

Mestrado em Matemática para Professores

2013



Elasticidade e Forma

Maria Leonor Abreu Mendes de Oliveira

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO APRESENTADA

À FACULDADE DE CIÊNCIAS DA UNIVERSIDADE DO PORTO EM

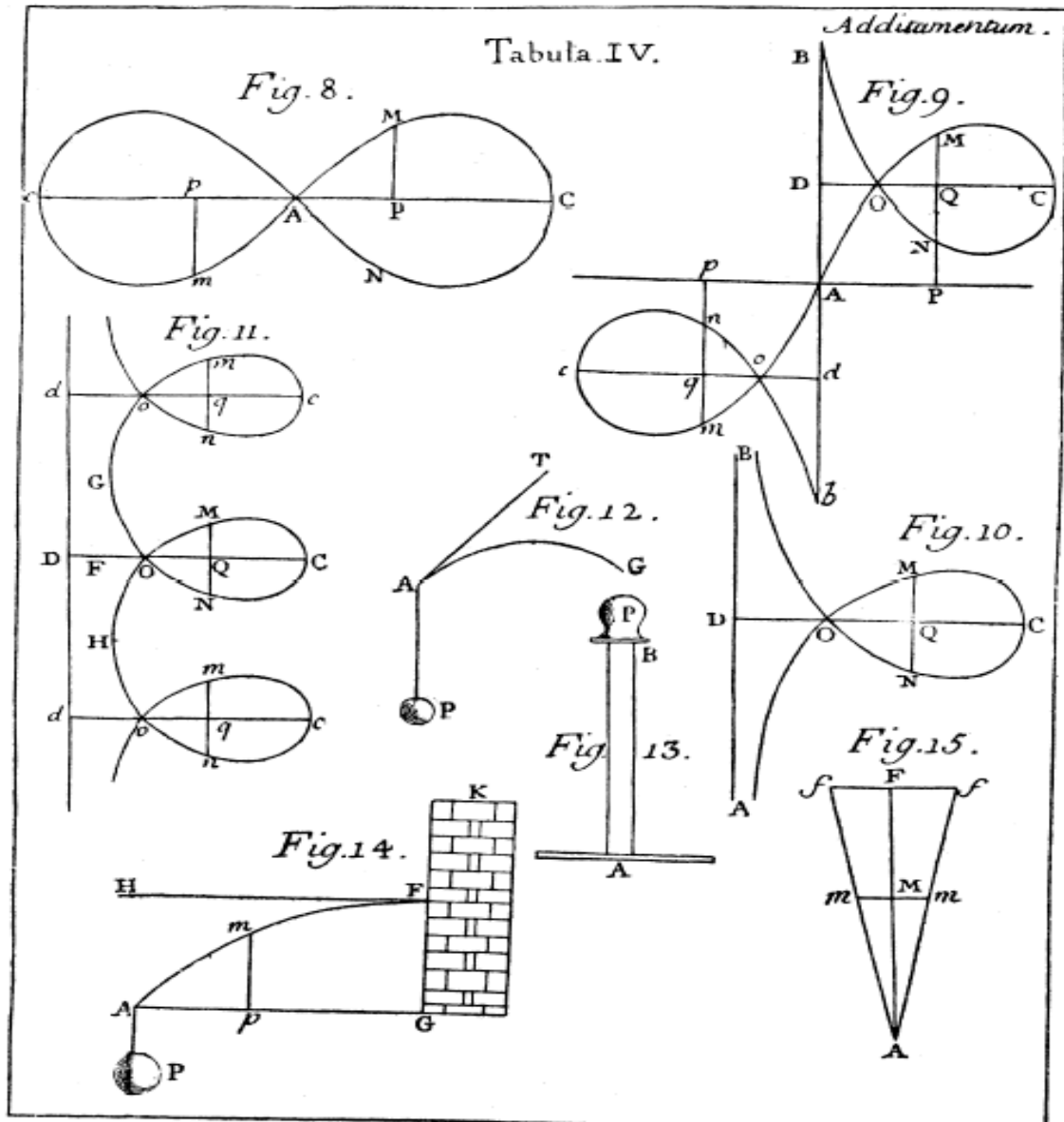
MATEMÁTICA

Agradecimentos

A todos os que me acompanharam e tornaram possível este trabalho, o meu reconhecimento, em especial ao meu marido.

Não posso deixar de destacar e agradecer em especial, à minha orientadora Maria de Fátima Pires de Carvalho, por toda a dedicação, apoio, por ter sido incansável sempre que a ela recorri e sobretudo por ser uma profissional de enorme competência sem a qual este trabalho não teria sido possível.

Aos meus filhos Miguel e Sofia



A fábrica do universo é a mais perfeita e reflete o trabalho do mais sábio criador. Nada tem lugar no universo que não obedeça a alguma lei de máximo ou mínimo.

Leonhard Euler

Figura de *Methodus inveniendi lineas curvas*, de Leonhard Euler.

