U.PORTO
FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO

Da Álgebra Geométrica Grega à Geometria Analítica de Descartes e de Fermat

Maria Dalila Correia Pedrosa Ramos

Dissertação de Mestrado apresentada à
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto em
Matemática
2013

Da Álgebra Geométrica Grega à Geometria Analítica de Descartes e de Fermat

Maria Dalila Correia Pedrosa Ramos

Mestrado em Matemática para Professores
Departamento de Matemática
2013

Orientador
Carlos Manuel Monteiro Correia de Sá,
Professor Auxiliar da Faculdade de Ciências
da Universidade do Porto

U.PORTO

FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO

Todas as correções determinadas pelo júri, e só essas, foram efetuadas.

O Presidente do Júri,

Porto, ______/______/_________

Agradecimentos

Gostaria de manifestar os meus agradecimentos ao Professor Doutor Carlos Manuel Monteiro Correia de Sá, não só por ter aceitado a orientação desta dissertação, como também pela disponibilidade demonstrada.

“Le XVII siècle, celui de tous qui fait le plus d’honneur à l’esprit humain”

Laplace (1749-1827)

Resumo

O objetivo desse trabalho consiste em estudar a criação da Geometria Analítica por Fermat e Descartes, dando relevo às influências exercidas sobre este processo por obras de matemática desde a antiga Grécia. Faz-se uma sucinta retrospetiva histórica, com a convicção de que grandes clássicos como os *Elementos* de Euclides, as *Cónicas* de Apolónio, a *Aritmética* de Diofanto, ou a representação gráfica de leis da Física por parte de Oresme e a *Arte Analítica* de Viète tiveram um papel precursor, através de ideias e de métodos, na construção da Geometria Analítica daqueles dois matemáticos franceses do século XVII. Durante esse trajeto, constata-se que a *Álgebra geométrica* grega, com a sua linguagem retórica inicial, sofre graduais mudanças ao associar equações a curvas, com a introdução da ideia de eixos coordenados e com o aparecimento da *Álgebra simbólica*, instrumentos imprescindíveis para a formação da Geometria Analítica. É feita uma análise à obra de Fermat, *Introdução aos lugares planos e sólidos*, na qual o autor aplica a sua ideia de análise no estudo de lugares geométricos, tomando como base o trabalho de Apolónio. Observa-se o modo, algo diferente, como Descartes utiliza a análise, ao longo dos três livros da *Geometria*: após aritmetizar os segmentos de reta, procede à sua algebrização, começando pelas equações quadráticas. De seguida, analisa-se o seu “método das tangentes”, e estudam-se exemplos em que aplica os seus métodos na construção geométrica das raízes de equações de *problemas sólidos*.

Palavras-chave: História da Matemática, Geometria Analítica, Fermat, Descartes.

Abstract

This papers objective consists on studying the creation of Analytic Geometry by Fermat and Descartes, focusing on the influences exercised over this process by mathematical works since the Ancient Greece. A brief historical retrospective is done with the belief that great classics such as Euclids**'** *Elements;* Apollonius' *Conics***,** Diophantus' *Arithmetica* or the graphic representation of the laws of Physics' by Oresme and Viètes' *Introduction to the art of analysis* played a pioneering role, through the ideas and methods, in the construction of Analytic Geometry of those two 17th century French mathematicians. During that path, it appears that the Greek *Geometric Algebra*, with its initial rhetorical language, suffers gradual changes when associating equations to curves, with introducing the idea of coordinate axes and the emergency of *Symbolic Algebra*, essential instruments for the shaping of Analytic Geometry. It is done an analysis to the Fermats' *Introduction to Plane and Solid Loci*, in which the author applies the idea of analysis to the study of locus of point, based upon the work of Apollonius'. It is observed the somewhat distinct way how Descartes uses analysis, throughout the three books of Geometry: after making the line segments arithmetical, proceeds to its algebrization, starting by the quadratic equations. Then the "tangent method" is reviewed and some examples of the application of his methods in the geometric constructions of root equations in solid problem.

Keywords: History of Mathematics, Analytic Geometry, Fermat, Descartes.

Índice

Índice de Figuras

Introdução

A Geometria Analítica assenta no uso de coordenadas, o que permite a aplicação de métodos algébricos à Geometria. Howard Eves, no seu livro *Introdução à História da Matemática*, afirma que a Geometria Analítica plana

> (...) consiste em estabelecer uma correspondência entre pontos do plano e pares ordenados de números reais, viabilizando assim uma correspondência entre curvas do plano e equações em duas variáveis, de maneira tal que para cada curva do plano está associada uma equação bem definida $f(x,y)=0$ e para cada equação dessas está associada uma curva (ou conjunto de pontos) bem definida do plano. Estabelece-se, além disso, uma correspondência entre as propriedades algébricas e analíticas da equação $f(x,y)=0$ e as propriedades geométricas da curva associada. (1997, p. 382).

Eves conclui que a Geometria Analítica se caracteriza por permitir transferir os procedimentos da demonstração de um teorema em Geometria para os de um teorema correspondente em Álgebra e Análise. Sob o ponto de vista histórico, a correspondência apontada por este autor encontrou desde cedo sérias dificuldades; foi apenas com o desenvolvimento dum simbolismo algébrico suficientemente expedito que se tornou possível obter a articulação entre os dados *simbólicos* e os dados *gráficos*, para que a Geometria Analítica desempenhasse plenamente o seu papel.

Para muitos estudiosos (Quintero, 2001, p. 45) a invenção da Geometria Analítica está relacionada, não só com a maturação de uma *Álgebra simbólica* capaz de manipular variáveis e parâmetros, mas também com uma reflexão profunda por parte dos matemáticos renascentistas sobre o *método de análise* usado pelos gregos para resolver problemas geométricos. Com o seu desenvolvimento, estes dois processos, profundamente inter-relacionados, convergiram no chamado *método das coordenadas*, que passou a ser de uso corrente na Matemática a partir dos trabalhos de Descartes e Fermat.

A Matemática antiga caracteriza-se por uma exposição de tipo sintético, com demonstrações baseadas em axiomas e postulados, que oferece muito poucas pistas sobre o modo como os gregos chegaram aos resultados. Na Europa dos séculos XVI e

XVII havia uma justificada curiosidade em saber o modo como os antigos tinham obtido os seus resultados de Geometria, que demonstravam de forma brilhante, mas cuja heurística ocultavam. Por exemplo, Descartes deixou expresso este sentimento de frustração na Regra IV das suas *Regras para a Direção da Mente*:

> Mas quando depois pensei para mim mesmo como é que os mais antigos pioneiros da Filosofia em idades passadas recusavam admitir para o estudo da sabedoria quem quer que fosse não versado em matemática, evidentemente acreditando que este era o exercício mental mais indispensável e de preparação para dominar outras ciências mais importantes, fui confirmado que na minha suspeita que eles tinham conhecimento de uma espécie de matemática muito diferente da que é corrente no nosso tempo. Eu não imagino que tivessem um conhecimento perfeito dela (...) mas estou convencido que certos germes primários de verdade implantados pela natureza da mente humana (...) tinham grande vitalidade nessa idade rude e não sofisticada do mundo antigo (...). Na verdade, parece-me reconhecer em Papo e Diofanto certos vestígios desta verdadeira Matemática (...). Mas na minha opinião é que estes escritores, com uma espécie de esperteza perversa, na verdade deplorável, suprimiram esse conhecimento. (Descartes, 1953, p.p. 6-7).

Intrigados e por vezes frustrados com o estilo sintético grego, os matemáticos europeus do final do Renascimento sentiram-se também curiosos e estimulados pelos raríssimos textos que faziam referência ao *método de análise*, que consistia em supor o problema resolvido e, então, deduzir consequências até alcançar um resultado já conhecido. As ideias centrais deste método são esmiuçadas na introdução, intitulada *Domínio da Análise*, ao livro VII da *Coleção Matemática* de Papo de Alexandria (290-350 d.C.), onde são mencionadas várias obras de teor analítico, que se encontram perdidas[1]. Usando as sugestões e descrições de Papo, os matemáticos europeus dos séculos XVI e XVII estudaram os textos gregos que tinham disponíveis, com o objetivo de tentarem apreender o referido método e reconstruir obras perdidas comentadas no *Domínio da Análise*.

[1] Papo de Alexandria foi um dos últimos matemáticos gregos da antiguidade. Distinguiu-se pelo seu tratado, a *Coleção*, obra de oito volumes, que reúne uma ampla gama de tópicos de estudos matemáticos (geometria, matemática recreativa, duplicação do cubo, polígonos e poliedros), retirados de antecessores seus.

Os gregos tratavam os problemas geométricos com um misto de pura retórica e de representações gráficas, mas sem símbolos específicos e sem qualquer notação algébrica. Em *The Origin of Analytic Geometry*, Julian L. Coolidge observa,

It must not be imagined, of course, that the Greeks who were without any sort of algebraic notation were able either to state their theorems or perform the necessary transformations with anything like our modern elegance. Their most important quasi-algebraic tools were the Eudoxian theory of proportion and the method of application of areas. (1936, p. 235).

Com a descoberta da incomensurabilidade, por volta do século V a.C., tomou-se consciência de que a teoria pitagórica das proporções não era aplicável à Geometria. Até aparecer uma teoria das proporções mais geral, aplicável tanto a grandezas comensuráveis como incomensuráveis (o que só veio a acontecer no séc. IV a.C. com Eudoxo de Cnido), foram postos em causa os teoremas e os problemas geométricos que, direta ou indiretamente, envolvessem a noção de proporcionalidade. Neste contexto, surgiu um novo ramo da Matemática, a que H. G. Zeuthen (1839-1920) chamou *Álgebra Geométrica dos gregos*, e que se encontra plasmado nos *Elementos* de Euclides[2]; segundo V. Katz (2010, p. 88), as proposições 43-45 do Livro I juntamente com as do Livro II e as proposições 27-30 do Livro VI formam o conteúdo da Álgebra Geométrica.

Esta alternativa ao uso das proporções pode ter resultado da geometrização de métodos algébricos anteriormente usados pelos mesopotâmios na Aritmética[3], sendo os números substituídos por segmentos de reta, retângulos e paralelepípedos, e passando as operações entre estes a ser feitas mediante construções geométricas, sendo escrupulosamente mantida a homogeneidade entre os termos. Um segmento

---

[2] A obra *Elementos* de Euclides, com cerca de 2300 anos, é uma obra composta por treze livros organizada por Euclides a partir de muitas obras existentes sobre várias partes da matemática. Os primeiros seis livros constituem um tratamento relativamente completo das magnitudes geométricas bidimensionais, enquanto que os livros VII, VIII e IX tratam da teoria dos números. Esta obra inclui dois tratamentos totalmente separados da teoria das proporções - no livro V para as magnitudes e no livro VII para os números. O livro X fornece a ligação entre os dois conceitos de comensurabilidade e incomensurabilidade e, é aqui que Euclides mostra que, relativamente às proporções, as magnitudes comensuráveis podem ser tratadas como se fossem números. Os livros XI e XII tratam dos objetos geométricos tridimensionais, e no livro XIII, Euclides constrói os cinco poliedros regulares e classifica algumas das linhas envolvidas de acordo com o seu esquema no livro X.

[3] O tema da Álgebra Geométrica tem sido alvo de debates por parte de estudiosos da matemática grega, debates relacionados com as questões de saber se os gregos estariam, de facto, interessados em Álgebra, e de saber se este aspeto da matemática grega terá sido direta ou indiretamente influenciado pelos mesopotâmios (Katz, 2010, p. 88).

de reta representava o seu próprio comprimento, tal como uma figura plana representava a sua área e um sólido representava o seu volume; se x, y e z representavam segmentos, então xy era a área de um retângulo de lados x e y, e xyz era o volume de um paralelepípedo retângulo de arestas x, y e z. Esta teoria serviu de base a uma técnica de resolução de equações quadráticas, que teve o nome de método das *aplicações de áreas*.

Como é sabido, os três problemas clássicos da Geometria antiga são os seguintes: a *duplicação do cubo*, a *trissecção do ângulo* e a *quadratura do círculo*[4]. A impossibilidade de levar a cabo estas construções geométricas recorrendo unicamente à régua e ao compasso estimulou os matemáticos na invenção de novos objetos e procedimentos de resolução[5]. O primeiro daqueles problemas, que é muitas vezes referido sob a forma mais geral da construção de *dois meios proporcionais*, terá sido o que atraiu mais a atenção dos matemáticos do século XVI. Segundo Bos (2001, p. 27) existem razões que justificam esta proeminência: a primeira tem a ver com a lista de doze maneiras diferentes da sua construção que Eutócio incluiu nos *Comentários* ao livro II *Da Esfera e Cilindro* de Arquimedes[6]; a segunda razão prende-se com o facto de que muitos matemáticos estudaram diversos problemas que, sem solução através de régua e compasso, podiam ser reduzidos ao problema dos dois meios proporcionais.

As *Cónicas* de Apolónio de Perga (262-190 a.C.) contêm um estudo exaustivo das propriedades das secções planas do cone, em que o autor apresenta a dedução (verbal) das equações dessas curvas. Para caracterizar as secções cónicas, Apolónio foi o primeiro a apresentar, ainda que de forma incompleta, a ideia de um sistema de coordenadas recorrendo a certas retas de referência, a saber, diâmetros conjugados ou o par diâmetro-tangente, tanto na elipse como na hipérbole ou na parábola. Essas retas desempenhavam o papel de eixos coordenados e, associando-os a cada curva, Apolónio deduzia uma equação retórica para cada secção cónica através de proporções entre áreas. Neste contexto, Karl Boyer escreve:

[4]Os três problemas são enunciados como: construir o lado do cubo do qual o volume é o dobro do volume de um cubo dado, dividir um ângulo arbitrário em três partes iguais e construir um quadrado de área igual à de um círculo dado, respetivamente. (Struik, 1997, p. 76).

[5] Esta impossibilidade foi provada formalmente apenas no século XIX.

[6]Páginas 588-620.

(...) Apolónio, em geral usava um par de diâmetros conjugados como equivalentes de eixos de coordenadas oblíquas (...). Na verdade, frequentemente em *As Cónicas* vemos um diâmetro e uma tangente em sua extremidade usados como sistema de referência de coordenadas. (1994, p. 111).

E Pedro Miguel Urbaneja refere que:

De facto, as relações entre áreas expressas por Apolónio nas propriedades intrínsecas das curvas traduzem-se com facilidade numa linguagem simbólica de equações, o que permite a associação entre curvas e as suas respetivas equações, essência da Geometria Analítica. (2003, p. 11).

Como parte do programa de recuperação de obras matemáticas gregas, tendência que se revelou durante os séculos XVI e XVII, o francês François Viète (1540-1603) dirigiu intensamente a sua atenção para os *métodos de análise* registados em especial no Livro VII da *Coleção Matemática* de Papo. Fruto desta pesquisa, Viète identificou a Análise grega com a nova Álgebra, tentando apresentá-la de forma inteligível. Mediante o recurso a um simbolismo complicado mas consistente, o algebrista francês pôde reconstruir, em termos algébricos, a Análise geométrica clássica, o que preparou o terreno para o aparecimento das Geometrias Analíticas de Fermat e Descartes. Assim, os trabalhos de Viète desempenharam um papel preparatório e impulsionador no desenvolvimento de ideias algébricas, em particular daqueles matemáticos franceses. E a verdade é que, no seu livro *História da Matemática*, V. Katz atribui paternidade partilhada à Geometria Analítica:

A Geometria Analítica nasceu em 1637 de dois pais, René Descartes (1596-1659) e Pierre Fermat (1601-1665). (2010, p. 542).

Descartes e Fermat viveram numa época caracterizada por uma nova fase no desenvolvimento da Álgebra, a fase simbólica, e simultaneamente pela tentativa de recuperação de obras clássicas. Ambos estavam familiarizados com os trabalhos de Viète, e ambos viram neles uma chave para a compreensão da *análise geométrica* dos gregos (Katz 2010, p. 549). Contudo, abordaram o assunto de modos distintos. Enquanto Fermat se limita a apresentar análises sucintas e remete para o leitor grande parte das sínteses (Mahoney, 1994, p. 85), sem se deter em considerações metodológicas, Descartes proclama em várias ocasiões que, quando se pretende resolver algum problema, deve-se considerá-lo de antemão como já resolvido (Smith, 1954, p. 6).

Com o objetivo de conhecermos melhor ideias e desenvolvimentos que abriram caminho à Geometria Analítica criada por Fermat e Descartes, será feita uma abordagem às raízes históricas da Álgebra geométrica grega e da Análise algébrica até aos primeiros dois terços do século XVII.

No primeiro capítulo, começaremos por uma abordagem à natureza da Geometria grega, condicionada pela existência dos incomensuráveis. Como consequência da descoberta destes, a Matemática grega sofreu modificações profundas, patentes nos *Elementos* de Euclides. Neste tratado há o predomínio da Álgebra geométrica sobre a Aritmética e a presença da teoria das proporções de Eudoxo de Cnido, aplicável a grandezas quer comensuráveis quer incomensuráveis. Esta nova teoria, capaz de substituir a teoria pitagórica, abriu portas a novas demonstrações de resultados de Geometria em que as mesmas eram essencialmente aritméticas e, portanto, apenas válidas no caso particular das grandezas serem comensuráveis. O primeiro capítulo termina com uma breve referência a alguns matemáticos cujas contribuições consideramos (mais) relevantes, pela importância das suas ideias e métodos, nomeadamente os gregos Menecmo, Apolónio e Diofanto, e os franceses Nicole Oresme e François Viète. Consideramos que as contribuições de todos eles tiveram influência significativa sobre a Geometria Analítica de Fermat e de Descartes.

Os capítulos seguintes serão integralmente dedicados à Geometria Analítica criada por estes dois últimos matemáticos franceses, nomeadamente ao modo como a utilizaram de acordo com os seus objetivos. Neste sentido, procurar-se-á dar a conhecer alguns dos seus métodos, que se pensa ser o que melhor retrata o espírito matemático daqueles autores da primeira metade do século XVII. Assim, o segundo capítulo será dedicado ao estudo da *Ad Locus Planos et Solidos Isagoge*, um breve escrito latino cujo título pode ser traduzido como *Introdução aos lugares Planos e Sólidos*, em que Fermat substituiu a antiga *análise geométrica* de Apolónio por uma versão algébrica moderna. No terceiro e último capítulo, comtemplar-se-ão a exposição e a aplicação de alguns dos métodos propostos por Descartes na *Geometria* para a resolução algébrica de vários problemas geométricos.

Capítulo 1
As Origens da Geometria Analítica

1.1 Consequências da incomensurabilidade na natureza da Matemática grega

Não se sabe com segurança quando e em que tipo de figura a incomensurabilidade foi descoberta, mas é muito provável que as primeiras grandezas[7] incomensuráveis a serem observadas tenham sido de segmentos de reta, refere Sá (2007, p. 40). Muitos historiadores atribuem essa descoberta aos discípulos de Pitágoras ao compararem o lado e a diagonal de um quadrado. A diagonal do quadrado não era comensurável com o seu lado, uma vez que não existia um submúltiplo comum que pudesse ser considerado como unidade e que permitisse exprimir exatamente a razão entre a diagonal e o lado como uma razão entre números naturais. Também é defendida a ideia de que essa descoberta surgiu de observar a estrela pentagonal constituída pelas diagonais de um pentágono regular, e de constatar que o lado do pentágono regular não é comensurável com a diagonal[8] (Urbaneja, 2003, p. 14) e (Sá, 2007, p. 42). Neste contexto parece-nos interessante a observação de Urbaneja:

> A grandeza sublime do Teorema de Pitágoras e a mágica beleza do Pentagrama místico pitagórico foram dois cavalos de Troia para a Geometria grega, porque levaram no seu interior o gérmen da profunda crise da comunidade pitagórica donde apareceram. (2003, p. 14).

---

[7]Os gregos distinguiam grandezas de vários tipos: segmentos de reta, figuras planas, sólidos, ângulos, tempos, e até por vezes os pesos.

[8]Segundo Sá (2007, p. 42) as cinco diagonais dum pentágono regular que formam uma figura em forma de estrela, o pentagrama, parece ter estimulado a curiosidade dos geómetras pitagóricos e terá tido um papel importante na vida da comunidade pitagórica, servindo como símbolo de identificação dos membros da Escola de Crotona.

Independentemente de como tenha sido feita, a descoberta da incomensurabilidade marcou o desenvolvimento da matemática grega; levantou-se uma profunda separação, a nível de fundamentos, de métodos e de objetivos entre dois ramos da matemática: a aritmética (ciência dos números inteiros, o discreto) e a geometria (ciência das grandezas, o contínuo), situação a que a que alguns historiadores deram o nome de «divórcio grego»[9] (Sá, 2007 p. 44). Na opinião de Boyer,

(...) quer a incomensurabilidade tenha sido descoberta antes ou depois de 400 a.C., não pode haver dúvida de que a matemática grega sofreu modificações drásticas na época de Platão. (1994, p. 57).

A descoberta dos incomensuráveis exigiu uma revisão a fundo dos fundamentos da Matemática no âmbito pitagórico. Gradualmente, a imaginação criadora típica dos gregos passou para segundo plano à sombra do supremo rigor lógico imposto pela escola platónica, cujo elemento mais representativo foi a figura de Euclides (Urbaneja, 2003, p. 18). Não hesitando em ocultar a via heurística, Euclides estruturou rigidamente a matemática grega elementar no seu tratado *Elementos*, com um estilo de exposição sintético e de caracter geométrico-dedutivo.

No que diz respeito a este tratado, observamos a opinião de Katz (2010):

Os *Elementos* de Euclides (...) para o leitor moderno, a obra é incrivelmente aborrecida. Não traz exemplos; não tem motivação; não tem comentários espirituosos; não tem cálculos. Tem simplesmente definições, axiomas, teoremas e provas. Não obstante, o livro tem sido intensamente estudado. As biografias de muitos matemáticos indicam que a obra de *Euclides* lhes forneceu a sua primeira abordagem à matemática, que os entusiasmou e motivou para se tornarem matemáticos. Forneceu-lhes um modelo de como a "matemática pura" devia ser escrita, com axiomas bem pensados, definições precisas, teoremas cuidadosamente enunciados, e provas coerentes e lógicas. (p. 75).

[9] Segundo Sá (2007, p. 44), este «divórcio» não só marcou a matemática pós-pitagórica como também toda a matemática islâmica e europeia até ao século XVII.

Com o objetivo de compreender melhor a tempestade provocada pela descoberta dos irracionais[10] na matemática grega, tem interesse referir que, antes da tomada de consciência da existência da incomensurabilidade, na Matemática pitagórica os números naturais eram considerados a essência do Universo, o conhecimento das suas propriedades era o saber principal, a partir do qual provinham os outros conhecimentos, dando assim à Aritmética a primazia entre as ciências[11]. Assim, a Geometria pitagórica aparecia como uma ciência subordinada à Aritmética, em que um dos aspetos mais interessantes dessa subordinação era a conceção de que duas grandezas (necessariamente do mesmo tipo) admitiam sempre uma medida em comum, tal como dois números admitiam sempre a unidade como divisor comum (Sá, 2007, p. 36). Grandezas destas dizem-se comensuráveis. Dadas duas grandezas do mesmo tipo, ϕ e φ, serem comensuráveis significa a existência duma terceira grandeza u (também do mesmo tipo de ϕ e de φ) e de dois números naturais m e n, de tal modo que $\phi = \underbrace{u+u+...+u}_{m\ parcelas}$ e $\varphi = \underbrace{u+u+...+u}_{n\ parcelas}$, ou seja, $\phi = mu$ e $\varphi = nu$. Generalizando, grandezas $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ (em número finito) do mesmo tipo serem comensuráveis significa dizer que existe uma grandeza u do mesmo tipo e que existem números naturais $m_{1,} m_2, ..., m_k$ de tal modo que $\alpha_1 = m_1 u$, $\alpha_2 = m_2 u$, ..., $\alpha_k = m_k u$. A grandeza u é uma medida comum às grandezas dadas. A Geometria pitagórica assentava no pressuposto da comensurabilidade das grandezas.[12]

Com a descoberta da incomensurabilidade, a crença pitagórica de que «tudo era número» (Sá, 2007, p. 36) ou que o «número era a base do universo»[13] (Katz, 2010, p. 64) e que todas as relações entre grandezas podiam ser associadas a relações entre números inteiros, foi profundamente abalada.

[10]Atribui-se a Teeteto de Atenas (c. 369 a.C.) a teoria dos irracionais, tal como aparecem no Livro X, dos *Elementos* de Euclides (Struik, 1997, p. 83).

[11] "A ciência pitagórica era constituída por quatro disciplinas principais: Aritmética, Geometria, Astronomia e Música. Porém, não tinham a mesma importância. Para Pitágoras e os seus seguidores, a compreensão do Universo tinha como base o número, o que colocava a Aritmética como excelência; a Música, a Astronomia e a Geometria eram também objeto de estudo, mas encaradas como redutíveis à Aritmética" (Sá, 2007, p. 17).

[12] Na matemática atual as razões incomensuráveis expressam-se mediante números irracionais.

[13] Para os pitagóricos o número estava sempre ligado a objetos contados. Como contar requer que as unidades individuais tenham que permanecer as mesmas, as próprias unidades nunca poderiam ser divididas ou juntadas a outras unidades. Em particular, para os pitagóricos, um número significava uma «pluralidade composta de unidades» Katz (2010, p. 64); isto era uma contagem, segundo este autor. E uma vez que a unidade 1 não era uma pluralidade composta de unidades, não era considerada um número no mesmo sentido que os outros números inteiros positivos.

A impossibilidade de comparar certas grandezas recorrendo ao uso das razões entre números naturais, fez com que os gregos passassem a ter dificuldades no tratamento numérico de comprimentos, áreas e volumes. Esta limitação operacional, acrescida a um sistema de numeração deficiente que utilizava as letras do alfabeto para representar os números inteiros, com a consequente dificuldade para realizar as operações, limitou largamente os gregos na atribuição de números às magnitudes geométricas para medir os seus comprimentos, áreas e volumes. Esta limitação numérica levou os gregos a tratar os problemas diretamente com grandezas geométricas, a modo de magnitudes, (Urbaneja, 2003, p. 28) tornando a Geometria omnipresente na Matemática grega (Urbaneja, 2003, p. 19). A insegurança provocada pelas grandezas incomensuráveis levou a que, enquanto não surgiu uma nova teoria das proporções completamente geral, se evitasse o uso de razões e de proporcionalidades na Geometria. As demonstrações pitagóricas que faziam uso da teoria das proporções tiveram de ser reconstruídas, pois já não era possível aplicar às grandezas o que se conhecia dos números[14].

A proposição *Elementos* VI,12 de Euclides, que permite obter o quarto proporcional de três segmentos de reta, isto é, dados três segmentos de reta *a*, *b*, *c*, permite construir um quarto segmento de reta, x, tal que $\frac{a}{b}=\frac{c}{x}$, (equivalente a $ax=bc$), e a proposição *Elementos* VI,13, que permite obter o meio proporcional (ou média geométrica) entre dois segmentos de reta, ou seja, dados dois segmentos de reta *a*, *b*, permite construir um segmento de reta, x, tal que $\frac{a}{x}=\frac{x}{b}$ (equivalente a $x^2=ab$), adquiriram, com a *geometria das áreas*, nova forma que evitou qualquer referência ao conceito de proporcionalidade, sendo elas a aplicação de áreas[15] e a

[14] O teorema de Pitágoras foi um dos muitos resultados da Geometria para os quais foi possível encontrar uma nova demonstração, sem fazer apelo à teoria das proporções, e portanto, válida também no caso das grandezas envolvidas serem incomensuráveis; essa demonstração é dada por Euclides na proposição *Elementos* I, 47. Outros resultados, como por exemplo o teorema de Tales, que revelava estar fortemente ligado à aritmética dada a natureza do enunciado, teve de aguardar a nova teoria de proporções, que só apareceu com Eudoxo de Cnido e foi exposta por Euclides no Livro V dos *Elementos*. (Sá, 2007, p. 50).

[15] Uma das mais importantes técnicas geométricas desenvolvidas pelos pitagóricos: Sejam *s* um segmento de reta e *F* uma figura plana: "aplicar" *F* a *s* é construir um retângulo com um dos lados iguais a *s* e com área igual à de *F*. Considera-se este problema resolvido, desde que se descubra o outro lado do retângulo; portanto, dados uma figura plana *F* e um segmento de reta *s*, procura-se um segmento de reta *x* tal que o retângulo de lados *s* e *x* tenham a área de *F*.

quadratura[16], respetivamente. A equação $ax = bc$ era vista como uma igualdade de áreas ax e bc e não como uma proporcionalidade, ou igualdade entre as razões $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{x}$; assim, procurava-se um segmento de reta x tal que o retângulo de lados a e x tivesse a área do retângulo bc, utilizando um caso particular da proposição *Elementos* I,45 de Euclides, “construir sobre uma reta dada, e com um ângulo retilíneo dado, um paralelogramo equivalente a uma figura dada”. De forma análoga, com a equação $x^2 = ab$, também vista como uma igualdade de áreas, procurava-se o segmento de reta x tal que o quadrado de lado x tivesse a mesma área do retângulo ab, caso particular da proposição *Elementos* II,14 de Euclides, “construir um quadrado igual a uma determinada figura retilínea”.

Destacamos a opinião comum dos autores Boyer (1994, p. 57) e Urbaneja (2003, p. 28), ao considerarem que o abismo que se abriu entre número e magnitude impediu os gregos de submeterem as grandezas geométricas às manipulações algébricas válidas para números; e tal efeito determinou a transformação da Álgebra babilónica na Álgebra geométrica[17], a qual passou a ter um papel fundamental na Geometria grega. Na Álgebra geométrica, os gregos utilizaram principalmente dois métodos para resolver certo tipo de equações, o método das proporções totalmente abrangente e o método da aplicação de áreas. A parte mais importante da Álgebra geométrica dos gregos encontra-se no livro II dos *Elementos*, que contém só 14 proposições; mas há também resultados nos Livros I e VI que podem ser considerados como fazendo parte deste ramo da Matemática grega. A *Álgebra geométrica* dos gregos cumpria muitas funcionalidades da nossa atual Á*lgebra simbólica*.

Uma desvantagem que, desde o início, surgiu associada à nova Álgebra foi a necessidade de respeitar a dimensão das grandezas, que ficou conhecida como Princípio da Homogeneidade.

---

[16] Seja F uma figura plana; quadrar F é construir um quadrado com área igual à de F. Considera-se este problema resolvido, desde que se descubra o lado do quadrado; portanto, dada uma figura F, procura-se um segmento de reta x tal que o quadrado de lado x tenha área de F.

[17] Katz define-a como «a representação de conceitos algébricos através de figuras geométricas» (2010, p. 88).

Uma “álgebra geométrica” tomara o lugar da antiga “álgebra aritmética”, e nessa nova álgebra não podia haver somas de segmentos com áreas ou de áreas com volumes”. De agora em diante devia haver estrita homogeneidade dos termos de uma equação (...). (Boyer,1994, p. 57).

A limitação algébrica provocada pelo aparecimento dos incomensuráveis tornou também impossível a introdução de novas curvas através de equações (obtidas em linguagem retórica). Na Geometria grega, as curvas eram obtidas construtivamente, mediante interseções de linhas, superfícies e outros lugares geométricos[18]. Desta forma o conjunto das curvas tratadas pelos gregos era muito limitado, a saber, as cónicas de Menecmo e Apolónio, a espiral de Arquimedes, a quadratriz de Hípias e Dinóstrato, a cissoide de Diocles e a concoide de Nicomedes. A Geometria das áreas foi criada para substituir o uso generalizado das proporções à maneira pitagórica, já que a descoberta das grandezas incomensuráveis fez com que fosse inviável o uso das mesmas no tratamento de problemas geométricos, até à introdução por Eudoxo de Cnido (390-320 a.C.) da teoria geral das proporções, aplicável indistintamente a grandezas comensuráveis ou incomensuráveis, que se encontra no livro V dos *Elementos* de Euclides (Urbaneja, 2003, p.35). Segundo Urbaneja (2003) as bases firmes desta teoria permitiram, por exemplo, a Euclides, nas proposições 27, 28 e 29 do livro VI, uma generalização do método da aplicação de áreas, onde o livre uso do conceito de semelhança facilitou a substituição dos retângulos do livro II por paralelogramos, permitindo aplicar a um segmento de reta dado um paralelogramo igual a uma figura retilínea dada e que fosse excedente ou deficiente por um paralelogramo semelhante a um outro paralelogramo dado. Urbaneja (2003) prossegue a sua análise referindo que as correspondentes construções, tal como as das proposições *Elementos* II,5 e II,6 representam, na prática, as soluções geométricas das equações quadráticas $ax \pm x^2 = b^2$, submetidas a restrições geométricas equivalentes a que o descriminante seja não negativo; o mesmo autor conclui que as proposições 27, 28 e 29 do livro VI representaram, no fundo, uma espécie de contrapartida geométrica da forma algébrica mais generalizada de equações quadráticas com raízes reais e positivas (Cf. Urbaneja, 2003, pp. 35-36).

[18] Apolónio designa a propriedade definidora da curva por “sintoma da curva”.

Como para os gregos a palavra número significava número inteiro positivo, uma fração (razão) $\frac{a}{b}$ não representava um número racional, mas sim uma relação entre a e b. Ter-se-ia $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ quando existissem números inteiros p, q, m e n tais que $a=mp$, $b=mq$, $c=np$ e $d=nq$; por exemplo, $\frac{21}{28}=\frac{15}{20}$ porque 21 contém 3 das quatro partes de 28 e de igual modo 15 contém 3 das quatro partes de 20. A partir desta base desenvolveu-se inicialmente a teoria pitagórica da proporcionalidade.

As formulações rigorosas de Eudoxo encontram-se no livro V dos *Elementos* de Euclides, que passou a ser a partir de então, segundo alguns historiadores, a medula da Geometria grega com a sua forma geométrico-dedutiva de acordo com a filosofia platónica (Urbaneja, 2003, p. 19).

