

**MODELIZAÇÃO *GARCH* MULTIVARIADA DAS TAXAS
DE RETORNO DAS *SMALL, MID E LARGE CAPS* DA
ZONA EURO**

José Fernando da Silva Neto

Tese de Mestrado em Ciências Empresariais

(Área de Especialização: Finanças Empresariais)

Orientada por

Professor Doutor Francisco Vitorino da Silva Martins

Faculdade de Economia

Universidade do Porto

2007

NOTA BIOGRÁFICA

José Fernando da Silva Neto licenciou-se em Gestão pela Faculdade de Economia da Universidade do Porto em 1996, com classificação final de 15 valores. No ano lectivo de 2005/2006 terminou a parte escolar do Mestrado em Ciências Empresariais, na área de especialização de Finanças Empresariais, com classificação de 15 valores.

De Outubro de 1997 a Setembro de 1998 desempenhou a função de gestor de risco no Departamento de Operações Especiais de Risco de Crédito do Banco Espírito Santo. Desde Outubro de 1998 é assistente no Instituto Superior de Línguas e Administração de Vila Nova de Gaia.

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho de investigação mereceu um conjunto de contribuições e apoios, dos quais resultaram claros benefícios e aos quais gostaria de manifestar o meu público e sincero agradecimento.

Em primeiro lugar, estou especialmente grato ao Professor Doutor Francisco Vitorino da Silva Martins por toda a sua disponibilidade, motivação e desempenho superior na orientação desta dissertação.

Gostaria também, aqui, de testemunhar o meu especial reconhecimento ao Instituto Superior de Línguas e Administração de Vila Nova de Gaia, em particular ao Professor Doutor António Godinho e ao Dr. Carlos Miguel Oliveira, por todo o apoio prestado e facilidades concedidas na frequência às aulas de mestrado.

Uma palavra de apreço e reconhecimento aos funcionários da Biblioteca da Faculdade de Economia da Universidade do Porto, em especial à D. Manuela Moreira, pela rapidez demonstrada na localização e disponibilização de determinados artigos científicos.

Um especial obrigado e pedido de desculpas é ainda devido à Paula, ao Nelson, à Lucinda e toda a restante família, pela paciência e compreensão demonstrada face à atenção que não lhes pude dispensar enquanto realizava este trabalho.

RESUMO

Na presente dissertação efectua-se um estudo, no período compreendido entre Janeiro de 1999 e Dezembro de 2006, sobre a estrutura temporal das correlações entre as taxas de retorno de empresas com diferente capitalização bolsista na zona euro. Para o efeito construíram-se cinco índices, baseados nos quintis da capitalização bolsista, constituídos por empresas cotadas nos diferentes mercados accionistas da zona euro. Pretende-se, nomeadamente, investigar se as correlações entre as taxas de retorno das *small*, *mid* e *large caps* da zona euro são estáveis no tempo e se evidenciam um comportamento assimétrico.

Para a realização do estudo foram conduzidas dois tipos de análise: condicional e não condicional. Na abordagem condicional foram utilizados os modelos GARCH multivariados de correlações condicionais, onde se considerou a hipótese de que as volatilidades, quer as correlações entre as taxas de retorno exibirem assimetria.

Utilizando uma amostra de 416 observações semanais das taxas de retorno dos cinco índices construídos, os resultados obtidos permitiram concluir que o nível médio das correlações entre as *small*, *mid* e *large caps* da zona euro é relativamente elevado. As análises condicional e não condicional levadas a cabo possibilitaram igualmente concluir que as correlações entre as taxas de retorno semanal das *small*, *mid* e *large caps* não são constantes no tempo, evidenciando um comportamento assimétrico. Nomeadamente, concluiu-se, que estas tendem a aumentar de forma mais acentuada em resposta a choques negativos simultâneos nas taxas de retorno, do que quando esses mesmos choques são positivos.

Estas conclusões sugerem que os benefícios de um investidor adoptar uma estratégia “*size diversification*” na zona euro serão reduzidos.

ABSTRACT

In this present dissertation a study is realized, from January 1999 until December 2006, about temporal correlation structure between returns for euro zone of small, mid and large cap stocks. For this, five indices were constructed based on quintiles of market capitalisation, formed by stocks quoted in the different euro zone stock markets. Namely, it is intended to investigate if correlations between small, mid and large cap returns, in euro zone, are constant and if any asymmetric behaviour is evident.

For the study a conditional and an unconditional analysis were conducted. In the conditional analysis, the conditional correlation multivariate GARCH models have been used, where it was considered the hypothesis of both volatilities and correlations between returns exhibit asymmetry.

Using a sample of 416 weekly observations of the five indices returns constructed, the results obtained allowed to conclude that the average level of correlations between small, mid and large cap stocks in euro zone is relatively high. The conditional and unconditional analysis carried out also allowed conclude that correlations between weekly returns of small, mid and large caps are dynamic and exhibit an asymmetric behaviour. Namely, it is concluded that these tend to grow in a more pronounced way in a response to simultaneous negative returns, than positive returns.

These conclusions suggest that investor benefits in adopting a size diversification strategy in euro zone will be reduced.

ÍNDICE

Pág.

LISTA DE TABELAS

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE SIGLAS

INTRODUÇÃO	1
1. MODELOS UNIVARIADOS DA FAMÍLIA ARCH	5
1.1. Propriedades da Volatilidade dos Retornos	5
1.1.1. “ <i>Volatility clustering</i> ”, persistência e reversão para a média	5
1.1.2. Assimetria da volatilidade	6
1.2. Formas Alternativas de Especificação da Variância Condicional	12
1.3. A <i>News Impact Curve</i> da Variância Condicional	19
1.4. Estimação de um Modelo da Família ARCH	22
1.5. Diagnóstico e Avaliação de um Modelo da Família ARCH	26
2. MODELOS GARCH MULTIVARIADOS DE CORRELAÇÕES CONDICIONAIS	30
2.1. Propriedades da Correlação entre Retornos	32
2.2. Modelos Alternativos de Correlações Condicionais	35
2.2.1. Modelo de Correlações Condicionais Constantes	37
2.2.2. Modelos de Correlações Condicionais Dinâmicas	38
2.3. A <i>News Impact Surface</i> da Correlação Condicional Dinâmica	42
2.4. Estimação e Ensaio de Hipóteses nos Modelos de Correlações Condicionais Dinâmicas	43
2.5. Testes para a Hipótese de Correlações Condicionais Constantes	46

2.6. Diagnóstico e Avaliação dos Modelos de Correlações Condicionais Dinâmicas	49
3. EVIDÊNCIA EMPÍRICA DAS CORRELAÇÕES ENTRE AS TAXAS DE RETORNO DAS <i>LARGE, MID</i> E <i>SMALL CAPS</i> DA ZONA EURO	52
3.1. Relevância e Objectivos do Estudo Empírico	52
3.2. Metodologia Utilizada na Construção dos Índices da Zona Euro Baseados na Capitalização Bolsista	54
3.3. Propriedades Estatísticas das Taxas de Retorno Semanal dos Índices da Zona Euro Baseados na Capitalização Bolsista	56
3.4. Propriedades das Correlações Não Condicionais entre as Taxas de Retorno Semanal dos Índices da Zona Euro Baseados na Capitalização Bolsista	66
3.5. Modelização Condicional das Correlações entre as Taxas de Retorno Semanal dos Índices da Zona Euro Baseados na Capitalização Bolsista	71
3.5.1. Metodologia	72
3.5.2. Modelização das médias condicionais das taxas de retorno através de um sistema VAR	73
3.5.3. Modelização das variâncias condicionais das taxas de retorno através de modelos ARCH	76
3.5.3.1. Resultados de estimação dos modelos ARCH univariados	76
3.5.3.2. Avaliação e diagnóstico dos modelos seleccionados	78
3.5.3.3. Análise e discussão dos resultados de estimação obtidos para as variâncias condicionais das taxas de retorno	81
3.5.4. Modelização das correlações entre as taxas de retorno através de modelos de correlações condicionais	84
3.5.4.1. Análise da hipótese de correlações condicionais constantes	84

3.5.4.2. Resultados de estimação dos modelos de correlações condicionais dinâmicas	86
3.5.4.3. Avaliação e diagnóstico do modelo seleccionado	92
3.5.4.4. Análise e discussão dos resultados de estimação obtidos para as correlações condicionais entre as taxas de retorno	94
CONCLUSÃO	97
BIBLIOGRAFIA	101
ANEXOS	107
A. Composição Regional e Sectorial dos Índices S1, S2, S3, S4 e S5	108
B. Exemplos de Funções Escritas em MATLAB 7	119
C. Resultados de Estimação dos Modelos ARCH Univariados para os Índices S1, S2, S3, S4 e S5	131

LISTA DE TABELAS

Pág.

CAPÍTULO 3

Tabela 3.1 – Estatísticas descritivas das taxas de retorno semanal dos índices S1, S2, S3, S4 e S5	59
Tabela 3.2 – Resultados do teste de normalidade (Jarque-Bera) para as taxas de retorno semanal dos índices S1, S2, S3, S4 e S5	62
Tabela 3.3 – Resultados do teste BDS para as taxas de retorno semanal dos índices S1, S2, S3, S4 e S5	63
Tabela 3.4 – Teste de Ljung-Box aplicado às séries das taxas de retorno semanal dos índices S1, S2, S3, S4 e S5	64
Tabela 3.5 – Teste LM de Engle (1982) aplicado às séries das taxas de retorno semanal dos índices S1, S2, S3, S4 e S5	65
Tabela 3.6 – Matriz de correlações entre as taxas de retorno semanal dos índices S1, S2, S3, S4 e S5	67
Tabela 3.7 – Matrizes de <i>Semicorrelations</i> entre as taxas de retorno semanal dos índices S1, S2, S3, S4 e S5	70
Tabela 3.8 – Testes do rácio de verosimilhanças para selecção do modelo VAR a utilizar na modelização das médias condicionais das taxas de retorno semanal dos índices S1, S2, S3, S4 e S5	74
Tabela 3.9 – Testes de Ljung-Box e de Engle (1982) aplicados às séries dos resíduos de estimação do modelo VAR(10)	75
Tabela 3.10 – Resultados de estimação dos modelos ARCH univariados seleccionados para modelizar as variâncias condicionais das taxas de retorno semanal dos índices S1, S2, S3, S4 e S5	77
Tabela 3.11 – Testes de Ljung-Box e de Engle (1982) aplicados às séries dos resíduos estandardizados	78

Tabela 3.12 – Estatísticas descritivas das séries dos resíduos estandardizados	79
Tabela 3.13 – Testes de Tse (2002) para detecção de erros de especificação nas variâncias condicionais das taxas de retorno semanal dos índices S1, S2, S3, S4 e S5	80
Tabela 3.14 – Matriz de correlações condicionais constantes (modelo CCC) entre as taxas de retorno semanal dos índices S1, S2, S3, S4 e S5	85
Tabela 3.15 – Teste da hipótese de correlações condicionais constantes entre as taxas de retorno semanal dos índices S1, S2, S3, S4 e S5	86
Tabela 3.16 – Resultados de estimação dos modelos DCC e ADCC para modelizar as correlações condicionais entre as taxas de retorno semanal dos índices S1, S2, S3, S4 e S5	87
Tabela 3.17 – Resultados de estimação dos modelos GDCC e AGDCC para modelizar as correlações condicionais entre as taxas de retorno semanal dos índices S1, S2, S3, S4 e S5	87
Tabela 3.18 – Testes de Wald para escolha do modelo de correlações condicionais dinâmicas	88
Tabela 3.19 – Resultados de estimação dos modelos DCC e ADCC (com quebra de estrutura) para modelizar as correlações condicionais entre as taxas de retorno semanal dos índices S1, S2, S3, S4 e S5	90
Tabela 3.20 – Resultados de estimação dos modelos GDCC e AGDCC (com quebra de estrutura) para modelizar as correlações condicionais entre as taxas de retorno semanal dos índices S1, S2, S3, S4 e S5	91
Tabela 3.21 – Testes de Wald para escolha do modelo de correlações condicionais dinâmicas com quebra de estrutura	91
Tabela 3.22 – Testes de Tse (2002) para detecção de erros de especificação nas correlações condicionais (modelo AGDCC – com quebra de estrutura) entre as taxas de retorno semanal dos índices S1, S2, S3, S4 e S5	93

Tabela 3.23 – Teste de Ljung-Box aplicado às séries dos “resíduos generalizados”	93
---	----

ANEXO A

Tabela A.1 – Número e Média da Capitalização Bolsista das acções constituintes dos índices S1, S2, S3, S4 e S5	108
---	-----

Tabela A.2 – Composição Regional dos índices S1, S2, S3, S4 e S5	109
---	-----

Tabela A.3 – Composição Sectorial dos índices S1, S2, S3, S4 e S5	114
--	-----

ANEXO C

Tabela C.1 – Resultados de estimação dos modelos ARCH para a taxa de retorno semanal do índice S1	131
--	-----

Tabela C.2 – Resultados de estimação dos modelos ARCH para a taxa de retorno semanal do índice S2	132
--	-----

Tabela C.3 – Resultados de estimação dos modelos ARCH para a taxa de retorno semanal do índice S3	133
--	-----

Tabela C.4 – Resultados de estimação dos modelos ARCH para a taxa de retorno semanal do índice S4	134
--	-----

Tabela C.5 – Resultados de estimação dos modelos ARCH para a taxa de retorno semanal do índice S5	135
--	-----

LISTA DE FIGURAS

	Pág.
<i>CAPÍTULO 1</i>	
Figura 1.1 – Impacto da Informação ao Nível do Mercado e das Empresas	10
Figura 1.2. – <i>News Impact Curve</i> para a volatilidade semanal do Índice PSI 20	21
<i>CAPÍTULO 3</i>	
Figura 3.1 – Evolução da cotação e da taxa de retorno semanal do índice S1	57
Figura 3.2 – Evolução da cotação e da taxa de retorno semanal do índice S2	57
Figura 3.3 – Evolução da cotação e da taxa de retorno semanal do índice S3	58
Figura 3.4 – Evolução da cotação e da taxa de retorno semanal do índice S4	58
Figura 3.5 – Evolução da cotação e da taxa de retorno semanal do índice S5	58
Figura 3.6 – Distribuição empírica e <i>QQ plot</i> da taxa de retorno semanal do índice S1	60
Figura 3.7 – Distribuição empírica e <i>QQ plot</i> da taxa de retorno semanal do índice S2	61
Figura 3.8 – Distribuição empírica e <i>QQ plot</i> da taxa de retorno semanal do índice S3	61
Figura 3.9 – Distribuição empírica e <i>QQ plot</i> da taxa de retorno semanal do índice S4	61
Figura 3.10 – Distribuição empírica e <i>QQ plot</i> da taxa de retorno semanal do índice S5	62
Figura 3.11 – Evolução anual das correlações entre as taxas de retorno semanal dos índices S1, S2, S3, S4 e S5	68
Figura 3.12 – Evolução dos desvios-padrão condicionais das taxas de retorno semanal dos índices S1, S2, S3, S4 e S5	81

Figura 3.13 – <i>News Impact Curve</i> das taxas de retorno semanal dos índices S1, S2, S3, S4 e S5	83
Figura 3.14 – Identificação do momento de tempo em ocorre a quebra estrutural das correlações condicionais entres as taxas de retorno semanal dos índices S1, S2, S3, S4 e S5	89
Figura 3.15 – Evolução das correlações condicionais entre as taxas de retorno semanal dos índices S1, S2, S3, S4 e S5	94
Figura 3.16 – <i>News Impact Surface</i> da correlação entre a taxa de retorno semanal do índice S5 e as restantes	95

LISTA DE SIGLAS

ADCC – Asymmetric Dynamic Conditional Correlation

AGARCH – Asymmetric Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity

AGDCC – Asymmetric Generalized Dynamic Conditional Correlation

APARCH – Asymmetric Power Autoregressive Conditional Heteroskedasticity

ARCH – Autoregressive Conditional Heteroskedasticity

AVGARCH – Absolute Value Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity

CCC – Constant Conditional Correlation

DCC – Dynamic Conditional Correlation

EGARCH – Exponential Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity

GARCH – Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity

GDCC – Generalized Dynamic Conditional Correlation

GJR-GARCH – Glosten, Jagannathan e Runkle - Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity

MVGARCH – Multivariate Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity

NAGARCH – Nonlinear Asymmetric Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity

NARCH – Nonlinear Autoregressive Conditional Heteroskedasticity

NIC – News Impact Curve

NIS – News Impact Surface

QGARCH – Quadratic Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity

TARCH – Threshold Autoregressive Conditional Heteroskedasticity

VAR – Vector Autoregressive

ZARCH – Zakoian - Autoregressive Conditional Heteroskedasticity

INTRODUÇÃO

Uma questão que se coloca quer a investidores individuais, quer a investidores institucionais, é a de saber se existem vantagens em diversificar os investimentos por empresas de diferente dimensão. De acordo com a teoria da carteira *standard*, se as taxas de retorno das pequenas empresas (*small caps*) não estiverem perfeitamente correlacionadas com as das grandes empresas (*large caps*), então existirão benefícios para os investidores que prossigam uma estratégia “*size diversification*”. Esses benefícios traduzem-se, regra geral, numa redução do risco sem penalização do retorno.

No entanto, para que a adopção deste tipo de estratégia resulte numa efectiva redução do risco, será necessário que as correlações entre os retornos dos activos que compõem a carteira se revelem estáveis (ou com uma componente estocástica desprezável) e com valores consideravelmente inferiores à unidade. Assim, assume particular interesse para quem adopte uma estratégia “*size diversification*”, o conhecimento das características da estrutura temporal das correlações entre os retornos de empresas de diferente dimensão.

Com a introdução da moeda única na zona euro, a evidência empírica [ver por exemplo, Cappiello, Engle e Sheppard (2004 e 2006)] mostrou que as correlações entre índices dos mercados accionistas da zona euro aumentaram de forma considerável, relevando-se, no entanto, instáveis no tempo e mais elevadas em períodos de “*bear market*”, diminuindo, desta forma, os ganhos decorrentes da diversificação com base naqueles mesmos índices.

O objectivo principal do presente trabalho é investigar, na zona euro, a estrutura temporal da correlação entre as taxas de retorno semanal de índices de acções de empresas de diferente dimensão. Desta forma procura-se suprir a ausência de trabalhos empíricos sobre o grau de relacionamento linear entre os retornos das *small*, *mid* e *large caps* da zona euro. Nomeadamente, pretende-se analisar se, no período compreendido entre 13/01/1999 e 27/12/2006, as correlações entre os retornos semanais das empresas da zona euro, com diferente capitalização bolsista, são constantes e se revelam um comportamento assimétrico.

Para o efeito construíram-se, com base nos quintis da capitalização bolsista, cinco índices que agrupam as acções das empresas cotadas nos mercados accionistas da zona euro: o índice *Size 1* (S1) que integra as acções de empresas com menor capitalização bolsista, os índices *Size 2* (S2), *Size 3* (S3) e *Size 4* (S4), que são constituídos por acções de empresas de média capitalização e finalmente o índice *Size 5* (S5) que é formado pelas grandes capitalizações da zona euro.

Para responder às questões da estabilidade temporal e grau de simetria das referidas correlações procede-se a uma análise condicional e não condicional. Na análise não condicional, para além da evolução temporal, procura-se determinar se existem diferenças significativas entre as *down-down correlations* e as *up-up correlations*.

Na análise condicional são usados os modelos GARCH (*Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*) multivariados de correlações condicionais dinâmicas. Nestes modelos, a matriz de variâncias e covariâncias das taxas de retorno (H_t) é especificada como combinação não linear de modelos GARCH univariados e de forma hierárquica: em primeiro lugar, especificam-se modelos univariados do tipo GARCH para cada série em análise; seguidamente, utilizando as séries normalizadas pelos seus desvios-padrão condicionais, determinam-se as correlações condicionais; finalmente utilizando os desvios-padrão e as correlações, ambos condicionais, calculam-se as covariâncias condicionais. Este tipo de especificação hierárquica para a matriz H_t torna os modelos de correlações condicionais bastante atractivos já que, por um lado, é possível adoptar diferentes especificações para cada variância condicional e, por outro, o processo de estimação pode ser conduzido em múltiplas fases. Este último facto faz com que este tipo de modelos possa ser utilizado para modelizar a matriz H_t em sistemas de grande dimensão (principal dificuldade presente nos modelos GARCH multivariados), sendo relativamente fácil impor as necessárias restrições de forma a garantir a estacionaridade e a positividade.

De referir que todos os modelos utilizados no presente trabalho foram estimados, mediante a construção de programas adequados para o efeito, com recurso ao software MATLAB.

O estudo encontra-se dividido em 3 grandes capítulos. No capítulo 1, para além de se discutirem os comportamentos padrão da volatilidade associada às taxas de retorno dos activos financeiros, efectua-se uma revisão dos principais modelos GARCH univariados propostos na literatura. Neste capítulo, abordam-se ainda as questões relacionadas com a estimação e realização de inferência estatística, bem como as ferramentas de avaliação e diagnóstico daqueles modelos.

No capítulo 2, depois de se referirem as principais características exibidas pelas correlações entre as taxas de retorno dos activos financeiros, discutem-se alguns dos modelos GARCH multivariados de correlações condicionais propostos, ao longo do tempo, pela comunidade científica. Tal como no capítulo anterior são abordados os tópicos relacionados com a estimação, a realização de inferência estatística, a avaliação e diagnóstico.

O capítulo 3 é dedicado ao estudo empírico das correlações entre as taxas de retorno semanal dos cinco índices de acções acima referenciados e inicia-se com o estudo das propriedades estatísticas univariadas das mesmas taxas de retorno. Segue-se a análise não condicional das referidas correlações, passando-se posteriormente à modelização condicional. Nesta última análise, modelizam-se sequencialmente as médias, as variâncias e por último as correlações condicionais. Para representar a evolução temporal das médias condicionais utiliza-se um modelo VAR (*Vector Autoregressive*). Seguidamente, com base nos resíduos de estimação do modelo VAR procede-se à estimação das variâncias condicionais de cada série considerando para o efeito os seguintes dez modelos alternativos: GARCH (*Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*), AVGARCH (*Absolute Value GARCH*), NARCH (*Nonlinear ARCH*), EGARCH (*Exponential GARCH*), ZARCH (*Zakoian - ARCH*), GJR-GARCH (*Glosten, Jagannathan e Runkle - GARCH*), APARCH (*Asymmetric Power ARCH*), AGARCH (*Asymmetric GARCH*), NAGARCH (*Nonlinear Asymmetric GARCH*) e QGARCH (*Quadratic GARCH*). Para cada taxa de retorno dos cinco índices considerados é seleccionado, com base em critérios de informação e metodologias de avaliação e diagnóstico, o modelo que se revela mais adequado para descrever o processo evolutivo da variância condicional. Estimadas as variâncias condicionais de cada série de retornos, os resíduos estandardizados são utilizados para estimar as

correlações condicionais. Antes porém, investiga-se a hipótese de as correlações condicionais das séries analisadas serem constantes. Para modelizar as correlações condicionais consideram-se 5 modelos alternativos – o modelo CCC (*Constant Conditional Correlation*), o modelo DCC (*Dynamic Conditional Correlation*), o modelo ADCC (*Asymmetric DCC*), o modelo GDCC (*Generalized DCC*) e finalmente o modelo AGDCC (*Asymmetric Generalized DCC*). Por último determina-se, através de inferência estatística e metodologias de avaliação e diagnóstico qual dos modelos é preferível para representar a estrutura temporal das correlações condicionais das taxas de retorno semanal dos 5 índices analisados.

O presente trabalho encerra com uma síntese das principais conclusões, referindo-se também algumas implicações para os investidores. São ainda identificadas algumas linhas de orientação para investigação futura.

1. MODELOS UNIVARIADOS DA FAMÍLIA ARCH

Neste primeiro capítulo são estudados os modelos não lineares da família ARCH (*Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*) que assumem que a variância condicional da taxa de retorno de um activo financeiro não é constante ao longo do tempo. Este tipo de modelos tem revelado, ao longo do tempo, um sucesso considerável na modelização da volatilidade associada ao retorno dos activos financeiros, mostrando-se capazes de evidenciar as suas principais propriedades. Assim, depois de analisar as principais características da volatilidade da taxa de retorno de um activo financeiro, discutir-se-á, no presente capítulo, algumas das especificações alternativas que têm sido sugeridas na literatura para modelizar a variância condicional, abordando-se ainda o método de estimação e ferramentas de avaliação e diagnóstico.

1.1. Propriedades da Volatilidade dos Retornos

Segundo Engle e Patton (2001) um bom modelo de previsão da volatilidade será aquele que é capaz de combinar as diferentes propriedades exibidas pela volatilidade. Os numerosos estudos efectuados ao longo das últimas três décadas sobre a volatilidade dos retornos permitiram identificar um conjunto de características de entre as quais se destacam a “*volatility clustering*”, a persistência, a reversão para a média e, por último, a assimetria da volatilidade. Estas características são seguidamente analisadas.

1.1.1. “*Volatility clustering*”, persistência e reversão para a média

Mandlebrot (1963) e Fama (1965) constataram que grandes variações nos preços dos activos financeiros tendem a ser seguidas por grandes variações (positivas ou negativas), e variações de menor amplitude tendem a ser seguidas por variações mais modestas. Este fenómeno, conhecido na literatura financeira por “*volatility clustering*”, é mais evidente com o aumento da frequência das observações (quando se utilizam

observações diárias em vez de, por exemplo, observações mensais). Este facto empírico implica que a volatilidade dos retornos não é constante no tempo. De acordo com Engle, Ito e Lin (1990), uma possível explicação para o fenómeno de “*volatility clustering*” está relacionada com o facto de que a nova informação que chega ao mercado está correlacionada no tempo.

A implicação imediata deste fenómeno é a de que choques contemporâneos na volatilidade dos retornos terão influência nas volatilidades esperadas para o futuro, o que faz com a mesma se torne bastante persistente e dependente da volatilidade passada¹.

Contudo, a existência de “*clusters*” na volatilidade implica, como já foi referido, que períodos de maior volatilidade sejam seguidos de períodos de maior estabilidade e vice-versa. Então também será natural admitir que após um período de forte volatilidade a mesma volte ao seu nível normal de longo prazo, isto é, que a volatilidade a longo prazo reverta para a sua média. Engle e Patton (2001) referem que o comportamento evidenciado pelo preço das opções é consistente com o processo de reversão para a média da volatilidade. Nomeadamente, constata-se que a volatilidade implícita nas opções de maturidade mais longa está mais próxima do nível de longo prazo da volatilidade do activo subjacente do que a implícita nas opções de maturidade mais curta.

1.1.2. Assimetria da volatilidade

É hoje amplamente reconhecido, quer pelo meio académico quer pelo próprio mercado financeiro, que a volatilidade está negativamente relacionada com o retorno dos activos

¹ Braun, Nelson e Sunier (1995), utilizando dados mensais do mercado accionista norte-americano relativos ao período de Julho de 1926 a Dezembro de 1990, reportam, através do uso de modelos da família ARCH, que choques presentes nas taxas de retorno do mercado afectam a volatilidade futura por um período compreendido entre 24 e 52 semanas. A mesma conclusão quanto à persistência da volatilidade é referida por Engle e Patton (2001).

financeiros². Esta evidência empírica resulta do facto de a volatilidade do retorno dos activos financeiros reagir de forma diferente a “boas notícias” ou a “más notícias”. Black (1976) e Christie (1982), citados por Nelson (1991), constataram que a volatilidade do retorno de uma acção tende a aumentar mais em resposta a uma “má notícia” do que a uma “boa notícia”. Deste facto depreende-se que a volatilidade responde de forma assimétrica a choques positivos e negativos nos retornos. Este argumento é válido quer para a volatilidade dos índices dos mercados accionistas quer para a volatilidade das acções individuais³.

Se é um facto que a maior parte dos autores estão de acordo quanto à existência de assimetria na volatilidade dos retornos, o mesmo não é verdade quanto às causas desse mesmo fenómeno, permanecendo esta questão ainda em aberto. Enquanto que um grupo de autores defende que o fenómeno da assimetria na volatilidade é explicado pelo efeito alavancagem financeira (*“leverage effect”*) outros argumentam que a existência de assimetrias na volatilidade é devida a variações no prémio de risco (*“risk premium effect”*⁴).

Black (1976) é talvez a primeira referência na literatura financeira a documentar e a avançar com uma explicação para a propriedade da assimetria na volatilidade do retorno das acções. Segundo este, a volatilidade assimétrica dos retornos é explicada pelo efeito alavancagem financeira, isto é, verificando-se uma queda na cotação de uma acção (retorno negativo), o *Debt-to-Equity Ratio* aumenta, o que torna a acção mais “arriscada” (dado o aumento do risco financeiro), aumentando a volatilidade.

Christie (1982) demonstra que num mundo do tipo Modigliani-Miller a variação relativa na cotação de uma acção e a volatilidade estão inversamente relacionados isto é, a elasticidade da volatilidade em ordem ao valor do capital próprio é negativa. Este mesmo autor documenta ainda que a volatilidade é uma função crescente do nível de endividamento sugerindo que este facto poderá ser a causa para a elasticidade da volatilidade em ordem ao valor do capital próprio ser negativa.

² Alguns autores referem que este fenómeno não é tão evidente no mercado cambial e, no mercado monetário, é um fenómeno que só está presente em alguns segmentos.

³ Ver Cox e Ross (1976) e Koutmos e Saidi (1995).

⁴ Também referido na literatura por *“volatility feedback effect”*.

Schwert (1989), num estudo sobre o mercado accionista norte-americano, conclui que um choque negativo sobre os retornos tem, em média, um efeito sobre a volatilidade 2,5 vezes superior ao provocado por um choque positivo.

Este mesmo autor, apesar de demonstrar que o endividamento afecta a volatilidade positivamente, conclui que, por si só, o efeito alavancagem financeira não é suficiente para explicar a propriedade assimétrica da volatilidade. À mesma conclusão chegaram Koutmos e Saidi (1995) que, num estudo sobre a volatilidade exibida por 30 acções norte-americanas pertencentes ao índice *Dow Jones Industrial*, revelam que as diferenças do grau de assimetria na volatilidade encontradas apenas podem ser explicadas parcialmente pelo grau de endividamento.

Uma vez que boa parte dos estudos sugere que o efeito alavancagem por si só não é suficiente para explicar a assimetria da volatilidade, outro tipo de explicação foi avançada para explicar aquele fenómeno. Segundo alguns autores, Pindyck (1984), French, Schwert e Stambaugh (1987) e Campbell e Hentschel (1992), a natureza assimétrica da volatilidade pode pura e simplesmente reflectir a existência de prémios de risco variáveis no tempo, isto é, se a volatilidade é uma medida adequada do risco, uma antecipação de um aumento na volatilidade faz aumentar a taxa de retorno exigida por um investidor, o que provoca um queda na cotação das acções. Consequentemente, a relação de causalidade é diferente: a hipótese da alavancagem financeira defende que choques nos retornos levam a alterações na volatilidade condicional, enquanto a teoria do prémio de risco variável sustenta que os choques nos retornos são provocados pela volatilidade condicional.

French, Schwert e Stambaugh (1987), usando dados diários relativos ao período de 1928-1984, analisaram a relação inter-temporal entre o retorno esperado e a volatilidade do mercado accionista norte-americano. As principais conclusões deste estudo sugerem que existe uma relação positiva entre o prémio de risco esperado e a volatilidade antecipada pelos investidores. Assim, um aumento não antecipado da volatilidade leva a uma revisão em alta da volatilidade prevista para o futuro, originando um aumento dos prémios de risco esperados o que faz com que as cotações correntes das acções caiam. Segundo aqueles autores, a magnitude da relação negativa entre os retornos contemporâneos e volatilidade é tão elevada que não pode ser explicada única e

exclusivamente pelo efeito alavancagem. Mais concluem que a variação nos prémios de risco será a grande responsável pela assimetria na volatilidade.

Campbell e Hentschel (1992)⁵ argumentam que o efeito *feedback* da volatilidade poderá explicar a existência de assimetrias na volatilidade. De acordo com estes, um choque positivo no retorno de uma acção, motivado por uma “boa notícia”, dá origem a um aumento da volatilidade esperada para o futuro. Esse aumento da volatilidade esperada, por seu turno, aumenta a taxa de retorno exigida pelos investidores levando à queda na cotação da acção. Desta forma, o efeito positivo inicial da “boa notícia” é atenuado. No caso de um choque negativo, motivado por uma “má notícia”, o efeito final sobre os retornos é exponenciado dado o *feedback* da volatilidade.

Beakert e Wu (2000) são os primeiros autores a proporem uma teoria unificada, considerando simultaneamente o efeito alavancagem financeira e o efeito *feedback* da volatilidade, para explicar o fenómeno assimétrico da volatilidade quer ao nível da empresa, quer ao nível do mercado. Na sua análise, estes dois autores assumem como sendo válidos dois pressupostos básicos:

- Primeiro verifica-se a versão condicional do *Capital Asset Pricing Model* (CAPM), isto é, o excesso de retorno esperado da carteira de mercado é determinado pelo “preço” do risco e pela sua variância condicional, enquanto que o excesso de retorno esperado de uma empresa reflecte o “preço” do risco e a covariância condicional entre os retornos da empresa e o do mercado.
- Em segundo lugar assume-se que a volatilidade condicional é persistente.

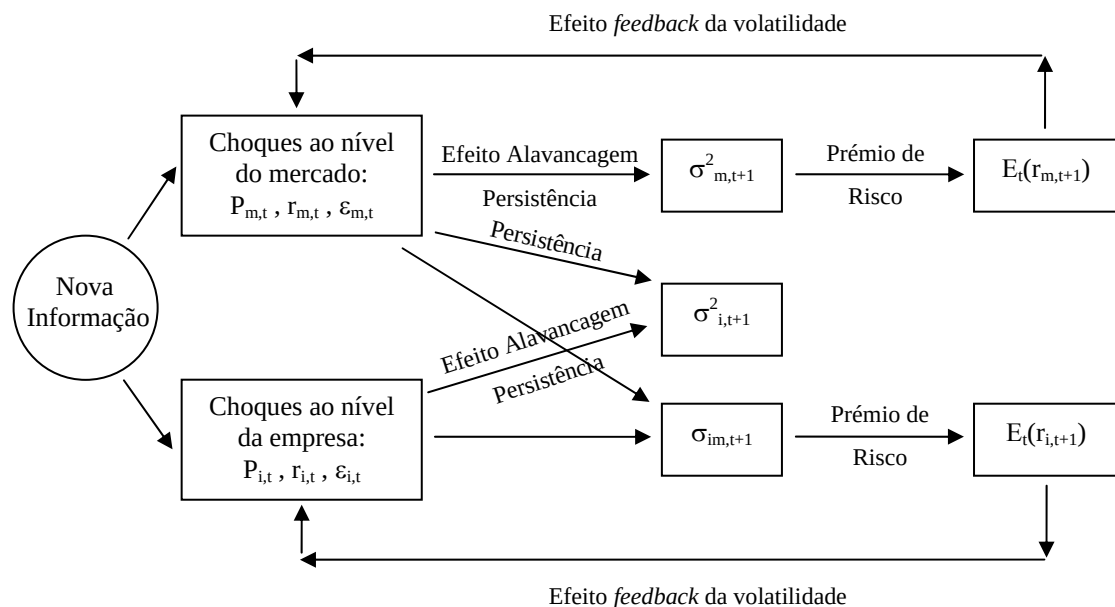
Para melhor se perceber os mecanismos geradores da volatilidade assimétrica dos retornos considere-se o diagrama apresentado na fig. 1.1.

Considere-se, então, um choque informacional ao nível do mercado. As “más notícias” terão dois efeitos. Primeiro, dado que novas informações aumentam a volatilidade do mercado, os investidores revêem a variância condicional pois a volatilidade é

⁵ Para estudar a relação entre a volatilidade e os retornos esperados no mercado accionista dos E.U.A., os autores usaram um modelo GARCH-em-média (ou GARCH-M) assimétrico, tendo concluído que o efeito *feedback* da volatilidade faz-se sentir sobretudo em períodos de grande turbulência, não tendo grande efeito sobre a volatilidade não condicional dos retornos.

persistente. De acordo com o CAPM, este incremento na variância condicional, ao nível do mercado, terá que ser compensado por um maior retorno esperado, dando origem a um decréscimo no valor da carteira de mercado. Este decréscimo só termina quando os retornos esperados são suficientemente altos para compensar o acréscimo de risco. Então, um choque negativo no retorno do mercado dá origem a um aumento substancial da volatilidade condicional. Segundo, uma descida geral nos preços de mercado induz uma maior alavancagem ao nível do mercado e por conseguinte, uma maior volatilidade. Isto significa então que, o efeito alavancagem reforça o efeito *feedback* da volatilidade⁶.

Figura 1.1 – Impacto da Informação ao Nível do Mercado e das Empresas



Legenda: Adaptado de Beakert e Wu (2000). Esta figura mostra o impacto de choques, tanto ao nível do mercado ($\epsilon_{m,t}$) como da empresa ($\epsilon_{i,t}$) nas variâncias condicionais ($\sigma^2_{m,t+1}$, $\sigma^2_{i,t+1}$) e na covariância ($\sigma_{im,t+1}$). São também evidenciados os efeitos de *feedback* nas cotações correntes ($P_{m,t}$, $P_{i,t}$) e nos retornos ($r_{m,t}$, $r_{i,t}$) devidos às variações nos prémios de risco.

⁶ Beakert e Wu (2000) fazem notar que apesar da figura 1.1. sugerir uma sequência de efeitos, os efeitos descritos ocorrem simultaneamente, isto é, o efeito *feedback* da volatilidade e o efeito alavancagem interagem.

Considere-se agora um choque informacional, ao nível do mercado, positivo. Mais uma vez as “boas notícias” têm dois impactos. Um primeiro, igual ao que se verifica no caso das “más notícias” (revisão em alta da volatilidade condicional e consequente queda nos preços). O efeito *feedback* enfraquece assim o movimento inicial de subida dos preços. Por outro lado, o retorno positivo resultante das “boas notícias” diminui a alavancagem e a volatilidade condicional ao nível do mercado. Assim sendo, o impacto final do choque informacional positivo sobre a volatilidade não é tão claro.

Como mostra a figura 1.1 o impacto inicial de um choque informacional ao nível da empresa, é basicamente o mesmo do verificado ao nível do mercado: “más notícias” e “boas notícias” geram efeitos alavancagem opostos que reforçam (enfraquecem) a volatilidade implicada pelas “más (boas) notícias”. A diferença está, essencialmente, ao nível do efeito *feedback* da volatilidade. Uma condição necessária para que, ao nível das empresas, seja observado o efeito *feedback* da volatilidade é que a covariância entre os retornos da empresa e o mercado aumente em resposta a choques do mercado. Se o choque for completamente idiossincrático, a covariância entre o retorno da empresa e o retorno do mercado não sofre alterações não obrigando a uma revisão do prémio de risco exigido. Nesta situação, um choque idiossincrático gera assimetria na volatilidade, exclusivamente, via efeito alavancagem.

O efeito *feedback* da volatilidade verifica-se apenas quando um choque, ao nível do mercado, aumenta a covariância entre o retorno da empresa e o de mercado. O comportamento da covariância descrito é compatível com o modelo CAPM com betas constantes (positivos).

É natural admitir que o impacto provocado por um choque ao nível do mercado na covariância condicional seja diferente de empresa para empresa. Nas empresas com maior risco sistemático o aumento da covariância condicional com o mercado, resultante de um choque informacional ao nível do mercado, será mais elevado do que o verificado nas empresas com menor risco sistemático. Os investidores associados às empresas com risco de mercado elevado exigem um retorno mais elevado o que, por sua vez, impulsiona o efeito *feedback* na volatilidade, o qual será menos pronunciado no caso das empresas menos expostas a variações no mercado.

