

Estudo numérico do comprimento de entrada para escoamentos de fluidos newtonianos e viscoelásticos entre placas paralelas

Ricardo Miguel Sousa Barbosa

Relatório do Projeto Final / Dissertação do MIEM

Orientador na FEUP: Prof. Fernando Pinho

Coorientador na FEUP: Dr. Alexandre Afonso



FEUP

**Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto
Mestrado Integrado em Engenharia Mecânica**

Janeiro 2012

À minha Família

Resumo

Neste trabalho, procedeu-se ao estudo numérico do cálculo do comprimento de entrada entre placas paralelas para escoamentos de fluidos newtonianos e para uma classe de fluidos não-newtonianos, que se designa de fluidos viscoelásticos. Relativamente ao escoamento de fluidos viscoelásticos estudou-se a influência do número de elasticidade (El) e da razão de viscosidades (β) entre um fluido viscoelástico e newtoniano. Para este estudo utilizaram-se os modelos constitutivos UCM e Oldroyd-B.

Começou-se pela validação do procedimento do cálculo numérico e também pela escolha da série de malhas a utilizar no cálculo do comprimento de entrada para o escoamento de fluidos newtonianos e fluidos viscoelásticos. Para isso calculou-se o comprimento de entrada da velocidade para um número de Reynolds igual a 0.1 para os fluidos newtonianos, pois para estes fluidos existem resultados disponíveis na literatura que permitem assim validar os resultados obtidos.

De seguida, calculou-se o comprimento de entrada da velocidade e da tensão de corte para os fluidos newtonianos e para uma gama de números de Reynolds entre 0 e 100. Foram apresentados resultados do comprimento de entrada da velocidade e da tensão de corte para as três malhas da série escolhida, e as correlações obtidas pelo ajuste aos valores extrapolados do comprimento de entrada para a velocidade e tensão de corte. Os resultados obtidos são bastante precisos, pois o erro relativo calculado para a malha com maior refinamento da série de malhas escolhida é aproximadamente 0.17% para os comprimentos de entrada da velocidade e de aproximadamente 0.068% para os comprimentos de entrada da tensão de corte. Verificou-se também o aparecimento de uns picos de velocidade (overshoots) junto há parede das placas paralelas nos perfis de velocidade para os números de Reynolds mais elevados.

Para o escoamento de fluidos viscoelásticos calculou-se o comprimento de entrada da velocidade, da tensão normal e de corte para o caso de inércia nula (creeping-flow), para os números de elasticidade 0.1, 1 e 10 e para as razões de viscosidades 1/9 e 0.5. Foram também apresentadas correlações que permitem calcular o comprimento de entrada da velocidade, da tensão normal e de corte em função do número de Débora. Constatou-se que o comprimento de entrada para a velocidade apresenta um comportamento não monótono e para números de Débora aproximadamente igual a 0.2 este apresenta uma bifurcação. Para valores altos da elasticidade é necessária uma menor gama de números de Reynolds, para que se atinja comprimentos de entrada equivalentes, em comparação com valores baixos da elasticidade. Relativamente aos resultados obtidos para a tensão normal e de corte, verifica-se que o comprimento de entrada da tensão normal apresenta um comportamento não monótono, pois este começa por diminuir até um número de Deborá igual a 0.05 voltando a aumentar de seguida. Para a tensão de corte tal como obtido para os fluidos newtonianos, o comprimento de entrada aumenta com o aumento do número de Reynolds e de Débora.

Do ponto de vista de engenharia para fluidos newtonianos é necessário aproximadamente um comprimento de entrada da conduta de $0.0162H*Re$, para que o escoamento se torne completamente desenvolvido. Para os fluidos viscoelásticos verifica-se que esse comprimento da conduta é aproximadamente $6.5H*De$.

Numerical study of the development length for Newtonian and viscoelastic fluids flow between parallel plates

Abstract

In this work we studied the numerical calculation of the development length for Newtonian fluid flow and for a class of non-Newtonian fluids, referred as viscoelastic fluids, in a flow between parallel plates. For viscoelastic fluids we analysed the influence of the number of elasticity (El) and viscosity ratio (β) between a Newtonian and viscoelastic fluid. To accomplish this study we used the constitutive UCM and Oldroyd-B models.

First, we started by validating the numerical calculations and also by selecting the mesh series to calculate the development length of the flow of Newtonian and viscoelastic fluids. We calculated the development length for Newtonian fluids and for Reynolds number equals a 0.1 because for these fluids there are some data available in literature that allows the validation of the obtained results.

Secondly, we calculated the development length for the velocity and the shear stress for Newtonian fluids, in the range of Reynolds numbers between 0 and 100. We present the results of the development length obtained in the three meshes, and the correlations obtained by adjusting the values extrapolated of the development length for the velocity and shear stress. The results are quite accurate because the relative error calculated for the refined mesh is approximately 0.17% for the velocity development length and approximately 0.068% for the shear stress. There was the appearance of a velocity overshoot near the wall of parallel plates for higher Reynolds numbers.

For the viscoelastic fluids we calculated the velocity, normal and shear stresses development lengths for case of zero inertia, for elasticity's numbers 0.1, 1 and 10, and for a viscosity ratio of 1/9 and 0.5. The correlations for the velocity, normal and shear stresses development lengths as function the number of Deborah were also presented. It was found that the development length for the velocity has a non-monotonic behaviour, and for Deborah number higher than 0.2, this presents a bifurcation. This study allowed us to conclude that we reach the same development length with a smaller Reynolds range, due to elasticity effects. Relativity the results obtained for normal and shear stresses development lengths, the length for the normal stress present a non-monotonic behaviour, because it start decreasing for low Deborah numbers, then increasing for higher Deborah numbers. For the shear stress, the development length increases for higher Deborah and Reynolds number, as observed for Newtonian fluids.

From the engineering point of view, the required development length necessary to the flow become fully developed is approximately $0.0162H*Re$. For viscoelastic fluids, the required development length increases to approximately $6.5H*De$.

Agradecimentos

Terminada esta etapa importante da minha vida, resta-me agradecer a todos os que me ajudaram a tornar a realização deste trabalho possível.

Ao Professor Fernando Pinho, o meu muito obrigado por me ajudar a tornar este trabalho possível e por toda a orientação prestada.

Ao Dr. Alexandre Afonso, o meu maior agradecimento por toda a disponibilidade prestada, pelo apoio incondicional e por todo o conhecimento que me transmitiu ao longo da realização deste trabalho. A ele o meu muito obrigado!

Não posso esquecer também todos os professores que me acompanharam ao longo do meu curso, que de uma maneira diferente, mas não menos importante, também me ajudaram a tornar a conclusão deste projeto numa realidade.

Por fim e muito importante, resta-me agradecer aos meus amigos e à minha família, especialmente aos meus Pais, que me apoiaram muito durante todos estes anos e sem a ajuda deles isto não seria possível.

Índice de Conteúdos

1	Introdução	1
1.1	Enquadramento do tema e sua motivação	1
1.2	Fluidos viscoelásticos	1
1.3	Objetivo e Metodologia	3
1.4	Organização e Estrutura da Tese	4
2	Revisão Bibliográfica	5
2.1	Comprimento de entrada para fluidos newtonianos	5
2.2	Comprimento de entrada de fluidos não-newtonianos	8
2.3	Comprimento de entrada de fluidos viscoelásticos	11
2.4	Conclusão	12
3	Equações Fundamentais	13
3.1	Introdução	13
3.2	Equações governantes de um escoamento	13
3.3	Caracterização reológica dos fluidos não-newtonianos	14
3.4	Modelos constitutivos para fluidos viscoelásticos	16
4	Método Numérico	19
4.1	Introdução ao método dos volumes finitos	19
4.2	Discretização das equações	20
4.3	Procedimento do cálculo	21
4.4	Condições de fronteira	22
5	Validação do Procedimento de Cálculo e Teste de Malhas	23
5.1	Introdução	23
5.2	Malhas uniformes	25
5.3	Malhas não uniformes na direção x	26
5.4	Malhas não uniformes com dois blocos	28
5.5	Malhas simétricas e não uniformes em x e y	29
5.6	Conclusão	32
6	Fluidos newtonianos	35
6.1	Introdução	35
6.2	Correlação para o cálculo do comprimento de entrada baseado na velocidade	35
6.3	Correlação para o cálculo do comprimento de entrada baseada na tensão de corte	38
6.4	Desenvolvimento dos perfis da velocidade e da tensão de corte	40
6.5	Conclusão	43
7	Fluidos viscoelásticos	45
7.1	Introdução	45
7.2	Regularização da velocidade de entrada	46
7.3	Estimativa do erro	47
7.4	Efeito da elasticidade (inércia nula, creeping flow)	49
7.5	Efeito da Inércia (variação do número de elasticidade (El))	58
7.6	Efeito da viscosidade do solvente	62

7.7 Efeito das condições de entrada	67
7.8 Conclusão.....	69
8 Conclusão.....	71
8.1 Conclusões e sugestões para trabalhos futuros	71
9 Bibliografia	73
Anexo A.....	77
Anexo B.....	79
Anexo C.....	81
Anexo D.....	83
Anexo E.....	85
Anexo F	89

Índice de Figuras

Figura 1.1- Experiência que contribui para a explicação do comportamento de um fluido viscoelástico num escoamento de corte simples. Imagem adaptada de Alves (2004)	2
Figura 1.2-“Efeito de Weissenberg”. Boger e Walters (1993)	3
Figura 2.1-Perfil de velocidades entre placas paralelas.....	5
Figura 2.2- Valor da constante C obtido da relação entre a razão do comprimento de entrada e o raio do tubo e o número de Reynolds. Imagem adaptada de Durst et al. (2005).....	7
Figura 2.3- Variação do comprimento de entrada para fluidos newtonianos e com índices lei de potência diferentes versus Re_{MR} . Imagem adaptada de Poole e Ridley (2007)	10
Figura 2.4-Variação do comprimento de entrada para vários fluidos Bingham. Imagem adaptada de Poole e Chhabra (2010)	11
Figura 2.5- Resultados experimentais obtidos para fluidos viscoelásticos por Brocklobank e Smith (1970).	12
Figura 3.1-E escoamento de Couette entre 2 placas paralelas. Imagem adaptada de Alves (2004)	15
Figura 3.2-Modelo mecânico análogo a um fluido de Maxwell. Imagem adaptada de Alves (2004)	16
Figura 3.3-Modelo mecânico análogo ao modelo Oldroyd-B. Imagem adaptada de Alves (2004)	17
Figura 4.1-Volume de controlo elementar. Imagem adaptada de A. S. Cavadas (2008).	19
Figura 5.1- Geometria do escoamento.....	23
Figura 5.2-Malha M_9	25
Figura 5.3-Malha M_9 com um $f_x=1.00496$	27
Figura 5.4-Malha M_{12}	28
Figura 5.5-Malha M_{15}	30

Figura 5.6-Malha M_{18}	31
Figura 5.7- Perfis da a) velocidade ao longo de x; b) velocidade desenvolvido ao longo de y e c) tensão de corte obtidos nas malhas M_{16} , M_{17} , M_{18} para $Re=0.1$ e fluido newtoniano.....	33
Figura 6.1-Comparação entre a curva da correlação e os valores do comprimento de entrada extrapolados da velocidade com uma correlação existente na literatura.....	38
Figura 6.2-Comparação entre os comprimentos de entrada baseados na tensão de corte e na velocidade.....	40
Figura 6.3- Desenvolvimento da velocidade axial para diferentes alturas das placas paralelas para a) $Re=0.001$, b) $Re=1$ c) $Re=10$ e d) $Re=100$	41
Figura 6.4- Desenvolvimento do perfil da velocidade axial para a) $Re=0.001$, b) $Re=1$ c) $Re=10$ e d) $Re=100$	42
Figura 6.5- Desenvolvimento do perfil da tensão de corte para a) $Re=0.001$, b) $Re=1$ c) $Re=10$ e d) $Re=100$	43
Figura 7.1-a) Perfis de velocidade regularizados (R_1 , R_2 , R_3), b) Evolução temporal de L_E obtido com o modelo UCM para $De=1$, $Re\approx 0$ e para a malha M_{16} ao longo de uma simulação numérica	47
Figura 7.2- Perfis da a) tensão normal obtidos com o modelo UCM para valores diferentes do número de Débora ($De=0.1$, 0.5 e 1) em condições de inércia desprezável ($Re\approx 0$) e b) velocidade e tensão de corte.	48
Figura 7.3-Comprimento de entrada da velocidade em função do número de Débora para UCM e Oldroyd-B.....	51
Figura 7.4-Desenvolvimento da velocidade axial para vários números de Débora e para os casos a) UCM, b) $\beta=1/9$, c) $\beta=0.5$	51
Figura 7.5- Desenvolvimento do perfil da velocidade axial para $De=1$ e para os casos a) UCM, b) $\beta=1/9$, c) $\beta=0.5$	52
Figura 7.6- Comprimento de entrada em função do número de Débora para os casos UCM, $\beta=1/9$, $\beta=0.5$ e para a) a tensão normal, b) a tensão de corte	55
Figura 7.7- Desenvolvimento do perfil da tensão normal para $De=1$ e para os casos a) UCM, b) $\beta=1/9$, c) $\beta=0.5$	56
Figura 7.8- Desenvolvimento do perfil da tensão de corte para $De=1$ e para os casos a) UCM, b) $\beta=1/9$, c) $\beta=0.5$	57
Figura 7.9- Comprimento de entrada da velocidade para os números de elasticidade 0.1 , 1 e 10 a) em função do número de Reynolds b) em função do número de Débora	59
Figura 7.10-Desenvolvimento da velocidade axial segundo a direção longitudinal para a) $El=0.1$ b) $El=1$ c) $El=10$	60
Figura 7.11- Comprimento de entrada em função do número de Reynolds para a) a tensão normal, b) a tensão de corte.....	62
Figura 7.12- Comprimento de entrada em função do número de Débora para a) a tensão normal, b) a tensão de corte.....	62

Figura 7.13-Comparação do comprimento de entrada da velocidade entre $\beta=1/9$ e 0.5, para três diferentes valores do número de elasticidade em função do a) número de Reynolds b) número de Débora 63

Figura 7.14- Desenvolvimento da velocidade axial para $\beta=1/9$ e para a) $El=0.1$ b) $El=1$ c) $El=10$ 64

Figura 7.15- Desenvolvimento da velocidade axial para $\beta=0.5$ e para a) $El=0.1$ b) $El=1$ c) $El=10$ 65

Figura 7.16- Comparação do comprimento de entrada da tensão normal entre $\beta=1/9$ e 0.5, para três diferentes valores do número de elasticidade em função do a) número de Reynolds b) número de Débora 66

Figura 7.17- Comparação do comprimento de entrada da tensão de corte entre $\beta=1/9$ e 0.5, para três diferentes valores do número de elasticidade em função do a) número de Reynolds b) número de Débora 66

Figura 7.18-Geometria da contração 1:4 (retirado de Afonso et al. 2011)..... 67

Figura 7.19- Perfis de entrada para o escoamento de um fluido Oldroyd-B com $\beta=1/9$ e condições de inércia desprezável: a) u , b) v c) τ_{xx} d) τ_{xy} e e) τ_{yy} (retirado de Afonso et al 2011). 68

Figura 7.20- Comparação entre o comprimento de entrada em placas paralelas e numa contração 1:4 para um fluido Oldroyd-B com $\beta=1/9$: a) condições de inércia desprezável e b) $El=1$ e 10 (retirado de Afonso et al 2011). 69

Índice de Tabelas

Tabela 2.1-Sumário de publicações do cálculo do comprimento de entrada em regime laminar para fluidos newtonianos 6

Tabela 2.2- Sumário de publicações do cálculo do comprimento de entrada para fluidos não-newtonianos em tubos, onde se utiliza o modelo lei de potência (power-law) 8

Tabela 5.1-Características das malhas 25

Tabela 5.2-Resultados para $Re=0.1$ obtidos nas malhas completas e uniformes 26

Tabela 5.3-Características das malhas 26

Tabela 5.4- Resultados para $Re=0.1$ obtidos nas malhas completas e não uniformes em x..... 27

Tabela 5.5-Características das malhas M_{10}, M_{11}, M_{12} 28

Tabela 5.6-Resultados para $Re=0.1$ obtidos nas malhas M_{10}, M_{11}, M_{12} 29

Tabela 5.7-Características das malhas M_{13}, M_{14}, M_{15} 29

Tabela 5.8-Resultados para $Re=0.1$ obtidos nas malhas M_{13}, M_{14}, M_{15} 30

Tabela 5.9-Características das malhas M_{16}, M_{17}, M_{18} 31

Tabela 5.10-Resultados para $Re=0.1$ obtidos nas malhas M_{16}, M_{17}, M_{18} 31

Tabela 6.1- Valores do comprimento de entrada da velocidade e dos parâmetros do método de Richardson obtidos para as três malhas e para vários números de Reynolds..... 36

Tabela 6.2- Correlação e coeficientes de ajustes obtidos para os valores do comprimento de entrada extrapolados da velocidade	37
Tabela 6.3- Valores do comprimento de entrada para a tensão de corte (L_{Exxy}) e dos parâmetros do método de Richardson obtidos para as três malhas e para vários números de Reynolds	39
Tabela 6.4- Correlação e coeficientes de ajustes obtidos para o comprimento de entrada da tensão de corte	40
Tabela 7.1- Estudo dos erros relativos obtidos nas simulações com fluidos viscoelásticos	48
Tabela 7.2- Valores do comprimento de entrada para a velocidade obtidos em função do número de Débora	49
Tabela 7.3- Correlação e coeficientes de ajustes obtidos para o comprimento de entrada da velocidade	50
Tabela 7.4- Valores do comprimento de entrada para a tensão de corte (τ_{xy}) e normal (τ_{xx}), obtidos em função do número de Débora	53
Tabela 7.5- Correlação e coeficientes de ajustes obtidos para o comprimento de entrada da tensão normal	54
Tabela 7.6- Correlação e coeficientes de ajustes obtidos para o comprimento de entrada da tensão de corte	54
Tabela 7.7- Valores do comprimento de entrada da velocidade para três diferentes números de elasticidade em função do número de Reynolds e de Débora, para o fluido UCM	58
Tabela 7.8- Valores do comprimento de entrada para a tensão de corte (τ_{xy}) e normal (τ_{xx}), obtidos em função do número de Débora e Reynolds para o fluido UCM	61

Nomenclatura**Símbolos Romanos**

Símbolo	Descrição	Unidade
a	Raio relativo (Modelo de Bingham)	[m]
a_F	Coefficiente das equações na forma discreta	[-]
a_P	Coefficiente central das equações na forma discreta	[-]
Bn	Número de Bingham	[-]
C_i	Coefficientes dos ajustes	[-]
d	Diâmetro	[m]
\mathbf{D}	Tensor velocidade de deformação	[s ⁻¹]
De	Número de Débora	[-]
El	Número de Elasticidade	[-]
F	Caudal mássico	[kg/s]
f_i	Fator de compressão/expansão geométrico	[-]
G	Aceleração da gravidade	[m/s ²]
H	Altura entre placas	[m]
L	Comprimento das placas	[m]
L_E	Comprimento de entrada adimensional para a velocidade	[-]
L_{Eextr}	Comprimento de entrada adimensional extrapolado para a velocidade	[-]
$L_{E_{xx}}$	Comprimento de entrada adimensional para a tensão normal	[-]
$L_{E_{txy}}$	Comprimento de entrada adimensional para a tensão de corte	[-]
$L_{E_{txyextr}}$	Comprimento de entrada adimensional extrapolado para a tensão de corte	[-]
M_i	Malhas	[-]
n	Índice lei de potência (Modelo lei de Potência)	[-]
N_x	Número de células de uma malha segundo x	[-]
N_y	Número de células de uma malha segundo y	[-]
N_1	Primeira diferença de tensões normais	[N/m ²]
N_2	Segunda diferença de tensões normais	[N/m ²]
p	Pressão	[N/m ²]
p_c	Ordem de convergência (extrapolação de Richardson)	[-]
R^2	Coefficiente de determinação	[-]
Re	Número de Reynolds	[-]
r_i	Constantes do perfil de velocidades regularizado	[-]

R_i	Perfil de velocidades regularizado	[-]
S	Termo fonte das equações na forma discreta	[-]
T	Temperatura	[°C]
U	Velocidade axial	[m/s]
U_B	Velocidade à entrada do tubo (Modelo Bingham)	[m/s]
U_{corr}	Valor da velocidade média corrigida	[m/s]
U_i	Velocidade no centro da célula i	[m/s]
v	Velocidade transversal	[m/s]
V_P	Volume de uma célula	[m ³]
W	Largura das placas paralelas	[m]

Símbolos Gregos

Símbolo	Descrição	Unidade
ρ	Massa volúmica do fluido	[kg/m ³]
τ	Tensor das tensões	[N/m ²]
τ_0	Tensão de cedência (Modelo de Bingham)	[N/m ²]
μ_P	Viscosidade Plástica	[N.s/m ²]
$\dot{\gamma}$	Taxa de deformação	[l.s ⁻¹]
η_s	Viscosidade do fluido newtoniano	[N.s/m ²]
η	Viscosidade de corte	[N.s/m ²]
η_0	Viscosidade total (Oldroyd-B)	[N.s/m ²]
Ψ_1	Coefficiente da primeira diferença de tensões normais	[Pa.s ²]
Ψ_2	Coefficiente da segunda diferença de tensões normais	[Pa.s ²]
λ	Tempo de relaxação de Maxwell	[s]
λ_r	Constante do tempo de retardamento	[s]
τ_p	Tensão de origem polimérica	[N/m ²]
τ_s	Tensão de origem puramente viscosa	[N/m ²]
τ_{xy}	Tensão de corte	[N/m ²]
τ_w	Tensão de corte na parede	[N/m ²]
ε_h	Erro da solução calculado na malha mais refinada	[-]
ε_r	Erro relativo	[-]
η_p	Viscosidade do polímero	[N.s/m ²]
χ^2	Variância	[-]

Índices Superiores

Símbolo	Descrição
C	Convectivo
D	Difusivo
n	Passo de integração
T	Transposta
τ	Índice superior da tensão
∇	Derivada convectiva superior

Índices Inferiores

Símbolo	Descrição
$extr$	Extrapolado
F	Célula vizinha da célula P
f	Segundo a direcção da face f
i,j,k	Índice das coordenadas cartesianas
x,y,z	Direcção cartesiana
p	Polímero
P	Célula genérica

Abreviaturas

Símbolo	Descrição
CEFT	Centro de Estudos de Fenómenos de Transporte
UCM	Modelo Convectivo Superior de Maxwell (Upper Convected Maxwell)

1 Introdução

Neste capítulo introdutório começa-se por fazer um enquadramento do tema desta tese, refere-se também a motivação, o objetivo desta tese e a metodologia usada para a resolução do trabalho. Por fim, de uma forma sucinta apresenta-se a estrutura desta tese.

1.1 Enquadramento do tema e sua motivação

A importância do conhecimento do comprimento necessário para o desenvolvimento completo de um escoamento de um fluido newtoniano, i.e., para que o perfil de velocidades não apresente variações na direção axial, tem sido amplamente reconhecido. Não só porque o comprimento de desenvolvimento é de grande aplicação prática no projeto de sistemas de condutas, mas é também importante para cientistas e engenheiros estudarem a transição do escoamento de laminar para turbulento.

Apesar de o estudo para fluidos newtonianos estar bem compreendido, com abundantes correlações disponíveis, para fluidos não-newtonianos a literatura é bastante escassa. Em especial, o estudo do efeito da elasticidade em escoamentos a baixos números de Reynolds é praticamente inexistente. Assim, este trabalho pretende obter resultados do comprimento de entrada em condutas para fluidos viscoelásticos, recorrendo a uma sistemática investigação numérica.

1.2 Fluidos viscoelásticos

Diversas indústrias como a petroquímica, alimentar, dos detergentes, dos plásticos e das tintas utilizam nos seus processos de produção variados fluidos sintéticos que podem ser considerados fluidos não-newtonianos. Assim estas indústrias para otimizar os seus processos de produção necessitam de conhecer como se comportam estes fluidos quando em escoamento. Estes fluidos caracterizam-se por não obedecerem a lei de Newton da viscosidade, ou seja, não apresentam uma relação linear entre a tensão de corte e a taxa de deformação. Logo a aplicação das equações que governam o escoamento de fluidos newtonianos não é possível.

Existem variados tipos de fluidos não-newtonianos, nesta tese vão ser analisados os fluidos viscoelásticos, que se caracterizam por apresentarem simultaneamente um comportamento viscoso e elástico. Devido à combinação da viscosidade e da elasticidade, resulta que os fluidos viscoelásticos apresentam comportamentos inesperados. Existem diversos modelos constitutivos para ajudarem a caracterizar o comportamento destes fluidos.

Uma forma simples de definir estes fluidos é recorrer à seguinte experiência (Figura 1.1): colocar um fluido no espaço entre dois discos paralelos e sobrepostos, e rodar um deles um determinado ângulo. Se o fluido for puramente viscoso, após a rotação do disco este permanecerá imóvel na posição onde a rotação terminou. Caso o fluido seja viscoelástico,

após a rotação do disco, este retrocede parcialmente. Este retrocesso vai depender da elasticidade do fluido. No entanto, caso o disco seja mantido um tempo suficiente para que as tensões tenham tempo de relaxar este não retrocede, pois perdeu-se a memória da posição inicial. Se o fluido for puramente elástico, logo que se termine a rotação do disco, este volta à posição inicial. Assim conclui-se que os fluidos viscoelásticos apresentam um comportamento intermédio entre um fluido puramente viscoso e um fluido puramente elástico, quando sujeitos a deformações.

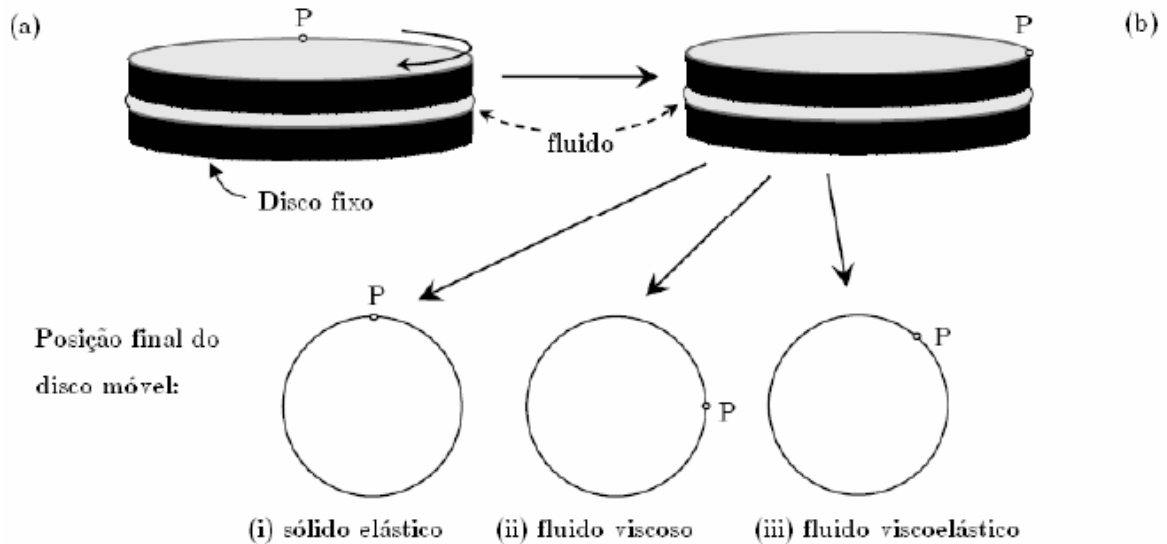


Figura 1.1- Experiência que contribui para a explicação do comportamento de um fluido viscoelástico num escoamento de corte simples. Imagem adaptada de Alves (2004)

Os fluidos poliméricos são um exemplo de fluidos viscoelásticos. Alguns destes fluidos poliméricos apresentam uma viscosidade decrescente com o aumento da taxa de deformação imposta, por isso definem-se de reo-fluidificantes. Outros, os reo-espessantes, apresentam uma viscosidade crescente com o aumento da taxa de deformação. Há ainda um tipo de fluidos poliméricos que apesar de apresentarem características elásticas, apresentam viscosidade constante, e definem-se como fluidos de Boger (1977).

Mas a maior dificuldade em modelar estes fluidos é devido a elevada elasticidade que eles apresentam. Esta capacidade elástica dos polímeros à luz da noção Newtoniana de fluido, apresenta comportamentos contraditórios, tais como o “efeito de Weissenberg”, a “dilatação de jato” e outros documentados em Bird et al. (1987). Estes comportamentos são característicos de fluidos macromoleculares. Pode-se ver na Figura 1.2 o “efeito de Weissenberg”, que se caracteriza por mergulhar um veio na posição vertical em rotação num fluido viscoelástico. Caso fosse um fluido newtoniano, a resposta deste ao movimento do veio seria o seu afastamento em relação ao eixo de rotação. No entanto, o que se observa é que o fluido se eleva a uma altura apreciável.

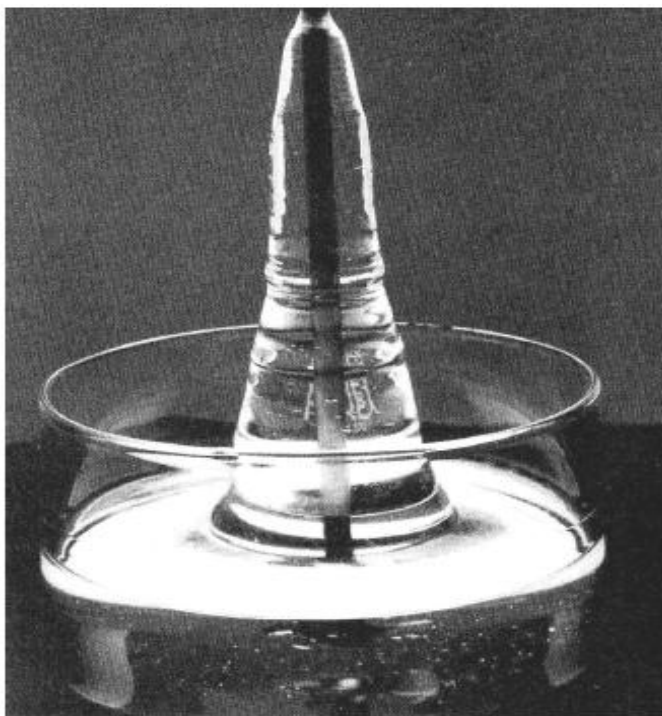


Figura 1.2-“Efeito de Weissenberg”. Boger e Walters (1993)

Este efeito deve-se ao estiramento circunferencial das macromoléculas poliméricas, de que resulta num efeito semelhante a uma manga elástica capaz de forçar o fluido a elevar-se.

Como já foi referido, uma das características do escoamento de fluidos viscoelásticos em que existe pouco conhecimento é o comprimento de entrada. Esta é a motivação para que se apresente este trabalho, que consiste no estudo do comprimento de entrada de fluidos viscoelásticos em regime laminar. Também não se podia deixar de dizer que a possibilidade de se poder contribuir para uma melhor compreensão das características destes fluidos pesou na motivação de se efetuar este trabalho.

1.3 Objetivo e Metodologia

O objetivo desta tese é o estudo numérico do comprimento de entrada em placas paralelas dos fluidos newtonianos e de uma classe de fluidos não-newtonianos, que são os fluidos viscoelásticos.

O método de estudo desta tese é a simulação numérica, para isso foi utilizado um programa desenvolvido por o Centro de Estudos de Fenómenos de Transporte (CEFT). Inicialmente procedeu-se ao estudo da validação do procedimento do cálculo numérico e à escolha da série de malhas que iriam ser usadas no estudo do comprimento de entrada. Para isso criaram-se vários tipos de malhas, e calculou-se o comprimento de entrada para fluidos newtonianos, pois para estes fluidos existem dados disponíveis, e com ajuda do método de extrapolação de Richardson (1908), que permite obter a ordem de convergência do método numérico (p_c), consegue-se ter uma aferição da fiabilidade dos resultados obtidos através da simulação numérica.

Depois deste estudo inicial e através da utilização da série de malhas escolhida procedeu-se ao cálculo do comprimento de entrada para os fluidos newtonianos e para os fluidos viscoelásticos, onde para estes fluidos se utilizaram dois modelos constitutivos: UCM e Oldroyd-B.

1.4 Organização e Estrutura da Tese

Esta tese é constituída por sete capítulos. No segundo capítulo é apresentada uma revisão bibliográfica do estudo do comprimento de entrada para fluidos newtonianos e não-newtonianos.

No terceiro capítulo são apresentadas as equações governativas dos escoamentos, bem como a caracterização reológica dos fluidos não newtonianos e por fim caracterizam-se os dois modelos constitutivos utilizados nesta tese. No quarto capítulo é feita uma breve descrição do método numérico e também é apresentado a discretização das equações governativas do escoamento.

No quinto capítulo é feita a validação do procedimento do cálculo numérico e é escolhida a série de malhas a utilizar no cálculo numérico do comprimento de entrada para fluidos newtonianos e viscoelásticos.

No sexto capítulo são apresentados os resultados do comprimento de entrada para o perfil da velocidade axial e tensão de corte dos fluidos newtonianos. No sétimo capítulo são apresentados os resultados dos fluidos viscoelásticos para o comprimento de entrada do perfil da velocidade axial, da tensão normal e da tensão de corte.

Por fim, no oitavo capítulo é apresentada a conclusão final deste trabalho e sugestões para trabalhos futuros.

2 Revisão Bibliográfica

No presente capítulo são apresentados alguns estudos associados à determinação do comprimento de entrada de escoamentos de fluidos não-newtonianos e também de fluidos newtonianos.

2.1 Comprimento de entrada para fluidos newtonianos

Quando um fluido viscoso entra num canal, o perfil uniforme de velocidade é gradualmente distribuído para o eixo central devido as tensões de corte que provocam um desacelaramento junto a parede do canal. A partir de um certo comprimento do canal o perfil de velocidades não muda de forma, tornando-se parabólico, e assim considera-se que o fluido está completamente desenvolvido (Figura 2.1). O comprimento para o qual isso acontece é denominado comprimento de entrada (L_E) e segundo Shah e London (1978), este é definido como o ponto a partir do qual a velocidade adimensional na camada limite iguala 99% da velocidade máxima do escoamento.

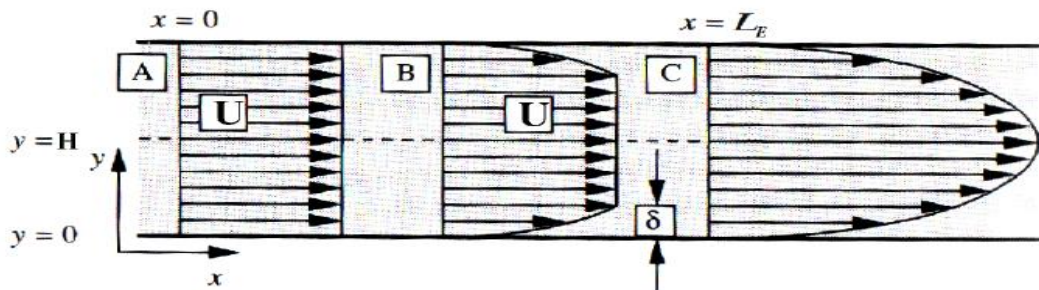


Figura 2.1-Perfil de velocidades entre placas paralelas

Assim vê-se que o desenvolvimento do comprimento de entrada está bem compreendido, no entanto, existe alguma confusão na forma da apresentação da equação do cálculo do comprimento de entrada. Isto pode ser visto na Tabela 2.1 onde são apresentadas algumas publicações sobre o cálculo do comprimento de entrada para fluidos newtonianos em placas paralelas (P) e em tubos (T). É possível também verificar que nessas publicações existe uma variedade de estudos numéricos (N) e analíticos (A).

Tabela 2.1-Sumário de publicações do cálculo do comprimento de entrada em regime laminar para fluidos newtonianos

Artigo	Método	Geometria	Correlação	C ₁	C ₂	C ₃
Boussinesq (1891)	A	T	$L_E=C_2Re$	-	0.065	-
Schiller (1922)	A	T	$L_E=C_2Re$	-	0.0288	-
Collins e Schowalter (1963)	A	T	$L_E=C_2Re$	-	0.061	-
Vrentas et al. (1966)	N	T	$L_E=C_2Re$	-	0.056	-
Atkinson et al. (1969)	N	T	$L_E=C_1+C_2Re$	0.59	0.056	-
Durst et al. (2005)	N	P	$L_E = (C_1^{C_3} + (C_2 Re)^{C_3})^{\frac{1}{C_3}}$	0.631	0.0442	1.6

Boussinesq (1891) fez uma investigação teórica do desenvolvimento do escoamento, considerando que este era muito lento e assumindo que o gradiente de pressão era apenas função da distância axial. Schiller (1922) usou uma técnica de integração do perfil de velocidades dentro da camada limite negligenciando a dissipação viscosa, para investigar o desenvolvimento do comprimento de entrada de um escoamento laminar em tubos lisos. Collins e Schowalter (1963) desenvolveram o trabalho de Boussinesq da abordagem de duas zonas para determinar o comprimento de entrada. Vrentas et al. (1966) usou valores de fronteira em termos de vorticidade e função de corrente e assumiu a difusão axial de vorticidade.