Muito embora a definição de Eudoxo já tivesse a vantagem de tornar supérflua qualquer referência ao facto de as grandezas serem comensuráveis ou incomensuráveis, a verdade é que ela não era cómoda nas aplicações práticas. Na sua teoria puramente geométrica das proporções, Eudoxo definiu a igualdade entre duas razões de uma maneira engenhosa, representada pela definição 5 do livro V dos *Elementos* de Euclides, que fixa o critério de razões idênticas:

> Diz-se que quatro grandezas estão na mesma razão, a primeira para a segunda e a terceira para a quarta, quando, tomando quaisquer equimúltiplos da primeira e da terceira, e tomando quaisquer equimúltiplos da segunda e da quarta, os primeiros equimúltiplos excedem, são iguais ou são menores que os últimos equimúltiplos tomados na ordem correspondente. (Heath, 1912, p. 114).

Deste modo, para Eudoxo, dizer que $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\delta}{\varphi}$, com α, β, δ e φ grandezas comensuráveis ou não, sendo α e β do mesmo tipo e sendo δ e φ do mesmo tipo, significava dizer, na nossa notação, que, para todo o m e n inteiros positivos, as seguintes condições eram verificadas:

se $m\alpha < n\beta$ então $m\delta < n\varphi$;

se $m\alpha > n\beta$ então $m\delta > n\varphi$;

se $m\alpha = n\beta$ então $m\delta = n\varphi$.

Alguns historiadores sublinham o carácter moderno do trabalho de Eudoxo; por exemplo Struik (1997) observa que

> A teoria dos números irracionais atual, desenvolvida por Dedekind e Weierstrass, segue o modo de pensar de Eudoxo, mas com o uso dos métodos da aritmética moderna, que abriram perspetivas mais largas. (p. 84).

Além de estar ligado à teoria das proporções, o nome de Eudoxo também está associado ao chamado *método de exaustão*, que permitiu um tratamento rigoroso de cálculos de áreas e volumes na Antiguidade. Eudoxo encontrou uma solução, para os referidos problemas afetados pela incomensurabilidade, mediante um recurso que se desenvolveu em três passos: um axioma[19] (ainda que sob a aparência de definição – o *axioma de Eudoxo-Arquimedes*), uma definição[20] para a *igualdade de razões*, e um método (mais tarde chamado *método de exaustão*[21]).

Os gregos interessaram-se por *métodos de redução*, que aplicavam quer a problemas, quer a teoremas. Proclo de Lícia (410-485 d.C.), nos seus comentários ao livro I dos *Elementos* de Euclides, atribuiu a Hipócrates de Quios (470-410 a.C.) a ideia da redução dum problema ou dum teorema a outro; a propósito do problema da duplicação do cubo, Hipócrates tê-lo-á reduzido à obtenção de dois meios proporcionais (Boyer, 1994, p. 50).

Conforme refere Sousa (2001), o legado de Eutócio de Áscalon (séculos V-VI d.C.), no seu *Comentário* à obra de Arquimedes *Da Esfera e do Cilindro*, é considerado uma das principais fontes sobre os principais desenvolvimentos do problema da duplicação do cubo (p. 47). Nos seus comentários, Eutócio menciona, em particular, uma carta de Eratóstenes (século III a. C.) a Ptolomeu III, então rei do Egipto, na qual, afirma:

---

[19] *Elementos* V, Definição 4 de Euclides, conhecida como " axioma de Eudoxo-Arquimedes", referida por Tomas Heath em *The Thirteen books of Euclid's Elements* (1912): "Diz-se que duas grandezas têm uma razão de uma para a outra se cada uma puder, quando multiplicada, exceder a outra". (p. 114).

[20] *Elementos* V, Definição 5 de Euclides.

[21] Proposição Elementos X,1 de Euclides: Dadas duas grandezas diferentes, se da maior se subtrair uma grandeza maior do que a sua metade, e do que sobrar uma grandeza maior do que a sua metade, e se este processo for repetido continuamente, sobrará, uma grandeza menor do que a menor das grandezas dadas.

(...) foi Hipócrates de Quios o primeiro a aperceber-se de que um cubo seria duplicado se se conseguissem encontrar dois meios proporcionais, em proporção contínua, entre duas linhas retas de que a maior é dupla da menor (...). Citado em Sá (2007, p. 65).

Como já demos a entender no presente trabalho, o problema da duplicação do cubo consiste em construir a aresta de um cubo cujo volume seja o dobro do de um cubo dado, e Hipócrates ter-se-á apercebido que este problema tinha como origem o problema mais simples da duplicação de um quadrado de lado[22] a, o qual podia ser resolvido mediante a construção de um meio proporcional entre a e $2a$, isto é, construindo um comprimento b tal que $\frac{a}{b}=\frac{b}{2a}$. (Katz, 2010, p. 66). Registos fragmentários da obra de Hipócrates revelam que estava, de facto, familiarizado com este tipo de construção, e que terá sido o primeiro a avançar com a ideia de reduzir a problema da duplicação de um cubo de lado a ao problema da determinação de dois meios proporcionais b e c, entre a e $2a$. Porque se $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{2a}$ então $\frac{a^3}{b^3}=\left(\frac{a}{b}\right)^3=\left(\frac{a}{b}\right)\times\left(\frac{a}{b}\right)\times\left(\frac{a}{b}\right)=\left(\frac{a}{b}\right)\times\left(\frac{b}{c}\right)\times\left(\frac{c}{2a}\right)=\frac{a}{2a}=\frac{1}{2}$ e portanto $b^3=2a^3$.

Por outro lado, associa-se a Platão[23] (427-347 a. C.) a invenção do *método analítico*, por este filósofo o ter descrito na *República* como um método pedagogicamente conveniente, explicando que quando uma cadeia de raciocínios não é óbvia, desde as premissas à conclusão, pode inverter-se o processo, ou seja, pode começar-se pela proposição que se pretende provar, e desta deduzir uma conclusão que é conhecida (processo de *análise*). E então, se pudermos inverter a sequência dos passos nesta última dedução, obteremos uma prova legítima da proposição (resultado denominado *síntese*). (Boyer, 1994, p. 65).

---

[22] Os Pitagóricos mostraram que a diagonal de um quadrado é o lado de um outro quadrado com o dobro da área do primeiro. Isto provavelmente sugere o problema da duplicação do cubo, isto é, encontrar a aresta de um cubo com o dobro do volume dum cubo dado. Cajori (1991, p. 21).

[23] No que diz respeito à atribuição genuína do *método analítico* a Platão, Boyer (1994) é de opinião que talvez seja improvável que Platão tenha sido o primeiro a notar a eficácia do ponto de vista analítico. O que Platão provavelmente terá feito, terá sido formalizar o método, ou talvez dar-lhe um nome. (p. 65).

Mediante este processo de análise e síntese, assume-se como certo aquilo que se pretende provar e raciocina-se com base nesta suposição até chegar a algo que forma parte dos princípios ou até alcançar um resultado previamente estabelecido. Assim, a análise praticada pelos gregos veio a ser um procedimento sistemático de descobrir condições necessárias para que um teorema seja verdadeiro, de modo que, se por meio da síntese se mostrar que estas condições são suficientes, então obter-se-á a demonstração correta da proposição.

Apesar de a análise e síntese terem sido usadas pela maioria dos gregos, não se conhece nenhum estudo da sua metodologia anterior ao trabalho de Papo de Alexandria, um dos últimos matemáticos da tradição grega. Coligindo e estendendo trabalhos e resultados de vários autores, transmite-nos o que os antigos geómetras entendiam por análise e síntese no *Tesouro da Análise*[24], no livro VII da sua *Coleção Matemática,* onde relata:

(...) a análise é um método de tomar como aceite o que se busca e daí passar por suas consequências até alguma coisa que seja aceite como resultado de síntese. Citado em Boyer (1994, p. 138).

No *Tesouro da Análise*, Papo apresenta uma singular metodologia expositiva, elencando todo um corpo de tratados analíticos destinados à resolução de problemas geométricos e em que se procede à redução de um problema dado a um problema equivalente cuja solução era já conhecida.[25]

Naturalmente há uma diferença significativa entre a aplicação do método analítico feita pelos gregos e a adotada por Descartes e Fermat nas suas Geometrias Analíticas. Contudo, é patente essa herança nos trabalhos dos dois geómetras franceses. Como já foi referido, a análise começa «assumindo como certo aquilo que se pretende provar», e este é um princípio que Descartes aplicou ao longo do seu tratado. Com efeito, inicia o epígrafo «como se chega às equações que servem para resolver problemas», do primeiro livro da *Geometria*, escrevendo:

Assim quando se pretende resolver algum problema, deve considerar-se de antemão como já feito. (Smith, 1954, p. 6).

[24] *O Tesouro da Análise* é uma coleção abrangendo obras de Euclides, Apolônio, Aristeu e Eratóstenes, cujos conteúdos eram considerados essenciais para aqueles que quisessem tornar-se capazes de resolver problemas envolvendo curvas.

[25] Um exemplo de um destes tratados são os *Dados* de Euclides, que contêm a essência dos problemas dos *Elementos*.

Em vários dos problemas que se propõe resolver, Descartes também começa por supor o problema resolvido, nomeadamente em dois dos problemas mais importantes, o *problema das quatro retas* (caso particular do *problema de Papo*) e a determinação de retas normais a uma curva, em que escreve literalmente *Primeiramente supondo a coisa como já resolvida* (...). (Smith,1954, p. 29) e *Suponho a coisa já feita* (...). (Smith,1954, p. 95).

1.2 Contributos de antecessores de Descartes e Fermat

1.2.1 Menecmo

Vários historiadores atribuem a Menecmo de Atenas (século IV a. C.), da Academia de Platão e aluno de Eudoxo de Cnido, a introdução ao estudo das secções cónicas, em particular a invenção das curvas que mais tarde seriam denominadas elipse, parábola e hipérbole (Boyer, 1994, p. 69). Vários escritos que lhe são atribuídos foram reunidos e estudados por Schmidt[26]; sem qualquer conhecimento de Álgebra, e com ausência total de notação simbólica, Menecmo estudou propriedades dessas curvas de forma puramente geométrica. Ao longo dos *Comentários ao Primeiro Livro dos Elementos de Euclides*, Proclo de Lícia (século V d. C.) atribui-lhe a invenção das cónicas[27]. Numa carta[28] citada por Eutócio, no seu *comentário* ao tratado *Da Esfera e do Cilindro* de Arquimedes, Eratóstenes atribui a Menecmo a *tríade de cónicas*[29].

O estudo de Menecmo deve estar relacionado com a tentativa de resolução, por Hipócrates de Quios (470-410 a.C.), do problema clássico da duplicação do cubo

[26] Max C. P. Schmidt, "Die Fragmente des Mathematikers Menaechmus". *Philologus* 42. 1884, pp. 72-81.

[27] Paul Ver Eecke, *Proclus de Lycie. Les Commentaires sur le Premier Livre des Éléments d'Euclides.* (p.101).

[28] Escrita por Eratóstenes (século III a. C.) de Cirene ao rei Ptolomeu II do Egipto.

[29] Paul Ver Eecke, "Eutocius et sa tradution de la lettre d'Eratosthène au roi Ptolémée sur la duplication du cube", *Archives Internationales pour l'Histoire des Sciences* 36 (1956, p. 226).

mediante a inserção de dois meios proporcionais, como afirma Paul Ver Eecke[30] (Sá, 2007, p. 86). Como foi já foi referido, Hipócrates reduziu o problema da duplicação do cubo (construção de um cubo cujo volume seja o dobro do de um cubo de aresta a) à determinação de dois meios proporcionais entre a e $2a$, isto é, à determinação de dois segmentos de reta, x e y, que verifiquem a proporção $\frac{a}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{2a}$. Por outras palavras, Hipócrates de Quios mostrou que a duplicação do cubo podia ser conseguida, desde que se pudesse encontrar e usar as curvas expressas nessa proporção. Com efeito, a partir daquela dupla proporcionalidade, obtêm-se as igualdades $x^2=ay$, $y^2=2ax$ e $xy=2a^2$, que representam equações[31] de duas parábolas e de uma hipérbole equilátera (Katz, 2010, p. 149). Portanto, os segmentos x e y que verificam a proporção são encontrados através da intersecção de quaisquer duas daquelas cónicas. Tanto da intersecção das duas parábolas, como de uma destas com a hipérbole resulta a igualdade $x^3=2a^3$, que mostra ser x a aresta do cubo cujo volume é duplo do cubo dado, de aresta a.

Na Grécia dos séculos IV e III a. C., um cone era um sólido gerado pela rotação dum triângulo retângulo em torno dum cateto, sendo, por isso, considerados apenas cones retos, duma só folha e limitados. Em qualquer posição durante o movimento de rotação, a hipotenusa é uma geratriz do cone (Sá, 2007, p. 86). Um cone era designado oxigonal (ou acutângulo), ortogonal (ou retângulo) ou ambligonal (obtusângulo), consoante o ângulo no vértice do cone for agudo, reto ou obtuso, respetivamente (Sá, 2007, p. 86). Para a resolução do problema de Delos, Menecmo considerou as curvas que podiam ser obtidas a partir da secção por um plano perpendicular à geratriz de um cone de revolução. De acordo com o modo de encarar as secções cónicas até ao final do século III a. C., as curvas que resultavam dessas interseções eram classificadas de acordo com o tipo de cone circular em que eram produzidas: a secção dum cone oxigonal chamava-se oxitomo (elipse), a secção dum cone ortogonal chamava-se ortotomo (parábola) e à secção dum cone ambligonal

[30] Paul Ver Eecke, "Eutocius et sa tradution de la lettre d'Eratosthène au roi Ptolémée sur la duplication du cube", *Archives Internationales pour l'Histoire des Sciences* 36 (1956, p.222) e Paul Ver Eecke, "Introduction à Eutocius", *Archives Internationales pour l'Histoire des Sciences* 27 (1954, pp.131-132).

[31] Na Geometria antiga, esta forma de abordar a questão, associando uma equação a uma curva, é completamente estranha; o objetivo é observar que as duas questões matemáticas estão intimamente ligadas e que, portanto, a reflexão de uma pode ter levado, de um modo natural, à tomada de consciência da outra. (Sá, 2007, p. 86).

dava-se o nome de amblitomo[32] (hipérbole). Este terá sido o primeiro conceito de secção cónica na Grécia dos séculos IV e III a. C. e é provável que tenha sido utilizado por Menecmo nas suas pesquisas (Sá, 2007, p. 87).

Menecmo descobriu que, cortando um cone circular retângulo (isto é, com um ângulo gerador de 45º) por um plano perpendicular à geratriz, a equação da curva de intersecção é, na linguagem atual da Geometria Analítica, escrita na forma $y^2 = lx$, em que l é uma constante que depende da distância do plano ao vértice, mais tarde designada por *latus rectum* (em português, *lado reto*). Não se sabe como Menecmo deduziu esta propriedade, mas ela depende apenas de teoremas de Geometria elementar, refere Boyer (1994, p. 69). Aparentemente, do mesmo modo, Menecmo terá deduzido as propriedades das outras cónicas, por exemplo, uma equação da forma $y^2 = lx - \frac{b^2x^2}{a^2}$ para a secção dum cone acutângulo, e uma equação da forma $y^2 = lx + \frac{b^2x^2}{a^2}$ para a secção dum cone obtusângulo, onde a e b são constantes e o plano é perpendicular a uma geratriz do cone reto (Boyer, 1994, p. 70). Com o objetivo de encontrar as cónicas convenientes para o objetivo proposto, Menecmo movia convenientemente o plano de corte com o cone reto (Urbaneja, 2003, p. 39).

Nos seus desenvolvimentos é possível observar expressões que se aproximam largamente das equações hoje usadas, bem como a presença, de forma implícita, do conceito de coordenadas, o que induziu muitos historiadores a afirmar que este geómetra já conhecia certos aspetos da Geometria Analítica[33].

Boyer (1994) refere que

> Menecmo provavelmente conhecia muitas das propriedades hoje familiares das secções cónicas, inclusive as assíntotas da hipérbole, que lhe permitiram operar com os equivalentes das equações modernas que usamos (...). (p. 70).

---

[32] Será visto na secção seguinte do presente trabalho, que só no século II a. C. com Apolónio de Perga aparecem (no contexto das secções cónicas) as designações elipse, parábola e hipérbole. Amblitomo correspondia apenas a um ramo de hipérbole e Apolónio foi o primeiro geómetra a alargar o conceito para os dois ramos, considerando cones de duas folhas.

[33] J. L. Coolidge, *A History of Geometrical Methods* (1940, pp.117-119) e H. G. Zeuthen, "*Sur l'usage des coordonnées dans l'antiquité*", Kongelige Danske Videnskabernes Selskals, Forhandlinger, Oversigt, (1888, pp.127-144).

Urbaneja (2003) observa:

(...) realmente impressiona a extraordinária habilidade de Menecmo descobrindo a mais útil família de curvas de toda a matemática e de toda a ciência, e na ausência do instrumento e simbolismo algébrico. (p. 9).

Relembramos que as descobertas de Menecmo resultaram da sua procura de uma solução para o problema da duplicação do cubo, mais propriamente, da procura de curvas que possuíssem as propriedades adequadas à resolução do problema de encontrar os dois meios proporcionais da redução de Hipócrates.

As soluções de Menecmo, passadas em revista por Eutócio, permitiam obter a aresta do cubo duplo como abcissa dum ponto de intersecção de duas cónicas. Um caso envolvia duas parábolas, e outro uma parábola e uma hipérbole equilátera. Ao considerarmos as equações[34] $x^2 = ay$, $y^2 = 2ax$ e $xy = 2a^2$, é possível obter a assim chamada *primeira solução de Menecmo*, como abcissa x do ponto de intersecção da parábola de equação $x^2 = ay$ com a hipérbole de equação $xy = 2a^2$. A *segunda solução de Menecmo* obtém-se pela intersecção das duas parábolas de equações $x^2 = ay$ e $y^2 = 2ax$. Como já aqui foi referido, de ambos os casos facilmente se infere a igualdade $x^3 = 2a^3$, sendo x a aresta do cubo cujo volume é duplo do volume do cubo dado, de aresta a .

Com o objetivo de salientar a simplicidade das soluções imputadas a Menecmo, vejamos, utilizando a atual Geometria Analítica, dois exemplos de solução: um recorrendo à intersecção entre a hipérbole e a uma das parábolas (*primeira solução de Menecmo*) e outra recorrendo à intersecção das duas parábolas (*segunda solução de Menecmo).*

Considere-se, por exemplo, um cubo de aresta $a = 2$ cujo volume se pretende duplicar. Procura-se a solução x que verifica a equação $x^3 = 2 \times 2^3$, ou seja, pretende-se obter um segmento de reta x cujo comprimento seja $\sqrt[3]{16}$. Fazendo um esboço gráfico (Fig. 1) da parábola de equação $x^2 = 2y$ e da hipérbole de equação $xy = 8$, a abcissa do ponto de intersecção, isto é, a abcissa do ponto A é a medida procurada (*a primeira solução de Menecmo*). O segmento de comprimento x , aresta do cubo procurado,

[34] Em linguagem algébrica atual.

está representado na figura, pelo segmento de reta AB. Observe-se que o valor constado no gráfico é um valor aproximado de $\sqrt[3]{16}$.

De modo análogo através da intersecção, diferente da origem, das parábolas de equação $x^2 = 2y$ e $y^2 = 4x$ (Fig. 2) se obtém abcissa x do ponto A (a *segunda solução de Menecmo*), representado pelo comprimento do segmento de reta AB, aresta do cubo procurado.

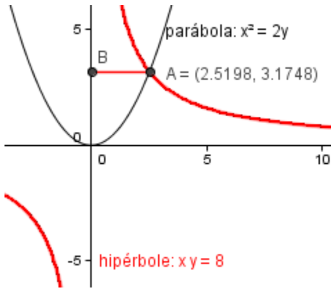

Fig. 1 – Primeira solução de Menecmo

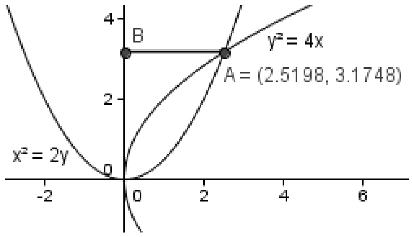

Fig. 2 – Segunda solução de Menecmo

É de salientar que esta solução foi encontrada sem a restrição, comum na Geometria grega, ao uso exclusivo da régua não graduada e do compasso. Só com estes instrumentos não seria possível desenhar todos os pontos das cónicas, além de que a definição de secção plana dum cone envolve Geometria tridimensional e não apenas Geometria no plano.

G. J. Toomer, que publicou em 1976 a tradução para inglês da versão arábica da obra de Diocles *Dos Espelhos Cáusticos*, pôs em causa a atribuição da autoria da segunda solução a Menecmo, acreditando que ela deveria ser atribuída a Diocles. No entanto Wilbur Knorr discordou desta proposta, ao afirmar que a intenção de Diocles, ao apresentar o método das duas parábolas, não era oferecer uma nova solução para o problema da duplicação do cubo:

> (...) não podemos inferir que a inclusão de Diocles do método das duas parábolas contrarie a sua origem em Menecmo. É concebível, embora improvável, que Diocles não tivesse conhecimento dos esforços de Menecmo. Knorr (1993, p. 240).

Menecmo foi capaz de mostrar que as secções dos cones tinham importantes propriedades, como lugares geométricos, traduzíveis em expressões retóricas que correspondem às equações atuais, e que por sua vez permitiam deduzir outras propriedades. Estas foram objeto de reflexão por Apolónio e estão tratadas nos primeiros livros do seu tratado As *Cónicas*. Com base no trabalho de Menecmo, alguns historiadores modernos (Zeuthen, Coolidge, Loria e Heath) reclamam para os gregos, e em primeiro lugar a Menecmo, a paternidade da Geometria Analítica ao estabelecer como essência deste ramo da Matemática o estudo das propriedades dos lugares geométricos (Urbaneja, 2003, p. 40). Contudo, logo desde o início, tal atribuição encontra várias limitações impostas pelo caracter sintético-geométrico do procedimento de Menecmo e pela ausência duma Álgebra simbólica no sentido algorítmico, que é uma componente imprescindível da Geometria Analítica, a qual permite a real e mútua correspondência entre curvas e equações (Urbaneja, 2003, p. 40).

1.2.2 Apolónio

Apolónio de Perga (262-190 a.C.), conhecido já na Antiguidade como *o Grande Geómetra*, foi um célebre matemático e astrónomo que ensinou em Alexandria. Seis das obras de Apolónio são referidas no *Tesouro da Análise*, da *Coleção Matemática* de Papo: *Sobre a Secção duma Razão*, *Sobre a Secção duma Área*, *Sobre a Secção Determinada*, *Sobre as Tangências*, *Sobre as Inclinações* e *Sobre os Lugares Planos*. Estas obras estão perdidas, mas Papo dá indicação acerca dos conteúdos de alguns deles. Urbaneja afirma:

> O *Tesouro da Análise* da *Coleção Matemática* de Papo é constituído, em grande parte, por obras de Apolónio, perdidas ou conservadas então de forma fragmentada que devem incluir muito material geométrico cujo estudo forma parte hoje da Geometria Analítica. (2003, p. 41).

Quando no século XVII surgiu o interesse na restauração de obras perdidas, os tratados de Apolónio estavam entre os favoritos. Fermat, por exemplo, propôs-se reconstruir os *Lugares Planos*, baseando-se nos registos de Papo.

Da grande produtividade científica de Apolónio só uma obra se preservou substancialmente, as *Cónicas* (Fig. 3). Esta obra-prima da Geometria antiga, em que Apolónio apresenta um estudo aprofundado das secções cónicas, é constituída por oito livros, sete dos quais sobreviveram e, para Katz, «representam de algum modo o culminar da matemática grega» (2010, p. 151).

Para a maioria dos historiadores da Matemática, as *Cónicas* de Apolónio constituem um tratado de grande amplitude e profundidade. Trata-se de uma obra extensa e rigorosa, comparável aos *Elementos* de Euclides pelo seu conteúdo e rigor, pela ausência de qualquer notação algébrica. Considerada de leitura difícil retrata, em grande parte, do que se conhece da Geometria antiga, pois nela substituiu escritos anteriores, por exemplo de Menecmo, Aristeu e Euclides. Parece-nos interessante a análise de Katz:

É-nos difícil atualmente compreender como Apolónio podia descobrir e provar centenas de belos e difíceis teoremas sem o simbolismo algébrico moderno. No entanto, fê-lo, e não há registo de qualquer trabalho matemático grego posterior que se aproxime da complexidade das *Cónicas*. (2010, p. 151).

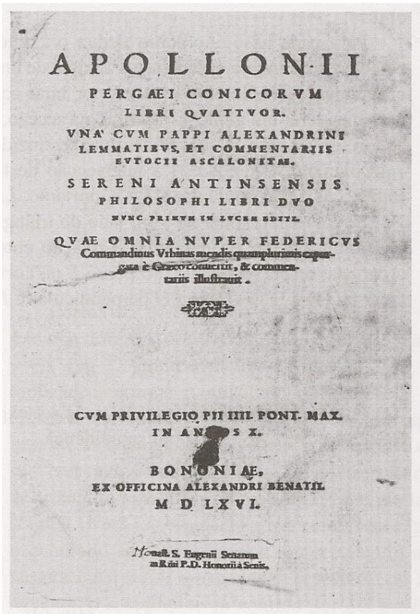
APOLLONII
PERGÆI CONICORVM
LIBRI QVATTVOR.
VNA CVM PAPPI ALEXANDRINI
LEMMATIBVS, ET COMMENTARIIS
EVTOCII ASCALONITÆ.
SERENI ANTINSENSIS
PHILOSOPHI LIBRI DVO
NVNC PRIMVM IN LVCEM EDITI.
QVÆ OMNIA NVPER FEDERICVS
Commandinus Vrbinas mendis quamplurimis expurgata è Græco conuertit, & commentariis illustrauit.
CVM PRIVILEGIO PII IIII. PONT. MAX.
IN ANNOS X.
BONONIÆ,
EX OFFICINA ALEXANDRI BENATII.
M D LXVI.

Fig. 3 – Página de título da primeira edição impressa em latim das *Cónicas*, de Apolónio, 1566. Fonte: Smithsonian Institution Libraries, Photo No. 86-4346. (Cf. Katz, 2010, p. 151)

Apolónio definiu as secções cónicas de modo diferente do que tinha sido adotado pelos seus antecessores [35]. Com uma visão geométrica inovadora,

[35] As secções cónicas já eram conhecidas cerca de um século e meio, antes de Apolónio ter escrito o seu tratado. Nesse intervalo de tempo já tinham sido escritas, pelo menos duas exposições gerais, a saber por Aristeu e por Euclides. Pensa-se que o tratado

demonstrou que não era necessária a restrição da perpendicularidade do plano de intersecção à geratriz do cone, e ainda que de um único cone era possível obter as três espécies de secções cónicas variando apenas a inclinação do plano de secção (Katz, 2010, p.150). Este foi um passo importante, pois contribuiu para relacionar os três tipos de curvas: a elipse, a parábola e a hipérbole. Outra generalização importante contida neste tratado é o facto de o cone não precisar de ser reto; Apolónio foi o primeiro geómetra a mostrar que as propriedades dessas curvas não eram diferentes conforme fossem cortadas de cones oblíquos ou retos (Boyer, 1994, p. 107). Também alargou os seus estudos ao substituir o cone de uma só folha por um duplo, o que fez com que apresentasse as curvas antigas de forma mais próxima do ponto de vista usada hoje. A sua definição de cone circular é a seguinte:

> Se fizermos uma reta, de comprimento indefinido e passando sempre por um ponto fixo, mover-se ao longo da circunferência de um círculo que não está no mesmo plano com o ponto de modo a passar sucessivamente por cada um dos pontos dessa circunferência, a reta móvel descreverá a superfície de um cone duplo. Apolónio citado em Boyer (1994, p. 107).

Com esta definição, a hipérbole passou a ser considerada como uma curva de dois ramos, a que nos é hoje familiar. Carl Boyer é de opinião que

> Mostrando como todas as secções cónicas de um mesmo cone oblíquo de duas folhas e dando-lhes nomes eminentemente apropriados, Apolónio deu importante contribuição à Geometria (...). (1994, p. 108).

Com efeito, durante cerca de século e meio, as secções cónicas não tinham tido outras designações além das descrições pelas quais tinham sido descobertas (oxitomo, ortotomo e amblitomo). Deve-se a Apolónio a mudança dos nomes para elipse, parábola e hipérbole (adaptadas dos nomes anteriormente usados pelos pitagóricos para as aplicação de áreas) para as secções planas do cone (Boyer,1994, pp. 107-108).

Para os geómetras gregos os *lugares geométricos* dividiam-se em três categorias: os *lugares planos* que contemplavam as retas e os círculos, os *lugares*

Cónicas de Apolónio tenha derrotado todos os rivais na teoria das secções cónicas, inclusive o estudo das cónicas de Euclides. (Boyer, 1994, p. 107).

sólidos formados pelas secções cónicas, e os *lugares grâmicos* (ou *lineares*) que reuniam todas as restantes curvas. Terão atribuído o nome de *lugares sólidos* à segunda categoria porque as secções cónicas eram descritas estereometricamente como secções de uma figura a três dimensões, e não como lugares no *plano* que satisfazem uma certa condição. Tal como os seus antecessores, Apolónio obteve inicialmente as cónicas a partir dum cone, mas logo que possível libertou-se deste. Desenvolveu a teoria dos *diâmetros conjugados* ao demonstrar que os pontos médios de um conjunto de cordas paralelas traçadas sobre um diâmetro de uma elipse ou de uma hipérbole formavam um segundo diâmetro; neste sentido, deu-lhes o nome de *diâmetros conjugados* (Fig. 4). Aos segmentos de reta paralelos JM e QN Apolónio deu o nome de *ordenadas* e aos segmentos de reta RM et RN (de origem no vértice R da cónica e extremidades nos pontos onde as semicordas cortam o diâmetro RS da curva) designou *abcissas*. Com estes conceitos, Apolónio conseguiu obter um quadro de referência útil para a localização de uma cónica no plano, usando um par de diâmetros conjugados como um sistema de eixos de coordenadas oblíquas. Este geómetra também demonstrou que uma reta traçada por uma extremidade de um diâmetro de uma elipse ou hipérbole paralelamente ao conjugado é tangente à cónica. Saliente-se que, é possível observar na sua obra, *Cónicas,* o uso frequente de um diâmetro e uma tangente na sua extremidade como um sistema de referência de coordenadas, que não difere na essência do uso atual de sistemas de coordenadas, quer sejam retangulares, quer sejam oblíquas. Com o objetivo de estudar propriedades das curvas, Apolónio considerava o sistema de coordenadas à posteriori sobre as mesmas[36].

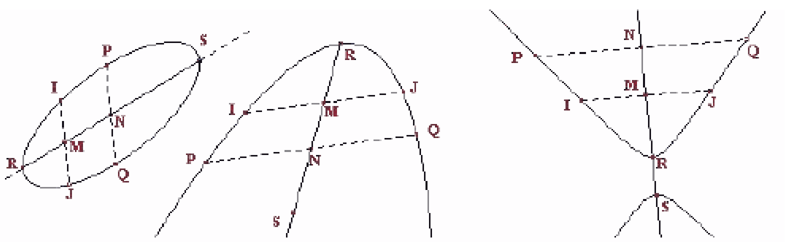

Fig. 4 – Diâmetros conjugados- Figura extraída de Vincenzo (2007, p. 445)

Do cone, o geómetra deduziu, para cada secção, uma propriedade fundamental ou *sintoma*, continuando o seu estudo no plano baseado nessa

[36] "Não parece haver exemplo na Geometria antiga do sistema de coordenadas ser estabelecido à priori para fins de representação gráfica de uma equação ou relação expressa, seja simbolicamente seja retoricamente" .(Boyer, 1994, p. 114).

propriedade. A partir duma relação característica entre a *ordenada* e a *abcissa* de um ponto arbitrário de cada curva, Apolónio obteve, de forma retórica, o que podemos atualmente traduzir por uma equação algébrica. Assim, deduziu os *sintomas* padrão de cada uma das três cónicas, traduzidos pelas equações

$$y^2 = lx\,, \qquad y^2 = lx - \frac{b^2}{a^2}x^2\,, \qquad y^2 = lx + \frac{b^2}{a^2}x^2\,,$$

de parâmetros a, b e l. A parábola de equação $y^2 = lx$, com vértice na origem (sendo l o *lado reto* ou parâmetro) foi apresentada com a propriedade, qualquer ponto sobre ela o quadrado sobre a ordenada é igual ao retângulo sobre a abcissa x e o parâmetro l. As equações $y^2 = lx - \frac{b^2}{a^2}x^2$ e $y^2 = lx + \frac{b^2}{a^2}x^2$ representam equações da elipse e da hipérbole, respetivamente, com um vértice como origem (sendo que para a elipse $y^2 < lx$ e para a hipérbole $y^2 > lx$). Estas desigualdades sugeriram os nomes dados[37], por Apolónio, às cónicas e que ainda hoje lhes estão associados (Boyer, 1994, p. 108) e (Katz, 2010, p. 153).

Após ter deduzido os *sintomas* das curvas a partir das suas definições como secções de um cone, Apolónio mostrou[38] o que se podia considerar o recíproco, isto é, que sendo dado um vértice (ou um par de vértices) na extremidade (ou extremidades) de uma dada semi-recta (ou segmento de reta), e dado um parâmetro, era possível encontrar-se um cone e um plano de secção, cuja intersecção fosse uma cónica (parábola, elipse ou hipérbole) com os referidos vértice (ou vértices), eixo e parâmetro. Esta prova revelou-se de grande importância, na medida em que, segundo Katz (2010)

Daqui em diante, na geometria grega assim como na medieval e na primeira geometria moderna, um autor podia enunciar a "construção" de uma cónica sendo dados vértices, eixos e parâmetro como a construção de uma circunferência dados o centro e o raio". (p. 155).

[37]O nome parábola provém da palavra grega p*araboli* (aplicado) porque o quadrado da ordenada é igual ao retângulo que está aplicado ou tem por base o lado reto e por altura a abcissa X (usando o método por *aplicação de áreas*). As palavras *paraboli*, *elipssis* (significa por defeito) e *yperboli* (por excesso) já eram há muito tempo usadas para distinguir os vários tipos de *aplicação de áreas*. (Katz, 2010, p. 153).