Resumo

Por sugestão de Daniel Bernoulli, Leonhard Euler investigou qual a forma de um fio quando está sujeito a forças aplicadas aos seus extremos e em equilíbrio. A resposta depende de dois parâmetros que Euler identificou e resume-se a nove tipos de curvas possíveis. No mesmo trabalho, foi obtida uma fórmula que nos permite saber qual o peso máximo que uma coluna, de diâmetro, altura e material especificados, pode suportar sem dobrar. Neste texto, depois de descrever pormenorizadamente as abordagens e conclusões de Euler, aplicamos este estudo a um grupo de árvores dos distritos de Lisboa e Porto. Finalmente, e porque Euler utilizou frequentemente na sua pesquisa tabelas de logaritmos e de raízes quadradas, apresentamos um método da sua autoria para o cálculo de valores aproximados de logaritmos e um algoritmo para determinar aproximações da raiz quadrada de um número dado em forma decimal, processo que há algumas décadas fazia parte do programa de Matemática do oitavo ano de escolaridade.

Palavras-chave: Curva elástica; Cálculo Variacional; Equilíbrio; Integral elíptico; Momento; Carga crítica.

Summary

Challenged by Daniel Bernoulli, Leonhard Euler worked on the problem of finding the curve adopted by a wire in equilibrium when subject to a force applied to its extremes. This study led Euler to a pair of relevant parameters with which he identified all the solutions and classified them into nine types. In the same essay, Euler deduced a formula that allows us to know the maximum weight a column, with fixed dimensions and built with a specified material, can sustain so as not to bend or break. In this dissertation, after describing in detail Euler's approach and conclusions, we have applied his results to a sample of trees from streets and gardens of Lisbon and Porto. Finally, and given that Euler made frequent use of tables of logarithms and square roots, we have deduced Euler's method for computing approximations of logarithms and also an algorithm, which was once part of the Mathematics program for eighth year schooling, used for estimating the square root of a number given in decimal form.

Keywords: Elastic curve; Variational calculus; Equilibrium; Elliptic integral; Moment; Time critical load.

Índice

Introdução	11
Capítulo I: A curva elástica de Bernoulli-Euler	15
1.1 Caracterização da curva elástica usando <i>causas finais</i>	16
1.2 Máximos e mínimos condicionados	18
1.3 Integrais do tipo $F(x, y, y')dx$	20
1.4 Exemplo: A braquistócrona.....	24
1.5 Integrais do tipo $Fx, y, y'dx$ sob condições iniciais	29
1.5.1 Exemplo: Um problema isoperimétrico	30
1.6 Integrais do tipo $F(x, y, y', y'')dx$	35
1.7 Aplicação: A equação da curva elástica	38
1.8 A elástica usando <i>causas efetivas</i>	44
1.9 Parâmetros.....	48
Capítulo II: As espécies de elástica.....	49
2.1 Escolha do referencial	49
2.2 Considerações gerais sobre a curva solução.....	50
2.3 Resolução aproximada da equação	54
2.4 Classificação das curvas elásticas	56
2.5 Aplicação.....	68
2.6 Comentário final.....	69
Capítulo III: Colunas.....	71
3.1 A robustez das colunas	71
3.2 A robustez das árvores	74
3.3 Contributo dos ramos	77
Capítulo IV: Método de Euler para calcular logaritmos	79
4.1 Logaritmos à mão.....	79
4.2 Raízes quadradas	83
4.2.1 Justificação do algoritmo	85
Bibliografia	91

Introdução

Uma observação atenta da natureza leva-nos a suspeitar que o metabolismo e as condições ambientais de algum modo limitam o crescimento e as dimensões dos seres vivos. Dados experimentais, obtidos por biólogos, físicos e químicos [M], parecem sugerir que plantas e animais têm de se desenvolver de modo a conjugarem uma superfície exposta adequada, que lhes permita manter a temperatura apropriada, e a robustez necessária para conseguirem sustentar o seu próprio peso. Porém, uma *ciência da forma* exige uma fundamentação para as leis que conjectura. Nesta dissertação, deduziremos uma regra geral a que têm de se conformar as proporções das árvores, que é independente de muitos dos detalhes que botânicos e taxionomistas têm de ponderar e que condiciona a altura dos troncos em função dos seus diâmetros, do peso por unidade de volume e da firmeza da madeira.

Este plano de trabalho conduziu-nos a Leonhard Euler (1707-1783), ao arquivo das suas obras e correspondência [EA], ao seu tratado sobre cálculo de variações publicado em 1744, *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici lattissimo sensu accepti* [Bo, Du, E, Ol], e, em particular, a um apêndice desta obra, *De curvis elasticis* [Br, S, S1]. Trata-se de um capítulo longo e uma contribuição matemática notável com inúmeras aplicações no âmbito de outras ciências. Considerado o documento publicado no século dezoito mais completo sobre teoria da elasticidade, meio século depois do contributo pioneiro de Jacob Bernoulli, nele se apresenta o que de mais essencial se sabe hoje sobre curvas elásticas, cujos traços descrevem a forma que um fio, feito de material com alguma resistência à deformação e sujeito a forças exteriores aplicadas nos seus extremos, assume quando atinge o equilíbrio, minimizando desse modo a energia de configuração.

