U.PORTO

FEUP FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

ESTUDO DA FENDILHAÇÃO EM LAJES BI-DIRECIONAIS RESTRINGIDAS, ATENDENDO AOS EFEITOS DA RETRAÇÃO E DAS AÇÕES GRAVÍTICAS

CHRISTOPHER RODRIGUES RIBEIRO

Dissertação submetida para satisfação parcial dos requisitos do grau de

MESTRE EM ENGENHARIA CIVIL — ESPECIALIZAÇÃO EM ESTRUTURAS

Orientador: Professor Rui Manuel Carvalho Marques de Faria

Coorientador: Professor Carlos Filipe Ferreira de Sousa

JUNHO DE 2014

MESTRADO INTEGRADO EM ENGENHARIA CIVIL 2013/2014

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL

Tel. +351-22-508 1901

Fax +351-22-508 1446

✉ miec@fe.up.pt

Editado por

FACULDADE DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE DO PORTO

Rua Dr. Roberto Frias

4200-465 PORTO

Portugal

Tel. +351-22-508 1400

Fax +351-22-508 1440

✉ feup@fe.up.pt

http://www.fe.up.pt

Reproduções parciais deste documento serão autorizadas na condição que seja mencionado o Autor e feita referência a *Mestrado Integrado em Engenharia Civil - 2013/2014 - Departamento de Engenharia Civil, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto, Portugal, 2014*.

As opiniões e informações incluídas neste documento representam unicamente o ponto de vista do respetivo Autor, não podendo o Editor aceitar qualquer responsabilidade legal ou outra em relação a erros ou omissões que possam existir.

Este documento foi produzido a partir de versão eletrónica fornecida pelo respetivo Autor.

Aos meus Pais

Sou escravo do dever por amor à Liberdade

Marco Cícero

AGRADECIMENTOS

Inicialmente expresso o meu agradecimento ao Professor Rui Faria, orientador científico desta dissertação, pelo apoio que demonstrou ao longo da elaboração deste trabalho, sempre de forma cativante e motivadora.

Agradeço ao Professor Carlos Sousa, coorientador científico desta dissertação, que me ajudou e ensinou bastante, mostrando-se sempre muito prestável e atencioso.

Estou também grato ao Luís Leitão por se disponibilizar e ajudar na instalação do DIANA.

Agradeço em especial aos meus pais e à Liliana Carvalho, pelo apoio incondicional ao longo de todo o percurso académico.

Guardo também um agradecimento especial a todos os meus amigos e colegas que me acompanharam durante todo o semestre, proporcionando bons momentos de lazer e convívio que permitiram desanuviar nas horas de maior tensão ao longo do trabalho.

RESUMO

Com o presente trabalho pretende-se contribuir para o conhecimento do comportamento estrutural de lajes maciças bi-direcionais, submetidas a ações verticais com carácter permanente ou quase-permanente, fortemente restringidas axialmente, sujeitas a deformações impostas internas, devidas à retração do betão. Em serviço, as referidas lajes estão submetidas a flexão composta com tração, instalando-se ao longo do tempo importantes esforços de tração, em virtude do desenvolvimento da retração, causando fendilhação. Contemplam-se lajes maciças, com grande área de implantação, ligadas estruturalmente a núcleos e/ou paredes de elevada rigidez, como por exemplo, os pisos ligados a caixas de elevadores ou pavimentos de caves ligados a paredes de elevada rigidez.

Descreve-se o comportamento do betão não fendilhado, apresentando-se os efeitos de retração e fluência, e do betão fendilhado, apresentando-se os processos de retenção de trações no betão simples e no betão armado. Descrevem-se os modelos aplicados para a simulação destes efeitos e o elemento finito adotado neste estudo. Valida-se o elemento finito e o procedimento de análise adotado, através do estudo de um caso, comparando-se os resultados obtidos com aqueles que são reportados na dissertação de Carvalho (2013).

Faz-se um análise paramétrica de painéis encastrados nos bordos com diferentes geometrias: 7×7 m^2, 7×10,5 m^2 e 7×14 m^2, pretendendo-se deste modo estudar o comportamento dos painéis interiores de lajes contínuas. Inicialmente, é estimada uma quantidade de armadura para garantir a resistência em Estado Limite Último e o Controlo de Fendilhação (que passa por limitar a abertura máxima de fendas a um valor de 0,30 mm). Esta estimativa inicial é realizada recorrendo a procedimentos correntes de projeto, e considerando que o esforço axial de tração, em fase de serviço, em consequência do impedimento da deformação por retração, é igual ao esforço axial de fendilhação, N_{cr}. Posteriormente é feita uma análise mais rigorosa do comportamento em serviço, recorrendo a uma análise não linear de elementos finitos. Através desta análise, avalia-se a quantidade de armadura necessária para garantir que a abertura de fendas não ultrapasse o valor admissível. Além disso, o esforço axial de tração efetivamente instalado na laje, a longo prazo, é quantificado. A quantificação da armadura necessária é realizada através de um procedimento iterativo idealizado para o efeito, tendo-se verificado que o número de iterações necessárias para atingir o resultado final é reduzido. Conclui-se que o esforço axial instalado na laje é consideravelmente inferior ao esforço axial de fendilhação do betão, N_{cr}, quantificando-o para os diversos painéis em estudo. A deformação vertical das lajes e os padrões de fendilhação são também analisados. Por fim, apresentam-se recomendações que poderão ser tomadas em consideração na prática corrente de projeto de edifícios.

PALAVRAS CHAVE: retração do betão, deformações impostas, laje bi-direcional axialmente restringida, fendilhação.

ABSTRACT

The present work aims at contributing to the knowledge about the structural behavior of axially restrained, two-way concrete slabs, submitted to vertical loads with permanent or quasi-permanent nature, and subjected also to restrained concrete shrinkage effects. During the service phase, these slabs are submitted to bending moment combined with axial tensile forces, which usually give rise to concrete cracking. The work focuses on solid concrete slabs, with large implantation area, monolithically connected with nuclei and/or very stiff walls. Examples of these kinds of slabs could be floors connected to elevator shafts or basement floors connected to very stiff walls.

The behaviour of non-cracked concrete and cracked concrete is described. For non-cracked concrete, shrinkage and creep effects are presented. For cracked concrete, tension softening and tension stiffening phenomena are addressed. The analysis procedures employed in the present study are also explained. Those procedures are validated through the application to the numerical study of a case reported in a previous MSc dissertation by Carvalho (2013).

A parametric analysis of rectangular slab panels with fixed supports is made. These panels have the following geometry: 7×7 m^2, 7×10,5 m^2 and 7×14 m^2. Initially, the area of reinforcement needed to verify the Ultimate Limit State and the control of cracking (for an admissible maximum crack width of 0,30 mm) is quantified by using common design practices. In those calculations, the axial tensile force, in service, is assumed to be equal to the axial cracking force, N_{cr}. Then, a more rigorous analysis is made, based on non-linear finite-element calculations. With this analysis, the reinforcement area needed to guarantee that the admissible crack opening is not exceeded is quantified. Besides that, the axial tensile force installed in the slab, at long term, is also quantified. The calculation of the required area of reinforcement is made by using an iterative procedure devised for that effect. It was concluded that a reduced number of iterations is necessary to reach the final result. It was also concluded that the axial force installed in the slab is substantially smaller than the axial cracking force, N_{cr}. This force is quantified for all the slab panels. Vertical deformations and cracking patterns are also analysed. Lastly, some recommendations that might be taken as an advice for current design practice of concrete buildings are presented.

KEYWORDS: concrete shrinkage, imposed deformation, two-way axially restrained slab, cracking.

ÍNDICE GERAL

AGRADECIMENTOS i

RESUMO iii

ABSTRACT v

1. INTRODUÇÃO 1

1.1. ENQUADRAMENTO DO TEMA E OBJECTIVOS DA DISSERTAÇÃO 1

1.2. ORGANIZAÇÃO EM CAPÍTULOS 3

2. MODELAÇÃO DO BETÃO FENDILHADO INCLUINDO OS MODELOS DE RETRAÇÃO E FLUÊNCIA 5

2.1. INTRODUÇÃO 5

2.2. COMPORTAMENTO DO BETÃO NÃO FENDILHADO 6

2.2.1. Retração 6

2.2.2. Fluência 8

2.3. COMPORTAMENTO DO BETÃO FENDILHADO 10

2.3.1. Modelos de Fendilhação 10

2.3.2. Definição do Diagrama de Tensão de Tração no Betão Simples 11

2.3.3. Definição do Diagrama de Tensão de Tração no Betão Armado 13

2.3.4. Cálculo da Abertura de Fendas Segudo o MC90 (CEB – FIB, 1991) 16

2.4. MODELAÇÃO NUMÉRICA 19

2.4.1. Elemento Finito Adotado 19

2.4.2. Curage e Aging 21

2.5. EXEMPLO DE VALIDAÇÃO 22

2.4.2. Introdução 22

2.4.2. Caracterização da Estrutura e do Modelo Adotado 22

2.4.2. Resultados Obtidos 24

2.4.2. Validação dos Resultados 31

3. ESTUDO DE LAJES BI-DIRECIONAIS RESTRINGIDAS AXIALMENTE SOB A AÇÃO DE CARGAS VERTICAIS 33

3.1. INTRODUÇÃO 33

3.2. ESTIMATIVA DA ESPESSURA E DA ARMADURA NECESSÁRIA COM BASE EM METODOLOGIAS CORRENTES 34

3.2.1. ESTADO LIMITE DE UTILIZAÇÃO 34

3.2.2. ESTADO LIMITE ÚLTIMO 38

3.3. ANÁLISE NÃO-LINEAR 39

3.3.1. DEFINIÇÃO DO REFINAMENTO DA MALHA E DO MÉTODO ITERATIVO ADOTADO 39

3.3.1.1. Tamanho da Malha 39

3.3.1.2. Método Iterativo 42

3.3.2. RESULTADOS OBTIDOS 44

3.3.2.1. Condições de Simetria 44

3.3.2.2. Painel 7×7 m^2 45

3.3.2.3. Painel 7×10,5 m^2 54

3.3.2.4. Painel 7×14 m^2 66

3.3.2.5. Painel 7×14 m^2 com Funcionamento Uni-Direcional 75

3.3.2.6. Conclusões 78

4. CONCLUSÕES E DESENVOLVIMENTOS FUTUROS 80

4.1. CONCLUSÕES 80

4.2. DESENVOLVIMENTOS FUTUROS 81

BIBLIOGRAFIA 82

ÍNDICE DE FIGURAS

Fig. 2.1- Componentes $\varepsilon_{ci}(t_0)$, $\varepsilon_{cc}(t,t_0)$ e $\varepsilon_{cs}(t)$ da deformação total de um elemento de betão sujeito a tensão constante. (Sousa 2004).....6
Fig. 2.2 – *Tension cut-off criteria* disponíveis no *sofware* DIANA: a) constante; b) linear.....11
Fig. 2.3 – Ensaio de tração uniaxial: a) curva tensão-deslocamento; b) curva tensão abertura da fenda (Sousa 2004).....12
Fig. 2.4 – Diagrama de amolecimento tensão- extensão de fendilhação adoptado simplificadamente no *software*.....13
Fig. 2.5 – Determinação da área efetiva de betão: a) vigas; b) lajes; c) elementos em tração.....14
Fig. 2.6 – Relação entre a extensão média e a tensão aplicada, na área efetiva de betão traccionado.....15
Fig. 2.7 – Diagrama bi-linear tensão-extensão considerado para a simulação da armadura.....16
Fig. 2.8 – Distribuição simplificada de tensões num tirante de betão armado tracionado, na armadura, betão e na interface (Sousa, 2004).....17
Fig. 2.9 – Graus de liberdade em *curved shell elements* ("Element Library" de DIANA): a) 3 translações; b) 2 rotações.....19
Fig. 2.10 – Elemento CQ40L, no referencial local (ξ,η,ζ) e discretização da espessura em *layers* ("Element Library" de DIANA). 20
Fig. 2.11– Simulação dos efeitos *tension stiffening* (pontos de Gauss a azul) e *tension softening* (pontos de Gauss a vermelho), nos vários *layers*, num elemento finito.....20
Fig. 2.12 – Seleção dos elementos no triângulo de Pascal para elementos bidimensionais da família *serendipity* (Azevedo 2003).....21
Fig. 2.13 – Instantes de aplicação das cargas no DIANA, simulando casos reais.....22
Fig. 2.14 –Geometria da laje modelada.....23
Fig. 2.15 – Esforço axial instalado na laje ao longo do período da análise.....24
Fig. 2.16 – Esforço axial na fase inicial de formação de fendas.....25
Fig. 2.17 – Momento Fletor nos primeiros 10 anos da análise.....26
Fig. 2.18 – Tensão máxima de tração nas armaduras superiores, no elemento mais solicitado, ao longo dos 50 anos. 27
Fig. 2.19 – Tensão máxima de tração nas armaduras inferiores, no elemento mais solicitado, ao longo dos 50 anos.....27
Fig. 2.20 – Tensão nas armaduras superiores, ao longo do vão da laje.....28
Fig. 2.21 – Tensão nas armaduras inferiores, ao longo do vão da laje. 28
Fig. 2.22 – Tensões σ_{sm} nas armaduras superiores e inferiores, para a idade de 50 anos.....29
Fig. 2.23 – Evolução da flecha ao longo do tempo. 30
Fig. 2.24 – Padrão de fendilhação na laje, aos 50 anos, representado através de vetores normais às fendas em cada ponto de integração.....31

Fig. 3.1 – Equilíbrio em flexão composta, numa secção fendilhada, para um esforço axial de pequena excentricidade (Carvalho 2013).....36
Fig. 3.2 – Equilíbrio em flexão composta, numa secção fendilhada, para um esforço axial de média ou grande excentricidade (Estruturas de Betão 1, FEUP).....36
Fig. 3.3 – Padrão de Fendilhação na laje, representados através de vetores normais às fendas em cada ponto de integração, na superfície inferior, relativo às primeiras fendas, para um instante de tempo de 50 anos: a) 8×8 EF; b) 12×12 EF; c) 16×16 EF.....40
Fig. 3.4 – Dados obtidos no DIANA, para uma determinada iteração genérica.....42
Fig. 3.5 – Passagem do referencial global para um referencial local, em que o referencial local é caracterizado por um vetor normal à fenda (n), e um vetor tangencial à mesma (t).....43
Fig. 3.6 – Convenção adotada para representar os diversos eixos que serão analisados.....44
Fig. 3.7 - Flecha obtida ao longo do tempo, na análise não-linear.....45
Fig. 3.8 – Esforços axiais nodais ao longo do eixo "*a*" e média móvel dos mesmos.....46
Fig. 3.9 – Esforço axial no apoio, ao longo do eixo "*a*".....47
Fig. 3.10 – Esforço axial a meio-vão, ao longo do eixo "*b*".....47
Fig. 3.11 – Momento Fletor no apoio, ao longo do eixo "*a*".....48
Fig. 3.12 – Momento Fletor a meio-vão, ao longo do eixo "*b*".....49
Fig. 3.13 – Padrão de fendilhação num quarto do painel, na superfície superior, aos 46 anos, representado através de vetores normais às primeiras fendas, em cada ponto de integração..50
Fig. 3.14 – Padrão de fendilhação num quarto do painel, na superfície superior, aos 46 anos, representado através de vetores normais às segundas fendas, em cada ponto de integração..50
Fig. 3.15 – Padrão de fendilhação num quarto do painel, na superfície inferior, aos 46 anos, representado através de vetores normais às primeiras fendas, em cada ponto de integração...51
Fig. 3.16 – Padrão de fendilhação num quarto do painel, na superfície inferior, aos 46 anos, representado através de vetores normais às segundas fendas, em cada ponto de integração...51
Fig. 3.17 – Circulo de Mohr que representa o estado plano de tensão a meio vão, na superfície Inferior.....52
Fig. 3.18 – Esforços por metro, instalados nas zonas do painel onde há maiores aberturas de fendas, obtidos numa análise não-linear.....53
Fig. 3.19 – Flecha ao longo do tempo de análise.....55
Fig. 3.20 – Esforço axial no apoio, ao longo do eixo "*a*".....56
Fig. 3.21 – Esforço axial a meio vão, ao longo do eixo "*b*".....56
Fig. 3.22 – Esforço axial a meio vão, ao longo do eixo "*c*".....57
Fig. 3.23 – Esforço axial no apoio, ao longo do eixo "*d*".....57
Fig. 3.24 – Momento Fletor no apoio, ao longo do eixo "*a*".....58
Fig. 3.25 – Momento Fletor o a meio vão, ao longo do eixo "*b*".....59
Fig. 3.26 – Momento Fletor a meio vão, ao longo do eixo "*c*".....59
Fig. 3.27 – Momento Fletor no apoio, ao longo do eixo "*d*".....60

Fig. 3.28 – Padrão de fendilhação num quarto do painel, na superfície superior, aos 50 anos, representado através de vetores normais às primeiras fendas, em cada ponto deintegração...61
Fig. 3.29 – Padrão de fendilhação num quarto do painel, na superfície superior, aos 50 anos, representado através de vetores normais às segundas fendas, em cada ponto de integração.....62
Fig. 3.30 – Padrão de fendilhação num quarto do painel, na superfície inferior aos 50 anos, representado através de vetores normais às primeiras fendas, em cada ponto de integração....63
Fig. 3.31 – Padrão de fendilhação num quarto do painel, na superfície inferior, aos 50 anos, representado através de vetores normais às segundas fendas, em cada ponto de integração....63
Fig. 3.32 – Esforços por metro, instalados nas zonas do painel onde há maiores aberturas de fendas, obtidos numa análise não-linear.....64
Fig. 3.33 - Flecha obtida ao longo do tempo, na análise não-linear.....66
Fig. 3.34 – Esforço axial no apoio, ao longo do eixo *"a"*.....67
Fig. 3.35 – Esforço axial a meio vão, ao longo do eixo "*b"*.....67
Fig. 3.36 – Esforço axial a meio vão, ao longo do eixo *"c*".....68
Fig. 3.37 – Esforço axial no apoio, ao longo do eixo *"d"*.....68
Fig. 3.38 – Momento Fletor no apoio, ao longo do eixo *"a"*.....70
Fig. 3.39 – Momento Fletor a meio vão, ao longo do eixo *"b*".....70
Fig. 3.40 – Momento Fletor a meio vão, ao longo do eixo *"c*.....71
Fig. 3.41 – Momento Fletor no apoio, ao longo do eixo *"d"*.....71
Fig. 3.42 – Padrão de fendilhação num quarto do painel, na superfície superior, aos 50 anos, representado através de vetores normais às primeiras fendas, em cada ponto de integração. 72
Fig. 3.43 – Padrão de fendilhação num quarto do painel, na superfície superior, aos 50 anos, representado através de vetores normais às segundas fendas, em cada ponto de integração..72
Fig. 3.44 – Padrão de fendilhação num quarto do painel, na superfície inferior, aos 50 anos, representado através de vetores normais às primeiras fendas, em cada ponto de integração....73
Fig. 3.45 – Padrão de fendilhação num quarto do painel, na superficie inferior, aos 50 anos, representado através de vetores normais às segundas fendas, em cada ponto de integração.....73
Fig. 3.46 – Esforços por metro, instalados nas zonas do painel onde há maiores aberturas de fendas, obtidos numa análise não-linear.....74
Fig. 3.47 - Flecha obtida ao longo do tempo, na análise não-linear.....75
Fig. 3.48 – Padrão de fendilhação num quarto do painel, na superfície superior, aos 50 anos, representado através de vetores normais às fendas, em cada ponto de integração.....76
Fig. 3.49 – Padrão de fendilhação num quarto do painel, na superfície inferior, aos 50 anos, representado através de vetores normais às fendas, em cada ponto de integração.....76
Fig. 3.50 – Condição utilizada para determinar o esforço axial a combinar com o momento fletor elástico, de forma a obter w_k=0.30 mm 77

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 2.1 – Propriedades materiais considerados.....23
Tabela 2.2 – Valor das aberturas de fendas máximas, no instante de tempo final da análise, ao nível das armaduras.....31
Tabela 2.3 – Comparação dos resultados obtidos nos dois trabalhos.....31
Tabela 3.1 – Armaduras e tensões instalados, para obter $w_k = 0{,}3\ mm$, com $N = N_{cr}$.....37
Tabela 3.2 – Relação vão/altura útil obtido em contraste com a relação máxima regulamentar.....38
Tabela 3.3 – Armaduras obtidas para o ELU.....38
Tabela 3.4 – Verificação da resistência ao esforço transverso.....39
Tabela 3.5 – Armaduras obtidas numa análise não-linear, comparadas com as previstas pelo MC90, de modo a obter $w_k = 0{,}3\ mm$.....45
Tabela 3.6 – Comparação entre os momentos fletores obtidos na análise não-linear, e os mesmos obtidos pela Tabela de Montoya.....48
Tabela 3.7 – Valores das aberturas de fendas calculadas de acordo com o MC90 (considerando os esforços obtidos na análise não-linear) e das maiores aberturas de fendas, obtidas na análise não-linear, na superfície superior.....53
Tabela 3.8 – Valores das aberturas de fendas calculadas de acordo com o MC90 (considerando os esforços obtidos na análise não-linear) e das maiores aberturas de fendas, obtidas na análise não-linear, na superfície inferior.....54
Tabela 3.9 – Armaduras obtidas numa análise não-linear, comparadas com as previstas pelo MC90, de modo a obter $w_k = 0{,}3\ mm$.....54
Tabela 3.10 – Comparação entre os momentos fletores obtidos na análise não-linear, e os mesmos obtidos pela Tabela de Montoya.....58
Tabela 3.11 – Valores das aberturas de fendas calculadas de acordo com o MC90 (considerando os esforços obtidos na análise não-linear) e das maiores aberturas de fendas, obtidas na análise não-linear, na superfície superior.....65
Tabela 3.12 – Valores das aberturas de fendas calculadas de acordo com o MC90 (considerando os esforços obtidos na análise não-linear) e das maiores aberturas de fendas, obtidas na análise não-linear, na superfície superior.....65
Tabela 3.13 – Armaduras obtidas numa análise não-linear, comparadas com as previstas pelo MC90, de modo a obter $w_k = 0{,}3\ mm$.....66
Tabela 3.14 – Comparação entre os momentos fletores obtidos na análise não-linear, e os mesmos obtidos pela Tabela de Montoya.....69
Tabela 3.15 – Valores das aberturas de fendas calculadas de acordo com o MC90 (considerando os esforços obtidos na análise não-linear) e das maiores aberturas de fendas, obtidas na análise não-linear, na superfície superior.....74

Tabela 3.16 – Valores das aberturas de fendas calculadas de acordo com o MC90 (considerando os esforços obtidos na análise não-linear) e das maiores aberturas de fendas, obtidas na análise não-linear, na superfície inferior.....75

Tabela 3.17 – Resultados obtidos para os painéis 7×14 m^2 com funcionamento uni-direcional e bi-direcional.....77

Tabela 3.18 – Esforços axiais, que deverão ser combinados com os momentos fletores elásticos, no cálculo da abertura da fenda, para obter w_k=0,30 mm, com a solução de armaduras obtidas na análise não-linear.....78

SÍMBOLOS, ACRÓNIMOS E ABREVIATURAS

A	variável auxiliar de cálculo da força de tração
A_c	área bruta na secção de betão
A_s	área de armadura traccionada
$A_s^{'}$	área de armadura comprimida
α_e	coeficiente de homogeneização dado pela razão entre o módulo de elasticidade do aço e o módulo de elasticidade do betão
B	variável auxiliar de cálculo da força de tração
b_w	menor largura da secção na área traccionada (assume o valor 1 neste trabalho)
$\beta_c(t-t_o)$	coeficiente que descreve o desenvolvimento da fluência ao longo do tempo
β_{cc}	coeficiente que depende da idade do betão
$\beta_s(t-t_s)$	coeficiente que descreve a evolução da retração ao longo do tempo
β_{sc}	coeficiente que depende do tipo de cimento. Assume o valor de 4 para cimentos do tipo SL, 5 para cimentos do tipo N e R, e 8 para cimentos do tipo RS
β_{RH}, β_{sRH}	coeficientes que dependem da humidade relativa
β_t	parâmetro que depende do tipo de carga e fase
c	recobrimento
d	altura útil da secção, dada pelas distância entre o centro de gravidade das armaduras e a fibra mais comprimida
e	excentricidade do esforço axial
e_{max}	excentricidade máxima do esforço axial

E_{ci} módulo de elasticidade tangente na origem, para um idade de carregamento igual a 28 dias

$E_{ci}(t_0)$ módulo de elasticidade na idade da carga

E_{cm} módulo de elasticidade aos 28 dias

E_s módulo de elasticidade do aço

ε_c extensão no betão

$\varepsilon_{cc}(t,t_0)$ deformação de fluência

$\varepsilon_{ci}(t_0)$ deformação instantânea

$\varepsilon_{cs}(t)$ deformação de retração

$\varepsilon_{cs}(t,t_s)$ deformação total de retração para o instante *t*

ε_{cso} coeficiente de retração nominal

$\varepsilon_{c\sigma}(t,t_0)$ deformação mecânica de um elemento de betão

ε_{cm} valor médio de extensão no betão

$\varepsilon_{ct}(t)$ deformação total de um elemento de betão

$\varepsilon_{cT}(t)$ deformação térmica, dado pelo produto da variação de temperatura pelo coeficiente de dilatação térmica

ε_{cr}^{DIANA} extensão normal à fenda, no respetivo ponto de Gauss, calculada durante a análise não-linear

ε_{cr} extensão normal à fenda

ε_{nn}^{cr} extensão na direção normal à fenda

$\varepsilon_{nn.ult}^{cr}$ extensão na direção normal à fenda correspondente ao fim do ramo de amolecimento

$\varepsilon_{nn.ult.min}^{cr}$ valor mínimo que a extensão $\varepsilon_{nn.ult}^{cr}$ pode tomar

ε_s extensão no aço

$\varepsilon_s(f_{cm})$ extensão que depende do tipo de betão

ε_{sm} valor médio de extensão no aço

ε_{sy} extensão de cedência do aço

F_{inf} força axial de tração na armadura inferior

F_{sup} força axial de tração na armadura superior

f_{ck} tensão característica de rotura do betão à compressão, aos 28 dias de idade

f_{cm} resistência média à compressão aos 28 dias

f_{cm0} valor base da resistência à compressão (10 MPa)

f_{ctm} resistência média à tração do betão

f_{yk} tensão de cedência caracteristica

G_f energia de fratura (propriedade do material)

G_{f0} valor base da energia de fratura, que depende da dimensão máxima dos agregados

g_k valor carateristíco da ação permanente

g_f energia de fratura que depende da largura da banda

h altura total da seção

h_b largura da banda (dependente da malha adotada)

K coeficiente que tem em conta os diferentes sistemas estruturais

k_l coeficiente que tem em conta o comprimento do vão (assume o valor 1)

k_t coeficiente que tem em conta as secções em "T" (assume o valor 1)

$k_{\sigma s}$ coeficiente que é dado pelo quociente entre 310 MPa e a tensão de tração no aço a meio vão, para ações de cálculo, no estado limite de utilização

l_x comprimento do vão mais comprido, com direção paralela ao eixo xx

l_y comprimento do vão mais curto, com direção paralela ao eixo yy

$l_{s,max}$ distância máxima entre pontos de deslizamento nulo

$M_{elast.}$ momento fletor elástico

N_{cr} esforço axial de fendilhação

$N_{médio}$ esforço axial médio

n_x esforço axial por metro, com direção paralela ao eixo xx

n_y esforço axial por metro, com direção paralela ao eixo yy

υ coeficiente de poisson

ρ taxa de armadura traccionada, necessária a meio vão, para equilibrar o momento devido às ações de cálculo

ρ_0 taxa de armadura de referência

$\rho_{s,ef}$ percentagem de armadura existente na zona do betão que é afetada pela aderência aço/betão sendo dada pelo quociente entre a área das armaduras e a área efetiva de betão

q_k valor carateristíco da ação variável

RH humidade relativa (%)

RH_0 humidade relativa de referência (100%)

s	coeficiente que depende do tipo de cimento: 0,20 para cimento RS, 0,25 para cimento do tipo N e R, 0,38 para cimento do tipo SL
t	espessura
t_0	instante correspondente à aplicação da tensão (em dias)
t_1	1 dia
t_o	idade do betão no instante do carregamento (em dias)
t_s	idade do betão quando começa a retração (em dias)
τ	tensão tangencial
τ_{bm}	tensão de aderência média entre o aço e o betão, ao longo do comprimento de deslizamento
u_i	descrição matemática da translação
v_{ed}	esforço transverso atuante de cálculo
$v_{Rd,c}$	esforço transverso resistente para elementos em que não é requerida armadura de esforço transverso
w_k	abertura de fendas
x	profundida de eixo neutro
γ	peso volúmico
σ_c	tensão no betão
σ_{nn}^{cr}	tensão normal à fenda
σ_s	tensão no aço
σ_{S2}	tensão na armadura calculada em secção totalmente fendilhada

σ_{SE} tensão na armadura, no ponto de deslizamento nulo

σ_{sm} tensão média no aço ao longo da distância entre pontos de deslizamento nulo

$\phi(t, t_0)$ coeficiente de fluência

ϕ_0 coeficiente nominal de fluência

ϕ diâmetro do varão de aço

Φ_i descrição matemática da rotação

ψ_0 coeficiente para a determinação do valor de combinação de uma ação variável

ψ_1 coeficiente para a determinação do valor frequente de uma ação variável

ψ_2 coeficiente para a determinação do valor quase permanente de uma ação variável

EC0 – Eurocódigo 0

EC2 – Eurocódigo 2

MC90 – CEB – Model Code 1990

EF – Elementos Finitos

1
INTRODUÇÃO

1.1. ENQUADRAMENTO DO TEMA E OBJETIVOS DA DISSERTAÇÃO

O betão é um material constituído por água, areia, cimento e agregado grosso, podendo incluir aditivos e adições. É o mais utilizado na construção estrutural por ser económico (quando comparado com, por exemplo, o aço), moldável e durável, não exigindo grandes cuidados de manutenção e conservação, tendo uma grande resistência a efeitos térmicos, atmosféricos e desgastes mecânicos. Contudo tem a desvantagem de ser um material pesado com fraca resistência à tração, fissurando facilmente.

A laje é o elemento estrutural mais comum em qualquer construção de betão armado. Exemplo disso são os edifícios. As lajes podem ser maciças ou aligeiradas, com comportamento uni-direcional ou, pelo contrário, com esforços relevantes em mais do que uma direção. A opção por um determinado tipo de laje pode ser influenciada por múltiplos fatores, entre os quais o tipo de utilização, as cargas atuantes, o vão a vencer, os requisitos em termos de deformações admissíveis, o tempo disponível para a execução, requisitos em termos de isolamento térmico e acústico, e critérios económicos. Atualmente, a opção recai frequentemente sobre as lajes maciças, atendendo às vantagens que estas oferecem, nomeadamente em termos de simplicidade da construção, isolamento térmico e acústico, resistência e rigidez, entre outras.

Nas lajes maciças com grande área de implantação, impedidas (por paredes ou núcleos resistentes) de se deformarem axialmente, instalam-se ao longo do tempo importantes esforços de tração, em virtude do desenvolvimento da retração do betão e das deformações de origem térmica. Estes esforços devem ser tidos em conta na análise do comportamento estrutural em fase de serviço. Para atender a estes efeitos, adotam-se vulgarmente juntas estruturais, que libertam parcialmente o movimento da laje. A opção por juntas de dilatação permite reduzir consideravelmente os esforços gerados pelo impedimento das deformações impostas. Contudo, estas juntas podem ser inconvenientes, por encarecerem a manutenção dos edifícios, por poderem gerar danos em revestimentos e paredes divisórias, e por poderem ser responsáveis por infiltrações de água. Podem também representar uma menor valia em termos arquitetónicos, por implicarem a existência de descontinuidades nos edifícios, e obrigarem à duplicação de elementos estruturais de suporte (pilares e eventualmente vigas), entre outros aspetos. Será portanto vantajoso minimizar o número de juntas estruturais. Ora, a redução do número de juntas implica que os efeitos do impedimento das deformações impostas assumam um papel mais importante, pelos esforços de tração que são originados, e pelo acréscimo de armadura que pode ser necessário prever nas lajes, de modo a permitir o controlo da fendilhação. Este efeito pode ser especialmente importante no caso das lajes maciças, atendendo ao valor elevado do esforço que este

tipo de laje pode suportar antes de fendilhar e, consequentemente, à quantidade de armadura que pode ser necessária para controlo da fendihação.

A presente dissertação incide sobre lajes maciças bi-direcionais submetidas a ações verticais com carácter permanente ou quase-permanente, fortemente restringidas axialmente, sujeitas a deformações impostas internas, devidas à retração do betão. Assim, contemplam-se lajes maciças, com grande área de implantação, ligadas estruturalmente a núcleos e/ou paredes de elevada rigidez, como por exemplo, os pisos ligados a caixa de elevadores ou pavimentos de caves ligados a paredes de elevada rigidez.

A fendilhação é muito comum nas estruturas de betão, devido à fraca resistência à tração deste material. Este efeito é tomado em consideração na fase de projeto de estruturas novas. O seu controlo passa por limitar a abertura máxima de fendas a valores que dependem do tipo de estrutura e da classe de exposição. Para as verificações em Estado Limite de Utilização (ELS), o Eurocódigo 2 (CEN 2004), afirma que as deformações impostas deverão ser tidas em conta mas não fornece indicações precisas sobre o procedimento a aplicar nessa verificação. Para o controlo de fendilhação, este documento sugere, no subcapítulo 7.3.2, uma quantidade de armadura mínima, que se baseia num equilíbrio de forças, assumindo que o esforço axial instalado é igual ao esforço axial de fendilhacao, N_{cr}. Contudo o esforço axial verdadeiramente instalado em elementos estruturais de betão, devido ao efeito da retração impedida, pode ser consideravelmente menor do que este.

Vários estudos foram já dedicados ao estudo deste tema. Para lajes com comportamento uni-direcional, axilamente restringidas, sujeitas a ações verticais de carácter permanente, de acordo com Camara e Figueiredo (2012), para uma deformação imposta externa de 0,5‰ (valor semelhante à deformação de retração expectável, numa laje de betão, aos 50 anos de idade), com taxas de armaduras, ρ, a variar entre 0,5% a 1%, o esforço axial varia respetivamente entre 60% a 80% de N_{cr}. Camara e Luis (2006), concluem, que o esforço axial instalado nelas, diminui com o desenvolvimento da deformação interna causado pela retração do betão. Concluem também que este esforço não depende muito da variação da taxa de armadura, sendo cerca de 45% do N_{cr}, para taxas de armaduras correntes (0,5% a 1%). A dissertação de Carvalho (2013) vem reforçar essa ideia, afirmando que o esforço axial verdadeiramente instalado, em lajes maciças com comportamento unidirecional, varia entre 40% a 45% do N_{cr}, verificando-se o Estado Limite Último e o Estado Limite de Utilização, nomeadamente, o controlo de fendilhação.

O que foi mencionado acima tem a particularidade de se basear em elementos estruturais com comportamento unidirecional. Esta dissertação tem como objetivo quantificar o esforço axial instalado numa laje restringida axialmente, sujeita a ações verticais de carácter permanente ou quase-permanente, mas com funcionamento bi-direcional, recorrendo-se a uma análise não-linear através da utilização de um programa de cálculo automático, o DIANA (Witte 2005).

1.2. ORGANIZAÇÃO EM CAPITULOS

A presente dissertação esta dividida em 4 capítulos, sendo o primeiro, **capítulo 1**, a introdução e o enquadramento do tema.

No **capítulo 2** é apresentado o comportamento e a modelação dos efeitos das deformações diferidas do betão não fendilhado, incluindo os efeitos de retração e fluência, e do betão fendilhado, apresentando-se o processo de retenção de trações no betão simples, *tension softening*, e no betão armado, *tension stiffening*, explicando-se como se pode proceder ao cálculo da abertura máxima de fendas. Descreve-se o elemento finito adotado, definindo-se também alguns conceitos fundamentais, relativos à utilização do programa de cálculo, DIANA. Por fim, valida-se o elemento finito e o procedimento de análise adotado, através do estudo de um caso, comparando-se os resultados agora obtidos com aqueles que são reportados na dissertação de Carvalho (2013).