Schlichting (1979) apresentou uma revisão sobre a hipótese da camada limite teórica lidar com os escoamentos na região de entrada de canais e de tubos, incluindo os escoamentos rotacionais. Estudos experimentais do desenvolvimento do comprimento de entrada para grandes canais foram feitos por Goldstein e Kreid (1967) usando a técnica visual do medidor de caudal laser-doppler, enquanto que Muchnik et al. (1973) usou o método de fio quente.

Todos os trabalhos descritos até agora propõem uma relação linear entre o comprimento de entrada e o número de Reynolds, da forma $L_E=C_1Re$, onde C_1 representa o limite assintótico para quando L_E/Re tende para o infinito. Os valores propostos na literatura para a razão de L_E/Re eram muito dispersos (Figura 2.2), onde a correlação linear previa o comprimento de entrada com precisão para um escoamento em regime laminar.

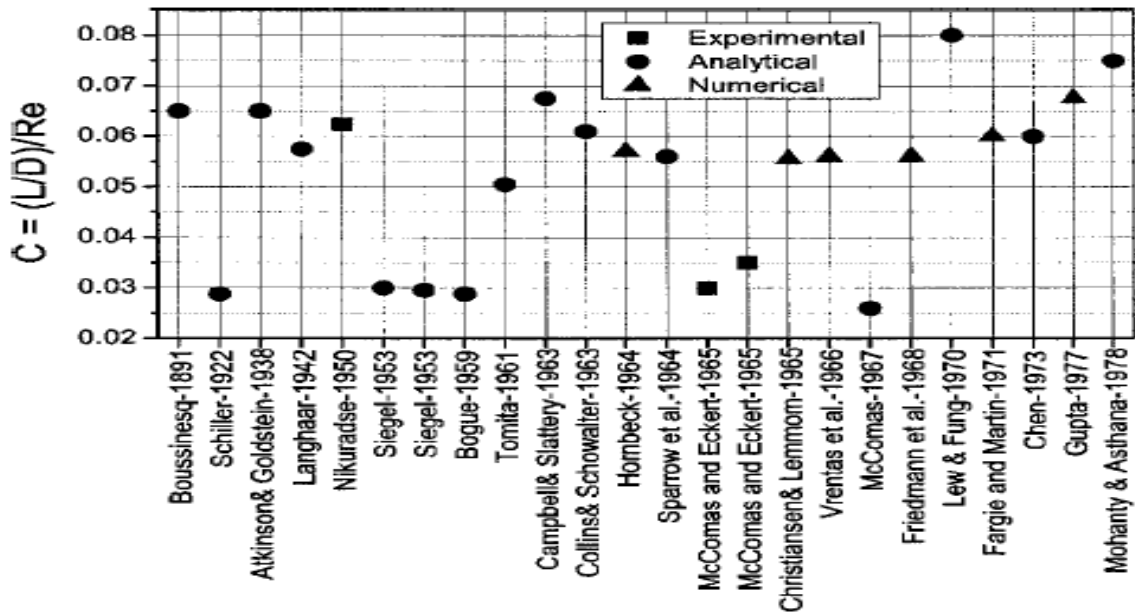


Figura 2.2- Valor da constante C obtido da relação entre a razão do comprimento de entrada e o raio do tubo e o número de Reynolds. Imagem adaptada de Durst et al. (2005)

A correlação do tipo linear pode ser aplicada para escoamentos em regime laminar, no entanto para números de Reynolds baixos ($0 < Re < 100$) existe um valor finito para o comprimento de entrada. Por isso, para números de Reynolds baixos existe a necessidade de considerar o desenvolvimento da camada limite, pois a difusão de vorticidade axial pode ser significativa (Vrentas et al. 1966), e assim resulta um valor assintótico para o comprimento de entrada mesmo que o número de Reynolds seja zero, o que resulta na necessidade da consideração de equações não-lineares para o cálculo do comprimento de entrada, Atkinson et al. (1969) foi o pioneiro na apresentação de uma equação não-linear para o cálculo do comprimento de entrada, através de soluções do tipo camada limite para valores de inércia desprezáveis. Já Chen (1973) baseou-se na suposição da velocidade uniforme à entrada e obteve a correlação que se encontra na Tabela 2.1, juntamente com o valor das constantes. Drombrowski et al. (1993) através de resultados numéricos para canais retangulares previu um aumento do comprimento de entrada para números de Reynolds baixos. Já Sadri e Floryan (2002) apresentaram os valores do comprimento de entrada para a gama de números de Reynolds de 0.02-2200, onde as correlações previam o comprimento de entrada para números de Reynolds baixos, devido à omissão do desenvolvimento do escoamento a montante e para os números de Reynolds altos, devido à omissão dos efeitos de separação do escoamento. Para este estudo foi utilizado um método numérico baseado na função corrente e vorticidade, com um esquema de diferenças finitas de quarta ordem. Lee et al. (2002) procedeu a trabalhos experimentais utilizando a gama de números de Reynolds de 250-2100 e os valores do comprimento de entrada encontrados são mais pequenos do que a correlação dada por Shah e London (1978) para números de Reynolds moderados a altos em regime laminar. Esta diferença no comprimento de entrada deve-se ao escoamento estar pré-desenvolvido antes de entrar no canal, segundo Lee et al. (2002). Lee e Kim (2003) testaram, através do escoamento com um número de Reynolds igual a um as diferentes formas de entrada dos canais e concluíram que o comprimento de entrada destes é mais pequeno do que o dos macro-canais. Oak et al. (2004) utilizou duas correntes laminares co-corrente com números de Reynolds variando entre 1 e 10 e com uma alta razão de aspeto em canais retangulares e concluiu que altas razões de aspeto resultam em comprimentos de entrada mais pequenos. Lee et al. (2008) estudaram o comprimento de entrada em dois micro-canais retangulares com razões de aspeto 2.75 e 0.4 e

numa gama de Reynolds entre 1 e 100. Com este trabalho os autores concluíram que o comprimento de entrada era menor comparado com as correlações convencionais, devido às diferentes razões de aspecto, à diferente velocidade máxima no centro do canal e ao pré-desenvolvimento das velocidades. Recentemente Durst et al. (2005), conseguiram prever melhores resultados no cálculo do comprimento de entrada em regime laminar, através da sobreposição da difusão e convecção no seu modelo e que permite a aplicação em canais e tubos. Também recentemente, Ahmad e Hassan (2010) efetuaram um trabalho para o cálculo do comprimento de entrada para micro-canais, com razões de aspecto unitário e três diferentes diâmetros hidráulicos e numa faixa de Reynolds de 0.5 a 200. Foi proposto uma correlação do comprimento de entrada para micro-canais em função da razão de aspecto transversal.

Como se pode observar desta revisão bibliográfica, existe ainda alguma divergência em relação à correta correlação do comprimento de entrada de escoamentos em regime laminar de fluidos newtonianos.

2.2 Comprimento de entrada de fluidos não-newtonianos

Como referido na Secção 1.1, existem poucos estudos no cálculo do comprimento de entrada de fluidos não-newtonianos, e relativamente aos existentes, há ainda alguma contradição. Isto pode ser visto na Tabela 2.2 onde são apresentados alguns trabalhos de investigação relacionados com o cálculo do comprimento de entrada onde é utilizado o modelo lei de potência (power-law)

$$\eta(\dot{\gamma}) = k \dot{\gamma}^{n-1} \quad (2.1)$$

Tabela 2.2- Sumário de publicações do cálculo do comprimento de entrada para fluidos não-newtonianos em tubos, onde se utiliza o modelo lei de potência (power-law)

Artigo	Método	Intervalo do parâmetro	Intervalo de Re	Correlação
Mashelkar (1975)	A	$0 < n < 1$	“Altos Re”	$L_E = 0.049(Re)$
Ookawara et al. (2000)	N	-	< 50	$L_E = \sqrt{((0.655)^2 + (0.0575)^2 (Re)^2)}$
Gupta (2001)	A	$0.3 < n < 2.0$	-	$L_E = 0.04(Re)$
Chebbi (2002)	A	$0 < n < 1.5$	-	$L_E = 0.09Re$

Como no caso newtoniano, é possível verificar que quase todos esses estudos preveem a seguinte relação para o comprimento de entrada

$$L_E = C(Re) \quad (2.2)$$

Onde $C=f(n)$ e n é o índice lei de potência. Muitas dessas correlações negligenciam o efeito da difusão para números de Reynolds baixos. Através dos resultados numericamente obtidos por Poole e Ridley (2007), a correlação apresentada anteriormente provavelmente é válida para números de Reynolds maiores que 20. A correlação proposta por Ookawara (2000) prevê que no limite de inércia desprezável (creeping-flow), o desenvolvimento do comprimento de

entrada seja independente do índice lei de potência, que pode causar surpresa, devido a não linearidade da equação da lei de potência.

Poole e Ridley (2007) investigaram o desenvolvimento do comprimento de entrada em tubos utilizando fluidos que obedeciam à lei de potência. Como discutido em detalhe por Chhabra e Richardson (1999), como consequência da viscosidade variável dos fluidos não-newtonianos, uma das dificuldades intrínsecas em analisar estes fluidos é a correta definição do número de Reynolds. Poole e Ridley (2007) calcularam o comprimento de entrada utilizando as três seguintes definições do número de Reynolds: baseado na taxa de deformação característica $\dot{\gamma} = U_B/d$ e que se pode chamar número de Reynolds de Collins-Schowalter (1963)

$$Re_{CS} = \frac{\rho U_B^{2-n} d^n}{K} \quad (2.3)$$

baseado na viscosidade da parede

$$Re_{wall} = \frac{\rho U_B^{2-n}}{K} \left(\frac{n}{2+6n} \right)^{n-1} \quad (2.4)$$

e baseado no número de Reynolds definido por Metzner e Reed (1955)

$$Re_{MR} = \frac{\rho U_B^{2-n} d^n}{K} 8 \left(\frac{n}{6n+2} \right)^n \quad (2.5)$$

Metzner e Reed observaram que dependendo do número de Reynolds usado, diferentes conclusões podiam ser tiradas sobre o efeito do índice lei de potência sobre o comprimento de entrada. Eles também verificaram através da análise da distribuição axial da velocidade que perto da velocidade uniforme aplicada a entrada e para todos os fluidos havia um aumento da velocidade, e esta particularidade era mais acentuada com o aumento do índice lei de potência. Por fim, fazendo umas simplificações à equação proposta por Durst et al. (2005) para os fluidos newtonianos, para ter em conta os efeitos da tensão de corte eles chegaram a seguinte equação para o cálculo do comprimento de entrada

$$L_E = [(0.246n^2 - 0.675n + 1.03)^{1.6} + (0.0567 Re_{MR})^{1.6}]^{1/1.6} \quad (2.6)$$

que é válida para valores do índice lei de potência que se encontram entre $0.4 < n < 1.5$. Esta equação pode ser visualizada na Figura 2.3, juntamente com a variação do comprimento de entrada para fluidos newtonianos e com diferentes índices lei de potência.

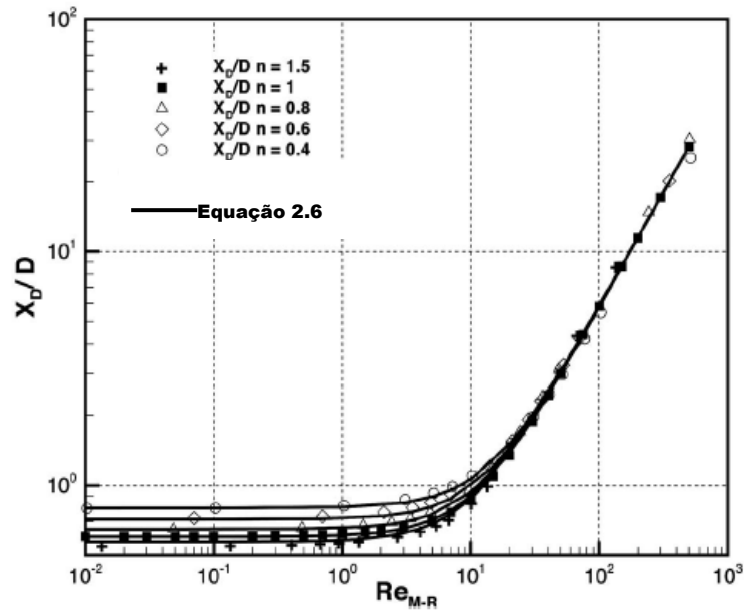


Figura 2.3- Variação do comprimento de entrada para fluidos newtonianos e com índices lei de potência diferentes versus Re_{MR} . Imagem adaptada de Poole e Ridley (2007)

No estudo efetuado por Poole e Chhabra (2010), eles estavam interessados em saber o comprimento necessário num tubo para que o escoamento de fluidos que obedecem ao modelo de Bingham, se torne completamente desenvolvido. O modelo de Bingham-type define-se da seguinte forma:

$$\tau = \tau_0 + \mu_p \dot{\gamma} \quad (2.7)$$

onde τ é a tensão de cisalhamento, τ_0 é a tensão de cedência, μ_p é a viscosidade plástica e $\dot{\gamma}$ é a taxa de deformação. Para quantificar a tensão de cedência foi usado o número de Bingham (Bn), definido

$$Bn = \frac{\tau_0 d}{\mu_p U_B} \quad (2.8)$$

onde d é o diâmetro do tubo e U_B é a velocidade à entrada do tubo. Guiados pelos resultados de Ookawara et al. (2000), o número de Reynolds utilizado foi baseado no método coeficiente correção do momento (este número de Reynolds é obtido quando a relação do fator de fricção do número de Reynolds é igual ao newtoniano)

$$Re(u_a, \xi) = \frac{\rho U_B d}{\mu_a} \xi \quad (2.9)$$

onde $\mu_a = 3\mu_p / (a^4 - 4a + 3)$, $\xi = 9(5 + 6a - 11a^2) / 5(3 + 2a + a^2)^2$, a é o raio relativo para o modelo Bingham e ρ é a massa volúmica.

Estes investigadores concluíram que para um número de Bingham (Bn) igual a 0.1 os valores do comprimento de entrada não se distinguem dos fluidos newtonianos. Abaixo de um valor de Reynolds crítico, cerca de 40, o comprimento de entrada começa-se a distinguir da correlação obtida para fluidos newtonianos e começa a depender do número de Bingham. Assim como as diferenças são relativamente pequenas, eles propõem o uso da correlação de fluidos newtonianos para fins de engenharia no cálculo do comprimento de entrada de fluidos

que obedecem ao modelo Bingham, fazendo só a distinção entre o número de Reynolds usado para fluidos newtonianos e a correção feita para estes fluidos. Na Figura 2.4 mostra-se o desenvolvimento do comprimento de entrada para diferentes números de Bingham.

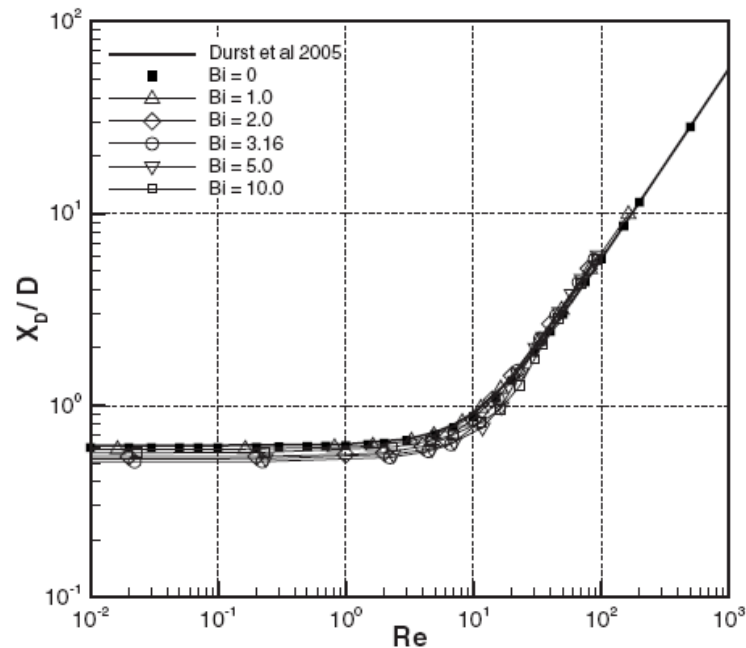


Figura 2.4-Variação do comprimento de entrada para vários fluidos Bingham. Imagem adaptada de Poole e Chhabra (2010)

2.3 Comprimento de entrada de fluidos viscoelásticos

Como já foi referido, o estudo do comprimento de entrada em escoamentos de fluidos viscoelásticos é reduzido. Isto, apesar de o escoamento de fluidos viscoelásticos em contrações de razão 1:4 ser um dos escoamentos de referência para a reologia computacional desde 1988 (Hassager 1988) e existirem muitos trabalhos experimentais e numéricos sobre este tema (Keunings (1989), Owens e Phillips (2002), Oliveira e Pinho (1999), Afonso et al. (2011)). Contudo, o foco nestes trabalhos não foi o comprimento de entrada na conduta, mas outras características do escoamento, como o tamanho da recirculação e os perfis de tensões na zona da contração.

Também estudos experimentais do desenvolvimento da velocidade, pressão e das tensões normais em escoamentos de fluidos viscoelástico em capilares foram discutidas por vários autores (Brocklobank e Smith, 1970, Han, 1971; Huang, 1981). Estes trabalhos apresentaram resultados experimentais para o comprimento de entrada de fluidos viscoelásticos, como se pode verificar na Figura 2.5, retirada de Brocklobank e Smith, 1970. Verificou-se que para fluidos viscoelásticos o comprimento de entrada é maior que para fluidos newtonianos, mas não foram apresentadas correlações para o comprimento de entrada em função do número de Reynolds e do número de elasticidade.

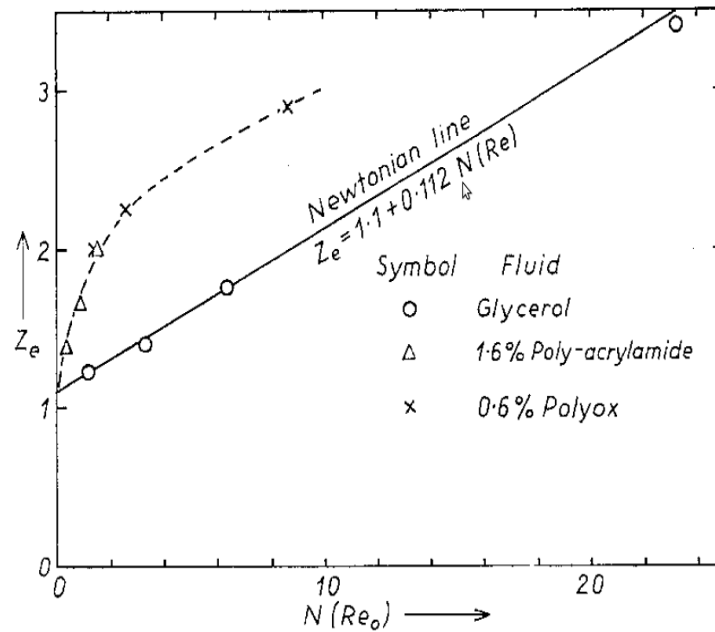


Figura 2.5- Resultados experimentais obtidos para fluidos viscoelásticos por Brocklobank e Smith (1970).

2.4 Conclusão

Relativamente ao estudo do desenvolvimento do comprimento de entrada verifica-se que este está bem compreendido. No entanto, existe alguma divergência na apresentação da correlação correta para o cálculo do comprimento de entrada tanto para fluidos newtonianos como para não-newtonianos. Verifica-se também que existe uma maior quantidade de estudos para fluidos newtonianos do que para fluidos não-newtonianos.

Relativamente ao estudo de fluidos viscoelásticos verifica-se que os poucos estudos que existem o objetivo deles não era o estudo do comprimento de entrada, mas sim outras características do escoamento.

Assim, obter essas correlações é um dos objetivos principais do presente trabalho.

3 Equações Fundamentais

Neste capítulo apresentam-se as equações que governam o escoamento de um fluido. São também apresentadas as equações constitutivas, para os modelos constitutivos utilizados nesta tese: o modelo Convectivo Superior de Maxwell (Upper Convected Maxwell, UCM) e o modelo Oldroyd-B.

3.1 Introdução

Neste capítulo são apresentadas as equações fundamentais que caracterizam o escoamento de um fluido. Para a caracterização desse escoamento é necessário o conhecimento da velocidade (\mathbf{u}), da pressão (p), da temperatura (T) e do estado de tensão ($\boldsymbol{\tau}$) em cada instante e posição. A velocidade é uma grandeza vetorial composta por 3 componentes cartesianas (u_x, u_y, u_z). No caso da tensão, que se apresenta como uma grandeza tensorial, esta depende da posição e da orientação do plano onde se encontra. A tensão pode ser caracterizada por um tensor desde que se conheçam as suas seis componentes independentes ($\tau_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{yy}, \tau_{xz}, \tau_{zz}, \tau_{yz}$). Este tensor de tensões pode ser escrito num referencial cartesiano da seguinte forma

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \tau_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \tau_{zz} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Cada coluna representa a tensão atuante na face do primeiro índice, enquanto que o segundo índice indica a direção de atuação. Assim após o que foi dito até agora, para caracterizar o escoamento de um fluido em três dimensões são necessárias onze variáveis ($u_x, u_y, u_z, \tau_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{yy}, \tau_{xz}, \tau_{zz}, \tau_{yz}, p$ e T). Para um caso bi-dimensional, o número de variáveis reduz-se para sete ($u_x, u_y, \tau_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{yy}, p$ e T). Neste trabalho, como o problema em questão é bi-dimensional, e em regime isotérmico, passam a ser necessárias só seis variáveis. De seguida apresenta-se a equação da conservação da massa, da quantidade de movimento e uma equação constitutiva reológica que descreve o comportamento do fluido.

3.2 Equações governantes de um escoamento

A primeira equação aqui a ser tratada é a equação da conservação da massa que para um fluido incompressível pode ser escrita da seguinte forma

$$\nabla \cdot \vec{\mathbf{u}} = 0 \quad (3.2)$$

em que \mathbf{u} é o vetor velocidade composto pelas componentes u_x, u_y .

Outra das equações a ser tratada neste texto é a equação da quantidade de movimento que na forma cartesiana pode ser escrita da seguinte forma

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) = \rho g_i - \frac{\partial p_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ki}}{\partial x_k} \quad (3.3)$$

Onde ρ é a massa volúmica do fluido e g é a aceleração da gravidade. Esta equação é escrita num referencial cartesiano onde i pode ser igual a x ou y .

No conjunto da equação da conservação da massa e da quantidade de movimento tem-se três equações, o que não chega para a resolução do escoamento de um fluido. Falta então relacionar o estado de tensão com o campo de velocidades do escoamento, para isso é necessário encontrar um modelo constitutivo. Para fluidos ditos de newtonianos a lei da viscosidade de Newton,

$$\boldsymbol{\tau} = 2\eta_s \mathbf{D} = \eta_s [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T] \quad (3.4)$$

é adequada para relacionar o estado de tensão com o campo de velocidades. Esta equação é constituída pela viscosidade do fluido (η_s) e pelo tensor taxa de deformação (\mathbf{D}). Substituindo na equação da quantidade de movimento (3.3) a tensão pela equação (3.4), esta simplifica-se na equação de Navier-Stokes, que pode ser escrita na forma escalar segundo a direção i

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) = -\frac{\partial p_i}{\partial x_i} + \eta_s \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) \quad (3.5)$$

Assim a caracterização de um escoamento laminar de um fluido incompressível e newtoniano, exige a resolução de um sistema de três equações formado pela equação da conservação da massa (3.2) e pela equação de Navier-Stokes (3.5) onde as variáveis dependentes são a pressão e as duas componentes da velocidade. Para se conhecer o estado de tensão do escoamento basta substituir o campo de velocidades na equação constitutiva (3.4).

3.3 Caracterização reológica dos fluidos não-newtonianos

Como foi visto anteriormente a resolução do escoamento de um fluido exige a escolha adequada de uma equação que permita o cálculo das tensões. Enquanto que para os fluidos newtonianos este modelo constitutivo ou equação constitutiva é uma função explícita do tensor velocidade de deformação, isso já não acontece para os fluidos não-newtonianos. Para os fluidos não-newtonianos o modelo constitutivo a usar no cálculo das tensões vai depender das características reológicas desse fluido. Esta caracterização reológica passa então por criar uma série de experiências que terão como resultado funções materiais que ajudarão na qualificação dos fluidos não-newtonianos e na quantificação de alguns parâmetros destes fluidos.

3.3.1 Funções materiais em escoamento de corte simples estacionário

O escoamento laminar de corte entre duas placas paralelas, em que uma delas se encontra fixa e a outra move-se a uma velocidade U (Figura 3.1) pode definir-se como escoamento de Couette.

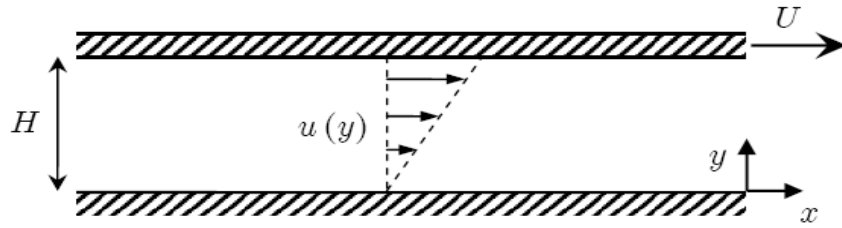


Figura 3.1-Escoamento de Couette entre 2 placas paralelas. Imagem adaptada de Alves (2004)

Este escoamento é caracterizado pelo seguinte perfil linear de velocidades

$$u = \frac{y}{H} U \quad (3.6)$$

Em que a taxa de deformação é igual

$$\dot{\gamma} = \frac{du}{dy} = \frac{U}{H} \quad (3.7)$$

que é constante em todo o seu domínio. A este tipo de escoamento estão associadas as seguintes funções materiais:

A viscosidade de corte é a razão entre a tensão de corte e a taxa de deformação

$$\eta(\dot{\gamma}) = \frac{\tau_{xy}}{\dot{\gamma}} \quad (3.8)$$

A tensão normal (τ_{xx}) e de corte (τ_{xy}) definem-se da seguinte forma

$$\tau_{xx} = 2\lambda\eta\dot{\gamma}^2 \quad (3.9)$$

$$\tau_{xy} = \eta\dot{\gamma} \quad (3.10)$$

Num escoamento de corte simples em que o fluido é viscoelástico observou-se experimentalmente a existência de uma força normal que afasta as placas paralelas. Isto deve-se ao coeficiente da primeira diferença de tensões normais, ψ_1 , não ser nulo. Este define-se como o quociente entre a primeira diferença de tensões normais, N_1 , e o quadrado da taxa de deformação, $\dot{\gamma}$,

$$\psi_1 = \frac{N_1}{\dot{\gamma}} = \frac{\tau_{xx} - \tau_{yy}}{\dot{\gamma}^2} \quad (3.11)$$

Outra propriedade a ser encontrada no escoamento de corte é o coeficiente da segunda diferença de tensões normais, ψ_2 , que define-se como o quociente entre a segunda diferença de tensões, N_2 , e o quadrado da taxa de deformação

$$\psi_2 = \frac{N_2}{\dot{\gamma}} = \frac{\tau_{yy} - \tau_{zz}}{\dot{\gamma}^2} \quad (3.12)$$

Experimentalmente para fluidos viscoelásticos verifica-se que ψ_2 é geralmente negativo e que o seu valor absoluto é significativamente inferior ao de ψ_1 ($|\psi_2| \leq 0.2|\psi_1|$). No caso dos fluidos newtonianos para o tipo de escoamento tratado até agora as tensões normais são nulas bem como ambas as diferenças de tensões normais.

3.4 Modelos constitutivos para fluidos viscoelásticos

Nesta secção vão ser caracterizados os modelos constitutivos utilizados na elaboração desta tese.

3.4.1 Modelo convectivo superior de Maxwell

Este modelo proposto por Maxwell pretende descrever o comportamento dos fluidos viscoelásticos. Assim Maxwell usa um modelo mecânico (Figura 3.2), para definir a sua lei constitutiva. Essa analogia tem como base o seguinte: quando ao sistema mecânico são aplicadas velocidades de deformação reduzidas a sua resposta é puramente dissipativa, demonstrando assim a resposta viscosa do fluido; enquanto que se for aplicada uma súbita solitação a resposta do sistema é puramente elástica, pois o amortecedor não tem tempo de se deformar, demonstrando assim a resposta elástica do fluido.

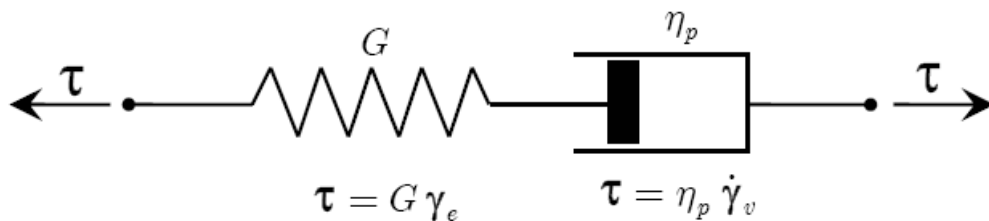


Figura 3.2-Modelo mecânico análogo a um fluido de Maxwell. Imagem adaptada de Alves (2004)

Como os dois elementos estão sujeitos a mesma tensão, τ , a taxa de deformação total resulta da soma das taxas de deformação dos dois elementos, $\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_e + \dot{\gamma}_v$, ou seja

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{G} \dot{\tau} + \frac{1}{\eta_p} \tau \quad (3.13)$$

Esta expressão pode ser escrita da seguinte forma

$$\dot{\gamma} \eta_p = \lambda \frac{\partial \tau}{\partial t} + \tau \quad (3.14)$$

Onde $\lambda = \eta_p / G$ representa o tempo de relaxação de Maxwell. Esta equação pretende assim descrever um fluido que simultaneamente é viscoso e elástico.

Esta equação não é aceitável, pois viola o princípio da objetividade material (Oldroyd, 1950; 1984). Uma forma desta equação verificar as condições de admissibilidade propostas por Oldroyd (1959, 1984) é substituir a derivada parcial $\partial \tau / \partial t$ pela derivada convectiva superior de Maxwell, τ , definida por (Bird et al., 1987a)

$$\overset{\nabla}{\tau} = \frac{\partial \tau}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{u} \tau - \tau \cdot \nabla \mathbf{u} - \nabla \mathbf{u}^T \cdot \tau \quad (3.15)$$

Ficando então a equação que representa o modelo de Maxwell na seguinte forma

$$\tau + \lambda \left(\frac{\partial \tau}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{u} \tau \right) = \eta_p (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) + \lambda (\tau \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T \cdot \tau) \quad (3.16)$$

que é um modelo viscoelástico quasi-linear, usado com frequência em simulações de referência de fluidos viscoelásticos. Este modelo denomina-se modelo convectivo superior de Maxwell (UCM) e prevê valores constantes para a viscosidade de corte e para o coeficiente da primeira diferença de tensões normais, e um valor nulo para o coeficiente da segunda

diferença de tensões normais. O modelo UCM apesar de ser um modelo simples é o mais difícil do ponto de vista numérico.

3.4.2 Modelo Oldroyd-B

A equação do modelo Oldroyd-B ou de Jeffreys (1924) define-se a partir da equação do modelo de Maxwell através da inclusão da derivada temporal do gradiente do vetor velocidade mantendo-se ainda uma relação linear

$$\lambda \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial t} + \boldsymbol{\tau} = \eta_0 \left(\dot{\boldsymbol{\gamma}} + \lambda_r \frac{\partial \dot{\boldsymbol{\gamma}}}{\partial t} \right) \quad (3.17)$$

Onde λ_r é a constante do tempo de retardamento. Esta equação pode ser obtida através da representação deste modelo por um sistema mecânico análogo, como se pode ver na figura seguinte

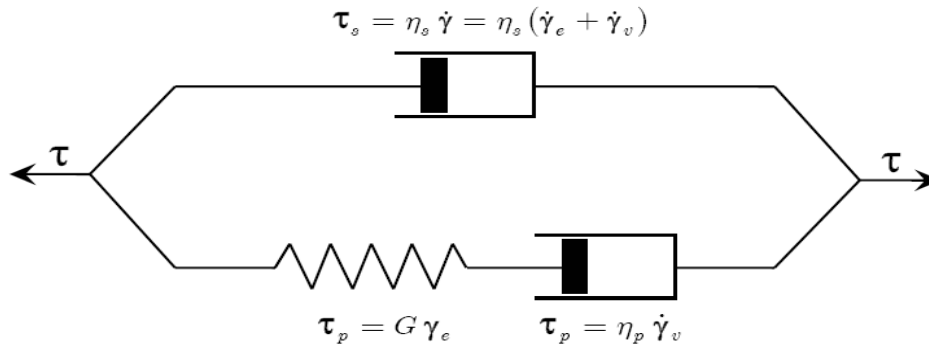


Figura 3.3-Modelo mecânico análogo ao modelo Oldroyd-B. Imagem adaptada de Alves (2004)

Utilizando a mesma metodologia que se utilizou no modelo de Maxwell, a tensão total para o sistema mecânico representado anteriormente define-se como a soma das tensões de cada um dos ramos

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_p + \boldsymbol{\tau}_s \quad (3.18)$$

Tendo em conta a que a tensão, τ_p , define-se através da equação do modelo de Maxwell e adicionando a tensão para o amortecedor superior, que é dada por

$$\boldsymbol{\tau}_s = \eta_s \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \eta_s (\dot{\boldsymbol{\gamma}}_s + \dot{\boldsymbol{\gamma}}_v) \quad (3.19)$$

Sendo que $\eta_0 = \eta_p + \eta_s$ e $\lambda_r = \lambda \eta_s / \eta_0$. Este modelo também não verifica o princípio da objetividade material. O que obriga então a efetuar uma generalização para um sistema de coordenadas genéricas, igual ao que se fez para o modelo UCM. Assim a equação para o modelo de Oldroyd-B fica do seguinte modo

$$\boldsymbol{\tau} + \lambda \overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}} = \eta_0 (\overset{\nabla}{\boldsymbol{\gamma}} + \lambda_r \overset{\nabla}{\dot{\boldsymbol{\gamma}}}) \quad (3.20)$$

É em que as derivadas convectivas superiores para a tensão, $\boldsymbol{\tau}$, e para a taxa de deformação, $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$, são calculadas pela equação (3.15) das derivadas convectivas apresentada no subcapítulo anterior.

Este modelo pode ser apresentado de uma outra forma, que consiste em considerar a tensão total como a soma das contribuições de origem polimérica e de origem puramente viscosa, o que resulta nas seguintes equações:

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\tau} &= \boldsymbol{\tau}_s + \boldsymbol{\tau}_p \\
 \boldsymbol{\tau}_s &= \eta_s (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) \\
 \boldsymbol{\tau}_p + \lambda \left(\frac{\partial \boldsymbol{\tau}_p}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{u} \boldsymbol{\tau}_p \right) &= \eta_p (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) + \lambda (\boldsymbol{\tau}_p \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T \cdot \boldsymbol{\tau}_p)
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

O modelo Oldroyd-B prevê valores constantes para a viscosidade de corte e para o coeficiente da primeira diferença de tensões normais, e um valor nulo para o coeficiente da segunda diferença de tensões normais.

4 Método Numérico

Neste capítulo apresenta-se uma breve descrição do método numérico utilizado nesta tese e também são apresentadas as equações que governam o escoamento numa forma mais adequada para a utilização desse método.

4.1 Introdução ao método dos volumes finitos

Neste trabalho para a resolução das equações que caracterizam o escoamento de um fluido (estas equações foram apresentadas no capítulo 3), utilizou-se um programa de simulação numérica do Centro de Estudos de Fenómenos de Transporte (CEFT). Este programa tem como base o método dos volumes finitos desenvolvido por Oliveira et al. (1998), para a resolução das equações governativas.

As equações são discretizadas numa malha em que o sistema de eixos é composto por coordenadas generalizadas não ortogonais. Esta malha computacional é composta por um número definido de células, a que se pode chamar volume de controlo elementar (ver Figura 4.1). Para cada volume de controlo elementar são resolvidas as equações que caracterizam o escoamento.

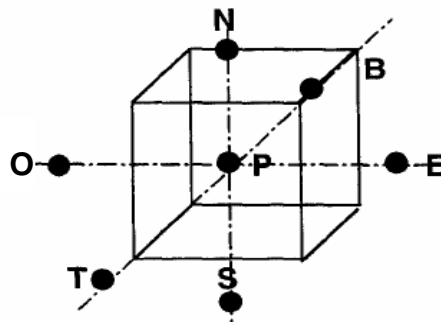


Figura 4.1-Volume de controlo elementar. Imagem adaptada de A. S. Cavadas (2008).