O estudo da *elástica* foi sugerido a Euler por Daniel Bernoulli numa carta datada de 24 de maio de 1738 [EA], onde se lê (em tradução livre da autora):

«Encontra, de entre todas as curvas com o mesmo comprimento e os mesmos extremos, aquela que minimiza ou maximiza $\int r^m ds$, onde r é o raio de curvatura.»

Daqui concluímos que ainda não se sabia se a curva procurada maximizaria ou minimizaria a energia, nem qual o expoente m de r seria o correto. Quatro anos mais tarde, a 20 de outubro de 1742, Bernoulli insiste:

«Ninguém aperfeiçoou o método isoperimétrico como tu; facilmente resolverás este problema encontrando o mínimo de $\int \frac{ds}{r^2}$.»

Ou seja: nesta carta, Bernoulli conjectura que a curva que corresponde ao equilíbrio é a mesma que minimiza a expressão, obtida por ele, da energia potencial. Nova carta, a 12 de dezembro de 1742, confirma que Euler aceitou o desafio, pois Bernoulli escreve:

«Estou contente por estares tão entusiasmado em encontrar a elástica usando o método isoperimétrico.»

Como em outras instâncias, Euler deduz a equação diferencial que descreve as curvas elásticas por dois métodos distintos. Numa das estratégias usa cálculo de variações (o tal *método isoperimétrico* a que Bernoulli alude), procurando a curva que minimiza a função energia; na outra, recorre às noções físicas de equilíbrio de forças e de momento de flexão, determinando a posição do fio quando em repouso. A primeira secção desta dissertação expõe em pormenor ambas as abordagens, com exemplos para que o texto não seja demasiado árido. Na segunda, classificamos os nove tipos de elástica, alguns dos quais são solução de integrais elípticos sem primitiva imediata. Depois apresentamos a fórmula, hoje conhecida como *carga crítica de Euler*, que indica o peso máximo que uma coluna cilíndrica, de altura e diâmetro fixados, pode sustentar sem dobrar. É então o momento de voltarmos às árvores, a que se aplicam as estimativas de Euler, para testar numa amostra de árvores monumentais de Lisboa e Porto se é respeitada a altura máxima de modo a não arquearem devido ao peso. Finalmente, e porque Euler faz frequentemente referência ao recurso a tabelas de logaritmos e de raízes quadradas, são apresentados, com a respetiva justificação, dois algoritmos:

- um, de Euler, que permite calcular valores aproximados de logaritmos sem recorrer ao desenvolvimento em série de funções; está inserido na obra *Introductio in analysin infinitorum*, de 1748;

- outro (cuja autoria desconhecemos), usado no cálculo de aproximações de raízes quadradas, que foi ensinado em tempos no oitavo ano de escolaridade.