No **capítulo 3** é apresentado o estudo de painéis bi-direcionais, sujeitos a cargas verticais de carácter quase-permanente, encastrados nos bordos, com a mesma altura mas com geometrias diferentes: 7×7 m^2, 7×10,5 m^2 e 7×14 m^2. Nesses painéis, desenvolvem-se ao longo do tempo importantes esforços de tração, uma vez que as deformações por retração são restringidas pelas ligações aos apoios. Recorrendo a uma análise não linear de elementos finitos, é avaliada a quantidade de armadura necessária para garantir que a abertura de fendas não ultrapassa os valores admissíveis. Verifica-se também que essa quantidade é suficiente para ser garantida a resistência em Estado Limite Último, e para ser verificado o Estado Limite de Deformação. Um dos resultados importantes da análise consiste na quantificação do esforço axial instalado nos diversos pontos críticos de cada painel de laje, em resultado do impedimento da deformação por retração. Verifica-se que, a fluência e a fendilhação do betão têm um efeito benéfico na medida em que contribuem para a redução do esforço axial de tração instalado. Verifica-se que o esforço axial de tração realmente atuante numa laje do tipo estudado é consideravelmente inferior ao esforço axial de fendilhação do betão, N_{cr}. Por fim, apresentam-se algumas recomendações, que poderão ser tomadas em consideração na prática corrente de projeto de edifícios.

Finalmente, no **capítulo 4,** é feita uma síntese com as principais conclusões do trabalho realizado, sugerindo-se alguns desenvolvimentos futuros, dando seguimento ao trabalho realizado na presente dissertação.

2

MODELAÇÃO DO BETÃO FENDILHADO INCLUINDO OS EFEITOS DE RETRAÇÃO E FLUÊNCIA

2.1. INTRODUÇÃO

Neste presente capítulo inicia-se a descrição do comportamento do betão face às solicitações a que vai ser exposto bem como o sua modelação no *software* DIANA, caracterizando posteriormente o tipo de elemento finito adotado, e por fim aprovando a malha e o tipo de elemento finito através de um exemplo de validação, cujos resultados serão comparados com os publicados na dissertação de Carvalho (2013) .

No que toca ao comportamento do betão não fendilhado, apresentam-se os fenómenos de retracção e fluência. Para o betão fendilhado, descreve-se o modelo de fendilhação adotado, como se processa a retenção de tensões de tração, tanto no betão simples (*tension softening*) como no betão armado (*tension stiffening*) e como estes efeitos são modelados no programa de cálculo. Justifica-se a execução do cálculo da abertura de fendas, bem como os regulamentos em que se baseia e os parâmetros que o influenciam.

A extensão total num elemento de betão, carregado uniaxialmente a partir do instante t_0, com uma tensão constante aplicada $\sigma_c(t_0)$, para um determinado instante de tempo *t*, é expresso pela equação (2.1) e ilustrado pela Fig. 2.1.

$$\varepsilon_{ct}(t) = \varepsilon_{ci}(t_0) + \varepsilon_{cc}(t, t_0) + \varepsilon_{cs}(t) + \varepsilon_{cT}(t) \tag{2.1}$$

com:

$\varepsilon_{ct}(t)$ deformação total de um elemento de betão;

$\varepsilon_{ci}(t_0)$ deformação instantânea;

$\varepsilon_{cc}(t, t_0)$ deformação de fluência;

$\varepsilon_{cs}(t)$ deformação de retração;

$\varepsilon_{cT}(t)$ deformação térmica, dado pelo produto da variação de temperatura pelo coeficiente de dilatação térmica;

t_0 instante correspondente à aplicação da tensão (em dias).

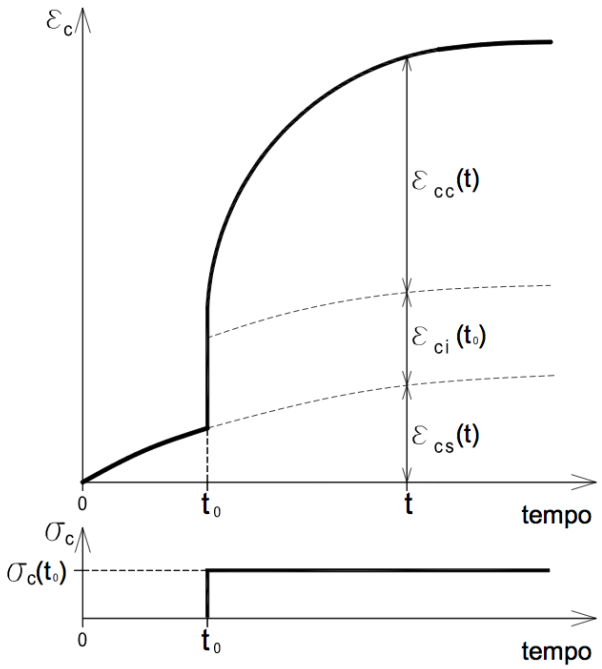


Fig. 2.1- Componentes $\varepsilon_{ci}(t_0)$, $\varepsilon_{cc}(t,t_0)$ e $\varepsilon_{cs}(t)$ da deformação total de um elemento de betão sujeito a tensão constante (Sousa 2004).

As componentes de deformação $\varepsilon_{ci}(t_0)$ e $\varepsilon_{cc}(t,t_0)$ dependem do estado de tensão, sendo por isso designados componentes de deformação mecânica. Porém as componentes de deformação $\varepsilon_{cs}(t)$ e $\varepsilon_{cT}(t)$ não dependem deste, designando-se por deformações não mecânicas.

2.2. COMPORTAMENTO DIFERIDO DO BETÃO NÃO FENDILHADO

As componentes de deformação por fluência e retração são consensualmente chamados por deformações diferidas porque se desenvolvem lentamente ao longo do tempo, variando cada vez menos ao longo deste. A distinção entre a retração e a fluência, bem como deformação instantânea e deformação por fluência (Sousa, 2004) são convencionais, pois na realidade estes fenómenos não são independentes. No entanto para efeitos práticos, considera-se que o são. Assim facilita-se as análises estando com uma aproximação suficiente.

2.2.1. RETRAÇÃO

A retração é uma propriedade reológica do betão que consiste numa redução de volume devido à perda de humidade, seja no estado fresco ou no estado endurecido, sem incluir variações de temperatura e

tensões exteriores. Esta depende de diversos fatores, nomeadamente: da dimensão da peça, do teor em água da amassadura, da dosagem de cimento, da natureza e da granulometria dos inertes, da duração do período inicial da cura, da luminosidade ambiente e da composição química do betão (Leitão 2011). Ela manifesta-se numa variação gradual de volume a partir do final da compactação sendo restringida ao longo do tempo pelos agregados e pelas armaduras que compõem a peça de betão, pela forma da peça e pelos elementos ligados a ela, nomeadamente as ligações ao exterior. Distinguem-se cinco tipos de deformações de retração:

- retração autogénea, que consiste na diminuição de volume resultante da remoção da água dos poros capilares pela hidratação do cimento, sendo independente das condições de humidade;
- retração plástica, definida pela perda de água na superfície do betão por evaporação quando este se encontra no estado plástico, sendo esta perda maior do que a água que sobe à superfície por exsudação;
- retração por secagem, que é quando o betão "seca" e se dá a remoção da água da pasta endurecida de cimento através de uma difusão da mesma para as faces expostas à secagem, provocando um gradiente hídrico entre o betão e o meio ambiente. Resulta assim uma diminuição de volume com origem nas camadas superficiais;
- retração por carbonatação, que é causada pela reação da pasta de cimento hidratado com o dióxido de carbono do ar na presença de humidade, que começa à superfície do betão e evolui para o interior à medida que avança a carbonatação do betão (Sousa 2004);
- retração térmica, que consiste na contração do betão após a sua presa, ocorrendo dissipação de elevadas temperaturas geradas pela libertação do calor de hidratação (Favre *et al.* 1997).

A retração autogénea desenvolve-se de uma forma uniforme ao longo da seção transversal dos elementos de betão, sendo a sua importância reduzida em betões de resistência normal e significativa em betões de elevado desempenho. Contrariamente, a retração térmica varia de ponto para ponto porque a hidratação do cimento não é uniforme ao longo da secção transversal.

A retração por secagem e por carbonatação desenvolve-se essencialmente da superfície para o interior das peças, provocando tensões internas autoequilibradas (trações à superfície e compressões no interior das peças).

A retração total está normalmente associado à diminuição das dimensões de um elemento de betão, devido essencialmente à retração por secagem (Carvalho 2013). Este tipo de retração processa-se ao longo do tempo, evoluindo com uma taxa progressivamente menor. Devido ao facto de causar variação de volume, esta propriedade revela-se importante e deve de ser considerada nas estruturas de betão, pois normalmente estas estão maioritariamente restringidas (internamente e externamente) e quando tendem a diminuir o seu volume, surgem tensões de tração. Como o betão tem fraca resistência à tração, dá-se o aparecimento de fissuração.

No presente trabalho a deformação por retração é tida em conta recorrendo ao Model Code 1990 (CEB-FIP, 1991). Através das equações (2.2) a (2.7) provindas do MC90, consegue-se descrever adequadamente o comportamento do betão neste campo.

$$\varepsilon_{cs}(t, t_s) = \varepsilon_{cso}\beta_s(t - t_s) \tag{2.2}$$

$$\varepsilon_{cso} = \varepsilon_s(f_{cm})\beta_{RH} \tag{2.3}$$

$$\varepsilon_s(f_{cm}) = \left[160 + 10\beta_{sc}\left(9 - \frac{f_{cm}}{f_{cm0}}\right)\right] \times 10^{-6} \quad (2.4)$$

$$\beta_{RH} = -1{,}55\beta_{sRH} \quad (2.5)$$

$$\beta_{sRH} = 1 - \left(\frac{RH}{RH_0}\right)^3 \quad (2.6)$$

$$\beta_s(t - t_s) = \left[\frac{(t-t_s)/t_1}{350(h/h_0)^2 + (t-t_s)/t_1}\right]^{0,5} \quad (2.7)$$

em que:

$\varepsilon_{cs}(t, t_s)$ deformação total de retração para o instante *t*;

ε_{cso} coeficiente de retração nominal;

$\beta_s(t - t_s)$ coeficiente que descreve a evolução da retração ao longo do tempo;

$\varepsilon_s(f_{cm})$ extensão que depende do tipo de betão;

β_{RH}, β_{sRH} coeficientes que dependem da humidade relativa;

β_{sc} coeficiente que depende do tipo de cimento. Assume o valor de 4 para cimentos do tipo SL, 5 para cimentos do tipo N e R, e 8 para cimentos do tipo RS;

RH humidade relativa (%);

RH_0 humidade relativa de referência (100%);

t_s idade do betão quando começa a retração (em dias);

t_1 1 dia.

2.2.2. FLUÊNCIA

A deformação por fluência é a diferença entre o aumento da deformação (sem incluir a deformação instantânea) ao longo do tempo de um elemento de betão, sujeito a uma tensão exterior constante e a deformação não mecânica de um elemento semelhante, sujeito a deformações não mecânicas (FIB 1999; Hilsdorf 1995). Pode-se afirmar que esta é entendida como uma deformação adicional à deformação elástica instantânea. A origem deste fenómeno deve-se principalmente à fluência da pasta de cimento hidratado, sendo a fluência dos agregados de densidade normal desprezável. A fluência desta pasta depende essencialmente da quantidade de água nela contida.

Estando perante casos onde a ação é de longa duração, como por exemplo a retração, a fluência altera significativamente a resposta da estrutura, assumindo extrema importância (Leitão 2011). Esta depende essencialmente da idade, do período e da intensidade do carregamento, da humidade relativa do ambiente, da composição e da consistência do betão, bem como da forma da seção.

Neste trabalho, a ação devido à retração é muito importante, e consequentemente a fluência, devendo estas serem modeladas convenientemente. Adoptou-se a lei da fluência preconizada no MC90, que se revela muito idêntica à lei utilizada no Eurocódigo 2 (CEN 2004). Convém referir que neste caso de estudo, o betão está tracionado por ações de longa duração, sendo o seu comportamento menos

conhecido face ao betão comprimido permanentemente, com níveis de tensão inferiores a 40 por cento da sua resistência média à compressão. Isto porque os estudos que foram realizados com o objetivo de estudar o comportamento do betão traccionado, nem sempre têm conclusões concordantes. Umas das razões para este facto é a medição da extensão de tracção não ser feita com precisão suficiente, pois a extensão devido à retração é sempre significativamente superior ao valor da deformação por fluência (Coutinho e Gonçalves 1994). Contudo, geralmente aceita-se que o comportamento do betão traccionado pode ser considerado de forma igual ao betão comprimido, até se dar a fendilhação: modelo visco-elástico com envelhecimento (Sousa 2004). As equações (2.8) e (2.9) descrevem a deformação mecânica de um elemento de betão, enquanto que as equações (2.10) a (2.13) descrevem os parâmetros que influenciam o módulo de elasticidade do betão.

$$\varepsilon_{c\sigma}(t,t_0) = \varepsilon_{ci}(t_0) + \varepsilon_{cc}(t,t_0) \tag{2.8}$$

isto é,

$$\varepsilon_{c\sigma}(t,t_0) = \sigma_c \left[\frac{1}{E_{ci}(t_0)} + \frac{\phi(t,t_0)}{E_{ci}}\right] \tag{2.9}$$

$$E_{ci}(t_0) = \sqrt{\beta_{cc}(t)}.E_{ci} \tag{2.10}$$

$$\beta_{cc} = \exp\left[s\left(1 - \sqrt{\frac{28}{t}}\right)\right] \tag{2.11}$$

$$E_{ci} = 2{,}15.10^4 \left(\frac{fcm}{10}\right)^{\frac{1}{3}} \tag{2.12}$$

$$\phi(t,t_0) = \phi_0 \beta_c(t - t_o) \tag{2.13}$$

com,

$\varepsilon_{c\sigma}(t,t_0)$ deformação mecânica de um elemento de betão;

$E_{ci}(t_0)$ módulo de elasticidade na idade da carga;

E_{ci} módulo de elasticidade tangente na origem, para um idade de carregamento igual a 28 dias;

β_{cc} coeficiente que depende da idade do betão;

s coeficiente que depende do tipo de cimento: s=0,20 para cimento RS, s=0,25 para cimento do tipo N e R, s=0,38 para cimento do tipo SL;

f_{cm} resistência média à compressão aos 28 dias;

$\phi(t,t_0)$ coeficiente de fluência;

ϕ_0 coeficiente nominal de fluência;

$\beta_c(t - t_o)$ coeficiente que descreve o desenvolvimento da fluência ao longo do tempo;

t_o idade do betão no instante do carregamento (em dias).

2.3. COMPORTAMENTO DO BETÃO FENDILHADO

2.3.1. MODELOS DE FENDILHAÇÃO

Têm sido adotados dois tipos de conceitos nos modelos de elementos finitos para descrever a fendilhaçao do betão: conceito de fenda discreta e de fenda distribuída.

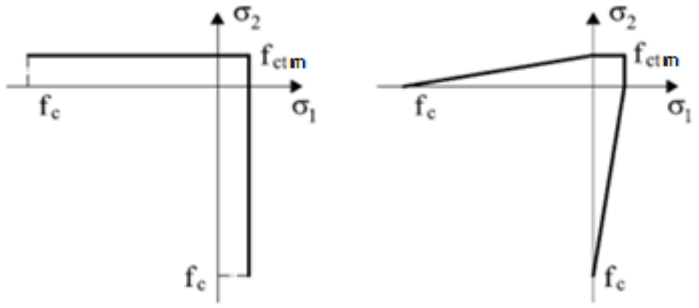
Nos modelos baseados na fenda discreta, esta é modelada através da introdução de descontinuidades entre elementos adjacentes. Separa-se os pontos nodais, que inicialmente se encontram espacialmente sobrepostos, tendo como consequência uma alteração da tipologia da estrutura (Leitão 2011). A descontinuidade na respetiva face, tem como vantagem uma continuidade da analise do sólido que permanece contínuo e não danificado. Uma desvantagem da aplicação deste conceito é o facto de as fissuras se localizaram no contorno dos elementos, fazendo com que a direcção de propagação da fissuração fique restringida, obrigando a resposta estrutural a estar dependente da malha. Aconselha-se a aplicação deste tipo de modelos em problemas onde haja um número reduzido de fendas, conhecendo à priori a sua localização. Contudo esta desvantagem pode ser ultrapassada recorrendo a geradores automáticos (algoritmos), idealizadas para fazer continuas atualizações na malha de elementos finitos, de modo a estar em conformidade com o desenvolvimento da fendilhação (Leitão 2011).

Nos modelos que se guiam pelo conceito da fendilhação distribuída, o material fendilhado é tratado como um meio continuo, mantendo-se a continuidade da geometria e do campo de deslocamentos da malha. Modifica-se as relações constitutivas definidas para o material (na presença de fendilhação, a relação tensão-extensão inicialmente isotrópica é substituída por uma relação ortotrópica). Estes modelos são geralmente utilizados na análise de problemas onde ocorre padrões de fendilhacão difusa, podendo também ser utilizados em problemas com fratura localizada (Sousa 2004). Permitem o estudo detalhado do comportamento do betão nas suas diferente fases, combinando a fendilhação com outros efeitos, como por exemplo: a fluência, a plasticidade do betão e as deformações impostas. Este conceito tem também vantagens na sua aplicação computacional.

Quando se quer representar, com algum rigor , as leis constitutivas que retratam a evolução da fenda tendo em conta o conceito de fenda distribuída, é necessário tratar adequadamente as extensões nas zona de fratura. Por isso os modelos de fendilhação distribuída apresentam um decomposição de extensão total em duas componentes. Uma é a extensão correspondente ao betão existente entre as microfissuras, a outra é a extensão correspondente à própria fissura (Leitão 2011).

Dentro do conceito de fenda distribuída, existem os modelos de fendas rodadas e os modelos de fendas fixas. Nos modelos de fendas rodadas, a direção normal à fenda pode rodar durante o processo de carregamento, enquanto que nos modelos de fendas fixas não (Sousa 2004). Neste presente trabalho foi adotado o conceito de fenda distribuída, com decomposições de extensões e com formação de fendas fixas num ponto de integração: *Muli-Directional Fixed Crack Model* ("Material Library" de DIANA). A possibilidade da existência de mais do que um fenda, simultaneamente num dado ponto de integração, deve-se ao seguinte fato: após a formação de uma fenda e no caso da utilização de um modelo de retenção de tensões de tração pelo betão entre fendas, o valor da tensão normal retida, combinada com o valor de tensão de corte na fenda, podem originar a rotação dos eixos principais de tensão e o surgimento de uma tensão principal de tração que provoque uma nova fenda com orientação diferente da primeira (Sousa 2004). Para que tal aconteça, é necessário que se verifiquem duas condições:

- a tensão principal de tração ultrapassa a condição de tensão máxima, que é designada na nomenclatura inglesa por *tension cut-off criteria* (na Fig. 2.2 encontram-se as duas formulações para *tension cut-off criteria* disponíveis no DIANA);
- o ângulo entre a fenda existente e a tensão principal de tração formada, excede um valor mínimo, chamado na nomenclatura inglesa por *threshold angle*.



a) b)

Fig. 2.2 – *Tension cut-off criteria* disponíveis no *sofware* DIANA: a) constante; b) linear.

Neste trabalho utilizou-se um critério de *tension cut-off* constante - Fig. 2.2 a).

2.3.2. Definição do Diagrama de Tensões de Tração no Betão Simples

Num elemento de betão, para valores próximos da tensão de rotura à tração, existe a propagação localizada de fendas numa pequena região, designada por zona de fratura. Na zona de fratura formam-se microfissuras, que possibilitam a transmissão de tensões de tração. Estas tensões de tração diminuem com o aumento da abertura das fendas, até se formar uma única fenda que atravessa integralmente a secção transversal, sendo a tensão retida no betão igual a zero (Sousa 2004). Este processo é conhecido por *tension softening,* que é a capacidade de o betão reter tensões de tração, mesmo após fissurar, encontrando-se dependente da energia de fratura, que por sua vez depende das características do material. A energia de fatura, G_f, é geralmente definida em função do tipo de agregados utilizados na constituição do betão e da sua resistência, estando definida no MC90 pela equação (2.14).

$$G_f = G_{f0} \cdot \left(\frac{f_{cm}}{f_{cm0}}\right)^{0,7} \tag{2.14}$$

em que:

G_{f0} valor base da energia de fratura, que depende da dimensão máxima dos agregados;

f_{cm} resistência média à compressão;

f_{cm0} valor base da resistência à compressão (10 MPa).

Esta é a quantidade de energia libertada durante o processo de fratura, para uma superfície unitária, representando a área do diagrama da Fig. 2.3. Esta figura representa um diagrama tensão de tração-deformação axial e um diagrama tensão - abertura de fenda, típico de um ensaio de tração uniaxial de betão. O ramo descendente traduz o efeito *tension softening*.

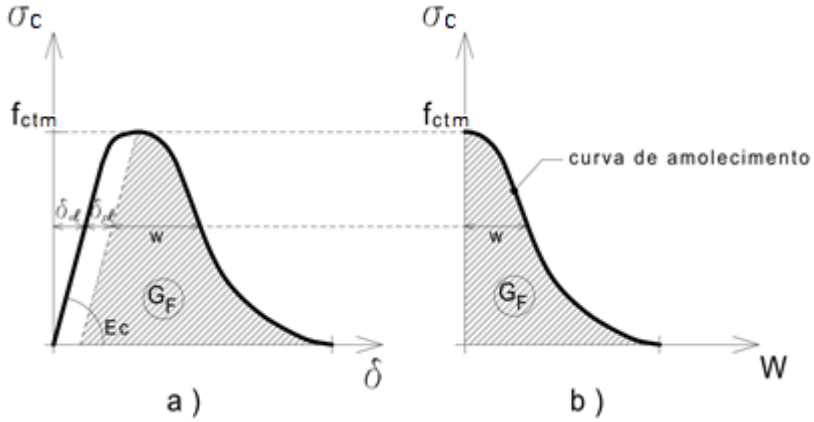


Fig. 2.3 – Ensaio de tração uniaxial: a) curva tensão-deslocamento; b) curva tensão abertura da fenda (Sousa 2004).

A energia de fratura não deve incluir a energia gasta na deformação elástico-plástica do elemento de betão. Este aspeto não tem implicações quando o ramo ascendente do diagrama σ-δ toma a forma linear, conforme é considerado no presente trabalho. As propriedades do material devem ser definidas em função da malha utilizada, para que os resultados da análise não dependam da malha adotada. Ou seja, como é ilustrado na equação (2.15), a área sob o diagrama σ-ε, g_f, deve ser definido em função da largura da malha, h_b, dependendo esta da largura da malha usada, do campo de deslocamentos, da ordem de integração e da trajetória de fendilhação no interior do elemento (Leitão 2011).

$$g_f = \frac{G_f}{h_b} \tag{2.15}$$

com,

G_f energia de fratura (propriedade do material);

h_b largura da banda (dependente da malha adotada).

A largura da banda não deverá ser superior ao valor determinado na inequação (2.16).

$$h_b < \frac{2G_f E}{{f_{ctm}}^2} \tag{2.16}$$

No presente trabalho adoptou-se um diagrama linear de amolecimento: *linear tension softening,* tal como é representado na Fig. 2.4. A principal vantagem deste diagrama é a sua simplicidade.

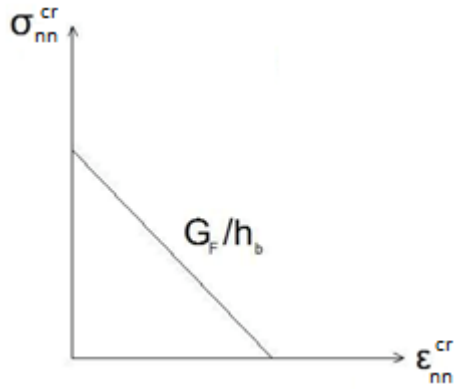


Fig. 2.4 – Diagrama de amolecimento tensão- extensão de fendilhação adoptado simplificadamente no *software*.

O diagrama linear de *tension softening* é assim definido pelas equações (2.17) a (2.19).

$$\frac{\sigma_{nn}^{cr}(\varepsilon_{nn}^{cr})}{f_{ctm}} = \begin{cases} 1 - \frac{\varepsilon_{nn}^{cr}}{\varepsilon_{nn.ult}^{cr}} & se\ 0 < \varepsilon_{nn}^{cr} < \varepsilon_{nn.ult}^{cr} \\ 0 & se\ \varepsilon_{nn.ult}^{cr} < \varepsilon_{nn}^{cr} < \infty \end{cases} \tag{2.17}$$

$$\varepsilon_{nn.ult}^{cr} = 2\frac{G_f}{h_b f_{ctm}} \tag{2.18}$$

$$\varepsilon_{nn.ult.min}^{cr} = \frac{f_{ctm}}{E_{cm}} \tag{2.19}$$

com,

$\sigma_{nn}^{cr}(\varepsilon_{nn}^{cr})$ tensão normal à fenda;

ε_{nn}^{cr} extensão na direção normal à fenda;

$\varepsilon_{nn.ult}^{cr}$ extensão na direção normal à fenda correspondente ao fim do ramo de amolecimento;

$\varepsilon_{nn.ult.min}^{cr}$ valor mínimo que a extensão $\varepsilon_{nn.ult}^{cr}$ pode tomar, para que seja respeitada a inequação (2.16).

2.3.3. Definição do Diagrama de Tensões de Tração no Betão Armado.

No betão armado, após a fissuração, as tensões de tração no betão, na seção da fenda, caiem bruscamente obrigando as armaduras a absorvê-las. Como consequência, dá-se uma deformação diferencial entre estes dois materiais, causando deslizamento relativo entre eles. Este deslizamento provoca tensões tangenciais na interface armaduras-betão entre fendas, transferindo tensões de tração

da armadura para o betão. Este fenómeno é chamado por efeito de retenção de tensões de tração pelo betão entre fendas. Na nomenclatura inglesa é conhecido como *tension stiffening*. A retenção de trações conferido por este fenómeno é superior ao do processo *tension softening*, e só deve ser considerado na área de betão envolvente das armaduras tracionadas. Esta zona é conhecida por área efetiva de betão e é esquematizada na Fig. 2.5, de acordo com o MC90 e com o EC2.

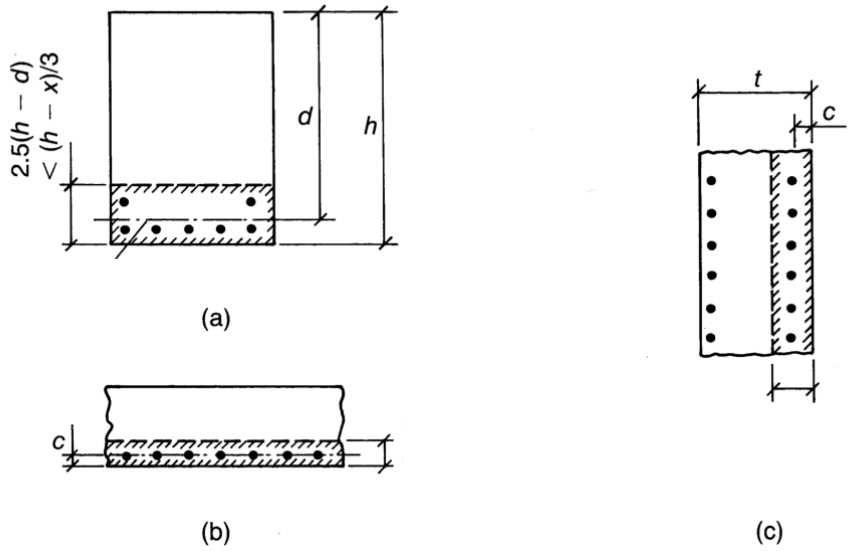


Fig. 2.5 – Determinação da área efetiva de betão: a) vigas; b) lajes; c) elementos em tração.

com,

h altura total da seção;

d altura útil da secção, dada pelas distância entre o centro de gravidade das armaduras e a fibra mais comprimida;

x profundidade do eixo neutro;

ϕ diâmetro do varão de aço;

t espessura;

c recobrimento.

Fora da área efetiva de betão, a capacidade de retenção de tensões de trações é dada pelo efeito de *tension softening*. Os modelos de *tension stiffening* traduzem o comportamento médio ao longo da distância entre fendas, permitindo mesmo assim, obter bons resultados globais, quer na fase de formação de fendas, quer na fase de fendas estabilizadas. Refere-se que não se modelou explicitamente a transferência de tensões entre o betão e armaduras, porque se considera que o efeito de *tension stiffening* engloba corretamente este conceito. O diagrama de *tension stiffeing* usado na presente dissertação encontra-se representado na Fig. 2.6.

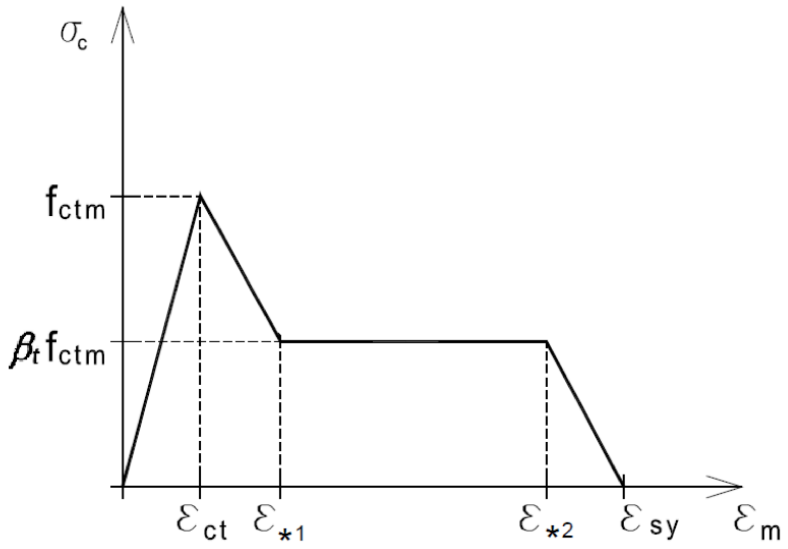


Fig. 2.6 – Relação entre a extensão média e a tensão aplicada, na área efetiva de betão traccionado. Diagrama considerado no presente estudo.

Na fase inicial, o betão trabalha em regime elástico, sendo a sua deformação igual à do aço que nele está embebido. Quando se atinge a extensão correspondente ao valor médio da resistência à tração do betão, equação (2.20), forma-se uma fenda e parte da força de tração é transferida para as armaduras, como já foi discutido anteriormente.

$$\varepsilon_{ct} = \frac{f_{ctm}}{E_{cm}} \tag{2.20}$$

Contudo a transferência de tensões para as armaduras não se realiza de forma brusca porque também atua o efeito de *tension softening* responsável pelo primeiro ramo descente na Fig. 2.6. Segue-se um ramo horizontal, correspondente a uma fase em que a tensão média instalada no betão entre fendas se mantém sensivelmente constante, mesmo com a evolução do deslizamento aço-betão. A extensão correspondente à transição entre ramos é dada pelo equação (2.21). A tensão correspondente é influenciada por um fator β_t, que depende da duração da carga. O fator β_t, neste trabalho, assume um valor correspondente à fase de fendilhação estabilizada para ações de longa duração. Isto porque como está a ser analisado um caso de deformação imposta (retração), a duração do carregamento é grande, sendo atingida a fase de fendilhação estabilizada nas zonas mais esforçadas (zona do apoio e zona do meio-vão).

$$\varepsilon_{*1} = \varepsilon_{nn.ult}^{cr} - \frac{\beta_t \cdot f_{ctm} \cdot (\varepsilon_{nn.ult}^{cr} - \varepsilon_{ct})}{f_{ctm}} \tag{2.21}$$

com β_t igual a 0,4 no presente estudo.

Quando é atingida a cedência das armaduras na secção da fenda, a força total instalada num tirante não pode aumentar mais (se for ignorado o endurecimento do aço) e é então alcançado o segundo tramo descendente da Fig. 2.7. A extensão ε_{*2} é dado pela equação (2.22).

$$\varepsilon_{*2} = \varepsilon_{sy} - 0.4\,\frac{f_{ctm}}{E_s \rho_{s,ef}} \tag{2.22}$$

em que:

ε_{sy} extensão de cedência do aço;

$\rho_{s,ef}$ percentagem de armadura existente na zona de betão que é afetada pela aderência aço/betão, sendo dado pelo quociente entre a área das armaduras e a área efetiva de betão (ver Fig. 2.5).

O modelo de comportamento da armadura encontra-se ilustrado na Fig. 2.7 (ignora-se, simplificadamente, o endurecimento após a cedência, sendo esta simplificação válida por se analisar no presente trabalho o comportamento em serviço).

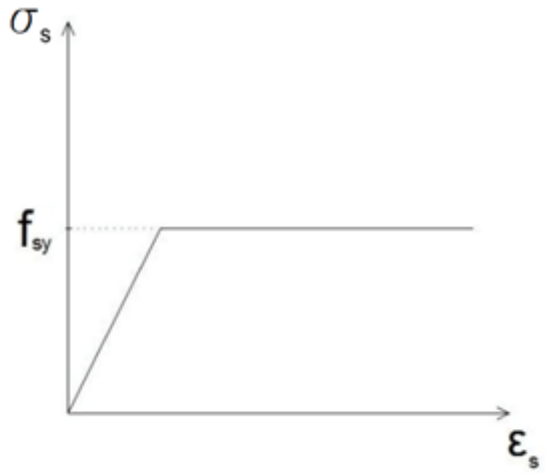


Fig. 2.7 – Diagrama bi-linear tensão-extensão considerado para a simulação da armadura.

2.3.4. Cálculo da Abertura de Fendas Segundo o MC90 (CEB-FIB, 1991)

O programa de cálculo DIANA permite considerar as propriedades dos materiais de acordo com diversos regulamentos ou documentos de referência (*Model Code, ACI, JCI, JSCE e Dutch Code*). Optou-se pelo Model Code 1990 no presente trabalho, uma vez que este documento é uma relevante referência para o desenvolvimento dos regulamentos de projeto.

Para o cálculo de abertura de fendas, incluindo os efeitos de retração, segue-se a formulação do MC90 - equação (2.23). Este valor é característico por se basear num valor característico da distância máxima entre pontos de deslizamento nulo, $l_{s,max}^{k}$.

$$w_k = l_{s,max}^{k} \cdot (\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm} - \varepsilon_{cs}) \tag{2.23}$$

com,

w_k valor característico da abertura de fendas;

ε_{sm} valor médio de extensão no aço;

ε_{cm} valor médio de extensão no betão;

ε_{cs} extensão devido à retração do betão.

A Fig. 2.8 ilustra de forma simplificada, o desenvolvimento das tensões ao longo da distância máxima entre pontos de deslizamento nulo, para o as armaduras, betão e interface (em termos de valores médios e não valores característicos).

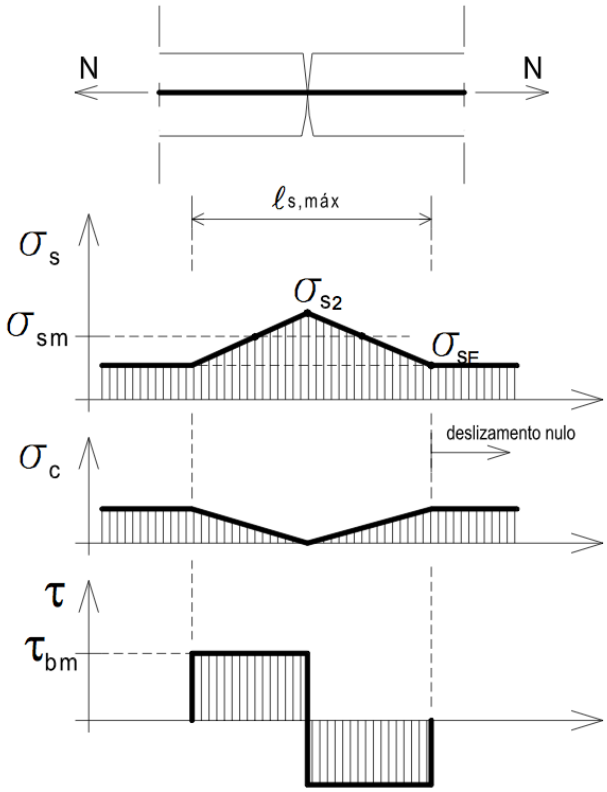


Fig. 2.8 – Distribuição simplificada de tensões num tirante de betão armado traccionado, na armadura, betão e na interface (Sousa, 2004).

com,

σ_{sm} tensão média no aço ao longo da distância entre pontos de deslizamento nulo;

σ_{SE} tensão na armadura, no ponto de deslizamento nulo;

σ_{S2} tensão na armadura calculada em secção totalmente fendilhada;

τ_{bm} tensão de aderência média entre o aço e o betão, ao longo do comprimento de deslizamento.