Como pode ser visto na Figura 4.1 cada célula é composta por seis faces correspondentes às seguintes orientações: norte (N), sul (S), oeste (O), este (E), topo (T) e baixo (B). Nas faces de cada volume de controlo as variáveis dependentes são estimadas através de esquemas de interpolação adequados.

As malhas computacionais podem ser designadas de malhas desfasadas quando a pressão tem de ser calculada numa outra malha desfasada da primeira, para assim garantir o acoplamento entre os campos de pressão e de velocidade. Por outro lado, caso se calculem todas as variáveis no nó P do volume de controlo elementar esta designa-se de malha colocada. Neste programa de simulação numérica usam-se malhas colocadas o que permite o uso de geometrias complexas, bem como uma economia de recursos de memória e simplificação do algoritmo. O cálculo dos caudais mássicos nas faces de volume de controlo elementar é feito

por uma interpolação especial desenvolvida por Rhie e Chow (1983) que no fundo equivale à metodologia proposta nas malhas desfasadas, pois também garante o acoplamento entre os campos de pressão e velocidade. Nas próximas secções apresenta-se a discretização das equações.

4.2 Discretização das equações

4.2.1 Equação da Conservação da Massa

A forma discretizada da equação da conservação da massa é

$$\sum_{f=1}^6 F_f = 0 \quad (4.1)$$

que representa o somatório dos fluxos de massa (F_f) que atravessam as seis faces (f) de uma célula genérica P da malha computacional.

4.2.2 Equação da Quantidade de Movimento

A integração desta equação numa célula genérica P da malha computacional de volume V_P permite escrever a equação na seguinte forma discretizada

$$a_p u_{i,p} - \sum_F a_F u_{i,F} = S_{ui} + \frac{\rho V_P}{\delta t} u_{i,p}^{(n)} \quad (4.2)$$

Na equação anterior δt representa o avanço no tempo, $u_{i,p}^{(n)}$ é a velocidade no instante de tempo anterior e a_F são os coeficientes que englobam as interacções de fluxos da célula genérica P com as suas células vizinhas F estes são obtidos da seguinte forma

$$a_F = a_F^C + a_F^D \quad (4.3)$$

onde a_F^C é o termo responsável pela contribuição convectiva e a_F^D traduz a contribuição difusiva. Estes coeficientes são compostos apenas por contribuições convectivas, já que não existe um termo difusivo explícito na equação da quantidade de movimento. Conforme o esquema de montante convectivo (esquema upwind) a contribuição convectiva é calculada da seguinte forma

$$a_F^C = -\min(F_f, 0), \text{ para uma face positiva } f^+$$

$$a_F^C = +\max(F_f, 0), \text{ para uma face negativa } f^-$$

O coeficiente central da equação da quantidade de movimento é dado por

$$a_p = \frac{\rho V_P}{\delta t} + \sum_F a_F \quad (4.4)$$

Já o termo fonte é dado por

$$S_{ui} = S_{ui,p} + S_{ui,\tau} + S_{ui,HRS} \quad (4.5)$$

onde os termos fonte do segundo membro da esquerda para a direita referem-se ao campo de pressões, de tensões e por último ao esquema de alta resolução CUBISTA de Alves et al. (2003).

De forma a facilitar a estabilidade numérica e permitir a aplicação do método a escoamentos a inércia desprezável (creeping flow, $Re=0$), assim fazendo $a_F^C = 0$, e de acordo com Oliveira et

al. (1998) introduz-se termos difusivos sob a forma de uma diferença: aditivo tratado implicitamente e subtrativo tratado de modo explícito, como se pode ver na seguinte equação

$$a_p u_{i,p} - \sum_F a_F^C u_{i,F} = S_{ui} + \frac{\rho V_P}{\delta t} u_{i,p}^{(n)} + \sum_F a_F^D (u_{i,F} - u_{i,p}) - \sum_F a_F^D (u_{i,F}^{(n)} - u_{i,F}^{(n-1)}) \quad (4.6)$$

Agrupando os coeficientes convectivos e difusivos, e reescrevendo o termo fonte

$$a_F = a_F^C + a_F^D \quad (4.7)$$

$$S_{ui} = (S_{ui})_{eq.} - \sum_F a_F^D (u_{i,F}^{(n)} - u_{i,p}^{(n)}) \quad (4.8)$$

Este procedimento não introduz difusão numérica e ao se atingir o estado estacionário os termos difusivos considerados anulam-se mutuamente, e assim recupera-se a equação da quantidade de movimento.

4.2.3 Equação constitutiva

O processo de discretização da equação constitutiva é análogo ao da equação da quantidade de movimento. Por isso, só se vai apresentar o resultado final da discretização. Para uma consulta mais detalhada do processo de discretização consultar o trabalho de Alves (2004).

Após a discretização dos vários termos que compõem, a equação constitutiva esta fica da seguinte forma

$$a_p^\tau \tau_{ij,p} - \sum_{F=1}^6 a_F^\tau \tau_{ij,F} = S_{ij} + \frac{\lambda_p V_P}{\delta t} \tau_{ij,p}^{(n)} \quad (4.9)$$

onde os coeficientes a_F^τ são apenas constituídos por uma componente convectiva

$$a_F^\tau = \frac{\lambda}{\rho} a_F^C \quad (4.10)$$

Porque na equação constitutiva não existem termos difusivos. O coeficiente central é dado por

$$a_p^\tau = V_p \left(1 + \frac{\lambda_p}{\delta t}\right) + \sum_{F=1}^6 a_F^\tau \quad (4.11)$$

4.3 Procedimento do cálculo

Basicamente o procedimento de cálculo das equações que governam o escoamento de um fluido processa-se sequencialmente da seguinte forma:

- resolução da equação constitutiva discretizada em ordem às tensões centrais a partir dos coeficientes, termo fonte e termo inercial obtidos no instante anterior;
- resolução da equação da quantidade de movimento discretizada em ordem a cada componente da velocidade. Muitas vezes ocorre que no fim da resolução da equação da quantidade de movimento as componentes da velocidade não satisfazem esta equação. O que obriga a que o algoritmo proceda à correção dos campos de velocidade e de pressão, de modo que as componentes da velocidade atualizadas e o campo de velocidades corrigido satisfaçam simultaneamente as equações de conservação e da continuidade. Este procedimento pode ser consultado em detalhe em Issa et al. (1994).
- por fim verificar se o estado estacionário foi alcançado de acordo com o critério de convergência adotado: norma da soma dos resíduos das equações inferior a 10^{-6} . Se este valor não for atingido repete-se novamente todo o procedimento desde o início.

Os sistemas de equações lineares são resolvidos com o método dos gradientes conjugados (Meijerink e van der Vorst, 1977), efetuando-se um condicionamento inicial das matrizes por factorização incompleta LU.

4.4 Condições de fronteira

Outro ponto relevante no uso da simulação numérica no cálculo de escoamentos é a imposição de condições de fronteira necessárias ao arranque do cálculo.

Como se considerou que para os fluidos analisados nesta dissertação, estes eram considerados incompressíveis o valor absoluto da pressão não é importante, nestes casos o que interessa é o valor do seu gradiente no decorrer do cálculo.

Devido ao carácter hiperbólico da equação constitutiva, apenas é necessário especificar o valor das componentes das tensões nas fronteiras de entrada.

As condições de fronteira aplicadas ao domínio de cálculo foram as seguintes:

- entrada: considerou-se diferente de zero a velocidade segundo a direcção longitudinal, com um perfil uniforme igual a U . Relativamente às componentes das tensões considerou-se que estas eram nulas.
- saída: é comum admitir que nesta fronteira os perfis de todas as variáveis estão completamente desenvolvidos, ou seja pode-se admitir um gradiente nulo. Assim admitiu-se que a saída da conduta era suficientemente afastada da secção em estudo, para garantir um gradiente nulo. Esta hipótese torna-se viável para a gama de números de Reynolds testados nesta tese.
- parede: nesta fronteira admitiu-se a condição de não deslizamento, ou seja, consiste em igualar a velocidade do fluido adjacente a parede à velocidade da parede, como as paredes estão imóveis a velocidade do fluido junto a parede é nula.

5 Validação do Procedimento de Cálculo e Teste de Malhas

Este capítulo tem como objetivo validar o procedimento do cálculo numérico através da determinação da ordem de convergência deste em função das séries de malhas criadas para o efeito. Para isso, é calculado o comprimento de entrada da velocidade para fluidos newtonianos. A utilização dos fluidos newtonianos deve-se a que para estes existem dados disponíveis na literatura, facilitando a validação do procedimento do cálculo numérico.

5.1 Introdução

Antes de demonstrar a validação do procedimento do cálculo numérico começa-se por apresentar a geometria do escoamento, define-se alguns parâmetros necessários a caracterização do escoamento de fluidos newtonianos e também se faz uma pequena referência ao método de extrapolação de Richardson (1908).

A geometria do escoamento é composta por duas placas paralelas com largura infinita, com comprimento L e altura H . Esta geometria é simétrica em relação ao eixo. Todas as malhas apresentadas nesta tese foram criadas a partir da geometria apresentada na Figura 5.1, o que pode mudar de umas malhas para as outras é a condição de simetria em relação ao eixo x .

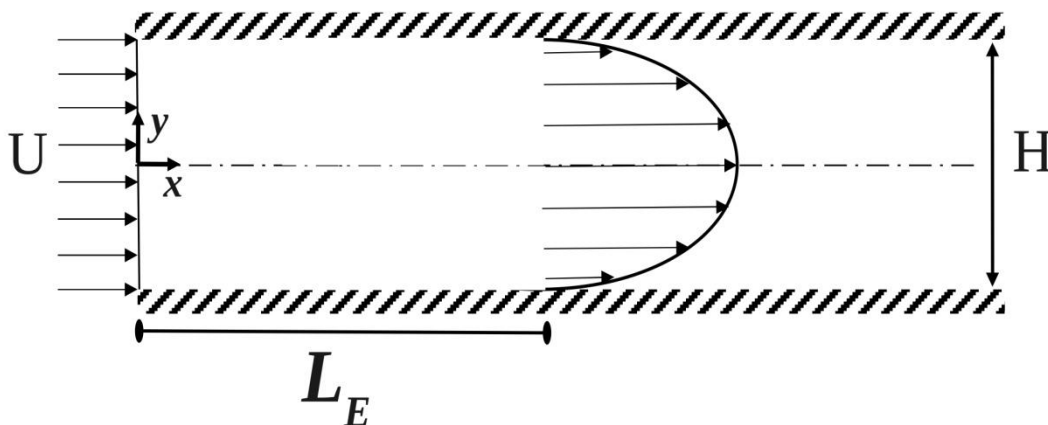


Figura 5.1- Geometria do escoamento

Neste estudo de um escoamento entre placas paralelas assumiu-se que estas tinham uma largura, W , infinita, por isso o diâmetro hidráulico, D_h , simplifica-se na distância entre as placas, H , ficando o número de Reynolds na seguinte forma

$$Re = \frac{\rho U D_H}{\eta} = \frac{\rho U H}{\eta} \quad (5.1)$$

onde ρ é a densidade do fluido, U é a velocidade a entrada, H é a distância entre placas e η é a viscosidade de corte.

Em escoamentos laminares interiores igual ao que é aqui tratado é costume assumir que o perfil da velocidade axial completamente desenvolvida é a única diferente de zero e que depende apenas de y . Este perfil de velocidade é definido pela equação de Poiseuille

$$u(y) = \frac{3}{2}U \left(1 - \frac{y^2}{H^2} \right) \quad (5.2)$$

Para o cálculo da ordem de convergência do método numérico (p_c) utilizado nesta tese, utilizou-se a extrapolação de Richardson (1908). Desde que existam três soluções numéricas (ϕ_{4h} , ϕ_{2h} , ϕ_h) obtidas numa série de três malhas em que o espaçamento entre células de uma malha para a outra é metade ($4h$, $2h$, h), mais fácil é a determinação da ordem de convergência do método numérico (p_c) que é dada por Ferziger e Peric, (1996)

$$p_c = \frac{\log \left(\frac{\phi_{2h} - \phi_{4h}}{\phi_h - \phi_{2h}} \right)}{\log 2} \quad (5.3)$$

Já o erro absoluto da solução calculada na malha mais refinada, ε_h , é dado por

$$\varepsilon_h \approx \frac{\phi_h - \phi_{2h}}{2^{p_c} - 1} \quad (5.4)$$

enquanto que o erro relativo da solução calculada na malha mais refinada, ε_r , pode ser calculado como

$$\varepsilon_r \approx \frac{\phi_h - \phi_{2h}}{\phi_{2h} (2^{p_c} - 1)} \quad (5.5)$$

Finalmente utilizando a equação 5.4 pode-se estimar uma solução mais precisa, ϕ_{extr} ,

$$\varepsilon_h = (\lim_{h \rightarrow 0} \phi) - \phi_h \rightarrow \phi_{extr} \approx \phi_h + \varepsilon_h = \phi_h + \frac{\phi_h - \phi_{2h}}{2^{p_c} - 1} \quad (5.6)$$

Este método pode ser usado para estimar a ordem de convergência do método numérico quando a convergência com o refinamento da malha é monótona.

O procedimento numérico para calcular o comprimento de entrada da velocidade consiste em percorrer as células computacionais no eixo de simetria, partindo do final da conduta em direção a entrada até se verificar o seguinte critério

$$\frac{|U_i - U_{teor}|}{U_{teor}} \leq 0.01 \quad (5.7)$$

onde U_i representa a velocidade no centro da célula i e U_{teor} é dado pela equação (5.2). Verificando-se este critério o valor do comprimento de entrada (L_E) é calculado por interpolação linear entre o valor do critério obtido na célula i e na célula $i+1$.

Nas secções seguintes serão apresentados os resultados obtidos para o teste de malhas e do estudo da ordem de convergência do método numérico. Este estudo foi efetuado para o caso de um fluido newtoniano e para um valor do número de Reynolds igual a 0.1.

5.2 Malhas uniformes

As primeiras malhas a serem criadas para o estudo da validação do procedimento do cálculo numérico eram constituídas por um só bloco e eram malhas completas, ou seja, ocupavam a totalidade da geometria do escoamento (na Figura 5.2 mostra-se o exemplo de uma malha criada com as características atrás referidas). Para este tipo de malhas foram criadas três séries onde cada uma delas era composta por três malhas. Dentro de cada série as malhas foram criadas obedecendo ao seguinte critério: o número de células em x (N_x) e o número de células em y (N_y) era o dobro de uma malha para a malha seguinte. O fator de compressão/expansão geométrico destas malhas em x (f_x) e em y (f_y) tem o valor de um, isto é, as malhas são uniformes. Na Tabela 5.1 caracterizam-se as malhas que foram criadas.

Tabela 5.1-Características das malhas

Malhas	N_x	N_y	f_x	f_y
M_1	100	21	1	1
M_2	200	41	1	1
M_3	400	81	1	1
M_4	50	41	1	1
M_5	100	81	1	1
M_6	200	161	1	1
M_7	100	41	1	1
M_8	200	81	1	1
M_9	400	161	1	1

Na Figura 5.2 apresenta-se a malha M_9 . É possível verificar que esta malha é constituída pelo um grande número de células.

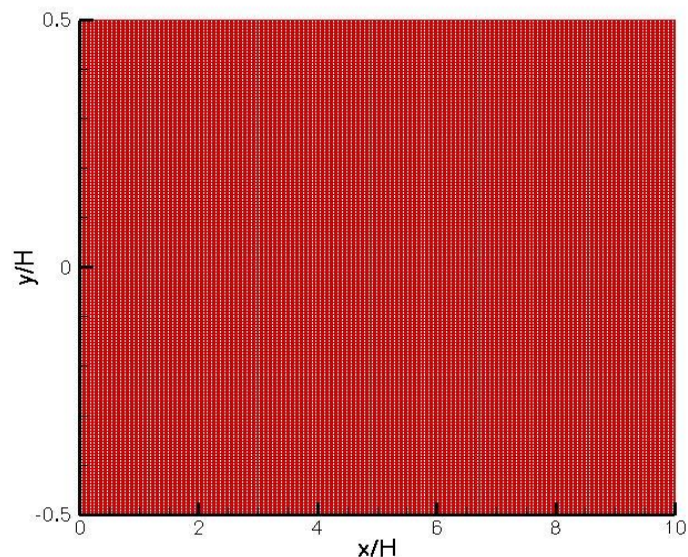


Figura 5.2-Malha M_9

Na Tabela 5.2 apresentam-se os valores do comprimento de entrada obtidos através da simulação numérica e os resultados da extrapolação de Richardson para estas malhas.

Tabela 5.2-Resultados para $Re=0.1$ obtidos nas malhas completas e uniformes

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8	M_9
L_E	0.5427	0.5165	0.5062	0.4949	0.5286	0.5142	0.5297	0.5140	0.5056
ϕ_{extr}	0.4994						0.4961		
p_c	1.3366						0.9120		
ε_h (%)	0.6781						0.9502		

Verifica-se que a ordem de convergência do método numérico (p_c) das malhas M_1 , M_2 , M_3 , M_7 , M_8 , M_9 é aproximadamente um, ou seja, é um valor baixo comparativamente com o valor ideal para a ordem de convergência do método numérico que é cerca de dois. Para as malhas M_4 , M_5 e M_6 não se calcularam os parâmetros do método de extrapolação de Richardson, pois a convergência com o refinamento das malhas é não monótona, e como foi referido na secção 5.1, quando isto acontece não é possível aplicar a extrapolação de Richardson para o cálculo da ordem de convergência do método numérico.

5.3 Malhas não uniformes na direção x

As malhas anteriormente apresentadas apresentam uma precisão baixa. No intuito de encontrar uma série de malhas com uma melhor precisão, testou-se o uso de uma progressão geométrica para as células segundo a direção x (f_x), ou seja segundo o comprimento das placas paralelas. Estabeleceu-se inicialmente um fator de compressão $f_x=1.0404$ para a malha M_4 e um $f_x=1.02$ para a malha M_7 . Para as outras duas malhas de ambas as séries o f_x a utilizar é a raiz quadrada do f_x utilizado na malha anterior, resultante de utilizar uma progressão geométrica para o espaçamento das células. Na Tabela 5.3 encontram-se os valores dos parâmetros necessários à construção das malhas.

Tabela 5.3-Características das malhas

Malha	N_x	N_y	f_x	f_y
M_4	50	41	1.0404	1
M_5	100	81	1.02	1
M_6	200	161	1.00995	1
M_7	100	41	1.02	1
M_8	200	81	1.00995	1
M_9	400	161	1.00496	1

Como pode ser visto na Figura 5.3 a utilização do refinamento não uniforme na direção x destas malhas tem como objetivo a existência de um maior número de células na zona onde ocorre o desenvolvimento do comprimento de entrada.

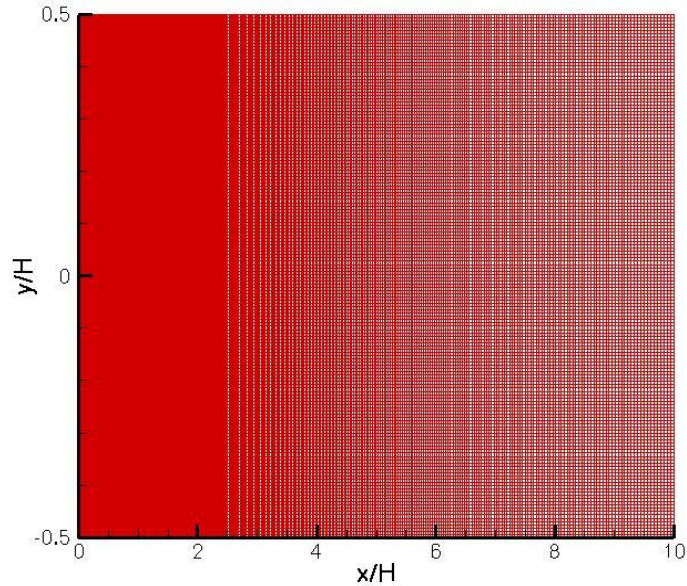


Figura 5.3-Malha M_9 com um $f_x=1.00496$

De seguida apresentam-se, na Tabela 5.4, os valores do comprimento de entrada e do método de extrapolação de Richardson para as malhas M_4 a M_9 .

Tabela 5.4- Resultados para $Re=0.1$ obtidos nas malhas completas e não uniformes em x

	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8	M_9
L_E	0.5267	0.5095	0.5036	0.5139	0.5047	0.5026
ϕ_{extr}	0.5005			0.5020		
p_c	1.5308			2.1419		
ε_h (%)	0.3140			0.0609		

Para as duas séries de malhas apresentadas, os valores da ordem de convergência do método numérico (p_c) aumentaram comparativamente às malhas uniformes, principalmente para a série de malhas M_7 , M_8 , M_9 o valor da ordem de convergência do método numérico (p_c) já é maior do que dois. Como o erro da solução calculado na malha mais refinada fica abaixo de 0.1%, esta série de malhas seria satisfatória para o cálculo do comprimento de entrada dos fluidos newtonianos. No entanto, como para fluidos viscoelásticos as tensões de corte junto a parede são problemáticas e visto que estas malhas são só refinadas na direção longitudinal e não têm muito refinamento junto a parede optou-se por testar mais algumas séries de malhas.

5.4 Malhas não uniformes com dois blocos

Outra forma de aumentar o número de células na zona onde ocorre o desenvolvimento do comprimento de entrada é a criação de uma série de malhas constituídas por dois blocos de células segundo a direção longitudinal das placas paralelas, x . O primeiro bloco discretiza 10% do comprimento total e é composto por um número de células (N_x) maior do que o segundo bloco que preenche os restantes 90% da conduta. Estas malhas são refinadas em ambos blocos segundo a direção x . O fator de compressão do primeiro bloco é menor que no segundo bloco, de forma que o tamanho das células seja igual na zona de interceção dos dois blocos. As características desta série de malhas podem ser vistas na Tabela 5.5.

Tabela 5.5-Características das malhas M_{10} , M_{11} , M_{12}

Malha	$N_{x1}+N_{x2}$	N_y	f_{x1}	f_{x2}	f_y
M_{10}	100+20	41	1.02	1.25	1
M_{11}	200+40	81	1.00995	1.11800	1
M_{12}	400+80	161	1.00496	1.05735	1

Na Figura 5.4 visualiza-se a malha M_{12} , onde se pode ver que existe um grande refinamento na zona onde ocorre o desenvolvimento do comprimento de entrada.

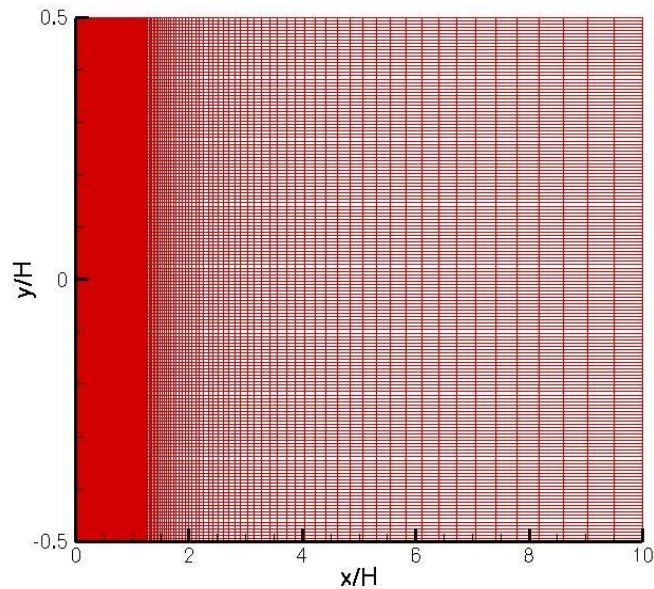


Figura 5.4-Malha M_{12}

Na Tabela 5.6 encontram-se os valores obtidos para o comprimento de entrada e para o método de extrapolação de Richardson

Tabela 5.6-Resultados para $Re=0.1$ obtidos nas malhas M_{10} , M_{11} , M_{12}

	M_{10}	M_{11}	M_{12}
L_E	0.5103	0.5041	0.5026
ϕ_{extr}	0.5021		
p_c	2.0107		
ε_h (%)	0.0505		

Para estas malhas o valor da ordem de convergência do método numérico (p_c) é praticamente dois e o valor do erro da solução obtida na malha mais refinada (ε_h) é de 0.05 % o que são valores muito satisfatórios. O facto da não utilização destas malhas deve-se na mesma a estas malhas não serem refinadas junto a parede.

5.5 Malhas simétricas e não uniformes em x e y

A fim de se testar o refinamento junto a parede, construiu-se uma série de malhas simétricas em relação ao eixo x . A construção de malhas em metade da geometria do escoamento tem como vantagem o aumento do refinamento em relação às malhas com o mesmo número de células mas que discretizam todo o domínio de escoamento. Estas malhas são compostas por dois blocos segundo a direção vertical das placas paralelas, y . O primeiro bloco situa-se desde o eixo de simetria até 1/4 da altura da conduta e o fator de refinamento (f_{y1}) deste bloco comprime as células para o eixo de simetria, enquanto que o segundo bloco situa-se na outra metade da simetria e o seu fator de refinamento (f_{y2}) comprime as células para a parede. Na direção longitudinal as malhas são compostas por um só bloco e são comprimidas para a entrada do escoamento. Para a malha inicial (M_{13}) foram estabelecidos três fatores de refinamento iniciais baseados no trabalho de Durst et al. (2005), como pode ser visto na Tabela 5.7, para as outras duas malhas os fatores de refinamento são a raiz quadrada dos fatores de refinamento da malha anterior, como já foi explicado anteriormente.

Tabela 5.7-Características das malhas M_{13} , M_{14} , M_{15}

Malha	N_x	$N_{y1}+N_{y2}$	f_x	f_{y1}	f_{y2}
M_{13}	50	20+20	1.0404	1.1449	0.873438727
M_{14}	100	40+40	1.02	1.07	0.934579439
M_{15}	200	80+80	1.00995	1.03441	0.966736488

Na Figura 5.5 encontra-se a malha M_{15} , onde se verifica que existe um maior refinamento na zona de desenvolvimento do comprimento de entrada, junto a parede e no eixo de simetria.

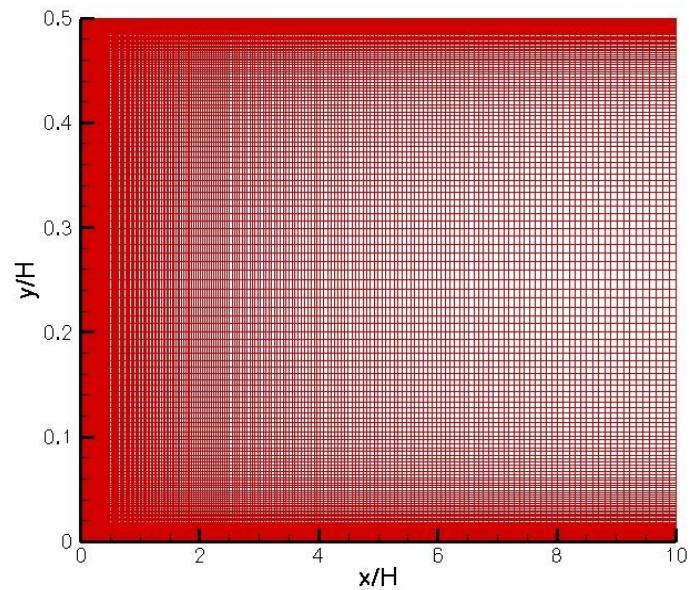


Figura 5.5-Malha M_{15}

Os valores do comprimento de entrada e do método de extrapolação de Richardson para estas malhas encontram-se na Tabela 5.8.

Tabela 5.8-Resultados para $Re=0.1$ obtidos nas malhas M_{13} , M_{14} , M_{15}

	M_{13}	M_{14}	M_{15}
L_E	0.5328	0.5119	0.5044
ϕ_{extr}	0.5002		
p	1.4758		
ε_h (%)	0.4208		

Após o cálculo da ordem de convergência do método numérico (p_c) para os resultados que se obteve com a série de malhas simétricas e não uniformes em x e y, verificou-se que esta era menor que dois, o que era um valor inferior ao obtido para as anteriores séries de malhas e o próprio erro da solução obtida na malhas mais refinada (ε_h) era aproximadamente de 0.42 % também superior em relação aos obtidos nas séries de malhas anteriores, decidiu-se então criar uma nova série de malhas simétricas com o dobro de células em x (N_x) e maiores fatores de compressão em x (f_x). As características para esta nova série de malhas estão descritas na Tabela 5.9.

Tabela 5.9-Características das malhas M_{16} , M_{17} , M_{18}

Malha	N_x	$N_{y1}+N_{y2}$	f_x	f_{y1}	f_{y2}
M_{16}	100	20+20	1.05	1.1449	0.873438727
M_{17}	200	40+40	1.02469	1.07	0.934579439
M_{18}	400	80+80	1.01227	1.03441	0.966736488

Através da visualização da Figura 5.6 é possível verificar que as malhas desta série são mais refinadas do que as malhas da série anterior, pois existe um maior número de células na direção longitudinal.

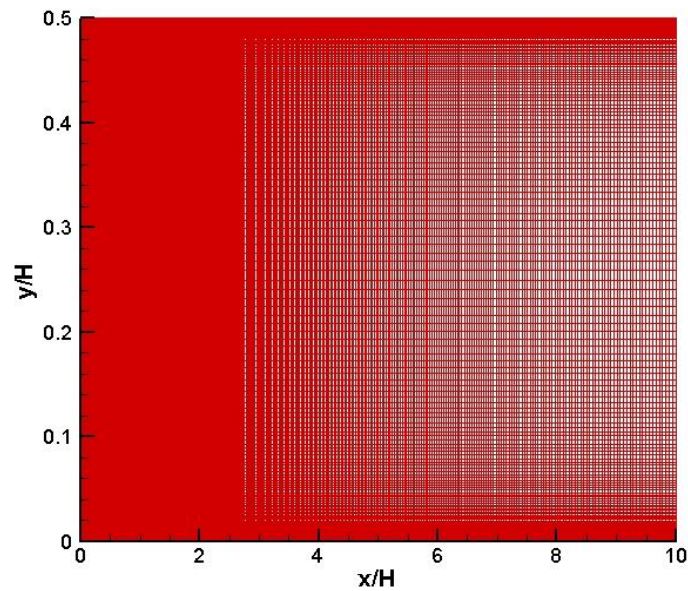


Figura 5.6-Malha M_{18}

Os resultados obtidos da extrapolação de Richardson e do comprimento de entrada encontram-se representados na Tabela 5.10.

Tabela 5.10-Resultados para $Re=0.1$ obtidos nas malhas M_{16} , M_{17} , M_{18}

	M_{16}	M_{17}	M_{18}
L_E	0.5119	0.5045	0.5027
ϕ_{extr}	0.5021		
p	2.0284		
ε_h (%)	0.0588		

Através da análise da Tabela 5.10 é possível verificar que a ordem de convergência do método numérico (p_c) é praticamente dois e o erro da solução calculada na malha mais refinada (ε_h) é aproximadamente de 0.06%, o que mostra que o refinamento desta série de malhas é muito satisfatório.

Na Figura 5.7 apresentam-se os perfis da velocidade (segundo a direção longitudinal e vertical) e da tensão de corte (τ_{xy}). As figuras mostram que os resultados obtidos para as três malhas da série escolhida convergem para o mesmo resultado e são muito próximos das soluções analíticas.

5.6 Conclusão

Após análise dos resultados obtidos para todas as séries de malhas apresentadas nas secções anteriores, a série de malhas escolhida para ser utilizada no cálculo do comprimento de entrada para fluidos newtonianos e viscoelásticos foi a série de malhas simétricas e não uniformes nas direções x e y , isto é, as malhas M_{16} , M_{17} , M_{18} . Estas malhas foram escolhidas pois apresentam uma ordem de convergência do método numérico (p_c) de segunda ordem e um erro absoluto (ε_h) inferior a 0.06%. A série apresentada na secção 5.3 (malhas completas não uniformes em x , c.f. Tabela 5.4) apresenta uma ordem de convergência ligeiramente superior que a série M_{16} , M_{17} , M_{18} (2.1419, comparado com 2.0284 obtido na série escolhida), o erro absoluto é inferior nas malhas escolhidas (0.0609%, comparado com 0.0588% obtido na série escolhida). A série de malhas completas, não uniformes em x , construídas com dois blocos na direção x (série M_{10} , M_{11} , M_{12} , c.f. Tabela 5.6), apresentam um erro absoluto (ε_h) ligeiramente menor que as malhas escolhidas (0.0505%, comparado com 0.0588% obtido na série escolhida), mas a ordem de convergência é menor (2.0107, comparado com 2.0284 obtido na série escolhida). Esta série de malhas têm ainda o inconveniente de o primeiro bloco ser dependente do comprimento de entrada (e do número de Reynolds), o que obrigaria a refazer as malhas em função do número de Reynolds a estudar.

Pode-se ainda referir que o tempo médio de computação das simulações para os fluidos newtonianos nas malhas M_{16} , M_{17} e M_{18} são aproximadamente 0.5 horas, 2 horas e 336 horas respetivamente, num PC com processador Ultra Dual-Core e velocidade 2.20 GHz.

Finalmente, e como já foi referido anteriormente, o refinamento na direção y (junto a parede das placas paralelas e no eixo de simetria) da série de malhas escolhidas é importante para a simulação numérica de fluidos viscoelásticos, devido ao crescimento das tensões poliméricas nessas zonas críticas.

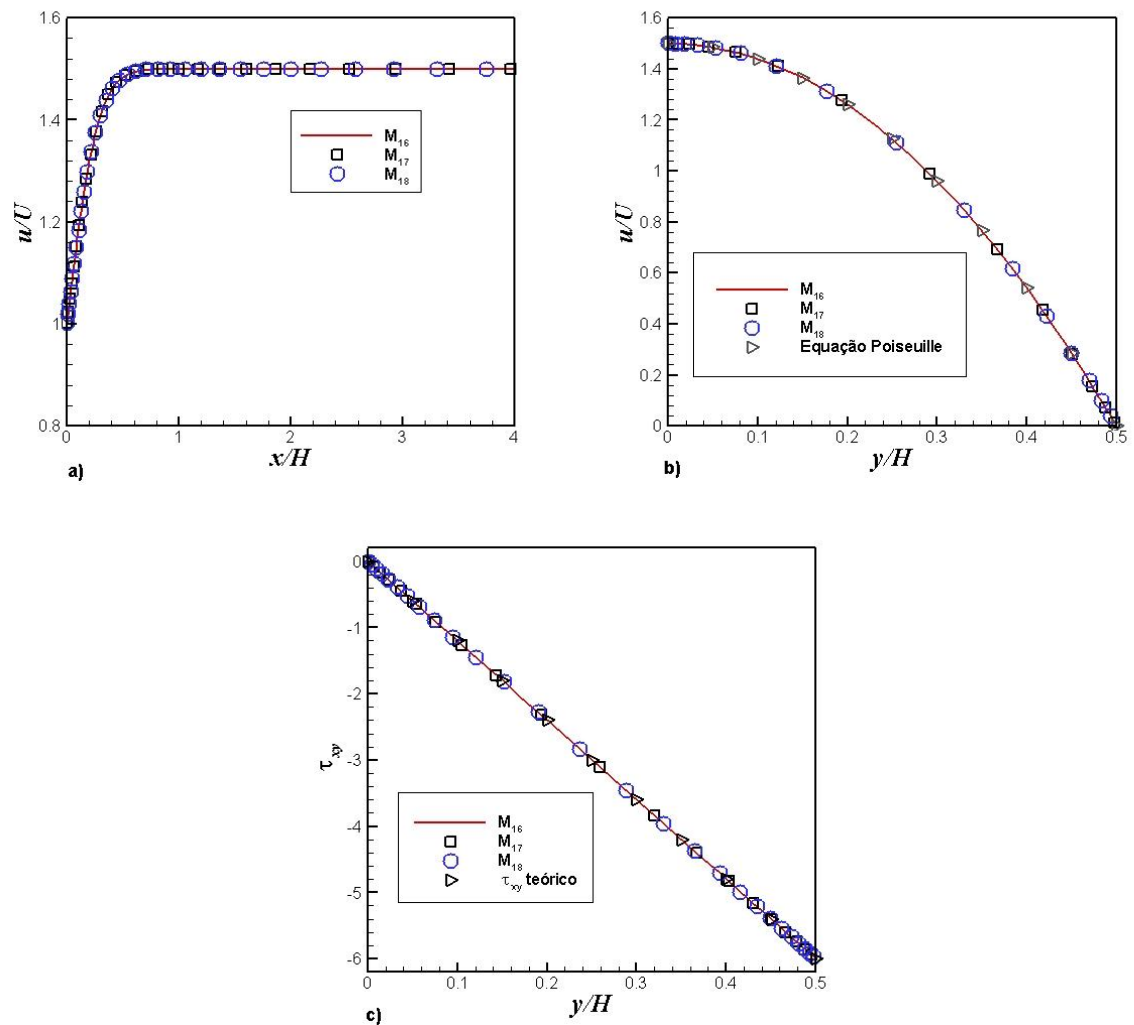


Figura 5.7- Perfis da a) velocidade ao longo de x ; b) velocidade desenvolvido ao longo de y e c) tensão de corte obtidos nas malhas M_{16} , M_{17} , M_{18} para $Re=0.1$ e fluido newtoniano.