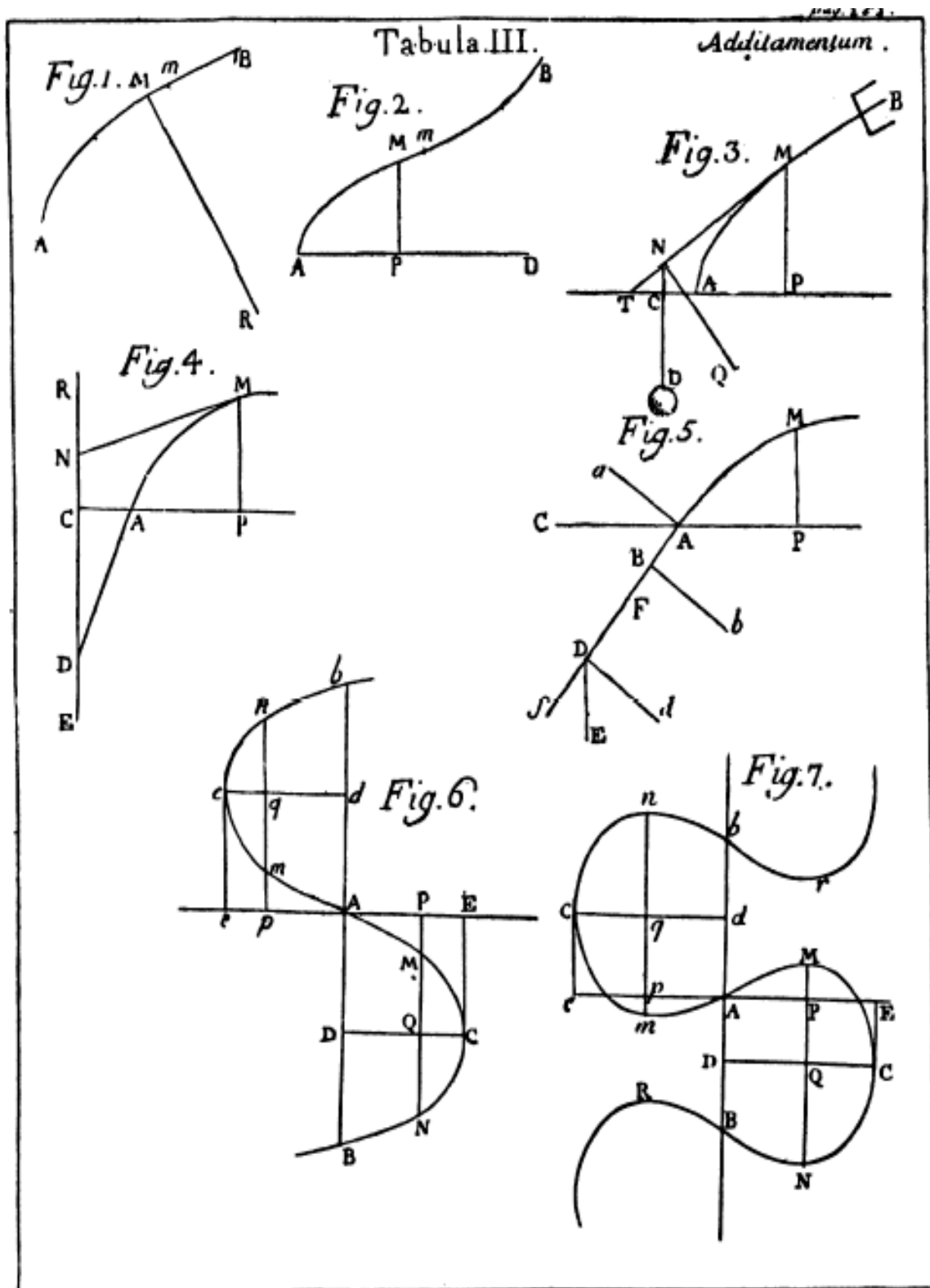


Figura de *Methodus inveniendi lineas curvas*, de Leonhard Euler

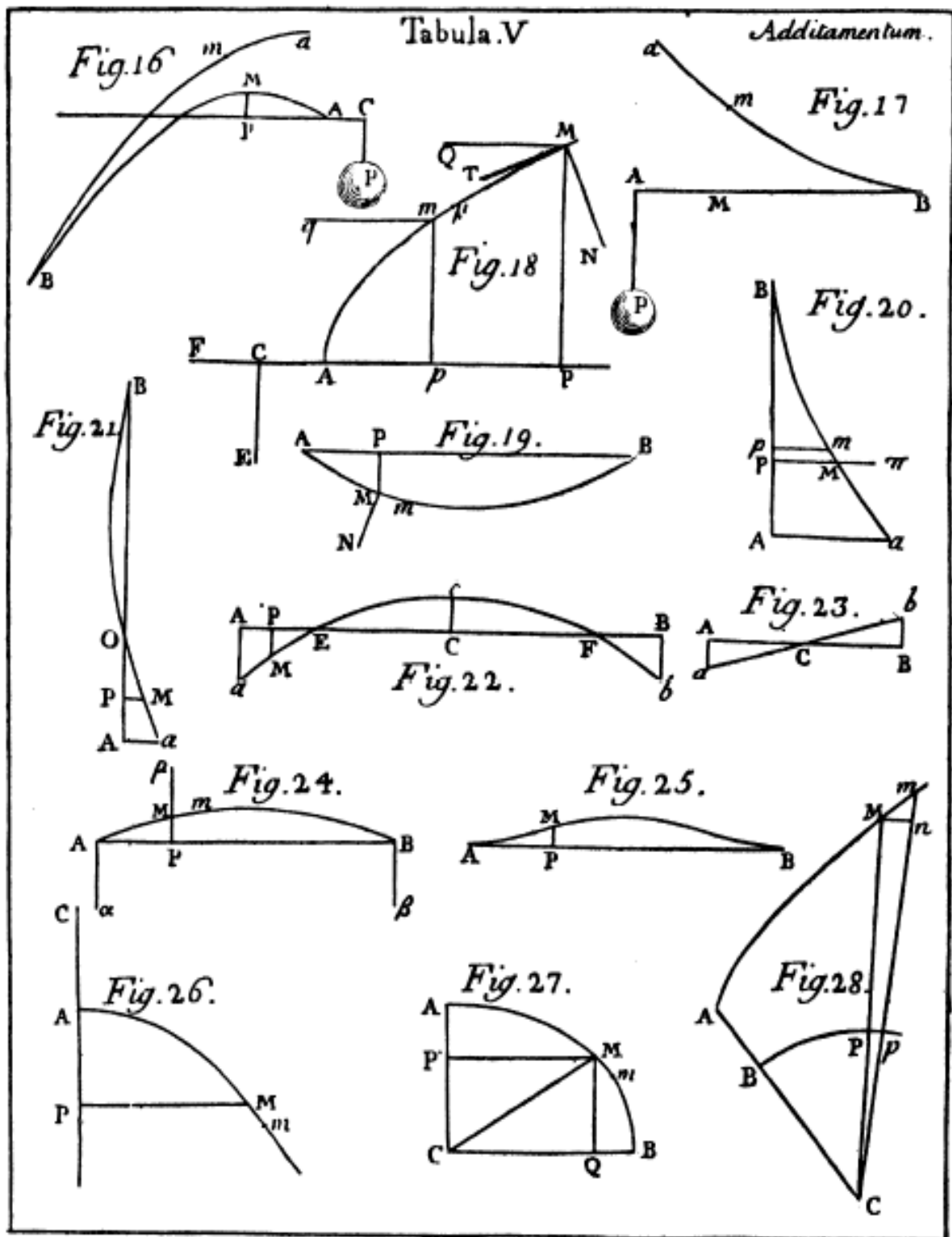


Figura de *Methodus inveniendi lineas curvas*, de Leonhard Euler

Capítulo I: A curva elástica de Bernoulli-Euler

O objetivo do artigo *De curvis elasticis* foi o de encontrar a forma que assume um fio inextensível, de peso desprezável, quando deformado após a aplicação de forças exteriores nos seus extremos que não alterem o seu comprimento. À curva que tem esta forma Euler chamou *elástica*. Este problema foi-lhe proposto por Daniel Bernoulli por carta em 1742. Bernoulli havia obtido uma expressão para a energia que resulta da configuração de uma curva, sujeita a uma deformação que não altere o seu comprimento, dita *energia potencial de deformação*. Além disso, havia formulado a conjectura de que a curva que minimiza essa energia tem a mesma forma que um fio, deformado por forças exteriores até que se atinja o equilíbrio destas forças com a resistência do material de que é feito, assume quando volta ao repouso. Euler verificou que as equações diferenciais que descrevem ambas as curvas são iguais quer se use cálculo de variações para determinar a curva que minimiza a energia, processo explicado num apêndice da obra *Methodus inveniendi lineas curvas* [Bo], quer se use uma abordagem física para descrever o fio em repouso.

Bernoulli definiu a energia potencial de deformação de um fio, como sendo a média espacial do quadrado da curvatura ao longo da curva, isto é $\int K^2 ds$, onde ds é o elemento infinitesimal de comprimento de arco ao longo do fio e K a curvatura em cada um dos seus pontos. Euler traduz este problema físico num problema variacional, o de procurar a curva que minimiza o valor de $\int K^2 ds$ entre todas as curvas com igual comprimento e extremos em dois pontos fixos onde as tangentes à curva são retas previamente fixadas. Na realidade, Euler analisa apenas as curvas que são gráfico de uma função num referencial fixado, mas um tratamento mais geral (como o que consta de [C]) conduz à mesma resposta. Como se supõe que o comprimento do fio se mantém constante, esta questão pertence à classe dos problemas isoperimétricos.