[38] Nas proposições finais do livro I das Cónicas.

Para deduzir propriedades das cónicas sem recorrer à definição original, Apolónio usou os respetivos *sintomas*, tal como atualmente são deduzidas propriedades de uma curva a partir da sua equação. Embora o matemático grego tenha feito sempre uso da linguagem natural, grande parte do seu trabalho pode ser assinalado como uma Álgebra geométrica e o *sintoma* duma cónica pode ser considerado como uma expressão retórica da sua propriedade algébrica fundamental (Katz, 2010, p. 155). Após ter deduzido, a partir de um estudo estereométrico do cone, a relação característica entre as coordenadas planas de um ponto genérico das cónicas, Apolónio obteve outras propriedades fundamentais dessas curvas, muitas das quais eram desconhecidas até então (Boyer, 1994, p. 110). Em particular, o livro I das *Cónicas* contém vários teoremas que envolvem o que hoje consideramos serem mudança de sistemas de eixos, isto é, transformações de coordenadas de um sistema baseado numa tangente e um diâmetro num ponto P da cónica, para um novo sistema determinado por uma tangente e um diâmetro num segundo ponto Q da mesma curva; o geómetra grego acrescentou às demonstrações anteriores que uma cónica pode ser referida a qualquer tal sistema como eixos (Boyer, 1994, p. 110).

Note-se que para os gregos as equações eram determinadas por curvas, e não o recíproco. As coordenadas, as variáveis e as equações resultavam de uma situação geométrica específica. Não lhes era suficiente definir curvas, de forma abstrata, como lugares que satisfaziam as condições dadas; para garantir que um lugar geométrico fosse realmente uma curva teria de ser exibido estereometricamente como uma secção de um sólido, ou descrito por um processo cinemático de construção (Boyer, 1994, p. 114).

É também de salientar que, em contraste com o conceito cinemático de Arquimedes, Apolónio desenvolveu o conceito estático de tangente a uma cónica, na senda do que Euclides tinha feito para o círculo:

(...) se uma reta é traçada por uma extremidade de um diâmetro de uma elipse ou hipérbole paralelamente ao conjugado, a reta "tocará" a cónica e nenhuma outra reta pode cair entre ela e a cónica- isto é, a reta será tangente à cónica. Apolónio citado em Boyer (1994, p. 110).

Katz (2010, p. 162) refere que o principal objetivo de Apolónio, nas *Cónicas,* não foi tanto desenvolver as propriedades das secções cónicas, mas sim obter teoremas e resultados necessários tendo em vista aplicar estas curvas à resolução de problemas geométricos. Com efeito, é possível observar a tentativa de resolução de alguns problemas clássicos, como por exemplo o da trissecção do ângulo e o da duplicação do cubo, onde foram usadas secções cónicas (Katz, 2010, p. 162).

A proposta de resolução de Apolónio para o problema *do lugar geométrico das três ou quatro retas*, o *problema de Papo,* teve repercussões até ao século XVII. Apolónio escreveu que este caso tinha sido parcialmente resolvido por Euclides, mas que os seus novos resultados, expressos no seu livro III, proporcionavam a resolução completa. Para o caso das três retas, Katz refere que, apesar do livro III não mencionar o problema como tal, é possível deduzir-se, a partir de teoremas aí contidos, que uma cónica representa esse lugar geométrico relativamente a duas tangentes à curva num dado ponto e a secante ligando os dois pontos de tangência; Katz refere também que outros teoremas do mesmo livro permitem mostrar que uma secção cónica também é solução do problema das quatro retas (2010, p. 164). Geómetras gregos posteriores tentaram, embora sem sucesso, encontrar o lugar geométrico alargando significativamente o número de retas. No século XVII, Descartes e Fermat, retomaram o problema e provaram que podia ter solução através de um novo método, o da Geometria Analítica. Em resultado duma leitura cuidadosa do trabalho de Apolónio, Descartes conseguiu deduzir as equações das curvas, que satisfaziam condições análogas, para um alargado número de retas e classificar as soluções.

Pensamos que é merecido salientar novamente que, nas *Cónicas* o uso de retas de referência (o diâmetro e uma tangente na sua extremidade) como ideia de um sistema de coordenadas[39], em que as distâncias medidas ao longo do diâmetro a partir do ponto de tangência representavam as *abcissas* e os segmentos de reta paralelos à tangente representavam as *ordenadas*, terá sido um procedimento que, dentro das suas limitações, se aproximou do que atualmente é usado na Geometria Analítica. Dentro desta linha de pensamento, pensamos relevante o comentário de Boyer (1994) ao referir que:

> Os métodos de Apolónio, em As Cónicas, em muitos pontos são tão semelhantes aos modernos que às vezes se considera o seu tratado como uma Geometria Analítica, antecipando a de Descartes por 1800 anos. (p. 114).

[39] Relembre-se que a Álgebra geométrica grega não contemplava grandezas negativas.

Apesar na notabilidade das *Cónicas*, tanto pelo conteúdo como pela inovação dos métodos, Apolónio ficou no estudo das curvas muito aquém da flexibilidade e da generalidade de tratamento dadas mais tarde por Descartes e Fermat. As limitações da Álgebra geométrica (associada a uma linguagem retórica) e a ausência de simbolismo algébrico terão sido os fatores decisivos que impediram Apolónio de ter sido o criador da Geometria Analítica.

1.2.3 Diofanto

Pouco se conhece da vida de Diofanto (*ca*. 246-330 d. C.), exceto que viveu em Alexandria. A sua obra mais importante é a *Aritmética,* um tratado em treze livros, dos quais se conhecem seis[40] no original grego e quatro em tradução para árabe. Nesta obra, Diofanto procedeu à análise e resolução de problemas numéricos mediante a utilização de equações, dando mostras de grande perícia a discutir e analisar casos por meio de subtilezas e artifícios (Urbaneja, 2003, p. 51) e (Boyer, 1994, p. 132). A sua aparente destreza matemática tem levado historiadores a situar este matemático ao nível do chamado *triângulo helenista*, constituído por Euclides, Arquimedes e Apolónio, refere Urbaneja (2003, p. 51). Contudo, Diofanto tem pouco em comum com a matemática grega tradicional, uma vez que do seu trabalho está ausente a estrutura lógico-dedutiva daqueles três grandes geómetras. Distanciado da corrente dominante da Matemática grega (Boyer, 1994, p. 130), Diofanto inaugurou um novo tipo de Álgebra com que tratou problemas aritméticos e algébricos por si mesmos, sem a dependência da geometria[41] e sem exposição dedutiva (Urbaneja, 2003, pp 51-52); nesta linha de pensamento Boyer refere que a *Aritmética* de Diofanto «não se assemelha à Álgebra geométrica de Euclides» (1994, p. 130).

A *Aritmética* pouco tem em comum com a Matemática grega tradicional, mas tem algumas semelhanças com a Álgebra mesopotâmica, o que levou Dirk J. Struik a escrever que «Diofanto pode ter sido um babilónio helenizado» (1997, p. 105).

[40] Uma exposição completa encontra-se em *Diophantus of Alexandria* (1910), T. L. Heath.

[41] Já no século I d.C. (aproximadamente), Heron e Nicómaco formularam e resolveram problemas algébricos mediante procedimentos aritméticos puros; A obra de Nicómaco, *Introducio*, contém um estudo sobre as propriedades mais elementares dos números, não sendo considerado, portanto, um tratado sobre computações nem Álgebra. O *Aritmética* de Diofanto revelou-se muito diferente, pois envolveu a resolução de equações com uma linguagem diferente (sincopada).

Seguindo a metodologia dos matemáticos egípcios e babilónios, Diofanto não se preocupava em apresentar justificações nem em dar demonstrações dedutivas e ordenadas. A sua principal preocupação era encontrar soluções corretas para os problemas, resolvendo-os sem os classificar ou apresentar soluções gerais. Não obstante, enquanto os matemáticos egípcios e mesopotâmios se dedicaram, fundamentalmente, às soluções de equações determinadas (até ao terceiro grau), expressando-as palavrosamente (em Álgebra retórica), Diofanto, no seu tratado, revela um avanço significativo na resolução de equações tanto determinadas como indeterminadas, com a introdução de um simbolismo algébrico próprio: o uso sistemático de abreviaturas. Deu especial atenção à solução de problemas indeterminados, daí que este tratamento, designado muitas vezes *Análise Indeterminada*, se tornasse conhecido por *Análise Diofantina* (Boyer, 1994, p. 132). O seu tratamento talentoso das equações «revela que a antiga Álgebra da Babilónia ou talvez da Índia não só sobreviveu ao brilho da civilização grega, como também foi aperfeiçoada com a atividade de alguns homens», escreve Struik (1997, p. 105) referindo-se a Diofanto.

Diofanto enunciava os problemas de forma abstrata, mas concretizava os dados numericamente para os resolver. Por exemplo, para ilustrar a resolução dum problema que envolvesse uma equação do 2º ou do 3º grau, propunha um problema particular que dependesse dessa equação, e depois supunha que noutros casos que envolvessem equações do mesmo tipo o procedimento seria o mesmo. Esta determinação numérica à priori não punha em causa a validade do seu método, embora naturalmente escolhesse os valores de modo a que as soluções fossem positivas.

Uma inovação importante do trabalho de Diofanto consistiu em «manter (ainda) nos enunciados algébricos a forma retórica da estrutura da frase, substituindo por abreviaturas uma série de grandezas, conceitos e operadores frequentes» (Urbaneja, 2003, p. 52), dando assim início à Álgebra sincopada[42]. Numa simplificação excessiva, Nesselmann considerou três fases no desenvolvimento histórico da Álgebra, a saber, a fase retórica (ou primitiva), a fase sincopada (ou intermédia) e a fase simbólica (ou final). A fase retórica inclui toda a Álgebra árabe medieval e perdura até ao início do Renascimento europeu; ora, dum ponto de vista meramente cronológico, o tratado

[42] A distinção entre as fases retórica, sincopada e simbólica da Álgebra deve-se a G.H.F. Nesselmann, *Die Algebra der Griechen*, Berlim, 1842.

diofantino não se coaduna com a classificação de Nesselmann, uma vez que «neste esquema a *Aritmética* de Diofanto deve ser colocada na segunda categoria» (Boyer, 1994, p. 133).

Nos seis livros da *Aritmética* preservados no original grego está patente o uso sistemático de abreviaturas para a operação de subtração e para potências, quer de números dados, quer do número pedido (dos *coeficientes* e da *incógnita*, diríamos hoje) no estudo de cerca de 150 problemas em termos de exemplos numéricos específicos (Boyer, 1994, p. 133). De um modo sintético, apresentam-se alguns termos e símbolos usados por Diofanto. Assim, indicou os números conhecidos por $\overset{o}{M}$ (iniciais da palavra grega μοναδες – *monades*, que significa *unidades*) e representou a incógnita por ς (última letra da palavra grega αριθμος – *arithmos*, que significa *número*). Utilizou os símbolos Δ^y e K^y para o quadrado (*dynamis*) e para o cubo (*kubus*) da incógnita, respetivamente, e os símbolos $\Delta^y\Delta$, ΔK^y e $K^y K$ para o quadrado multiplicado por si próprio (*dynamo-dynamis*), para o quadrado multiplicado pelo cubo (*dynamo-kubus*) e para o cubo multiplicado por si mesmo (*kubo-kubus*), respetivamente.

Saliente-se que, ao trabalhar com potências de ordem superior a três (até ao sexto grau), Diofanto revelou, uma vez mais, um divórcio com a tradição grega. A Álgebra sincopada de Diofanto representa um avanço invulgar relativamente à linguagem da Álgebra geométrica de Euclides.

> Apesar de existir, todavia ainda, uma certa indecisão no processo abreviador, sem dúvida Diofanto inicia a construção de uma máquina mental de assombrosa precisão e eficácia que constitui a matriz da Álgebra. (Urbaneja, 2003, p. 59).

Toda a *Aritmética* lida apenas com números a que hoje chamamos racionais positivos. Como afirma Katz, «Obviamente, Diofanto não estava a lidar com números negativos, que para ele não existiam» (2010, p. 216). Contudo, Diofanto conhecia as regras de multiplicação para números com sinal menos, tendo estabelecido regras necessárias para somar, subtrair e multiplicar expressões algébricas ou termos que envolvessem subtrações.

É bom que, quem comece este estudo, adquira prática na adição, subtração, e multiplicação das várias espécies [tipos de termos]. Deve saber como adicionar termos positivos e negativos com diferentes coeficientes a outros termos, estes ou positivos ou de igual modo parcialmente positivos e parcialmente negativos, e como subtrair de uma combinação de termos positivos e negativos outros termos ou positivos ou de igual modo parcialmente positivos e parcialmente negativos. Diofanto citado em Katz (2010, p. 216).

Depois de explicitar a notação a utilizar, Diofanto estabeleceu regras básicas para a resolução de equações. Tornou claro o processo de transposição de termos entre os dois membros duma igualdade, bem como o processo de redução de termos semelhantes. Estes dois procedimentos conduzem a equação, que traduz o enunciado dum problema concreto, a uma forma mais simples, facilitando a resolução da mesma.

Se um problema conduz a uma equação na qual certos termos são iguais a termos da mesma espécie mas com coeficientes diferentes, será necessário subtrair elementos da mesma natureza de ambos os lados, até que um termo seja achado igual a um termo. Se por acaso, houver, ou num lado ou em ambos os lados, quaisquer termos negativos, será necessário adicionar aos termos negativos de ambos os lados, até os termos de ambos os lados serem positivos, e então de novo subtrair elementos da mesma natureza até que reste só um termo de cada lado. Isto seria o objetivo almejado ao enquadrar as hipóteses das proposições, isto é reduzir as equações, se possível, até ser deixado um termo igual a um termo; mas eu mostrarei mais tarde como, no caso de também os dois termos serem deixados iguais a um termo, um tal problema é resolvido. Diofanto citado em Katz (2010, p. 217).

Diofanto também impôs restrições nos enunciados, de modo a obter soluções, inteiras ou fracionárias, mas sempre positivas. Às soluções irracionais deu o nome de *impossíveis* (Struik, 1997, pp. 105-106). Na resolução de problemas que envolvessem mais do que uma incógnita, Diofanto escolhia uma delas e tentava de seguida representar as restantes em função desta ou, eventualmente, escrevia-as todas em função de uma nova. (Urbaneja, 2003, p. 51).

Tanto Katz (2010, p. 226) como Boyer (1994, p. 133) relevam o facto de a *Aritmética* de Diofanto, enquanto trabalho de Álgebra, ter sido efetivamente um tratado de *análise* de problemas. A solução de cada problema era inicialmente suposta encontrada; como consequência desta suposição, eram levados a cabo raciocínios sucessivos até ao ponto em que um valor numérico podia ser determinado através da resolução duma simples equação. A *síntese*, que neste caso é a prova de que a resposta satisfaz as condições iniciais, nunca Diofanto a deu, uma vez que ela se reduziria a um simples cálculo aritmético. Assim, é possível observar um forte contraste entre a *Aritmética* de Diofanto e os *Elementos* de Euclides, que são puramente sintéticos.

> Diofanto representa um avanço espetacular na história da álgebra e, embora não tenha chegado a criar um verdadeiro algoritmo de automatização de resolução de equações, é um pioneiro no caminho que, semeado durante 1300 anos pelos árabes e pelos matemáticos renascentistas italianos, transforma a logística numerosa (que opera com números concretos) na logística especiosa de Viète, que generalizá os métodos do cálculo literal para a doutrina algébrica como um dos alicerces da matemática ao converter-se na sua própria linguagem. (Urbaneja, 2003, p. 52).

A *Aritmética* de Diofanto foi estudada por vários autores Islâmicos, como por exemplo Al-Karaji (Katz, 2010, p. 226), mas exerceu especial influência sobre os matemáticos europeus que se dedicaram à teoria dos números. Rafael Bombeli, por exemplo, retomou muitos dos seus problemas, estudou-os e publicou-os na sua *Álgebra* de 1572. Vários dos problemas a que Viète dedicou o seu estudo, foram extraídos da *Aritmética* de Diofanto, embora Viète tenha considerado que esta obra ficava dentro dos limites da *logística numérica* (Busard, 1991, p. 2515). Fermat estudou cuidadosamente a edição inicial grega impressa por Bachet de Méziriac, publicada em Paris em 1621, generalizando vários resultados na teoria dos números que Diofanto sugerira. Segundo Boyer (1994, p. 134),

> (...) Diofanto teve uma influência maior sobre a teoria moderna dos números do que qualquer outro algebrista grego não geométrico. Em particular, Fermat foi levado ao seu célebre "grande" ou "último" teorema quando procurou generalizar um problema que tinha lido na *Aritmética* de Diofanto: *dividir um dado quadrado em dois quadrados*".

Alguns historiadores da Matemática consideram Diofanto como *o pai da Álgebra*, por ter iniciado um processo criador de um simbolismo que acabou por ser precursor da notação algébrica (Urbaneja, 2013, p. 51). Contudo, tal designação não deve ser tomada literalmente, pois outros autores atribuem esse título a François Viète (1540-1603). Boyer (1994) observa que:

> Se pensarmos, primeiramente em termos de notação, Diofanto tem boas razões para pretender o título de pai da álgebra, mas em termos de motivação e conceitos a pretensão é menos justificada. (p. 133).

Contudo, como já aqui se referiu, a principal lacuna da Matemática grega, que a impediu de alcançar a Geometria Analítica, foi a ausência duma Álgebra simbólica. Ora, o trabalho de Diofanto deu início à construção desse instrumento algorítmico que estava em falta, pelo que podemos afirmar que o seu trabalho representa um elo fundamental na cadeia que une a Aritmética e a Álgebra dos mesopotâmios à Matemática de Fermat e Descartes.

1.2.4 Oresme

Nicolau Oresme (1323-1382), Bispo de Lisieux, na Normandia, foi um dos mais importantes matemáticos eclesiásticos da Idade Média. Devem-se-lhe contributos para a teoria das proporções, para o estudo de séries infinitas e, sobretudo, para a área da representação gráfica de corpos em movimento.

A maior obra de Oresme, o *Tratado sobre as Configuração de Qualidades e Movimentos*, de cerca de 1350, contém a representação da velocidade variável com o tempo, assim como a generalização desta ideia a outros casos onde uma dada grandeza varia em intensidade com a distância ou com o tempo (Katz, 2010, p. 397). Com o objetivo de dar continuidade aos trabalhos pioneiros de estudiosos do seu tempo (destacando-se Roger Bacon, Tomas Bradwardine, William Heytesbury, Richard Swineshead e Jean Buridan) no estudo do movimento, como por exemplo, no conceito de velocidade instantânea, Oresme introduziu uma representação bidimensional da variação da velocidade com o tempo. Para tal, fez uso duma classificação dos movimentos diferente da da Física aristotélica; um corpo move-se com *movimento uniforme* quando a sua velocidade é constante, com *movimento* *uniformemente diforme* quando a aceleração é constante, e com *movimento diformemente diforme* quando a aceleração não é constante. Para apresentar uma representação gráfica de acordo com esta classificação, Oresme começou por explicar como se podem usar segmentos de reta para representar grandezas como a velocidade

Cada coisa mensurável, exceto números, é imaginada sob a forma de grandezas contínuas. Portanto, para a medição de uma tal coisa, é necessário que sejam imaginados pontos, linhas, e superfícies, ou as suas propriedades. Porque neles como [Aristóteles] sustenta, a medida ou razão é achada inicialmente, enquanto que em outras coisas é reconhecida por semelhança, pois que são referidas a elas pelo intelecto [as entidades geométricas]. (...) Portanto, qualquer intensidade que possa ser adquirida sucessivamente deve ser imaginada por uma linha reta perpendicularmente erguida nalgum ponto. Citado em Katz (2010, p. 397).

Com estas linhas retas, Oresme construiu o que chamou de «configuração» (Katz, 2010, p. 397), uma figura geométrica cujo modelo consistiu em traçar segmentos perpendiculares a uma reta horizontal de base. Na representação das velocidades, a reta horizontal, dita reta das *longitudes*, representava o tempo, os seus pontos representavam os instantes, e cada segmento de reta perpendicular, dito *latitude*, representava a velocidade no instante correspondente. Para o matemático francês, um movimento podia ser representado por um retângulo no caso de ser uniforme (Fig. 5), por um trapézio ou um triângulo retângulo[43], no caso de ser uniformemente diforme (Fig. 6), ou por outro tipo de figura no caso de ser diformemente diforme. Oresme registou, ainda, que a distância total percorrida pelo corpo é dada pela área da figura preenchida pela totalidade dos segmentos de reta.

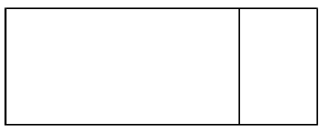

Fig. 5 – Representação gráfica dum movimento uniforme, segundo Oresme

[43] No caso de a velocidade inicial ou final ser nula.

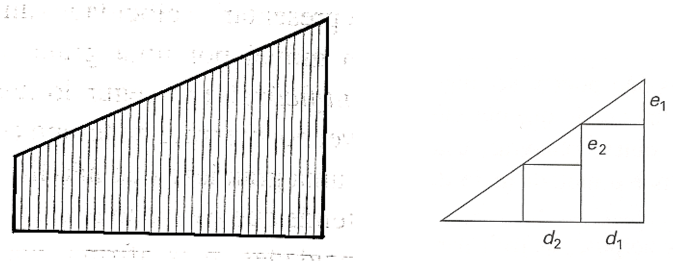

Fig. 6 – Representação gráfica de movimentos uniformemente diformes, onde $d_1 : d_2 = e_1 : e_2$

Merece destaque o caso do movimento uniformemente diforme. Para Oresme,

uma qualidade uniformemente irregular é aquela em que, se se tomarem quaisquer três pontos [da linha da base], a razão da distância entre o primeiro e o segundo para a distância entre o segundo e o primeiro, está entre si como a razão do excesso de intensidade do primeiro ponto relativamente ao segundo ponto sobre a do excesso do segundo ponto relativamente ao terceiro ponto, considerando o primeiro destes três pontos como o de maior intensidade". Citado em Katz (2010, p. 397).

Esta descrição de Oresme está já muito próxima de exprimir a mesma propriedade que a equação duma linha reta na atual Geometria Analítica. (Katz, 2010, p. 398).

Na realidade, o uso de coordenadas, denominadas por Oresme longitude e latitude, não foi uma inovação, pois tanto Apolónio como vários geógrafos gregos já tinham usado sistemas análogos. Segundo Struik, a representação gráfica de qualidades e velocidades «revela uma espécie de transição vaga das coordenadas na esfera celeste ou terrestre, conhecidas pelos antigos[44], para a geometria moderna das coordenadas» (1997, p. 142).

Oresme parece ter sido mais inovador ao representar graficamente a variação da velocidade com o tempo. Na análise de Boyer,

Parece que ele [Oresme] percebeu o princípio fundamental de se poder representar uma função de uma variável como uma curva, mas não soube usar eficazmente essa observação a não ser no caso de função linear. (...) Oresme interessava-se principalmente pela

[44] Já, por exemplo, Ptolomeu (c. 85-165), na sua obra *Geografia*, utilizou um sistema de latitudes e longitudes como coordenadas numéricas muito semelhante ao que usamos atualmente. Contudo, não havia meios para determinar com precisão essas longitudes. Pensa-se que os mapas de Ptolomeu terão servido de exemplar para a construção de outros mapas até à idade média.

área sob a curva; por isso não é muito provável que tenha visto a outra metade do princípio da Geometria Analítica – que uma curva plana possa ser representada, com relação a um sistema de coordenadas, como uma função de uma variável. (1994, p. 193).

O *Tratado sobre as Configuração de Qualidades e Movimentos* também contém sugestões de representações geométricas a três dimensões. A ideia de Oresme de representar as velocidades, assim como outras qualidades, geometricamente teve a sua continuação em trabalhos de outros autores até ao século seguinte. Contudo, Katz observa que nenhum matemático foi capaz de alargar este sistema de representação a situações mais complexas do que aquelas que Oresme considerou (2010, p.399). O seu trabalho foi impresso várias vezes entre 1482 e 1515 e, segundo Struik (1997, p.142), terá influenciado os matemáticos do Renascimento, incluindo Descartes. Boyer põe a tónica no insuficiente domínio técnico, ao escrever que,

o que ele [Oresme] precisava ter era, naturalmente, uma geometria algébrica em vez da representação pictoral que tinha em mente (...). Os matemáticos do Ocidente durante o século catorze tinham imaginação e precisão de pensamento porém faltava-lhes técnica algébrica e geométrica (...).(1994, p.194).

Pela análise de Boyer pensamos que a contribuição desses matemáticos não terá sido no sentido de entender a obra clássica mas sim de sugerir.

Apesar desta condicionante, o século XIV viu surgir novos pontos de vista e ideias essenciais à construção da Geometria Analítica. Contudo, elas não tiveram um seguimento imediato no desenvolvimento da Matemática. As profundas perturbações causadas pela Peste Negra e pela Guerra dos Cem Anos tiveram como consequência o declínio do conhecimento em França e na Inglaterra. Só no Renascimento surgiriam novas ideias, em particular na Itália e na Alemanha.

1.2.5 Viète

Uma das formas do pensamento matemático do século XVI até meados do século XVII caracterizou-se pela tentativa de recuperação das obras matemáticas gregas. Um dos motivos dessa tentativa prendeu-se com a questão de saber como os antigos descobriram resultados, que apenas demonstravam em estilo sintético. As obras básicas de Euclides, Arquimedes e Ptolomeu tinham sido já traduzidas para latim alguns séculos antes, contudo tal trabalho não tinha sido feito por matemáticos. Katz (2010, p. 462). No século XVI houve um esforço concertado para retraduzir essas obras, bem como traduzir outras do original em grego, tendo sido estas novas traduções preparadas por matemáticos (Katz, 2010, p. 462).

No século XVI verificou-se também um grande avanço, promovido por matemáticos europeus, na continuação da Álgebra islâmica da Idade Média. Apesar das limitações do simbolismo, que ainda assentava predominantemente em abreviaturas[45], os algebristas demonstravam perícia nas manipulações algébricas e, no final do século, sabiam resolver qualquer equação polinomial até ao quarto grau.

Muitos autores usavam abreviaturas ou símbolos para a incógnita e suas potências, mas ainda não tinham um modo de exprimir com generalidade os coeficientes; por este motivo, as resoluções eram dadas como regras de procedimento e, para ilustrar esse procedimento, usavam-se exemplos numéricos. Desde a Álgebra sincopada da época diofantina, o uso de coeficientes numéricos tinha impedido a discussão geral de problemas algébricos. Nos trabalhos algébricos do século XVI está patente um crescente uso de abreviaturas, mas os algoritmos de resolução dos problemas não eram apresentados de forma absolutamente geral, devido à ausência de símbolos para os coeficientes das equações. Fórmulas, como por exemplo a resolvente da equação quadrática, que se encontram em qualquer livro elementar de Álgebra de hoje em dia, não existiram em nenhum dos textos de Álgebra até ao começo da Idade Moderna (Katz, 2010, p. 462). Para escrever tais fórmulas houve necessidade duma nova conceção de símbolos. Uma figura que se destacou nos finais do século XVI na reformulação do simbolismo, propondo uma nova Álgebra, a Álgebra simbólica, foi François Viète (1540-1603). Reformulou a abordagem à Álgebra,

[45] Já no final do século XV alguns autores apresentavam o uso de símbolos e de abreviaturas para as quantidades desconhecidas, destacando-se o francês Nicolas Chuquet (ca. 1445-1500) na sua obra *Triparty en la Science des Nombres* de 1484, e o italiano Luca Pacioli (1445-1517) em *Summa de arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalita* de 1494.

substituindo a procura de soluções de equações particulares pelo estudo pormenorizado da estrutura dessas equações, dando assim um importante contributo para o desenvolvimento da antiga teoria das equações[46] (Mahoney, 1994, p. 36).

Com Viète foi possível encontrar pela primeira vez uma clara diferença, ao nível da notação, entre o importante conceito de parâmetro e a ideia de quantidade desconhecida. Introduzindo a convenção simples do uso de vogais para representar as quantidades desconhecidas, e de consoantes para grandezas ou números supostos conhecidos ou dados, Viète obteve um critério que permitia distinguir imediatamente os termos dados dos termos procurados:

> Os termos dados são distinguidos das incógnitas por símbolos constantes, gerais e facilmente reconhecíveis, como (digamos) designar grandezas desconhecidas pela letra A e as outras vogais E, I, O, U e Y, e os termos dados pelas letras B, G, D e as outras consoantes. Citado em Katz (2010, pp. 465-466).[47]

No seu livro *The Mathematical Career of Pierre Fermat*, Mahoney observa que,

> (...) este novo sistema de notação tornou possível o divórcio entre a álgebra e um estilo de exposição enraizado em exemplos e algoritmos verbais. O simbolismo literal de Viète habilitou-o a tratar uma série de problemas com parâmetros e, consequentemente o tratamento de problemas de uma forma geral. (1994, p. 35).

Viète propôs demonstrações para certos teoremas, de autores clássicos, enunciados na *Coleção Matemática* de Papo[48]. Para obter essas demonstrações, usou um reportório variado de técnicas matemáticas herdadas de Diofanto e dos algebristas renascentistas, bem como as suas novas ferramentas simbólicas. Na sua obra *Introdução à Arte Analítica* (em latim, *In Artem Analyticem Isagoge*) Viète dá curso ao seu objetivo de tentar identificar a Análise grega com a Álgebra. Começa por comentar

---

[46]Cf. C. Boyer, *History of Analytic Geometry* (1956, pp.59 60): "usando vogais para designar quantidades desconhecidas e consoantes para representar quantidades assumidas como conhecidas, Viète tornou possível distinguir não duas mas três, tipos de grandezas na Álgebra- especificamente números, parâmetros e variáveis (...).Isto tornou possível construir uma teoria geral das equações- estudar as equações cúbicas".

[47] Traduzido de François Viète, *The Analytic Art*, Tranlated and edited by T. Richard Witmer (Kent State University Press, 1983, p. 24).

[48] Viète tentou restaurar o tratado *Sobre as Tangências* de Apolónio, por exemplo.

o *método de análise*, que qualifica como uma certa via de aquisição da verdade característica das matemáticas, cujas origens remontam a Platão e a Teão de Alexandria:

> Há uma certa forma de procurar a verdade na matemática que se diz ter sido descoberta pela primeira vez por Platão. Teão chamava-lhe análise... Embora os antigos propusessem apenas duas espécies de análises, zetética e porística, às quais a definição de Teão melhor se aplica, acrescentei eu uma terceira que pode ser chamada rética ou exegética. É, apropriadamente, chamada zetética quando se apresenta uma equação ou proporção entre um termo que se pretende encontrar e os termos dados, porística quando a verdade de um enunciado de um teorema é testado por meio de uma equação ou proporção, e exegética quando é determinado o valor do termo desconhecido numa dada equação ou proporção. Portanto, toda a arte analítica, assumindo para si esta tripla função, pode ser chamada a ciência da descoberta correta em matemática. Citado em Katz (2010, p. 464). [49]

Além de alterar completamente o significado que a palavra *análise* tinha entre os gregos e de renomear duas das suas espécies, a *análise problemática* e a *análise teoremática* (assim designadas por Papo de Alexandria), Viète acrescentou um novo tipo. Assim, a *análise problemática* passou a ser a *análise zetética*, a *análise teoremática* transformou-se na *análise porística* e a terceira espécie de análise passou a ser a *exegética*, a arte de transformar uma equação com a finalidade de se encontrar um valor para a incógnita.

No parágrafo final da *Introdução à Arte Analítica*, o matemático francês clarifica claramente o seu objetivo, ao concluir:

> Finalmente, a arte analítica dotada com as suas três formas de zetética, porística e exegética, reclama para si o maior problema de todos, que é não deixar qualquer problema por resolver. Citado em Katz (2010, p. 465). [50]

---

[49] Traduzido de François Viète, *The Analytic Art*, Tranlated and edited by T. Richard Witmer (Kent State University Press, 1983, pp. 11-12).

[50] Traduzido de François Viète, *The Analytic Art*, Tranlated and edited by T. Richard Witmer (Kent State University Press, 1983, p.32).

Viète serviu-se da distinção entre parâmetro e quantidade desconhecida, para criar um sistema de cálculo simbólico, a *logística especiosa*, que operava sobre *espécies* ou *forma das coisas*, tais como letras do alfabeto. Em contraste com a *logística numérica* (que empregava apenas números), a *logística especiosa* era um sistema amplo e sistemático de cálculo, que permitiu através dos seus símbolos a representação e manipulação completa de grandezas, quer geométricas, quer numéricas. Assim, com este algebrista francês, muitos problemas passaram a ser tratados de uma forma geral em vez de dependerem de exemplos e de algoritmos verbais, rompendo deste modo com a tradição dos seus antecessores (Katz, 2010, p. 467).

Contudo, Viète não se divorciou totalmente da tradição, e continuou a usar palavras ou abreviaturas. Para as potências da incógnita, por exemplo, em vez de usar expoentes como em A^2, A^3 ou E^4, escreveu A *quadratum*, A *cubus* ou E *quadrato-quadratum*, usando, por vezes, as abreviaturas A *quad* para o primeiro e E *quad-quad* para o terceiro. No que diz respeito às operações, adotou as formas germânicas para a adição e a subtração, ou seja, os símbolos usados atualmente. Struik (1997, p. 151) denota que estes não foram utilizados pela primeira vez por Viète, e que terão aparecido primeiramente, pelo menos de forma impressa, numa aritmética alemã de Johann Widmann, em 1489.

Para a multiplicação usou a palavra latina «in» e para a divisão o traço de fração. Assim, a expressão $\frac{A\ in\ B}{E\ quadratum}$ seria escrita atualmente $\frac{AB}{E^2}$. Também tem interesse referir que, embora Viète tenha impulsionado a Álgebra com novos métodos simbólicos, muitas vezes reformulava verbalmente os seus resultados, para convencer alguns leitores incrédulos de que os mesmos podiam ser sempre traduzidos nos modos mais familiares, por expressões verbais (Katz, 2010, p. 468).