1.2. Formas Alternativas de Especificação da Variância Condicional

Com o objectivo de descrever a incerteza associada à evolução da taxa de inflação no Reino Unido, Engle (1982) introduziu aquele que ficaria conhecido como o modelo ARCH (*Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*). Desde a sua introdução, o modelo ARCH e sua família têm sido intensivamente utilizados, com sucesso, para explicar a volatilidade condicional de vários tipos de séries financeiras. Esse sucesso pode ser, essencialmente, explicado por três tipos de factores: os modelos ARCH são essencialmente modelos ARMA (sendo assim, todas as ferramentas de análise disponíveis em séries temporais lineares poderão aqui ser igualmente implementadas), são relativamente fáceis de estimar e, por último, modelos relativamente parcimoniosos providenciam uma boa descrição da dinâmica associada à volatilidade dos activos financeiros.

De acordo com o modelo ARCH, originalmente proposto por Engle, a variância condicional da taxa de retorno de um activo financeiro varia ao longo do tempo sendo função linear dos quadrados dos erros (choques não antecipados nas taxas de retorno) do passado.

Considere-se que $r_t | \mathfrak{T}_{t-1}$ representa a taxa de retorno de um activo financeiro na data t condicionada pela informação disponível em $t-1$ ($\mathfrak{T}_{t-1}$), com média condicional μ^7 , e variância condicional h_t , ou seja:

$$r_t = \mu + \varepsilon_t \quad (1.1)$$

Engle assume que ε_t pode ser decomposto da seguinte forma:

$$\varepsilon_t = z_t h_t^{1/2} \quad (1.2)$$

em que $\{z_t\}$ é uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.) com média nula e variância unitária. Admitindo que $z_t \sim N(0,1)$ ⁸,

⁷ Na medida em que estamos essencialmente preocupados com a modelização da variância condicional assumir-se-á, sem perda da generalidade, que a média de r_t é constante e igual a μ .

⁸ Apesar de na literatura se considerarem outro tipo de distribuições como a *Student-t*, a *General Error Distribution (GED)* ou a *Skewed-Student*, no presente trabalho assumir-se-á que z_t segue uma distribuição normal. Como tal todos os resultados serão derivados assumindo esta hipótese.

então pode-se facilmente concluir que $\varepsilon_t | \mathfrak{T}_{t-1} \sim N(0, h_t)$ e $r_t | \mathfrak{T}_{t-1} \sim N(\mu, h_t)$. A seguinte variância condicional define um modelo ARCH de ordem p:

$$h_t = \omega + \sum_{j=1}^p \alpha_j \varepsilon_{t-j}^2 \quad (1.3)$$

onde $\omega > 0, \alpha_j \geq 0, j = 1, \dots, p$. As restrições impostas em (1.3) são condições necessárias e suficientes para garantir que a variância condicional h_t seja positiva. Se adicionalmente considerarmos que $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_p < 1$, então fica garantido que o modelo ARCH(p) é estacionário em covariância⁹, sendo a variância não condicional dada por:

$$\sigma^2 = \frac{\omega}{1 - \sum_{j=1}^p \alpha_j} \quad (1.4)$$

Em maior parte das aplicações empíricas o modelo ARCH tem sido, no entanto, preterido pelo modelo GARCH (*Generalized ARCH*) proposto por Bollerslev (1986). No modelo GARCH(p,q) a variância condicional é também função linear dos seus próprios valores desfasados e tem a seguinte forma:

$$h_t = \omega + \sum_{j=1}^p \alpha_j \varepsilon_{t-j}^2 + \sum_{l=1}^q \beta_l h_{t-l} \quad (1.5)$$

Em algumas aplicações de modelos ARCH(p) constata-se que a ordem p é elevada. Este facto poderá levantar alguns problemas como sejam: modelos não parcimoniosos e a obtenção de alguns parâmetros $\alpha_j (j = 1, \dots, p)$ negativos (e, eventualmente também a

⁹ No presente trabalho apenas se considerará o conceito de estacionaridade em covariância (ou de 2ª ordem ou fraca). De acordo com Hamilton (1994), pág. 45, um processo Y_t diz-se estacionário em covariância, ou fracamente estacionário, se e só se:

$$E(Y_t) = \mu, \quad \forall_t$$

$$Var(Y_t) = \sigma^2 < \infty, \quad \forall_t$$

$$Cov(Y_t, Y_{t-j}) = \gamma_j, \quad \forall_{t,j \neq 0}$$

ou seja, Y_t é estacionário de 2ª ordem se a média e a variância não condicional existem e não dependem de t e a covariância só depende do grau de desfasamento j. Assim, não se considerará a condição mais exigente de estacionaridade estrita $P(Y_{t_1}, Y_{t_2}, \dots, Y_{t_n}) = P(Y_{t_1+j}, Y_{t_2+j}, \dots, Y_{t_n+j})$ dada a evidente dificuldade na sua verificação, embora se prove que ela fica garantida se provarmos a estacionaridade de 2ª ordem e admitirmos uma distribuição normal para a variável Y_t .

variância condicional estimada). O modelo GARCH, ao contrário, dos modelos ARCH, permite descrever processos de memória longa através de uma estrutura suficientemente concisa, pois facilmente se demonstra que, por substituição recursiva do termo h_{t-l} ($l=1, \dots, q$), um GARCH corresponde a um ARCH de ordem infinita. De entre os modelos GARCH aquele que mais intensivamente tem sido usado para explicar a variância condicional das taxas de retorno dos activos financeiros é o GARCH(1,1):

$$h_t = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta h_{t-1} \quad (1.6)$$

Neste modelo a condição suficiente para que a variância condicional seja positiva com probabilidade 1 é $\omega > 0, \alpha \geq 0$ e $\beta \geq 0$ ¹⁰. Por forma a garantir a estacionaridade do modelo GARCH(1,1) será necessário também que $\alpha + \beta < 1$, sendo, neste caso, a variância não condicional dada por:

$$\sigma^2 = \frac{\omega}{1 - \alpha - \beta} \quad (1.7)$$

Desde a sua introdução, o modelo GARCH foi estendido em várias direcções. Por exemplo, a especificação original do modelo GARCH assume que a resposta a um choque não antecipado na taxa de retorno depende apenas da magnitude do mesmo e não do seu sinal. Ora, como se viu no ponto 1.1.2. deste trabalho, em muitas situações a volatilidade de um activo financeiro exhibe um comportamento assimétrico reagindo de forma mais acentuada em situações em que o referido choque é negativo. Por esse motivo surgiram na literatura uma gama de modelos que, não são mais do que extensões do modelo GARCH original. Exemplos de alguns desses modelos são o modelo GJR-GARCH de Glosten, Jagannathan e Runkle (1993), o modelo AGARCH (*Asymmetric GARCH*) de Engle (1990), o modelo NAGARCH (*Nonlinear Asymmetric GARCH*) de Engle e Ng (1993) e o modelo QGARCH (*Quadratic GARCH*) de Sentana (1995).

No modelo GJR-GARCH(1,1,1) a variância condicional é definida da seguinte forma:

$$h_t = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \gamma I(\varepsilon_{t-1} < 0) \varepsilon_{t-1}^2 + \beta h_{t-1} \quad (1.8)$$

em que $I(\varepsilon_{t-1} < 0)$ é uma variável dummy que toma o valor um se $\varepsilon_{t-1} < 0$ e zero em caso contrário. Neste modelo verifica-se que os impactos sobre a variância condicional

¹⁰ Nelson e Cao (1992) providenciam as condições suficientes e necessárias para a positividade em modelos GARCH de ordem mais elevada.

resultantes de choques não antecipados na taxa de retorno serão diferenciados dependendo do sinal. Se $\gamma \neq 0$ então a variância condicional exibirá um comportamento assimétrico.

No modelo GJR-GARCH(1,1,1) a variância condicional será positiva se $\omega > 0, \alpha \geq 0, \alpha + \gamma \geq 0$ e $\beta \geq 0$. Se adicionalmente considerarmos que $\alpha + 0,5\gamma + \beta < 1$ então fica garantido que o modelo GJR-GARCH(1,1,1) é estacionário em covariância, sendo a variância não condicional dada por:

$$\sigma^2 = \frac{\omega}{1 - \alpha - 0,5\gamma - \beta} \quad (1.9)$$

Os modelos AGARCH, NAGARCH e QGARCH sendo modelos assimétricos têm a particularidade de o centro de simetria ocorrer para um valor diferente de zero¹¹.

No modelo AGARCH(1,1) a variância condicional é especificada da seguinte forma:

$$h_t = \omega + \alpha(\varepsilon_{t-1} + \gamma)^2 + \beta h_{t-1} \quad (1.10)$$

com $\omega > 0, \alpha \geq 0, \beta \geq 0$ e $\alpha + \beta < 1$, de forma a garantir a positividade e a estacionaridade. De acordo com este tipo de especificação se $\gamma < 0$ então a variância condicional reagirá de forma mais acentuada quando os choques não antecipados sobre a taxa de retorno forem negativos.

No modelo NAGARCH(1,1) a evolução da variância condicional é descrita pela equação que se segue:

$$h_t = \omega + \alpha(\varepsilon_{t-1} + \gamma\sqrt{h_{t-1}})^2 + \beta h_{t-1} \quad (1.11)$$

sendo necessário impor as restrições de $\omega > 0, \alpha \geq 0, \beta \geq 0$ e $\alpha(1 + \gamma)^2 + \beta < 1$ para garantir a positividade e estacionaridade, respectivamente. De forma idêntica ao modelo AGARCH, a variância condicional responderá de forma assimétrica a choques não antecipados na taxa de retorno se $\gamma \neq 0$.

A variância condicional no modelo QARCH (apresentado sob a forma ARCH) de Sentana é definida como se segue:

$$h_t = \omega + \alpha'\varepsilon_{t-1} + \varepsilon'_{t-1}A\varepsilon_{t-1} \quad (1.12)$$

¹¹ Este aspecto será analisado com maior detalhe no ponto 1.3. do presente trabalho.

onde $\varepsilon_t = (\varepsilon_t, \dots, \varepsilon_{t-p+1})'$ é um vector de dimensão $p \times 1$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)'$ é um vector de parâmetros com dimensão $p \times 1$ e A é uma matriz de parâmetros de dimensão $p \times p$. Repare-se que em (1.12) não apenas os quadrados de ε_{t-i} , mas também os produtos cruzados $\varepsilon_{t-i}\varepsilon_{t-j}$, $i \neq j$, influenciam a variância condicional. Quando $\alpha \neq 0$, o modelo QARCH gera respostas assimétricas em h_t . As restrições sobre os parâmetros de forma a garantir a positividade de h_t , tornam-se mais claras se reescrevermos (1.12) com se segue:

$$h_t = \begin{bmatrix} \varepsilon'_{t-1} & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} A & \alpha/2 \\ \alpha'/2 & \omega \end{bmatrix}}_B \begin{bmatrix} \varepsilon_{t-1} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

A variância condicional h_t é positiva se só se a matriz B , e portanto A , for definida positiva. Num modelo QGARCH(1,1):

$$h_t = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \gamma \varepsilon_{t-1} + \beta h_{t-1} \quad (1.14)$$

bastará que $\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \gamma^2 < 4\alpha\omega$ e $\alpha + \beta < 1$ para que h_t seja positiva e esteja garantida a estacionaridade do processo.

Alguns autores ao longo do tempo têm sugerido a modelização do desvio-padrão condicional em vez da variância. Exemplos dessas iniciativas são o modelo AVGARCH (*Absolute Value GARCH*) de Taylor (1986) e de Schwert (1989) e a versão assimétrica, designado por modelo ZARCH¹², de Zakoian (1994).

De acordo com o modelo AVGARCH, o desvio padrão condicionado é função dos valores absolutos desfasados de ε_t e dos seus próprios valores desfasados. Assim, num modelo AVGARCH(1,1), o desvio-padrão condicional é modelizado da seguinte forma:

$$h_t^{1/2} = \omega + \alpha |\varepsilon_{t-1}| + \beta h_{t-1}^{1/2} \quad (1.15)$$

Quando se modeliza o desvio-padrão condicional, por construção, a variância será sempre positiva. Contudo, será desejável, quer do ponto de vista estatístico, quer do ponto de vista financeiro, que mesmo o desvio-padrão seja positivo. No modelo AVGARCH(1,1) para que isso aconteça será necessário que $\omega > 0, \alpha \geq 0, \beta \geq 0$.

¹² Referenciado na literatura muitas vezes também por modelo TARCH (*Threshold ARCH*).

Adicionalmente para que o modelo AVGARCH(1,1) seja estacionário será necessário que $\alpha^2 + 2\alpha\beta\sqrt{2/\pi} + \beta^2 < 1$.

No modelo ZARCH(1,1,1), o desvio-padrão condicional é parametrizado por forma a admitir choques assimétricos:

$$h_t^{1/2} = \omega + \alpha |\varepsilon_{t-1}| + \gamma I(\varepsilon_{t-1} < 0) |\varepsilon_{t-1}| + \beta h_{t-1}^{1/2} \quad (1.16)$$

com $\omega > 0, \alpha \geq 0, \alpha + \gamma \geq 0, \beta \geq 0$ e $\alpha^2 + \alpha\gamma + 0,5\gamma^2 + (2\alpha + \gamma)\beta\sqrt{2/\pi} + \beta^2 < 1$ para garantir, respectivamente, a positividade do desvio-padrão condicional e a estacionaridade. Repare-se que em (1.16) se $\gamma \neq 0$ então o impacto imediato sobre o desvio-padrão condicional, resultante de uma variação unitária em ε_{t-1} , será α no caso em que o choque é positivo, e $\alpha + \gamma$, no caso em que o choque é negativo.

Apesar de alguns dos modelos já referenciados contemplarem a possibilidade da volatilidade exibir um comportamento assimétrico, cabe aqui fazer uma referência especial ao modelo EGARCH (*Exponential GARCH*), de Nelson (1991), que foi pioneiro no tratamento da assimetria associada à volatilidade. De acordo com o modelo EGARCH(1,1,1), o logaritmo da variância condicional é definido da seguinte forma:

$$\ln h_t = \omega + \alpha [z_{t-1} - E(|z_{t-1}|)] + \gamma z_{t-1} + \beta \ln h_{t-1} \quad (1.17)$$

em que $z_t = \varepsilon_t / \sqrt{h_t}$, ou seja tal como em (1.2), e $E(|z_t|) = \sqrt{2/\pi}$ se $z_t \sim N(0,1)$. Refira-se que para que o processo ε_t seja estacionário basta apenas garantir que $\beta < 1$.

De acordo com Nelson, três motivações justificam este tipo de modelização, quando comparado com o modelo GARCH:

¹³ Note-se que a especificação apresentada originalmente por Zakoian (1994) é ligeiramente diferente da apresentada. De acordo com a especificação original, o desvio-padrão condicional, num modelo ZARCH(1,1,1) é representado por:

$$h_t^{1/2} = \omega + \alpha^+ \varepsilon_{t-1}^+ - \alpha^- \varepsilon_{t-1}^- + \beta h_{t-1}^{1/2}$$

Em que $\varepsilon_t^+ = \max(\varepsilon_t, 0)$ e $\varepsilon_t^- = \min(\varepsilon_t, 0)$. Contudo, se considerarmos que $\varepsilon_t^+ = [1 - I(\varepsilon_t < 0)]|\varepsilon_t|$ e $\varepsilon_t^- = -I(\varepsilon_t < 0)|\varepsilon_t|$, obtém-se:

$$\begin{aligned} h_t^{1/2} &= \omega + \alpha^+ [1 - I(\varepsilon_{t-1} < 0)]|\varepsilon_{t-1}| - \alpha^- [-I(\varepsilon_{t-1} < 0)]|\varepsilon_{t-1}| + \beta h_{t-1}^{1/2} \\ h_t^{1/2} &= \omega + \underbrace{\alpha^+}_{\alpha} |\varepsilon_{t-1}| + \underbrace{(\alpha^- - \alpha^+)}_{\gamma} I(\varepsilon_{t-1} < 0) |\varepsilon_{t-1}| + \beta h_{t-1}^{1/2} \end{aligned}$$

que corresponde à especificação apresentada em (1.16).

- (i) O modelo GARCH não explica o comportamento assimétrico exibido pela volatilidade das taxas de retorno dos activos financeiros;
- (ii) No modelo EGARCH, ao contrário do modelo GARCH, não é necessário impor qualquer restrição aos parâmetros para que a variância condicional seja positiva;
- (iii) Num modelo GARCH é difícil avaliar até que ponto um choque não antecipado nas taxas de retorno é ou não persistente sobre a volatilidade. No modelo EGARCH a persistência da variância condicional é apenas controlada pelo parâmetro β .

Se a volatilidade exibir um comportamento assimétrico negativo então será de esperar que $\gamma < 0$.

A proliferação de modelos ARCH ao longo dos tempos originou que alguns autores propusessem modelos bastante gerais para explicar a evolução da volatilidade. Um exemplo desse tipo de modelos é o modelo APARCH (*Asymmetric Power ARCH*) de Ding, Granger e Engle (1993)¹⁴. De acordo com um modelo APARCH(1,1,1) a variância condicional é obtida através da seguinte especificação:

$$h_t^{\lambda/2} = \omega + \alpha \left(|\varepsilon_{t-1}| - \gamma \varepsilon_{t-1} \right)^\lambda + \beta h_{t-1}^{\lambda/2} \quad (1.18)$$

em que $\omega > 0, \alpha \geq 0, \beta \geq 0, \lambda \geq 0$ e $|\gamma| < 1$.

Os autores demonstraram que se admitirmos uma distribuição normal para as taxas de retorno, então a condição para a existência de $E(h_t^{\lambda/2})$ e $E(|\varepsilon_t|^\lambda)$ é:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \alpha \left[(1+\gamma)^\lambda + (1-\gamma)^\lambda \right] 2^{\frac{\lambda-1}{2}} \Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right) + \beta < 1$$

e que se $\lambda \geq 2$, então a condição é suficiente para que ε_t seja estacionária em covariância.

O modelo APARCH pode assim ser visto como uma generalização dos modelos GARCH prévios, incluindo sete outros modelos como casos especiais. Por exemplo, se $\lambda = 2$ e $\gamma = 0$ então teremos um GARCH(1,1). Se $\lambda = 2$ então teremos um GJR-

¹⁴ Outros exemplos de modelos gerais podem ser encontrados em Hentschel (1995), Duan (1997) e He e Terasvirta (1999).

GARCH(1,1,1). Se $\lambda = 1$, então a dinâmica do modelo será idêntica à do modelo ZARCH. Se, para além de $\lambda = 1$, considerarmos que $\gamma = 0$ obtemos o modelo AVGARCH. Se $\gamma = 0$, então obtêm-se o modelo NARCH (Nonlinear GARCH), de Higgins e Bera (1992), segundo o qual, a variância condicional é obtida através de:

$$h_t^{\lambda/2} = \omega + \alpha |\varepsilon_{t-1}|^\lambda + \beta h_{t-1}^{\lambda/2} \quad (1.19)$$

Refira-se que, sendo os modelos referidos casos especiais do modelo APARCH, testes baseados na razão de verosimilhanças poderão ser facilmente conduzidos para testar a hipótese nula de um modelo específico contra a alternativa do modelo APARCH.

1.3. A News Impact Curve da Variância Condicional

Com uma tão vasta variedade de modelos ARCH, cada um com uma diferente especificação para a dinâmica da variância condicional, pode tornar-se difícil determinar o efeito preciso de um choque na taxa de retorno sobre a volatilidade, medida pela variância condicional. A *news impact curve* (NIC), referida por Engle e Ng (1993), assumindo que a variância condicional presente é igual à variância não condicional, mede o efeito de um choque corrente na taxa de retorno sobre a variância condicional do período subsequente. Formalmente, a NIC pode ser definida como a diferença entre a variância condicional quando ocorre um choque nas taxas de retorno (z_t) e a variância na ausência de qualquer choque. Para assegurar que a NIC não depende do nível da variância, a variância de todos os períodos prévios assume-se como sendo igual ao seu nível não condicionado. Assim, para qualquer modelo da família ARCH, pode-se determinar a NIC através das duas seguintes expressões:

$$n(z_t) = h_{t+1}(z_t | h_t = \sigma^2) \quad (1.20)$$

$$NIC(z_t) = n(z_t) - n(0) \quad (1.21)$$

¹⁵ No modelo originalmente proposto por Higgins e Bera (1990) o termo $h_{t-1}^{\lambda/2}$ não existe, sendo considerada apenas uma estrutura do tipo ARCH(p).

A NIC para os modelos ARCH e GARCH são simplesmente determinadas pelos termos que envolvem ε_t^2 . Assim, para um modelo GARCH(1,1) temos:

$$n(z_t) = \omega + \alpha\sigma^2 z_t^2 + \beta\sigma^2 \quad (1.22)$$

$$NIC(z_t) = \alpha\sigma^2 z_t^2 \quad (1.23)$$

Para os modelos da família ARCH que não são lineares em ε_t^2 , a NIC é, regra geral, determinada por uma fórmula mais complicada. Por exemplo, num modelo ZARCH(1,1,1) teremos:

$$\begin{aligned} n(z_t) = & \omega^2 + [\alpha + \gamma I(z_t < 0)]^2 \sigma^2 z_t^2 + \beta^2 \sigma^2 + \\ & 2\omega\sigma[\alpha + \gamma I(z_t < 0)]|z_t| + 2\omega\beta\sigma + 2\beta\sigma^2[\alpha + \gamma I(z_t < 0)]|z_t| \end{aligned} \quad (1.24)$$

$$NIC(z_t) = \sigma^2 [\alpha + \gamma I(z_t < 0)]^2 z_t^2 + 2(\omega + \beta\sigma)\sigma[\alpha + \gamma I(z_t < 0)]|z_t| \quad (1.25)$$

Desenvolvendo o mesmo tipo de raciocínio para qualquer outro tipo de modelo da família ARCH facilmente se obtém a respectiva NIC.

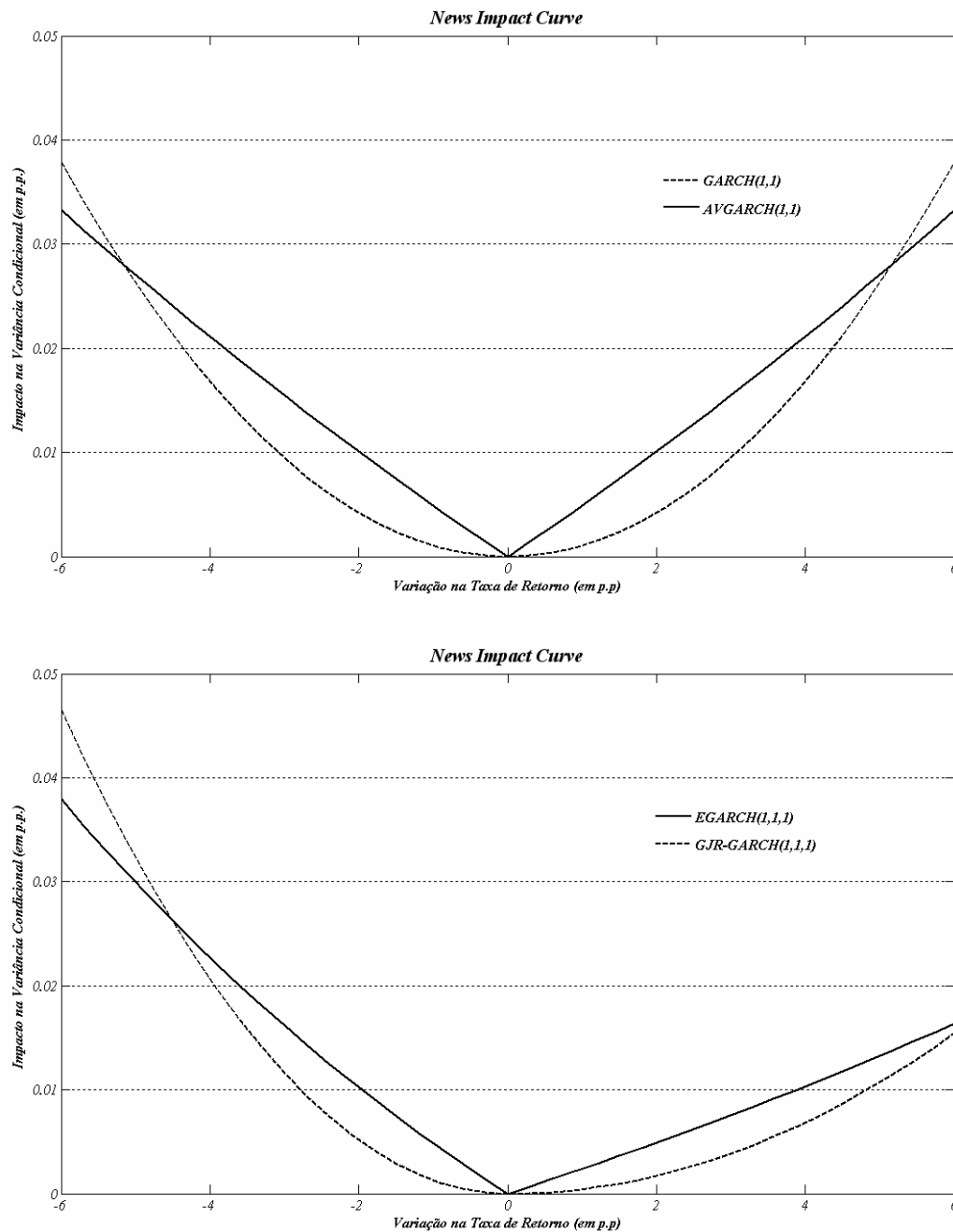
Este instrumento assume particular interesse já que, permite, através de representação gráfica, identificar as principais diferenças subjacentes a cada modelo da família ARCH. A título exemplificativo, apresentam-se na fig. 1.2. as NIC do índice PSI20 para seis dos modelos referenciados no ponto 1.2. deste trabalho. Como se pode verificar nos GARCH e AVGARCH, a variância condicional responde de forma simétrica a “boas” e “más” notícias. Nos modelos EGARCH, GJR-GARCH, AGARCH e NAGARCH a resposta é assimétrica, isto é, um choque negativo na taxa de retorno tende a ter um maior impacto sobre a variância condicional face ao caso em que esse mesmo choque é positivo. A diferença entre os modelos EGARCH e GJR-GARCH e os modelos AGARCH e NAGARCH reside no facto de que, enquanto nos primeiros o centro de simetria verifica-se para um choque nulo, nos segundos este aparece ligeiramente deslocado do valor zero. Este facto pode ser facilmente constatado considerando a NIC do modelo AGARCH(1,1):

$$n(z_t) = \omega + \alpha(z_t\sigma + \gamma)^2 + \beta\sigma^2 = \omega + \alpha z_t^2 \sigma^2 + 2\alpha\gamma\sigma z_t + \alpha\gamma^2 + \beta\sigma^2 \quad (1.26)$$

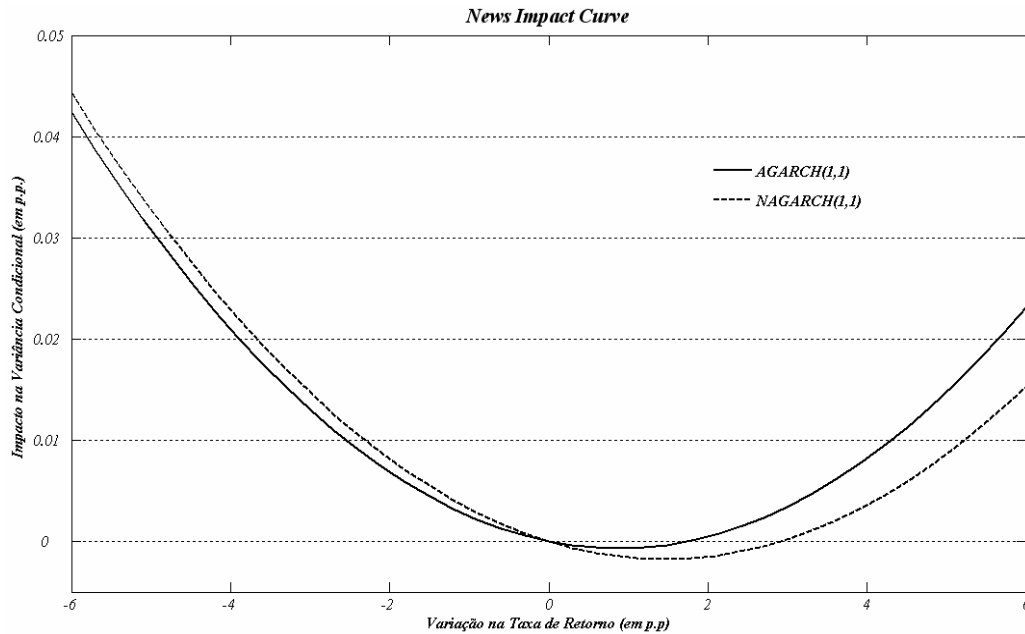
$$NIC(z_t) = \alpha z_t^2 \sigma^2 + 2\alpha\gamma\sigma z_t \quad (1.27)$$

O centro de simetria é obtido considerando $\partial NIC(z_t) / \partial z_t = 0$. No caso do modelo AGARCH(1,1) isto acontece para $z_t = -\gamma / \sigma \neq 0$ ¹⁶.

Figura 1.2. – News Impact Curve para a volatilidade semanal do Índice PSI 20



¹⁶ Resultados similares se obtêm para os modelos NAGARCH, QGARCH. Já nos modelos GARCH, AVGARCH, NARCH, EGARCH, ZARCH, GJR-GARCH e APARCH, o centro de simetria ocorre para $z_t = 0$.



Uma última nota para referir que, apesar da derivação das expressões das NIC's para os diferentes modelos ser fastidiosa, elas podem ser facilmente calculadas. Em qualquer modelo da família ARCH basta simplesmente simular $n(0)$ e $n(z_t)$ para, por exemplo, $z_t \in (-5, 5)$ e a diferença é a NIC.

1.4. Estimação de um Modelo da Família ARCH

Depois de nos dois pontos anteriores se terem apresentado e discutido as diferentes especificações para a variância condicional, da família ARCH, aborda-se de seguida a questão da estimação.

Considere-se que se dispõem de uma amostra aleatória de N observações e que o vector das taxas de retorno de um activo financeiro $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_N)'$ é especificado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} r_t &= \mu + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t &= z_t h_t^{1/2} \\ z_t &\stackrel{iid}{\sim} N(0, 1) \end{aligned} \tag{1.28}$$

Na medida em que se assume que os erros z_t são i.i.d. e seguem uma distribuição normal, o método da máxima verosimilhança é uma escolha natural para estimar o conjunto de parâmetros desconhecidos, θ , que contém quer o parâmetro da média, quer a variância. A função de verosimilhança para as N variáveis independentes é dada por:

$$L(\theta) = \prod_{t=1}^N (2\pi h_t)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{(r_t - \mu)^2}{2h_t}\right) \quad (1.29)$$

Simplificando, obtém-se o logaritmo (neperiano) da função de verosimilhança:

$$l(\theta) = -\frac{N}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^N \log(h_t) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^N \frac{\varepsilon_t^2}{2h_t} \quad (1.30)$$

Para se obterem os estimadores dos parâmetros da variância condicional maximiza-se a função (1.30), resolvendo as condições de primeira ordem:

$$\frac{\partial l(\theta)}{\partial h_t} = \sum_{t=1}^N -\frac{1}{2h_t} + \frac{\varepsilon_t^2}{2h_t^2} = 0 \quad (1.31)$$

A expressão (1.31) poderá ser rearranjada de forma a providenciar alguma informação interessante na estimação dos modelos da família ARCH:

$$\frac{\partial l(\theta)}{\partial h_t} = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^N \frac{1}{h_t} \left(\frac{\varepsilon_t^2}{h_t} - 1 \right) \quad (1.32)$$

Na expressão (1.32) demonstra-se que os parâmetros da variância condicional são escolhidos para que $\left(\frac{\varepsilon_t^2}{h_t} - 1 \right)$ seja tanto quanto possível próximo de zero. Este termo pode ser visto como um “*erro generalizado*” numa abordagem pelo método dos momentos generalizados. As condições de primeira ordem dadas por (1.31) não estão no entanto completas já que os parâmetros da variância condicional são dados por θ e não por h_t e

$$\frac{\partial l(\theta)}{\partial \theta_i} = \frac{\partial l(\theta)}{\partial h_t} \frac{\partial h_t}{\partial \theta_i} \quad (1.33)$$

De acordo com Fiorentini, Calzolari e Panattoni (1996)¹⁷, num modelo GARCH(1,1) as derivadas de h_t em ordem a θ_i são dadas pelo seguinte conjunto de equações autoregressivas:

$$\begin{aligned}\frac{\partial h_t}{\partial \omega} &= 1 + \beta \frac{\partial h_{t-1}}{\partial \omega} \\ \frac{\partial h_t}{\partial \alpha} &= \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \frac{\partial h_{t-1}}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial h_t}{\partial \beta} &= h_t + \beta \frac{\partial h_{t-1}}{\partial \beta}\end{aligned}\tag{1.34}$$

As equações em (1.34) providenciam assim as fórmulas necessárias para implementar os *scores* do logaritmo da função de verosimilhança na estimação de um modelo GARCH(1,1). Refira-se que, apesar da utilização das derivadas analíticas facilitar o processo de estimação, a maior parte dos *softwares* econométricos usam derivação numérica¹⁸.

Sob certas condições, admitindo a correcta especificação do modelo, os estimadores de máxima verosimilhança, são assintoticamente consistentes e eficientes¹⁹ e têm distribuição normal assintótica:

$$\sqrt{N}(\hat{\theta} - \theta_0) \overset{a}{\sim} N(0, A^{-1})\tag{1.35}$$

onde

$$A = -E \left[\frac{\partial^2 l(\theta_0)}{\partial \theta \partial \theta'} \right]\tag{1.36}$$

¹⁷ Estes autores providenciaram as expressões das derivadas analíticas necessárias à estimação de um modelo GARCH pelo método da máxima verosimilhança. Laurent (2004) desenvolveu um trabalho similar para o modelo APARCH.

¹⁸ As derivadas numéricas fazem uso da definição de derivada, $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$, para qualquer h infinitamente pequeno.

¹⁹ Esta propriedade mantém-se inalterada mesmo que a média e a variância sejam estimados separadamente, já que, como demonstrou Engle (1982), os parâmetros da média e da variância são assintoticamente independentes, resultando numa matriz de informação diagonal por blocos.

é o valor esperado negativo da matriz hessiana, também conhecida pela matriz de informação de Fisher. Para estimar a matriz A , utiliza-se a contraparte amostral, avaliada para $\hat{\theta}$, isto é:

$$\hat{A} = -\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \frac{\partial^2 l_t(\hat{\theta})}{\partial \hat{\theta} \partial \hat{\theta}'} \quad (1.37)$$

De acordo com o princípio da igualdade da matriz de informação $A = B$ em que:

$$B = E \left[\frac{\partial l(\theta_0)}{\partial \theta} \frac{\partial l(\theta_0)}{\partial \theta'} \right] \quad (1.38)$$

é a matriz de variâncias e covariâncias dos *scores*. Mais uma vez, o estimador de B é obtido através do análogo amostral, usando os *scores* avaliados para os parâmetros estimados:

$$\hat{B} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \frac{\partial l_t(\hat{\theta})}{\partial \hat{\theta}} \frac{\partial l_t(\hat{\theta})}{\partial \hat{\theta}'} \quad (1.39)$$

Note-se, no entanto, que a igualdade da matriz de informação só se verificará se função de verosimilhança estiver correctamente especificada. Esta questão é particularmente relevante já que, em grande parte das aplicações dos modelos da família ARCH, a distribuição condicionada da taxa de retorno de um activo financeiro não é de facto normal, exibindo excesso de kurtosis e mesmo assimetria. Neste caso a solução passa por estimar o modelo pelo método da quase máxima verosimilhança²⁰. Este método de estimação consiste na maximização da função de verosimilhança assumindo a distribuição normal mesmo que tal não seja real. No contexto dos modelos ARCH, Bollerslev e Wooldridge (1992) demonstram que este procedimento permite obter, sob certas condições gerais, estimadores consistentes, embora menos eficientes, dos parâmetros do modelo e da variância condicional de um modelo da família ARCH, mesmo que a verdadeira distribuição de ε_t não seja normal, isto é, mesmo que a função

²⁰ Alternativas ao método da quase máxima verosimilhança, num contexto de não normalidade, poderão passar pela especificação da função de verosimilhança considerando distribuições como a distribuição *t-Student*, a GED (*General Error Distribution*) ou a *Skewed-Student* de forma a reflectir o excesso de kurtosis e a existência de assimetria. Engle e Gonzáles-Rivera (1991) propuseram um método de estimação não paramétrico que, no entanto, tem sido pouco utilizado.

de verosimilhança esteja incorrectamente especificada. Este procedimento obriga apenas a realizar um ajustamento na matriz de variâncias e covariâncias do estimador de quase máxima verosimilhança:

$$\text{Var}(\hat{\theta}_{QMV}) = \frac{1}{N} A^{-1} B A^{-1} \quad (1.40)$$

Bollerslev e Wooldridge (1992) demonstraram ainda que:

$$\sqrt{N}(\hat{\theta}_{QMV} - \theta_0) \overset{a}{\sim} N(0, A^{-1} B A^{-1}) \quad (1.41)$$

Deste resultado deduz-se que os testes de Wald habituais poderão ser aqui utilizados para ensaio de hipóteses de interesse, como por exemplo, testar se um termo assimétrico da variância condicional é estatisticamente significativo.

Se a verdadeira distribuição de ε_t é normal, então pela igualdade da matriz de informação as matrizes A e B coincidem e logo $\text{Var}(\hat{\theta}_{QMV}) = \text{Var}(\hat{\theta}_{MV})$, não existindo assim qualquer perda de eficiência.

1.5. Diagnóstico e avaliação de um modelo da família ARCH

Uma vez estimado um ou vários modelos da família ARCH, torna-se importante verificar a sua adequabilidade na descrição do processo gerador da variância condicional. As metodologias disponíveis na literatura para avaliação e diagnóstico de modelos de heteroscedasticidade condicionada poderão ser agrupadas em três grandes grupos: testes de *portmanteau* do tipo Box-Pierce-Ljung, testes baseados no multiplicador de *Lagrange* (testes LM) e por último testes de diagnóstico baseados nos resíduos de estimação (*residual-based diagnostics*).

Os testes de Box-Pierce-Ljung são talvez a metodologia de avaliação e diagnóstico que mais tem sido utilizada na área dos modelos ARCH. De acordo com esta metodologia se a variância condicional da taxa de retorno de um activo financeiro estiver correctamente especificada então o quadrado dos resíduos de estimação estandardizados pelo desvio-padrão condicional ($\hat{z}_t^2$) não exibirá autocorrelação. Li e Mak (1994) demonstraram, no entanto, que a estatística de Box-Pierce-Ljung não converge assintoticamente para

uma distribuição do qui-quadrado. Segundo os mesmos, este facto deriva de que, quando se estima a variância condicional conjuntamente com a média, a substituição dos resíduos não observáveis pelos respectivos valores estimados provoca uma alteração na distribuição assintótica da estatística de teste²¹.

Quando a hipótese alternativa é a correcta, o teste LM, geralmente, revela-se mais apropriado do que o teste de *portmanteau*. Contudo, a realização do teste LM requer a especificação de um modelo alternativo para a variância condicional, que poderá não ser o melhor face a outras alternativas. Dado que o cálculo da estatística de teste depende da especificação alternativa, esta abordagem torna-se pouco atractiva enquanto ferramenta de avaliação e diagnóstico geral²².

Tal como nos testes de *portmanteau*, os testes de diagnóstico baseados nos resíduos de estimação não necessitam de uma especificação alternativa para a variância condicional. Este tipo de metodologia, sendo robusta mesmo na ausência da hipótese de normalidade das taxas retorno dos activos financeiros, permite, como de seguida veremos, investigar uma multiplicidade de possíveis fontes de incorrecta especificação ao nível da variância condicional, o que a torna bastante atractiva. No presente trabalho será dada especial atenção ao teste de Tse (2002)²³.