Ao procurar a curva que, sob certas condições de rigidez, minimiza a energia de deformação, Euler também estuda o equilíbrio das forças que atuam sobre a curva, aspetos que distingue quando menciona *causas efetivas* ou *causas finais*. As primeiras são aquelas que se relacionam com princípios físicos, como, por exemplo, forças e momentos. As causas finais estão relacionadas com problemas de máximos ou mínimos, estratégia que, neste trabalho de Euler, se serve do cálculo de variações. Desse modo, Euler resolve o mesmo problema por dois métodos, que explicaremos e compararemos de seguida, e responde à questão inicial de Bernoulli.

1.1 Caracterização da curva elástica usando *causas finais*

As duas imagens que se seguem reproduzem duas figuras feitas por Euler. Na que se segue (figura 1.1.1)

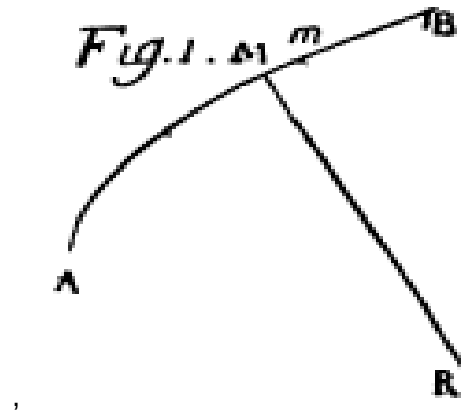


Fig.- 1.1.1

a linha que une os pontos A e B representa uma banda elástica que foi curvada numa direção arbitrária, M é um ponto da banda, AM é o comprimento do arco da banda entre estes dois pontos e MR é o raio de curvatura da curva no ponto M . Na figura 1.1.2, a curva foi recolocada de modo que AD representa o eixo das abcissas com origem em A e a curva é o gráfico de uma função definida em AD . E há um dado adicional: ds , o elemento infinitesimal de comprimento de arco ao longo da curva entre M e m .

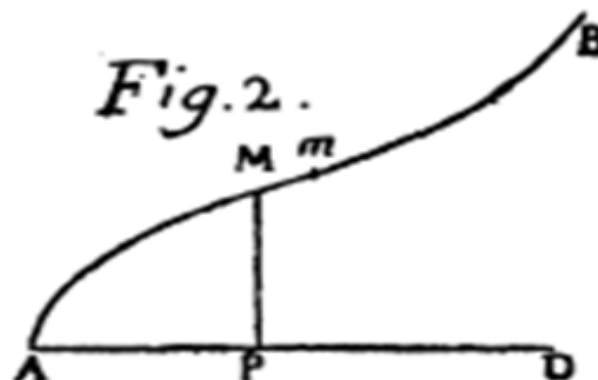


Fig.- 1.1.2

Designemos por $\overline{AP} = x$ e $\overline{PM} = y$ as coordenadas do ponto M ; o ponto m é vizinho de M e tem coordenadas $x + dx$ e $y + dy$; como ds é aproximadamente um segmento (ver fig 1.1.4), pelo Teorema de Pitágoras, tem-se

$$ds^2 \simeq dx^2 + dy^2. \quad (1.1.3)$$

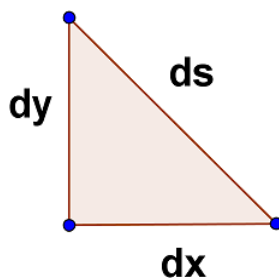


Fig.- 1.1.4

Sejam $\frac{dy}{dx} = p$ ou, equivalentemente, $dy = p dx$ e $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = q$, isto é, $dp = q dx$.

