

FACULDADE DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE DO PORTO



FEUP

Propagação de Sinais em Meios Lambda

Suzana Karina Silva Vale

Mestrado Integrado em Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Orientador: Maria Inês Barbosa Carvalho (Prof^a Dr^a)

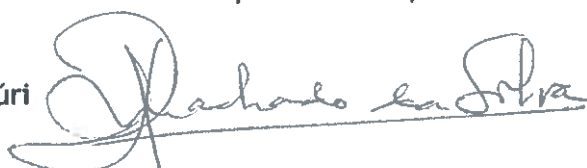
25 de Julho de 2012

A Dissertação intitulada

“Propagação de Sinais em Meios Lambda”

foi aprovada em provas realizadas em 25-07-2012

o júri



Presidente Professor Doutor José Alberto Peixoto Machado da Silva
Professor Associado do Departamento de Engenharia Eletrotécnica e de
Computadores da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto



Professora Doutora Margarida Maria Resende Vieira Facão
Professora Auxiliar Departamento de Física da Universidade de Aveiro



Professora Doutora Maria Inês Barbosa de Carvalho
Professora Associado do Departamento de Engenharia Eletrotécnica e de
Computadores da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto

O autor declara que a presente dissertação (ou relatório de projeto) é da sua exclusiva autoria e foi escrita sem qualquer apoio externo não explicitamente autorizado. Os resultados, ideias, parágrafos, ou outros extratos tomados de ou inspirados em trabalhos de outros autores, e demais referências bibliográficas usadas, são corretamente citados.



Autor - Suzana Karina Silva do Vale

Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto

Resumo

Meios com transparência eletromagneticamente induzida (EIT) têm sido largamente estudados devido às suas vantagens promissoras em inúmeras aplicações e a possuírem ressonâncias muito estreitas, o que tem muito interesse em sistemas de medições, possuir uma suscetibilidade não linear muito elevada na região espectral de transparência induzida, o que permite uma vasta gama de aplicações na área da eletrônica. O efeito de *Giant Kerr* e a propagação de *Slow Light* são dois fenômenos causados pelo EIT que têm grande importância em diversos estudos óticos atualmente.

Neste trabalho de dissertação procurou-se estudar o funcionamento de um meio do tipo Lambda, que é a maneira mais simples de se obter transparência eletromagneticamente induzida, tendo-se implementado alguns algoritmos de simulação de propagação de sinais em meios do tipo Lambda. Estes testam o comportamento do sistema Lambda em questão para vários sinais de entrada e vários sinais de controle. Termina-se o documento através de uma análise sobre o trabalho desenvolvido e sugerindo futuros desenvolvimento e vantagens que estes trazem.

Abstract

Electromagnetically induced transparency (EIT) media have been largely studied due to its promising advantages in many applications due to because of their very narrow resonances, which have great interest in measurement systems, and a very high nonlinear susceptibility in the spectral region of induced transparency, which allows a wide range of applications in electronics. The Giant Kerr effect and Slow Light propagation are two phenomenons caused by the EIT that have great importance in many optics studies nowadays.

In this thesis we tried to study the behavior of a type Lambda medium, which is the simplest way of obtaining electromagnetically induced transparency, having implemented some signal propagation simulation algorithms in Lambda type mediums. These test the behavior of the Lambda system in question for various input and control signals. The document ends up with an analysis of the developed work and suggestions of future developments and advantages that this type of medium brings.

Agradecimentos

Agradeço acima de tudo aos meus pais, por tudo que fizeram por mim, dando sempre o melhor que puderam para o meu futuro, à minha avó, Lucinda, pela enorme dedicação que teve a nós, seus filhos e netos, toda a sua vida. Ao meu avô, Sérgio, estou grata por sempre ter mostrado o seu apoio. Ao meu irmão agradeço a amizade e atenção que sempre teve comigo.

À professora Isabel Maria Ferreira, devo a inspiração, motivação e força que me deu numa fase bastante difícil, a minha gratidão a ela e às suas palavras é e sempre será enorme. Sempre pensei dizer-lhe isto um dia que acabasse o curso, infelizmente não será possível, mas o sincero agradecimento fica neste documento registrado.

A minha orientadora, professora Maria Inês Carvalho, foi de extrema importância, pois sem esta nada seria possível. Agradeço-lhe toda a paciência, ajuda, motivação, orientação e desde a primeira aula que tive com esta, a inspiração, para além das aulas e do conhecimento que passava, sempre se preocupou com os seus alunos em todos os sentidos.

Ao meu namorado, Miguel Correia, agradeço todo o apoio, paciência, compreensão e ajuda, e ao meu melhor amigo de infância, André Cruz, tenho muito a agradecer, principalmente a paciência e solidariedade que tem comigo há anos e nesta fase não foi diferente. Agradeço também ao amigo Rui Costa que tantas vezes cedeu o seu computador para que fosse possível efetuar algumas simulações mais complexas temporalmente. De certo, há muitas outras pessoas a quem eu gostaria de agradecer de várias formas, sendo inúmeras, resolvi mencionar apenas as mais fulcrais.

Suzana Vale

*“O único homem que está isento de erros,
é aquele que não arrisca acertar. De absoluto só a Relatividade.”*

Albert Einstein

Conteúdo

1	Introdução	1
1.1	Enquadramento e Objetivos	1
1.2	Revisão Bibliográfica	1
1.2.1	Transparência Eletromagneticamente Induzida	1
1.2.2	Slow Light	2
1.2.3	Efeito de Giant Kerr	3
1.3	Estrutura da Dissertação	3
1.4	Principais Resultados	3
2	Sistemas Lambda	5
2.1	Hamiltoniano em Sistemas Lambda	5
2.2	Matriz Densidade de Estados	7
2.3	Equação de propagação no regime estacionário	9
3	Propagação em Sistemas Lambda – Uma variável transversal	15
3.1	Simulação da Propagação – Método de <i>Split Step Fourier</i>	15
3.1.1	Aplicação à equação não linear de Schrodinger	15
3.1.2	Aplicação a meios Lambda	19
3.2	Resultados	20
3.2.1	Sinal de Entrada com forma de <i>sech</i>	20
3.2.2	Sinal de Entrada com forma de onda de Airy Finita	27
3.3	Solitões de Baixa Amplitude	29
3.3.1	Teste da Rotina BPM para Procurar Solitões de Baixa Amplitude	32
3.4	Solitões para Campos de Controlo Elevados	33
3.4.1	Teste da Rotina BPM para Procurar Solitões quando o Campo de Controlo é elevado	37
4	Propagação em Sistemas Lambda – Simetria Azimutal	39
4.1	Transformadas de Hankel	39
4.2	Em coordenadas retangulares	39
4.3	Em coordenadas polares - função simétrica circular	40
4.4	Transformada de Fourier Inversa	40
4.5	Propagação de um feixe radialmente simétrico em espaço livre	41
4.6	Transformada de Fourier em 2D e suas derivações	42
4.6.1	Teste da Rotina	43
4.6.2	Propagação de sinal gaussiano em meio lambda	43

5	Conclusões e Trabalho Futuro	47
5.1	Conclusões	47
5.2	Trabalho Futuro	47
A	Konotop - Parte 1	49
A.1	Sistema de três níveis do tipo Lambda	49
A.2	Eliminação de ρ_{31}	52
A.3	Eliminação de ρ_{33}	52
A.4	Eliminação de ρ_{11}	54
B	Konotop - Parte 2	59
B.1	Aproximação de D:	61
C	Código de Simulação da propagação de um solitão brilhante	67
D	Código de Simulação para sinal de entrada com forma de Sech	73
E	Código de Simulação da Propagação de uma onda de Airy finita	81
F	Código de Simulação da propagação de solitões brilhantes de baixa amplitude	89
G	Código de Simulação da propagação de uma onda de Airy no ar, com simetria Azimutal	97
H	Código de Simulação da Propagação de uma onda com campo de controlo dado por uma onda de Laguerre	103
I	Código de Simulação da propagação de um sinal gaussiano, com simetria Azimutal	111
	Referências	119

Lista de Figuras

2.1	Sistema de três níveis $ 1\rangle$: estado fundamental; $ 2\rangle$: estado excitado; $ 3\rangle$: estado de energia mais baixa.	5
3.1	Método de resolução aproximado para uma equação com termos lineares e não-lineares.	16
3.2	Evolução linear.	17
3.3	Evolução não-linear.	17
3.4	Propagação do Solitão Brilhante.	20
3.5	Sinal de entrada e saída.	20
3.6	Propagação considerando o campo de controlo $F_0 = 0$	21
3.7	Propagação considerando o campo de controlo $F_0 = 1$	21
3.8	Propagação considerando o campo de controlo $F_0 = 1$ com ampliação do centro. .	21
3.9	Amplitudes de U considerando o campo de controlo $F_0 = 1$	22
3.10	FWHM de U considerando o campo de controlo $F_0 = 1$	22
3.11	Amplitudes de U considerando o campo de controlo $F_0 = 1$ para uma distância de propagação igual a 300.	22
3.12	FWHM Considerando o campo de controlo $F_0 = 1$ para uma distância de propagação igual a 300.	22
3.13	Cálculo da largura total a meia altura ($fwhm$) para a intensidade de solitões. . . .	23
3.14	Amplitudes do sinal de entrada e sinais de saída para sinais de controlo $F=0, 1, 10$ e 100, para $Z = 100$	24
3.15	Amplitudes do sinal de entrada e sinais de saída para sinais de controlo $F=0, 1, 10$ e 100 - Foco central, para $Z = 100$	24
3.16	Amplitudes do Sinal de Entrada e Sinais de Saída para Sinais de Controlo $F=0, 1, 10$ e 100 - Foco Lateral, para $Z = 100$	24
3.17	Propagação do sinal com campo de controlo dado por $F = e^{-\frac{1}{2}(x)^2}$, para $Z = 100$. .	25
3.18	Propagação do sinal com campo de controlo dado por $F = e^{-\frac{1}{2}(x)^2}$ com Foco central, para $Z = 100$	25
3.19	Amplitudes de propagação do sinal com campo de controlo dado por $F = e^{-\frac{1}{2}(x)^2}$, para $Z = 100$	25
3.20	FWHM de propagação do sinal com campo de controlo dado por $F = e^{-\frac{1}{2}(x)^2}$, para $Z = 100$	25
3.21	Propagação do sinal com campo de controlo dado por $F = 10e^{-\frac{1}{2}(x)^2}$, para $Z = 100$	26
3.22	Propagação do sinal com campo de controlo dado por $F = 10e^{-\frac{1}{2}(x)^2}$, Foco central, para $Z = 100$	26

3.23	Amplitudes de propagação do sinal com campo de controlo dado por $F = 10e^{-\frac{1}{2}(x)^2}$. para $Z = 100$	26
3.24	FWHM de propagação do sinal com campo de controlo dado por $F = 10e^{-\frac{1}{2}(x)^2}$. para $Z = 100$	26
3.25	Propagação do sinal com campo de controlo dado por $F = 100e^{-\frac{1}{2}(x)^2}$. para $Z = 100$	27
3.26	Propagação do sinal com campo de controlo dado por $F = 100e^{-\frac{1}{2}(x)^2}$ Foco centro. para $Z = 100$	27
3.27	Amplitudes da propagação do sinal com campo de controlo dado por $F = 100e^{-\frac{1}{2}(x)^2}$. para $Z = 100$	27
3.28	FWHM do sinal com campo de controlo dado por $F = 100e^{-\frac{1}{2}(x)^2}$. para $Z = 100$	27
3.29	Amplitudes do sinal de entrada e sinais de saída para diferentes valores da amplitude da gaussiana do sinal de controlo, para $Z = 100$	28
3.30	Amplitudes do sinal de entrada e sinais de saída para diferentes valores da amplitude da gaussiana do sinal de controlo com ampliação central, para $Z = 100$	28
3.31	Propagação do sinal de entrada dado por um Impulso de Airy com um campo de controlo unitário constante, para $Z = 10$	28
3.32	Propagação do sinal de entrada dado por um Impulso de Airy com um campo de controlo unitário constante, para $Z = 10$, vista de cima.	28
3.33	Propagação do sinal de entrada dado por um Impulso de Airy com um campo de controlo constante, $F = 100$, para $Z = 10$	29
3.34	Propagação do sinal de entrada dado por um Impulso de Airy com um campo de controlo constante, $F = 100$, para $Z = 10$, vista de cima.	29
3.35	Amplitudes dos sinais de entrada e saídas para sinal de entrada dada por um Impulso de Airy campos de controlo constantes dados por $F = 0, 1, 10$ e 100 , para $Z = 100$	29
3.36	Intensidades do sinal de entrada e saída para um campo de controlo constante igual a 0.25 numa distância de propagação de 100 metros.	32
3.37	Propagação do sinal para um campo de controlo constante igual a 0.25 numa distância de propagação de 100 metros.	32
3.38	Amplitudes da propagação para um campo de controlo constante igual a 0.25 numa distância de propagação de 100 metros.	33
3.39	FWHM para um campo de controlo constante igual a 0.25 numa distância de propagação de 100 metros.	33
3.40	Intensidades do sinal de entrada e saída para um campo de controlo constante igual a 0.75 numa distância de propagação de 100 metros.	33
3.41	Propagação do sinal para um campo de controlo constante igual a 0.75 numa distância de propagação de 100 metros.	33
3.42	Amplitudes da propagação para um campo de controlo constante igual a 0.75 numa distância de propagação de 100 metros.	34
3.43	FWHM para um campo de controlo constante igual a 0.75 numa distância de propagação de 100 metros.	34
3.44	Intensidades do sinal de entrada e saída para um campo de controlo constante igual a 1 numa distância de propagação de 100 metros.	34
3.45	Propagação do sinal para um campo de controlo constante igual a 1 numa distância de propagação de 100 metros.	34
3.46	Amplitudes da Propagação para um campo de controlo constante igual a 1 numa distância de propagação de 100 metros.	35

3.47	FWHM para um campo de controlo constante igual a 1 numa distância de propagação de 100 metros.	35
3.48	Gráfico que relaciona $\sqrt{r}fwhm$ com $ f ^2$	35
3.49	Intensidades do sinal de entrada e saída para um campo de controlo constante igual 10 numa distância de propagação de 10 metros.	38
3.50	Propagação do sinal para um campo de controlo constante igual 10 numa distância de propagação de 10 metros.	38
3.51	Amplitudes da propagação para um campo de controlo constante igual 10 numa distância de propagação de 10 metros.	38
3.52	FWHM para um campo de controlo constante igual 10 numa distância de propagação de 10 metros.	38
4.1	Propagação de um feixe radialmente simétrico em espaço livre.	42
4.2	Amplitude do sinal ao longo da propagação.	43
4.3	Propagação do impulso de Airy radialmente simétrico, $r_0 = 10$ e $\alpha = 0.05$	44
4.4	Propagação do sinal de entrada $e^{(-0.04(r)^2)}$ com a onda de controlo de Laguerre. .	44
4.5	Intensidades do sinal de entrada e do sinal de saída com a onda de controlo de Laguerre.	44
4.6	Amplitudes do sinal $e^{(-0.04(r)^2)}$ com a onda de controlo de Laguerre propagado. .	45
4.7	FWHM do sinal $e^{(-0.04(r)^2)}$ com a onda de controlo de Laguerre propagado. . . .	45
4.8	Propagação do impulso de Airy radialmente simétrico, $r_0 = 10$ e $\alpha = 0,05$, para um campo de controlo constante com amplitude $F = 1$	46
4.9	Propagação do impulso de Airy radialmente simétrico, $r_0 = 10$ e $\alpha = 0,05$, para um campo de controlo constante com amplitude $F = 100$	46
A.1	Sistema de três níveis $ 1\rangle$: estado fundamentas; $ 2\rangle$: estado excitado; $ 2\rangle$: estado mais baixo	49

Abreviaturas e Símbolos

BPM	Beam Propagation Method
EIT	Electromagnetically Induced Transparency
FWHM	Full Width at Half Maximum
GVD	Group Velocity Dispersion
HT	Hankel Transform
IHT	Inverse Hankel Transform
NL	Non-Linear
NSE	Nonlinear Schrodinger Equation
SPM	Self Phase Modulation
SSF	Split Step Fourier
GVPLP	Group Velocity Probe Light Pulse

Capítulo 1

Introdução

1.1 Enquadramento e Objetivos

Este trabalho está enquadrado no projeto da FCT *Condução da luz em guias de ondas não lineares com interações ressonantes*, iniciado a 01/01/2011 e com referência PTDC/FIS/112624/2009. Este pretende estudar o guiamento de luz em diferentes sistemas não lineares que apresentem acoplamentos ressonantes entre a luz e excitações de materiais. O grande interesse atual neste tipo de sistemas deve-se a já serem possíveis de fabricar e a apresentarem efeitos não-lineares muito fortes, mesmo para baixas potências luminosas, o que os torna relevantes em diversas aplicações, tais como processamento de informação ou geração de harmónicas. Por outro lado, estes sistemas constituem um laboratório de estudo de fenómenos não-lineares fundamentais que de outra forma seriam difíceis de realizar experimentalmente. Os objetivos desta dissertação consistem em compreender o funcionamento de um sistema do tipo Lambda e as suas principais características. Posteriormente será necessário implementar programas de testes para simulação de várias situações com vista a estudar o comportamento do sistema lambda para diferentes sinais de entrada e de controlo, observando a influência deste tipo de meios sobre a propagação destes sinais.

1.2 Revisão Bibliográfica

1.2.1 Transparência Eletromagneticamente Induzida

Neste momento existe um grande interesse em investigação sobre EIT [1] uma vez que este promete avanços em vários ramos da física e eletrónica. Por exemplo, para que seja possível efetuar medições sensíveis é fundamental o uso de ressonâncias estreitas. As ressonâncias de um sistema EIT podem ser bastante estreitas, o que faz com que este seja um assunto muito interessante para sistemas de medições. Outra grande vantagem do EIT consiste no facto de permitir obter uma suscetibilidade não linear muito elevada na região espectral de transparência induzida o que permite uma vasta gama de possíveis aplicações na área da eletrónica (e.g., tecnologia da informação quântica, QIT) como o exemplo dos *qubits* (computadores quânticos) [2] e na área da opto-eletrónica para sensores.

Transparência eletromagneticamente induzida é uma técnica que possibilita tornar um meio transparente, que de outra forma seria opticamente espesso. Esta alteração na transmissão surge através do acoplamento de três níveis atômicos usando dois campos de laser. Os três tipos de configurações possíveis para o EIT consistem nas configurações em Lambda, em V e em cascata.

Este fenómeno consiste na redução da absorção de um campo de laser de teste através de um meio de absorção devido à presença de um segundo campo de acoplamento, ou de controlo.

As propriedades óticas de gases atômicos ou moleculares estão relacionadas com o nível de energia intrínseco da estrutura. A resposta linear de um átomo à luz ressonante é descrita através da suscetibilidade de primeira ordem, χ_1 . A parte real da suscetibilidade de primeira ordem, $\text{Re } \chi_1$, determina o índice de refração, enquanto a parte imaginária da suscetibilidade de primeira ordem, $\text{Im } \chi_1$, determina a absorção, isto é a dissipação do campo causada pelo gás atômico. Em geral, os meios com EIT comportam-se de uma forma não linear, podendo este comportamento ser descrito por suscetibilidades de ordem superior.

1.2.2 Slow Light

Como foi referido atrás, um dos fenómenos associados ao EIT é a existência de *slow light* [3], o qual depende da alteração da absorção e da dispersão de um meio devido ao EIT. A modificação da dispersão do meio pode resultar em grandes alterações da velocidade de grupo do mesmo, a qual pode ser mais lenta, propagação subluminal, ou mais rápida que a velocidade da luz no vácuo e até negativa, superluminal.

Foi descoberto que ajustando o *detuning* ou a frequência Rabi do campo de luz de teste podem realizar a passagem do GVPLP (*group velocity of the probe light pulse*), que corresponde à velocidade de grupo do impulso de teste de subluminal para superluminal. O *detuning* do laser é o ajuste da frequência do laser para uma que está ligeiramente dessincronizada da frequência de ressonância do sistema quântico [4] [5] e a frequência de Rabi é a frequência de oscilação para uma dada transição atômica num dado campo luminoso [6]. Para a propagação subluminal e superluminal o sistema exhibe sempre a absorção do sinal de teste e o GVPLP é determinado principalmente pela inclinação da dispersão [7].

Nos últimos anos, o fenómeno da propagação subluminal e superluminal têm sido amplamente estudados, teoricamente e experimentalmente. Por exemplo, Hau e outros observaram velocidades de grupo extremamente baixas, na ordem dos 17 ms^{-1} num sódio Bose-Einstein condensado à temperatura de 50 nK. Posteriormente Kash e outros mediram velocidades de grupo na ordem dos 90 ms^{-1} num vapor de Rubídio a 360 K na transição D1, Budker atingiu velocidades de grupo tão baixas como 8 ms^{-1} também no Rubídio na transição D1 à temperatura ambiente. Sahrai e outros demonstraram que o controlo ajustável da velocidade de grupo de um impulso de teste fraco de subluminal para superluminal pode ser obtido pela variação de fase dos campos de controlo num sistema Lambda com dois campos de controlo e um nível de energia extra; Bortman-Arbiv e outros mostraram que a passagem da propagação do impulso de teste de subluminal para superluminal pode ser realizada mudando a fase relativa entre o teste e os campos conduzidos; Agarwal e outros afirmaram que a variação de um campo de acoplamento ligando os dois estados metaestáveis mais

baixos a um sistema Lambda pode levar a propagação de um impulso fraco a mudar de subluminal para superluminal [8].

Um avanço recente demonstrou que velocidade de grupo baixas permitem que um impulso de luz seja defletido por um campo magnético. Karpa e Weitz publicaram que os polaritões no estado negro têm um momento magnético diferente de zero, ao contrário dos fótons.

1.2.3 Efeito de Giant Kerr

O efeito de Kerr tem sido muito usado no ramo da ótica, nomeadamente em moduladores eletro-óticos. A sua aplicação em produção de impulsos muito curtos usando lasers ultra rápidos é muitas vezes limitada pela sua natureza relativamente fraca. Para melhorar este efeito a frequência do laser precisa estar em sintonia com a ressonância, o que leva a um aumento da dispersão. Este aumento tem a desvantagem de aumentar a absorção. O EIT oferece uma alternativa de contornar este ponto negativo, onde a absorção pode ser baixa mesmo enquanto a variação do índice de refração é substancial [9].

1.3 Estrutura da Dissertação

Tendo já mencionado alguns conceitos na revisão bibliográfica, sendo estes, EIT, *Slow Light*, efeito de Giant Kerr, etc, o passo seguinte será a exposição do estudo intensivo desenvolvido sobre sistemas do tipo Lambda, que tem como base o artigo de Konotop e Hang [10], onde iremos deduzir as equações referentes ao mesmo, assim como a equação de propagação. Esta equação será utilizada para simular propagação de sinais neste tipo de meio.

Num primeiro passo iremos utilizar apenas uma variável transversal e aplicaremos o método de SSF para analisar sinais de entrada com forma de *sech* variando o sinal de controlo. Iremos também testar a propagação para o caso de a onda de entrada ser uma onda de Airy finita. O passo seguinte será analisar a propagação obtida em sistemas Lambda usando simetria azimutal, para este será necessário utilizar transformadas de Hankel. Neste caso será estudada a propagação de uma onda tendo um campo de controlo dado por uma onda de Laguerre, assim como a propagação de uma onda de Airy com um campo de controlo constante.

1.4 Principais Resultados

Os principais objetivos deste trabalho são o estudo do Sistema Lambda passando pela implementação de algoritmos que simulem a propagação do sinal de entrada neste tipo de meio variando o campo de controlo do sistema.

Capítulo 2

Sistemas Lambda

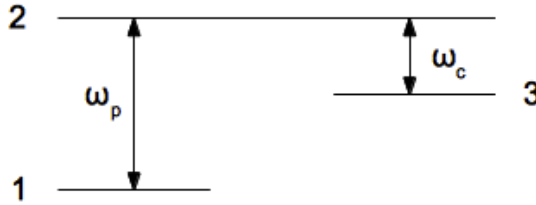


Figura 2.1: Sistema de três níveis $|1\rangle$: estado fundamental; $|2\rangle$: estado excitado; $|3\rangle$: estado de energia mais baixa.

Um sistema Lambda refere-se a um sistema caracterizado por três níveis de energia, para o qual as transições entre o estado excitado e os outros estados são possíveis, e as transições diretas entre os estados de energia mais baixos são proibidas. A figura 2.1 representam um sistema Lambda, sendo $|1\rangle$, $|2\rangle$ e $|3\rangle$ os estados fundamental, excitado e de energia intermédia, respetivamente. As energias destes estados são $\hbar\omega_1$, $\hbar\omega_2$ e $\hbar\omega_3$. Admitamos que este meio está sujeito a dois campos elétricos, $\vec{E}_p = \hat{e}_p \epsilon_p e^{i(k_p z - \omega_p t)}$ e $\vec{E}_c = \hat{e}_c \epsilon_c e^{i(k_c z - \omega_c t)}$, tal que $\hbar\omega_c \simeq \hbar(\omega_2 - \omega_3)$ e $\hbar\omega_p \simeq \hbar(\omega_2 - \omega_1)$. Uma forma de caracterizar o sistema lambda é através do seu Hamiltoniano.

2.1 Hamiltoniano em Sistemas Lambda

O Hamiltoniano de um sistema do tipo Lambda é dado pela expressão: $H = H_0 + V_p + V_c$ e é frequentemente escrito em função da frequência de Rabi do laser de teste, $\Omega_p = \frac{p_{12}\epsilon_p}{\hbar}$, que representa o acoplamento entre o campo elétrico do laser e o dipolo atómico. $\Omega_c = \frac{p_{32}\epsilon_c}{\hbar}$ representa a frequência de Rabi do laser de acoplamento. H_0 representa os estados atómicos base.

Considerando os campos dados por:

$$V_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}_p \quad (2.1)$$

$$V_c = -\vec{p} \cdot \vec{E}_c \quad (2.2)$$

$$(2.3)$$

Para a transição entre os estados $|m\rangle$ e $|n\rangle$ o dipolo atômico é dado por $\vec{p} = \vec{p}_{mn} (|n\rangle\langle m| + |m\rangle\langle n|)$.

$$\begin{aligned} V_p &= -\vec{p} \cdot \hat{e}_p \varepsilon_p e^{i(k_p z - \omega_p t)} \Leftrightarrow \\ V_p &= -\vec{p} \cdot \hat{e}_p \left(\varepsilon_p \left(|2\rangle\langle 1| e^{i(k_p z - \omega_p t)} \right) + \varepsilon_p \left(|1\rangle\langle 2| e^{i(k_p z - \omega_p t)} \right) + \right. \\ &\quad \left. \varepsilon_p^* \left(|2\rangle\langle 1| e^{-i(k_p z - \omega_p t)} \right) + \varepsilon_p^* \left(|1\rangle\langle 2| e^{-i(k_p z - \omega_p t)} \right) \right) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Como sabemos que $\vec{p}_{12} = \vec{p}_{21} \hat{e}_p$, e desta forma podemos reescrever a equação (2.4) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} V_p &= -\hbar\Omega_p \left(|2\rangle\langle 1| e^{i(k_p z - \omega_p t)} + |1\rangle\langle 2| e^{i(k_p z - \omega_p t)} \right) - \\ &\quad \hbar\Omega_p^* \left(|2\rangle\langle 1| e^{-i(k_p z - \omega_p t)} + |1\rangle\langle 2| e^{-i(k_p z - \omega_p t)} \right) \end{aligned}$$

O termo $e^{i(k_p z - \omega_p t)}$ está associado à absorção de um fóton e o termo $e^{-i(k_p z - \omega_p t)}$ está associado a emissão de um fóton, assim sendo de acordo com a **rotating wave approximation** devem-se desprezar os termos onde o fóton é absorvido e o átomo cai de $|2\rangle$ para $|1\rangle$ e onde o fóton é emitido e o átomo sobe do estado $|1\rangle$ para o estado $|2\rangle$. O que resulta na seguinte expressão:

$$V_p = -\hbar\Omega_p (|2\rangle\langle 1| e^{i(k_p z - \omega_p t)} - \hbar\Omega_p^* |1\rangle\langle 2| e^{-i(k_p z - \omega_p t)}) \quad (2.5)$$

Analogamente calcula-se o V_c .

$$\begin{aligned} V_c &= -\hbar\Omega_c \left(|3\rangle\langle 2| e^{i(k_c z - \omega_c t)} + |2\rangle\langle 3| e^{i(k_c z - \omega_c t)} \right) - \\ &\quad \hbar\Omega_c^* \left(|3\rangle\langle 2| e^{-i(k_c z - \omega_c t)} + |2\rangle\langle 3| e^{-i(k_c z - \omega_c t)} \right) \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$V_c = -\hbar\Omega_c |2\rangle\langle 3| e^{i(k_c z - \omega_c t)} - \hbar\Omega_c^* |3\rangle\langle 2| e^{-i(k_c z - \omega_c t)} \quad (2.7)$$

Após este passo podemos construir o Hamiltoniano da seguinte forma:

$$H = \begin{bmatrix} \hbar\omega_1 & -\hbar\Omega_p^* e^{-i(k_p z - \omega_p t)} & 0 \\ -\hbar\Omega_p e^{i(k_p z - \omega_p t)} & \hbar\omega_2 & -\hbar\Omega_c e^{i(k_c z - \omega_c t)} \\ 0 & -\hbar\Omega_c e^{-i(k_c z - \omega_c t)} & \hbar\omega_3 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

2.2 Matriz Densidade de Estados

Utilizando a mesma abordagem que Purves [8], se considerarmos um conjunto de partículas, todas as quais podem estar num qualquer estado puro, o estado deste conjunto de partículas será geralmente uma mistura dos estados. Assim, este estado não é um estado puro, não podendo ser representado por funções de onda. Um sistema deste género pode ser representado por um operador densidade designado por ρ . Este é usualmente definido como $\rho = |\nu\rangle\langle\nu|$, onde $|\nu\rangle$ é o estado considerado.

Para um sistema atómico de três níveis, como o que está representado na figura 2.1, $|\nu\rangle$ é dado pela seguinte expressão:

$$|\nu\rangle = c_3|3\rangle + c_2|2\rangle + c_1|1\rangle \quad (2.9)$$

Cada elemento da matriz densidade de estados é proveniente de um produto de probabilidades de amplitudes. Os elementos que estão dispostos na diagonal da matriz, ρ_{ii} , correspondem à população dos estados, enquanto que os restantes elementos da matriz dizem respeito às coerências entre estados.

A matriz densidade para um sistema lambda de três níveis apresenta-se da seguinte forma:

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \rho_{23} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & \rho_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 c_1^* & c_1 c_2^* & c_1 c_3^* \\ c_2 c_1^* & c_2 c_2^* & c_2 c_3^* \\ c_3 c_1^* & c_3 c_2^* & c_3 c_3^* \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

Agora será necessário aplicar a equação de Lindblad,

$$\dot{\rho} = \frac{i}{\hbar} [\rho, H] - \mathcal{D}, \quad (2.11)$$

onde $[\rho, H]_{mn} = \sum_K (\rho_{mk} H_{kn} - H_{mk} \rho_{kn})$. Foram obtidas as seguintes expressões para as equações $[\rho, H]$ das populações e das coerências:

$$[\rho, H]_{11} = -\rho_{12} \hbar \Omega_p e^{i(k_p z - \omega_p t)} + \rho_{21} \hbar \Omega_p^* e^{-i(k_p z - \omega_p t)} \quad (2.12)$$

$$[\rho, H]_{22} = -\rho_{23} \hbar \Omega_c^* e^{-i(k_c z - \omega_c t)} + \rho_{32} \hbar \Omega_c e^{i(k_c z - \omega_c t)} \quad (2.13)$$

$$[\rho, H]_{33} = -\rho_{32} \hbar \Omega_c e^{i(k_c z - \omega_c t)} + \rho_{23} \hbar \Omega_c^* e^{-i(k_c z - \omega_c t)} \quad (2.14)$$

$$[\rho, H]_{21} = -\rho_{21} \hbar \omega_1 - (\rho_{22} - \rho_{11}) \hbar \Omega_p e^{i(k_p z - \omega_p t)} - \rho_{21} \hbar \omega_2 + \rho_{31} \hbar \Omega_c e^{i(k_c z - \omega_c t)} \quad (2.15)$$

$$[\rho, H]_{23} = \rho_{13} \hbar e^{i(k_p z - \omega_p t)} - (\rho_{22} - \rho_{33}) \hbar \omega_c e^{i(k_c z - \omega_c t)} + \rho_{23} (\hbar \Omega_3 - \hbar \omega_2) \quad (2.16)$$

$$[\rho, H]_{31} = \hbar (\omega_1 - \omega_3) \rho_{31} - \rho_{32} \hbar \Omega_p e^{i(k_p z - \omega_p t)} + \rho_{21} \hbar \Omega_c^* e^{-i(k_c z - \omega_c t)} \quad (2.17)$$

Nesta fase será necessário efetuar o cálculo das perdas, representadas por $\mathcal{D}$.

$$\mathcal{D} = \sum_d \frac{\Gamma_d}{2} (\sigma_d^+ \sigma_d \rho + \rho \sigma_d^+ \sigma_d - 2 \sigma_d \rho \sigma_d^+) \quad (2.18)$$

O somatório em d é o somatório para todas as transições com emissão espontânea. No caso de uma emissão espontânea que provoque a passagem do estado $|n\rangle$ para o estado $|m\rangle$, temos $\sigma_d^+ = |n\rangle\langle m|$ e $\sigma_d = |m\rangle\langle n|$. O sistema de três níveis em estudo considera apenas duas transições associadas à emissão espontânea: do estado 2 para o estado 1 - $\Gamma_d = \Gamma_{21}$ e do estado 2 para o estado 3 - $\Gamma_d = \Gamma_{23}$

Assim, neste caso, teremos:

$$\begin{aligned} \mathcal{D} = & \frac{\Gamma_{21}}{2} (|2\rangle\langle 1||1\rangle\langle 2|\rho + \rho|2\rangle\langle 1||1\rangle\langle 2| - 2|1\rangle\langle 2|\rho|2\rangle\langle 1|) + \\ & \frac{\Gamma_{23}}{2} (|2\rangle\langle 3||3\rangle\langle 2|\rho + \rho|2\rangle\langle 3||3\rangle\langle 2| - 2|3\rangle\langle 2|\rho|2\rangle\langle 3|) \end{aligned} \quad (2.19)$$

Desta forma podemos reescrever a matriz $\mathcal{D}$ da forma ilustrada abaixo:

$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} -\Gamma_{21}\rho_{22} & \frac{(\Gamma_{21}+\Gamma_{23})}{2}\rho_{12} & 0 \\ \frac{(\Gamma_{21}+\Gamma_{23})}{2}\rho_{21} & (\Gamma_{21}+\Gamma_{23})\rho_{22} & \frac{(\Gamma_{21}+\Gamma_{23})}{2}\rho_{23} \\ 0 & \frac{(\Gamma_{21}+\Gamma_{23})}{2}\rho_{32} & -\Gamma_{23}\rho_{22} \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

As equações resultantes da substituição das equações (2.12) a (2.17) e da equação (2.20) na equação (2.11) podem ser simplificadas efetuando uma mudança de variável que se traduz na introdução de variáveis lentas para as coerências:

$$\rho_{12} = \tilde{\rho}_{12} e^{i(-k_p z - \omega_p t)} \quad (2.21)$$

Note-se que se tem

$$\tilde{\rho}_{12} = \rho_{12} e^{i(k_p z - \omega_p t)} \quad (2.22)$$

$$\dot{\rho}_{12} = \dot{\tilde{\rho}}_{12} e^{-i(k_p z - \omega_p t)} = (i\omega_p) \tilde{\rho}_{12} e^{i(k_p z - \omega_p t)} \quad (2.23)$$

Como $\rho_{12} = \rho_{21}^*$, logo ρ_{21} é dado por $\tilde{\rho}_{21} e^{i(k_p z - \omega_p t)}$.

