional dynamics in a two-sector non-scale growth model”, *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 25, N° 12, pp. 85-113.

-
- [11] Eliasson, L. e S. J. Turnovsky (2004), “Renewable resources in an endogenously growing economy: balanced growth and transitional dynamics”, *Journal of Environmental Economics and Management*, Vol. 48, N° 3, pp. 1018-1049.
- [12] Fischer, I. (1925), *Mathematical Investigations in the Theory of Value and Prices*, New Haven, Yale University Press.
- [13] Gil, P. M. (2013), “Growth and firm dynamics with horizontal and vertical R&D and capital accumulation”, mimeo.
- [14] Gil, P. M., P. Brito e O. Afonso (2013), “Growth and firm dynamics with horizontal and vertical R&D”, *Macroeconomic Dynamics*, Vol. 17, N° 7, pp. 1438-1466.
- [15] Gomez, M. e T. N. Sequeira (2012), “The transitional dynamics of an endogenous growth model: generalizing production functions”, *Studies in Nonlinear Dynamics & Econometrics*, Vol. 16, N° 5, Article 5.
- [16] Grossman, G. M. e E. Helpman (1991), “Quality ladders in the theory of growth”, *Review of Economic Studies*, Vol 58, N° 1, pp. 43-61.
- [17] Jones, C. I. (1995), “R&D-based models of economic growth”, *Journal of Political Economy*, Vol. 103, N° 4, pp. 759-784.
- [18] Koopmans, T. C. (1965), “On the concept of optimal economic growth”, *The economic approach to development planning*, Pontif. Acad. Sc. Scripta Varia. 28, pp. 225-300; reissued North-Holland Publ. (1966).
- [19] Kuo, B. C. e M. F. Golnaraghi (2003). *Automatic control systems*, New York: John Wiley & Sons.
- [20] Li, C. (2001), “On the policy implications of endogenous technological progress”, *Economic Journal*, Vol. 111, pp. C164-C179.
- [21] Ramsey, F. P. (1928), “A mathematical theory of saving”, *The Economic Journal*, Vol. 38, N° 152, pp. 543-559.
- [22] Romer, P. M. (1990), “Endogenous technological change”, *Journal of Political Economy*, Vol. 98, N° 5, pp. 71-102.
- [23] Routh, E. J. (1877), *Treatise on the stability of a given state of motion*, London, MacMillan.

- [24] Sequeira, T. N. (2011), “R&D spillovers in an endogenous growth model with physical capital, human capital, and varieties”, *Macroeconomic Dynamics*, Vol. 15, N° 2, pp. 223-239.
- [25] Solow, R. M. (1956), “A Contribution to the theory of economic growth”, *The Quarterly Journal of Economics*, Vol. 70, N° 1, pp. 65-94.
- [26] Steger, T. M. (2006), “On the mechanics of economic convergence”, *German Economic Review*, Vol. 7, N° 3, pp. 317-337.
- [27] Zhang, W. (2005), *Differential Equations, bifurcations, and chaos in Economics*, World Scientific.

Anexo

Lista não exaustiva de variáveis e parâmetros:

Y	produto final	> 0
K	capital físico	> 0
$\dot{K}$	acumulação de capital físico	> 0
L	força de trabalho	> 0
Q	índice agregado de qualidade	> 0
N	número de bens intermédios	> 0
$\dot{N}$	entrada via inovação horizontal	> 0
K/N	<i>stock</i> médio de capital físico por empresa	> 0
A	produtividade total dos fatores	> 0
α	elasticidade do produto face o capital	$]0 ; 1[$
r	taxa de juro real	> 0
θ	inverso da elasticidade intertemporal de substituição do consumo	> 0
λ	medida do salto de qualidade quando se inova verticalmente	> 1
ρ	taxa de desconto intertemporal	> 0
R_h	despesa em I&D horizontal	> 0
R_v	despesa em I&D vertical	> 0
I	taxa de chegada de uma inovação vertical	> 0
ζ	custo fixo de entrada vertical	> 0
η	custo total de entrada horizontal	> 0
ϕ	custo fixo de entrada horizontal	> 0
σ	elasticidade de η face o número de bens intermédios	> 0
γ	elasticidade de η face a entrada via inovação horizontal	> 0
x	taxa de entrada horizontal	> 0
k	<i>stock</i> de capital físico relativamente ao <i>stock</i> de conhecimento tecnológico	> 0
z	consumo por <i>stock</i> tecnológico	> 0