Fazendo a substituição $dy = p dx$ em (1.1.3), obtemos

$$ds^2 \simeq dx^2 + p^2 dx^2 = dx^2(1 + p^2)$$

E portanto, $ds \simeq \sqrt{1 + p^2} dx$. Nesta notação, uma das condições do problema, a de que todas as curvas têm o mesmo comprimento, reescreve-se como

$$\int ds = \int \sqrt{1 + p^2} dx = \text{constante}.$$

Dada uma curva $y = f(x)$, gráfico de uma função f , cada um dos seus pontos tem coordenadas $P = (x, f(x))$ e a curvatura em P é dada por

$$K = \frac{f''(x)}{(1 + f'(x)^2)^{3/2}}.$$

Na notação anterior, temos

$$f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = q, f'(x) = p \text{ e } ds = \sqrt{1 + p^2} dx.$$

Substituindo na fórmula da curvatura, obtém-se a igualdade

$$K^2 = \frac{q^2}{(1 + p^2)^3}.$$

O objetivo de Euler é então o de minimizar o valor do integral

$$\int K^2 dx = \int \frac{q^2 dx}{(1 + p^2)^{5/2}}.$$

Seja $Z = \frac{q^2}{(1+p^2)^{5/2}}$; tem-se $dZ = Xdx + Ydy + Pdp + Qdq$ e, como $X = Y = 0$, uma vez que Z não depende explicitamente de x nem de y , $dZ = Pdp + Qdq$, sendo

$$P = \frac{\partial Z}{\partial p} = \frac{-q^2 \times \frac{5}{2} \times (1+p^2)^{3/2} \times 2p}{(1+p^2)^5} = \frac{-5q^2 p}{(1+p^2)^{7/2}}$$

$$Q = \frac{\partial Z}{\partial q} = \frac{2q}{(1+p^2)^{5/2}}.$$

Em resumo, pretende-se o mínimo de $\int Z dx$ sujeito à condição

$$\int ds = \int \sqrt{1+p^2} dx = L$$

sendo L uma constante estritamente superior à distância entre os extremos da banda.

A partir daqui, Euler utiliza cálculo de variações cujo funcionamento depende de um modo expedito de determinar os pontos onde uma função real de uma ou mais variáveis reais, sujeita a um número finito de condições, atinge o máximo ou mínimo global. É o que explicaremos na próxima secção.

1.2 Máximos e mínimos condicionados

Recordemos o uso de multiplicadores de Lagrange para calcular o máximo ou mínimo global de uma função real num subconjunto do seu domínio determinado por um número finito de restrições. Consideremos uma função de n variáveis $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ e m funções de restrição $g_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, g_m(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Suponhamos que estas funções têm derivadas de primeira ordem contínuas e que, para qualquer ponto do domínio, existe algum i para o qual $\nabla g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 0$. Se f tiver um extremo local no conjunto onde as m condições

$$g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \dots, g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

são satisfeitas, ele ocorre num ponto $P = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ onde o gradiente de f é combinação linear dos gradientes das m funções g_i . Ou seja, têm de existir números reais $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, que se dizem multiplicadores de Lagrange, tais que

$$\nabla f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \nabla g_i(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$$

A solução (ou soluções) obtém-se resolvendo este sistema com $n + m$ equações (as n equações obtidas pela diferenciação, e as m restrições $g_i = 0$) e $n + m$ incógnitas (as coordenadas dos pontos e os m multiplicadores de Lagrange).

Como se decide se é mínimo ou máximo? É frequente que haja informação adicional que simplifica o processo mas, em geral, depois de conhecidos os pontos críticos, eles são classificados recorrendo-se ao estudo dos sinais dos valores próprios da matriz Hessiana da função.

Vejamos um exemplo [B, pag.152]. Suponhamos que, de todos os triângulos retângulos cuja soma dos catetos é igual a 10, queremos encontrar aquele que tem maior área. Sejam x e y as medidas dos referidos catetos. Então $x + y = 10$ e a área de qualquer triângulo retângulo com catetos dessas dimensões é dada por

$$f(x, y) = \frac{1}{2}xy$$

onde $x > 0$ e $y > 0$. O problema é assim o de maximizar f no subconjunto de pares do seu domínio que satisfazem a condição $g(x, y) = 0$, onde $g(x, y) = x + y - 10$. Note-se que:

- (i) Podemos supor que $x \geq 0$ e $y \geq 0$, correspondendo os casos $x = 0$ e $y = 0$ a triângulos degenerados com área nula.
- (ii) Desse modo, o subconjunto do domínio de f sob a condição $g = 0$ é o conjunto de todos os pontos do segmento de reta de equação $x + y = 10$, com extremos em $(0, 10)$ e $(10, 0)$. Trata-se de um conjunto fechado e limitado, portanto a função f , que é contínua, atinge nesse conjunto um máximo e um mínimo globais. Como f é não negativa, o valor mínimo global é atingido nos pontos extremos do segmento onde vale 0; e portanto o máximo global é atingido obrigatoriamente num ponto interior ao segmento.