A tensão na armadura em secção totalmente fendilhada é calculada de acordo com a equação (2.24).

$$\sigma_{S2} = \sigma_{sm} + \frac{\beta_t f_{ctm}}{\rho_{s,ef}} \tag{2.24}$$

As equações (2.25) e (2.26) determinam a distância máxima entre fendas. Refira-se que a equação 2.26 já tem em conta o facto de se estar perante uma fase de fendilhação estabilizada para uma ação de longa duração, retratando desta forma o presente caso de estudo.

$$l_{s,max}^{k} = 2\frac{\sigma_{S2}-\sigma_{SE}}{4\tau_{bk}}\phi \tag{2.25}$$

sendo no caso de fendilhação estabilizada equivalente a:

$$l_{s,max}^{k} = \frac{\phi}{3.6\rho_{s,ef}} \tag{2.26}$$

Para a determinação da deformação relativa entre o betão e o aço, sem incluir o efeito de retração, utiliza-se a equação (2.27).

$$\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm} = \frac{\sigma_{s2}-\beta_t\frac{f_{ctm}}{\rho_{s,ef}}(1+\alpha_e.\rho_{s,ef})}{E_s} \tag{2.27}$$

sendo α_e o coeficiente de homogeneização, dado pela razão entre o módulo de elasticidade do aço e o módulo de elasticidade do betão.

Quando se pretende quantificar a abertura característica de fendas, de modo coerente com cálculos baseados no MC90, basta aplicar a equação (2.28).

$$w_k = \varepsilon_{cr}^{DIANA}.\, l_{s,max}^{k} \tag{2.28}$$

em que ε_{cr}^{DIANA} é a extensão normal à fenda, no respetivo ponto de Gauss, calculada durante a análise não-linear. Esta engloba a deformação relativa entre o betão e o aço, incluindo a deformação devido à retração.

2.4. MODELAÇÃO NUMÉRICA

Conforme já foi referido, a análise não-linear foi realizada recorrendo ao *sofware* DIANA.

2.4.1. ELEMENTO FINITO ADOTADO

O método dos elementos finitos é uma forma de resolução numérica de equações diferenciais parciais, baseando-se em funções interpoladoras. No âmbito de Engenharia de Estruturas, o MEF tem como principal objetivo, a determinação do estado de tensão e deformação de um corpo, sujeito a ações exteriores (Azevedo 2003).

Na presente dissertação foi adotado um elemento finito curvo de casca (sendo neste caso usado com configuração plana), conhecido na nomenclatura inglesa como *curved shell element* ("Element Library" de DIANA), pois apenas este permite a modelação por camadas. Os *curved shell elements* devem ser usados para simular elementos estruturais com espessuras muito inferiores às restantes dimensões, ou seja, em elementos estruturais finos. Destaca-se, a título de exemplo, os tanques de armazenamento e as lajes. O elemento finito adotado baseia-se em duas hipótese:

- as secções normais ao plano médio mantêm-se planas mas não necessariamente perpendiculares a este, respeitando a teoria de Bernoulli;
- a tensão segundo a direção normal ao plano médio da casca é zero.

Os graus de liberdade permitidos em cada nó são cinco, como indica a Fig. 2.9. Poupa-se assim no cálculo numérico o grau de liberdade correspondente à rotação do nó em torno do eixo normal ao plano médio da casca.

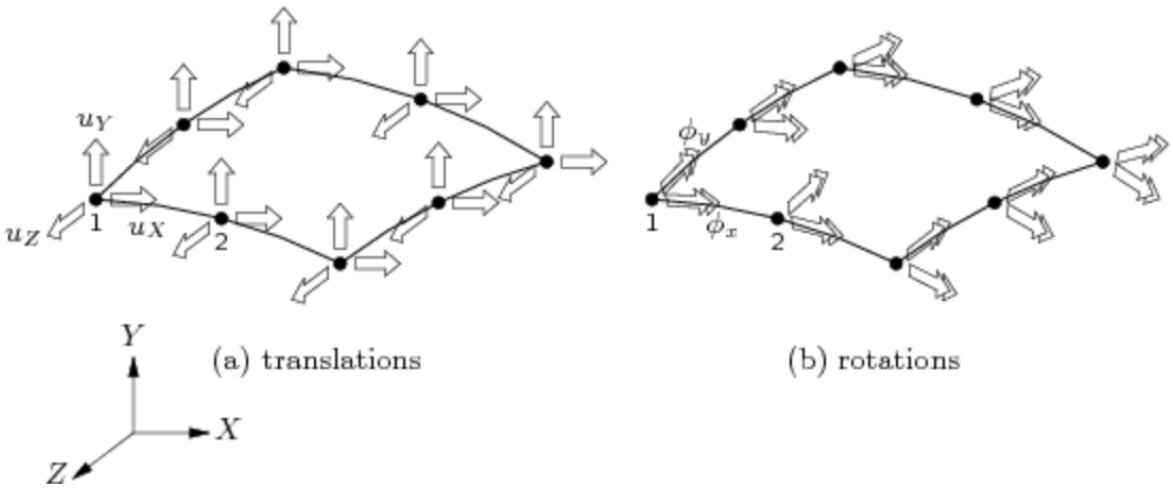


Fig. 2.9 – Graus de liberdade em *curved shell elements* ("Element Library" de DIANA): a) 3 translações; b) 2 rotações.

Ao longo da espessura do elemento as extensões, segundo as direções paralelas ao plano médio da casca, variam linearmente. Porém, as extensões e tensões devidas ao esforço transverso mantêm-se constante ao longo desta (antes da fissuração), sendo na realidade a sua variação de forma parabólica, o que justifica a existência de fatores corretivos da deformação por corte.

Dentro da gama dos *curved shell elements*, optou-se por *layered elements* simbolizados por CQ40L ("Element Library" de DIANA). A Fig. 2.10 mostra este elemento finito.

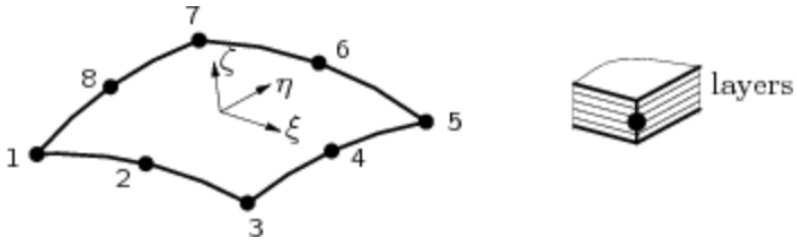


Fig. 2.10 – Elemento CQ40L, no referencial local (ξ,η,ζ) e discretização da espessura em *layers* ("Element Library" de DIANA).

Estes elementos quadriláteros de oito nós e quatro pontos de integração de Gauss no seu plano, permitem a criação de vários *layers*, ou seja várias camadas ao longo de espessura da casca, possibilitando assim impor materiais com propriedades diferentes ao longo dela, através dos pontos de Gauss. Isto é fundamental para simular os efeitos de *tension softening* e *tension stiffening* em diferentes zonas ao longo da espessura. A Fig. 2.11 ilustra a simulação desses efeitos num elemento finito.

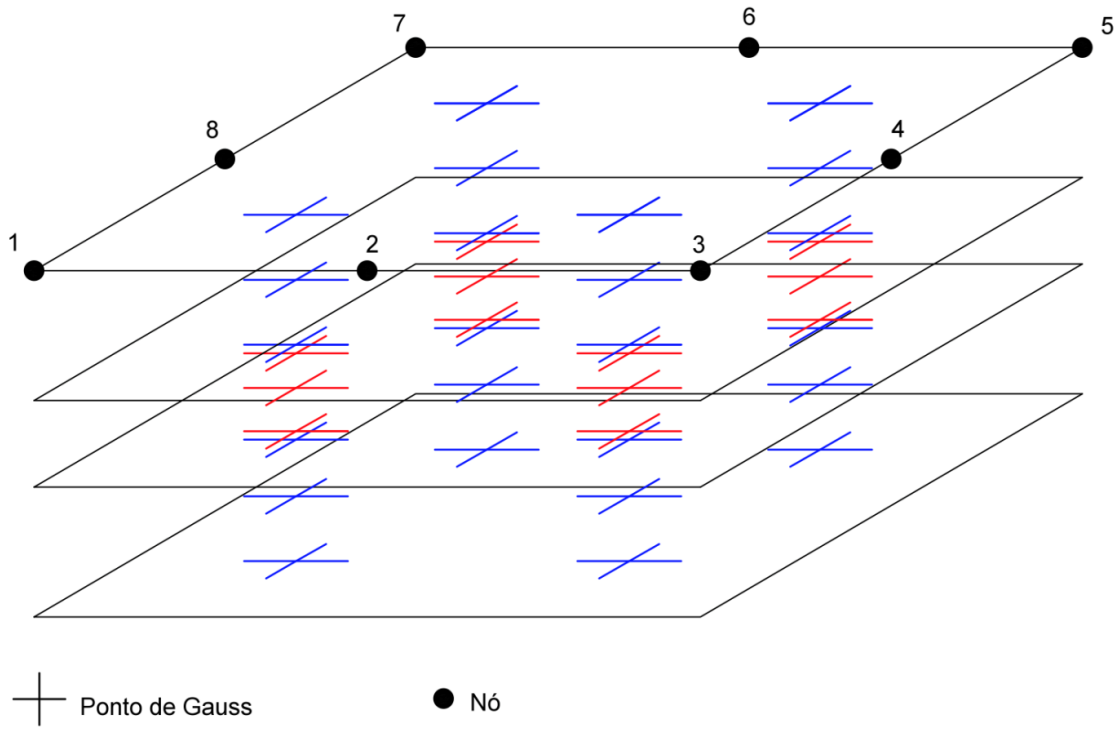


Fig. 2.11– Simulação dos efeitos *tension stiffening* (pontos de Gauss a azul) e *tension softening* (pontos de Gauss a vermelho), nos vários *layers*, num elemento finito.

O nome do elemento, CQ40L, significa: elemento curvo, quadrilátero, com 40 graus de liberdade (8 nós por 5 graus de liberdade cada) e com vários *layers*. Destaca-se que estes elementos pertencem à família *serendipity*. O número de nós de cada elemento da família *serendipity* é 4(*p*-1), sendo *p* o número de nós de um bordo. Dentro desta família, os elementos finitos que apresentam um bom compromisso entre o número de nós e a qualidade dos resultados são os de 8 nós, tendo como vantagem a sua precisão e boa adaptação a fronteiras curvilíneas (Azevedo 2003). Na Fig. 2.12 ilustra-se o critério de seleção, no triângulo de Pascal, para elementos da família *serendipity*.

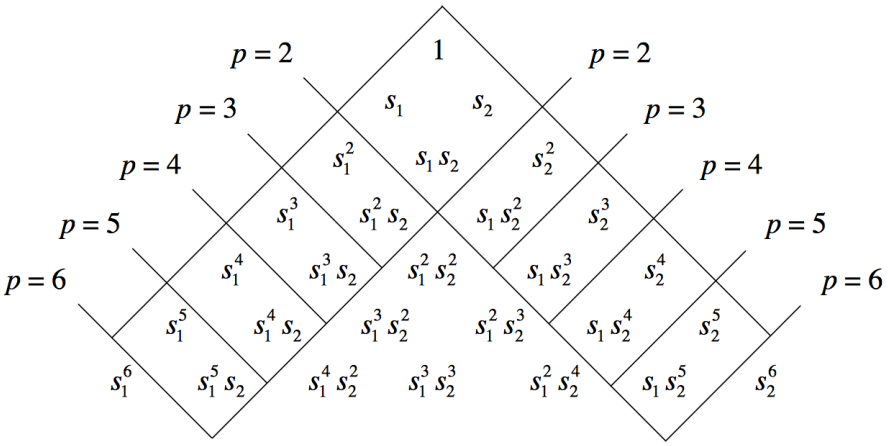


Fig. 2.12 – Seleção dos elementos no triângulo de Pascal para elementos bidimensionais da família *serendipity* (Azevedo 2003).

Um bom exemplo da aplicação do polinómio provindo do triângulo de Pascal, é a descrição matemática da translação (u_i) e da rotação (ϕ_i) de um determinado nó, no referencial global, evidenciada nas equações (2.29) e (2.30), respetivamente.

$$u_i(\xi,\eta) = a_o + a_1\xi + a_2\eta + a_3\xi\eta + a_4\xi^2 + a_5\eta^2 + a_6\xi^2\eta + a_7\xi\eta^2 \qquad (2.29)$$

$$\Phi_i(\xi,\eta) = b_o + b_1\xi + b_2\eta + b_3\xi\eta + b_4\xi^2 + b_5\eta^2 + b_6\xi^2\eta + b_7\xi\eta^2 \qquad (2.30)$$

onde a_0 a a_7 e b_0 a b_7 representam constantes.

2.4.2. CURAGE E AGING

Curage e Aging são dois conceitos associados ao programa de cálculo DIANA e estão relacionados com os modelos de retração e fluência, respetivamente. Entende-se por *Aging* como a idade do betão, em dias, quando se começa a análise no programa de cálculo. Ou seja, quando se considera um *Aging* de 14 dias para o betão (sendo este o caso), no instante 0 dias considerado na escala do programa de cálculo DIANA (Witte 2005), o betão modelado já tem as propriedades físicas correspondentes a um betão real com 14 dias após a sua betonagem. *Curage* é a idade (segundo a escala do DIANA) do betão modelado, em dias, no final da cura. Só quando acaba a cura, é que se inicia a retração. Adoptou-se um *Aging* de 14 dias e um *Curage* de 0 dias, implicando desta forma que a retração

comece aos 14 dias após a betonagem. Lembra-se que a laje é cofrada apenas na face inferior, e por isso será razoável admitir que a retração por secagem nesta face, só começa após a descofragem (28 dias). Contrariamente, a face superior da laje está exposta à secagem desde o inicio da betonagem, começando logo a haver retração nesta. Daí os 14 dias iniciais sem haver retração, que corresponde a um valor médio entre o período sem secagem para as faces superior e inferior. A Fig. 2.15 ilustra o desfasamento entre as duas escalas de tempo mencionadas anteriormente bem como o início da modelação das cargas e da retração.

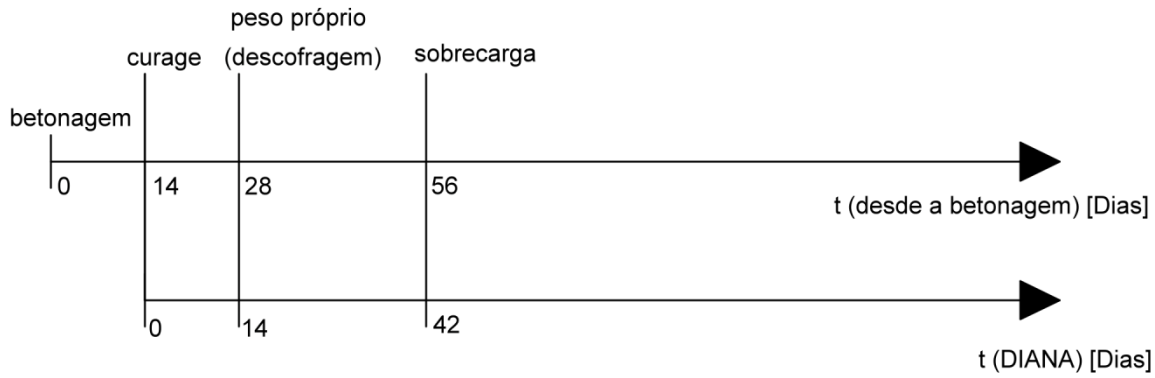


Fig. 2.13 – Instantes de aplicação das cargas no DIANA, simulando casos reais.

2.5. EXEMPLO DE VALIDAÇÃO

2.5.1. INTRODUÇÃO

No presente subcapítulo toma-se como base de comparação um caso estudado na dissertação de Carvalho (2013) sobre lajes unidireccionais, submetidas à ação de cargas verticais, com impedimento de deformação axial devido ao efeito de retração do betão. Descreve-se então um caso previamente discutido que constitui o final da referida dissertação e o ponto de partida da presente dissertação. A análise será feita utilizando um modelo tridimensional, com os elementos finitos já referidos anteriormente (CQ40L), em contraste com o trabalho desenvolvido por Carvalho (2013), que a fez com elementos finitos de viga, numa análise plana (2D). Espera-se desta forma validar os resultados a obter, comparando-os com os de Carvalho (2013), para aprovar e adquirir confiança no método numérico adotado.

2.5.2. CARACTERIZAÇÃO DA ESTRUTURA E DO MODELO ADOTADO

As propriedades dos materiais considerados ao longo desta dissertação, são iguais às do estudo de Carvalho (2013) e apresentam-se na Tabela 2.1. Note-se que se tratam de valores correntes para materiais utilizados em obras de Engenharia Civil.

Tabela 2.1 – Propriedades materiais considerados.

Material	Propriedades	Valor	Unidades
Betão C25/30 (Cimento Classe NR)	Peso Volúmico (γ)	25	kN/m^3
	E_{cm}	31	GPa
	f_{ck}	25	MPa
	f_{ctm}	2,6	MPA
	G_f	0,058	$kN.m/m^3$
	Coeficiente de Poisson (ν)	0,2	adimensional
Aço S500	f_{yk}	500	MPa
	E_s	200	GPa
	Φ_s	12	mm

Para as propriedades ambientais, considerou-se uma percentagem de humidade relativa correspondente a 60% e uma temperatura de 20 graus Celsius.

A laje tem 0,26 m de altura, com uma configuração estrutural bi- encastrada. Pode-se ver a sua geometria, bem como as armaduras que a compõem, na Fig. 2.14. Na malha de elementos finitos adotada decidiu-se discretizar o vão de 7 metros com 32 elementos, tendo cada um deles a dimensão de 0.21875 m. Note-se que esta decisão não altera praticamente os resultados, quando comparados com os de uma malha mais refinada, pois, conforme foi demonstrado por Carvalho (2013), nestas situações onde a distribuição de fendas é muito condicionada pela distribuição dos momentos fletores, os resultados para diferentes malhas não são significativamente distintos. Na análise considerou-se uma largura de 0,25 m. Este parâmetro não influencia as conclusões a retirar, uma vez que todos os esforços são apresentados com valores por metro de largura.

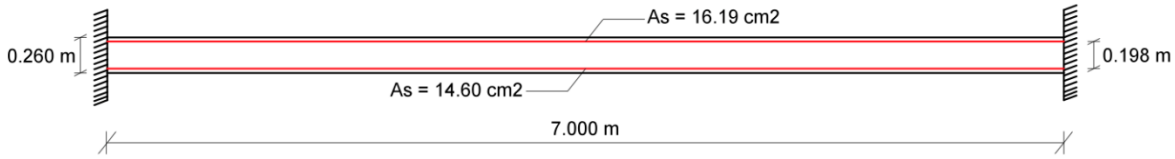


Fig. 2.14 –Geometria da laje modelada.

A laje tem uma altura útil, *d*, de 0,229 m, que corresponde a um recobrimento nominal, c_{nom}, de 25 mm. O aço obedece ao diagrama tensão - extensão preconizado na Fig. 2.7.

Em termos de carregamento, foram tidas em conta as seguintes ações:

- cargas Permanentes (g_k): Peso Próprio;
- cargas Variáveis (q_k): Sobrecarga de 5 kN/m^2, com coeficientes de combinação $\psi_0 = 0{,}8$; $\psi_1 = 0{,}7$ e $\psi_2 = 0{,}6$.

Os valores adotados para a carga variável e para os coeficientes ψ_i provêm do Regulamento de Segurança e Ações para Estruturas de Edifícios e Pontes (RSA), para garagens públicas de automóveis ligeiros. Isto porque se trata de uma utilização corrente em lajes de pisos enterrados, onde as deformações impostas pela retração são restringidas por muros e/ou paredes. Salienta-se que não foi considerado qualquer tipo de revestimento, por se tratar da simulação de um piso da cave, que por norma não possui revestimentos. Como se quer estudar o comportamento da laje em serviço, sob o efeito de ações com carácter de permanência, adota-se a orientação sugerida pelo EC2, que é a consideração da combinação quase-permanente (CQP), estipulada na equação (2.31). Desta forma, assume-se sobrecarga aplicada permanentemente na análise não-linear.

$$p_{c.q.p} = g_k + \psi_2 . q_k \tag{2.31}$$

A evolução do tempo e da carga é considerada numa análise não-linear através de *steps*. Um *step* é um incremento de tempo ou carga, com uma determinada intensidade, não sendo possível considerar *steps* de carga e tempo simultaneamente, ou seja, um incremento de carga só pode acontecer num instante de tempo fixo. Neste estudo teve-se o cuidado de aplicar a sobrecarga e o peso próprio com vários incrementos. Assim garante-se que seja simulada convenientemente a progressão da fissuração, fazendo com que se atinja rapidamente a convergência ou se evite a divergência. Aplica–se o mesmo procedimento para steps de tempo, devido às mesmas razões. A Fig. 2.13 esquematiza os instantes temporais da aplicação das diversas cargas. Neste caso de estudo, a análise foi feita até 50 anos.

2.5.3. Resultados Obtidos

Pretende-se apresentar e discutir na presente dissertação os resultados mais relevantes. Apresentam-se resultados que descrevem o comportamento da laje no que toca a deformações, tensões, forças e reações, ao longo do tempo e ao longo do vão. Foram escolhidos instantes de tempo representativos. A Fig. 2.15 ilustra a variação do esforço axial, por metro de desenvolvimento da laje, ao longo do tempo.

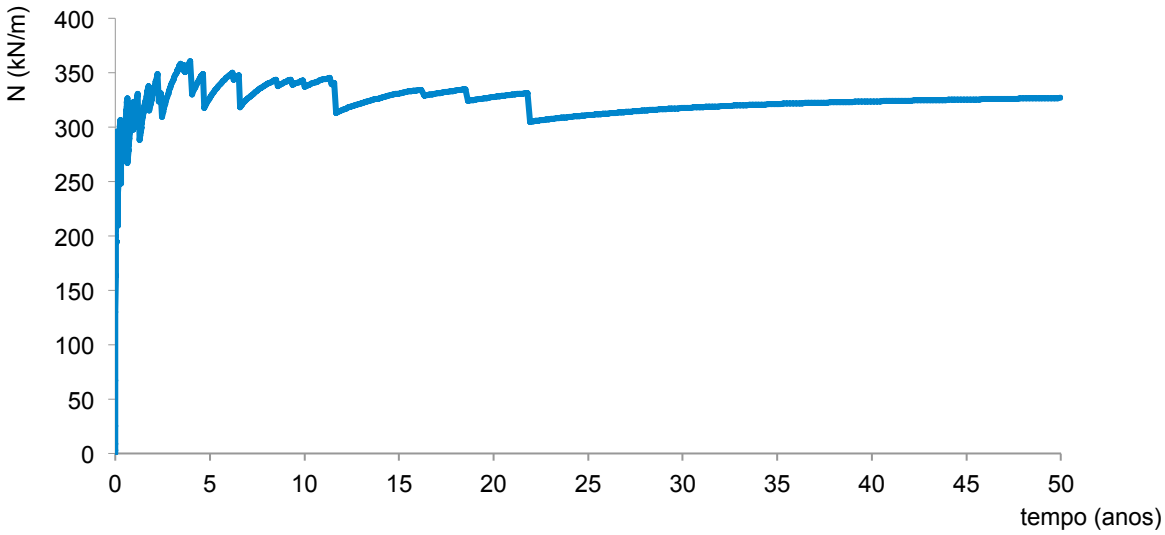


Fig. 2.15 – Esforço axial instalado na laje ao longo do período da análise.

Verifica-se que este cresce instavelmente atingindo o seu pico pouco antes dos 5 anos de idade. Até aí, verifica-se inúmeras formações de fendas, que se traduzem na Fig. 2.15 pelas variações bruscas de esforço axial. Ao longo do tempo este esforço tende a sofrer menos variação devido à estabilização da retração do betão. O esforço axial a longo prazo é cerca de 327 kN/m, atingindo o seu pico aos 4 anos, com o valor de 360 kN/m. A Fig. 2.16 dá ênfase ao desenvolvimento deste esforço nos primeiros 5 anos de vida da estrutura, para melhor visualização do período inicial da fase de formação de fendas.

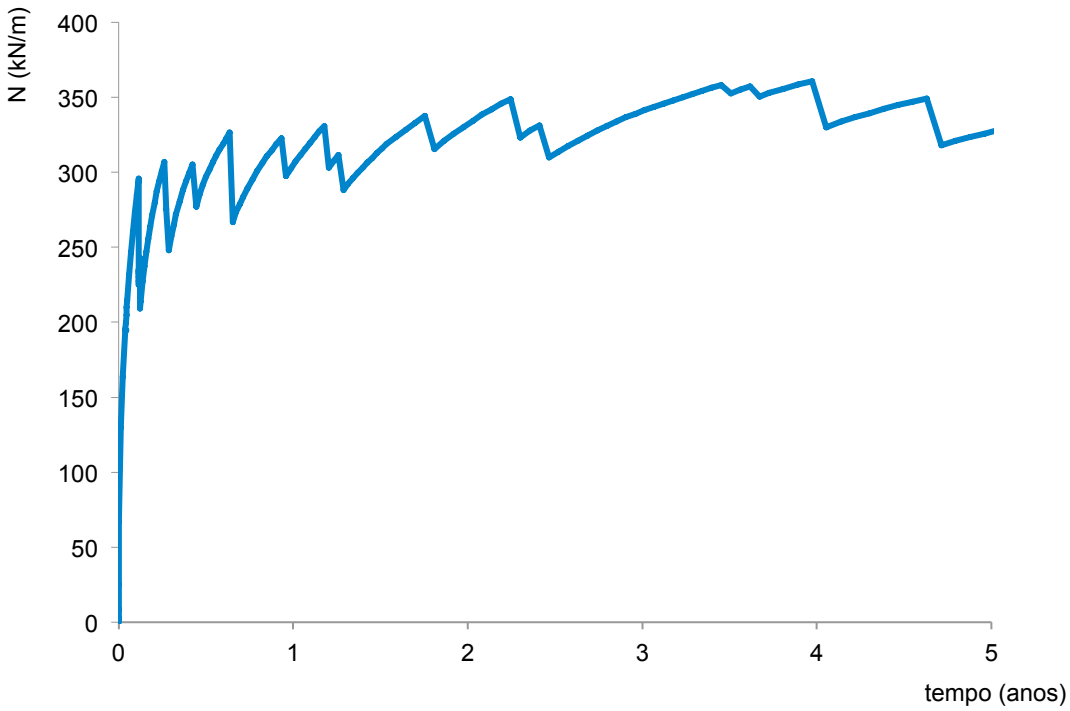


Fig. 2.16 – Esforço axial na fase inicial de formação de fendas.

Verifica-se que o intervalo de tempo entre a formação de duas fendas consecutivas vai aumentando à medida que o tempo evolui. Isto porque a laje vai perdendo rigidez à medida que fendilha, fazendo com que seja necessário uma deformação imposta cada vez maior para ser formada uma nova fenda. Além disso, a taxa de incremento da retração vai diminuindo ao longo do tempo.

A Fig. 2.17 mostra a evolução do momento fletor no apoio, nos primeiros 10 anos de vida da estrutura. Escolheu-se este período de tempo para captar a variação brusca do momento fletor que é causado pela aplicação da sobrecarga no quadragésimo segundo dia e porque, a partir deste, a variação do momento fletor é praticamente nula, tornando-se a sua representação para além do período indicado irrelevante.

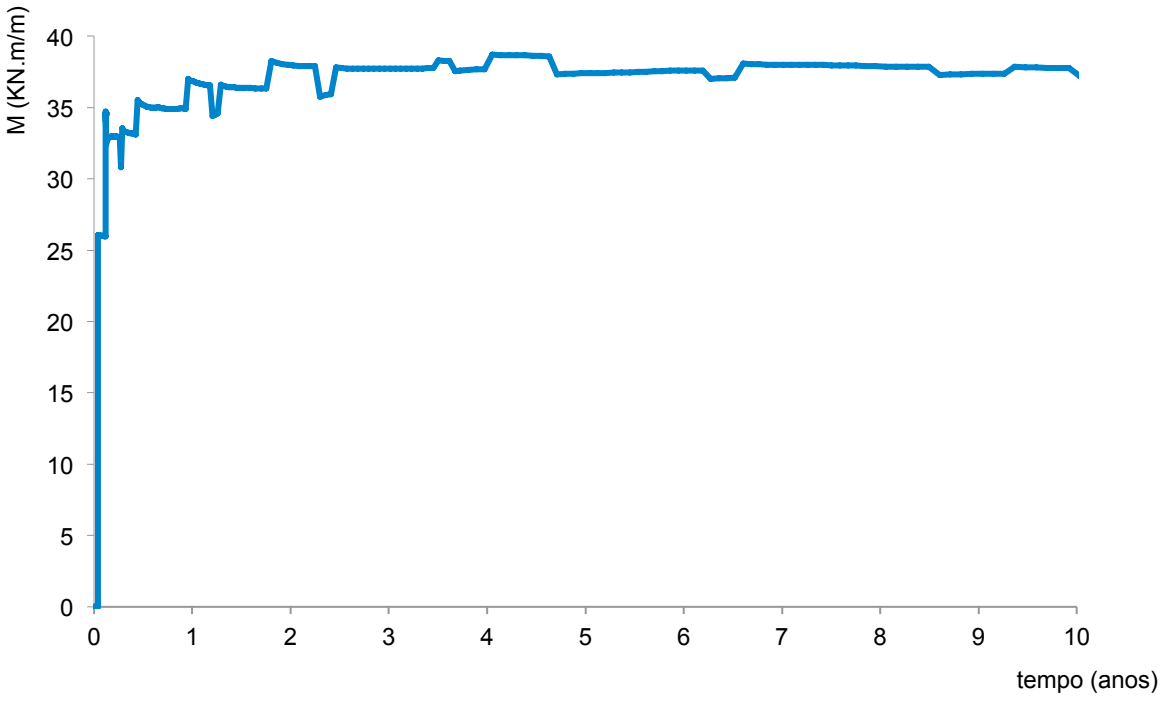


Fig. 2.17 – Momento Fletor no apoio, nos primeiros 10 anos da análise.

As tensões máximas registadas nas armaduras superiores e inferiores, ao longo do tempo da análise, encontram-se esquematizadas na Fig. 2.18 e na Fig. 2.19, respetivamente. Estas tensões foram medidas nos elementos finitos mais solicitados, correspondendo aos elementos mais próximos do apoio para as armaduras superiores ($\sigma_{s,fenda,apoio}$), e ao elemento finito central, mais próximo do meio-vão, para as armaduras inferiores ($\sigma_{s,fenda,vão}$). É nestas zonas que se desenvolvem as maiores fendas, como consequência dos maiores momentos fletores. As tensões representadas são as tensões no aço na secção da fenda, por isso as tensões resultantes da análise não-linear foram tratadas de modo a calcular a tensão σ_{s2} usando a equação (2.24) .

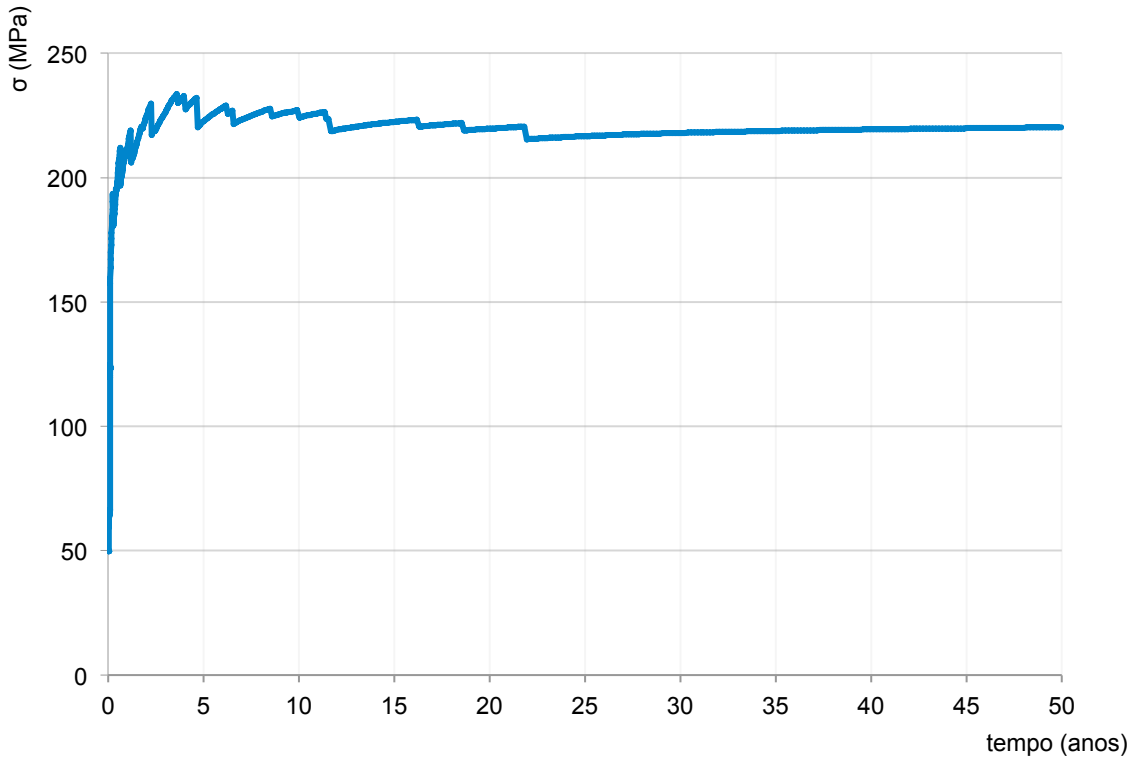


Fig. 2.18 – Tensão máxima de tração nas armaduras superiores, no elemento mais solicitado, ao longo dos 50 anos.

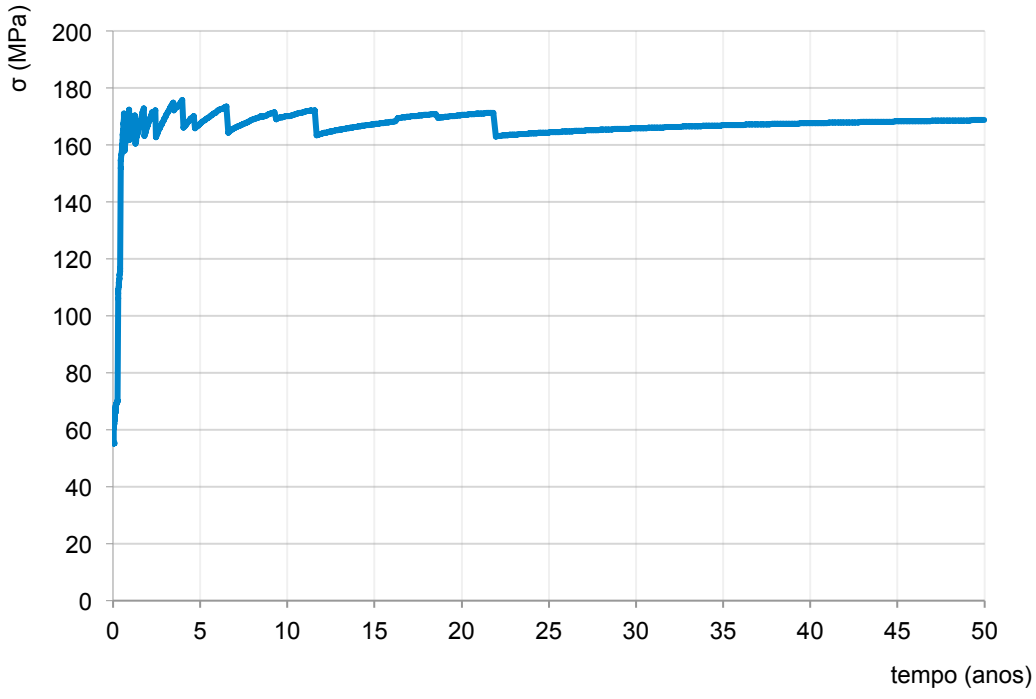


Fig. 2.19 – Tensão máxima de tração nas armaduras inferiores, no elemento mais solicitado, ao longo dos 50 anos.