Tabela 7.1: Lista de variáveis e parâmetros com os respetivos significados económicos e domínios de definição.

Algumas abordagens analíticas sem sucesso: Na procura de condições suficientes para a existência de um conjunto estável não vazio, procedemos a várias abordagens analíticas. Contudo, um número considerável de abordagens não apresentaram um contributo adicional. Como tal, estas não são referidas no Capítulo 4, relativo ao estudo analítico. Por conseguinte, referimos de seguida algumas destas abordagens.

Uma abordagem analítica seguida foi, para $\alpha = 1/3$ e $\lambda = 1/\alpha$, utilizar $\bar{k}_{min}$ e $\bar{k}_{max}$ para definir limites inferiores ou superiores em expressões com dependência explícita de k^* . Concretamente, usando $\bar{k}_{min}$ de forma a definir um limite superior para $B_2 - B_1 k^*$, e $\bar{k}_{max}$ para definir um limite superior para $B_2 k^* - B_3$. No entanto, estas não permitiram obter resultados relevantes. Outra abordagem analítica procurou garantir que pelo menos uma das condições suficientes (4.12) e (4.13) se verifique sempre. Nesse sentido, obtemos os *thresholds* de λ tal que estas condições se verifiquem, resolvendo respetivamente

$$tr(J) < 0 \Leftrightarrow \lambda > \left[\frac{C_0 - \left(\frac{\sigma}{\gamma} + 1\right) x^*}{C_1} \right]^{\frac{1-\alpha}{\alpha}},$$

$$a_2 \leq 0 \Leftrightarrow \lambda \begin{cases} < \left[\frac{\frac{B_0}{\theta} k^{*\alpha-2} z^* + C_2 + \left(\frac{\sigma}{\gamma} + 1\right) x^* C_0}{C_2 + C_1 \left(\frac{\sigma}{\gamma} + 1\right) x^*} \right]^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} & ; \text{ se } C_2 + C_1 \left(\frac{\sigma}{\gamma} + 1\right) x^* > 0, \\ \geq \left[\frac{\frac{B_0}{\theta} k^{*\alpha-2} z^* + C_2 + \left(\frac{\sigma}{\gamma} + 1\right) x^* C_0}{C_2 + C_1 \left(\frac{\sigma}{\gamma} + 1\right) x^*} \right]^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} & ; \text{ se } C_2 + C_1 \left(\frac{\sigma}{\gamma} + 1\right) x^* < 0, \end{cases}$$

em que $C_0 = \frac{1+\alpha}{\zeta\alpha} B_0 k^{*\alpha} + A\alpha(1 - \alpha^2) k^{*\alpha-1} - x^*$, $C_1 = \frac{1+\alpha}{\zeta\alpha} B_0 k^{*\alpha} + A\alpha^2(1 - 2\alpha) k^{*\alpha-1} + \zeta B_0 k^{*\alpha-2}$ e $C_2 = -B_0 \left(1 + \frac{k^*}{\zeta}\right) k^{*\alpha-2} \left(z^* - \frac{\zeta+k^*}{\gamma} x^*\right)$. Desta forma, caso $C_2 + C_1 \left(\frac{\sigma}{\gamma} + 1\right) x^* > 0$, procuramos condições suficientes tal que o *threshold* de λ que garante (4.12) se encontre à esquerda do *threshold* de λ que garante (4.13). No entanto, dado os resultados expostos no Capítulo 4, consideramos que os resultados obtidos através da análise referida não representam um contributo adicional relevante.