A *logística especiosa* tornou possível uma abordagem geral a problemas de diversos campos da matemática, nomeadamente, da Geometria, da Aritmética e da Trigonometria. Viète enunciou e ilustrou, com exemplos muito simples, transformações fundamentais numa equação ou no cálculo simbólico, que lhe permitiram alcançar certos resultados. Nas *Notas Preliminares à Logistica Especiosa*, (em latim, *Ad Logisticem Speciosam Notae Priores*) publicado cerca de 30 anos após a *Introdução à Arte Analítica,* Viète mostrou como operava com grandezas simbólicas. Escreveu, pela primeira vez usando símbolos, identidades algébricas já há muito conhecidas verbalmente, como por exemplo que $(A-B).(A+B)=A^2-B^2$ e que $(A+B)^2-(A-B)^2=4AB$. Também escreveu o desenvolvimento da fórmula binomial $(A+B)^n$, para qualquer inteiro n entre 2 e 6; não terá apresentado o termo geral, provavelmente por usar palavras em vez de números para designar várias potências, nomeadamente as de expoente superior a 6. Na aplicação da sua Álgebra à Trigonometria deduziu as fórmulas trigonométricas do seno e do cosseno de múltiplos inteiros de um ângulo. Generalizou problemas de Diofanto condicionados pela sua Álgebra sincopada, ultrapassando várias restrições numéricas das suas resoluções. Tais resultados, problemas e método[51] de resolução encontram-se nos vários tratados que formam a *Arte Analítica* de Viète.

A notação de Viète apresentava algumas limitações, por exemplo na falta de uma única representação simbólica para a igualdade (Viète usava palavras como *aequalis*, *aequetur*, *aequabuntur*) e na representação descritiva das potências das espécies e da dimensão das quantidades. Também o facto de se ter mantido fiel ao princípio grego da homogeneidade limitou o seu trabalho, pois fez com que não considerasse o estudo de problemas que envolvessem operações com grandezas não homogéneas. A forma homogénea das suas equações revelava que o seu pensamento se mantinha próximo do da Geometria grega, o produto de dois segmentos de reta era necessariamente encarado como uma área, sendo que segmentos de reta só podiam ser adicionados a segmentos de reta, áreas a áreas e volumes a volumes. Para que a equação escrita atualmente como $x^3+cx=d$ tivesse sentido, Viète considerava que c era um *plano* (sendo, portanto, cx um *sólido*), e d era um *sólido*, e escrevia a mesma equação na forma A *cubus* + C *plano in* A *aequetur* D *solido*.

Viète é considerado pioneiro no despontar da Álgebra simbólica, um novo sistema autónomo de notação que permite exprimir um problema simbolicamente através de equações, assim como levar a cabo todas as transformações para as resolver. Esta técnica algébrica permitiu a futuras gerações disporem de um

[51] Em problemas que envolviam a procura da "coisa" ou da "quantidade incógnita", o processo de Viète era, num certo sentido, o mesmo de Papo e dos antigos: o que tinha sido descrito como análise, já referido neste trabalho. Em vez de raciocinar a partir do que é conhecido para o que se deve demonstrar, o algebrista raciocinava a partir da hipótese que a incógnita foi dada e deduzia uma conclusão necessária da qual a incógnita podia ser determinada. Mas o uso dos termos por Viète não era o mesmo. A transformação da equação para se encontrar a incógnita pertencia à nova terceira espécie de análise de Viète, a *exegética*, em vez das duas primeiras espécies de análises.

mecanismo, que foi sendo aperfeiçoado, muito útil em várias áreas da Matemática. Tanto Fermat como Descartes usaram a Álgebra simbólica como instrumento de análise, nos estudos que os conduziram à Geometria Analítica.

Em todo o trabalho Viète, por exemplo na resolução de equações do terceiro e do quarto grau, está patente uma tendência significativa de associar a nova Álgebra à antiga Geometria avançada[52] (Boyer, 1994, p. 225). Tal facto revela que o algebrista francês não estaria muito distante do objetivo da Geometria Analítica, embora Boyer refira que Viète inviabilizou a possibilidade de ter descoberto este novo ramo da Matemática ao evitar o estudo geométrico de equações indeterminadas (1994, p. 225). Quando um problema geométrico levava a uma equação com duas incógnitas, Viète não o resolvia com o comentário de que “o problema era indeterminado”, sem investigar as propriedades geométricas da sua indeterminação (Boyer, 1994, p. 225).

Merece destaque a observação de que tanto a Menecmo como a Apolónio faltou-lhes, sem dúvida o poderoso instrumento da Álgebra simbólica; contudo os seus trabalhos revelam a utilização do equivalente a um sistema de coordenadas, ao contrário de Viète que dispôs desse instrumento algorítmico da Álgebra simbólica mas não chegou a utilizar coordenadas.

[52] Cf. Boyer (1994, p. 225), na interpretação geométrica das operações algébricas fundamentais, Viète percebeu que para a construção das raízes quadradas bastava usar a régua e o compasso; e que a inserção de dois meios proporcionais entre duas grandezas permitia construir as raízes cúbicas, e até resolver qualquer equação cúbica; e, ainda, toda a equação cúbica ou do quarto grau era resolúvel através de trissecções de ângulos e da inserção de *duas médias geométricas* entre duas grandezas.

Capítulo 2
A Geometria Analítica de Fermat

2.1. Apresentação

Licenciado em Direito e sem qualquer estudo oficial na área das ciências exatas, Pierre de Fermat (1601-1665) não foi um matemático profissional. Geómetra de grande espírito, reservado e cortês, deixou a sua obra dispersa em cartas, anotações e breves manuscritos. Os seus principais escritos foram publicados pela primeira vez, já postumamente, pelo seu filho Samuel Fermat em *Varia Opera Mathematica* (1679). Hoje Fermat é unanimemente considerado como um dos matemáticos mais notáveis da sua época.

Para além de ter sido colaborador na criação e desenvolvimento da Geometria Analítica, Fermat deu várias outras contribuições significativas para a Matemática. A sua atenção para a Teoria dos Números, assunto em que é o único nome de relevo entre a Antiguidade e o século XVIII, foi despertada pela tradução latina da *Aritmética* de Diofanto, obra referida no capítulo anterior (Eves, 1997, p. 390). A correspondência que trocou com Pascal está na base da Teoria das Probabilidades. Descobriu um método que, na essência, é o que atualmente consideramos de *diferenciação*, o qual foi designado de *Método para encontrar Máximos e Mínimos*, como também descobriu a forma de aplicar esse seu método à determinação da reta tangente a uma curva algébrica da forma $y = f(x)$.

No livro *Mathématiques et Mathématiciens* (1959), os autores Dedron e Itard reescrevem um extrato de um jornal da época, referindo-se a Fermat:

> Do *Journal des Sçavans*, de 9 de Fevereiro de 1665
>
> Destacava-se em todos os ramos da Matemática; mas principalmente na ciência dos números e na bela Geometria. Dele temos um método para a quadratura das parábolas (…). Um outro de *maximis et minimis* (…) mas também a invenção das tangentes às linhas curvas (...) e questões numéricas. Uma introdução aos lugares planos e sólidos (...). (p. 195).

Fermat foi seletivo nas suas leituras. É difícil saber que obras antigas leu, porque foram poucas as que referiu nos seus escritos. A respeito disto, Mahoney, refere que se, por exemplo, Fermat leu o tratado, a *Álgebra,* de Clavius (1538-1612) ou qualquer outro tratado de Álgebra dos «cosistas»[53], nunca os mencionou (1994, pp. 26-27). Não se sabe se terá lido todo o trabalho de Arquimedes, mas duas das suas obras são apontadas como lidas, a *Quadratura da Parábola* e as *Espirais.* Com efeito, trabalhando a partir do modelo do matemático grego explanado sua obra *Espirais,* com investigações das propriedades da curva $\rho = \alpha\vartheta$, Fermat definiu uma nova espiral $\frac{2\pi}{\vartheta} = \left(\frac{R}{\rho}\right)^2$ (Mahoney, 1994, p. 218); também podemos constatar das próprias palavras de Fermat, numa carta dirigida a Roberval, datada de 22 de Setembro de 1636, alegando de que era capaz de quadrar uma infinidade de figuras compostas por linhas curvas, notando ainda que,

> tive que seguir um caminho diferente do de Arquimedes na quadratura da parábola e nunca a teria resolvido pelos métodos deste último". Citado em Katz (2010, p. 607).

Pensa-se que Fermat também terá respondido a *Comentários* de Eutócio à obra Arquimedes, *Da Esfera e do Cilindro* (Mahoney, 1994, pp. 26-27). Mas, os trabalhos que mais chamaram a atenção de Fermat, foram os de Apolónio, de Papo e de Diofanto, embora não no sentido da tradição neoclássica (Mahoney, 1994, p. 27).

Tal como outros matemáticos do século XVII, Fermat interessou-se pela restauração de obras de grandes clássicos de Alexandria. Os *Lugares Planos* de Apolónio, os *Lugares Sólidos* de Aristeu (320 a.C.), assim como os *Lugares de Superfície* e os *Porismas* de Euclides eram quatro dessas obras clássicas, que estão perdidas, mas a que é feita referência no livro VII da *Coleção Matemática* de Papo.

---

[53]«Cosistas» provém da palavra italiana cosa para a incógnita (Struik, 1997, p. 151). Durante o Renascimento, as designações *regola d'algebra, ars rei et census e l'arte della cosa*, referiam-se a um vasto conjunto de estratégias e técnicas para a resolução de problemas aritméticos complexos. Estas técnicas forneciam procedimentos para equacionar problemas (de certo tipo de equações), de seguida como reduzir essas equações a formas canónicas previamente estudadas e, por fim, os passos a seguir para obter efetivamente números que resolvessem a equação reduzida (Quintera R., 2001, pp. 45-46).

Em Fermat temos um dos mais importantes elos na transição da matemática antiga para a moderna. A transição resultou em parte da sua leitura de obras antigas duma maneira que os seus autores nunca pretenderam, e para [obter] informação que, estritamente falando, elas não continham (Mahoney, 1994, p. 27).

Como já tem sido observado neste trabalho, a falta de ferramentas algébricas tinha constituído uma limitação ao estudo dos *lugares geométricos* pelos antigos matemáticos gregos. Uma consequência era a falta de generalidade dos resultados obtidos. Nos *Lugares Planos*, por exemplo, Apolónio limitara o seu estudo a um número restrito de problemas, com condições específicas. Com o objetivo de apresentar um estudo completo e geral dos lugares geométricos planos e sólidos, Fermat redigiu um breve ensaio intitulado *Introdução aos Lugares Planos e Sólidos* (em latim, *Ad Locus Planos et Solidos Isagoge*), contendo um estudo sobre uma família de equações indeterminadas com duas incógnitas e de grau não superior a 2 (Fig. 7). Usando um método novo, Fermat tentou demonstrar que os *lugares geométricos* que podem ser representados por tais equações são os *lugares geométricos planos e sólidos.*

VARIA OPERA
MATHEMATICA
D. PETRI DE FERMAT
SENATORIS TOLOSANI.

AD LOCOS
PLANOS ET SOLIDOS
ISAGOGE.

De locis quàm plurima scripsisse veteres, haud dubium. testis Pappus initio libri 7. qui Appollonium de locis planis, Aristæum de solidis scripsisse asseverat. Sed aut fallimur, aut non proclivis satis ipsis fuit locorum investigatio. Illud auguramur ex eo quod locos quàm plurimos non satis generaliter expresserunt, ut infra patebit.

Scientiam igitur hanc propriæ & peculiari analysi subjicimus, ut deinceps generalis ad locos via pateat.

Quoties in ultima æqualitate duæ quantitates ignotæ reperiuntur, fit locus loco, & terminus alterius ex illis describit lineam rectam, aut curvam. linea recta unica & simplex est, curva infinita, circulus, parabole, hyperbole, ellipsis, &c.

Quoties quantitatis ignotæ (lineæ rectæ reponendum) terminus localis describit lineam rectam, aut circularem, fit locus planus: at quando describit parabolem, hyperbolem, vel ellipsim, fit locus solidus: si alias curvas, dicitur locus linearis. De hoc nihil adjungemus, quia facillimè ex planorum & solidorum investigatione, linearis loci cognitio derivabitur, mediantibus reductionibus.

Commode autem possunt institui æquationes, si duas quantitates ignotas ad datum angulum constituamus, quem ut plurimum rectum sumemus, & alterius ex illis positione datæ terminus unus sit datus, modò neutra quantitatum ignotarum quadratum prætergrediatur, locus erit planus aut solidus, ut ex dicendis clarum fiet.

A

Fig. 7 – *Varia Opera Mathematica* de Fermat (1679)

Mantendo a simbologia de Viète, Fermat desenvolveu a sua exposição de forma sistemática, com base nalgumas proposições dos *Dados* de Euclides e das *Cónicas* de Apolónio. Ao longo desta sua obra, Fermat apresentou com desenvolvimento as análises, mas reduziu ao mínimo as respetivas sínteses, remetendo-as para o leitor, o que requer que este tenha um considerável conhecimento da *análise geométrica* grega.

Tanto o simbolismo algébrico como as ferramentas de análise de Viète constituíram um pilar no desenvolvimento dos trabalhos de Fermat, ao longo de toda a sua carreira. O cunho do primeiro encontra-se presente tanto no tipo de exposição como nos padrões de pensamento do segundo, a ponto de contemporâneos de Fermat o considerarem um sucessor de Viète.[54] Mahoney (1994, p. 26) é de opinião que Viète imbuiu Fermat de uma então nova tradição matemática e de uma nova forma de pesquisa, que determinou o tipo de problemas que escolheu, assim como o modo de os investigar.

A comunicação científica, tanto por cartas como por via da palavra impressa, na primeira metade do século XVII era mais rápida do que no século anterior, facilitando o intercâmbio de ideias e de registos entre matemáticos, bem como a sua expansão (Katz, 2010, p. 541); as ideias eram mais facilmente comentadas, criticadas e desenvolvidas. Fermat mantinha contactos com outros matemáticos do seu tempo, destacando-se, Descartes, Torricelli, Blaire Pascal, Frenicle, Persone Roberval, Christian Huygens, Pierre Carcavi, Bonaventura Cavalieri, John Wallis e Johan Witt. Em 1636, Fermat enviou ao Padre Marin Mersenne[55] detalhes manuscritos da sua *Introdução aos Lugares Planos e Sólidos*, que os terá divulgado na correspondência que mantinha com vários matemáticos do tempo. Uma maior divulgação, contudo, teve de esperar por 1679, com a publicação da *Varia Opera Mathematica*; nessa altura, porém, já a versão cartesiana da Geometria Analítica tinha sido adotada pela generalidade dos matemáticos.

Na *Introdução aos Lugares Planos e Sólidos,* Fermat começou por escrever uma frase importante, que indica de forma explícita a relação existente entre uma equação indeterminada em duas variáveis e um lugar geométrico:

> Sempre que numa igualdade final se encontram duas quantidades desconhecidas [incógnitas], tem-se um lugar geométrico, e a extremidade de uma delas descreve uma linha reta ou uma curva. (Tannery, 1896, p. 86).

[54] J. Chapelain escreveu a Christian Huygens, a respeito de Fermat: «I do not think you would want to neglect such an important man, who represents for us a second Viète.» citado em Mahoney (1994, p. 26)

[55] Mersenne desempenhou um papel fundamental na disseminação das novidades científicas na primeira metade do século XVII, na medida em que encorajava os cientistas a exporem, por troca de correspondências, as suas ideias. Neste sentido contribuiu, em larga medida, para o desenvolvimento de uma ciência que podia eventualmente correr o risco de permanecer oculta nos manuscritos de cada matemático (Mahoney, 1994), (Struik, 1997, p. 169) e (Katz, 2010, p. 548).

Para Boyer, esta frase constitui «uma das afirmações com mais significado na História da Matemática» (1956, p. 75) e corresponde a um «princípio fundamental da Geometria Analítica» (1994, p. 253). Para Mahoney, ela incorpora tanto uma técnica como uma afirmação, em que a técnica consiste na aplicação da Álgebra aos problemas de *lugares geométricos* e a afirmação é «uma igualdade final com duas incógnitas determina um lugar geométrico» (1994. p. 78). A igualdade final referida por Fermat consiste na equação na sua forma mais simples, isto é, depois de aplicadas as *regras da arte* de Viète para a sua redução à referida forma. A igualdade final contém todas as informações necessárias para determinar inequivocamente o *lugar geométrico.*

Fermat fez uso dum sistema uniaxial, considerando numa reta o semieixo positivo das abcissas, e não explicitando o semieixo positivo das ordenadas. Não usou abcissas negativas, restrição cuja consequência se refletiu nas suas construções geométricas, não obtendo a visualização de metade ou mais (por vezes até três quartos) do gráfico de algumas curvas.

Para a construção do lugar geométrico, uma vez dada a equação, Fermat considera a reta NZ (Fig. 8) dada de posição[56] e, sobre ela, o ponto N também dado de posição, ou seja, fixo. Sobre a reta NZ, toma-se o segmento de reta NZ, cuja extremidade N está fixa, enquanto a extremidade Z varia; portanto, o seu comprimento varia com Z. Fazendo NZ igual à variável A, e com um ângulo fixo (normalmente reto) entre NZ e ZI, toma-se o segmento de reta ZI igual à outra variável, E, de maneira que os dois valores correspondentes de A e de E satisfaçam a equação dada. O extremo I deste segmento de reta descreve o lugar geométrico, com a variação das grandezas A e E.

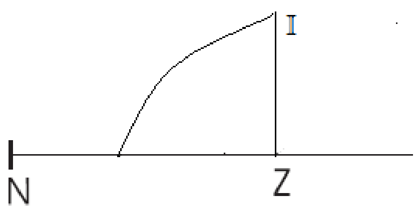

Fig. 8 – Referencial de Fermat

[56] A expressão "*dada de posição*", constante nos *Dados* de Euclides, em terminologia clássica significa que o ente em causa não sofre qualquer alteração (rotação, translação, simetria axial, …) relativamente à sua posição inicial.

Com o objetivo de estabelecer a correspondência com os *lugares geométricos planos e sólidos*, Fermat divide a família das equações indeterminadas com duas incógnitas até ao 2º grau em sete subfamílias:

(I)	$ax = by$	(reta)
(II)	$xy = b$	(hipérbole)
(III)	A razão entre $x^2 \pm xy$ e y^2 é constante	(retas)
(IV)	$x^2 = ay$	(parábola)
(V)	$b^2 - x^2 = y^2$	(círculo)
(VI)	A razão entre $b^2 - x^2$ e y^2 é constante	(elipse)
(VII)	A razão entre $b^2 + x^2$ e y^2 é constante	(hipérbole)

Serão aqui analisados estes sete casos, embora por uma ordem diferente da adotada por Fermat, de equações simples que representam de retas, círculos, parábolas, elipses e hipérboles. Obviamente, eles não esgotam todas as equações da forma geral $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$ (mesmo que se considerasse a simplificação trivial $A=1$); sem fazer um estudo sistemático, Fermat menciona ocasionalmente outras equações, que podem ser reduzidas àquelas através de mudanças de variável, e que serão também apresentadas.

Com o intuito de simplificar a leitura, será aqui usada a notação atual, que é essencialmente a cartesiana. Contudo, ao citar diretamente Fermat, ou ao tentar, nalgum parágrafo, manter o espírito do seu estilo matemático, será mantida a sua notação. Por exemplo, no caso simples da equação linear, que atualmente se representa por $dx = by$, Fermat escrevia:

$$D \textit{ in } A \textit{ aequatur } B \textit{ in } E\,.$$

Tal como acontece nas obras de Viète, já referido neste trabalho, as consoantes representam as grandezas dadas (coeficientes) e as vogais representam as grandezas pedidas (incógnitas). As palavras latinas «in» e «aequatur» representam a operação de multiplicação e a relação de igualdade, respetivamente.

2.2. A *Introdução aos Lugares Planos e Sólidos*

2.2.1. Retas

Comecemos por ver o caso mais simples, que é o da equação da reta que passa pela origem (considerada no ponto N), isto é, o caso da equação $ax = by$. Considere-se a reta NZM (Fig. 9) dada de posição, assim como o ponto N também fixo. Faça-se $NZ = x$ e $ZI = y$ sendo o ângulo entre ZI e NZ fixo. Ora, se $ax = by$, então o ponto I estará numa reta dada de posição. Com efeito, de $ax = by$ tem-se $\frac{x}{y} = \frac{b}{a}$. Desta igualdade resulta que a razão $\frac{x}{y}$ é dada, uma vez que a e b são constantes. Como o ângulo NZI também é dado, então o triângulo NIZ é dado de espécie[57] e, portanto, é dado também o ângulo INZ. Uma vez que o ponto N é fixo, a posição da reta NZ é fixa e o ângulo INZ também é fixo, tem-se que a reta NI será dada de posição.

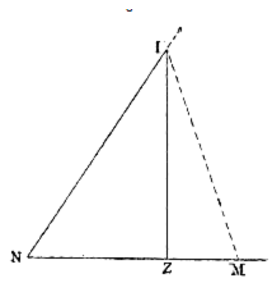

Fig. 9 – Análise de retas. Figura extraída de Tannery (1896, p. 86)

Considere-se agora uma equação do tipo $A - bx = cy$. Neste caso, o ponto I encontra-se sobre uma reta dada de posição como MI (Fig. 9), isto é, sobre uma reta que não passa na origem. Fazendo $A = bd$ e substituindo na equação anterior, tem-se $bd - bx = cy$, ou ainda $\frac{d-x}{y} = \frac{c}{b}$. Uma vez que a reta NZ e o ponto N são dados de posição, fazendo $MN = d$, tem-se que M é dado. Observe-se que $x < d$, pelo que o

[57] Proposição *Dados*, 41 de Euclides: Se um triângulo tem um ângulo dado, e se os seus lados em torno deste ângulo têm uma razão dada, então o triângulo é dado de espécie, isto é, a menos de uma semelhança.

ponto Z se encontra entre os pontos N e M ; além disso, tem-se $MZ = d - x$. Da igualdade $\frac{d-x}{y} = \frac{c}{b}$ conclui-se, portanto, que $\frac{d-x}{y}$ é fixo, ou seja, que a razão $\frac{MZ}{ZI}$ é dada. Como o ângulo em Z é dado, conclui-se que o triângulo IZM é dado de espécie, sendo, portanto, também dado o ângulo IMZ . Ora, M é dado, bem como a reta MZ , portanto a reta MI é dada de posição. Por consequência o ponto I está numa reta dada de posição, a saber, a reta MI .

Observe-se que, uma vez que Fermat opera unicamente com variáveis positivas, MI representa apenas um segmento de reta situado no primeiro quadrante (à luz dum sistema de coordenadas atual), com os extremos nos semieixos coordenados, e no caso anterior NI representava apenas uma semi-recta de origem N . Fermat faz também referência às equações $x^2 = y^2$, $\frac{x^2}{y^2} = razão\ \ dada$ e $\frac{x^2 + xy}{y^2} = razão\ \ dada$, que só contêm termos do 2º grau, afirmando que todas elas representam retas que passam pela origem[58].

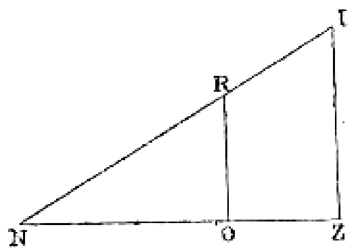

Fig. 10 – Análise de retas. Figura extraída de Tannery (1896, p. 89)

[58] Uma vez que Fermat apenas considera *grandezas* (quantidades *positivas*), a equação $x^2 = y^2$, por exemplo, é equivalente a $y = x$, sendo ignorada a possibilidade $y = -x$. E mesmo a equação $y = x$ corresponde, neste contexto, apenas a uma semi--recta. Também no caso $\frac{x^2 + xy}{y^2} = a$, Fermat considera a reta de equação $x = y\left(\frac{-1+\sqrt{4a+1}}{2}\right)$ ignorando a possibilidade $x = -y\left(\frac{1+\sqrt{4a+1}}{2}\right)$.

Suponhamos que o ponto I satisfaz a equação $\frac{x^2 + xy}{y^2} = razão\ dada\ a$,

portanto $\frac{NZ^2 + NZ \cdot ZI}{ZI^2} = a$. Então todos os pontos intermédios situados em NI também satisfazem a equação.

Seja R um desses pontos e trace-se a paralela RO a NI que interseta NZ no ponto O (Fig. 10). Pelo teorema de Tales, $\frac{NZ}{NO} = \frac{ZI}{OR}$. Seja $\frac{NZ}{NO} = \frac{ZI}{OR} = k$, k constante. Então $NZ = k \times NO$ e $ZI = k \times OR$.

Substituindo, $a = \frac{NZ^2 + NZ \cdot ZI}{ZI^2} = \frac{k^2 \cdot NO^2 + k \cdot NO \cdot k \cdot OR}{k^2 \cdot OR^2} = \frac{NO^2 + NO \cdot OR}{OR^2}$, ou seja, $\frac{NO^2 + NO \cdot OR}{OR^2} = a$. Logo o ponto R satisfaz a equação dada.

Fermat acrescenta que a situação é idêntica para as outras equações que nós hoje classificaríamos como homogéneas do 2º grau:

> O mesmo acontecerá com quaisquer equações cujos termos sejam todos afetados dos quadrados das incógnitas ou do seu retângulo, sendo inútil detalhar mais exatamente os casos particulares. (Tannery, 1896, p. 89).

2.2.2. Círculos

Vejamos agora que, no caso de os eixos serem mutuamente perpendiculares, uma equação que contenha os termos x^2 e y^2 com o mesmo coeficiente (com sinais iguais se estiverem no mesmo membro, e com sinais contrários se estiverem em membros diferentes) representa uma circunferência.

Fermat começa por considerar a equação $b^2 - x^2 = y^2$. Neste caso, se o ângulo NZI for reto, o ponto I descreve a circunferência, dada de posição, com o centro na origem, N, e de raio b (Fig. 11).

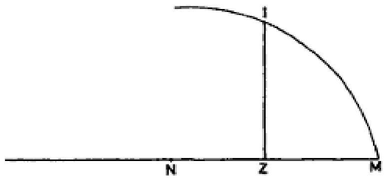

Fig. 11 – Análise de círculos. Figura extraída de Tannery (1896, p. 91)

Sendo $NM = b$, vem $MZ = b - x$. Dado um ponto I sobre a circunferência, o correspondente ponto Z encontra-se entre os pontos N e M (isto é, $x < b$) e y é meio proporcional[59] entre $b + x$ e $b - x$, ou seja, $\frac{b+x}{y} = \frac{y}{b-x}$. Desta igualdade resulta a equação $y^2 = (b-x)\cdot(b+x)$, ou ainda, $y^2 = b^2 - x^2$. Portanto, sendo I um ponto qualquer da circunferência, verifica-se a igualdade $ZI^2 = NM^2 - NZ^2$, ou seja, $y^2 = b^2 - x^2$.

Fermat prossegue o seu estudo com a afirmação de que, desde que o ângulo NZI seja reto, todas as equações com os termos em x^2 e em y^2 com o mesmo coeficiente, com ou sem termos em x ou y, podem ser reduzidas à forma canónica anterior, mediante mudanças de variáveis. A equação $b^2 - 2dx - x^2 = y^2 + 2cy$, por exemplo, é transformada adicionando inicialmente c^2 aos dois membros, para que o segundo se transforme num quadrado, a saber, $c^2 + b^2 - 2dx - x^2 = (y+c)^2$. Definindo p pela igualdade $p^2 = c^2 + b^2 + d^2$, é possível reescrever a equação original na forma $p^2 - (x+d)^2 = (y+c)^2$, que representará a equação canónica dum círculo mediante as mudanças de variáveis $x' = x + d$, $y' = y + c$.

[59] Num triângulo retângulo, a altura relativa à hipotenusa é meio proporcional entre os segmentos em que o seu pé divide a hipotenusa, conforme se vê na proposição *Elementos* VI, 13 de Euclides. É uma consequência da proposição *Elementos* VI, 8: Num triângulo retângulo, a altura relativa à hipotenusa divide o triângulo em dois triângulos semelhantes ao triângulo total e semelhantes entre si.

2.2.3.Parábolas

Fermat começa o estudo dos lugares geométricos que são secções cónicas pelas equações $x^2 = ay$, $y^2 = ax$, $B - x^2 = ay$ e $B + x^2 = ay$, provando que correspondem a parábolas, as duas primeiras com vértice na origem, e as outras duas podendo tomar a posição da primeira por mudança de variável.

Seja, então, a equação $x^2 = ay$. Vejamos que, efetuando-se a construção geométrica da curva que a representa, o ponto I descreve uma parábola. Considere-se a reta NP paralela à reta ZI e, com N para vértice e NP para diâmetro, descreva-se a parábola de parâmetro (ou *lado reto*) a , com as *ordenadas* paralelas a NZ (Fig. 12 – curva a contínuo). Esta parábola é dada de posição. Dado um ponto I está sobre ela, uma vez que a é o *lado reto*, tem-se $a \times NP = PI^2$, ou ainda $a \times IZ = NZ^2$ e, portanto, $ay = x^2$.

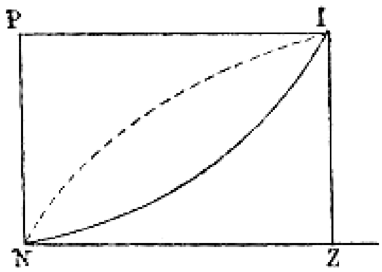

Fig. 12 – Análise de parábolas. Figura extraída de Tannery (1896, p. 90)

A brevidade do argumento de Fermat revela que o matemático francês partia, naturalmente, do princípio que os seus leitores estavam familiarizados com as *Cónicas* de Apolónio, uma vez que não dá nenhuma explicação nem faz referência àquela obra clássica. Neste caso, a construção de Apolónio mostrava que o retângulo contido por a e NP era igual ao quadrado sobre PI , sendo esta afirmação traduzida algebricamente pela equação $ay = x^2$.

Relativamente à construção da curva representada pela equação $y^2 = ax$, toma-se o mesmo vértice, e, neste caso, NZ para diâmetro (Fig. 12 – curva a tracejado); constrói-se a parábola de lado reto a cujas *ordenadas* sejam paralelas a NP .

Verifica-se que, nestas condições, a parábola satisfaz a equação dada, pois verifica a igualdade $a \times NZ = IZ^2$.

Provado que as curvas representadas pelas equações $x^2 = ay$ e $y^2 = ax$ correspondem a parábolas com N para vértice e NP e NZ para diâmetros, respetivamente, Fermat prossegue o seu estudo com a equação $B - x^2 = ay$. Neste caso, o ponto I encontra-se sobre uma parábola de vértice diferente do ponto N (origem). Com efeito, dividindo B por a tem-se $B = ar$, pelo que a equação $B - x^2 = ay$ toma a forma $ar - ay = x^2$, ou ainda $a(r - y) = x^2$, que pode ser reduzida à forma canónica, substituindo $r - y$ por y'. Para a sua construção geométrica, complete-se o retângulo $MOZN$, com $MN = r$ (Fig. 13); tem-se que o ponto *M* é dado, bem como a posição do segmento de reta MO. Observe-se que $r > y$, pelo que o ponto I se encontra entre os pontos Z e O, e resulta que $OI = r - y$. De $a(r - y) = x^2$, tira-se que $a \times OI = NZ^2 = MO^2$. Portanto, o ponto I pertence à parábola de vértice M, eixo MN e lado reto a.

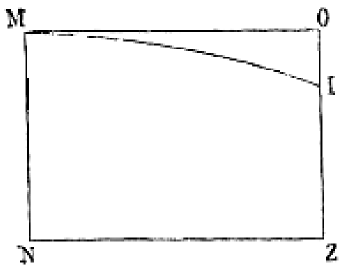

Fig. 13 – Análise de parábolas. Figura extraída de Tannery (1896, p. 90)

Fermat conclui o seu estudo sobre as parábolas, referindo que a construção geométrica da curva representada pela equação $B + x^2 = ay$ é idêntica, remetendo-a para o leitor, tal como com todas as outras equações equivalentes. Como é óbvio, esta equação pode ser reduzida à forma canónica $ay = x^2$ mediante a mudança de variável $y' = y - r$; ter-se-á neste caso $y > r$ e, na construção geométrica da curva, o ponto O encontrar-se-á entre os pontos Z e I.

2.2.4. Hipérboles

Dando seguimento ao estudo dos lugares sólidos, veremos que Fermat prova que as equações $xy = A$, $A + xy = bx + cy$ e $\frac{b^2 + x^2}{y^2} = a$, sendo a uma razão dada, correspondem a hipérboles.

Considere-se a equação $xy = A$. Então, o ponto I encontra-se sobre uma hipérbole. Para proceder à sua construção geométrica, considere-se NR paralela a ZI (Fig. 14). Por um ponto qualquer M de NZ, trace-se MO paralela a NR. Aplicando a área A ao segmento de reta NM, encontra-se o segmento de reta MO de modo que $NM \cdot MO = A$, isto é, o retângulo NMO tenha área A. Com as assíntotas NR e NM, e passando pelo ponto O, descreve-se uma hipérbole, que é única nestas condições. Esta hipérbole passará também pelo ponto I, uma vez que a área do retângulo NZI é igual à área do retângulo NMO. Portanto, $xy = A$.

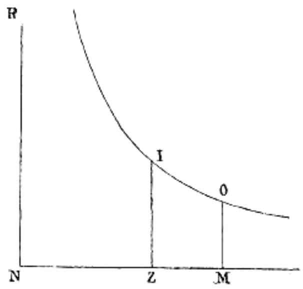

Fig. 14 – Análise de hipérboles. Figura extraída de Tannery (1896, p. 87)

Conclui-se, portanto, que a equação reduzida da forma $xy = a$ corresponde a uma hipérbole dada de posição.

Fermat acrescenta que todas as equações constituídas por termos constantes, em x, em y e em xy, podem ser reduzidas à equação anterior.