Analogamente tem-se:

$$\rho_{32} = \tilde{\rho}_{32} e^{-(k_c z - \omega_c t)} \rightarrow \rho_{23} = \tilde{\rho}_{23} e^{i(k_c z - \omega_c t)} \quad (2.24)$$

$$\rho_{31} = \tilde{\rho}_{31} e^{i[(k_p - k_c)z - (\omega_p - \omega_c)t]} \quad (2.25)$$

Efetuada esta mudança de variável obtém-se,

$$\dot{\rho}_{11} = -i\Omega_p \tilde{\rho}_{12} + i\Omega_p^* \tilde{\rho}_{21} + \Gamma_{21} \rho_{22} \quad (2.26)$$

$$\dot{\rho}_{22} = -i\Omega_p^* \tilde{\rho}_{21} + i\Omega_p \tilde{\rho}_{12} - i\Omega_c^* \tilde{\rho}_{23} + i\Omega_c \tilde{\rho}_{32} - (\Gamma_{21} + \Gamma_{23}) \rho_{22} \quad (2.27)$$

$$\dot{\rho}_{33} = -i\Omega_c \tilde{\rho}_{32} + i\Omega_c^* \tilde{\rho}_{23} + \Gamma_{23} \rho_{22} \quad (2.28)$$

$$\dot{\tilde{\rho}}_{21} = i(\omega_1 - \omega_2 + \omega_p) \tilde{\rho}_{21} - i\Omega_p (\rho_{22} - \rho_{11}) + i\Omega_c \tilde{\rho}_{31} - \frac{\Gamma_{21} + \Gamma_{23}}{2} \tilde{\rho}_{21} \quad (2.29)$$

$$\dot{\tilde{\rho}}_{23} = i(\omega_3 - \omega_2 + \omega_p) \tilde{\rho}_{23} - i\Omega_c (\rho_{22} - \rho_{33}) + i\Omega_p \tilde{\rho}_{13} - \frac{\Gamma_{21} + \Gamma_{23}}{2} \tilde{\rho}_{23} \quad (2.30)$$

$$\dot{\tilde{\rho}}_{31} = i(\omega_1 - \omega_3 + \omega_p - \omega_c) \tilde{\rho}_{31} - i\Omega_p \tilde{\rho}_{32} + i\Omega_c^* \tilde{\rho}_{21} \quad (2.31)$$

Além disso, $\tilde{\rho}_{ij}^* = \tilde{\rho}_{ji}$:

$$\dot{\tilde{\rho}}_{32} = -i(\omega_3 - \omega_2 + \omega_c) \tilde{\rho}_{32} + i\Omega_c^* (\rho_{22} - \rho_{33}) - i\Omega_p^* \tilde{\rho}_{31} - \frac{\Gamma_{21} + \Gamma_{23}}{2} \tilde{\rho}_{32} \quad (2.32)$$

2.3 Equação de propagação no regime estacionário

Nesta secção pretende-se estudar o artigo *Spatial solitons in a three-level atomic medium supported by a Laguerre-Gaussian control beam* [10], como tal partindo das equações (2.26)-(2.31), que foram demonstradas anteriormente, iremos chegar à equação de propagação do artigo.

Como visto atrás, os campos de controlo e teste podem ser escritos na forma:

$$\vec{E}_p(\vec{r}, t) = \hat{e}_p \mathcal{E}_p(\vec{r}, t) e^{i(\vec{k}_p \cdot \vec{r} - \omega_p t)} + \text{c. c.} \quad (2.33)$$

$$\vec{E}_c(\vec{r}, t) = \hat{e}_c \mathcal{E}_c(\vec{r}, t) e^{i(\vec{k}_c \cdot \vec{r} - \omega_c t)} + \text{c. c.} \quad (2.34)$$

Se considerarmos um campo de teste e um campo de acoplamento, sendo que o primeiro possui um campo elétrico, $\vec{E}_p$, definido pela equação (2.33), onde o ω_p refere-se à frequência central, $\vec{k}_p = (k_{px}, k_{py}, k_{pz})$ define a direção da propagação, $\hat{e}_p$ é o vetor de polarização e $\mathcal{E}_p$ refere-se ao envelope do campo de teste. Analogamente, o campo de acoplamento, $\vec{E}_c$, possui um campo elétrico definido pela equação (2.34), ω_c , $\vec{k}_c = (k_{cx}, k_{cy}, k_{cz})$, $\hat{e}_c$ e $\mathcal{E}_c$.

Ambos os campos são considerados classicamente e são ortogonalmente polarizados. Admitindo que o campo de acoplamento possui uma intensidade 10 vezes superior à intensidade do campo de teste, pode assumir-se que o campo de acoplamento é constante. Neste caso, a equação de propagação para o campo de teste toma a forma:

$$\nabla^2 \vec{E}_p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}_p}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2}, \quad (2.35)$$

onde que $\vec{P} = \vec{p}_{12} \rho_{21} e^{i(K_p Z - \omega_p t)} + \text{c. c.}$, tal que $\vec{p}_{ij}$ corresponde ao dipolo do momento de transição $|i\rangle \leftrightarrow |j\rangle$. O detuning de um fotão é dado por: $\Delta_2 = (\omega_2 - \omega_1)$ ω_p e de dois fotões é $\Delta_3 = \omega_p - \omega_c - (\omega_3 - \omega_1)$. A emissão espontânea do estado $|2\rangle$ para o estado $|1\rangle$ é dada por

Γ_{21} e analogamente a emissão espontânea do estado $|2\rangle$ para o estado $|3\rangle$ é dada por Γ_{23} . Será desprezado o processo que reflete a perda de coerência de fase.

Iremos analisar a solução estacionária, onde $\dot{\rho} = 0$. O estado $|2\rangle$ é fracamente populado, o que reduz as perdas devido à emissão espontânea. Consideraremos ainda que $-\Delta_2 = \Delta_3 = \Delta \Rightarrow \Delta_{23} = 0$. Temos também que $\Gamma_{21} \simeq \Gamma_{23} = \Gamma$.

Nestas condições as equações (2.26) - (2.30) tomam a forma:

$$0 = \Gamma \rho_{22} - i\Omega_p \rho_{12} + \text{c. c.} \quad (2.36a)$$

$$0 = -2\Gamma \rho_{22} + i\Omega_p \rho_{12} + i\Omega_c \rho_{32} + \text{c. c.} \quad (2.36b)$$

$$0 = \Gamma \rho_{22} - i\Omega_c \rho_{32} + \text{c. c.} \quad (2.36c)$$

$$0 = i\Omega_p (\rho_{11} - \rho_{22}) - (\Gamma - i\Delta) \rho_{21} + i\Omega_c \rho_{31} \quad (2.36d)$$

$$0 = i\Delta \rho_{31} - i\Omega_p \rho_{32} + i\Omega_c^* \rho_{21} \quad (2.36e)$$

$$0 = -\Gamma \rho_{32} - i\Omega_p^* \rho_{31} - i\Omega_c^* (\rho_{33} - \rho_{22}) \quad (2.36f)$$

Das equações (2.36a), (2.36b) e (2.36c), temos: $(2.36a) + (2.36c) = -(2.36b)$, o que significa que destas três apenas duas são linearmente independentes. Isso significa que para resolver estas equações é necessário considerar mais uma equação. Essa equação poderá ser $\rho_{11} + \rho_{22} + \rho_{33} = 1$, a qual traduz o facto da população total de manter constante.

É possível resolver o conjunto destas equações de modo a obter as expressões dos diferentes ρ_{ij} (ver anexos).

Isto quer dizer que:

$$\rho_{21} = \frac{\Delta |\Omega_c|^2 \Omega_p}{\left\{ \frac{6\Delta}{\Gamma} + \Gamma \Delta \left(\frac{|\Omega_p|^2 + |\Omega_c|^2}{|\Omega_p|^2 |\Omega_c|^2} \right) + \frac{(|\Omega_p|)^2 + |\Omega_c|^2}{\Gamma \Delta |\Omega_c|^2} + \frac{(\Delta^2 - \Omega_c|^2 - |\Omega_p|^2)^2}{|\Omega_p|^2 \Gamma \Delta} \right\}} (|\Omega_c|^2 + |\Omega_p|^2 - \Delta + i\Gamma \Delta)$$

$$\rho_{22} = \frac{2\Delta^2 |\Omega_p|^2 |\Omega_c|^2}{\frac{6\Delta}{\Gamma} + \Gamma \Delta \left(\frac{|\Omega_p|^2 + |\Omega_c|^2}{|\Omega_p|^2 |\Omega_c|^2} \right) + \frac{(|\Omega_p|)^2 + |\Omega_c|^2}{\Gamma \Delta |\Omega_c|^2} + \frac{(\Delta^2 - \Omega_c|^2 - |\Omega_p|^2)^2}{|\Omega_p|^2 \Gamma \Delta}}$$

Como o ρ_{22} é muito inferior a um, iremos admitir que o campo de acoplamento é independente do tempo, o que implica que ε_c é uma função apenas de x , y e z . Assim como o ε_c , Ω_c também é uma função em x , y e z e é dada por $\Omega_c = P_{32} \frac{\varepsilon_c}{\hbar}$.

Segundo Konotop $\Omega_c = \Omega_{c0} F(x, y, z) = \Omega_{c0} f(r, \theta, q)$, com $r = k_p \sqrt{x^2 + y^2} = k_p \rho$, $\theta = \tan\left(\frac{y}{x}\right)$, $q = k_p z$, onde ρ corresponde à distância radial num sistema cilíndrico, $\delta = \frac{\Lambda}{\Omega_{c0}}$, $\gamma = \frac{\Gamma}{|\Omega_{c0}|}$ e $\Omega = \frac{\Omega_p}{|\Omega_{c0}|}$. Iremos supor também, além disso, que $\delta \gamma \sim \Omega^2$ o que significa que a perda é relativamente fraca e como tal $\frac{\Delta \Gamma}{|\Omega_{c0}|^2} \sim \frac{\Omega_p^2}{|\Omega_{c0}|^2} \Leftrightarrow \Delta \Gamma \sim \Omega_p^2$.

Usando estas variáveis e parâmetros normalizados, o denominador das expressões de ρ_{21} e ρ_{22} toma a forma

$$\begin{aligned}
D &= |\Omega_c|^2 (|\Omega_c|^2 - \Delta^2)^2 + (|\Omega_c|^2 + |\Omega_p|^2) (3|\Omega_c|^2 |\Omega_p|^2 + \Delta^2 \Gamma^2) + \\
&\quad 4\Delta^2 |\Omega_c|^2 |\Omega_p|^2 + |\Omega_p|^6 = \\
&= |\Omega_{co}|^6 \left[|f|^2 (|f|^2 - \delta^2)^2 + (|f|^2 + |\Omega|^2) (3|f|^2 |\Omega|^2 + \delta^2 \gamma^2) + 4\delta^2 |f|^2 |\Omega|^2 + |\Omega|^6 \right]
\end{aligned}$$

Assim, tem-se:

$$\frac{1}{\rho_{22}} = \frac{D}{2\Delta^2 |\Omega_c|^2 |\Omega_p|^2} = \frac{(|f|^2 - \delta^2)^2}{2\delta^2 |\Omega|^2} + \frac{3(|f|^2 + |\Omega|^2)}{2\delta^2} + \frac{(|f|^2 + |\Omega|^2) \gamma^2}{2|f|^2 |\Omega|^2} + 2 + \frac{|\Omega|^4}{2\delta^2 |f|^2}$$

Uma vez que $\delta \gamma \sim \Omega^2$, $\frac{|\Omega|^4}{2\delta^2 |f|^2} \sim \frac{\gamma^2}{2|f|^2}$.

Por outro lado, $\frac{(|f|^2 + |\Omega|^2) \gamma^2}{2|f|^2 |\Omega|^2} > \frac{(|f|^2 + |\Omega|^2) \gamma^2}{2(|f|^2 + |\Omega|^2) |\Omega|^2} = \frac{\gamma^2}{2|\Omega|^2}$.

E, portanto,

$$\frac{(|f|^2 + |\Omega|^2) \gamma^2}{2|f|^2 |\Omega|^2} + \frac{|\Omega|^4}{2\delta^2 |f|^2} > \frac{\delta^2}{2} \left(\frac{1}{|f|^2} + \frac{1}{|\Omega|^2} \right)$$

Além disso, é possível mostrar que $\frac{1}{|f|^2} + \frac{1}{|\Omega|^2} \geq \frac{4}{|f|^2 + |\Omega|^2}$.

Efetivamente, esta expressão é equivalente a:

$$1 + \frac{|\Omega|^2}{|f|^2} + \frac{|f|^2}{|\Omega|^2} + 1 \geq 4 \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2,$$

onde $x = \frac{|\Omega|^2}{|f|^2} > 0$ e o mínimo de $x + \frac{1}{x}$ é obtido em $x = 1$ e tem o valor $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

O que traz a seguinte condição:

$$\frac{1}{\rho_{22}} > \frac{(|f|^2 - \delta^2)^2}{2\delta^2 |\Omega|^2} + \frac{3(|f|^2 + |\Omega|^2)}{2\delta^2} + 2 + \frac{2\delta^2}{|f|^2 + |\Omega|^2} \quad (2.37)$$

Similarmente, temos,

$$\frac{3(|f|^2 + |\Omega|^2)}{2\delta^2} + \frac{2\gamma^2}{|f|^2 + |\Omega|^2} = \frac{3y}{2\delta^2} + \frac{2\gamma^2}{y}, \quad \text{com } y = |f|^2 + |\Omega|^2 > 0$$

O valor mínimo de $\frac{3y}{2\delta^2} + \frac{2\gamma^2}{y}$ é atingido em $y = \frac{2\gamma|\delta|}{\sqrt{3}}$ e tem o valor de $2\sqrt{3} \frac{\gamma}{|\delta|}$.

O que nos permite simplificar a equação (2.37) como se mostra em seguida:

$$\begin{aligned}
&\frac{3(|f|^2 + |\Omega|^2)}{2\delta^2} + \frac{2\gamma^2}{|f|^2 + |\Omega|^2} \geq 2\sqrt{3} \frac{\gamma}{|\delta|} \\
\Rightarrow \frac{1}{\rho_{22}} &> \frac{(|f|^2 - |\delta|^2)^2}{2\delta^2 |\Omega|^2} + 2\sqrt{3} \frac{\gamma}{|\delta|} + 2
\end{aligned}$$

Para que $\rho_{22} \gg 1$, é então suficiente que

$$\frac{(|f|^2 - \delta^2)^2}{2\delta^2|\Omega|^2} + 2\sqrt{3}\frac{\gamma}{|\delta|} + 2 \gg 1 \quad (2.38)$$

Se negligenciarmos os primeiros termos nas regiões onde $|f|^2 \lesssim \delta^2$, deveremos obter $2\sqrt{3}\frac{\gamma}{|\delta|} + 2 \gg 1$, o que poderá ser satisfeito caso $\frac{\gamma}{|\delta|} \geq 3$ (ver anexo B.1).

Com as novas variáveis adimensionais, temos ainda que

$$\rho_{21} = \frac{\delta|f|^2(\chi + |\Omega|^2 + i\delta\gamma)\Omega}{|f|^2\chi^2 + (|f|^2 + |\Omega|^2)(3|f|^2|\Omega|^2 + \delta^2\gamma^2 + 4\delta^2|f|^2|\Omega|^2 + |\Omega|^6)} \quad (2.39)$$

Esta expressão permite então calcular a polarização $\vec{P}$

$$\vec{P} = \hat{e}_{p12} P_{p12} \rho_{21}(\vec{r}, t) e^{i(k_p z - \omega_p t)} + \text{c. c.},$$

a qual surge na equação de propagação

$$\nabla^2 \vec{E}_p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}_p}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2}$$

como já foi referido, o campo elétrico de teste é dado por

$$\vec{E}_p(\vec{r}, t) = \hat{e}_p \epsilon_p(\vec{r}, t) e^{i(k_p z - \omega_p t)} + \text{c. c.}$$

$$\frac{\partial^2 E_p}{\partial z^2} = \left(\frac{\partial^2 \epsilon_p}{\partial z^2} + i2k_p \frac{\partial \epsilon_p}{\partial z} - k_p^2 \epsilon_p \right) e^{i(k_p z - \omega_p t)}$$

Assumindo que $\epsilon_p = \epsilon(\vec{r})$

$$\frac{\partial^2 E_p}{\partial t^2} = -\omega_p^2 \epsilon_p e^{i(k_p z - \omega_p t)}$$

Se $k_p^2 = \frac{\omega_p^2}{c^2}$, e considerando uma aproximação paraxial o membro da esquerda da equação (2.35) tomaria a forma

$$\begin{aligned} \nabla^2 E_p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_p}{\partial t^2} &= \left[\nabla_{\perp}^2 \epsilon_p \frac{\partial^2 E_p}{\partial z^2} + i2k_p \frac{\partial \epsilon_p}{\partial z} - k_p^2 \epsilon_p + \frac{\omega_p^2}{c^2} \epsilon_p \right] e^{i(k_p z - \omega_p t)} \\ &= \left(\nabla_{\perp}^2 \epsilon_p + i2k_p \frac{\partial \epsilon_p}{\partial z} \right) e^{i(k_p z - \omega_p t)} \end{aligned}$$

No que toca ao membro da direita, o facto de assumirmos que $\epsilon_p = \epsilon(\vec{r}) \Rightarrow \Omega = \Omega(\vec{r}) \Rightarrow \frac{\partial \Omega}{\partial t} = 0$.

Também, uma vez que f não depende do tempo, temos que $\frac{\partial \rho_{21}}{\partial t} = 0$,

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = -\omega_p^2 p_{12} \rho_{21} e^{i(k_p z - \omega_p t)}$$

Substituindo estes dois resultados na equação (2.35), temos agora que

$$\boxed{\nabla_{\perp}^2 \varepsilon_p + i2k_p \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial z} = -\frac{\omega_p^2}{\varepsilon_0 c^2} p_{12} \rho_{21}}$$

Usando as coordenadas normalizadas r , θ e q definidas anteriormente tem-se então

$$\frac{\partial \varepsilon_p}{\partial z} = k_p \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial q}$$

$$\nabla_{\perp}^2 \varepsilon_p = k_p^2 \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varepsilon_p}{\partial \theta^2} \right]$$

o que resulta em

$$\Rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varepsilon_p}{\partial \theta^2} + i2 \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial q} = -\frac{p_{12}}{\varepsilon_0} \rho_{21} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \varepsilon_p + i \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial q} = -\frac{p_{12}}{2\varepsilon_0} \rho_{21}$$

Uma vez que $\varepsilon_p = \frac{\hbar \Omega_p}{p_{12}} = \frac{\hbar |\Omega_{co}| \Omega}{P_{12}}$, esta equação pode ainda ser escrita como

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \Omega + i \frac{\partial \Omega}{\partial q} = -\frac{p_{12}^2}{2\hbar |\Omega_{co}| \varepsilon_0} \rho_{21}$$

Finalmente, substituindo nesta equação a expressão de ρ_{21} obtida anteriormente, tem-se:

$$i \frac{\partial \Omega}{\partial q} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \Omega + G \Omega = -iA \Omega \quad (2.40)$$

onde

$$G = \frac{K \delta |f|^2 (\chi + |\Omega|^2)}{|f|^2 \chi^2 + (|f|^2 + |\Omega|^2)(3|f|^2 |\Omega|^2 + \delta^2 \gamma^2 + 4\delta^2 |f|^2 |\Omega|^2 + |\Omega|^6)}$$

$$A = \frac{K |f|^2 \delta \gamma}{|f|^2 \chi^2 + (|f|^2 + |\Omega|^2)(3|f|^2 |\Omega|^2 + \delta^2 \gamma^2 + 4\delta^2 |f|^2 |\Omega|^2 + |\Omega|^6)}$$

$$K = \frac{N p_{12}^2}{2\hbar |\Omega_{co}| \varepsilon_0}.$$

Admitindo que $|\Omega|^2$ é suficientemente baixo, é ainda possível simplificar as expressões para

ρ_{21} , G e A , as quais tomam a forma:

$$\begin{aligned}\rho_{21} &\simeq \frac{\delta (\chi + |U|^2 + i\delta\gamma) U}{\chi^2 + 3\chi|U|^2 + 7\delta^2|U|^2 + \delta^2\gamma^2} \\ G &= \frac{K\delta (\chi + |U|^2)}{\chi^2 + 3\chi|U|^2 + 7\delta^2|U|^2 + \delta^2\gamma^2} \\ A &= \frac{K\delta^2\gamma}{\chi^2 + 3\chi|U|^2 + 7\delta^2|U|^2 + \delta^2\gamma^2}.\end{aligned}$$

Nos capítulos seguintes esta equação será resolvida numericamente, para diferentes sinais de entrada e diferentes campos de controlo, nos casos onde apenas é considerada a variação numa dimensão transversal e uma longitudinal (1+1)D, e no caso onde são consideradas duas dimensões transversais e uma longitudinal, mas admitindo que os campos em causa têm simetria azimutal.

Capítulo 3

Propagação em Sistemas Lambda – Uma variável transversal

3.1 Simulação da Propagação – Método de *Split Step Fourier*

Em geral, uma equação de propagação como a (2.40) não possui solução analítica. Assim, é muitas vezes necessário utilizar métodos numéricos para estudar a evolução dos sinais. Isto pode ser facilmente conseguido tirando partido da natureza da equação de evolução, a qual é constituída pelas partes linear e não-linear. Efetivamente se estes termos forem considerados separadamente, é possível obter a solução das equações resultantes. Desta forma, uma solução aproximada pode ser facilmente obtida se dividirmos a distância de propagação em pequenos passos, e considerarmos separadamente os efeitos das partes linear e não-linear em cada uma. Uma maneira eficaz de conseguir isto, usando um passo de comprimento h , sendo h muito pequeno, é considerando estes dois efeitos isoladamente e um após o outro, de acordo com a seguinte expressão:

$$\phi(x_i, z_i + h) = L_{h/2} \left(NL_h \left(L_{h/2} (\phi(x, z_i)) \right) \right) \quad (3.1)$$

Esta corresponde à propagação linear ao longo de uma distância $h/2$ seguida da propagação não-linear correspondente à distância h e seguida novamente pela propagação linear ao longo de $h/2$. Este desenvolvimento pode ser melhor compreendido com o auxílio da figura 3.1. Na implementação deste método, o efeito do operador L , associado à parte linear da equação de propagação, é calculado com recurso à transformada de Fourier, razão pela qual o método é conhecido como *Split Step Fourier Method* (SSFM).

3.1.1 Aplicação à equação não linear de Schrodinger

Um exemplo simples do uso do SSFM para estudar a evolução de sinais é encontrado quando a equação de propagação é a equação não linear de Schrodinger. Esta equação pode ser encontrada quando se estuda a evolução de sinais em meios não lineares do tipo Kerr, ou mesmo no caso de

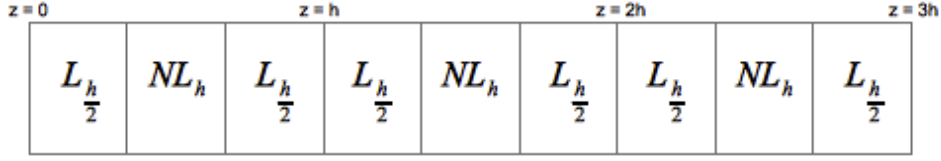


Figura 3.1: Método de resolução aproximado para uma equação com termos lineares e não-lineares.

propagação de sinais em fibras óticas. No contexto espacial, a equação não linear de Schrodinger toma a seguinte forma

$$i \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{1}{2k} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \gamma |\phi|^2 \phi = 0 \quad (3.2)$$

onde $\frac{1}{2k} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$ e $\gamma |\phi|^2 \phi$ constituem, respetivamente a parte linear e não linear. Estes termos serão considerados separadamente no que se segue.

• Parte Linear

Vamos considerar a equação da evolução sem a parte não linear

$$i \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{1}{2k} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0 \quad (3.3)$$

Esta equação está associada ao processo de difração. A solução desta equação pode ser facilmente obtida no espaço de Fourier. Se definirmos os pares de transformadas de Fourier em k_x

$$U(k_x, z) = \mathcal{F}\{u(x, z)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, z) e^{ik_x x} dx \quad (3.4)$$

$$u(x, z) = \mathcal{F}^{-1}\{U(k_x, z)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} U(k_x, z) e^{-ik_x x} dk_x \quad (3.5)$$

é possível escrever a equação 3.4 no espaço de Fourier:

$$i \frac{\partial \phi(k_x, z)}{\partial z} - \frac{k_x^2}{2k} \phi(k_x, z) = 0 \quad (3.6)$$

$\phi(k_x, z) = \mathcal{F}\{\phi(x, z)\}$. A equação 3.6 é uma equação diferencial linear de primeira ordem com coeficientes constantes, cuja solução pode ser descrita como:

$$\phi(k_x, z) = \phi(k_x, 0) e^{-i \frac{k_x^2}{2k} z} \quad (3.7)$$

A equação anterior é referente ao feixe de saída, depois de uma propagação de distância z num meio regido pela equação 3.4, quando o envelope inicial é $\phi(x, 0)$.

Se considerarmos que $L_z(g(x)) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \mathcal{F}\{g(x)\} e^{-i \frac{k_x^2}{2k} z} \right\}$, a solução neste caso pode ser escrita assim:

$$\phi(x, z) = L_z(\phi(x, 0)) \quad (3.8)$$

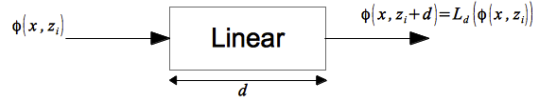


Figura 3.2: Evolução linear.

- **Parte não-linear**

Consideremos agora a equação de evolução sem a parte linear:

$$i \frac{\partial \phi}{\partial z} + \gamma |\phi|^2 \phi = 0 \quad (3.9)$$

A solução desta equação pode ser diretamente escrita como:

$$\phi(x, z) = \phi(x, 0) e^{i \gamma |\phi(x, 0)|^2 z} \quad (3.10)$$

o operador não-linear $NL_z(g(x)) = g(x) e^{i \gamma |g(x)|^2 z}$,

$$\phi(x, z) = NL_z(\phi(x, 0)) \quad (3.11)$$

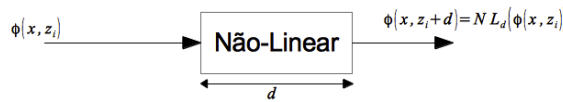


Figura 3.3: Evolução não-linear.

3.1.1.1 Propagação de um Solitão brilhante

Uma rotina numérica que simula a evolução de sinais usando o SSFM foi desenvolvida em ambiente Matlab. Para testar esta rotina considerou-se a equação não linear de Schrodinger no contexto das fibras óticas, a qual toma a forma:

$$i \frac{\partial A}{\partial z} - \frac{1}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \gamma |A|^2 A = 0$$

Inicialmente a rotina desenvolvida foi testada para uma onda de entrada correspondente a um solitão brilhante. O termo solitão foi criado para descrever o comportamento de ondas em meios

não lineares. Estas são partículas que conseguem propagar-se sem alterar a sua forma. Nas fibras óticas, os solitões, aparecem como o resultado do balanço da dispersão da velocidade de grupo com a auto modulação de fase. A dispersão da velocidade de grupo causa um alargamento dos impulsos óticos durante a sua propagação na fibra a não ser que este impulso tenha um *chirp* que o compense. Um impulso com *chirp* pode ser comprimido durante a primeira fase de propagação enquanto a distorção da velocidade de grupo (*Group Velocity Dispersion - GVD*) e o *chirp* têm valores com sinais contrários, tais que é negativo. O fenómeno não linear de auto modulação de fase (*Self Phase Modulation - SPM*) impõe um *chirp* positivo. Como o SPM induz um *chirp* dependente da potência, sob determinadas condições SPM e GVD podem cooperar de modo a que o SPM de chirp induzido impeça o alargamento do impulso causado pela distorção da velocidade de grupo, assim o impulso óptico propaga-se sem distorção na forma de um solitão. No caso de um solitão este propaga-se sem alterar a forma: $A(z,x) = U(x)e^{i\beta z}$

A primeira derivada da equação em ordem a z é dada pela expressão:

$$\frac{\partial A}{\partial z} = i\beta U e^{i\beta z} \quad (3.12)$$

A primeira e segunda derivadas da equação em ordem ao tempo são dadas pelas equações seguintes:

$$\frac{\partial A}{\partial x} = U' e^{i\beta z}, \quad \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = U'' e^{i\beta z} \quad (3.13)$$

$$|A|^2 = U^2 \Rightarrow |A|^2 A = U^3 e^{i\beta z} \quad (3.14)$$

Substituindo esta equação na anterior obtemos o seguinte resultado:

$$-\beta U - \frac{1}{2}\beta_2 U'' + \gamma |U|^2 U = 0, \quad \text{onde } U = U(t) \quad (3.15)$$

Esta equação tem soluções analíticas na forma de *sech*. Procurando uma solução do tipo $U = b \operatorname{sech}\left(\frac{at}{t_0}\right)$, onde a , b e t_0 são constantes.

Tem-se que as primeira e segunda derivadas em ordem ao tempo são:

$$U' = \frac{\partial}{\partial t} \left[b \operatorname{sech}\left(\frac{at}{t_0}\right) \right] = -\frac{ab}{t_0} \operatorname{sech}\left(\frac{at}{t_0}\right) \tanh\left(\frac{at}{t_0}\right) \quad (3.16)$$

$$U'' = -\frac{a^2 b}{t_0^2} \left[-\operatorname{sech}\left(\frac{at}{t_0}\right) + 2 \operatorname{sech}^3\left(\frac{at}{t_0}\right) \right] \quad (3.17)$$

Substituindo esta equação na anterior obtemos o seguinte resultado:

$$-\beta b \operatorname{sech}\left(\frac{at}{t_0}\right) + \frac{1}{2}\beta_2 \frac{a^2}{t_0^2} b \left[-\operatorname{sech}\left(\frac{at}{t_0}\right) + 2 \operatorname{sech}^3\left(\frac{at}{t_0}\right) \right] + \gamma b^3 \operatorname{sech}^3\left(\frac{at}{t_0}\right) = 0 \quad (3.18)$$

Para que esta equação seja satisfeita para todos os valores de t , é necessário que os termos em *sech* e em *sech*³ se anulem. Esta condição resulta no seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} -\beta b - \frac{1}{2}\beta_2 \frac{a^2}{t_0^2} b = 0 \\ \beta_2 \frac{a^2}{t_0^2} b + \gamma b^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -\frac{1}{2}\beta_2 \frac{a^2}{t_0^2} \\ \beta_2 \frac{a^2}{t_0^2} + \gamma b^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -\frac{1}{2}\beta_2 \frac{a^2}{t_0^2} \\ b^2 = -\frac{\beta_2 a^2}{\gamma t_0^2} \end{cases} \quad (3.19)$$

($\Rightarrow b^2 > 0 \Rightarrow \beta_2 < 0$)

É interessante verificar que sendo b^2 , a^2 , t_0^2 e γ positivos, a última equação implica que β_2 seja negativo, isto é, a equação admite solitões brilhantes apenas quando $\beta_2 < 0$.

O que resulta na equação para evolução do solitão:

$$A(z, t) = \sqrt[2]{\frac{\beta_2 a^2}{\gamma t_0^2}} \operatorname{sech}\left(\frac{at}{t_0}\right) e^{-i\frac{\beta_2 a^2}{2t_0^2} z} \quad (3.20)$$

Cálculo do Split Step Fourier

A rotina numérica desenvolvida foi testada colocando à entrada o sinal dado pela equação (3.20) com $z = 0$, tendo-se verificado que a amplitude da onda se mantém inalterada, tal como seria de esperar. Os resultados obtidos estão representados nas figuras 3.4 e 3.5.