Os testes de diagnóstico baseados nos resíduos de estimação analisam a adequabilidade de um modelo para descrever a variância condicional da taxa de retorno de um activo financeiro utilizando o conceito de “*resíduo generalizado*”, que é construído de forma a ter um valor esperado condicional nulo. No contexto dos modelos de heteroscedasticidade condicionada, o referido resíduo generalizado pode ser definido como sendo $\hat{\xi}_t = \hat{z}_t^2 - 1$. Se a variância condicional da taxa de retorno de um activo financeiro estiver correctamente especificada então o “*resíduo generalizado*” não estará

²¹ Li e Mak (1994), de forma a tornar esta metodologia mais rigorosa, propõem uma estatística de teste alternativa à de Box-Pierce-Ljung que segue assintoticamente uma distribuição do qui-quadrado (para mais detalhes consultar a respectiva referência bibliográfica).

²² Exemplos de aplicações de testes LM no contexto dos modelos ARCH podem ser encontrados em Engle (1982), Engle e Ng(1993) e Lundberg e Teräsvirta (2002). Estes últimos autores demonstraram ainda que, em certas situações, o teste de *portmanteau* é assintoticamente equivalente ao teste LM.

²³ Wooldridge (1990 e 1991), providenciam uma discussão compreensiva sobre os testes de diagnóstico baseados nos resíduos de estimação.

correlacionado com nenhuma variável pertencente ao conjunto de informação disponível em $t-1(\mathfrak{T}_{t-1})$. Estas variáveis, $\hat{d}_t$, designadas por indicadores de incorrecta especificação, são seleccionadas de forma a explorar possíveis fontes de má especificação. Se o objectivo for testar a incorrecta especificação da variância condicional induzida por heteroscedasticidade condicional residual então $\hat{d}_t = (\hat{z}_{t-1}^2, \hat{z}_{t-2}^2, \dots, \hat{z}_{t-m}^2)$. Contudo, se a fonte de incorrecta especificação for a existência de eventual assimetria não modelizada ao nível da variância condicional, poder-se-ão considerar indicadores como os referidos por Engle e Ng (1993): $\hat{d}_t = I(\hat{z}_{t-1} < 0)$, $\hat{d}_t = I(\hat{z}_{t-1} > 0)$, $\hat{d}_t = I(\hat{z}_{t-1} < 0)\hat{z}_{t-1}^2$ e $\hat{d}_t = I(\hat{z}_{t-1} > 0)\hat{z}_{t-1}^2$. Exemplos de outros indicadores de incorrecta especificação poderão ser, por exemplo, o quadrado dos valores desfazados de $\hat{z}_t$ de outros activos financeiros de forma a detectar a existência de *volatility spillovers*.

O teste de diagnóstico baseado nos resíduos de estimação de Tse (2002) pode ser sumariado como se segue. Primeiro, com base no método OLS, constroem-se regressões de $\hat{\xi}_t$ sobre $\hat{d}_t$:

$$\hat{\xi}_t = \hat{d}_t' \delta + \nu_t \quad (1.42)$$

onde δ é um vector parâmetros de dimensão $m \times 1$. $\hat{\delta}$ é o estimador OLS de δ . Segundo, considerando os resultados estabelecidos por Tse (2002), obtém-se a seguinte estatística de teste:

$$T(m) = N \hat{\delta}' \hat{L} \hat{\Omega}^{-1} \hat{L} \hat{\delta} \quad (1.43)$$

em que:

$$\begin{aligned} \hat{\Omega} &= \hat{c} \hat{L} - \hat{Q} \hat{G} \hat{Q}' & \hat{c} &= \sum \hat{\xi}_t^2 / N \\ \hat{L} &= \left(\sum \hat{d}_t \hat{d}_t' \right) / N & \hat{Q} &= \left\{ \sum \hat{d}_t \left(\partial \hat{z}_t^2 / \partial \theta' \right) \right\} / N^{24} \end{aligned}$$

θ é o vector de parâmetros da especificação da variância condicional (h_t) e G é um estimador consistente da matriz de variâncias de covariâncias de $\sqrt{N}(\hat{\theta} - \theta)$. Segundo Tse(2002), quando a variância condicional está correctamente especificada, $T(m)$

²⁴ Note-se que $\partial \hat{z}_t^2 / \partial \theta'$ denota $\partial z_t^2 / \partial \theta'$ avaliado para $\theta = \hat{\theta}$. As derivadas em $\hat{Q}$ poderão ser calculadas numericamente ou, em alternativa, analiticamente quando disponíveis.

segue, assintoticamente, uma distribuição do qui-quadrado com m graus de liberdade. Note-se que neste contexto, sendo $\hat{d}_t$ regressores estimados, os procedimentos de inferência estatística baseados nos resultados de estimação OLS habituais serão inválidos. Daí a necessidade de corrigir a matriz de variâncias e covariâncias dos estimadores OLS.

2. MODELOS GARCH MULTIVARIADOS DE CORRELAÇÕES CONDICIONAIS

Depois de no capítulo anterior se terem abordado alguns dos modelos univariados da família ARCH, pretende-se, no presente capítulo, estudar os modelos GARCH multivariados (MVGARCH) de correlações condicionais.

De acordo com Bauwens, Laurent e Rombouts (2006)¹, os modelos MVGARCH existentes na literatura poderão ser agrupados em 3 grandes classes:

- (i) Modelos em que a matriz de variâncias e covariâncias condicional (H_t) das taxas de retorno dos activos financeiros não é mais do que uma generalização do modelo GARCH univariado standard²;
- (ii) Modelos em que H_t resulta de combinações lineares de modelos GARCH univariados³;

¹ Bauwens, Laurent e Rombouts (2006) providenciam uma boa síntese dos modelos MVGARCH existentes na literatura.

² Na classe dos modelos MVGARCH, que são generalizações do modelo GARCH univariado standard, incluem-se, entre outros, o modelo VEC de Bollerslev, Engle e Wooldridge (1988), os modelos factoriais como o de Engle, Ng e Rothschild (1990) e o modelo BEKK de Engle e Kroner (1995). O modelo VEC, apesar de bastante geral e flexível, apresenta dois grandes problemas: é difícil garantir a positividade da matriz de variâncias e covariâncias e o número de parâmetros a estimar é bastante elevado, o que torna o modelo não parcimonioso. O modelo BEKK, representando a matriz de variâncias e covariâncias através de uma forma quadrática, apesar de resolver o problema de assegurar a positividade é ainda pouco parcimonioso, não se revelando adequado para sistemas de grande dimensão. Nos modelos factoriais a volatilidade das séries é modelizada como sendo a soma de duas componentes: uma primeira que consiste em componentes comuns aos activos e uma segunda que respeita às componentes idiossincráticas de cada activo.

³ Os modelos ortogonais, nos quais se inclui o modelo de Alexander e Chibumba (1997), pertencendo à classe de Modelos MVGARCH, são vistos como combinações lineares de modelos GARCH univariados, assumem que as séries observadas são geradas por uma transformação ortogonal de modelos GARCH univariados. Estes últimos podem também ser considerados modelos factoriais onde os factores são processos univariados do tipo GARCH.

Refira-se que os modelos MVGARCH ortogonais e/ou factoriais, sendo modelos relativamente parcimoniosos, garantem a positividade da matriz de variâncias e covariâncias, já que não são mais do que modelos restringidos do modelo BEKK. Apesar deste tipo de parametrização diminuir significativamente o número de parâmetros a estimar, Engle e Sheppard (2001), referem-lhe duas importantes limitações: dificuldade de interpretação dos coeficientes dos modelos GARCH univariados e

- (iii) Por último, modelos em que H_t é especificada como combinações não lineares de modelos GARCH univariados.

Nesta última classe, incluem-se os modelos MVGARCH de correlações condicionais⁴. Nos modelos MVGARCH de correlações condicionais, a matriz H_t é especificada de forma hierárquica: em primeiro lugar, especificam-se modelos univariados da família ARCH para cada série em análise; seguidamente, utilizando as séries normalizadas pelos seus desvios-padrão condicionais, determinam-se as correlações condicionais; finalmente utilizando os desvios-padrão e as correlações, ambos condicionais, calculam-se as covariâncias condicionais. Este tipo de especificação hierárquica para a matriz H_t torna os modelos de correlações condicionais bastante atractivos, já que, por um lado, é possível adoptar diferentes especificações para cada variância condicional e, por outro, o processo de estimação pode ser conduzido, como veremos, em múltiplas fases. Este último facto origina ainda que este tipo de modelos pode ser utilizado para modelizar a matriz H_t em sistemas de grande dimensão (principal dificuldade presente nos modelos MVGARCH), sendo relativamente fácil impor as necessárias restrições de forma a garantir a estacionaridade e a positividade.

Seguidamente apresentam-se, as principais características exibidas pelas correlações entre retornos de vários activos financeiros, abordando-se depois, de forma mais ou menos pormenorizada, os modelos MVGARCH de correlações condicionais. Nessa altura serão focados os seguintes aspectos: especificações alternativas para a matriz de correlações condicionais, método de estimação, ensaio de hipóteses e metodologias de avaliação e diagnóstico dos modelos estimados. Serão ainda enunciados testes que permitem verificar a hipótese das correlações condicionais serem constantes ao longo do tempo.

fraca performance na modelização de sistemas menos correlacionados, como aqueles que envolvem taxas de retorno de acções.

⁴ Nesta classe incluem-se ainda o Modelo Dinâmico Geral de Covariância proposto por Kroner e Ng (1998) e os modelos *Copula-MVGARCH* de Patton (2000) e Jondeau e Rockinger (2001).

2.1. Propriedades da Correlação entre Retornos

É geralmente aceite que a diversificação dos investimentos financeiros se traduz em benefícios para o investidor já que, retornos negativos em alguns dos activos são compensados por retornos positivos de outros activos que compõem a carteira, resultando, desta forma, numa redução do risco. A moderna gestão de carteiras requer assim estimativas precisas, não só das variâncias dos retornos, mas também dos coeficientes de correlação entre os retornos dos activos de uma carteira. Não é então surpreendente constatar que a estrutura de correlação dos mercados accionistas e obrigacionistas, entre outros, tenha sido intensivamente estudada no mundo académico. Muitos desses estudos concluíram que as correlações entre os mercados accionistas internacionais não são constantes ao longo do tempo, exibindo por vezes um comportamento assimétrico. Exemplos destas características das correlações entre retornos podem ser encontrados nos trabalhos de Login e Solnik (1995), Ang e Chen (2002), Goetzmann, Li e Rouwenhorst (2006) e Cappiello, Engle e Sheppard (2003 e 2006).

Login e Solnik (1995) avaliaram a estabilidade temporal da correlação entre os mercados accionistas internacionais, mais especificamente entre os mercados dos EUA, Canadá, Inglaterra, França, Alemanha, Suíça e Japão, no período compreendido entre Janeiro de 1960 e Agosto de 1990. As suas principais conclusões apontam no sentido de que a matriz de correlações entre mercados accionistas internacionais não é constante ao longo do tempo. Segundo os mesmos autores, um modelo MVGARCH de correlações condicionais constantes permite explicar a evolução temporal das covariâncias condicionais. No entanto, testes mais específicos, levaram à rejeição da hipótese de as correlações condicionais serem constantes. Utilizando um modelo em que se explicitam directamente as correlações condicionais, concluíram que no período em análise estas registaram um crescimento acentuado e que apresentam uma tendência para aumentar em períodos de elevada volatilidade. O aumento das correlações condicionais é explicado pelo processo de globalização e integração mundial dos mercados financeiros.

Ang e Chen (2002) investigaram a possibilidade de existência de assimetrias nas correlações entre mercado accionista em geral e carteiras de acções domésticas nos EUA. Usando dados semanais, do período compreendido entre Julho de 1963 e Dezembro de 1998, estes autores concluíram que as correlações entre os retornos das carteiras formadas e do mercado em geral em períodos de *bear market*, diferem das que se obtêm em períodos de *bull market*. Para quantificar essas diferenças desenvolveram uma estatística H que basicamente compara as *exceedance correlations*⁵ empíricas com as que se obteriam se os retornos fossem normalmente distribuídos. De entre os resultados que aqueles autores obtiveram destacam-se os seguintes:

- As correlações, entre os retornos das carteiras formadas e do mercado, em períodos de *bear market* são mais elevadas do que em períodos de *bull market*;
- Os sectores do petróleo e das *utilities* são os que registam maiores assimetrias na correlação com o mercado; no lado oposto situam-se as empresas financeiras e da indústria básica;
- Controlando a dimensão das empresas, conta-se que não existe qualquer relação entre a assimetria nas correlações e o nível de endividamento e que as carteiras com empresas de menor dimensão evidenciam uma maior assimetria na correlação com o mercado.
- As correlações das carteiras compostas por *value stocks* com o mercado são mais assimétricas do que as das carteiras constituídas por *growth stocks*;
- As correlações das *past loser stocks* com o mercado são mais assimétricas do que as das *past winner stocks*;
- As carteiras compostas por acções com um beta elevado exibem menos assimetria na correlação com o mercado.

⁵ Para um dado nível ϑ , as *exceedance correlations* calculam-se como se segue. Para pares de observações estandardizadas $\{(\tilde{x}, \tilde{y})\}$, selecciona-se um subconjunto de observações tal que $\{(\tilde{x}, \tilde{y}) | \tilde{x} > \vartheta \text{ e } \tilde{y} > \vartheta\}$ para $\vartheta \geq 0$, e $\{(\tilde{x}, \tilde{y}) | \tilde{x} < \vartheta \text{ e } \tilde{y} < \vartheta\}$ para $\vartheta \leq 0$. A correlação neste subconjunto de observações é a *exceedance correlation* empírica. Para $\vartheta = 0$ calcula-se quer a $\text{corr}(\tilde{x}, \tilde{y} | \tilde{x} > 0, \tilde{y} > 0)$, quer a $\text{corr}(\tilde{x}, \tilde{y} | \tilde{x} < 0, \tilde{y} < 0)$. Em teoria, para uma distribuição simétrica, essas correlações são iguais, contudo para dados reais podem diferir.

Goetzmann, Li e Rouwenhorst (2006) examinaram a estrutura das correlações entre os mercados accionistas a nível mundial para um período de 150 anos (cerca de 1850 a 2000) e concluíram que as mesmas variaram substancialmente ao longo do tempo. Nomeadamente, verificaram que:

- No período da *Grande Depressão* e nos finais dos séculos dezanove e vinte, as correlações entre os mercados accionistas a nível mundial registaram níveis relativamente elevados;
- Hoje em dia, as possibilidades de diversificação internacional são bem menores quando comparadas com o resto dos 150 anos de história dos mercados de capitais;
- Porque os mercados accionistas estão hoje altamente correlacionados, a maior parte dos benefícios da diversificação advém do investimento em mercados emergentes.

Uma última referência para o trabalho de Cappiello, Engle e Sheppard (2003 e 2006) que estudaram a evolução temporal das correlações entre 21 mercados accionistas (mercados europeus, americanos, australiano e asiáticos) e 13 mercados obrigacionistas (europeus, japoneses, canadiano e EUA). Usando um modelo assimétrico MVGARCH de correlações condicionais dinâmicas e dados semanais para o período compreendido entre Janeiro de 1987 e Fevereiro de 2002, concluíram que as correlações variaram substancialmente ao longo do período em análise. Nomeadamente, constatou-se que, com a introdução do Euro, a correlação entre os maiores mercados accionistas da Zona Euro (França, Alemanha e Itália) e os restantes mercados estudados aumentou significativamente. Verificou-se igualmente que a introdução de um regime de câmbios fixos deu origem a uma correlação quase perfeita entre os mercados obrigacionistas da Zona Euro. Este último facto não é surpreendente dada a harmonização da política monetária. Estes autores documentaram ainda, quer para os mercados accionistas, quer para os obrigacionistas, correlações condicionais assimétricas, aumentando de forma mais acentuada em resposta a “más notícias”⁶ conjuntas. Esta última constatação é mais evidente nas correlações entre mercados accionistas.

⁶ “Más notícias”, neste contexto, significa um choque negativo simultâneo em duas taxas de retorno.

Apesar de existirem explicações teóricas que justificam o comportamento assimétrico da volatilidade dos retornos dos activos financeiros, pouca estrutura teórica está disponível para explicar a assimetria nas correlações em resposta a “más notícias” conjuntas. Na literatura consultada, a única explicação teórica para tal evidência empírica é avançada por Cappiello, Engle e Sheppard (2003 e 2006). Segundo estes autores, num mundo tipo CAPM, uma diminuição na taxa de retorno esperada do mercado, *ceteris paribus*, coloca sob pressão (em baixa) qualquer par de acções e incrementa as suas variâncias. Se os coeficientes beta não se alterarem, então a covariância aumentará. Se as variâncias idiossincráticas não se alterarem proporcionalmente, então a correlação aumentará. Após um choque negativo, a correlação pode, portanto, ser mais elevada do que o seria se tivesse ocorrido um choque positivo de igual magnitude.

2.2. Modelos Alternativos de Correlações Condicionais

Depois de analisadas as principais características evidenciadas pelas correlações entre retornos apresentam-se de seguida alguns dos modelos de correlações condicionais que têm surgido na literatura.

Considere-se $r_t | \mathfrak{F}_{t-1}$ um vector k -dimensional de retornos gerado por um modelo MVGARCH, condicionado, como habitualmente, à informação disponível em $t-1$. Suponha-se, por simplicidade e sem perda da generalidade, que a média condicional de r_t é constante e igual a zero, mas a matriz de variâncias e covariâncias condicional é variável no tempo. A representação genérica do modelo será dada por:

$$r_t | \mathfrak{F}_{t-1} = H_t^{1/2} z_t \quad (2.1)$$

onde $H_t^{1/2}$ é uma matriz definida positiva de dimensão $k \times k$ e z_t é um vector aleatório i.i.d. com $E(z_t | \mathfrak{F}_{t-1}) = 0$ e $Var(z_t | \mathfrak{F}_{t-1}) = I_k$.

A matriz de variâncias e covariâncias condicional de r_t , será dada por:

$$Var(r_t | \mathfrak{T}_{t-1}) = Var_{t-1}(r_t) = Var_{t-1}(H_t^{1/2} z_t) = H_t = \begin{bmatrix} h_{11,t} & h_{12,t} & \cdots & h_{1k,t} \\ h_{21,t} & h_{22,t} & \cdots & h_{2k,t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{k1,t} & h_{k2,t} & \cdots & h_{kk,t} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

De acordo com os modelos MVGARCH de correlações condicionais, a matriz H_t é decomposta da seguinte forma:

$$H_t = D_t R_t D_t \quad (2.3)$$

em que:

- $D_t = diag(\sqrt{h_{1,t}}, \dots, \sqrt{h_{k,t}})$ é uma matriz diagonal de dimensão $k \times k$ com os desvios-padrão condicionais de cada retorno. Refira-se que $h_{i,t}, i = 1, \dots, k$, pode ser descrita por um qualquer modelo da família ARCH, como os apresentados no ponto 1.2. do presente trabalho.
- A matriz R_t de dimensão $k \times k$, com o (i, j) - ésimo elemento designado por $\rho_{ij,t}$, é a matriz de correlações condicionais de r_t .

Sendo assim, nos modelos de correlações condicionais, H_t é dada por:

$$H_t = \begin{bmatrix} \sqrt{h_{1,t}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{h_{2,t}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{h_{k,t}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_{11,t} & \rho_{12,t} & \cdots & \rho_{1k,t} \\ \rho_{21,t} & \rho_{22,t} & \cdots & \rho_{2k,t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{k1,t} & \rho_{k2,t} & \cdots & \rho_{kk,t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{h_{1,t}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{h_{2,t}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{h_{k,t}} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Note-se que, tal como refere Engle (2002), R_t é também a matriz de variâncias e covariâncias condicional dos retornos estandardizados z_t , isto é:

$$E[z_t z_t' | \mathfrak{T}_{t-1}] = E_{t-1}[z_t z_t'] = R_t^7 \quad (2.5)$$

Consoante a especificação que se adopte para R_t teremos diferentes modelos MVGARCH de correlações condicionais que passamos de seguida a analisar.

$$^7 \rho_{ij,t} = \frac{E_{t-1}[r_{i,t} r_{j,t}]}{\sqrt{E_{t-1}[r_{i,t}^2]} \sqrt{E_{t-1}[r_{j,t}^2]}} = \frac{\sqrt{h_{ii,t}} \sqrt{h_{jj,t}} E_{t-1}[z_{i,t} z_{j,t}]}{\sqrt{h_{ii,t}} \sqrt{h_{jj,t}} \underbrace{\sqrt{E_{t-1}[z_{i,t}^2]}}_{=1} \underbrace{\sqrt{E_{t-1}[z_{j,t}^2]}}_{=1}} = E_{t-1}[z_{i,t} z_{j,t}].$$

2.2.1. Modelo de Correlações Condicionais Constantes

Bollerslev (1990), com o objectivo de estudar as matrizes de variâncias e covariâncias condicionais do dólar americano contra o marco alemão, o franco francês e a lira italiana, introduziu aquele que ficaria conhecido como o modelo de correlações condicionais constantes (Modelo CCC), assumindo que a matriz de correlações condicionais é constante no tempo, isto é, que $R_t = R$. Nesta situação o processo de estimação pode ser dividido em duas fases: primeiro, estimam-se modelos da família ARCH univariados para cada série de retornos individualmente e obtêm-se estimativas das variâncias condicionais; segundo, R pode ser estimada através da matriz de correlações não condicional dos retornos estandardizados $\hat{z}_t = \hat{D}_t^{-1}r_t$. Assim, de acordo com o modelo CCC, o coeficiente de correlação condicional entre o retorno do activo i e do activo j poderá ser calculado através do seguinte estimador consistente:

$$\hat{\rho}_{ij} = \frac{\sum_{t=1}^N \hat{z}_{i,t} \hat{z}_{j,t}}{\sqrt{\sum_{t=1}^N \hat{z}_{i,t}^2 \sum_{t=1}^N \hat{z}_{j,t}^2}} \quad (2.6)$$

A assumpção de correlações constantes entre os retornos torna, desta forma, o processo de estimação bastante simplificado, mesmo para sistemas de grande dimensão. Por outro lado, para garantir a positividade de H_t basta que cada variância condicional $h_{i,t}$, $i = 1, \dots, k$, seja positiva e R seja uma matriz definida positiva.

Contudo, tal como se constatou no ponto 2.1. deste trabalho, a assumpção da hipótese de correlações condicionais constantes, em muitos casos, pode não ser razoável. Este facto deu origem a que Engle (2002) e Tse e Tsui (2002), de forma autónoma, introduzissem uma classe de modelos em que a matriz de correlações condicional é variável no tempo. Estes modelos ficaram conhecidos na literatura por modelos MVGARCH de correlações condicionais dinâmicas (*Dynamic Conditional Correlation Models*).

2.2.2. Modelos de Correlações Condicionais Dinâmicas

De acordo com o modelo de correlações condicionais dinâmicas de Engle (2002) – modelo DCC_E – a matriz de correlações condicional R_t é especificada da seguinte forma:

$$Q_t = (1 - \alpha - \beta) \bar{Q} + \alpha z_{t-1} z'_{t-1} + \beta Q_{t-1} \quad (2.7)$$

$$R_t = (Q_t^*)^{-1} Q_t (Q_t^*)^{-1} \quad (2.8)$$

onde $\bar{Q} = E[z_t z'_t]$ é a matriz de variâncias e covariâncias não condicional dos retornos estandardizados, Q_t^* é uma matriz diagonal contendo as raízes quadradas dos elementos da diagonal principal da matriz Q_t e α e β são parâmetros escalares.

A normalização operada na equação (2.8) destina-se a garantir que as correlações condicionais estimadas pertencem ao intervalo $[-1,1]$.

De acordo com a especificação apresentada o coeficiente de correlação condicional $\rho_{ij,t}$ é dado por $q_{ij,t} / \sqrt{q_{ii,t} q_{jj,t}}$ em que $q_{ij,t} = (1 - \alpha - \beta) + \alpha z_{i,t-1} z_{j,t-1} + \beta q_{ij,t-1}$ não é mais do que um modelo tipo ARMA.

Para que H_t seja definida positiva basta garantir que todas as variâncias condicionais sejam positivas e que R_t seja uma matriz definida positiva. A positividade de R_t será garantida se $\alpha, \beta > 0$ e $\alpha + \beta < 1$.

A especificação implícita em (2.7), ao admitir a hipótese de “*correlation targeting*”⁹, isto é, que após um choque nos retornos as correlações condicionais voltam progressivamente ao seu nível não condicional de longo prazo, torna mais facilitado o processo de estimação, pois a matriz $\bar{Q}$, de forma idêntica à sugerida por Bollerslev (1990), pode ser substituída pela matriz de variâncias e covariâncias amostral dos

⁸ A equação apresentada corresponde na representação DCC(p,q), a um modelo DCC(1,1) podendo ser estendida para defasamentos superiores.

⁹ A hipótese de “*correlation targeting*” no domínio dos modelos MVGARCH é em tudo idêntica à de “*variance targeting*”, introduzida por Engle e Mezrich (1996) no domínio dos modelos ARCH univariados.

retornos estandardizados, $\bar{Q} = N^{-1} \sum_{t=1}^N z_t z_t'$, reduzindo, desta forma, o número de parâmetros a estimar.

No modelo DCC_T de Tse e Tsui (2002), a matriz R_t é especificada da seguinte forma:

$$R_t = (1 - \theta_1 - \theta_2)R + \theta_1 \Psi_{t-1} + \theta_2 R_{t-1} \quad (2.9)$$

Em (2.9), θ_1 e θ_2 são parâmetros escalares não negativos satisfazendo a condição $\theta_1 + \theta_2 < 1$, R é uma matriz simétrica definida positiva de dimensão $k \times k$ com $\rho_{ii} = 1$ e Ψ_{t-1} é a uma matriz de correlações de r_τ para $\tau = t-m, t-m+1, \dots, t-1$. O seu (i, j) - ésimo elemento é dado por:

$$\psi_{ij,t-1} = \frac{\sum_{l=1}^m z_{i,t-l} z_{j,t-l}}{\sqrt{\left(\sum_{l=1}^m z_{i,t-l}^2\right) \left(\sum_{l=1}^m z_{j,t-l}^2\right)}} \quad (2.10)$$

De forma a garantir que Ψ_{t-1} seja uma matriz definida positiva será necessário que $m \geq k$. Em (2.9) a matriz R , tal como no modelo DCC_E, poderá ser reposta pela matriz de correlações não condicional de z_t .

Resulta de (2.9) que a correlação condicional entre as taxas de retorno dos activos i e j será dada por:

$$\rho_{ij,t} = (1 - \theta_1 - \theta_2) \rho_{ij} + \theta_1 \frac{\sum_{l=1}^m z_{i,t-l} z_{j,t-l}}{\sqrt{\left(\sum_{l=1}^m z_{i,t-l}^2\right) \left(\sum_{l=1}^m z_{j,t-l}^2\right)}} + \theta_2 \rho_{ij,t-1} \quad (2.11)$$

Repare-se que a diferença essencial entre as correlações condicionais calculadas segundo os modelos DCC_E e DCC_T reside no facto de, no modelo de Tse e Tsui, estas não reagirem de forma tão acentuada a um choque nos retornos estandardizados.

Os modelos DCC_E e DCC_T *standards* apresentam, no entanto, duas restrições que poderão não se verificar em termos práticos. A primeira prende-se com o facto de se impor uma mesma estrutura dinâmica, governada pelos parâmetros α e β no modelo DCC_E e θ_1 e θ_2 no modelo DCC_T para todas as correlações condicionais. Ora, não será difícil encontrar situações onde esta restrição é violada. Por exemplo, as correlações

entre os retornos de acções de um dado sector terão, à priori, um comportamento diferenciado das correlações entre retornos de acções de outros sectores. A segunda está relacionada com o facto de os modelos DCC *standards* implicarem simetria nas correlações condicionais, isto é, um choque positivo simultâneo nos retornos estandardizados $z_{i,t}$ e $z_{j,t}$ terá o mesmo efeito na correlação condicional que o induzido por um choque negativo. Ora, como se constatou no ponto 2.1. deste trabalho, as correlações condicionais entre retornos, em certas situações, poderão ser assimétricas.

De forma a aliviar as restrições impostas pelos modelos DCC *standards* têm sido sugeridas na literatura diversas extensões, que passaremos de seguida a analisar.

Hafner e Franses (2003) sugeriram um modelo DCC generalizado (GDCC) em que se admite uma estrutura específica para cada correlação condicional. Isto é, ao contrário do que acontece no modelo DCC_E *standard*, ocorrendo um choque de igual magnitude nos retornos estandardizados o efeito sobre os vários coeficientes de correlação condicionais será diferenciado. No modelo GDCC a equação (2.7) é reposta por:

$$Q_t = (1 - \bar{\alpha}^2 - \bar{\beta}^2) \bar{Q} + \alpha \alpha' \circ z_{t-1} z_{t-1}' + \beta \beta' Q_{t-1} \quad (2.12)$$

onde $\circ$ denota o produto Hadamard (multiplicação de elemento por elemento), $\bar{Q}$ é definida de forma análoga à do modelo DCC_E *standard*, α e β são agora vectores de parâmetros de dimensão $k \times 1$, $\alpha = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_k]$, $\beta = [\beta_1 \ \beta_2 \ \dots \ \beta_k]$ e $\bar{\alpha} = k^{-1} \sum_{i=1}^k \alpha_i$ e $\bar{\beta} = k^{-1} \sum_{i=1}^k \beta_i$ são, respectivamente, as médias dos parâmetros α_i e β_i .

De acordo com a especificação adoptada por Hafner e Franses (2003) o (i, j) -ésimo elemento da matriz Q_t será $q_{ij,t} = (1 - \bar{\alpha}^2 - \bar{\beta}^2) \bar{q}_{ij} + \alpha_i \alpha_j z_{i,t-1} z_{j,t-1} + \beta_i \beta_j q_{ij,t-1}$.

Desta forma cada correlação condicional na matriz R_t passa a ter a sua própria dinâmica, ao contrário, do que acontecia no modelo DCC_E *standard*. Note-se, no entanto, que a hipótese de “*correlation targeting*” não funciona neste caso. Sendo $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k$ e $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_k$ então o modelo GDCC não será mais do que o modelo DCC_E *standard*.

Cappiello, Engle e Sheppard (2004 e 2006) propõe uma especificação para Q_t similar à proposta no modelo GDCC mas que é amplificada para contemplar a existência de

assimetrias nas correlações condicionais. De acordo com o modelo DCC generalizado e assimétrico (AGDCC) proposto por estes autores, Q_t é especificada da seguinte forma:

$$Q_t = (\bar{Q} - A'\bar{Q}A - B'\bar{Q}B - G'\bar{N}G) + A'z_{t-1}z'_{t-1}A + B'Q_{t-1}B + G'n_{t-1}n'_{t-1}G \quad (2.13)$$

em que A , B e G são matrizes diagonais de dimensão $k \times k$ com os parâmetros α_i , b_i e g_i , $i = 1, \dots, k$, respectivamente, $n_t = I[z_t < 0] \circ z_t$, $\bar{Q}$ é definida de forma análoga à do modelo DCC_E *standard* e $\bar{N} = E[n_t n'_t]$. A matriz $\bar{N}$ tal como $\bar{Q}$, poderá ser reposta pela matriz de variâncias e covariâncias amostral de n_t , ou seja, $\bar{N} = N^{-1} \sum_{t=1}^N n_t n'_t$.

De acordo com o modelo AGDCC o (i, j) -ésimo elemento da matriz Q_t será dado por:

$$q_{ij,t} = (\bar{q}_{ij} - \alpha_i \alpha_j \bar{q}_{ij} - b_i b_j \bar{q}_{ij} - g_i g_j \bar{n}_{ij}) + \alpha_i \alpha_j z_{i,t-1} z_{j,t-1} + b_i b_j q_{ij,t-1} + g_i g_j n_{i,t-1} n_{j,t-1}.$$

Neste modelo para que H_t seja definida positiva será necessário, tal como nos modelos apresentados anteriormente, garantir que todas as variâncias condicionais sejam positivas e que $(\bar{Q} - A'\bar{Q}A - B'\bar{Q}B - G'\bar{N}G)$ seja uma matriz definida positiva.

Repare-se que no modelo AGDCC, ao se admitir a assimetria, os impactos resultantes de choques simultâneos nos retornos estandardizados de dois activos serão diferenciados consoante o sinal dos mesmos. Assim, se ocorrer um choque simultâneo positivo, o impacto sobre a correlação condicional será aproximadamente $\alpha_i \alpha_j z_{i,t-1} z_{j,t-1}$. Se esse mesmo choque simultâneo for negativo então o impacto será dado por $(\alpha_i \alpha_j + g_i g_j) z_{i,t-1} z_{j,t-1}$.

Refira-se que o modelo AGDCC, dada a sua generalidade e flexibilidade, poderá ser visto como uma versão não restringida dos seguintes quatros modelos:

- Modelo de correlações condicionais constantes (CCC) se $A = B = G = [0]$;
- Modelo de correlações condicionais dinâmicas *standard* de Engle (DCC_E) se $A = \sqrt{a}$, $B = \sqrt{b}$ e $G = [0]$;
- Modelo assimétrico de correlações condicionais dinâmicas *standard* (ADCC) se $A = \sqrt{a}$, $B = \sqrt{b}$ e $G = \sqrt{g}$ e por último;
- Modelo de correlações condicionais dinâmicas generalizado se $G = [0]$.

Uma última nota para referir que outras especificações para a matriz R_t poderiam ser consideradas, como as propostas por Billio, Caporin e Gobbo (2006) ou Pelletier (2006) que, não serão, no entanto, objecto de tratamento no presente trabalho.

2.3. A News Impact Surface da Correlação Condicional Dinâmica

No domínio multivariado, Kroner e Ng (1998) introduziram um conceito em tudo semelhante à *news impact curve*, que permite determinar o impacto resultante de choques simultâneos nos retornos estandardizados de dois activos sobre a correlação condicional, conceito esse, que designaram por *news impact surface* (NIS). Formalmente, a NIS para a correlação condicional pode ser definida como a diferença entre a correlação condicional quando ocorre um choque simultâneo nos retornos estandardizados $(z_{i,t}, z_{j,t})$ e a correlação na ausência de qualquer choque. Para assegurar que a NIS não depende do nível das variâncias e da correlação, assume-se que os valores destas nos períodos anteriores são iguais aos seus níveis não condicionais. Assim, para qualquer modelo DCC, pode-se determinar a NIS da correlação condicional através das duas seguintes expressões:

$$n(z_{i,t}, z_{j,t}) = \rho_{ij,t+1}(z_{i,t}, z_{j,t} | \rho_{ij,t} = \bar{q}_{ij}, h_{i,t} = \sigma_i^2, h_{j,t} = \sigma_j^2) \quad (2.14)$$

$$NIS(z_{i,t}, z_{j,t}) = n(z_{i,t}, z_{j,t}) - n(0,0) \quad (2.15)$$

Assim, por exemplo, num modelo AGDCC, a NIS é obtida através da diferença entre as expressões (2.14) e (2.15):

$$n(z_{i,t}, z_{j,t}) = \begin{cases} \frac{A_{\rho_{ij}} + (a_i a_j + g_i g_j) \sigma_i \sigma_j z_{i,t} z_{j,t}}{\sqrt{(A_{\rho_{ii}} + (a_i^2 + g_i^2) \sigma_i^2 z_{i,t}^2)(A_{\rho_{jj}} + (a_j^2 + g_j^2) \sigma_j^2 z_{j,t}^2)}}, & \text{se } z_{i,t}, z_{j,t} < 0 \\ \frac{A_{\rho_{ij}} + a_i a_j \sigma_i \sigma_j z_{i,t} z_{j,t}}{\sqrt{(A_{\rho_{ii}} + a_i^2 \sigma_i^2 z_{i,t}^2)(A_{\rho_{jj}} + a_j^2 \sigma_j^2 z_{j,t}^2)}}, & \text{se } z_{i,t}, z_{j,t} > 0 \\ \frac{A_{\rho_{ij}} + a_i a_j \sigma_i \sigma_j z_{i,t} z_{j,t}}{\sqrt{(A_{\rho_{ii}} + (a_i^2 + g_i^2) \sigma_i^2 z_{i,t}^2)(A_{\rho_{jj}} + a_j^2 \sigma_j^2 z_{j,t}^2)}}, & \text{se } z_{i,t} < 0, z_{j,t} > 0 \\ \frac{A_{\rho_{ij}} + a_i a_j \sigma_i \sigma_j z_{i,t} z_{j,t}}{\sqrt{(A_{\rho_{ii}} + a_i^2 \sigma_i^2 z_{i,t}^2)(A_{\rho_{jj}} + (a_j^2 + g_j^2) \sigma_j^2 z_{j,t}^2)}}, & \text{se } z_{i,t} > 0, z_{j,t} < 0 \end{cases} \quad (2.16)$$

em que $A_{\rho_{ij}} = (1 - a_i a_j - b_i b_j) \bar{q}_{ij} - g_i g_j \bar{n}_{ij}$ e,

$$n(0,0) = \frac{A_{\rho_{ij}}}{\sqrt{A_{\rho_{ii}} A_{\rho_{jj}}}} \quad (2.17)$$

Para os restantes modelos de correlações condicionais dinâmicas, procedendo de forma análoga, obtêm-se as respectivas NIS.

2.4. Estimação e Ensaio de Hipóteses nos Modelos de Correlações Condicionais Dinâmicas

De forma a reduzir o número de parâmetros a serem estimados simultaneamente, o modelo DCC_E, introduzido por Engle (2002), foi desenhado para ser estimado em duas fases. Numa primeira fase estimam-se modelos GARCH univariados para cada série de retornos¹⁰. Na segunda fase, utilizando os retornos estandardizados pelos seus desvios-padrão condicionais, estimam-se os parâmetros da equação das correlações dinâmicas. Para ilustrar a técnica de estimação em duas fases, pelo método da quase máxima verosimilhança¹¹, considere-se que $r_t | \mathfrak{I}_{t-1} \sim N(0, H_t)$ ¹². Denotando θ como o vector

¹⁰ Em alternativa, poderão ser usados modelos da família ARCH diferenciados para cada série de retornos.

¹¹ Considera-se o método da quase máxima verosimilhança porque, em grande parte das situações, os retornos não serão normalmente distribuídos.

¹² Os retornos com média nula, poderão ser substituídos pelos resíduos de estimação resultantes de uma prévia filtragem dos mesmos através, por exemplo, de um modelo VAR (Vector Autoregressive).

de parâmetros relevante da matriz de variâncias e covariâncias condicional, a função de verosimilhança, para as N observações deste estimador é dada por:

$$L(\theta) = \prod_{t=1}^N \frac{1}{(2\pi)^{k/2} |H_t|^{1/2}} \exp \left[-\frac{1}{2} r_t' H_t^{-1} r_t \right] \quad (2.18)$$

e o logaritmo da função de verosimilhança por:

$$l(\theta) = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^N \left\{ k \log(2\pi) + \log |H_t| + r_t' H_t^{-1} r_t \right\} \quad (2.19)$$

de acordo com (2.3) teremos,

$$\begin{aligned} l(\theta) &= -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^N \left\{ k \log(2\pi) + \log |D_t R_t D_t| + r_t' (D_t R_t D_t)^{-1} r_t \right\} \\ l(\theta) &= -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^N \left\{ k \log(2\pi) + 2 \log |D_t| + \log |R_t| + r_t' D_t^{-1} R_t^{-1} D_t^{-1} r_t \right\} \\ l(\theta) &= -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^N \left\{ k \log(2\pi) + 2 \log |D_t| + \log |R_t| + z_t' R_t^{-1} z_t \right\} \end{aligned} \quad (2.20)$$

Engle (2002) propõe estimar a primeira fase assumindo que $R_t = I_k$. Dividindo o vector de parâmetros em dois subconjuntos $\theta = (\phi, \varphi)$, onde ϕ contém os parâmetros das k variâncias e φ contém os parâmetros das correlações, o logaritmo da função de verosimilhança pode ser expresso como:

$$l(\theta) = l(\phi) + l(\varphi) \quad (2.21)$$

A estimação da primeira fase consiste na maximização da função:

$$\begin{aligned} l(\phi) &= -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^N \left\{ k \log(2\pi) + 2 \log |D_t| + r_t' D_t^{-2} r_t \right\} \\ l(\phi) &= -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^N \left\{ k \log(2\pi) + \sum_{i=1}^k \left[\log(h_{i,t}) + \frac{r_{i,t}^2}{h_{i,t}} \right] \right\} \\ l(\phi) &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \left\{ N \log(2\pi) + \sum_{t=1}^N \left[\log(h_{i,t}) + \frac{r_{i,t}^2}{h_{i,t}} \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.22)$$

que é simplesmente a soma dos logaritmos da função de verosimilhança dos k modelos GARCH univariados.