Por exemplo, considere-se a equação $A + xy = bx + cy$. O ponto I descreve uma hipérbole de assíntotas PV e VO (Fig. 15). Da equação $A + xy = bx + cy$ resulta $(x - c)(b - y) = A - bc$, que representa um retângulo de lados $x - c$ e $b - y$ com área $A - bc$. Trace-se ND paralela a ZI e faça-se $ND = b$; seja O um ponto do semieixo NZ tal que $NO = c$. Complete-se o retângulo $NDPZ$ e pelo ponto O trace-se OV

paralela a ND. Sendo $NO = c$ e $NZ = x$, tem-se $OZ = VP = x - c$. Supomos, como na figura, $x > c$ e $b > y$, pelo que o ponto O se encontra entre N e Z, e I se encontra entre Z e P. Tem-se que $ZP = ND = b$ e que $PI = b - y$. Portanto, $PI \cdot PV = A - bc$, concluindo-se que o ponto I está sobre uma hipérbole de assíntotas VP e VO.

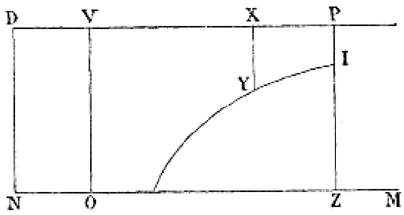

Fig. 15 – Análise de hipérboles. Figura extraída de Tannery (1896, p. 88)

Fermat acrescenta que, se por um ponto X qualquer de VP traçarmos uma paralela a ZI e sobre ela marcarmos um ponto Y tal que o retângulo VXY seja igual a $A - bc$, então os pontos Y e I estão sobre a mesma hipérbole de assíntotas PV e VO. Assim, fica demonstrado que a curva que corresponde à equação $A + xy = bx + cy$ é uma hipérbole.

Vejamos agora, que a equação $\frac{B + x^2}{y^2} = razão\, dada\; a$, que contém termos em x^2 e em y^2, representa também uma hipérbole. Traça-se NO paralelamente a ZI e marca-se o ponto R de tal modo que $a = \frac{B}{NR^2}$ (Fig.16). Tomando N como centro, R como vértice e RO como diâmetro, considere-se a hipérbole cujas *ordenadas* são paralelas a NZ e tal que, para um ponto I de abcissa NO e ordenada OI, se tenha $\frac{RO^2 + RO \cdot MR}{OI^2} = \frac{NR^2}{B}$, sendo $MN = NR$ e MR o diâmetro total.

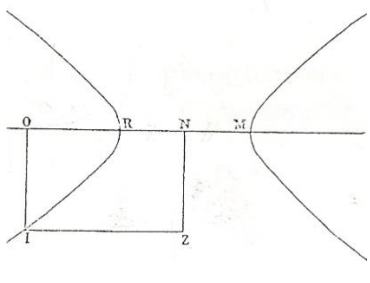

Fig. 16 – Análise de hipérboles. Figura extraída de Tannery (1896, p. 93)

Esta igualdade pode tomar a forma[60] $\frac{RO \cdot OM}{OI^2} = \frac{NR^2}{B}$ donde, *componendo*[61], se obtém $\frac{RO \cdot OM + RN^2}{OI^2 + B} = \frac{NR^2}{B}$, ou ainda[62] $\frac{y^2}{x^2 + B} = \frac{NR^2}{B}$.

Convertendo[63] $\frac{y^2}{x^2 + B} = \frac{NR^2}{B}$, obtém-se $\frac{x^2 + B}{y^2} = \frac{B}{NR^2} = a$, ou ainda a equação $\frac{x^2 + B}{y^2} = a$, concluindo-se, assim, que ponto I da hipérbole pertence ao lugar geométrico determinado por esta última equação.

Tem interesse relembrar que ao longo deste estudo, a *Introdução aos Lugares Planos e Sólidos*, Fermat nunca menciona qualquer proposição que tenha utilizado, quer das *Cónicas* de Apolónio, quer dos *Elementos* de Euclides, partindo do princípio que o leitor tem total conhecimento do conteúdo dessas obras.

O matemático francês conclui o estudo sobre as hipérboles referindo que podem ser reduzidas a esta equação todas as que forem constituídas por termos em x^2 e em y^2 adicionados de termos dados ou de termos em x ou y, desde que x^2 e y^2 se encontrem em membros diferentes e tenham o mesmo sinal; pois, se tiverem sinais contrários, teremos um círculo ou uma elipse.

---

[60] Uma vez que $RO^2 + RO \times MR = RO \times (RO + MR) = RO \times OM$.

[61] Proposição *Elementos* V,12 de Euclides: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d}$

[62] Pela proposição *Elementos* II,6 de Euclides $RN^2 + RO \times OM = ON^2$ e, como $ON = ZI = y$, tem-se $\frac{RO \times OM + RN^2}{OI^2 + B} = \frac{ON^2}{OI^2 + B} = \frac{y^2}{x^2 + B}$.

[63] Corolário da proposição *Elementos* V,7 de Euclides: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$

2.2.5.Elipses

Dada a equação $\frac{b^2 - x^2}{y^2} = a$, Fermat prova que a curva por ela representada é uma elipse dada de posição. Procede-se à sua construção geométrica, marcando o ponto M de tal modo que $NM = b$, e observando que o ponto Z se encontra entre os pontos N e M e, além disso, que $ZM = b - x$ (Fig. 11). Tomando M para um dos vértices, NM para diâmetro e N para centro, construa-se a elipse cujas *ordenadas* são paralelas a ZI e tal que $\frac{IZ^2}{ZP \cdot ZM} = \frac{1}{a}$, sendo P o outro vértice da elipse[64]. Dado um ponto I situado sobre esta elipse, ter-se-á que $ZM \cdot ZP = (NM - NZ) \cdot (NM + NZ) = NM^2 - NZ^2 = b^2 - x^2$. Portanto, $\frac{y^2}{b^2 - x^2} = \frac{1}{a}$, e, *convertendo,* $\frac{b^2 - x^2}{y^2} = a$, que representa a equação da elipse assim construída.

Serão reduzidas a esta equação todas aquelas em que x^2 e y^2 se encontrem em membros diferentes, com coeficientes diferentes e sinais contrários. Fermat, acrescenta ainda que, se os coeficientes forem iguais, então teremos um círculo se o ângulo for reto, e uma elipse se o ângulo não for reto.

Fermat prossegue o seu estudo com a equação $b^2 - 2x^2 = 2xy + y^2$, que considera ser a mais difícil. Nela figuram termos em x^2 e y^2 em membros diferentes, com coeficientes diferentes e com sinais contrários, além de um termo constante e de um termo em xy. Recorrendo a uma mudança de variável, Fermat prova que a sua curva é uma elipse. Adicionando x^2 a ambos os membros, obtém-se a igualdade $b^2 - x^2 = (x + y)^2$. Efetuando a mudança de variável $x + y = y'$, obtém-se o círculo MI de centro N e raio b (Fig. 17), sendo $MN = b$, $NZ = x$ e $ZI = x + y$, uma vez que se tem $MN^2 - NZ^2 = ZI^2$, além de o ângulo NZI ser reto. Mas, neste problema, tal como em todos os anteriores, pretende-se encontrar o lugar geométrico descrito pela extremidade da variável y. Com este objetivo, Fermat traça uma reta paralelamente a ZI, na qual toma um ponto M tal que $MR = MN = b$; de seguida traça NR e prolonga

[64] Dada uma elipse, é constante o quociente entre o quadrado das ordenadas e o retângulo dos segmentos do diâmetro.

ZI até encontrar NR no ponto O. Tem-se $ZO = NZ = x$ e, marcando V sobre OI de tal modo que $OV = ZI = x + y$, resulta $ZV = y$.

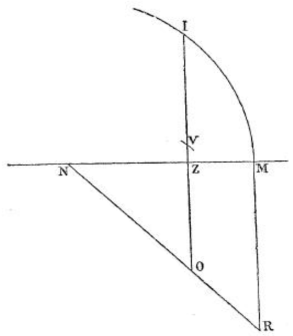

Fig. 17 – Análise de elipses. Figura extraída de Tannery (1896, p. 94)

Há ainda que demonstrar que o extremo V do segmento de reta OV descreve uma elipse, com respeito ao semieixo NO, em que as abcissas (como NO) e as ordenadas (como OV) formam claramente um ângulo de 45º. Como o triângulo NMR é dado de espécie[65], a razão $\frac{NM^2}{NR^2}$ é dada; seja ela k. Então $\frac{NM^2}{NR^2} = \frac{NZ^2}{NO^2} = k$ e, portanto, também [66] $\frac{NM^2 - NZ^2}{NR^2 - NO^2} = k$. Mas, como $NM^2 - NZ^2 = ZI^2 = VO^2$, temos que $\frac{VO^2}{NR^2 - NO^2} = k$. Uma vez que tanto os pontos N e R como o ângulo NOV são dados, Fermat conclui, sem mais explicações, que o ponto V está sobre uma elipse.

De facto, considere-se o ponto P de tal modo que N seja o ponto médio de PR. Como $NR^2 - NO^2 = (NR - NO)\cdot(NR + NO) = OR \cdot OP$, obtém-se $\frac{VO^2}{OR \times OP} = k$; portanto, o ponto V está sobre uma elipse de vértices R e P (e OR e OP são os dois segmentos do diâmetro da elipse).

Se efetuarmos a mudança de variável[67] $NO = u = x\sqrt{2}$ e $OV = v = x + y$, teremos $x = \frac{u}{\sqrt{2}}$ e $y = v - \frac{u}{\sqrt{2}}$. Substituindo na equação $b^2 - x^2 = (x + y)^2$ obtém-se então

[65] Tal como em casos anteriores, trata-se da proposição *Dados*, 41 de Euclides.

[66] Proposição *Elementos* V, 19 de Euclides: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a-c}{b-d} = \frac{c}{d}$

[67] Pelo Teorema de Pitágoras, $NO^2 = 2x^2$.

$b^2 - \frac{u^2}{2} = v^2$, ou ainda, $2b^2 - u^2 = 2v^2$, que representa a equação da elipse, de vértices R e P.

Fermat conclui o seu estudo referente às elipses acrescentando que, por um processo análogo, serão conduzidas aos casos precedentes todas as equações que contenham os termos: em xy, dados, em x^2 e y^2 e, em x ou y. Acrescenta, ainda, que a discussão destes casos é fácil e que a sua resolução será, sempre, feita através de um triângulo conhecido de espécie.

2.2.6.Um exemplo de aplicação

Após este seu estudo, Fermat escreve que foram, aqui, analisados todos os casos sobre os *lugares planos e sólidos* que não tinham sido explicados pelos seus antecessores. E acrescenta que, por conseguinte, reconhecer-se-ão de imediato quais os *lugares* incluídos nos diversos casos da última proposição do livro I dos *Lugares Planos* de Apolónio, e descobrir-se-á, sem grande dificuldade, uma generalização de tudo o que faça parte desta matéria.

Nesse sentido, depois de ter determinado o *lugar geométrico* correspondente a qualquer equação quadrática com duas variáveis e mostrar que tinha que ser uma reta, um círculo, ou uma secção cónica, Fermat observou que podia aplicar os seus métodos à proposição seguinte, deixando, contudo, a resolução para o leitor:

> Se, retas forem dadas de posição em qualquer número, e se para cada uma for traçada uma reta sob um ângulo dado a partir dum mesmo ponto, se a soma dos quadrados das retas assim traçadas por retas dadas for igual a uma área dada, então o ponto a partir do qual elas se traçam estará sobre um lugar sólido dado de posição. (Tannery, 1896, p. 95).

Esta proposição, segundo Mahoney (1994, p. 91) é a generalização da versão do *lugar* das três e quatro retas, referido no capítulo anterior, problema enunciado por Papo no seu comentário à *Cónicas* de Apolónio, e a que Descartes se dedicou, encontrando uma generalização que se encontra na sua *Geometria*.

Contudo, não é o problema de Apolónio e Papo que Fermat resolve, para ilustrar o seu método de estudo dos *lugares geométricos*. Com este objetivo, Fermat utiliza este seu último exemplo. Considerando-se dois pontos, N e M, pretende-se encontrar o *lugar* dos pontos I tais que, traçando os segmentos de retas IN e IM, a razão entre a soma dos seus quadrados e a área do triângulo INM seja dada, ou seja, $\frac{IN^2 + IM^2}{triângulo\ INM} = r$, onde r é a razão dada. (Fig. 18).

Seja $NM = b$ e considere-se $ZI = y$, $NZ = x$, assim como o ângulo NZI reto. Aplicando as *regras da arte* de Viète, obtém-se $\frac{2x^2 + 2y^2 - 2bx + b^2}{by} = \frac{r}{2}$, que, como se viu na secção 2.2.2, representa uma circunferência.[68]

.

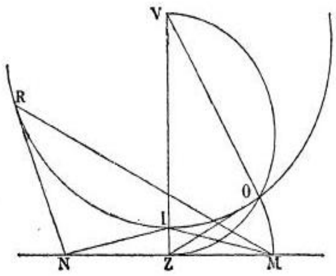

Fig. 18 – Análise de um caso particular. Figura extraída de Tannery (1896, p. 94)

Fermat passa, sem mais explicações, à construção do lugar geométrico. Seja Z o ponto médio[69] do segmento de reta NM e trace-se uma perpendicular a este segmento de reta por Z e, sobre ela, marque-se um ponto V de tal modo que $\frac{4ZV}{NM} = \frac{r}{2}$. Descreva-se o semicírculo VOZ, considere-se $ZO = ZM$ e traça-se ZO. De seguida, com centro V e raio VO traça-se o círculo OIR. Fermat afirma que, dado um ponto qualquer R do círculo, a razão entre $RN^2 + RM^2$ e o triângulo RNM é igual à razão dada, r. O leitor atual não tem dificuldade de verificar, não só que o centro do círculo é efetivamente o ponto V, mas também que, em virtude de $ZV = \frac{br}{8}$, de

[68] De facto, esta equação é equivalente a $2x^2 + 2y^2 - 2bx + b^2 = \frac{bry}{2}$, ou ainda a $\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{br}{8}\right)^2 = \left(\frac{br}{8}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2$.

[69] Nesta construção, a letra Z passa a designar um ponto fixo, e não a abcissa variável do ponto I que descreve o lugar geométrico, como anteriormente acontecia.

$ZO = ZM = \frac{b}{2}$, e de o ângulo ZOV ser reto, o raio VO do círculo corresponde de facto ao valor indicado pela equação.

Podemos observar que estão presentes na *Introdução aos lugares Planos e Sólidos* elementos básicos que constituem o ramo da Matemática que hoje denominamos Geometria Analítica. Logo desde início Fermat expôs claramente o princípio de que uma equação com duas incógnitas é uma expressão algébrica que traduz as propriedades de uma curva no plano e o seu trabalho está orientado no desenvolvimento e aplicação desta frutífera ideia. Partindo de uma equação algébrica, o autor constrói o *lugar geométrico* correspondente, ou seja, a curva com as propriedades geométricas adequadas. Apenas com base em proposições contidas nos *Elementos* e nos *Dados* de Euclides e nas *Cónicas* de Apolónio fica estabelecida na *Introdução aos lugares Planos e Sólidos* a correspondência entre os diversos tipos de equações algébricas de grau não superior a 2, e diversos tipos de *lugares planos* e *sólidos* (isto é, retas, circunferências e cónicas). Pensamos ser possível afirmar que este estudo dos *lugares geométricos*, permitiu a Fermat converter a Análise geométrica dos gregos em Análise algébrica por ação da Álgebra simbólica da Arte Analítica de Viète. Tal feito, como se irá observar, foi também alcançado por Descartes.

Capítulo 3
A Geometria Analítica de Descartes

3.1.Apresentação

Descartes expôs a sua conceção de Geometria Analítica na *Géométrie*, tratado publicado em 1637. Esta obra é considerada um marco importantíssimo na História da Matemática, ao ponto de Descartes ser considerado por alguns historiadores, o «inventor» da Geometria Analítica (Urbaneja, 3003, p. 7); ou ser, em concorrência com Fermat, o «coinventor» (Garbi, 2009, p. 70).

A *Geometria*, com cerca de cem páginas, está dividida em três livros: o primeiro livro trata «dos problemas que se podem construir utilizando apenas círculos e linhas retas» (Smith 1954, p. 2), o segundo estuda «a natureza das linhas curvas» (Smith 1954, p. 40) e o terceiro debruça-se sobre a «construção dos problemas sólidos ou mais que sólidos» (Smith 1954, p. 152). A *Geometria* não foi apresentada como um tratado isolado, mas como um dos três apêndices[70] do *Discours de la Méthode por Bien Conduire sa Raison et Chercher la Vérité dans les Sciences* (*Discurso do Método* p*ara Bem Conduzir a Razão e Procurar a Verdade nas Ciências*), o qual contém ilustrações do método filosófico geral de Descartes. Ao escrever a *Geometria*, este notável filósofo conseguiu mostrar ser possível a aplicação à investigação geométrica dos princípios e métodos de raciocínio discutidos no seu *Discurso do Método*. Na segunda parte do prefácio deste tratado, também conhecido por «discurso sobre a razão» (Struik, 1997, p. 162), publicado em Leyden em 1637, Descartes expõe a sua conceção racionalista do estudo da natureza, enumerando quatro princípios fundamentais do seu método (filosófico), inspirado no rigor matemático. A primeira das suas quatro regras era a do primado da *evidência*, que consistia em adotar uma dúvida metódica, evitando tanto os pré-conceitos como as conclusões precipitadas, só aceitando como verdadeiro o que se apresentasse ao espírito, clara e distintamente, com evidência. Outra regra, a regra da *análise*, apontava em decompor os problemas

[70] Os outros dois apêndices do *Discurso do Método* são *La Dioptrique* e *Les Météores*.

no maior número possível de parcelas ou etapas simples, reduzindo a complexidade à simplicidade dos seus elementos. A terceira regra (regra da síntese ou regra da ordem ou dedução) tinha como objetivo ordenar aquelas parcelas ou pensamentos começando pelos mais simples e fáceis de conhecer, estabelecendo progressivamente a veracidade das etapas ou degraus mais baixos de modo a ascender à demonstração ou conhecimento global do problema ou coisa proposta. A quarta e última regra de pensamento (regra da enumeração ou indução) constava de fazer enumerações completas e revisões gerais por forma a nada omitir que possa clarificar-se ou provar-se com a evidência alcançada (Lopes, 2001, p. III-IV).

Descartes cultivou uma reputação internacional que foi aumentando com a publicação de várias outras obras filosóficas, além do seu *Discurso* (Katz, 2010, p. 548). O caminho da Filosofia para a Matemática foi natural. Descartes procurava um método geral de pensamento capaz de facilitar as descobertas e «encontrar as verdades nas ciências» (Struik, 1997, p. 162). Uma vez que as ciências da Natureza então mais conhecidas com algum grau de coerência sistemática eram a Astronomia e a Mecânica, e que a forma para a sua compreensão era a Matemática, então esta ciência, com as suas rigorosas proposições, tornava-se o mais importante veículo de compreensão do universo (Struik, 1997, p. 165). O interesse de Descartes pela Matemática não foi só pela própria Matemática, mas sim, como Platão na Antiguidade, como Pascal (1623-1662) e como Leibniz (1646-1716), encontrar naquela ciência um modelo de raciocínio que se pudesse aplicar em todos os estudos e com toda a generalidade.

O método de Descartes era racionalista; segundo este filósofo, os sentidos enganavam-nos e as suas indicações eram confusas e pouco exatas, só as ideias provenientes da razão é que eram claras e distintas. Sendo que, a evidência de que Descartes partia não era, de modo algum, a evidência sensível e empírica; o ato da razão que percebia diretamente os primeiros princípios era a intuição. A dedução limitava-se a veicular, ao longo das belas cadeias da razão, a evidência intuitiva das "naturezas simples". A dedução nada mais era do que uma intuição continuada.

Na regra XIV da obra *Regras para a Direção do Espírito*, Descartes refere que o seu método não foi criado para resolver problemas de Matemática: era preciso aprender Matemática para cultivar o espírito. Neste sentido, pode-se afirmar que a sua intenção ao utilizar a Matemática, era a de habituar seu espírito às verdades, não se contentando com falsas razões. Só a matemática apresentava raciocínios rigorosos, e portanto, quando o espírito estivesse habituado aos raciocínios matemáticos, estaria preparado para a pesquisa de outras verdades (Katz, 2010, p. 548).

Descartes escreveu a *Geometria* como uma aplicação do seu método geral de unificação racionalista do saber. É neste contexto que surge o projeto de unir a Álgebra com a Geometria.

(...) a publicação de *La Géométrie* (1637), de Descartes, colocou todo o campo da geometria clássica no domínio de ação dos algebristas. (Struik 1997, p. 162).

É de um modo geral aceite que esta obra contém um conjunto de elementos favoráveis à criação da Geometria Analítica. Contudo, na opinião de Struik,

É verdade que este ramo da matemática se desenvolveu sob a influência do livro de Descartes, mas dificilmente La *Géométrie* pode ser considerada um primeiro texto sobre este assunto. Não existem aí, explicitamente, eixos "cartesianos" e não são deduzidas equações da linha reta e das secções cónicas, embora haja algumas equações do segundo grau que são interpretadas como representativas de secções cónicas. (1997, p. 165).

Geometria cartesiana é agora sinónimo de Geometria Analítica, contudo, na opinião de Boyer (1997, p. 247) o objetivo fundamental de Descartes foi diferente da dos atuais textos. O primeiro livro da *Geometria* começa com a seguinte frase:

Todos os problemas da Geometria podem reduzir-se facilmente a termos tais que é desnecessário conhecer de antemão mais do que o comprimento de algumas linhas retas para construí-los. (Smith, 1954, p. 2).

Esta afirmação indica que se trata duma obra sobre a construção de problemas geométricos, e não necessariamente duma redução da Geometria à Álgebra. A *Geometria* é por vezes descrita apenas como uma aplicação da Álgebra à Geometria, mas segundo Boyer pode também ser igualmente encarado como a tradução de operações algébricas em linguagem geométrica (1997, p. 247), pois Descartes descreve as duas primeiras secções do livro I «como o cálculo da aritmética se relaciona com as operações da geometria» (Smith, 1954, p. 3) e «(...) introduzir estes termos de aritmética [a adição, a subtração, a multiplicação, a divisão e a extração de raízes] em geometria(...)» (Smith, 1954, p. 5). Mas, posteriormente, Boyer acrescenta que «praticamente toda *La Géométrie* está dedicada a uma completa aplicação da Álgebra à Geometria e da Geometria à Álgebra» (1997, p. 251). Basta observarmos que os outros dois livros contemplam, no geral, um estudo intensivo de curvas na forma algébrica, bem como a representação gráfica das suas raízes.

Dando seguimento ao estudo das curvas iniciado na Antiguidade pelos matemáticos gregos, Descartes considerou novas classes de curvas *construídas por simples* movimentos, referindo-se como «curvas traçadas por algum movimento contínuo gerado por certas máquinas» (Katz, 2010, p. 552), às quais é possível associar uma equação algébrica. Hoje, não é totalmente claro a forma como Descartes decidiu quais as curvas que fazem parte da sua terminologia, mas deu exemplos de instrumentos que permitem desenhar tais curvas (Fig. 19). Afastou-se do conceito dos gregos de que existiam apenas três tipos de curvas: as que podiam ser construídas com régua e compasso, ou seja, retas e círculos (*lugares planos*), as cónicas (ou *lugares sólidos*), e as que requerem na sua construção linhas diferentes das anteriores, isto é, «mais compostas» (Smith, 2010, p. 40). Ao contrário dos gregos, que com base no método cinemático agruparam todas as curvas como a quadratriz, a cissoide, a concoide e a espiral num conjunto que exigiam na sua construção instrumentos mais complicados do que a simples régua não graduada e o compasso, Descartes fez uma criteriosa distinção, aceitando a cissoide e a concoide como curvas algébricas e rejeitando as restantes. Assim, tomando por «geométrico o que é preciso e exato e por mecânico o que não é» (Smith, 1954, p. 43), deu reconhecimento geométrico às curvas como a reta, o círculo, as cónicas, a cissoide e a concoide, designando-as por *curvas geométricas*, pois «podem ser descritas por um movimento contínuo, ou por vários que se sucedem (...); por este meio se pode sempre ter um conhecimento exato da sua medida» (Smith, 1954, p. 43). E afirmou, sem contudo estar em condições de fornecer uma demonstração, que a elas era associada uma equação algébrica:

> E de qualquer outra maneira que se imagina o traçado de uma linha curva, sempre que seja do número das que eu chamo Geométricas poder-se-á encontrar, invariavelmente, do mesmo modo, uma equação para determinar os seus pontos. (Smith 1954, p. 56).

Às restantes curvas, que excluiu da sua *Geometria*, deu o nome de *curvas mecânicas*, pois podiam imaginar-se descritas por dois movimentos separados cuja relação não admitia determinação exata, ou seja, escreveu Descartes, «em virtude de poderem imaginar-se descritas por dois movimentos que não têm entre si nenhuma relação que possa medir-se exatamente» (Smith, 1954, 43).

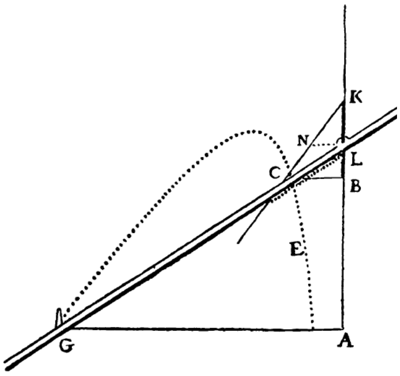

Fig. 19 – Instrumento para traçar curvas de Descartes. Figura extraída de Smith (1954, p. 50)

Os três problemas clássicos constituíram, desde a antiga Grécia, um desafio constante para obtenção das suas soluções. A impossibilidade das suas construções geométricas recorrendo unicamente à régua e ao compasso estimulou os matemáticos na invenção de novos objetos e procedimentos de resolução.

A principal preocupação de Descartes na *Geometria* foi a construção de pontos que fossem a solução de problemas geométricos e segundo «a necessidade de esclarecer que tipo de curvas eram legítimas numa tal construção estava implícita no seu trabalho» (Katz 2010, p. 551). Definiu essas curvas baseado nos primeiros três postulados dos *Elementos* de Euclides[71] e também na sua afirmação de que «duas ou mais linhas podem ser movidas, uma sobre a outra, determinando através da sua intersecção outras curvas» (Smith 1954, p. 43), aquelas que considerou de curvas geométricas.

Como já foi referido no presente trabalho, a *Geometria* de Descartes tal como a *Isagoge* de Fermat, têm subjacente a ideia de relacionar a Álgebra com a Geometria. Enquanto o segundo autor provou esta relação através do estudo de *lugares geométricos*, Descartes preocupou-se mais em demonstrá-la através da construção geométrica de soluções para as equações algébricas. Observe-se que, ao contrário da Matemática da antiga Grécia, a Geometria Analítica de Descartes permitiu a construção geométrica das soluções de problemas que envolviam equações de grau superior a três.

[71] Estes postulados são a base das construções com régua e compasso, muitas vezes designadas por construções euclidianas. Nos *Elementos* de Euclides não se menciona o compasso ou quaisquer outros instrumentos, Euclides simplesmente assume que linhas retas podem ser construídas dados dois pontos, e que uma circunferência pode ser construída dado o seu centro e passando por um outro ponto.

Um dos objetivos deste capítulo visa a tentativa de nos familiarizarmos mais com o método cartesiano de Descartes. Neste sentido, serão feitas algumas das suas construções, que contribuíram, mais tarde, para a resolução de problemas geométricos, nunca resolvidos pelos seus antecessores.

O tratado começa por uma aritmetização dos segmentos de reta. Por analogia com a Aritmética (ciência dos números naturais), Descartes introduziu cinco operações elementares na Geometria: adição, subtração, multiplicação, divisão, e extração de raízes quadradas. Para tal, necessitou de introduzir um *segmento de reta unitário*, chamado a desempenhar um papel análogo ao representado pelo número 1 na Aritmética. As operações de adição e subtração de segmentos de reta não oferecem qualquer dificuldade mesmo no âmbito da Geometria antiga. Por isso, veremos apenas as construções dos três restantes. Para as realizar, Descartes usou, apenas, régua não graduada e compasso. Ao falarmos em construções com régua e compasso, estamos a falar, como já aqui foi referido, dos três primeiros postulados de Euclides.

Ao introduzir o *segmento de reta unitário*, com o objetivo de aritmetizar os segmentos de reta, Descartes tornou possível e deu significado a muitos problemas que tinham sido intransponíveis para os gregos[72]. Para estes, uma variável correspondia ao comprimento de um segmento, o produto de duas variáveis à área de algum retângulo e o produto de três variáveis ao volume de algum paralelepípedo retângulo, interpretando os problemas geométricos apenas até à terceira dimensão. Uma vez feita a escolha de um segmento unitário, o produto de segmentos de reta continua a ser um segmento de reta; o mesmo se pode afirmar em relação ao quociente de dois quaisquer segmentos ou da raiz quadrada (ou de maior índice) de qualquer segmento de reta. Para Descartes, x^2 não sugeria uma área, mas sim o quarto proporcional da proporção $\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2}$, sendo representado por um segmento de reta fácil de construir, quando se conhece x.

Descartes foi o matemático, que na sua época, introduziu uma nova simbologia que permitiu um avanço no campo da notação. Usou para parâmetros as primeiras letras do alfabeto, e as do fim para as incógnitas, contudo, o símbolo da igualdade terá sido o símbolo mais arcaico da sua obra. Escreveu $a+b$ para a soma de dois segmentos de comprimentos a e b, $a-b$ para a diferença, $a \times b$ para o produto, $\frac{a}{b}$

[72] Descartes libertou-se do princípio da homogeneidade, que dominava a matemática desde a antiguidade.

para o quociente, aa ou a^2 para multiplicar a por si próprio, a^3 para o multiplicar novamente por a, e assim sucessivamente. Escreveu $\sqrt{a^2+b^2}$ para a raiz quadrada de a^2+b^2 e $\sqrt{C.a^3-b^3+abb}$ para a raiz cúbica de a^3-b^3+abb, assim outras. Apesar de ter ultrapassado o conceito de homogeneidade, conservado pelos gregos durante séculos, Descartes não deixou de o ter em pensamento ao considerar que, para se efetuar todas estas operações, é necessário que se mantenha a mesma dimensão entra os vários termos que as compõem, mesmo quando a unidade não estiver presente. Veja-se, em $\sqrt{C.a^3-b^3+abb}$, a^3 tem a mesma dimensão de abb e de b^3. Mas, quando tal não acontece, a unidade (determinada previamente) pode ser considerada em qualquer operação, por exemplo ao extrair a raiz cúbica de $aabb-b$, subentende-se que a quantidade $aabb-b$ está dividida pela unidade, enquanto que b está multiplicada duas vezes pela mesma, isto é, ter $aabb-b$ significa ter $\frac{aabb}{u}-buu$, sendo u a unidade.

A natureza da Geometria grega, na qual só se concebia a comparação de grandezas da mesma espécie[73], obrigou os antigos a cumprirem escrupulosamente a homogeneidade entre os termos duma equação, pelo que o grau de cada termo (obtido eventualmente pela multiplicação de quantidades dadas por quantidades desconhecidas) devia ser igual ao dos restantes. Neste sentido, a condição de homogeneidade dos polinómios era respeitada se todas as grandezas que interviessem na relação fossem designadas por letras, e tal procedimento, como já foi referido anteriormente, oferecia limitações. Com a algebrização dos segmentos de reta e a introdução do segmento de reta unitário, Descartes deu o passo mais importante da sua época, renunciando ao princípio geométrico da homogeneidade, e subentendendo, numa equação, a divisão ou a multiplicação de cada termo pela unidade quantas vezes se queira.

> C'est cette remarque qui a sans doute provoqué la naissance de la Géométrie Analytique qui n'ést que l'art de donner une signification géométrique à des polynômes non homogènes et donc à concevoir en général la notion de polynôme algébrique. (Vuillemin, 1987, p. 171).

[73] Onde retas só podiam ser comparadas a retas, quadrados a quadrados, planos a planos, sólidos a sólidos, supersólidos a supersólidos, etc.

3.2.Aritmetização dos segmentos de reta

Consideremos o segmento de reta, AB, que tomamos como sendo *unitário*. Para definir o produto de dois segmentos de reta de comprimentos a e b, Descartes considera-se duas semi-rectas (Fig. 20) com a mesma origem em B, e marca numa delas o segmento unitário AB. De seguida marca-se sobre elas os segmentos de reta BD e BC de comprimentos a e b, respetivamente. Une-se os pontos A e C, e por D traça uma reta paralela à reta AC, que intersecta a outra semi-recta em E. Pelo Teorema de Tales[74] tem-se que $\frac{AB}{BC}=\frac{BD}{BE}$. Uma vez que $AB=1$, conclui-se que $BE = BD \cdot BC$.

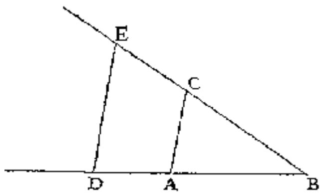

Fig. 20 – Multiplicação e divisão. Figura extraída de Smith (1954, p. 4)

Portanto, são dados o segmento de reta u unitário e os segmentos de reta a e b cujo produto se procura. Se chamarmos x ao quarto proporcional dos segmentos de reta u, a e b, isto é, ao segmento de reta x tal que $\frac{u}{a}=\frac{b}{x}$, então temos $x.u = a.b$. Ora, como u é a unidade, esta igualdade pode escrever-se apenas como $x.u = a.b$. Obtemos assim um segmento de reta x, que é produto dos segmentos de reta a e b.

Observe-se que, na Matemática da tradição antiga, não há multiplicação de segmentos de reta – o conceito de *multiplicação* pertence à Aritmética, e não à Geometria. Mesmo que se queiram interpretar algumas proposições de Geometria das

[74] Trata-se da proposição *Elementos* VI, 2 de Euclides: Se for desenhada uma linha reta paralela a um dos lados dum triângulo, ela dividirá os lados do triângulo proporcionalmente; e se os lados do triângulo forem divididos proporcionalmente então a linha unindo os pontos de secção será paralela ao restante lado do triângulo.

áreas em termos de *Álgebra geométrica*, o produto de dois segmentos de reta seria um retângulo, e não outro segmento de reta. A ideia de Descartes é, portanto, absolutamente inovadora, e vai preparar o fim da submissão ao Princípio da Homogeneidade.

Por outro lado, o resultado obtido pela construção de Descartes depende da escolha do segmento de reta AB que se pré-arbitrou como sendo a unidade. Se esse segmento unitário for alterado, então o resultado da multiplicação de BC por BD também será alterado. Este é um inconveniente que a abordagem antiga não tinha.