Código Matlab:

```

%FICHEIRO BASE
function ficheiro_base
global theta rho sigma gamma A L phi zeta alpha lambda pi0 Xi B0 B1 B2 B3...
    J13 J23 J33 J x z k P

%PARAMETROS:
theta=1.5 ; rho=0.02 ; sigma=1.2 ; gamma=1.2 ;
A=1; L=1; phi=1; zeta=3.75; alpha=1/3 ; lambda=1/alpha ;
pi0=A*alpha*(1-alpha); Xi=lambda^(alpha/(1-alpha))-1;

%B's
B0=A*alpha^2*(1-alpha) ; B1=((1+alpha)*Xi*B0)/(zeta*alpha);
B2=A*alpha*(1-(Xi+1)*alpha*(1-2*alpha)-alpha^2); B3=zeta*(Xi+1)*B0;

%EQUILIBRIO:

%k de eq.
eq0=2.6;
k=fsolve(@caux, eq0);

%x de eq.
x=(A*alpha^2*k^(alpha-1)-rho)/(theta*(sigma+gamma+1)) ;

%z de eq.
z=A*k^alpha-(1+(Xi+1)*((sigma+gamma)/Xi))*zeta*x-(sigma+gamma+1)*x*k ;

disp('Equilibrio:')
fprintf('    x:           %6.4f \n', x);
fprintf('    z:           %6.4f \n', z);
fprintf('    k:           %6.4f \n', k);

%J's
J13=(B0*(Xi/gamma)*((k/zeta)+1)*k^(alpha-2))*x ;
J23=-(B0*(1/theta+Xi+Xi*(k/zeta))*k^(alpha-2))*z ;
J33=-B1*k^alpha+B2*k^(alpha-1)-B3*k^(alpha-2)-x ;

%JACOBIANA:
J=[ -(sigma/gamma +1)*x      0      J13
    -z                      0      J23
    -zeta-k                -1     J33] ;

%detJ=det(J);

```

```

%trJ=trace(J);
%a2=J23-(sigma/gamma+1)*x*J33+(zeta+k)*J13;

%CALCULO DOS VALORES PROPRIOS:
[V, D]=eig(J, 'nobalance');
%alternativamente p=[1 -trJ a2 -detJ]; roots(p);
%p=beta^3-trJ*beta^2+a2*beta-detJ

fprintf('\n')
disp('Valores Proprios:')
fprintf('    mu1:           %6.4f \n', D(1,1));
fprintf('    mu2:           %6.4f \n', D(2,2));
fprintf('    mu3:           %6.4f \n', D(3,3));
fprintf('\n')
disp('A variavel associada    instabilidade    z.')
fprintf('\n')
V(:,1);%Vetor proprio associado mu1;
V(:,2);%Vetor proprio associado mu2;
V(:,3);%Vetor proprio associado mu3;

%REPRESENTAAO DA PROJEAO ORTOGONAL DO ESPAO ESTAVEL NO
%PLANO HORIZONTAL (x,k):

%matriz nao normalizada devido ao output
%dos vetores proprios originado pelo matlab
P11=(D(1,1)*V(2,2)*V(1,1)-D(2,2)*V(1,2)*V(2,1))/(V(2,2)*V(1,1)-V(1,2)*V(2,1));
P12=((D(2,2)-D(1,1))*V(1,2)*V(1,1))/(V(2,2)*V(1,1)-V(1,2)*V(2,1));
P21=((D(1,1)-D(2,2))*V(2,2)*V(2,1))/(V(2,2)*V(1,1)-V(1,2)*V(2,1));
P22=(D(2,2)*V(2,2)*V(1,1)-D(1,1)*V(1,2)*V(2,1))/(V(2,2)*V(1,1)-V(1,2)*V(2,1));

P=[ P11  P12;
    P21  P22 ];
%[q,w]=eig(P);

function eq=caux(k)
global theta rho sigma gamma A zeta alpha pi0 Xi
eq = (A*alpha^2*k^(alpha-1)-rho)/(theta*(sigma+gamma+1))-...
      (pi0*k^alpha-zeta*A*alpha^2*k^(alpha-1))*(Xi/(zeta*(sigma+gamma)));