3.1.2 Aplicação a meios Lambda

Neste caso iremos considerar a propagação de sinais em meios Lambda nos casos onde apenas existe variação dos sinais segundo uma dimensão transversal e uma dimensão longitudinal. A parte linear mantém-se igual à anterior, para NSE. Neste caso a equação de propagação toma a forma

$$i\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + GU = -iAU \quad (3.21)$$

Para simplificar a notação, z e x correspondem aqui às variáveis adimensionais introduzidas no capítulo anterior. Além disso, U representa a frequência de Rabi do campo de sinal. G e A estão associados ao operador não linear e são dados por $G = K\delta(\chi + |U|^2)/D$, $A = K\delta^2\gamma/D$ e $\chi = |f|^2 - \delta^2$, onde K , δ e γ são parâmetros que caracterizam o meio Lambda e F está associado ao campo de controlo. D é aproximadamente dado por $\chi^2 + 3\chi|U|^2 + 7\delta^2|U|^2 + \delta^2\gamma^2$.

Como se pode verificar, a parte linear da equação é muito semelhante à considerada anteriormente, e será por isso tratada da mesma forma. Relativamente à parte não linear, apesar de estar neste caso associado a dois termos com um aspeto diferente do anterior, também podemos usar o mesmo processo, tendo apenas o cuidado de modificar a expressão do operador não linear. Por razões de simplificação, nas simulações efetuadas optou-se por considerar o termo associado a A , o qual representa perdas, nulo.

É interessante verificar também que diferentes comportamentos são esperados dependendo do valor de χ . Efetivamente, se χ tomar valores elevados, a não linearidade será do tipo Kerr, isto é estará associada a termos não lineares cúbicos. Por outro lado, caso χ seja próximo de zero, a não

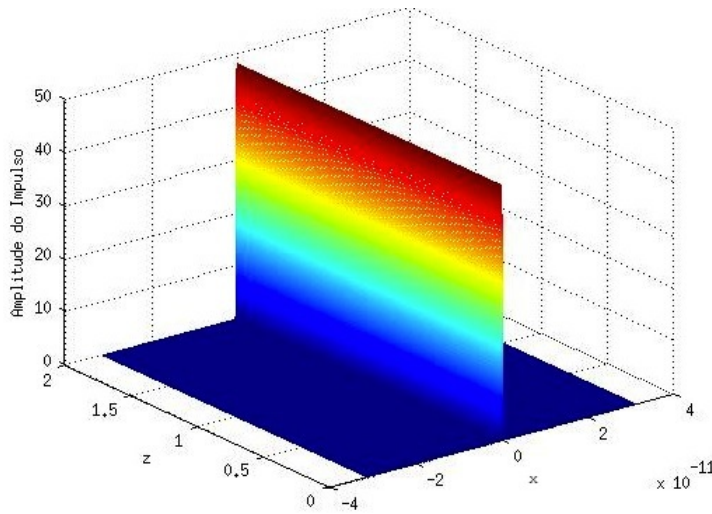


Figura 3.4: Propagação do Solitão Brilhante.

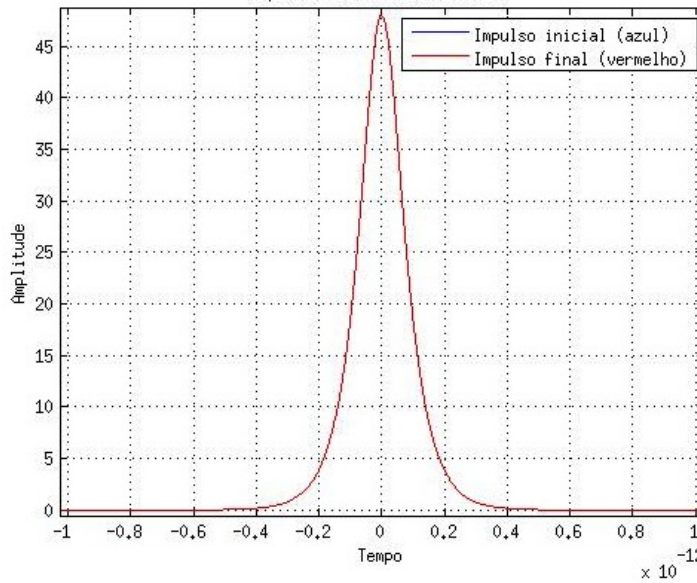


Figura 3.5: Sinal de entrada e saída.

linearidade terá uma natureza saturável. Nas simulações efetuadas considerou-se que $K = 10.38$, $\delta = -0.1$ e $\gamma = 0.3$.

3.2 Resultados

3.2.1 Sinal de Entrada com forma de *sech*

Nos primeiros testes efetuados considerou-se que o sinal de entrada tinha a forma de uma *sech*. Quanto ao campo de controlo, foram aqui consideradas duas situações distintas: campo de

controle constante e campo de controle com a forma de uma função gaussiana.

3.2.1.1 Campo de Controle Constante

Primeiramente iremos considerar campos de controle constantes de valor F_0 . A ideia será analisar como F_0 influencia a variação do sinal de entrada.

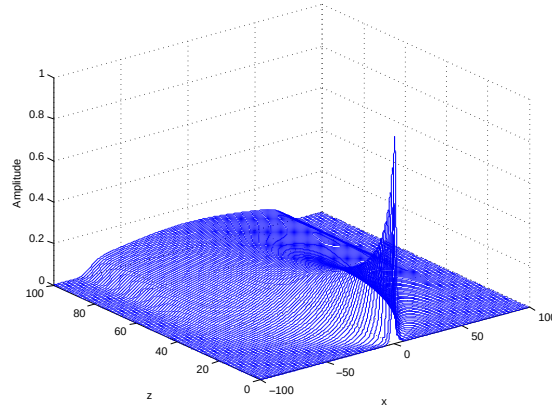


Figura 3.6: Propagação considerando o campo de controle $F_0 = 0$.

Como pode ser observado na imagem 3.6, com o campo de controle com um valor constante igual a zero, a amplitude do sinal de entrada diminui ao longo da propagação, havendo também um alargamento sequencial (difração) do impulso de sinal de entrada. Quando os campos de controle são dados por $F_0 = 10$ e $F_0 = 100$ o sinal propaga-se de forma muito semelhante à propagação para o campo de controle dado por $F_0 = 0$.

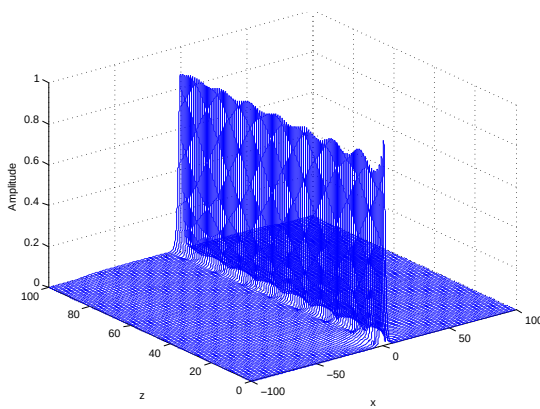


Figura 3.7: Propagação considerando o campo de controle $F_0 = 1$.

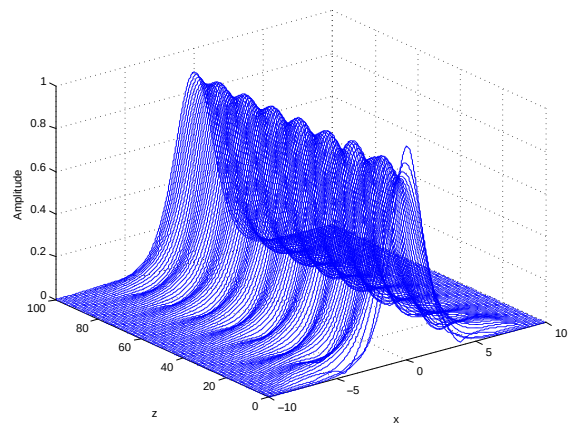


Figura 3.8: Propagação considerando o campo de controle $F_0 = 1$ com ampliação do centro.

No entanto, se o campo de controle for dado por $F_0 = 1$ o comportamento torna-se bastante diferente, como pode ser observado na figura 3.7 e a sua ampliação central na 3.8.

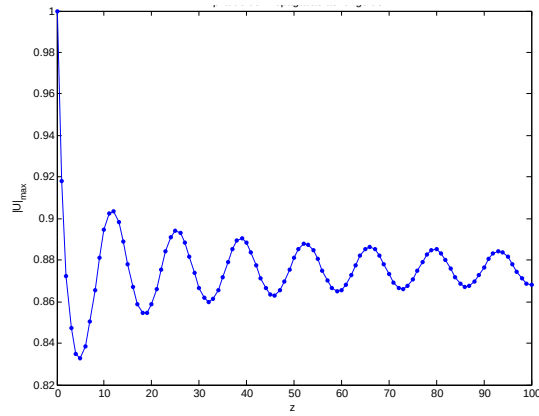


Figura 3.9: Amplitudes de U considerando o campo de controle $F_0 = 1$.

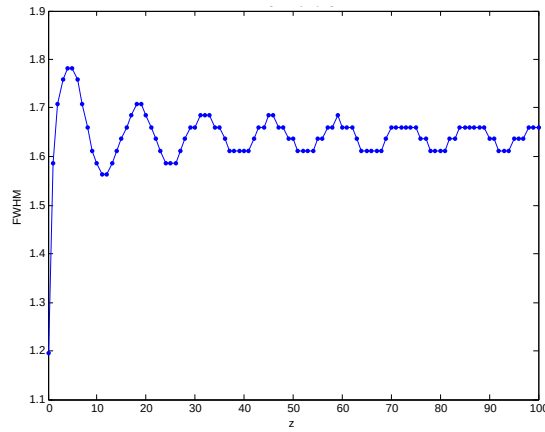


Figura 3.10: FWHM de U considerando o campo de controle $F_0 = 1$.

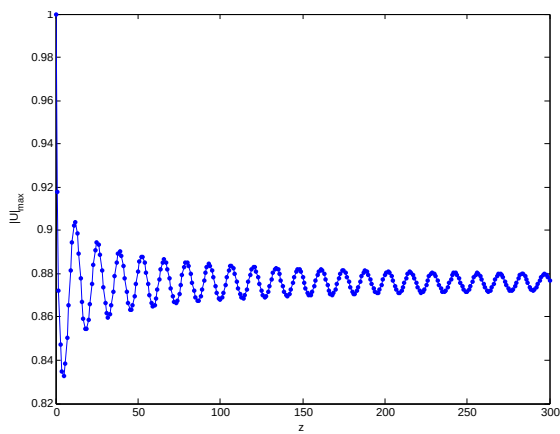


Figura 3.11: Amplitudes de U considerando o campo de controle $F_0 = 1$ para uma distância de propagação igual a 300.

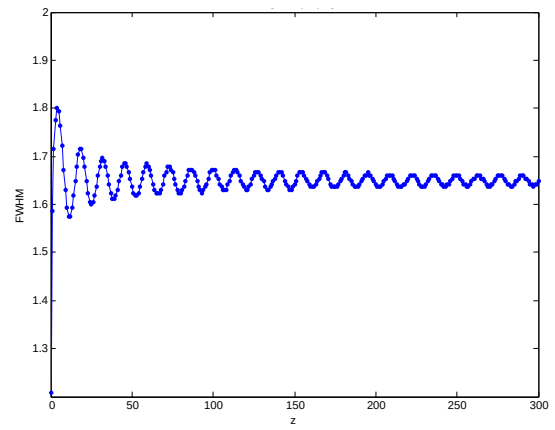


Figura 3.12: FWHM Considerando o campo de controle $F_0 = 1$ para uma distância de propagação igual a 300.

A observação das figuras 3.7 e 3.8 indica que o sinal tende a evoluir de forma periódica. Para que possamos melhor perceber as características desta evolução iremos analisar um gráfico com as amplitudes de pico do sinal propagado, 3.9 e outro gráfico que diz respeito à *FWHM - Full Width at Half Maximum* do mesmo, 3.10. Um bom método para saber se o sinal propagou-se obtendo a forma de um solitão, ou não, é analisar a amplitude do impulso ao longo da propagação, assim como a sua *FWHM - Full Width at Half Maximum*, isto, é a largura do sinal quando este possui metade da sua amplitude máxima, ver figura 3.13. Se a amplitude do impulso se mantiver ou variar periodicamente sabemos que se trata de um solitão. Sabemos também que se for um solitão a amplitude e largura estão relacionados, estas são inversamente proporcionais. A diminuição da largura do solitão implica um aumento na amplitude do mesmo. O cálculo desses parâmetros foi adicionado à rotina *Beam Propagation Method* implementada.

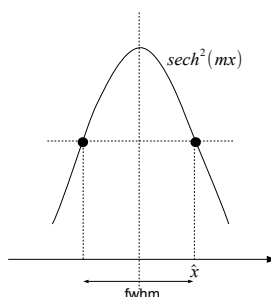


Figura 3.13: Cálculo da largura total a meia altura (*fwhm*) para a intensidade de solitões.

Como se pode observar nas figuras 3.9 e 3.10, a amplitude de pico e a largura do sinal variam de forma aproximadamente periódica, exibindo oscilações com amplitudes decrescentes. Com o objetivo de verificar se a forma do sinal se torna estacionária com o aumento da distância de propagação voltamos a repetir a simulação para uma distância de propagação $z = 300$. As amplitudes de propagação considerando um campo de controlo unitário para uma propagação ao longo de 300 e a *FWHM* apresentam-se nas imagens 3.11 e 3.12 respetivamente. Da observação destas figuras é possível concluir que apesar da amplitude de pico e largura do sinal ser decrescente com a distância de propagação, a sua variação é lenta, implicando que em $Z = 300$ as características do sinal sejam semelhantes às que se tem em $Z = 100$.

Se compararmos os resultados obtidos para o mesmo sinal de entrada, dado por $sech(x)$, variando apenas o campo do sinal de controlo para valores constantes, sendo estes, 0, 1, 10 e 100, conseguimos concluir através dos gráficos 3.14, 3.15 e 3.16 que para os casos em que temos campos de controlo constantes dados por $F = 0, 10$ e 100 o sinal difrata, isto é perde amplitude e sofre um alargamento na sua base. Apenas temos propagação que mantenha a forma semelhante à do sinal de entrada, isto é sem considerável difração quando o campo de controlo é unitário, note-se porém a ligeira perda de amplitude.

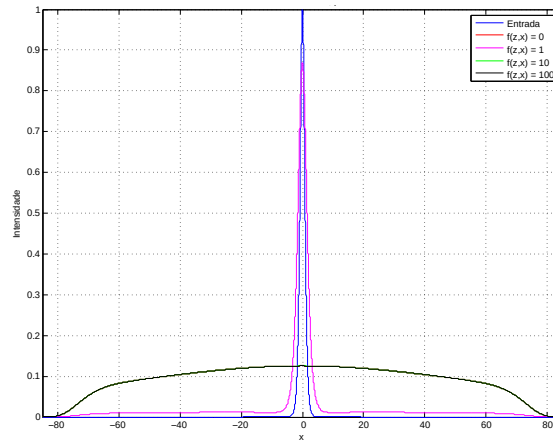


Figura 3.14: Amplitudes do sinal de entrada e sinais de saída para sinais de controlo F=0, 1, 10 e 100, para Z = 100.

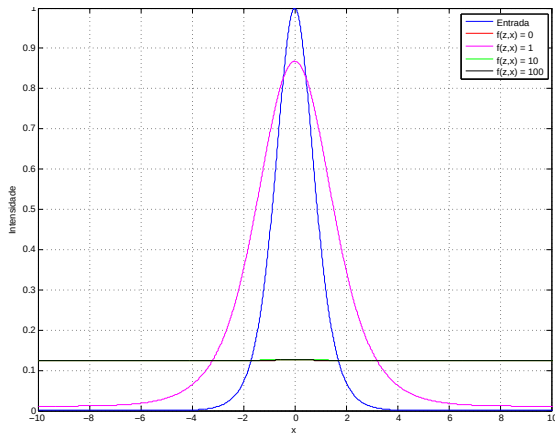


Figura 3.15: Amplitudes do sinal de entrada e sinais de saída para sinais de controlo F=0, 1, 10 e 100 - Foco central, para Z = 100.

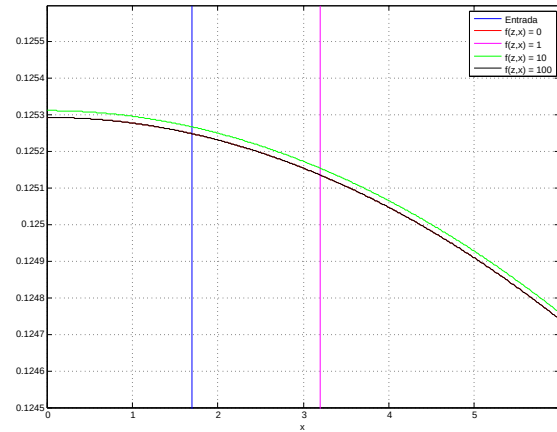


Figura 3.16: Amplitudes do Sinal de Entrada e Sinais de Saída para Sinais de Controlo F=0, 1, 10 e 100 - Foco Lateral, para Z = 100.

3.2.1.2 Campo de Controlo dado por uma Função Gaussiana

Neste ponto iremos utilizar um campo de controlo dado pela seguinte onda gaussiana:

$$F = A_0 e^{-\frac{1}{2}(x)^2},$$

Foram testados diferentes valores da amplitude da gaussiana, A_0 , e os resultados obtidos, demonstrados de seguida, podem ser bastante interessantes. Se a amplitude da gaussiana for igual a 0 a onda do sinal de entrada, $sech(x)$, propaga-se exatamente da mesma maneira que foi explicada anteriormente para o caso de um campo de controlo constante, $F_0 = 0$, como era de esperar. Se considerarmos a amplitude da função gaussiana, A_0 igual à unidade observamos que durante a propagação o sinal ajusta-se até que tende estabilizar a sua variação. Este fenómeno poderá ser observado nos gráficos das figuras 3.17 e 3.18 e as suas amplitudes e *FWHM* podem ser analisa-

dos em 3.19 e 3.20, respetivamente. Note-se a forma do sinal no fim da sua propagação. Pode-se observar o que aparenta ser o início da estabilização do sinal, havendo um nítido padrão, tanto na amplitude do sinal propagado como no seu *FWHM*, a começar a formar-se nesta região. É possível que para uma distância de propagação, z , superior este sinal venha a tornar-se num solitão.

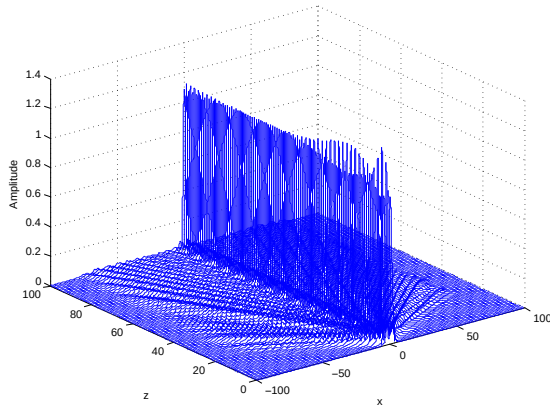


Figura 3.17: Propagação do sinal com campo de controlo dado por $F = e^{-\frac{1}{2}(x)^2}$ para $Z = 100$.

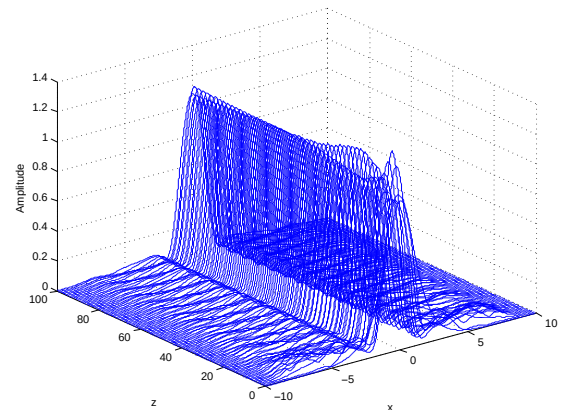


Figura 3.18: Propagação do sinal com campo de controlo dado por $F = e^{-\frac{1}{2}(x)^2}$ com Foco central, para $Z = 100$.

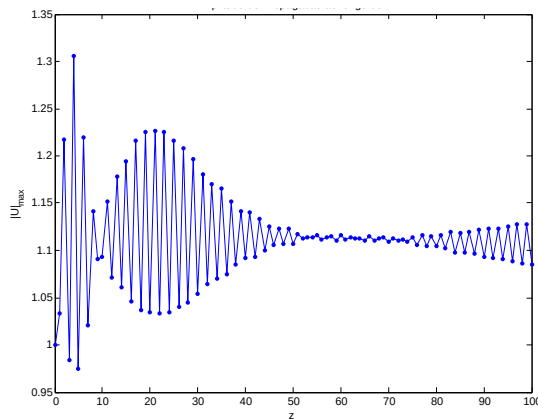


Figura 3.19: Amplitudes de propagação do sinal com campo de controlo dado por $F = e^{-\frac{1}{2}(x)^2}$ para $Z = 100$.

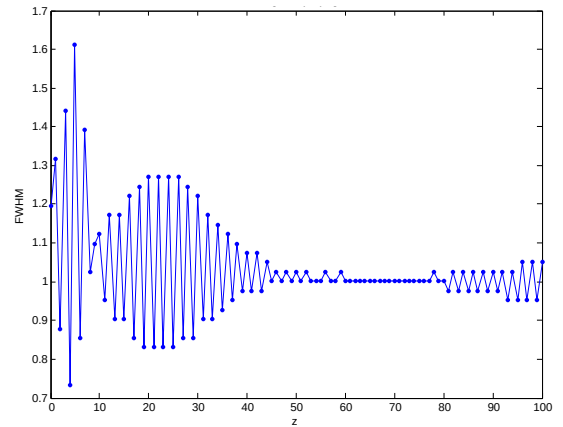


Figura 3.20: FWHM de propagação do sinal com campo de controlo dado por $F = e^{-\frac{1}{2}(x)^2}$ para $Z = 100$.

Com uma amplitude do campo de controlo $A_0 = 10$ obtemos os resultados da propagação nas figuras 3.21 e 3.22 e a sua amplitude e *FWHM* nas figuras 3.23 e 3.24, respetivamente. Podemos ver que a amplitude do sinal é inconstante, variando o seu pico. Também nota-se, na figura 3.21, a existências de perturbações na base do sinal. Estas, surgem, muito provavelmente, devido à perda de amplitude do sinal durante a propagação, sendo que a perda de amplitude no sinal surge como perturbações laterais. Estas são efeito da difração do sinal aquando a sua perda de amplitude. Este efeito é também visível no caso de um campo de controlo gaussiano de amplitude $A_0 = 1$, figura 3.17, onde podemos ver que a maior perturbação surge na zona onde há uma maior perda

de amplitude do sinal propagado. A amplitude deste sinal, figura 3.23, varia inversamente ao seu $FWHM$, figura 3.24, mas para uma distância $z = 100$ esta não se propaga com nenhum período nítido.

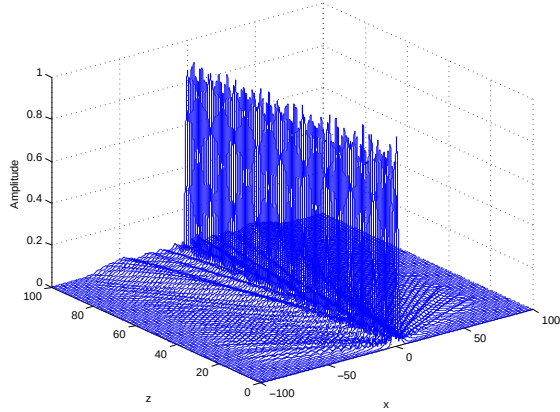


Figura 3.21: Propagação do sinal com campo de controlo dado por $F = 10e^{-\frac{1}{2}(x)^2}$, para $Z = 100$.

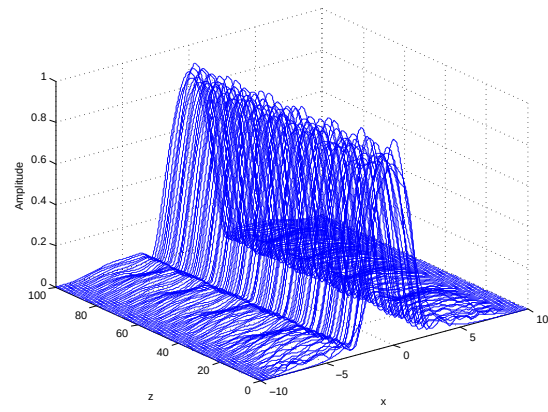


Figura 3.22: Propagação do sinal com campo de controlo dado por $F = 10e^{-\frac{1}{2}(x)^2}$. Foco central, para $Z = 100$.

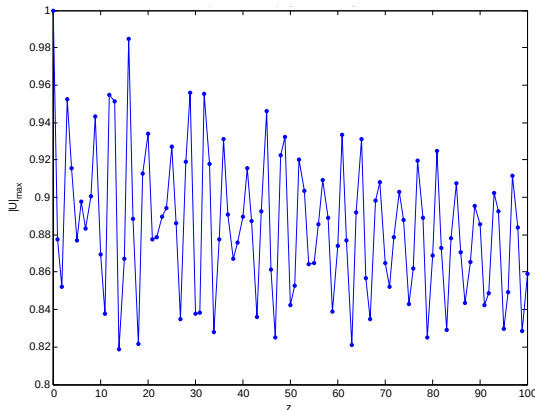


Figura 3.23: Amplitudes de propagação do sinal com campo de controlo dado por $F = 10e^{-\frac{1}{2}(x)^2}$, para $Z = 100$.

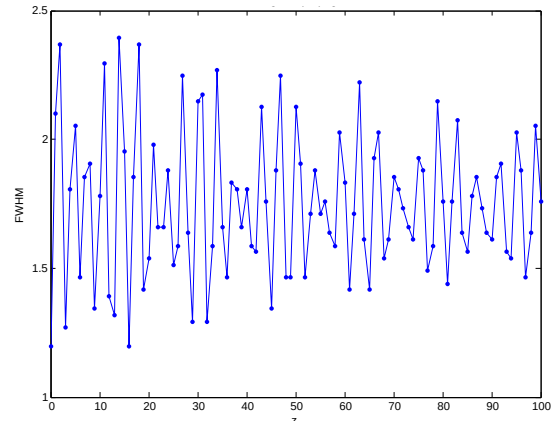


Figura 3.24: FWHM de propagação do sinal com campo de controlo dado por $F = 10e^{-\frac{1}{2}(x)^2}$, para $Z = 100$.

Outro resultado bastante interessante aparece quando a amplitude do campo de controlo é dada por $A_0 = 100$. A propagação tende a tornar-se periódica, isto é, no troço final da propagação o sinal parece que está a repetir-se de forma idêntica. Isto consegue ser observado em 3.25, 3.26 e a sua amplitude e FWHM podem ser vistos em 3.27 e 3.28. No entanto, a amplitude do sinal diminui ao longo da sua propagação, como se pode ver na figura 3.27, tal como acontece no caso onde o campo de controlo tem $A_0 = 10$. Comparando os gráficos da propagação dos sinais com $A_0 = 10$ e $A_0 = 100$ com foco central, figuras 3.22 e 3.26 respetivamente, podemos ver mais nitidamente que as zonas onde há maior perturbação lateral correspondem à maior perda de amplitude do sinal.

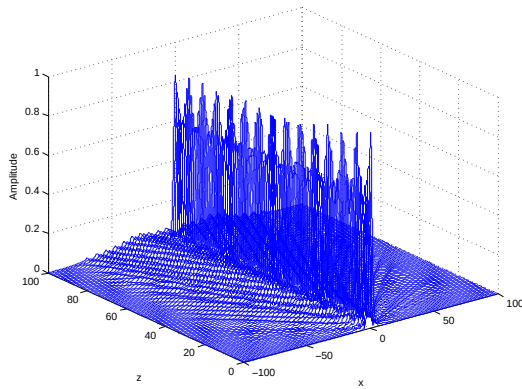


Figura 3.25: Propagação do sinal com campo de controlo dado por $F = 100e^{-\frac{1}{2}(x)^2}$, para $Z = 100$.

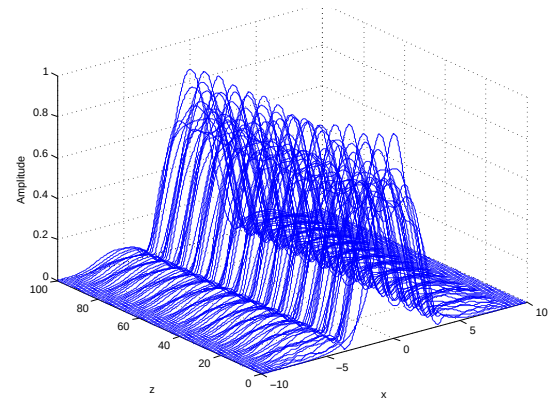


Figura 3.26: Propagação do sinal com campo de controlo dado por $F = 100e^{-\frac{1}{2}(x)^2}$ Foco centro, para $Z = 100$.

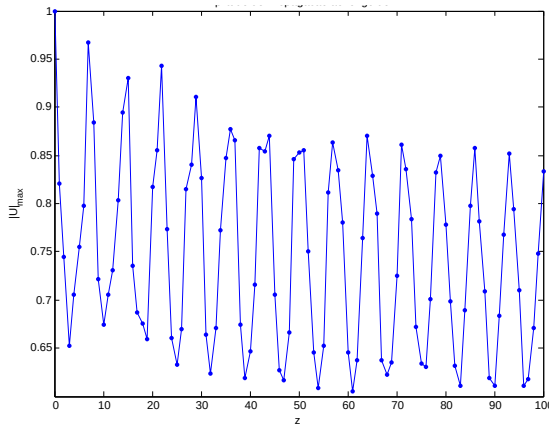


Figura 3.27: Amplitudes da propagação do sinal com campo de controlo dado por $F = 100e^{-\frac{1}{2}(x)^2}$, para $Z = 100$.

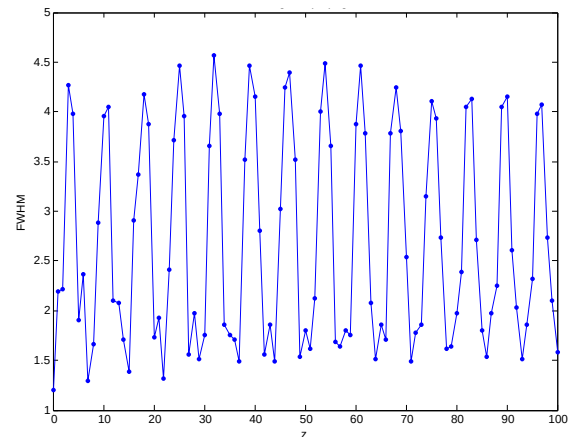


Figura 3.28: FWHM do sinal com campo de controlo dado por $F = 100e^{-\frac{1}{2}(x)^2}$, para $Z = 100$.

Comparando os sinais de saída obtidos para diferentes valores de A_0 , evidenciados nas figuras 3.29 e 3.30. Podemos ver que assim como esperado, o sinal para um campo de controlo dado por uma gaussiana com uma amplitude nula difrata bastante. Note-se agora que obtemos propagação sem considerável difração nos casos em que a amplitude do campo de controlo é $A_0 = 10$ e 100, para o caso em que a amplitude é unitária temos, agora um ganho na amplitude da saída relativamente à entrada, assim como um estreitamento do sinal relativamente à entrada.

3.2.2 Sinal de Entrada com forma de onda de Airy Finita

Um impulso de Airy é uma forma de onda que revelaria uma área de maior intensidade, seguido de áreas adjacentes cada vez menos luminosas até ao infinito. Em aplicações reais o feixe é truncado para ter uma energia finita. Enquanto o impulso se propaga ele não difrata, isto é, não se espalha, este tem também a característica de seguir uma trajetória parabólica.

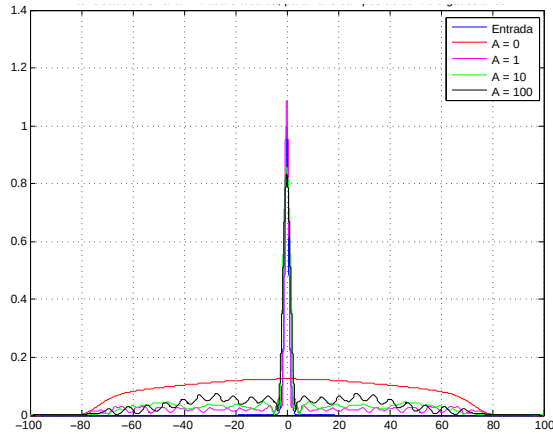


Figura 3.29: Amplitudes do sinal de entrada e sinais de saída para diferentes valores da amplitude da gaussiana do sinal de controlo, para $Z = 100$.

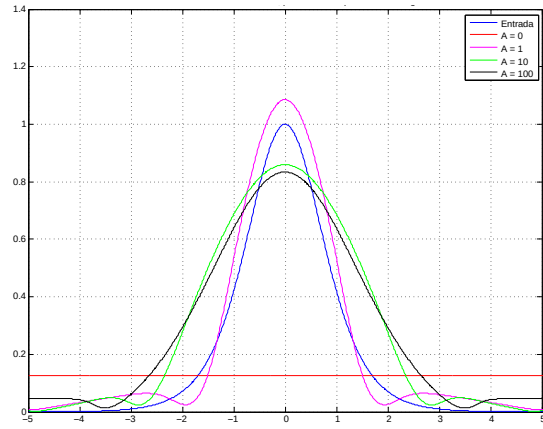


Figura 3.30: Amplitudes do sinal de entrada e sinais de saída para diferentes valores da amplitude da gaussiana do sinal de controlo com ampliação central, para $Z = 100$.

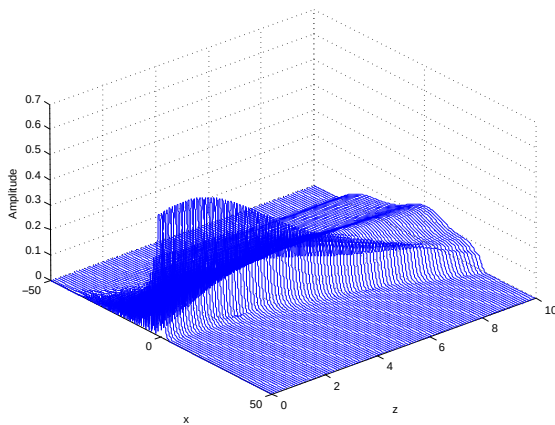


Figura 3.31: Propagação do sinal de entrada dado por um Impulso de Airy com um campo de controlo unitário constante, para $Z = 10$.