Para efetuar a divisão entre dois segmentos de reta, Descartes utiliza um processo análogo ao da multiplicação: como anteriormente (Fig. 20), tomam-se as duas semi-rectas com origem B, marcando numa delas o segmento de reta unitário AB. Para se dividir BE por BD, de comprimentos b e a, respetivamente, une-se E com D e traça-se uma reta paralela ED passando por A. Obtém-se, assim, BC que representa o quociente BE por BD. Com efeito, usando novamente o Teorema de Tales , obtemos a proporcionalidade $\frac{BC}{AB}=\frac{BE}{BD}$. Sendo x, a e b os comprimentos de BC, BD, e BE, respetivamente, tem-se $\frac{x}{1}=\frac{b}{a}$; igualdade que se pode escrever na forma $x=\frac{b}{a}$.

Dado um segmento de reta GH, para extrair a sua raiz quadrada, Descartes procede do seguinte modo (Fig. 21). Considera um segmento de reta arbitrário, FH , como segmento de reta unitário e acrescenta-lhe em linha reta o segmento de reta GH . Depois de obter o ponto médio, K , do segmento de reta FH , traça um semicírculo de centro K passando por H . Elevando perpendicularmente sobre FH uma reta que passe por G , Descartes encontra o segmento de reta GI , que representa a raiz quadrada de GH .

Com efeito, o triângulo FIH inscrito na semicircunferência é retângulo[75], pelo que a altura é meio proporcional entre os segmentos em que o seu pé divide a hipotenusa[76]:

$\frac{FG}{GI}=\frac{GI}{GH}$, donde $GI^2=GH\times FG$ e, como $FG=1$, resulta $GI=\sqrt{GH}$.

Observe-se que, tal como nos casos anteriores, se o segmento unitário for alterado, o resultado da raiz quadrada de GH também será alterado, uma vez que a construção depende desse segmento de reta unitário que se pré-arbitrou.

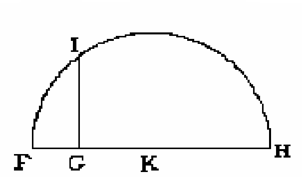

Fig. 21 – Extração da raiz quadrada. Figura extraída de Smith (1954, p. 4)

3.3. Algebrização dos segmentos de reta

3.3.1. Equações do segundo grau

Só depois de levar a cabo a aritmetização é que Descartes dá o segundo passo: o da algebrização desses mesmos segmentos de reta. Este é o pretexto para uma das mais interessantes passagens do livro I da *Geometria*: a resolução de equações do segundo grau, em que tanto os dados como a incógnita são segmentos de reta.

Para simplificar, considerar-se-ão apenas equações em que o coeficiente do termo de 2º grau é 1. Uma vez que todos os coeficientes (como, aliás, também as incógnitas) são sempre positivos, consideram-se os três seguintes tipos de equações completas:

---

[75] Proposição *Elementos* III, 31 de Euclides

[76] Proposição *Elementos* VI,8 de Euclides: num triângulo retângulo, a altura relativa à hipotenusa divide o triângulo em dois triângulos semelhantes ao triângulo total e semelhantes entre si.

$$x^2 + ax = b^2$$
$$x^2 = ax + b^2$$
$$x^2 + b^2 = ax$$

Pretende-se encontrar os segmentos de reta (incógnita) que verificam as condições anteriores, sendo dados dois segmentos de reta a e b (coeficientes).

Para encontrar geometricamente as soluções das referidas equações, Descartes começa por construir um triângulo retângulo NLM (retângulo em L) com $LM = b$ e $LN = \frac{1}{2}a$ (Fig. 22). De seguida, prolonga a hipotenusa até O onde $NO = NL$ e constrói o círculo centrado em N com raio NO. Sejam O e P os pontos de intersecção do círculo e com a reta MN, e sejam Q e R os pontos de intersecção, caso existam, do círculo com a reta que passa por M e é paralela a NL.

Pela proposição *Elementos* III, 36 de Euclides[77], verificam-se as igualdades

$$MP.MO = ML^2 \qquad \text{e} \qquad MQ.MR = ML^2$$

Daqui se conclui que o segmento de reta MP é solução da equação $x^2 + ax = b^2$, uma vez que a primeira igualdade pode ser escrita na forma $MP \cdot (MP + a) = b^2$, ou seja, $MP^2 + a.MP = b^2$. Do mesmo modo, essa mesma igualdade também pode ser escrita como $MO \cdot (MO - a) = b^2$, ou ainda, $MO^2 = a.MO + b^2$, concluindo-se, igualmente, que o segmento de reta MO é solução da equação $x^2 = ax + b^2$.

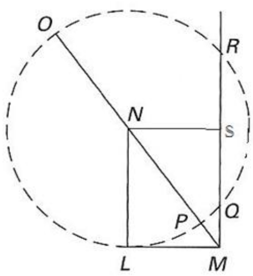

Fig. 22 – Construção geométrica das equações do segundo grau

[77] São as proposições Elementos, III 35 e 36 de Euclides que permitem definir a *potência dum ponto relativamente a uma circunferência*.

Encontrados geometricamente os segmentos procurados, MP e MO, proceda-se à sua determinação algébrica. Sendo $MN^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2$ e $MP = MN - \frac{a}{2}$, resulta $MP = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2}$. Do mesmo modo, sendo $MO = \frac{a}{2} + MN$, tem-se $MO = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2}$.

A igualdade $MQ.MR = ML^2$,escrita acima, subsistida da proposição Elementos III, 36 de Euclides, pode ser escrita na forma

$MQ.(a - MQ) = b^2$, que é equivalente a $a.MQ = MQ^2 + b^2$,

e também pode ser escrita na forma

$MR.(a - MR) = b^2$, que é equivalente a $a.MR = MR^2 + b^2$.

Por conseguinte, tanto o segmento de reta MQ como o segmento de reta MR são soluções da equação $x^2 + b^2 = ax$.

Com o objetivo de apresentar algebricamente estas soluções, considere-se o ponto médio, S, do segmento de reta RQ. O triângulo QNS é retângulo; portanto, $SQ = \sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2}$ e sendo $MQ = MS - SQ$, resulta $MQ = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2}$. E, como $MR = a - MQ$, resulta $MR = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2}$.

Observe-se que, neste caso, o número de pontos em que o círculo interseta a reta perpendicular a LM (Fig. 22) indica o número de soluções da equação: sendo a reta secante ($b < \frac{a}{2}$) obtemos duas soluções, se for tangente ($b = \frac{a}{2}$) teremos uma solução (dupla) $MR = MQ = \frac{a}{2}$ e se a reta não intersetar o círculo a equação é impossível.

Tem interesse referir que Descartes não considerou o estudo das equações do tipo $x^2 + ax + b^2 = 0$ por não possuir raízes positivas.

Após ter mostrado de que forma as operações algébricas são interpretadas geometricamente, inclusive a resolução das equações de grau dois, Descartes, de forma muito mais clara do que os matemáticos da renascença, forneceu indicações precisas quanto ao método que propunha para resolver problemas de Geometria, aplicação da Álgebra a problemas geométricos determinados:

> Assim, quando se pretende resolver algum problema, deve considerar-se de antemão como já feito, e atribuir nomes a todas as linhas que parecem necessárias para construí-lo, tanto às que são desconhecidas como às outras. Então, sem considerar nenhuma diferença entre estas linhas (...), deve examinar-se a dificuldade na forma como aquelas linhas dependem mutuamente umas das outras (...) até que se tenha encontrado a maneira de expressar a mesma quantidade de dois modos distintos, o que se denomina uma equação (...). E devem encontrar-se tantas dessas equações quantas as linhas desconhecidas. (Smith, 1954, p. 6).

3.3.2. O problema das quatro retas

Consideramos de interesse referir que o importante problema das três e quatro retas teve um papel primordial na construção da Geometria Analítica de Descartes. Este problema, que fora objeto de estudo por parte de grandes matemáticos da Antiguidade (Apolónio, Euclides, Papo), permitiu a Descartes aperceber-se do poder e da generalidade do seu ponto de vista. Como consequência, escreveu a *Geometria*, que levou os seus contemporâneos a conhecerem a Geometria Analítica. (Boyer, 1997, p. 247). Como já aqui foi observado, o referido problema (conhecido por problema de Papo) percorre os três livros da *Geometria*, aquela que é a sua maior obra de Geometria cartesiana.

Familiarizados com os clássicos gregos, em particular com o *Domínio da Análise* de Papo de Alexandria, e com um fértil conhecimento em Análise algébrica que resultou da intervenção da *Álgebra simbólica* de Viète sobre *Análise geométrica* dos gregos, tanto Fermat como Descartes testaram as suas ideias e métodos em vários problemas, em especial no problema geométrico das *três e quatro retas*, que é um caso particular do “problema de Papo". Este problema foi estudado por Euclides (300-200 a.C.), depois resolvido por Apolónio, posteriormente revisto por Papo e por fim generalizado por Descartes (para *n* retas), com o seu método, o da “sua” Geometria Analítica. Este matemático considerou este problema como um caso particular e continuou a observá-lo nos mesmos termos que os antigos, como uma aplicação da teoria das proporções. Praticamente toda a *Geometria* de Descartes está destinada, por um método analítico e não mais do que sintético, à resolução deste problema.

> (...) com a força do seu método no tratamento do problema do lugar das três e quatro retas (...) um problema que corre como um fio de Ariadne através dos três livros de La Géométrie. (Boyer, 1994, p. 249).

Enquanto que a natureza da Geometria sintética dos antigos não permitiu estender a resolução a mais do que três e quatro retas, a Geometria Analítica das proporções, tal como Descartes utilizou, permitiu encontrar a solução generalizada. Sendo objeto de estudo ao longo de séculos, pensa-se que o problema de Papo terá sido um dos maiores contributos no desenvolvimento da Geometria Analítica. Métodos, ideias, processos de construção foram-se permutando e incrementando obtendo-se, assim, elementos constituintes da Geometria Analítica.

> Assim, poucos problemas tiveram um papel tão importante na história da matemática quanto o do "lugar" das três ou quatro retas. (Boyer, 1994, p. 111).

Descartes dedica uma parte da *Geometria* à resolução, pelo seu método analítico, do *problema de Papo*, assim designado por ser mencionado na *Coleção Matemática*. Este é um problema de *lugares geométricos*, ou seja, requer a determinação das curvas constituídas pelos pontos que partilham uma determinada propriedade. Descartes formulou o problema da seguinte forma:

> Dadas em posição três, quatro ou mais retas, trata-se de encontrar um ponto a partir do qual se possam traçar outras tantas linhas retas, fazendo cada uma um dado ângulo com uma das anteriores, de modo que o retângulo formado por duas dessas assim traçadas desde o ponto, tenha uma proporção dada com o quadrado da terceira, se não existirem mais do que três; ou se houver quatro, com o retângulo das outras duas; ou ainda, havendo cinco, que o paralelepípedo formado pelas duas que restam e por outra linha dada. Ou ainda, havendo seis, que o paralelepípedo formado por três tenha uma proporção dada com o paralelepípedo das outras três. Ou, havendo sete, aquilo que se obtém multiplicando quatro, tenha uma dada

razão com o produto das três restantes por outra linha dada. Ou se há oito, que o produto, que o produto da multiplicação de quatro tenha uma proporção dada com o produto das outras quatro. (Smith, 1954, p. 22).

E, generalizando, Descartes acrescentou:

E assim se pode estender este problema a todo o número de linhas. Mas em virtude de existir sempre uma infinidade de pontos que podem satisfazer o que se pede, é necessário conhecer e traçar a linha sobre a qual eles devem encontrar-se. (Smith, 1954, p. 22).

Com o objetivo de se clarificar melhor o problema, será aqui utilizada a notação de Bos (2001, pp. 314-315): sejam dadas n retas L_i no plano, n ângulos θ_i, um segmento de reta a, e uma razão constante (Fig. 23). Para qualquer ponto P no plano, as distâncias oblíquas d_i são definidas pelos comprimentos de segmentos de reta unindo P a um ponto de L_i de tal modo que façam um ângulo θ_i com L_i. Pretende-se encontrar o *lugar geométrico* dos pontos P, para os quais uma certa razão (envolvendo as distâncias oblíquas d_i e dependendo do número de retas inicialmente dadas, como é indicado de seguida) seja igual à razão constante dada; as razões são:

- para três retas: $\dfrac{d_1^{\,2}}{d_1 d_2}$;

- para quatro retas: $\dfrac{d_1 d_2}{d_3 d_4}$;

- para cinco retas: $\dfrac{d_1 d_2 d_3}{a d_4 d_5}$;

- para seis retas: $\dfrac{d_1 d_2 d_3}{d_4 d_5 d_6}$;

- para $2k$ retas: $\dfrac{d_1 \ldots d_k}{d_{k+1} \ldots d_{2k}}$;

-para $2k+1$ retas: $\dfrac{d_1 \ldots d_{k+1}}{a d_{k+2} \ldots d_{2k+1}}$.

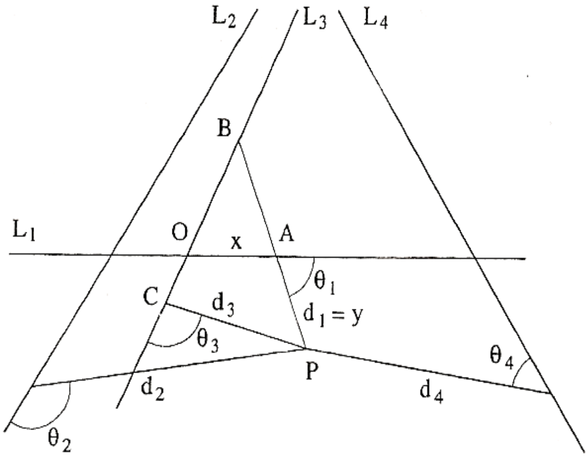

Fig. 23 – Problema de Papo. Caso particular, n=4.

Figura extraída de Bos (2001, p. 314).

Encarado dum ponto de vista moderno, o procedimento inicial de Descartes equivale a assumir um sistema de coordenadas com origem em O, ponto de intersecção da reta dada L_1 (escolhida arbitrariamente) com uma das outras retas (L_3 na figura 23), a referida reta L_1 para eixo das abcissas, e θ_1 para o ângulo formado pelos eixos coordenados. Relativamente a este sistema, tem-se $OA = x$ e $d_1 = y$. O autor demonstrou que para qualquer ponto P de coordenadas x e y, cada d_i pode ser escrito na forma $d_i = \alpha_i x + \beta_i y + \delta_i$, em que α_i, β_i e δ_i são constantes expressas em termos dos dados do problema (razões entre os ângulos θ_i e razões entre os segmentos de reta de cada L_i cujos extremos são pontos resultantes das mútuas interseções das retas). Com efeito, para escrever d_3 em função de x e de y, considerou os triângulos OAB e CPB (A e B são as interseções do prolongamento de d_1 com L_1 e L_3, respetivamente, C é a intersecção de d_3 com L_3) e observou que, embora o ponto P seja desconhecido, os ângulos daqueles dois triângulos, OAB e CPB, são conhecidos (por os ângulos θ_i e as posições das retas L_i serem dados) e, consequentemente, as razões entre os seus lados também são conhecidas.

A solução de Descartes é inicialmente desenvolvida no seu livro I onde obtém algebricamente as expressões para cada d_i procurado. No Livro II o autor dá a conhecer o seu método de representação gráfica dos *lugares geométricos*, em particular a do problema quando não está proposto para mais que três ou quatro linhas. Assim, escreveu:

> (...) quando não há mais que três ou quatro linhas dadas, os pontos buscados encontram-se todos não somente numa das três secções cónicas, mas por vezes na circunferência de um círculo ou numa linha reta; quando são cinco, seis, sete ou oito, todos os pontos se encontram nalguma das linhas que são de um grau mais composto que as secções cónicas (...); se são nove, dez, onze ou doze, os pontos encontram-se numa linha que não pode ser senão composta de um grau mais que as precedentes, e todas as que têm mais um grau podem servir; e assim até ao fim. (Smith, 1954, pp. 25).

Tem interesse referir que a Geometria sintética dos Antigos permitiu resolver o problema que comportasse apenas três ou quatro linhas retas, pelo que como já foi referido, os pontos procurados encontrar-se-iam sobre um *lugar sólido* dado de posição, ou nos casos degenerados, sobre os *lugares planos.* E, somente a Geometria Analítica das proporções tal como Descartes usou permitiu determinar a solução geral. Papo escreveu,

> No entanto, os que antes de nós trataram este assunto (que não é possível imaginar uma figura que tenha mais do que três dimensões) acordaram em falar sem designar qualquer figura concreta dizendo apenas. " O compreendido por tais retas em relação ao quadrado de tal reta, ou ao compreendido por tais retas". Citado por Descartes. (Smith, 1954, p. 20).

Descartes destinou o fim do seu primeiro livro com uma explicação sobre o referido problema, retomando-o no segundo livro com uma discussão mais pormenorizada, referindo que nem Euclides nem Apolónio conseguiram terminar totalmente a sua resolução, o qual foi confirmado por Papo, pois escreveu no seu livro VII,

> Mas esse lugar de três ou quatro linhas, que o próprio Euclides não tratou inteiramente, como tão pouco o fez nenhum outro, de que também fala Apolónio no seu livro III, e que, pelo menos atendo-nos aos elementos das Cónicas, não pode terminar nem agregar nem demonstrar nada ao que não tenha sido já demonstrado no tempo de Euclides, etc. Citado por Descartes. (Smith, 1954, p. 17).

Descartes utilizou retas de referência (como eixos de coordenadas), às quais todas as outras dadas no enunciado, bem como o *lugar geométrico* que é a solução do problema, são referenciados. Este facto permite realçar a diferença do seu método relativamente ao dos geómetras antigos, os quais tratavam todas as retas do mesmo modo, como elementos de uma figura. Esta diferença tem consequências ao nível dos procedimentos. Na Geometria sintética antiga, todas as linhas retas eram concebidas da mesma forma, e a ideia de uma solução simples podia surgir duma relação particular entre os comprimentos, as áreas e os volumes (Vuillemin, 1987, p. 100). Na Geometria Analítica de Descartes, as quantidades geométricas ilustravam diretamente as quantidades algébricas que compõem as equações, transformando-se, por consequência, em constantes, variáveis dependentes e variáveis independentes.

Vejamos mais em detalhe o problema das quatro retas, que é o caso particular do problema de Papo com que Descartes termina o Livro I da *Geometria*. Dadas quatro retas num plano, quatro ângulos e uma razão, pretendem encontrar-se os pontos a partir dos quais os segmentos de reta desenhados em direção às quatro linhas determinadas segundo ângulos determinados, satisfazem a condição de que o produto de dois dos comprimentos seja igual ao produto dos outros dois «ou (o que não traz maior dificuldade) esteja na proporção dada com o produto da multiplicação das outras» (Smith, 1954, p. 34). Descartes supõe o problema resolvido e, com o objetivo de simplificar a questão, referencia todas as retas em relação a duas principais que formam um sistema de eixos de coordenadas com origem em A, tomando a reta EG para eixo das abcissas e o ângulo CBG para ângulo entre os eixos (Fig. 24).

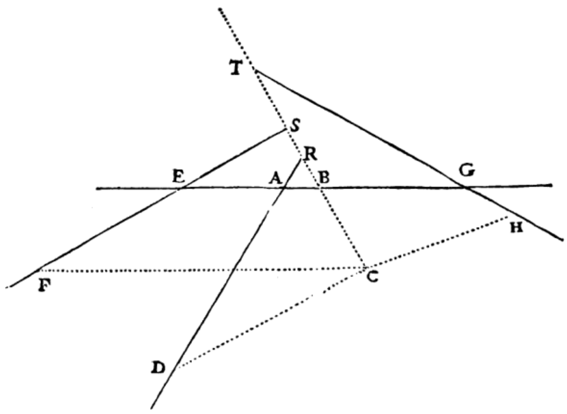

Fig. 24 – Problema das quatro retas. Figura extraída de Smith (1954, p. 27)

Assim, o autor estabelece x para comprimento do segmento de reta AB, situado ao longo da linha reta dada EG, e y para o comprimento do segmento CB, em que C é um dos pontos que satisfazem os requisitos do problema. Prolongando as outras retas até obter as suas interseções com os eixos, obtemos os pontos E, A e G sobre o eixo das abcissas e T, S e R sobre o eixo das ordenadas. Cada um dos comprimentos dos segmentos de reta requeridos, CB, CD, CF e CH, traçados desde o ponto C até às linhas retas dadas EG, DR, FS e TH, respetivamente, é expresso como função linear de x e de y, uma vez que os ângulos CBA, CDA, CFE e CHG são dados.

Para simplificar, trataremos apenas o caso em que as posições relativas dos pontos são como na figura 24.

Como todos os ângulos do triângulo ARB são conhecidos, as razões entre os seus lados também o são. Portanto, se designarmos[78] $\frac{AB}{BR}=\frac{z}{b}$, segue-se que $BR=\frac{bx}{z}$ e $CR=y+\frac{bx}{z}$. Do mesmo modo, uma vez que os três ângulos do triângulo DCR são conhecidos, também é conhecida a razão $\frac{CR}{CD}$; escrevendo-se $\frac{CR}{CD}=\frac{z}{c}$, tem-se

$$CD=\frac{c}{z}\left(y+\frac{bx}{z}\right)=\frac{c}{z}y+\frac{bc}{z^2}x.$$

Por outro lado, como as retas AB, AD e EF são dadas de posição, a distância de A a E é igualmente dada. Se supusermos que $AE=k$, ter-se-á que $BE=k+x$. E, como os ângulos do triângulo ESB são conhecidos, podemos escrever $\frac{BE}{BS}=\frac{z}{d}$, donde $BS=\frac{d(k+x)}{z}$ e $CS=BS+BC=\frac{d(k+x)}{z}+y=\frac{zy+dk+dx}{z}$. De forma análoga, estabelecendo a igualdade $\frac{CS}{CF}=\frac{z}{e}$ pelo facto de os ângulos do triângulo FSC serem também conhecidos, tem-se

$$CF=\frac{e}{z}.CS=\frac{e}{z}\left(\frac{zy+dk+dx}{z}\right)=\frac{e}{z}y+\frac{de}{z^2}x+\frac{dek}{z^2}.$$

Tal como AE, AG também é dada. Seja $AG=l$, donde, $BG=l-x$. Como do triângulo BGT se obtém $\frac{BG}{BT}=\frac{z}{f}$, tem-se que $BT=\frac{f}{z}(l-x)$ e que $CT=BC+BT=y+\frac{fl}{z}-\frac{fx}{z}$. De forma similar, do triângulo TCH obtém-se $\frac{CT}{CH}=\frac{z}{g}$ e, portanto,

$$CH=\frac{g}{z}.CT=\frac{g}{z}\left(y-\frac{fx}{z}+\frac{fl}{z}\right)=\frac{g}{z}y-\frac{fg}{z^2}x+\frac{fgl}{z^2}.$$

[78] Hoje escreveríamos apenas $\frac{AB}{BR}=\mu$, em vez de $\frac{AB}{BR}=\frac{z}{b}$ como uma relação entre dois comprimentos dados (tanto z como b são dados). Descartes terá querido manter o conceito, clássico, de relações entre comprimentos.

Do exposto verifica-se que, numa primeira fase da resolução do problema das quatro retas, Descartes recorreu às razões $\frac{AB}{BR}=\frac{z}{b}$, $\frac{CD}{CR}=\frac{z}{c}$, $\frac{BS}{BE}=\frac{z}{d}$, $\frac{CS}{CF}=\frac{z}{e}$, $\frac{BG}{BT}=\frac{z}{f}$ e $\frac{CT}{CH}=\frac{z}{g}$, para obter os comprimentos dos segmentos de reta CB, CD, CF e CH, expressos como funções lineares de x e de y, como ilustra a tabela seguinte:

Tabela
$CB=y$
$CD=\frac{c}{z}y+\frac{bc}{z^2}x$
$CF=\frac{e}{z}y+\frac{de}{z^2}x+\frac{dek}{z^2}$
$CH=\frac{g}{z}y-\frac{fg}{z^2}x+\frac{fgl}{z^2}$

Para o caso geral do problema de Papo, Descartes fez observar que todas as retas [79] que intervêm no enunciado (CB , CD , CF , CH ,...) se exprimem analiticamente por uma expressão do tipo $\pm\alpha y\pm\beta x\pm\delta$, (Vuillemin, 1987, p. 105) tal como vimos para CB , CD , CF e CH no caso particular das quatro retas. Obviamente, a primeira delas exprime-se pela equação particularmente simples $CB=y$. Descartes escreveu:

> Vê-se assim que qualquer que seja o número de linhas dadas, todas as linhas traçadas a partir de C, (...) podem sempre expressar-se, cada uma por três termos, dos quais um é composto pela quantidade desconhecida y multiplicada ou dividida por alguma outra conhecida, e o outro, pela quantidade desconhecida x multiplicada ou dividida por outra conhecida, e o terceiro termo, de uma quantidade conhecida. E a respeito dos sinais + e — que se unem a estes termos, podem ser trocados de todas as maneiras imagináveis. (Smith, 1954, p. 33).

[79] Entendam-se como as distâncias d_i, na nossa notação inicial.

Descartes estava consciente das situações de paralelismo; se por exemplo as retas forem paralelas a AB, a incógnita x não consta nas equações; sendo $CB = y$ então CD, CF e CH escrevem-se na forma[80] $\pm \alpha y \pm \delta$. O autor escreveu:

> Excetua-se o caso de elas serem paralelas, quer à linha AB, em cujo caso o termo composto da quantidade x será nulo; quer à linha BC, e neste caso o termo composto da quantidade y será nulo. (Smith, 1954, p. 33).

Para três retas dadas, AB, AD, EF, o problema consiste em determinar o *lugar geométrico* dos pontos, C, tais que $\dfrac{CB.CF}{CD^2} = \varsigma$, sendo ς a razão dada.

A partir das distâncias obtidas na tabela I, a equação que representa o *lugar geométrico* dos pontos referente ao problema das quatro retas dadas (AB, AD, EF e GH) é determinada através da propriedade como $\dfrac{CB \cdot CF}{CD \cdot CH} = \rho$, onde ρ designa uma certa razão dada. Por exemplo se ρ for a razão de igualdade (isto é $\rho = \dfrac{1}{1}$), que é um caso particular tratado por Descartes (Smith, 1954, p. 60), teremos a igualdade $CB \cdot CF = CD \cdot CH$, que se traduz por

$$y \times \left(\frac{ezy + dek + dex}{z^2} \right) = \left(\frac{czy + bcx}{z^2} \right) \times \left(\frac{gzy - fgx + fgl}{z^2} \right),$$

de que resulta a equação

$$(ez^3 - cgz^2)y^2 = (cfglz - dekz^2)y + (bcgz - cfgz - dez^2)xy + bcfglx - bcfgx^2,$$

ou ainda

$$y^2 = \frac{(cfglz - dekz^2)y - (dez^2 + cfgz - bcgz)xy + bcfglx - bcfgx^2}{ez^3 - cgz^2}.$$

[80] Um exemplo deste caso particular é ilustrado em Smith (1954, p. 33, nota 50)

Para cinco retas dadas (juntando-se HI às dadas), o problema consiste em determinar o *lugar geométrico* dos pontos, C, tais que $\frac{CB.CD.CF}{CH.CI.d} = \tau$, onde τ é uma razão dada e d é uma linha reta dada. E assim sucessivamente.

Traduzindo analiticamente as três condições anteriores, obtêm-se equações, as duas primeiras do 2º grau nos dois primeiros casos, e do 3º grau no último:

$$ay^2 + by + cxy + dx^2 + ex + f = 0$$

e

$$a''y^3 + b''y^2 + c''xy^2 + d''y + e''x^2y + f''xy + g''x^2 + h''x + i'' = 0.$$

A partir destas equações, Descartes conduziu a sua construção dos *lugares geométricos* que são solução destes casos particulares do problema de Papo. No caso particular do problema das quatro retas, foi construindo *secções cónicas* (círculo, elipse, parábola, hipérbole ou um par de retas) cujos parâmetros dependiam das posições relativas das quatro retas dadas e, portanto, também dos coeficientes da equação. Mantendo a construção clássica de Apolónio, e referindo conceitos como o *centro*, o *diâmetro*, o *ângulo das ordenadas*[81], o *lado reto*, o *lado transverso*, etc., Descartes demonstrou que as equações de cada tipo são satisfeitas pelo correspondente tipo de cónica. Portanto, as soluções para o problema das quatro retas são as secções cónicas. As justificações das construções apresentadas obrigam a que o leitor tenha pleno conhecimento do Livro I das *Cónicas* de Apolónio[82].

3.3.3. Método das tangentes

Pelo facto de terem diferentes conceções do que fosse uma *linha curva*, no século XVII diferentes matemáticos e físicos propuseram métodos distintos para a determinação da reta tangente a uma curva (Estrada et al., 2000, p. 562). Torricelli e Roberval, por exemplo, concebiam uma curva como a trajetória dum ponto móvel, pelo que para eles a noção de tangente à curva estava ligada à direção desse movimento (Estrada et al., 2000. p. 564). Para Fermat e Descartes, pelo contrário, a ligação mais

[81] Ângulo formado entre o eixo das abcissas e as *ordenadas*.

[82] Descartes refere explicitamente as proposições 2, 3, 11, 12 e 13 do primeiro livro das *Cónicas*. (Smith, 1954, pp. 72 e 75)

estreita da noção de curva plana era com uma equação a duas incógnitas, pelo que tinham uma conceção mais algébrica do que fosse uma reta tangente.

No livro II da *Geometria*, Descartes expôs o seu método analítico das tangentes restringindo-o às chamadas curvas algébricas, isto é, às que admitissem uma equação do tipo algébrico [83]. Tem interesse referir que o matemático francês terá abordado diretamente a questão das normais, recorrendo a um círculo centrado num ponto do eixo coordenado, por também se dedicar à resolução de problemas na área da Dióptrica (Estrada et al., 2000, p. 562). Obtida a reta normal à curva num dado ponto, pode depois desenhar-se facilmente a reta tangente nesse ponto. Seguindo a generalidade dos historiadores, também o designamos por "método das tangentes".

Para Descartes todas as propriedades de uma curva, nomeadamente a direção das suas tangentes, ficariam completamente determinadas sendo dada uma equação com duas incógnitas (Boyer, 1994, p. 252). Descartes escreveu,

> (...) conhecendo a relação [a equação] que têm todos os pontos de uma linha curva com todos os de uma linha reta [o eixo das abcissas] (...) é também fácil conhecer a relação que eles têm com todos os outros pontos e linhas dadas; e, a partir dela, conhecer os diâmetros, os eixos, os centros, e outras linhas ou pontos que tenham com a linha curva alguma relação particular [equações das normais e das tangentes] (...). (Smith, 1954, p. 92).

Na opinião de Vuillemin, o método das tangentes tem um papel de primeira ordem na *Geometria* e é aqui definido por Descartes como um instrumento de análise das curvas (1987, p. 57), quando escreve,

> Creio ter dado aqui tudo o que se requer para os elementos das linhas curvas, quando haja exposto a maneira geral de traçar linhas retas que as cortem em ângulos retos nos pontos que dela se escolham. (Smith, 1954, p. 95).

Ainda da análise de Vuillemin, a razão desta proeminência metódica da «procura das normais às curvas» (1987, p. 57) observa-se no texto de Descartes,

[83] Descartes chamava-lhes *curvas geométricas*, por oposição às restantes, as transcendentes, a que chamava *curvas mecânicas*.

(...) no que respeita a todas as outras propriedades que podem atribuir-se às linhas curvas, elas não dependem mais do que da grandeza dos ângulos que formam com outras linhas (...) a grandeza desses ângulos não é mais difícil de encontrar que se eles estiverem compreendidos entre duas linhas retas. (...) E atrevo-me a afirmar que este é um problema mais útil e mais geral não só que eu conheça, como também que eu alguma vez desejei conhecer em Geometria. (Smith, 1954, p. 95).

Descartes obteve a ideia para o seu método de representar uma normal a uma curva, a partir do conceito de que qualquer reta tangente a uma circunferência num ponto desta é perpendicular (normal) ao raio correspondente a esse ponto. Assim, o raio de uma circunferência tangente a uma determinada curva num dado ponto desta será, igualmente, normal a essa curva. Portanto, Descartes sugeriu que, para achar a normal a uma curva algébrica num ponto desta, bastaria determinar o círculo, com centro no eixo das abcissas, que fosse tangente à curva nesse ponto.

Com o objetivo de expor, em linhas gerais, o método de Descartes, apresentam-se os procedimentos que se devem levar a cabo na determinação da normal a uma curva de equação algébrica $y = f(x)$, num seu determinado ponto C. Após se escrever uma equação (necessariamente dependente dum parâmetro) que represente a família das circunferências de centro sobre o eixo das abcissas (Fig. 25) e que passam pelo ponto C, determina-se uma equação que resulte das duas anteriores por eliminação de uma das duas incógnitas, por exemplo das ordenadas. Para cada valor do parâmetro, as raízes desta equação são as abcissas dos pontos onde a correspondente circunferência intersecta a curva dada. Ora, para que essa intersecção seja num único ponto, ou seja, para se obter a circunferência de centro no eixo das abcissas que seja tangente à curva em C, a equação deverá ter raiz dupla e, para tal, Descartes utilizou um método a que Eves chama de «princípio da identidade de polinómios» (1997, p. 388). E, uma vez conhecido esse centro, a normal e a tangente à curva, nesse ponto, são facilmente traçáveis.

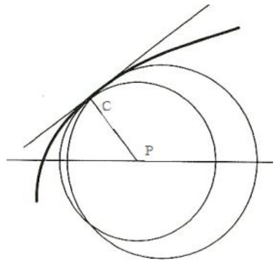

Fig. 25 – Método de Descartes para determinar normais.

Na *Geometria*, Descartes forneceu exemplos relativamente complexos do seu método. Com o intuito de clarificar o procedimento proposto, apresentamos um primeiro exemplo de carácter genérico, mas que não foi dado por Descartes, nomeadamente o de determinar a normal à parábola de equação $y^2 = 2x$, no ponto $(\frac{a^2}{2}, a)$. De seguida, pensamos ter interesse apresentar dois exemplos tratados por Descartes, referentes à elipse e à concoide parabólica, representadas por equações de graus diferentes[84].