Uma vez estimado o vector de parâmetros ϕ na segunda fase maximiza-se o logaritmo da função de verosimilhança originalmente especificada, condicionada aos parâmetros estimados na primeira fase:

$$l(\phi|\hat{\phi}) = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^N \left\{ k \log(2\pi) + 2 \log|\hat{D}_t| + \log|R_t| + z_t' R_t^{-1} z_t \right\} \quad (2.23)$$

Na medida em que ϕ é estimado condicionado por $\hat{\phi}$, a única porção relevante do logaritmo da função de verosimilhança será $\log|R_t| + z_t' R_t^{-1} z_t$. Logo, é suficiente para estimar os parâmetros das correlações condicionais maximizar a seguinte função:

$$l(\phi|\hat{\phi}) \propto -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^N \left\{ \log|R_t| + z_t' R_t^{-1} z_t \right\} \quad (2.24)$$

Engle (2002) e Engle e Sheppard (2001), demonstram que sob certas condições gerais, os estimadores utilizados são consistentes¹³ e seguem, assintoticamente, uma distribuição normal:

$$\sqrt{N}(\hat{\theta}_{QMV} - \theta_0) \overset{a}{\sim} N(0, A^{-1} B A'^{-1}) \quad (2.25)$$

em que

$$A = -E \begin{bmatrix} \nabla_{\phi\phi} l(\phi_0) & 0 \\ \nabla_{\phi\theta} l(\theta_0) & \nabla_{\phi\phi} l(\theta_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

e

$$B = Var \left[\sum_{t=1}^N \left\{ N^{-1/2} \nabla_{\phi}' l_t(\phi_0), N^{-1/2} \nabla_{\phi}' l_t(\phi_0, \phi_0) \right\} \right] = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Da expressão (2.25) resulta que a matriz de variâncias e covariâncias assintótica de $\hat{\theta}_{QMV}$ é dada por: $N^{-1} A^{-1} B A^{-1}$.

¹³ Para demonstrar a consistência do estimador DCC em duas fases, Engle (2002) utiliza os resultados de Newey e McFadden (1994) para o método bietápico dos momentos generalizado (GMM). O resultado obtido resulta do facto de que a estimação por máxima verosimilhança pode ser considerada como um caso especial do método GMM quando as condições momento são iguais aos scores do logaritmo da função de verosimilhança:

$$\frac{\partial l(\phi)}{\partial \phi} = 0 \text{ e } \frac{\partial l(\phi|\hat{\phi})}{\partial \phi} = 0$$

Particionando as matrizes A e B , a matriz de variâncias e covariâncias assintótica dos estimadores dos parâmetros dos modelos GARCH univariados para cada série de retornos $(\hat{\phi})$ será dada pelo estimador robusto de Bollerslev e Wooldridge (1992), ou seja, $N^{-1} A_{11}^{-1} B_{11} A_{11}^{-1}$.

A matriz de variâncias e covariâncias assintótica dos estimadores dos parâmetros das correlações condicionais $(\hat{\phi})$ será dada por $N^{-1} [\tilde{A}_{12} \tilde{A}_{22}] B [\tilde{A}_{12} \tilde{A}_{22}]'$ onde $\tilde{A}_{12} = -A_{22}^{-1} A_{12} A_{11}^{-1}$ e $\tilde{A}_{22} = A_{22}^{-1}$. Note-se que o facto de $A_{12} \neq 0$ implicará estimadores menos eficientes dos que se obteriam se o processo de estimação fosse efectuado numa só fase.

Uma vez estimada a $Var(\hat{\theta}_{QMV})$, os testes assintóticos *standard* de Wald poderão ser facilmente implementados, por exemplo, para testar o modelo AGDCC contra o modelo DCC, mediante as convenientes restrições.

Engle e Sheppard (2001), referem por último que, em virtude do processo de estimação se processar em 2 fases, os resultados dos testes *standard* baseados na razão de verosimilhanças deverão ser interpretados com algumas reservas já que, a estatística de teste convencional não tem distribuição do qui-quadrado com r graus de liberdade, em que r , neste contexto, representa o número de restrições.

2.5. Testes para a Hipótese de Correlações Condicionais Constantes

Uma das principais motivações dos modelos MVGARCH de correlações condicionais dinâmicas reside no facto da matriz de correlações entre taxas de retorno dos activos financeiros não ser constante ao longo do tempo. Porque a estimação deste tipo de modelos é, em certas situações, dadas as necessidades computacionais, uma tarefa difícil, é de todo desejável verificar *ex-ante* em que medida é que os dados exibem de facto correlações condicionais dinâmicas. Para estudar a hipótese de correlações

condicionais constantes (*versus* dinâmicas) apresentam-se os testes de Engle e Sheppard (2001) e de Tse (2000)¹⁴.

Dentro do espírito dos modelos MVGARCH de correlações condicionais dinâmicas propostos por Engle (2002) e Engle e Sheppard (2001), estes autores propuseram o seguinte teste para testar a hipótese de correlações condicionais constantes:

$$H_0 : R_t = \bar{R}, \forall_t$$

contra

$$H_1 : vech(R_t) = vech(\bar{R}) + \beta_1 vech(R_{t-1}) + \dots + \beta_s vech(R_{t-s})$$

A ideia subjacente a este teste é usar os retornos estandardizados da primeira fase da estimação $z_t = D_t^{-1}r_t$ (ver ponto 2.4. deste trabalho) para calcular a matriz de correlações condicionais constantes $(\bar{R})$. De seguida estandardiza-se novamente o vector z_t por $\bar{R}^{1/2}$. Sob a hipótese nula e admitindo a correcta especificação das variâncias condicionais, $v_t = \bar{R}^{-1/2}D_t^{-1}r_t$ deverá ser um vector de variáveis i.i.d com matriz de variâncias e covariâncias I_k .

Considere-se $Y_t = vech^u[v_t v_t' - I_k]$ onde, $vech^u$ é o operador $vech$ que apenas selecciona os elementos acima da diagonal principal, e estime-se o seguinte vector autoregressivo (VAR):

$$Y_t = \alpha + \beta_1 Y_{t-1} + \dots + \beta_s Y_{t-s} + \eta_t \quad (2.28)$$

Sob a hipótese nula, todos os parâmetros em (2.28) serão nulos e a estatística de teste dada por $\frac{\hat{\delta} X' X \hat{\delta}}{\hat{\sigma}^2}$ seguirá, assintoticamente, uma distribuição do qui-quadrado com

$s+1$ graus de liberdade, em que $\hat{\delta} = [\hat{\alpha} \quad \hat{\beta}_1 \quad \dots \quad \hat{\beta}_s]'$, X é uma matriz de dimensão $N \times s+1$ contendo os valores desfasados de Y e $\hat{\sigma}^2$ é a estimativa da variância da perturbação aleatória η_t .

¹⁴ Neste contexto será ainda de fazer referência ao teste apresentado por Bera e Kim (1996) que, contudo, só é aplicável ao caso bivariado.

Tse (2000) usa o modelo CCC de Bollerslev (1990) para construir um teste LM. Este autor, de forma a permitir correlações condicionais variantes no tempo, propõe, em alternativa ao modelo CCC, a seguinte equação:

$$\rho_{ij,t} = \rho_{ij} + \delta_{ij} r_{i,t-1} r_{j,t-1} \quad (2.29)$$

onde δ_{ij} , para $1 \leq i < j \leq k$, são os parâmetros adicionais do modelo expandido e $r_t = (r_{1t}, r_{2t}, \dots, r_{kt})'$ segue uma distribuição normal multivariada com média nula e matriz de variâncias e covariâncias H_t , isto é, $r_t | \mathfrak{T}_{t-1} \sim N(0, H_t)$. A hipótese nula de correlações condicionais constantes é dada por:

$$H_0 : \delta_{i,j} = 0, 1 \leq i < j \leq k \quad (2.30)$$

Note-se que no modelo restringido existem $k(k-1)/2$ restrições independentes face ao modelo não restringido.

Para construir a estatística de teste denote-se:

- $\theta = (\phi, \rho_{12}, \rho_{13}, \dots, \rho_{k-1,k}, \delta_{12}, \delta_{13}, \dots, \delta_{k-1,k})$ o vector dos parâmetros do modelo não restringido, em que ϕ contém os parâmetros das k variâncias condicionais¹⁵;
- $\hat{\theta}$ o estimador de máxima verosimilhança de θ sob a hipótese nula; e
- S a matriz de dimensão $N \times K$ cujas linhas são as derivadas parciais $\partial l_t / \partial \theta'$, para $t = 1, \dots, N$ ¹⁶. K representa o número de parâmetros do modelo não restringido e l_t a contribuição da t -ésima observação para o logaritmo da função de verosimilhança.

Sob a hipótese nula, a estatística de teste, designada por LMC , será dada por:

$$LMC = \ell' \hat{S} (\hat{S}' \hat{S})^{-1} \hat{S}' \ell \quad (2.31)$$

onde ℓ é um vector coluna de uns de dimensão $N \times 1$ e $\hat{S}$ é S avaliada para $\hat{\theta}$. Sob certas condições, LMC seguirá uma distribuição do qui-quadrado com $k(k-1)/2$ graus de liberdade.

¹⁵ Apesar de Tse (2002) assumir que as k variâncias condicionais são geradas por um modelo GARCH(1,1), outro tipo de especificações poderá ser adoptado, aliás como o próprio autor referiu.

¹⁶ Para mais detalhes sobre o cálculo de $\partial l_t / \partial \theta'$ ver Tse (2000).

2.6. Diagnóstico e Avaliação dos Modelos de Correlações Condicionais Dinâmicas

Tal como no caso univariado, uma vez estimado um modelo MVGARCH de correlações condicionais dinâmicas, será necessário avaliar a sua adequabilidade para descrever o processo evolutivo da matriz de correlações condicional. De entre as diversas metodologias disponíveis dar-se-á especial atenção ao teste *portmanteau* do tipo Ljung-Box e ao teste de diagnóstico baseado nos resíduos de estimação de Tse (2002).

Considere-se que $\hat{\xi}_{ij,t} = \hat{z}_{i,t} * \hat{z}_{j,t} - \hat{\rho}_{ij,t}$, onde $\hat{z}_{i,t}$ e $\hat{z}_{j,t}$ representam os retornos estandardizados pelos respectivos desvios-padrão condicionais e $\hat{\rho}_{ij,t}$ representa a estimativa do coeficiente de correlação condicional entre as taxas de retorno dos activos i e j . Se o modelo de correlações condicionais estiver correctamente especificado¹⁷, $\hat{\xi}_{ij,t}$ deverá ser assintoticamente não autocorrelacionado e $E(\hat{\xi}_{ij,t} | \mathfrak{T}_{t-1}) \rightarrow 0$ quando $N \rightarrow \infty$. Então, um diagnóstico poderá ser construído com base no teste *portmanteau* do tipo Ljung-Box. Especificamente, se denotarmos $r_{ij,k}$ como sendo o coeficiente de autocorrelação de ordem k de $\hat{\xi}_{ij,t}$, a estatística de teste será dada por:

$$Q(i, j, m) = N(N + 2) \sum_{k=1}^m \frac{r_{ij,k}^2}{N - k} \quad (2.32)$$

Um valor excessivo de Q levar-nos-á a concluir pela existência de autocorrelação e desta forma pela incorrecta especificação de $\rho_{ij,t}$. Note-se, no entanto, que a distribuição assintótica de Q é desconhecida, não seguindo, como demonstraram Ling e Li (1997), uma distribuição do qui-quadrado¹⁸. Apesar disso boa parte dos autores consultados ignoram esse facto assumindo que a estatística de teste em (2.32) segue uma distribuição do qui-quadrado com m graus de liberdade.

¹⁷ Assume-se que as variâncias condicionais estão correctamente especificadas.

¹⁸ Ling e Li (1997), sugeriram em alternativa à estatística de teste de Ljung-Box, um outro teste. Contudo, Tse e Tsui (1999) demonstraram que, para amostras de pequena dimensão, esse mesmo teste quando comparado com o teste *portmanteau* do tipo Ljung-Box baseado na distribuição do qui-quadrado, revela-se menos adequado.

Os testes de diagnóstico baseados nos resíduos de estimação para analisar a adequabilidade de um modelo para descrever o processo evolutivo do coeficiente de correlação condicional entre as taxas de retorno de dois activos financeiros processam-se de forma em tudo idêntica à descrita no ponto 1.5. do presente trabalho. Considerando $\hat{\xi}_{ij,t}$ como sendo o “*resíduo generalizado*”, o coeficiente de correlação condicional entre as taxas de retorno de dois activos financeiros estará correctamente especificado se o referido resíduo não estiver correlacionado com nenhuma variável pertencente ao conjunto de informação disponível em $t-1$ ($\mathfrak{I}_{t-1}$). Entre essas variáveis, designadas por indicadores de incorrecta especificação, $\hat{d}_{ij,t}$, poder-se-ão considerar, entre outras, as seguintes:

- $\hat{d}_{ij,t} = (z_{i,t-1} * z_{j,t-1}, z_{i,t-2} * z_{j,t-2}, \dots, z_{i,t-m} * z_{j,t-m})$ para captar má especificação induzida por correlação dinâmica não modelizada;
- $\hat{d}_{ij,t} = I(z_{i,t-1} < 0; z_{j,t-1} < 0)$, $\hat{d}_{ij,t} = I(z_{i,t-1} < 0; z_{j,t-1} < 0) * z_{i,t-1} z_{j,t-1}$,
 $\hat{d}_{ij,t} = I(z_{i,t-1} > 0; z_{j,t-1} < 0)$, $\hat{d}_{ij,t} = I(z_{i,t-1} > 0; z_{j,t-1} < 0) * z_{i,t-1} z_{j,t-1}$,
 $\hat{d}_{ij,t} = I(z_{i,t-1} < 0; z_{j,t-1} > 0)$, $\hat{d}_{ij,t} = I(z_{i,t-1} < 0; z_{j,t-1} > 0) * z_{i,t-1} z_{j,t-1}$,
 $\hat{d}_{ij,t} = I(z_{i,t-1} > 0; z_{j,t-1} > 0)$ e $\hat{d}_{ij,t} = I(z_{i,t-1} > 0; z_{j,t-1} > 0) * z_{i,t-1} z_{j,t-1}$

de forma a investigar a existência de eventual assimetria ao nível da correlação condicional não modelizada.

Definidas as variáveis que potencialmente poderão ser responsáveis pela má especificação do coeficiente de correlação condicional, o teste baseado nos resíduos de estimação de Tse (2002) processa-se da seguinte forma. Primeiro, com base no método OLS, constroem-se regressões de $\hat{\xi}_{ij,t}$ sobre $\hat{d}_{ij,t}$:

$$\hat{\xi}_{ij,t} = \hat{d}_{ij,t}' \delta_{ij} + v_{ij,t} \quad (2.33)$$

onde δ_{ij} é um vector parâmetros de dimensão $m \times 1$. $\hat{\delta}_{ij}$ é o estimador OLS de δ_{ij} . Segundo, considerando os resultados estabelecidos por Tse (2002), obtém-se a seguinte estatística de teste:

$$T(i, j, m) = N \hat{\delta}_{ij}' \hat{L}_{ij} \hat{\Omega}_{ij}^{-1} \hat{L}_{ij} \hat{\delta}_{ij} \quad (2.34)$$

em que:

$$\begin{aligned}\hat{\Omega}_{ij} &= \hat{c}_{ij}\hat{L}_{ij} - \hat{Q}_{ij}\hat{G}_{ij}\hat{Q}_{ij}' & \hat{c}_{ij} &= \sum \xi_{ij,t}^2 / N \\ \hat{L}_{ij} &= \left(\sum \hat{d}_{ij,t}\hat{d}_{ij,t}' \right) / N & \hat{Q}_{ij} &= \left\{ \sum \hat{d}_{ij,t} \left(\partial \xi_{ij,t} / \partial \theta' \right) \right\} / N^{19}\end{aligned}$$

θ é o vector de parâmetros da especificação do coeficiente de correlação condicional $(\rho_{ij,t})$ e G é um estimador consistente da matriz de variâncias de covariâncias de $\sqrt{N}(\hat{\theta} - \theta)$. Segundo Tse(2002), se o coeficiente de correlação condicional estiver correctamente especificado, $T(i, j, m)$ segue, asymptoticamente, uma distribuição do qui-quadrado com m graus de liberdade. Tal como referido no ponto 1.5. do presente trabalho, a correcção efectuada na matriz de variâncias e covariâncias dos estimadores OLS deriva do facto de $\hat{d}_{ij,t}$ serem regressores estimados.

¹⁹ Note-se que $\partial \hat{\xi}_{ij,t} / \partial \theta'$ denota $\partial \xi_{ij,t} / \partial \theta'$ avaliado para $\theta = \hat{\theta}$. As derivadas em $\hat{Q}_{ij}$ poderão ser calculadas numericamente ou, em alternativa, analiticamente quando disponíveis.

3. EVIDÊNCIA EMPÍRICA DAS CORRELAÇÕES ENTRE AS TAXAS DE RETORNO DAS *LARGE*, *MID* E *SMALL CAPS* DA ZONA EURO

No presente capítulo efectua-se um estudo empírico, para a zona euro, sobre a estrutura temporal da correlação entre as taxas de retorno semanal de índices de acções de empresas de diferente dimensão, medida pela capitalização bolsista, no período compreendido entre 13/01/1999 e 27/12/2006. Para o efeito construíram-se cinco índices que agrupam, com base nos quintis da capitalização bolsista, acções de empresas cotadas nos mercados accionistas da zona euro: o índice *Size 1* (S1) que integra as acções de empresas com menor capitalização bolsista, os índices *Size 2* (S2), *Size 3* (S3) e *Size 4* (S4), que serão constituídos por acções de empresas de média capitalização e finalmente o índice *Size 5* (S5) que será formado pelas grandes capitalizações da zona euro.

O capítulo está organizado em cinco partes. Na primeira parte discute-se a relevância e os objectivos deste estudo empírico. Na segunda parte será apresentada a metodologia utilizada na construção dos diferentes índices de acções utilizados neste trabalho. Na terceira parte serão apresentadas e analisadas as principais propriedades estatísticas univariadas das taxas de retorno semanal dos índices referenciados. Na quarta parte são discutidas as principais características das correlações não condicionais. Na quinta e última parte efectua-se a modelização condicional das correlações entre as cinco séries das taxas de retorno referidas através de modelos MV-GARCH de correlações condicionais.

3.1. Relevância e Objectivos do Estudo Empírico

A evidência empírica recente tem documentado que as correlações entre os retornos dos principais mercados accionistas não são constantes ao longo do tempo e que exibem, por vezes, um comportamento assimétrico (ver ponto 2.1. deste trabalho), isto é, que tendem a ser mais elevadas em períodos de “*bear market*” do que em períodos de “*bull market*”. Grande parte dos estudos que revelaram essas características ao nível das

correlações tem, no entanto, por base índices bolsistas nacionais. É sabido que a performance desses mesmos índices é sobretudo ditada pela evolução das cotações das acções de empresas de grande dimensão, dado o elevado peso que estas têm, regra geral, na composição dos mesmos. Assim, quando se conclui que as correlações entre as taxas de retorno das acções variam ao longo do tempo e exibem assimetria, essa conclusão, é válida essencialmente para correlações entre retornos de grandes empresas.

Segundo Petrella (2005) e Eun *et al* (2006), vários estudos têm concluído que existem diferenças de comportamento nos retornos das *small* e *large caps*. Enquanto os retornos das *large caps* são substancialmente determinados por factores de natureza global, os retornos das *small caps* são, primeiramente, influenciados por factores locais e idiossincráticos. Esta diferença no mecanismo gerador de retornos percebe-se facilmente já que as grandes empresas são, regra geral, multinacionais com actividade em vários países e com uma base accionista internacional, enquanto que, as pequenas empresas têm a sua actividade mais orientada localmente com uma exposição internacional limitada. Desta constatação é de esperar que os retornos das *small* e *large caps* não estejam perfeitamente correlacionados, resultando daí ganhos para os investidores que adoptam uma estratégia “*size diversification*”. Este argumento, no entanto, só será válido se a estrutura temporal da correlação entre os retornos das *small* e *large caps* for estável e não exibir comportamento assimétrico, isto é, se em períodos de *bear market* a correlação entre os retornos não for superior à que se verifica em períodos de *bull market*.

Assim, a questão principal que se coloca e se procura responder no presente trabalho é a seguinte: Será que as correlações entre os retornos das *small*, *mid* e *large caps* da zona euro evidenciam estabilidade e um comportamento simétrico ao longo do tempo, ou em contraste, revelam-se instáveis e mais elevadas em períodos de *bear market*? Para responder a esta questão procede-se, respectivamente, nas secções 3.4 e 3.5 do presente trabalho a uma análise não condicional e condicional das correlações entre os retornos de portfolios de acções da zona euro formados por empresas com diferente capitalização bolsista. Antes porém, apresenta-se a metodologia utilizada para construir os *portfolios* referidos.

3.2. Metodologia Utilizada na Construção dos Índices da Zona Euro Baseados na Capitalização Bolsista

Neste estudo pretende-se investigar a estrutura temporal da correlação entre os retornos de empresas de diferente dimensão, medida pela capitalização bolsista, na zona euro. Para o efeito torna-se necessário dispor de séries temporais para os retornos das *large*, *mid* e *small caps* que satisfaçam simultaneamente as seguintes condições: todos os índices deverão ser construídos segundo a mesma metodologia, cada acção num dado momento de tempo só pertence a um dado índice e por último os índices formados deverão assumir a forma de *total return index*¹. Analisados os índices publicitados pelas mais diversas entidades não se encontrou nenhuma família de índices que preenchesse todos requisitos necessários à realização do estudo pretendido², pelo que decidiu-se proceder à construção de índices próprios. Esses índices, construídos com base nos quintis da capitalização bolsista, foram designados por:

- Índice S1, que é composto por acções de empresas da zona euro cuja capitalização bolsista é inferior ao primeiro quintil, ou seja, empresas de menor dimensão;
- Índices S2, S3 e S4, que são constituídos por acções de empresas da zona euro com capitalização bolsista compreendida entre o primeiro e o quarto quintil, ou seja, empresas de dimensão média/baixa, média e média/alta, respectivamente;

¹ Num índice do tipo *total return* assume-se que os dividendos distribuídos (ou qualquer outra forma de distribuição de resultados) pelas empresas constituintes do índice são reinvestidos. Esta tipologia de índice é usualmente considerada como sendo uma medida mais adequada para se determinar o retorno auferido pelos investidores.

² Os índices *MSCI (Morgan Stanley Capital International)* são os que mais frequentemente são utilizados para realizar estudos académicos sobre mercados accionistas. Contudo, considerando os índices *MSCI EMU Index* e *MSCI EMU Small Cap Index*, encontrou-se alguma sobreposição entre as empresas constituintes na medida em que o primeiro inclui *large*, *mid* e *small caps*. Também se equacionou a hipótese de utilizar os índices DJ Euro STOXX, que estão disponíveis sob a forma *total return* e para as *large*, *mid* e *small caps*. Neste caso constatou-se que o número de empresas constituintes de cada índice era relativamente pequeno (apenas duzentas em cada índice) não representando assim, de forma exaustiva, todo o universo dos mercados accionistas da zona euro.

- Índice S5, que integra as acções das empresas da zona euro cuja capitalização bolsista é superior ao quarto quintil, ou seja, empresas de grande dimensão;

Para a formação dos referidos índices utilizou-se informação constante da base de dados DATASTREAM tendo-se adoptado a seguinte metodologia:

1. Em primeiro lugar elaborou-se uma lista das acções cotadas nos mercados accionistas da zona euro, em pelo menos um dos anos do período compreendido entre 1999 e 2006³.
2. Construída a lista inicial foram removidas, entre outras, acções não comuns, tais como acções preferenciais.
3. Após esta primeira filtragem procedeu-se à elaboração de listas anuais (8 no total, respeitantes ao período analisado). Para compor estas listas apenas foram consideradas acções de empresas que no início de cada ano apresentassem uma capitalização bolsista superior a 100 milhões de euros⁴ e capitais próprios positivos.
4. No início de cada ano, com base nas listas anuais, ordenaram-se as acções por ordem crescente da capitalização bolsista, determinaram-se os respectivos quintis e procedeu-se à afectação das mesmas a cada índice. De seguida calcularam-se as ponderações de cada acção constituinte dos cinco índices com base no respectivo valor da capitalização bolsista.
5. Determinada a composição dos cinco índices em cada ano, calculou-se a taxa de retorno semanal para cada acção individual i na semana t como se segue:

$$r_{i,t} = \frac{R_{i,t} - R_{i,t-1}}{R_{i,t-1}} \quad (3.1)$$

³ Apenas foram considerados dados a partir de 1999, inclusive, de forma a evitar quebras estruturais induzidas pela introdução da moeda única. As acções das empresas da Alemanha, Áustria, Bélgica, Espanha, Finlândia, França, Holanda, Irlanda, Itália, Luxemburgo e Portugal foram consideradas em todo o período amostral. As acções das empresas da Grécia apenas foram consideradas para efeitos de construção dos índices a partir de 2001, altura em que este país passou a adoptar a moeda euro.

⁴ Apenas se consideraram acções de empresas com uma capitalização bolsista superior a 100 milhões de euros, de forma a excluir empresas de muito pequena dimensão, tradicionalmente de baixa liquidez.

em que $R_{i,t}$ representa a cotação do *Total Return Index*⁵ para a acção i na quarta-feira⁶ da semana t ;

6. Por último, dispondo da composição dos cinco índices em cada ano do período amostral e das taxas de retorno semanal para cada acção individual calcularam-se os índices referidos. A base (100) de cada índice foi fixada no dia 06/01/1999. Os índices foram revistos anualmente no início de cada ano.

Os índices referidos foram calculados semanalmente com a justificação de que, por um lado, a utilização de dados diários tenderia a introduzir bastante “ruído” na análise e, por outro lado, a utilização de dados mensais tornaria a dimensão da amostra muito reduzida tendo em atenção o estudo que se pretende efectuar.

No anexo A do presente trabalho apresenta-se uma síntese da composição sectorial e regional dos índices calculados.

3.3. Propriedades Estatísticas das Taxas de Retorno Semanal dos Índices da Zona Euro Baseados na Capitalização Bolsista

Para construir as séries individuais das taxas de retorno semanais dos índices da zona euro baseados na capitalização bolsista no período compreendido entre 13/01/1999 e 27/12/2006 (416 observações) recorreu-se às cotações semanais dos índices referidos no ponto anterior. Com base nestas, calcularam-se as respectivas taxas de retorno semanal compostas continuamente através da seguinte expressão:

⁵ De acordo com a DATASTREAM, *Total Return Index (RI)* é definido como: “The return index represents the theoretical aggregate growth in value of the constituents of the index. The index constituents are deemed to return an aggregate daily dividend which is included as an incremental amount to the daily change in price index. RI is constructed [...] as follows:

$$RI_t = RI_{t-1} * \frac{PI_t}{PI_{t-1}} * \left(1 + \frac{DY_t}{100 * N} \right)$$

Where: RI_t = return index on day t , RI_{t-1} = return index on previous day, PI_t = price index on day t , PI_{t-1} = price index on previous day, DY_t = dividend yield % on day and N = number of working days in the year (taken to be 260).”

⁶ Foi considerada a cotação da quarta-feira de forma a evitar os conhecidos “efeito fim-de-semana” e o “efeito segunda-feira”.

$$r_{i,t} = 100 * \ln \left(\frac{I_{i,t}}{I_{i,t-1}} \right) \quad (3.2)$$

em que $I_{i,t}$ representa a cotação do índice i na semana t .

Nas figuras 3.1 a 3.5 apresenta-se a evolução da cotação e da taxa de retorno semanal dos índices S1, S2, S3, S4 e S5, no período compreendido entre 13/01/1999 e 27/12/2006.

Figura 3.1 – Evolução da cotação e da taxa de retorno semanal do índice S1

(Janeiro de 1999 a Dezembro de 2006 – 416 observações)

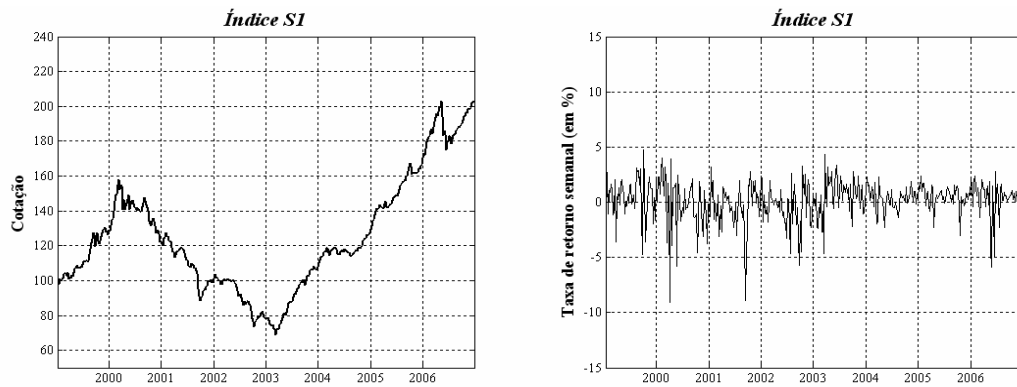


Figura 3.2 – Evolução da cotação e da taxa de retorno semanal do índice S2

(Janeiro de 1999 a Dezembro de 2006 – 416 observações)

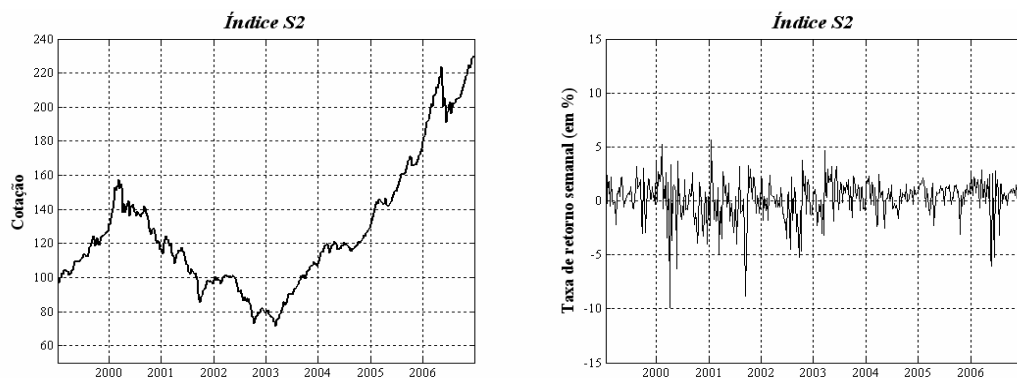
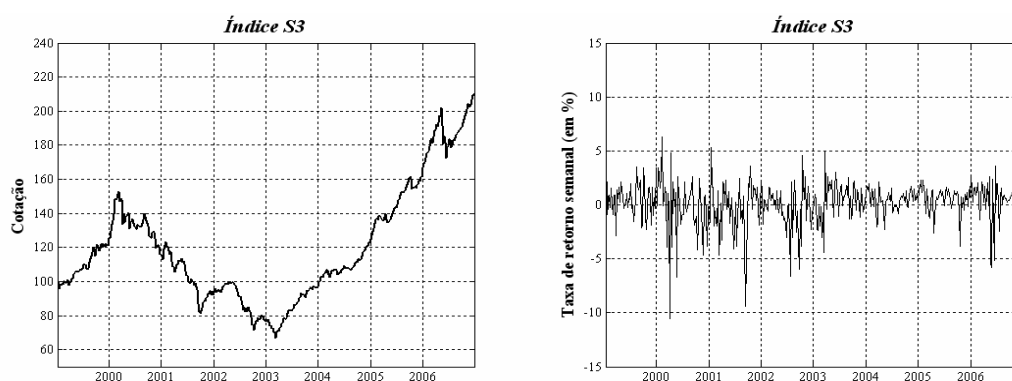
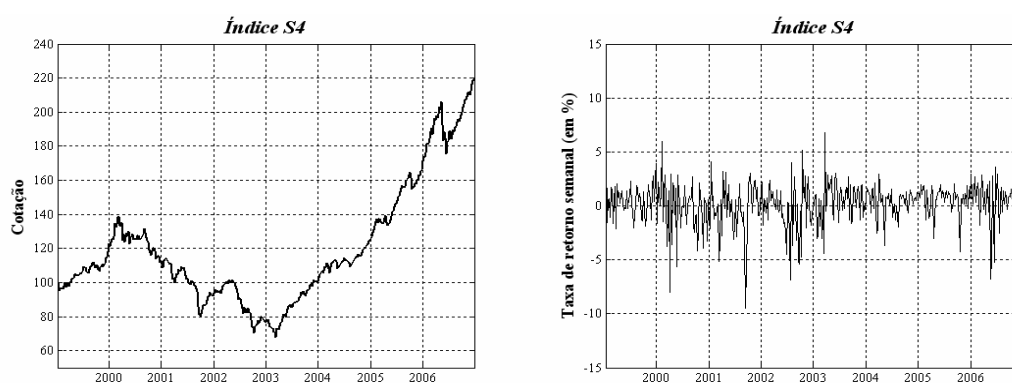


Figura 3.3 – Evolução da cotação e da taxa de retorno semanal do índice S3

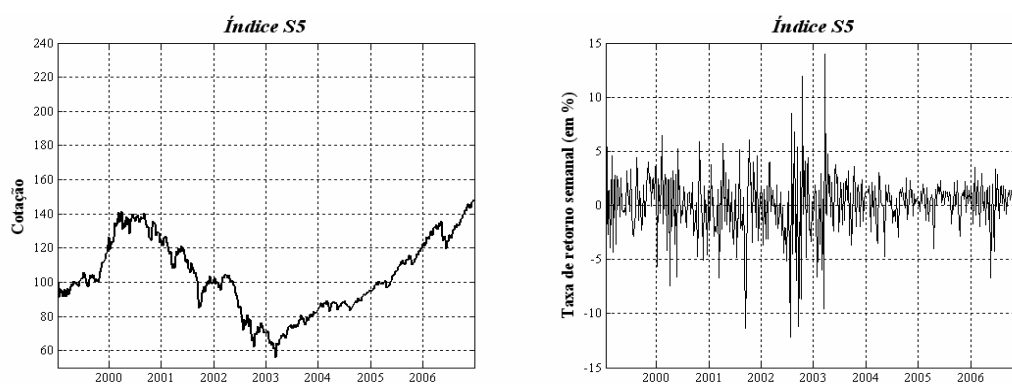
(Janeiro de 1999 a Dezembro de 2006 – 416 observações)

**Figura 3.4 – Evolução da cotação e da taxa de retorno semanal do índice S4**

(Janeiro de 1999 a Dezembro de 2006 – 416 observações)

**Figura 3.5 – Evolução da cotação e da taxa de retorno semanal do índice S5**

(Janeiro de 1999 a Dezembro de 2006 – 416 observações)



Dos gráficos anteriores identifica-se claramente, nos anos de 2000 a 2002, um período de *bear market* e um período de *bull market* nos anos de 2003 a 2006. Será ainda de realçar a superioridade, em termos de *performance*, dos índices S1, S2, S3 e S4 relativamente ao índice das *large caps* (S5).

Assinale-se que, enquanto a hipótese de estacionaridade em média das séries das taxas de retorno se apresenta mais verosímil, nas séries originais das cotações, considerando as diversas tendências registadas, essa hipótese é claramente rejeitada.

Em termos de variância, e com base nos gráficos das taxas de retorno semanais, pode considerar-se que, no período de *bear market*, esta apresenta valores mais elevados quando comparada com o período de *bull market* (esta característica é mais evidente no índice das *large caps*, ou seja, no índice S5). Pelos gráficos evolutivos das taxas de retorno conclui-se igualmente que as taxas de retorno evidenciam *clusters* de volatilidade, isto é, aos períodos de relativa acalmia sucedem-se períodos de grande volatilidade.

Na tabela 3.1 reportam-se as principais estatísticas descritivas das taxas de retorno semanal dos cinco índices em análise.

Tabela 3.1 – Estatísticas descritivas das taxas de retorno semanal dos índices S1, S2, S3, S4 e S5

(13/01/1999 a 27/12/2006 – 416 observações)

Descrição	S1 (Small Caps)	S2	S3	S4	S5 (Large Caps)
N.º de observações	416	416	416	416	416
Média (%)	0,170	0,200	0,179	0,189	0,094
Mediana (%)	0,391	0,495	0,475	0,541	0,452
Desvio-padrão (%)	1,786	1,854	1,927	1,970	2,881
Mínimo (%)	-9,035	-9,904	-10,543	-9,492	-12,154
Máximo (%)	4,770	5,619	6,286	6,778	13,960
Coeficiente de assimetria	-1,251	-1,205	-1,317	-1,081	-0,432
Coeficiente de kurtosis	6,637	6,824	7,549	6,000	6,626

Ao longo do período amostral constata-se que os índices das *small e mid caps* (S1 ao S4) apresentam uma taxa de retorno média semanal claramente superior à do índice das *large caps* (S5). Este último índice é ainda aquele que regista um nível de risco, medido pelo desvio-padrão, mais elevado (2,881%), enquanto o índice das empresas de menor dimensão evidenciou a mais baixa volatilidade (1,786%). Este facto é estranho pois, à priori, dada a relação positiva entre o risco e o retorno, seria de esperar que as *large cap* apresentassem o menor nível de risco. No entanto, cabe aqui referir que muitos autores têm questionado a validade das medidas tradicionais do risco, como seja o desvio-padrão, para aferir o risco efectivamente associado às *small caps*.

Observa-se igualmente que as distribuições da taxa de retorno semanal dos índices analisados são fortemente leptocúrticas e assimétricas. O valor do coeficiente de kurtosis é superior ao valor da distribuição normal (3) para todas as séries de retornos. Por seu turno, os coeficientes de assimetria indicam a presença de assimetria negativa. Estas constatações, associadas à presença de valores extremos (taxas de retorno semanais muito elevadas e muito baixas), levam-nos a concluir que as cinco séries de retornos analisadas não são normalmente distribuídas. Esta conclusão é corroborada pelos gráficos seguintes (Fig. 3.6 a 3.10), onde no gráfico à esquerda se compara a distribuição empírica das taxas de retorno em análise com a distribuição normal de média e variância igual à da distribuição empírica e no gráfico à direita se apresenta o QQ plot.