6 Fluidos newtonianos

Neste capítulo apresentam-se os resultados do comprimento de entrada para a velocidade e tensão de corte obtidos com um fluido newtoniano para vários números de Reynolds num escoamento entre placas paralelas. Estes valores foram calculados para as três malhas da série escolhida no capítulo anterior.

6.1 Introdução

Para o cálculo do comprimento de entrada foi utilizada a série de malhas escolhida no capítulo anterior. Como para fluidos newtonianos o comprimento de entrada depende apenas do valor de número de Reynolds, foram efetuadas simulações para uma gama de $0 \leq Re \leq 100$. Numericamente, optou-se por fixar a velocidade de entrada, U , a viscosidade, μ , e variou-se a massa volúmica (ρ) do fluido para obter o número de Reynolds desejado.

6.2 Correlação para o cálculo do comprimento de entrada baseado na velocidade

Na Tabela 6.1 são apresentados os valores do comprimento de entrada (L_E), para as três malhas da série escolhida no capítulo 5, o valor extrapolado ($L_{E_{extr}}$), a ordem de convergência do método de extrapolação de Richardson (p_c), o erro da solução calculado na malha mais refinada (ε_h) e também o erro relativo (ε_r) dessa solução, para a gama de Reynolds apresentada anteriormente. O valor do comprimento de entrada para as três malhas foi obtido pelo procedimento descrito na secção 5.1. Da análise dos resultados obtidos verifica-se que a ordem de convergência do método numérico é aproximadamente dois (p_c) como seria de esperar, pois os termos difusivos são calculados com um método de segunda ordem e os termos convectivos com o método de alta resolução CUBISTA (Alves et al. 2003), de terceira ordem. O erro máximo obtido na malha mais refinada (M_{18}) é de aproximadamente 0.8% para um Reynolds igual a 100 e o erro relativo máximo também para essa malha é de aproximadamente de 0.17% para um Reynolds igual a 50, mostrando que os resultados apresentam uma ótima precisão numérica.

Tabela 6.1- Valores do comprimento de entrada da velocidade e dos parâmetros do método de Richardson obtidos para as três malhas e para vários números de Reynolds

Re	$L_E(M_{16})$	$L_E(M_{17})$	$L_E(M_{18})$	L_{Eextr}	p_c	ε_h (%)	ε_r (%)
0	0.5105	0.5032	0.5014	0.5007	1.9977	0.0611	0.1218
0.001	0.5105	0.5032	0.5014	0.5007	1.9977	0.0611	0.1218
0.002	0.5105	0.5032	0.5014	0.5008	1.9978	0.0610	0.1218
0.005	0.5105	0.5032	0.5014	0.5008	1.9989	0.0609	0.1216
0.01	0.5106	0.5033	0.5015	0.5009	2.0005	0.0608	0.1213
0.02	0.5107	0.5034	0.5016	0.5010	2.0036	0.0606	0.1208
0.05	0.5112	0.5038	0.5020	0.5014	2.0129	0.0599	0.1194
0.1	0.5119	0.5045	0.5027	0.5021	2.0284	0.0588	0.1169
0.2	0.5133	0.5058	0.5040	0.5034	2.0593	0.0566	0.1123
0.5	0.5175	0.5097	0.5080	0.5076	2.1851	0.0479	0.0943
1	0.5245	0.5170	0.5152	0.5146	2.0072	0.0615	0.1194
2	0.5401	0.5327	0.5308	0.5302	1.9838	0.0636	0.1199
5	0.5974	0.5897	0.5877	0.5871	1.9922	0.0652	0.1109
10	0.7278	0.7170	0.7143	0.7134	2.0087	0.0891	0.1247
20	1.0943	1.0739	1.0689	1.0672	2.022	0.1641	0.1536
50	2.4786	2.4253	2.4124	2.4082	2.0392	0.4169	0.1728
100	4.8058	4.6988	4.6737	4.6661	2.0925	0.7687	0.1645

Na Tabela 6.2 são apresentadas várias correlações obtidas em trabalhos já referidos no capítulo 2, onde agora os valores dos coeficientes dessas correlações são ajustados aos valores obtidos numericamente para o comprimento de entrada extrapolados (L_{Eextr}). São também inseridos dois parâmetros estatísticos que caracterizam o ajuste aos resultados do comprimento de entrada. Esses dois parâmetros estatísticos são: o coeficiente de determinação (R^2) e a variância (χ^2). O coeficiente de determinação (R^2) permite verificar se a equação de ajuste apresenta uma boa estimativa da variável dependente. O valor de R^2 varia entre zero e um, e quanto mais próximo de um, melhor é o ajuste aos dados numéricos. A variância (χ^2) permite verificar se o somatório da diferença do quadrado do valor estimado e do valor numérico é próximo de zero. Quanto mais próximo de zero, maior é a qualidade do ajuste.

Na Tabela 6.2 é também incluído uma nova correlação de ajuste para a variação do comprimento de entrada com o número de Reynolds para fluidos newtonianos, bem como os seus coeficientes, ajustados aos valores do comprimento de entrada extrapolados da velocidade. A correlação sugerida neste trabalho é

$$L_E = C_1 + \frac{C_2 Re + C_3 Re^2}{1 + C_4 Re^3} \quad (6.1)$$

e como é possível verificar, o valor de R^2 é aproximadamente um e a variância muito próximo de zero.

Tabela 6.2- Correlação e coeficientes de ajustes obtidos para os valores do comprimento de entrada extrapolados da velocidade

	$L_E=f(Re)$	C_1	C_2	C_3	C_4	R^2	χ^2
Atkinson et al.	$L_E = C_1 + C_2 Re$	0.5007	0.0403	-	-	0.996	0.179
Chen	$L_E = \frac{C_1}{1 + C_2 Re} + C_3 Re$	0.5007	0.1082	0.0462	-	0.999	0.0099
Durst et al.	$L_E = (C_1^{C_3} + (C_2 Re)^{C_3})^{\frac{1}{C_3}}$	0.5007	0.0465	2.0	-	0.999	0.0073
Dombrowski et al.	$L_E = C_1 + C_2 Re + C_3 Re^{-C_4 Re}$	0.0585	0.0462	0.4453	0.0935	0.999	0.0053
Correlação	$L_E = C_1 + \frac{C_2 Re + C_3 Re^2}{1 + C_4 Re^3}$	0.5007	0.0148	5.23×10^{-4}	6.17×10^{-7}	0.999	0.0002

Na Figura 6.1 apresentam-se os resultados da variação do comprimento de entrada com o número de Reynolds obtidos através da correlação sugerida na equação (6.1) e do valor extrapolado ($L_{E_{extr}}$). Verifica-se que estes dois resultados se sobrepõem, o que permite afirmar mais uma vez que a utilização desta correlação é apropriada para o cálculo do comprimento de entrada nesta gama de números de Reynolds. Nessa figura é também apresentada uma correlação para o cálculo do comprimento de entrada em placas paralelas, obtida por Durst et al. (2005) e que já foi apresentada no capítulo 2. Comparando os resultados obtidos com esta correlação de Durst et al. (2005) com os valores obtidos no presente trabalho, verifica-se que para números de Reynolds baixos existe uma certa discrepância, pois os valores do comprimento de entrada obtidos pela correlação de Durst et al. (2005) são maiores do que os apresentados neste trabalho numérico. Aproximadamente a partir do número de Reynolds igual a vinte a correlação de Durst et al. (2005) tende a aproximar-se dos resultados apresentados neste trabalho numérico. Uma possível explicação, para a discrepância encontrada é que as malhas utilizadas por Durst et al. (2005) possuíam um menor número de células e de refinamento do que as utilizadas para este trabalho numérico. Outra possível explicação poderá ser o facto de que para valores de Reynolds baixos a difusão na direção axial ser importante. Nestes casos, a utilização de esquemas convectivos de alta resolução pode ser importante, devido à eliminação de possíveis erros introduzidos pela difusão numérica que alguns esquemas introduzem, como o esquema UDS.

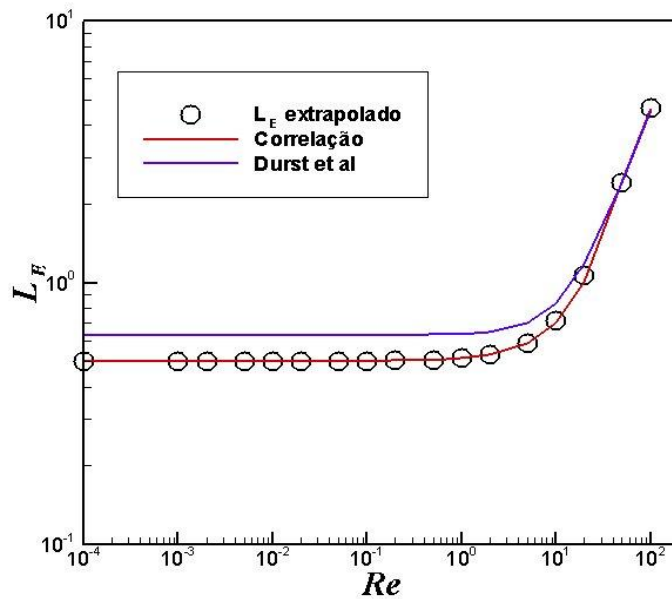


Figura 6.1-Comparação entre a curva da correlação e os valores do comprimento de entrada extrapolados da velocidade com uma correlação existente na literatura

6.3 Correlação para o cálculo do comprimento de entrada baseada na tensão de corte

No trabalho de Sadri e Floryan (2002) é apresentado uma revisão das diferentes definições de comprimento de entrada: o ponto a partir do qual a velocidade adimensional na camada limite iguala 99% (outros autores utilizam 99.9% ou 99.5%) da velocidade máxima do escoamento, o ponto onde $Re \frac{dp}{dx}|_{y=0}$ atinge 99% do seu valor assintótico ou onde a queda de pressão incremental atinge 95% do seu valor assintótico. Neste trabalho optou-se também por tirar o valor do comprimento de entrada para a tensão de corte ($L_{E\tau_{xy}}$) utilizando o mesmo procedimento descrito na secção 5.1 para o comprimento de entrada da velocidade, mas em que o critério para retirar o comprimento de entrada era definido como o ponto a partir do qual a tensão de corte (τ_{xy}) normalizada com a tensão de corte obtida na parede (τ_w) iguala 99% da tensão de corte obtida na parede (τ_w)

$$\frac{|\tau_i - \tau_{wall}|}{\tau_{wall}} \leq 0.01 \quad (6.2)$$

Na Tabela 6.3 são apresentados os valores desse comprimento de entrada, para a mesma série de malhas, juntamente com os valores dos parâmetros do método de Richardson.

Tabela 6.3- Valores do comprimento de entrada para a tensão de corte ($L_{E\tau_{xy}}$) e dos parâmetros do método de Richardson obtidos para as três malhas e para vários números de Reynolds

Re	$L_E(M_{16})$	$L_E(M_{17})$	$L_E(M_{18})$	$L_{E\tau_{xy} extr}$	p_c	ε_h (%)	ε_r (%)
0	0.6683	0.6643	0.6631	0.6627	1.8722	0.0419	0.0633
0.001	0.6683	0.6643	0.6631	0.6627	1.8719	0.0419	0.0633
0.002	0.6684	0.6643	0.6632	0.6627	1.8723	0.0419	0.0633
0.005	0.6684	0.6643	0.6632	0.6628	1.8746	0.0419	0.0631
0.01	0.6685	0.6644	0.6633	0.6628	1.8780	0.0417	0.0629
0.02	0.6686	0.6645	0.6634	0.6630	1.8847	0.0414	0.0624
0.05	0.6691	0.6649	0.6638	0.6634	1.9048	0.0406	0.0611
0.1	0.6698	0.6655	0.6644	0.6640	1.9378	0.0392	0.0591
0.2	0.6712	0.6668	0.6657	0.6653	2.0019	0.0368	0.0552
0.5	0.6756	0.6706	0.6696	0.6693	2.2806	0.0263	0.0393
1	0.6828	0.6777	0.6766	0.6763	2.2014	0.0308	0.0456
2	0.6973	0.6929	0.6920	0.6917	2.2404	0.0248	0.0359
5	0.7554	0.7500	0.7491	0.7489	2.5689	0.0183	0.0245
10	0.8883	0.8826	0.8814	0.8811	2.2748	0.0308	0.0350
20	1.2907	1.2823	1.2800	1.2791	1.8615	0.0874	0.0683
50	2.8649	2.8454	2.8402	2.8382	1.8982	0.1916	0.0675
100	5.5405	5.500	5.4902	5.4867	1.9800	0.3455	0.0629

Comparando estes valores do comprimento de entrada para a tensão de corte com os apresentados anteriormente para a velocidade, verifica-se valores superiores para o comprimento de entrada da tensão de corte. Relativamente à ordem de convergência da extrapolação de Richardson, verifica-se uma ligeira diminuição quando comparado com a ordem de convergência obtida para as velocidades. Já o erro da solução calculada na malha mais refinada desceu consideravelmente e o maior valor é de aproximadamente 0.35% e situa-se para um número de Reynolds igual a 100, enquanto que o maior erro relativo é de aproximadamente 0.068% para um número de Reynolds igual a 20.

Utilizando os valores do comprimento de entrada para as tensões de corte extrapolados, ajustou-se esses valores à seguinte correlação

$$L_{E\tau_{xy}} = C_1 + \frac{C_2 Re + C_3 Re^2}{1 + C_4 Re^2} \quad (6.3)$$

cujos coeficientes se encontram representados na Tabela 6.4, juntamente com os valores do coeficiente de determinação (R^2) e da variância (χ^2). Como os valores de R^2 e χ^2 são aproximadamente um e zero, respetivamente, permite afirmar novamente que a equação (6.3) se adequa aos resultados obtidos.

Tabela 6.4- Correlação e coeficientes de ajustes obtidos para o comprimento de entrada da tensão de corte

	$L_E=f(Re)$	C_1	C_2	C_3	C_4	R^2	χ^2
Correlação	$L_{E_{\tau_{xy}}} = C_1 + \frac{C_2 Re + C_3 Re^2}{1 + C_4 Re^2}$	0.662	0.0162	7.37×10^{-4}	8.62×10^{-5}	0.999	8.2×10^{-4}

Na Figura 6.2 apresenta-se a variação do comprimento de entrada para a tensão de corte ($L_{E_{\tau_{xy}}}$) em função do número de Reynolds, obtidos pela correlação da equação (6.3) e também os valores extrapolados e verifica-se que ambos os resultados se sobrepõem. O que significa que a correlação se adequa ao cálculo do comprimento de entrada para a tensão de corte. Na Figura 6.2 comparam-se os valores do comprimento de entrada baseados na velocidade e tensão de corte em função do número de Reynolds, e pode-se ver que comparando os valores do comprimento de entrada para a tensão de corte e para a velocidade, os primeiros são maiores o que significa que a tensão de corte necessita de uma maior distância para desenvolver-se.

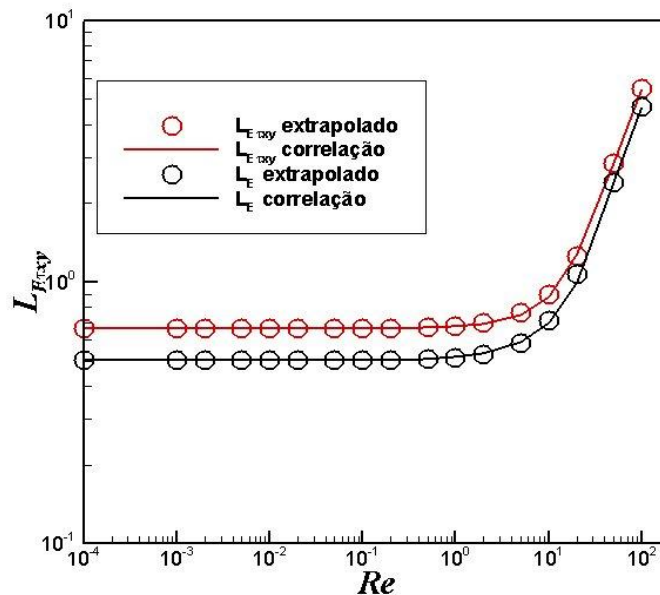


Figura 6.2- Comparação entre os comprimentos de entrada baseados na tensão de corte e na velocidade

6.4 Desenvolvimento dos perfis da velocidade e da tensão de corte

Na Figura 6.3 pode observar-se como a velocidade axial se desenvolve ao longo da direção axial das placas paralelas, para diferentes valores y/H e diferentes números de Reynolds (0.001, 0.1, 1 e 100). Estes resultados foram obtidos através da malha M_{18} . Para estes valores do número de Reynolds o comprimento de entrada aumenta com o aumento da inércia. Isso pode-se verificar analisando os gráficos, que mostram que a velocidade do escoamento necessita de uma maior distância para atingir o estado de desenvolvido para valores mais elevados de Reynolds. Também se pode verificar que o comprimento de entrada é maior perto do eixo de simetria central do que na zona perto da parede das placas. Outra característica destes resultados, e que está de acordo com os fundamentos teóricos da dinâmica de fluidos, é que a velocidade no eixo de simetria central é máxima e tende para zero perto da parede das placas devido à condição de não deslizamento. O valor analítico da velocidade no eixo de

simetria das placas paralelas ($y/H=0$) é 1.5 o que está de acordo com o escoamento de Hagen-Poiseuille (ver equação 5.2, capítulo 5).

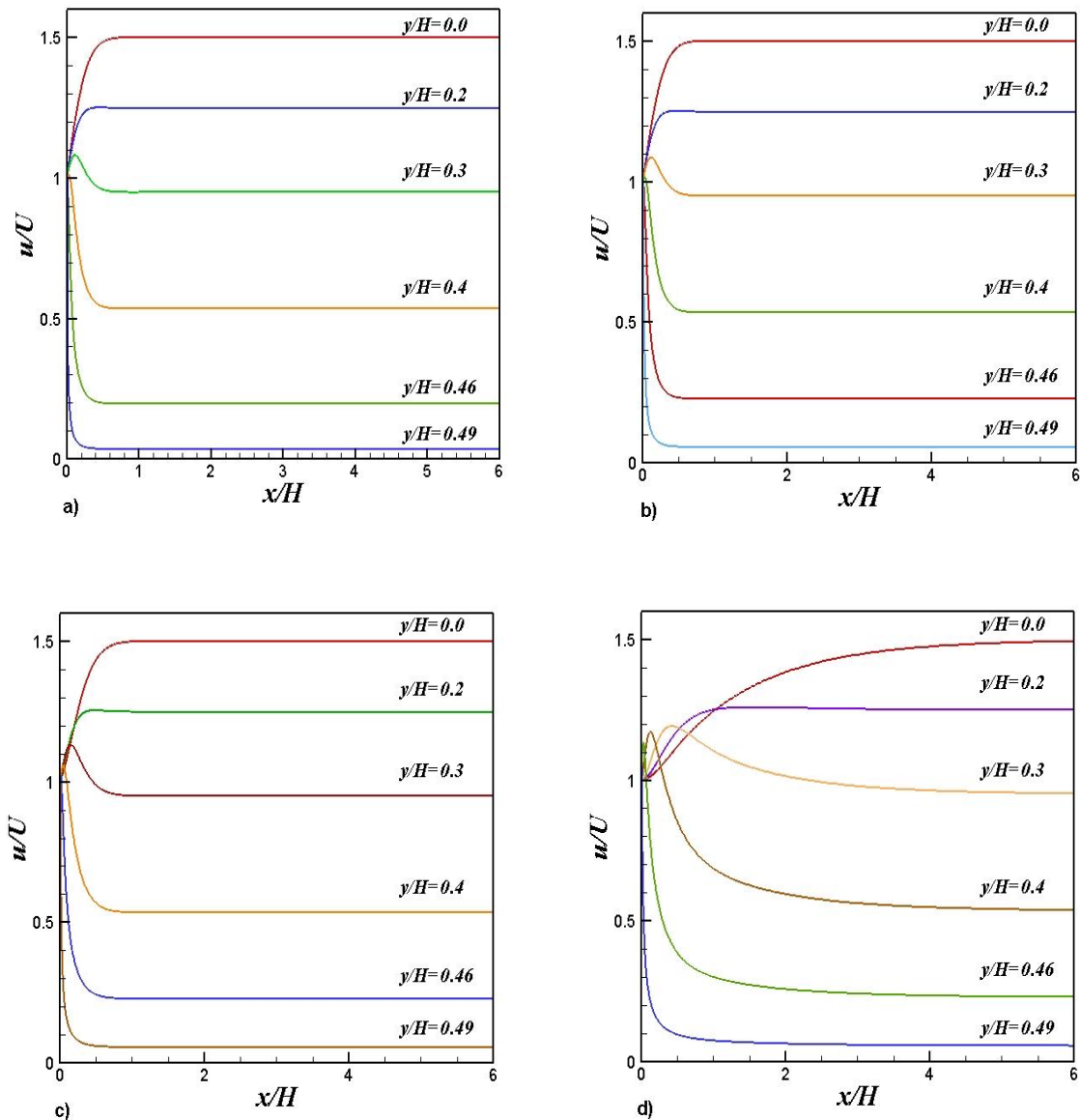


Figura 6.3- Desenvolvimento da velocidade axial para diferentes alturas das placas paralelas para a) $Re=0.001$, b) $Re=1$ c) $Re=10$ e d) $Re=100$

Na Figura 6.4 apresenta-se o desenvolvimento do perfil de velocidade axial para algumas posições ao longo do comprimento da conduta e para os mesmos números de Reynolds apresentados nas Figura 6.3. Os perfis de velocidade mostrados representam apenas metade da altura das placas paralelas, pois ele é igual para a outra metade devido a simetria do escoamento. Observando as figuras seguintes verifica-se a dependência do desenvolvimento do perfil da velocidade axial com o número de Reynolds, pois com o aumento deste o perfil da velocidade axial necessita de um maior comprimento da conduta para ficar completamente desenvolvido. Mais uma vez a velocidade axial máxima é 1.5 no eixo de simetria e é zero na parede da placa. Também se pode observar na Figura 6.4 uns picos nos perfis de velocidade (overshoots) perto da parede das placas paralelas, em especial para números de Reynolds mais elevados (Figura 6.4 c) e d)). A explicação para isto, é que o desenvolvimento do escoamento é uma consequência do balanço entre a difusão e a convecção, e para números de Reynolds elevados nota-se mais facilmente o efeito da desaceleração do fluido junto da parede. Assim,

para haver conservação da massa a velocidade tem de aumentar noutros locais, mas como a difusão ainda não teve tempo de transportar o fluido até ao centro, ocorre um aumento localizado da velocidade junto à parede. Este comportamento foi igualmente referenciado no trabalho de Durs et al. (2005) para fluidos newtonianos e em Poole et al. (2007) para fluidos Lei de Potência, sendo mais evidente quando os fluidos apresentam características reo-fluidificantes.

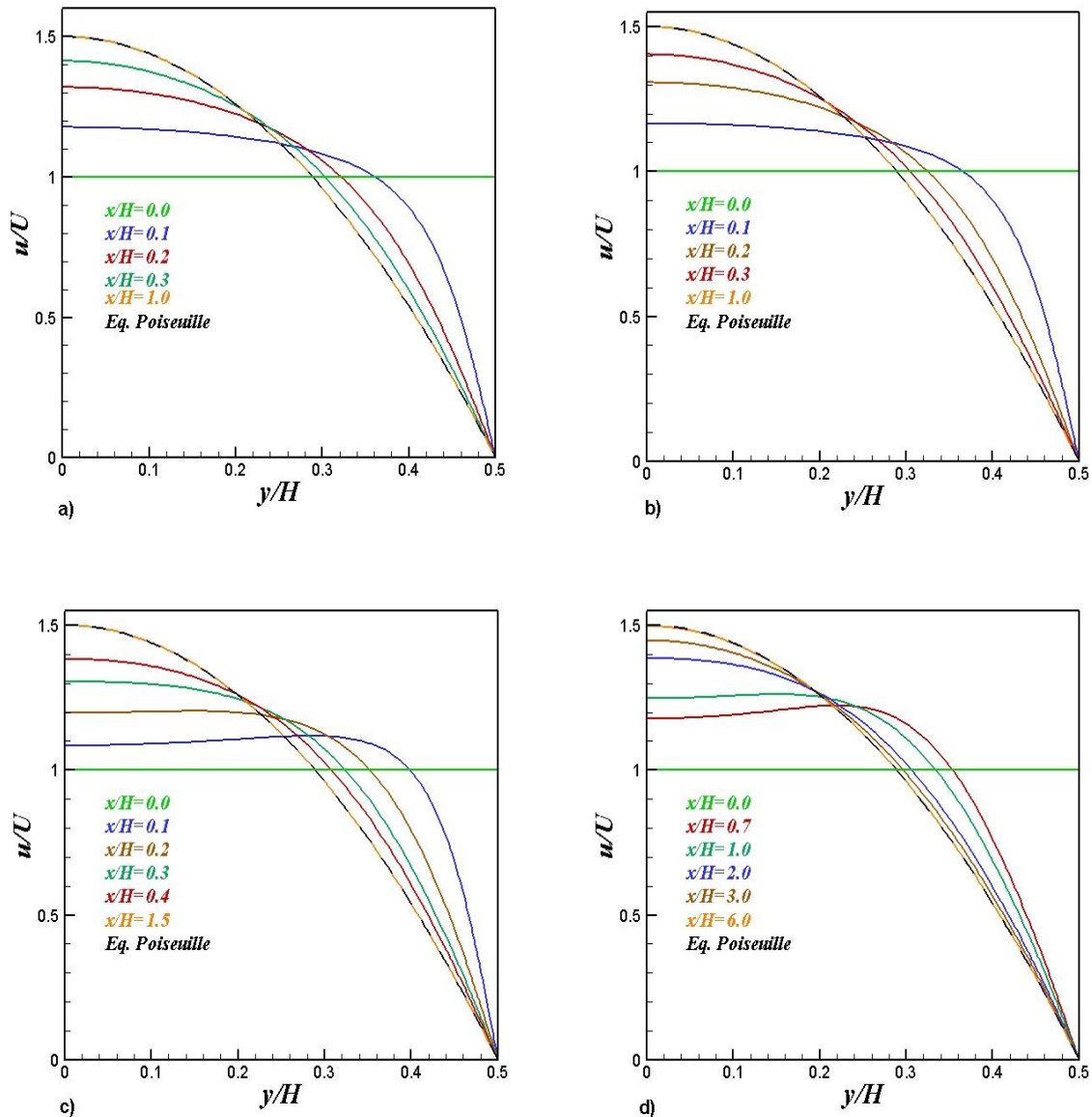


Figura 6.4- Desenvolvimento do perfil da velocidade axial para a) $Re=0.001$, b) $Re=1$ c) $Re=10$ e d) $Re=100$

Na Figura 6.5 apresenta-se o desenvolvimento do perfil da tensão de corte para algumas posições ao longo do comprimento da conduta, e para os mesmos números de Reynolds das figuras anteriores. Verifica-se que a tensão de corte é zero no eixo de simetria e atinge o valor mínimo de menos seis na parede da placa, devido a condição de não deslizamento. Outra característica que já foi referida para a velocidade axial, é que com o aumento do número de Reynolds é necessário um maior comprimento das placas paralelas para a tensão de corte se desenvolver.

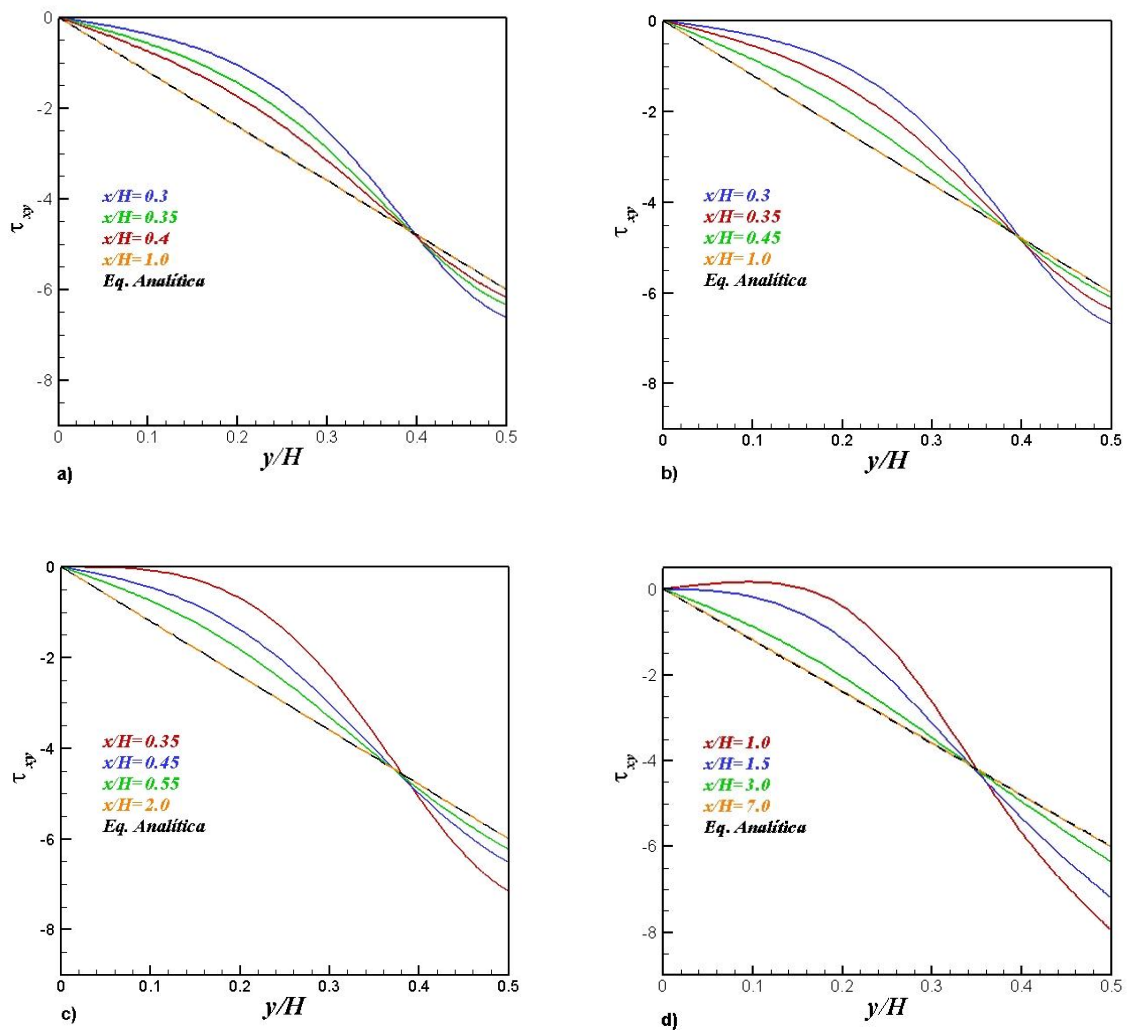


Figura 6.5- Desenvolvimento do perfil da tensão de corte para a) $Re=0.001$, b) $Re=1$ c) $Re=10$ e d) $Re=100$

6.5 Conclusão

De uma forma resumida pode-se concluir que os resultados apresentados para o comprimento de entrada baseado no desenvolvimento do perfil de velocidades são bastante precisos, pois o erro máximo obtido na malha M_{18} e para um Reynolds igual a 100 é de aproximadamente 0.8%, e para o comprimento de entrada baseado na tensão de corte o erro máximo obtido na malha M_{18} é aproximadamente 0.35%, ou seja um valor menor. Verificou-se também que para os números de Reynolds 10 e 100 o aparecimento de uns picos de velocidade (overshoots) nos perfis da velocidade perto da parede das placas paralelas, devido ao efeito de desaceleração do fluido junto da parede. O porquê de aparecer para números de Reynolds elevados, deve-se a que para estes números de Reynolds o tempo de difusão é muito menor que o tempo de convecção.

Relativamente as correlações obtidas para o cálculo do comprimento de entrada para a velocidade e tensão de corte pode-se concluir que estas conseguem com uma boa exatidão relacionar o comprimento de entrada com o número de Reynolds.

7 Fluidos viscoelásticos

Neste capítulo apresentam-se os resultados do comprimento de entrada obtidos para os fluidos viscoelásticos. Estes resultados são obtidos através da utilização do modelo constitutivo UCM e Oldroyd-B, apresentados no capítulo 3. Foram analisados o caso de inércia desprezável (creeping-flow, $Re \approx 0$), o efeito da inércia, o efeito da viscosidade do solvente newtoniano e o efeito das condições de entrada.

7.1 Introdução

Os números adimensionais utilizados neste capítulo na caracterização do escoamento foram o número de Reynolds (já foi definido no capítulo 5) e o número de Débora (De) que se define como

$$De = \lambda \frac{U}{H} \quad (7.1)$$

onde λ é o tempo de relaxação, U é a velocidade do escoamento e H é a distância entre as placas paralelas. O número de Reynolds e de Débora podem ser combinados no chamado número de elasticidade (El), que se define como razão entre o número de Débora e o número de Reynolds,

$$El = \frac{De}{Re} \quad (7.2)$$

O modelo constitutivo de Oldroyd-B distingue-se do modelo UCM pois contabiliza o efeito da adição do solvente newtoniano. Assim, o modelo de Oldroyd-B introduz um novo número adimensional que quantifica a razão das viscosidades, β ,

$$\beta = \frac{\eta_s}{\eta_0} = \frac{\eta_s}{\eta_s + \eta_p} \quad (7.3)$$

onde η_s é a viscosidade do solvente newtoniano, η_p é a viscosidade do polímero e η_0 é a viscosidade total, ou seja, a soma da viscosidade do solvente newtoniano com a viscosidade do polímero. Com isto, o cálculo do número de Reynolds para o modelo Oldroyd-B englobava a viscosidade do solvente newtoniano e a do polímero

$$Re = \frac{\rho u D_H}{\eta} = \frac{\rho u H}{\eta_s + \eta_p} \quad (7.4)$$

Antes de se proceder ao arranque dos cálculos foi necessário definir a gama de valores dos números adimensionais Re (0-10), De (0-1.6), El (0.1, 1 e 10) e β (1/9 e 0.5). A escolha da gama de valores para El tem como objetivo estudar a influência da elasticidade e da inércia no cálculo do comprimento de entrada. Relativamente a β , com a escolha de dois valores

pretende-se estudar a influência no cálculo do comprimento de entrada, da introdução de um solvente newtoniano ao escoamento de um fluido viscoelástico.

7.2 Regularização da velocidade de entrada

Nas simulações para fluidos newtonianos, a descontinuidade do campo de velocidades junto às paredes da entrada das placas paralelas não afeta a boa colocação da resolução numérica do sistema de equações. Para um fluido viscoelástico, o crescimento das tensões perto da singularidade introduzida pela descontinuidade da velocidade na entrada, faz com que as simulações divirjam para valores de números Débora muito baixos (neste trabalho, as simulações divergiam para De perto de 0.0001).

No presente trabalho, optou-se por introduzir uma regularização da singularidade, através da prescrição de um perfil de velocidade polinomial, que vai a zero na parede da conduta, evitando assim velocidades descontínuas na fronteira. Além disso, para evitar erros resultantes de um arranque impulsivo, optou-se por utilizar incrementos no tempo baixos. Este tipo de regularização pode ser encontrada na literatura de fluidos viscoelásticos, como por exemplo no estudo numérico e experimental do escoamento numa cavidade, onde as singularidades nos pontos de estagnação (nos cantos da cavidade) introduzem o mesmo problema de crescimento das tensões poliméricas (Pakdel et al. (1997), Fattal e Kupferman (2005)). Nestes trabalhos do escoamento de fluidos viscoelásticos em cavidades, a equação polinomial utilizada para a regularização da velocidade assume a seguinte forma:

$$u = y^2(1 - y)^2 \quad (7.5)$$

que apresenta velocidade e derivada da velocidade nulas junto ao ponto singular (Pakdel et al (1997), Fattal e Kupferman (2005)).

No presente trabalho, optou-se por utilizar uma modificação da equação (7.5), definida como:

$$u = y^2(0.5 - y)^2 / r_i \rightarrow y \geq y_i \quad (7.6)$$

$$u = U_{corr} \rightarrow y \leq y_i \quad (7.7)$$

onde r_i é um parâmetro de forma e U_{corr} é o valor da velocidade média corrigida para contabilizar o déficit de caudal na zona $y > y_i$, de forma a que o caudal total seja o mesmo que no caso newtoniano. Esta regularização é mais restritiva que a utilizada no problema da cavidade, mas no entanto, é mais aproximada da condição de velocidade uniforme na entrada das placas paralelas, o que permite uma melhor comparação com os resultados obtidos para fluidos newtonianos.