O método de Descartes era essencialmente algébrico. Não possuía um sistema de coordenadas definido. Tentaremos aproximar tais exemplos a um conceito algébrico mais atual.

Procura-se a normal à parábola $y^2 = 2x$ no ponto $(\frac{a^2}{2}, a)$. Considerando todas as circunferências com centro num ponto $(b,0)$ e que passam por $(\frac{a^2}{2}, a)$, tem-se

$$(x-b)^2 + y^2 = \left(\frac{a^2}{2} - b\right)^2 + a^2 .$$

As abcissas dos pontos que pertencem simultaneamente à parábola e às circunferências são soluções de

$$(x-b)^2 + 2x = \left(\frac{a^2}{2} - b\right)^2 + a^2 ,$$

ou seja, da equação

$$x^2 + (2-2b)x + a^2(b - \frac{a^2}{4} - 1) = 0 .$$

Ora, a unicidade do ponto de intersecção, imposta pela tangência entre as duas curvas, obriga a que esta última equação tenha uma raiz dupla. Neste ponto, Descartes fez uso da igualdade de polinómios, fazendo notar que a equação anterior deverá ser do tipo $(x-e)^2 = 0$, que é equivalente a $x^2 - 2ex + e^2 = 0$.

O matemático francês sabia, a partir do seu estudo das raízes de equações, que para o ponto P ser o centro de um círculo tangente à parábola em C, a equação

[84] Descartes chamou curvas do *primeiro género* às cónicas, e curvas do *segundo género* às do terceiro grau. A concoide parabólica é um exemplo destas últimas.

anterior teria de ter uma raiz dupla, isto é, deveria ser escrita na forma expressa pela equação anterior. Com efeito afirma que,

> (...) se o ponto P preenche as condições requeridas, o círculo do qual é centro e que passa pelo ponto C, tocará a curva CE sem cortá-la; mas se este ponto P já está mais próximo ou mais afastado do ponto A que o devido, este círculo cortará a curva não apenas no ponto C, mas necessariamente nalgum outro ponto (Fig. 26). Deve também considerar-se que, se o círculo corta a curva CE, a equação pela qual se busca x ou y, ou alguma outra quantidade semelhante, supondo PA e PC conhecidas, contém necessariamente duas raízes desiguais. (Smith, 1954, p 103).

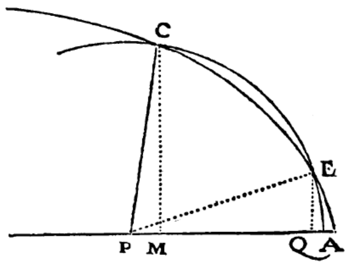

Fig. 26 – A unicidade do ponto de interseção. Figura extraída de Smith (1954, p. 97)

Descartes prossegue,

> (...) direi que a primeira equação encontrada mais acima (...) deve ter a mesma forma que a que se obtém fazendo e igual a y e multiplicando $y-e$ por si mesma, do que resulta $y^2-2ey+e^2$, de modo que podemos comparar separadamente cada um dos seus termos, e dizer que pois que o primeiro, que é y^2, é o mesmo numa e noutra, o segundo (...) é igual ao segundo da outra, que é $2ey$. (Smith, 1954, p. 104).

Então, ter-se-á o sistema

$$\begin{cases} b-1=e \\ a^2(b-\dfrac{a^2}{4}-1)=e^2 \end{cases}$$

do qual resulta, $$b^2-(a^2+2)b+\frac{a^4}{4}+a^2+1=0$$

portanto, $$b = \frac{1}{2}(a^2 + 2).$$

Do exposto, conclui-se que a reta que passa pelos pontos de coordenadas $(\frac{a^2}{2}, a)$ e $(\frac{1}{2}(a^2+2), 0)$ é normal à parábola no ponto $(\frac{a^2}{2}, a)$. Uma justificação para tal prende-se com o facto de que se a circunferência e a parábola são tangentes no ponto $(\frac{a^2}{2}, a)$ então têm a mesma reta tangente, e portanto a mesma reta normal, nesse ponto.

No livro II da *Geometria*, Descartes começa por aplicar o seu método das tangentes à elipse de equação $x^2 = ry - \frac{r}{q}y^2$, de lado reto r e eixo transverso q. Vejamos como, dada a equação da curva, CE, referida ao eixo GA, e um ponto sobre ela, C, Descartes obtém a reta CP que lhe é perpendicular (Fig. 27). «Supondo a coisa já feita e que a linha procurada é CP» (Smith, 1954, p. 95), seja P o ponto obtido pelo prolongamento de CP sobre a reta GA.

Considere-se $MA = y$ e $CM = x$. Fazendo $AP = v$ e $CP = s$, resulta a igualdade[85] $s^2 = x^2 + (v-y)^2$.

Descartes observa que esta equação exprime a relação entre todos os pontos da curva CE com a reta GA, e que dela se podem obter as igualdades $x = \sqrt{s^2 - v^2 + 2vy - y^2}$ ou $y = v - \sqrt{s^2 - x^2}$, bem como os seus quadrados x^2, y^2, cubos x^3, y^3, etc.

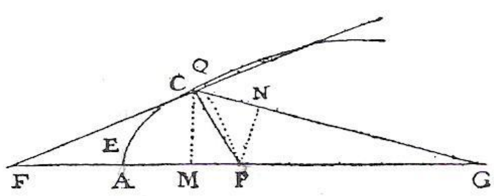

Fig. 27 – Reta normal a uma curva. Figura extraída de Smith (1954, p. 94)

[85] Igualdade obtida pelo Teorema de Pitágoras. Sendo constantes os parâmetros S e V, representa uma equação de uma circunferência de centro P e raio PC.

Com o objetivo de encontrar AP, a quantidade v, «que é a única de que se necessita, e com a qual se calculam as outras» (Smith 1954, p. 107), o autor procede à eliminação duma variável entre a primeira destas três equações e cada uma das dos dois exemplos que iremos apresentar.

Seja CE a curva (Fig. 28), à qual se pretende «tirar uma linha reta» (Smith, 1954, p. 95) que passa pelo ponto C, e que «a corte num ângulo reto» (Smith, 1954, p. 95). Herança do método de análise dos antigos gregos, já referenciado neste trabalho, Descartes supõe essa linha já traçada: a linha reta CP.

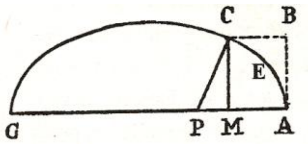

Fig. 28 – Reta normal à elipse. Figura extraída de Smith (1954, p. 97)

Se CE é uma elipse, com MA para segmento do seu diâmetro (eixo) ao qual corresponde a ordenada CM, tem-se[86], $x^2 = ry - \frac{r}{q}y^2$, sendo r o lado reto e q o eixo transverso.

Da intersecção, referida acima, resulta a igualdade

$$s^2 - v^2 + 2vy - y^2 = ry - \frac{r}{q}y^2,$$

ou ainda
$$y^2 + \frac{2qv - rq}{r-q}y + \frac{s^2q - v^2q}{r-q} = 0.$$

Pelas condições já apresentadas ,
$$\begin{cases} \dfrac{2qv - rq}{q-r} = 2e \\ \dfrac{s\ q - v^2q}{r-q} = e^2 \end{cases}.$$

[86] No estudo sobre as secções cónicas (nomeadamente no teorema 13 do livro I das *Cónicas*), Apolónio produziu a relação $x^2 = ry - \frac{r}{q}y^2$ referindo-se a uma elipse, de eixos retangulares, com origem num dos vértices e de parâmetros r (lado reto) e q (lado transverso).

Da primeira equação resulta, $v = e - \frac{e}{q} + \frac{r}{2}$.

E, uma vez que $y = e$, $v = y - \frac{y}{q} + \frac{r}{2}$.

O autor conclui este exemplo referindo que, da segunda equação do sistema, poderíamos obter uma expressão para s, mas «bastando a quantidade v para determinar P, que é o ponto que buscamos, não há necessidade de continuar» (Smith, 1954, p. 107).

Observe-se que sendo C dado e sendo conhecida a posição de P através de v, traça-se a normal à curva em C, a reta CP.

A curva designada *concoide parabólica* é gerada pelo movimento de uma parábola. Vamos proceder à obtenção da equação que a representa. De seguida, aplicaremos o método de Descartes na obtenção da reta normal num ponto seu.

Seja CE a curva gerada pelo movimento da parábola CK (Fig. 29).

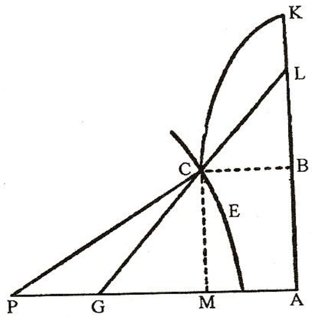

Fig. 29 – A concoide parabólica. Figura extraída de Smith (1954, p. 97)

Seja $MA = y$ e $CM = x$. Sendo d o *lado reto* da parábola referida ao diâmetro KL, tem-se $BC^2 = d \times BK$, ou ainda $y^2 = d \times BK$. Fazendo $GA = b$, $KL = c$, e como $BL = BK - KL$, tem-se $BL = \frac{y^2}{d} - c$.

Tem-se $\frac{GM}{BC} = \frac{MC}{BL}$, tendo em atenção que nos triângulos semelhantes GMC e CBL, os lados adjacentes a ângulos iguais são proporcionais (*Elementos* VI, 4 de Euclides).

Da igualdade anterior resulta $\dfrac{b-y}{y}=\dfrac{x}{\dfrac{y^2}{d}-c}$.

Donde $(b-y)\cdot\left(\dfrac{y^2}{d}-c\right)=xy$

Simplificando, obtém-se, $y^3-by^2-cdy+dxy+bcd=0$, que é a equação cúbica da referida concoide parabólica.

Prosseguindo com o método de Descartes e substituindo x por $\sqrt{s^2-v^2+2vy-y^2}$ na equação anterior, obtém-se

$$y^3-by^2-cdy+bcd+dy\sqrt{s^2-v^2+2vy-y^2}=0,$$

ou ainda, $y^3-by^2-cdy+bcd=-dy\sqrt{s^2-v^2+2vy-y^2}$.

Quadrando, desenvolvendo e associando os termos semelhantes, obtém-se

$$y^6-by^5-cdy^4+bcdy^3-by^5+b^2y^4+bcdy^3-b^2cdy^2-cdy^4+bcdy^3+c^2d^2y^2-$$
$$bc^2d^2y+bcdy^3-b^2cdy^2-bc^2d^2y+b^2c^2d^2-d^2s^2y^2+d^2v^2y^2-2d^2vy^3+d^2y^4=0$$

que resulta na equação:

$$y^6-2by^5+(b^2-2cd+d^2)y^4+(4bcd-2d^2v)y^3+(c^2d^2-d^2s^2+d^2v^2-2b^2cd)y^2$$
$$-2bc^2d^2y+b^2c^2d^2=0$$

Atendendo ao grau obtido e dando continuidade ao seu método, impondo a existência de raiz dupla, a equação deverá ser da forma

$$\left(y^2-2ye+e^2\right)\times\left(y^4+fy^3+g^2y^2+h^3y+k^4\right)=0,$$

ou seja, da forma

$$y^6+(f-2e)y^5+\left(e^2-2fe+g^2\right)y^4+\left(h^3-2eg^2+e^2f\right)y^3$$
$$+\left(k^4-2eh^3+e^2g^2\right)y^2+\left(e^2h^3-2ek^4\right)y+e^2k^4=0$$

Igualando os termos semelhantes,

- da igualdade $f-2e=-2b$ resulta $f=2e-2b$. (1)

- da igualdade $e^2k^4=b^2c^2d^2$ resulta $k^4=\dfrac{b^2c^2d^2}{e^2}$. (2)

Substituindo (1) na igualdade $e^2 - 2ef + g^2 = b^2 - 2cd + d^2$, obtém-se $g^2 = 3e^2 - 4be - 2cd + b^2 + d^2$.

Substituindo (2) na igualdade $e^2h^3 - 2ek^4 = -2bc^2d^2$, obtém-se

$$h^3 = \frac{2b^2c^2d^2}{e^3} - \frac{2bc^2d^2}{e^2} \quad . \tag{3}$$

Substituindo (1), (2) e (3) na igualdade $4bcd - 2d^2v = h^3 - 2eg^2 + e^2 f$, obtém-se

$$d^2v = 4bcd - \left(\frac{2b^2c^2d^2}{e^3} - \frac{2bc^2d^2}{e^2}\right) + 2e\left(3e^2 - 4be - 2cd + b^2 + d^2\right) - e^2\left(2e - 2f\right),$$

ou ainda, $$v = \frac{2e^3}{d^2} - \frac{3be^2}{d^2} + \frac{b^2e}{d^2} - \frac{2ce}{d} + e + \frac{2bc}{d} + \frac{bc^2}{e^2} - \frac{b^2c^2}{e^3}.$$

Uma vez que $y = e$, tem-se, finalmente, a quantidade

$$v = \frac{2y^3}{d^2} - \frac{3by^2}{d^2} + \frac{b^2y}{d^2} - \frac{2ce}{d} + y + \frac{2bc}{d} + \frac{bc^2}{y^2} - \frac{b^2c^2}{y^3},$$

para comprimento de AP, que é o que se pretende.

Descartes conclui:

> Se tomarmos AP igual ao valor de v acima obtido cujos termos são todos conhecidos, e traçando desde o ponto P assim encontrado uma linha reta até C, ela corta a curva CE segundo ângulos retos. E não vejo nada que impeça estender este problema a todas as linhas curvas que apareçam em qualquer cálculo geométrico. (Smith, 1954, p. 111).

3.3.4. Construção dos Problemas Sólidos

Papo de Alexandria, no Livro IV da *Coleção Matemática,* classificou os *problemas geométricos* em três tipos tendo em conta os meios pelos quais seria possível construir a sua solução: os designados *planos* eram aqueles que podiam ser resolvidos por meio curvas com origem no plano, isto é, por linhas retas e circunferências; os que envolviam, na sua resolução, superfícies cónicas eram os chamados *problemas sólidos* porque faziam uso de superfícies sólidas (cones cilindros,...); e os que, na sua construção, envolviam curvas obtidas de superfícies menos regulares e de movimentos mais complexos eram os *lineares*.

O livro III da *Geometria* compreende a construção de *problemas sólidos* (são representados por equações do terceiro ou do quarto grau, que podem ser resolvidas através dos *lugares sólidos*: parábola, hipérbole ou elipse) e de problemas reduzidos a uma equação do quinto ou do sexto grau, os quais estão incluídos nos *problemas mais que sólidos* (ou *lineares)*. Descartes, começa por estabelecer várias considerações que envolvam as raízes de uma equação, referindo que podem ser reais ou imaginárias, o que leva a concluir que conhecia que uma equação pode ter tantas raízes quanto o seu grau. Entre outras regras, enunciou uma que permite mudar as raízes positivas em negativas (e reciprocamente), assim como extrair, numa equação, o seu segundo termo ou restituir algum em falta. Estes procedimentos, comuns à época, serviam para *preparar* uma equação para ser resolvida.

Descartes terá sido o primeiro a revelar o poder da Álgebra na sua correspondência com um eixo coordenado. A Geometria Analítica considera as raízes negativas sobre o eixo das abcissas, à esquerda da origem, uma ilustração ausente para os antigos algebristas, e que lhes fez, inutilmente, aumentar os cálculos tratando separadamente estas raízes que designaram de “falsas”[87] (Vuillemin, 1987, p. 129). Ainda no livro III Descartes apresenta alguns exemplos de redução de equações cúbicas ou do quarto grau, referentes a *problemas planos*[88], através da sua divisão por um binómio[89] ou pelo método dos coeficientes indeterminados. De seguida o autor expõe o seu método de construção geométrica das raízes de qualquer equação cúbica ou do quarto grau, referentes a *problemas sólidos*, utilizando a intersecção entre uma parábola e um círculo. Escreveu essas equações nas formas[90]

$$z^4 = \pm apz^2 \pm a^2qz \pm a^3r \quad \text{e} \quad z^3 = \pm apz \pm a^2q,$$

observando que esta última resulta da anterior atribuindo o valor zero ao parâmetro r .

Após atribuir a unidade ao parâmetro a, Descartes reescreveu as equações anteriores nas formas $z^3 = \pm pz \pm q$ e $z^4 = \pm pz^2 \pm qz \pm r$, sendo p , r e q

---

[87] Foi a *Geometria* de Descartes que deu a conhecer o uso das raízes negativas; foi um dos maiores avanços, resultante da aplicação da Álgebra à Geometria, que devemos àquele matemático (Vuillemin, 1987, p. 129).

[88] Construíveis com régua e compasso, como por exemplo as equações do segundo grau.

[89] O processo de dividir um polinómio por $x-\alpha$, sendo α uma raiz conhecida, o qual permite reduzir o grau de uma equação, foi explicado pela primeira vez por Descartes (Katz, 2010, p. 562).

[90] Descartes assume que cada equação está privada do seu segundo termo, resultado obtido pelo método de transformação das raízes sem conhecer o seu valor. Consultar o referido método em Smith (1954, p. 167).

quantidades positivas. Com o objetivo de expor, em linhas gerais, o método “standard” deste matemático francês, apresentam-se, sucintamente, as linhas orientadoras da construção geométrica das suas raízes. Para clarificar melhor tais procedimentos, iremos, sempre que possível, aproximar a Geometria Analítica atual ao pensamento expresso na *Geometria*. Como já foi referido neste trabalho, Descartes, tal como Fermat, fazia uso de um “sistema uniaxial”, que à luz dos nossos dias consideramos como um dos semieixos positivos de um sistema de coordenadas (retangular).

Supõe-se representada a parábola FAG de lado reto a (neste caso, unitário), fazendo coincidir o seu vértice A com a origem de um sistema coordenado cartesiano retangular e considerando o eixo de simetria AL um dos eixos coordenados. (Fig. 30, 31 e 32). Toma-se o ponto C em AL de tal modo que $AC = \frac{a}{2} = \frac{1}{2}$ e de seguida marca-se o ponto D abaixo (Fig. 30 e 31) ou acima (Fig. 32) do ponto A, consoante na equação se tiver $+p$ ou $-p$, respetivamente, de modo que $CD = \frac{p}{2}$. Seguidamente traça-se, a perpendicular DE em D (ou em C, caso se tenha $p = 0$) e toma-se $DE = \frac{q}{2}$ (ou $CE = \frac{q}{2}$), indiferentemente de um ou do outro lado do eixo. Se $r = 0$, trata-se de uma equação cúbica; representa-se a circunferência de centro no ponto E e raio AE (Fig. 39 e 41) e as raízes são obtidas através da intersecção entre esta circunferência e a parábola FAG. Se $r \neq 0$, a equação é do quarto grau; a partir de A prolonga-se EA (neste sentido) até S de modo que $AS = a = 1$, e marca-se R em sentido contrário de modo que $AR = r$ (Fig. 30, 31 e 32); de seguida traça-se a semicircunferência de diâmetro RS e, elevando em A a perpendicular a ES, ela intersecta esta semicircunferência no ponto H; se r estiver afetado de sinal positivo, as raízes da equação resultam da intersecção entre a parábola e a circunferência de centro no ponto E e raio $EH = EG$ (Fig. 30 e 32); mas, se r estiver afetado de sinal negativo, deverá traçar-se o ponto I tal que $AI = AH$ noutra semicircunferência de diâmetro AE (Fig. 31) e neste caso as raízes da equação são obtidas pela intersecção da parábola com a circunferência de centro E e raio $EI = EG$.

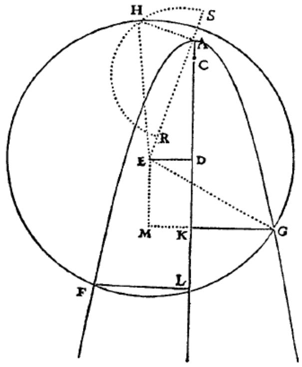

Fig. 30
Construção dos *problemas sólidos*.
Figura extraída de Smith (1954, p. 194)

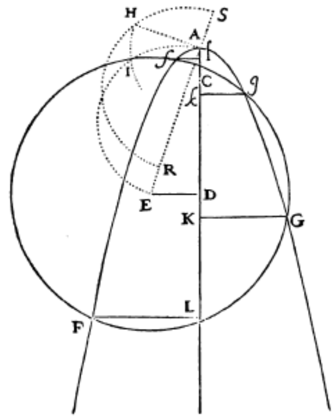

Fig. 31
Construção dos *problemas sólidos*.
Figura extraída de Smith (1954, p. 198)

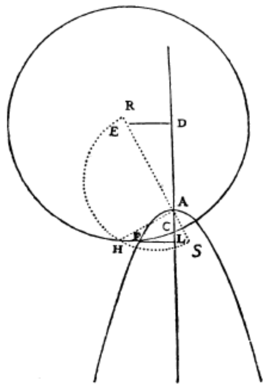

Fig. 32
Construção dos *problemas sólidos*.
Figura extraída de Smith (1954, p. 197)

Após ter exposto os procedimentos de construção, Descartes observa que a circunferência FG intersecta a parábola no máximo em quatro pontos (F, G,...), a partir dos quais, traçando os segmentos perpendiculares ao eixo, se obtêm todas as raízes[91] (GK, FL,...) da equação. O matemático ainda acrescenta que, se q estiver afetado de sinal positivo, as raízes "verdadeiras" (positivas) serão as que se encontram do lado do eixo onde se encontra o ponto E, e as "falsas" (os simétricos das raízes negativas) do outro lado; mas, se q estiver afetado de sinal negativo, as "falsas" estarão do mesmo lado de E.

Descartes conclui a exposição do seu método referindo que se não houvesse intersecção significaria que não existiria nenhuma raiz, "verdadeira" ou "falsa", sendo todas imaginárias. (Smith 1954, p. 200).

Com vista a ilustrar o método, será aqui analisada a resolução gráfica para uma equação geral do tipo $z^4 = pz^2 - qz + r$. Tal como no texto de Descartes, o semieixo positivo das abcissas, Ax, está representado na vertical com sentido para baixo; além disso, optámos[92] por considerar o semieixo positivo das ordenadas, Az, na horizontal para a direita. Observe-se que, neste caso, todos parâmetros p, q e r

[91] Que correspondem, neste caso, às ordenadas dos pontos de intersecção da parábola com a circunferência.

[92] Como consequência desta opção, situar-se-á o ponto E à direita ou à esquerda do semieixo Ax, consoante se tiver $+q$ ou $-q$ na equação, respetivamente.

estão afetados do sinal +, pelo que, de acordo com os procedimentos do método explanado, a sua construção geométrica se enquadra na situação retratada na figura 30. Suponha-se traçada a parábola FAG de vértice A, eixo de simetria AL, e *lado reto* a unitário. Do exposto, KG e FL são as duas raízes reais, sendo KG a raiz positiva e FL a raiz negativa, que resultam da intersecção entre a parábola FAG e a circunferência de centro no ponto E e raio EH.

Tome-se $AC = \frac{a}{2} = \frac{1}{2}$ e, uma vez que se tem $+p$, considere-se $CD = \frac{p}{2}$, com D abaixo do ponto A. Trace-se a perpendicular DE relativamente CD sendo $DE = \frac{q}{2}$, marcado para a esquerda do semieixo. Uma vez que a equação comtempla $+r$, prolongue-se EA de modo que $AS = 1$, marque-se $AR = r$ para o outro lado, e trace-se uma semicircunferência de diâmetro RS. A perpendicular a ES que passa por A intersecta a semicircunferência no ponto H. Representemos a circunferência de centro no ponto E e raio EH; no sistema de eixos considerado, esta circunferência intersecta a parábola no ponto G de ordenada positiva z e no ponto F de ordenada negativa.

Pela proposição *Elementos* III,31 de Euclides, o triângulo RHS é retângulo e pela proposição[93] *Elementos* VI,13, $AH^2 = AS \cdot AR$, donde, $AH^2 = r$. Uma vez que o triângulo EAH é retângulo em A, tem-se pela proposição[94] *Elementos* I,47 a igualdade $EH^2 = AH^2 + AE^2$, da qual resulta $EH^2 = r + \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p+1}{2}\right)^2$. Portanto, a circunferência centrada no ponto E e raio EH tem equação

$$\left(x - \frac{p+1}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{q}{2}\right)^2 = r + \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p+1}{2}\right)^2,$$

ou ainda, $$x^2 - (p+1)x + z^2 + qz = r.$$

Por outro lado, a parábola FAG é traduzida algebricamente pela equação $z^2 = x$.

[93] Proposição *Elementos* VI,13 de Euclides: Num triângulo retângulo, a altura relativa à hipotenusa é meio proporcional entre os segmentos em que o seu pé divide a hipotenusa.

[94] Proposição *Elementos* I47 de Euclides: Em todo o triângulo retângulo o quadrado feito sobre o lado oposto ao ângulo reto, é igual aos quadrados formados sobre os outros lados, que fazem o mesmo ângulo reto.

As ordenadas dos pontos em que a circunferência intersecta a parábola são as soluções de

$$z^4 - (p+1)z^2 + z^2 + qz = r\ ,$$

ou seja, da equação $z^4 = pz^2 - qz + r$.

Assim, fica demonstrado que as ordenadas dos pontos de intersecção da circunferência e da parábola são raízes desta equação. E aplica-se exatamente o mesmo raciocínio para outras formas de equações que representem *problemas sólidos*. Descartes concluiu que podia aplicar o seu método aos outros casos, mas remete essas resoluções ao leitor:

> E se aplicardes este mesmo cálculo a todos os outros casos desta regra, trocando os sinais + e − consoante a necessidade, encontrareis resultados análogos, sem que seja necessário deter-me nisso. Smith (1954, p. 204).

Com o objetivo de clarificar a simplicidade deste método, vamos considerar, num sistema de coordenadas atual, exemplos de três construções geométricas, particularizando valores aos parâmetros p , q e r . Cada construção enquadrar-se-á numa das representações gráficas das figuras 30, 31 e 32.

Para primeiro exemplo considere-se a equação do quarto grau $y^4 = y^2 - 4y + 2$. Observe-se que se tem $+p$, $-q$ e $+r$. E, tendo-se $-q$ «as suas raízes positivas situam-se do outro lado da parábola a que pertence o centro do círculo» (Smith 1954, p. 200), e são obtidas, segundo o método, pela intersecção da circunferência de centro $E(\frac{p+1}{2},-\frac{q}{2})$ e raio EH , sendo $EH^2 = r + \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p+1}{2}\right)^2$, com a parábola de equação $y^2 = x$; situação retratada na Fig. 30, do processo de construção de *problemas sólidos* segundo Descartes.

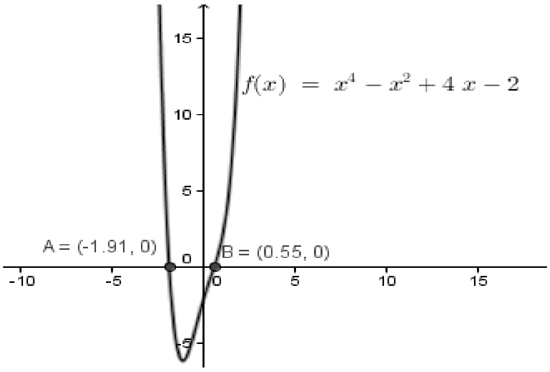

Fig. 33 – Representação gráfica dos zeros da equação $y^4 = y^2 - 4y + 2$.

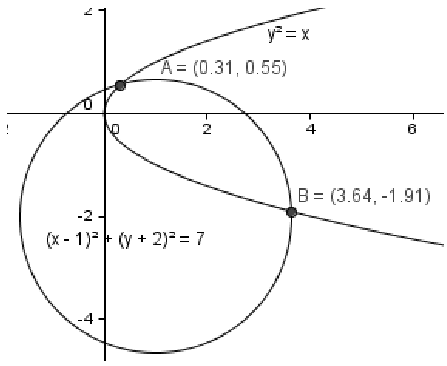

Fig. 34 – Os zeros representados pelas ordenadas dos pontos de interseção das duas curvas: círculo e parábola.

À luz dum sistema atual de eixos, verifica-se graficamente que os zeros (raízes) da equação $y^4 = y^2 - 4y + 2$, representados na figura 33, são dados pelas ordenadas dos pontos A e B (Fig. 34) que resultam da intersecção da (referida) circunferência cuja equação é $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 7$ com a parábola de equação $y^2 = x$. Observemos que da intersecção algébrica das duas curvas, se obtém a igualdade $(y^2 - 1)^2 + (y+2)^2 = 7$, ou ainda, $y^4 - z^2 + 4z - 2 = 0$, ou seja, a equação $y^4 = y^2 - 4y + 2$.

Como segundo exemplo considere-se a equação $y^4 = 7y^2 + y - 10$. Observe-se que, neste caso, se tem $+p$, $+q$ e $-r$. Como se tem $+q$, «as raízes positivas situam-se do mesmo lado da parábola a que pertence o centro do círculo» (Smith, 1954, p. 393). E como se tem $-r$ essas raízes são obtidas pela intersecção da circunferência de centro $E(\frac{p+1}{2}, \frac{q}{2})$ e raio EI, sendo $EI^2 = AE^2 - AI^2$, com a parábola de equação $y^2 = x$; construção retratada na Fig. 31 do processo de construção de *problemas sólidos*. Uma vez que $AH = AI$, conclui-se que $EI^2 = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 - r$.

De modo análogo ao do exemplo anterior, verifica-se graficamente que as raízes da equação $y^4 = 7y^2 + y - 10$ (Fig. 35) são representadas pelas ordenadas dos pontos A e B (Fig. 36) que resultam da intersecção da circunferência de equação $(x-4)^2 + (y-\frac{1}{2})^2 = \frac{25}{4}$ com a referida parábola.

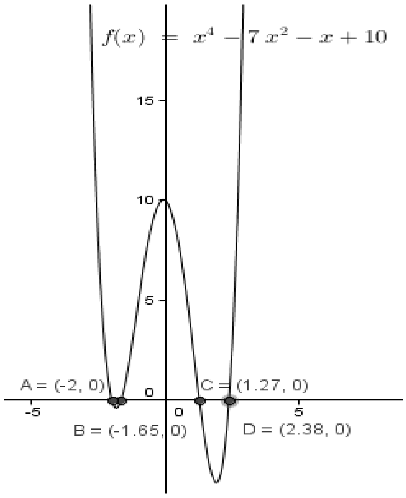

Fig. 35 – Representação gráfica dos zeros da equação $y^4 = 7y^2 + y - 10$.

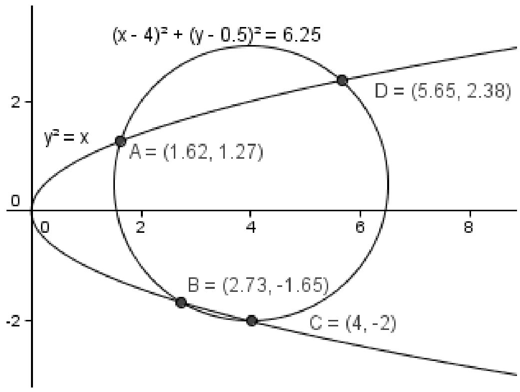

Fig. 36 – Os zeros representados pelas ordenadas dos pontos de interseção das duas curvas: círculo e parábola.

Observe-se que, algebricamente, da intersecção das duas curvas, a parábola e a circunferência, obtém-se a igualdade $(y^2-4)^2 + (y-\frac{1}{2})^2 = \frac{25}{4}$, ou seja, $y^4 - 8y^2 + y^2 - y = -10$, ou ainda, $y^4 = 7y^2 + y - 10$.

Considere-se, por último, a equação $y^4 = -2y^2 - 4y + 1$ e observe-se que se tem $-p$, $-q$ e $+r$. Como se tem $-q$, «as raízes positivas situam-se do outro lado da parábola a que pertence o centro do círculo» (Smith, 1954, p. 393). E, como se tem $-p$, essas raízes são obtidas pela intersecção da circunferência de centro $E(-\frac{p-1}{2}, -\frac{q}{2})$ e raio EH, sendo $EH^2 = r + \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{q}{2}\right)^2$, com a parábola de equação $y^2 = x$; construção retratada na Fig. 32.

Uma vez mais se verifica que os zeros da equação $y^4 = -2y^2 - 4y + 1$ (Fig. 37) são as ordenadas dos pontos A e B (Fig. 38) que resultam da intersecção da circunferência de equação $(x+\frac{1}{2})^2 + (y+2)^2 = \frac{21}{4}$ com a parábola.

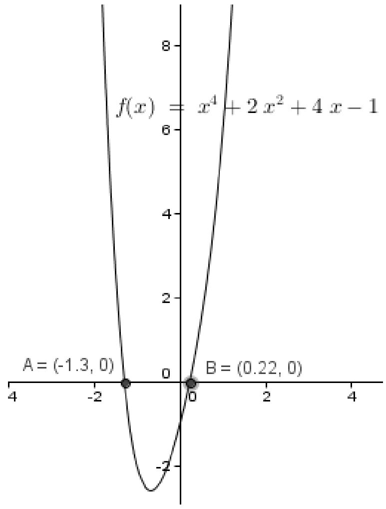

Fig. 37 – Representação gráfica dos zeros da equação $y^4 = -2y^2 - 4y + 1$.

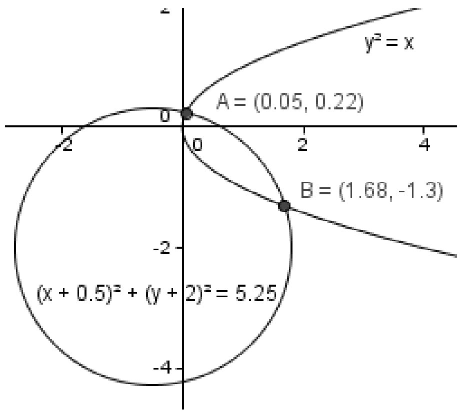

Fig. 38 – Os zeros representados pelas ordenadas dos pontos de interseção das duas curvas: círculo e parábola.