Figura 3.6 – Distribuição empírica e QQ plot da taxa de retorno semanal do índice S1
(Janeiro de 1999 a Dezembro de 2006 – 416 observações)

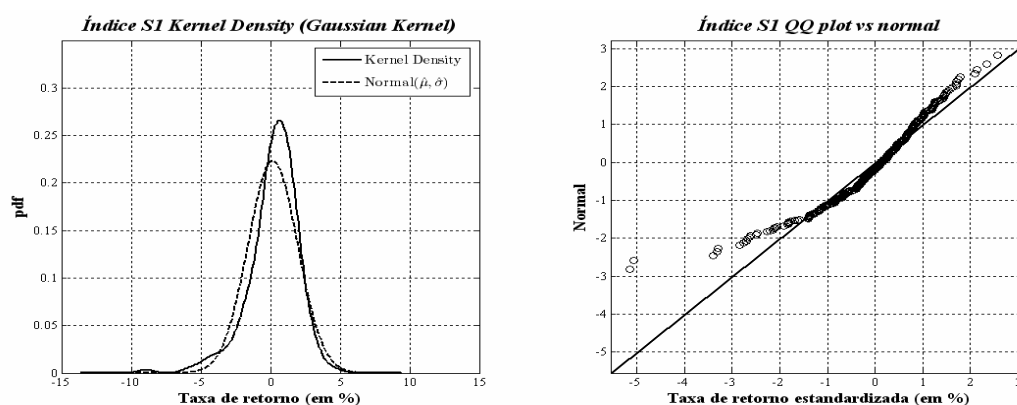


Figura 3.7 – Distribuição empírica e QQ plot da taxa de retorno semanal do índice S2
(Janeiro de 1999 a Dezembro de 2006 – 416 observações)

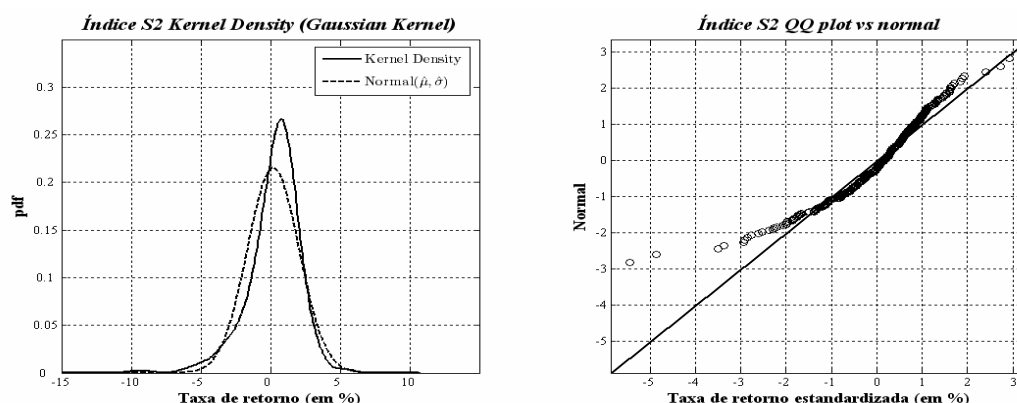


Figura 3.8 – Distribuição empírica e QQ plot da taxa de retorno semanal do índice S3
(Janeiro de 1999 a Dezembro de 2006 – 416 observações)

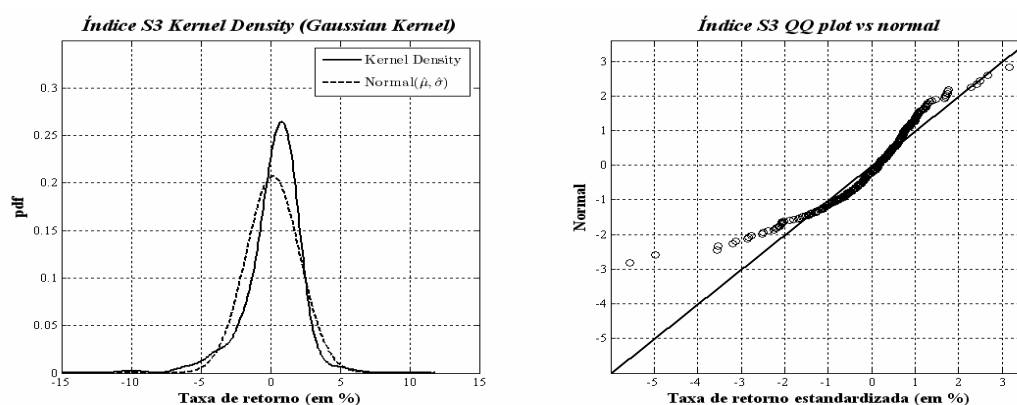


Figura 3.9 – Distribuição empírica e QQ plot da taxa de retorno semanal do índice S4
(Janeiro de 1999 a Dezembro de 2006 – 416 observações)

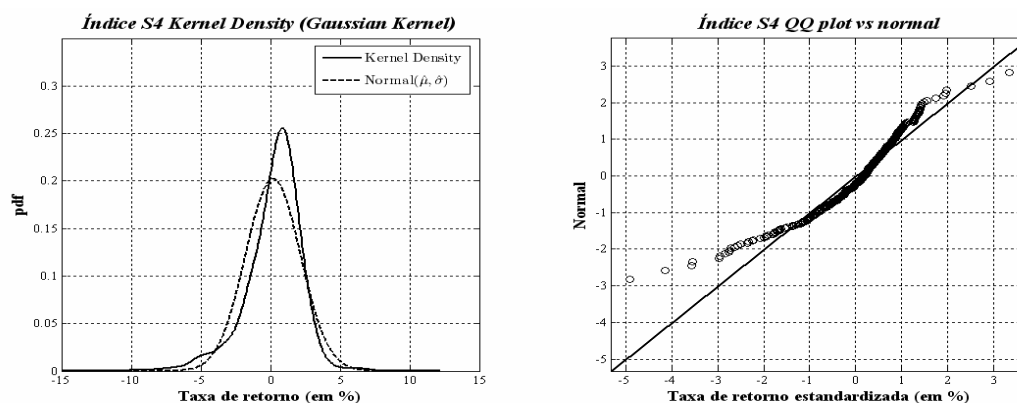
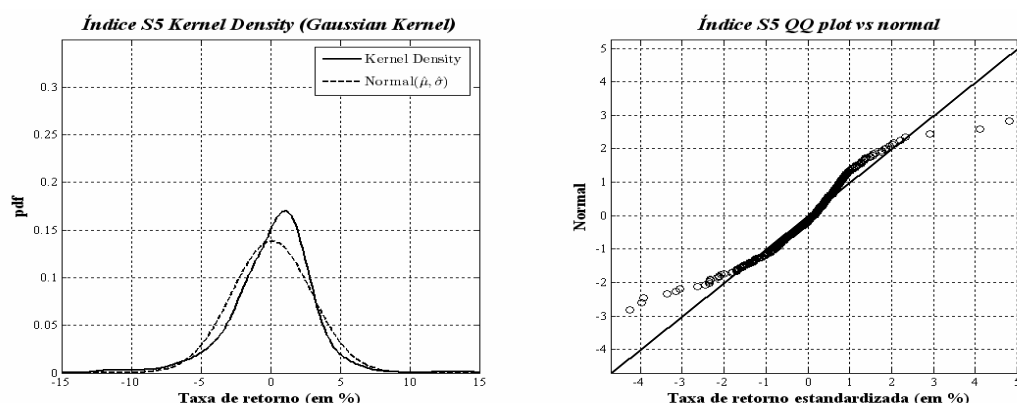


Figura 3.10 – Distribuição empírica e QQ plot da taxa de retorno semanal do índice S5
(Janeiro de 1999 a Dezembro de 2006 – 416 observações)



A hipótese das distribuições das taxas de retorno semanal dos índices analisados serem normais é igualmente rejeitada, para um nível de significância de 0,1%, através do teste de Jarque-Bera, cujos resultados se sintetizam na tabela 3.2.

Tabela 3.2 – Resultados do teste de normalidade (Jarque-Bera) para as taxas de retorno semanal dos índices S1, S2, S3, S4 e S5

De acordo com o teste de Jarque-Bera, sob a hipótese da normalidade, $JB = (N/6) \left[S^2 + (K-3)^2/4 \right]$ segue assintoticamente uma distribuição do qui-quadrado com 2 g.l., onde S e K representam, respectivamente, os coeficientes de assimetria e kurtosis amostrais e N a dimensão da amostra. Entre parênteses apresentam-se os p -values.

Descrição	S1 (Small Caps)	S2	S3	S4	S5 (Large Caps)
JB	337,786 (0,000)	354,060 (0,000)	479,023 (0,000)	237,065 (0,000)	240,912 (0,000)

Paralelamente à hipótese gaussiana das séries das taxas de retorno, interessa igualmente investigar hipótese de estas serem variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.). Para o efeito considerou-se o teste BDS, devido a Brock, Dechert e Scheinkman (1987 e 1996), que permite ensaiar a hipótese nula de que as taxas de retorno são i.i.d. contra uma variedade de alternativas de modelos estocásticos lineares e

não lineares. Para efectuar o teste BDS⁷, consideraram-se diferentes valores para m e ε , em que m é a dimensão de imersão (*embedding dimension*) e ε é uma medida da distância entre os vectores m - dimensionais. Os resultados obtidos são apresentados na tabela 3.3.

Tabela 3.3 – Resultados do teste BDS para as taxas de retorno semanal dos índices S1, S2, S3, S4 e S5

Esta tabela apresenta os valores amostrais da estatística do teste BDS para as taxas de retorno semanal dos índices S1, S2, S3, S4 e S5, tendo-se considerado $m = 2, 3, \dots, 6$ e $\varepsilon = 0,5 * \sigma; 0,75 * \sigma; 1,0 * \sigma; 1,25 * \sigma; 1,5 * \sigma$, em que σ é o desvio-padrão amostral da respectiva série. Brock, Dechert e Scheinkman (1987 e 1996) demonstraram que, sob a hipótese nula, a estatística de teste tem distribuição assintótica normal reduzida.

Índice	m	ε				
		$0,5 * \sigma$	$0,75 * \sigma$	$1,0 * \sigma$	$1,25 * \sigma$	$1,5 * \sigma$
S1	2	8,726	8,513	8,107	7,540	7,185
	3	12,526	10,797	9,321	8,235	7,626
	4	17,372	13,550	10,715	9,084	8,280
	5	24,674	17,139	12,573	10,171	8,960
	6	35,047	21,743	14,697	11,381	9,659
S2	2	8,040	7,928	7,320	6,664	5,959
	3	9,453	8,936	8,185	7,432	6,517
	4	12,502	10,912	9,498	8,522	7,482
	5	15,794	13,276	10,917	9,465	8,222
	6	21,752	16,769	12,958	10,876	9,239
S3	2	6,279	6,252	5,764	5,339	5,035
	3	8,929	8,176	7,247	6,546	6,034
	4	12,163	10,351	8,722	7,630	6,876
	5	16,660	13,149	10,429	8,829	7,786
	6	23,642	17,003	12,612	10,269	8,849
S4	2	4,489	4,513	4,770	4,961	5,056
	3	7,051	6,193	6,072	6,081	6,025
	4	9,980	7,749	7,134	6,889	6,812
	5	13,161	9,575	8,279	7,701	7,542
	6	17,857	12,041	9,642	8,525	8,173
S5	2	5,275	4,966	4,944	4,709	5,101
	3	8,129	6,726	6,070	5,449	5,619
	4	12,322	9,425	8,127	6,970	6,761
	5	17,061	11,853	10,051	8,534	7,980
	6	24,628	15,367	12,176	9,981	8,901

⁷ Para calcular o valor da estatística de teste recorreu-se ao programa disponibilizado por Ludwig Kanzler (*Department of Economics, University of Oxford, England*) em <http://fmwww.bc.edu/recpec/bocode/b/bds.m>.

Confrontando os valores amostrais da estatística do teste BDS com o valor crítico (2,575, para um nível de significância de 1%) conclui-se pela rejeição da hipótese nula, o que demonstra que as taxas de retorno semanal dos cinco índices da zona euro baseados na capitalização bolsista não verificam a hipótese i.i.d..

A rejeição da hipótese i.i.d. poderá ser explicada, entre outros, pelos seguintes factores: existência de autocorrelação, situação em que estaremos perante relações lineares significativas; e/ou heteroscedasticidade, caso em que a rejeição da hipótese i.i.d. é explicada por dependência não linear nos dados.

Para investigar a existência de autocorrelação nas taxas de retorno em análise realizou-se, como é comum, o teste de Ljung-Box (robusto na presença de heteroscedasticidade), cujos resultados são apresentados na tabela que se segue.

Tabela 3.4 – Teste de Ljung-Box aplicado às séries das taxas de retorno semanal dos índices S1, S2, S3, S4 e S5

Esta tabela apresenta os valores amostrais da estatística do teste de Ljung-Box para as taxas de retorno semanal dos índices S1, S2, S3, S4 e S5 considerando 8, 12 e 24 *lags*. Dado que a maior parte das séries financeiras exibem heteroscedasticidade efectuou-se a correcção sugerida por Diebold (1986). Assim, sob a hipótese nula de serem simultaneamente iguais a zero os primeiros m coeficientes de autocorrelação ($H_0 : \rho_1 = \dots = \rho_m = 0$),

$$LB(m) = N(N+2) \sum_{k=1}^m \left(\frac{\hat{\sigma}^4}{\hat{\sigma}^4 - \hat{\epsilon}_k^2} \right) \frac{\hat{\rho}_k^2}{N-k}$$

segue assintoticamente uma distribuição do qui-quadrado com m g.l., onde $\hat{\rho}_k$ representa coeficiente de autocorrelação amostral de ordem k da taxa de retorno, $\hat{\epsilon}_k^2$ é uma estimativa da k -ésima autocovariância do quadrado da taxa de retorno, $\hat{\sigma}^4$ é o quadrado da estimativa do segundo momento não condicionado da taxa de retorno e N é a dimensão da amostra. Entre parênteses apresentam-se os *p-values*.

Descrição	S1 (Small Caps)	S2	S3	S4	S5 (Large Caps)
LB (8)	17,385 (0,026)	15,866 (0,044)	11,701 (0,165)	8,796 (0,360)	9,293 (0,318)
LB (12)	27,984 (0,006)	23,795 (0,022)	14,661 (0,260)	11,610 (0,477)	12,712 (0,390)
LB (24)	45,856 (0,005)	33,476 (0,094)	21,704 (0,597)	19,105 (0,746)	18,499 (0,778)

Considerando os resultados obtidos pode-se afirmar que, para os *lags* considerados e para um nível de significância de 5%, existe evidência estatística de que as taxas de

retorno semanal dos índices S1 e S2 exibem autocorrelação (na taxa de retorno do índice S2 e para $m = 12$ esta conclusão só é válida considerando um nível de significância de 10%). Para as séries das taxas de retorno dos índices S3, S4 e S5 a evidência estatística aponta para a ausência de autocorrelação.

Para investigar a existência de heteroscedasticidade condicionada (efeitos ARCH) nas taxas de retorno dos índices analisados realizou-se o teste LM de Engle (1982)⁸, cujos resultados são apresentados na tabela 3.5.

Tabela 3.5 – Teste LM de Engle (1982) aplicado às séries das taxas de retorno semanal dos índices S1, S2, S3, S4 e S5

Esta tabela apresenta os valores amostrais da estatística do teste LM de Engle (1982) para as taxas de retorno semanal dos índices S1, S2, S3, S4 e S5 considerando 3, 6 e 12 *lags*. Sob a hipótese nula da ausência de heteroscedasticidade condicionada nos primeiros m *lags*,

$$ARCH(m) = NR^2$$

segue assintoticamente uma distribuição do qui-quadrado com m g.l., onde N é a dimensão da amostra e R^2 é o coeficiente de determinação da regressão de r_t^2 sobre $1, r_{t-1}^2, \dots, r_{t-m}^2$, sendo r_t o desvio da taxa de retorno na semana t em relação à média. Entre parênteses apresentam-se os *p-values*.

Descrição	S1 (Small Caps)	S2	S3	S4	S5 (Large Caps)
ARCH (3)	24,679 (0,000)	19,066 (0,000)	22,614 (0,000)	35,453 (0,000)	60,315 (0,000)
ARCH (6)	25,373 (0,000)	19,232 (0,004)	22,773 (0,001)	36,171 (0,000)	75,351 (0,000)
ARCH (12)	30,474 (0,002)	28,004 (0,006)	30,258 (0,003)	39,508 (0,000)	88,933 (0,000)

Os resultados obtidos permitem concluir que, para os *lags* considerados e para um nível de significância de 1%, todas as séries das taxas de retorno analisadas exibem heteroscedasticidade condicionada.

⁸ Em alternativa poderia ter sido considerado o teste de Ljung-Box sobre os quadrados das taxas de retornos (em termos assintóticos, os resultados dos dois testes são idênticos). Refira-se ainda que, em bom rigor, o estudo da presença de heteroscedasticidade condicionada para as séries das taxas de retorno semanal dos índices S1 e S2, dada a presença de autocorrelação, deveria incidir sobre os resíduos de estimação de um filtro linear (por exemplo, um modelo do tipo ARMA) e não sobre as séries originais.

Como conclusão do estudo das propriedades estatísticas das taxas de retorno semanal dos índices S1, S2, S3, S4 e S5, podemos referir que estas evidenciam a maioria das propriedades que habitualmente estão presentes nas séries financeiras, ou seja, excesso de kurtosis e assimetria e consequente rejeição da hipótese da normalidade e por último, presença de heteroscedasticidade condicionada. No caso das séries das taxas de retorno semanal dos índices S1 e S2 identificou-se ainda a presença de autocorrelação.

3.4. Propriedades das Correlações Não Condicionais entre as Taxas de Retorno Semanal dos Índices da Zona Euro Baseados na Capitalização Bolsista

Após terem-se identificado as principais propriedades estatísticas univariadas das taxas de retorno semanal dos índices S1, S2, S3, S4 e S5, procedeu-se à análise das correlações não condicionais entre as referidas taxas de retorno.

Em primeiro lugar foi estimada a matriz de correlações amostral entre os índices estudados referente a todo o período amostral, ou seja, de 1999 a 2006. Posteriormente, estimaram-se, para cada ano acima considerado, as matrizes de correlações amostrais e testou-se a hipótese de estas serem iguais. Por último, considerando todo o período amostral, calcularam-se as *semicorrelations* de forma a investigar a eventual existência de assimetrias ao nível das correlações.

A tabela 3.6 apresenta a matriz de correlações das taxas de retorno semanal dos cinco índices da zona euro baseados na capitalização bolsista. Da análise da mesma destacam-se os seguintes aspectos:

- No período considerado, as correlações entre as taxas de retorno semanal dos índices considerados apresentam-se positivas e bastante elevadas, o que permite concluir, mesmo sem fazer uso de inferência, pela sua significância estatística;
- O índice das *large caps* é o que, em média, apresenta uma menor correlação com os restantes;

- Verifica-se, por último, que quanto maior a diferença entre capitalizações bolsistas menor o grau de correlação.

Tabela 3.6 – Matriz de correlações entre as taxas de retorno semanal dos índices S1, S2, S3, S4 e S5

(13/01/1999 a 27/12/2006 – 416 observações)

	S1	S2	S3	S4	S5
S1	1	0,931	0,928	0,876	0,741
S2	0,931	1	0,951	0,914	0,770
S3	0,928	0,951	1	0,939	0,807
S4	0,876	0,914	0,939	1	0,884
S5	0,741	0,770	0,807	0,884	1
Média	0,869	0,892	0,906	0,925	0,801
Média Global	0,874				

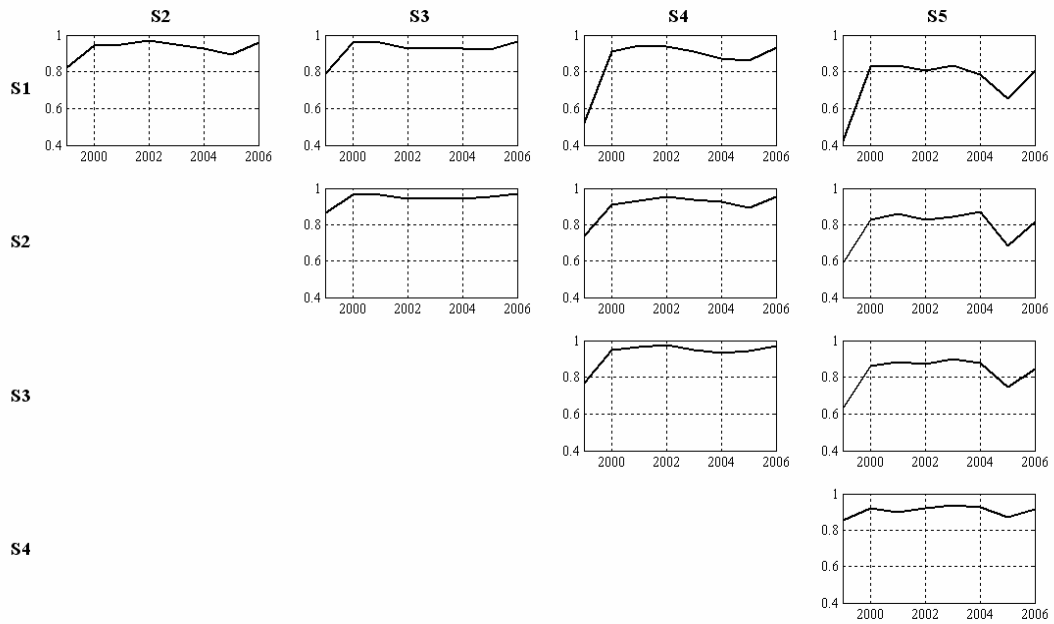
Na figura 3.11 apresenta-se a evolução anual das correlações entre as cinco taxas de retorno semanal dos índices analisados. Uma observação atenta da mesma permite tirar as seguintes ilações:

- No ano de 1999 (ano de introdução da moeda única), em média, as correlações entre as diferentes taxas de retorno situaram-se num patamar inferior ao dos restantes anos. Esta constatação é mais evidente para as correlações entre os retornos das *large caps* (S5) e os das restantes empresas. A mesma conclusão se pode tirar relativamente à correlação entre os retornos do índice S4 e S1.
- Verifica-se igualmente que as correlações entre os retornos dos índices S1, S2 e S3 permaneceram, durante todo o período amostral, num nível elevadíssimo, podendo-se falar mesmo de correlação quase perfeita.
- Durante todo o período amostral, as correlações entre os retornos dos índices S1, S2, S3 e S4 relevaram-se relativamente estáveis (excepção feita, como já referido, à correlação entre os índices S1 e S4).
- No período analisado, as correlações que parecem evidenciar uma maior instabilidade são as do índice S5 com os índices S1, S2 e S3.

- Por último, constata-se que as correlações entre os retornos dos diferentes índices considerados apresentaram-se ligeiramente mais elevadas no período de *bear market*, ou seja, nos anos de 2000 a 2002.

Figura 3.11 – Evolução anual das correlações entre as taxas de retorno semanal dos índices S1, S2, S3, S4 e S5

(Período compreendido entre os anos de 1999 e 2006)



De forma a investigar a estabilidade temporal da matriz de correlações entre as taxas de retorno dos cinco índices da zona euro baseados na capitalização bolsista realizou-se o teste de Jennrich (1970)⁹. Convém referir, antes de mais, que este teste é bastante

⁹ O teste de Jennrich (1970) permite testar a homogeneidade de um conjunto de matrizes de correlação. Considere-se que $R_1, \dots, R_k$ representam as matrizes de correlações amostrais entre p variáveis calculadas a partir de amostras independentes de dimensão $n_1, \dots, n_k$, extraídas de k populações normais. Suponha-se que as p variáveis nas k populações normais têm a mesma, mas desconhecida, matriz de correlações. Defina-se $n = n_1 + \dots + n_k$, $\bar{R} = (n_1 R_1 + \dots + n_k R_k) / n = (\bar{r}_{ij})$, $\bar{R}^{-1} = (\bar{r}^{ij})$, $S = (\delta_{ij} + \bar{r}_{ij} \bar{r}^{ij})$, em que δ_{ij} é o delta de Kronecker, e $Z_i = \sqrt{n} \bar{R}^{-1} (R_i - \bar{R})$. Então, sob a hipótese da homogeneidade das matrizes de correlações nas k populações, a estatística:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \left\{ \frac{1}{2} \text{tr}(Z_i^2) - \text{diag}'(Z_i) S^{-1} \text{diag}(Z_i) \right\}$$

sensível à não normalidade das populações pelo que os resultados obtidos deverão ser interpretados com algumas reservas. Aquele autor demonstrou que, sob a hipótese da homogeneidade da matriz de correlações, a estatística de teste segue, assintoticamente, uma distribuição do qui-quadrado com $(k-1)p(p-1)/2$ graus de liberdade, onde k representa o número de populações considerado (no presente caso 8, correspondentes aos anos do período amostral) e p o número de variáveis (neste caso 5, correspondentes às taxas de retorno semanal dos cinco índices considerados). Calculado o valor amostral da estatística de teste obteve-se um valor de 206,397 que, confrontado com o valor crítico da distribuição do qui-quadrado (90,531, para 70 g.l. e um nível de significância de 5%), leva-nos a concluir, com as reservas já referidas, pela rejeição da hipótese da estabilidade temporal da matriz de correlações entre as taxas de retorno dos cinco índices analisados.

Para além da hipótese da estabilidade temporal, interessa ainda investigar a eventual presença de assimetrias nas correlações. Para o efeito, considerando toda a amostra, calcularam-se as *semicorrelations* entres os índices S1, S2, S3, S4 e S5 quando ambas as taxas de retorno são negativas (*down-down correlations*) e positivas (*up-up correlations*). Os resultados obtidos são apresentados na tabela 3.7. e permitem tirar as conclusões que se seguem:

- Em concordância com outros estudos empíricos, a correlação entre as taxas de retorno dos cinco índices analisados parece ser mais elevada quando os mercados estão em queda - enquanto, a média global das *down-down correlations* é de 0,841 já a das *up-up correlations* é somente de 0,698.
- Saliente-se o facto de que as correlações entre os índices S1 e S2 (compostos essencialmente por *small ou small/mid caps*) com os restantes são aquelas em que se faz notar mais a presença de assimetria, dado o maior diferencial entre as *down-down* e *up-up correlations*.

segue, assintoticamente, uma distribuição do qui-quadrado com $(k-1)p(p-1)/2$ graus de liberdade. Valores elevados de χ^2 sugerem a rejeição da hipótese de todas as k populações terem a mesma matriz de correlações.

- Verifica-se, por último, que a assimetria nas correlações tende a ser mais elevada quão maior é a diferença entre capitalizações bolsistas.

Tabela 3.7 – Matrizes de *Semicorrelations* entre as taxas de retorno semanal dos índices S1, S2, S3, S4 e S5

(13/01/1999 a 27/12/2006 – 416 observações)

Up-Up Correlations					
	S1	S2	S3	S4	S5
S1	1	0,749	0,770	0,638	0,531
S2	0,749	1	0,851	0,725	0,551
S3	0,770	0,851	1	0,807	0,607
S4	0,638	0,725	0,807	1	0,746
S5	0,531	0,551	0,607	0,746	1
Média	0,672	0,719	0,759	0,798	0,609
Média Global	0,698				
Down-Down Correlations					
	S1	S2	S3	S4	S5
S1	1	0,940	0,920	0,881	0,681
S2	0,940	1	0,935	0,897	0,672
S3	0,920	0,935	1	0,935	0,718
S4	0,881	0,897	0,935	1	0,826
S5	0,681	0,672	0,718	0,826	1
Média	0,856	0,861	0,877	0,911	0,724
Média Global	0,841				

Como conclusão da análise das correlações não condicionais entre as taxas de retorno semanal dos índices S1, S2, S3, S4 e S5 interessa reter os seguintes aspectos:

- No período analisado, em média, as correlações registam valores positivos e relativamente elevados (excepção feita ao ano de 1999);
- O índice S5 apresenta, no entanto e em média, uma correlação com os restantes índices mais baixa;

- A correlação entre os diferentes índices é mais elevada quando a diferença na capitalização bolsista aumenta;
- Rejeita-se, com as reservas apontadas, a hipótese da estabilidade temporal da matriz de correlações entre os retornos dos cinco índices considerados neste trabalho (este facto parece ficar a dever-se à correlação do índice S5 com os restantes);
- Parece haver uma clara evidência de que as correlações são assimétricas revelando-se mais elevadas quando os mercados financeiros estão em queda. Este último facto é mais evidente nas correlações entre a empresa de baixa capitalização bolsista (índice S1 e S2) e as restantes.

3.5. Modelização Condicional das Correlações entre as Taxas de Retorno Semanal dos Índices da Zona Euro Baseados na Capitalização Bolsista

No ponto anterior deste trabalho concluiu-se que as correlações entre as taxas de retorno semanal dos índices S1, S2, S3, S4 e S5 parecem evidenciar alguma instabilidade temporal, apresentando-se mais elevadas quando os mercados estão em queda. Este facto conduz-nos à modelização condicional daquelas correlações através de modelos que, por um lado, contemplem o comportamento dinâmico, e por outro, reflectam a existência de assimetria.

Assim, nesta secção procede-se à modelização condicional das correlações entre as taxas de retorno semanal dos índices estudados utilizando para o efeito os modelos de correlações condicionais descritos no ponto 2.2. do presente trabalho. Começa-se por fazer uma breve descrição da metodologia utilizada, para posteriormente se estimar os modelos de correlações condicionais.

3.5.1. Metodologia

De forma a estimar as correlações condicionais entre as taxas de retorno semanal dos cinco índices analisados adoptou-se um procedimento de estimação sequencial em três fases.

Dado se ter concluído, em algumas das taxas de retorno dos índices considerados, pela existência de relações lineares significativas, começou-se por modelizar as médias condicionais através de um sistema VAR (*Vector Autoregressive*). A utilização de um sistema VAR, ao invés de modelos ARMA univariados para cada série, justifica-se pela necessidade de incorporar na modelização a eventual existência de *spillovers* ao nível da média.

Após a estimação do modelo VAR, utilizaram-se os resíduos de estimação daí resultantes para estimar a variância condicional de cada uma das séries. Dada a multiplicidade de modelos existentes na literatura para o efeito, optou-se por estimar, para cada uma das séries dos resíduos, os dez modelos seguintes:

- i. GARCH - Bollerslev (1986)
- ii. AVGARCH - Taylor (1986) e de Schwert (1989)
- iii. NARCH - Higgins e Bera (1992)
- iv. EGARCH - Nelson (1991)
- v. ZARCH - Zakoian (1994)
- vi. GJR-GARCH - Glosten, Jagannathan e Runkle (1993)
- vii. APARCH - Ding, Granger e Engle (1993)
- viii. AGARCH - Engle (1990)
- ix. NAGARCH - Engle e Ng (1993)
- x. QGARCH - Sentana (1995)

seleccionando-se para cada série, com base em critérios de informação e metodologias de diagnóstico, aquele que melhor especifica a variância condicional.

Estimadas as variâncias condicionais de cada série, os resíduos estandardizados foram utilizados para estimar os parâmetros das correlações condicionais. Para modelizar as correlações condicionais consideraram-se os seguintes modelos alternativos:

- i. CCC - Bollerslev (1990)
- ii. DCC - Engle (2002)
- iii. ADCC, GDCC e AGDCC - Cappiello, Engle e Sheppard (2004 e 2006)

Dado que estes modelos são encaixados¹⁰, procedeu-se à realização de testes de Wald para seleccionar a melhor especificação. Nesta fase investigou-se ainda a possibilidade de haver quebras estruturais na estrutura temporal das correlações entre as taxas de retorno.

O processo de estimação sequencial em três fases justifica-se pela dificuldade em estimar simultaneamente os parâmetros das médias, variâncias e correlações. É evidente que esta metodologia implica a perda da eficiência dos estimadores. Contudo, se as médias e as variâncias estiverem correctamente especificadas, então os estimadores dos parâmetros das correlações condicionais serão, como se viu na secção 2.4. do presente trabalho, ainda consistentes.

3.5.2. Modelização das médias condicionais das taxas de retorno através de um sistema VAR

Antes de se passar à modelização das médias condicionais, convém salientar que o período amostral utilizado aqui em diante difere ligeiramente do indicado no início deste capítulo. Na medida em que a estimação de modelos VAR de diferentes ordens implica a perda de um número diferenciado de observações, reservaram-se as primeiras quinze para que o número total de observações utilizadas fosse sempre igual. Nesse sentido, todos os modelos VAR foram estimados no período compreendido entre 28/04/1999 e 27/12/2006, perfazendo um total de 401 observações.

¹⁰ Note-se que, tal como se viu no ponto 2.2.2. deste trabalho, os modelos CCC, DCC, ADCC, GDCC são versões restringidas do modelo AGDCC.

Para seleccionar a ordem do modelo VAR a utilizar, realizaram-se testes baseados no rácio de verosimilhanças. Assim, começou-se por estimar um modelo VAR(15)¹¹. De seguida estimou-se um VAR(14) e ensaiou-se a hipótese deste ser preferível ao VAR(15). Se o modelo VAR(14) for preferível ao VAR(15), estima-se um VAR(13) e ensaia-se novamente a hipótese deste ser preferível ao VAR(14). Repetiu-se o procedimento até que um modelo VAR de ordem $p-1$ não fosse preferível a um de ordem p . Os resultados dos referidos testes são apresentados na tabela que se segue.

Tabela 3.8 – Testes do rácio de verosimilhanças para selecção do modelo VAR a utilizar na modelização das médias condicionais das taxas de retorno semanal dos índices S1, S2, S3, S4 e S5

Esta tabela apresenta os valores amostrais da estatística do teste do rácio de verosimilhanças para se seleccionar a ordem do modelo VAR a utilizar na modelização das médias condicionais das taxas de retorno semanal dos índices S1, S2, S3, S4 e S5. Estimado um modelo $VAR(p)$ e um modelo $VAR(p-1)$ pretende-se ensaiar: $H_0 : VAR(p-1)$ vs $H_1 : VAR(p)$. Sob a hipótese nula, demonstra-se que:

$$LR = (N - c) \left[\ln |\hat{\Omega}_{p-1}| - \ln |\hat{\Omega}_p| \right]$$

segue assintoticamente uma distribuição do qui-quadrado com k^2 g.l., onde N é a dimensão da amostra, c é o número de parâmetros em cada equação do modelo não restringido, $\hat{\Omega}_p$ é a estimativa da matriz de variâncias e covariâncias dos resíduos das equações do modelo $VAR(p)$ e finalmente k representa o número de variáveis endógenas do sistema, no nosso caso, cinco. No cálculo dos p -values foram considerados 25 g.l..

$H_0 : VAR(p-1)$ vs $H_1 : VAR(p)$			LR	p -value
14	vs	15	29,363	0,249
13	vs	14	25,817	0,417
12	vs	13	32,997	0,131
11	vs	12	23,920	0,524
10	vs	11	31,788	0,164
9	vs	10	51,915	0,001

Face aos resultados obtidos, optou-se então por modelizar as médias condicionais das taxas de retorno semanal dos índices S1, S2, S3, S4 e S5 através de um modelo VAR(10). Estimado este modelo, ensaiaram-se as hipóteses dos resíduos de estimação resultantes das cinco equações, exibirem autocorrelação e heteroscedasticidade

¹¹ Na estimação dos modelos VAR foi utilizado o método OLS que permite, sob a hipótese da ausência de correlação contemporânea entre as perturbações aleatórias de cada equação, obter estimativas dos parâmetros de forma eficiente.

condicionada. Para tal, efectuaram-se os testes de Ljung-Box (robusto na presença de heteroscedasticidade) e o teste de Engle (1982), cujos resultados são reportados na tabela que se segue.

Tabela 3.9 – Testes de Ljung-Box e de Engle (1982) aplicados às séries dos resíduos de estimação do modelo VAR(10)

Nesta tabela, $LB(m)$ representa o valor amostral da estatística do teste de Ljung-Box (robusto na presença de heteroscedasticidade) para análise da hipótese de existência de autocorrelação nos primeiros m lags e $ARCH(m)$ representa o valor amostral da estatística do teste de Engle (1982) para investigar a existência de heteroscedasticidade condicionada nos primeiros m lags. Entre parênteses reportam-se os p -values.

Descrição	S1 (Small Caps)	S2	S3	S4	S5 (Large Caps)
LB (8)	0,953 (0,999)	1,067 (0,998)	0,799 (0,999)	0,518 (1,000)	0,559 (1,000)
LB (12)	7,896 (0,793)	5,309 (0,947)	3,572 (0,990)	7,057 (0,854)	5,855 (0,923)
LB (24)	22,451 (0,552)	15,399 (0,909)	12,563 (0,973)	17,114 (0,844)	13,460 (0,958)
ARCH (3)	47,182 (0,000)	31,173 (0,000)	39,037 (0,000)	34,343 (0,000)	29,561 (0,000)
ARCH (6)	47,543 (0,000)	31,164 (0,000)	38,921 (0,000)	34,323 (0,000)	39,033 (0,000)
ARCH (12)	48,999 (0,000)	34,548 (0,001)	42,085 (0,000)	35,186 (0,000)	49,958 (0,000)

Considerando os resultados obtidos, podemos concluir que, a um nível de significância de 1% e para os lags considerados, não existe evidência estatística de autocorrelação nos resíduos de estimação do modelo VAR(10). Contudo, esses mesmos resíduos continuam a exibir heteroscedasticidade condicionada o que sugere a necessidade de modelização das variâncias condicionais das taxas retorno semanal dos índices S1, S2, S3, S4 e S5.

3.5.3. Modelização das variâncias condicionais das taxas de retorno através de modelos ARCH

Na secção anterior constatou-se que as séries dos resíduos de estimação do modelo VAR(10), apesar de não exibirem autocorrelação, apresentam sinais evidentes de heteroscedasticidade condicionada. Ou seja, mesmo depois de removida a dependência linear, as séries das taxas de retorno semanal dos cinco índices analisados continuam, devido à presença de efeitos ARCH, a não serem independentes.

Nesta secção, procura-se então modelizar a evolução temporal da variância de cada uma das séries de retornos, utilizando para o efeito a metodologia descrita no ponto 3.5.1.. Considerando os resíduos de estimação resultantes das equações VAR, estimaram-se, para cada série e pelo método da quase verosimilhança, os seguintes modelos ARCH univariados: três modelos simétricos (GARCH, AVGARCH, NARCH) e sete modelos assimétricos (EGARCH, ZARCH, GJR-GARCH, APARCH, AGARCH, NAGARCH e QGARCH)¹². Refira-se que, para o efeito, recorreu-se ao software MATLAB 7¹³.

3.5.3.1. Resultados de estimação dos modelos ARCH univariados

Os resultados de estimação completos dos dez modelos referidos são apresentados no Anexo C. Numa primeira análise, conclui-se, com base nos critérios de informação AIC (Akaike), SC (Schwarz) e HQ (Hannan-Quinn), que os modelos assimétricos são, regra geral, preferíveis aos modelos simétricos. Considerando a minimização dos critérios de AIC, SC e HQ, foram seleccionados os seguintes modelos para modelizar as variâncias condicionais:

¹² Todos os modelos ARCH univariados foram estimados considerando a versão mais parcimoniosa, ou seja, estimou-se o modelo GARCH(1,1), o AVGARCH(1,1), etc.

¹³ No anexo B.1. apresenta-se, a título exemplificativo, uma função escrita em MATLAB 7 para estimar um modelo GARCH(1,1) pelo método da quase máxima verosimilhança.

- O modelo EGARCH revela-se o mais indicado para as taxas de retorno semanal dos índices S1, S3 e S4.
- Os modelos NAGARCH e ZARCH são os mais apropriados para as taxas de retorno semanal dos índices S2 e S5, respectivamente.

Na tabela que se segue apresentam-se os resultados de estimação pelo método da quase máxima verosimilhança dos modelos ARCH seleccionados.

Tabela 3.10 – Resultados de estimação dos modelos ARCH univariados seleccionados para modelizar as variâncias condicionais das taxas de retorno semanal dos índices S1, S2, S3, S4 e S5

Nesta tabela $\ln L$ representa o valor do logaritmo da função de verosimilhança, $AIC = -2(\ln L / N) + 2(k / N)$ é o critério de informação de Akaike, $SC = -2(\ln L / N) + k \ln(N) / N$ é o critério de informação de Schwarz e $HQ = -2(\ln L / N) + 2k \ln(\ln(N)) / N$ é o critério de informação de Hannan-Quinn. k e N representam, respectivamente, o número de parâmetros e a dimensão da amostra. Entre parênteses reportam-se os *p-values*, determinados segundo o método da quase máxima verosimilhança.