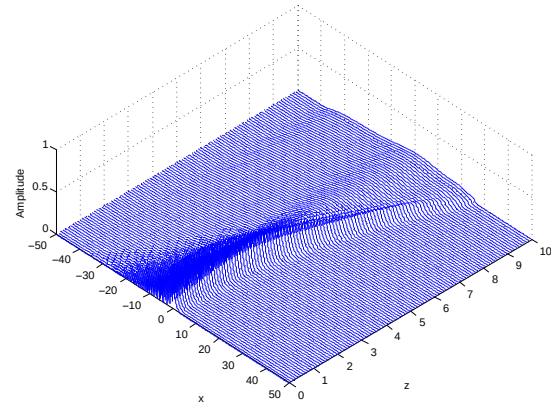


Figura 3.32: Propagação do sinal de entrada dado por um Impulso de Airy com um campo de controlo unitário constante, para $Z = 10$, vista de cima.

Outro teste efetuado foi o de colocar um impulso de Airy que se propaga obliquamente à entrada, $Ai(x)e^{ax}$ quando o campo de controlo, $F(x)$ é constante e unitário. Consideramos o valor de a igual a 0.1 e pudemos inferir que o sinal propaga-se com um desvio parabólico, como era de esperar devido ao sinal de entrada. Se considerarmos outros valores constantes para o campo de controlo, sendo estes, 0, 10 e 100 obtemos gráficos iguais entre si, e bastante semelhantes ao gráfico mostrado em 3.31. As ligeiras diferenças mais notórias nas amplitudes dos sinais de entrada e de saída para $F = 0, 1, 10$ e 100 poderão ser analisadas na imagem 3.35. Nesta pode-se facilmente verificar a sobreposição das amplitudes para os casos de $F = 0, 10$ e 100.

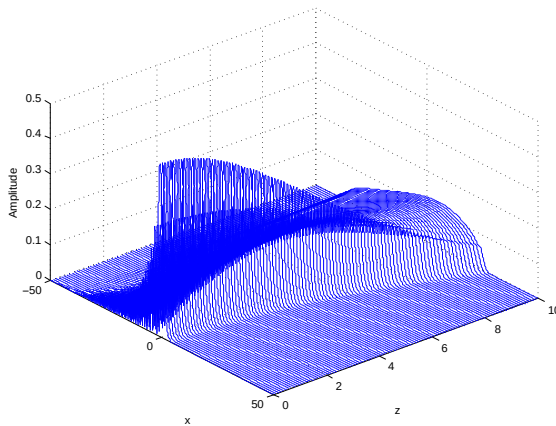


Figura 3.33: Propagação do sinal de entrada dado por um Impulso de Airy com um campo de controlo constante, $F = 100$, para $Z = 10$.

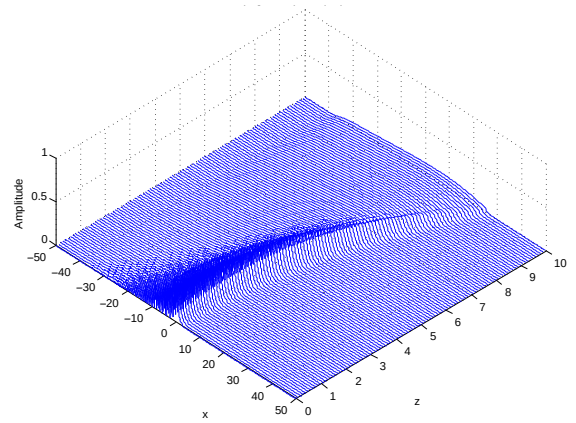


Figura 3.34: Propagação do sinal de entrada dado por um Impulso de Airy com um campo de controlo constante, $F = 100$, para $Z = 10$, vista de cima.

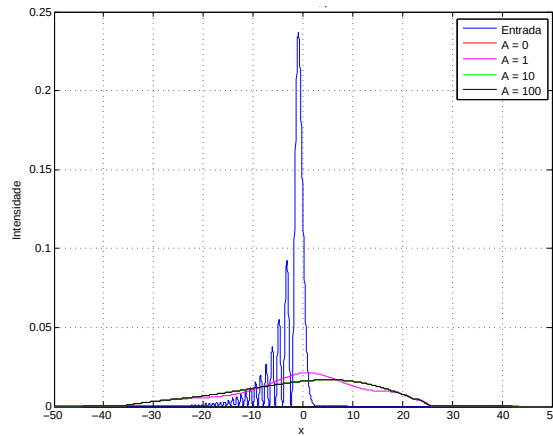


Figura 3.35: Amplitudes dos sinais de entrada e saídas para sinal de entrada dada por um Impulso de Airy campos de controlo constantes dados por $F = 0, 1, 10$ e 100 , para $Z = 100$.

3.3 Solitões de Baixa Amplitude

Neste ponto iremos investigar a formação de sinais que se propagam em forma de solitão. Para tal começaremos por investigar solitões de baixa amplitude:

Se desprezarmos o termo associado a perdas, a equação de propagação toma a forma:

$$i \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + GU = 0$$

onde,

$$G = \frac{k\delta(\chi + |U|^2)}{\chi^2 + \delta^2\gamma^2 + |U|^2 \left[3\chi + 7\delta^2 + \frac{\delta^2\gamma^2}{|f|^2} + 3|U|^2 + \frac{|U|^4}{|f|^2} \right]}$$

Admitamos que a amplitude dos solitões que procuramos é suficientemente baixa para permitir

escrever

$$3\chi + 7\delta^2 + \frac{\delta^2\gamma^2}{|f|^2} + 3|U|^2 + \frac{|U|^4}{|f|^2} \simeq 3\chi + 7\delta^2 + \frac{\delta^2\gamma^2}{|f|^2}$$

Para isto se verificar:

$$3\chi + 7\delta^2 + \frac{\delta^2\gamma^2}{|f|^2} \gg 3|U|^2 + \frac{|U|^4}{|f|^2}$$

o que será válido, por exemplo, caso $|U|^2 \ll \delta^2$.

Como se está a considerar $\delta = -0.1$, isto obrigaria a que $|U|_{MAX} \cong 0.01$.

Admitamos ainda que o campo de controlo é constante.

Daí podemos concluir que:

$$k\delta\chi = k\delta(|f|^2 - \delta^2) = a$$

$$k\delta = b$$

$$\chi^2 + \delta^2\gamma^2 = c$$

$$3\chi + 7\delta^2 + \frac{\delta^2\gamma^2}{|f|^2} = d$$

onde a, b, c e d são constantes.

Além disso, admitamos ainda que estamos à procura de solitões brilhantes tais que

$$U(x, z) = \sqrt{r} y(x) e^{i\beta z}$$

onde $\sqrt{r} = |U|_{MAX}$ e y é uma função real normalizada com valores entre 0 e 1, tal que $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ e $y(x \rightarrow \pm\infty) \rightarrow 0$.

Substituindo esta expressão na equação de propagação, esta toma a forma

$$-\beta y + \frac{1}{2}y'' + \frac{a + bry^2}{c + dry^2}y = 0$$

O termo não linear acima pode ser descrito como $\frac{1}{c} \frac{a + bry^2}{1 + \frac{d}{c}ry^2}$. Admitindo que $\frac{d}{c}r \ll 1$, pode ainda escrever-se

$$\frac{1}{c} \left(a + \left(b - \frac{da}{c} \right) ry^2 \right)$$

onde se admitiu que o termo $\frac{bd}{c}r^2y^4$ será desprezável face a a . Usando esta expressão na equação de propagação, esta toma a forma:

$$-\beta y + \frac{1}{2}y'' + \frac{a}{c}y + \frac{r}{c} \left(b - \frac{da}{c} \right) y^3 = 0$$

Esta equação diferencial tem soluções analíticas na forma de *sech*. Na verdade, substituindo

$$y(x) = \text{sech}(mx)$$

na equação acima, obtém-se:

$$\begin{aligned} y &= \text{sech}(mx) \\ y' &= -m \text{sech}(mx) \tanh(mx) \\ y'' &= -m^2 \left(-(\text{sech}(mx) \tanh(mx))^2 + \text{sech}(mx)^3 \right) = -m^2 \left(-\text{sech}(mx) + 2\text{sech}(mx)^3 \right) \\ \left(\frac{a}{c} - \beta \right) \text{sech}(mx) - \frac{m^2}{2} \left(-\text{sech}(mx) + 2\text{sech}(mx)^3 \right) + \frac{r}{c} \left(b - \frac{da}{c} \right) \text{sech}(mx)^3 &= 0 \end{aligned}$$

Para que esta equação seja satisfeita para todo o x , é necessário que os termos em $\text{sech}(mx)$ e em $(\text{sech}(mx))^3$ se anulem de forma independente.

Isto significa que é preciso ter

$$\begin{cases} \left(\frac{a}{c} - \beta \right) + \frac{m^2}{2} = 0 \\ -m^2 + \frac{r}{c} \left(b - \frac{da}{c} \right) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \beta = \frac{a}{c} + \frac{m^2}{2} \\ m^2 = \frac{r}{c} \left(b - \frac{da}{c} \right) \end{cases}$$

Para testar a existência de solitões, é necessário colocar à entrada do bpm o sinal

$$U(x, z=0) = \sqrt{r} y(x) = \sqrt{r} \text{sech} \left(\sqrt{\frac{r}{c} \left(b - \frac{da}{c} \right)} x \right)$$

tendo o cuidado de garantir que $\frac{r}{c} \left(b - \frac{da}{c} \right) > 0$.

Dado que $c = \chi^2 + \delta^2 \gamma^2$, $c \geq 0$, $\frac{r}{c} \left(b - \frac{da}{c} \right) > 0$ resulta em $bc - da > 0$.

Substituindo as expressões de a , b , c e d , tem-se então

$$bc - da = k\delta \left\{ \chi^2 + \delta^2 \gamma^2 - \left(3\chi + 7\delta^2 + \frac{\delta^2 \gamma^2}{|f|^2} \right) \chi \right\}$$

Como $k\delta < 0$, é necessário que $\left\{ \chi^2 + \delta^2 \gamma^2 - \left(3\chi + 7\delta^2 + \frac{\delta^2 \gamma^2}{|f|^2} \right) \chi \right\}$ seja um número negativo.

$$\begin{aligned} \left\{ \chi^2 + \delta^2 \gamma^2 - \left(3\chi + 7\delta^2 + \frac{\delta^2 \gamma^2}{|f|^2} \right) \chi \right\} &= \chi^2 + \delta^2 \gamma^2 - 3\chi^2 - 7\delta^2 \chi - \frac{\delta^2 \gamma^2}{|f|^2} \chi = \\ &= \frac{1}{|f|^2} [-2|f|^6 - 3\delta^2 |f|^4 + 5\delta^4 |f|^2 + \delta^4 \gamma^2] \end{aligned}$$

Encontrando-se as raízes de $2|f|^6 - 3\delta^2 |f|^4 + 5\delta^4 |f|^2 + \delta^4 \gamma^2$ quando $\delta = -0.1$ e $\gamma = 0.3$, verifica-se que existe uma raiz real e duas raízes complexas.

A raiz real está em 0.016546 o que implica que existem solitões brilhantes para $|f|^2 > 0.016546$.

É interessante também relacionar m com a largura dos solitões. $fwhm = 2\hat{x}$, onde $\text{sech}^2(m\hat{x}) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \text{sech}(m\hat{x}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\text{Sendo } \text{sech}(m\hat{x}) = \frac{2}{(e^{m\hat{x}} + e^{-m\hat{x}})},$$

$$fwhm = \frac{2 \times 0.8814}{m} = \frac{1.7627}{m}$$

3.3.1 Teste da Rotina BPM para Procurar Solitões de Baixa Amplitude

Para testar a existência de solitões, é necessário, como referido anteriormente, colocar à entrada do BPM o sinal

$$U(x, z = 0) = \sqrt{r} y(x) = \sqrt{r} \text{sech} \left(\sqrt{\frac{r}{c} \left(b - \frac{da}{c} \right)} x \right)$$

Este foi testado para alguns valores constantes do campo de controlo.

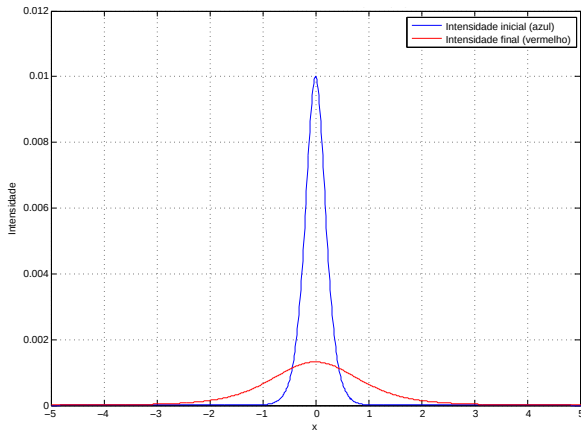


Figura 3.36: Intensidades do sinal de entrada e saída para um campo de controlo constante igual a 0.25 numa distância de propagação de 100 metros.

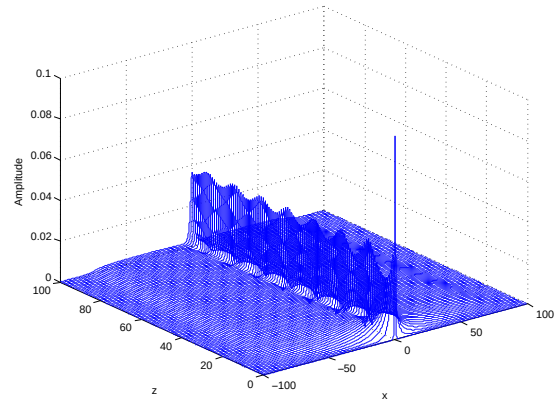


Figura 3.37: Propagação do sinal para um campo de controlo constante igual a 0.25 numa distância de propagação de 100 metros.

O primeiro valor do campo de controlo considerado foi de 0.25. Como pode ser analisado pelas figuras 3.36 a 3.39 O sinal parece propagar-se de uma forma periódica. A amplitude ao longo da propagação e o FWHM também variam praticamente periodicamente, provavelmente para uma distância de propagação maior atingiriam a forma de solitão exata.

Para o campo de controlo igual a 0.75 verificamos os resultados obtidos da simulação através das imagens 3.40 a 3.43. Nota-se que o sinal de saída está quase sobreposto a entrada. O sinal propaga-se de forma praticamente constante. Os gráficos da amplitude de propagação mostram-se constantes e o do FWHM mostram-se a variar de forma periódica. Assim como o resultado anterior provavelmente também obteríamos solitões se a distância de propagação fosse superior.

Como podemos inferir a partir da análise das figuras 3.44 a 3.47 para um campo de controlo unitário estamos próximos de um solitão fundamental. Observa-se que o sinal de saída está praticamente sobreposto ao de entrada e a propagação dá-se de forma muito contínua, como pode ser confirmada pelo gráfico das amplitudes de propagação. O FWHM mostra a existência de uma alteração na largura do impulso a meia altura.

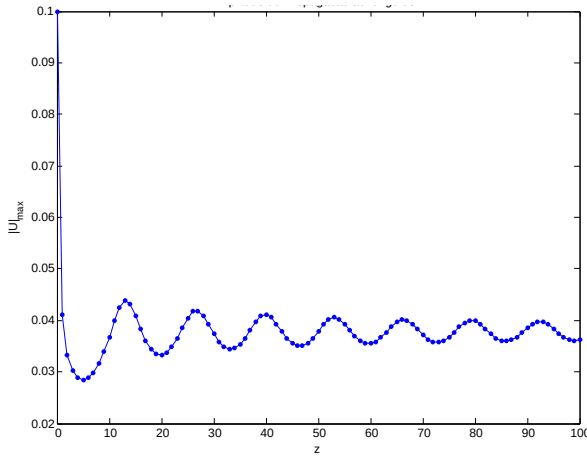


Figura 3.38: Amplitudes da propagação para um campo de controlo constante igual a 0.25 numa distância de propagação de 100 metros.

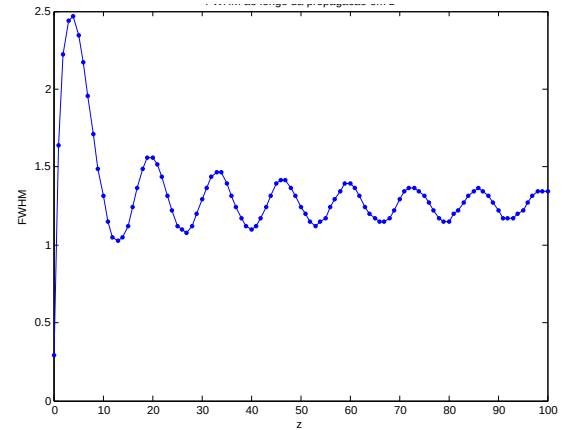


Figura 3.39: FWHM para um campo de controlo constante igual a 0.25 numa distância de propagação de 100 metros.

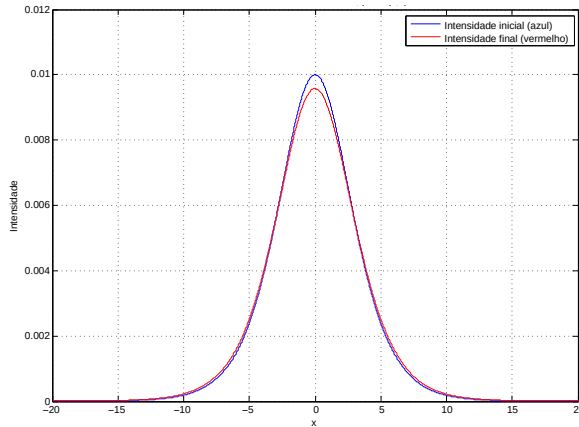


Figura 3.40: Intensidades do sinal de entrada e saída para um campo de controlo constante igual a 0.75 numa distância de propagação de 100 metros.

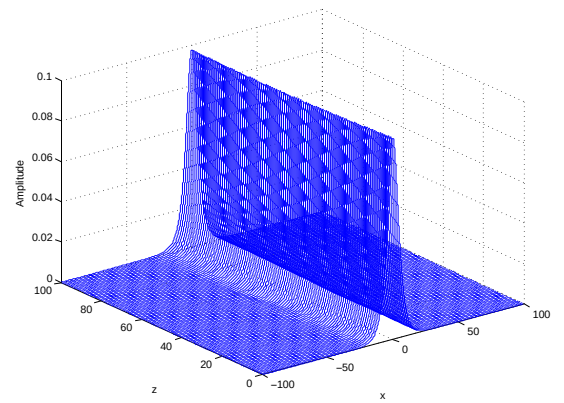


Figura 3.41: Propagação do sinal para um campo de controlo constante igual a 0.75 numa distância de propagação de 100 metros.

Foi ainda efetuado um gráfico que relaciona $\sqrt{r}fwhm = \frac{1.7627c}{\sqrt{(bc-da)}}$ com $|f|^2$. a, b, c e d estão definidos anteriormente e dependem de $|f|^2$. Este encontra-se exposto na figura 3.48. Como podemos verificar com o aumento do valor da função de controlo, que é constante, o $\sqrt{r}fwhm$ também aumenta.

3.4 Solitões para Campos de Controlo Elevados

Quando o campo de controlo toma valores elevados, $\chi = |f|^2 - \delta^2$ será também elevado. Neste caso, a expressão para G pode ser simplificada e toma a forma:

$$G = \frac{k\delta(\chi + |U|^2)}{\chi + \delta^2\gamma^2 + |U|^2 \left[3\chi + 7\delta^2 + \frac{\delta^2\gamma^2}{|f|^2} + 3|U|^2 + \frac{|U|^4}{|f|^2} \right]} \simeq \frac{k\delta(\chi + |U|^2)}{\chi^2 + 3\chi|U|^2}$$

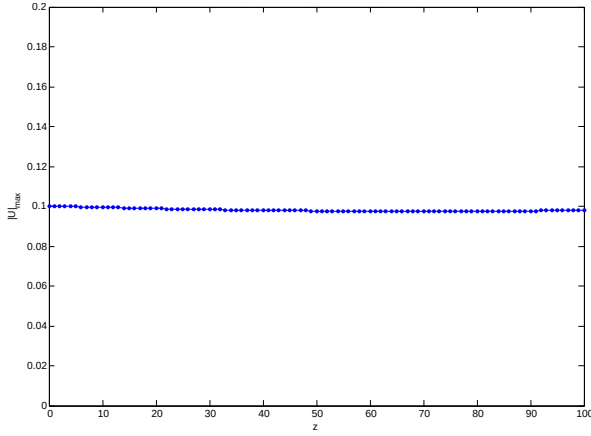


Figura 3.42: Amplitudes da propagação para um campo de controlo constante igual a 0.75 numa distância de propagação de 100 metros.

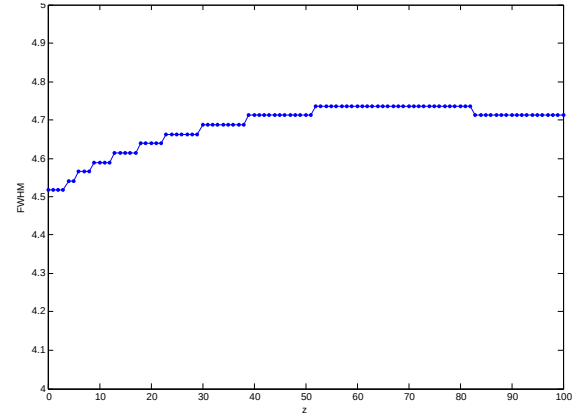


Figura 3.43: FWHM para um campo de controlo constante igual a 0.75 numa distância de propagação de 100 metros.

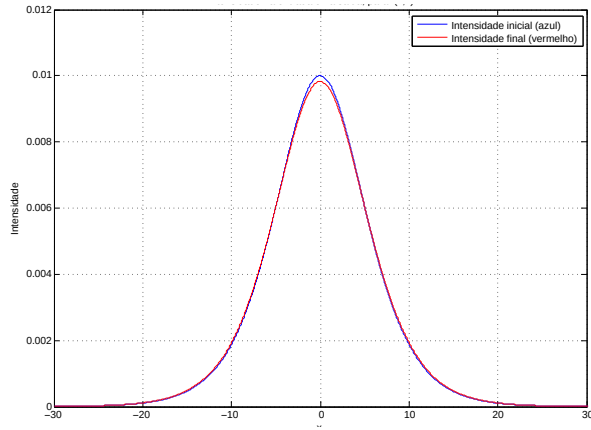


Figura 3.44: Intensidades do sinal de entrada e saída para um campo de controlo constante igual a 1 numa distância de propagação de 100 metros.

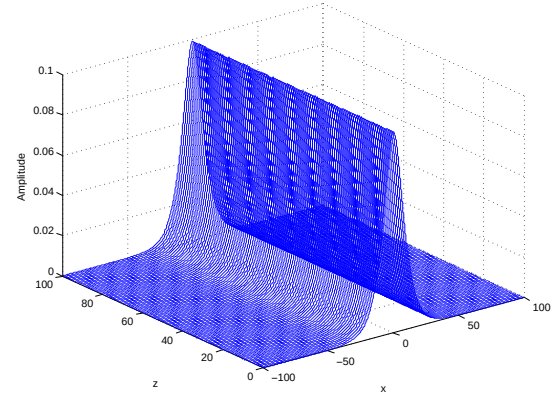


Figura 3.45: Propagação do sinal para um campo de controlo constante igual a 1 numa distância de propagação de 100 metros.

onde se consideram que $\delta^2 \gamma^2 + |U|^2 \left(7\delta^2 + \frac{\delta^2 \gamma^2}{|f|^2} + 3|U|^2 + \frac{|U|^4}{|f|^2} \right)$ é desprezável face a χ^2 .

A expressão acima pode ser ainda mais simplificada se for utilizada uma expansão da série de Taylor:

$$G \cong \frac{k\delta}{\chi^2} \frac{\chi + |U|^2}{1 + \frac{3}{\chi}|U|^2} \cong \frac{k\delta}{\chi^2} (\chi + |U|^2) \left(1 - \frac{3}{\chi}|U|^2 \right)$$

onde os termos $\left(\frac{3}{\chi}|U|^2 \right)^n$ de ordem superior a 1 foram desprezados face a 1.

Efetuada a multiplicação acima e usando argumentos semelhantes, pode finalmente obter-se

$$G \simeq \frac{k\delta}{\chi} - \frac{2k\delta}{\chi^2} |U|^2,$$

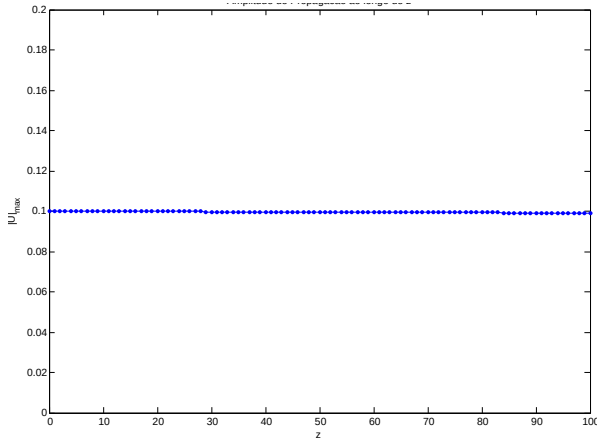


Figura 3.46: Amplitudes da Propagação para um campo de controlo constante igual a 1 numa distância de propagação de 100 metros.

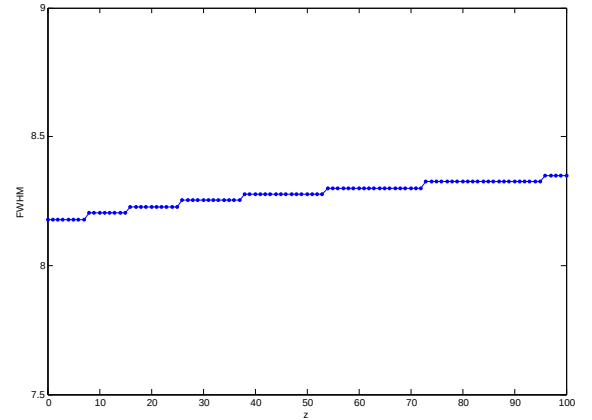


Figura 3.47: FWHM para um campo de controlo constante igual a 1 numa distância de propagação de 100 metros.

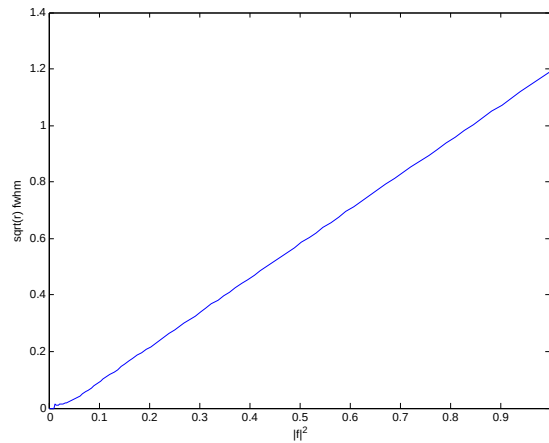


Figura 3.48: Gráfico que relaciona $\sqrt{r}fwhm$ com $|f|^2$.

o que substituindo na equação de propagação resulta em

$$i\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{k\delta}{\chi}U - \frac{2k\delta}{\chi^2}|U|^2U = 0$$

Esta equação tem a forma de equação não linear de Schrodinger, a qual admite soluções estacionárias na forma de *sech*. Para procurar estas soluções, consideremos

$$U(x, z) = \sqrt{r}y(x)e^{i\beta z}$$

onde, mais uma vez, $\sqrt{r} = |U|_{MAX}$ e y representa uma função real normalizada, tal que $0 \leq y \leq 1$ e $y(0) = 1, y'(0) = 0$ e $y(x \rightarrow \pm\infty) \rightarrow 0$. Substituindo esta expressão na equação diferencial anterior,

finalmente se chega à equação diferencial ordinária:

$$\left(\frac{k\delta}{\chi} - \beta\right)y + \frac{1}{2}y'' - \frac{2k\delta r}{\chi^2}y^3 = 0$$

Admitindo agora que $y(x) = \text{sech}(mx)$, e garantindo que os termos em $\text{sech}(mx)$ e em $\text{sech}^3(mx)$ se anulam de forma independente, leva então a

$$\begin{cases} \frac{k\delta}{\chi} - \beta + \frac{m^2}{2} = 0 \\ -m^2 + \frac{2k\delta r}{\chi^2} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \beta = \frac{k\delta}{\chi} + \frac{m^2}{2} \\ -m^2 = \frac{2k\delta r}{\chi^2} \end{cases}$$

Nota:

$$\begin{aligned} y = \text{sech}(mx) &\rightarrow y' = -m\text{sech}(mx)\tanh(mx) \\ y'' &= -m^2(-\text{sech}(mx) + 2\text{sech}^3(mx)) \\ \text{sech}^2(mx) + \tanh^2(mx) &= 1 \\ \Rightarrow \left(\frac{k\delta}{\chi} - \beta\right)\text{sech}(mx) - \frac{m^2}{2}(-\text{sech}(mx) + 2\text{sech}^3(mx)) - \frac{2k\delta r}{\chi^2}\text{sech}^3(mx) &= 0 \end{aligned}$$

A expressão para m^2 permite concluir que estas soluções estacionárias na forma de solitões brilhantes existirão apenas quando $\frac{k\delta r}{\chi^2}$ for negativo. Como k , r e χ^2 são positivos, isto implica que δ deverá ser negativo, como na verdade acontece no sistema em estudo.

É também interessante comparar o valor de m obtido nesta situação com o valor obtido para solitões de baixa amplitude, o qual foi

$$m^2 = \frac{r}{c^2}(bc - da) \quad (3.22)$$

Quando χ toma valores elevados, tem-se que $c \simeq \chi^2$ e $d \simeq 3\chi$, sendo $b = k\delta$ e $a = k\delta\chi$. Substituindo estas expressões na equação acima, obtém-se então $m^2 \simeq \frac{k\delta r}{\chi^4}(\chi^2 - 3\chi^2) = -\frac{2k\delta r}{\chi^2}$, ou seja, a mesma expressão obtida para campos de controlo elevados.

Este resultado seria de esperar. Além disso, as condições que levaram à obtenção de (3.22),

$$\frac{dr}{c} \ll 1 \quad \text{e} \quad \frac{bdr^2}{c} \ll a$$

no limite de χ elevado ficam

$$\frac{3r}{\chi} \ll 1 \quad \text{e} \quad \frac{3r^2}{\chi} \ll \chi^2$$

o que é equivalente à condição $\frac{3r}{\chi} \ll 1$ considerada neste caso.

Condição para a existência destes solitões

$$\frac{r}{c^2}(bc - da) > 0 \Leftrightarrow bc > da \Leftrightarrow \frac{c}{d} > \frac{a}{b} \quad (\Rightarrow |f|^2 > 0.016\dots)$$

juntamente com

$$r \ll \frac{c}{d} \quad \text{e} \quad r^2 \ll \frac{a}{b} \frac{c}{d}$$

Estas expressões podem ser ainda escritas na forma:

$$\begin{aligned} \frac{\chi^2 + \delta^2 \gamma^2}{3\chi + 7\delta^2 + \frac{\delta^2 \gamma^2}{|f|^2}} &> \chi \\ r &\ll \frac{3\chi + 7\delta^2 + \frac{\delta^2 \gamma^2}{|f|^2}}{\chi^2 + \delta^2 \gamma^2} < \frac{1}{\chi} \\ r^2 &\ll \chi \frac{3\chi + 7\delta^2 + \frac{\delta^2 \gamma^2}{|f|^2}}{\chi^2 + \delta^2 \gamma^2} < 1 \end{aligned}$$

Para além de ser necessário satisfazer a primeira destas duas condições, as últimas duas ainda implicam:

$$r^2 \ll 1$$

Voltando agora ao segundo caso — *campos de controlo elevados*, as condições para a existência de solitões eram

$$\delta^2 \gamma^2 + |U|^2 \left(7\delta^2 + \frac{\delta^2 \gamma^2}{|f|^2} + 3|U|^2 + \frac{|U|^4}{|f|^2} \right) \ll \chi^2$$

e

$$\frac{3}{\chi} |U|^2 \ll 1$$

Atendendo a que $|U|_{MAX}^2 = r$, estas condições ainda podem ser escritas na forma

$$\delta^2 \gamma^2 + r \left(7\delta^2 + \frac{\delta^2 \gamma^2}{|f|^2} + 3r + \frac{r^2}{|f|^2} \right) \ll \chi^2$$

Admitindo que $|f|$ é elevado, tem-se $7\delta^2 + \frac{\delta^2 \gamma^2}{|f|^2} \simeq 7\delta^2$,

$$3r \frac{r^2}{|f|^2} = r \left(3 + \frac{r}{|f|^2} \right) \simeq 3r \quad \Rightarrow \quad \delta^2 \gamma^2 + 7r\delta^2 + 3r^2 \ll \chi^2$$

Esta condição será naturalmente satisfeita se r for da ordem de δ , $\gamma \Rightarrow$ se $r \sim 0.1$. Se r for mais elevado, de modo que $\delta^2 \gamma^2 + 7r\delta^2 + 3r^2 \simeq 3r^2$, então deveremos ter $r^2 \ll \frac{\chi^2}{3} \Leftrightarrow r \ll \frac{\chi}{\sqrt{3}} \rightarrow r \ll \chi$.

A segunda condição resulta em $r \ll \frac{\chi}{3} \rightarrow r \ll \chi$.