A tensão máxima de tração nas armaduras superiores e inferiores tende para o valor de 220 MPa e 169 MPa, respetivamente. A variação da tensão σ_{sm} nas armaduras ao longo do vão da laje encontra-se ilustrada na Fig. 2.20 e na Fig. 2.21, para instantes de tempo representativos.

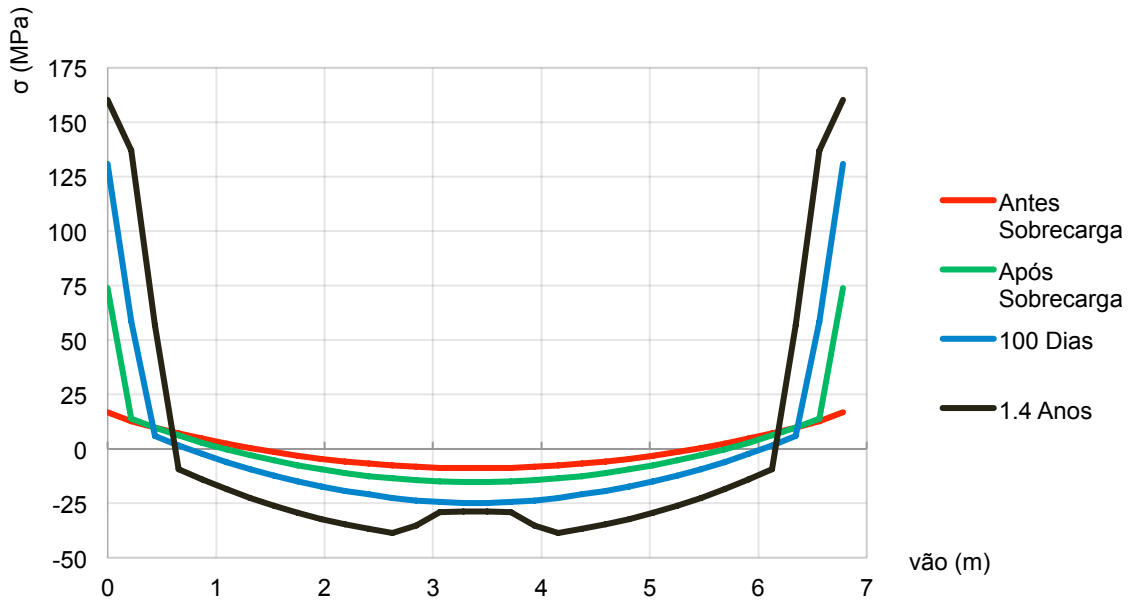


Fig. 2.20 – Tensão nas armaduras superiores, ao longo do vão da laje.

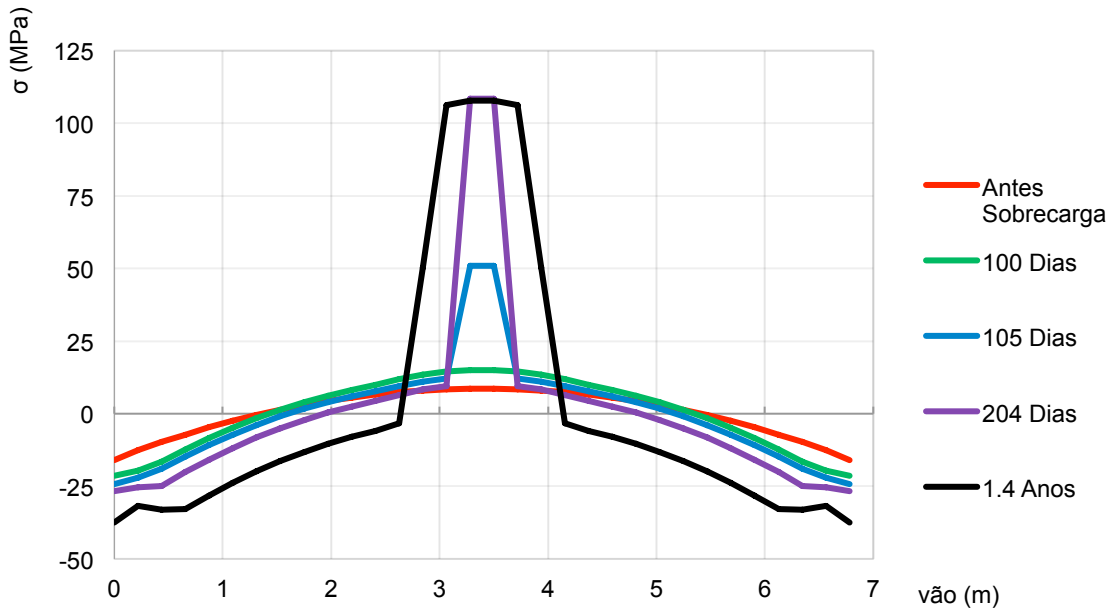


Fig. 2.21 – Tensão nas armaduras inferiores, ao longo do vão da laje.

Através da visualização das Figuras 2.20 e 2.21 conclui-se que as fendas começam a abrir significativamente no apoio após sobrecarga (aos 42 dias) e no vão aos 105 dias. As tensões nas armaduras variam bruscamente nesses instantes de tempo porque ocorre fendilhação, transferindo-se tensões consideráveis para o aço. Note-se que antes dos instantes de tempo referidos já há fendas em pontos das secções mais esforçadas, só que como ainda são pequenas, grande parte da tensão é absorvido pelo betão (*tension softening*). Pode ver-se que as zonas onde ocorre fendilhação tendem a alastrar à medida que o tempo avança. A Fig. 2.22 representa a tensão σ_{sm} nas armaduras, para instante de tempo final da análise.

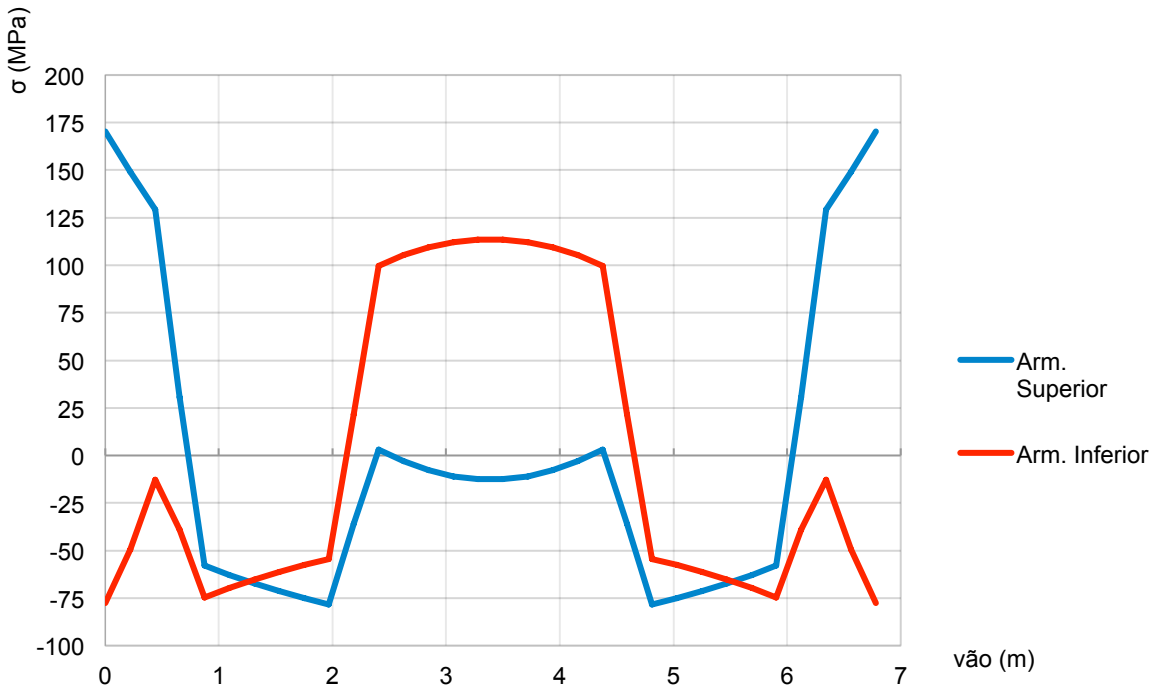


Fig. 2.22 – Tensões σ_{sm} nas armaduras superiores e inferiores, para a idade de 50 anos.

Para apresentar a deformação da laje, foi captada a sua flecha (deslocamento vertical a meio vão) ao longo do tempo da análise, representada na Fig. 2.23.

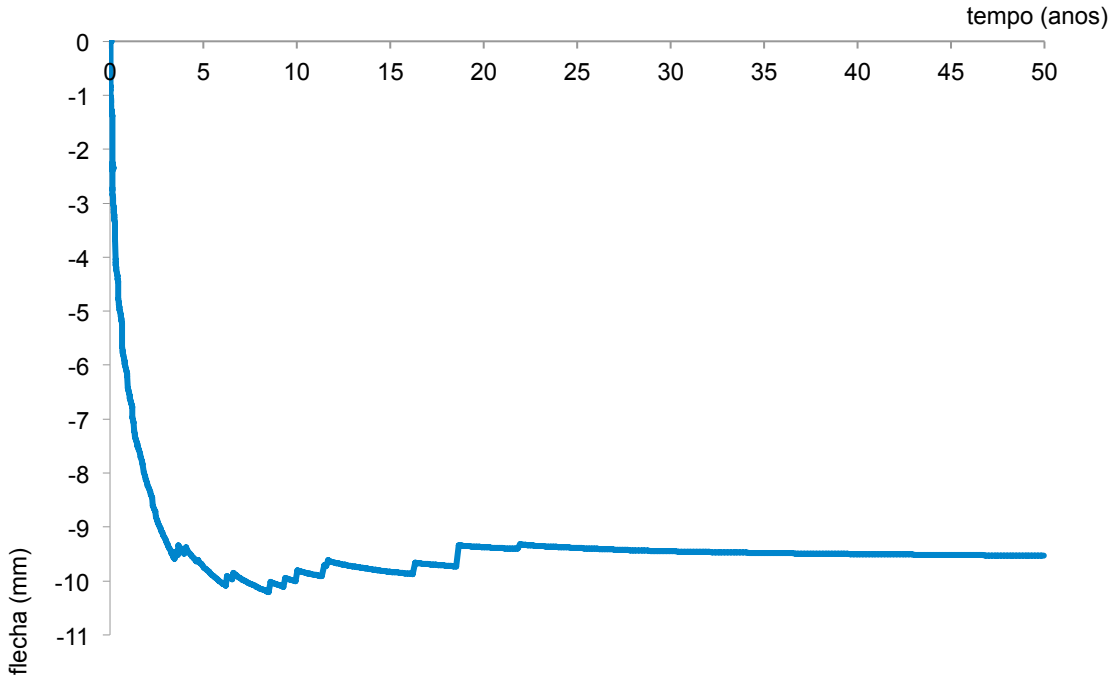


Fig. 2.23 – Evolução da flecha ao longo do tempo.

Com a ocorrência de fissuração causada pela retração e pela aplicação das cargas exteriores, e com a fluência do betão, a laje perde rigidez aumentando a flecha. O valor máximo atingido é cerca de 10,2 mm aos 8,5 anos, verificando-se a partir deste instante um decréscimo. Uma justificação para a flecha diminuir a partir de determinado instante é existir mais armadura na superfície superior da laje do que na superfície inferior. Isso implica que, se o diagrama de momentos fletores se mantiver constante ao longo do tempo, o efeito de retração faz com que ocorram maiores extensões nas fibras de cima do que nas fibras de baixo, criando-se uma contra-flecha. A flecha atinge, a longo prazo, um valor de 9,5 mm.

Apesar da fluência do betão, por si só, tender a reduzir a abertura da fenda (crescendo este efeito à medida que o tempo passa), verifica-se que a abertura máxima da fenda ocorre no final da análise. A Fig. 2.24 mostra o padrão de fendilhação para os 50 anos. Repare-se que esta figura representa os vetores normais às fendas, tendo cada um determinada cor e tamanho, consoante o tamanho da abertura da fenda que representa (a cor vermelha representa as maiores aberturas enquanto que a cor azul representa as menores aberturas). Os valores das aberturas de fendas máximas, obtidos através da análise não-linear, estão indicadas na Tabela 2.2. O seu cálculo foi feito recorrendo às equações (2.26) e (2.28). Estas aberturas foram interpoladas ao nível das armaduras e não ao nível da superfície inferior e superior, isto porque pretende-se estar em coerência com os regulamentos MC90 e EC2, que quantificam a abertura de fendas ao nível das armaduras.

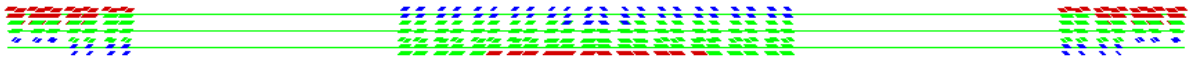


Fig. 2.24 – Padrão de fendilhação na laje, aos 50 anos, representado através de vetores normais às fendas em cada ponto de integração

Tabela 2.2 – Valor das aberturas de fendas máximas, no instante de tempo final da análise, ao nível das armaduras.

	$l_{s,max}$ (mm)	$\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm} - \varepsilon_{cs}$ (‰)	w_k (mm)
Apoios	159,564	1,266	0,202
Meio Vão	176,941	0,941	0,167

2.5.4. VALIDAÇÃO DOS RESULTADOS

Como já foi referido anteriormente, um dos objetivos fundamentais deste subcapítulo era comparar os resultados obtidos com os de Carvalho (2013), de modo a validar o elemento finito e procedimento de análise utilizado. Na Tabela 2.3 é possível ver sumariamente alguns resultados produzidos pelos dois trabalhos no estudo do mesmo caso. Estes resultados foram obtidos para o último instante da análise, ou seja para os 50 anos.

Tabela 2.3 – Comparação dos resultados obtidos nos dois trabalhos.

	Carvalho (2013)	Presente Trabalho	Unidades
N/m	303	327	kN/m
$N/A_c \cdot f_{ctm}$	45%	48%	adimensional
$\sigma_{s,fenda,apoio}$	205	220	MPa
$\sigma_{s,fenda,vão}$	172	169	MPa
$w_{k,apoio}$	0,19	0,20	mm
$w_{k,vão}$	0,18	0,17	mm

Como a Tabela 2.3 ilustra, os resultados atingidos são praticamente iguais aos de Carvalho (2013). Considera-se assim validado o procedimento a usar na presente dissertação.

3

ESTUDO DE LAJES BI-DIRECIONAIS RESTRINGIDAS AXIALMENTE SOB A AÇÃO DE CARGAS VERTICAIS

3.1. INTRODUÇÃO

O objetivo deste capítulo é perceber o comportamento estrutural de lajes bidirecionais, sujeitas a ações verticais, que estão impedidas de se deformar axialmente, recorrendo a uma análise não-linear. Os efeitos de retração em lajes nestas circunstâncias, têm impactos importantes, atendendo à quantidade de armadura necessária para controlo da fendilhação. Um dos objetivos principais do estudo agora apresentado passa pela quantificação do esforço axial verdadeiramente instalado.

Optou-se por simular painéis encastrados nos bordos (que simulam um painel interior de uma laje contínua), com cargas correntes de parques de estacionamento, pois pretende-se representar uma laje típica, fortemente restringida por paredes de elevada rigidez. Analisam-se painéis quadrados, com uma relação de vãos $l \times l$, e painéis rectangulares, com uma relação de vãos $l \times 1{,}5l$ e $l \times 2l$, de modo a, através desta última relação de vãos ($l \times 2l$), cair no caso de painéis com funcionamento unidirecional. Adotou-se vãos correntes para os diferentes tipos de painéis. Assim, os painéis estudados terão as seguintes dimensões em planta: 7×7 m^2, 7×10,5 m^2 e 7×14 m^2. Estes painéis têm todos a mesma espessura (20 cm), verificando-se que este valor é suficiente para garantir a verificação do Estado Limite de Deformação. Desta forma é possível realizar, para cada painel, uma análise paramétrica onde a única variável é a área de armadura. Os materiais e correspondentes propriedades são os mesmos que foram considerados no subcapítulo 2.5.2 (ver Tabela 2.1). As armaduras foram colocadas de forma a estarem a uma distância da fibra extrema correspondente a metade da altura efetiva de betão, resultando num recobrimento diferente do que foi adotado anteriormente. As razões para tal, serão explicadas posteriormente.

Para se obter uma primeira estimativa da armadura a considerar, quantificou-se a área de aço necessária, com base em metodologias correntes de dimensionamento, para o Estado Limite de Utilização (ELS) e para o Estado Limite Último (ELU), procurando cumprir o Estado Limite de Fendilhação e o Estado Limite de Deformação, verificando que essas armaduras são necessárias para garantir a segurança em ELU. Como, nesta fase, não se conhece o valor do esforço axial verdadeiramente instalado na laje em fase de serviço, considerou-se que este era igual ao esforço axial de fendilhação, N_{cr} (dado por $A_c.f_{ctm}$), tal como sugere o Eurocódigo 2, no subcapítulo 7.3.2.

Recorrendo a uma análise não-linear, realizaram-se inicialmente várias análises, para um determinado painel, com malhas de elementos finitos de tamanhos diferentes, de forma a perceber a influência da discretização adotada sobre os resultados obtidos.

Numa fase posterior, idealizou-se e aplicou-se um processo iterativo para cálculo da quantidade de armadura necessária de forma a garantir uma abertura máxima de fendas, w_k, igual a 0,30 mm. Esse processo foi testado inicialmente num modelo com um único elemento finito. Posteriormente, aplicou-se o procedimento aos painéis em estudo.

Através da análise não-linear, foi possível determinar o esforço axial instalado nos painéis, para várias quantidades de armaduras. O esforço axial obtido pela análise não-linear foi comparado com N_{cr}, comparando-se também as armaduras resultantes da análise não-linear, com as armaduras inicialmente estimadas com base em critérios simples de projeto (adotando N=N_{cr}). Foi analisado o comportamento dos diversos painéis, tendo sido possível obter conclusões relevantes sobre os esforços, deformações e fendilhação nos mesmos.

Na parte final do trabalho, os resultados foram tratados numa perspetiva diferente, que se espera poder ser útil para aplicação na prática corrente de projeto. Determinou-se o valor do esforço axial que um projetista poderia usar, em combinação com o momento fletor elástico, para obter a mesma solução de armaduras que foi quantificada com base na análise não-linear de elementos finitos realizada neste trabalho, garantindo uma abertura máxima de fendas igual a 0,30 mm. Assim, com o esforço axial calculado, é possível estimar a armadura verdadeiramente necessária, para garantir w_k=0,30 mm, recorrendo apenas a uma análise linear de elementos finitos para quantificar momentos atuantes (ou, em alternativa, tabelas que indiquem os esforços atuantes em painéis de laje), auxiliando desta forma os projetistas de edifícios, que não podem geralmente recorrer a análises não-lineares de elementos finitos.

3.2. ESTIMATIVA DA ESPESSURA E ARMADURA NECESSÁRIA COM BASE EM METODOLOGIAS CORRENTES

3.2.1. ESTADO LIMITE DE UTILIZAÇÃO

Em serviço pretende-se que a laje cumpra o controlo de fendilhação e de deformação. O controlo de deformação, passa por cumprir com uma flecha limite, que está preconizado no EC2:

- L/250 a longo prazo, devido às ações permanentes;
- L/500 a longo prazo, descontada a flecha elástica que se obtém no final de construção, devido às ações permanentes.

Note-se que L é o comprimento do menor vão da laje e que neste trabalho não é muito relevante respeitar flecha máxima L/500, pois está-se a simular um parque de estacionamento público, onde normalmente não existem elementos adjacentes à estrutura (nomeadamente paredes de alvenaria, envidraçados e revestimentos).

Para controlar a fendilhação é necessário respeitar uma abertura de fenda máxima, w_{max}. O EC2 alerta para a possibilidade da adopção de medidas especiais em 7.3.1, afirmando que a escolha de w_{max} dependerá sobretudo do agente agressivo. Porém adotou-se uma largura de fenda máxima cujo valor é 0,3 mm. Apesar deste limite ter sido tomado, reconhece-se que atualmente a sua implementação é discutível, existindo casos onde o seu cumprimento se torna demasiado conservativo. Contudo na presente dissertação ignorou-se esse facto, procurando-se respeitar as recomendações do EC2.

Na presença de uma ferramenta de cálculo (Excel), que permita calcular simultaneamente diversos parâmetros interdependentes entre si, a metodologia adotada foi assumir uma espessura e calcular em simultâneo as armaduras necessárias para cumprir o Estado Limite de Serviço e o Estado Limite Último. Assim, os parâmetros apresentados terão valores corretos e não valores aproximados que derivam de um pré-dimensionamento.

Para uma laje bidirecional com armaduras na superfície superior e inferior, é razoável esta ter como limite inferior uma espessura de 0,20 m. A equação (3.1) ilustra o valor limite da relação vão/altura útil sem correcção, recomendado pelo EC2. Apesar de se ter utilizado esta equação para controlo de deformação, reconhece-se que ela só funciona bem em lajes sujeitas à flexão simples. Neste caso, a laje encontra-se sujeita à flexão composta com tração, sendo a tração não é contabilizada neste controlo. Como este esforço contribui para o aumento de flecha (pois os esforços de tração provocam fissuração, provocando perda de rigidez da laje e consequentemente aumento da flecha), prevê-se que segundo esta equação, a laje cumpra o controlo de deformação com uma folga demasiado grande, e portanto irrealista (ver Tabela 3.2). Assim conclui-se que este procedimento de controlo não é adequado para este trabalho.

$$(l/d)^* = K\left[11 + 1{,}5\sqrt{f_{ck}}\frac{\rho_0}{\rho} + 3{,}2\sqrt{f_{ck}}\left(\frac{\rho_0}{\rho} - 1\right)^{3/2}\right] \qquad se\ \rho \le \rho_0 \qquad (3.1)$$

com,

K coeficiente que tem em conta os diferentes sistemas estruturais;

ρ_0 taxa de armadura de referência ($10^{-3}\sqrt{f_{ck}}$);

ρ taxa de armadura traccionada, necessária a meio-vão, para equilibrar o momento devido às ações de cálculo.

O valor limite de vão/altura útil é dado pelo produto do valor provindo da equação (3.1) e os coeficientes de correcção, tal como é representado na equação (3.2).

$$\left(l/d\right)_{max} = \left(l/d\right)^*.k_{\sigma s}.k_t.k_l \qquad (3.2)$$

com,

$k_{\sigma s}$ coeficiente que é dado pelo quociente entre 310 MPa e a tensão de tração no aço a meio vão, para as ações de cálculo no estado limite de utilização;

k_t coeficiente que tem em conta secções em "T" (assume o valor 1 neste estudo);

k_l coeficiente que tem em conta o comprimento do vão (assume o valor 1 neste estudo).

Em serviço, a laje é submetida à flexão composta. A Fig. 3.1 ilustra o equilíbrio de forças numa secção fendilhada ao longo de toda a espessura.

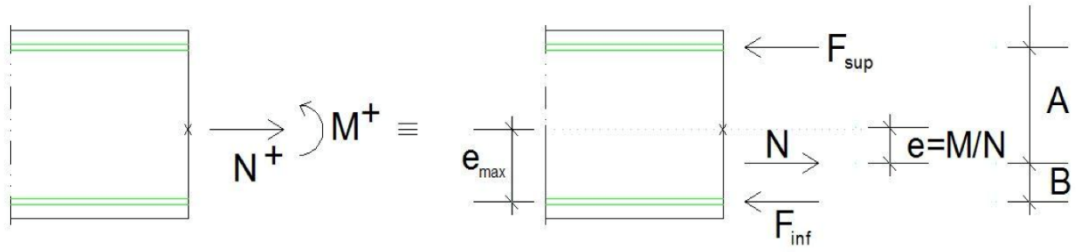


Fig. 3.1 – Equilíbrio em flexão composta, numa secção fendilhada, para um esforço axial de pequena excentricidade (Carvalho 2013) .

As tensões nas armaduras, devido ao esforços axial (N) e ao momento fletor (M), são determinadas nas equações (3.3) e (3.4).

Se $|e| < e_{max}$,

$$\begin{cases} A = e_{max} + e \\ B = e_{max} - e \end{cases} \tag{3.3}$$

então,

$$\begin{cases} F_{inf} = N.\frac{A}{A+B} \\ F_{sup} = N.\frac{B}{A+B} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{inf} = \frac{F_{inf}}{A_{s,inf}} \\ \sigma_{sup} = \frac{F_{sup}}{A_{s,sup}} \end{cases} \tag{3.4}$$

As equações (3.3) e (3.4) são válidas em secções fendilhadas com esforço axial de elevada intensidade, quando comparado com o momento fletor. Isto provoca uma excentricidade pequena que se localiza entre as armaduras. Caso a excentricidade seja maior, com um esforço axial que cause compressões no betão que envolve armaduras, então o equilíbrio é dado pela Fig. 3.2.

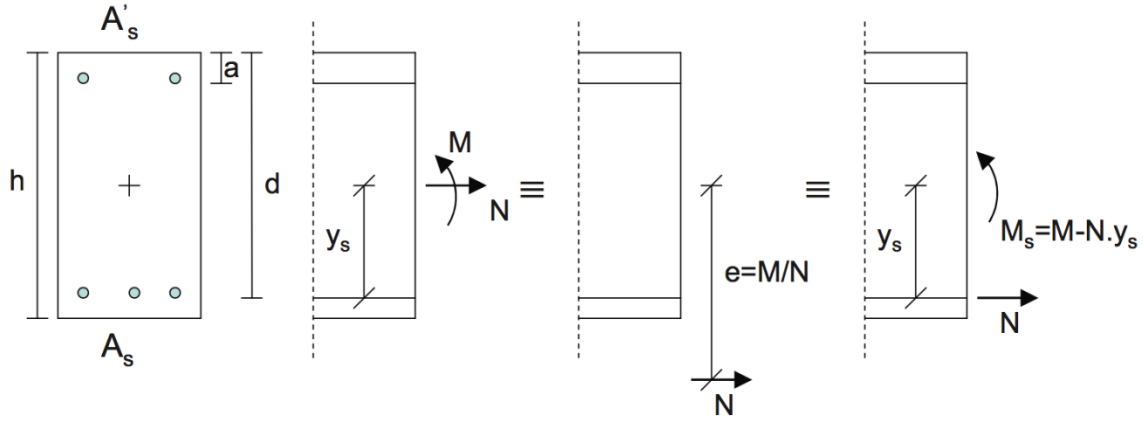


Fig. 3.2 – Equilíbrio em flexão composta, numa secção fendilhada, para um esforço axial de média ou grande excentricidade (Estruturas de Betão 1, FEUP) .

Desta forma, o esforço axial é absorvido diretamente por uma das armaduras, caindo-se no caso de flexão simples onde momento fletor é calculado segundo a equação (3.5).

$$M_s = M - N.y_s \tag{3.5}$$

Como ainda se desconhece o esforço axial instalado na secção em causa, admite-se o esforço axial de fendilhação, N_{cr}, dado pela equação (3.6).

$$N_{cr} = A_c.f_{ctm} \tag{3.6}$$

em que A_c é a área bruta na secção de betão.

O momento fletor atuante é obtido recorrendo às tabelas do Regulamento Britânico (British Standard Structural use of Concrete, 1985), baseando-se numa análise elástica com redistribuição. É de notar que nesta fase, a excentricidade do esforço axial é pequena, e por isso as equações (3.3) e (3.4) são válidas.

O cálculo da abertura de fendas é feito conforme sugerido pelo MC90. Para as várias lajes com espessuras de 0,20 m, sujeitas à retração do betão, considerando um esforço N_{cr}, a Tabela 3.1 mostra as armaduras obtidas (com ϕ =12 mm) para uma abertura de fendas igual a 0,3 mm.

Tabela 3.1 – Armaduras e tensões instaladas, para obter $w_k = 0{,}3\ mm$, com $N = N_{cr}$.

	Laje	$\sigma_{s,sup}\ (MPa)$	$A_{s,sup}\ (cm^2/m)$	$\sigma_{s,inf}\ (MPa)$	$A_{s,inf}\ (cm^2/m)$
DIR. YY	**7×7**	250	14,86	240	14,23
	7×10,5	270	16,37	260	15,52
	7×14	280	17,17	265	16,11
DIR. XX	**Todas**	250	14,86	240	14,23

A *DIR. YY* corresponde à direção do vão mais curto, enquanto que *DIR. XX* refere-se ao vão mais longo. Foi assumido que a armadura paralela ao vão mais curto, *Asy*, situa-se logo abaixo da armadura paralela ao vão mais longo, *Asx*, tendo a primeira maior altura útil (*d*). As armaduras situadas na superfícies superior e inferior, foram definidas para garantir uma abertura de fenda igual a 0,3 mm, nos apoios e a meio-vão, respetivamente.

Para as armaduras definidas (ver Tabela 3.1) e com painéis de altura 0,20 m, verifica-se controlo de deformação, tal como mostra a Tabela 3.2.

Tabela 3.2 – Relação vão/altura útil obtido em contraste com a relação máxima regulamentar.

Painel	l/d	$(l/d)_{max}$
7×7	44,6	252
7×10,5	44,6	97
7×14	44,6	72

As flechas que serão obtidas por uma análise não-linear, comparar-se-ão com o limite mencionado anteriormente.

3.2.2. ESTADO LIMITE ÚLTIMO (ELU)

Para cumprir o Estado Limite Último (E.L.U), as armaduras necessárias são inferiores às requeridas, para cumprir o Estado Limite de Utilização (E.L.S). Contudo estimar-se-ão armaduras para suportar esforços de cálculo. As ações de cálculo são definidas de acordo com Eurocódigo 0 (Bases para Projetos de Estruturas), representadas pela equação (3.7).

$$ped = 1{,}35g_k + 1{,}5q_k \tag{3.7}$$

Recorrendo às tabelas do Regulamento Britânico definem-se as armaduras que cumprem com o E.L.U. A Tabela 3.3 ilustra os esforços atuantes e as armaduras obtidas. Estas obtiveram-se com auxilio de ábacos para flexão simples.

Tabela 3.3 – Armaduras obtidas para o ELU.

		Apoios		Vão	
		$M_{ed}\ (kN)$	$A_{s,sup}\ (cm^2/m)$	$M_{ed}\ (kN)$	$A_{s,inf}\ (cm^2/m)$
DIR. YY	**7×7**	22,3	3,39	16,8	1,90
	7×10,5	37,0	5,72	28,6	3,32
	7×14	45,4	7,04	34,2	3,97
DIR. XX	**Todas**	22,3	3,13	16,8	1,77

Nota-se claramente que as armaduras necessárias para cumprir com E.L.U são bastante inferiores àquelas que cumprem o E.L.S, e por isso não são condicionantes.

A verificação da resistência ao esforço transverso é representado pela inequação (3.8). Os valores obtidos estão quantificados na Tabela 3.4.

$$v_{ed} \leq v_{Rd,c} \tag{3.8}$$

com v_{ed} definido como o esforço transverso de cálculo atuante, e $v_{rd,c}$ definido como o esforço transverso resistente, estipulado no EC2 (6.2.2), para elementos onde não é requerida armadura de esforço transverso. Este é determinado pelas equações (3.9) e (3.10).

$$v_{rd,c} = \left[C_{Rd,c} k (100 \rho_1 f_{ck})\right]^{1/3} b_w d \tag{3.9}$$

com um mínimo de,

$$v_{rd,c} = \left(0{,}035 k^{3/2} . f_{ck}{}^{1/2}\right) b_w d \tag{3.10}$$

Tabela 3.4 – Verificação da resistência ao esforço transverso.

	Laje	$v_{ed}\ (kN/m)$	$v_{Rd,c}\ (kN/m)$
DIR. XX	**7×7**	33	106
	7×10,5	45	109
	7×14	50	111
DIR. YY	**Todas**	33	106

Como se observa, é cumprida a condição de resistência ao esforço transverso, confirmando-se a segurança ao correspondente Estado Limite Último.

3.3. ANÁLISE NÃO-LINEAR

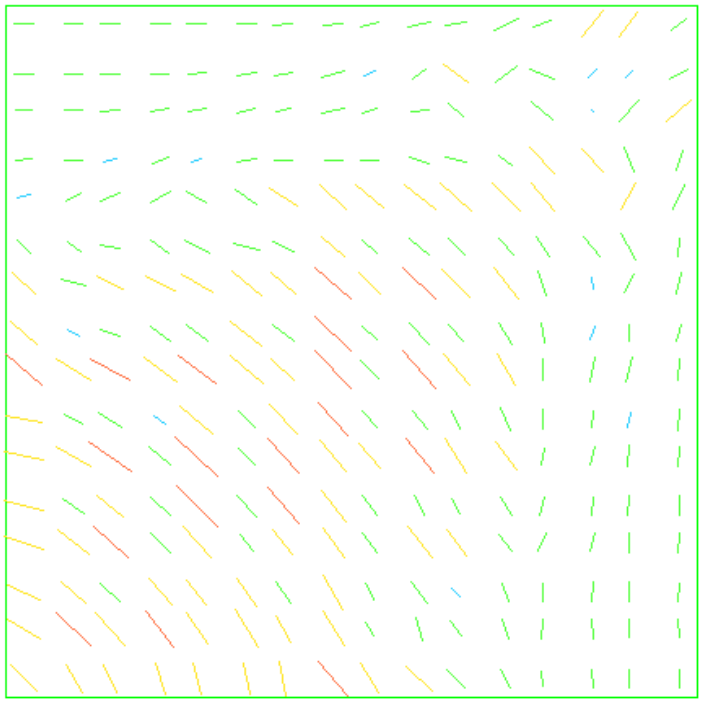
3.3.1. Definição do Refinamento da Malha e do Método Iterativo Adotado

3.3.1.1 Tamanho da Malha

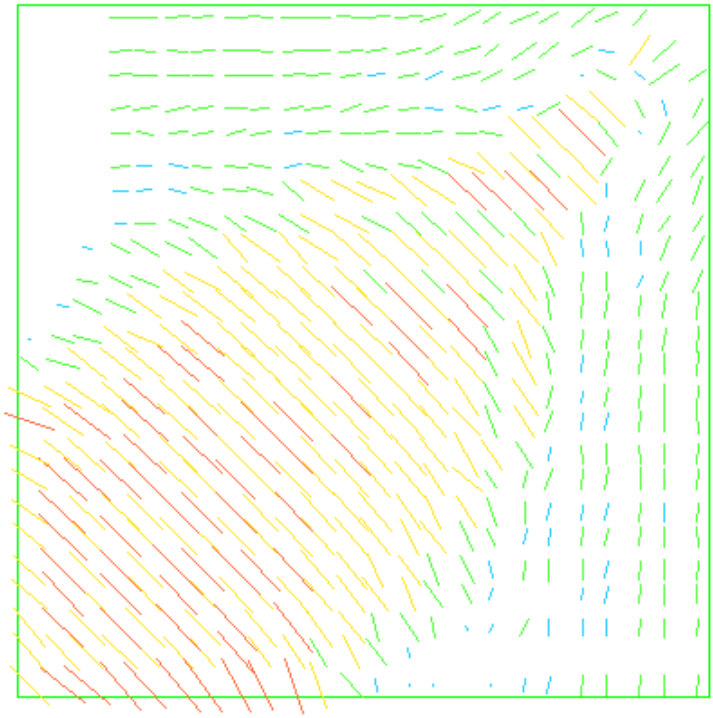
Pretende-se adotar por uma malha que produza bons resultados, com um tempo de cálculo aceitável. Os painéis do presente trabalho são simulados através de inúmeros elementos finitos e pontos de Gauss. Por isso o cálculo na análise não-linear é demorado, entendendo-se justificável explorar malhas menos refinadas.