Índice	Modelo	$\omega \times 10^2$	α	γ	β	$\ln L$	AIC	SC	HQ
S1	EGARCH	0,125 (0,007)	0,491 (0,000)	-0,163 (0,011)	0,832 (0,000)	-708,701	3,426	3,465	3,442
S2	NAGARCH	0,378 (0,004)	0,236 (0,004)	-0,637 (0,011)	0,564 (0,000)	-739,445	3,574	3,613	3,590
S3	EGARCH	0,164 (0,000)	0,400 (0,000)	-0,211 (0,002)	0,835 (0,000)	-746,180	3,607	3,645	3,622
S4	EGARCH	0,233 (0,001)	0,281 (0,066)	-0,270 (0,000)	0,779 (0,000)	-772,588	3,734	3,772	3,749
S5	ZARCH	0,165 (0,013)	0,014 (0,768)	0,182 (0,001)	0,851 (0,000)	-903,753	4,364	4,403	4,380

Pela análise da tabela 3.10 verifica-se, a um nível de significância de 5%, que todos os parâmetros dos modelos seleccionados são estatisticamente significativos (exceptua-se o parâmetro α nos modelos EGARCH e ZARCH das variâncias condicionais das taxas de retorno semanal dos índices S4 e S5¹⁴).

¹⁴ Refira-se que nos outros modelos assimétricos considerados na modelização da variância condicional da taxa de retorno semanal do índice S5 obteve-se o mesmo tipo de conclusão.

3.5.3.2. Avaliação e diagnóstico dos modelos seleccionados

Com o objectivo de investigar a adequabilidade dos modelos seleccionados para as variâncias condicionais das taxas de retorno semanal dos índices S1, S2, S3, S4 e S5 começou-se por aplicar os testes de Ljung-Box e o teste de Engle (1982) aos resíduos estandardizados. Os resultados destes testes são apresentados de seguida.

Tabela 3.11 – Testes de Ljung-Box e de Engle (1982) aplicados às séries dos resíduos estandardizados

Nesta tabela, $LB(m)$ representa o valor amostral da estatística do teste de Ljung-Box para análise da hipótese de existência de autocorrelação nos primeiros m lags e $ARCH(m)$ representa o valor amostral da estatística do teste de Engle (1982) para investigar a existência de heteroscedasticidade condicionada nos primeiros m lags. Entre parênteses reportam-se os p -values.

Descrição	S1 (Small Caps)	S2	S3	S4	S5 (Large Caps)
LB (8)	4,115 (0,847)	3,991 (0,858)	3,790 (0,876)	2,736 (0,950)	2,502 (0,962)
LB (12)	6,505 (0,888)	5,862 (0,923)	4,503 (0,973)	5,667 (0,932)	6,007 (0,916)
LB (24)	20,653 (0,659)	14,056 (0,945)	11,371 (0,986)	12,232 (0,977)	12,967 (0,967)
ARCH (3)	1,563 (0,668)	1,253 (0,740)	3,075 (0,380)	2,793 (0,425)	2,477 (0,479)
ARCH (6)	2,209 (0,900)	2,195 (0,901)	3,461 (0,749)	4,125 (0,660)	4,514 (0,607)
ARCH (12)	5,338 (0,946)	6,145 (0,909)	5,627 (0,934)	6,365 (0,897)	6,276 (0,902)

Os testes realizados, para os lags considerados, permitem concluir que as cinco séries de resíduos estandardizados não exibem autocorrelação, nem heteroscedasticidade condicionada.

Foi igualmente considerado, de forma a explorar outras possíveis fontes de má especificação ao nível das variâncias condicionais, o teste de Tse (2002), descrito no ponto 1.5. deste trabalho. Designando por $\hat{z}_{i,t}$ o resíduo estandardizado e $\hat{\xi}_{i,t} = \hat{z}_{i,t}^2 - 1$ o “resíduo generalizado” do índice i , foram testadas três possíveis fontes de má especificação:

- A primeira testa a subsistência de heteroscedasticidade condicionada residual – para o efeito definiu-se a seguinte variável $d_{i,t}^1 = [z_{i,t-1}^2, z_{i,t-2}^2, z_{i,t-3}^2, z_{i,t-4}^2]$ para $i = S1, S2, S3, S4, S5$;
- A segunda testa se há evidência de algum tipo de assimetria não modelizada ao nível da variância condicional – para tal consideraram-se as seguintes variáveis $d_{i,t}^2 = [I(z_{i,t-1} < 0)]$, $d_{i,t}^3 = [I(z_{i,t-1} > 0)]$, $d_{i,t}^4 = [I(z_{i,t-1} < 0)z_{i,t-1}^2]$, $d_{i,t}^5 = [I(z_{i,t-1} > 0)z_{i,t-1}^2]$ para $i = S1, S2, S3, S4, S5$;
- Por último, para testar a existência de *volatility spillovers* não modelizados consideraram-se ainda as variáveis $d_{j,t}^1, d_{j,t}^2, d_{j,t}^3, d_{j,t}^4, d_{j,t}^5$ com $j \neq i$;

Os resultados do referido teste, apresentados na tabela 3.13, permitem confirmar, para um nível de significância de 5%, que os modelos seleccionados para as variâncias condicionais das taxas de retorno semanal dos índices S1, S2, S3, S4 e S5 estão correctamente especificados (dos 125 testes realizados apenas em um caso se rejeitou marginalmente a hipótese nula).

Por último, na tabela seguinte, reportam-se algumas estatísticas descritivas dos resíduos estandardizados, bem os resultados do teste de Jarque-Bera para análise da hipótese da normalidade.

Tabela 3.12 – Estatísticas descritivas das séries dos resíduos estandardizados

Nesta tabela JB representa a estatística do teste de Jarque-Bera para análise da hipótese da normalidade. Entre parênteses apresentam-se os *p-values*.

Descrição	S1 (Small Caps)	S2	S3	S4	S5 (Large Caps)
Média (%)	0,018	0,021	0,027	0,012	0,008
Desvio-padrão	1,002	1,001	1,000	1,000	1,001
Coeficiente de assimetria	-0,393	-0,474	-0,622	-0,680	-0,692
Coeficiente de kurtosis	3,457	3,776	4,084	3,985	3,829
JB	13,789 (0,001)	25,061 (0,000)	45,510 (0,000)	47,111 (0,000)	43,488 (0,000)

Confirmam-se alguns dos pressupostos considerados: média nula e variância unitária. Os valores dos coeficientes de assimetria e kurtosis não permitem, no entanto, aceitar a hipótese da normalidade. Este facto não é de todo surpreendente pois, a incorporação de

efeitos ARCH na modelização de séries financeiras, regra geral, apenas atenua a hipótese da não normalidade.

Tabela 3.13 – Testes de Tse (2002) para detecção de erros de especificação nas variâncias condicionais das taxas de retorno semanal dos índices S1, S2, S3, S4 e S5

Esta tabela apresenta os valores amostrais da estatística do teste de Tse (2002) para detecção de erros de especificação nas variâncias condicionais. Sob a hipótese nula da variância condicional estar correctamente especificada, a estatística de teste segue assintoticamente uma distribuição do qui-quadrado com m g.l.. Para a variável $d_{i,t}^1$ tem-se $m = 4$, enquanto que para as restantes variáveis $m = 1$. Considerando um nível de significância de 5%, os valores críticos para 1 e 4 g.l. são respectivamente 3,8415 e 9,4877. A negrito evidenciam-se os casos em que se rejeitou a hipótese nula.

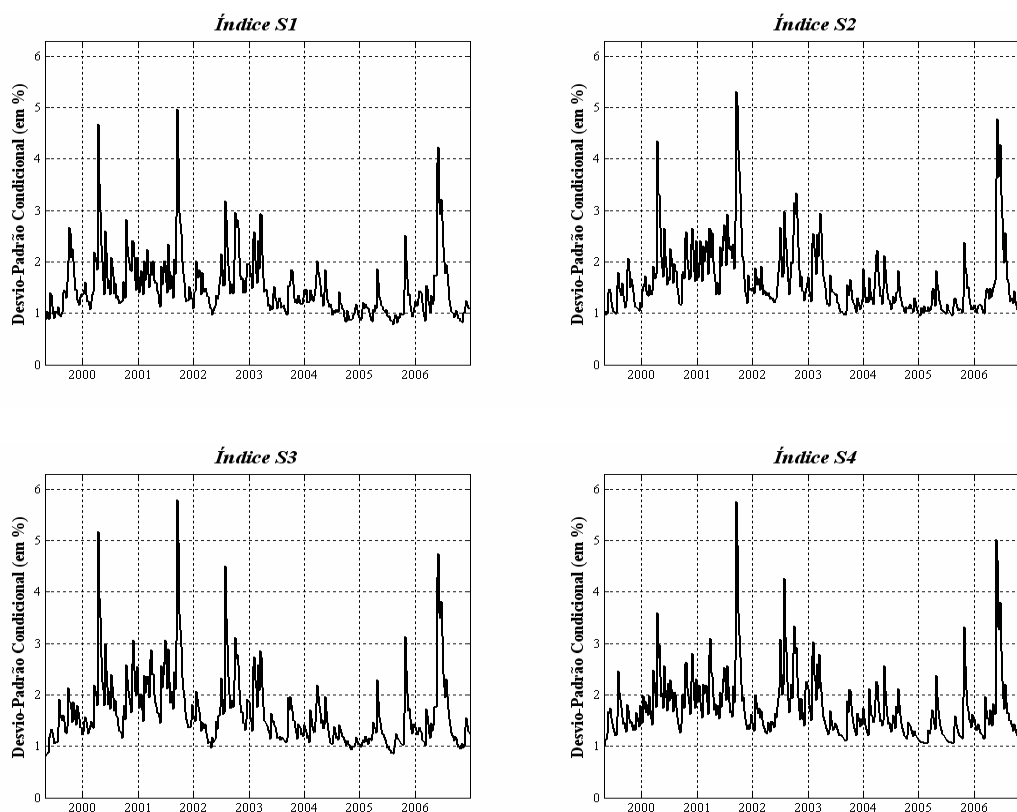
Fontes de erros de especificação	$\hat{\xi}_{S1,t}$	$\hat{\xi}_{S2,t}$	$\hat{\xi}_{S3,t}$	$\hat{\xi}_{S4,t}$	$\hat{\xi}_{S5,t}$
$\hat{d}_{S1,t}^1$	1,908	3,265	2,372	3,432	2,648
$\hat{d}_{S2,t}^1$	1,059	1,369	2,068	4,547	2,782
$\hat{d}_{S3,t}^1$	2,439	3,211	3,199	5,522	3,032
$\hat{d}_{S4,t}^1$	3,842	5,637	5,197	3,724	3,122
$\hat{d}_{S5,t}^1$	2,378	1,957	2,445	3,343	3,079
$\hat{d}_{S1,t}^2$	0,131	0,524	1,142	0,376	1,545
$\hat{d}_{S2,t}^2$	0,227	0,021	0,413	0,000	0,047
$\hat{d}_{S3,t}^2$	0,004	0,096	0,161	0,000	0,284
$\hat{d}_{S4,t}^2$	0,691	0,206	0,033	0,183	0,004
$\hat{d}_{S5,t}^2$	0,001	0,097	0,225	0,015	0,005
$\hat{d}_{S1,t}^3$	0,077	0,416	1,011	0,325	1,293
$\hat{d}_{S2,t}^3$	0,150	0,012	0,383	0,000	0,037
$\hat{d}_{S3,t}^3$	0,000	0,065	0,143	0,000	0,219
$\hat{d}_{S4,t}^3$	0,692	0,199	0,022	0,155	0,005
$\hat{d}_{S5,t}^3$	0,000	0,089	0,191	0,011	0,003
$\hat{d}_{S1,t}^4$	0,019	1,190	0,431	0,919	1,750
$\hat{d}_{S2,t}^4$	0,073	0,002	0,000	0,020	0,268
$\hat{d}_{S3,t}^4$	0,013	0,145	0,029	0,020	0,176
$\hat{d}_{S4,t}^4$	0,046	0,468	0,094	0,037	0,132
$\hat{d}_{S5,t}^4$	0,042	0,316	0,092	0,250	0,318
$\hat{d}_{S1,t}^5$	0,012	0,068	0,132	0,109	0,018
$\hat{d}_{S2,t}^5$	0,182	0,001	0,130	4,377	1,651
$\hat{d}_{S3,t}^5$	0,003	0,032	0,002	1,251	0,086
$\hat{d}_{S4,t}^5$	0,644	0,118	0,607	0,532	0,438
$\hat{d}_{S5,t}^5$	0,157	0,003	0,227	0,650	0,696

3.5.3.3. Análise e discussão dos resultados de estimação obtidos para as variâncias condicionais das taxas de retorno

Tendo-se concluído pela adequabilidade dos modelos seleccionados para descrever a evolução temporal das variâncias condicionais das taxas de retorno semanal dos índices S1, S2, S3, S4 e S5, discutem-se de seguida as principais propriedades subjacentes às mesmas.

Na figura 3.12 apresenta-se, para cada um dos modelos seleccionados, a evolução dos desvios-padrão condicionais das taxas de retorno semanal dos índices analisados no período compreendido entre 28/04/1999 e 27/12/2006.

Figura 3.12 – Evolução dos desvios-padrão condicionais das taxas de retorno semanal dos índices S1, S2, S3, S4 e S5





Durante o período de *bear market* (entre 2000 e 2002), os cinco índices analisados registaram, em média, níveis de volatilidade mais elevados. A este facto não é alheio uma série de acontecimentos que provocaram bastante instabilidade nos mercados financeiros como: o “estouro” da bolha da internet, os ataques terroristas de 11 de Setembro, a invasão do Iraque, os escândalos contabilísticos nas empresas americanas Enron e WorldCom, etc.

No período de *bull market* (2003 a 2006), os cinco índices referidos evidenciaram níveis de volatilidade relativamente mais moderados (excepção feita aos meses Maio e Junho de 2006, durante os quais se assistiu a um forte correcção na generalidade dos mercados accionistas mundiais motivada por pressões inflacionistas nas economias norte americana e europeia).

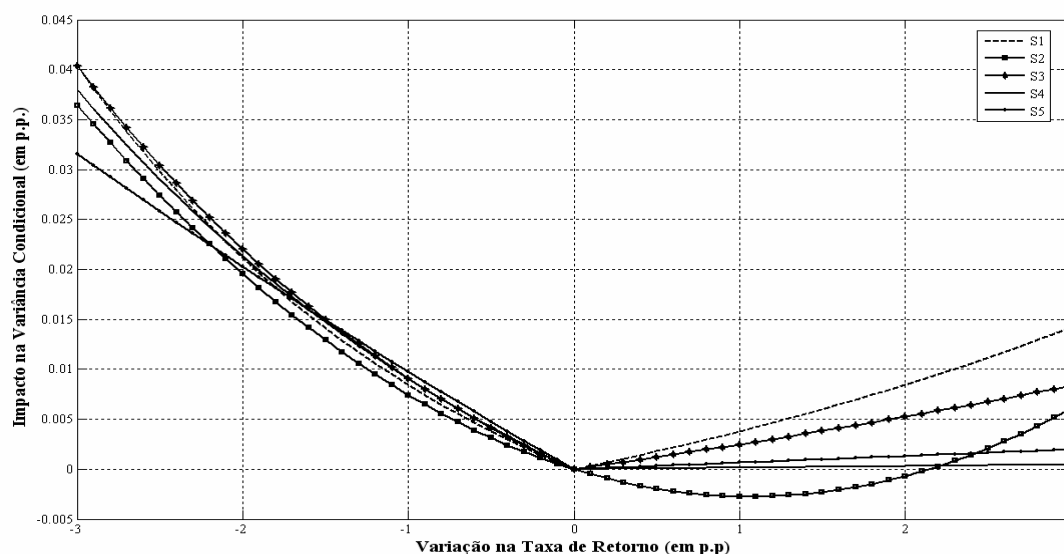
Os resultados obtidos indicam ainda que, durante o período estudado, a volatilidade das taxas de retorno semanal dos índices S1, S2, S3 e S5 revelou-se bastante persistente¹⁵. Pelo contrário, a volatilidade do índice S4 apresentou-se menos persistente: neste índice um choque não antecipado na taxa de retorno tem, em média, efeitos sobre volatilidade durante 6 semanas¹⁶ (no índice S5 aquele período cifrou-se em 27 semanas).

Por último, refira-se a assimetria negativa da volatilidade de todas as taxas de retorno semanal dos índices analisados. Esta característica pode ser facilmente verificada pelas *news impact curve* apresentadas na fig. 3.13.

¹⁵ A persistência da volatilidade pode ser aferida através da soma dos parâmetros α e β no modelo GARCH ou somente através do parâmetro β no modelo EGARCH. Valores próximos da unidade indicam forte persistência, ou seja memória longa.

¹⁶ Num modelo GARCH a vida mediana (*half-life*) do choque é dada por $\ln(0,5) / \ln(\alpha + \beta)$.

Figura 3.13 – News Impact Curve das taxas de retorno semanal dos índices S1, S2, S3, S4 e S5



Como se pode verificar pelo gráfico anterior, a volatilidade dos 5 índices analisados reage de forma mais acentuada a “más notícias” do que a “boas notícias”.

Refira-se ainda que a volatilidade das taxas de retorno semanal dos índices S4 e S5 praticamente não responde a choques positivos nos retornos. Esta última constatação, aliás, era expectável uma vez que:

- No modelo EGARCH (modelo seleccionado para modelizar a variância condicional do índice S4) o impacto sobre a volatilidade resultante de um choque positivo na taxa de retorno é dado por $\alpha + \gamma$. Ensaia a hipótese $H_0 : \alpha + \gamma = 0$, obteve-se um valor amostral para a estatística do teste de Wald de 0,004 que é inferior a 3,8415 (valor crítico da distribuição do qui-quadrado para 1 g.l e 5 % de significância), o que leva a concluir pela não rejeição da hipótese nula. Desta forma, pode-se inferir que um choque positivo de moderada magnitude na taxa de retorno semanal do índice S4 não tem um impacto significativo sobre a volatilidade.
- No modelo ZARCH (modelo seleccionado para modelizar a variância condicional do índice S5) o impacto sobre a volatilidade resultante de um choque positivo na taxa de retorno é dado por α . Como se pode constatar pela

tabela 3.10, este parâmetro não se revela significativo, pelo que podemos concluir que a volatilidade do índice S5 tende a reagir de forma muito ténue a choques positivos na taxa de retorno.

Como conclusão da análise efectuada às volatilidades condicionais das taxas de retorno semanal dos índices S1, S2, S3, S4 e S5 interessa então salientar os seguintes resultados:

- Em média, no período de *bear market* (entre 2000 e 2002) as taxas de retorno semanal dos cinco índices analisados apresentaram níveis de volatilidade mais elevados do que no período de *bull market* (entre 2003 e 2006);
- A volatilidade da taxa de retorno semanal do índice da *large caps* (S5) é aquela que se apresenta mais persistente; pelo contrário a que se revelou menos persistente foi a do índice S4;
- Por último, todas as volatilidades dos cinco índices estudados exibem um comportamento assimétrico negativo, reagindo de forma mais acentuada a “más notícias” do que a “boas notícias”.

3.5.4. Modelização das correlações entre as taxas de retorno através de modelos de correlações condicionais

3.5.4.1. Análise da hipótese de correlações condicionais constantes

Estimadas as variâncias condicionais das taxas de retorno semanal dos índices S1, S2, S3, S4 e S5 procedeu-se, utilizando as séries dos resíduos estandardizados, à modelização das correlações condicionais. Como ponto de partida do trabalho a desenvolver, começou-se por estimar, de acordo com o modelo CCC, a matriz de correlações condicionais constantes. Os resultados obtidos, apresentados na tabela 3.14, permitem concluir que as correlações condicionais entre as taxas de retorno dos cinco índices estudados são bastante similares às obtidas aquando da abordagem não condicional (ver tabela 3.6).

Tabela 3.14 – Matriz de correlações condicionais constantes (modelo CCC) entre as taxas de retorno semanal dos índices S1, S2, S3, S4 e S5

Esta tabela apresenta a estimativa da matriz de correlações condicionais constantes (modelo CCC) considerando-se que as variâncias das taxas de retorno semanal dos índices S1, S2, S3, S4 e S5 são modelizadas através dos modelos seleccionados no ponto 3.5.3.1.. $\ln L$ representa o valor do logaritmo da função de verosimilhança.

	S1	S2	S3	S4	S5
S1	1	0,902	0,905	0,847	0,766
S2	0,902	1	0,930	0,903	0,822
S3	0,905	0,930	1	0,925	0,843
S4	0,847	0,903	0,925	1	0,911
S5	0,766	0,822	0,843	0,911	1
Média	0,855	0,889	0,901	0,921	0,835
Média Global	0,875				
Ln L	-2331,266				

Sendo um dos principais objectivos do presente trabalho investigar a presença de correlações condicionais dinâmicas entre os índices estudados, ensaiou-se a hipótese destas serem constantes. Assumindo que as médias e as variâncias condicionais das taxas de retorno semanal dos índices em causa estão correctamente especificadas, realizaram-se, para o efeito, os testes de Engle e Sheppard (2001)¹⁷ e de Tse (2000) apresentados no ponto 2.5. do presente trabalho.

Os resultados destes testes, reportados na tabela 3.15, evidenciam sinais contraditórios. De acordo com o teste de Engle e Sheppard, para os *lags* considerados, rejeita-se a hipótese de as correlações condicionais entre as taxas de retorno em estudo serem constantes. Conclusão contrária obteve-se quando se efectuou o teste de Tse. Esta contradição, no entanto, não é surpreendente pois, enquanto o teste de Engle e Sheppard na hipótese alternativa é generalista, o teste de Tse considera um modelo específico para as correlações condicionais dinâmicas.

¹⁷ No anexo B.2. apresenta-se, a título de exemplo, uma função escrita em MATLAB 7 para testar a hipótese de correlações condicionais constantes através do teste de Engle e Sheppard (2001).

Tabela 3.15 – Teste da hipótese de correlações condicionais constantes entre as taxas de retorno semanal dos índices S1, S2, S3, S4 e S5

De acordo com o teste de Engle e Sheppard (2001), sob a hipótese nula de as correlações condicionais serem constantes, a estatística do teste segue, assintoticamente, uma distribuição do qui-quadrado com $s+1$ g.l., em que s representa o número de *lags* considerado. No teste de Tse (2000), sob a hipótese nula de as correlações condicionais serem constantes, a estatística do teste segue, assintoticamente, uma distribuição do qui-quadrado com $k*(k-1)/2$ g.l., em que k representa o número de séries em análise, neste caso 5. Os valores críticos apresentados correspondem a um nível de significância de 5%.

Teste	E.T. observada	g.l.	Valor crítico	Decisão
Engle e Sheppard				
3 lags	15,235	4	9,488	Rejeitar H_0
6 lags	18,799	7	14,067	Rejeitar H_0
12 lags	26,830	13	22,362	Rejeitar H_0
Tse	14,178	10	18,307	Não Rejeitar H_0

Para se obter uma resposta definitiva à questão da estabilidade temporal das correlações condicionais, optou-se então por estimar modelos que considerem a hipótese das correlações condicionais serem dinâmicas e comparar a sua qualidade com o modelo CCC.

3.5.4.2. Resultados de estimação dos modelos de correlações condicionais dinâmicas

Para modelizar a evolução temporal das correlações condicionais entre as taxas de retorno semanal dos cinco índices analisados, no período entre 28/04/1999 e 27/12/2006, procedeu-se à estimação, tal como referido na metodologia apresentada no ponto 3.5.1., dos modelos DCC [Engle (2002)], ADCC, GDCC e AGDCC [Cappiello, Engle e Sheppard (2004 e 2006)]¹⁸. Relembre-se que:

- Enquanto os dois primeiros modelos admitem uma estrutura idêntica para todas as correlações, os modelos GDCC e AGDCC consideram uma estrutura específica para cada correlação;

¹⁸ No anexo B.3. apresenta-se, a título exemplificativo, uma função escrita em MATLAB 7 para estimar um modelo AGDCC(1,1,1) pelo método da quase máxima verosimilhança.

- Enquanto os modelos DCC e GDCC admitem um comportamento simétrico das correlações condicionais, os modelos ADCC e AGDCC são modelos assimétricos.

Os resultados de estimação dos referidos modelos são apresentados nas tabelas seguintes.

Tabela 3.16 – Resultados de estimação dos modelos DCC e ADCC para modelizar as correlações condicionais entre as taxas de retorno semanal dos índices S1, S2, S3, S4 e S5

Nesta tabela $\ln L$ representa o valor do logaritmo da função de verosimilhança. Entre parênteses reportam-se os p -values, determinados segundo o método da quase máxima verosimilhança.

Modelo	α	β	g	$\ln L$
DCC	0,068 (0,002)	0,823 (0,000)	- -	-2286,299
ADCC	0,025 (0,074)	0,829 (0,000)	0,091 (0,015)	-2273,763

Tabela 3.17 – Resultados de estimação dos modelos GDCC e AGDCC para modelizar as correlações condicionais entre as taxas de retorno semanal dos índices S1, S2, S3, S4 e S5

Nesta tabela $\ln L$ representa o valor do logaritmo da função de verosimilhança. Entre parênteses reportam-se os p -values, determinados segundo o método da quase máxima verosimilhança.

Índice	GDCC		AGDCC		
	a_i	b_i	a_i	b_i	g_i
S1	0,249 (0,000)	0,953 (0,000)	0,184 (0,001)	0,941 (0,000)	0,276 (0,000)
S2	0,247 (0,000)	0,934 (0,000)	0,187 (0,003)	0,928 (0,000)	0,258 (0,002)
S3	0,293 (0,000)	0,900 (0,000)	0,212 (0,001)	0,895 (0,000)	0,327 (0,001)
S4	0,220 (0,000)	0,922 (0,000)	0,124 (0,002)	0,924 (0,000)	0,303 (0,001)
S5	0,207 (0,001)	0,905 (0,000)	0,091 (0,002)	0,908 (0,000)	0,335 (0,002)
$\ln L$	-2271,823		-2257,980		

Os resultados obtidos permitem, desde logo, verificar um aumento considerável do valor da função logarítmica de verosimilhança dos modelos de correlações condicionais dinâmicas face ao modelo CCC. Esta superioridade preliminar dos modelos de correlações condicionais dinâmicas é confirmada por testes de Wald, em que a hipótese nula do modelo CCC é sempre rejeitada, para um nível de significância de 5%, face a cada um dos quatro modelos alternativos. Por outro lado, verifica-se igualmente que todos os parâmetros dos modelos DCC, ADCC, GDCC e AGDCC são estatisticamente significativos para um nível de significância de 5% (apenas marginalmente parâmetro α no modelo ADCC não se revelou significativo).

Tendo-se concluído pela superioridade dos modelos de correlações condicionais dinâmicas face ao modelo CCC, investigou-se de seguida qual dos quatro modelos propostos seria o mais indicado para descrever a dinâmica das correlações entre as taxas de retorno semanal dos índices S1, S2, S3, S4 e S5. Para o efeito realizaram-se novamente testes de Wald cujos resultados são reportados na tabela que se segue.

Tabela 3.18 – Testes de Wald para escolha do modelo de correlações condicionais dinâmicas

Esta tabela apresenta os valores amostrais da estatística do teste de Wald (W) bem como os respectivos *p-values*. Nos cálculos efectuados foram consideradas as matrizes de variâncias e covariâncias dos estimadores dos parâmetros obtidas pelo método da quase máxima verosimilhança.

Hipótese Nula	Hipótese Alternativa	N.º de Restrições	W	<i>p-value</i>
DCC	ADCC	1	5,891	0,015
DCC	GDCC	8	31,196	0,000
DCC	AGDCC	13	74,702	0,000
ADCC	AGDCC	12	43,266	0,000
GDCC	AGDCC	5	39,314	0,000

Dos testes realizados pode-se inferir que o modelo AGDCC foi aquele que se revelou mais adequado para explicar a evolução temporal das correlações condicionais entre as taxas de retorno semanal dos índices estudados.

Elaborados os gráficos com a evolução temporal das correlações condicionais entre as taxas de retorno (segundo o modelo AGDCC), rapidamente se concluiu, tal como

aquando da abordagem não condicional, que no ano de 1999 e início de 2000, estas apresentaram, em média, valores mais baixos do que no restante período amostral. Assim, tendo como objectivo tornar os resultados obtidos mais robustos, procedeu-se à reformulação da especificação da matriz Q_t nos quatro modelos de correlações condicionais dinâmicas considerados de forma a incluir a possibilidade de quebras estruturais ao nível da correlação não condicional de médio e longo prazo. As especificação alternativas consideradas para Q_t foram as seguintes:

$$DCC: Q_t = (1 - \alpha - \beta)\bar{Q}_1 + (1 - \alpha - \beta)\bar{Q}_2 + \alpha z_{t-1}z'_{t-1} + \beta Q_{t-1} \quad (3.3)$$

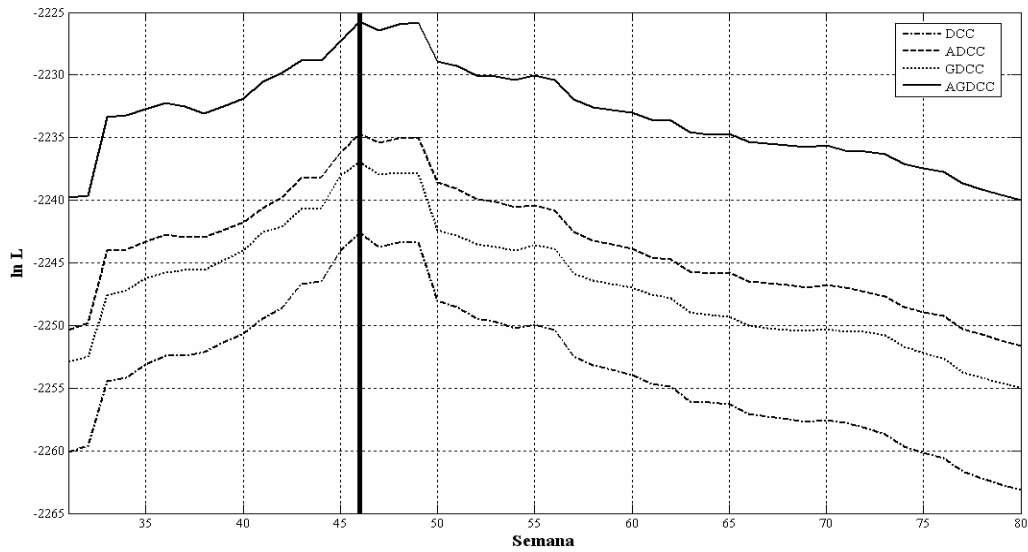
$$ADCC: Q_t = (\bar{Q}_1 - \alpha\bar{Q}_1 - \beta\bar{Q}_1 - g\bar{N}_1) + (\bar{Q}_2 - \alpha\bar{Q}_2 - \beta\bar{Q}_2 - g\bar{N}_2) + \alpha z_{t-1}z'_{t-1} + \beta Q_{t-1} + gn_{t-1}n'_{t-1} \quad (3.4)$$

$$GDCC: Q_t = (\bar{Q}_1 - A'\bar{Q}_1A - B'\bar{Q}_1B) + (\bar{Q}_2 - A'\bar{Q}_2A - B'\bar{Q}_2B) + A'z_{t-1}z'_{t-1}A + B'Q_{t-1}B \quad (3.5)$$

$$AGDCC: Q_t = (\bar{Q}_1 - A'\bar{Q}_1A - B'\bar{Q}_1B - G'\bar{N}_1G) + (\bar{Q}_2 - A'\bar{Q}_2A - B'\bar{Q}_2B - G'\bar{N}_2G) + A'z_{t-1}z'_{t-1}A + B'Q_{t-1}B + G'n_{t-1}n'_{t-1}G \quad (3.6)$$

em que $\bar{Q}_1 = E[z_t z'_t], t \leq \tau$, $\bar{Q}_2 = E[z_t z'_t], t > \tau$, $\bar{N}_1 = E[n_t n'_t], t \leq \tau$ e $\bar{N}_2 = E[n_t n'_t], t > \tau$.

Figura 3.14 – Identificação do momento de tempo em ocorre a quebra estrutural das correlações condicionais entres as taxas de retorno semanal dos índices S1, S2, S3, S4 e S5



De forma a determinar o valor de τ , considerou-se um procedimento que consistiu em fazer “correr” τ pelos valores $\{31, 32, \dots, 80\}$ na função de verosimilhança, para cada um dos quatros modelos. Em cada uma destas passagens foi retido o valor do logaritmo da função de verosimilhança. A estimativa de quase máxima verosimilhança de τ , em cada modelo, correspondeu ao valor de τ que maximizou o valor do logaritmo da função de verosimilhança. Como se pode constatar pela figura 3.14, o logaritmo da função de verosimilhança atinge um máximo, nos quatros modelos, quando $\tau = 46$ (08/03/2000).

Para este valor os resultados de estimação, pelo método da quase máxima verosimilhança, dos modelos DCC, ADCC, GDCC e AGDCC são apresentados nas tabelas 3.19 e 3.20. Como se pode constatar pelas referidas tabelas, a introdução da quebra de estrutura nas correlações não condicionais de médio e longo prazo originou um aumento substancial do valor da função logarítmica de verosimilhança nos quatro modelos considerados. Repare-se ainda que, apesar das alterações introduzidas, quase todos os parâmetros dos modelos DCC, ADCC, GDCC e AGDCC são estatisticamente significativos para um nível de significância de 5% (apenas o parâmetro α no modelo ADCC e o parâmetro α_i associado aos índices S4 e S5 não se revelaram significativos).

Tabela 3.19 – Resultados de estimação dos modelos DCC e ADCC (com quebra de estrutura) para modelizar as correlações condicionais entre as taxas de retorno semanal dos índices S1, S2, S3, S4 e S5

Nesta tabela $\ln L$ representa o valor do logaritmo da função de verosimilhança. Entre parênteses reportam-se os *p-values*, determinados segundo o método da quase máxima verosimilhança.

Modelo	α	β	g	$\ln L$
DCC	0,069 (0,008)	0,623 (0,000)	- -	-2242,628
ADCC	0,017 (0,416)	0,690 (0,000)	0,110 (0,017)	-2234,689

Tabela 3.20 – Resultados de estimação dos modelos GDCC e AGDCC (com quebra de estrutura) para modelizar as correlações condicionais entre as taxas de retorno semanal dos índices S1, S2, S3, S4 e S5

Nesta tabela $\ln L$ representa o valor do logaritmo da função de verosimilhança. Entre parênteses reportam-se os *p-values*, determinados segundo o método da quase máxima verosimilhança.

Índice	GDCC		AGDCC		
	a_i	b_i	a_i	b_i	g_i
S1	0,261 (0,000)	0,856 (0,000)	0,135 (0,013)	0,856 (0,000)	0,353 (0,000)
S2	0,270 (0,000)	0,828 (0,000)	0,166 (0,002)	0,840 (0,000)	0,326 (0,000)
S3	0,301 (0,000)	0,811 (0,000)	0,165 (0,005)	0,830 (0,000)	0,384 (0,000)
S4	0,211 (0,000)	0,884 (0,000)	0,092 (0,079)	0,883 (0,000)	0,318 (0,000)
S5	0,227 (0,000)	0,810 (0,000)	0,083 (0,220)	0,832 (0,000)	0,354 (0,000)
Ln L	-2236,941		-2225,716		

Conduzidos testes de Wald, de forma a investigar qual dos novos quatro modelos propostos seria o mais indicado para descrever a evolução temporal das correlações entre as taxas de retorno semanal dos índices S1, S2, S3, S4 e S5, conclui-se que o melhor modelo continua a ser o AGDCC (ver tabela 3.21).

Tabela 3.21 – Testes de Wald para escolha do modelo de correlações condicionais dinâmicas com quebra de estrutura

Esta tabela apresenta os valores amostrais da estatística de teste de Wald (W) bem como os respectivos *p-values*. Nos cálculos efectuados foram consideradas as matrizes de variâncias e covariâncias dos estimadores dos parâmetros obtidas pelo método da quase máxima verosimilhança.

Hipótese Nula	Hipótese Alternativa	N.º de Restrições	W	<i>p-value</i>
DCC com quebra	ADCC com quebra	1	5,699	0,017
DCC com quebra	GDCC com quebra	8	18,224	0,020
DCC com quebra	AGDCC com quebra	13	83,735	0,000
ADCC com quebra	AGDCC com quebra	12	27,835	0,006
GDCC com quebra	AGDCC com quebra	5	48,148	0,000

3.5.4.3. Avaliação e diagnóstico do modelo seleccionado

Para verificar se o modelo AGDCC (com quebra de estrutura) especifica correctamente a evolução temporal das correlações entre as taxas de retorno semanal dos índices S1, S2, S3, S4 e S5, realizou-se o teste de Tse (2002), descrito no ponto 2.6. deste trabalho.

Designando por $\hat{\xi}_{ij,t} = \hat{z}_{i,t} * \hat{z}_{j,t} - \hat{\rho}_{ij,t}$ o “resíduo generalizado”, onde $\hat{z}_{i,t}$ e $\hat{z}_{j,t}$ representam os retornos estandardizados pelos respectivos desvios-padrão condicionais e $\hat{\rho}_{ij,t}$ representa a estimativa do coeficiente de correlação condicional entre as taxas de retorno semanal dos índices i e j ., foram testadas as seguintes possíveis fontes de má especificação:

- $\hat{d}_{ij,t} = (z_{i,t-1} * z_{j,t-1}, z_{i,t-2} * z_{j,t-2}, \dots, z_{i,t-m} * z_{j,t-m})$ para captar má especificação induzida por correlação dinâmica não modelizada;
- $\hat{d}_{ij,t} = I(z_{i,t-1} < 0; z_{j,t-1} < 0)$, $\hat{d}_{ij,t} = I(z_{i,t-1} < 0; z_{j,t-1} < 0) * z_{i,t-1} z_{j,t-1}$,
 $\hat{d}_{ij,t} = I(z_{i,t-1} > 0; z_{j,t-1} < 0)$, $\hat{d}_{ij,t} = I(z_{i,t-1} > 0; z_{j,t-1} < 0) * z_{i,t-1} z_{j,t-1}$,
 $\hat{d}_{ij,t} = I(z_{i,t-1} < 0; z_{j,t-1} > 0)$, $\hat{d}_{ij,t} = I(z_{i,t-1} < 0; z_{j,t-1} > 0) * z_{i,t-1} z_{j,t-1}$,
 $\hat{d}_{ij,t} = I(z_{i,t-1} > 0; z_{j,t-1} > 0)$ e $\hat{d}_{ij,t} = I(z_{i,t-1} > 0; z_{j,t-1} > 0) * z_{i,t-1} z_{j,t-1}$

de forma a investigar a existência de eventual assimetria ao nível das correlações condicionais não modelizada.

Os resultados do referido teste, apresentados na tabela 3.22, permitem confirmar, para um nível de significância de 5%, que o modelo seleccionado está correctamente especificado (nos 90 testes realizados em nenhum dos casos se rejeitou a hipótese nula).

Aplicando o teste de Ljung-Box às séries dos “resíduos generalizados” (ver tabela 3.23) obtém-se exactamente a mesma conclusão, ou seja, que o modelo AGDCC (com quebra de estrutura) especifica correctamente a evolução temporal das correlações entre as taxas de retorno semanal dos índices S1, S2, S3, S4 e S5.

Tabela 3.22 – Testes de Tse (2002) para detecção de erros de especificação nas correlações condicionais (modelo AGDCC – com quebra de estrutura) entre as taxas de retorno semanal dos índices S1, S2, S3, S4 e S5

Esta tabela apresenta os valores amostrais da estatística do teste de Tse (2002) para detecção de erros de especificação nas correlações condicionais. Sob a hipótese nula da correlação condicional estar correctamente especificada, a estatística de teste segue assintoticamente uma distribuição do qui-quadrado com m g.l.. Para a variável $\hat{d}_{ij,t}^1$ tem-se $m = 4$, enquanto que para as restantes variáveis $m = 1$. Considerando um nível de significância de 5%, os valores críticos para 1 e 4 g.l. são respectivamente 3,8415 e 9,4877. Em qualquer dos casos conclui-se sempre pela não rejeição da hipótese nula.