3.4.1 Teste da Rotina BPM para Procurar Solitões quando o Campo de Controlo é elevado

Colocando como sinal de entrada $U = b \operatorname{sech}(abx)$, sendo que $a = \sqrt{\frac{2|\delta|k}{\chi_{MAX}^2}}$ e $b = 0.5$, aplicando um sinal de controlo constante e igual a 10 e fazendo propagar o sinal numa distância de 10 metros podemos verificar que de facto encontramos um solitão, sendo portanto um sinal que se mantém

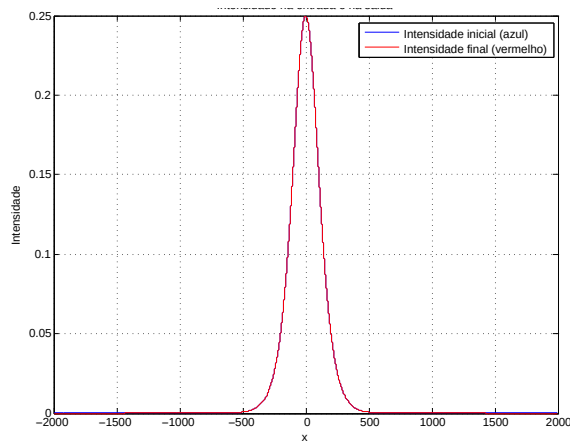


Figura 3.49: Intensidades do sinal de entrada e saída para um campo de controlo constante igual 10 numa distância de propagação de 10 metros.

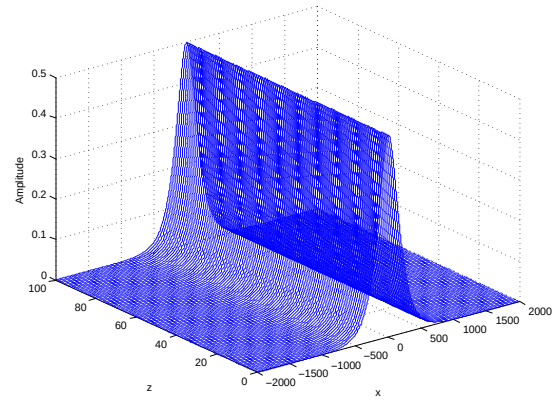


Figura 3.50: Propagação do sinal para um campo de controlo constante igual 10 numa distância de propagação de 10 metros.

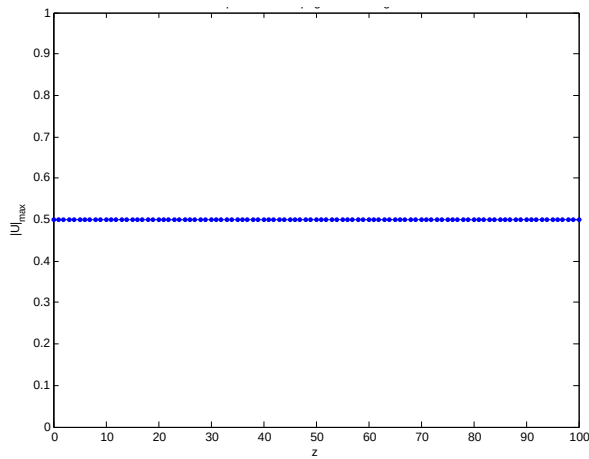


Figura 3.51: Amplitudes da propagação para um campo de controlo constante igual 10 numa distância de propagação de 10 metros.

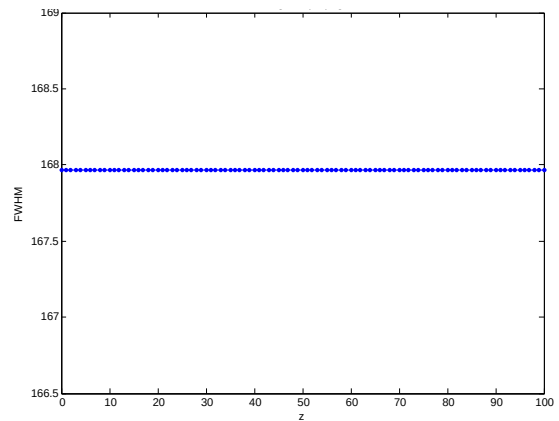


Figura 3.52: FWHM para um campo de controlo constante igual 10 numa distância de propagação de 10 metros.

constante ao longo da propagação. Como pode ser observado pela figura 3.49, que nos dá os gráficos da entrada e saída do sinal, estes estão sobrepostos, o que significa que o sinal se manteve constante, como poderá ser analisado pela figura 3.50, que se refere à propagação do sinal. As figuras 3.51 e 3.52 dizem respeito aos gráficos das amplitudes do sinal ao longo da propagação e do FWHM, respetivamente. E ambos tomam valores constantes, como seria de esperar devido à inalteração do sinal ao propagar-se.

Capítulo 4

Propagação em Sistemas Lambda – Simetria Azimutal

4.1 Transformadas de Hankel

Até este ponto a rotina BPM implementada contemplava apenas a propagação 1+1D, tendo portanto uma direção transversal (x) e outra longitudinal (z). Agora pretendemos testar no caso da propagação 2+1D, onde teremos duas direções transversais (x e y) e uma longitudinal (z). A parte linear da equação de propagação precisará então de usar transformadas de Fourier a duas dimensões. Utilizando coordenadas polares a função irá variar segundo r e θ . Em ondas que têm simetria cilíndrica, a amplitude não dependerá do ângulo θ , mas apenas da distância r . Neste caso particular, verifica-se que a transformada de Fourier a duas dimensões toma o aspeto de uma transformada de Hankel que será implementada na parte linear da rotina BPM substituindo portanto o cálculo da transformada de Fourier [11].

4.2 Em coordenadas retangulares

$$u = u(x, y)$$
$$\mathcal{F}\{u\} = U(k_x, k_y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} u(x, y) e^{i(k_x x + k_y y)} dx dy$$

Se u for separável: $u(x, y) = g_x(x)g_y(y)$

$$\mathcal{F}\{u\} = \int_{-\infty}^{+\infty} g_x(x) e^{ik_x x} dx \int_{-\infty}^{+\infty} g_y(y) e^{ik_y y} dy = G_x(k_x) G_y(k_y)$$

4.3 Em coordenadas polares - função simétrica circular

$$u = u(r, \theta) = u(r)$$

$$\mathcal{F} = \iint_{-\infty}^{+\infty} u(r) e^{i(k_x x + k_y y)} dx dy =$$

Seja

$$x + iy = r e^{i\theta}$$

$$k_x + i k_y = q e^{i\phi}$$

$$\partial x \partial y = r \partial r \partial \theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} u(x) e^{i(q \cos \phi r \cos \theta + q \sin \phi r \sin \theta)} r dr d\theta =$$

$$= \int_0^{+\infty} r dr u(r) \int_0^{2\pi} e^{i q r \cos(\phi - \theta)} d\theta$$

$$d\beta = d\theta$$

$$\mathcal{F}\{u\} = \int_0^{\infty} r dr u(r) \int_{-\phi}^{2\pi - \phi} e^{i q r \cos(\beta)} d\beta$$

Uma vez que $e^{i q r \cos(\beta)}$ é periódica com período 2π , vamos integrar ao longo de um período. Podemos então escrever:

$$\mathcal{F}\{u\} = \int_0^{\infty} r dr u(r) \int_0^{2\pi} e^{i q r \cos(\beta)} d\beta$$

$$\int_0^{2\pi} e^{i q r \cos(\beta)} d\beta = 2\pi J_0(qr)$$

$$\mathcal{F}\{u\} = 2\pi \int_0^{\infty} u(r) J_0(qr) r dr = U(q)$$

Onde J_0 é a função de Bessel de ordem 0 do primeiro tipo, definida por

$$J_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{1}{4} z^2\right)^k}{(k!)^2},$$

4.4 Transformada de Fourier Inversa

$$u(r) = \mathcal{F}^{-1}\{U(q)\} = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} U(q) e^{-i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y$$

Mais uma vez, usando:

$$x + iy = re^{i\theta}$$

$$k_x + ik_y = qe^{i\phi}$$

$$dxdy = r dr d\theta$$

temos que:

$$u(r) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty q U(q) dq \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi e^{-iqr \cos(\phi-\theta)} d\phi}_{2\pi J_0(-qr)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dq q U(q) J_0(-qr)$$

tendo em conta que qr é real, logo, $J_0(-qr) = J_0(qr)$, logo

$$u(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dq q U(q) J_0(qr)$$

4.5 Propagação de um feixe radialmente simétrico em espaço livre

Na simulação da propagação de feixes óticos através de sistemas com simetria cilíndrica, temos necessidade de usar a computação numérica da transformada de Hankel de ordem p e a transformada de Hankel inversa.

Os integrais são especialmente difíceis de calcular devido ao comportamento oscilatório da função de Bessel e do comprimento infinito do intervalo. Desde o trabalho seminal de Siegman em 1977, um número de algoritmos para a avaliação numérica da HT - *Hankel Transform* foram reportados em literatura, para as HT's de ordem 0 e as HT's de ordem alta, infelizmente, a performance de um método para calcular a HT é altamente dependente da função a ser transformada, assim, é difícil determinar o algoritmo ótimo para uma dada função. Em ótica, geralmente lidamos com problemas onde a HT e a IHT precisam ser calculadas milhares de vezes a partir de uma expressão analítica conhecida para a função de entrada. Neste caso, um algoritmo numérico de HT rápido e eficiente é necessário [12]. Em 1998, Yu e outros [13] desenvolveram um método HT quase discreto de ordem 0 que aproxima a função de entrada pela série Fourier-Bessel sobre um intervalo de integração finito. Isto levou a uma matriz de transformação simétrica para a HT e a IHT que satisfaz a forma discreta do teorema Parseval. Visto que a conservação de energia mantém-se após sucessivas aplicações da HT e a IHT, este método tem aplicações consideráveis em processos iterativos.

$$\text{Equação de evolução: } u_z = \frac{i}{2} (u_{xx} + u_{yy})$$

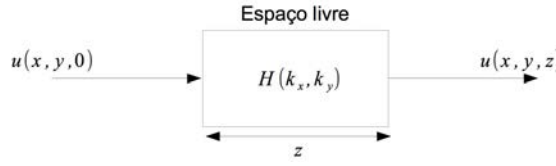


Figura 4.1: Propagação de um feixe radialmente simétrico em espaço livre.

4.6 Transformada de Fourier em 2D e suas derivações

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}\{u(x, y)\} &= \iint_{-\infty}^{\infty} u(x, y) e^{i(k_x x + k_y y)} \partial x \partial y = U(k_x, k_y) \\
 u(x, y) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} U(k_x, k_y) e^{-i(k_x x + k_y y)} \partial k_x \partial k_y \\
 u_x &= \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} (-ik_x) U(k_x, k_y) e^{-i(k_x x + k_y y)} \partial k_x \partial k_y \\
 &\Rightarrow \mathcal{F}\{u_x\} = (-ik_x) U(k_x, k_y) \\
 \Rightarrow \mathcal{F}\{u_{xx} + u_{yy}\} &= [(-ik_x)^2 + (-ik_y)^2] U(k_x, k_y) = -(k_x^2 + k_y^2) U(k_x, k_y) = -q^2 U(k_x, k_y)
 \end{aligned}$$

Se $u(x, y) = u(r)$ (feixes radialmente simétricos), $U(k_x, k_y) = U(q)$.

Então, aplicando transformadas de Fourier à equação de evolução, e considerando que $u = u(r)$, temos que:

$$\frac{\partial U(q, z)}{\partial z} = \frac{i}{2} (-q)^2 U(q, z)$$

Que tem como solução:

$$U(q, z) = U(q, 0) e^{-i \frac{q^2}{2} z} = H(k_x, k_y) U(q, 0)$$

onde $H(k_x, k_y) = e^{-i \frac{q^2}{2} z}$.

Então, podemos escrever:

$$u(r, z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \partial q q U(q, z) J_0(qr) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \partial q q U(q, 0) J_0(qr) e^{-i \frac{q^2}{2} z}$$

Onde,

$$U(q, 0) = 2\pi \int_0^{\infty} \partial r r u(r, 0) J_0(qr) \quad \leftarrow \text{Transformada de Fourier de } u \text{ em } z = 0$$

Uma vez que $H(k_x, k_y) = e^{-i \frac{q^2}{2} z}$, independentemente de u ser ou não radialmente simétrico, implica que, no caso de $u(x, y, 0)$ ser radialmente simétrica, também o será $u(x, y, z)$.

O algoritmo que iremos utilizar para cálculo das transformadas de Hankel, HT será o proposto por Manuel Guizar-Sicairos and Julio C. Gutiérrez-Vega [12] que estende o método HT de Yu para

ordens superiores.

4.6.1 Teste da Rotina

4.6.1.1 Propagação da onda de Airy no Ar

Inicialmente iremos utilizar como onda de entrada um impulso de Airy, a mesma usada como onda de entrada em [14], considerando uma equação de propagação dada por:

$$i \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \right) = 0 \quad (4.1)$$

$$\Leftrightarrow i \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (4.2)$$

A onda colocada à entrada será então $U_0(r) = Ai(r_0 - r) \exp[\alpha(r_0 - r)]$. Para que possamos testar a funcionalidade desta rotina BPM - *Beam Propagation Method* a não linearidade não será considerada. De seguida iremos comparar os resultados obtidos na rotina implementada com os resultados do artigo *Abruptly autofocusing waves*. Como se pode verificar através da análise das imagens 4.2 e 4.3 os resultados obtidos são bastante semelhantes aos obtidos no artigo referido quando consideramos os mesmos parâmetros, sendo estes, $r_0 = 10$ e $\alpha = 0,05$. Este passo consegue portanto comprovar o correto funcionamento da rotina BPM implementada.

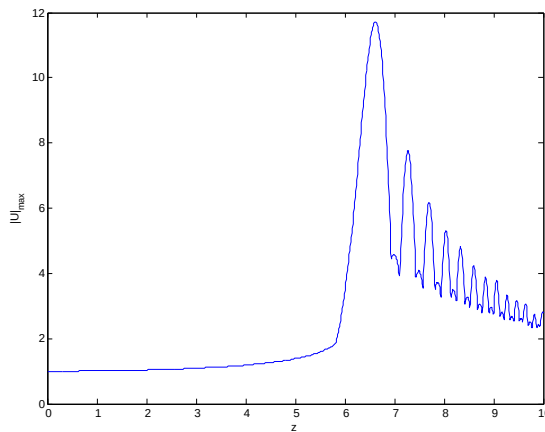


Figura 4.2: Amplitude do sinal ao longo da propagação.

4.6.2 Propagação de sinal gaussiano em meio lambda

Neste ponto tentaremos fazer um estudo idêntico ao realizado por Konotop e Hang [10], onde iremos considerar a equação de propagação exposta em (2.40), um sinal de entrada dado por:

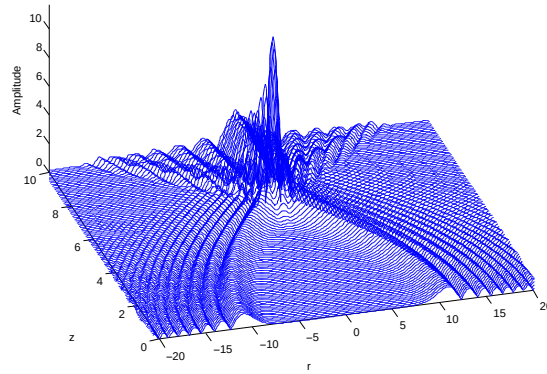


Figura 4.3: Propagação do impulso de Airy radialmente simétrico, $r_0 = 10$ e $\alpha = 0.05$.

$e^{(-0.04(r)^2)}$ e o sinal de controlo será dado por um impulso de controlo de Laguerre expresso pela seguinte expressão:

$$L_{pm}(z, r) = e^{\frac{-r^2}{2\omega^2}} \frac{r_0 r^m}{\omega^{m+1}} L_p^m \left(\frac{r^2}{\omega^2} \right) \times e^{i[(2p+m+1) \tan^{-1} \left(\frac{z}{r_0} \right) - \frac{r^2 z}{2r_0^2 \omega^2} - m\theta]} \quad (4.3)$$

Nesta, L_p^m é o polinómio de Laguerre, onde p e m são os índices radial e azimutal respetivamente. $\omega \equiv \omega(z) = \sqrt{r_0^2 + \frac{z^2}{r_0^2}}$ e $\sqrt{2r_0}$ corresponde à *waist* do impulso à entrada. O caso que iremos considerar será um impulso de Laguerre de ordem (3,0), com $r_0 = \frac{50}{\sqrt{2}}$ e a distância de propagação considerada será 100 metros. A propagação deste sinal pode ser visualizada na imagem 4.4 e as intensidades de entrada e de saída em 4.5. Como há alguma dificuldade de definir precisamente se este sinal varia periodicamente através do gráfico da propagação utilizaremos o auxílio dos gráficos de amplitudes de propagação do sinal e do seu FWHM, expostos em 4.6 e 4.7 respetivamente. Com estes podemos concluir que para uma distância de propagação igual a 100 metros o sinal propagado não se trata portanto de um solitão.

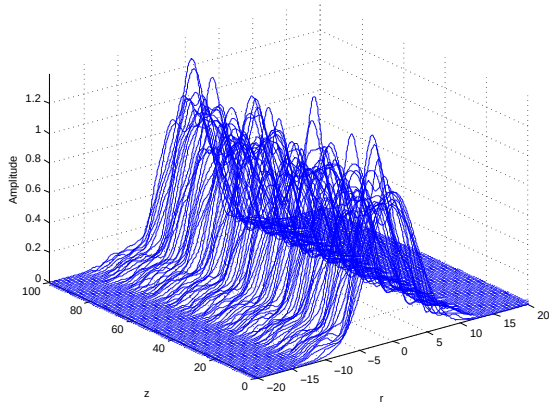


Figura 4.4: Propagação do sinal de entrada $e^{(-0.04(r)^2)}$ com a onda de controlo de Laguerre.

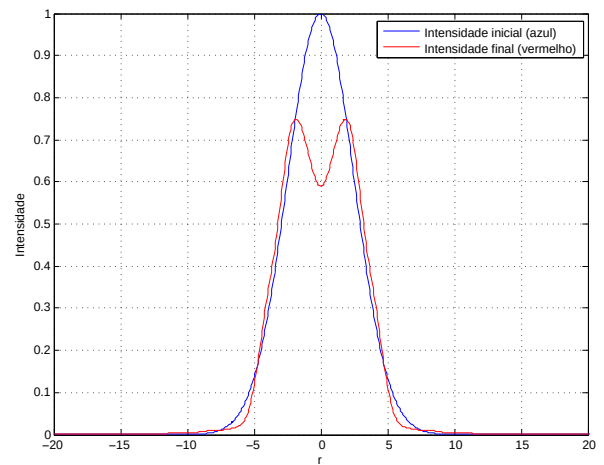


Figura 4.5: Intensidades do sinal de entrada e do sinal de saída com a onda de controlo de Laguerre.

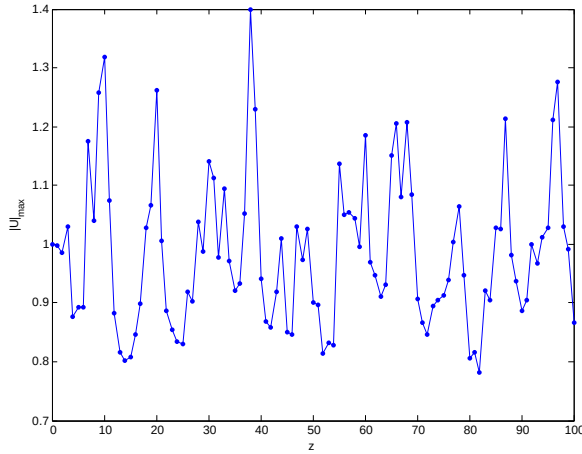


Figura 4.6: Amplitudes do sinal $e^{(-0,04(r)^2)}$ com a onda de controle de Laguerre propagado.

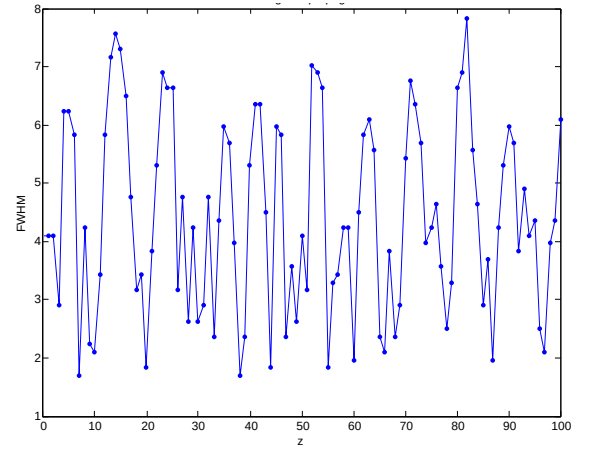


Figura 4.7: FWHM do sinal $e^{(-0,04(r)^2)}$ com a onda de controle de Laguerre propagado.

4.6.2.1 Propagação da onda de Airy em meio lambda

Por fim o objetivo será aplicar um sinal de entrada que seja um impulso de Airy, $U_0(r) = Ai(r_0 - r)exp[\alpha(r_0 - r)]$, com os seguintes parâmetros: $r_0 = 10$ e $\alpha = 0,05$, a onda de controle utilizada neste caso será constante. Em seguida serão evidenciados resultados para alguns valores da onda de controle constante.

Como podemos inferir, o sinal aumenta bastante da entrada para a saída. Mantendo no entanto a sua forma bastante idêntica. Não há diferenças consideráveis se compararmos a propagação obtida para valores da função de controle iguais a 1 ou a 100, como pode ser visto em 4.8 e 4.9 respectivamente.

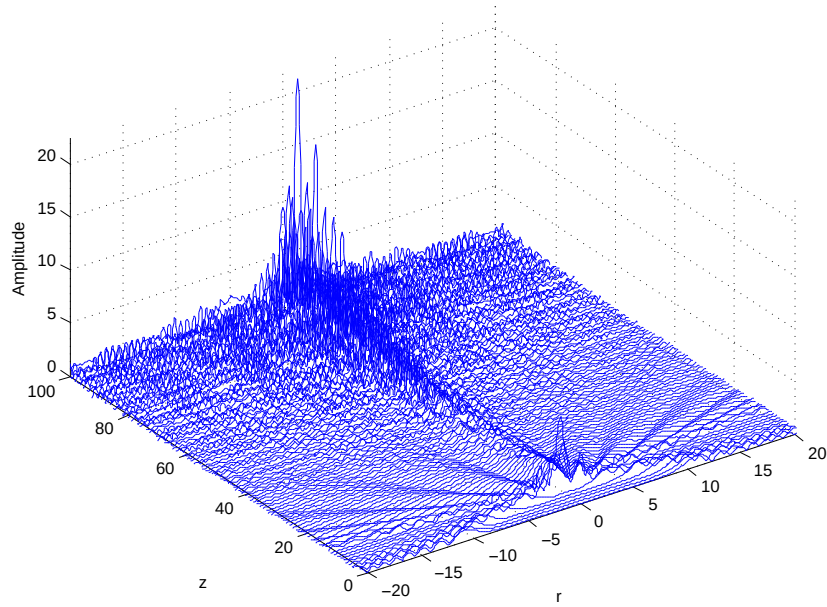


Figura 4.8: Propagação do impulso de Airy radialmente simétrico, $r_0 = 10$ e $\alpha = 0,05$, para um campo de controlo constante com amplitude $F = 1$.

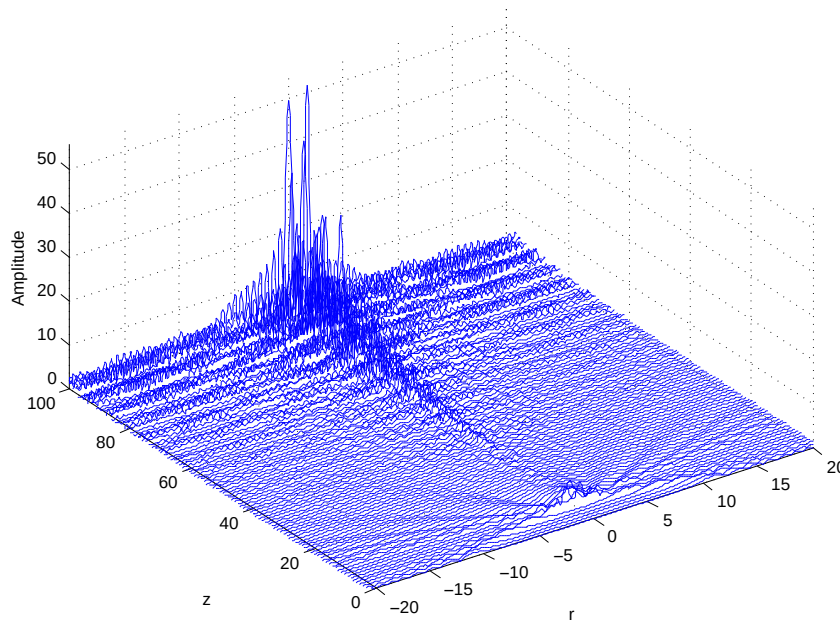


Figura 4.9: Propagação do impulso de Airy radialmente simétrico, $r_0 = 10$ e $\alpha = 0,05$, para um campo de controlo constante com amplitude $F = 100$.

Capítulo 5

Conclusões e Trabalho Futuro

5.1 Conclusões

Os principais objetivos desta dissertação foram atingidos, conseguimos desenvolver um estudo e deduções sobre sistemas do tipo Lambda e posteriormente, com estes conhecimentos, conseguimos implementar rotinas de teste para novos casos de estudo. Para cada rotina desenvolvida os resultados foram comparados a outros estudos efetuados à priori por diferentes autores e mostraram-se semelhantes, o que mostra a credibilidade do algoritmo desenvolvido e implementado.

A principal conclusão a retirar com a análise dos resultados obtidos com as simulações diz respeito à forma como a onda de controlo altera a propagação do sinal, esta é totalmente influenciada pelo tipo e forma de onda de controlo introduzida, o que nos mostra que desta forma é possível manipular a propagação de um sinal se lhe aplicarmos uma onda de controlo conveniente. A parte mais negativa foi a falta de tempo para que fosse possível obter mais resultados de simulações feitas para sinais de entrada e ondas de controlo aplicadas diferentes. Como cada simulação demora imenso tempo a concluir, o tempo disponível não foi suficiente para que pudéssemos estudar todos os casos desejados.

5.2 Trabalho Futuro

Futuramente seria bastante interessante se fosse possível aumentarmos o nosso leque de resultados obtidos com vários valores de sinais de entrada e sinais de controlo, mas para tal seria necessário bastante tempo dispensado, devido à complexidade temporal das rotinas desenvolvidas assim como computadores mais rápidos que pudessem desenvolver estes testes de forma mais eficiente.

Outro aspeto que teria interesse seria o de tentar atingir o efeito contrário. Isto é, dando um determinado sinal com determinada forma tentar calcular o campo de controlo necessário para obter um determinado sinal de saída. Isto na prática seria muito interessante pois permitiria modular sinais com baixa potência para sinais de grande potência apenas por manipulação do campo de controlo.

Seria também interessante analisar e simular a propagação de sinais em meios do tipo Lambda em aplicações como guias planares, circulares ou fibras óticas.

Anexo A

Konotop - Parte 1

A.1 Sistema de três níveis do tipo Lambda

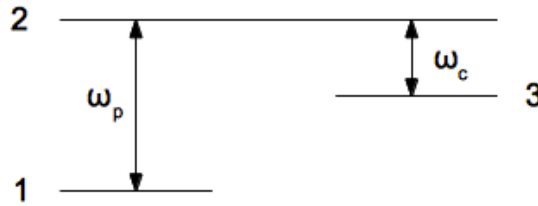


Figura A.1: Sistema de três níveis $|1\rangle$: estado fundamental; $|2\rangle$: estado excitado; $|3\rangle$: estado mais baixo

Se considerarmos um campo de teste fraco com as seguintes características,

$$\vec{E}_p(\vec{r}, t) = \hat{e}_p \mathcal{E}_p(\vec{r}, t) e^{i(\vec{k}_p \cdot \vec{r} - \omega_p t)} + \text{c. c.}$$

ω_p	Frequência central
$\vec{K}_p = (K_{px}, K_{py}, K_{pz})$	Define a direção da propagação
$\hat{e}_p$	vetor de polarização
$\mathcal{E}_p$	envelope do campo de teste

e um campo de acoplamento descrito em seguida,

$$\vec{E}_c(\vec{r}, t) = \hat{e}_c \mathcal{E}_c(\vec{r}, t) e^{i(\vec{k}_c \cdot \vec{r} - \omega_c t)}$$

ω_c	Frequência central
$\vec{K}_c = (K_{cx}, K_{cy}, K_{cz})$	Define a direção da propagação
$\hat{e}_c$	vetor de polarização
$\mathcal{E}_c$	envelope do campo de acoplamento

e considerando que estes são considerados classicamente.

Seja $\hat{e}_c \cdot \hat{e}_p = 0$ Campos ortogonalmente polarizados:

$$\frac{|\epsilon_p|}{|\epsilon_c|} \lesssim 0.1$$

A equação para $\vec{E}_p$ pode ser tratada como independente ao tempo.

$$\nabla^2 \vec{E}_p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}_p}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2} \quad (\text{A.1})$$

onde

$$\begin{aligned} \vec{P} &= \vec{p}_{12} \rho_{21} e^{i(K_p Z - \omega_p t)} + \text{c. c.} \\ \vec{p}_{ij} &: \text{dipole moment of transition} \quad |i\rangle \leftrightarrow |j\rangle \end{aligned}$$

Considerando as derivadas das populações e das coerências dadas a seguir:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{11} &= \Gamma_{21} \rho_{22} - i\Omega_p \rho_{12} + \text{c. c.} \\ \dot{\rho}_{22} &= (\Gamma_{21} + \Gamma_{23}) \rho_{22} + i\Omega_p \rho_{12} + i\Omega_c \rho_{32} + \text{c. c.} \\ \dot{\rho}_{33} &= \Gamma_{23} \rho_{22} - i\Omega_c \rho_{32} + \text{c. c.} \\ \dot{\rho}_{21} &= i\Omega (\rho_{11} - \rho_{22}) - \left(\frac{\Gamma_{21} + \Gamma_{23}}{2} + i\Delta_2 \right) \rho_{21} + i\Omega_c \rho_{31} \\ \dot{\rho}_{31} &= i\Delta_3 \rho_{31} - i\Omega_p \rho_{32} + i\Omega_c^* \rho_{21} \\ \dot{\rho}_{32} &= \left(-\frac{\Gamma_{21} + \Gamma_{23}}{2} + i\Delta_{23} \right) \rho_{32} - i\Omega_p^* \rho_{31} - i\Omega_c^* (\rho_{33} - \rho_{22}) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \Omega_p &= \frac{p_{12} \epsilon_p}{\hbar} \\ \Omega_c &= \frac{p_{32} \epsilon_c}{\hbar} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{Corresponde às frequências de Rabi} \\ &\text{dos campos de teste e de acoplamento.} \end{aligned}$$

$\Delta_2 = (\omega_2 - \omega_1)$ ω_p corresponde ao detuning de um fóton, $\Delta_3 = \omega_p - \omega_c - (\omega_3 - \omega_1)$ ao detuning de dois fótons e $\hbar\omega_j$ é a energia do estado $|j\rangle$.

$$\Delta_{23} = \Delta_2 + \Delta_3 = (\omega_2 - \omega_3) - \omega_c$$

Γ_{21} é a emissão espontânea do estado $|2\rangle$ para o estado $|1\rangle$ e Γ_{23} é a emissão espontânea do estado $|2\rangle$ para o estado $|3\rangle$.

$$\boxed{\rho_{11} + \rho_{22} + \rho_{33} = 1} \rightarrow \text{o número de átomos é conservado}$$

Consideremos a solução estacionária $\rightarrow \dot{\rho} = 0$, o estado $|2\rangle$ fracamente populado o que implica na redução de perdas devido à emissão espontânea. $-\Delta_2 = \Delta_3 = \Delta \Rightarrow \Delta_{23} = 0$.

$$0 = \Gamma \rho_{22} - i\Omega_p \rho_{12} + \text{c. c.} \quad (\text{A.2a})$$

$$0 = -2\Gamma \rho_{22} + i\Omega_p \rho_{12} + i\Omega_c \rho_{32} + \text{c. c.} \quad (\text{A.2b})$$

$$0 = \Gamma \rho_{22} - i\Omega_c \rho_{32} + \text{c. c.} \quad (\text{A.2c})$$

$$0 = i\Omega_p (\rho_{11} - \rho_{22}) - (\Gamma - i\Delta) \rho_{21} + i\Omega_c \rho_{31} \quad (\text{A.2d})$$

$$0 = i\Delta \rho_{31} - i\Omega_p \rho_{32} + i\Omega_c^* \rho_{21} \quad (\text{A.2e})$$

$$0 = -\Gamma \rho_{32} - i\Omega_p^* \rho_{31} - i\Omega_c^* (\rho_{33} - \rho_{22}) \quad (\text{A.2f})$$

Por outro lado, das equações (A.2a), (A.2b) e (A.2c), temos:

$$(\text{A.2a}) + (\text{A.2c}) = -(\text{A.2b})$$

Apenas duas destas equações são linearmente independentes. Vou considerar as equações (A.2a) e (A.2c).

$$\boxed{(\text{A.2a})}$$

$$0 = \Gamma \rho_{22} - i\Omega_p \rho_{12} + \text{c. c.} \Leftrightarrow 0 = \overbrace{\Gamma \rho_{22}}^{\text{real}} - i \overbrace{\Omega_p \rho_{12}}^{\text{complexo}} + i\Omega_p^* \rho_{12}^* \Leftrightarrow \\ \Gamma \rho_{22} + i [\Omega_p^* \rho_{12}^* - \Omega_p \rho_{12}] = 0$$