Para um painel quadrado armado em cruz, constituído por vãos de 7 m, foram realizadas três análises não-lineares, variando o tamanho do elemento finito. Adotou-se 16×16 elementos finitos, metade destes, 8×8 EF, e uma quantidade intermédia, 12×12 EF. Os resultados obtidos são significativamente diferentes. A Fig. 3.3 mostra o contraste entre as três análises, em termos de padrão de fendilhação.

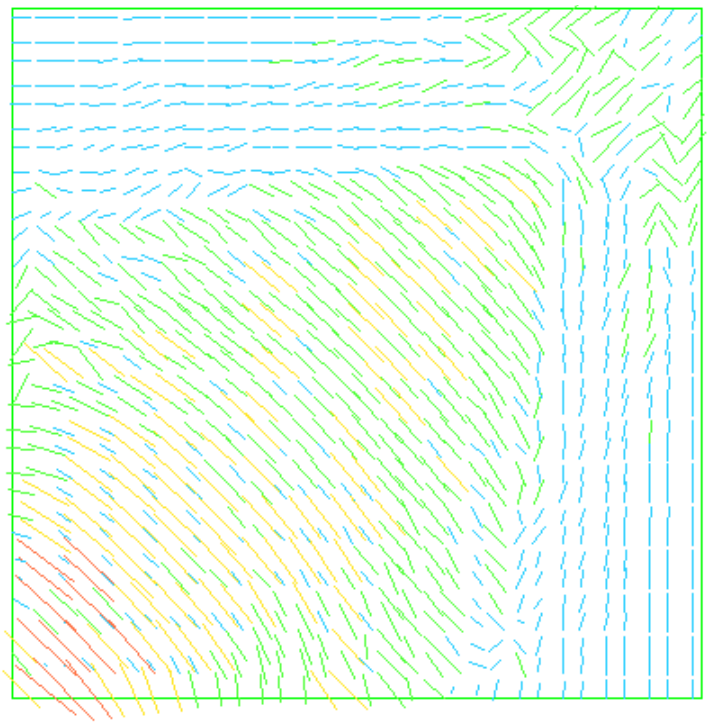
Salienta-se que as escalas são iguais e que estes resultados correspondem a um quarto da laje analisada, tirando partido dos dois eixos de simetria da estrutura.



a)



b)



c)

Fig. 3.3 – Padrão de Fendilhação no painel, representado através de vetores normais às fendas em cada ponto de integração, na superfície inferior, relativo às primeiras fendas, para um instante de tempo de 50 anos: a) 8×8 EF; b) 12×12 EF; c) 16×16 EF.

Observa-se que as extensões máximas, normais às primeiras fendas, ε_{cr}^{DIANA}, assumem aproximandamente os seguintes valores: 0,0011 para a malha 8×8 EF, 0,0015 para a malha 12×12 EF e 0,0018 para a malha 16×16 EF. Os padrões de fendilhação variam de intensidade e de forma consoante o refinamento da malha. Essa diferença é maior entre a malha constituída por 8×8 EF e a malha constituída por 12×12 EF. Com isto justifica-se, a adoção da malha mais refinada, apesar de ser preciso mais tempo de cálculo.

3.3.1.2. MÉTODO ITERATIVO

Para se conseguir chegar a armaduras estritamente necessárias para cumprir o critério de abertura de fendas, foi necessário racionalizar um processo de convergência. O processo iterativo adotado, foi inicialmente testado num elemento finito isolado, estendendo-o posteriormente para o caso de estudo (painéis). Este processo incide nos pontos de Gauss do painel, mais condicionantes em termos de extensão da fenda, ε_{cr}, pois é neles onde se dá a maior abertura de fenda. Para este processo iterativo funcionar, é necessário que os pontos de gauss analisados estejam ao mesmo nível das armaduras. Isso obriga às armaduras com diferentes direções estarem ao mesmo nível. Este nível corresponde a metade da altura efetiva de betão. Apesar deste nível não corresponder à realidade e as armaduras não estarem desniveladas, isto não irá influenciar significativamente os resultados obtidos.

Para uma armadura utilizada numa análise não-linear – n, é possível ler tensões e deformações para ambos os materiais (betão e aço) no DIANA, conforme ilustra a Fig. 3.4.

$$\left.\begin{matrix} A_{sx} \\ A_{sy} \end{matrix}\right\}_n \Rightarrow \begin{Bmatrix} \varepsilon_c \\ \sigma_c \\ \varepsilon_{cr} \\ \varepsilon_s \\ \sigma_s \end{Bmatrix}_n$$

Fig. 3.4 – Dados obtidos no DIANA, para uma determinada iteração genérica.

Sendo σ_c, ε_c e σ_s, ε_s as tensões e extensões no betão e no aço, respetivamente, num ponto de gauss. ε_{cr} é a extensão relativa à abertura de fenda.

Para o estado de deformação do betão, num determinado ponto de Gauss, considerando a decomposição de extensões, sabe-se que:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \Upsilon_{xy} \end{Bmatrix}_{total} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \Upsilon_{xy} \end{Bmatrix}_{E+C+S} + \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \Upsilon_{xy} \end{Bmatrix}_{fenda} \tag{3.11}$$

sendo equivalente a,

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \Upsilon_{xy} \end{Bmatrix}_{E+C+S} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \Upsilon_{xy} \end{Bmatrix}_{total} - \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \Upsilon_{xy} \end{Bmatrix}_{fenda} \tag{3.12}$$

em que, $\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \Upsilon_{xy} \end{Bmatrix}_{E+C+S}$ são as extensões do betão no referencial global (X,Y), incluindo as componentes elásticas, de fluência e de retração. $\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \Upsilon_{xy} \end{Bmatrix}_{fenda}$ são as extensões relativas à abertura de fenda, no mesmo referencial.

A transformação destas extensões (equações (3.11) e (3.12)) para um referencial local, é ilustrada na Fig. 3.5 e representada pelas equações (3.13) a (3.15).

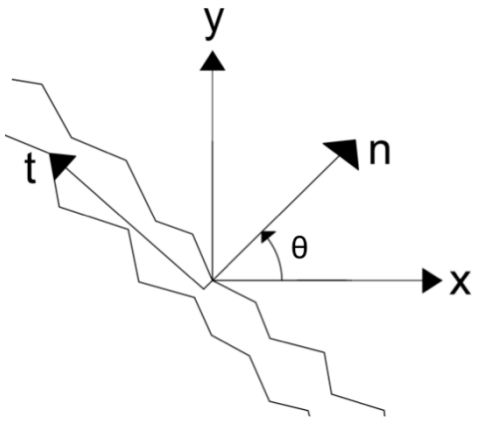


Fig. 3.5 – Passagem do referencial global para um referencial local, em que o referencial local é caracterizado por um vetor normal à fenda (n), e um vetor tangencial à mesma (t).

$$\varepsilon_n = \varepsilon_x.\cos^2\theta + \varepsilon_y.\sin^2\theta + \Upsilon_{xy}.\sin\theta\,.\cos\theta \tag{3.13}$$

$$\varepsilon_t = \varepsilon_x.\sin^2\theta + \varepsilon_y.\cos^2\theta + \Upsilon_{xy}.\sin\theta\,.\cos\theta \tag{3.14}$$

$$\Upsilon_{nt} = -\left(\varepsilon_x - \varepsilon_y\right).\sin 2\theta + \Upsilon_{xy}\cos 2\theta \tag{3.15}$$

A transformação contrária (referencial local para referencial global) processa-se de forma análoga.

A aplicação do método iterativo, parte de três hipóteses, para os pontos de Gauss averiguados. Considera-se que, em duas iterações com diferentes quantidades de armaduras, são sensivelmente iguais:

- as extensões totais no betão e nas armaduras;
- as forças nas armaduras;
- as extensões, elásticas, de fluência e de retração do betão.

Assim, obtendo tensões no DIANA para uma iteração genérica, *n*, é possível estimar a força nas armaduras para a iteração consecutiva, *n*+1, conforme ilustra a equação (3.16).

$$\left({}^{F}/_{m}\right)_{n+1} = \left({}^{A_s}/_{m}\right)_n \times (\sigma_s)_n \tag{3.16}$$

A extensão total no betão, estimada para a iteração *n*+1, é dada pela equação (3.17). Note-se que é desconhecida a extensão na direção normal à fenda para a interação n+1.

$$\left(\varepsilon_{c,total}\right)_{n+1} = \left(\varepsilon_{c,E+C+S}\right)_n + \left(\varepsilon_{c,fenda}\right)_{n+1} \tag{3.17}$$

As extensões totais no aço e no betão são iguais, tornando possível estimar armaduras, tal como mostram as equações (3.18) e (1.19).

$$\left(\varepsilon_{c,total}\right)_{n+1} = \left(\varepsilon_{s,total}\right)_{n+1} = \frac{\left(F/m\right)_{n+1}}{\left(A_s/m\right)_{n+1}.E_s} \tag{3.18}$$

sendo equivalente a,

$$\left(A_s/m\right)_{n+1} = \frac{\left(F/m\right)_{n+1}}{\left(\varepsilon_{s,total}\right)_{n+1}.E_s} \tag{3.19}$$

Recorrendo à equação (2.28), é possível obter a extensão na direção normal à fenda e a armadura necessária, de modo ter uma abertura da fenda igual a 0,30 mm. Note que segundo a equação (2.28), a extensão normal à fenda é calculada para um referencial local, pelo que é necessário recorrer a uma transformação de referenciais, conforme discutido anteriormente.

Desta forma consegue-se quantificar, em cada iteração, novas armaduras, possibilitando correr novamente o *sofware* DIANA até se obter uma abertura de fenda máxima de 0,30 mm. A solução atingiu-se, para as diversas lajes, na terceira iteração.

3.3.2. Resultados Obtidos

3.3.2.1 Condições de Simetria

Como já foi referido anteriormente, as análises não-lineares foram feitas modelando apenas um quarto do painel, considerando as condições de simetria. Assim reduz-se bastante o tempo de cálculo.

A Fig. 3.6 representa os eixos considerados na análise dos esforços atuantes.

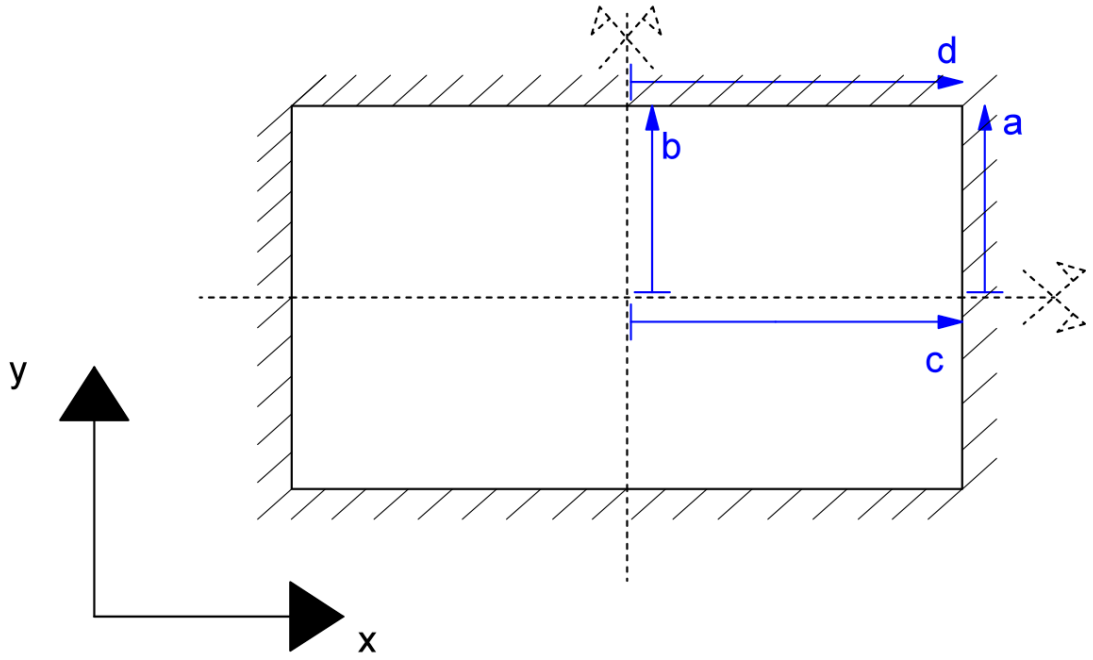


Fig. 3.6 – Convenção adotada para representar os diversos eixos que serão analisados.

3.3.2.2. PAINEL 7×7 M^2

Este subcapítulo está direccionado para os resultados obtidos no painel 7×7 m^2 através da análise não-linear. Eles são mostrados ao longo do tempo da análise e para o último instante de tempo, correspondente a 50 anos.

A Tabela 3.5 mostra a armadura obtida na análise não-linear, comparando-a com a armadura calculada pelo MC90 (com $N = A_c . f_{ctm}$), incluindo os efeitos de retração, para cumprir com a mesma abertura de fendas, 0,30 mm.

Tabela 3.5 – Armaduras obtidas numa análise não-linear, comparadas com as previstas pelo MC90, de modo a obter $w_k = 0{,}3\ mm$.

	MC90 (N=$A_c . f_{ctm}$)		**DIANA**		$A_{s,DIANA} / A_{s,MC90}$	
	$A_{s,sup}$	$A_{s,inf}$	$A_{s,sup}$	$A_{s,inf}$	$A_{s,sup}$	$A_{s,inf}$
DIR. XX (ou YY)	14,86	14,23	12,15	11,29	82%	79%

A Fig. 3.7 representa a variação da flecha ao longo do tempo da análise, para este painel, utilizando a armadura obtida na análise não-linear (Tabela 3.5).

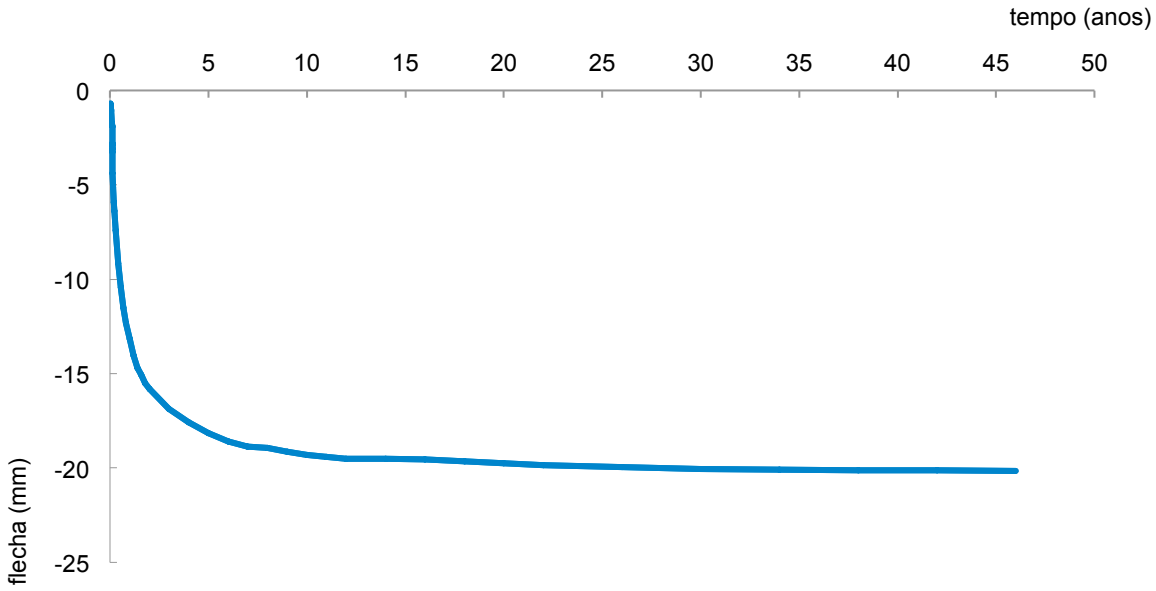


Fig. 3.7 - Flecha obtida ao longo do tempo, na análise não-linear.

A partir dos 10 anos, a flecha varia muito pouco, atingindo o valor de 20,16 mm aos 46 anos de idade, sendo este menor do que o limite estabelecido no EC2: 7000/250 = 28 mm.

O esforço axial em cada nó, correspondente ao eixo *"a"*, obtido pela análise não-linear, para um instante de tempo igual a 46 anos, está ilustrado na Fig. 3.8. O gráfico que representa esses esforços tem uma forma irregular, com muitas quebras, devido a uma especificidade do elemento finito adotado. Assim entendeu-se efetuar uma média móvel de 5 nós, permitindo suavizar o presente gráfico.

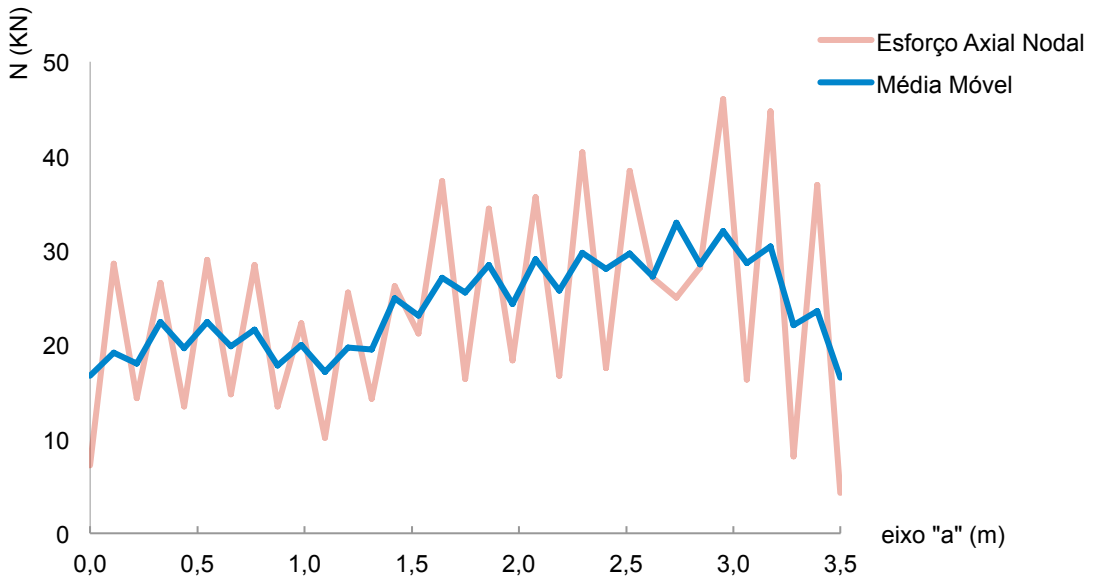


Fig. 3.8 – Esforços axiais nodais ao longo do eixo "a" e média móvel dos mesmos.

Os resultados apresentados posteriormente serão a média móvel dos obtidos na análise não linear, pelas razões mencionadas acima.

As Figuras 3.9 e 3.10 representam o rácio entre o esforço axial instalado e o esforço axial de fendilhação (ver equação (3.6)), em instantes de tempo representativos, para a zona do apoio e para a zona do meio vão, respetivamente.

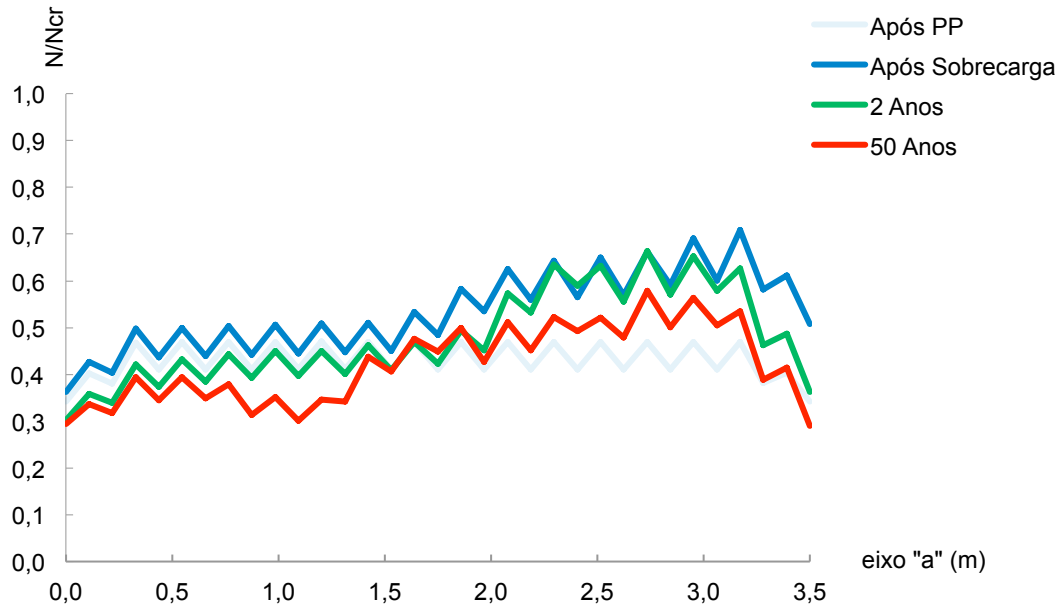


Fig. 3.9 – Esforço axial no apoio, ao longo do eixo *"a"*.

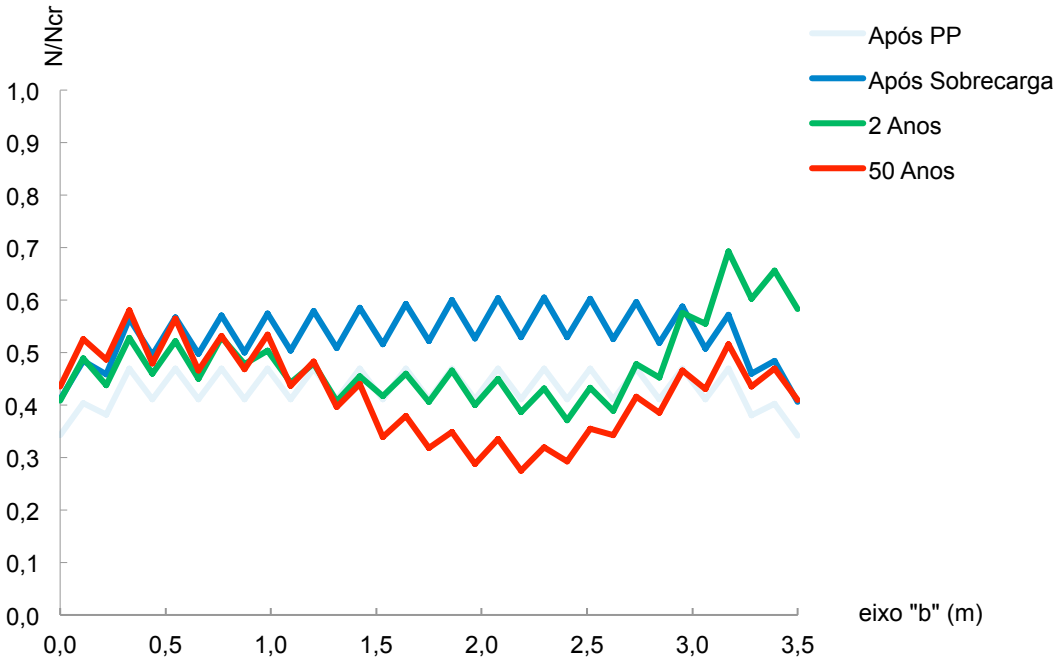


Fig. 3.10 – Esforço axial a meio vão, ao longo do eixo *"b"*.

O esforço axial instalado na laje, baixa a partir do instante de aplicação da sobrecarga, devido sobretudo ao efeito de retração. Este flutua entre 60% e 30% do esforço axial de fendilhação, ao longo de tempo.

A Tabela 3.6 mostra os momentos fletores elásticos previstos pelas tabelas de Montoya (Montoya J., 2010), em contraste com os momentos elásticos máximos obtidos no DIANA, sendo estes correspondentes à aplicação do peso próprio e da sobrecarga.

Tabela 3.6 – Comparação entre os momentos fletores obtidos na análise não linear, e os mesmos obtidos pelas tabelas de Montoya.

	$M_{elast,apoio}\ (kN.m/m)$	$M_{elast,vão}\ (kN.m/m)$
Montoya	20,14	8,14
DIANA	20,63	8,40

Como esperado, os momentos elásticos obtidos das duas maneiras são muito semelhantes. Nas figuras seguintes, os diagramas de momentos fletores são apresentados em percentagem dos valores elásticos máximos, devido às ações peso próprio combinado com a sobrecarga, apresentados na Tabela 3.6. O momento elástico adotado para ser comparado com os momentos alcançados na análise não-linear, foi o obtido pelo DIANA. As Figuras 3.11 e 3.12 ilustram a relação entre eles, ao longo do apoio e do meio-vão.

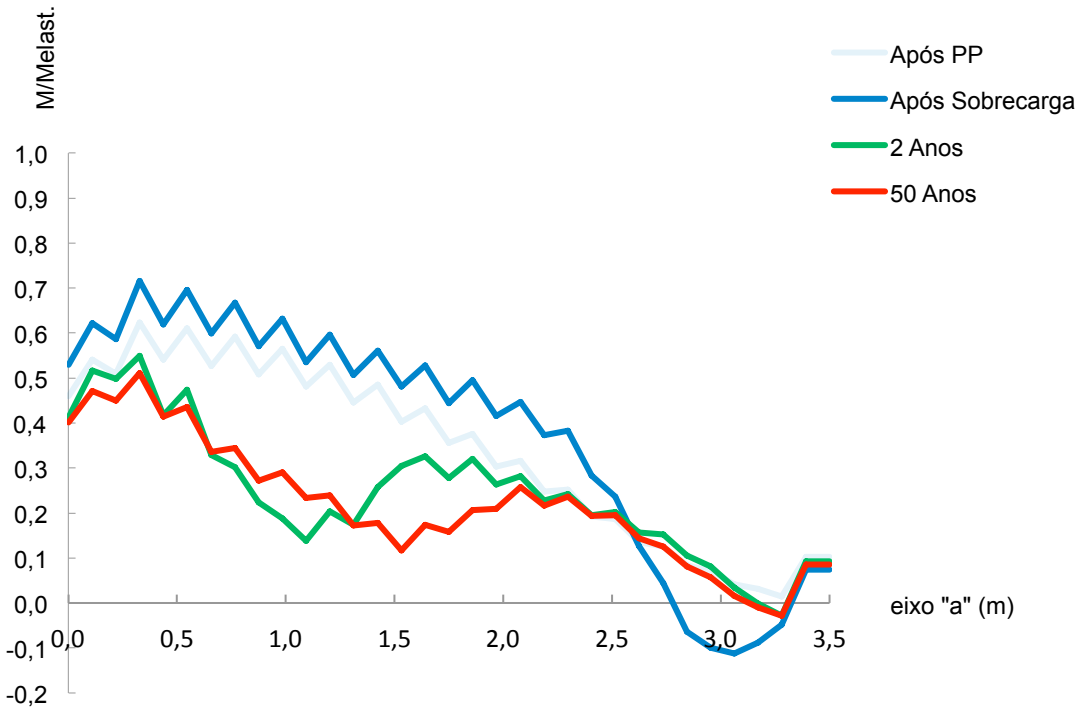


Fig. 3.11 – Momento Fletor no apoio, ao longo do eixo *"a"*.

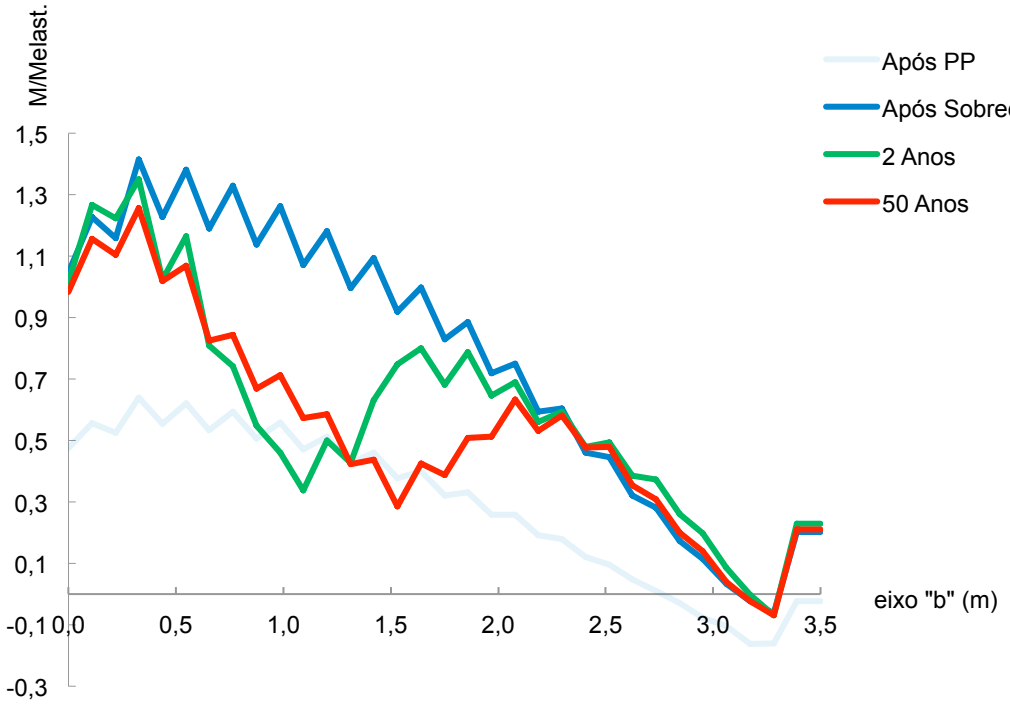


Fig. 3.12 – Momento Fletor a meio vão, ao longo do eixo *"b"*.

O rácio a meio-vão entre os respetivos momentos fletores é maior do que o rácio no apoio. Isto porque como o momento fletor instalado no apoio é maior do que o momento fletor instalado a meio-vão, a fendilhação ocorre primeiro no apoio, causando uma redistribuição, em que é transferido parte do momento fletor do apoio para o meio-vão. Os momentos fletores tendem a baixar ao longo do tempo.

As Figuras 3.13 a 3.16 mostram o padrão de fendilhação, no instante final da análise, para a superfície superior e inferior. Note-se que apesar de o cálculo da abertura de fendas ser correspondente ao nível das armaduras, optou-se por representar o padrão de fendilhação nas superfícies extremas, por ser um padrão mais definido. Salienta-se também que não foi possível (porque isso dificultaria a visualização) representar na mesma figura, os vetores normais às múltiplas fendas formadas em cada ponto de Gauss, representando-os em figuras separadas. Salienta-se que a escala de vetores é sempre a mesma.

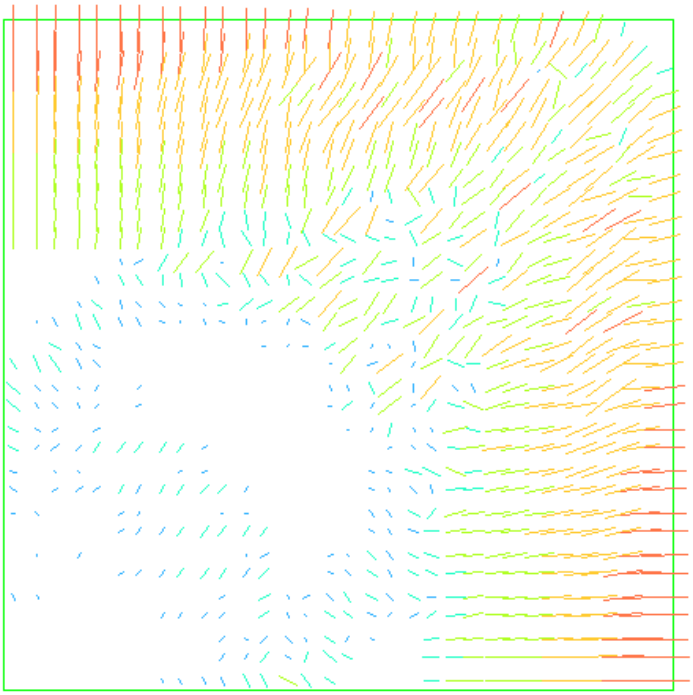


Fig. 3.13 – Padrão de fendilhação num quarto do painel, na superfície superior, aos 46 anos, representado através de vetores normais às primeiras fendas, em cada ponto de integração.

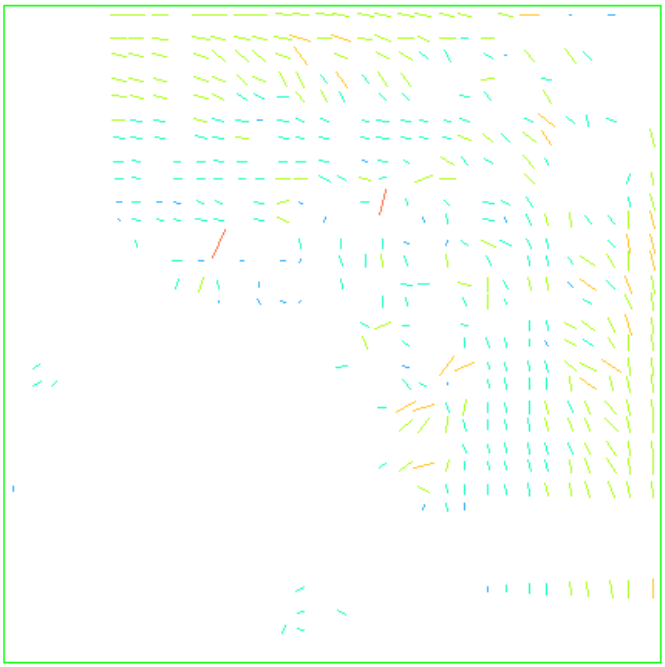


Fig. 3.14 – Padrão de fendilhação num quarto do painel, na superfície superior, aos 46 anos, representado através de vetores normais às segundas fendas, em cada ponto de integração.

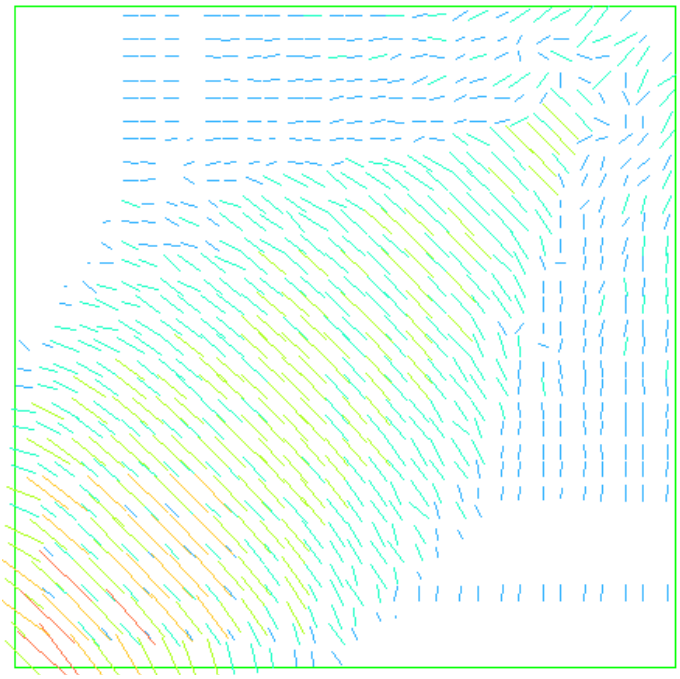


Fig. 3.15 – Padrão de fendilhação num quarto do painel, na superfície inferior, aos 46 anos, representado através de vetores normais às primeiras fendas, em cada ponto de integração.