Fontes de erros de especificação	$\hat{\xi}_{S1S2,t}$	$\hat{\xi}_{S1S3,t}$	$\hat{\xi}_{S1S4,t}$	$\hat{\xi}_{S1S5,t}$	$\hat{\xi}_{S2S3,t}$	$\hat{\xi}_{S2S4,t}$	$\hat{\xi}_{S2S5,t}$	$\hat{\xi}_{S3S4,t}$	$\hat{\xi}_{S3S5,t}$	$\hat{\xi}_{S4S5,t}$
$\hat{d}_{ij,t}^1$	1,691	2,600	3,657	1,618	1,983	4,630	1,894	0,312	1,819	3,371
$\hat{d}_{ij,t}^2$	0,325	0,319	0,002	0,155	0,203	0,195	0,146	0,823	0,056	0,068
$\hat{d}_{ij,t}^3$	0,002	0,176	1,999	0,721	0,005	2,721	1,407	0,115	0,751	0,048
$\hat{d}_{ij,t}^4$	0,197	0,741	1,418	0,582	0,007	0,029	0,035	0,932	0,009	0,701
$\hat{d}_{ij,t}^5$	0,123	0,154	0,015	0,447	0,209	0,072	0,246	0,764	0,660	0,034
$\hat{d}_{ij,t}^6$	0,105	0,022	0,258	0,304	0,000	0,031	0,067	0,864	0,076	0,173
$\hat{d}_{ij,t}^7$	0,000	0,556	0,277	0,879	0,000	1,160	1,804	0,195	0,826	0,041
$\hat{d}_{ij,t}^8$	0,277	0,928	1,202	0,200	0,019	0,261	0,552	0,858	0,155	0,380
$\hat{d}_{ij,t}^9$	0,004	0,016	0,086	0,111	0,008	0,327	0,079	0,860	0,005	0,317

Tabela 3.23 – Teste de Ljung-Box aplicado às séries dos “resíduos generalizados”

Nesta tabela, $LB(m)$ representa o valor amostral da estatística do teste de Ljung-Box para análise da hipótese de existência de autocorrelação nos primeiros m lags. Entre parênteses reportam-se os p -values.

Descrição	$\hat{\xi}_{S1S2,t}$	$\hat{\xi}_{S1S3,t}$	$\hat{\xi}_{S1S4,t}$	$\hat{\xi}_{S1S5,t}$	$\hat{\xi}_{S2S3,t}$	$\hat{\xi}_{S2S4,t}$	$\hat{\xi}_{S2S5,t}$	$\hat{\xi}_{S3S4,t}$	$\hat{\xi}_{S3S5,t}$	$\hat{\xi}_{S4S5,t}$
LB(8)	2,212 (0,974)	2,586 (0,958)	3,749 (0,879)	2,766 (0,948)	3,783 (0,876)	5,214 (0,734)	5,097 (0,747)	4,996 (0,758)	3,449 (0,903)	2,986 (0,935)
LB(12)	3,810 (0,987)	4,544 (0,972)	5,431 (0,942)	3,773 (0,987)	5,870 (0,923)	7,059 (0,854)	6,878 (0,866)	6,156 (0,908)	4,437 (0,974)	6,559 (0,885)
LB(24)	9,417 (0,997)	12,724 (0,970)	11,929 (0,981)	9,604 (0,996)	13,023 (0,966)	11,289 (0,987)	10,751 (0,991)	12,319 (0,976)	10,617 (0,991)	13,636 (0,954)

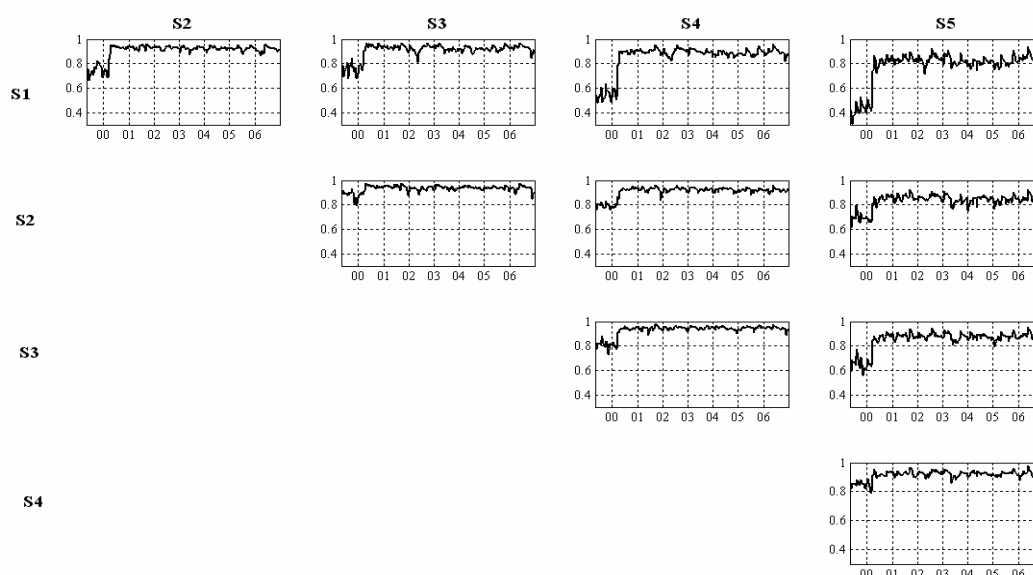
3.5.4.4. Análise e discussão dos resultados de estimação obtidos para as correlações condicionais entre as taxas de retorno

Tendo-se concluído pela correcta especificação do modelo AGDCC (com quebra de estrutura) discutem-se, neste ponto, as principais características evidenciadas pelas correlações condicionais entre as taxas de retorno semanal dos índices S1, S2, S3, S4 e S5 durante o período considerado.

Na figura 3.15 apresenta-se, de acordo com o modelo AGDCC (com quebra de estrutura), a evolução das correlações condicionais entre as taxas de retorno semanal dos índices analisados no período compreendido entre 28/04/1999 e 27/12/2006.

No período estudado, como se pode constatar pelos gráficos expostos, as correlações condicionais entre as taxas de retorno semanal dos índices S1, S2, S3, S4 e S5, em geral, situaram-se muito próximas da unidade (excepção feita ao ano de 1999 e início de 2000), que configura uma situação de correlação quase perfeita. Tal como aquando da análise não condicional, concluiu-se que o índice das *large caps* (S5) é aquele que, em média, evidencia uma menor correlação condicional com os restantes.

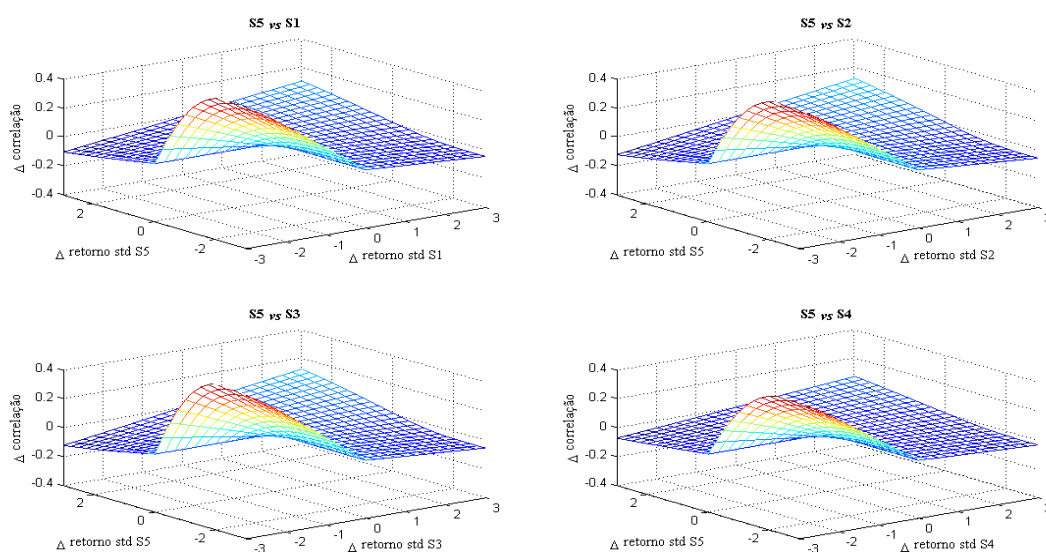
Figura 3.15 – Evolução das correlações condicionais entre as taxas de retorno semanal dos índices S1, S2, S3, S4 e S5



Da análise econométrica efectuada podem-se retirar as seguintes conclusões:

- As correlações condicionais entre as taxas de retorno semanal de empresas da zona euro com diferente capitalização bolsista evidenciaram, durante o período estudado, um comportamento dinâmico uma vez que, os modelos de correlações condicionais dinâmicas revelaram-se mais adequados que o modelo CCC;
- No entanto, e apesar do comportamento dinâmico, aquelas mesmas correlações não se revelaram muito persistentes. Considerando, os resultados do modelo GDCC (com quebra de estrutura) conclui-se que um choque simultâneo nas taxas de retorno estandardizadas de dois dos índices considerados tem, em média, efeitos sobre a respectiva correlação condicional por um período compreendido entre 2,1 e 3,3 semanas¹⁹;

Figura 3.16 – News Impact Surface da correlação entre a taxa de retorno semanal do índice S5 e as restantes



- Por último, refira-se o comportamento assimétrico negativo das correlações condicionais entre os retornos semanais dos índices estudados uma vez que estas

¹⁹ Este período de tempo é determinado, segundo Engle e Sheppard (2001), da seguinte forma: $\ln(0,5) / \ln(a_i + b_i)$. Nos modelos assimétricos não é possível efectuar este cálculo porque o valor esperado do produto cruzado dos retornos estandardizados não está disponível.

tendem a aumentar de forma mais acentuada quando ocorrem choques negativos simultâneos nas taxas de retorno estandardizadas. Este facto pode ser facilmente aferido pela figura 3.16 onde são apresentadas as *news impact surface* da correlação entre a taxa de retorno semanal do índice S5 e as restantes.

CONCLUSÃO

A presente dissertação visou colmatar a lacuna de trabalhos empíricos sobre a estrutura temporal das correlações entre os retornos de empresas com diferente capitalização bolsista na zona euro.

Se por um lado, seria de esperar que a criação de uma zona monetária única, como a zona euro, originasse um incremento significativo no grau de relacionamento linear entre os mercados accionistas que a compõem, por outro lado, o facto das *small caps* serem diferentes das *large caps* levou-nos a colocar a hipótese de que, a este nível, as correlações poderiam não ser tão elevadas, emergindo daí oportunidades de diversificação.

A revisão da literatura empírica permitiu concluir que a introdução do euro confirmou, em média, o aumento das correlações entre os mercados accionistas da zona euro. Para além disso, concluiu-se ainda que as correlações entre aqueles mesmos mercados são instáveis e revelam um comportamento assimétrico, aumentando de forma mais acentuada em períodos de descidas das cotações.

Três grandes questões se colocaram na realização do presente trabalho: Qual o nível das correlações, após a introdução da moeda única, entre os retornos das empresas de diferente capitalização bolsista na zona euro? Serão aquelas correlações instáveis? Sendo instáveis, exibirão um comportamento simétrico, isto é, reagirão da mesma forma a “boas e más notícias”?

Do estudo das propriedades estatísticas das taxas de retorno semanal dos índices para empresas de 5 diferentes níveis de capitalização bolsista (definidos pelos percentis 0,2, 0,4, 0,6 e 0,8) resultou que estas evidenciam a maioria das propriedades que habitualmente estão presentes nas séries financeiras, ou seja, excesso de *kurtosis*, assimetria, e consequente rejeição da hipótese da normalidade, e por último, presença de heteroscedasticidade condicionada. As conclusões citadas foram corroboradas por testes estatísticos adequados.

A análise não condicional permitiu concluir que as correlações entre as taxas de retorno semanal dos cinco índices accionistas baseados na capitalização bolsista (Índices S1 a S5) foram, no período de 1999 a 2006, bastante elevadas. De acordo com esta abordagem, a correlação média amostral entre aqueles índices situou-se nos 0,874. A mesma análise aponta para a existência de uma relação inversa entre as correlações e a diferença de capitalização bolsista: enquanto a correlação amostral entre os retornos semanais dos índices S5 e S4 foi de 0,884, a correlação entre os índices S5 e S1 situou-se em 0,741.

A inferência estatística levou-nos à rejeição da hipótese de a matriz de correlações não condicionais entre os retornos semanais dos cinco índices analisados ser constante no tempo. Por último, a análise não condicional permitiu ainda concluir que, no período amostral analisado, as *down-down correlations* foram superiores às *up-up correlations* – o diferencial situou-se em 0,143.

A análise condicional realizada permitiu tirar as seguintes principais conclusões:

- As variâncias condicionais das taxas de retorno semanal dos índices analisados revelaram-se, durante o período amostral, bastante persistentes, sendo este facto mais evidente no índice das *large caps* (ou seja, no índice S5);
- Estatisticamente, os modelos assimétricos revelaram-se mais adequados para descrever a evolução temporal das variâncias condicionais – isto sugere um comportamento assimétrico negativo da volatilidade de todas as taxas de retorno semanal dos índices analisados;
- Ensaída a hipótese nula das correlações condicionais entre os retornos semanais dos cinco índices analisados serem constantes, a evidência estatística inicial foi mista – enquanto no teste de Engle e Sheppard (2001) se concluiu, pela rejeição da hipótese nula, a um nível de significância de 5%, o teste de Tse (2000) conduziu a conclusões contrárias;
- Estimado o modelo de correlações condicionais constantes (modelo CCC) e os modelos de correlações condicionais dinâmicas (modelos DCC, ADCC, GDCC e AGDCC) verificou-se, em termos estatísticos, a superioridade dos segundos;

- De entre os modelos de correlações condicionais dinâmicas, o modelo AGDCC foi aquele que se revelou como o mais indicado para descrever a evolução temporal das correlações entre as taxas de retorno semanal dos índices de acções analisados – as metodologias de avaliação e diagnóstico utilizadas permitiram igualmente concluir que, aquele modelo não apresenta erros de especificação.

Os resultados obtidos, sendo consistentes com as investigações anteriormente realizadas, confirmam a presença de correlações condicionais dinâmicas e assimétricas negativas. Este facto sugere que os investidores, ao definirem uma estratégia de investimento, poderão retirar vantagens da utilização dos modelos GARCH multivariados de correlações condicionais dinâmicas.

Estas constatações, aliadas ao elevado nível das correlações, deixam transparecer, no entanto, que existirão poucos benefícios para os investidores que prossigam, na zona euro, uma estratégia “*size diversification*”.

Por último, identificam-se algumas linhas de investigação futura no que respeita ao estudo do relacionamento entre empresas de diferente dimensão.

Tendo-se concluído pela rejeição da hipótese da distribuição normal, seria conveniente ensaiar outras funções de densidade de probabilidade, com sejam a distribuição *t de Student*, a *General Error Distribution (GED)* ou a *Skewed-Student*.

Por outro lado, seria igualmente interessante analisar o impacto sobre os resultados obtidos caso, na construção dos índices, fossem adoptadas metodologias diferentes e utilizados dados com outras frequências periódicas.

Para modelizar as correlações condicionais seria de equacionar a utilização de outros modelos como sejam os propostos por Tse e Tsui (2002), Billio, Caporin e Gobbo (2006) e Pelletier (2006).

Sendo os modelos de correlações condicionais dinâmicas de difícil estimação, seria conveniente investigar o valor económico dos mesmos, quando utilizados na gestão de carteiras.

Existindo na zona euro vários mercados accionistas, de diferente dimensão, poderá justificar-se aferir se as regularidades empíricas enunciadas para a zona euro, enquanto bloco económico, se verificam de igual forma em cada um desses mercados.

Finalmente, e em função dos elevados níveis actuais de correlação entre os retornos das empresas de diferente capitalização bolsista na zona euro (próximos da unidade), poderá também ser interessante efectuar o mesmo tipo de estudo noutros blocos económicos, no sentido de identificar novas oportunidades de diversificação.

BIBLIOGRAFIA

Alexander, C., A. Chibumba (1997), "Multivariate Orthogonal Factor GARCH", University of Sussex Discussion Papers in Mathematics.

Ang, A. e J. Chen (2002), "Asymmetric correlations of equity portfolios", *Journal of Financial Economics*, Vol. 63, pp. 443-494.

Bauwens, L., Laurent, S. e Rombout, J. V. K. (2006), "Multivariate GARCH Models: A Survey", *Journal of Applied Econometrics*, Vol. 21, pp. 79-109.

Bekaert, G. e G. Wu (2000), "Asymmetric Volatility and Risk in Equity Markets", *Review of Financial Studies*, Vol. 13, pp. 1-42.

Billio, M., M. Caporin e M. Gobbo (2006), "Flexible Dynamic Conditional Correlation multivariate GARCH models for asset allocation", *Applied Financial Economics Letters*, Vol. 2, pp. 123-130.

Black, F. (1976), "Studies of Stock Price Volatility Changes", *Proceedings of the 1976 Meetings of the Business and Economic Statistics Section*, pp. 177-181, American Statistical Association.

Bollerslev, T. (1986), "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity", *Journal of Econometrics*, Vol. 31, pp. 307-327.

Bollerslev, T. (1990), "Modelling the Coherence in Short-Run Nominal Exchange Rates: A Multivariate Generalized ARCH Approach", *Review of Economic and Statistics*, Vol. 72, pp. 498-505.

Bollerslev, T., J. Wooldridge (1992), "Quasi-Maximum Likelihood Estimation and Inference in Dynamic Models with Time-Varying Covariances", *Econometrics Reviews*, Vol. 11, pp. 143-172.

Bollerslev, T., R. F. Engle e J. M. Wooldridge (1988), "A Capital Asset Pricing Model with Time-Varying Covariances", *Journal of Political Economy*, Vol. 96, pp. 116-131.

Braun, A. P., D. B. Nelson e A. M. Sunier (1995), "Good News, Bad News, Volatility, and Betas", *Journal of Finance*, Vol. 50, pp. 1575-1603.

Brock, W. A., W. D. Dechert e J. A. Scheinkman (1987), "A Test of Independence Based on the Correlation Dimension", SSRI Working Paper N.º 8702, Department of Economics, University of Wisconsin-Madison.

Brock, W. A., W. D. Dechert, J. A. Scheinkman e B. LeBaron (1996), "A Test of Independence Based on the Correlation Dimension", *Econometric Reviews*, Vol. 15, pp. 197-235.

Campbell, J. Y. e L. Hentschell (1992), "No News is Good News: An Asymmetric Model of Changing Volatility in Stock Returns", *Journal of Financial Economics*, Vol. 31, pp. 281-318.

Cappiello, L., R. F. Engle e K. Sheppard (2003), "Asymmetric Dynamics in the Correlations of Global Equity and Bond Returns", ECB Working Paper N.º 204.

Cappiello, L., R. F. Engle e K. Sheppard (2006), "Asymmetric Dynamics in the Correlations of Global Equity and Bond Returns", *Journal of Financial Econometrics*, Vol. 4, pp. 537-572.

Christie, A. (1982), "The Stochastic Behavior of Common Stock Variances: Value, Leverage, and Interest Rate Effects", *Journal of Financial Economics*, Vol. 10, pp. 407-432.

Cox, J. C. e S. A. Ross (1976), "The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes", *Journal of Financial Economics*, Vol. 3, pp. 145-166.

Diebold, F. X. (1986), "Testing for Serial Correlation in the Presence of ARCH", *Proceedings of the American Statistical Association*, pp. 323-328.

Ding, Z., C. W. J. Granger e R. F. Engle (1993), "A Long Memory Property of Stock Market Returns and a New Model", *Journal of Empirical Finance*, Vol. 1, pp. 83-106.

Duan, J. C. (1997), "Augmented GARCH(p,q) Process and its Diffusion Limit", *Journal of Econometrics*, Vol. 79, pp. 97-127.

Engle R. F. e V. K. Ng (1993), "Measuring and Testing the Impact of News on Volatility", *Journal of Finance*, Vol. 48, pp. 1749-1778.

- Engle**, R. F. (1982), “Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation”, *Econometrica*, Vol. 50, pp. 987-1007.
- Engle**, R. F. (1990), “Discussion: Stock Market Volatility and the Crash of '87.” *Review of Financial Studies*, Vol. 3, pp. 103-106.
- Engle**, R. F. (2002), “Dynamic Conditional Correlation: A Simple Class of Multivariate Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity Models”, *Journal of Business and Economic Statistics*, Vol. 20, pp. 339-350.
- Engle**, R. F. e A. J. Patton (2001), “What Good Is a Volatility Model?”, *Quantitative Finance*, Vol. 1, pp. 237-245.
- Engle**, R. F. e G. González-Rivera (1991), “Semi-Parametric ARCH Models”, *Journal of Business and Economics Statistics*, Vol. 9, pp. 345-360.
- Engle**, R. F., K. F. Kroner (1995), “Multivariate Simultaneous Generalized Arch”, *Econometric Theory*, Vol. 11, pp. 122-150.
- Engle**, R. F., T. Ito e W. Lin (1990), “Meteor Showers or Heat Waves? Heteroskedastic Intra-Daily Volatility in the Foreign Exchange Market”, *Econometrica*, Vol. 58, pp. 525-542.
- Engle**, R. F., V. K. Ng e M. Rothschild (1990), “Asset Pricing with a Factor ARCH Covariance Structure: Empirical Estimates for Treasury Bills”, *Journal of Econometrics*, Vol. 45, pp. 213-238.
- Engle**, R.F. e K. Sheppard (2001), “Theoretical and Empirical Properties of Dynamic Conditional Correlation Multivariate Garch”, UCSD Working Paper, N.º 2001-15.
- Eun**, C. S., W. Huang e S. Lai (2006), “International Diversification with Large and Small-Caps”, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* (forthcoming).
- Fama**, E. F. (1965), “The Behaviour of Stock-Market Prices”, *Journal of Business*, Vol. 38, pp. 34-105.
- Fiorentini**, G., G. Calzolari e L. Panattoni (1996), “Analytic Derivatives and the Computation of GARCH Estimates”, *Journal of Applied Econometrics*, Vol. 11, pp. 399-417.

- French**, K. R., G. W. Schwert e R. F. Stambaugh (1987), “Expected Stock Returns and Volatility”, *Journal of Financial Economics*, Vol. 19, pp. 3-29.
- Glosten**, L. R., R. Jagannathan e D. E. Runkle (1993), “On the Relation between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks”, *Journal of Finance*, Vol. 48, pp. 1779-1801.
- Goetzmann**, W. N., L. Li e K. G. Rouwenhorst (2005), “Long-Term Global Market Correlations”, *Journal of Business*, Vol. 78, pp. 1-38.
- Hafner**, C. M. e P. H. Franses (2003), “A Generalized Dynamic Conditional Correlation Model for Many Asset Returns”, Econometric Institute Report EI 2003-18, Erasmus University Rotterdam.
- Hamilton**, J. D. (1994), *Time Series Analysis*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey.
- He**, C. e T. Teräsvirta (1999), “Properties of Moments of a Family of GARCH Processes”, *Journal of Econometrics*, Vol. 92, pp. 173-192.
- Hentschel**, L. (1995), “All in the Family: Nesting Symmetric and Asymmetric GARCH Models”, *Journal of Financial Economics*, Vol. 39, pp. 71-104.
- Higgins**, M. L. e A. K. Bera (1992), “A Class of Nonlinear Arch Models”, *International Economic Review*, Vol. 33, pp. 137-158.
- Jondeau**, E. e M. Rockinger (2006), “The Copula-GARCH Model of Conditional Dependencies: An International Stock Market Application”, *Journal of International Money and Finance*, Vol. 25, pp. 827-853.
- Koutmos**, G. e R. Saidi (1995), “The Leverage Effect in Individual Stocks and the Debt-To-Equity Ratio”, *Journal of Business Finance and Accounting*, Vol. 22, pp. 1063-1075.
- Kroner**, K. F. e V. K. Ng (1998), “Modeling Asymmetric Comovements of Asset Returns”, *Review of Financial Studies*, Vol. 11, pp. 817-844.
- Laurent**, S. (2004), “Analytical Derivates of the APARCH Model”, *Computational Economics*, Vol. 24, pp. 51-57.

- Li, W.K., T.K. Mak** (1994), "On the Squared Residual Autocorrelations in Non-Linear Time Series with Conditional Heteroscedasticity", *Journal of Time Series Analysis*, Vol. 15, pp. 627-636.
- Ling, S. e W. K. Li** (1997), "Diagnostic Checking of Nonlinear Multivariate Time Series with Multivariate Arch Errors", *Journal of Time Series Analysis*, Vol. 18, pp. 447-464.
- Longin, F. e B. Solnik** (1995), "Is the Correlation in International Equity Returns Constant: 1960-1990?", *Journal of International Money and Finance*, Vol. 14, pp. 3-26.
- Lundbergh, S. e T. Teräsvirta** (2002), "Evaluating GARCH Models", *Journal of Econometrics*, Vol. 110, pp. 417-435.
- Mandelbrot, B.** (1963), "The Variation of Certain Speculative Prices", *Journal of Business*, Vol. 36, pp. 394-419.
- Nelson, D. B.** (1991), "Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach", *Econometrica*, Vol. 59, pp. 347-370.
- Nelson, D. B. e C. Q. Cao** (1992), "Inequality Constraints in the Univariate GARCH Model", *Journal of Business & Economic Statistics*, Vol. 10, pp. 229-235.
- Patton, A.** (2000), "Modelling Time-Varying Exchange Rate Dependence Using the Conditional Copula", UCSD Discussion Paper 2001-09.
- Pelletier, D.** (2006), "Regime switching for dynamic correlations", *Journal of Econometrics*, Vol. 131, pp. 445-473.
- Petrella, G.** (2005), "Are Euro Area Small Cap Stocks an Asset Class? Evidence from Mean-Variance Spanning Tests", *European Financial Management*, Vol. 11, pp. 229-253.
- Pindyck, R. S.** (1984), "Risk, Inflation, and the Stock Market", *American Economic Review*, Vol. 74, pp. 334-351.
- Schwert, G. W.** (1989), "Why Does Stock Market Volatility Change Over Time?", *Journal of Finance*, Vol. 44, pp. 1115-1153.

Sentana, E. (1995), “Quadratic ARCH Models”, *Review of Economic Studies*, Vol. 62, pp. 639–61.

Taylor, S. (1986), *Modelling Financial Time Series*. Wiley, New York.

Tse, Y. K. (2000), “A Test for Constant Correlations in a Multivariate GARCH Model”, *Journal of Econometrics*, Vol. 98, pp. 107-127.

Tse, Y. K. (2002), “Residual-Based Diagnostics for Conditional Heteroscedasticity Models”, *Econometrics Journal*, Vol. 5, pp. 358-373.

Tse, Y. K. e A. K. Tsui (1999), “A Note on Diagnosing Multivariate Conditional Heteroscedasticity Models”, *Journal of Time Series Analysis*, Vol. 20, pp. 679-691.

Tse, Y. K. e A. K. Tsui (2002), “A Multivariate Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity Model with Time-Varying Correlations”, *Journal of Business and Economic Statistics*, Vol. 20, pp. 351-362.

Wooldridge, J. (1990), “A Unified Approach to Robust, Regression-Based Specification Tests”, *Econometric Theory*, Vol. 6, pp. 17-43.

Wooldridge, J. (1991), “On the Application of Robust, Regression-Based Diagnostics to Models of Conditional Means and Conditional Variances”, *Journal of Econometrics*, Vol. 47, pp. 5-46.

Zakoian, J.M. (1994), “Threshold Heteroskedasticity Models”, *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 18, pp. 931-955.

ANEXOS

ANEXO A - Composição Regional e Sectorial dos Índices S1, S2, S3, S4 e S5

Neste anexo apresenta-se a composição dos índices S1, S2, S3, S4 e S5 construídos segundo a metodologia descrita no ponto 3.2. deste trabalho. Na tabela A.1 indicam-se, por ano, o número de acções constituintes de cada índice (N) bem como a média da capitalização bolsista no início do ano (CB – em milhões de euros). A tabela A.2 apresenta, por ano, a composição regional de cada índice – pesos (%) e número de acções constituintes (N). A informação constante da tabela A.3 é em tudo idêntica à apresentada na tabela A.2 mas com a composição sectorial. Os sectores apresentados correspondem ao nível 1 da ICB (*Industry Classification Benchmark*) adoptada pela FTSE/DATASTREAM.

Tabela A.1 – Número e Média da Capitalização Bolsista das acções constituintes dos índices S1, S2, S3, S4 e S5

Índice	1999		2000		2001		2002		2003		2004		2005		2006	
	N	CB	N	CB	N	CB	N	CB	N	CB	N	CB	N	CB	N	CB
S1	185	132,5	244	134,1	259	127,4	231	127,8	205	130,5	232	133,1	252	136,4	284	139,2
S2	184	236,0	244	238,1	258	226,3	231	220,0	205	223,9	232	239,9	252	253,4	284	272,6
S3	185	465,5	244	463,1	258	440,0	231	448,6	205	455,4	232	462,4	251	521,4	284	574,4
S4	184	1.279,9	244	1.156,0	258	1.118,4	231	1.197,0	205	1.185,2	232	1.306,6	252	1.461,2	284	1.670,7
S5	185	12.759,5	245	15.504,2	259	15.800,0	232	14.647,7	206	10.849,1	233	11.909,5	252	12.720,9	284	14.615,1
Total	923	2.979,5	1.221	3.508,9	1292	3.549,3	1.156	3.338,0	1.026	2.576,9	1.161	2.818,1	1.259	3.020,6	1.420	3.454,5

ANEXO A - Composição Regional e Sectorial dos Índices S1, S2, S3, S4 e S5

Tabela A.2 – Composição Regional dos índices S1, S2, S3, S4 e S5

País	Índice S1															
	1999		2000		2001		2002		2003		2004		2005		2006	
	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N
Alemanha	33,2	60	32,0	79	21,8	57	20,6	47	22,9	48	19,8	47	19,6	51	24,1	71
Áustria	2,2	4	2,4	6	3,0	7	2,4	5	2,7	5	3,4	7	2,2	6	3,0	9
Bélgica e Luxemburgo	9,5	17	6,0	15	8,0	20	5,8	13	9,3	19	8,1	19	7,5	18	6,5	19
Espanha	4,4	9	4,1	10	4,4	11	4,1	10	4,0	8	4,6	11	6,0	15	2,7	8
Finlândia	3,2	7	3,6	8	3,1	8	4,7	11	4,1	9	6,8	16	5,7	14	7,2	20
França	24,8	47	29,5	71	24,6	65	24,3	57	25,0	51	23,4	54	26,9	67	27,5	77
Grécia	0,0	0	0,0	0	12,8	34	15,1	35	12,2	25	13,8	31	9,4	22	8,4	24
Holanda	8,6	15	5,8	14	4,7	12	3,5	9	3,4	7	3,8	9	5,9	15	5,0	13
Irlanda	1,2	2	1,4	3	2,7	7	1,4	3	1,1	2	1,5	3	1,3	3	0,6	2
Itália	10,6	21	12,3	30	12,4	32	15,3	35	12,0	24	12,2	29	13,1	35	12,4	34
Portugal	2,2	3	3,0	8	2,5	6	2,6	6	3,3	7	2,8	6	2,4	6	2,5	7
Total	100,0	185	100,0	244	100,0	259	100,0	231	100,0	205	100,0	232	100,0	252	100,0	284

Tabela A.2 – Composição Regional dos índices S1, S2, S3, S4 e S5 (continuação)

País	Índice S2															
	1999		2000		2001		2002		2003		2004		2005		2006	
	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N
Alemanha	25,6	49	36,8	89	31,0	83	23,9	56	21,9	44	22,8	52	18,8	47	22,0	63
Áustria	5,5	10	3,4	9	2,6	6	3,2	7	2,6	5	2,5	6	2,9	7	1,6	5
Bélgica e Luxemburgo	5,9	11	7,4	18	4,8	12	8,1	19	7,6	15	6,6	17	9,2	23	8,3	23
Espanha	8,6	15	4,5	11	1,5	4	4,8	12	4,8	11	6,1	14	5,0	12	6,2	18
Finlândia	8,0	14	5,2	12	5,9	13	4,0	9	5,9	11	5,2	11	6,1	15	5,3	15
França	24,5	44	22,7	57	19,0	50	22,5	54	24,1	53	23,3	54	25,1	65	24,6	69
Grécia	0,0	0	0,0	0	12,9	35	11,5	26	6,0	13	8,9	22	10,1	25	8,0	24
Holanda	7,4	14	7,2	17	4,3	11	3,7	8	4,7	10	4,9	11	4,7	12	5,7	15
Irlanda	2,3	4	2,2	6	2,0	5	1,1	3	2,6	5	2,0	5	1,5	4	1,9	5
Itália	10,5	20	9,5	22	14,2	35	14,7	32	17,0	33	14,7	34	15,2	38	15,4	43
Portugal	1,8	3	1,0	3	1,6	4	2,5	5	2,8	5	2,9	6	1,4	4	1,2	4
Total	100,0	184	100,0	244	100,0	258	100,0	231	100,0	205	100,0	232	100,0	252	100,0	284

Tabela A.2 – Composição Regional dos índices S1, S2, S3, S4 e S5 (continuação)

País	Índice S3															
	1999		2000		2001		2002		2003		2004		2005		2006	
	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N
Alemanha	25,9	48	29,5	71	25,7	67	21,4	52	18,3	39	21,7	50	21,5	56	18,8	55
Áustria	3,7	7	4,8	11	3,7	9	4,2	9	4,5	9	4,4	9	5,4	13	3,6	11
Bélgica e Luxemburgo	7,2	13	6,9	15	4,9	13	4,9	11	5,1	10	6,4	15	6,1	15	6,8	21
Espanha	9,2	16	7,4	19	6,6	17	6,9	15	7,5	15	7,1	15	7,0	16	6,0	18
Finlândia	7,9	14	8,7	23	5,1	14	7,4	18	6,4	14	5,9	14	5,2	14	5,7	16
França	15,2	28	17,7	43	21,2	53	20,5	46	20,4	42	21,8	52	22,7	57	25,3	70
Grécia	0,0	0	0,0	0	10,7	27	9,1	21	6,9	14	5,4	13	5,7	14	7,7	21
Holanda	9,5	18	7,3	18	6,2	16	6,7	16	10,0	20	9,2	21	9,5	22	6,6	18
Irlanda	4,8	8	3,8	8	1,5	4	3,2	7	2,9	6	2,8	6	2,5	6	2,7	7
Itália	14,5	29	11,8	31	12,3	33	13,7	32	16,0	32	14,1	34	11,7	31	14,2	40
Portugal	2,2	4	2,0	5	1,9	5	2,0	4	2,0	4	1,2	3	2,5	7	2,5	7
Total	100,0	185	100,0	244	100,0	258	100,0	231	100,0	205	100,0	232	100,0	251	100,0	284

Tabela A.2 – Composição Regional dos índices S1, S2, S3, S4 e S5 (continuação)

País	Índice S4															
	1999		2000		2001		2002		2003		2004		2005		2006	
	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N
Alemanha	21,2	41	25,2	63	21,4	56	20,2	47	17,9	36	18,8	43	18,1	50	20,0	60
Áustria	4,7	7	3,1	6	2,7	7	3,0	7	3,1	7	3,2	8	4,3	9	5,1	13
Bélgica e Luxemburgo	8,6	16	7,9	19	5,9	16	6,5	15	6,4	14	5,3	14	4,2	13	5,9	19
Espanha	9,4	19	8,6	22	10,5	23	10,5	23	12,9	26	11,7	24	11,8	25	10,0	25
Finlândia	5,8	11	7,2	18	5,1	15	4,1	10	5,9	13	6,4	16	6,6	17	7,2	19
França	21,6	40	21,4	50	21,6	55	20,0	48	19,7	40	17,7	42	19,1	49	17,9	51
Grécia	0,0	0	0,0	0	3,9	13	5,2	11	3,7	8	5,4	14	4,0	9	2,5	8
Holanda	6,3	12	9,5	25	9,3	25	10,0	23	6,7	14	7,1	18	6,0	18	7,5	25
Irlanda	2,9	6	3,2	7	2,6	7	1,9	5	1,4	4	2,7	7	2,7	8	2,9	8
Itália	16,9	29	12,9	32	15,2	37	15,7	36	19,5	38	19,3	41	20,7	48	18,4	49
Portugal	2,7	3	1,1	2	1,8	4	2,8	6	2,8	5	2,4	5	2,5	6	2,6	7
Total	100,0	184	100,0	244	100,0	258	100,0	231	100,0	205	100,0	232	100,0	252	100,0	284

Tabela A.2 – Composição Regional dos índices S1, S2, S3, S4 e S5 (continuação)

País	Índice S5															
	1999		2000		2001		2002		2003		2004		2005		2006	
	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N
Alemanha	28,2	44	25,5	57	23,6	62	24,1	52	20,5	44	22,3	48	20,5	49	20,1	54
Áustria	0,0	0	0,1	2	0,1	2	0,2	2	0,5	3	0,7	4	1,0	4	1,7	8
Bélgica e Luxemburgo	3,6	13	3,0	15	3,3	14	3,9	12	4,3	12	4,0	14	5,2	17	4,9	16
Espanha	8,2	17	7,5	21	7,0	19	8,5	22	9,4	20	10,2	25	11,3	29	10,8	34
Finlândia	2,7	4	6,5	8	6,3	8	5,0	7	4,3	5	3,4	6	2,8	6	2,9	8
França	24,8	46	29,6	62	30,0	62	29,7	61	30,2	55	30,5	60	30,3	65	32,1	73
Grécia	0,0	0	0,0	0	1,3	11	1,2	9	1,2	8	1,3	8	1,5	8	1,9	12
Holanda	19,6	28	15,6	27	14,6	25	14,5	22	14,6	20	12,3	20	11,3	23	10,1	23
Irlanda	1,5	4	0,9	5	1,4	7	1,8	7	1,8	7	1,6	7	1,9	8	1,7	8
Itália	9,8	22	9,9	37	11,3	40	10,1	32	11,9	26	12,5	34	12,9	36	12,9	41
Portugal	1,5	7	1,3	11	1,2	9	1,1	6	1,2	6	1,2	7	1,2	7	1,0	7
Total	100,0	185	100,0	245	100,0	259	100,0	232	100,0	206	100,0	233	100,0	252	100,0	284

Tabela A.3 – Composição Sectorial dos índices S1, S2, S3, S4 e S5

Sector	Índice S1															
	1999		2000		2001		2002		2003		2004		2005		2006	
	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N
Oil & Gas	0,5	1	0,0	0	0,8	2	0,5	1	0,5	1	0,0	0	0,0	0	0,0	0
Basic Materials	6,5	13	7,0	18	7,3	19	6,3	15	7,5	15	4,0	9	6,7	16	4,2	12
Industrials	25,8	48	27,4	65	19,5	51	21,9	52	23,9	49	21,2	50	18,5	47	19,9	56
Consumer Goods	23,0	43	24,3	61	21,3	57	20,9	49	19,5	41	21,6	49	21,5	53	19,5	56
Healthcare	2,7	5	2,9	7	3,8	10	2,4	6	3,3	7	4,3	10	3,9	11	8,6	25
Consumer Services	12,1	22	7,4	18	12,8	33	12,0	28	9,8	20	13,0	31	14,0	35	13,3	38
Telecommunications	0,0	0	0,8	2	0,0	0	0,0	0	0,0	0	1,4	3	0,6	2	1,3	3
Utilities	2,7	5	2,3	5	1,7	4	2,7	6	4,5	9	3,9	9	2,6	6	2,4	7
Financials	15,0	27	16,3	41	18,2	46	17,6	39	20,3	40	17,1	39	17,6	46	15,8	44
Technology	11,7	21	11,6	27	14,6	37	15,6	35	10,8	23	13,5	32	14,6	36	15,1	43
Total	100,0	185	100,0	244	100,0	259	100,0	231	100,0	205	100,0	232	100,0	252	100,0	284