Foram testados três tipos diferentes de valores de r_i e y_i (R_1 , R_2 , R_3 , com $r_1=0.00025$; $y_1=0.465$, $r_2=0.000138$; $y_2=0.475$ e $r_3=0.000026$; $y_3=0.49$), cujas curvas estão representadas na Figura 7.1a. Os testes efetuados com essas regularizações com o modelo UCM para $De=1$, $Re \approx 0$ e malha M_{16} , mostraram que o comprimento de entrada não é muito afetado pelos parâmetros utilizados, como se pode observar na evolução temporal de L_E representado na Figura 7.1b. Assim, optou-se por utilizar a regularização R_3 nas simulações para fluidos viscoelásticos.

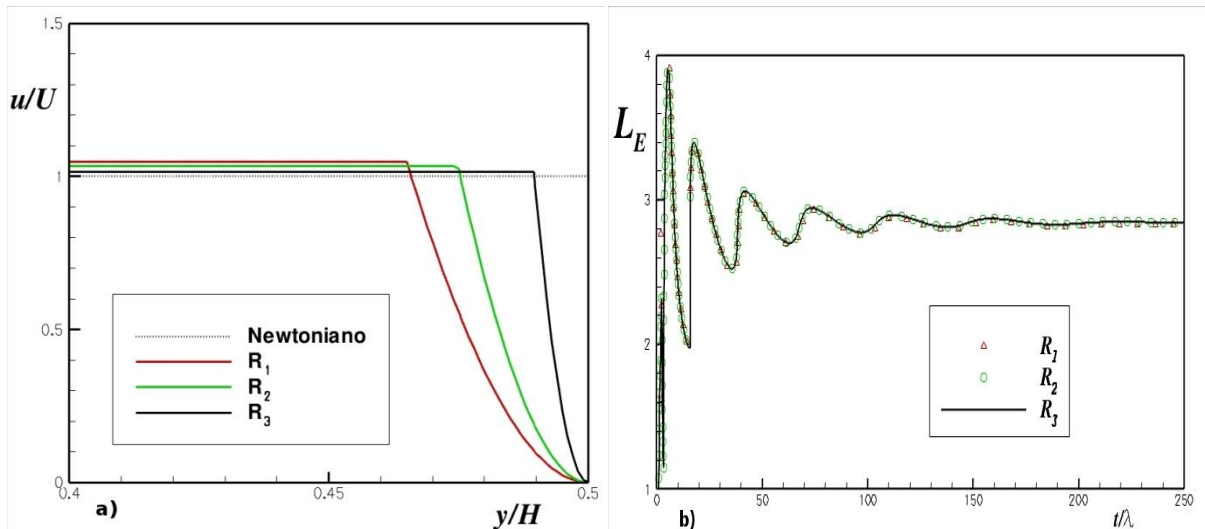


Figura 7.1-a) Perfis de velocidade regularizados (R_1 , R_2 , R_3), b) Evolução temporal de L_E obtido com o modelo UCM para $De=1$, $Re \approx 0$ e para a malha M_{16} ao longo de uma simulação numérica

7.3 Estimativa do erro

Como referido no capítulo 5, o tempo computacional das simulações para os fluidos newtonianos na malha mais refinada eram muito elevados. Este tempo computacional ainda se torna mais elevado para fluidos viscoelásticos. O tempo de CPU médio (num PC, com processador Ultra Dual-Core e velocidade 2.20 GHz) para uma simulação feita na malha mais refinada (M_{18}) é de aproximadamente 144 e 432 horas, para baixos e altos números de Débora, respetivamente. Dada a limitação temporal para a realização deste trabalho e de maneira a poder contabilizar a grandeza do erro associado, optou-se por fazer uma série de simulações nas três malhas, para valores diferentes do número de Débora ($De=0.1$, 0.5 e 1) com o Modelo UCM e Oldroyd-B (com $\beta=1/9$ e 0.5), em condições de inércia desprezável ($Re \approx 0$). Esta série de simulações permitiu retirar informação sobre o erro associado a cada malha e, assim quantificar o erro relativo aos resultados apresentados nas próximas secções. Na Tabela 7.1 estão representados os resultados obtidos para o teste de malhas com fluidos viscoelásticos. Pode-se verificar que o erro associado à malha mais grosseira (M_{16}) é inferior a 3% e para a malha intermédia (M_{17}) inferior a 1.3%. Serão estes os erros assumidos na apresentação dos resultados das próximas secções. A ordem de convergência do método numérico para fluidos viscoelásticos é ligeiramente inferior ao da obtida para fluidos newtonianos, mas muito próximo de uma ordem de convergência de segunda ordem ($p_c \approx 2$).

Tabela 7.1-Estudo dos erros relativos obtidos nas simulações com fluidos viscoelásticos

UCM	L_E (M_{16})	L_E (M_{17})	L_E (M_{18})	L_{Eextr}	p_c	ε_r (M_{16})	ε_r (M_{17})	ε_r (M_{18})
$De=0.1$	0.4810	0.4737	0.4718	0.4711	1.91	2.05	0.54	0.13
$De=0.5$	1.1636	1.1453	1.1417	1.1402	1.84	2.16	0.59	0.15
$De=1$	2.2140	2.1768	2.1665	2.1630	1.85	2.30	0.63	0.16
Oldroyd_B ($\beta=1/9$)	L_E (M_{16})	L_E (M_{17})	L_E (M_{18})	L_{Eextr}	p_c	ε_r (M_{16})	ε_r (M_{17})	ε_r (M_{18})
$De=0.1$	0.4668	0.4618	0.4605	0.4601	1.94	1.44	0.37	0.1
$De=0.5$	1.5353	1.5209	1.5171	1.5158	1.91	1.27	0.34	0.09
$De=1$	2.8894	2.8287	2.8128	2.8074	1.93	2.84	0.75	0.19
Oldroyd_B ($\beta=0.5$)	L_E (M_{16})	L_E (M_{17})	L_E (M_{18})	L_{Eextr}	p_c	ε_r (M_{16})	ε_r (M_{17})	ε_r (M_{18})
$De=0.1$	0.5055	0.5046	0.4998	0.4983	1.98	1.43	1.21	0.31
$De=0.5$	1.7515	1.7358	1.7318	1.7304	1.96	1.20	0.31	0.08
$De=1$	3.3052	3.2560	3.2431	3.2388	1.94	2.01	0.53	0.13

Na Figura 7.2 são ainda apresentados os perfis de velocidade e tensões desenvolvidos ($x/H \approx 7$) obtidos com o modelo UCM para valores diferentes do número de Débora ($De=0.1, 0.5$ e 1) em condições de inércia desprezável ($Re \approx 0$). Pode-se observar que os resultados obtidos nas três malhas se sobrepõem, o que mostra a eficiência do método numérico para o cálculo do escoamento de fluidos viscoelásticos.

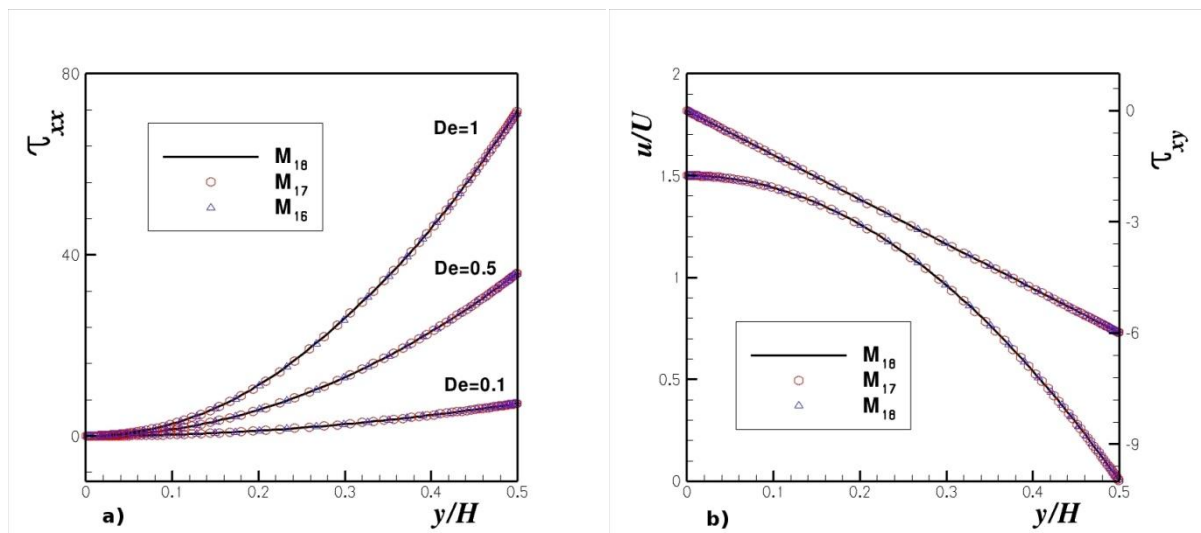


Figura 7.2- Perfis da a) tensão normal obtidos com o modelo UCM para valores diferentes do número de Débora ($De=0.1, 0.5$ e 1) em condições de inércia desprezável ($Re \approx 0$) e b) velocidade e tensão de corte.

7.4 Efeito da elasticidade (inércia nula, creeping flow)

O estudo apresentado nesta secção consiste no cálculo do comprimento de entrada de um escoamento com um número de Reynolds (Re) igual a zero, i.e., escoamento com inércia desprezável (creeping flow). Assim os valores do comprimento de entrada obtidos dependem apenas do número de Débora (De) como parâmetro do escoamento. Na Tabela 7.2 apresentam-se os valores do comprimento de entrada da velocidade para vários números de Débora (De), calculados através da utilização da malha M_{17} , que segundo a secção anterior, têm um erro relativo inferior a 1.3%.

Tabela 7.2-Valores do comprimento de entrada para a velocidade obtidos em função do número de Débora

UCM			$\beta=1/9$			$\beta=0.5$		
De	L_E		De	L_E		De	L_E	
0.001	0.5091		0.001	0.5889		0.001	0.6242	
0.002	0.5131		0.002	0.5905		0.002	0.6241	
0.005	0.5244		0.005	0.5939		0.005	0.6236	
0.01	0.5397		0.01	0.5964		0.01	0.6221	
0.02	0.5569		0.02	0.5949		0.02	0.6172	
0.05	0.5549		0.05	0.5666		0.05	0.5914	
0.1	0.4737		0.1	0.4618		0.1	0.5044	
0.15	0.3642		0.15	0.3273		0.15	0.4087	
0.2	0.5644	0.2931	0.2	0.7692	0.2541	0.2	0.8326	0.3600
0.3	0.7974	0.2301	0.3	1.0279	0.1986	0.3	1.1391	0.3281
0.4	0.9651	0.2026	0.4	1.2722	0.1816	0.4	1.4357	0.3228
0.5	1.1453	0.1904	0.5	1.5209	0.1773	0.5	1.7358	0.3264
0.6	1.3399	0.1834	0.6	1.7731	0.1781	0.6	2.0376	0.3334
0.7	1.5416	0.1792	0.7	2.0319	0.1821	0.7	2.3409	0.3415
0.8	1.7548	0.1783	0.8	2.2957	0.1871	0.8	2.6450	0.3506
0.9	1.9655	0.1768	0.9	2.5611	0.1919	0.9	2.9501	0.3593
1	2.1768	0.1754	1	2.8287	0.1971	1	3.2559	0.3683
1.2	2.6051	0.1738	1.2	3.3653	0.2064			
1.4	3.0611	0.1740	1.4	3.9080	0.2159			
1.6	3.5095	0.1807	1.6	4.4557	0.2248			

Na Tabela 7.3 são apresentadas correlações para o cálculo do comprimento de entrada da velocidade em função do número de Débora e os valores dos seus coeficientes, juntamente com o coeficiente de determinação (R^2) e a variância (χ^2), obtidas através do ajustamento aos valores do comprimento de entrada apresentados na Tabela 7.2. Visto que para um número de Débora maior ou igual a 0.2 existem duas colunas de valores do comprimento de entrada, as correlações foram ajustadas aos valores mais elevados dessas duas colunas, pois estes neste

trabalho são considerados os valores mais corretos do ponto de vista físico. É possível verificar que são apresentadas duas correlações (para os fluidos newtonianos só foi apresentada uma correlação), devido às curvas do comprimento de entrada, para os fluidos viscoelásticos não serem monótonas. Da análise dos parâmetros R^2 e χ^2 , verifica-se que estas correlações obtêm com bastante precisão os valores do comprimento de entrada em função do número de Débora.

Tabela 7.3- Correlação e coeficientes de ajustes obtidos para o comprimento de entrada da velocidade

	$L_E=f(Re)$	C_1	C_2	C_3	C_4	R^2	χ^2
UCM	$L_E = \frac{C_1 + C_2 De}{1 + C_3 De + C_4 De^2}$ $De < 0.2$	0.5091	3.623	-4.999	81.877	0.9996	9.025×10^{-5}
	$L_E = C_1 + C_2 De + C_3 De^2$ $De \geq 0.2$	0.2199	1.777	0.1765	-	0.9999	0.0015
$\beta=1/9$	$L_E = \frac{C_1 + C_2 De}{1 + C_3 De + C_4 De^2}$ $De < 0.2$	0.5889	-0.874	-2.596	34.926	0.9998	2.58×10^{-5}
	$L_E = C_1 + C_2 De + C_3 De^2$ $De \geq 0.2$	0.2650	2.484	0.0784	-	0.9999	0.0013
$\beta=0.5$	$L_E = \frac{C_1 + C_2 De}{1 + C_3 De + C_4 De^2}$ $De < 0.2$	0.6242	0.0648	0.0815	24.000	0.9999	6.25×10^{-6}
	$L_E = C_1 + C_2 De + C_3 De^2$ $De \geq 0.2$	0.1989	3.096	0.02832	-	0.9999	0.0044

Na Figura 7.3 encontram-se representados os valores do comprimento de entrada, em função do número de Débora, para o modelo UCM e para o modelo Oldroyd-B com diferentes valores para a razão de viscosidades ($\beta=1/9$ e 0.5) e ainda as correlações apresentadas na Tabela 7.3. Da análise da Figura 7.3 verifica-se que para os três casos o comprimento de entrada da velocidade é uma função não monótona e apresenta uma bifurcação para um número de Débora aproximadamente igual a 0.2, isto deve-se aos picos de velocidade (ver Figura 7.4b), que fazem com que o critério do cálculo do comprimento de entrada (apresentado na secção 5.1) seja satisfeito em duas posições diferentes ao longo do comprimento das placas paralelas. Existe também um aumento do comprimento de entrada para o modelo Oldroyd-B em relação ao modelo UCM. Relativamente às curvas dadas pelas correlações verifica-se que estas se sobrepõem sobre as curvas que representam os resultados obtidos numericamente, o que comprova a boa aproximação das correlações para o cálculo do comprimento de entrada da velocidade.

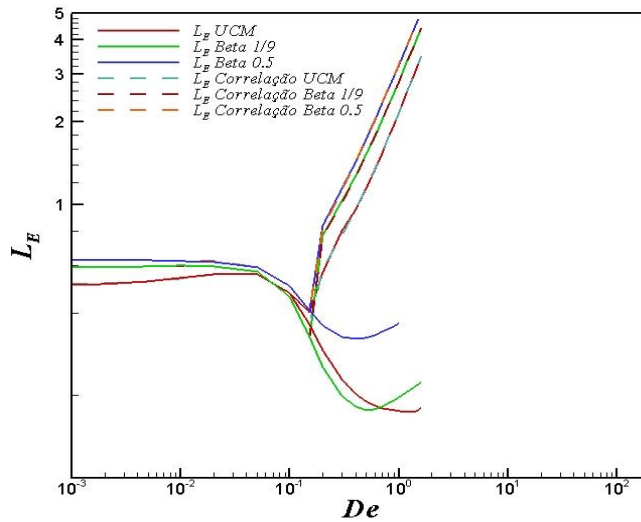


Figura 7.3-Comprimento de entrada da velocidade em função do número de Débora para UCM e Oldroyd-B

Na Figura 7.4 encontra-se a velocidade axial para vários números de Débora. Pode-se verificar que a velocidade antes de estabilizar no valor de 1.5, apresenta vários picos (overshoots), isto deve-se às características elásticas dos fluidos viscoelásticos. Estes picos na velocidade tendem a aumentar com o aumento do número de Débora, e para números de Débora baixos as curvas da velocidade são praticamente idênticas e não apresentam picos de velocidade. Esta diferença verifica-se, porque para números de Débora baixos e números de Reynolds iguais a zero a difusão é mais rápida do que a elasticidade, enquanto que para números de Débora altos há a interferência da propagação da onda de quantidade de movimento pela via de uma onda elástica que tem uma grande intensidade.

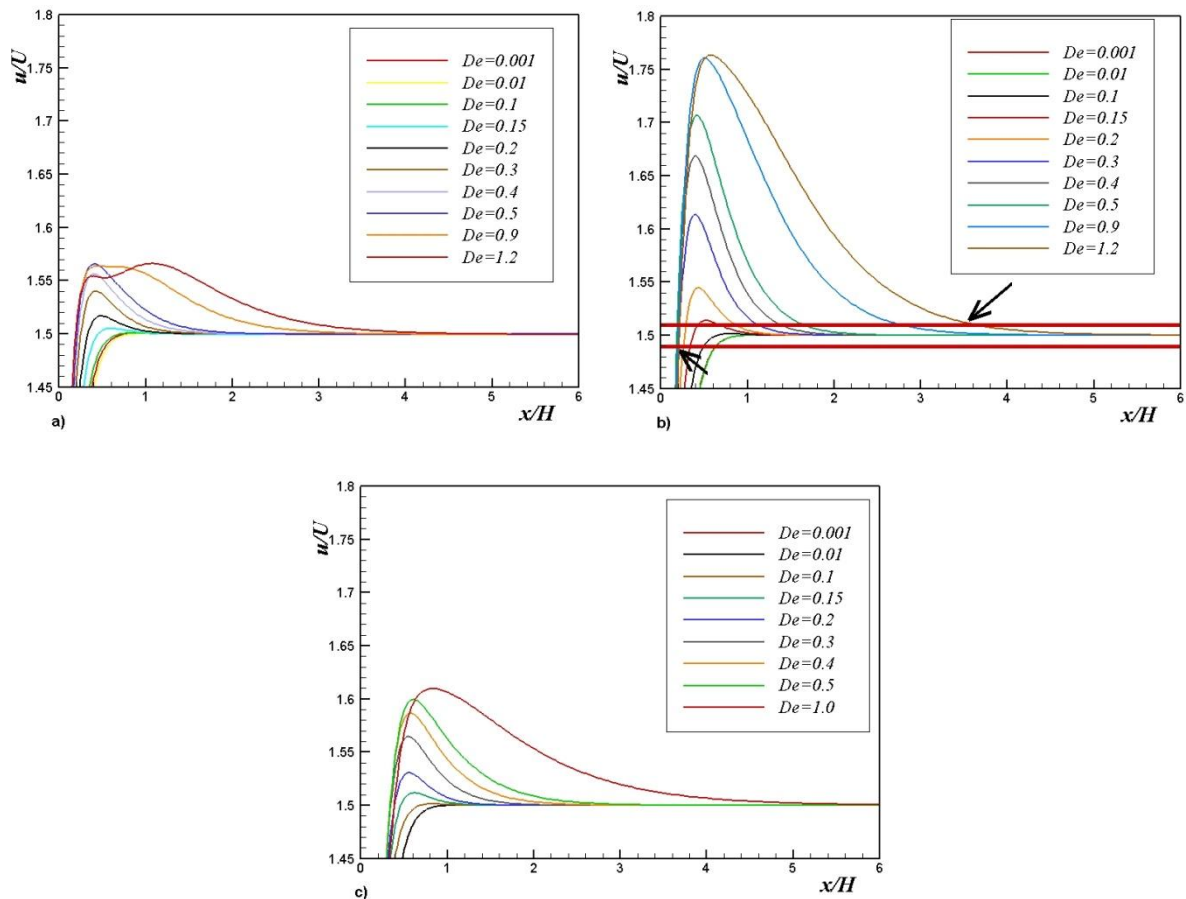


Figura 7.4-Desenvolvimento da velocidade axial para vários números de Débora e para os casos a) UCM, b) $\beta=1/9$, c) $\beta=0.5$

Na Figura 7.5 são apresentados os perfis da velocidade axial para algumas posições ao longo da direção longitudinal das placas paralelas e para um número de Débora igual a um. Pode-se verificar que para todas as figuras a velocidade inicialmente aumenta, até que para uma determinada posição do comprimento das placas paralelas começa a diminuir estabilizando no valor de 1.5, de acordo com a existência dos picos de velocidade referidos na Figura 7.4. Também é apresentado o perfil de velocidades teórico de Hagen-Poiseuille (equação 5.2) e pode-se ver que a curva correspondente a uma posição próxima da saída e a curva correspondente a equação de Poiseuille se sobrepõem, o que justifica que o escoamento se encontra completamente desenvolvido.

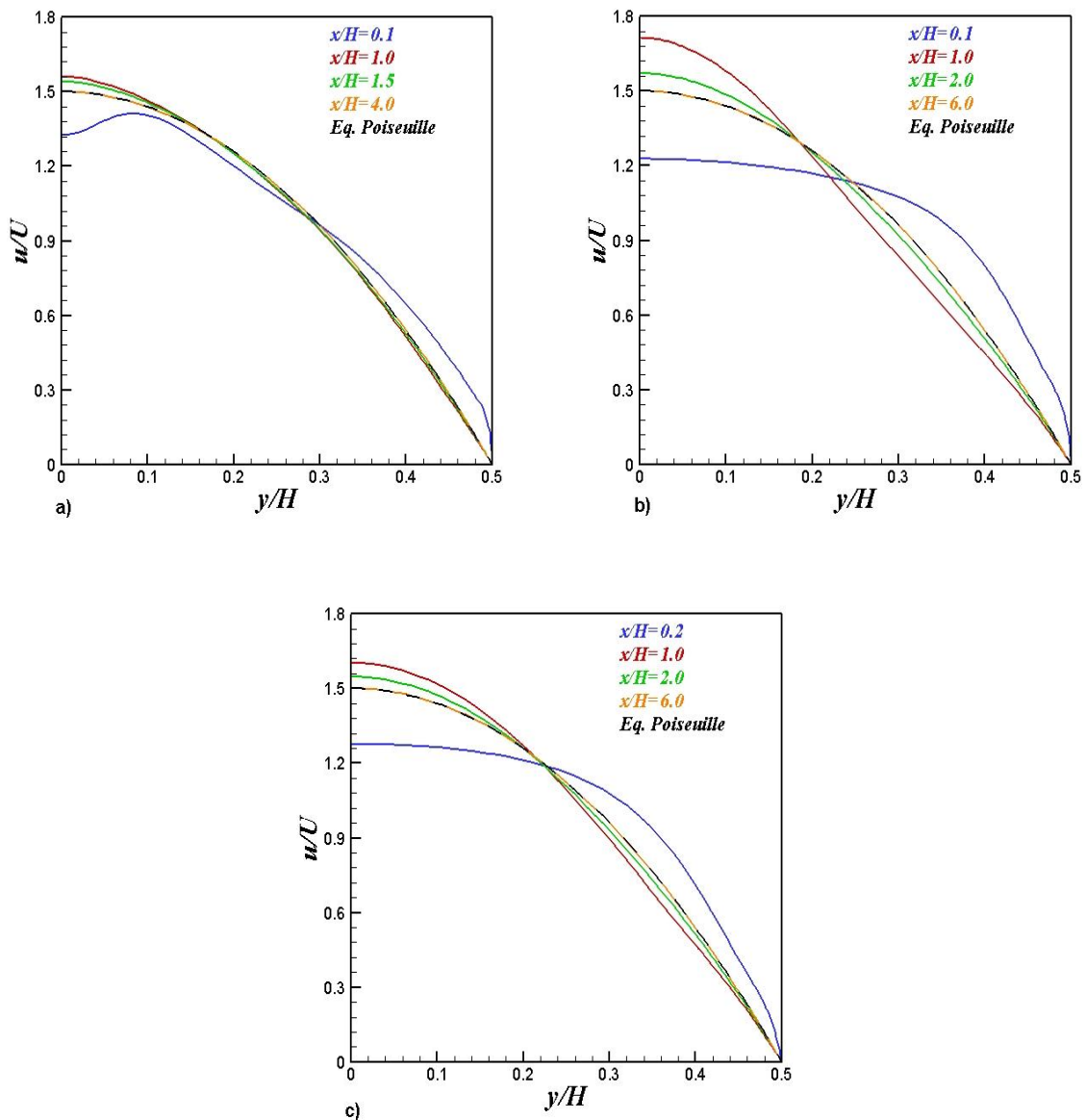


Figura 7.5- Desenvolvimento do perfil da velocidade axial para $De=1$ e para os casos a) UCM, b) $\beta=1/9$, c) $\beta=0.5$

Na Tabela 7.4 são apresentados os resultados do comprimento de entrada obtidos para a tensão de corte (τ_{xy}) e normal (τ_{xx}) (que para os fluidos viscoelásticos é diferente de zero) em função do número de Débora e para os casos UCM, $\beta=1/9$ e $\beta=0.5$.

Tabela 7.4- Valores do comprimento de entrada para a tensão de corte (τ_{xy}) e normal (τ_{xx}), obtidos em função do número de Débora

UCM			$\beta=1/9$			$\beta=0.5$		
<i>De</i>	$L_{E\tau_{xy}}$	$L_{E\tau_{xx}}$	<i>De</i>	$L_{E\tau_{xy}}$	$L_{E\tau_{xx}}$	<i>De</i>	$L_{E\tau_{xy}}$	$L_{E\tau_{xx}}$
0.001	0.6719	1.3244	0.001	0.7547	1.3388	0.001	0.7898	1.3625
0.002	0.6775	1.1926	0.002	0.7576	1.0298	0.002	0.7911	1.0688
0.005	0.6937	0.9018	0.005	0.7646	0.9990	0.005	0.7949	1.0315
0.01	0.7169	0.9003	0.01	0.7745	0.9683	0.01	0.8005	0.9951
0.02	0.7512	0.8951	0.02	0.7890	0.9336	0.02	0.8114	0.9563
0.05	0.8161	0.8922	0.05	0.8294	0.9018	0.05	0.8541	0.9264
0.1	0.9162	0.9523	0.1	0.9207	0.9490	0.1	0.9632	0.9871
0.15	1.0103	1.0557	0.15	1.0244	1.0793	0.15	1.1017	1.1596
0.2	1.0825	1.1784	0.2	1.1259	1.2250	0.2	1.2577	1.3528
0.3	1.5632	1.6365	0.3	1.3791	1.5269	0.3	1.6080	1.7757
0.4	2.0807	2.1687	0.4	1.7780	1.8638	0.4	1.9914	2.2332
0.5	2.5956	2.7001	0.5	2.1910	2.3002	0.5	2.4139	2.7099
0.6	3.1082	3.2298	0.6	2.5927	2.7204	0.6	2.8525	3.1986
0.7	3.6190	3.7593	0.7	3.0171	3.1683	0.7	3.3016	3.6942
0.8	4.1218	4.2820	0.8	3.4449	3.6191	0.8	3.7512	4.1953
0.9	4.6287	4.8084	0.9	3.8730	4.0706	0.9	4.2005	4.6985
1	5.1361	5.3354	1	4.3812	4.5199	1	4.6498	5.2047
			1.2	5.1583	5.4261			

Na Tabela 7.5 e 7.6 são apresentadas as correlações, para o cálculo do comprimento de entrada da tensão normal e de corte, e os valores dos seus coeficientes juntamente com o coeficiente de determinação (R^2) e a variância (χ^2), obtidas através do ajustamento aos valores do comprimento de entrada da tensão normal e de corte apresentados na Tabela 7.4. Verifica-se que para o comprimento de entrada da tensão normal a correlação só é válida a partir $De=0.005$. Para o comprimento de entrada da tensão de corte são apresentadas duas correlações, para assim obter uma melhor precisão dos valores obtidos por estas. Verifica-se que para ambos os casos o coeficiente de determinação é praticamente um e que a variância é praticamente zero.

Tabela 7.5- Correlação e coeficientes de ajustes obtidos para o comprimento de entrada da tensão normal

	$L_E=f(Re)$	C_1	C_2	C_3	C_4	R^2	χ^2
UCM	$L_{E_{\tau_{xx}}} = C_1 + \frac{C_2 De}{1 + C_3 De^2} + C_4 De$ $De \geq 0.005$	0.9018	-4.889	11.599	4.8281	0.9999	0.0044
$\beta=1/9$	$L_{E_{\tau_{xx}}} = \frac{C_1 + C_2 De}{1 + C_3 De} + C_4 De$ $De \geq 0.005$	0.9990	-2.492	5.4149	4.7466	0.9999	0.0047
$\beta=0.5$	$L_{E_{\tau_{xx}}} = \frac{C_1 + C_2 De}{1 + C_3 De} + C_4 De$ $De \geq 0.005$	1.0315	-0.357	10.208	5.1430	0.9999	0.0013

Tabela 7.6- Correlação e coeficientes de ajustes obtidos para o comprimento de entrada da tensão de corte

	$L_E=f(Re)$	C_1	C_2	C_3	C_4	R^2	χ^2
UCM	$L_{E_{\tau_{xy}}} = \frac{C_1 + C_2 De}{1 + C_3 De + C_4 De^2}$ $De < 0.2$	0.6638	34.361	41.068	-63.27	0.9998	6.124×10^{-5}
	$L_{E_{\tau_{xy}}} = C_1 + C_2 De$ $De \geq 0.2$	0.0821	5.0311	-	-	0.9999	0.0042
$\beta=1/9$	$L_{E_{\tau_{xy}}} = \frac{C_1 + C_2 De}{1 + C_3 De + C_4 De^2}$ $De < 0.3$	0.7567	-2.7235	-5.4263	6.854	0.9998	6.18×10^{-5}
	$L_{E_{\tau_{xy}}} = C_1 + C_2 De$ $De \geq 0.3$	0.0726	4.2448	-	-	0.9998	0.0078
$\beta=0.5$	$L_{E_{\tau_{xy}}} = \frac{C_1 + C_2 De}{1 + C_3 De + C_4 De^2}$ $De < 0.3$	0.7868	15.3738	17.9614	-38.30	0.9995	2.101×10^{-4}
	$L_{E_{\tau_{xy}}} = C_1 + C_2 De$ $De \geq 0.3$	0.2486	4.3808	-	-	0.9994	0.0044

Na Figura 7.6 pode-se visualizar os resultados obtidos do comprimento de entrada para a tensão normal e de corte em função do número de Débora, bem como as correlações ajustadas a esses mesmos valores. Verifica-se que para a tensão normal a curva é não monótona, pois a curva começa por diminuir até $De=0.05$, e a partir deste valor começa a crescer, uma

característica que é comum aos três casos. As curvas para $\beta=1/9$ e $\beta=0.5$ são muito semelhantes, pois apresentam a mesma forma de diminuição e de aumento do comprimento de entrada. Já a curva para UCM o declive da zona onde o comprimento de entrada diminui é mais acentuado. As curvas correspondentes ao comprimento de entrada para a tensão de corte são monótonas e verifica-se que para números de Débora baixos os valores do comprimento de entrada para $\beta=1/9$ e 0.5 são superiores aos obtidos para o modelo UCM, enquanto que para números de Débora aproximadamente maiores que 0.2 as curvas tendem aproximar-se. Pode-se ainda referir a boa aproximação das correlações, pois os resultados obtidos por estas se sobrepõem aos resultados obtidos numericamente, como pode ser visto na Figura 7.6

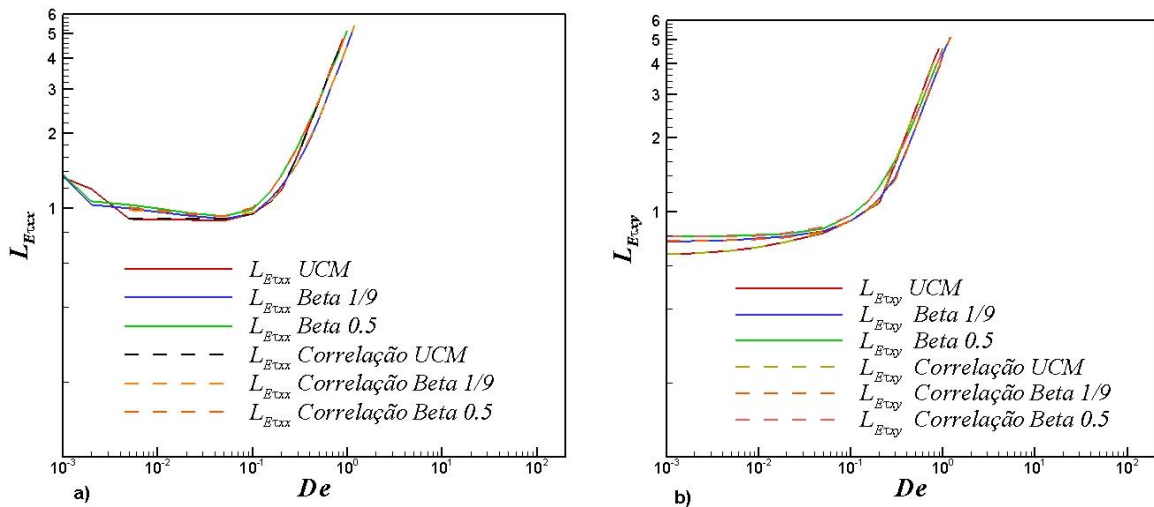


Figura 7.6- Comprimento de entrada em função do número de Débora para os casos UCM, $\beta=1/9$, $\beta=0.5$ e para a) a tensão normal, b) a tensão de corte

Na Figura 7.7 apresenta-se o desenvolvimento do perfil da tensão normal em função da altura das placas paralelas para um número de Débora igual a um, juntamente com a sua respetiva equação analítica que foi apresentada no capítulo 3 (Equação 3.9) e para os casos analisados nesta secção. Verifica-se que o modo como a tensão normal se desenvolve ao longo da direção longitudinal das placas paralelas é o mesmo para os três casos apresentados. A tensão normal é zero no eixo de simetria e atinge o seu valor máximo junto a parede das placas paralelas, sendo este máximo função do número de Débora que por sua vez depende do tempo de relaxação de Maxwell (λ).

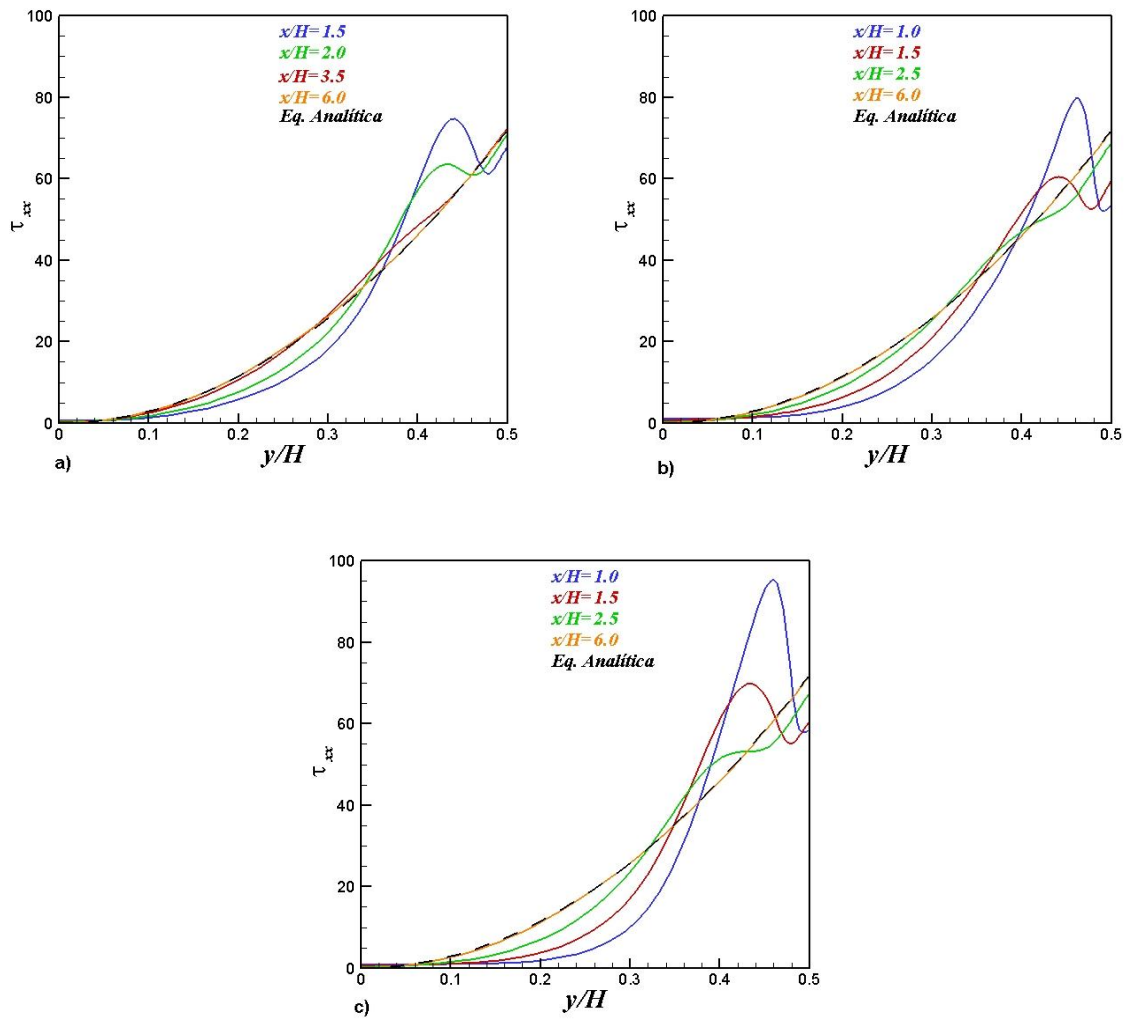


Figura 7.7- Desenvolvimento do perfil da tensão normal para $De=1$ e para os casos a) UCM, b) $\beta=1/9$, c) $\beta=0.5$

Na Figura 7.8 apresenta-se o desenvolvimento do perfil da tensão de corte em função da altura das placas paralelas para um número de Débora igual a um, juntamente com a sua respetiva equação analítica que foi apresentada no capítulo 3 (Equação 3.10) e para os casos analisados nesta secção. Verifica-se que o modo como a tensão de corte se desenvolve ao longo da direção longitudinal das placas paralelas é o mesmo para os três casos apresentados. A tensão de corte é zero no eixo de simetria e atinge o seu valor mínimo junto a parede das placas paralelas.