Por outro lado, uma vez que a matriz de densidades é transposta conjugada, temos que $\boxed{\rho_{12} = \rho_{21}^*}$, e portanto a equação (A.2a) torna-se:

$$\Gamma \rho_{22} + i [\Omega_p^* \rho_{21} - \Omega_p \rho_{21}^*] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{[\Omega_p^* \rho_{21} - \Omega_p \rho_{21}^*] = -\frac{\Gamma \rho_{22}}{i} = i\Gamma \rho_{22}}$$

$$\boxed{(\text{A.2c})}$$

$$0 = \Gamma \rho_{22} - i\Omega_c \rho_{32} + \text{c. c.} \Leftrightarrow 0 = \Gamma \rho_{22} - i\Omega_c \rho_{32} + i\Omega_c^* \rho_{32}^* \Leftrightarrow$$

$$\Gamma \rho_{22} - i [\Omega_c \rho_{32} - \Omega_c^* \rho_{32}^*] = 0 \Leftrightarrow \boxed{[\Omega_c \rho_{32} - \Omega_c^* \rho_{32}^*] = \frac{\Gamma \rho_{22}}{i} = -\Gamma \rho_{22}}$$

$$\Rightarrow \boxed{[\Omega_c \rho_{32} - \Omega_c^* \rho_{32}^*] = -[\Omega_p^* \rho_{21} - \Omega_p \rho_{21}^*]}$$

A.2 Eliminação de ρ_{31}

$$(A.2d)\Omega_p^* + (A.2f)\Omega_c :$$

$$\begin{aligned} & i|\Omega_p|^2(\rho_{11} - \rho_{22}) - (\Gamma - i\Delta)\Omega_p^*\rho_{21} + i\Omega_p^*\Omega_c\rho_{31} - \\ & - i\Gamma\Omega_c\rho_{32} - i\Omega_c\Omega_p^*\rho_{31} - i|\Omega_c|^2(\rho_{33} - \rho_{22}) = 0 \Leftrightarrow \\ & i[|\Omega_p|^2(\rho_{11} - \rho_{22}) - |\Omega_c|^2(\rho_{33} - \rho_{22})] - (\Gamma - i\Delta)\Omega_p^*\rho_{21} - \Gamma\Omega_c\rho_{32} = 0 \end{aligned} \quad (A.2g)$$

$$(A.2d)\Delta + (A.2f)\Omega_c :$$

$$\begin{aligned} & \Delta\Omega_p(\rho_{11} - \rho_{22}) - (\Gamma\Delta - i\Delta^2)\rho_{21} + i\Delta\Omega_c\rho_{31} - i\Delta\Omega_c\rho_{31} + i\Omega_c\Omega_p\rho_{32} - i|\Omega_c|^2\rho_{21} = 0 \Leftrightarrow \\ & i\Delta\Omega_p(\rho_{11} - \rho_{22}) - (\Gamma\Delta - i\Delta^2)\rho_{21} + i\Omega_c\Omega_p\rho_{32} - i|\Omega_c|^2\rho_{21} = 0 \Leftrightarrow \\ & i\Delta\Omega_p(\rho_{11} - \rho_{22}) - (\Gamma\Delta - i\Delta^2 + i|\Omega_c|^2)\rho_{21} + i\Omega_c\Omega_p\rho_{32} = 0 \end{aligned} \quad (A.2h)$$

$$(A.2e)\Omega_p^* + (A.2f)\Delta :$$

$$\begin{aligned} & i\Delta\Omega_p^*\rho_{31} - i|\Omega_p|^2\rho_{32} + i\Omega_p^*\Omega_c^*\rho_{21} - \Gamma\Delta\rho_{32} - i\Delta\Omega_p^*\rho_{31} - i\Delta\Omega_c^*(\rho_{33} - \rho_{22}) = 0 \Leftrightarrow \\ & -i\Delta\Omega_c^*(\rho_{33} - \rho_{22}) + i\Omega_p^*\Omega_c^*\rho_{21} - (\Gamma\Delta + i|\Omega_p|^2)\rho_{32} = 0 \end{aligned} \quad (A.2i)$$

A.3 Eliminação de ρ_{33}

Vamos usar $\rho_{11} + \rho_{22} + \rho_{33} = 1 \Rightarrow \rho_{33} = 1 - \rho_{11} - \rho_{22}$

$$(A.2g)$$

$$\begin{aligned} & i[|\Omega_p|^2(\rho_{11} - \rho_{22}) - |\Omega_c|^2(1 - \rho_{11} - 2\rho_{22})] - (\Gamma - i\Delta)\Omega_p^*\rho_{21} - \Gamma\Omega_c\rho_{32} = 0 \Leftrightarrow \\ & i[(|\Omega_p|^2 + |\Omega_c|^2)\rho_{11} + (2|\Omega_c|^2 - |\Omega_p|^2)\rho_{22} - |\Omega_c|^2] - \\ & - (\Gamma - i\Delta)\Omega_p^*\rho_{21} - \Gamma\Omega_c\rho_{32} = 0 \end{aligned}$$

$$(A.2h) \text{ (mantém-se)}$$

$$i\Delta\Omega_p(\rho_{11} - \rho_{22}) - (\Gamma\Delta - i\Delta^2 + i|\Omega_c|^2)\rho_{21} + i\Omega_c\Omega_p\rho_{32} = 0$$

$$(A.2i)$$

$$-i\Delta\Omega_c^*(1 - \rho_{11} - 2\rho_{22}) + i\Omega_p^*\Omega_c^*\rho_{21} - (\Gamma\Delta + i|\Omega_p|^2)\rho_{32} = 0$$

Multiplicando por Ω_c :

$$-i\Delta|\Omega_c|^2(1 - \rho_{11} - 2\rho_{22}) + i\Omega_p^*|\Omega_c|^2\rho_{21} - (\Gamma\Delta + i|\Omega_p|^2)\Omega_c\rho_{32} = 0$$

Considerando apenas as equações (A.2h) e (A.2i):

$$\boxed{\frac{(A.2h)}{i\Omega_p} :}$$

$$\begin{aligned}\Delta(\rho_{11} - \rho_{22}) - \frac{1}{i\Omega_p}(\Gamma\Delta - i\Delta^2 + i|\Omega_c|^2)\rho_{21} + \Omega_c\rho_{32} &= 0 \Leftrightarrow \\ \Delta(\rho_{11} - \rho_{22}) + \frac{i}{|\Omega_p|^2}(\Gamma\Delta - i\Delta^2 + i|\Omega_c|^2)\Omega_p^*\rho_{21} + \Omega_c\rho_{32} &= 0\end{aligned}$$

Conjugando:

$$\Delta(\rho_{11} - \rho_{22}) - \frac{i}{|\Omega_p|^2}(\Gamma\Delta + i\Delta^2 - i|\Omega_c|^2)\Omega_p\rho_{21}^* + \Omega_c^*\rho_{32}^* = 0$$

Adicionando:

$$\begin{aligned}2\Delta(\rho_{11} - \rho_{22}) + \frac{i}{|\Omega_p|^2}\Gamma\Delta[\Omega_p^*\rho_{21} - \Omega_p\rho_{21}^*] + \\ + \frac{1}{|\Omega_p|^2}(\Delta^2 - |\Omega_c|^2)[\Omega_p^*\rho_{21} + \Omega_p\rho_{21}^*] + [\Omega_c\rho_{32} + \Omega_c^*\rho_{32}^*] &= 0\end{aligned}\quad (A.3)$$

Subtraindo:

$$\begin{aligned}\frac{i\Gamma\Delta}{|\Omega_p|^2}[\Omega_p^*\rho_{21} + \Omega_p\rho_{21}^*] + \frac{1}{|\Omega_p|^2}(\Delta^2 - |\Omega_c|^2)[\Omega_p^*\rho_{21} - \Omega_p\rho_{21}^*] + \\ + [\Omega_c\rho_{32} - \Omega_c^*\rho_{32}^*] &= 0\end{aligned}\quad (A.4)$$

$$\boxed{\frac{(A.2i)}{i|\Omega_c|^2} :}$$

$$-\Delta(1 - \rho_{21} - 2\rho_{22}) + \Omega_p^*\rho_{21} + \frac{i}{|\Omega_c|^2}(\Gamma\Delta + i|\Omega_p|^2)\Omega_c\rho_{32} = 0$$

Conjugando:

$$-\Delta(1 - \rho_{11} - 2\rho_{22}) + \Omega_p\rho_{21}^* - \frac{i}{|\Omega_c|^2}(\Gamma\Delta - i|\Omega_p|^2)\Omega_c^*\rho_{32}^* = 0$$

Adicionando:

$$\begin{aligned}-2\Delta(1 - \rho_{21} - 2\rho_{22}) + [\Omega_p^*\rho_{21} + \Omega_p\rho_{21}^*] + \\ + \frac{i\Gamma\Delta}{|\Omega_c|^2}[\Omega_c\rho_{32} - \Omega_c^*\rho_{32}^*] - \frac{|\Omega_p|^2}{|\Omega_c|^2}[\Omega_c\rho_{32} + \Omega_c^*\rho_{32}^*] &= 0\end{aligned}\quad (A.5)$$

Subtraindo:

$$\Omega_p^*\rho_{21} - \Omega_p\rho_{21}^* + \frac{i}{|\Omega_c|^2}\Gamma\Delta[\Omega_c\rho_{32} + \Omega_c^*\rho_{32}^*] - \frac{|\Omega_p|^2}{|\Omega_c|^2}[\Omega_c\rho_{32} - \Omega_c^*\rho_{32}^*] = 0\quad (A.6)$$

A.4 Eliminação de ρ_{11}

(A.3) – (A.4)

$$\begin{aligned}
& 2\Delta(\rho_{11} - \rho_{22}) + \frac{i}{|\Omega_p|^2} \Gamma \Delta [\Omega_p^* \rho_{21} - \Omega_p \rho_{21}^*] + \frac{1}{|\Omega_p|^2} (\Delta^2 - |\Omega_c|^2) [\Omega_p^* \rho_{21} + \Omega_p \rho_{21}^*] + \\
& + [\Omega_c \rho_{32} + \Omega_c^* \rho_{32}^*] + 2\Delta(1 - \rho_{11} - 2\rho_{22}) - \\
& - [\Omega_p^* \rho_{21} + \Omega_p \rho_{21}^*] - \frac{i\Gamma\Delta}{|\Omega_c|^2} [\Omega_c \rho_{32} - \Omega_c^* \rho_{32}^*] + \frac{|\Omega_p|^2}{|\Omega_c|^2} [\Omega_c \rho_{32} + \Omega_c^* \rho_{32}^*] = 0 \Leftrightarrow \\
& 2\Delta - 6\Delta\rho_{22} + \frac{i}{|\Omega_p|^2} \Gamma \Delta [\Omega_p^* \rho_{21} - \Omega_p \rho_{21}^*] + \frac{1}{|\Omega_p|^2} (\Delta^2 - |\Omega_c|^2 - |\Omega_p|^2) [\Omega_p^* \rho_{21} + \Omega_p \rho_{21}^*] + \\
& + \frac{1}{|\Omega_c|^2} (|\Omega_p|^2 + |\Omega_c|^2) [\Omega_c \rho_{32} + \Omega_c^* \rho_{32}^*] - \frac{i\Gamma\Delta}{|\Omega_c|^2} [\Omega_c \rho_{32} - \Omega_c^* \rho_{32}^*] = 0 \quad (A.7)
\end{aligned}$$

Agora temos as equações (A.4), (A.6) e (A.7).

Substituindo a equação (A.2g) nas equações (A.4) e (A.6), temos:

(A.4)

$$\begin{aligned}
& \frac{i\Gamma\Delta}{|\Omega_p|^2} [\Omega_p^* \rho_{21} + \Omega_p \rho_{21}^*] + \frac{1}{|\Omega_p|^2} (\Delta^2 - |\Omega_c|^2 - |\Omega_p|^2) [\Omega_p^* \rho_{21} - \Omega_p \rho_{21}^*] = 0 \\
& i\Gamma\Delta [\Omega_p^* \rho_{21} + \Omega_p \rho_{21}^*] + (\Delta^2 - |\Omega_c|^2 - |\Omega_p|^2) [\Omega_p^* \rho_{21} - \Omega_p \rho_{21}^*] = 0 \quad (A.8)
\end{aligned}$$

(A.6)

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{|\Omega_c|^2} (|\Omega_c|^2 + |\Omega_p|^2) [\Omega_p^* \rho_{21} - \Omega_p \rho_{21}^*] + \frac{i\Gamma\Delta}{|\Omega_c|^2 [\Omega_c \rho_{32} + \Omega_c^* \rho_{32}^*]} = 0 \Leftrightarrow \\
& (|\Omega_c|^2 + |\Omega_p|^2) [\Omega_p^* \rho_{21} - \Omega_p \rho_{21}^*] + \frac{i\Gamma\Delta}{|\Omega_c|^2} [\Omega_c \rho_{32} + \Omega_c^* \rho_{32}^*] = 0 \\
& \rightarrow [\Omega_c \rho_{32} + \Omega_c^* \rho_{32}^*] = \beta \frac{|\Omega_c|^2 + |\Omega_p|^2}{\Gamma\Delta} [\Omega_p^* \rho_{21} + \Omega_c \rho_{21}^*]
\end{aligned}$$

Substituindo, agora, em (A.7), temos:

$$\begin{aligned}
& 2\Delta - 6\Delta\rho_{22} + i\frac{i}{|\Omega_p|^2}\Gamma\Delta [\Omega_p^*\rho_{21} - \Omega_p\rho_{21}^*] + \frac{1}{|\Omega_p|^2}(\Delta^2 - |\Omega_c|^2 - |\Omega_p|^2) [\Omega_p^*\rho_{21} + \Omega_p\rho_{21}^*] + \\
& + \frac{1}{|\Omega_c|^2}(|\Omega_p|^2 + |\Omega_c|^2) [\Omega_c\rho_{32} + \Omega_c^*\rho_{32}^*] + \frac{i\Gamma\Delta}{|\Omega_c|^2} [\Omega_p^*\rho_{21} - \Omega_p\rho_{21}^*] = 0 \Leftrightarrow \\
& 2\Delta - 6\Delta\rho_{22} + i\Gamma\Delta \left(\frac{1}{|\Omega_p|^2} + \frac{1}{|\Omega_c|^2} \right) [\Omega_p^*\rho_{21} - \Omega_p\rho_{21}^*] + \\
& + \frac{1}{|\Omega_p|^2}(\Delta^2 - |\Omega_c|^2 - |\Omega_p|^2) [\Omega_p^*\rho_{21} + \Omega_p\rho_{21}^*] + \\
& + \frac{i}{\Gamma\Delta|\Omega_c|^2}(|\Omega_p|^2 + |\Omega_c|^2)^2 [\Omega_p^*\rho_{21} - \Omega_p\rho_{21}^*] = 0 \Leftrightarrow \\
& 2\Delta - 6\Delta\rho_{22} + i \left[\Gamma\Delta \left(\frac{|\Omega_p|^2 + |\Omega_c|^2}{|\Omega_p|^2|\Omega_c|^2} \right) + \frac{(|\Omega_p|^2 + |\Omega_c|^2)^2}{|\Omega_p|^2|\Omega_c|^2} \right] [\Omega_p^*\rho_{21} - \Omega_p\rho_{21}^*] + \\
& + \frac{1}{|\Omega_p|^2}(\Delta^2 - |\Omega_c|^2 - |\Omega_p|^2) [\Omega_p^*\rho_{21} + \Omega_p\rho_{21}^*] = 0
\end{aligned}$$

Então, de trás, temos que:

$$\begin{aligned}
& [\Omega_p^*\rho_{21} - \Omega_p\rho_{21}^*] = i\Gamma\rho_{22} \Leftrightarrow \\
& \rho_{22} = \frac{[\Omega_p^*\rho_{21} - \Omega_p\rho_{21}^*]}{i\Gamma} = -i\frac{[\Omega_p^*\rho_{21} - \Omega_p\rho_{21}^*]}{\Gamma}
\end{aligned}$$

Substituindo na equação anterior:

$$\begin{aligned}
& 2\Delta - i\frac{6\Delta}{\Gamma} [\Omega_p^*\rho_{21} - \Omega_p\rho_{21}^*] + i \left[\Gamma\Delta \left(\frac{|\Omega_p|^2 + |\Omega_c|^2}{|\Omega_p|^2|\Omega_c|^2} \right) + \frac{(|\Omega_p|^2 + |\Omega_c|^2)^2}{\Gamma\Delta|\Omega_c|^2} \right] [\Omega_p^*\rho_{21} - \Omega_p\rho_{21}^*] + \\
& + \frac{1}{|\Omega_p|^2}(\Delta^2 - |\Omega_c|^2 - |\Omega_p|^2) [\Omega_p^*\rho_{21} + \Omega_p\rho_{21}^*] = 0 \Leftrightarrow \\
& 2\Delta + i \left\{ \frac{6\Delta}{\Gamma} + \Gamma\Delta \left(\frac{|\Omega_p|^2 + |\Omega_c|^2}{|\Omega_p|^2|\Omega_c|^2} \right) + \frac{(|\Omega_p|^2 + |\Omega_c|^2)^2}{\Gamma\Delta|\Omega_c|^2} \right\} [\Omega_p^*\rho_{21} - \Omega_p\rho_{21}^*] + \\
& + \frac{1}{|\Omega_p|^2}(\Delta^2 - |\Omega_c|^2 - |\Omega_p|^2) [\Omega_p^*\rho_{21} + \Omega_p\rho_{21}^*] = 0 \tag{A.9}
\end{aligned}$$

As equações (A.8) e (A.9) são do tipo

$$\begin{aligned}
\text{(A.8):} \quad & a[\Omega_p^*\rho_{21} + \Omega_p\rho_{21}^*] + b[\Omega_p^*\rho_{21} - \Omega_p\rho_{21}^*] = 0 \\
\text{(A.9):} \quad & c + d[\Omega_p^*\rho_{21} + \Omega_p\rho_{21}^*] + e[\Omega_p^*\rho_{21} - \Omega_p\rho_{21}^*] = 0
\end{aligned}$$

Seja $x = \Omega_p^*\rho_{21} + \Omega_p\rho_{21}^*$ e $y = \Omega_p^*\rho_{21} - \Omega_p\rho_{21}^* \Rightarrow \rho_{21} = \frac{x+y}{2\Omega_p^*}$

(A.8) :

$$\overbrace{i\Gamma\Delta}^a x + \overbrace{(\Delta^2 - |\Omega_c|^2 - |\Omega_p|^2)}^b y = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{(\Delta^2 - |\Omega_c|^2 - |\Omega_p|^2)}{i\Gamma\Delta} y \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{i(\Delta^2 - |\Omega_c|^2 - |\Omega_p|^2)}{\Gamma\Delta} y$$

(A.9) :

$$\overbrace{\frac{c}{2\Delta}}^c + i \overbrace{\left\{ \frac{6\Delta}{\Gamma} + \Gamma\Delta \left(\frac{|\Omega_p|^2 + |\Omega_c|^2}{|\Omega_p|^2 |\Omega_c|^2} \right) + \frac{(|\Omega_p|^2 + |\Omega_c|^2)^2}{\Gamma\Delta |\Omega_c|^2} \right\}}^e y + \frac{i}{|\Omega|^2} \frac{(\Delta^2 - |\Omega_c|^2 - |\Omega_p|^2)}{\Gamma\Delta} y = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \frac{6\Delta}{\Gamma} + \Gamma\Delta \left(\frac{|\Omega_p|^2 + |\Omega_c|^2}{|\Omega_p|^2 |\Omega_c|^2} \right) + \frac{(|\Omega_p|^2 + |\Omega_c|^2)^2}{\Gamma\Delta |\Omega_c|^2} + \frac{(\Delta^2 - |\Omega_c|^2 - |\Omega_p|^2)^2}{|\Omega_p|^2 \Gamma\Delta} \right\} y = i2\Delta$$

No interior das chavetas, temos:

$$\begin{aligned} & \frac{6\Delta}{\Gamma} + \Gamma\Delta \left(\frac{|\Omega_p|^2 + |\Omega_c|^2}{|\Omega_p|^2 |\Omega_c|^2} \right) + \frac{(|\Omega_p|^2 + |\Omega_c|^2)^2}{\Gamma\Delta |\Omega_c|^2} + \frac{(\Delta^2 - |\Omega_c|^2 - |\Omega_p|^2)^2}{|\Omega_p|^2 \Gamma\Delta} = \\ &= \frac{1}{\Gamma\Delta |\Omega_p|^2 |\Omega_c|^2} \left\{ 6\Delta^2 |\Omega_c|^2 |\Omega_p|^2 + \Gamma^2 \Delta^2 (|\Omega_c|^2 + |\Omega_p|^2) + |\Omega_p|^2 (|\Omega_c|^2 + |\Omega_p|^2)^2 + \right. \\ & \quad \left. + |\Omega_c|^2 [\Delta^4 - 2\Delta^2 (|\Omega_c|^2 + |\Omega_p|^2) + (|\Omega_c|^2 + |\Omega_p|^2)^2] \right\} \quad (A.10) \\ &= \frac{1}{\Gamma\Delta |\Omega_p|^2 |\Omega_c|^2} \left\{ 6\Delta^2 |\Omega_c|^2 |\Omega_p|^2 + \Gamma^2 \Delta^2 (|\Omega_p|^2 + |\Omega_c|^2) + |\Omega_p|^2 (|\Omega_c|^4 + 2|\Omega_c|^2 |\Omega_p|^2 + |\Omega_p|^4) + \right. \\ & \quad \left. + \Delta^4 |\Omega_c|^2 - 2\Delta^2 |\Omega_c|^2 (|\Omega_c|^2 + |\Omega_p|^2) + |\Omega_c|^2 (|\Omega_c|^4 + 2|\Omega_c|^2 |\Omega_p|^2 + |\Omega_p|^4) \right\} \\ &= \frac{1}{\Gamma |\Omega_p|^2 |\Omega_c|^2} \{ \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \Rightarrow y = \frac{i2\Delta}{k} \\ & \Rightarrow x = \frac{i(\Delta^2 - |\Omega_c|^2 - |\Omega_p|^2)}{\Gamma\Delta} y = -\frac{2}{\Gamma k} (\Delta^2 - |\Omega_c|^2 - |\Omega_p|^2) \\ & \Rightarrow \rho_{21} = \frac{1}{2\Omega_p^*} \left\{ -\frac{2}{\Gamma k} (\Delta^2 - |\Omega_c|^2 - |\Omega|^2) + \frac{i2\Delta}{k} \right\} = \frac{1}{\Omega_p^* \Gamma k} \{ -\Delta^2 + |\Omega_c|^2 + |\Omega_p|^2 + i\Gamma\Delta \} \end{aligned}$$

Isto quer dizer que

$$\rho_{21} = \frac{\Gamma\Delta |\Omega_p|^2 |\Omega_c|^2}{\Omega_p^* \Gamma \{ \}} \{ |\Omega_c|^2 + |\Omega_p|^2 - \Delta^2 + i\Gamma\Delta \} = \frac{\Delta |\Omega_c|^2 \Omega_p}{\{ \}} (|\Omega_c|^2 + |\Omega_p|^2 - \Delta + i\Gamma\Delta)$$

Onde, de (A.10), temos:

$$\begin{aligned}
\{\} &= 6\Delta^2|\Omega_c|^2|\Omega_p|^2 + \Gamma^2\Delta^2(|\Omega_p|^2 + |\Omega_c|^2) + |\Omega_p|^2(|\Omega_c|^4 + 2|\Omega_c|^2|\Omega_p|^2 + |\Omega_p|^4) + \\
&\quad + |\Omega_c|^2\Delta^4 - 2\Delta^2|\Omega_c|^4 - 2\Delta^2|\Omega_c|^2|\Omega_p|^2 + |\Omega_c|^2(|\Omega_c|^4 + 2|\Omega_c|^2|\Omega_p|^2 + |\Omega_p|^4) = \\
&= |\Omega_c|^2(|\Omega_c|^4 - 2\Delta^2|\Omega_c|^2 + \Delta^4) + 4\Delta^2|\Omega_c|^2|\Omega_p|^2 + \Gamma^2\Delta^2(|\Omega_p|^2 + |\Omega_c|^2) + |\Omega_p|^2|\Omega_c|^4 + \\
&\quad + 2|\Omega_c|^2|\Omega_p|^4 + |\Omega_p|^6 + 2|\Omega_c|^4|\Omega_p|^2 + |\Omega_c|^2|\Omega_p|^4 = \\
&= |\Omega_c|^2(|\Omega_c|^2 - \Delta^2)^2 + 4\Delta^2|\Omega_c|^2|\Omega_p|^2 + \Gamma^2\Delta^2(|\Omega_p|^2 + |\Omega_c|^2) + 3|\Omega_c|^4|\Omega_p|^2 + |\Omega_p|^6 + \\
&\quad + 3|\Omega_c|^2|\Omega_p|^4 = \\
&= |\Omega_c|^2(|\Omega_c|^2 - \Delta^2)^2 + 4\Delta^2|\Omega_c|^2|\Omega_p|^2 + |\Omega_p|^6 + \Gamma^2\Delta^2(|\Omega_p|^2 + |\Omega_c|^2) + \\
&\quad + 3|\Omega_c|^2|\Omega_p|^2(|\Omega_c|^2 + |\Omega_p|^2) = \\
&= |\Omega_c|^2(|\Omega_c|^2 - \Delta^2)^2 + 4\Delta^2|\Omega_c|^2|\Omega_p|^2 + |\Omega_p|^6 + (|\Omega_p|^2 + |\Omega_c|^2)(\Gamma^2\Delta^2 + 3|\Omega_c|^2|\Omega_p|^2)
\end{aligned}$$

Temos que

$$\rho_{22} = -\frac{i}{\Gamma}y = -\frac{i}{\Gamma}\frac{i2\Delta}{k} = \frac{2\Delta}{\Gamma k} = \frac{2\Delta}{\Gamma} \frac{\Gamma\Delta|\Omega_p|^2|\Omega_c|^2}{\{\}} = \frac{2\Delta^2|\Omega_p|^2|\Omega_c|^2}{\{\}}$$

[10]

Anexo B

Konotop - Parte 2

Dado que $\rho_{22} \ll 1$, vamos assumir que o campo de acoplamento é independente face ao tempo

$$\begin{aligned} \Rightarrow \varepsilon_c &= \varepsilon_c(x, y, z) \\ \Rightarrow \Omega_c &= P_{32} \frac{\varepsilon_c}{\hbar}, \text{ sendo } \Omega_c = \Omega_c(x, y, z) \Rightarrow \boxed{\Omega_c = \Omega_{co} F(x, y, z)} \end{aligned}$$

Seja $F(x, y, z) = f(q, r, \theta)$ com:

$$\left[\begin{array}{l} r = k_p \sqrt{x^2 + y^2} = k_p \rho, \quad \rho \rightarrow \text{distância radial num sistema cilíndrico} \\ \theta = \text{atan}\left(\frac{y}{x}\right) \\ q = k_p z \end{array} \right.$$

Também, seja $\delta = \frac{\Delta}{\Omega_{co}}$, $\gamma = \frac{\Gamma}{|\Omega_{co}|}$ e $\Omega = \frac{\Omega_p}{|\Omega_{co}|}$

Supõe-se, além disso, que $\rho \gamma \sim \Omega^2 \rightarrow$ (perda relativamente fraca) $\left(\Rightarrow \frac{\Delta \Gamma}{|\Omega_{co}|^2} \sim \frac{\Omega_p^2}{|\Omega_{co}|^2} \Leftrightarrow \Delta \Gamma \sim \Omega_p^2 \right)$.

$$\begin{aligned} D &= |\Omega_c|^2 (|\Omega_c|^2 - \Delta^2)^2 + (|\Omega_c|^2 + |\Omega_p|^2) (3|\Omega_c|^2 |\Omega_p|^2 + \Delta^2 \Gamma^2) + \\ &\quad + 4\Delta^2 |\Omega_c|^2 |\Omega_p|^2 + |\Omega_p|^6 = \\ &= |\Omega_{co}|^2 |f|^2 (|\Omega_{co}|^2 |f|^2 - |\Omega_{co}|^2 \delta^2)^2 + |\Omega_{co}|^2 (|f|^2 + |\Omega|^2) |\Omega_{co}|^4 (3|f|^2 |\Omega|^2 + \delta^2 \gamma^2) + \\ &\quad + 4|\Omega_{co}|^2 \delta^2 |\Omega_{co}|^2 |f|^2 |\Omega_{co}|^2 |\Omega|^2 + |\Omega_{co}|^2 |\Omega|^6 = \\ &= |\Omega_{co}|^6 \left[|f|^2 (|f|^2 - \delta^2)^2 + (|f|^2 + |\Omega|^2) (3|f|^2 |\Omega|^2 + \delta^2 \gamma^2) + 4\delta^2 |f|^2 |\Omega|^2 + |\Omega|^6 \right] \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\rho_{22}} = \frac{D}{2\Delta^2 |\Omega_c|^2 |\Omega_p|^2} = \frac{(|f|^2 - \delta^2)^2}{2\delta^2 |\Omega|^2} + \frac{3(|f|^2 + |\Omega|^2)}{2\delta^2} + \frac{(|f|^2 + |\Omega|^2) \gamma^2}{2|f|^2 |\Omega|^2} + 2 + \frac{|\Omega|^4}{2\delta^2 |f|^2}$$

Uma vez que $\delta \gamma \sim \Omega^2$, $\frac{|\Omega|^4}{2\delta^2 |f|^2} \sim \frac{\delta^2}{2|f|^2}$.

Por outro lado, $\frac{(|f|^2 + |\gamma|^2) \gamma^2}{2|f|^2 |\Omega|^2} > \frac{(|f|^2 + |\gamma|^2) \gamma^2}{2(|f|^2 + |\gamma|^2) |\Omega|^2} = \frac{\gamma^2}{2|\Omega|^2}$.

E, portanto,

$$\frac{(|f|^2 + |\Omega|^2) \gamma^2}{2|f|^2 |\Omega|^2} + \frac{|\Omega|^4}{2\delta^2 |f|^2} > \frac{\delta^2}{2} \left(\frac{1}{|f|^2} + \frac{1}{|\Omega|^2} \right)$$

Além disso, é possível mostrar que $\frac{1}{|f|^2} + \frac{1}{|\Omega|^2} \geq \frac{4}{|f|^2 + |\Omega|^2}$.

Efetivamente, esta expressão é equivalente a:

$$1 + \frac{|\Omega|^2}{|f|^2} + \frac{|f|^2}{|\Omega|^2} + 1 \geq 4 \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2,$$

onde $x = \frac{|\Omega|^2}{|f|^2} > 0$ e o mínimo de $x + \frac{1}{x}$ é obtido em:

$$1 - \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

e tem o valor $1 + 1 = 2 \Rightarrow \boxed{x + \frac{1}{x} \geq 2}$

Por sua vez isto implica que

$$\frac{1}{\rho_{22}} > \frac{(|f|^2 - \delta^2)^2}{2\delta^2 |\Omega|^2} + \frac{3(|f|^2 + |\Omega|^2)}{2\delta^2} + 2 + \frac{2\delta^2}{|f|^2 + |\Omega|^2}$$

Similarmente, temos

$$\frac{3(|f|^2 + |\Omega|^2)}{2\delta^2} + \frac{2\gamma^2}{|f|^2 + |\Omega|^2} = \frac{3y}{2\delta^2} + \frac{2\gamma^2}{y}, \quad \text{com } y = |f|^2 + |\Omega|^2 > 0$$

O valor mínimo de $\frac{3y}{2\delta^2} + \frac{2\gamma^2}{y}$ é atingido em

$$\frac{3}{2\delta^2} - \frac{2\gamma^2}{y^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2\delta^2} = \frac{2\gamma^2}{y^2} \Leftrightarrow y = \frac{2\gamma|\delta|}{\sqrt{3}}$$

Nota: $\gamma > 0$ e $\delta \leq 0$

O valor mínimo de $\frac{3y}{2\delta^2} + \frac{2\gamma^2}{y} = \frac{??}{2\delta^2\sqrt{3}} + \frac{??}{2\gamma|\delta|} = \frac{\sqrt{3}\gamma}{|\delta|} + \frac{\gamma\sqrt{3}}{|\delta|} = 2\sqrt{3} \frac{\gamma}{|\delta|}$

Obtendo-se, assim

$$\begin{aligned} \frac{3(|f|^2 + |\Omega|^2)}{2\delta^2} + \frac{2\gamma^2}{|f|^2 + |\Omega|^2} &\geq 2\sqrt{3} \frac{\gamma}{|\delta|} \\ \Rightarrow \frac{1}{\rho_{22}} &> \frac{(|f|^2 - |\delta|^2)^2}{2\delta^2 |\Omega|^2} + 2\sqrt{3} \frac{\gamma}{|\delta|} + 2 \end{aligned}$$

Uma vez que temos que ter $\frac{1}{\rho_{22}} \gg 1$, devemos exigir que

$$\boxed{\frac{(|f|^2 - \delta^2)^2}{2\delta^2|\Omega|^2} + 2\sqrt{3}\frac{\gamma}{|\delta|} + 2 \gg 1} \quad (\text{B.1})$$

Se negligenciarmos o primeiro termos nas regiões onde $|f|^2 \lesssim \delta^2$, deveremos obter $2\sqrt{3}\frac{\gamma}{|\delta|} + 2 \gg 1$.

Assumindo que é suficiente para ter $2\sqrt{3}\frac{\gamma}{|\delta|} + 2 \gtrsim 10 \Leftrightarrow \sqrt{3}\frac{\gamma}{|\delta|} \gtrsim 4 \Leftrightarrow \frac{\gamma}{|\delta|} \gtrsim \frac{4}{3}\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{\gamma}{|\delta|} \gtrsim 2.3$, o que significa que $\frac{\gamma}{|\delta|} \gtrsim 3$ consegue fazer com que $\frac{1}{\rho_{22}} \gg 1$ mesmo quando o primeiro termo da equação (B.1) for muito pequeno.