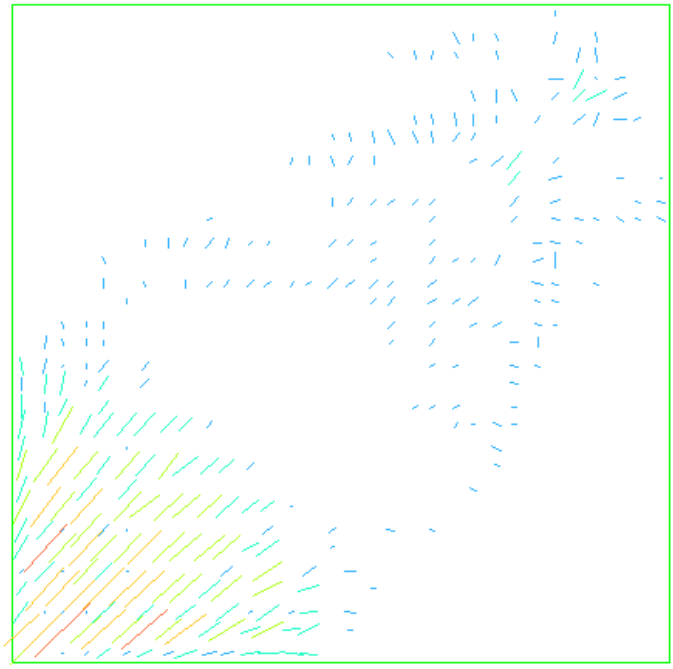


Fig. 3.16 – Padrão de fendilhação num quarto do painel, na superfície inferior, aos 46 anos, representado através de vetores normais às segundas fendas, em cada ponto de integração.

As fendas mais próximas do meio-vão, na superfície inferior, são inclinadas aproximadamente 45 graus porque a tensão em *x*, σ_x, e a tensão em *y*, σ_y, são praticamente iguais, bastando existir uma pequena tensão tangencial, τ_{xy}, para que as direções principais fiquem inclinadas a 45 graus, conforme ilustra a Fig. 3.17

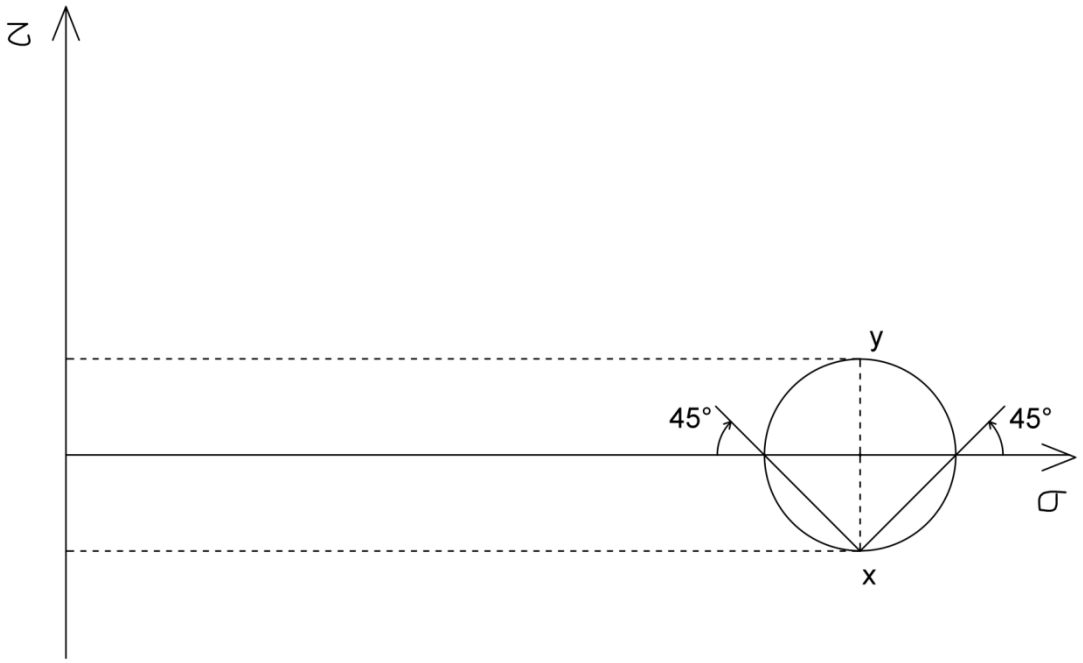


Fig. 3.17 – Círculo de Mohr que representa o estado plano de tensão a meio vão, na superfície inferior.

Na superfície superior, as fendas localizadas nos apoios, nas zonas mais próximas dos eixos de simetria (ver Fig. 3.13), foram as que condicionaram o dimensionamento da armadura superior. Por outro lado, a armadura inferior foi condicionada pelas fendas na superfície inferior, localizadas a meio-vão, na zona próxima da intersecção dos eixos de simetria (ver Figuras 3.15 e 3.16)

Os esforços por metro, instalados nas zonas do painel onde há as maiores aberturas de fendas, para as duas superfícies, encontram-se representados na Fig. 3.18. Para o seu cálculo, optou-se por considerar a média dos nós mais próximos dos eixos de simetria, ao longo de 0,50 m.

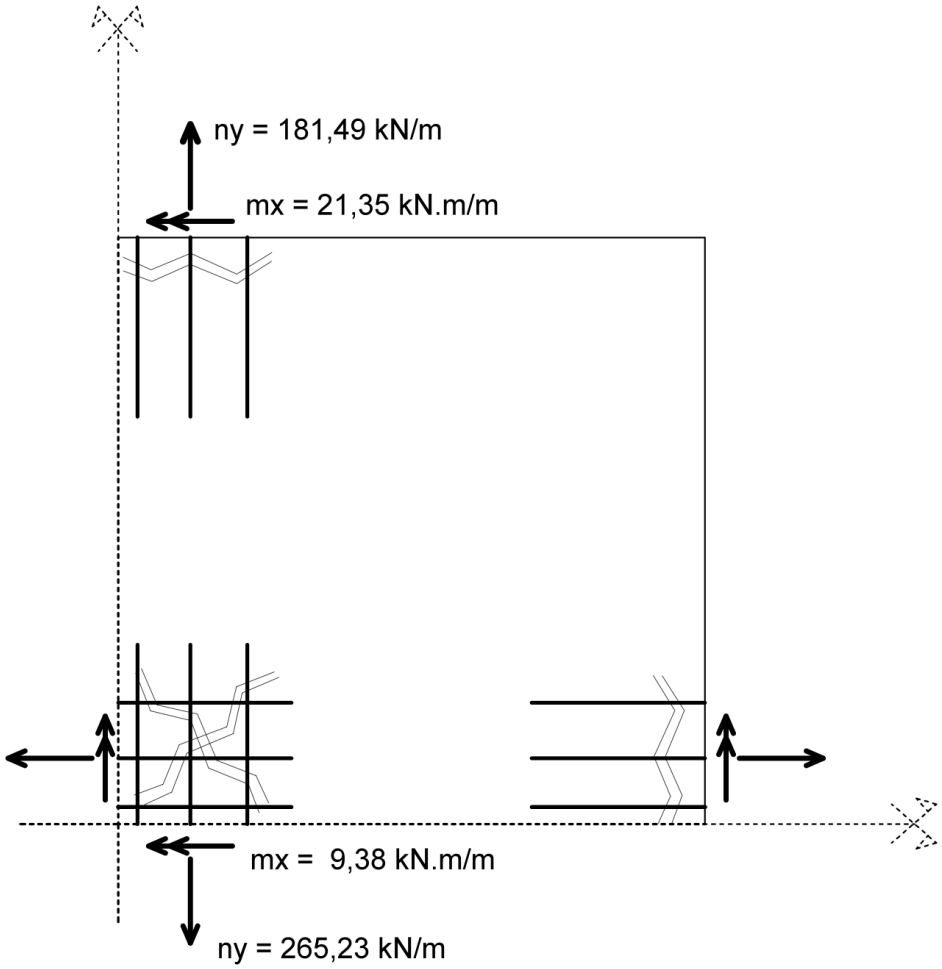


Fig. 3.18 – Esforços por metro, instalados nas zonas do painel onde há maiores aberturas de fendas, obtidos numa análise não-linear.

As Tabelas 3.7 e 3.8 comparam as aberturas de fendas máximas calculadas ao abrigo do MC90, utilizando os esforços da Fig. 3.18, com as maiores aberturas de fendas obtidas na análise não-linear.

Tabela 3.7 – Valores das aberturas de fendas calculadas de acordo com o MC90 (considerando os esforços obtidos na análise não linear) e das maiores aberturas de fendas, obtidas na análise não-linear, na superfície superior.

Superfície Superior								
n (kN/m)	**N/N_{cr}**	**m (kN.m/m)**	**αe**	**εsm-εcm**	**εsh**	**ls,max (m)**	**wk MC90 (mm)**	**wk DIANA (mm)**
181,49	0,35	21,35	18	0,000717	0,0005195	0,254	0,31	0,29

Tabela 3.8 – Valores das aberturas de fendas calculadas de acordo com o MC90 (considerando os esforços obtidos na análise não linear) e das maiores aberturas de fendas, obtidas na análise não-linear, na superfície inferior.

Superfície Inferior								
n (kN/m)	**N/N_{cr}**	**m (kN.m/m)**	**αe**	**εsm-εcm**	**εsh**	**ls,max (m)**	**wk MC90 (mm)**	**wk DIANA (mm)**
265,23	0,51	9,38	18	0,000470	0,0005195	0,193	0,27	0,29

Note-se que para o cálculo das aberturas de fendas na superfície inferior (ver Tabela 3.8), *ls,max* é calculado de acordo com a equação (3.20), por as fendas serem inclinadas aproximandamente 45 graus ($\theta \cong 45°$) tal como sugere o EC2 e o MC90.

$$l_{s,max} = \left(\frac{\cos\theta}{l_{sx,max}} + \frac{\sin\theta}{l_{sy,max}}\right)^{-1} \tag{3.20}$$

em que $l_{sx,max}$ e $l_{sy,max}$ é a distância máxima entre fendas, com direção paralela ao eixo xx e yy, respetivamente.

3.3.2.3. PAINEL 7×10,5 M^2

A Tabela 3.9 mostra a armadura obtida, para um painel de área 7×10,5m^2, numa análise não-linear, comparando-o com a armadura calculada pelo MC90, incluindo os efeitos de retração, assumindo um esforço axial N_{cr}, para cumprir com a mesma abertura de fendas, 0,30 mm.

Tabela 3.9 – Armaduras obtidas numa análise não-linear, comparadas com as previstas pelo MC90, de modo a obter $w_k = 0{,}30\ mm$.

	MC90 (N=$A_c . f_{ctm}$)		**DIANA**		$A_{s,DIANA}/A_{s,MC90}$	
	$A_{s,sup}$	$A_{s,inf}$	$A_{s,sup}$	$A_{s,inf}$	$A_{s,sup}$	$A_{s,inf}$
DIR. XX	14,86	14,23	11,63	9,56	78%	67%
DIR.YY	16,37	15,52	14,47	10,49	88%	68%

A flecha obtida ao longo do tempo, encontra-se representada na Fig. 3.19.

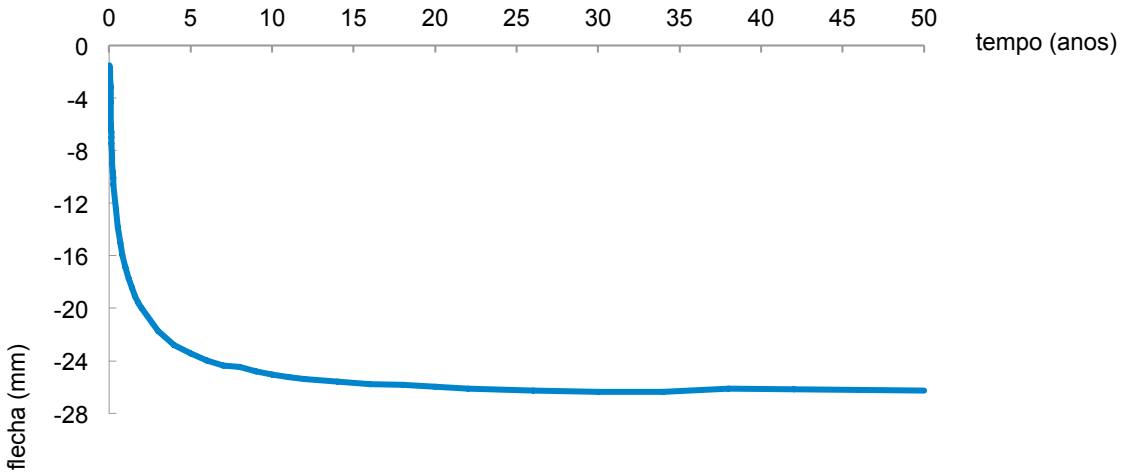


Fig. 3.19 – Flecha ao longo do tempo da análise.

À semelhança do painel 7×7 m^2, a flecha a partir dos 10 anos, varia muito pouco, atingindo o valor de 26,2 mm aos 50 anos de idade, sendo este menor do que o limite estabelecido no EC2 – 7000/250 (28 mm).

As Figuras 3.20 a 3.23 representam o rácio entre esforço axial instalado e o esforço axial de fendilhação (ver equação (3.6)), em instantes de tempo representativos, para as zonas dos apoios e para as zonas do meio-vão.

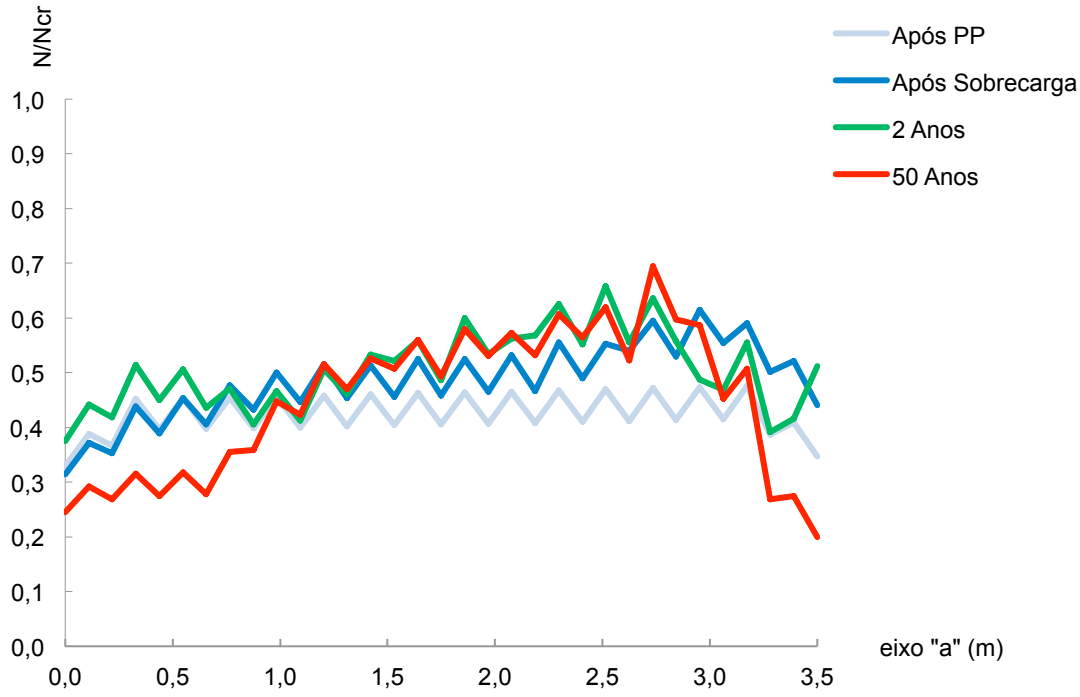


Fig. 3.20– Esforço axial no apoio, ao longo do eixo *"a"*.

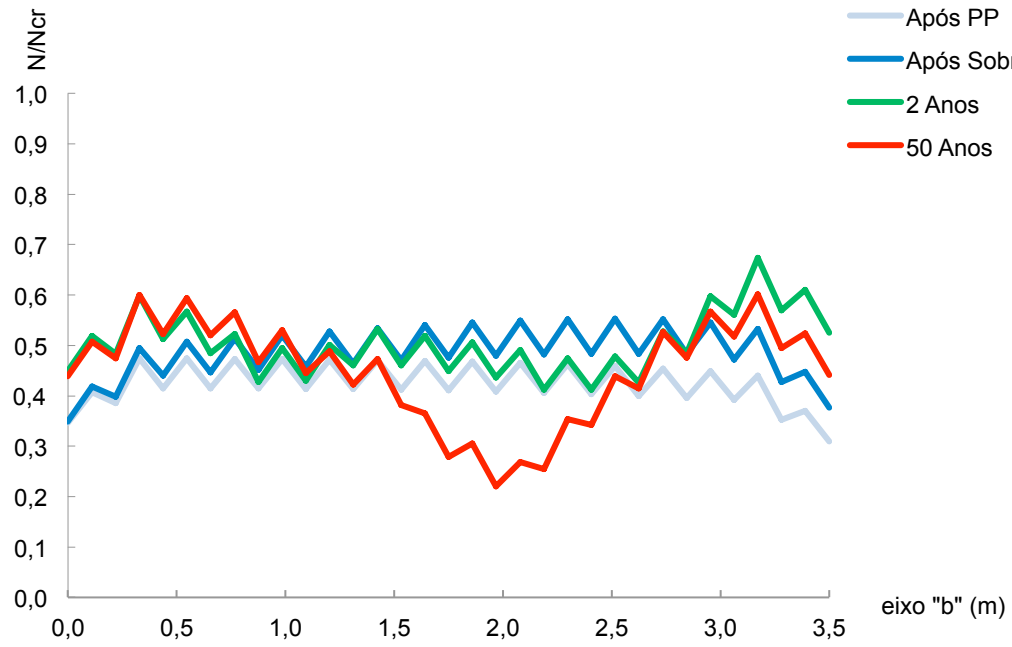


Fig. 3.21 – Esforço axial a meio vão, ao longo do eixo *"b"*.

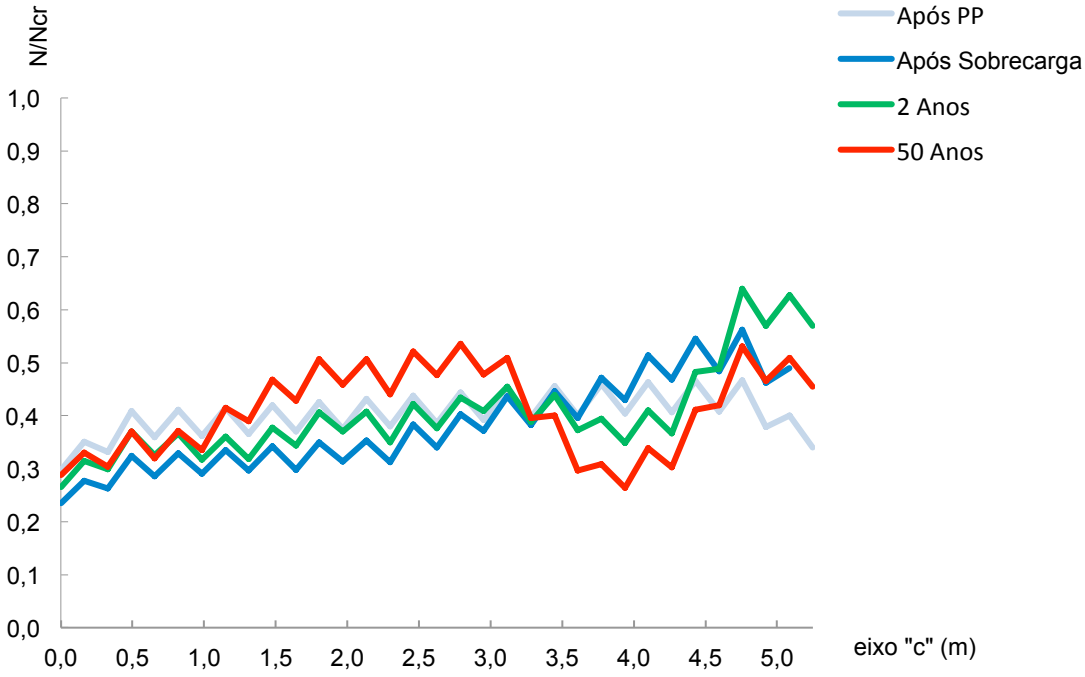


Fig. 3.22 – Esforço axial a meio vão, ao longo do eixo *"c"*.

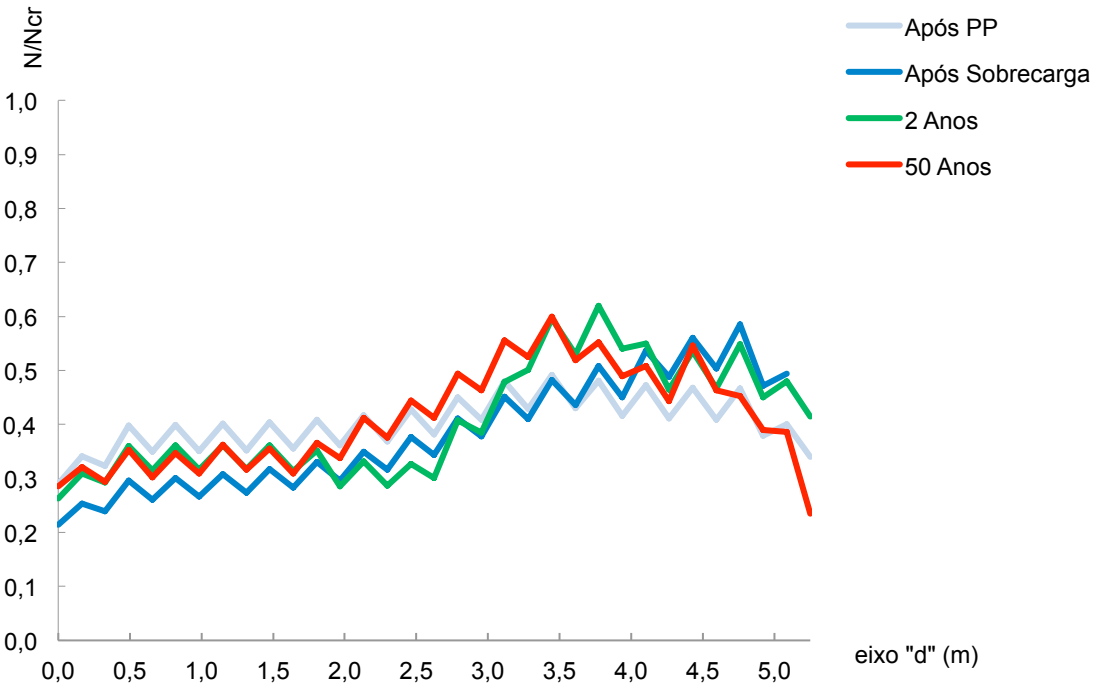


Fig. 3.23 – Esforço axial no apoio, ao longo do eixo *"d"*.

Apesar de o painel analisado ter vãos diferentes, nas Figuras 3.20 a 3.23 observa-se uma resposta semelhante à do painel 7×7 m^2.

A Tabela 3.10 mostra os momentos fletores elásticos previstos pelas tabelas de Montoya, em contraste com os momentos elásticos obtidos pelo *software* DIANA, sendo estes correspondentes à aplicação do peso próprio e da sobrecarga.

Tabela 3.10 – Comparação entre os momentos fletores obtidos na análise não linear, e os mesmos obtidos pela tabela de Montoya.

		$M_{elast,apoio}$ $(kN.m/m)$	$M_{elast,vão}$ $(kN.m/m)$
Montoya	**DIR. XX**	22,46	6,07
	DIR. YY	29,44	13,68
DIANA	**DIR. XX**	25,20	8,69
	DIR. YY	24,56	16,31

Os momentos elásticos são discutivelmente parecidos, adotando-se o obtido pela análise não-linear, para servir de esforço de comparação. As Figuras 3.24 a 3.27 ilustram a relação entre eles, ao longo dos vários apoios e vãos.

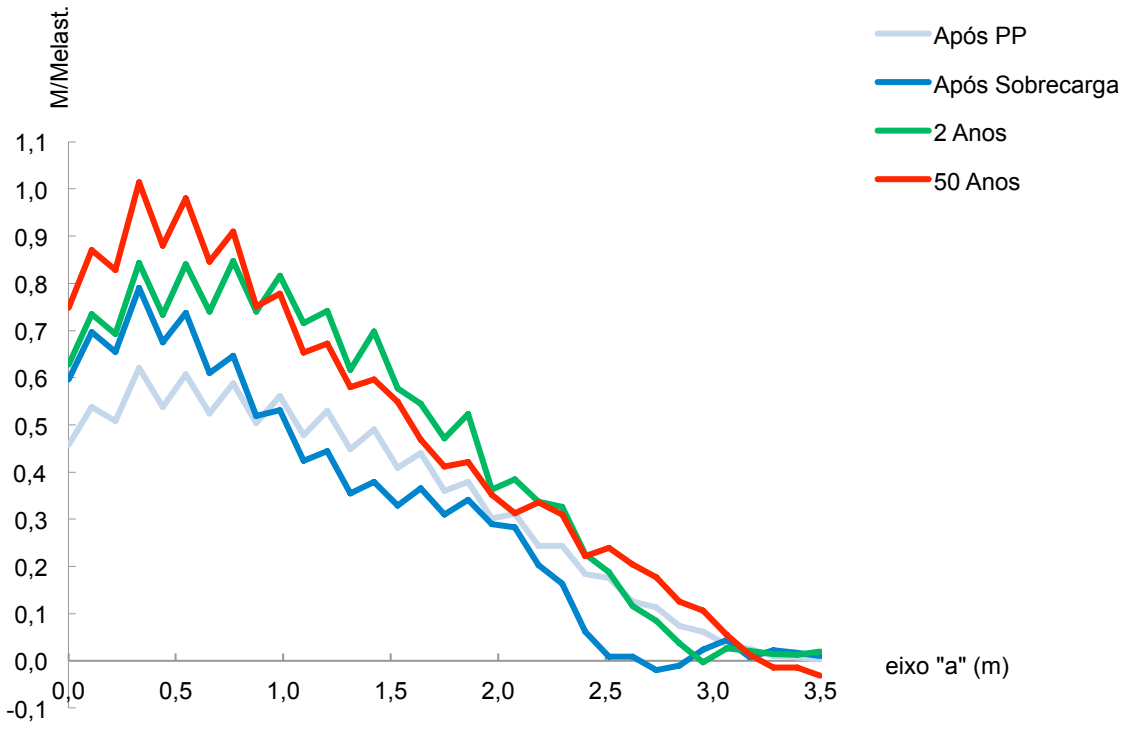


Fig. 3.24 – Momento fletor no apoio, ao longo do eixo *"a"*.

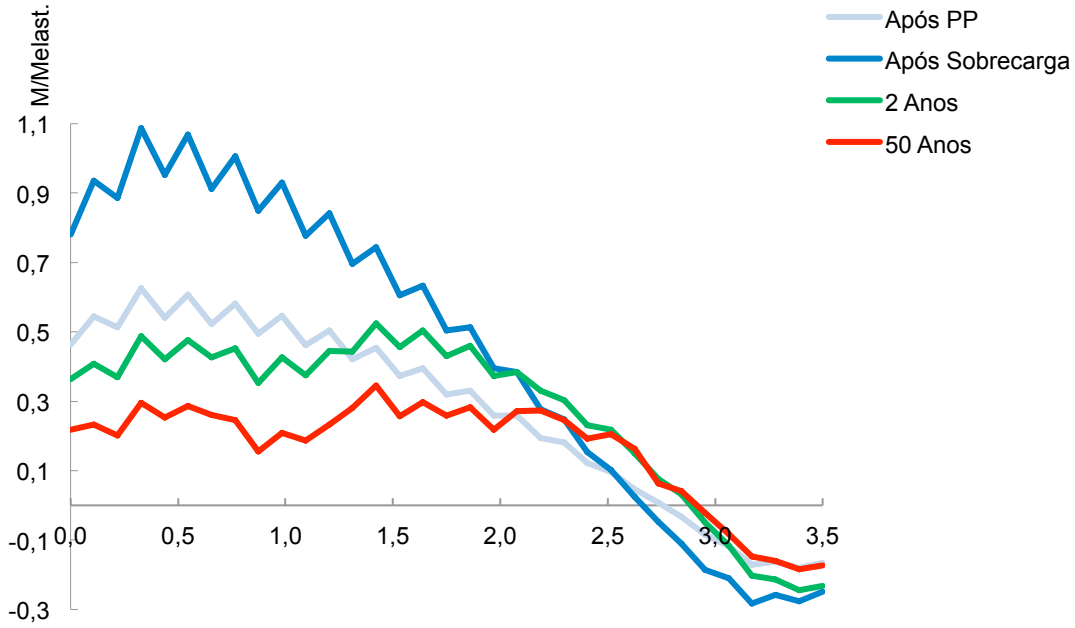


Fig. 3.25 – Momento fletor a meio vão, ao longo do eixo *"b"*.

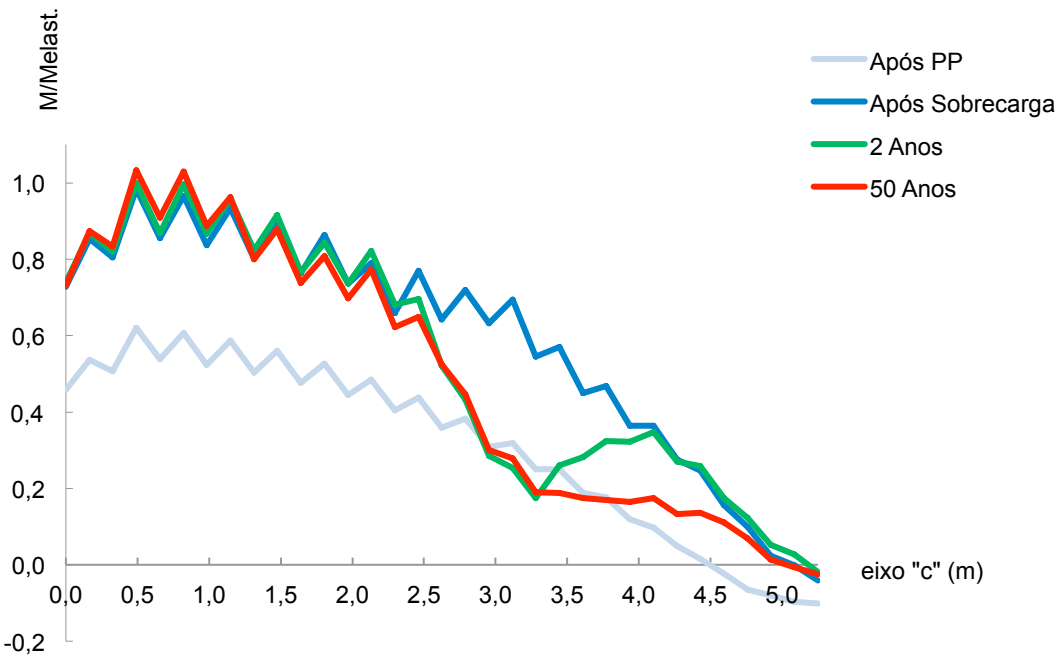


Fig. 3.26 – Momento fletor a meio vão, ao longo do eixo "*c*".

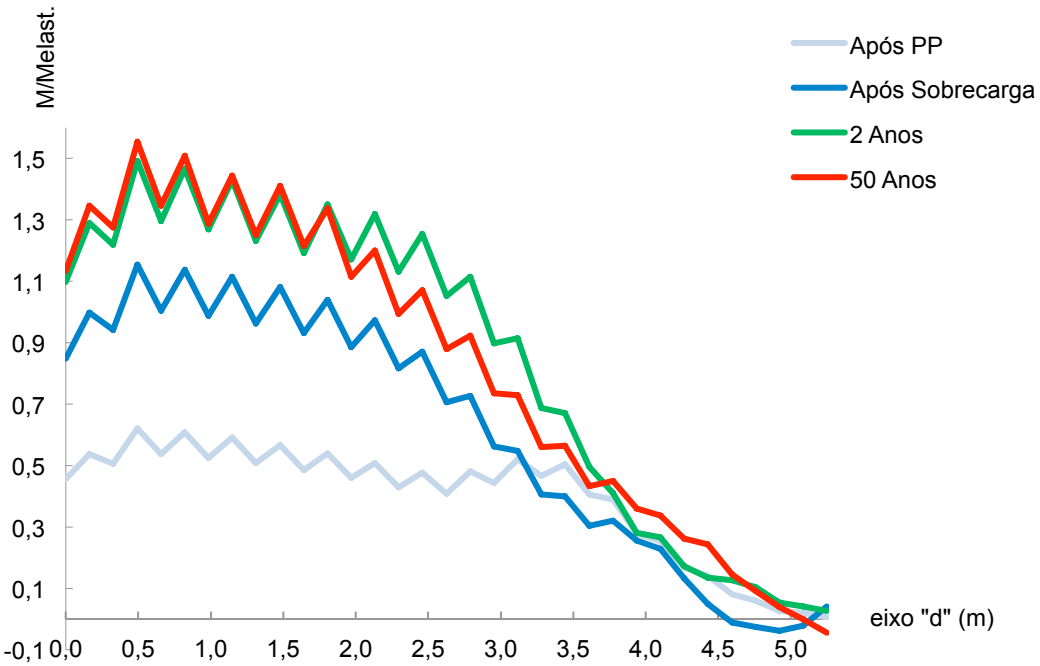


Fig. 3.27 – Momento fletor no apoio, ao longo do eixo *"d"*.

Ao contrário do que sucede na laje 7×7 m^2, os rácios dos momentos nos apoios são maiores do que os rácios nos vãos, e à medida que o tempo avança, os momentos fletores tendem a aumentar nos apoios e reduzir nos vãos. Assim sendo, parece que a redistribuição de momento fletor, implica uma transferência gradual deste do meio-vão para o apoio.

As Figuras 3.28 a 3.31 mostram o padrão de fendilhação, no instante final da análise, para a superfície superior e inferior.

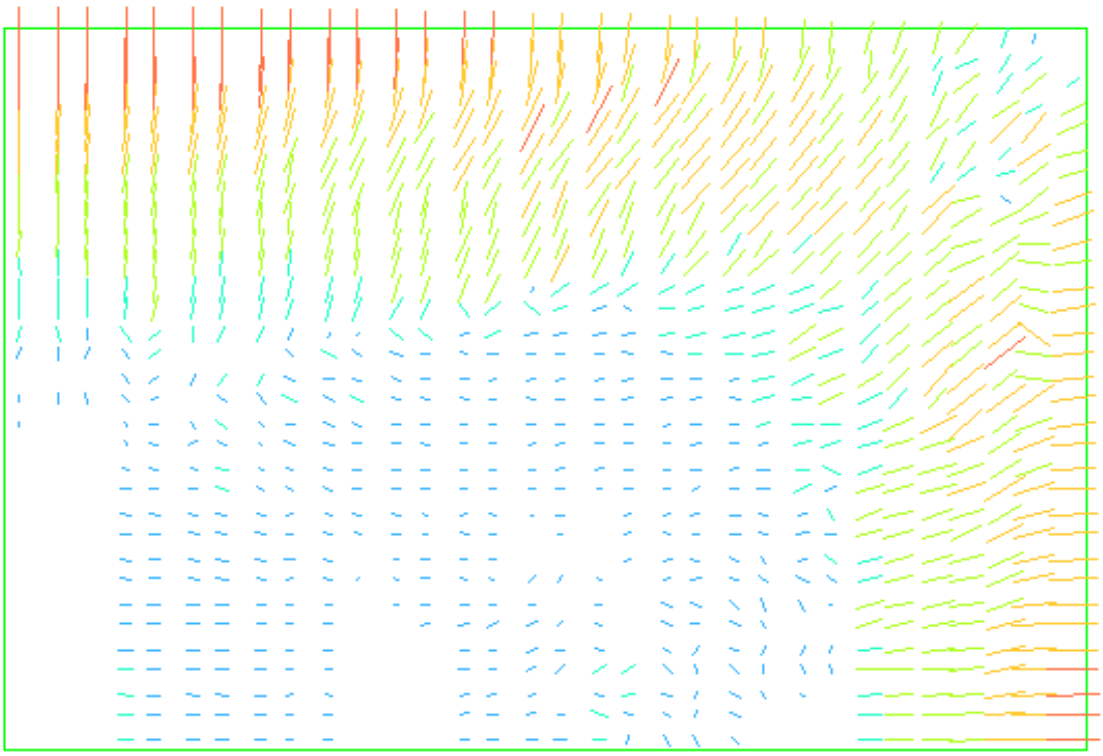


Fig. 3.28 – Padrão de fendilhação num quarto do painel, na superfície superior, aos 50 anos, representado através de vetores normais às primeiras fendas, em cada ponto de integração.