```

```

%FICHEIRO DE PLOTS
ficheiro_base
global J x k V A alpha pi0 zeta L phi gamma sigma Xi
[V , D]=eig(J, 'nobalance');

%PLOTS
%NOTA: vamos representar em (x,k)
t=0:800;
xin=1.1*x;
kin=1.1*k;

ci2=((kin-k)*V(1,1)-V(2,1)*(xin-x))/(V(2,2)*V(1,1)-V(1,2)*V(2,1));
ci1=(xin-x-V(1,2)*ci2)/V(1,1);

xt=V(1,1)*ci1*exp(D(1,1)*t)+V(1,2)*ci2*exp(D(2,2)*t)+x;
kt=V(2,1)*ci1*exp(D(1,1)*t)+V(2,2)*ci2*exp(D(2,2)*t)+k;

%VARIABLES DE ESTADO

%x
xtlag=V(1,1)*ci1*exp(D(1,1)*(t-1))+V(1,2)*ci2*exp(D(2,2)*(t-1))+x;
g_x=(xt-xtlag)./xtlag;
velx=-((xt-xtlag)./(xt-x));

%subplot(211)
%plot(t,xt,'b',t,x+0*t,'r')
%axis([0 200 0.007 0.011])
%title('Condição inicial = (1.1*x*;1.1*k*)')
%title('Condição inicial = (1.25*x*;1.25*k*)')
%legend('x(t)', 'x*', 'Location', 'NorthEast')
%xlabel('t')
%subplot(212)
%plot(t,velx,'b',t,0+0*t,'r')
%legend('\omega_x(t)', '\omega_x=0', 'Location', 'SouthEast')
%xlabel('t')
%axis([0 200 -0.1 0.04])

%k:
ktlag=V(2,1)*ci1*exp(D(1,1)*(t-1))+V(2,2)*ci2*exp(D(2,2)*(t-1))+k;
g_k=(kt-ktlag)./ktlag;
velk=-((kt-ktlag)./(kt-k));

%subplot(211)
%plot(t,kt,'b',t,k+0*t,'r')

```

```

%axis([0 200 2.6 2.7])
%title('Condi o inicial = (1.1*x*;1.1*k*)')
%title('Condi o inicial = (1.25*x*;1.25*k*)')
%legend('k(t)', 'k*', 'Location', 'SouthEast')
%xlabel('t')
%subplot(212)
%plot(t, velk, 'b', t, 0*t, 'r')
%axis([0 200 -0.75 0.75])
%legend('\omega_k(t)', '\omega_k=0', 'Location', 'SouthEast')
%xlabel('t')

%VARIABLES: Q, N e K
r=A*(alpha^2)*kt.^(alpha-1);
I=((pi0*kt.^alpha)./zeta)-r;
Ieq=((pi0*k^alpha)/zeta)-A*(alpha^2)*k^(alpha-1);

%Q
gq=Xi.*I+xt;
gqeq=Xi*Ieq+x;
Q0=1;
Au=1;
for i=1:800
    Q(i)=Au*exp((gq(i)-gqeq)*i);
    Au=Q(i);
end
Qd=[Q0,Q];
Qf=Q(800);

%plot(t,I,'b',t,Ieq+0*t,'r')
%legend('I','I_{eq}','Location','NorthEast')
%axis([0 200 0.01 0.025])
%title('Condi o inicial = (0.85*x*;1.1*k*)')
%xlabel('t')

%subplot(211)
%plot(t,Qd,'b',t,Qf+0*t,'r')
%legend('Qd','trend','Location','NorthEast')
%axis([0 200 0 250000])
%title('Condi o inicial = (1.1*x*;1.1*k*)')
%title('Condi o inicial = (1.25*x*;1.25*k*)')
%xlabel('t')
%subplot(212)
%plot(t,gq,'b',t,gqeq+0*t,'r')