Com as novas variáveis adimensionais, temos que

$$\begin{aligned} \rho_{21} &= \frac{|\Omega_{co}|\delta|\Omega_{co}|^2|f|^2(|\Omega_{co}|^2|f|^2 - |\Omega_{co}|^2\delta^2 + |\Omega_{co}|^2|\Omega|^2 + i|\Omega_{co}|^2\delta\gamma)|\Omega_{co}|\Omega}{|\Omega_{co}|^6 \left[|f|^2(|f|^2 + |\Omega|^2)^2(3|f|^2|\Omega|^2 + \delta^2\gamma^2) + 4\delta^2|f|^2|\Omega|^2 + |\Omega|^6 \right]} \\ &= \frac{\delta|f|^2(|f|^2 - \delta^2 + |\Omega|^2 + i\delta\gamma)\Omega}{|f|^2(|f|^2 - \delta^2)^2 + (|f|^2 + |\Omega|^2)(3|f|^2|\Omega|^2 + \delta^2\gamma^2) + 4\delta^2|f|^2|\Omega|^2 + |\Omega|^6} \end{aligned}$$

Ao escrever $\chi = |f|^2 - \delta^2$ podemos escrever qu

$$\rho_{21} = \frac{\delta|f|^2(\chi + |\Omega|^2 + i\delta\gamma)}{|f|^2\chi^2 + (|f|^2 + |\Omega|^2)(3|f|^2|\Omega|^2 + \delta^2\gamma^2 + 4\delta^2|f|^2|\Omega|^2 + |\Omega|^6)}$$

B.1 Aproximação de D:

$$D = |\Omega_{co}|^6 \left[|f|^2(|f|^2 - \delta^2)^2 + (|f|^2 + |\Omega|^2)(3|f|^2|\Omega|^2 + \delta^2\gamma^2) + 4\delta^2|f|^2|\Omega|^2 + |\Omega|^6 \right]$$

Se negligenciarmos o termo $|\Omega|^6$, temos que

$$\frac{D}{|\Omega_{co}|^6} \simeq |f|^2\chi^2 + 3|f|^2|\Omega|^2(|f|^2 + |\Omega|^2) + \delta^2\gamma^2(|f|^2 + |\Omega|^2) + 4\delta^2|f|^2|\Omega|^2$$

No *paper* é afirmado que $D \simeq \chi^2 + 3\chi|\Omega|^2 + 7\delta^2|\Omega|^2 + \delta^2\gamma^2$.

Assumindo que $|f|^2 + |\Omega|^2 \simeq |f|^2$ ($|\Omega|^2$ pequeno para $|f|^2$ uma vez que o campo de teste é fraco e o de acoplamento é forte), teríamos

$$\begin{aligned} \frac{D}{|\Omega_{co}|^6} &\simeq |f|^2\chi^2 + 3|f|^4|\Omega|^2 + \delta^2\gamma^2|f|^2 + 4\delta^2|f|^2|\Omega|^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{D}{|\Omega_{co}|^6|f|^2} \simeq \chi^2 + 3|f|^2|\Omega|^2 + \delta^2\gamma^2 + 4\delta^2|\Omega|^2 \end{aligned}$$

Usando $\chi = |f|^2 - \delta^2$, temos

$$\begin{aligned} \frac{D}{|\Omega_{co}|^2 |f|^2} &\simeq \chi^2 + 3(\chi + \delta^2) |\Omega|^2 + \delta^2 \gamma^2 + 4\delta^2 |\Omega|^2 = \\ &= \chi^2 + 3\chi |\Omega|^2 + \delta^2 \gamma^2 + 7\delta^2 |\Omega|^2 = D' \end{aligned}$$

NOTA:

Para se obter esta expressão, foram utilizadas duas aproximações:

1. negligenciar o termo $|\Omega|^6$
2. $|f|^2 + |\Omega|^2 \simeq |f|^2$

Com esta expressão aproximada para D , temos

$$\rho_{21} \simeq \frac{\delta (\chi + |\Omega|^2 + i\delta\gamma) \Omega}{\chi^2 + 3(\chi + \delta^2) |\Omega|^2 + \delta^2 \gamma^2 + 4\delta^2 |\Omega|^2}$$

Se $\varepsilon_p = \varepsilon_p(\vec{r}, t)$, então $\rho_{21} = \rho_{21}(\vec{r}, t)$

Então, temos que

$$\nabla^2 \vec{E}_p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}_p}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2}$$

com,

$$\begin{aligned} \vec{E}_p(\vec{r}, t) &= \hat{e}_p \varepsilon_p(\vec{r}, t) e^{i(\vec{k}_p \cdot \vec{r} - \omega_p t)} + \text{c. c.} \\ \vec{P} &= \hat{e}_{p12} P_{p12} \rho_{21}(\vec{r}, t) e^{i(k_{pz} - \omega_p t)} + \text{c. c.} \end{aligned}$$

Assumindo que $\hat{e}_p = \hat{e}_{p12}$, temos que

$$\begin{aligned} \nabla^2 E_p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_p}{\partial t^2} &= \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \\ \nabla^2 E_p &= \nabla_{\perp}^2 E_p + \frac{\partial^2 E_p}{\partial z^2} \\ \frac{\partial E_p}{\partial z} &= \left(\frac{\partial E_p}{\partial z} + i k_{pz} \varepsilon_p \right) e^{i(\vec{k}_p \cdot \vec{r} - \omega_p t)} \\ \frac{\partial^2 E_p}{\partial z^2} &= \left(\frac{\partial^2 E_p}{\partial z^2} + i 2 k_{pz} \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial z} - k_{pz}^2 \varepsilon_p \right) e^{i(\vec{k}_p \cdot \vec{r} - \omega_p t)} \end{aligned}$$

Aproximação paraxial:

$$\frac{\partial^2 E_p}{\partial z^2} \simeq \left(i 2 k_{pz} \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial z} - k_{pz}^2 \varepsilon_p \right) e^{i(\vec{k}_p \cdot \vec{r} - \omega_p t)}$$

Além disso, assumindo que $\varepsilon_p = \varepsilon(\vec{r})$ (independente ao tempo), temos

$$\frac{\partial^2 E_p}{\partial t^2} = -\omega_p^2 \varepsilon_p e^{i(k_{pz} - \omega_p t)}$$

Se $k_p^2 = \frac{\omega_p^2}{c^2}$, então o membro da esquerda da equação (A.1) tomaria a forma

$$\begin{aligned}\nabla^2 E_p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_p}{\partial t^2} &= \left[\nabla_{\perp}^2 \varepsilon_p + i2k_p \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial z} - k_p^2 \varepsilon_p + \frac{\omega_p^2}{c^2} \varepsilon_p \right] e^{i(k_p z - \omega_p t)} \\ &= \left(\nabla_{\perp}^2 \varepsilon_p + i2k_p \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial z} \right) e^{i(k_p z - \omega_p t)}\end{aligned}$$

No que toca ao membro da direita, o facto de assumirmos que $\varepsilon_p = \varepsilon(\vec{r}) \Rightarrow \Omega = \Omega(\vec{r}) \Rightarrow \frac{\partial \Omega}{\partial t} = 0$.

Também, uma vez que f não depende do tempo, temos que $\frac{\partial \rho_{21}}{\partial t} = 0$.

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = -\omega_p^2 P_{12} \rho_{21} e^{i(k_p z - \omega_p t)}$$

Substituindo estes dois resultados na equação (A.1), temos agora que

$$\boxed{\nabla_{\perp}^2 \varepsilon_p + i2k_p \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial z} = -\frac{\omega_p^2}{\varepsilon_0 c^2} P_{12} \rho_{21}}$$

Agora, com

$$\begin{aligned}xx = k_p x &\rightarrow \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial xx}{\partial x} \frac{\partial}{\partial xx} = k_p \frac{\partial}{\partial xx} \\ yy = k_p y &\rightarrow \frac{\partial}{\partial y} = k_p \frac{\partial}{\partial yy} \\ \varphi = k_p z &\rightarrow \frac{\partial}{\partial z} = k_p \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \Rightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial xx^2} + \frac{\partial^2}{\partial yy^2} \right) \varepsilon_p + i2 \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial \varphi} &= \frac{\omega_p^2}{\varepsilon_0 k_p^2 c^2} P_{12} \rho_{21}\end{aligned}$$

Definindo $r = \sqrt{xx^2 + yy^2}$

$$\theta = \arctan\left(\frac{yy}{xx}\right) = \arctan\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varepsilon_p}{\partial \theta^2} + i2 \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial \varphi} &= -\frac{P_{12}}{\varepsilon_0} \rho_{21} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \varepsilon_p + i \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial \varphi} &= -\frac{P_{12}}{2\varepsilon_0} \rho_{21}\end{aligned}$$

Uma vez que $\varepsilon_p = \frac{\hbar \Omega_p}{P_{12}} = \frac{\hbar |\Omega_{co}| \Omega}{P_{12}}$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \Omega + i \frac{\partial \Omega}{\partial \varphi} = -\frac{P_{12}^2}{2\hbar |\Omega_{co}| \varepsilon_0} \rho_{21}$$

Qual é a relação entre ρ_{12} e ρ_{21} ?

Seja $k' = \frac{P_{12}^2}{2\hbar|\Omega_{co}|\epsilon_0}$, onde $k = \frac{N|P_{12}|^2}{2\hbar\epsilon_0\Omega_{co}}$

$$\rightarrow i \frac{\partial \Omega}{\partial \varphi} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \Omega = -k' \rho_{21}$$

Usando a expressão aproximada de ρ_{21} :

$$\rho_{21} \simeq \frac{\delta (\chi + |\Omega|^2 + i\delta\gamma) \Omega}{\chi^2 + 3(\chi + \delta^2)|\Omega|^2 + \delta^2\gamma^2 + 4\delta^2|\Omega|^2} = \frac{\delta (\chi + |\Omega|^2 + i\delta\gamma) \Omega}{D'}$$

Temos então que:

$$k' \rho_{21} = \frac{k' \delta (\chi + |\Omega|^2) \Omega}{D'} + \frac{ik' \delta^2 \gamma \Omega}{D'} = G' \Omega + iA' \Omega$$

e, substituindo:

$$\boxed{i \frac{\partial \Omega}{\partial \varphi} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \Omega + G' \Omega = -iA' \Omega} \quad (\text{B.2})$$

- Da expressão original para D conclui-se que $D > 0$
- Também penso que $k' > 0$ (a não ser que P_{12} seja complexo)

$\rightarrow A' > 0 \Rightarrow$ Dissipação Linear

Na derivação do *pde*?? anterior, assumi

$$\begin{aligned} \vec{k}_p &= k_p \hat{z} \\ \epsilon_p &= \epsilon(\vec{r}) \text{ não depende do tempo } \leftarrow ?? \\ \hat{e}_p &= \hat{e}_{p12} \\ \left| \frac{\partial^2 \epsilon_p}{\partial z^2} \right| &\ll \left| i2k_{pz} \frac{\partial \epsilon_p}{\partial z} \right| \\ k_p^2 &= \frac{\omega_p^2}{c^2} \end{aligned}$$

Assumindo que $G' \gtrsim 1$ (para que a não linearidade seja importante), deveremos ter

$$\begin{aligned} \rho_{22} \ll 1 &\lesssim |G'| \rightarrow \rho_{22} \ll |G'| \Leftrightarrow \\ \frac{2\delta^2|\Omega|^2}{D'} &\ll \frac{k' \delta (\chi + |\Omega|^2)}{D'} \Leftrightarrow \\ 2|\delta||\Omega|^2 &\ll k' (\chi + |\Omega|^2) \Leftrightarrow \\ \boxed{k' &\gg \frac{\chi + |\Omega|^2}{2|\delta||\Omega|^2}} \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

$\Rightarrow$ as equações (B.1) e (B.3) deverão ser satisfeitas em todos os estudos:

$$(B.3) \quad k' \gg \frac{\chi + |\Omega|^2}{2|\delta||\Omega|^2}$$

$$(B.1) \quad \frac{\gamma}{|\delta|} \gtrsim 3$$

[10]

Anexo C

Código de Simulação da propagação de um solitão brilhante

Código desenvolvido para a simulação de propagação de um solitão ao longo de uma fibra ótica.

```
% Esta rotina foi criada por Suzana Vale no ambito da dissertacao de
% mestrado "Propagacao de Sinais em Sistemas Lambda".
% Esta implementa o metodo de Split Step Fourier para simular a
% propagacao de um solitao brilhante.

% E capaz de simular a equacao de propagacao:
% 
$$i dU/dz + 0.5 d^2U/dx^2 + |U|^2 U = 0$$


% E possivel alterar a precisao da simulacao aumentando o parametro (m).
% Quanto maior for o m, mais pontos serao analisados. Para a precisao da
% parte nao linear, aumentando (nstep) aumenta-se a precisao de calculo do
% Split Step Fourier.

% Sao retornados os graficos de intensidade e espectro do sinal 'a entrada
% e saida, a representacao tridimensional da propagacao do sinal ao longo
% de z assim como graficos de FWHM e maximos de amplitude.

close all; clear; clc;
tic;

% Metodo SplitStepFT

%-----
% constantes
```

```

%-----
c = 299792458;           % Velocidade da luz no vazio (m/s)

t0 = 110/1.763*1e-15;    % Largura inicial do impulso (s)
lambda0 = 1.55e-6;       % Comprimento de onda central (m)
beta2 = -21.8383e-27;    % Coeficiente de Dispersao de ordem 2 (s^2/m)

%-----
% Input variables
%-----

Po=.00064;               % Potencia de entrada (Watts)
gamma=0.00243;           % Coeficiente de nao-Linearidade da Fibra (W/m)
chirp=0;                 % Parametro chirp nao sera ainda considerado

Ld=(t0^2)/(abs(beta2));  % Comprimento de dispersao (m)
Ao=sqrt(Po);             % Amplitude

%-----
% Variavel t (tempo, em segundos, tamanho n)
%-----

t_min = -500*t0;
t_max = 500*t0;

m = 14;                  % m toma valores no intervalo [10:20]
n = 2^m;                 % n = 1024;2048;4096;8192;16384;...
dt = (t_max - t_min)/n;
t = (t_min : dt : t_max-dt);

%-----
% Variavel w (frequencia angular, em radianos por segundo, tamanho n)
%-----

dw = 2*pi/(t_max-t_min);
w_min = -n*dw/2;
w_max = (n-2)*dw/2;
w = (w_min : dw : w_max)';

w = fftshift(w);

```

```

w0=2*pi*c/lambda0;

%-----
% Variavel z   (distancia de propagacao, normalizado, tamanho nz)
%-----

z_init = 0;           % z inicial da fibra
z_end = 2;           % z final da fibra
                        % (comprimento da fibra=z_end-z_init)
delta_z = 0.1;        % distancia para a qual se guardam os dados
z=z_init:delta_z:z_end;

nz=(z_end-z_init)/delta_z+1; % numero de perfis guardados na variavel u,
                        % tem que ser inteiro

Zreal=z*Ld;
delta_Zreal=delta_z*Ld;

%-----
% Variavel u   (envelope complexo, tamanho n x nz)
%-----

U=zeros(n,nz);

%-----
% Parametros do sinal de entrada (u(:,1)) para z = z_init
%-----

a = 1;                % Amplitude do solitao
N = 1;

U(:,1) = N*sqrt(abs(beta2)/gamma)*a/t0*sech(a*t/t0);

u=U(:,1);             % variavel auxiliar

nstep = 2000;         % Numero de intervalos em cada delta_z
h = delta_Zreal/nstep ; % Step de integracao
                        %(quanto maior for 'step', mais preciso sera h)

```

```

%-----
% Definicao do filtro/impulso Supergaussiano
%-----

tau = 0.2 *(t_max - t_min);
Sg = (exp(-0.5*(t/tau).^14))';

%-----
% Calculo do Split Step Fourier
%-----

for iZ = 1:nz

    for jj = 1 : nstep

        % Parte Linear
        spectrum = ifft(u);
        spectrum = spectrum.*exp(1i*beta2/2*w.^2*(h/2));
        u=fft(spectrum);

        % Parte nao Linear
        u = u.*exp(1i*gamma*(abs(u).^2)*(h));

        % Parte Linear
        spectrum = ifft(u);
        spectrum = spectrum.*exp(1i*beta2/2*w.^2*(h/2));
        u = fft(spectrum);

    end

    U(:,iZ) = u; % Salvar o impulso de saida em cada intervalo
    u = u.*Sg;   % filtrar o sinal de modo a absorver as radiacoes laterais

end

toc;
disp('CPU time:'), disp(cputime);

```

```
%Representacao de resultados

figure(1);
plot(t,abs(U(:,1)),'b',t,abs(U(:,nz)),'r');
legend('Impulso inicial (azul)', 'Impulso final (vermelho)');
title('Impulso na entrada e na saida');
xlabel('Tempo'); ylabel('Amplitude');
grid on;

% [Z,T] = meshgrid(z,t);
% figure(2);
% mesh(T,Z,abs(U(:,:,)));
% title('Propagacao de um Impulso Secante Hiperbolico');
% xlabel('t'); ylabel('z'); zlabel('Amplitude do Impulso');
% grid on;

figure(3);
plot3(T,Z,U(:,:,),'b');
title('Propagacao de um Impulso Secante Hiperbolico');
xlabel('t'); ylabel('z'); zlabel('Amplitude do Impulso');
grid on;

figure(4);
output=ifft(U(:,nz));
output=(t_max-t_min)*abs(fftshift(output));
plot(w+w0,output,'r');
title('Espectro do Sinal de Saida');
grid on;
```


Anexo D

Código de Simulação para sinal de entrada com forma de Sech

```
% Esta rotina foi criada por Suzana Vale no ambito da dissertacao de
% mestrado "Propagacao de Sinais em Sistemas Lambda".
% Esta implementa o metodo de Split Step Fourier para simular a
% propagacao de sinais do tipo (1+1D) em sistemas do tipo Lambda.

% E capaz de simular dois tipos de equacao de propagacao:
% tipo = 1
% 
$$idU/dz + 0.5*d^2U/dx^2 + |U|^2*U = 0$$

% tipo = 2
% 
$$idU/dz + 0.5*d^2U/dx^2 + N*U = 0$$

% onde N e um operador nao linear definido na rotina e controlado pelo
% campo de controle.

% E possivel alterar a precisao da simulacao aumentando o parametro (m).
% Quanto maior for (m), mais pontos serao analisados. Para a precisao da
% parte nao linear, aumentando (nstep) aumenta-se a precisao de calculo do
% Split Step Fourier.

% E possivel alterar o sinal de entrada (U(:,1)) assim como o campo de
% controle (fzx), em forma e amplitude. Sao retornados os graficos de
% intensidade e espectro do sinal 'a entrada e saida, a representacao
% tridimensional da propagacao do sinal ao longo de z assim como graficos
% de FWHM e maximos de amplitude.

close all; clear; clc;
format long
```

```

tic;
disp('Simulacao de Propagacao de Feixes de Luz')

%-----
% constantes
%-----
c = 299792458; % Velocidade da luz no vazio (m/s)
i=sqrt(-1);

%-----
% Variavel x
%-----
x0=1;
x_min=-100*x0;
x_max=100*x0;

m=14; % m toma valores no intervalo [10:20]
n=2^m; % n = 1024;2048;4096;8192;...
dx=(x_max-x_min)/n;
x=(x_min:dx:x_max-dx);

%-----
% Variavel w
% (frequencia angular normalizada, em radianos por segundo, tamanho n)
%-----

dw = 2*pi/(x_max-x_min);
w_min = -n*dw/2;
w_max = (n-2)*dw/2;
w = (w_min : dw : w_max)';

w = fftshift(w);

%-----
% Variavel z (distancia de propagacao, normalizado, tamanho nz)
%-----

```

```

z_init = 0;           % z inicial da fibra
z_end = 100;          % z final da fibra (comprimento da fibra=z_end-z_init)
delta_z = 1;          % distancia para a qual se guardam os dados
z=z_init:delta_z:z_end;
nz=(z_end-z_init)/delta_z+1; % numero de perfis guardados na variavel u,
                             % tem que ser inteiro

nstep = 2000;          % Numero de intervalos em cada delta_z
h = delta_z/nstep ;    % Step de integracao
                             % (quanto menor h, mais preciso a rotina)

%-----
% Variavel U   (envelope complexo, tamanho n x nz)
%-----

U=zeros(n,nz);

%-----
% Campos de Controlo
%-----

%%% Amplitude do campo
A_fzx = 1;

%%% Campo de controlo para solitao de chi elevado
% A_fzx = 10;

%%% Campo de controlo constante
fzx = A_fzx.*ones(n,1);

%%% Outros campos de controlo
x0_g = 1;              % Associado 'a largura da gaussiana
a=5;

%%% campo de controlo gaussiano
% fzx = A_fzx(sim)*exp(-0.5*(x./x0_g).^2); fzx = fzx';

%%% campo de controlo "de seguimento"
% fzx = A_fzx*exp(-0.5*(x./x0_g).^2).*exp(-a*x); fzx = fzx';

```

```

%-----
% Parametros da simulacao
%-----

k = 10.38;
delta = -0.1;
gamma = 0.3;

f2 = (abs(fzx)).^2;

tol = 1e-8;
ain = find(f2 > tol);
aux = zeros(n,1);

chi = f2 - delta^2;

tipo=2;

%-----
% Parametros do sinal de entrada (u(:,1)) para z = z_init
%-----

%U(:,1) = exp(-(x/(5*x0)).^2);
%a = 5;
%b = 5;

U(:,1) = sech(x);
% U(:,1) = sech(x).*exp(i*a*x);
% U(:,1) = sech((x/b)).*exp(i*a*x);
% U(:,1) = exp(-(x/b).^2);
% U(:,1) = exp(-(x/b).^2) .*exp(i*a*x);

%%% Sinal para solitao de Chi Elevado
%%% IMPORTANTE : Verificar que a escala em x e adequada x = [-2000, 2000]
%%% Sinal de controlo correspondente : A_fzx = 0.11;
% b = 0.5;
% a=sqrt(2*abs(delta)*k/max(chi.^2));
%

```

```

% U(:,1)=b*sech(a*b*x);

u=U(:,1); % variavel auxiliar para calculos

%-----
% Definicao do filtro/impulso Supergaussiano para condicoes fronteira
%-----

xw = 0.4 *(x_max-x_min);
Sg = (exp(-0.5*(x/xw).^16))';

%-----
% Split Step Fourier
%-----

for iZ = 2:nz

    % Parte Linear
    aux_spectrum = fft(u);
    aux_spectrum = aux_spectrum.*exp(-(1i)*0.5*w.^2*(h/2));
    u=ifft(aux_spectrum);

    for jj = 1 : (nstep-1)

        % Parte nao Linear
        if tipo==1
            u=u.*exp(i*(abs(u)).^2*h);
        elseif tipo==2
            % calculo de |f|^2 / Dn

            % calculo auxiliar, contabilizando apenas onde |f|^2 > tol
            aux(ain) = 1./ ( chi(ain).^2 + delta^2 * gamma^2 + ...
                (abs(u(ain))).^2 .* (3*chi(ain) + 7*delta^2 + ...
                (delta^2 * gamma^2)./f2(ain) + 3*(abs(u(ain))).^2 + ...
                ((abs(u(ain))).^4)./f2(ain) ) );

            G = k*delta*aux.*(chi + abs(u).^2);
            %
            A = k*delta^2*gamma*aux;
            %
            N = G + (1i)*A;

```

```

        N = G;
        u = u.*exp((1i)*N*h);
    end

    % Parte Linear
    aux_spectrum = fft(u);
    aux_spectrum = aux_spectrum.*exp(-(1i)*0.5*w.^2*(h));
    u = ifft(aux_spectrum);
end

% Parte nao Linear
if tipo==1
    u=u.*exp(i*(abs(u)).^2*h);
elseif tipo==2

    % calculo auxiliar, contabilizando apenas onde |f|^2 > tol
    aux(ain) = 1./ ( chi(ain).^2 + delta^2 * gamma^2 + ...
        (abs(u(ain))).^2 .* (3*chi(ain) + 7*delta^2 + ...
        (delta^2 * gamma^2)./f2(ain) + 3*(abs(u(ain))).^2 + ...
        ((abs(u(ain))).^4)./f2(ain) ) );

    G = k*delta*aux.*(chi + abs(u).^2);
%     A = k*delta^2*gamma*aux;
%     N = G + (1i)*A;
    N = G;
    u = u.*exp((1i)*N*h);

end

% Parte Linear
aux_spectrum = fft(u);
aux_spectrum = aux_spectrum.*exp(-(1i)*0.5*w.^2*(h/2));
u = ifft(aux_spectrum);

u = u.*Sg;      % filtrar o sinal de modo a absorver as radiacoes laterais
U(:,iZ) = u;    % Salvar o impulso de saida em cada intervalo

end

```

```

toc;
disp('CPU time:'), disp(cputime);

%-----
%Representacao de resultados
%-----

figure(1);
plot(x,abs(U(:,1)).^2,'b',x,abs(U(:,nz)).^2, 'r');
legend('Intensidade inicial (azul)', 'Intensidade final (vermelho)');
title('Intensidade na entrada e na saida');
xlabel('x'); ylabel('Intensidade');
grid on;

[Z,X] = meshgrid(z,x);
figure(2);
plot3(X,Z,abs(U),'b');
title(sprintf('Propagacao, para f(z,x) = %d', A_fzx ));
xlabel('x'); ylabel('z'); zlabel('Amplitude');
grid on;

figure(3);
w=fftshift(w);
s=(x_max-x_min)*abs(fftshift(fft(U(:,1))))/n;
plot(w,s,'b');
hold on;
s=(x_max-x_min)*abs(fftshift(fft(U(:,nz))))/n;
plot(w,s,'r');
title('Espectro dos Sinais de Entrada e Saida');
legend('Entrada (azul)', 'Saida (vermelho)');
grid on;

% Calculo do FWHM
ampUz = abs(U(:, :)).^2;

maxUz = zeros(nz,1);
FWHM = zeros(nz, 1);
init = 1;
for kk = 1 : nz

```

```
maxUz(kk,1) = max(ampUz(:,kk));
min = maxUz(kk,1)/sqrt(2);

indx = find(ampUz(:,kk) > min);

init = indx(1);
final = indx(end);

fwhm_min = x(init);
fwhm_max = x(final);
FWHM(kk) = fwhm_max - fwhm_min;

end

figure,
plot(z, FWHM, 'b.-');
xlabel('z'); ylabel('FWHM');
title('FWHM ao longo da propagacao em z');

figure,
plot(z, max(abs(U)), 'b.-');
xlabel('z'); ylabel('|U|_{max}');
title(sprintf('Amplitude de Propagacao ao longo de z'));
```

Anexo E

Código de Simulação da Propagação de uma onda de Airy finita

```
% Esta rotina foi criada por Suzana Vale no ambito da dissertacao de
% mestrado "Propagacao de Sinais em Sistemas Lambda".
% Esta implementa o metodo de Split Step Fourier para simular a
% propagacao de uma onda de Airy finita do tipo (1+1D) em sistemas do tipo
% Lambda.

% E capaz de simular dois tipos de equacao de propagacao:
% tipo = 1
% 
$$idU/dz + 0.5*d^2U/dx^2 + |U|^2*U = 0$$

% tipo = 2
% 
$$idU/dz + 0.5*d^2U/dx^2 + N*U = 0$$

% onde N e um operador nao linear definido na rotina e controlado pelo
% campo de controlo.

% E possivel alterar a precisao da simulacao aumentando o parametro (m).
% Quanto maior for (m), mais pontos serao analisados. Para a precisao da
% parte nao linear, aumentando (nstep) aumenta-se a precisao de calculo do
% Split Step Fourier.

% E possivel alterar o sinal de entrada (U(:,1)) assim como o campo de
% controlo (fzx), em forma e amplitude. Sao retornados os graficos de
% intensidade 'a entrada e saida, a representacao tridimensional da
% propagacao do sinal ao longo de z assim como graficos de FWHM e maximos
% de amplitude.

close all; clear all; clc;
```

```

format long

tic;
disp('Simulacao de Propagacao de Feixes de Luz')

%-----
% constantes
%-----
c = 299792458; % Velocidade da luz no vazio (m/s)
i=sqrt(-1);

%-----
% Variavel x
%-----
x0=1;
x_min=-50*x0;
x_max=50*x0;

m=12; % m toma valores no intervalo [10:20]
n=2^m; % n = 1024;2048;4096;8192;...
dx=(x_max-x_min)/n;
x=(x_min:dx:x_max-dx);

%-----
% Variavel w
% (frequencia angular normalizada, em radianos por segundo, tamanho n)
%-----

dw = 2*pi/(x_max-x_min);
w_min = -n*dw/2;
w_max = (n-2)*dw/2;
w = (w_min : dw : w_max)';

w = fftshift(w);

%-----
% Variavel z (distancia de propagacao, normalizado, tamanho nz)
%-----

```

```

z_init = 0;           % z inicial da fibra
z_end = 10;          % z final da fibra (comprimento da fibra=z_end-z_init)
delta_z = 0.1;        % distancia para a qual se guardam os dados
z=z_init:delta_z:z_end;
nz=(z_end-z_init)/delta_z+1; % numero de perfis guardados na variavel u,
                             % tem que ser inteiro

nstep = 2000;         % Numero de intervalos em cada delta_z
h = delta_z/nstep ;   % Step de integracao
                             % (quanto menor h, mais preciso a rotina)

%-----
% Variavel U (envelope complexo, tamanho n x nz)
%-----

U=zeros(n,nz);

%-----
% Parametros da simulacao
%-----

k = 10.38;
delta = -0.1;
gamma = 0.3;

A_fzx = 100;          % Amplitude do campo de controlo

x0_g = 1;

fzx = A_fzx.*ones(n,1);

% fzx = A_fzx*exp(-0.5*(x./x0_g).^2);
% fzx = fzx';

f2 = (abs(fzx)).^2;

tol = 1e-8;
ain = find(f2 > tol);

```

```

aux = zeros(n,1);

chi = f2 - delta^2;

tipo=2;

%-----
% Parametros do sinal de entrada (u(:,1)) para z = z_init
%-----

a = 0.1;

%Airy Beam
U(:,1) = airy(x).*exp(-a*(x));

u=U(:,1); % variavel auxiliar para calculos

%-----
% Definicao do filtro/impulso Supergaussiano para condicoes fronteira
%-----

xw = 0.4 *(x_max-x_min);
Sg = (exp(-0.5*(x/xw).^16))';

%-----
% Split Step Fourier
%-----

for iZ = 2:nz

    % Parte Linear
    aux_spectrum = fft(u);
    aux_spectrum = aux_spectrum.*exp(-(1i)*0.5*w.^2*(h/2));
    u=ifft(aux_spectrum);

    for jj = 1 : (nstep-1)

        % Parte nao Linear

```

```

        if tipo==1
            u=u.*exp(i*(abs(u)).^2*h);
        elseif tipo==2
            % calculo de |f|^2 / Dn

            % calculo auxiliar, contabilizando apenas onde |f|^2 > tol
            aux(ain) = 1./ ( chi(ain).^2 + delta^2 * gamma^2 + ...
                (abs(u(ain))).^2 .* (3*chi(ain) + 7*delta^2 + ...
                (delta^2 * gamma^2)./f2(ain) + 3*(abs(u(ain))).^2 + ...
                ((abs(u(ain))).^4)./f2(ain) ) );

            G = k*delta*aux.*(chi + abs(u).^2);
            %      A = k*delta^2*gamma*aux;
            %      N = G + (1i)*A;
            N = G;
            u = u.*exp((1i)*N*h);
        end

        % Parte Linear
        aux_spectrum = fft(u);
        aux_spectrum = aux_spectrum.*exp(-(1i)*0.5*w.^2*(h));
        u = ifft(aux_spectrum);
    end

    % Parte nao Linear
    if tipo==1
        u=u.*exp(i*(abs(u)).^2*h);
    elseif tipo==2

        % calculo auxiliar, contabilizando apenas onde |f|^2 > tol
        aux(ain) = 1./ ( chi(ain).^2 + delta^2 * gamma^2 + ...
            (abs(u(ain))).^2 .* (3*chi(ain) + 7*delta^2 + ...
            (delta^2 * gamma^2)./f2(ain) + 3*(abs(u(ain))).^2 + ...
            ((abs(u(ain))).^4)./f2(ain) ) );

        G = k*delta*aux.*(chi + abs(u).^2);
        %      A = k*delta^2*gamma*aux;
        %      N = G + (1i)*A;
        N = G;
        u = u.*exp((1i)*N*h);
    end

```

```

end

% Parte Linear
aux_spectrum = fft(u);
aux_spectrum = aux_spectrum.*exp(-(1i)*0.5*w.^2*(h/2));
u = ifft(aux_spectrum);

u = u.*Sg;      % filtrar o sinal de modo a absorver as radiações laterais
U(:,iZ) = u;    % Salvar o impulso de saída em cada intervalo

end

toc;
disp('CPU time:'), disp(cputime);

%Calculo do valor de pico
Umax=max(abs(U));
U=U/Umax(1);    %para que a I_max no input seja 1
Umax=Umax/Umax(1);

%-----
%Representacao de resultados
%-----

figure(1);
plot(x,abs(U(:,1)).^2,'b',x,abs(U(:,nZ)).^2, 'r');
legend('Intensidade inicial (azul)', 'Intensidade final (vermelho)');
title('Intensidade na entrada e na saída');
xlabel('x'); ylabel('Intensidade');
grid on;

[Z,X] = meshgrid(z,x);
figure(2);
plot3(X,Z,abs(U),'b');
xlabel('x'); ylabel('z'); zlabel('Amplitude');
view([-10,40])
grid on;

```

```
% Calculo do FWHM
ampUz = abs(U(:, :)).^2;

maxUz = zeros(nz, 1);
FWHM = zeros(nz, 1);
init = 1;
for kk = 1 : nz
    maxUz(kk, 1) = max(ampUz(:, kk));
    min = maxUz(kk, 1)/sqrt(2);

    indx = find(ampUz(:, kk) > min);

    init = indx(1);
    final = indx(end);

    fwhm_min = x(init);
    fwhm_max = x(final);
    FWHM(kk) = fwhm_max - fwhm_min;

end

figure,
plot(z, FWHM, 'b.-');
xlabel('z'); ylabel('FWHM');
title('FWHM ao longo da propagacao em z');

figure,
plot(z, max(abs(U)), 'b.-');
xlabel('z'); ylabel('|U|_{max}');
title(sprintf('Amplitude de Propagacao ao longo de z'));
```