Tabela A.3 – Composição Sectorial dos índices S1, S2, S3, S4 e S5 (continuação)

Sector	Índice S2															
	1999		2000		2001		2002		2003		2004		2005		2006	
	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N
Oil & Gas	1,8	3	0,3	1	0,5	1	0,0	0	0,4	1	0,8	2	0,0	0	0,2	1
Basic Materials	5,8	11	4,8	12	4,4	12	5,3	12	6,9	14	7,9	20	8,0	19	7,5	20
Industrials	30,9	55	22,0	53	24,0	61	23,1	52	27,6	55	29,0	65	27,6	69	23,7	65
Consumer Goods	17,1	34	18,2	45	17,8	46	16,0	38	14,9	31	15,2	36	15,9	41	17,4	50
Healthcare	3,2	6	3,8	9	3,8	11	5,6	12	3,9	7	2,7	6	3,8	10	5,3	14
Consumer Services	10,1	19	12,9	31	14,3	36	10,5	25	11,7	25	10,6	25	11,2	28	11,1	32
Telecommunications	0,5	1	1,9	4	0,7	2	1,1	3	0,4	1	0,4	1	0,8	2	0,4	1
Utilities	2,1	4	1,2	3	3,1	7	2,5	6	2,7	5	2,4	5	1,7	4	1,4	4
Financials	20,8	37	18,7	46	17,0	45	22,3	50	21,8	45	20,0	47	21,4	54	21,8	63
Technology	7,8	14	16,0	40	14,5	37	13,7	33	9,7	21	10,9	25	9,6	25	11,2	34
Total	100,0	184	100,0	244	100,0	258	100,0	231	100,0	205	100,0	232	100,0	252	100,0	284

Tabela A.3 – Composição Sectorial dos índices S1, S2, S3, S4 e S5 (continuação)

Sector	Índice S3															
	1999		2000		2001		2002		2003		2004		2005		2006	
	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N
Oil & Gas	1,0	2	1,9	5	1,0	2	1,4	3	1,8	3	1,4	3	0,7	2	0,0	0
Basic Materials	7,9	16	6,6	16	6,0	15	5,2	12	4,4	10	5,6	13	4,1	10	5,5	15
Industrials	29,0	52	24,8	61	23,2	61	28,8	67	25,3	51	25,0	59	27,4	68	27,7	82
Consumer Goods	16,7	32	16,5	41	10,8	29	11,5	27	15,4	33	17,1	39	15,4	39	15,1	43
Healthcare	4,0	7	3,6	8	6,1	15	5,3	13	4,2	10	4,1	10	4,3	12	3,1	9
Consumer Services	11,6	22	13,7	33	12,7	31	14,6	33	18,4	36	13,7	31	15,8	37	14,1	38
Telecommunications	0,0	0	0,0	0	0,4	1	0,9	2	0,4	1	0,5	1	0,0	0	0,5	2
Utilities	1,2	2	1,8	5	1,9	5	3,0	7	1,8	4	1,6	4	3,6	10	3,8	11
Financials	22,6	41	19,8	48	20,8	53	22,3	50	24,8	50	25,0	57	22,6	57	22,7	63
Technology	5,9	11	11,3	27	17,1	46	7,0	17	3,4	7	6,0	15	6,0	16	7,5	21
Total	100,0	185	100,0	244	100,0	258	100,0	231	100,0	205	100,0	232	100,0	251	100,0	284

Tabela A.3 – Composição Sectorial dos índices S1, S2, S3, S4 e S5 (continuação)

Sector	Índice S4															
	1999		2000		2001		2002		2003		2004		2005		2006	
	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N
Oil & Gas	3,6	6	1,8	4	1,3	4	2,4	6	2,9	6	3,0	7	3,6	9	3,7	9
Basic Materials	5,8	13	8,6	21	6,0	16	5,6	15	7,3	15	7,0	16	7,8	18	7,1	18
Industrials	18,0	33	21,2	52	25,1	65	22,4	50	20,5	41	18,3	45	19,3	51	21,4	63
Consumer Goods	11,9	24	11,3	30	8,7	22	10,4	26	10,0	21	9,5	23	11,4	30	10,6	31
Healthcare	2,1	3	2,4	6	3,2	9	3,6	8	3,2	8	3,5	9	3,6	11	4,3	14
Consumer Services	14,5	26	15,1	35	14,9	35	14,2	32	14,4	28	14,5	34	11,8	30	15,0	43
Telecommunications	0,0	0	0,0	0	1,7	5	1,8	3	1,5	3	1,0	3	1,9	5	1,0	3
Utilities	3,8	6	3,9	8	3,9	9	4,3	9	5,9	11	5,5	13	5,2	11	4,7	12
Financials	33,2	59	23,3	56	23,5	60	29,8	69	31,3	65	33,5	71	30,9	74	27,2	77
Technology	6,9	14	12,3	32	11,6	33	5,4	13	3,0	7	4,3	11	4,6	13	5,0	14
Total	100,0	184	100,0	244	100,0	258	100,0	231	100,0	205	100,0	232	100,0	252	100,0	284

Tabela A.3 – Composição Sectorial dos índices S1, S2, S3, S4 e S5 (continuação)

Sector	Índice S5															
	1999		2000		2001		2002		2003		2004		2005		2006	
	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N
Oil & Gas	8,5	6	9,1	8	9,6	10	11,0	9	14,1	8	11,7	8	11,4	9	11,6	12
Basic Materials	4,0	10	3,7	12	3,6	12	3,9	14	4,5	13	4,1	13	4,2	14	4,3	16
Industrials	6,4	24	7,0	32	7,6	34	7,4	29	7,6	25	9,1	33	9,4	37	9,9	42
Consumer Goods	15,6	27	11,3	28	11,3	33	12,3	32	14,5	30	13,1	31	11,3	30	10,5	32
Healthcare	2,0	7	1,6	7	2,6	9	3,3	7	3,0	6	2,6	6	3,8	7	3,6	8
Consumer Services	9,8	27	10,3	41	9,5	38	9,5	33	8,0	26	8,0	34	7,7	38	6,9	36
Telecommunications	10,2	9	13,9	12	8,3	11	7,5	9	6,2	8	9,0	12	9,6	12	7,0	13
Utilities	7,5	14	5,8	15	6,6	17	7,3	18	7,7	17	7,5	18	8,4	20	10,2	23
Financials	30,6	51	25,9	70	29,3	77	28,9	68	28,1	64	28,9	68	29,5	76	31,8	92
Technology	5,4	10	11,3	20	11,7	18	8,9	13	6,2	9	6,1	10	4,5	9	4,2	10
Total	100,0	185	100,0	245	100,0	259	100,0	232	100,0	206	100,0	233	100,0	252	100,0	284

Neste anexo apresenta-se uma amostra de três das funções escritas em MATLAB 7 para realizar o presente trabalho.

B.1. Estimação pelo método da (quase) máxima verosimilhança de um modelo GARCH(1,1) no Matlab (Exemplo)

```
function [parameters, likelihood, VCV, robust_VCV, ht, scores, exitflag] = garch(data)
```

```
% Objectivo:      Estimar um modelo GARCH(1,1) considerando a distribuição normal.
```

```
% Inputs:
```

```
%      data      :   Vector Tx1 de resíduos com média nula
```

```
% Outputs:
```

```
%      parameters :   Vector 3x1 de parâmetros na forma [omega; alpha; beta]
```

```
%
```

```
%      likelihood :   Valor da função logaritmica de verosimilhança
```

```
%
```

```
%      VCV        :   Matriz estimada das variâncias e covariâncias dos estimadores  
                      (Inversa da matriz hessiana)
```

```
%
```

```
%      robust_VCV :   Matriz estimada das variâncias e covariâncias dos estimadores  
                      (Bollerslev e Wooldridge - 1992)
```

```
%
```

```
%      ht         :   Variância estimada da série (GARCH)
```

```
%
```

```
%      scores     :   Matriz T x 3 com os scores (calculados numericamente)
```

```
%
```

```
%      exitflag   :   Indicador de convergência da função logaritmica de  
                      verosimilhança
```

```
% Observações:   A variância condicional  $h(t)$  de um GARCH(1,1) é modelizada da seguinte  
forma:  $h(t) = \Omega + \alpha * r(t-1)^2 + \beta * h(t-1)$ .
```

```
t = size(data,1);
```

```
% Definições de optimização
```

```
options = optimset('fminunc');
```

```
options = optimset(options, 'TolFun', 1e-006);
```

```
options = optimset(options, 'Display', 'iter');
```

```
options = optimset(options, 'Diagnostics', 'on');
```

```
options = optimset(options, 'LargeScale', 'off');
```

```
options = optimset(options, 'MaxFunEvals', 2e+003);
```

```

% Valores de inicialização

omega = 0.1;
alpha = 0.05;
beta = 0.8;
startingvals = [omega; alpha; beta];

% Estimação dos parâmetros da variância condicional

[parameters, LLF, exitflag, output, grad] = fminunc('garchlikelihood', startingvals, options,
data);

if exitflag<=0
    exitflag
    fprintf(1,'A função de verosimilhança não convergiu! \n')
end

[likelihood, ht] = garchlikelihood(parameters,data);
likelihood=-likelihood;

% Cálculo da matriz VCV

hess = hessian_2sided('garchlikelihood',parameters,data);

VCV=hess^(-1);

% Cálculo da matriz robust_VCV

A=hess/t;

Ainv=A^(-1);

h=max(abs(parameters/2),1e-2)*eps^(1/3);
hplus=parameters+h;
hminus=parameters-h;
likelihoodsplus=zeros(t,length(parameters));
likelihoodsminus=zeros(t,length(parameters));

for i=1:length(parameters)
    hparameters=parameters;
    hparameters(i)=hplus(i);
    [HOLDER, HOLDER1, indivlike] = garchlikelihood(hparameters,data);
    likelihoodsplus(:,i)=indivlike;
end

for i=1:length(parameters)
    hparameters=parameters;
    hparameters(i)=hminus(i);
    [HOLDER, HOLDER1, indivlike] = garchlikelihood(hparameters,data);
    likelihoodsminus(:,i)=indivlike;
end

scores=(likelihoodsplus-likelihoodsminus)./(2*repmat(h',t,1));

```

```

B=cov(scores);

robust_VCV=(Ainv*B*Ainv)/t;

function [LLF, h, likelihoods] = garchlikelihood(parameters , data)

% Objetivo:      Função logaritmica de verosimilhança.

% Inputs:
%      parameters    :   Vector 3x1 de parâmetros na forma [omega; alpha; beta]
%
%      data          :   Vector Tx1 de dados com média nula.

% Outputs:
%      LLF            :   Valor da função logaritmica de verosimilhança
%
%      h              :   Variância estimada da série (GARCH)
%
%      likelihoods    :   Contribuição de cada observação para a função logaritmica de
                        verosimilhança

% Observações: Função destinada a ser usada por garch.m.

t=size(data,1);
h=garch_simula(data,parameters);
h(isnan(h))=1e-6;
h(isinf(h))=1e-6;
h(h<=0)=1e-6;
LLF=0;
likelihoods=zeros(t,1);
for j=1:t
    likelihoods(j) = 0.5 * ((log(h(j))) + ((data(j).^2)./h(j)) + log(2*pi));
    LLF=LLF+likelihoods(j);
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Helper Function
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

function h=garch_simula(data,parameters);

t=size(data,1);
h_init=var(data);
data=[sqrt(h_init);data];
h=zeros(t+1,1);
h(1)=h_init;

for i = 2:t+1

```

```
    h(i) = parameters' * [1 ; data(i-1).^2; h(i-1)];  
end
```

```
h=h(2:t+1);
```

B.2. Teste para a Hipótese de Correlações Condicionais Constantes de Engle e Sheppard (2001)

```
function [stat, pvalue] = dcc_test_engle_sheppard(data,garch_univ,nlags);

% Objectivo:      Testa a presença de correlações condicionais dinâmicas (Engle e Sheppard -
                  2001).
% INPUTS:
%      data       : Matriz de dimensão t por k contendo as k séries;
%      garch_univ : Estrutura que contem informação sobre o modelo garch univariado
                  seleccionado para cada série;
%      nlags      : N° de lags a considerar no teste;

% OUTPUTS:
%      stat       : Estatística de Teste;
%      pvalue     : P-Value associado à estatística de teste;

[t,k]=size(data);

for i=1:k
    unistdresid(:,i)=data(:,i)./sqrt(garch_univ(i).ht);
end

R=corr(unistdresid);

for i=1:t
    v(i,:)=unistdresid(i,:)*R^(-0.5);
end

for i=1:t
    vech(:,i)=v(i,:)'*v(i,:)-eye(k);
end

Y=[];

for i=1:k
    for j=i+1:k
        for l=1:t
            Y1(l,:)=vech(i,j,l);
        end
        Y=[Y Y1];
    end
end

j=size(Y,2);

regressors=[];
regressand=[];
```

```
for i=1:j
    [Z,X]=newlagmatrix(Y(:,i),nlags,1);
    regressors=[regressors; X];
    regressand=[regressand; Z];
end

beta=regressors\regressand;

XpX=(regressors'*regressors);

e=regressand-regressors*beta;

sig=e'*e/(length(regressors-nlags-1));

stat=beta'*XpX*beta/sig;

pvalue=1-chi2cdf(stat,nlags+1);
```

B.3. Estimação pelo método da quase máxima verosimilhança de um modelo AGDCC(1,1,1) no Matlab (Exemplo)

```
function [parameters, robust_VCV, loglikelihood, Ht, Rt, jointscores, exitflag, var_cov_beta,] =
agdcc_mvlgarch(data, garch_univ)
```

% Objectivo: Estima AGDCC(1,1). Na primeira fase do processo de estimação cada série pode ser modelizada por um GARCH(1,1), AVGARCH(1,1), NARCH(1,1), EGARCH(1,1,1), ZARCH(1,1,1), GJR-GARCH(1,1,1), APARCH(1,1,1), AGARCH(1,1) ou NAGARCH(1,1) e QGARCH(1,1) para cada série.

% Inputs:

% data : Matriz de dimensão t por k contendo as k séries de resíduos

%

% garch_univ : Estrutura que contem informação sobre o modelo garch univariado seleccionado para cada série

% Outputs:

% parameters : Vector dos parâmetros estimados

%

% robust_VCV : Matriz estimada das variâncias e covariâncias dos estimadores (Bollerslev e Wooldridge - 1992)

%

% loglikelihood : Valor da função logaritmica de verosimilhança

%

% Ht : Matriz estimada de variâncias e covariâncias condicionais, variante no tempo

%

% Rt : Matriz estimada de correlações condicionais, variante no tempo

%

% jointscores : Matriz com os scores (calculados numericamente)

%

% exitflag : Indicador de convergência da função logaritmica de verosimilhança

```
[t,k] = size(data);
```

```
negstdresid=stdresid.*(stdresid<0);
```

% Calculo dos resíduos estandardizados pelo desvio-padrão condicionado para cada série

```
for i=1:k
```

```
stdresid(:,i)=data(:,i)./sqrt(garch_univ(i).ht);
```

```
end
```

% Definições de optimização

```
options = optimset('fminunc');
```

```
options = optimset(options, 'Display' , 'iter');
```

```
options = optimset(options, 'Diagnostics' , 'on');
```

```

options = optimset(options , 'LargeScale' , 'off', 'MaxFunEvals', 1e+005, 'TolX', 1e-006);
% Valores de inicialização

agdccstarting=[ones(1,k)*.15 ones(1,k)*.8 ones(1,k)*.15];

% Estimação dos parâmetros da correlação condicional segundo o modelo AGDCC

fprintf(1,'\n\nEstimando os parâmetros do modelo AGDCC...\n')

[agdccparameters, agdccllf, exitflag, output, grad] = fminunc('agdcc_likelihood', agdccstarting,
options, stdresid, negstdresid);

% Já temos todos os parâmetros estimados

parameters=[];

H=zeros(t,k);

for i=1:k
    parameters=[parameters;garch_univ(i).parameters];
    H(:,i)=garch_univ(i).ht;
end

Hstd=H.^(0.5);

parameters=[parameters;agdccparameters'];

% Agora determina-se Rt, Ht e o valor da função logaritmica de máxima verosimilhança

for i=1:k
    inf_garch_univ(i)=garch_univ(i).ind;
end

[loglikelihood, Rt, likelihoods] = agdcc_full_likelihood(parameters,data,inf_garch_univ);
likelihoods=-likelihoods;
loglikelihood=-loglikelihood;
Ht=zeros(k,k,t);

for i=1:t
    Ht(:, :, i)=diag(Hstd(i,:))*Rt(:, :, i)*diag(Hstd(i,:));
end

% Agora calcula-se a matriz de variâncias e covariâncias dos estimadores

% Construção da matriz A

A=zeros(length(parameters),length(parameters));
index=1;
for i=1:k
    workingsize=size(garch_univ(i).VCV);
    A(index:index+workingsize-1,index:index+workingsize-1)=garch_univ(i).VCV^(-1);
    index=index+workingsize;
end

```

```

fprintf(1,'\n\nCalculando os desvios - padrões dos estimadores\n');
otherA=dcc_hessian('agdcc_full_likelihood',parameters, 3*k,data,inf_garch_univ);
A(length(parameters)-3*k+1:length(parameters),:)=otherA;
A=A/t;
Ainv = A^(-1);

% Construção da matriz B

% Scores da 1ª fase

jointscores=zeros(t,length(parameters));
index=1;
for i=1:k
    workingsize=size(garch_univ(i).scores,2);
    jointscores(:,index:index+workingsize-1)=garch_univ(i).scores;
    index=index+workingsize;
end

% Cálculo scores da 2ª fase

h=max(abs(parameters/2),1e-2)*eps^(1/3);
hplus=parameters+h;
hminus=parameters-h;
likelihoodsplus=zeros(t,length(parameters));
likelihoodsminus=zeros(t,length(parameters));
for i=length(parameters)-3*k+1:length(parameters)
    hparameters=parameters;
    hparameters(i)=hplus(i);
    [HOLDER, HOLDER1, indivlike] = agdcc_full_likelihood(hparameters, data,
    inf_garch_univ);
    likelihoodsplus(:,i)=indivlike;
end
for i=length(parameters)-3*k+1:length(parameters)
    hparameters=parameters;
    hparameters(i)=hminus(i);
    [HOLDER, HOLDER1, indivlike] = agdcc_full_likelihood(hparameters, data,
    inf_garch_univ);
    likelihoodsminus(:,i)=indivlike;
end
DCCscores=(likelihoodsplus(:,length(parameters)-3*k+1:length(parameters))-
likelihoodsminus(:,length(parameters)-3*k+1:length(parameters)))...
./(2*repmat(h(length(parameters)-3*k+1:length(parameters)),t,1));

% Junta-se os scores

jointscores(:,length(parameters)-3*k+1:length(parameters))=DCCscores;

B=cov(jointscores);

% E finalmente

robust_VCV=(Ainv*B*Ainv)/t;

```

```
function [logL, Rt, likelihoods]=agdcc_likelihood(params,stdresid,negstdresid)
```

% Objectivo: Função logaritmica de verosimilhança da 2ª fase.

% Inputs:

```
%      params      : Vector de parâmetros na forma [A; B; G]
%
%      stdresid     : Matriz T x k com os resíduos estandardizados pelo desvio-padrão
                    : condicionado para cada série
%      negstdresid  : Matriz T x k com os resíduos negativos estandardizados pelo
                    : desvio-padrão condicionado para cada série
```

% Outputs:

```
%      LogL        : Valor da função logaritmica de verosimilhança da 2ª fase
%
%      Rt          : Matriz de correlações condicionais (AGDCC)
%
%      likelihoods  : Contribuição de cada observação para a função logaritmica de
                    : verosimilhança da 2ª fase
```

% Observações: Função destinada a ser usada por agdcc_mvgarch.m.

```
[t,k]=size(stdresid);
```

```
a=diag(params(1:k));
b=diag(params(k+1:2*k));
g=diag(params(2*k+1:3*k));
```

```
Qbar=cov(stdresid);
Nbar=cov(negstdresid);
Qt=zeros(k,k,t+1);
Rt=zeros(k,k,t+1);
Qt(:, :, 1)=repmat(Qbar,[1 1 1]);
logL=0;
likelihoods=zeros(1,t+1);
stdresid=[ones(1,k);stdresid];
negstdresid=[ 0.5*ones(1,k);negstdresid];
for j=2:t+1
    Qt(:, :, j)=(Qbar-a'*Qbar*a-b'*Qbar*b-g'*Nbar*g) + a'*(stdresid(j-1,:)'*stdresid(j-1,:))*a +
        b'*Qt(:, :, j-1)*b + g'*(negstdresid(j-1,:)'*negstdresid(j-1,:))*g;
    Rt(:, :, j)=Qt(:, :, j)./(sqrt(diag(Qt(:, :, j))))*sqrt(diag(Qt(:, :, j))));
    likelihoods(j)=log(det(Rt(:, :, j)))+stdresid(j,:)'*inv(Rt(:, :, j))*stdresid(j,:);
    logL=logL+likelihoods(j);
end
```

```
Rt=Rt(:, :, (2:t+1));
```

```
logL=(1/2)*logL;
```

```
likelihoods=(1/2)*likelihoods(2:t+1);
```

```
function [logL, Rt, likelihoods, Qt]=agdcc_full_likelihood(parameters,data,inf_garch_univ)
```

% Objectivo: Função logaritmica completa.

% Inputs:

% params : Vector de parâmetros na forma [A; B; G]

%

% data : Matriz de dimensão t por k contendo as k séries de resíduos

%

% inf_garch_univ : Vector com os indicadores de cada modelo garch para cada série

% Outputs:

% LogL : Valor da função logaritmica de verosimilhança completa

%

% Rt : Matriz de correlações condicionais (AGDCC)

%

% likelihoods : Contribuição de cada observação para a função logaritmica de verosimilhança

% Observações: Função destinada a ser usada por agdcc_mvgarch.m.

```
[t,k]=size(data);
```

```
index=1;
```

```
H=zeros(size(data));
```

```
for i=1:k
```

```
    if inf_garch_univ(i)==1
```

```
        univariateparameters=parameters(index:index+2);
```

```
        [H(:,i)] = garch_simula(data(:,i),univariateparameters);
```

```
        index=index+3;
```

```
    elseif inf_garch_univ(i)==2
```

```
        univariateparameters=parameters(index:index+2);
```

```
        [H(:,i)] = avgarch_simula(data(:,i),univariateparameters);
```

```
        index=index+3;
```

```
    elseif inf_garch_univ(i)==3
```

```
        univariateparameters=parameters(index:index+3);
```

```
        [H(:,i)] = narch_simula(data(:,i),univariateparameters);
```

```
        index=index+4;
```

```
    elseif inf_garch_univ(i)==4
```

```
        univariateparameters=parameters(index:index+3);
```

```
        [H(:,i)] = egarch_simula(data(:,i),univariateparameters);
```

```
        index=index+4;
```

```
    elseif inf_garch_univ(i)==5
```

```
        univariateparameters=parameters(index:index+3);
```

```
        [H(:,i)] = zarch_simula(data(:,i),univariateparameters);
```

```
        index=index+4;
```

```
    elseif inf_garch_univ(i)==6
```

```
        univariateparameters=parameters(index:index+3);
```

```
        [H(:,i)] = gjrgarch_simula(data(:,i),univariateparameters);
```

```
        index=index+4;
```

```
    elseif inf_garch_univ(i)==7
```

```

        univariateparameters=parameters(index:index+4);
        [H(:,i)] = aparch_simula(data(:,i),univariateparameters);
        index=index+5;
    elseif inf_garch_univ(i)==8
        univariateparameters=parameters(index:index+3);
        [H(:,i)] = agarch_simula(data(:,i),univariateparameters);
        index=index+4;
    elseif inf_garch_univ(i)==9
        univariateparameters=parameters(index:index+3);
        [H(:,i)] = nagarch_simula(data(:,i),univariateparameters);
        index=index+4;
    else
        univariateparameters=parameters(index:index+3);
        [H(:,i)] = qgarch_simula(data(:,i),univariateparameters);
        index=index+4;
    end
end

stdresid=data./sqrt(H);
negstdresid=stdresid.*(stdresid<0);
Qbar=cov(stdresid);
Nbar=cov(negstdresid);
stdresid=[ones(1,k);stdresid];
negstdresid=[0,5*ones(1,k);negstdresid];

a=diag(parameters(index:index+k-1));
b=diag(parameters(index+k:index+2*k-1));
g=diag(parameters(index+2*k:index+3*k-1));

Qt=zeros(k,k,t+1);
Rt=zeros(k,k,t+1);
Qt(:,:,1)=repmat(Qbar,[1 1 1]);
logL=0;
likelihoods=zeros(t+1,1);
H=[zeros(1,k);H];
for j=2:t+1
    Qt(:,j)=(Qbar-a'*Qbar*a-b'*Qbar*b-g'*Nbar*g)+a*(stdresid(j-1,:)'*stdresid(j-1,:))*a +
    b'*Qt(:,j-1)*b + g*(negstdresid(j-1,:)'*negstdresid(j-1,:))*g;
    Rt(:,j)=Qt(:,j)./(sqrt(diag(Qt(:,j))))*sqrt(diag(Qt(:,j))));
    likelihoods(j)=k*log(2*pi) + sum(log(H(j,:))) + log(det(Rt(:,j))) +
    stdresid(j,:)*inv(Rt(:,j))*stdresid(j,:);
    logL=logL+likelihoods(j);
end;
Rt=Rt(:,:(2:t+1));
logL=(1/2)*logL;
likelihoods=(1/2)*likelihoods(2:t+1);

```

ANEXO C - Resultados de Estimação dos Modelos ARCH Univariados para os Índices S1, S2, S3, S4 e S5

Tabela C.1 – Resultados de estimação dos modelos ARCH para a taxa de retorno semanal do índice S1

Nesta tabela reportam-se os resultados de estimação pelo método da quase máxima verosimilhança dos modelos ARCH para a taxa de retorno semanal do índice S1, no período compreendido entre 28/04/1999 a 27/12/2006 – 401 observações. $\ln L$ representa o valor do logaritmo da função de verosimilhança, $AIC = -2(\ln L / N) + 2(k / N)$ é o critério de informação de Akaike, $SC = -2(\ln L / N) + k \ln(N) / N$ é o critério de informação de Schwarz e $HQ = -2(\ln L / N) + 2k \ln(\ln(N)) / N$ é o critério de informação de Hannan-Quinn. k e N representam, respectivamente, o número de parâmetros e a dimensão da amostra. No processo de maximização do logaritmo da função de verosimilhança foram impostas as necessárias restrições de forma a garantir a positividade e estacionaridade da variância condicional. Entre parênteses reportam-se os *p-values*.

Modelo	$\omega \times 10^2$	α	γ	β	λ	$\ln L$	<i>AIC</i>	<i>SC</i>	<i>HQ</i>
GARCH	0,194 (0,022)	0,320 (0,000)	- -	0,638 (0,000)	- -	-714,085	3,448	3,477	3,459
AVGARCH	0,141 (0,008)	0,266 (0,000)	- -	0,702 (0,000)	- -	-714,518	3,450	3,479	3,461
NARCH	0,167 (0,020)	0,304 (0,000)	- -	0,668 (0,000)	1,531 (0,001)	-713,721	3,451	3,489	3,466
EGARCH	0,125 (0,007)	0,491 (0,000)	-0,163 (0,011)	0,832 (0,000)	- -	-708,701	3,426	3,465	3,442
ZARCH	0,213 (0,011)	0,171 (0,003)	0,184 (0,017)	0,654 (0,000)	- -	-710,512	3,435	3,474	3,450
GJR-GARCH	0,280 (0,017)	0,176 (0,026)	0,318 (0,025)	0,588 (0,000)	- -	-710,704	3,436	3,475	3,451
APARCH	0,237 (0,014)	0,291 (0,000)	0,302 (0,028)	0,629 (0,000)	1,387 (0,001)	-710,041	3,438	3,486	3,457
AGARCH	0,247 (0,012)	0,317 (0,000)	-0,379 (0,055)	0,601 (0,000)	- -	-711,320	3,439	3,478	3,454
NAGARCH	0,258 (0,016)	0,319 (0,000)	-0,334 (0,028)	0,585 (0,000)	- -	-710,142	3,433	3,472	3,449
QGARCH	0,292 (0,021)	0,317 (0,000)	-0,240 (0,043)	0,601 (0,000)	- -	-711,320	3,439	3,478	3,454

ANEXO C - Resultados de Estimação dos Modelos ARCH Univariados para os Índices S1, S2, S3, S4 e S5

Tabela C.2 – Resultados de estimação dos modelos ARCH para a taxa de retorno semanal do índice S2

Nesta tabela reportam-se os resultados de estimação pelo método da quase máxima verosimilhança dos modelos ARCH para a taxa de retorno semanal do índice S2, no período compreendido entre 28/04/1999 a 27/12/2006 – 401 observações. $\ln L$ representa o valor do logaritmo da função de verosimilhança, $AIC = -2(\ln L / N) + 2(k / N)$ é o critério de informação de Akaike, $SC = -2(\ln L / N) + k \ln(N) / N$ é o critério de informação de Schwarz e $HQ = -2(\ln L / N) + 2k \ln(\ln(N)) / N$ é o critério de informação de Hannan-Quinn. k e N representam, respectivamente, o número de parâmetros e a dimensão da amostra. No processo de maximização do logaritmo da função de verosimilhança foram impostas as necessárias restrições de forma a garantir a positividade e estacionaridade da variância condicional. Entre parênteses reportam-se os *p-values*.

Modelo	$\omega \times 10^2$	α	γ	β	λ	$\ln L$	<i>AIC</i>	<i>SC</i>	<i>HQ</i>
GARCH	0,193 (0,029)	0,234 (0,001)	- -	0,719 (0,000)	- -	-748,098	3,611	3,640	3,623
AVGARCH	0,108 (0,059)	0,218 (0,000)	- -	0,768 (0,000)	- -	-747,556	3,608	3,638	3,620
NARCH	0,128 (0,062)	0,229 (0,000)	- -	0,754 (0,000)	1,292 (0,001)	-747,348	3,612	3,651	3,628
EGARCH	0,141 (0,007)	0,368 (0,001)	-0,183 (0,017)	0,847 (0,000)	- -	-740,700	3,580	3,619	3,596
ZARCH	0,228 (0,016)	0,092 (0,225)	0,225 (0,008)	0,701 (0,000)	- -	-740,688	3,580	3,619	3,596
GJR-GARCH	0,344 (0,020)	0,114 (0,218)	0,297 (0,067)	0,637 (0,000)	- -	-744,229	3,597	3,636	3,613
APARCH	0,190 (0,028)	0,178 (0,002)	0,651 (0,007)	0,729 (0,000)	0,655 (0,021)	-740,150	3,582	3,631	3,602
AGARCH	0,279 (0,006)	0,231 (0,005)	-0,828 (0,028)	0,636 (0,000)	- -	-741,512	3,584	3,623	3,600
NAGARCH	0,378 (0,004)	0,236 (0,004)	-0,637 (0,011)	0,564 (0,000)	- -	-739,445	3,574	3,613	3,590
QGARCH	0,437 (0,019)	0,231 (0,005)	-0,382 (0,011)	0,636 (0,000)	- -	-741,512	3,584	3,623	3,600

ANEXO C - Resultados de Estimação dos Modelos ARCH Univariados para os Índices S1, S2, S3, S4 e S5

Tabela C.3 – Resultados de estimação dos modelos ARCH para a taxa de retorno semanal do índice S3

Nesta tabela reportam-se os resultados de estimação pelo método da quase máxima verosimilhança dos modelos ARCH para a taxa de retorno semanal do índice S3, no período compreendido entre 28/04/1999 a 27/12/2006 – 401 observações. $\ln L$ representa o valor do logaritmo da função de verosimilhança, $AIC = -2(\ln L / N) + 2(k / N)$ é o critério de informação de Akaike, $SC = -2(\ln L / N) + k \ln(N) / N$ é o critério de informação de Schwarz e $HQ = -2(\ln L / N) + 2k \ln(\ln(N)) / N$ é o critério de informação de Hannan-Quinn. k e N representam, respectivamente, o número de parâmetros e a dimensão da amostra. No processo de maximização do logaritmo da função de verosimilhança foram impostas as necessárias restrições de forma a garantir a positividade e estacionaridade da variância condicional. Entre parênteses reportam-se os p -values.

Modelo	$\omega \times 10^2$	α	γ	β	λ	$\ln L$	AIC	SC	HQ
GARCH	0,232 (0,017)	0,283 (0,001)	- -	0,677 (0,000)	- -	-756,508	3,651	3,681	3,663
AVGARCH	0,137 (0,009)	0,247 (0,000)	- -	0,733 (0,000)	- -	-755,283	3,646	3,675	3,657
NARCH	0,147 (0,011)	0,257 (0,000)	- -	0,726 (0,000)	1,145 (0,002)	-755,213	3,650	3,689	3,665
EGARCH	0,164 (0,000)	0,400 (0,000)	-0,211 (0,002)	0,835 (0,000)	- -	-746,180	3,607	3,645	3,622
ZARCH	0,238 (0,001)	0,104 (0,140)	0,254 (0,002)	0,683 (0,000)	- -	-746,637	3,609	3,648	3,624
GJR-GARCH	0,350 (0,006)	0,114 (0,221)	0,369 (0,026)	0,620 (0,000)	- -	-750,896	3,629	3,668	3,645
APARCH	0,209 (0,001)	0,206 (0,000)	0,638 (0,004)	0,703 (0,000)	0,687 (0,003)	-746,031	3,611	3,659	3,630
AGARCH	0,310 (0,001)	0,271 (0,002)	-0,787 (0,020)	0,605 (0,000)	- -	-748,786	3,619	3,658	3,634
NAGARCH	0,382 (0,001)	0,279 (0,002)	-0,590 (0,011)	0,545 (0,000)	- -	-746,690	3,609	3,648	3,624
QGARCH	0,478 (0,006)	0,271 (0,002)	-0,427 (0,008)	0,605 (0,000)	- -	-748,786	3,619	3,658	3,634

ANEXO C - Resultados de Estimação dos Modelos ARCH Univariados para os Índices S1, S2, S3, S4 e S5

Tabela C.4 – Resultados de estimação dos modelos ARCH para a taxa de retorno semanal do índice S4

Nesta tabela reportam-se os resultados de estimação pelo método da quase máxima verosimilhança dos modelos ARCH para a taxa de retorno semanal do índice S4, no período compreendido entre 28/04/1999 a 27/12/2006 – 401 observações. $\ln L$ representa o valor do logaritmo da função de verosimilhança, $AIC = -2(\ln L / N) + 2(k / N)$ é o critério de informação de Akaike, $SC = -2(\ln L / N) + k \ln(N) / N$ é o critério de informação de Schwarz e $HQ = -2(\ln L / N) + 2k \ln(\ln(N)) / N$ é o critério de informação de Hannan-Quinn. k e N representam, respectivamente, o número de parâmetros e a dimensão da amostra. No processo de maximização do logaritmo da função de verosimilhança foram impostas as necessárias restrições de forma a garantir a positividade e estacionaridade da variância condicional. Entre parênteses reportam-se os p -values.

Modelo	$\omega \times 10^2$	α	γ	β	λ	$\ln L$	AIC	SC	HQ
GARCH	0,443 (0,101)	0,260 (0,019)	- -	0,630 (0,000)	- -	-785,143	3,789	3,818	3,801
AVGARCH	0,194 (0,104)	0,211 (0,005)	- -	0,730 (0,000)	- -	-785,980	3,793	3,822	3,805
NARCH	0,362 (0,279)	0,252 (0,033)	- -	0,657 (0,000)	1,749 (0,017)	-785,088	3,794	3,832	3,809
EGARCH	0,233 (0,001)	0,281 (0,066)	-0,270 (0,000)	0,779 (0,000)	- -	-772,588	3,734	3,772	3,749
ZARCH	0,331 (0,001)	0,010 (0,838)	0,290 (0,000)	0,691 (0,000)	- -	-773,525	3,738	3,777	3,753
GJR-GARCH	0,702 (0,011)	0,023 (0,777)	0,452 (0,013)	0,546 (0,000)	- -	-776,393	3,752	3,791	3,767
APARCH	0,297 (0,049)	0,151 (0,035)	0,943 (0,017)	0,709 (0,000)	0,881 (0,004)	-773,451	3,743	3,791	3,762
AGARCH	0,406 (0,074)	0,206 (0,079)	-1,236 (0,049)	0,593 (0,000)	- -	-775,280	3,747	3,785	3,762
NAGARCH	0,555 (0,001)	0,204 (0,071)	-0,784 (0,062)	0,528 (0,000)	- -	-774,059	3,741	3,779	3,756
QGARCH	0,721 (0,003)	0,206 (0,075)	-0,510 (0,003)	0,593 (0,000)	- -	-775,280	3,747	3,785	3,762

ANEXO C - Resultados de Estimação dos Modelos ARCH Univariados para os Índices S1, S2, S3, S4 e S5

Tabela C.5 – Resultados de estimação dos modelos ARCH para a taxa de retorno semanal do índice S5

Nesta tabela reportam-se os resultados de estimação pelo método da quase máxima verosimilhança dos modelos ARCH para a taxa de retorno semanal do índice S5, no período compreendido entre 28/04/1999 a 27/12/2006 – 401 observações. $\ln L$ representa o valor do logaritmo da função de verosimilhança, $AIC = -2(\ln L / N) + 2(k / N)$ é o critério de informação de Akaike, $SC = -2(\ln L / N) + k \ln(N) / N$ é o critério de informação de Schwarz e $HQ = -2(\ln L / N) + 2k \ln(\ln(N)) / N$ é o critério de informação de Hannan-Quinn. k e N representam, respectivamente, o número de parâmetros e a dimensão da amostra. No processo de maximização do logaritmo da função de verosimilhança foram impostas as necessárias restrições de forma a garantir a positividade e estacionaridade da variância condicional. Entre parênteses reportam-se os p -values.

Modelo	$\omega \times 10^2$	α	γ	β	λ	$\ln L$	AIC	SC	HQ
GARCH	0,289 (0,096)	0,197 (0,019)	- -	0,778 (0,000)	- -	-915,873	4,418	4,447	4,429
AVGARCH	0,088 (0,223)	0,172 (0,011)	- -	0,834 (0,000)	- -	-914,934	4,413	4,442	4,425
NARCH	0,121 (0,299)	0,184 (0,016)	- -	0,819 (0,000)	1,231 (0,001)	-914,743	4,417	4,456	4,432
EGARCH	0,128 (0,021)	0,187 (0,030)	-0,162 (0,001)	0,927 (0,000)	- -	-904,889	4,370	4,408	4,385
ZARCH	0,165 (0,013)	0,014 (0,768)	0,182 (0,001)	0,851 (0,000)	- -	-903,753	4,364	4,403	4,380
GJR-GARCH	0,483 (0,023)	0,026 (0,650)	0,270 (0,027)	0,765 (0,000)	- -	-908,982	4,389	4,428	4,405
APARCH	0,111 (0,030)	0,089 (0,014)	0,954 (0,000)	0,879 (0,000)	0,608 (0,015)	-902,641	4,364	4,412	4,383
AGARCH	0,203 (0,456)	0,125 (0,130)	-1,462 (0,078)	0,808 (0,000)	- -	-908,480	4,387	4,426	4,402
NAGARCH	0,426 (0,005)	0,115 (0,087)	-0,938 (0,036)	0,728 (0,000)	- -	-904,137	4,366	4,405	4,381
QGARCH	0,471 (0,049)	0,125 (0,118)	-0,366 (0,008)	0,808 (0,000)	- -	-908,480	4,387	4,426	4,402