Como a função g é polinomial, as suas derivadas parciais de primeira ordem são contínuas; além disso $\nabla g(x, y) = (1, 1) \neq (0, 0)$, qualquer que seja o ponto (x, y) . Usando o método dos multiplicadores de Lagrange, sabemos que, se a função f tiver um extremo relativo no conjunto de pares onde é válida a condição $g(x, y) = 0$, terá de ser uma solução do sistema

$$\begin{cases} \nabla f(x, y) = \alpha \nabla g(x, y) \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

que é equivalente a

$$\begin{cases} \frac{1}{2}y = \alpha \\ \frac{1}{2}x = \alpha \\ x + y = 10 \end{cases}$$

isto é,

$$\begin{cases} x = y \\ \alpha = \frac{1}{2}x \\ x = 5 \end{cases}$$

cuja solução é

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = 5 \\ \alpha = 2,5 \end{cases}$$

Obtivemos uma única solução, o ponto de coordenadas (5,5). Logo é aqui que o máximo global tem de ser atingido. O que significa que o triângulo de área máxima é retângulo e isósceles, com catetos que medem 5 unidades.

1.3 Integrais do tipo $\int F(x, y, y') dx$

Voltemos ao problema de Euler. Trata-se de minimizar uma função do tipo $\int F(x, y, y', y'') dx$ num conjunto de curvas $y = y(x)$ sujeitas a uma condição isoperimétrica. Começemos, contudo, por estudar integrais $\int F(x, y, y') dx$ para entendermos em contexto mais simples o que é o cálculo de variações [F].

Dados dois pontos do plano $A=(a, y_a)$ e $B=(b, y_b)$, consideremos o conjunto de todas as curvas do plano que são gráficos de funções, com extremos nestes dois pontos e comprimento estritamente superior à distância entre A e B

$$C = \{y = f(x) : f(a) = y_a, f(b) = y_b \text{ e } a \leq x \leq b\}.$$

Seja $\Phi: C \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$f \rightarrow \Phi(f) = \int_a^b F(x, y, y') dx.$$

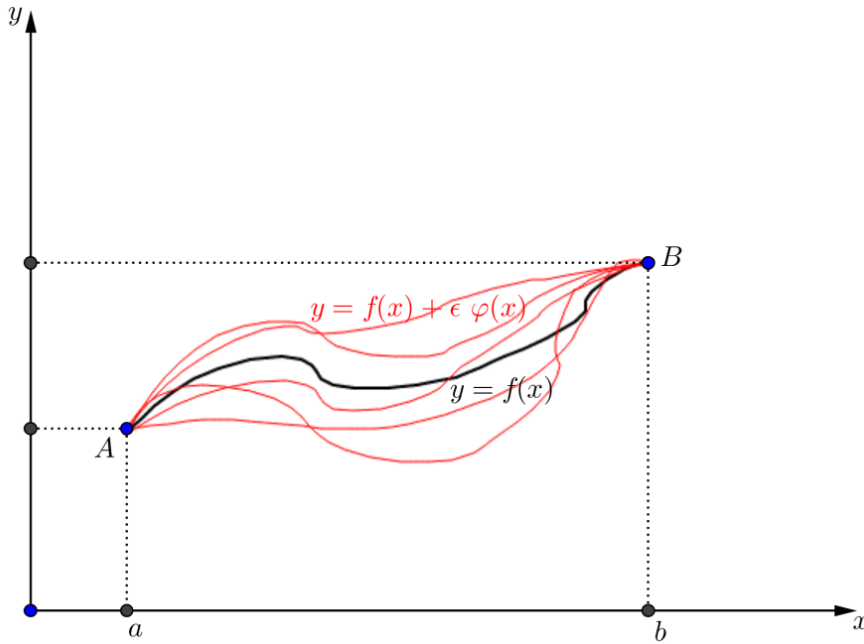


Fig. 1.3.5

Dada uma curva $y = f(x)$ de extremos nos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ e um ponto estacionário (isto é, máximo ou mínimo) do funcional Φ , examinemos o valor do funcional numa curva $y = h(x)$ de C . Esta curva pode escrever-se como o gráfico de $y = f(x) + \varepsilon\varphi(x)$, sendo ε uma constante arbitrária, independente de x e de y , e φ uma função derivável arbitrária de x e independente de ε . Como estas curvas também passam nos pontos A e B , podemos concluir que $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Assim, fixado x e à medida que ε tende para zero, o valor $f(x) + \varepsilon\varphi(x)$ aproxima-se $f(x)$. Suponhamos que, qualquer que seja ε , as curvas $y = f(x)$ e $y = f(x) + \varepsilon\varphi(x)$ têm derivadas iguais nos pontos extremos. Esta hipótese implica que $\varphi'(a) = \varphi'(b) = 0$. Denotemos, como anteriormente, $f'(x) = p$ e admitamos também que $F(x, y, y') = F(x, y, p)$ tem derivadas parciais contínuas pelo menos até à primeira ordem com respeito a x, y e p .