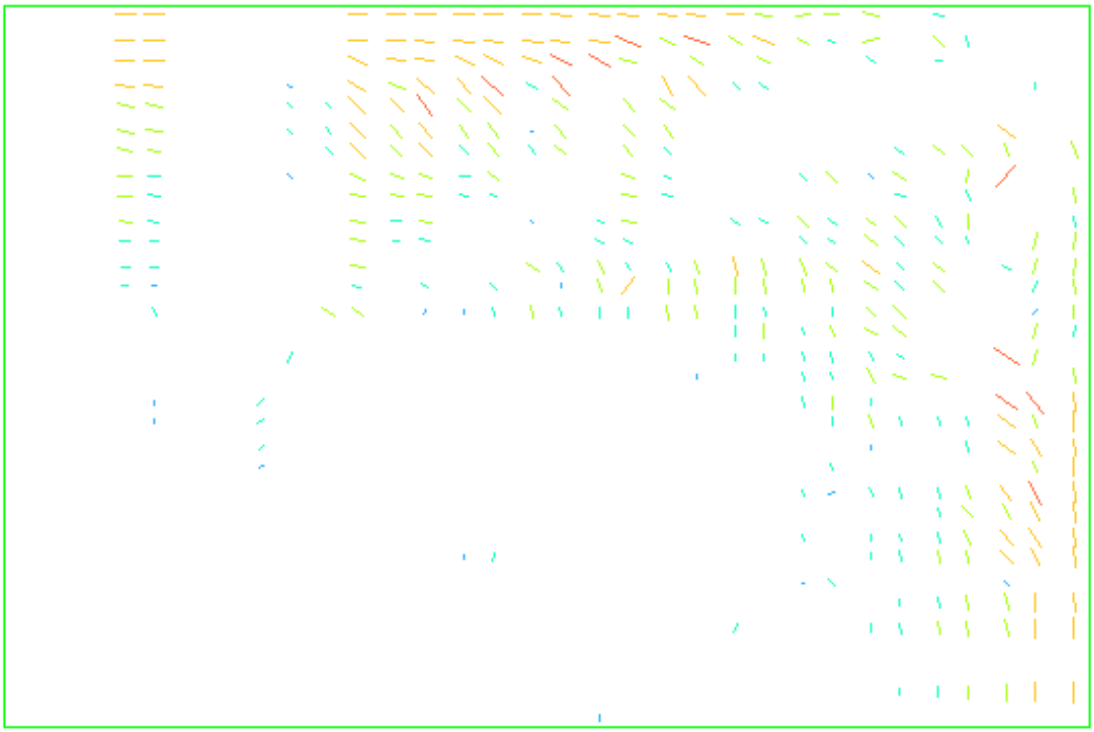


Fig. 3.29 – Padrão de fendilhação num quarto do painel, na superfície superior, aos 50 anos, representado através de vetores normais às segundas fendas, em cada ponto de integração.

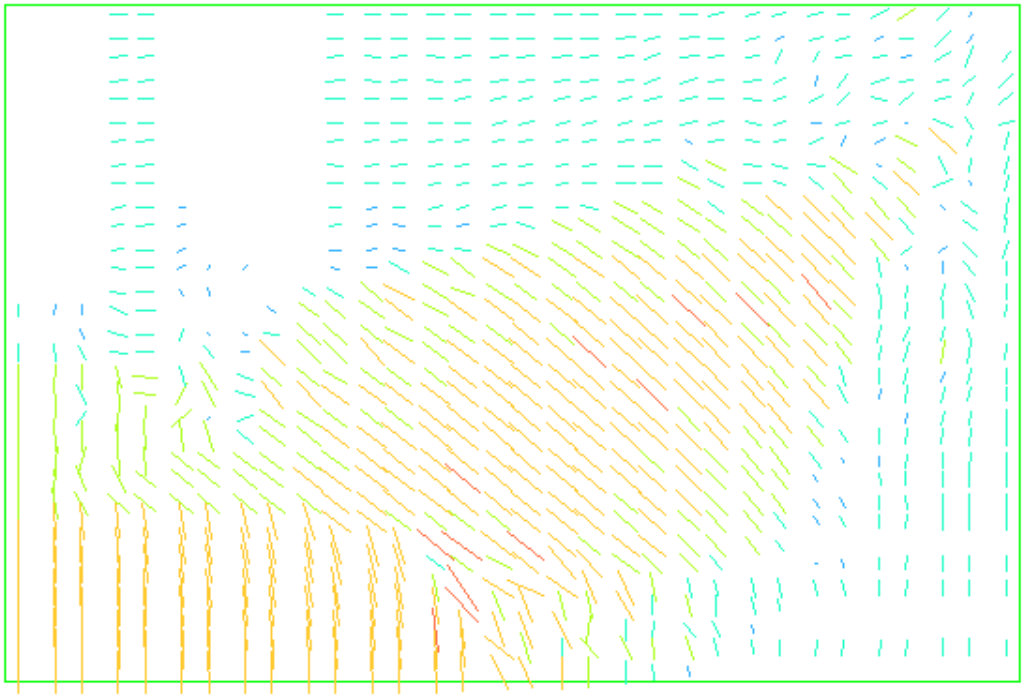


Fig. 3.30 – Padrão de fendilhação num quarto do painel, na superfície inferior aos 50 anos, representado através de vetores normais às primeiras fendas, em cada ponto de integração.

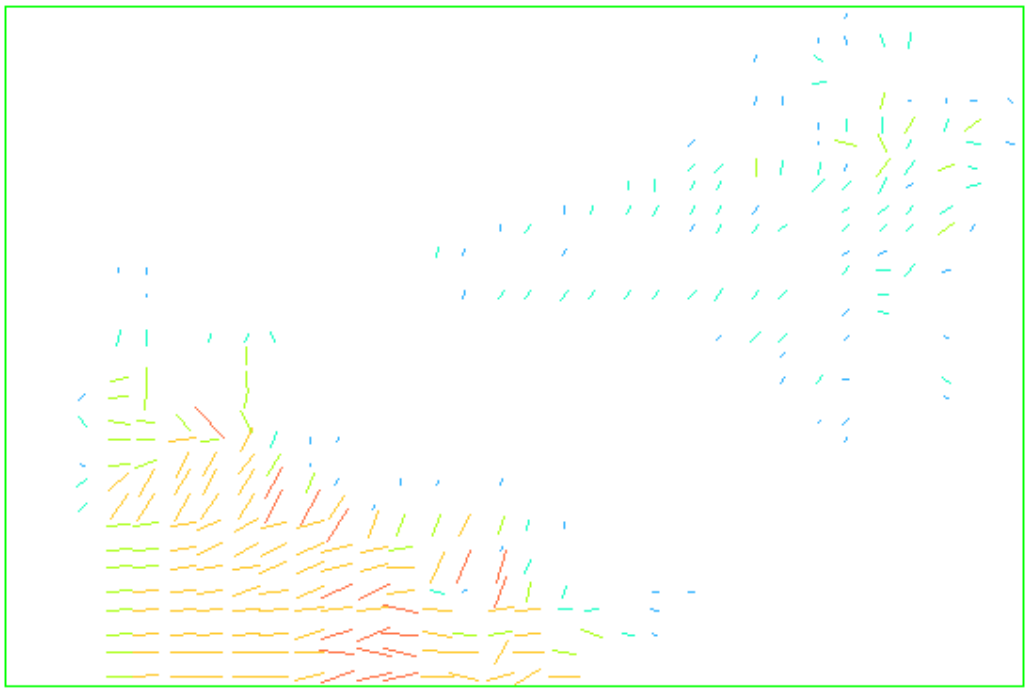


Fig. 3.31 – Padrão de fendilhação num quarto do painel, na superfície inferior, aos 50 anos, representado através de vetores normais às segundas fendas, em cada ponto de integração.

Na superfície superior, as fendas localizadas nos apoios, nas zonas mais próximas dos eixos de simetria (ver Fig. 3.28), foram as que condicionaram o dimensionamento da armadura superior. As armaduras inferiores, foram condicionadas pelas fendas na superfície inferior. Destas, as armaduras paralelas ao eixo *yy*, *Asy*, foram condicionadas pela fenda mais próxima dos eixos de simetria (ver Fig. 3.30), enquanto que as armaduras *Asx*, foram condicionadas pela maior fenda observada na Fig. 3.31.

Os esforços por metro, instalados nas zonas do painel onde há maiores aberturas de fendas, para as duas superfícies, encontram-se representados na Fig. 3.32. Apesar de a maior fenda da Fig. 3.31 condicionar as armaduras *Asx*, esta não é tão importante quanto as outras e a determinação dos esforços na sua vizinhança é mais difícil, pelo que se entendeu ignorar esta nas comparações efetuadas a seguir.

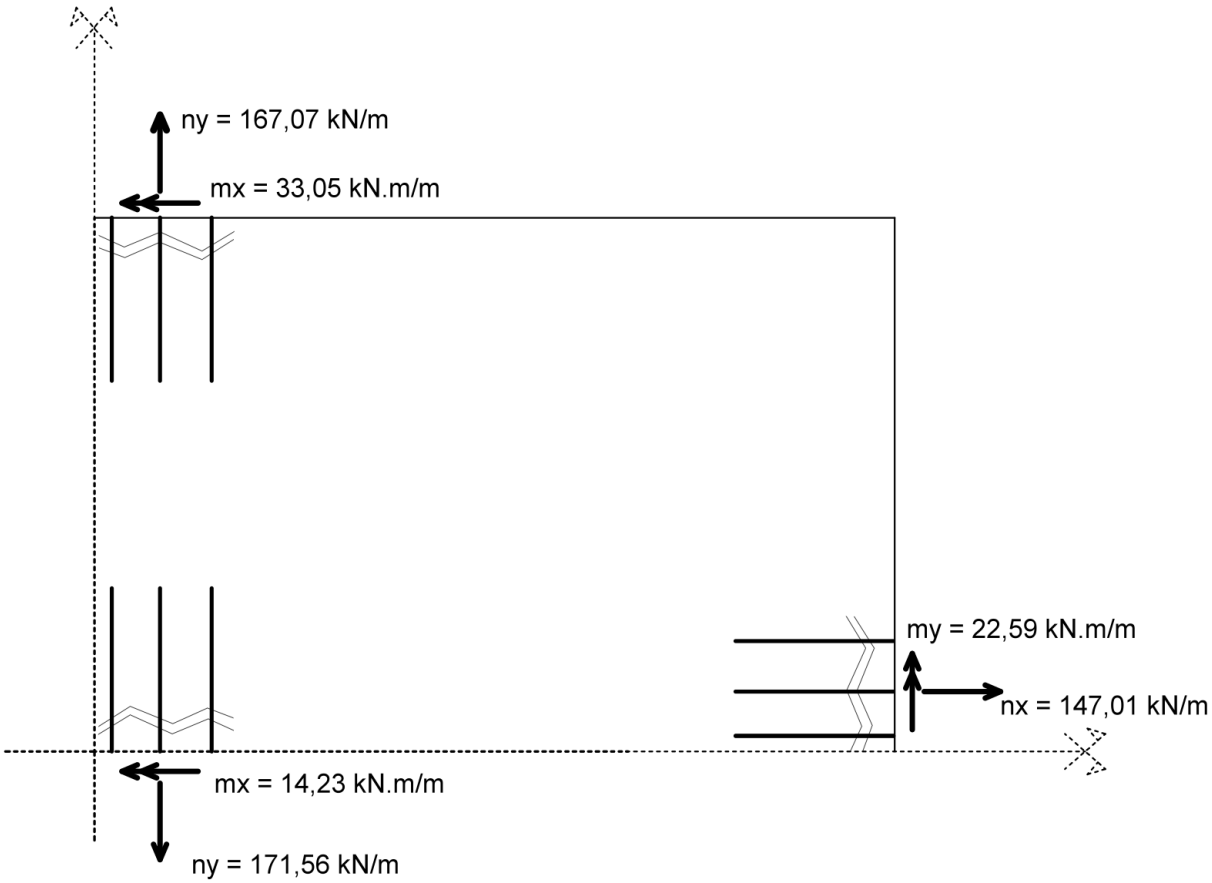


Fig. 3.32 – Esforços por metro, instalados nas zonas do painel onde há maiores aberturas de fendas, obtidos numa análise não-linear.

As Tabelas 3.11 e 3.12 comparam as aberturas de fendas máximas calculadas ao abrigo do MC90, utilizando os esforços da Fig. 3.32, com as maiores aberturas de fendas obtidas na análise não-linear.

Tabela 3.11 – Valores das aberturas de fendas calculadas de acordo com o MC90 (considerando os esforços obtidos na análise não linear) e das maiores aberturas de fendas, obtidas na análise não-linear, na superfície superior.

Superfície Superior									
	n (kN/m)	**N/N_{cr}**	**m (kN.m/m)**	**αe**	**εsm-εcm**	**εsh**	**ls,max (m)**	**wk MC90 (mm)**	**wk DIANA (mm)**
DIR. XX	147,01	0,28	22,59	18	0.000728	0,000521	0,265	0,33	0,31
DIR. YY	167,07	0,32	33,05	18	0,000941	0,000521	0,213	0,31	0,30

Tabela 3.12 – Valores das aberturas de fendas calculadas de acordo com o MC90 (considerando os esforços obtidos na análise não linear) e das maiores aberturas de fendas, obtidas na análise não-linear, na superfície inferior.

Superfície Inferior								
n (kN/m)	**N/N_{cr}**	**m (kN.m/m)**	**αe**	**εsm-εcm**	**εsh**	**ls,max (m)**	**wk MC90 (mm)**	**wk DIANA (mm)**
171,56	0,33	14,23	18	0,000503	0,000521	0,294	0,30	0,30

3.3.2.4. PAINEL 7×14 M^2

Para o painel 7×14 m^2 os resultados obtidos, são muito semelhantes aos do painel 7×10,5 m^2.

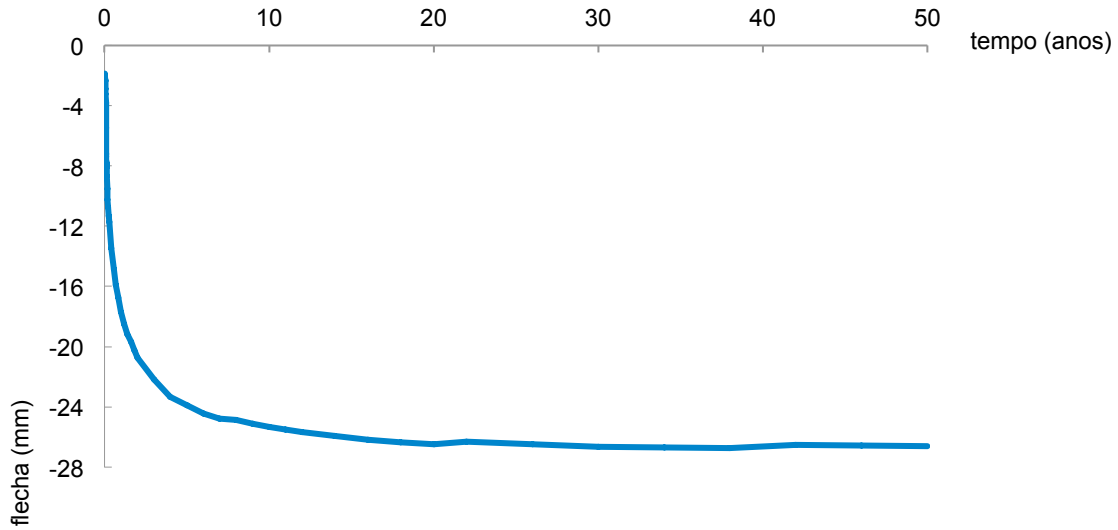
A Tabela 3.13 mostra a armadura obtida, numa análise não-linear, comparando-o com a armadura calculada pelo MC90, incluindo os efeitos de retração, assumindo um esforço axial N_{cr}, para cumprir com a mesma abertura de fendas, 0,3 mm.

Tabela 3.13 – Armaduras obtidas numa análise não-linear, comparadas com as previstas pelo MC90, de modo a obter $w_k = 0{,}3\ mm$.

	MC90 (N=$A_c . f_{ctm}$)		**DIANA**		$A_{s,DIANA}/A_{s,MC90}$	
	$A_{s,sup}$	$A_{s,inf}$	$A_{s,sup}$	$A_{s,inf}$	$A_{s,sup}$	$A_{s,inf}$
DIR. XX	14,86	14,23	11,32	8,72	76%	61%
DIR.YY	17,17	16,10	14,67	10,47	85%	65%

A flecha obtida ao longo do tempo, encontra-se representada na Fig. 3.33.

Fig. 3.33 - Flecha obtida ao longo do tempo, na análise não-linear.



À semelhança dos paneis anteriores, a flecha a partir dos 10 anos, varia muito pouco, atingindo o valor de 26,6 mm aos 50 anos de idade, sendo este menor do que o limite estabelecido no EC2 – 7000/250 (28 mm). Observa-se que não existe nenhuma espaço de tempo onde a flecha toma valores irregulares.

As Figuras 3.34 a 3.37 representam o rácio entre esforço axial instalado e o esforço axial de fendilhação, em instantes de tempo representativos, para as zonas dos apoios e para as zonas a meio vão.

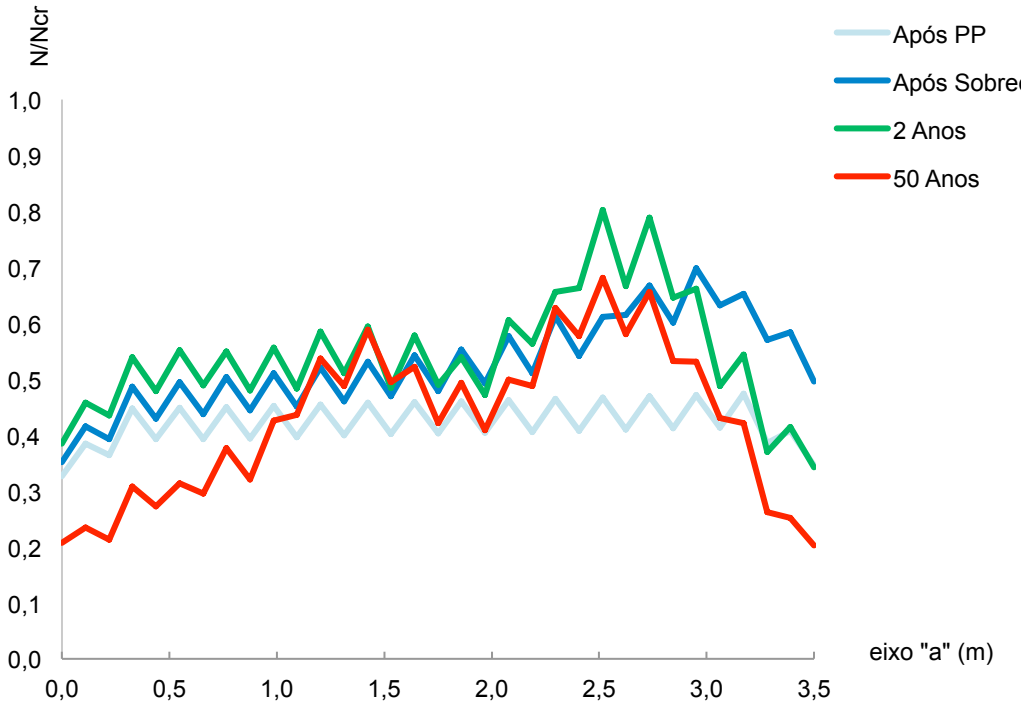


Fig. 3.34 – Esforço Axial no apoio, ao longo do eixo *"a"*.

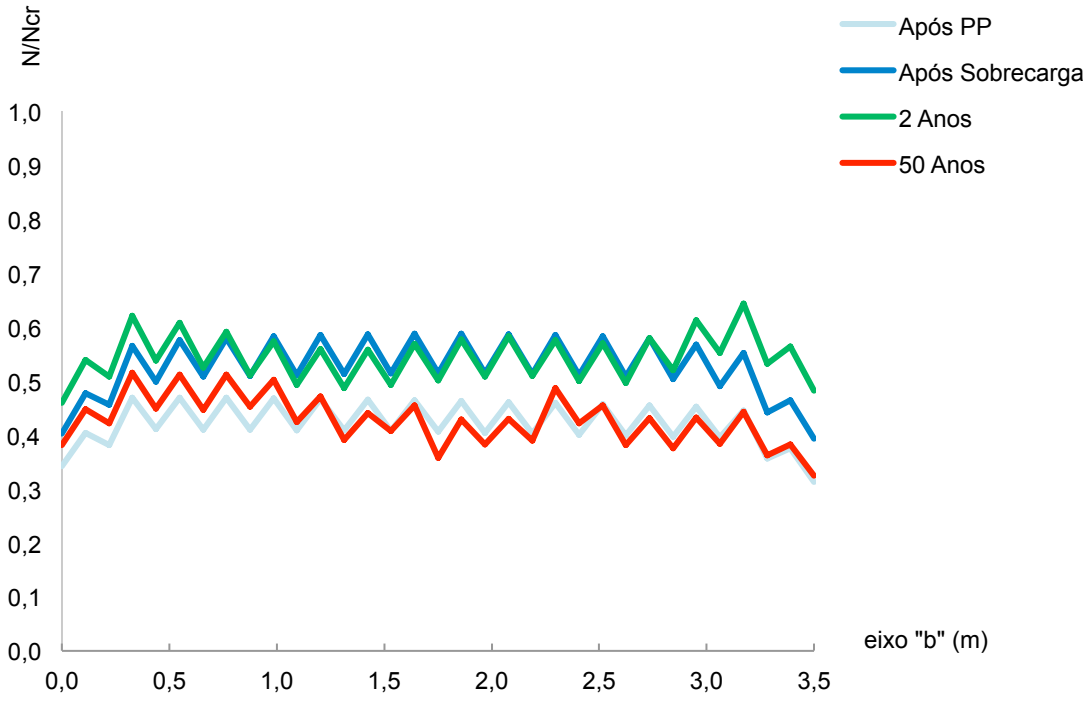


Fig. 3.35 – Esforço Axial a meio vão, ao longo do eixo *"b"*.

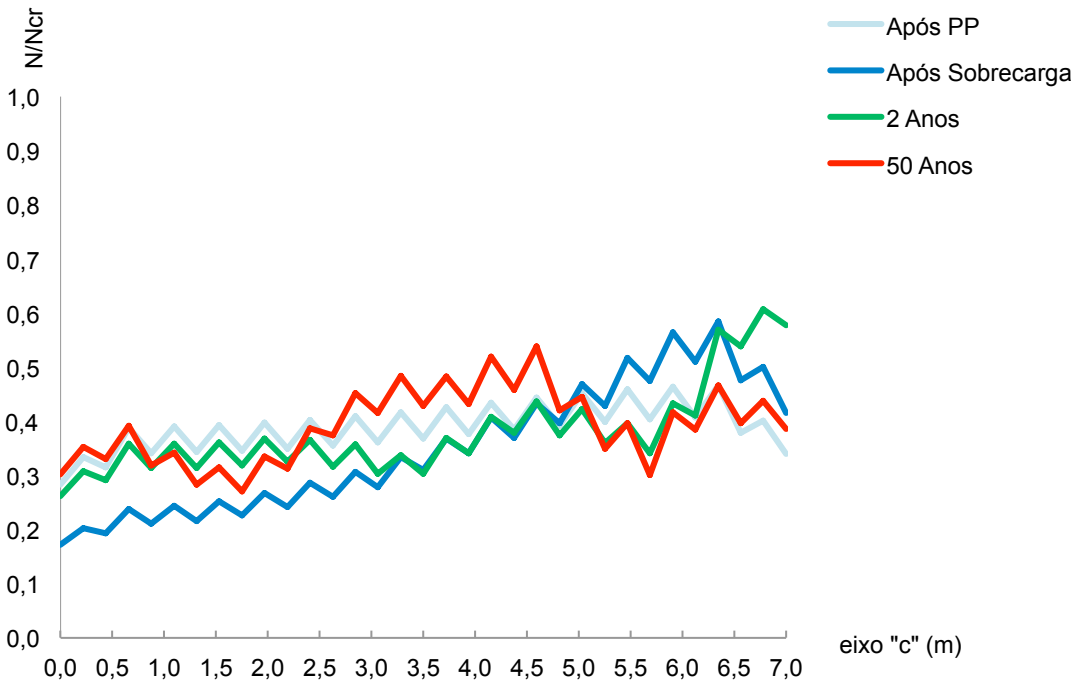


Fig. 3.36 – Esforço Axial a meio vão, ao longo do eixo *"c"*.

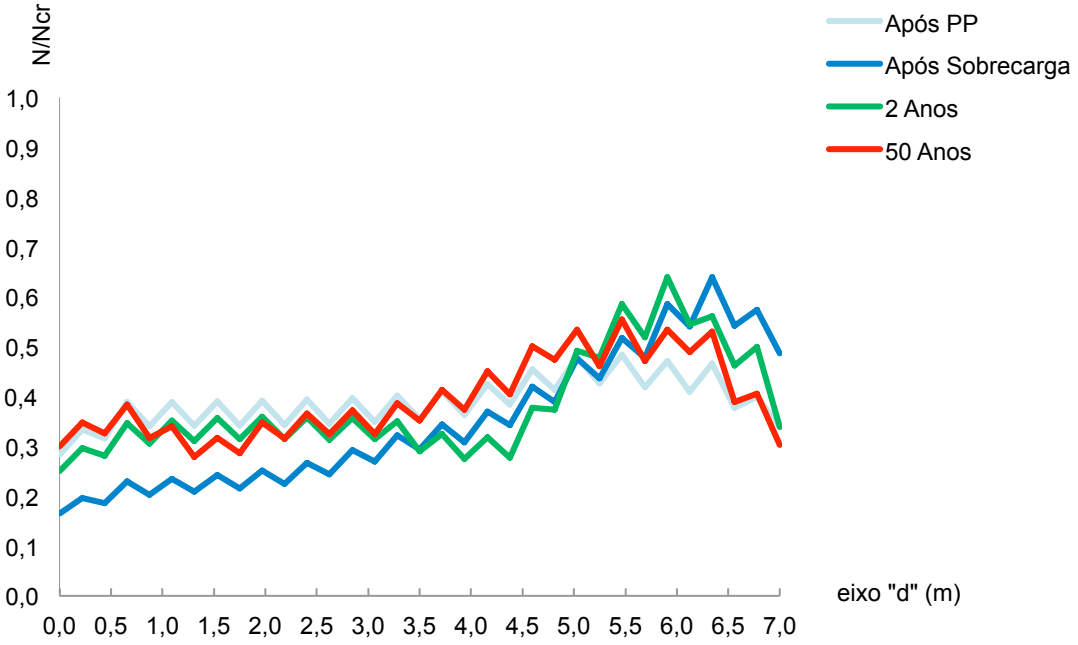


FIg. 3.37 – Esforço Axial no apoio, ao longo do eixo *"d"*.

A Tabela 3.14 mostra os momentos fletores elásticos previstos pelas tabelas de Montoya, em contraste com os momentos elásticos obtidos pelo *software* DIANA, sendo estes correspondentes à aplicação do peso próprio e da sobrecarga.

Tabela 3.14 – Comparação entre os momentos fletores obtidos na análise não linear, e os mesmos obtidos pelas tabelas de Montoya.

		$M_{elast,apoio}\ (kN.m/m)$	$M_{elast,vão}\ (kN.m/m)$
Montoya	**DIR. XX**	22,46	3,88
	DIR. YY	32,54	15,87
DIANA	**DIR. XX**	25,34	6,34
	DIR. YY	29,10	19,74

As Figuras 3.38 e 3.41 ilustram a relação entre o momento fletor elástico e o momento fletor obtido na análise não-linear, ao longo dos vários apoios e vãos, para instantes de tempo representativos.

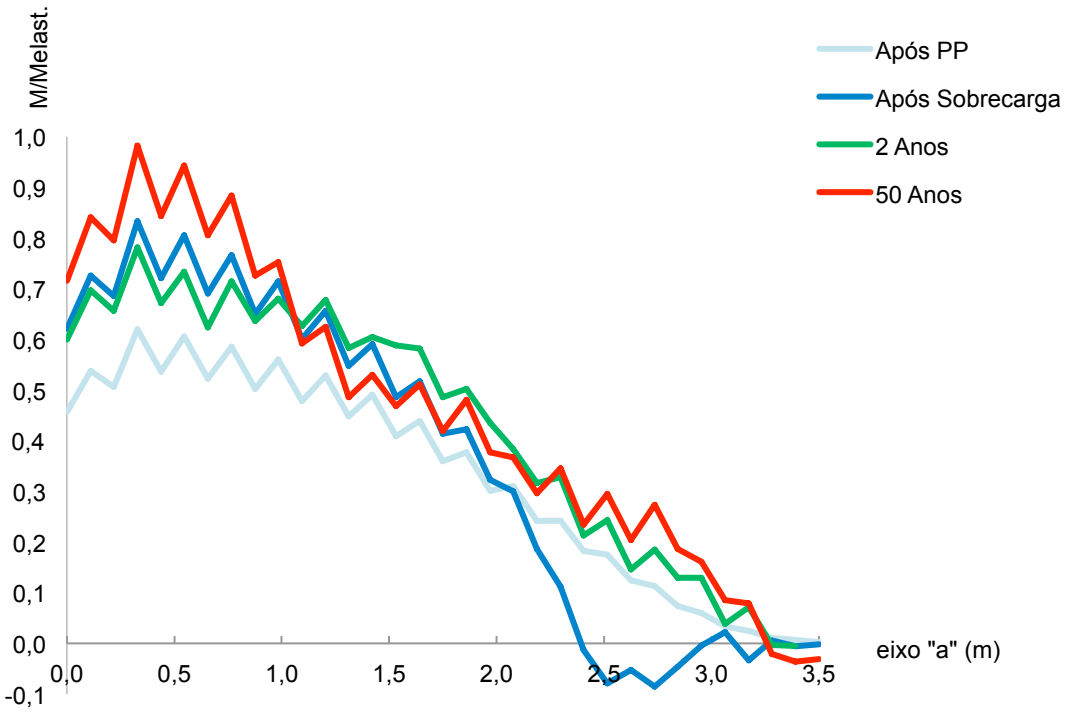


Fig. 3.38 – Momento fletor no apoio, ao longo do eixo *"a"*.

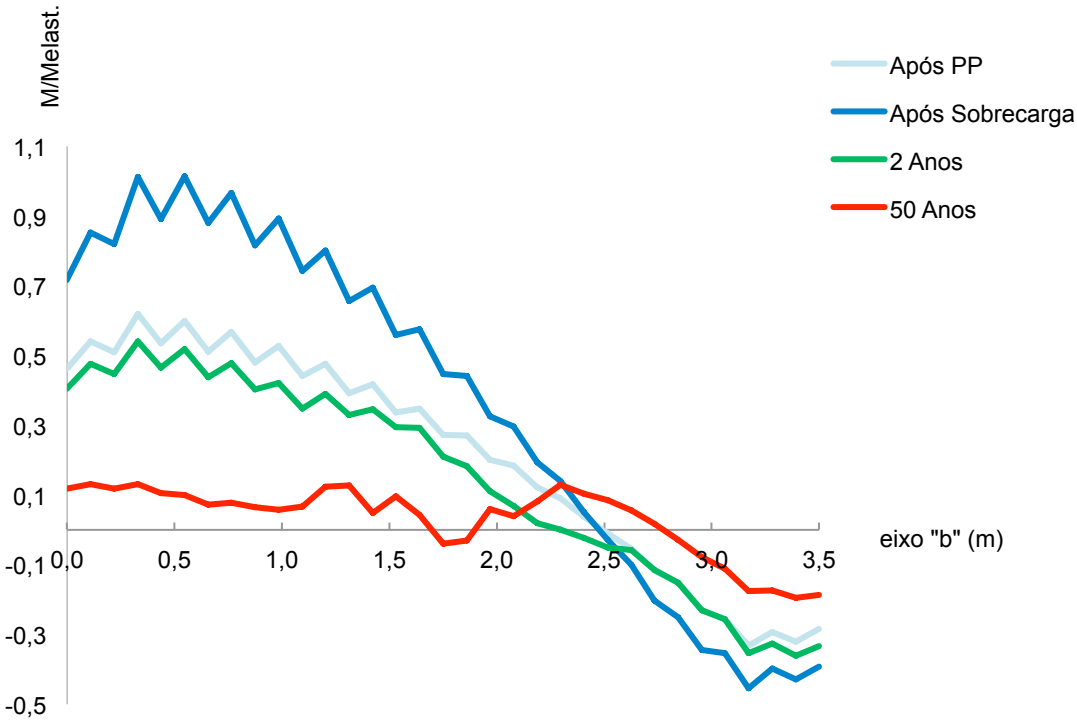


Fig. 3.39 – Momento fletor a meio vão, ao longo do eixo *"b"*.

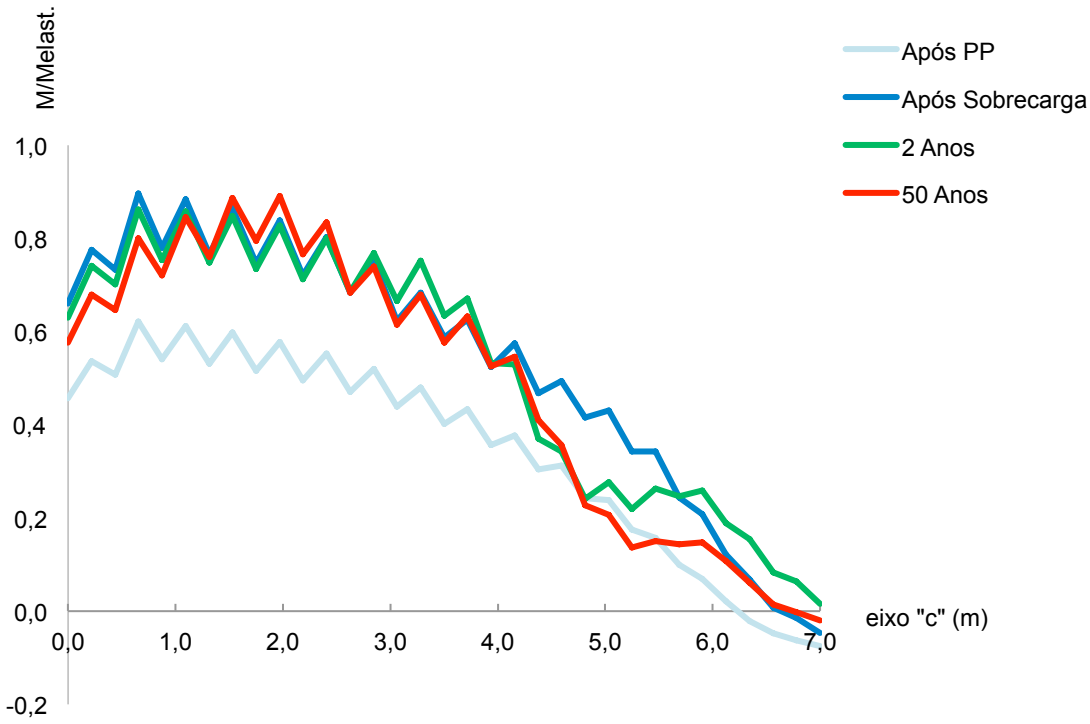


Fig. 3.40 – Momento fletor a meio vão, ao longo do eixo *"c"*.