Facilmente se verifica que da intersecção algébrica das equações duas curvas (a parábola e a circunferência) se obtém a igualdade $(y^2 + \frac{1}{2})^2 + (y+2)^2 = \frac{21}{4}$, ou ainda, $y^4 = -2y^2 - 4y + 1$.

3.3.5. Inserção dos dois meios proporcionais

O problema da inserção de dois meios proporcionais entre dois segmentos de reta foi o "veículo" utilizado pela maioria dos geómetras antigos, que procuraram encontrar a solução do problema da duplicação do cubo. Tais problemas estão intimamente relacionados, através *do método de redução* praticado pelos gregos e, como já foi observado neste trabalho, Hipócrates foi um dos matemáticos gregos que reduziram o problema da duplicação do cubo à determinação de dois meios proporcionais, embora, como refere Sousa (2001), existam dúvidas sobre o modo como terá justificado a sua *redução* (p. 56). Os principais conhecimentos históricos que hoje possuímos sobre os referidos problemas advêm do legado de Eutócio de Álcalon, nos seus comentários ao livro II do tratado *Da Esfera e do Cilindro* de Arquimedes. «A descrição de Eutócio consta de cinco longas páginas na edição standard de J.L. Heiberg» (Knorr, 1993, 17) e Knorr, na mesma página, apresenta um breve resumo deste texto de Eutócio. E, como refere Vasconcelos,

> É nos comentários *Sobre a Esfera e o Cilindro* que, depois de ter mencionado a carta de Eratóstenes a Ptolomeu, Eutócio indica os processos de Arquitas, Menecmo, Eratóstenes, e Nicomedes, bem como os métodos usados por Platão, Apolónio, Diocles, Herão, Filão e Esporo, para a *inserção de duas meias proporcionais entre duas retas* (...). (1925, p. 553).

Apesar de os geómetras antigos se terem debruçado sobre os problemas clássicos, e portanto no problema da inserção dos dois meios proporcionais para encontrar a solução da duplicação do cubo, não conseguiram encontrar uma solução através de métodos que faziam apelo exclusivo de retas e círculos. A impossibilidade da existência de uma tal solução, no âmbito da geometria euclidiana, foi abordada por Descartes, como iremos observar e, na opinião de Sousa (2001), talvez se possa dizer que nasceu aqui o germe da prova dessa impossibilidade (p. 93).

Após ter apresentado uma regra geral de construir todos os problemas redutíveis a uma equação do terceiro ou do quarto grau, através da intersecção entre uma parábola e uma circunferência, Descartes aplica este seu método a dois dos problemas clássicos: a inserção de dois meios proporcionais entre dois segmentos de reta quaisquer [95] e a divisão dum ângulo qualquer em três partes iguais, cujas construções geométricas são impossíveis recorrendo unicamente a métodos euclidianos. Descartes afirmou mesmo que todos os problemas não construíveis com régua e compasso, cujas equações não ultrapassem o quarto grau na sua forma irredutível, se reduzem àquelas duas construções, a da inserção de dois meios proporcionais e a da trissecção do ângulo, e concluiu que se podem construir todos estes problemas «sem ter necessidade das secções cónicas para outra coisa que não seja extrair as raízes cúbicas de algumas quantidades dadas, isto é, para encontrar dois meios proporcionais entre estas quantidades e a unidade» (Smith, 1959, p. 211).

A invenção dos dois meios proporcionais entre dois segmentos de reta é um dos exemplos em que Descartes recorre à intersecção entre um círculo e uma parábola para encontrar a sua solução geométrica, uma vez que tal problema se reduz a uma equação (irredutível) do terceiro grau.

[95] Foi através da procura da solução dos problemas como a duplicação do cubo e a inserção de dois meios proporcionais que, na antiga Grécia, curvas como a *cissoide* e a *concoide* foram inventadas por Diocles e Nicomedes (Vuillemin, 1987, p. 133).

Dados dois segmentos de reta a e q, pretende-se determinar os dois meios proporcionais entre eles. Sejam z e z' os dois meios proporcionais entre a e q. Então tem-se

$$\frac{a}{z}=\frac{z}{z'}=\frac{z'}{q}\ .$$

Da primeira igualdade, $\frac{a}{z}=\frac{z}{z'}$, resulta $z'=\frac{z^2}{a}$. Da segunda igualdade, $\frac{z}{z'}=\frac{z'}{q}$, obtém-se, $q=\frac{z'^2}{z}$ e, tendo em atenção $z'=\frac{z^2}{a}$, resulta a relação $z^3=a^2q$. Observe-se que os quatro segmentos de reta a, z, z', q estão em progressão geométrica de razão $\frac{z}{a}$. Concluiu-se, assim, que a inserção de dois meios proporcionais entre dois segmentos de reta quaisquer, a e q, é traduzida pela equação $z^3=a^2q$, sendo z o primeiro dos dois meios proporcionais procurados. Observe-se que a equação $z^3=a^2q$ é um caso particular da equação cúbica $z^3=\pm apz\pm a^2q$, consideradas as condições $p=0$ e q afetado do sinal +.

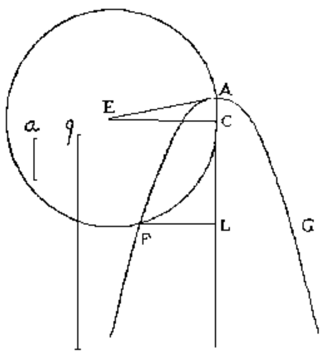

Fig. 39 – Inserção de dois meios proporcionais. Figura extraída de Smith (1954, p. 205)

Seguindo os procedimentos de construção de Descartes, considere-se a parábola FAG com lado reto a, em que o vértice da parábola é a origem de um sistema coordenado cartesiano retangular onde o eixo de simetria um dos eixos coordenados[96] (Fig. 39). Sendo a o lado reto, uma equação da parábola é $z^2=ax$.

[96] Tal como assumido inicialmente.

Considerando $AC = \frac{a}{2}$, trace-se CE perpendicular a AC e tome-se $CE = \frac{q}{2}$. Represente-se a circunferência de centro E e que passa por A. Da representação gráfica, verifica-se que a intersecção se dá nos pontos F e na origem, o ponto A. Os dois meios proporcionais entre os segmentos a e q são os representados graficamente pelos segmentos FL e AL, como refere Descartes.

Neste sistema de coordenadas tem-se o ponto $E\left(\frac{a}{2},\frac{q}{2}\right)$. Uma equação da circunferência de centro E e que passa por A é dada por,

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(z-\frac{q}{2}\right)^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{q}{2}\right)^2,$$

ou seja, pela igualdade, $x^2-ax+z^2-qz=0$.

As ordenadas dos pontos de intersecção das duas curvas são dadas pelo sistema:

$$\begin{cases} z^2 = ax \\ x^2-ax+z^2-qz=0 \end{cases}$$

ou seja, pela equação $z^4 = a^2qz$, ou ainda, $z^3 = a^2q$. Saliente-se que, como já foi referido neste trabalho, Descartes considera uma equação cúbica como uma equação do quarto grau em que uma das suas raízes é nula; aliás, basta observar que no gráfico que apresenta (Fig. 39) as duas curvas se intersectam, também, na origem.

Ficou assim demonstrado que os dois meios proporcionais entre os segmentos a e q podem ser encontrados pela intersecção de uma circunferência com uma parábola. Observe-se que, atendendo às características da referida parábola (em que $FL^2 = a.AL$), tem-se $\frac{a}{FL}=\frac{FL}{AL}=\frac{AL}{AL\cdot\frac{FL}{a}}$, ou, $\frac{a}{z}=\frac{z}{z^2\div a}=\frac{z^2\div a}{z^3\div a^2}$.

Tendo-se encontrado graficamente os dois meios proporcionais FL e AL, tem-se $FL=\sqrt[3]{a^2q}$ e $AL=\frac{FL^2}{a}$.

A impossibilidade da resolução dos problemas clássicos (um dos quais *reduzido* ao da inserção de dois meios proporcionais) depende da teoria das equações cúbicas, conceitos algébricos que se foram desenvolvendo ao longo de vários séculos.

A prova dessa impossibilidade foi esclarecida depois dos trabalhos de Abel (1802-1829) e Gauss (1777-1855) que envolviam a resolução de equações algébricas por meio de radicais.

3.3.6. Trisseção do ângulo

O problema da trissecção do ângulo foi objeto de estudo desde a Antiga Grécia. O desígnio dos geómetras gregos na resolução deste problema era chegar à solução por métodos planos, isto é, utilizando somente a régua não graduada e o compasso, mas nunca o conseguiram[97].

Papo de Alexandria, no Livro IV da *Coleção Matemática,* escreveu que os geómetras gregos foram incapazes de resolver este problema usando apenas métodos planos, isto é, apenas linhas recas e circunferências, pelo facto de o problema não ser *plano* mas sim *sólido*; acrescentou que o problema ficou na incerteza, uma vez que os primeiros geómetras não estavam familiarizados com as secções cónicas, conforme refere Sousa (2001, p. 15). Alvo de estudo e de debates ao longo dos anos, a impossibilidade de resolução deste problema clássico, nas condições colocadas, isto é, apenas com régua não graduada e compasso, teve a sua demonstração efetiva apenas no século XIX pelo matemático francês Pierre Laurent Wantzel, no artigo *Recherches sur les Moyens de Reconnaître si um Problème de Géométrie Peut se Résoudre avec la Règle et le Compas*, publicado em 1837, no *Jounal des Mathématiques Pures et Appliquées* (2, pp. 366-372). Descartes traduziu este problema em linguagem algébrica através da equação $z^3 = 3z - q$ e, uma vez que se trata de uma equação de grau três, usou o seu método para representar graficamente as suas raízes. Observe-se que esta equação representa um caso particular da família de equações do terceiro grau consideradas por Descartes, em que $p = 3$ e q é afetado de sinal negativo.

Para obter a referida equação cúbica, Descartes começa por supor o problema resolvido, isto é, que o ângulo NOP (Fig. 40), o ângulo agudo dado que se pretende trissectar, está dividido em três ângulos iguais, isto é, $N\hat{O}Q = Q\hat{O}T = T\hat{O}P$. Considera

[97] No período compreendido entre o séc. VI a. C. e o século Vd.C. apareceram várias soluções para este problema clássico, mas que não estavam de acordo com os requisitos de utilizar unicamente os instrumentos euclidianos (Sousa, 2001, pp. 15-16).

o vértice do ângulo NOP coincidente com o centro de uma circunferência de raio NO unitário e, de seguida, traça a corda NP , subtendendo o ângulo dado, e traça também QS paralelamente a TQ.

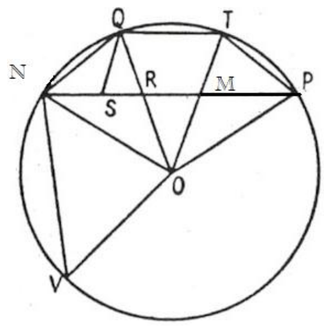

Fig. **40** – Análise da trisseção do ângulo.

Comecemos por ver que os triângulos NOQ, NQR e QRS são semelhantes. Ora, $Q\hat{N}S = Q\hat{N}P$ e $P\hat{O}Q = 2 \times N\hat{O}Q$ uma vez que $N\hat{O}Q = Q\hat{O}T = T\hat{O}P$; pela proposição *Elementos* III, 20 de Euclides $P\hat{O}Q = 2 \times Q\hat{N}P$, donde $Q\hat{N}S = N\hat{O}Q$; uma vez que têm o ângulo Q em comum, os triângulos NOQ e NQR são semelhantes. Por outro lado, por construção, verifica-se $S\hat{Q}R = Q\hat{O}T$, pois são ângulos alternos internos determinados por OQ nas paralelas OT e QS; mas como $Q\hat{O}T = N\hat{O}Q$, então $S\hat{Q}R = N\hat{O}Q$; uma vez que têm o ângulo R em comum, os triângulos NQR e QRS são semelhantes. Do exposto conclui-se que os triângulos NOQ, NQR e QRS são semelhantes entre si[98]. Pela proposição *Elementos* VI,4 de Euclides, os seus lados correspondentes são proporcionais, verificando portanto a igualdade

$$\frac{NO}{NQ} = \frac{NQ}{QR} = \frac{QR}{RS}.$$

Donde se conclui que NQ e QR são dois meios proporcionais entre NO e RS.

Atendendo a que $NO = 1$, $NQ = z$, da dupla proporcionalidade acima facilmente resulta $QR = z^2$ e $RS = z^3$.

[98] E portanto, em particular, são todos isósceles, por o triângulo NOQ o ser.

Seja também $NP = q$, e designe-se por M o ponto de intersecção do raio OT com a corda NP. Temos então:

$$NP = NR + RM + MP = 2NQ + RM = 2NQ + SM - RS = 3NQ - RS \ ,$$

ou seja, $q = 3z - z^3$, sendo $z = NQ$ a quantidade procurada graficamente. Nesse sentido, o problema geométrico da trissecção do ângulo é traduzido algebricamente pela equação cúbica, $z^3 = 3z - q$, onde q é uma quantidade positiva menor do que dois.

Como tem sido registado, Descartes representa graficamente as raízes da equação recorrendo à intersecção de uma circunferência com uma parábola. Assim, começa por considerar traçada a parábola $FAgG$ (Fig. 41), cujo *lado reto* é o dobro de AC, isto é, $AC = \frac{a}{2} = \frac{1}{2}$, e em que $CD = \frac{p}{2} = \frac{3}{2}$. Nestas condições, a parábola tem por equação $z^2 = x$. De seguida, traçando DE perpendicularmente a AD e tomando $DE = \frac{NP}{2}$, ou seja, $DE = \frac{q}{2}$, Descartes representa a circunferência de centro E que passa pelo ponto A. Após esta construção, Descartes faz notar que a circunferência intersecta a parábola nos três pontos F, g e G (sem contar com o ponto A que é o vértice[99]), sendo que, a equação cúbica $q = 3z - z^3$ tem como raízes, gk, GK e FL, observando-se que as duas primeiras são positivas e a terceira negativa. O autor acrescenta que a menor das raízes positivas, obtida através do ponto de intersecção g da circunferência com a parábola, é o valor que se procura: $gk = z = NQ$.

Com efeito, a circunferência de centro E e raio AE tem equação

$$(x-2)^2 + \left(z + \frac{q}{2}\right)^2 = 4 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 .$$

Considerando a intersecção das duas curvas: $\begin{cases} z^2 = x \\ (x-2)^2 + \left(z + \frac{q}{2}\right)^2 = 4 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 \end{cases}$

[99] Como já foi observado no presente trabalho, Descartes considera uma equação de grau três como uma de grau quatro que tem zero como uma das raízes, sendo que o círculo intersecta sempre a parábola no vértice.

obtém-se a equação: $$z^4 + qz = 3z^2 .$$

Observe-se que as soluções desta equação incluem o ponto A , de coordenadas nulas. Eliminando a solução nula, obtém-se a equação cúbica $z^3 = 3z - q$, ficando, assim, provado que o problema da trissecção de um ângulo pode ser traduzido algebricamente por esta equação. Encontrou-se, deste modo, o segmento NQ que, no círculo de centro O e de raio unitário, é corda dum ângulo igual à terça parte do ângulo NOP .

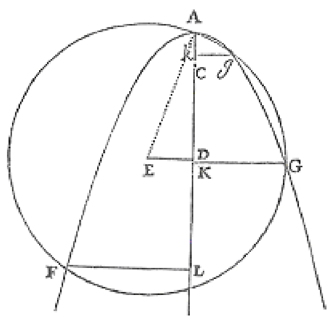

Fig. 41 – Construção geométrica da trisseção do ângulo. Figura extraída de Smith (1954, p. 206)

Descartes conclui que a menor das raízes, $gk = NQ$, que é a «linha procurada» (Smith, 1954, p. 397), é a corda do ângulo agudo NOQ (Fig. 40), enquanto $GK = NV$ seria a corda da diferença entre o ângulo giro e o ângulo agudo NOP .

Após ter resolvido os problemas da inserção de dois meios proporcionais entre dois segmentos de reta e da trisseção do ângulo, Descartes fez notar que todos os *problemas sólidos* se podem reduzir a estas duas construções:

> Será supérfluo deter-me a dar aqui outros exemplos, pois todos os problemas que não são mais que sólidos se podem reduzir a tal ponto que não se tenha nenhuma necessidade desta regra para os construir, exceto de ela servir para encontrar as duas médias proporcionais, ou para dividir um ângulo em três partes iguais (Smith, 1954, p. 208).

De seguida o matemático concluiu que qualquer equação cúbica se reduz a alguma das seguintes $z^3 = -pz + q$, $z^3 = pz + q$, $z^3 = pz - q$ e examinou as suas condições de irredutibilidade[100]. Clarificou que as desigualdades, $\frac{q^2}{4} < \frac{p^3}{27}$, $\frac{q^2}{4} > \frac{p^3}{27}$ e $\frac{q^2}{4} < \frac{p^3}{27}$, oferecem as condições necessárias, para que as raízes daquelas equações, respetivamente, sejam unicamente reais. Observe-se que o matemático não analisa o caso $z^3 = -pz - q$, pois reduz-se ao primeiro mediante a transformação $z = -y$.

Descartes mostrou ainda como resolver equações de grau superior a quatro e inferior ou igual a seis, intersectando um círculo com uma curva construída por uma das suas máquinas (uma curva de grau mais elevado ao de uma parábola), mas que não será aqui abordado uma vez que se encontra fora do âmbito desta dissertação.

Embora tenha descrito brevemente os seus métodos e os tenha aplicado a poucos exemplos, o Matemático francês acreditava que bastava seguir o seu método para construir todos os problemas de grau cada vez complexos, *ad infinitum* (Katz, 2010, p. 564); Descartes revela-o ao escrever no final da sua *Geometria*:

> Pois em matéria de progressões matemáticas, quando de têm os dois ou os três primeiros termos, não é difícil encontrar os outros. E espero que os nossos descendentes me estarão agradecidos não só pelas coisas que aqui expliquei, mas também por aquelas que omiti voluntariamente a fim de deixar-lhes o prazer de inventá-las. (Smith, 1954, p. 240).

Apesar de durante o resto do século vários matemáticos terem tentado generalizar os métodos de Descartes, aperceberam-se que os métodos algébricos assim como as novas ideias do cálculo eram mais adequados para resolver problemas geométricos, até mesmo aqueles nos quais Descartes aplicou as suas técnicas de construção.

[100] A condição de irredutibilidade, aqui, não significa a insolubilidade algébrica mas sim fazer o apelo unicamente às soluções reais.

Epílogo

A Geometria Analítica não foi uma invenção espontânea por parte de dois grandes matemáticos, Fermat e Descartes, mas sim uma construção gradual que remonta a cerca de dois mil anos antes.

Com as limitações impostas pelo carácter e pela natureza da Geometria grega, como sejam a da linguagem retórica, a da estruturação sintética, e a da ausência de Álgebra simbólica, tanto Menecmo como sobretudo Apolónio já tinham conseguido uma parte daquele que é o princípio fundamental da Geometria Analítica. No grande tratado geométrico *Cónicas*, por exemplo, Apolónio fazia corresponder a uma curva plana uma propriedade característica, o *sintoma*, que pode ser traduzida por uma equação com duas incógnitas num sistema de coordenadas. Contudo, a Álgebra ainda não tinha atingido um desenvolvimento suficiente para permitir operar de maneira cómoda sobre a expressão das propriedades características das curvas. E outras contribuições importantes, como as de Diofanto ou as de Oresme, sofreram das mesmas limitações. Foram avanços apenas pontuais, que não chegaram a dar o passo decisivo na direção da Geometria Analítica.

A Álgebra renascentista proporcionou a Descartes e a Fermat ferramentas muito mais eficientes, que tornaram possível a generalização de resultados anteriormente obtidos. Com recurso à *Arte Analítica* de Viète, que desempenhou um papel preparatório e impulsionador no desenvolvimento das interligações entre problemas geométricos e métodos algébricos, aqueles dois matemáticos franceses do século XVII encontraram uma frutuosa correspondência entre Geometria e Álgebra, ao estabelecerem que uma equação arbitrária com duas incógnitas, num determinado sistema de coordenadas, determina uma curva no plano e, reciprocamente, que uma curva plana tem, associada a um determinado sistema de coordenadas, uma equação com duas incógnitas.

Terá a Geometria Analítica herdado o seu nome da Análise dos gregos? Tanto Descartes como Fermat aplicaram nos seus trabalhos, embora de forma diferente, os procedimentos do método analítico dos gregos: começar por *assumir como certo aquilo que se quer provar*. A partir dos princípios metodológicos da Geometria grega, teve lugar o nascimento de obras como a *Geometria* de Descartes e a *Ad Locos Planos et Solidos Isagoge* de Fermat, que conseguem, de forma implícita, conter o ponto de partida – a própria Geometria grega. Para alcançarem tais proezas, Fermat e Descartes utilizaram a Álgebra, um poderoso instrumento de que a Geometria grega não pôde usufruir. Quando Descartes e Fermat, com base nas ideias de Viète, aplicaram todo o potencial algorítmico da Álgebra vinda dos árabes e dos renascentistas, a Análise alcançou o seu máximo poder na resolução de problemas geométricos, alguns dos quais tinham resistido aos métodos clássicos. A intervenção da Análise algébrica como procedimento metodológico foi crucial para o progresso da Matemática, nomeadamente para a Geometria Analítica, na medida em que foi o facto de se complementar a síntese geométrica com a análise algébrica que permitiu àqueles matemáticos franceses transitar da Geometria à Álgebra e da Álgebra à Geometria.

Por que razão se fala em Geometria cartesiana e não em Geometria fermatiana? Será por questões de desigual difusão da *Introdução* e da *Geometria*? Ou de originalidade? Ou de prioridade de divulgação? Os motivos apresentados por Quintero (2001) apontam para uma diferente divulgação, na época, alcançados pelos trabalhos de Fermat e de Descartes. Fermat era avesso a publicar, apesar de não recusar a fama de que merecidamente gozava entre os europeus da sua época; a maioria dos seus trabalhos dispersos em cartas, em notas e em breves manuscritos, muitos dos quais cópias únicas, foram apenas publicados postumamente pelo seu filho, e a *Introdução aos Lugares Planos e Sólidos* foi publicada em 1679, como parte de uma coleção intitulada *Opera matemática varia.* (p. 44). Embora o trabalho de Fermat tivesse circulado por toda a Europa e fosse apresentado de forma clara, nunca teve a influência de uma obra publicada; em oposição, a obra de Descartes, considerada de difícil leitura, foi publicada em francês, em vez do usual latim Katz (2010, pp. 555-556). Quintero defende que a ampla difusão gozada pela *Geometria*, publicada em 1637, em contraste com a *Introdução*, é em larga medida atribuída ao trabalho de Frans van Schooten, professor em Leiden, que traduziu a obra de francês para latim. Esta primeira tradução apareceu em 1649, complementada de comentários de Florimond Debeaune (1601-1652) e do próprio tradutor (2001, p. 44). Posteriormente, uma edição de 1559-1661 além de conter escritos de van Schooten e notas de Florimond Debeaune, também incluiu comentários de Christian Huygens e exposições didáticas da Geometria Analítica de Jan de Witt que tinha estudado com van Schooten (Katz, 2010, p. 556).

Boyer (1994) aponta razões de prioridade de publicação das obras, ao escrever que, como a ideia de Fermat, exposta em *Ad Locus Planos et Solidos Isagoge*, só foi publicada em 1679, isso levou a que na mente de muitos a Geometria Analítica fosse considerada invenção, unicamente, de Descartes (p. 254).

Outras razões para o sucesso da abordagem de Descartes podem encontrar-se em aspetos técnicos da sua obra. Logo no começo da *Geometria*, Descartes aritmetizou os segmentos de reta, o que lhe permitiu ultrapassar o princípio grego da homogeneidade, a que Fermat se manteve sempre fiel. Logo de seguida, utilizando uma notação simbólica mais clara e simples do que a do seu contemporâneo, algebrizou esses mesmos segmentos. Descartes fez com que as antigas técnicas euclidianas adquirissem uma roupagem completamente moderna na sua utilização clara de técnicas algébricas.

Apesar de terem ambos elaborado sobre os trabalhos de Viète, que abriram portas para a compreensão da Análise dos gregos, e apesar de terem ambos concebido e proposto essencialmente a mesma ligação básica entre curvas geométricas do plano e equações algébricas com duas incógnitas, Fermat limitou-se a descrever as curvas associadas às equações do primeiro e do segundo grau, enquanto Descartes teve o desejo de trabalhar com equações polinomiais de grau mais elevado. Na verdade, as Geometrias Analíticas de Fermat e de Descartes são diferentes, porque foram escritas com objetivos diferentes. Motivado pela tentativa de reconstituição de obras antigas perdidas, o intuito de Fermat era apenas o de propor um novo estudo, de carácter algébrico, dos *lugares geométricos*. A ambição de Descartes era mais vasta, pois pretendia demonstrar a aplicação à Geometria dos seus métodos, baseados em princípios filosóficos autoevidentes discutidos no *Discurso do Método*. Enquanto Fermat, na *Introdução aos lugares Planos e Sólidos*, fez a afirmação clara de que uma equação com duas incógnitas determina uma curva, e aplicou este princípio, isto é, a partir da equação descreveu a curva, Descartes, na *Geometria*, partia da descrição geométrica da curva para deduzir a respetiva equação. Neste sentido, dada a natureza das curvas com que trabalhou, Descartes foi mais longe, pois viu-se obrigado a lidar com equações algébricas consideravelmente mais complexas do que as do seu contemporâneo, bem como a obter a construção geométrica das raízes dessas equações algébricas. Sem dúvida que, só depois da larga contribuição dada por Descartes e Fermat à Geometria Analítica, é que esta ganhou os contornos iniciais da forma com que estamos familiarizados (Eves, 1997, p. 383).

A maioria dos matemáticos europeus aderiu ao trabalho pioneiro daqueles matemáticos franceses, apesar da evolução deste novo ramo da matemática ter sido relativamente lenta. Passados dois anos após a primeira publicação da *Geometria*, Girard Desargues e Blaire Pascal deram o seu contributo para o seu desenvolvimento, com os seus primeiros escritos de Geometria projetiva (Estrada et al., 2000, p. 562). Jan de Witt, no seu tratado *Elementos de Curvas*, de 1646, tratou o tema das cónicas tanto de um ponto de vista sintético como de um ponto de vista analítico, usando a notação de Descartes, embora a metodologia próxima de Fermat (Katz, 2010, p. 556). As palavras *coordenadas*, *abcissa* e *ordenada*, no sentido técnico que têm hoje, foram contribuições de Leibnitz em 1692 (Eves, 1997, p. 388). Apenas com Isaac Newton (1691-1693) é que surgiu o uso explícito de coordenadas cartesianas negativas e a expressão *Geometria Analítica* foi escrita pela primeira vez na obra *Cours de Mathématiques*, de 1796-1799, da autoria de Sylvestre François Lacroix (Estrada et al., 2000, p. 562).

Bibliografia

- **Aymes J.** (1988) – *Ces Problèmes Qui font Les Mathématiques (La Trisection de LÂngle),* Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public, Paris.
- **Bos H. J. M** (2001) – *Redefining Geometrical exactness-Descartes' Transformation of the Early Modern Concept of Construction,* Sources and Studies Editor, Springer-Verlag New York, Inc.
- **Boyer C.** (1956) – *History of Analytic Geometry,* New York: scripta Mathematica
- **Boyer C.** (1994) – *História da Matemática,* 11ª Edição, Editora Edgard Blùcher, São Paulo.
- **Busard H.** (1991) – *Biographical Dictionary of Mathematicians: Reference Biographies from the Dictionary of Scientific Biography,* New York.
- **Cajori, F.** (1991) – *A History of Mathematics*, Chelsea, New York.
- **Chasles M.** (1875) – *Aperçu Historique sur l'Origine et Développement des Méthodes en Géométrie,* Gauthier-Villars, Paris.
- **Colette JP.** (1981) – *História de Las Matemáticas,* Madrid, Siglo de vientiuno de España Editores.
- **Collette JP.** (1997) – *Histoire des Mathématiques,* Montréal, Édition de Renouveau Pédagogique.
- **Coolidge J.** (1936) – *The Origin of Analytic Geometry,* Osiris, University Chicago Press (pp .231-250).
- **Coolidge J.** (1940) – *A History of Geometrical Methods*, Clarendon Press, Oxford.
- **Cow J.** (1968) – *A Short History of Greek Mathematics*, Chelsea, New York.
- **Dedron, P e Itard, J.** (1959) – *Le Père des Mathématiques Modernes: François Viète,* em *Mathématiques et Mathématiciens,* 173-185, Paris.
- **Dedron P. & Itard, J.** (1959) – *Mathématiques et Mathématiciens,* Magnard, Paris.
- **Descartes R.** (1637) – *La Géométrie,* Editora Edgard Blucher, *São Paulo.*

- **Descartes R.** (2000) – *O Discurso sobre o Método,* 9ª Edição, Hemus Editora SA, Brasil.
- **Descartes R.** (1953) – *Rules for the direction of the Mind,* tradução de Elizabeth S. Haldane e G.R.T. Ross, Great Books edition, Chicago: Encyclopedia Britannica.
- **Estrada F. et al.** (2000) – *História da Matemática* – Estrada, M. & Sá, C. & Queiró, J. & Silva, M. & Costa, M. Universidade Aberta, Lisboa.
- **Garbi G.** (2009) – *A Rainha das Ciências*, Gilberto Geraldo Garbi, 3ª Edição, Editora Livraria da Física, S. Paulo.
- **Gil P.** (2001) – *François Viète: o despontar da Álgebra simbólica*, Tese de Mestrado, FCUP, Departamento de Matemática pura.
- **Heath T. L** (1981) – *A History of Greek Mathematics,* Dover, New York.
- **Heath T. L** (1912) – *The Thirteen books of Euclid's Elements,* Cambridge, vol.2 (reedição de Dover, 1956).
- **Hoefer F.** (1874) – *Histoire des Mathématique depuis leurs origines jusqu'au commencement du dix-neuvième siècle*, Paris.
- **Howard E.** (1997) – *Introdução à História da Matemática,* Editora da Unicamp, São Paulo.
- **Katz V**. (2010) – *História da Matemática:* Fundação Calouste Gulbenkian.
- **Katz V**. (1998) – *A History of Mathematics: an Introduction,* Addison-Wesley, Reading.
- **Kline M.** (1972) – *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times,* Oxford University Press.
- **Knorr W.** (1993) – *The Ancient Tradition of Geometric Problems,* Dover, New York.
- **Lopes E.** (2001) – *Descartes A Geometria,* Tradução de Emídio César de Queiroz Lopes, Editorial Prometeu, Lisboa.
- **Mahoney M.** (1994) – *The Mathematical Career of Pierre Fermat*, Princeton University Press, Princeton.

- **Mahoney M.** (1968) – *Another Look at Greek Geometrical Analysis*, Archive for History of Exact Sciences, 5, pp. 318-348.
- **Peyrard F.** (1819) – *Les Oeuvres d'Euclides,* Blanchard.
- **Quintero R.** (1996) – *Arte Analítico e imaginación en « La Geometría » de Descartes*, Tesis Doctoral, DME, Cinvestav.
- **Quintero R.** (2001) – *La Invención de Fermat de la Geometría Analítica*, Miscelánea Matemática 34, pp. 43-58, SMM, Sección de Metodología y Teoría de la Ciencia, Cinvestav, IPN.
- **Sá C.** (2007) – *História da Matemática Grega*, apontamentos das aulas fornecidas pelo Professor Doutor Carlos Correia de Sá. Departamento de Matemática pura da FCUP.
- **Silva J.** (2000) – *A Matemática na Antiguidade,* SPM, Lisboa.
- **Smith D.** (1929) – *A Source Book in Mathematics*, New York: McGraw Hill.
- **Smith D.** (1958) – *History of Mathematics,* Dover, New York.
- **Smith D. & Latham M.** (1954) – *The Geometry of René Descartes, with a Facsimile of the First Edition,* Dover, New York.
- **Sousa J. (2001) –** *Trissecção do ângulo e duplicação do cubo: as soluções na Antiga Grécia,* Tese de Mestrado, FCUP, Departamento de Matemática pura.
- **Struik D.** (1986) – *A Source Book in Mathematics*, 1200-1800. Princeton University Press, Princeton.
- **Struik D.** (1997) – *História Concisa das Matemáticas,* Gradiva, Lisboa.
- **Tannery P.** (1887) – *La Géométrie Grèque: Comment son Histoire est Parvenue et ce que Nous en Savons*, Gauthier-Villars, Paris.
- **Tannery P.** (1891) – *Oeuvres de Fermat*, Tome Premier, Gauthier-Villars, Paris.
- **Tannery P.** (1896) – *Oeuvres de Fermat*, Tome Troisième, Gauthier-Villars, Paris.
- **Tannery P.** (1912) – *Oeuvres de Fermat*, Tome Quatrième, Gauthier-Villars, Paris.
- **Toome J.** (1991) – *Apollonius of Perga,* Biographical Dictionary of Mathematicians: Reference Biographies from the Dictionary of Scientific Biography, Charles Scribner, New York, 1, pp. 66-80.

- **Urbaneja M.** (2003) – *Los Orígenes de la Geometria Analítica*, Fundación Canaria Orotava de Historia de la Ciência.
- **Vasconcelos F.** (1925) – *História das Matemáticas na Antiguidade*, Aillaud e Bertrand, Lisboa.
- **Vaulézard J.** (1986) – *La Nouvelle Algèbre de M. Viète*, Paris.
- **Vincenzo B.** (2007) – *Étude Historique Des Premières Caractérisations Des Coniques*, Revista Brasileira da História da Matemática, vol. 7, nº14.
- **Vuillemin J.** (1987) – *Mathématiques et métaphysique chez Descartes*, Presses Universitaires de France, Boulevard Saint-Germain.
- **Zeuthen H.** (1902) – *Histoire des Mathématiques dans L'antiquité et le moyen age,* Paris.

Outro tipo de fontes que serviram de apoio a este trabalho:

- http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html
- http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/
- www.storyofmathematics.com/17th_descartes.html
- http://www.britannica.com/EBchecked/topic/204668/Pierre-de-Fermat
- http://www.atractor.pt/geral/fr-emails.htm