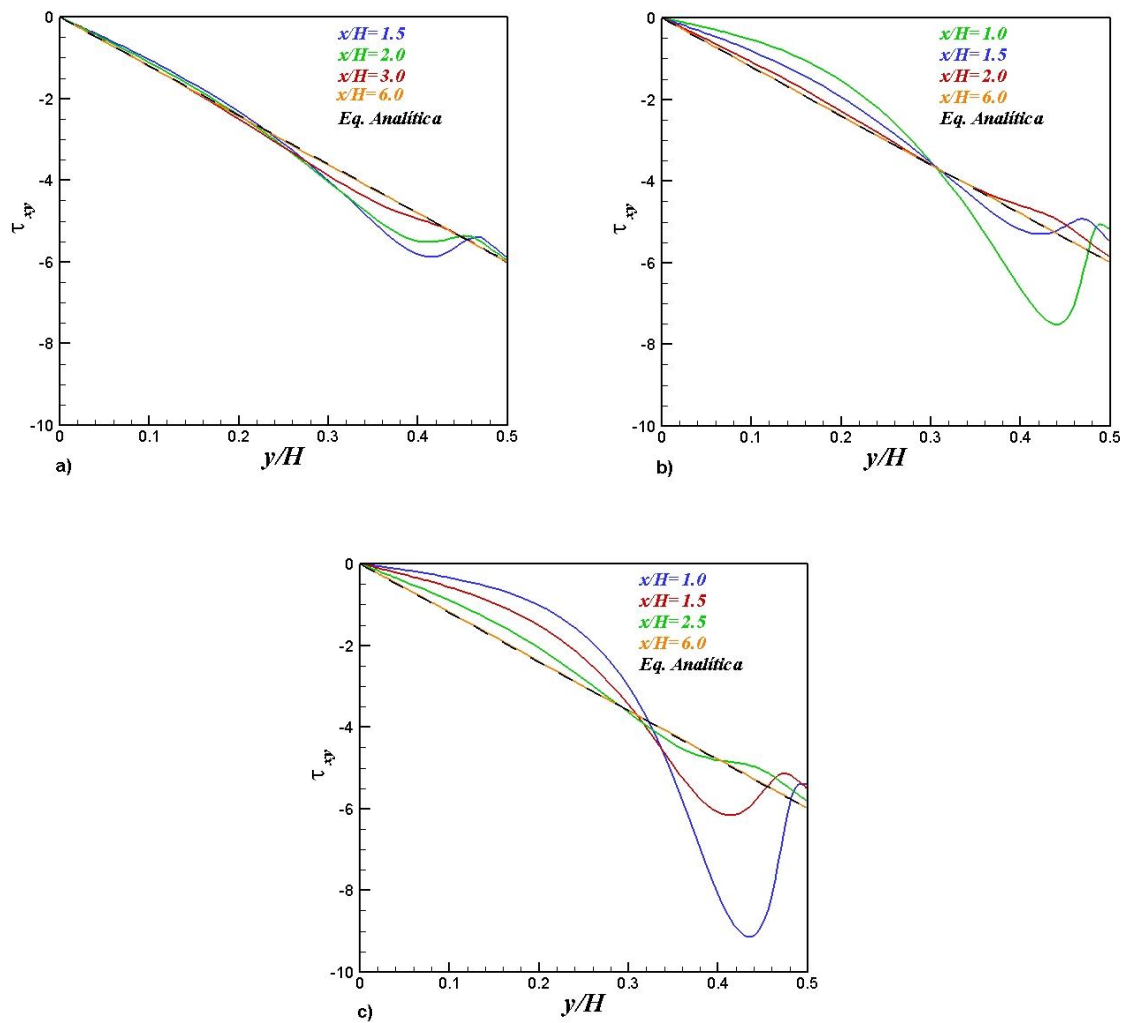


Figura 7.8- Desenvolvimento do perfil da tensão de corte para $De=1$ e para os casos a) UCM, b) $\beta=1/9$, c) $\beta=0.5$

7.5 Efeito da Inércia (variação do número de elasticidade (El))

Na Tabela 7.7 apresentam-se os valores do comprimento de entrada da velocidade, obtidos através da utilização da malha M_{16} , que segundo a secção 7.3, têm um erro inferior a 3%, para os três valores do número de elasticidade (El) e utilizando o modelo UCM.

Tabela 7.7-Valores do comprimento de entrada da velocidade para três diferentes números de elasticidade em função do número de Reynolds e de Débora, para o fluido UCM

$El=0.1$				$El=1$				$El=10$			
De	Re	L_E		De	Re	L_E		De	Re	L_E	
0.001	0.01	0.5187		0.001	0.001	0.5186		0.01	0.001	0.5305	
0.002	0.02	0.5203		0.002	0.002	0.5201		0.02	0.002	0.5415	
0.005	0.05	0.5248		0.005	0.005	0.5244		0.05	0.005	0.5443	
0.01	0.1	0.5313		0.01	0.01	0.5306		0.1	0.01	0.4867	
0.02	0.2	0.5428		0.02	0.02	0.5416		0.15	0.015	0.4071	
0.05	0.5	0.5439		0.05	0.05	0.5442		0.2	0.02	0.3513	
0.1	1	0.4751		0.1	0.1	0.4856		0.3	0.03	0.8783	0.2913
0.15	1.5	0.3721		0.15	0.15	0.4033		0.4	0.04	1.1259	0.2746
0.2	2	0.6305	0.2784	0.2	0.2	0.3440		0.5	0.05	1.3639	0.2633
0.3	3	0.9319	0.1742	0.3	0.3	0.8821	0.2786	0.9	0.09	2.3190	0.2323
0.4	4	1.8543	0.2609	0.4	0.4	1.1299	0.2429	1	0.1	2.5617	0.2233
0.5	5	2.9625	0.3616	0.5	0.5	1.3765	0.2152				
				0.9	0.9	2.5059	0.1301				
				1	1	2.8012	0.1465				

Na Figura 7.9 apresentam-se os valores do comprimento de entrada da velocidade em função do número de Reynolds e de Débora, para os números de elasticidade 0.1, 1 e 10 (ver Tabela 7.7). Observa-se que quanto maior o número de elasticidade menor é o número de Reynolds necessário, para se atingir a mesma gama de valores do comprimento de entrada (Figura 7.9a). Verifica-se novamente a existência da bifurcação nos valores do comprimento de entrada para um número de Débora igual a 0.2 e para um número de elasticidade 0.1, já para os números de elasticidade 1 e 10 esta bifurcação é para um número de Débora igual a 0.3 (Tabela 7.7). Esta bifurcação é comum aos três números de elasticidade, sendo praticamente idêntica, como se pode verificar na Figura 7.9b.

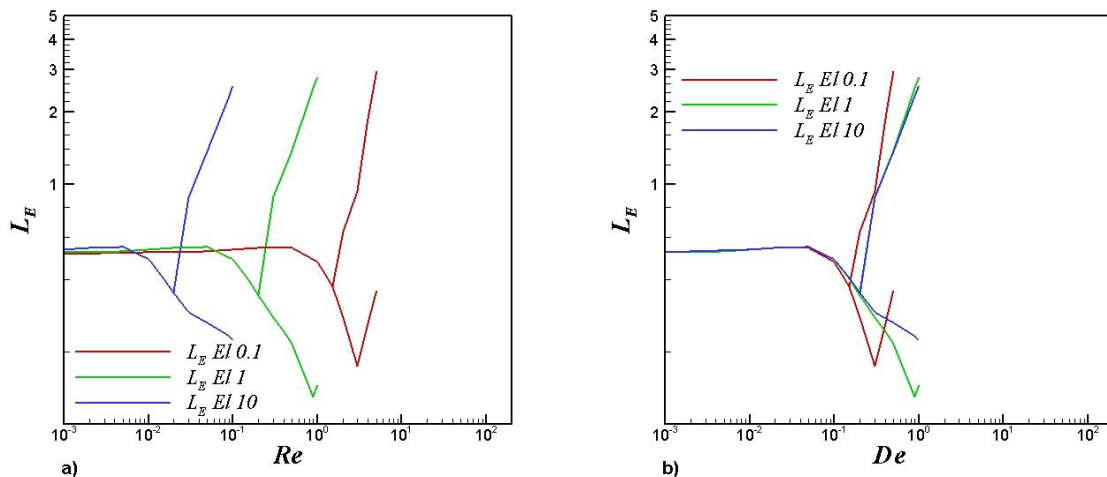


Figura 7.9- Comprimento de entrada da velocidade para os números de elasticidade 0.1, 1 e 10 a) em função do número de Reynolds b) em função do número de Débora

Na Figura 7.10 é apresentado o desenvolvimento do perfil da velocidade axial, segundo a direção longitudinal, para os três números de elasticidade analisados nesta secção e para vários números de Débora. É possível verificar a existência de uns picos na velocidade axial (overshoots), antes de esta estabilizar no valor de 1.5. Este fenómeno vai aumentando com o aumento do número de Débora. Também se verifica que para números de Débora baixos, as curvas da velocidade praticamente não apresentam picos e que estes diminuem em magnitude com o aumento do número de elasticidade. Comparando esta figura com a que foi apresentada na secção anterior verifica-se que para números de Débora altos e para os números de elasticidade 0.1 e 1 existem umas oscilações, e que estas diminuem com o aumento do número de elasticidade. Uma explicação para este facto é que agora o número de Reynolds não é nulo, o que faz intervir a velocidade convectiva e/ou o tempo característico para a convecção, e com isto aparece o número de Mach elástico ($Ma_e = \sqrt{Re * De}$). Assim verifica-se que para números de Mach elástico iguais ou superiores à unidade há um aparecimento de oscilações. A razão de aparecer para os números de elasticidade 0.1 e 1 é porque para estes casos os números de Reynolds são mais elevados.

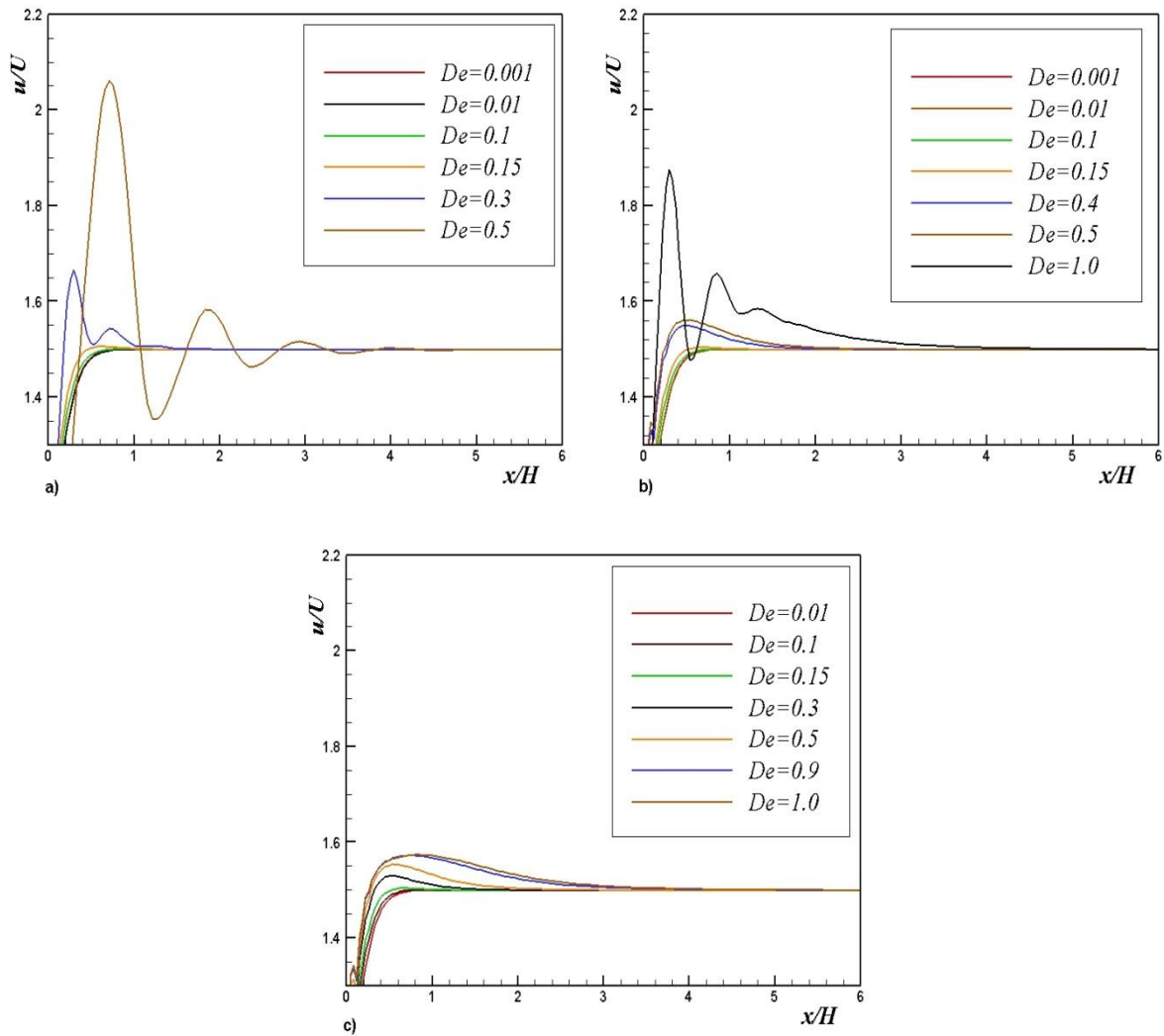


Figura 7.10-Desenvolvimento da velocidade axial segundo a direção longitudinal para a) $El=0.1$ b) $El=1$ c) $El=10$

No anexo C encontram-se os perfis da velocidade axial juntamente com a equação de Poiseuille (5.2), para algumas posições ao longo da direção longitudinal das placas paralelas e para um número de Dóbra igual a um, com exceção do número de elasticidade igual a 0.1 que é para um número de Dóbra igual a 0.5.

Na Tabela 7.8 são apresentados os valores do comprimento de entrada para a tensão de corte (τ_{xy}) e normal (τ_{yy}), em função do número de Dóbra e de Reynolds e para os números de elasticidade 0.1, 1 e 10.

Tabela 7.8- Valores do comprimento de entrada para a tensão de corte (τ_{xy}) e normal (τ_{xx}), obtidos em função do número de Débora e Reynolds para o fluido UCM

<i>El=0.1</i>				<i>El=1</i>				<i>El=10</i>			
<i>De</i>	<i>Re</i>	<i>L_{Eτ_{xy}}</i>	<i>L_{Eτ_{xx}}</i>	<i>De</i>	<i>Re</i>	<i>L_{Eτ_{xy}}</i>	<i>L_{Eτ_{xx}}</i>	<i>De</i>	<i>Re</i>	<i>L_{Eτ_{xy}}</i>	<i>L_{Eτ_{xx}}</i>
0.001	0.01	0.6805	1.3284	0.001	0.001	0.6804	1.3279	0.01	0.001	0.7056	0.8874
0.002	0.02	0.6837	1.1899	0.002	0.002	0.6836	1.1883	0.02	0.002	0.7341	0.8762
0.005	0.05	0.6929	0.8975	0.005	0.005	0.6925	0.8975	0.05	0.005	0.8015	0.8778
0.01	0.1	0.7063	0.8875	0.01	0.01	0.7057	0.8874	0.1	0.01	0.9222	0.9480
0.02	0.2	0.7351	0.8765	0.02	0.02	0.7342	0.8762	0.15	0.015	1.0495	1.0952
0.05	0.5	0.8011	0.8769	0.05	0.05	0.8014	0.8777	0.2	0.02	1.1790	1.2679
0.1	1	0.9133	0.9408	0.1	0.1	0.9213	0.9473	0.3	0.03	1.4400	1.6510
0.15	1.5	1.0330	1.0850	0.15	0.15	1.0475	1.0939	0.4	0.04	1.7201	2.0675
0.2	2	1.1544	1.2543	0.2	0.2	1.1755	1.2662	0.5	0.05	2.0143	2.5007
0.3	3	1.4438	1.6277	0.3	0.3	1.4367	1.6507	0.9	0.09	3.4154	4.3018
0.4	4	1.7141	2.0566	0.4	0.4	1.7237	2.0695	1	0.1	3.7861	4.7594
0.5	5	2.6733	2.8798	0.5	0.5	2.0297	2.5015				
				0.9	0.9	3.6994	4.2982				
				1	1	4.1624	4.7490				

Na Figura 7.11 pode-se visualizar o comprimento de entrada para a tensão normal e de corte em função do número de Reynolds. Verifica-se que para a tensão normal a curva é não monótona, pois a curva começa por diminuir até um certo número de Reynolds (este valor depende do número de elasticidade), e a partir desse valor começa a crescer, uma característica que é comum aos três casos. Para o caso do número de elasticidade igual a dez esta característica não é tão evidente, porque a magnitude dessa diminuição é pequena, como pode ser visto pelos valores apresentados na Tabela 7.8. As curvas correspondentes ao comprimento de entrada para a tensão de corte são monótonas, ou seja, o comprimento de entrada aumenta com o número de Reynolds. Verifica-se também que com o aumento do número de elasticidade menor é a gama de números de Reynolds necessária para se atingir gamas de comprimento de entrada equivalentes, esta característica é comum as duas tensões. Enquanto que na Figura 7.12 são apresentados os valores do comprimento de entrada para a tensão normal e de corte em função do número de Débora, onde pode-se verificar que todas as curvas apresentam a mesma forma e não são afetadas pelo aumento do número de elasticidade. Verifica-se então que para o comprimento de entrada da tensão normal existe um valor comum para o número de Débora ($De \approx 0.05$), a partir do qual o comprimento de entrada começa a aumentar.

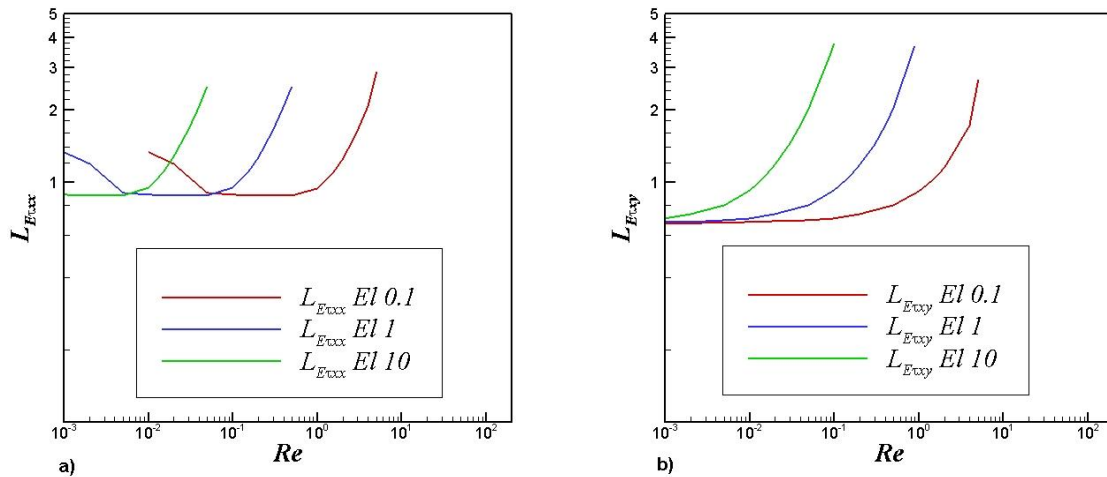


Figura 7.11- Comprimento de entrada em função do número de Reynolds para a) a tensão normal, b) a tensão de corte

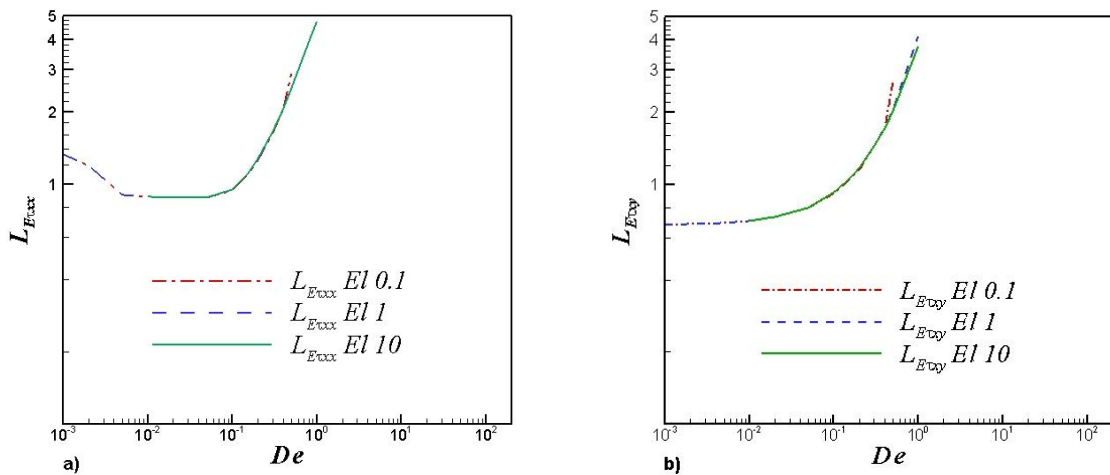


Figura 7.12- Comprimento de entrada em função do número de Débora para a) a tensão normal, b) a tensão de corte

No anexo D são apresentados os perfis da tensão normal e de corte juntamente com as suas respectivas equações analíticas (Equações 3.9 e 3.10). Os resultados apresentados são para os números de elasticidade 0.1, 1 e 10 e um número de Débora igual a 1, com exceção do número de elasticidade igual a 0.1 que é para um número de Débora igual a 0.5. Pode-se verificar então que para este número de elasticidade o valor máximo da tensão normal é menor em comparação com os outros números de elasticidade, o que comprova a dependência da tensão normal com o tempo de relaxação de Maxwell (λ), que por sua vez se relaciona com o número de Débora. Relativamente à tensão de corte verifica-se que esta não é afetada pelo número de Débora.

7.6 Efeito da viscosidade do solvente

De seguida vão ser apresentados os resultados para o comprimento de entrada da velocidade, da tensão normal e da tensão de corte obtidos com o modelo de Oldroyd-B, para dois valores diferentes da razão de viscosidade (β) em função do número do número de Reynolds e de Débora. Os resultados apresentados foram obtidos utilizando para esse cálculo a malha M_{16} que segundo a secção 7.3, têm um erro inferior a 3%.

7.6.1 Comparação dos resultados obtidos para as razões de viscosidade (β) 1/9 e 0.5

Na Figura 7.13 é apresentado a comparação entre os valores dos comprimentos de entrada da velocidade, que encontram-se tabelados no anexo A, para as razões de viscosidade 1/9 e 0.5 e para os números de elasticidade 0.1, 1 e 10. Da análise da Figura 7.13a, constata-se que os valores do comprimento de entrada são maiores para $\beta=0.5$ e isto verifica-se para os três valores do número de elasticidade, mas para números de Débora menores que 0.2. Pois para números de Débora maiores que 0.2 os valores do comprimento de entrada tendem a aproximar-se (Figura 7.13b). Mais uma vez pode-se referir que com o aumento do número de elasticidade consegue-se atingir o mesmo valor para o comprimento de entrada, mas com um menor número de Reynolds. Verifica-se outra vez a existência de uma bifurcação no cálculo do comprimento de entrada, para um valor de $De=0.2$. Esta característica verifica-se para os três números de elasticidade e para as duas razões de viscosidade apresentadas.

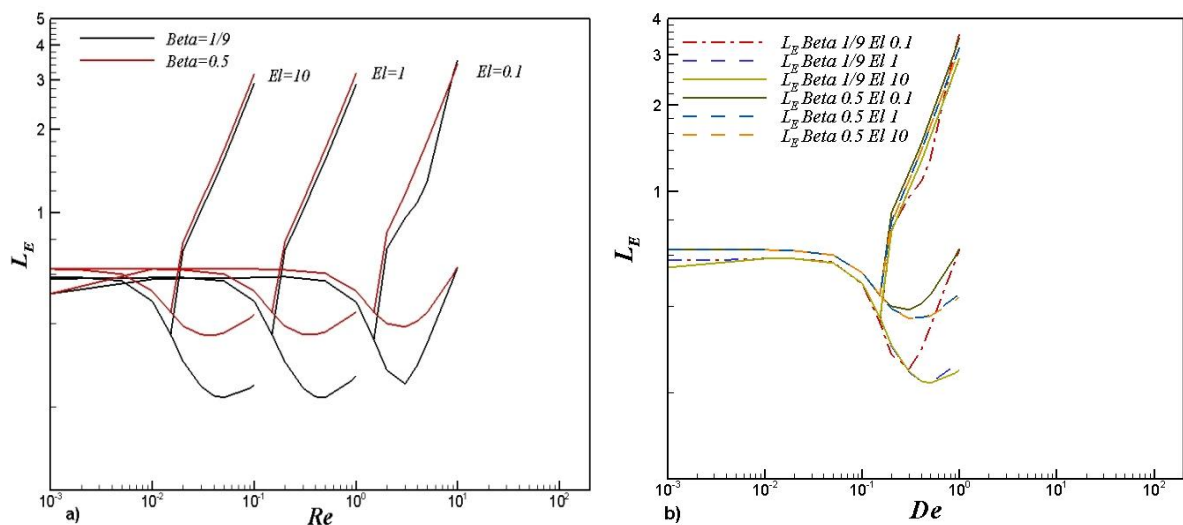


Figura 7.13- Comparação do comprimento de entrada da velocidade entre $\beta=1/9$ e 0.5, para três diferentes valores do número de elasticidade em função do a) número de Reynolds b) número de Débora

Nas Figuras 7.14 e 7.15 é apresentado o desenvolvimento da velocidade axial para as razões de viscosidade 1/9 e 0.5 e para os números de elasticidade 0.1, 1 e 10.

Analisando a Figura 7.14, onde-se encontra o desenvolvimento da velocidade para a razão de viscosidade 1/9, verifica-se que mesmo o número de Reynolds não sendo nulo as oscilações praticamente não existem. Só na Figura 7.14a é que são detetadas algumas oscilações, pois para este caso os números de Reynolds ainda são elevados acabando por desaparecer para os outros dois casos apresentados (Figura 7.14b e c). Relativamente a Figura 7.15 verifica-se que para os três números de elasticidade apresentados, estes não apresentam oscilações. Esta diminuição das oscilações ou até mesmo inexistência em comparação com a figura correspondente ao desenvolvimento da velocidade para o modelo UCM, deve-se à introdução de um solvente no escoamento. Isto faz com que as equações deixem de ser hiperbólicas e passem a ser elípticas, devido ao intenso carácter difusivo dos solventes. O que não desapareceu foram os picos na velocidade, pois isso está relacionado com o efeito elástico.

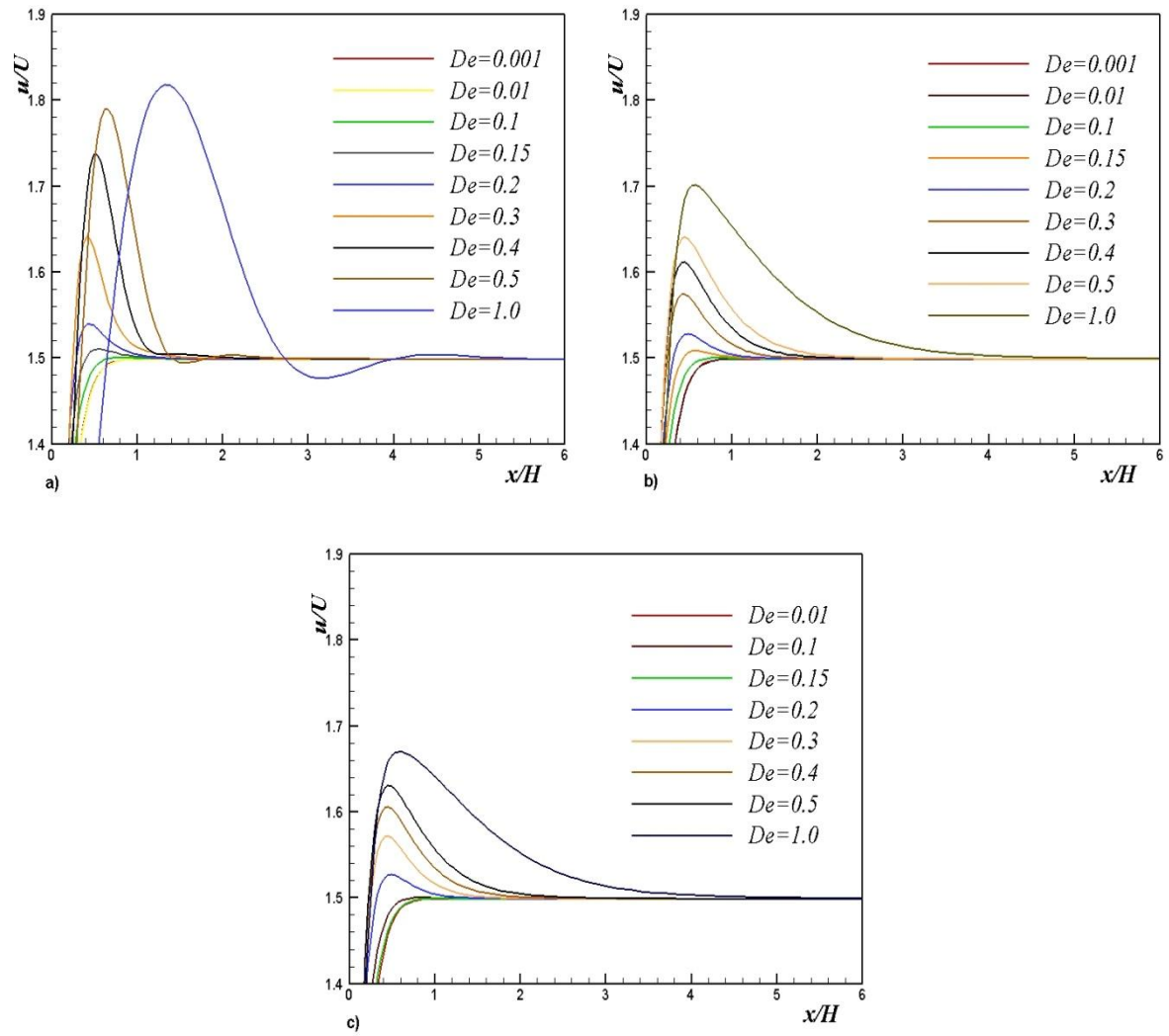


Figura 7.14- Desenvolvimento da velocidade axial para $\beta=1/9$ e para a) $El=0.1$ b) $El=1$ c) $El=10$

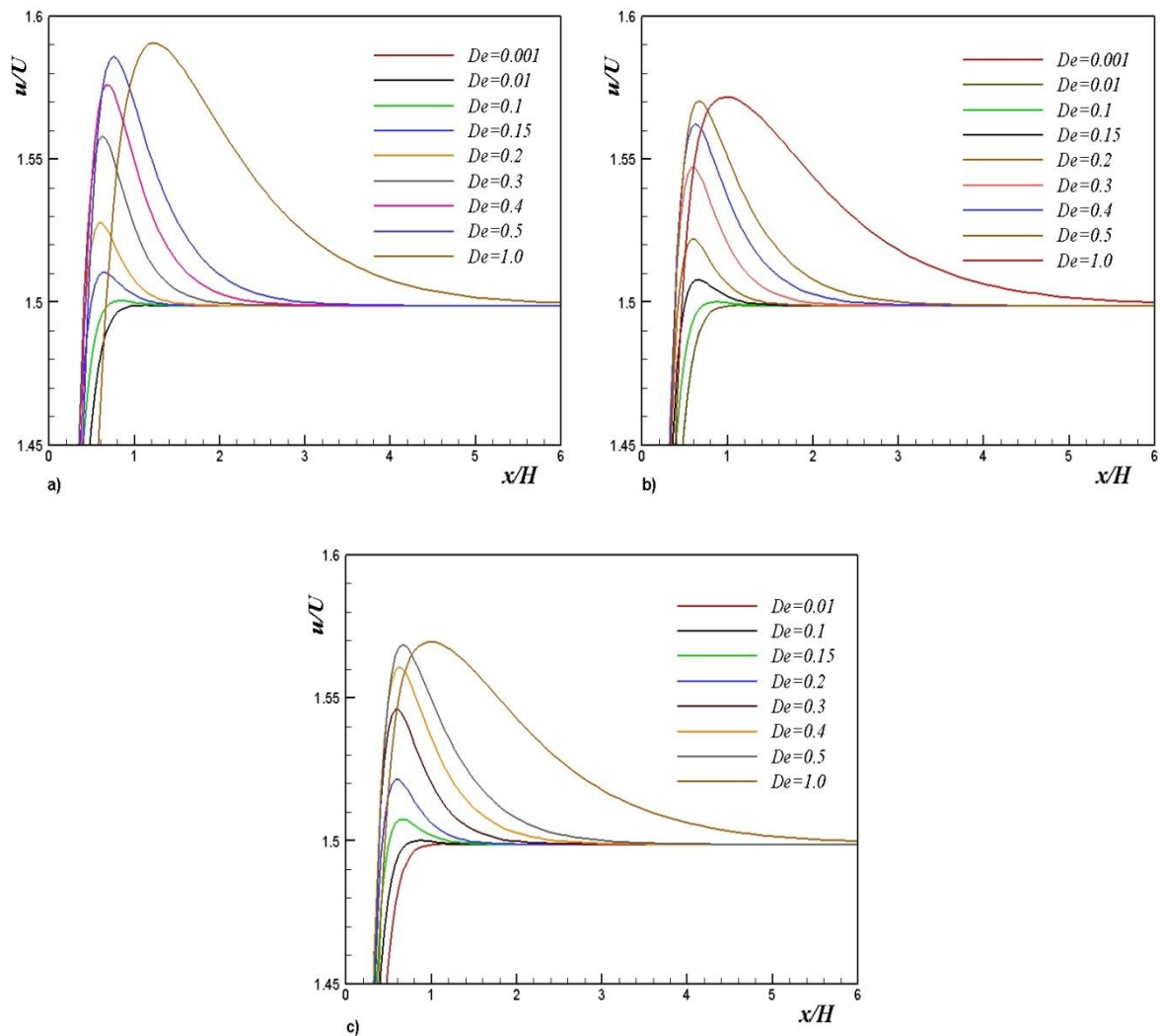


Figura 7.15- Desenvolvimento da velocidade axial para $\beta=0.5$ e para a) $El=0.1$ b) $El=1$ c) $El=10$

Os perfis da velocidade axial para as razões de viscosidade 1/9 e 0.5 encontram-se nos anexos E e F, respetivamente.

Na Figura 7.16 pode-se visualizar a comparação do comprimento de entrada da tensão normal para as razões de viscosidade 1/9 e 0.5 e para os valores do número de elasticidade 0.1, 1 e 10 em função do número de Reynolds e de Débora. Os valores destes comprimentos de entrada encontram-se tabelados no anexo B. Tal como para os valores do comprimento de entrada da velocidade, existe um ligeiro aumento do comprimento de entrada da tensão normal para $\beta=0.5$, mas para números de Débora baixos, enquanto que para números de Débora altos as curvas tendem a aproximar-se.