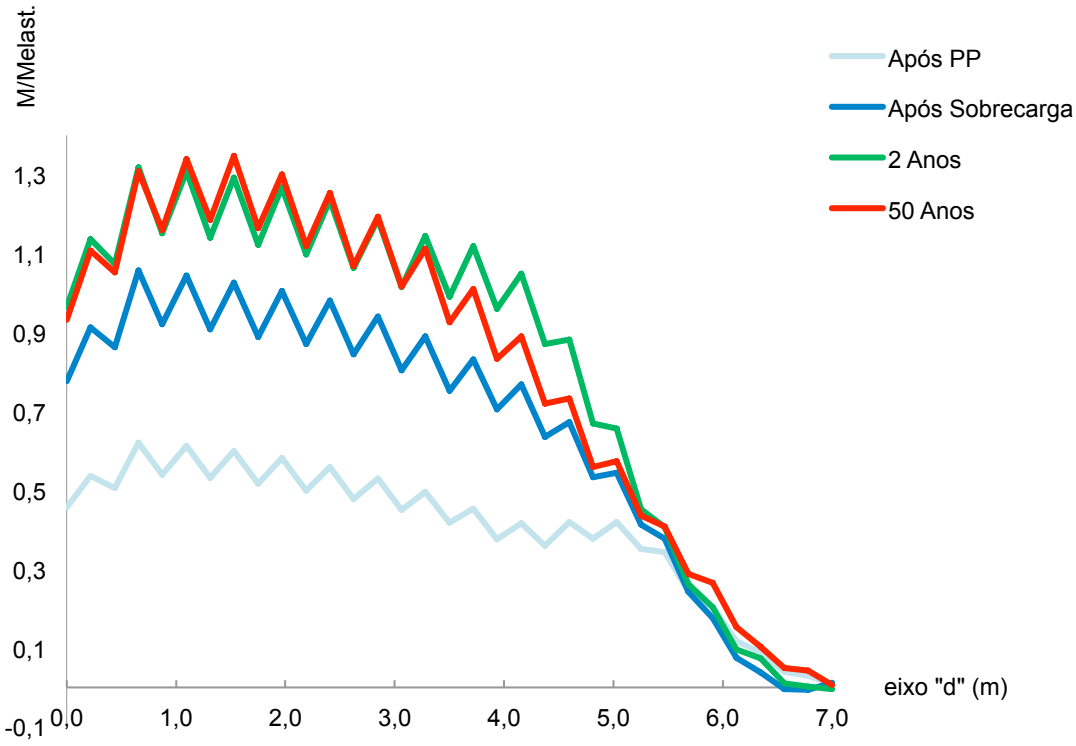


Fig. 3.41 – Momento fletor no apoio, ao longo do eixo *"d"*.

As Figuras 3.42 a 3.45 mostram o padrão de fendilhação, no instante final da análise, para a superfície superior e inferior.

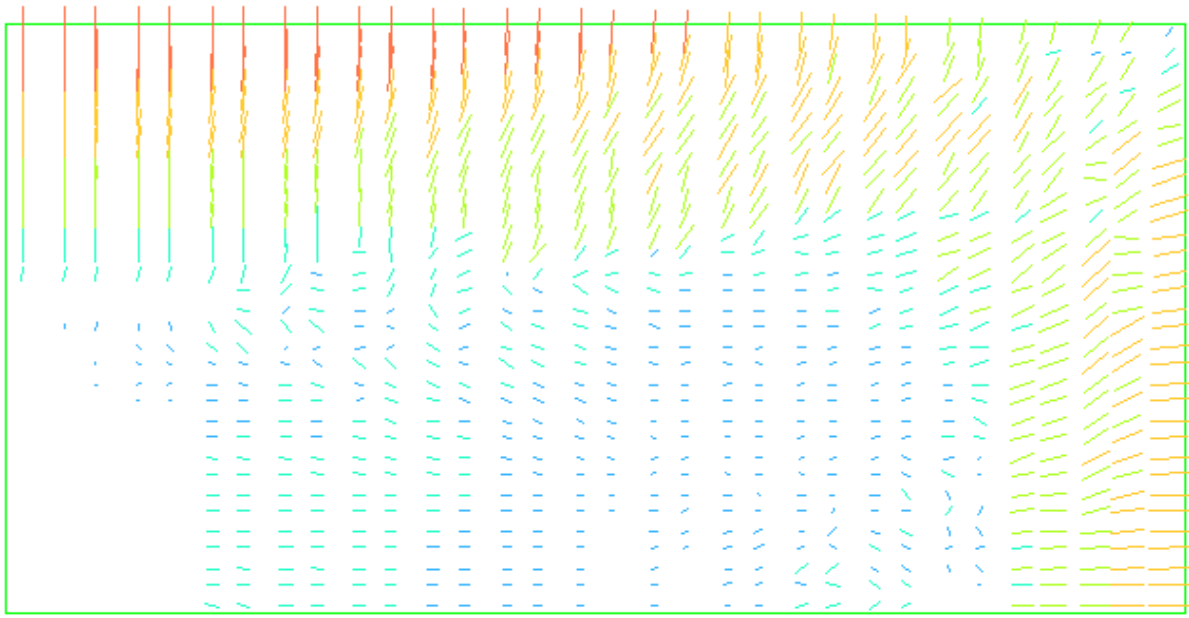


Fig. 3.42 – Padrão de fendilhação num quarto do painel, na superficie superior, aos 50 anos, representado através de vetores normais às primeiras fendas, em cada ponto de integração.

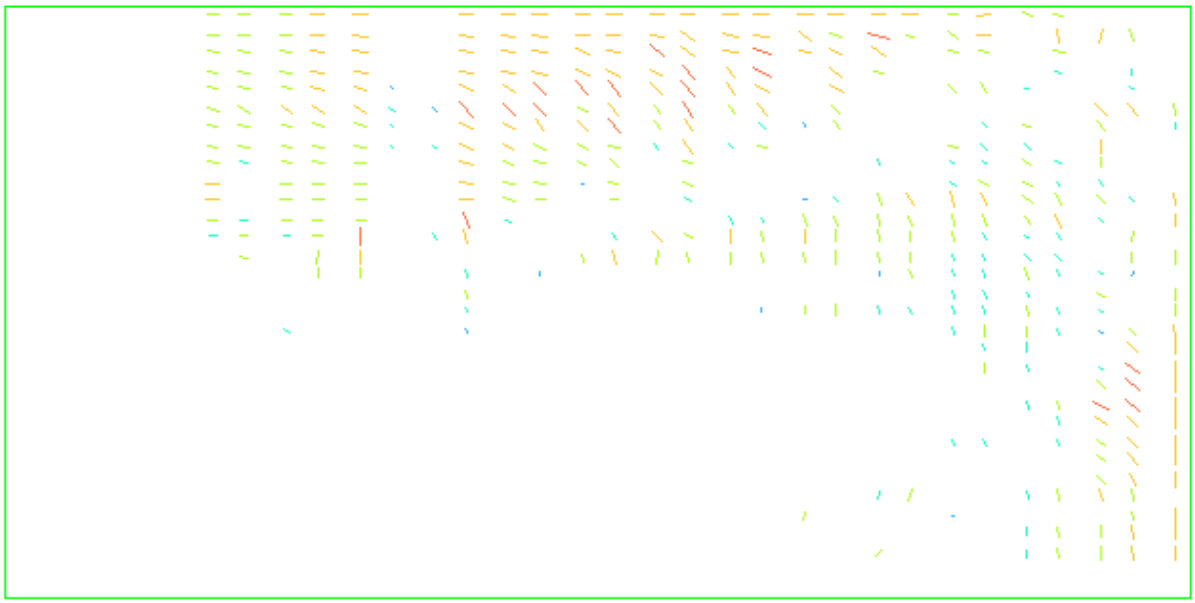


Fig. 3.43 – Padrão de fendilhação num quarto do painel, na superficie superior, aos 50 anos, representado através de vetores normais às segundas fendas, em cada ponto de integração.

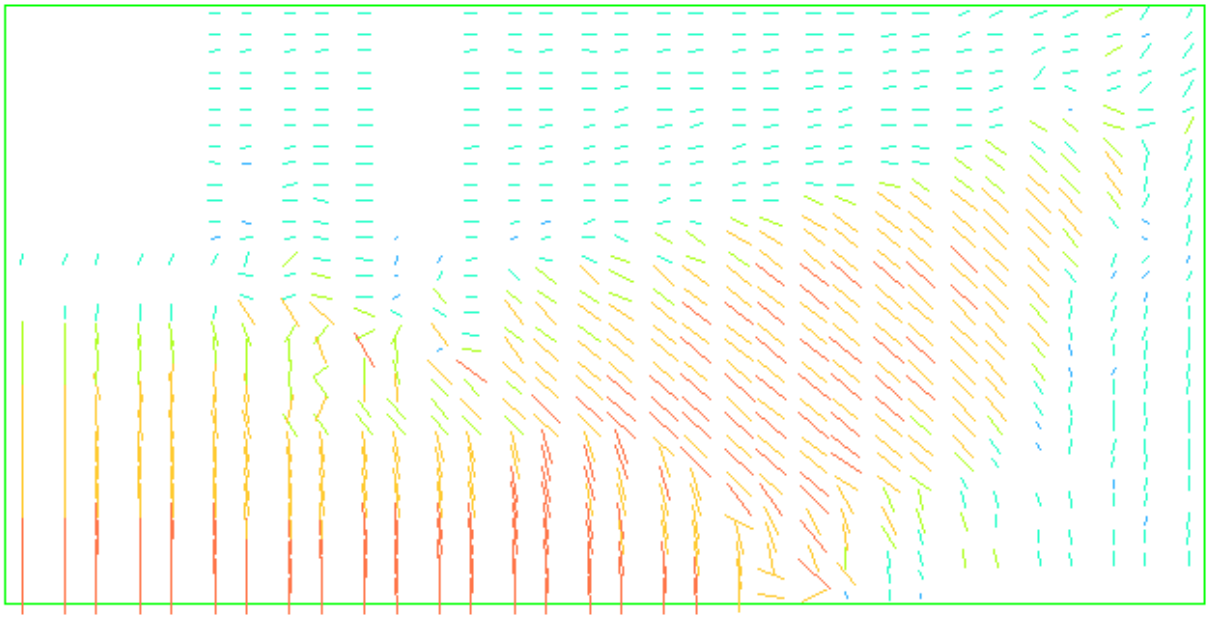


Fig. 3.44 – Padrão de fendilhação num quarto do painel, na superficie inferior, aos 50 anos, representado através de vetores normais às primeiras fendas, em cada ponto de integração.

.

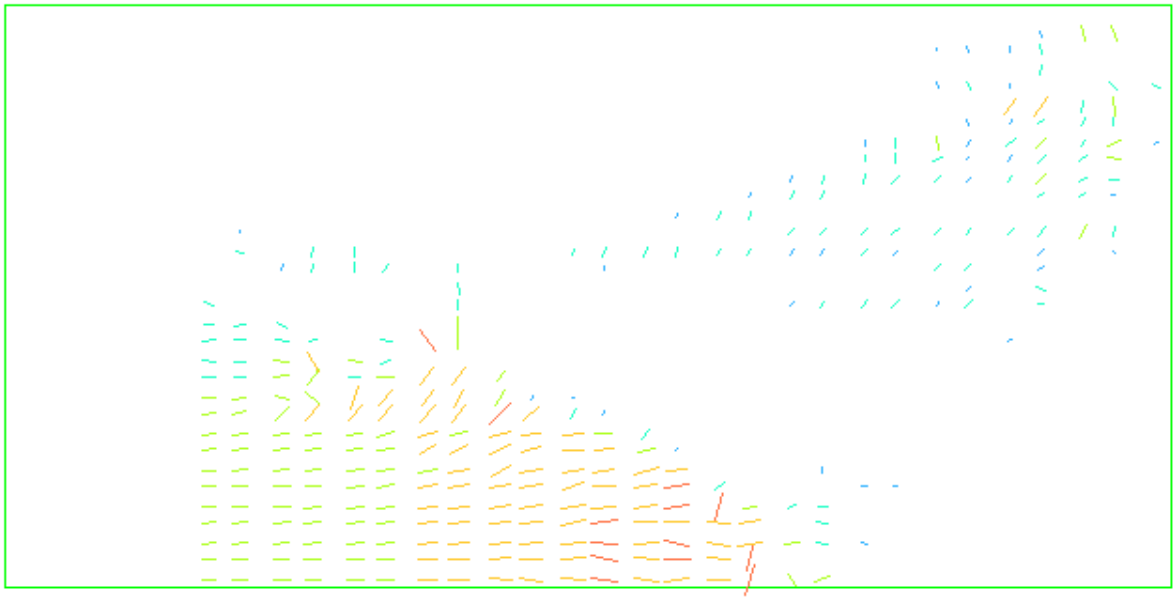


Fig. 3.45 – Padrão de fendilhação num quarto do painel, na superficie inferior, aos 50 anos, representado através de vetores normais às segundas fendas, em cada ponto de integração.

Os esforços por metro, instalados nas zonas do painel onde há maiores aberturas de fendas, para as duas superfícies, encontram-se representados na Fig. 3.46. Como referido anteriormente, a maior fenda da Fig. 3.45 será ignorada para as comparações efetuadas a seguir.

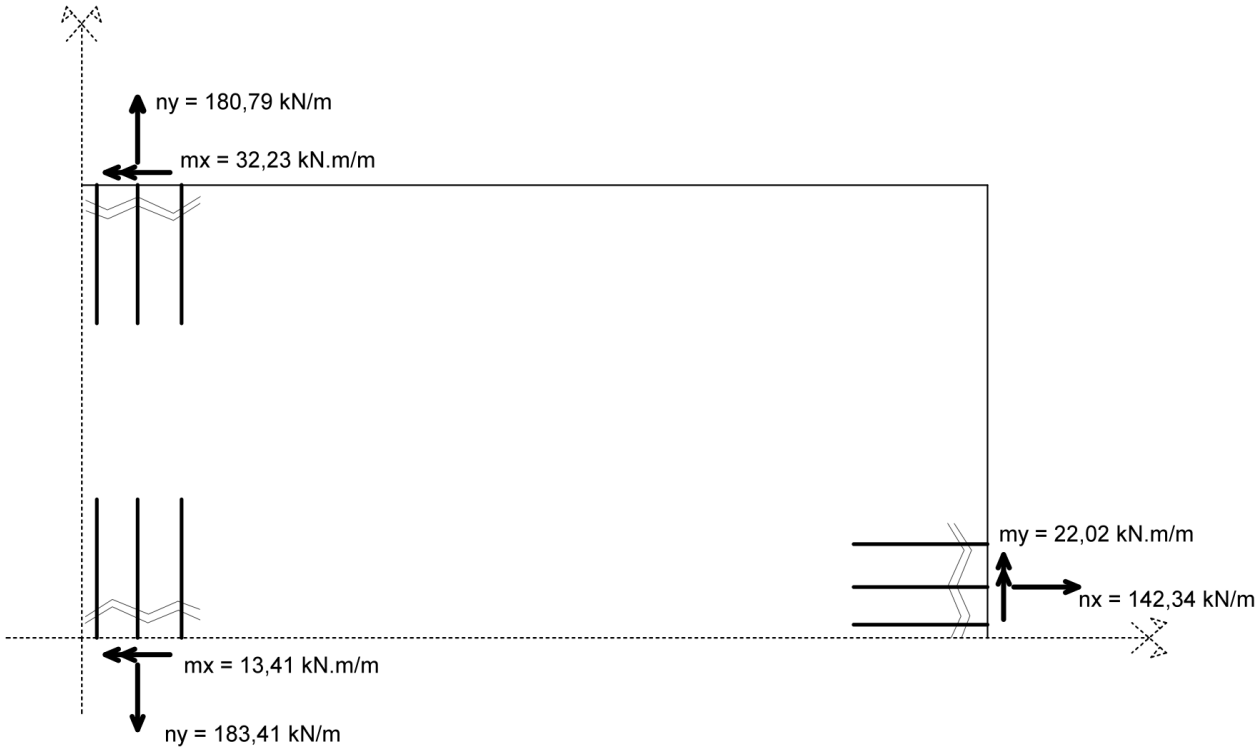


Fig. 3.46 – Esforços por metro, instalados nas zonas do painel onde há maiores aberturas de fendas, obtidos numa análise não-linear.

As Tabelas 3.15 e 3.16 comparam as aberturas de fendas máximas calculadas ao abrigo do MC90, utilizando os esforços da Fig. 3.46, com as maiores aberturas de fendas obtidas na análise não-linear.

Tabela 3.15 – Valores das aberturas de fendas calculadas de acordo com o MC90 (considerando os esforços obtidos na análise não linear) e das maiores aberturas de fendas, obtidas na análise não-linear, na superfície superior.

Superfície Superior									
	n (kN/m)	**N/N_{cr}**	**m (kN.m/m)**	**αe**	**εsm-εcm**	**εsh**	**ls,max (m)**	**wk MC90 (mm)**	**wk DIANA (mm)**
DIR. XX	142,34	0,27	22,02	18	0.000716	0,00052	0,272 m	0,33	0,30
DIR. YY	180,79	0,35	32,23	18	0,000924	0,00052	0,210 m	0,30	0,29

Tabela 3.16 – Valores das aberturas de fendas calculadas de acordo com o MC90 (considerando os esforços obtidos na análise não linear) e das maiores aberturas de fendas, obtidas na análise não-linear, na superfície inferior.

Superfície Inferior								
n (kN/m)	**N/N_{cr}**	**m (kN.m/m)**	**αe**	**εsm-εcm**	**εsh**	**ls,max (m)**	**wk MC90 (mm)**	**wk DIANA (mm)**
183,41	0,35	13,41	18	0,000496	0,00052114	0,295 m	0,30 mm	0,29 mm

3.3.2.5. PAINEL 7×14 M² COM FUNCIONAMENTO UNIDIRECIONAL

Para o painel tratado em 3.3.2.4, a relação entre vãos, l_x/l_y, é dois. Devido a este facto, simulou-se novamente no DIANA o mesmo painel, retirando as armaduras Asx e os devidos apoios, de modo a este puder funcionar apenas numa direção. Os resultados obtidos encontram-se representados nas Figuras 3.47 a 3.49.

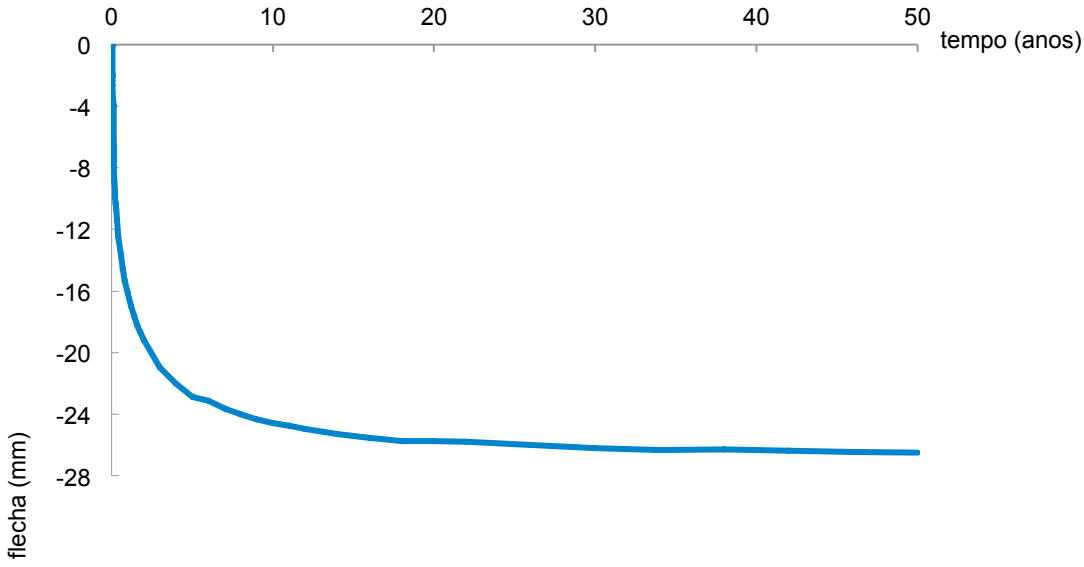


Fig. 3.47 - Flecha obtida ao longo do tempo, na análise não-linear.

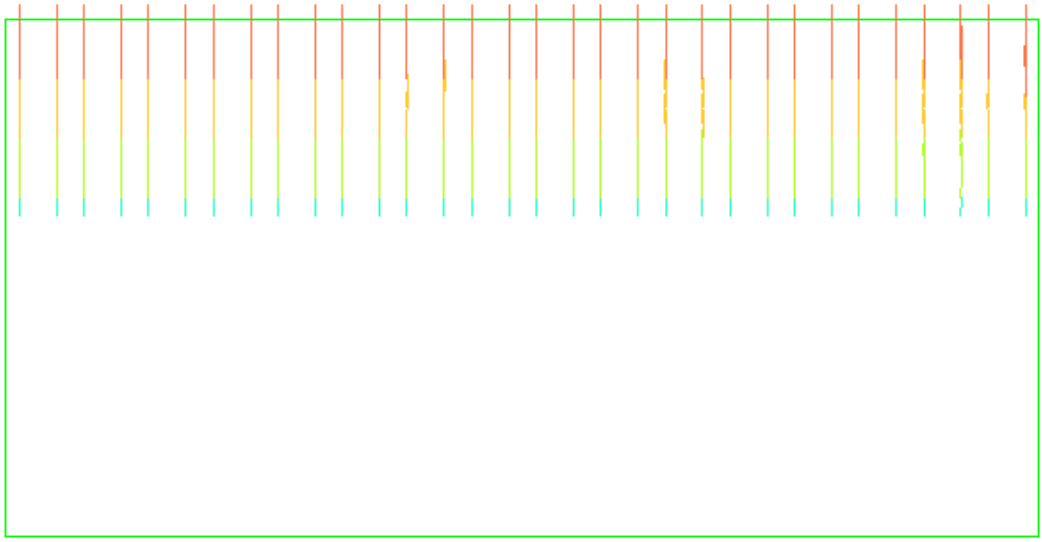


Fig. 3.48 – Padrão de fendilhação num quarto do painel, na superficie superior, aos 50 anos, representado através de vetores normais às fendas, em cada ponto de integração.

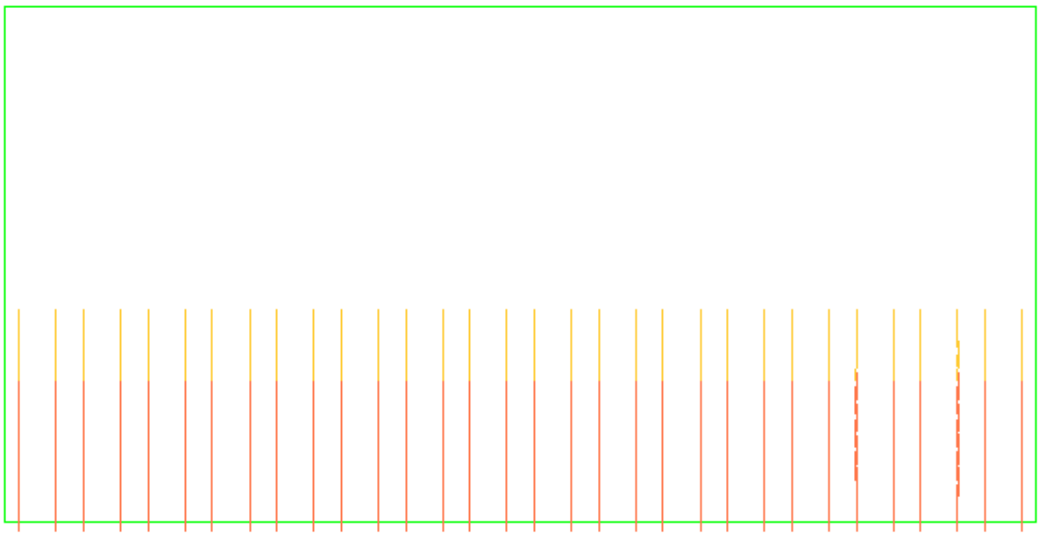


Fig. 3.49 – Padrão de fendilhação num quarto do painel, na superficie inferior, aos 50 anos, representado através de vetores normais às fendas, em cada ponto de integração.

A Tabela 3.17 mostra a comparação dos resultados, do presente painel simulado, com os do painel 7×14 m^2. Note-se, que $N_{médio}$ é o esforço axial médio de cada painel, com direcção paralela ao *eixo yy*.

Tabela 3.17 – Resultados obtidos para os painéis 7×14 m^2 com funcionamento uni-direcional e bi-direcional.

Painel	Flecha (mm)	$N_{médio}/N_{cr}$	w_k (mm)	
			Sup. Superior	Sup. Inferior
Uni-direcional	26,50	0,44	0,28	0,30
Bi-direcional (*)	26,60	0,34	0,29	0,29

(*) Resultados para a banda central com vão de 7 m.

Pelo que se observa da Tabela 3.17, validam-se os resultados obtidos para o painel 7×14 m^2.

3.3.2.3 RECOMENDAÇÕES PRÁTICAS

Pretende-se determinar o valor de *N* a utilizar por um projetista que, combinado com momento fletor elástico, num cálculo de acordo com o MC90, estimar corretamente a quantidade de armadura necessária para garantir $w_k = 0{,}30\ mm$ (essa quantidade de armadura é a que foi obtida, neste trabalho, recorrendo às análises não lineares). A Fig. 3.50 esquematiza o processo adotado.

$$\begin{cases} A_S^{DIANA} \\ M_{CQP}^{Elast.} \\ N = ? \end{cases} \overset{MC90}{\Longrightarrow} w_k = 0{,}30\ mm$$

Fig. 3.50 – Condição utilizada para determinar o esforço axial a combinar com o momento fletor elástico, de forma a obter w_k=0.30 mm.

Usou-se os momentos elásticos das tabelas de Montoya (Montoya J., 2010). A Tabela 3.18 mostra os resultados obtidos para os diversos painéis.

Tabela 3.18– Esforços axiais, que deverão ser combinados com os momentos fletores elásticos, no cálculo da abertura da fenda, para obter w_k=0,30 mm, com a solução de armaduras obtidas na análise não-linear.

Painel (m^2)	**Direção**	$M_{CQP}^{Elast.}/_m$ **(kN.m/m)**		$N/_m$ **(kN/m)**		$N/_{N_{cr}}$ **(%)**	
		Apoio	**Meio-vão**	**Apoio**	**Meio-vão**	**Apoio**	**Meio-vão**
7×7	**XX ou (YY)**	20,14	8,14	177,92	337,50	34	65
7×10,5	**XX**	22,46	6,07	94,80	265,61	18	51
	YY	29,44	13,68	202,78	180,32	39	35
7×14	**XX**	22,46	3,88	72,28	261,67	14	50
	YY	32,54	15,87	164,62	138,06	32	27

Desta forma, é possível fazer um dimensionamento das armaduras sem recorrer a uma análise não linear.

3.3.2.6 CONCLUSÕES

O presente capítulo pretendeu estudar o comportamento de painéis encastrados nos seus bordos, com geometrias representativas. Devido ao efeito de retração e de cargas atuantes, os painéis estão sujeitos a um esforço axial de tração, combinado com um momento fletor. Estes esforços têm de ser tomados em conta para o dimensionamento da armadura. Para proceder à análise não-linear, conclui-se que o tamanho da malha influenciava os resultados obtidos. A armadura obtida através desta análise, de forma a obter w_k=0,30 mm (limite máximo exigido pelo EC2), é inferior à exigida para satisfazer ELS, (que visa cumprir o critério de deformação e fendilhação, assumindo N=N_{cr}), sendo cerca de 80% desta para o painel 7×7 m^2, e 60% a 90% desta, para os painéis 7×10,5 m^2 e 7×14 m^2. As armaduras exigidas para cumprir o ELU não são condicionantes.

Nos diversos painéis, o esforço axial instalado, apesar de variar ao longo do tempo e ao longo do desenvolvimento do painel, encontra-se limitado: 30% a 60% do N_{cr}, independentemente do tamanho do vão. O esforço axial que está instalado nas zonas onde abrem as maiores fendas assume um valor entre 30% a 35% do N_{cr}, com excepção da zona onde as maiores fendas estão rodadas a 45° (superfície inferior do painel 7×7 m^2), onde o esforço axial é 50% do N_{cr}.

A redistribuição dos momentos fletores, implica uma transferência de momento fletor do apoio para o meio-vão, no painel 7×7 m^2, e o uma transferência de momento fletor do meio-vão para o apoio, nos painéis 7×10,5 m^2 e 7×14 m^2.

Os painéis com diferentes vãos, 7×10,5 m^2 e 7×14 m^2, têm um comportamento muito semelhante, pelo que se conclui não ser preciso analisar painéis com relações de vãos intermédias.

4

CONCLUSÕES E DESENVOLVIMENTOS FUTUROS

4.1. CONCLUSÕES

A presente dissertação pretende contribuir para a melhor compreensão do efeito associado à deformação imposta pela retração do betão, em estruturas laminares, nomeadamente nas lajes maciças bi-direcionais. Através de uma análise não-linear, recorrendo a um programa de elementos finitos, foi possível verificar que fica instalado na laje um esforço axial de tração, quando as lajes maciças estão restringidas axialmente, sendo este menor do que o esforço axial de fendilhação, N_{cr}. A armadura necessária para garantir uma abertura máxima de fendas igual a 0,30 mm é, portanto, menor do que aquela que seria estimada se fosse considerado um esforço axial igual a N_{cr}, nos cálculos baseados no Eurocódigo 2 ou no Model Code 90.

Numa primeira fase do trabalho, procedeu-se ao estudo do comportamento do betão não fendilhado e do seu comportamento após a fissuração. No betão não fendilhado, discutiram-se os fenómenos de retração e fluência enquanto que no betão fendilhado, estudou-se como se processa a retenção de trações no betão simples, *tension softening*, e no betão armado, *tensions stiffening*. Concluiu-se que, para modelar adequadamente estes efeitos numa análise não linear, recorrendo ao *software* DIANA, foi necessário recorrer ao modelo de fendilhação de múltiplas fendas fixas com decomposição de extensões. Devido à consideração do efeito de *tension stiffening*, não foi necessário usar um modelo de aderência entre os materiais aço e betão. A escala de tempo real, contada a partir da betonagem, é diferente da escala de tempo simulada no *software* DIANA, pelo que se teve de empregar os conceitos *Curage* e *Aging* (aspetos específicos do *software* empregue).

Para perceber o comportamento de uma laje maciça axialmente restringida, estudou-se uma laje típica de parques de estacionamento, limitada por paredes de elevada rigidez. Optou-se por estudar painéis encastrados nos bordos, simulando painéis interiores de uma laje contínua, com relações entre vãos representativas. Para modelar corretamente estes painéis numa análise não-linear, conclui-se que o elemento finito de casca com a designação *CQ40L*, disponibilizado pelo software utilizado, é adequado. Trata-se de um elemento de 8 nós, que permite a discretização da espessura da laje em camadas de diferentes espessuras. O procedimento de análise foi inicialmente testado através de um exemplo de validação, tomando-se como base de comparação um exemplo sobre lajes unidirecionais, estudado na dissertação de Carvalho (2013). Depois de definido o elemento finito a adotar na análise não-linear, analisou-se a influência do tamanho da malha sobre os resultados. Conclui-se que o tamanho do elemento finito influencia os resultados finais. Concluiu-se, de entre as hipóteses testadas, a dimensão mais adequada para o tamanho do elemento finito é a que corresponde a uma malha com maior número de elementos finitos. Posteriormente, idealizou-se e validou-se um método iterativo que

permitisse determinar iterativamente (com um número reduzido de iterações), a quantidade de armaduras necessária para garantir uma abertura máxima de fendas, com o valor de 0,30 mm. Concluiu-se que o método desempenhou adequadamente o papel para o qual foi idealizado.

Por fim, foi realizada a análise não-linear, recorrendo ao *software* DIANA, de painéis com a seguinte geometria em planta: 7×7 m^2, 7×10,5 m^2 e 7×14 m^2. Concluiu-se que os painéis com dimensões 7×10,5 m^2 e 7×14 m^2 têm um comportamento muito semelhante. Para o painel 7×7 m^2, verificou-se que a armadura obtida na análise é cerca de 80% daquela que seria quantificada se, no cálculo da abertura de fendas, fosse considerado um esforço axial de tração igual a N_{cr}. No caso dos painéis 7×10,5 m^2 e 7×14 m^2, essa percentagem toma valores entre 60% e 90% (podendo ser este valor discutível). Verifica-se que o esforço axial nas lajes, a longo prazo, é de 30% a 60% do valor de N_{cr}. Nas zonas onde ocorrem as maiores aberturas de fendas, esse esforço axial toma valores de 30% a 35% de N_{cr}, exceto nos casos em que as fendas estão rodadas 45º relativamente aos bordos da laje (superfície inferior do painel 7×7 m^2). Neste caso, o esforço axial é igual a 50% do valor de N_{cr}.

4.2. DESENVOLVIMENTOS FUTUROS

Tendo em conta os aspetos que não puderam ser tratados na presente dissertação, aconselham-se os seguintes desenvolvimentos futuros, para dar seguimento à mesma:

- comparação dos resultados obtidos na presente dissertação com os resultados de análises considerando modelos de aderência aço/betão;
- estudo de painéis com diferentes configurações estruturais;
- estudo do comportamento, após a fendilhação, de uma laje vigada, através da modelação integral da mesma;
- estudo de lajes fungiformes e aligeiradas, restringidas axialmente, sujeitas a ações verticais.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

(1985), *British Standard Structural use of Concrete*

(1991), *CEB (1993) CEB-FIP Model Code 1990*

(2012), *Transparências das Aulas Teóricas, Estruturas de Betão,* Universidade do Porto

CEN (2004), *EN 1992-1-1-Eurocódigo 2: Projecto de estruturas de betão*
Parte 1-1: Regras gerais e regras para edifícios

CEN, Eurocódigo 0 - Bases para o projecto de estruturas

Azevedo, A. (2003), *Método dos Elementos Finitos* U. Porto, 1ªEdição

DIANA Manual Release 9.4.4 Delf (2012), Netherlands

Bazant , Z. P. and K.-L. Liu (1985). "*Random creep and shrinkage in structures: sampling.*" Journal of Structural Eng. ASCE Vol. 111(Nº 5): 1113-1134.

Coutinho, A. S. and A. Gonçalves (1994), *Fabrico e propriedades do betão*, Secondary Coutinho, A. S. and A. Gonnçalves, Conference Location

Favre, R., et al. (1997). "*Dimensionement des structures en béton. Aplitude au service et elements de structures.*"

H., Barros and Figueiras J. *Tabelas e Ábacos de Dimensionamento de Secções de Betão Solicitadas à Flexão e a Esforços Axiais Segundo o Eurocódigo 2,*

Carvalho J., (2013), *Estudo da Fendilhação em Lajes Restringidas, Devida ao Efeito Conjunto da Retração e das Ações Distribuidas no Piso*, Dissertação de Mestrado, Universidade do Porto

Câmara, J. and Figueiredo, C. (2012), *Concepção de Edifícios com Grande Área de Implantação* Encontro Nacional de Betão Estrutural,

Câmara J., and Luís. R. (2006), *Structural Response and Design Criteria for Imposed Deformations Superimposed to Vertical Loads Effects*. Fédération Internationate du Béton, Session 3 - Modelling and design

Leitão, L. (2011), *Análise dos Efeitos das Deformações Impostas em Estruturas de Betão Armado*, Dissertação de Mestrado, Universidade do Porto

Messeguer, A. G., "*Jiménez Montoya Hormigón Armado*" 15º edición Gustavo Gili.

Regulamento de Segurança e Ações para Estruturas de Edifícios e Pontes, Porto Editora

Recommendations, FIB. (1999). "*Pratical Design of Structural Concrete.*"

Rots, J. G. and J. Blaauwandraad (1989). "*Crack models for concrete: Discrete or smeared? Fixed, multi-directional or rotating?*" Heron Vol. 34(Nº 1).

Sousa, C. F. F. (2004), *Continuidade estrutural em tabuleiros de pontes construídos com vigas pré-fabricadas. Soluções com ligação em betão armado*, Dissertação de Mestrado, Universidade do Porto