```

```

xlabel('t')
legend('g_Q(t)', 'g_{Q*}', 'Location', 'NorthEast')
axis([0 200 0.023 0.04])

%N
Qt=Q0.*exp(gq.*t);
Nt=(zeta*L/phi)^(1/(sigma+gamma+1)).*xt.^(gamma/(sigma+gamma+1)).*Qt.^(1/(sigma+gamma+1))
N0=(zeta*L/phi)^(1/(sigma+gamma+1))*xin^(gamma/(sigma+gamma+1))*Q0^(1/(sigma+gamma+1))

Bus=N0;
for i=1:800
    N(i)=Bus*exp((xt(i)-x)*i);
    Bus=N(i);
end
Nd=[N0,N];
Nf=N(800);

%plot(t,Nd,'b',t,Nf+0*t,'r')
%title('Condi o inicial = (1.1*x*;1.1*k*)')
%title('Condi o inicial = (1.25*x*;1.25*k*)')
%legend('Nd','trend','Location','NorthEast')
xlabel('t')
axis([0 200 0 150000])

%K
Kt=kt.*L.*Qt;
K0=kin*L*Q0;
g_K=g_k+gq;
Aus=K0;
for i=1:800
    K(i)=Aus*exp((g_K(i)-gqeq)*i);
    Aus=K(i);
end
Kd=[K0,K];
Kf=K(800);

%plot(t,Kd,'b',t,Kf+0*t,'r')
%title('Condi o inicial = (1.1*x*;1.1*k*)')
%title('Condi o inicial = (1.25*x*;1.25*k*)')
axis([0 50 0 5])
%legend('Kd (t)', 'Location', 'NorthEast')
xlabel('t')

```

```

%NOTA: em equilibrio gq=gK

%TAXA DE CRESCIMENTO DA ECONOMIA: g_Y
gy=(alpha.*g-k)+gq;

%plot(t,gy,'b',t,ggeq+0*t,'r')
%title('Condi o inicial = (1.1*x*;1.1*k*)')
%title('Condi o inicial = (1.25*x*;1.25*k*)')
%legend('g_Y(t)', 'g_{Y*}','Location','NorthEast')
%xlabel('t')
%axis([0 200 0.02 0.03])

%DIMENSAO MEDIA DAS EMPRESAS: K/N
KN0=K0/N0;

for i=1:800
    KN(i)=Kd(i)./Nd(i);
end
KNd=[KN0,KN];
KNf=KN(800);

%plot(t,KNd,'b',t,KNf+0*t,'r')
%axis([0 200 0 12])
%title('Condi o inicial = (1.1*x*;1.1*k*)')
%title('Condi o inicial = (1.25*x*;1.25*k*)')
%legend('K/N d (t)', 'trend','Location','NorthEast')
%xlabel('t')

%ESPA O ESTAVEL

%[X,Y]=meshgrid(0:.05:Xmax,0:Ymax);
%v1=V(:,1); v2=V(:,2);
%ezmesh(@ (X,Y) v1(1)*X+v2(1)*Y+x,@ (X,Y) v1(2)*X+v2(2)*Y+k,@ (X,Y) v1(3)*X+v2(3)*Y+z);
%axis([0 0.4 0 10 -15 10])
%hold on
%plot3(x,k,z,'marker','*')
%hold on
%ezsurf(@ (X,Y) X,@ (X,Y) Y,@ (X,Y) X*0)
%xlabel('x')
%ylabel('k')
%zlabel('z')

```