Verifica-se que para valores altos do número de elasticidade menor é a gama de números de Reynolds necessária para se atingir um valor do comprimento de entrada equivalente ao que se obteve para valores baixos do número de elasticidade. Pode-se também referir que as curvas da tensão normal não são monótonas pois a curva começa por diminuir até $De \approx 0.05$ (Figura 7.16b) e a partir desse valor começa a crescer. Para o caso do número de elasticidade igual a dez esta característica não é tão evidente, porque a magnitude dessa diminuição é pequena, como pode ser visto pelos valores apresentados no anexo B. Estas características são comuns as razões de viscosidade 1/9 e 0.5.

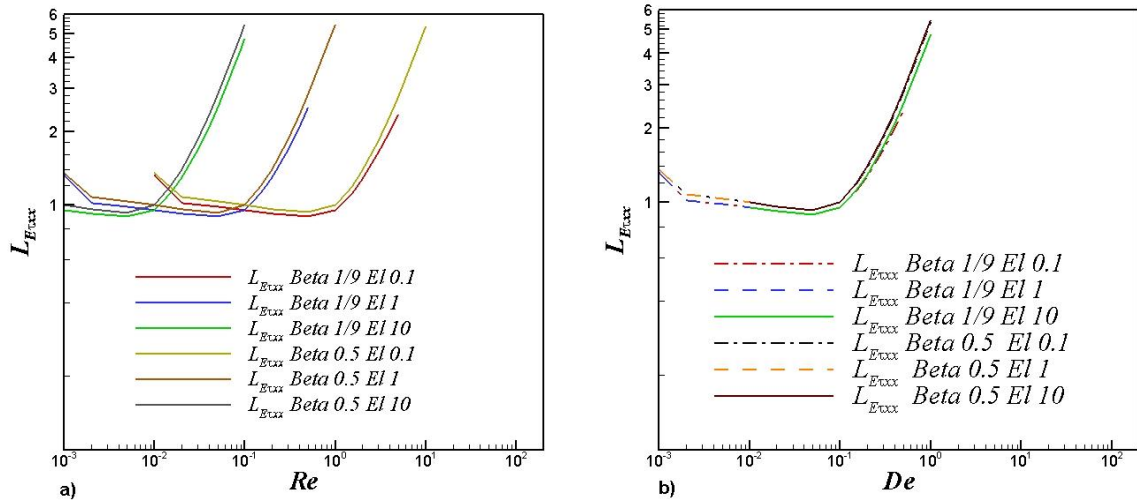


Figura 7.16- Comparação do comprimento de entrada da tensão normal entre $\beta=1/9$ e 0.5, para três diferentes valores do número de elasticidade em função do a) número de Reynolds b) número de Débora

Na Figura 7.17 compara-se agora os valores do comprimento de entrada para a tensão de corte, que se encontram tabelados no anexo B. A comparação é feita entre as razões de viscosidade 1/9 e 0.5 e para os números de elasticidade 0.1, 1 e 10 em função do número de Reynolds e de Débora. Onde-se verifica um aumento dos valores do comprimento de entrada da tensão de corte para a razão de viscosidades igual a 0.5, em comparação com a razão de viscosidades igual a 1/9. As curvas são monótonas, e para números de elasticidade altos a gama de números de Reynolds é menor em comparação com números de elasticidade baixos, mesmo assim atingem-se valores iguais para o comprimento de entrada da tensão de corte.

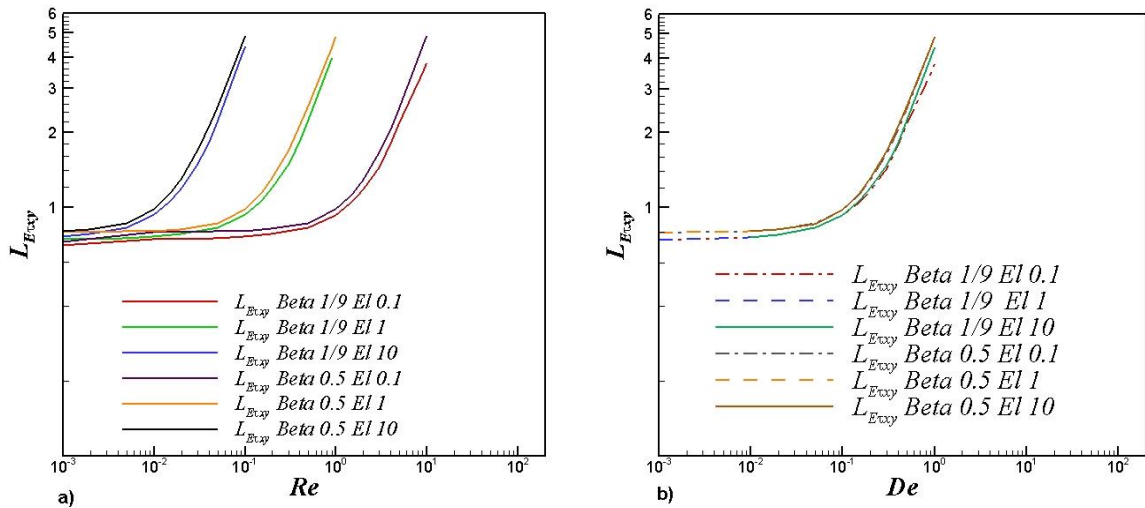


Figura 7.17- Comparação do comprimento de entrada da tensão de corte entre $\beta=1/9$ e 0.5, para três diferentes valores do número de elasticidade em função do a) número de Reynolds b) número de Débora

Relativamente aos perfis da tensão normal e de corte, para as razões de viscosidade 1/9 e 0.5 estes encontram-se nos anexos E e F respetivamente.

7.7 Efeito das condições de entrada

O comportamento não monótono das curvas do comprimento de entrada para os fluidos viscoelásticos foi estudado, nas secções anteriores, relacionado com o desenvolvimento das tensões na entrada da conduta, assim como com os picos de velocidades obtidos ao longo do eixo de simetria da conduta. A descida inicial do valor do comprimento de entrada para os fluidos viscoelásticos a números de Débora baixos ($De < 0.2$), pode também estar relacionada com as condições impostas na entrada da conduta, isto é, com a imposição de um perfil uniforme para a velocidade e perfil nulo para as tensões. Para confirmar esta possibilidade, nesta secção faz-se uma comparação entre os resultados obtidos para o modelo Oldroyd-B (com $\beta=1/9$) nas placas paralelas com os resultados obtidos por Afonso et al. (2011) numa geometria de contração plana com razão 1:4. Essa geometria bidimensional está representada na Figura 7.18, e pode-se verificar que as condições de entrada no canal mais estreito são diferentes das condições de perfil uniforme regularizado (ver secção 7.2, Figura 7.1), pois existe um pré-desenvolvimento do escoamento a montante da contração, bem como o efeito da existência da recirculação nos cantos da contração. Assim, os perfis de velocidade e tensões na entrada do canal mais estreito ($x=0$) não são uniformes, como se pode verificar na Figura 7.19, o que irá influenciar o comprimento de entrada, como referido em alguns trabalhos apresentados no capítulo 2 (Sadri e Floryan (2002), Lee et al. (2002), Lee e Kim (2003) e Ahmad e Hassan (2010)).

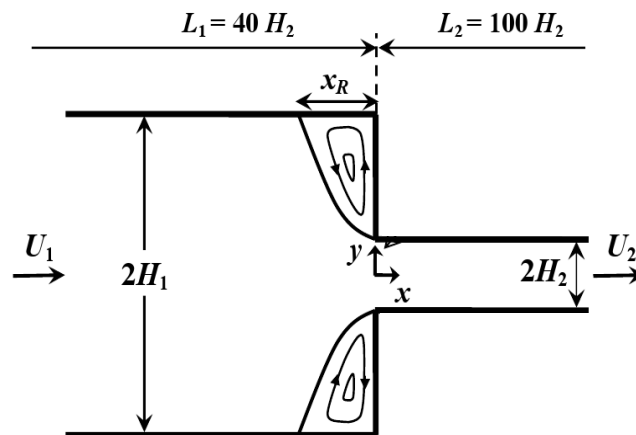


Figura 7.18-Geometria da contração 1:4 (retirado de Afonso et al. 2011)

Na Figura 7.19a verifica-se que o perfil de velocidades na contração para $x=0$ é praticamente independente do número de Débora, mas diferente do apresentado na Figura 7.1. Verifica-se ainda que os perfis da velocidade transversal (v) e das tensões não são nulos (Figura 7.19 (b-e)).

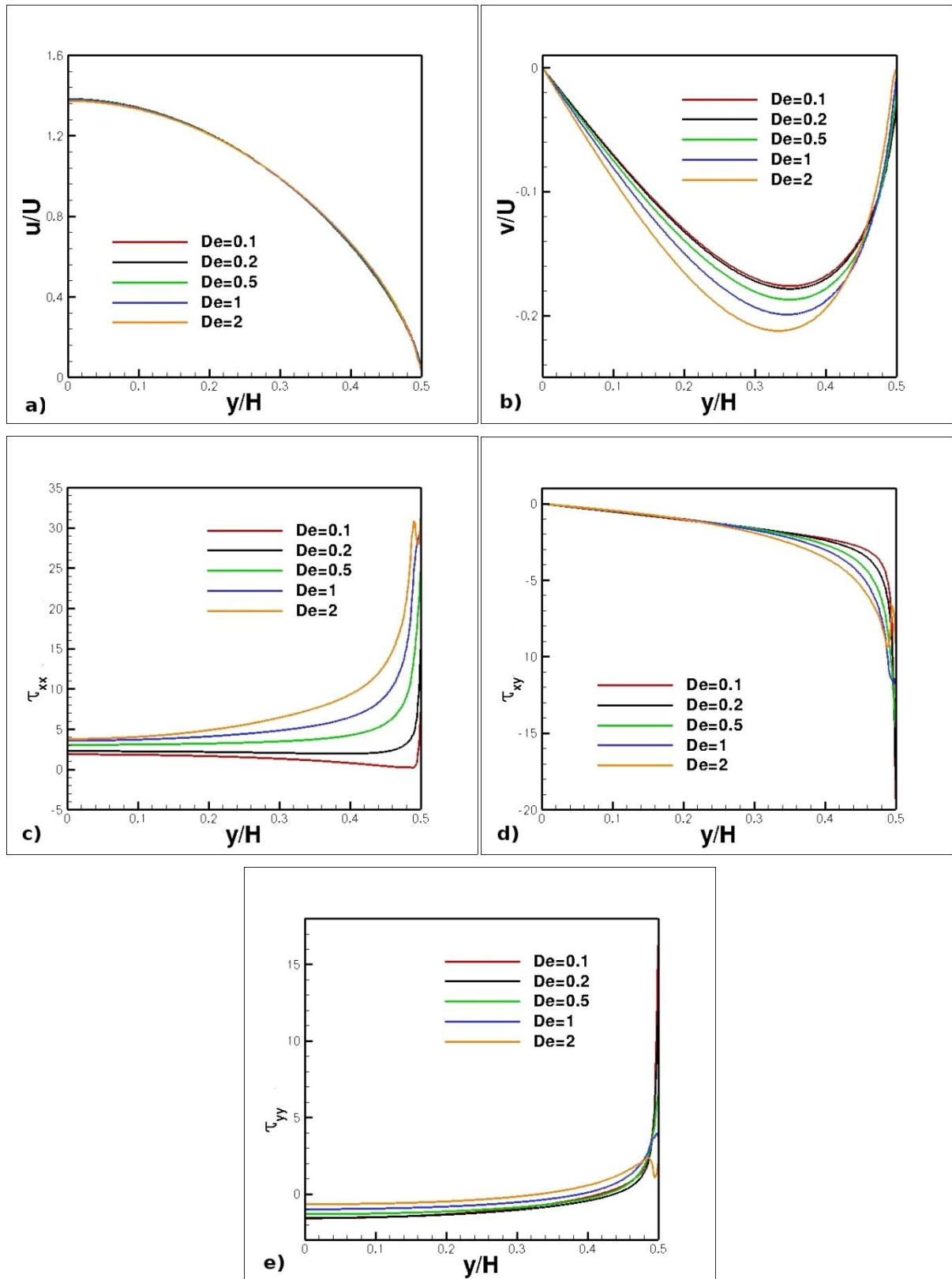


Figura 7.19- Perfis de entrada para o escoamento de um fluido Oldroyd-B com $\beta=1/9$ e condições de inércia desprezável: a) u , b) v c) τ_{xx} d) τ_{xy} e e) τ_{yy} (retirado de Afonso et al 2011).

O efeito destas diferentes condições de entrada no comprimento de entrada podem ser observados na Figura 7.20 (a) e (b), para condições de inércia desprezável e para números de elasticidade 1 e 10, respetivamente. Nestas figuras pode-se verificar que, apesar de ambas apresentarem comportamento monótono, para baixos valores do número de Débora (ou Reynolds, na Figura 7.20b) as curvas divergem, mas para valores elevados do número de

Débora ($De > 0.2$ para placas paralelas e $De > 1$ para a contração 1:4) os declives das curvas são coincidentes. Este facto pode indicar que a descida inicial do comprimento de entrada para valores baixos de De (e Re) se deve às condições de entrada, enquanto que para valores elevados do número de Débora os resultados são independentes das condições de entrada, sendo dependentes apenas das propriedades que caracterizam o fluido viscoelástico.

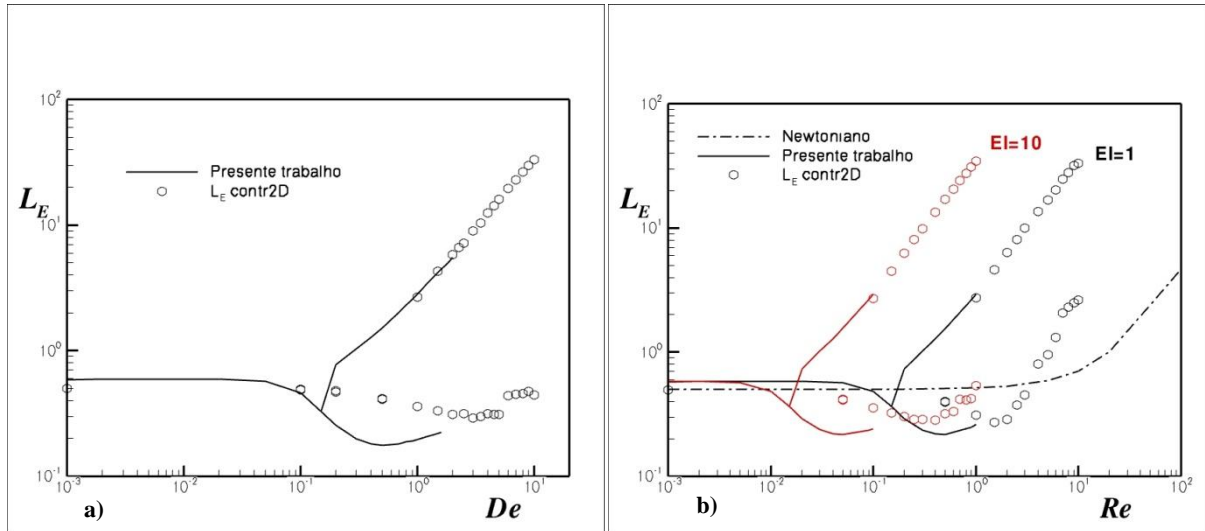


Figura 7.20- Comparação entre o comprimento de entrada em placas paralelas e numa contração 1:4 para um fluido Oldroyd-B com $\beta=1/9$: a) condições de inércia desprezável e b) $El=1$ e 10 (retirado de Afonso et al 2011).

7.8 Conclusão

Verifica-se que para fluidos viscoelásticos o comprimento de entrada para a velocidade apresenta uma bifurcação para um número de Débora aproximadamente igual a 0.2. Como se demonstrou neste capítulo, esta característica é comum a todos os casos analisados e pode dever-se as condições de entrada aplicadas e ao aparecimento dos picos nos perfis de velocidade no eixo da conduta para fluidos viscoelásticos.

Pode-se ainda referir que para valores altos do número de elasticidade é necessária uma menor gama de números de Reynolds, para que se atinja comprimentos de entrada equivalentes, em comparação com valores baixos do número de elasticidade.

São ainda apresentadas correlações para o cálculo do comprimento de entrada da velocidade, da tensão normal e de corte em função do número de Débora, e verifica-se que estas têm uma boa precisão no cálculo dos comprimentos de entrada.

Relativamente aos perfis da velocidade axial verifica-se que estes apresentam uns picos de velocidade para números de Débora elevados devido ao efeito elástico do fluido. Em escoamentos para números de Reynolds elevados verificou-se que para além dos picos referidos anteriormente apareciam umas pequenas oscilações para números de Mach elástico iguais ou superiores à unidade. Este efeito foi reduzido ou até mesmo anulado com a introdução de um solvente newtoniano no escoamento.

Verifica-se também que as tensões normais apresentam em valor absoluto um maior valor do que as tensões de corte, o que torna importante a consideração destas tensões em escoamentos de fluidos viscoelásticos. O comprimento de entrada para a tensão de corte apresenta um comportamento monótono, enquanto que o comprimento de entrada para a tensão normal inicialmente começa por diminuir, voltando novamente a aumentar para um número de Débora aproximadamente igual a 0.1. Novamente esta característica é comum aos casos analisados anteriormente.

8 Conclusão

Neste capítulo são apresentadas as conclusões finais deste trabalho e também sugestões para trabalhos futuros

8.1 Conclusões e sugestões para trabalhos futuros

Pode-se dizer que se conseguiu atingir os objetivos inicialmente previstos para esta tese. Foram apresentados resultados do comprimento de entrada para os fluidos newtonianos e fluidos viscoelásticos.

Relativamente ao estudo do comprimento de entrada para os fluidos newtonianos pode-se tirar conclusões interessantes. Verifica-se que os resultados obtidos apresentam uma ótima precisão numérica, pois o erro relativo obtido através do cálculo numérico na malha mais refinada é de aproximadamente de 0.17%, para um número de Reynolds igual a 50. Um valor muito baixo em comparação com trabalhos do mesmo tipo apresentados até ao momento. Isto deve-se a que os termos difusivos são calculados com um método de segunda ordem e os termos convectivos com o método de alta resolução CUBISTA (Alves et al. 2003) de terceira ordem. Os perfis da velocidade axial apresentaram uns picos (overshoots) para os números de Reynolds iguais a 10 e 100. Uma explicação para esta observação é que para números de Reynolds elevados o efeito de travagem da parede sobre o fluido é mais notório, o que para haver conservação da massa a velocidade tem de aumentar noutros locais. Como a difusão ainda não teve tempo de transportar o fluido até ao centro, ocorre um aumento localizado da velocidade junto à parede. Apresentou-se também a seguinte correlação para o cálculo do comprimento de entrada da velocidade em função do número de Reynolds

$$L_E = 0.5007 + \frac{0.0148 Re + 0.000523 Re^2}{1 + 6.17 \times 10^{-7} Re^3} \quad (8.1)$$

Esta correlação apresenta um coeficiente de determinação (R^2) perto de um e uma variância (χ^2) muito próxima de zero, o que comprova a qualidade do ajuste. Relativamente aos valores do comprimento de entrada para a tensão de corte o erro relativo máximo obtido através do cálculo numérico na malha mais refinada é de aproximadamente 0.068% para um número de Reynolds igual a 20. O que comprova novamente a ótima precisão numérica dos resultados apresentados neste trabalho. Também se apresentou a seguinte correlação para o cálculo do comprimento de entrada da tensão de corte em função do número de Reynolds

$$L_{E_{\tau_{xy}}} = 0.662 + \frac{0.0162 Re + 7.37 \times 10^{-4} Re^2}{1 + 8.62 \times 10^{-5} Re^2} \quad (8.2)$$

Esta correlação apresenta também um coeficiente de determinação muito próximo de um e uma variância praticamente zero. Os valores do comprimento de entrada obtidos para a tensão de corte são superiores aos obtidos para a velocidade.

Relativamente aos fluidos viscoelásticos, os resultados obtidos permitiram desde logo verificar que para os fluidos viscoelásticos o comprimento de entrada da velocidade é maior em comparação com os fluidos newtonianos e apresenta um comportamento não monótono. Isto deve-se ao facto de que para números de Débora aproximadamente igual a 0.2 o comprimento de entrada apresenta uma bifurcação. Uma possível explicação encontrada para este comportamento deve-se ao efeito das condições de entrada, ou seja a aplicação de um perfil uniforme de velocidade e um perfil de tensões nulo e também pode dever-se ao aparecimento dos picos de velocidade, para números de Débora maiores ou iguais a 0.2. Esta característica que se mencionou para estes fluidos deve-se ao efeito da elasticidade, isto não acontece para números de Débora baixos, porque o efeito da difusão é mais rápido do que o efeito da elasticidade. Em conjugação com o efeito da elasticidade e para escoamentos em que o número de Reynolds é diferente de zero aparecem umas oscilações nas velocidades, isto acontece devido ao efeito do tempo característico para a convecção e/ou da velocidade convectiva e estas verificam-se para números de Mach elásticos iguais ou superiores à unidade. Só que com a introdução de um solvente newtoniano a difusão passa a dominar e este efeito tem tendência a desaparecer com o aumento da quantidade de solvente newtoniano, restando só o efeito da elasticidade. Já o estudo do comprimento de entrada para a tensão normal permitiu também verificar que este apresenta um comportamento não monótono, pois este começa por diminuir voltando a aumentar para Débora igual a 0.1. Para a tensão de corte o comprimento de entrada apresenta um comportamento monótono. Nas Tabelas 7.3, 7.5 e 7.6 encontram-se correlações para o cálculo do comprimento de entrada da velocidade, da tensão normal e de corte em função do número de Débora. Estas correlações apresentam um coeficiente de determinação (R^2) perto de um e uma variância (λ^2) muito baixa, o que permite concluir que as correlações apresentam uma ótima precisão.

Do ponto de vista de engenharia para fluidos newtonianos é necessário aproximadamente um comprimento de entrada da conduta de $0.0162H*Re$, para que o escoamento se torne completamente desenvolvido. Enquanto que para os fluidos viscoelásticos verifica-se que esse comprimento da conduta é aproximadamente $6.5H*De$.

Para sugestão de trabalhos futuros sugere-se que se utilize outras formas de perfis de regularização da velocidade em escoamento de fluidos viscoelásticos, para assim verificar se existe alguma influência no cálculo do comprimento de entrada.

9 Bibliografia

- Afonso, A. M., Oliveira, P. J., Pinho, F. T., Alves, M. A., 2011, Dynamics of high-Deborah-number entry flows - A numerical study, *Journal of Fluid Mechanics* 677, pp. 277-304.
- Ahmad, T. e Hassan, I., 2010, Experimental Analysis of Microchannel Entrance Length Characteristics Using Microparticle Image Velocimetry, *Journal of Fluids Engineering*, 132, pp. 041102.
- Alves, M. A., 2004, Escoamentos de fluidos viscoelásticos em regime laminar, Tese de doutoramento, Departamento de Engenharia Química da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.
- Alves, M. A., Oliveira, P. J., e Pinho, F.T., 2003, A convergent and universally bounded interpolation scheme for the treatment of advection, *Int. J. Numer. Meth. Fluids* 41, pp. 47-75.
- Atkinson, B., Brocklebank, M. P., Card, C. C., e Smith, J.M., 1969, Low Reynolds Number Developing Flows, *AIChE J.*, 154, pp. 548-553.
- Bird, R. B., Armstrong, R. C., e Hassager, O., 1987, *Dynamics of Polymeric Liquids, Vol.1-Fluid Mechanics*, New York, John Wiley & Sons.
- Boger, D. V., 1977, Highly elastic constant-viscosity fluid. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 3:87-91.
- Boussinesq, J., 1891, Sur la maniere don't les vitesses, dans un tube cylindrique de section circulaire, evase a son entrée, se distribuent depuis entrée jusqu'aux endroits ou se trouve établi un regime uniforme, *Compt. Rend.*, 113, pp. 49-51.
- Brockklobank, M. P., e Smith, J. M., 1970, Developing laminar flow with viscoelastic and non-Newtonian liquids: flow visualization. *Rheol. Acta* 9, pp. 396-404.
- Cavadas, A. S., 2008, Hidrodinâmica de jatos de impacto confinados escoamento de fluidos newtonianos e não newtonianos, Departamento de Engenharia Mecânica e Gestão Industrial.
- Chhabra, R. P., e Richardson, J. F., 1999, *Non-Newtonian Flow in the Process Industries: Fundamentals and Engineering Applications*, Butterworth-Heinemann, Oxford
- Chen, R. Y., 1973, Flow in the Entrance Region at Low Reynolds Numbers, *ASME J. Fluids Eng.*, 95, pp. 153-158.
- Collins, M., e Schowalter, W. R., 1963, Behaviour of non-Newtonian fluids in the inlet region of a channel, *AIChE J.*, 9, pp. 98-102.
- Dombrowski, N., Foumeny, E. A., Ookawara, S., e Riza, A., 1993, The Influence of Reynolds Number on the Entry Length and Pressure Drop for Laminar Pipe Flow, *Can. J. Chem. Eng.*, 71, pp. 472-476.

- Durst, F., Ray, S., Ünsal, B., e Bayoumi, O. A., 2005, The Development Lengths of Laminar Pipe and Channel Flows, *J. Fluids Eng.*, 127, pp. 1154-1160.
- Fattal R., Kupferman, R., 2005, Time-dependent simulation of viscoelastic flows at high Weissenberg number using the log-conformation representation, *J. Non-Newton. Fluid Mech.* 126, pp. 23-37.
- Goldstein, R. J. e Kreid, D. K., 1967, Measurement of laminar flow development in a square duct using a laser-doppler flowmeter, *Journal of Applied Mechanics*, 34, pp. 813.
- Gravesen, P., Branebjerg, J., e Jensen, O. S., 1993, Microfluidics a review, *J. Micromechanics and Microengineering*, 3, pp. 168-182.
- Han, C. D., 1971, Entrance region flow of polymer melts, *AIChE J.* 17, pp. 1480-1485.
- Hassager, O., 1988, Working group on numerical techniques. (Proceedings of the fifth Workshop on Numerical Methods in Non-Newtonian Flow), *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 29, pp. 2-5.
- Huang, D. C., e Shron, R. N., 1981, Converging flow of polymer melts, *J. Rheol.* 25, pp. 605-617.
- Issa, R.I., e Oliveira, P.J., 1994, Numerical predictions of phase separation in twophase flow through T-junctions, *Comput. Fluids* 23, pp. 347-372.
- Jeffreys, H., 1924, *The Earth*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Jendrejck, R. M., Dimalanta, E. T., Schwartz, D. C., Graham, M. D., e Pablo J. J., 2003, DNA dynamics in a microchannel, *Phys. Rev. Lett.*, 91, pp. 038102.
- Keunings, R., 1989, Simulation of viscoelastic flow. In *Computer Modeling for Polymer Processing* (ed. C. L. Tucker), Hanser, pp. 404-469.
- Lee, S. Y., Jang, J., e Wereley, S. T., 2008, Effects of planar inlet plenums on the hydrodynamically developing flows in rectangular microchannels of complementary aspect ratios, *Microfluidics and Nanofluidics*, 5(1), pp. 1-12.
- Lee, S. J., e Kim, G. B., 2003, Analysis of Flow Resistance Inside Microchannels With Different Inlet Configurations Using Micro-PIV System, *ASME Paper No. ICMM2003-1108*.
- Lee, S. Y., Wereley, S. T., Gui, L., Qu, W. e Mudawar, I., 2002, Microchannel flow measurement using micro particle image velocimetry, *ASME Fluids Engineering Division Publication FED*, 258, pp. 493-500.
- Meijerink, J. A. e H. A. van der Vorst, 1977, An iterative solution method for linear systems of which the coefficient matrix is a symmetric M-matrix, *Math. of Comp.* 31, pp. 148-162.
- Metzner, A. B., e Reed, J. C., 1955, Flow of Non-Newtonian Fluids Correlation of the Laminar, Transition, and Turbulent-Flow Regions, *AIChE J.*, 1, pp. 434-440.
- Muchnik, G. F., Solomonov, S. D. e Gordon, A.R., 1973, Hydrodynamic development of a laminar velocity field in rectangular channels, *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 25(4), pp. 1268-1271.
- Oak, J., Pence, D., e Liburdy, J., 2004, Flow development of co-flowing streams in rectangular micro-channels, *Microscale Thermophysical Engineering*, 8(2), pp. 111-128.

- Ookawara, S., Ogawa, K., Dombrowski, N., Amooie-Foumeny, E., e Riza, A., 2000, Unified Entry Length Correlation for Newtonian, Power Law and Bingham Fluids in Laminar Pipe Flow at Low Reynolds Number, *J. Chem. Eng. Jpn.*, 33, pp. 675-678
- Oldroyd, J. B., 1950, On the formulation of rheological equations of state, *Proc. Roy. Soc. London A* 200, pp. 523-541.
- Oldroyd, J.G., 1984, An approach to non-Newtonian fluid mechanics, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 14, pp. 9-46.
- Oliveira, P. J., e Pinho, F. T., 1999, Plane contraction flows of upper convected Maxwell and Phan-Thien–Tanner fluids as predicted by a finite-volume method, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 88, pp.63-88.
- Oliveira, P. J., Pinho, F. T., e Pinto, G. A., 1998, Numerical simulation of non-linear elastic flows with a general collocated finite-volume method, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 79, pp. 1-43.
- Owens, R. G., e Phillips, T. N., 2002, *Computational Rheology*, Imperial College Press.
- Pakdel, P., Spiegelberg, e McKinley, G. H., 1997, Cavity flows of elastic liquids: Two dimensional flows, *Ph. Fluids*, 9, pp. 3123.
- Poole, R. J. e Ridley, B. S., 2007, Development length requirements for fully-developed laminar pipe flow of inelastic non-Newtonian liquids, *ASME Journal of Fluids Engineering*, 129, pp. 1281-1287.
- Poole, R. J. e Chhabra, R. P., 2010, Development length requirements for fully developed laminar pipe flow of yield stress fluids, *ASME Journal of Fluids Engineering*, 132, pp. 034501
- Richardson, L. F., 1908, The Approximate Arithmetical Solution by Finite Differences of Physical Problems Involving Differential Equations with an Application to the Stresses in a Masonry Dam, *Transactions of the Royal Society of London, Series A*, 210, pp. 307-357.
- Rhie, C. M., e Chow, W. L., 1983, Numerical Study of the Turbulent Flow Past an Airfoil with Trailing Edge Separation, *AIAA J.* 21, pp. 1525-1532.
- Sadri, R. M., e Floryan, J. M., 2002, Entry flow in a channel, *Computers & fluids*, 31(2), pp. 133-157.
- Schiller, L., 1922, Die Entwicklung der laminar en Geschwindigkeitsverteilung und ihre Bedeutung Ähnlichkeitsmessungen, *Z. Angew. Math. Mech.*, 2, pp. 96-106.
- Shah, R. K., e London A. L., 1978, *Laminar flow forced convection in ducts a source book for compact heat exchanger analytical data*, Advances in heat transfer series. Academic, New York.
- Schlichting, H., 1979, *Boundary Layer Theory*, McGraw-Hill, NY.
- Vrentas, J. S., Duda, J. L., e Barger, K. G., 1966, Effect of Axial Diffusion of Vorticity on Flow Development in Circular Conduits, *AIChE J.*, 12, pp. 837-844.

Anexo A

Neste apêndice encontram-se os valores do comprimento de entrada da velocidade axial para as razões de viscosidade 1/9 e 0.5

Tabela A1- Valores do comprimento de entrada da velocidade para $\beta=1/9$ e para três diferentes valores do número de elasticidade em função do número de Reynolds e de Débora

$\beta=1/9$										
$El=0.1$				$El=1$				$El=10$		
De	Re	L_E		De	Re	L_E		De	Re	L_E
0.001	0.01	0.5777		0.001	0.001	0.5776		0.01	0.001	0.5840
0.002	0.02	0.5789		0.002	0.002	0.5787		0.02	0.002	0.5853
0.005	0.05	0.5817		0.005	0.005	0.5812		0.05	0.005	0.5665
0.01	0.1	0.5849		0.01	0.01	0.5841		0.1	0.01	0.4811
0.02	0.2	0.5869		0.02	0.02	0.5855		0.15	0.015	0.3654
0.05	0.5	0.5672		0.05	0.05	0.5665		0.2	0.02	0.7295 0.2922
0.1	1	0.4759		0.1	0.1	0.4807		0.3	0.03	1.0213 0.2365
0.15	1.5	0.3481		0.15	0.15	0.3640		0.4	0.04	1.2871 0.2194
0.2	2	0.7451	0.2712	0.2	0.2	0.7316	0.2905	0.5	0.05	1.5549 0.2157
0.3	3	0.9599	0.2413	0.3	0.3	1.0201	0.2344	0.9	0.09	2.6582 0.2336
0.4	4	1.0884	0.2819	0.4	0.4	1.2844	0.2184	1	0.1	2.9399 0.2406
0.5	5	1.3002	0.3395	0.5	0.5	1.5510	0.2166			
0.9	9	3.1575	0.5742	0.9	0.9	2.6444	0.2484			
1	10	3.5429	0.6342	1	1	2.9245	0.2602			

Tabela A2- Valores do comprimento de entrada da velocidade para $\beta=0.5$ e para três diferentes valores do número de elasticidade em função do número de Reynolds e de Débora

$\beta=0.5$											
$El=0.1$				$El=1$				$El=10$			
De	Re	L_E		De	Re	L_E		De	Re	L_E	
0.001	0.01	0.6286		0.001	0.001	0.6285		0.01	0.001	0.6269	
0.002	0.02	0.6287		0.002	0.002	0.6285		0.02	0.002	0.6225	
0.005	0.05	0.6286		0.005	0.005	0.6282		0.05	0.005	0.6013	
0.01	0.1	0.6278		0.01	0.01	0.6270		0.1	0.01	0.5235	
0.02	0.2	0.6241		0.02	0.02	0.6226		0.15	0.015	0.4369	
0.05	0.5	0.6034		0.05	0.05	0.6014		0.2	0.02	0.7785	0.3917
0.1	1	0.5224		0.1	0.1	0.5236		0.3	0.03	1.0987	0.3631
0.15	1.5	0.4362		0.15	0.15	0.4367		0.4	0.04	1.3921	0.3618
0.2	2	0.8472	0.3982	0.2	0.2	0.7849	0.3919	0.5	0.05	1.6878	0.3686
0.3	3	1.1681	0.3887	0.3	0.3	1.1038	0.3644	0.9	0.09	2.8824	0.4172
0.4	4	1.4816	0.4073	0.4	0.4	1.3991	0.3645	1	0.1	3.1814	0.4305
0.5	5	1.8035	0.4383	0.5	0.5	1.6961	0.3728				
0.9	9	3.1124	0.5954	0.9	0.9	2.8995	0.4278				
1	10	3.4430	0.6389	1	1	3.2005	0.4419				

Anexo B

Neste apêndice encontram-se os valores do comprimento de entrada da tensão normal (τ_{xx}) e da tensão de corte (τ_{xy}) para as razões de viscosidade 1/9 e 0.5.