Anexo F

Código de Simulação da propagação de solitões brilhantes de baixa amplitude

```
% Esta rotina foi criada por Suzana Vale no ambito da dissertacao de
% mestrado "Propagacao de Sinais em Sistemas Lambda".
% Esta implementa o metodo de Split Step Fourier para simular a
% propagacao de sinais do tipo (1+1D) em sistemas do tipo Lambda.

% E capaz de simular dois tipos de equacao de propagacao:
% tipo = 1
%  $idU/dz + 0.5*d^2U/dx^2 + |U|^2*U = 0$ 
% tipo = 2
%  $idU/dz + 0.5*d^2U/dx^2 + N*U = 0$ 
% onde N e um operador nao linear definido na rotina e controlado pelo
% campo de controlo.

% E possivel alterar a precisao da simulacao aumentando o parametro (m).
% Quanto maior for (m), mais pontos serao analisados. Para a precisao da
% parte nao linear, aumentando (nstep) aumenta-se a precisao de calculo do
% Split Step Fourier.

% O sinal de entrada desta rotina foi cuidadosamente escolhido de forma a
% que se propaguem solitões. Pretende-se comprovar experimentalmente o
% descrito no documento da dissertacao.

close all; clear; clc;
format long

tic;
```

```

disp('Simulacao de Propagacao de Feixes de Luz')

%-----
% constantes
%-----
c = 299792458;                % Velocidade da luz no vazio (m/s)
i=sqrt(-1);

%-----
% Variavel x
%-----
x0=1;
x_min=-100*x0;
x_max=100*x0;

m=14;                        % m toma valores no intervalo [10:20]
n=2^m;                       % n = 1024;2048;4096;8192;...
dx=(x_max-x_min)/n;
x=(x_min:dx:x_max-dx);

%-----
% Variavel w
% (frequencia angular normalizada, em radianos por segundo, tamanho n)
%-----

dw = 2*pi/(x_max-x_min);
w_min = -n*dw/2;
w_max = (n-2)*dw/2;
w = (w_min : dw : w_max)';

w = fftshift(w);

%-----
% Variavel z  (distancia de propagacao, normalizado, tamanho nz)
%-----

z_init = 0;                  % z inicial da fibra
z_end = 100;                 % z final da fibra  (comprimento da fibra=z_end-z_init)

```

```

delta_z = 1;          % distancia para a qual se guardam os dados
z=z_init:delta_z:z_end;
nz=(z_end-z_init)/delta_z+1;    % numero de perfis guardados na variavel u,
                                % tem que ser inteiro

nstep = 2000;          % Numero de intervalos em cada delta_z
h = delta_z/nstep ;    % Step de integracao
                                % (quanto menor h, mais preciso a rotina)

%-----
% Variavel U  (envelope complexo, tamanho n x nz)
%-----

U=zeros(n,nz);

%-----
% Campos de Controlo
%-----

k = 10.38;
delta = -0.1;
gamma = 0.3;

%%% Amplitude do campo
A_fzx = 10;

%%% Campo de controlo constante
fzx = A_fzx.*ones(n,1);
f2 = (abs(fzx)).^2;

chi = f2 - delta^2;

a = k * delta * (f2 - delta^2);
b = k * delta;
c = chi.^2 + delta^2 * gamma^2;
d = 3*chi + 7*delta^2 + ((delta^2 * gamma^2)./f2.^2);

%-----

```

```

% Parametros da simulacao
%-----

tol = 1e-8;
ain = find(f2 > tol);
aux = zeros(n,1);

tipo=2;

%-----
% Parametros do sinal de entrada (u(:,1)) para z = z_init
%-----

r = 0.01;
U(:,1) = sqrt(r)*sech(sqrt((r./c).*(b - (d.*a)./c)) .* x');

u=U(:,1);                                     % variavel auxiliar para calculos

%-----
% Definicao do filtro/impulso Supergaussiano para condicoes fronteira
%-----

xw = 0.4 *(x_max-x_min);
Sg = (exp(-0.5*(x/xw).^16))';

%-----
% Split Step Fourier
%-----

for iZ = 2:nz

    % Parte Linear
    aux_spectrum = fft(u);
    aux_spectrum = aux_spectrum.*exp(-(1i)*0.5*w.^2*(h/2));
    u=ifft(aux_spectrum);

```

```

for jj = 1 : (nstep-1)

    % Parte nao Linear
    if tipo==1
        u=u.*exp(i*(abs(u)).^2*h);
    elseif tipo==2
        % calculo de |f|^2 / Dn

        % calculo auxiliar, contabilizando apenas onde |f|^2 > tol
        aux(ain) = 1./ ( chi(ain).^2 + delta^2 * gamma^2 + ...
            (abs(u(ain))).^2 .* (3*chi(ain) + 7*delta^2 + ...
            (delta^2 * gamma^2)./f2(ain) + 3*(abs(u(ain))).^2 + ...
            ((abs(u(ain))).^4)./f2(ain) ) );

        G = k*delta*aux.*(chi + abs(u).^2);
    %       A = k*delta^2*gamma*aux;
    %       N = G + (1i)*A;
        N = G;
        u = u.*exp((1i)*N*h);
    end

    % Parte Linear
    aux_spectrum = fft(u);
    aux_spectrum = aux_spectrum.*exp(-(1i)*0.5*w.^2*(h));
    u = ifft(aux_spectrum);
end

% Parte nao Linear
if tipo==1
    u=u.*exp(i*(abs(u)).^2*h);
elseif tipo==2

    % calculo auxiliar, contabilizando apenas onde |f|^2 > tol
    aux(ain) = 1./ ( chi(ain).^2 + delta^2 * gamma^2 + ...
        (abs(u(ain))).^2 .* (3*chi(ain) + 7*delta^2 + ...
        (delta^2 * gamma^2)./f2(ain) + 3*(abs(u(ain))).^2 + ...
        ((abs(u(ain))).^4)./f2(ain) ) );

    G = k*delta*aux.*(chi + abs(u).^2);
    %       A = k*delta^2*gamma*aux;

```

```

%           N = G + (1i)*A;
           N = G;
           u = u.*exp((1i)*N*h);

       end

% Parte Linear
aux_spectrum = fft(u);
aux_spectrum = aux_spectrum.*exp(-(1i)*0.5*w.^2*(h/2));
u = ifft(aux_spectrum);

u = u.*Sg;      % filtrar o sinal de modo a absorver as radiações laterais
U(:,iZ) = u;    % Salvar o impulso de saída em cada intervalo

end

toc;
disp('CPU time:'), disp(cputime);

%-----
%Representação de resultados
%-----

figure(1);
plot(x,abs(U(:,1)).^2,'b',x,abs(U(:,nZ)).^2, 'r');
legend('Intensidade inicial (azul)', 'Intensidade final (vermelho)');
title('Intensidade na entrada e na saída');
xlabel('x'); ylabel('Intensidade');
grid on;

[Z,X] = meshgrid(z,x);
figure(2);
plot3(X,Z,abs(U),'b');
title(sprintf('Propagação, para f(z,x) = %d', A_fzx));
xlabel('x'); ylabel('z'); zlabel('Amplitude');
grid on;

figure(3);

```

```

w2=fftshift(w);
s=(x_max-x_min)*abs(fftshift(fft(U(:,1))))/n;
plot(w2,s,'b');
hold on;
s=(x_max-x_min)*abs(fftshift(fft(U(:,nz))))/n;
plot(w2,s,'r');
title('Espectro dos Sinais de Entrada e Saida');
legend('Entrada (azul)', 'Saida (vermelho)');
grid on;

% Calculo do FWHM
ampUz = abs(U(:, :)).^2;

maxUz = zeros(nz,1);
FWHM = zeros(nz, 1);
init = 1;
for kk = 1 : nz
    maxUz(kk,1) = max(ampUz(:,kk));
    min = maxUz(kk,1)/sqrt(2);

    indx = find(ampUz(:,kk) > min);

    init = indx(1);
    final = indx(end);

    fwhm_min = x(init);
    fwhm_max = x(final);
    FWHM(kk) = fwhm_max - fwhm_min;

end

figure,
plot(z, FWHM, 'b.-');
xlabel('z'); ylabel('FWHM');
title('FWHM ao longo da propagacao em z');

figure,
plot(z, max(abs(U)), 'b.-');
xlabel('z'); ylabel('|U|_{max}');

```

```
title(sprintf('Amplitude de Propagacao ao longo de z'));
```

Anexo G

Código de Simulação da propagação de uma onda de Airy no ar, com simetria Azimutal

```
% Esta rotina foi criada por Suzana Vale no ambito da dissertacao de
% mestrado "Propagacao de Sinais em Sistemas Lambda".
% Esta implementa o metodo de Split Step Fourier, utilizando transformada
% de Hankel para simular a propagacao de uma onda de Airy finita no ar
% usando simetria azimutal.

% A equacao de propagacao usada e:
% tipo = 1
% 
$$idU/dz + 0.5*d^2U/dx^2 + |U|^2*U = 0$$


% Sao retornados os graficos de intensidade e espectro do sinal 'a entrada
% e saida, a representacao tridimensional da propagacao do sinal ao longo
% de z assim como o graficos de maximos de amplitude.

% A rotina necessita do ficheiro ze.txt para o calculo da transformada de
% Hankel.

close all; clear; clc;
format long

tic;
disp('Simulacao de Propagacao de Feixes de Luz, com HT')
```

```

%-----
% constantes
%-----

i=sqrt(-1);

%-----
% Preparacao da Transformada de Hankel
%-----


R = 200;                %% Maximum sampled radius (time)
N = 3000;               %% Number of sampling points


load ze.txt;
c=ze(1:N+1);


V = c(N+1)/R;           % Maximum frequency
r = c(1:N)'*R/c(N+1);   % Radius vector
k = c(1:N)'/R;          % Frequency vector      k=alfa_pn/R


J1=abs(besselj(1,c(1:N)));
C=(2/c(N+1))*besselj(0,((c(1:N))'*c(1:N))/c(N+1))./(J1'*J1);
m1 = (abs(besselj(1,c(1:N)))/(sqrt(2*pi)*R))';
m2 = m1*(2*pi*R)/V;


%-----
% Variavel z  (distancia de propagacao, normalizado, tamanho nz)
%-----


z_init = 0;             % z inicial da fibra
z_end = 10;             % z final da fibra  (comprimento da fibra=z_end-z_init)
delta_z = 0.01;         % distancia para a qual se guardam os dados
z=z_init:delta_z:z_end;
nz=(z_end-z_init)/delta_z+1; % numero de perfis guardados na variavel u,
                             % tem que ser inteiro


nstep = 20;             % Numero de intervalos em cada delta_z
h = delta_z/nstep ;     % Step de integracao

```

```

% (quanto menor h, mais preciso a rotina)

%-----
% Variavel U (envelope complexo, tamanho n x nz)
%-----

U=zeros(N,nz);

%-----
% Parametros da simulacao
%-----

tipo=1;

%-----
% Parametros do sinal de entrada (u(:,1)) para z = z_init
%-----

a = 0.05;
r2 = 10;

U(:,1) = (airy(r2 - r)) .* exp(a*(r2 - r));

u=U(:,1); % variavel auxiliar para calculos

%-----
% Split Step Fourier
%-----

for iZ = 2:nz

    % Parte Linear - Transformada de Hankel
    F1 = u./m1;
    F2 = C*F1;
    u = F2.*m2;
    u=u.*exp(-i*k.^2*(h/2)/2);
    u=(C*(u./m2)).*m1;

    for jj = 1 : (nstep-1)

```

```

% Parte nao Linear
if tipo==1
    u=u;
%
elseif tipo==2
%
    % calculo de |f|^2 / Dn
%
%
    % calculo auxiliar, contabilizando apenas onde |f|^2 > tol
    aux(ain) = 1./ ( chi(ain).^2 + delta^2 * gamma^2 + ...
        (abs(u(ain))).^2 .* (3*chi(ain) + 7*delta^2 + ...
        (delta^2 * gamma^2)./f2(ain) + 3*(abs(u(ain))).^2 + ...
        ((abs(u(ain))).^4)./f2(ain) ) );
%
%
% %
    G = k*delta*aux.*(chi + abs(u).^2);
%
    G = 0;
%
    A = k*delta^2*gamma*aux;
%
    N = G + (1i)*A;
%
    u = u.*exp((1i)*N*h);
end

% Parte Linear - Transformada de Hankel
F1 = u./m1;
F2 = C*F1;
u = F2.*m2;
u=u.*exp(-i*k.^2*h/2);
u=(C*(u./m2)).*m1;
end

% Parte nao Linear
if tipo==1
    u=u;
%
elseif tipo==2
%
%
    % calculo auxiliar, contabilizando apenas onde |f|^2 > tol
    aux(ain) = 1./ ( chi(ain).^2 + delta^2 * gamma^2 + ...
        (abs(u(ain))).^2 .* (3*chi(ain) + 7*delta^2 + ...
        (delta^2 * gamma^2)./f2(ain) + 3*(abs(u(ain))).^2 + ...
        ((abs(u(ain))).^4)./f2(ain) ) );
%
%
% %
    G = k*delta*aux.*(chi + abs(u).^2);
%
    G = 0;

```

```

%          A = k*delta^2*gamma*aux;
%          N = G + (1i)*A;
%          u = u.*exp((1i)*N*h);
%
end

% Parte Linear - Transformada de Hankel
F1 = u./m1;
F2 = C*F1;
u = F2.*m2;
u=u.*exp(-i*k.^2*(h/2)/2);
u=(C*(u./m2)).*m1;

U(:,iZ) = u;    % Salvar o impulso de saída em cada intervalo

end

toc;
disp('CPU time:'), disp(cputime);

%Calculo do valor de pico
Umax=max(abs(U));
U=U/Umax(1);    %para que a I_max no input seja 1
Umax=Umax/Umax(1);

%-----
%Representacao de resultados
%-----

figure(1);
plot(r,abs(U(:,1)).^2,'b',r,abs(U(:,nz)).^2,'r');
legend('Intensidade inicial (azul)', 'Intensidade final (vermelho)');
title('Intensidade na entrada e na saída');
xlabel('x'); ylabel('Intensidade');
grid on;

figure(2);
Ut=[flipud(U(2:N,:)) ;U];

```

```

rt=[-flipud(r(2:N));r];
[zm,rmt]=meshgrid(z,rt);
de=309;
inf=N-de;
sup=N+de;
plot3(rmt(inf:sup,:),zm(inf:sup,:),abs(Ut(inf:sup,:)),'b');
xlabel('r'); ylabel('z'); zlabel('Amplitude');
axis([-20 20 0 10 0 max(max(abs(Ut)))])
% grid on;

figure(3);
plot(z,Umax,'b');
xlabel('z');
ylabel('|U|_{max}');

```

Anexo H

Código de Simulação da Propagação de uma onda com campo de controlo dado por uma onda de Laguerre

```
% Esta rotina foi criada por Suzana Vale no ambito da dissertacao de
% mestrado "Propagacao de Sinais em Sistemas Lambda".
% Esta implementa o metodo de Split Step Fourier, utilizando transformada
% de Hankel para simular a propagacao de um sinal gaussiano com simetria
% azimutal usando um campo de controlo com a forma de Laguerre L30.

% E capaz de simular dois tipos de equacao de propagacao:
% tipo = 1
%    $idU/dz + 0.5*d^2U/dx^2 + |U|^2*U = 0$ 
% tipo = 2
%    $idU/dz + 0.5*d^2U/dx^2 + Nnl*U = 0$ 
%   onde Nnl e um operador nao linear definido na rotina e controlado pelo
%   campo de controlo.

%
% Sao retornados os graficos de intensidade e espectro do sinal 'a entrada
% e saida, a representacao tridimensional da propagacao do sinal ao longo
% de z assim como graficos de FWHM e maximos de amplitude.

% A rotina necessita do ficheiro ze.txt para o calculo da transformada de
% Hankel.

close all; clear all; clc;
format long
```

```
tic;
disp('Simulacao de Propagacao de Feixes de Luz - Caso 2D, Estudo 1')

%-----
% constantes
%-----

i=sqrt(-1);

%-----
% Preparacao da Transformada de Hankel
%-----

R = 200;           % Maximum sampled radius (time)
N = 3000;          % Number of sampling points

load ze.txt;
c=ze(1:N+1);

V = c(N+1)/R;      % Maximum frequency
r = c(1:N)'*R/c(N+1); % Radius vector
k = c(1:N)'/R;     % Frequency vector      k=alfa_pn/R

J1=abs(besselj(1,c(1:N)));
C=(2/c(N+1))*besselj(0,((c(1:N))'*c(1:N))/c(N+1))./(J1'*J1);
m1 = (abs(besselj(1,c(1:N)))/(sqrt(2*pi)*R))';
m2 = m1*(2*pi*R)/V;

%-----
% Variavel z (distancia de propagacao, normalizado, tamanho nz)
%-----

z_init = 0;        % z inicial da fibra
z_end = 100;       % z final da fibra (comprimento da fibra=z_end-z_init)
delta_z = 1;       % distancia para a qual se guardam os dados
z=z_init:delta_z:z_end;
nz=(z_end-z_init)/delta_z+1; % numero de perfis guardados na variavel u,
                             % tem que ser inteiro
```

```
nstep = 2000; % Numero de intervalos em cada delta_z
h = delta_z/nstep ; % Step de integracao
% (quanto menor h, mais preciso a rotina)

%-----
% Variavel U (envelope complexo, tamanho n x nz)
%-----

U=zeros(N,nz);

%-----
% Parametros da simulacao
%-----

knl = 10.38;
delta = -0.1;
gamma = 0.3;

r0 = 50/sqrt(2);
tol = 1e-8;

tipo=2;

%-----
% Parametros do sinal de entrada (u(:,1)) para z = z_init
%-----

a = 0.04;
U(:,1) = exp(-a*r.^2);

u=U(:,1); % variavel auxiliar para calculos

%-----
% Split Step Fourier
%-----

for iZ = 2:nz

    % calculo do campo de controlo Laguerre Gaussian
```

```
% Campo de controlo a ser usado : L30 (Konotop, eq.8)
% Lpm = exp(-(r.^2)./(2*w.^2)).*((r0*r^m)/(w^(m+1))).*(Lp^m)*
%      (r.^2./w.^2).*exp(1i*(2*p+m+1))*atan(z./r0^2)
%      - (r.^2.*z)/(2*r0.*w) - m*theta)
%
% L30 => p = 3, m = 0 => m.*theta = 0; Lp^m = 1

w = sqrt(r0^2 + (iZ/r0)^2);
L30 = exp(-(r.^2)./(2*w.^2)) .* ( (r0/w)*(r.^2/w^2) ) .* ...
      exp( (1i)*7*atan(iZ/r0^2) - ((r.^2)*iZ)/(2*(r0^2)*w) );

% calculo de |f|^2 = |L30|^2
f2 = (abs(L30)).^2;

% Procurar pontos onde (|L30|^2 > tol) para a NL
ain = find(f2 > tol);
aux = zeros(N,1);

chi = f2 - delta^2;

% Parte Linear - Transformada de Hankel
F1 = u./m1;
F2 = C*F1;
u = F2.*m2;
u=u.*exp(-i*k.^2*(h/2)/2);
u=(C*(u./m2)).*m1;

for jj = 1 : (nstep-1)

    % Parte nao Linear
    if (tipo == 1)
        u=u;
    elseif (tipo == 2)

        % calculo auxiliar, contabilizando apenas onde |f|^2 > tol
        aux(ain) = 1./ ( chi(ain).^2 + delta^2 * gamma^2 + ...
            (abs(u(ain))).^2 .* (3*chi(ain) + 7*delta^2 + ...
            (delta^2 * gamma^2)./f2(ain) + 3*(abs(u(ain))).^2 + ...
            ((abs(u(ain))).^4)./f2(ain) ) );
```

```

        Gnl = knl*delta*aux.*(chi + abs(u).^2);
        % Anl = knl*delta^2*gamma*aux;
        % Nnl = Gnl + (1i)*Anl;
        Nnl = Gnl;

        u = u.*exp((1i)*Nnl*h);
    end

    % Parte Linear - Transformada de Hankel
    F1 = u./m1;
    F2 = C*F1;
    u = F2.*m2;
    u=u.*exp(-i*k.^2*h/2);
    u=(C*(u./m2)).*m1;
end

% Parte nao Linear
if (tipo == 1)
    u=u;
elseif (tipo == 2)

    % calculo auxiliar, contabilizando apenas onde |f|^2 > tol
    aux(ain) = 1./ ( chi(ain).^2 + delta^2 * gamma^2 + ...
        (abs(u(ain))).^2 .* (3*chi(ain) + 7*delta^2 + ...
        (delta^2 * gamma^2)./f2(ain) + 3*(abs(u(ain))).^2 + ...
        ((abs(u(ain))).^4)./f2(ain) ) );

    Gnl = knl*delta*aux.*(chi + abs(u).^2);
    % Anl = knl*delta^2*gamma*aux;
    % Nnl = Gnl + (1i)*Anl;
    Nnl = Gnl;

    u = u.*exp((1i)*Nnl*h);

end

% Parte Linear - Transformada de Hankel
F1 = u./m1;
F2 = C*F1;

```

```

    u = F2.*m2;
    u=u.*exp(-i*k.^2*(h/2)/2);
    u=(C*(u./m2)).*m1;

    U(:,iZ) = u;    % Salvar o impulso de saida em cada intervalo

end

toc;
disp('CPU time:'), disp(cputime);

%Calculo do valor de pico
Umax=max(abs(U));
U=U/Umax(1);    %para que a I_max no input seja 1
Umax=Umax/Umax(1);

%-----
%Representacao de resultados
%-----

Ut=[flipud(thisU(2:end,:)) ;thisU];
rt=[-flipud(r(2:end));r];

figure(1);
plot(rt,abs(Ut(:,1)).^2,'b',rt,abs(Ut(:,nz)).^2, 'r');
legend('Intensidade inicial (azul)', 'Intensidade final (vermelho)');
title(sprintf('Intensidade na entrada e na saida'));
xlabel('r'); ylabel('Intensidade');
axis([-20 20 0 max(abs(Ut(:,1)).^2)]);
grid on;

[zm,rmt]=meshgrid(z,rt);

de=309;
inf=N-de;
sup=N+de;

% com zoom
figure(2);
plot3(rmt(inf:sup,:),zm(inf:sup,:),abs(Ut(inf:sup,:)),'b');
```

```
axis([-20 20 0 100 0 max(max(abs(Ut)))]);  
xlabel('r'); ylabel('z'); zlabel('Amplitude');  
grid on;  
  
% sem zoom  
figure(3)  
plot3(rmt, zm, abs(Ut), 'b');  
xlabel('r'); ylabel('z'); zlabel('Amplitude');  
grid on;  
  
% Calculo do FWHM  
ampUz = abs(Ut(:, :)).^2;  
  
maxUz = zeros(nz, 1);  
FWHM = zeros(nz, 1);  
init = 1;  
for kk = 1 : nz  
    maxUz(kk, 1) = max(ampUz(:, kk));  
    min = maxUz(kk, 1)/sqrt(2);  
  
    indx = find(ampUz(:, kk) > min);  
  
    init = indx(1);  
    final = indx(end);  
  
    fwhm_min = rt(init);  
    fwhm_max = rt(final);  
    FWHM(kk) = fwhm_max - fwhm_min;  
  
end  
  
figure,  
plot(z, FWHM, 'b.-');  
xlabel('z'); ylabel('FWHM');  
title('FWHM ao longo da propagacao em z');  
  
figure,  
plot(z, max(abs(thisU)), 'b.-');  
xlabel('z'); ylabel('|U|_{max}');  
title(sprintf('Amplitude de Propagacao ao longo de z'));
```


Anexo I

Código de Simulação da propagação de um sinal gaussiano, com simetria Azimutal

```
% Esta rotina foi criada por Suzana Vale no ambito da dissertacao de
% mestrado "Propagacao de Sinais em Sistemas Lambda".
% Esta implementa o metodo de Split Step Fourier, utilizando transformada
% de Hankel para simular a propagacao de uma onda de Airy finita usando
% simetria azimutal. E utilizado um campo de controlo constante, ao qual
% pode ser variada a amplitude.

% E capaz de simular dois tipos de equacao de propagacao:
% tipo = 1
% 
$$idU/dz + 0.5*d^2U/dx^2 + |U|^2*U = 0$$

% tipo = 2
% 
$$idU/dz + 0.5*d^2U/dx^2 + Nnl*U = 0$$

% onde Nnl e um operador nao linear definido na rotina e controlado pelo
% campo de controlo.

% E possivel alterar a amplitude do campo de controlo (A_fzr).
% Sao retornados os graficos de intensidade e espectro do sinal 'a entrada
% e saida, a representacao tridimensional da propagacao do sinal ao longo
% de z assim como graficos de FWHM e maximos de amplitude.

% A rotina necessita do ficheiro ze.txt para o calculo da transformada de
% Hankel.

close all; clear all; clc;
```

```

format long

tic;
disp('Simulacao de Propagacao de Feixes de Luz - Caso 2D, Estudo 2')

%-----
% constantes
%-----

i=sqrt(-1);

%-----
% Preparacao da Transformada de Hankel
%-----

R = 200;          %% Maximum sampled radius (time)
N = 3000;         %% Number of sampling points

load ze.txt;
c=ze(1:N+1);

V = c(N+1)/R;      % Maximum frequency
r = c(1:N)'*R/c(N+1); % Radius vector
k = c(1:N)'/R;     % Frequency vector      k=alfa_pn/R

J1=abs(besselj(1,c(1:N)));
C=(2/c(N+1))*besselj(0,((c(1:N))'*c(1:N))/c(N+1))./(J1'*J1);
m1 = (abs(besselj(1,c(1:N)))/(sqrt(2*pi)*R))';
m2 = m1*(2*pi*R)/V;

%-----
% Variavel z (distancia de propagacao, normalizado, tamanho nz)
%-----

z_init = 0;        % z inicial da fibra
z_end = 100;       % z final da fibra (comprimento da fibra=z_end-z_init)
delta_z = 1;       % distancia para a qual se guardam os dados
z=z_init:delta_z:z_end;
nz=(z_end-z_init)/delta_z+1; % numero de perfis guardados na variavel u,
                             % tem que ser inteiro

```

```

nstep = 2000;                                % Numero de intervalos em cada delta_z
h = delta_z/nstep ;                          % Step de integracao
                                              % (quanto menor h, mais preciso a rotina)

%-----
% Variavel U   (envelope complexo, tamanho n x nz)
%-----

U=zeros(N,nz);

%-----
% Campo de Controlo
%-----

knl = 10.38;
delta = -0.1;
gamma = 0.3;

A_fzr = 1;          % Amplitude do Campo de Controlo

fzr = A_fzr.*ones(N,1);
f2 = (abs(fzr)).^2;

tol = 1e-8;
ain = find(f2 > tol);
aux = zeros(N,1);

chi = f2 - delta^2;

tipo=2;

%-----
% Parametros do sinal de entrada (u(:,1)) para z = z_init
%-----

a = 0.05;
r0 = 10;

U(:,1) = (airy(r0 - r)) .* exp(a*(r0 - r));

```

```

u=U(:,1); % variavel auxiliar para calculos

%-----
% Split Step Fourier
%-----

for iZ = 2:nz

    % Parte Linear - Transformada de Hankel
    F1 = u./m1;
    F2 = C*F1;
    u = F2.*m2;
    u=u.*exp(-i*k.^2*(h/2)/2);
    u=(C*(u./m2)).*m1;

    for jj = 1 : (nstep-1)

        % Parte nao Linear
        if (tipo == 1)
            u=u;
        elseif (tipo == 2)
            % calculo de |f|^2 / Dn

            % calculo auxiliar, contabilizando apenas onde |f|^2 > tol
            aux(ain) = 1./ ( chi(ain).^2 + delta^2 * gamma^2 + ...
                (abs(u(ain))).^2 .* (3*chi(ain) + 7*delta^2 + ...
                (delta^2 * gamma^2)./f2(ain) + 3*(abs(u(ain))).^2 + ...
                ((abs(u(ain))).^4)./f2(ain) ) );

            Gnl = knl*delta*aux.*(chi + abs(u).^2);
            % Anl = knl*delta^2*gamma*aux;
            % Nnl = Gnl + (1i)*Anl;
            Nnl = Gnl;
            u = u.*exp((1i)*Nnl*h);
        end

        % Parte Linear - Transformada de Hankel
        F1 = u./m1;
        F2 = C*F1;

```

```

        u = F2.*m2;
        u=u.*exp(-i*k.^2*h/2);
        u=(C*(u./m2)).*m1;
    end

    % Parte nao Linear
    if (tipo == 1)
        u=u;
    elseif (tipo == 2)

        % calculo auxiliar, contabilizando apenas onde |f|^2 > tol
        aux(ain) = 1./ ( chi(ain).^2 + delta^2 * gamma^2 + ...
            (abs(u(ain))).^2 .* (3*chi(ain) + 7*delta^2 + ...
            (delta^2 * gamma^2)./f2(ain) + 3*(abs(u(ain))).^2 + ...
            ((abs(u(ain))).^4)./f2(ain) ) );

        Gn1 = knl*delta*aux.*(chi + abs(u).^2);
    %     An1 = knl*delta^2*gamma*aux;
    %     Nn1 = Gn1 + (1i)*An1;
        Nn1 = Gn1;
        u = u.*exp((1i)*Nn1*h);

    end

    % Parte Linear - Transformada de Hankel
    F1 = u./m1;
    F2 = C*F1;
    u = F2.*m2;
    u=u.*exp(-i*k.^2*(h/2)/2);
    u=(C*(u./m2)).*m1;

    U(:,iZ) = u;    % Salvar o impulso de saida em cada intervalo

end

toc;
disp('CPU time:'), disp(cputime);

%Calculo do valor de pico

```

```

Umax=max(abs(U));
U=U/Umax(1);    %para que a I_max no input seja 1
Umax=Umax/Umax(1);

%-----
%Representacao de resultados
%-----

Ut=[flipud(U(2:end,:)) ;U];
rt=[-flipud(r(2:end));r];

figure(1);
plot(rt,abs(Ut(:,1)).^2,'b',rt,abs(Ut(:,nz)).^2, 'r');
legend('Intensidade inicial (azul)', 'Intensidade final (vermelho)');
title('Intensidade na entrada e na saida');
xlabel('r'); ylabel('Intensidade');
axis([-15 15 0 max(abs(Ut(:,nz)).^2)]);
grid on;

[zm,rmt]=meshgrid(z,rt);
figure(2);
de=309;
inf=N-de;
sup=N+de;
plot3(rmt(inf:sup,:),zm(inf:sup,:),abs(Ut(inf:sup,:)),'b');
xlabel('r'); ylabel('z'); zlabel('Amplitude');
view([-35 45]);
axis([-20 20 0 100 0 max(max(abs(Ut)))]);
grid on;

% Calculo do FWHM
ampUz = abs(Ut(:, :)).^2;

maxUz = zeros(nz,1);
FWHM = zeros(nz, 1);
init = 1;
for kk = 1 : nz
    maxUz(kk,1) = max(ampUz(:,kk));
    min = maxUz(kk,1)/sqrt(2);

```

```
    indx = find(ampUz(:,kk) > min);

    init = indx(1);
    final = indx(end);

    fwhm_min = rt(init);
    fwhm_max = rt(final);
    FWHM(kk) = fwhm_max - fwhm_min;

end

figure,
plot(z, FWHM, 'b.-');
xlabel('z'); ylabel('FWHM');
title('FWHM ao longo da propagacao em z');

figure,
plot(z, max(abs(thisU)), 'b.-');
xlabel('z'); ylabel('|U|_{max}');
title(sprintf('Amplitude de Propagacao ao longo de z'));
```


Referências

- [1] Michael Fleischhauer, Atac Imamoglu, e Jonathan P. Marangos. Electromagnetically induced transparency: Optics in coherent media. *Rev. Mod. Phys.*, 77:633–673, Jul 2005.
- [2] R. G. Beausoleil, W. J. Munro, D. A. Rodrigues, e T. P. Spiller. Applications of electromagnetically induced transparency to quantum information processing. *Journal of Modern Optics*, 51(16-18):2441–2448, 2004.
- [3] Lene Vestergaard Hau. Optical information processing in bose-einstein condensates. *Nat Photon*, 2(8):451–453, 08 2008.
- [4] H.J. Metcalf e P. Van Der Straten. *Laser Cooling and Trapping*. Graduate Texts in Contemporary Physics. Springer, 1999.
- [5] F. Riehle. *Frequency Standards: Basics and Applications*. John Wiley & Sons, 2006.
- [6] P.W. Milonni e J.H. Eberly. *Lasers*. Wiley Series in Pure and Applied Optics. Wiley, 1988.
- [7] N. Cui, X. J. Fan, S. F. Tian, H. Ma, A. Y. Li, e Z. Z. Xu. Group velocity of probe light pulse in an open lambda system. *Journal of Modern Optics*, 53:1165–1176, Agosto 2006.
- [8] Graham T. Purves. Absorption and dispersion in atomic vapours: Applications to interferometry. Phd thesis, Durham University, August 2006.
- [9] Mark G. Bason. Coherent atom-light interactions in multi-level systems. Phd thesis, Durham University, October 20 2009.
- [10] Chao Hang e V. V. Konotop. Spatial solitons in a three-level atomic medium supported by a laguerre-gaussian control beam. *Phys. Rev. A*, 83:053845, May 2011.
- [11] J.W. Goodman. *Introduction To Fourier Optics*. McGraw-Hill physical and quantum electronics series. Roberts & Company, 2005.
- [12] Manuel Guizar-Sicairos e Julio C. Gutiérrez-Vega. Computation of quasi-discrete hankel transforms of integer order for propagating optical wave fields. *J. Opt. Soc. Am. A*, 21(1):53–58, Jan 2004.
- [13] Li Yu, Meichun Huang, Mouzhi Chen, Wenzhong Chen, Wenda Huang, e Zhizhong Zhu. Quasi-discrete hankel transform. *Opt. Lett.*, 23(6):409–411, Mar 1998.
- [14] Nikolaos K. Efremidis e Demetrios N. Christodoulides. Abruptly autofocusing waves. *Opt. Lett.*, 35(23):4045–4047, Dec 2010.