Tabela B1- Valores do comprimento de entrada para a tensão de corte (τ_{xy}) e normal (τ_{xx}), obtidos em função do número de Débora e de Reynolds

$\beta=1/9$											
$El=0.1$				$El=1$				$El=10$			
De	Re	$L_{E\tau_{xy}}$	$L_{E\tau_{xx}}$	De	Re	$L_{E\tau_{xy}}$	$L_{E\tau_{xx}}$	De	Re	$L_{E\tau_{xy}}$	$L_{E\tau_{xx}}$
0.001	0.01	0.7421	1.3310	0.001	0.001	0.7420	1.3301	0.01	0.001	0.7595	0.9536
0.002	0.02	0.7443	1.0187	0.002	0.002	0.7441	1.0185	0.02	0.002	0.7784	0.9245
0.005	0.05	0.7502	0.9853	0.005	0.005	0.7499	0.9854	0.05	0.005	0.8268	0.8968
0.01	0.1	0.7603	0.9536	0.01	0.01	0.7595	0.9536	0.1	0.01	0.9321	0.9540
0.02	0.2	0.7795	0.9249	0.02	0.02	0.7785	0.9245	0.15	0.015	1.0592	1.1161
0.05	0.5	0.8276	0.8971	0.05	0.05	0.8268	0.8968	0.2	0.02	1.1964	1.2941
0.1	1	0.9281	0.9508	0.1	0.1	0.9317	0.9537	0.3	0.03	1.4880	1.6760
0.15	1.5	1.0468	1.1055	0.15	0.15	1.0581	1.1153	0.4	0.04	1.8259	2.0860
0.2	2	1.1739	1.2755	0.2	0.2	1.1945	1.2926	0.5	0.05	2.2426	2.5161
0.3	3	1.4406	1.6311	0.3	0.3	1.4845	1.6728	0.9	0.09	3.9863	4.3356
0.4	4	1.7936	1.9938	0.4	0.4	1.8259	2.0812	1	0.1	4.4287	4.8070
0.5	5	2.1775	2.3613	0.5	0.5	2.2445	2.5086				
0.9	9	3.4357	4.1982	0.9	0.9	3.9899	4.3253				
1	10	3.8010	4.7030	1	1	4.4353	4.7921				

Tabela B2- Valores do comprimento de entrada para a tensão de corte (τ_{xy}) e normal (τ_{xx}), obtidos em função do número de Débora e de Reynolds

$\beta=0.5$											
$El=0.1$				$El=1$				$El=10$			
De	Re	$L_{E\tau_{xy}}$	$L_{E\tau_{xx}}$	De	Re	$L_{E\tau_{xy}}$	$L_{E\tau_{xx}}$	De	Re	$L_{E\tau_{xy}}$	$L_{E\tau_{xx}}$
0.001	0.01	0.7927	1.3550	0.001	0.001	0.7926	1.3538	0.01	0.001	0.8022	0.9993
0.002	0.02	0.7939	1.0797	0.002	0.002	0.7938	1.0799	0.02	0.002	0.8163	0.9621
0.005	0.05	0.7974	1.0392	0.005	0.005	0.7971	1.0393	0.05	0.005	0.8612	0.9320
0.01	0.1	0.8031	0.9993	0.01	0.01	0.8023	0.9993	0.1	0.01	0.9792	0.9999
0.02	0.2	0.8176	0.9630	0.02	0.02	0.8162	0.9622	0.15	0.015	1.1336	1.1912
0.05	0.5	0.8630	0.9345	0.05	0.05	0.8610	0.9330	0.2	0.02	1.3082	1.3997
0.1	1	0.9777	0.9995	0.1	0.1	0.9789	0.9999	0.3	0.03	1.6959	1.8556
0.15	1.5	1.1226	1.1852	0.15	0.15	1.1328	1.1907	0.4	0.04	2.1176	2.3423
0.2	2	1.2866	1.3842	0.2	0.2	1.3065	1.3984	0.5	0.05	2.5596	2.8497
0.3	3	1.6529	1.8240	0.3	0.3	1.6927	1.8531	0.9	0.09	4.4081	4.9544
0.4	4	2.0522	2.2968	0.4	0.4	2.1125	2.3389	1	0.1	4.8872	5.4893
0.5	5	2.5112	2.7883	0.5	0.5	2.5532	2.8449				
0.9	9	4.4144	4.8513	0.9	0.9	4.3969	4.9473				
1	10	4.8920	5.3765	1	1	4.8740	5.4815				

Anexo C

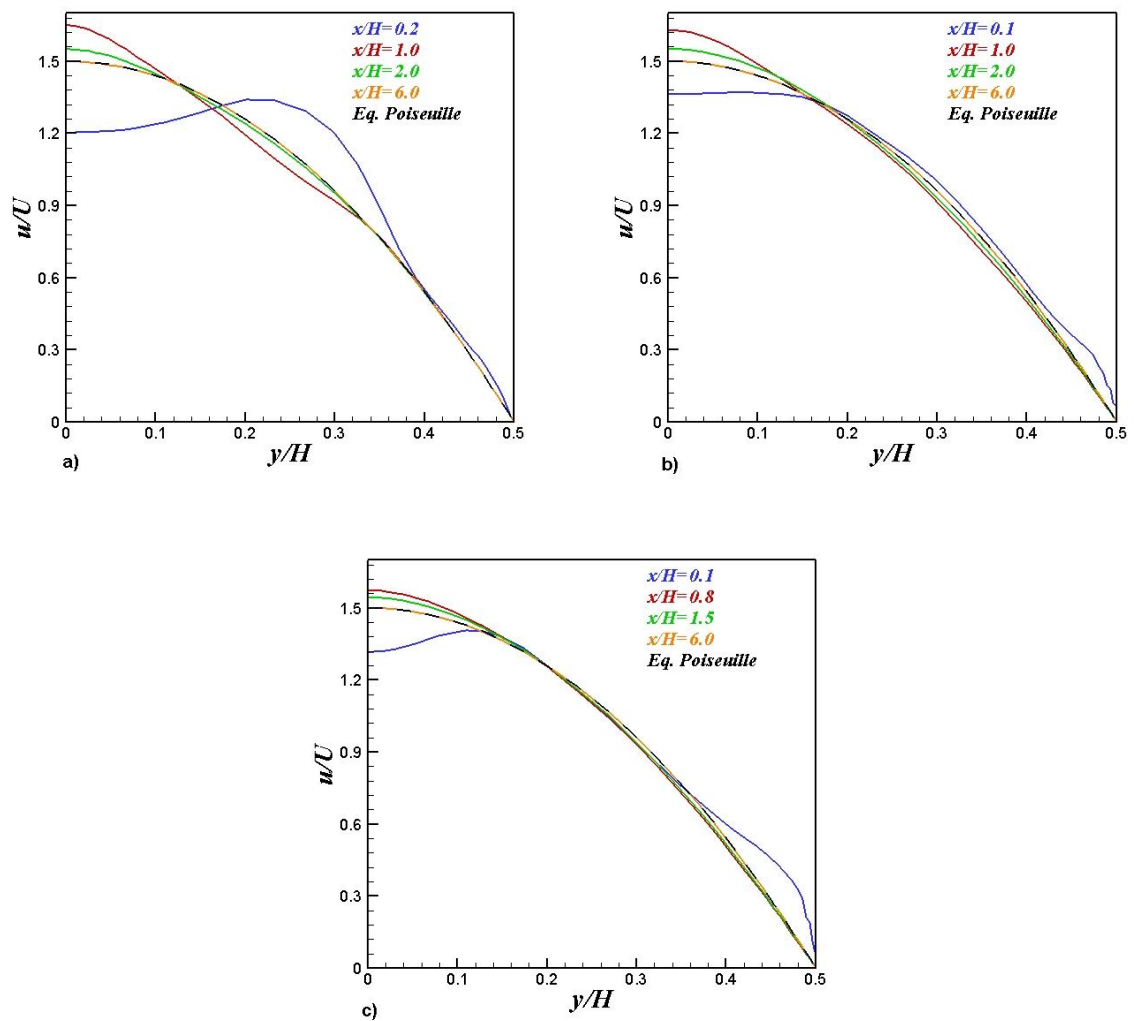


Figura C1- Desenvolvimento do perfil da velocidade axial para o fluido UCM e para a) $El=0.1$ b) $El=1$ c) $El=10$

Anexo D

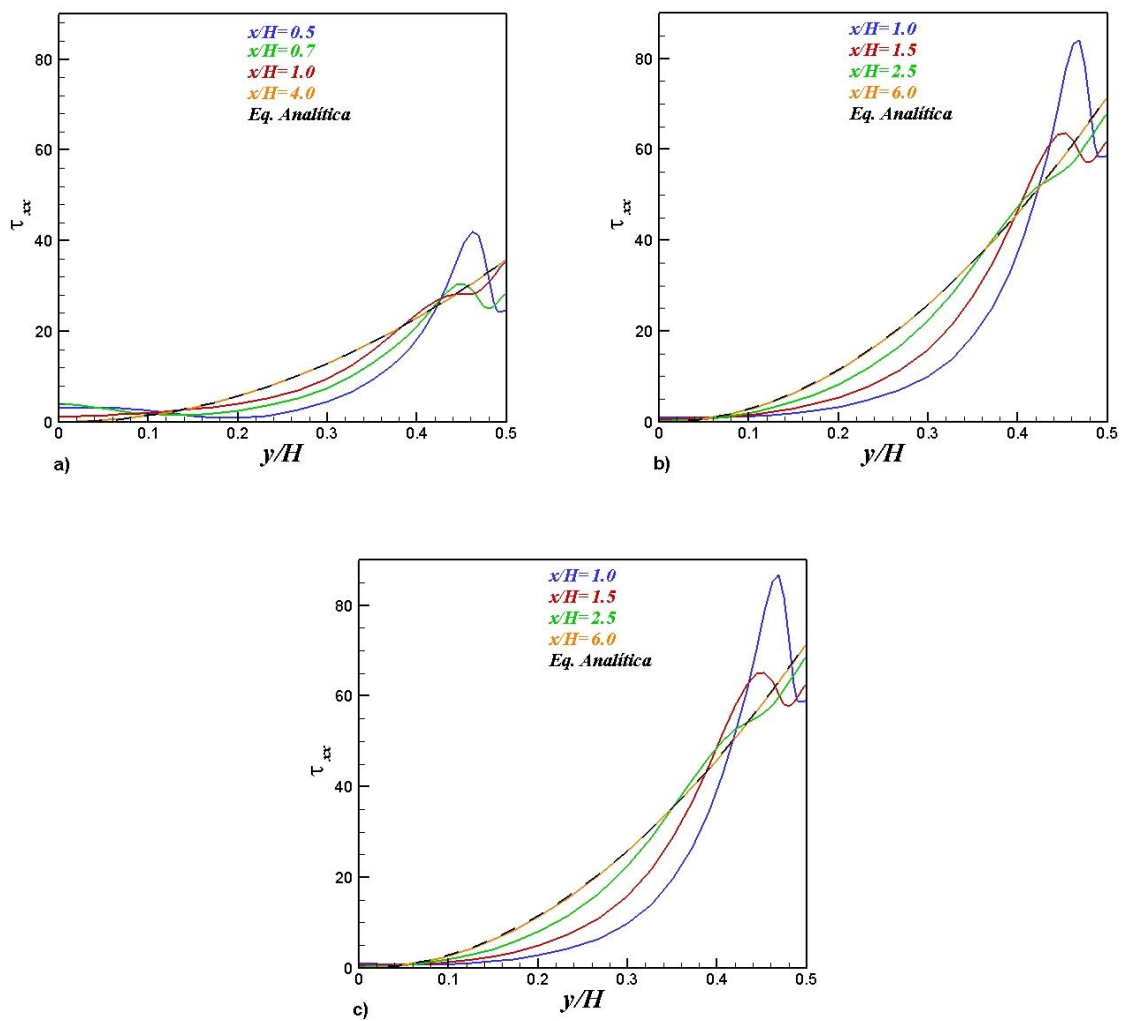


Figura D1-Desenvolvimento do perfil da tensão normal para o fluido UCM e para os números de elasticidade a) $El=0.1$ b) $El=1$ c) $El=10$

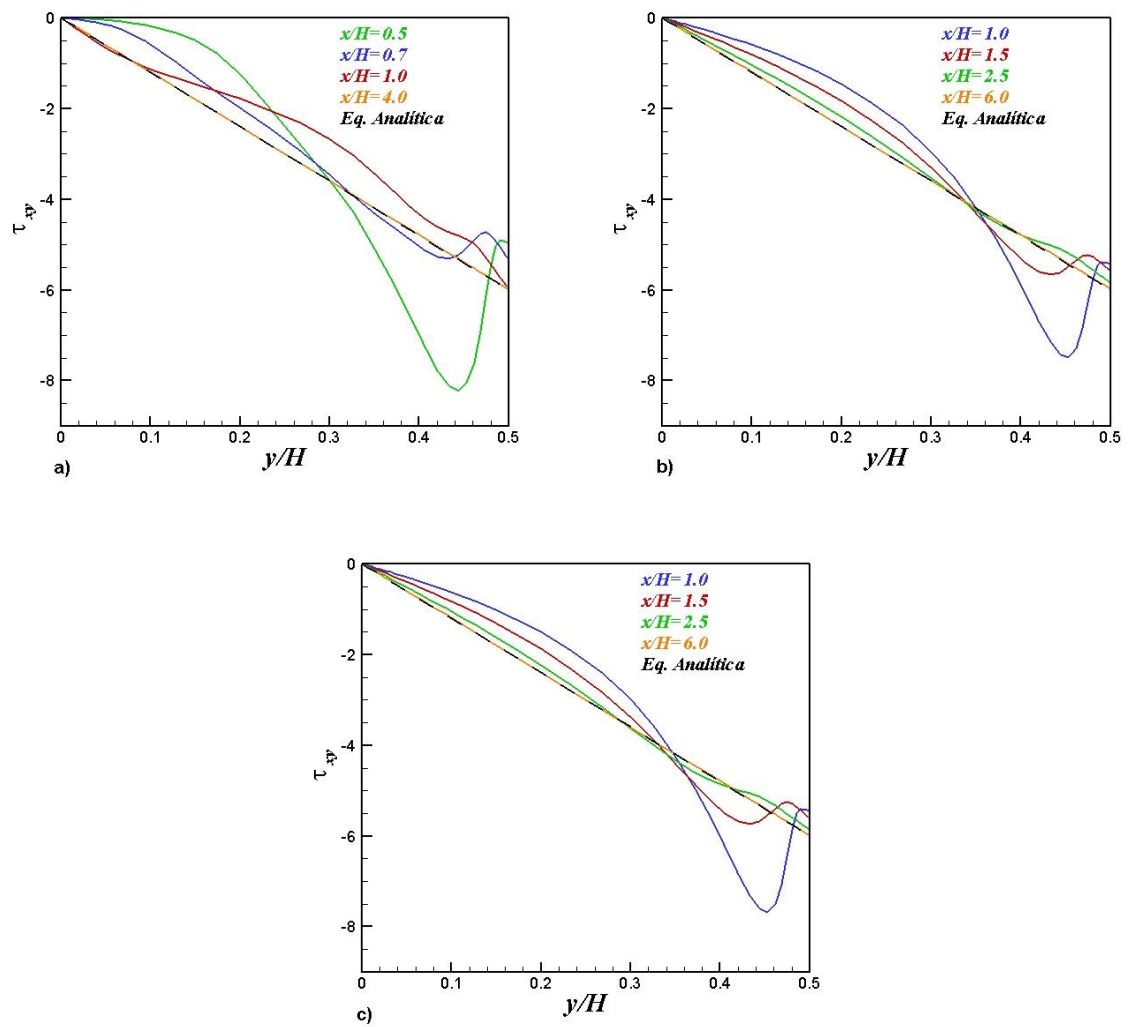


Figura D2-Desenvolvimento do perfil da tensão de corte para o fluido UCM e para os números de elasticidade a) $El=0.1$ b) $El=1$ c) $El=10$

Anexo E

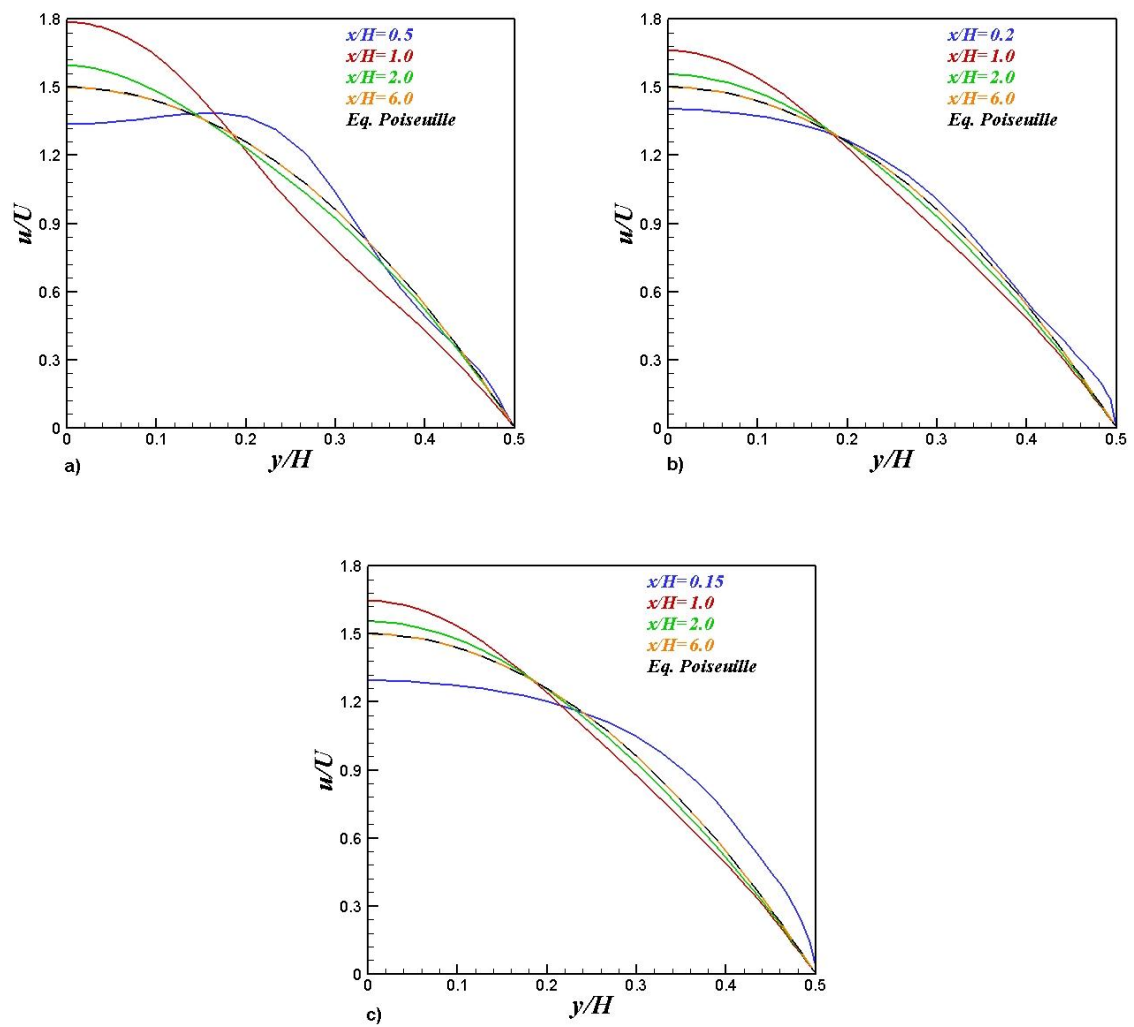


Figura E1- Desenvolvimento do perfil da velocidade axial para $\beta=1/9$ e para a) $El=0.1$ b) $El=1$ c) $El=10$

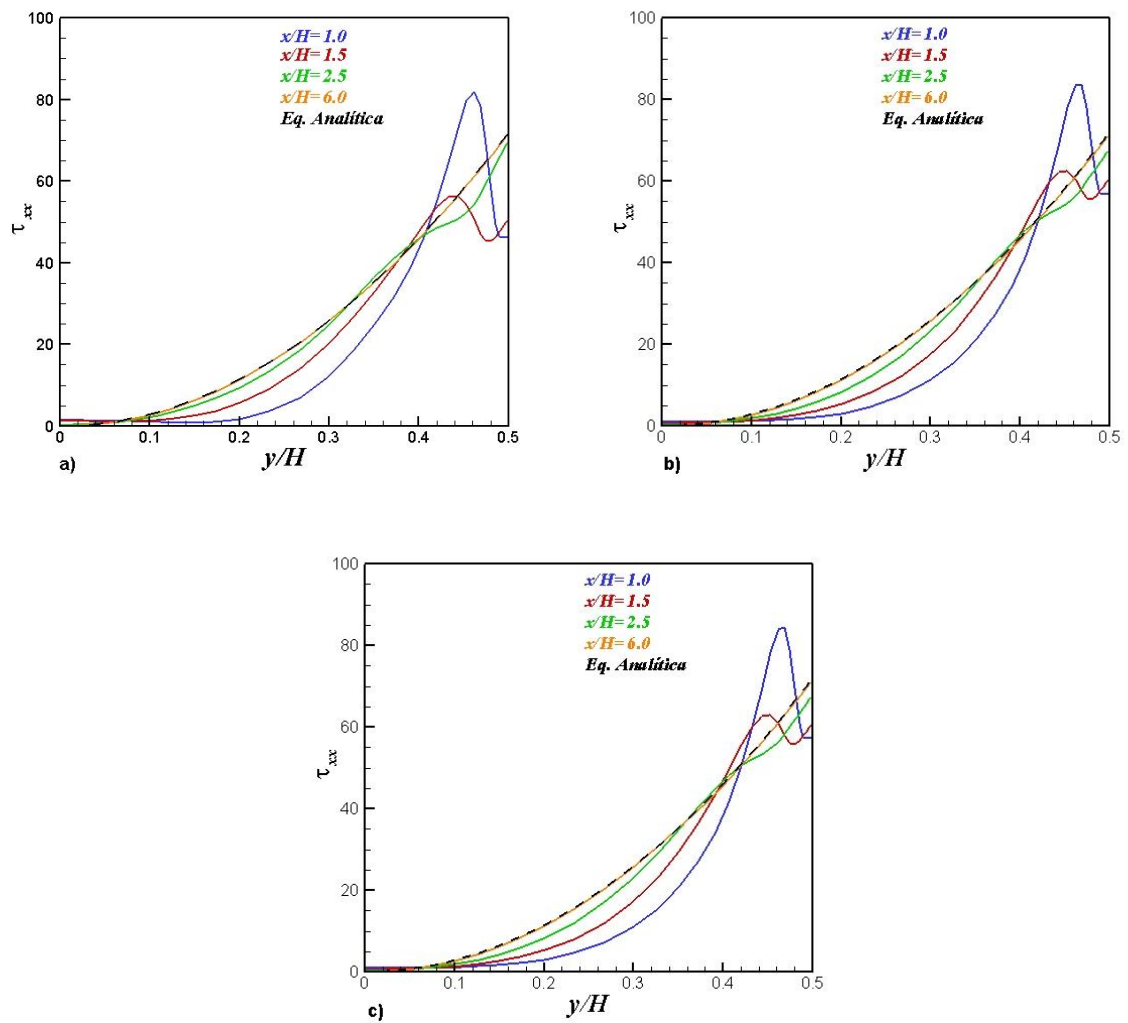


Figura E2- Desenvolvimento do perfil da tensão normal para $\beta=1/9$ e para a) $El=0.1$ b) $El=1$ c) $El=10$

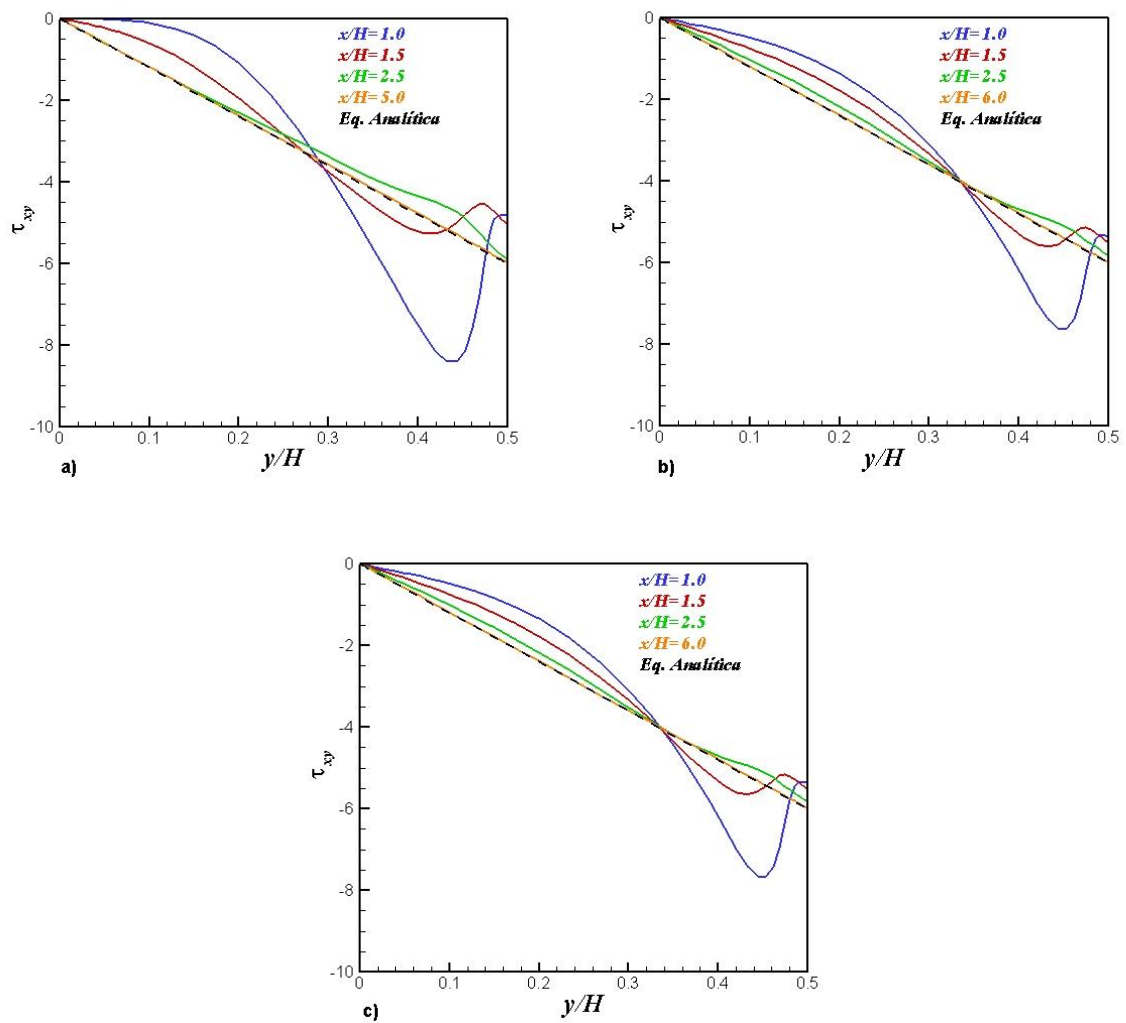


Figura E3- Desenvolvimento do perfil da tensão de corte para $\beta=1/9$ e para a) $El=0.1$ b) $El=1$ c) $El=10$

Anexo F

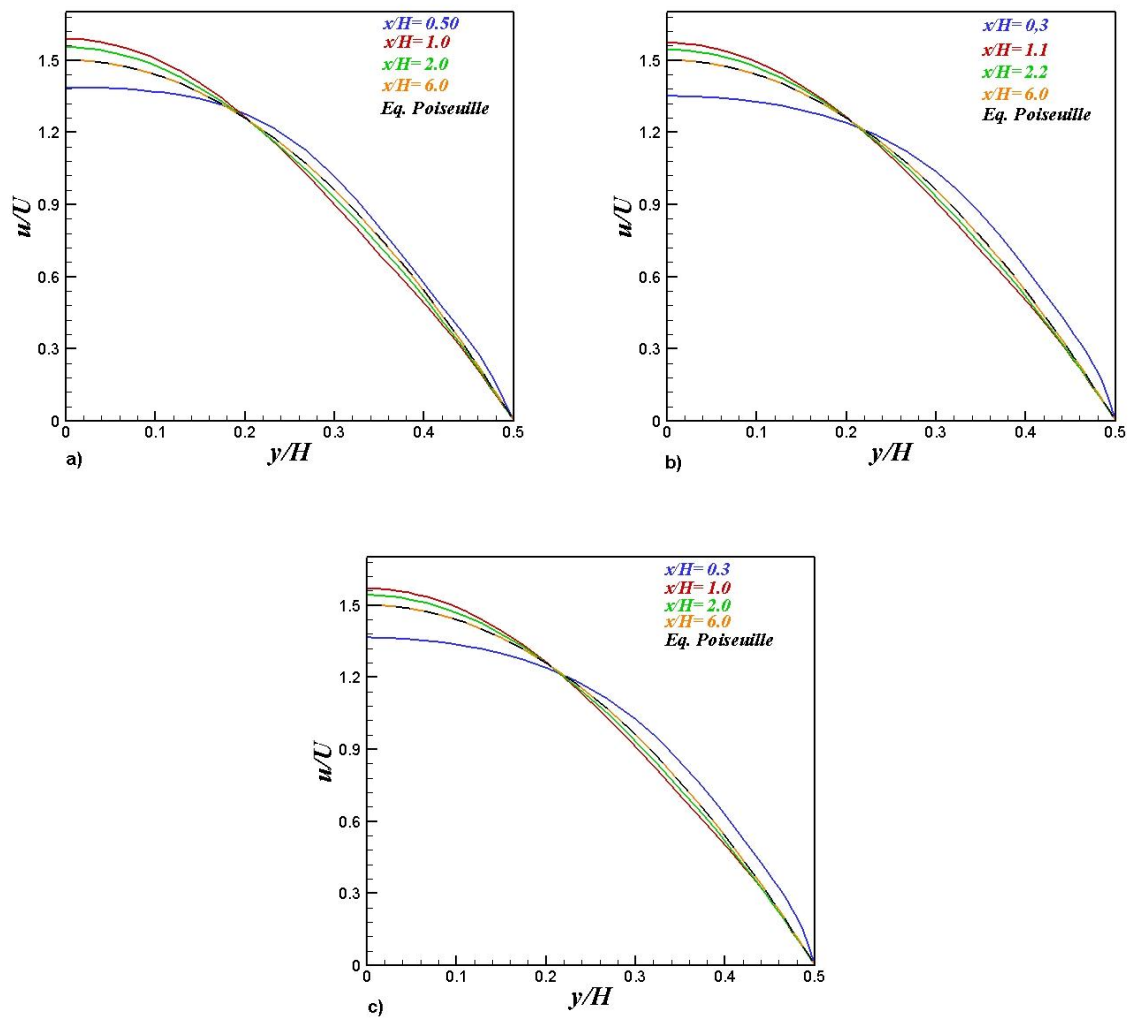


Figura F1- Desenvolvimento do perfil da velocidade axial para $\beta=0.5$ e para a) $El=0.1$ b) $El=1$ c) $El=10$

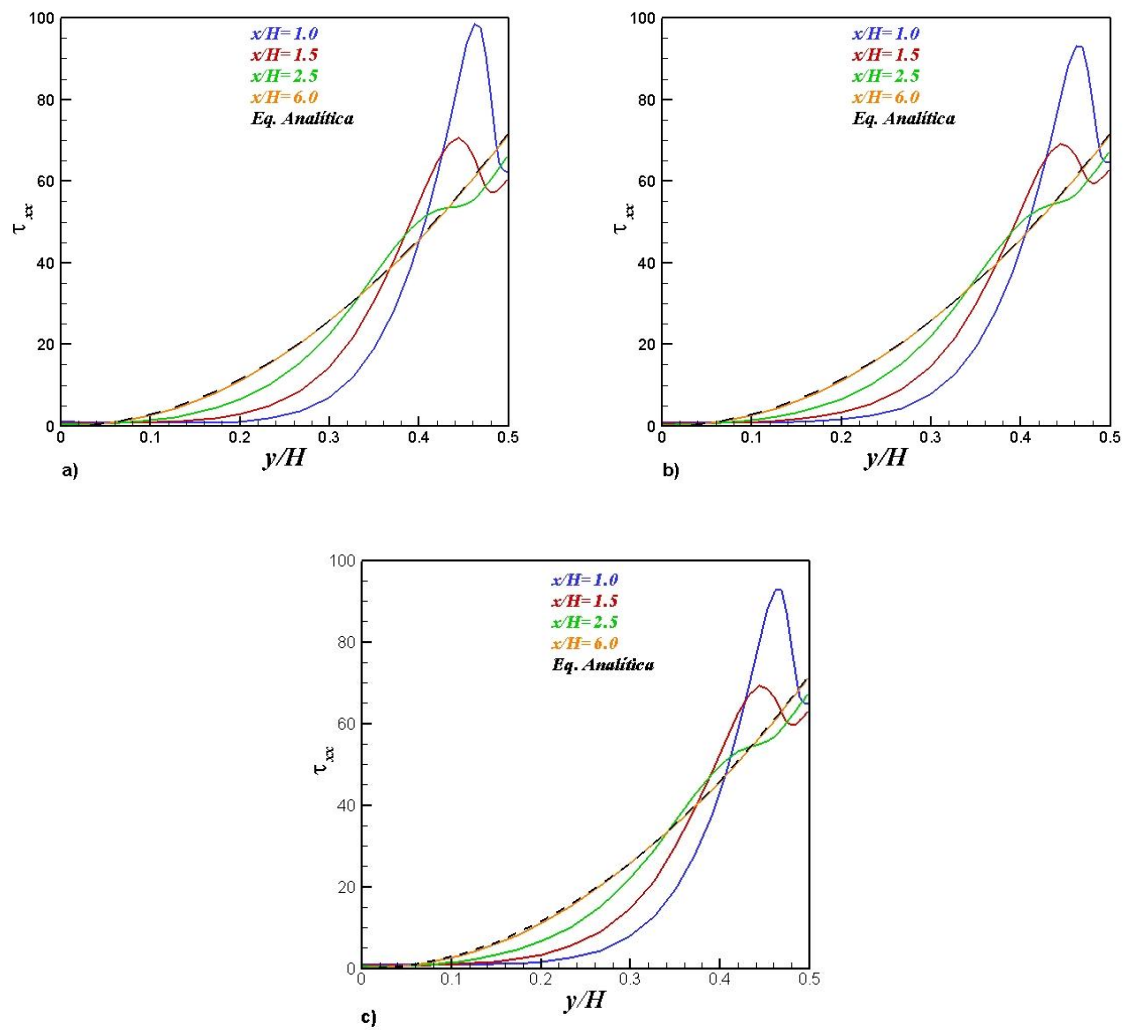


Figura F2-Desenvolvimento do perfil da tensão normal para $\beta=0.5$ e para a) $El=0.1$ b) $El=1$ c) $El=10$

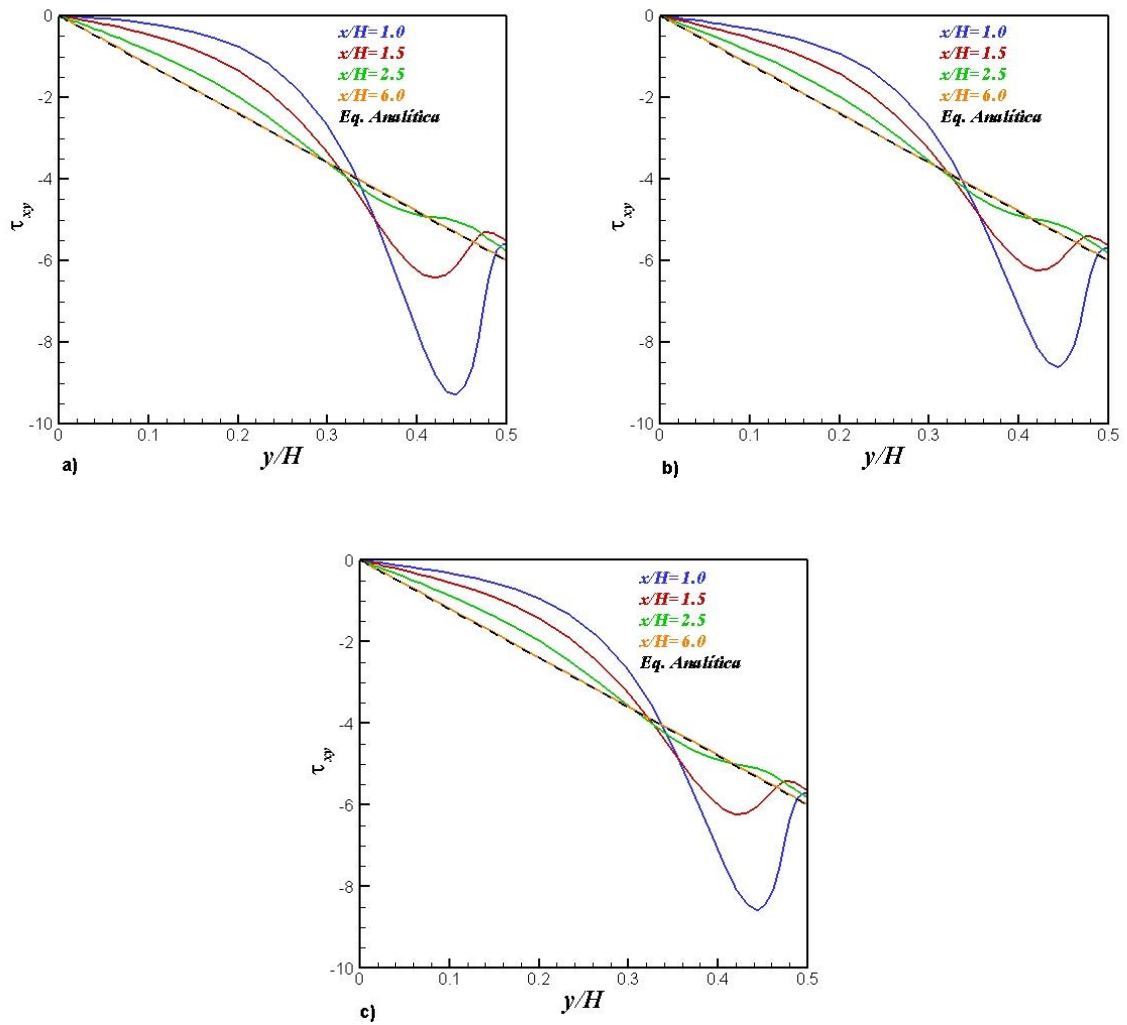


Figura F3-Desenvolvimento do perfil da tensão de corte para $\beta=0.5$ e para a) $EI=0.1$ b) $EI=1$ c) $EI=10$