O que se pretende é traduzir a propriedade de a curva $y = f(x)$ ser um ponto crítico do funcional Φ através de uma condição a ser satisfeita por F e, ainda, encontrar um modo de decidir se esse ponto crítico é um máximo ou um mínimo. Isso pode conseguir-se através da variável ε . Consideremos a função ψ que a cada ε arbitrário associa

$$\Phi(f(x) + \varepsilon\varphi(x)) = \int_a^b F(x, f(x) + \varepsilon\varphi(x), f'(x) + \varepsilon\varphi'(x)) dx.$$

Dizer que $y = f(x)$ é um ponto crítico do funcional Φ é equivalente a afirmar que a derivada de ψ é nula em $\varepsilon = 0$. Ou seja, que

$$\delta\Phi|_{\varepsilon=0} = \frac{d}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0} \Phi(f(x) + \varepsilon\varphi(x)) = 0.$$

Ora, se F_y e F_p designam as derivadas parciais de F em ordem à segunda e à terceira variáveis da função F , tem-se

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0} \Phi(f(x) + \varepsilon\varphi(x)) &= \\ &= \frac{d}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0} \left(\int_a^b F(x, f(x) + \varepsilon\varphi(x), f'(x) + \varepsilon\varphi'(x)) dx \right) = \\ &= \int_a^b \frac{d}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0} (F(x, f(x) + \varepsilon\varphi(x), f'(x) + \varepsilon\varphi'(x))) dx = \\ &= \int_a^b F_y \varphi(x) + F_p \varphi'(x) dx = \\ &= \int_a^b F_y \varphi(x) dx + \int_a^b F_p \varphi'(x) dx. \end{aligned}$$

Calculemos o segundo destes dois integrais usando integração por partes:

$$\begin{aligned} \int_a^b F_p \varphi'(x) dx &= F_p \varphi(x) \Big|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx} F_p \varphi(x) dx = \\ &= F_p(b, f(b), f'(b)) \varphi(b) - F_p(a, f(a), f'(a)) \varphi(a) - \int_a^b \frac{d}{dx} F_p \varphi(x) dx = \\ &= - \int_a^b \frac{d}{dx} F_p \varphi(x) dx \end{aligned}$$

visto que $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Conclui-se então que

$$\begin{aligned} \delta\Phi|_{\varepsilon=0} &= \frac{d}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0} (\Phi(f(x) + \varepsilon\varphi(x))) = \\ &= \int_a^b \varphi(x) \left(F_y - \frac{d}{dx} F_p \right) dx. \end{aligned}$$

Como queremos que este integral seja zero qualquer que seja a função φ , devemos ter (por estarmos a lidar com funções contínuas, [F, pag. 8])

$$F_y - \frac{d}{dx} F_p = 0 \quad (1.3.6)$$

equação que se chama *de Euler-Lagrange*.

No caso particular em que F não depende explicitamente de x , o integral a minimizar é $\int_a^b F(y, y') dx$ e a equação anterior obriga F a verificar a equação

$$F - y'F_p = c \quad (1.3.7)$$

para alguma constante c [Oprea, página 322]. De facto, note-se que

$$\frac{d}{dx} F(y, y') = \frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{dy'}{dx}$$

e

$$\frac{d}{dx} \left(y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = \frac{dy'}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} + y' \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right)$$

logo a equação

$$F_y - \frac{d}{dx} F_p = 0$$

isto é,

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0$$

implica que

$$\frac{\partial F}{\partial y} y' - y' \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0$$

ou seja,

$$\frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{dy'}{dx} - \frac{dy'}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} - y' \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0$$

o que é o mesmo que

$$\frac{d}{dx} (F - y'F_p) = 0.$$

Daqui resulta que $F - y'F_p = \text{constante}$.

O argumento anterior pode ser invertido para curvas $y = y(x)$ cuja derivada nunca se anula, provando-se que a condição (1.3.6) é equivalente à condição (1.3.7).

Note-se que esta equação não chega para decidir a natureza do ponto crítico, isto é, para sabermos se é máximo ou mínimo. Isso pode ser obtido através da análise da segunda derivada do funcional. Uma apresentação completa dessa estratégia pode ser lida na página 102 e seguintes de [F].

1.4 Exemplo: A braquistócrona

Dado um ponto (a, b) no plano, com $a < 0$ e $b > 0$, pretende-se encontrar uma curva plana $y = y(x)$ que una (a, b) à origem (ver figura 1.4.8) de tal modo que, se um objeto de massa m se move sem deslizamento nem atrito ao longo da curva, sujeito apenas à força da gravidade, então o tempo gasto para chegar de (a, b) a $(0, 0)$ seja mínimo. Este é um problema difícil porque a quantidade que queremos minimizar, o tempo de descida para todas as possíveis curvas que unem os dois pontos, depende de toda a curva que, além disso, está a ser descrita à custa de um movimento.

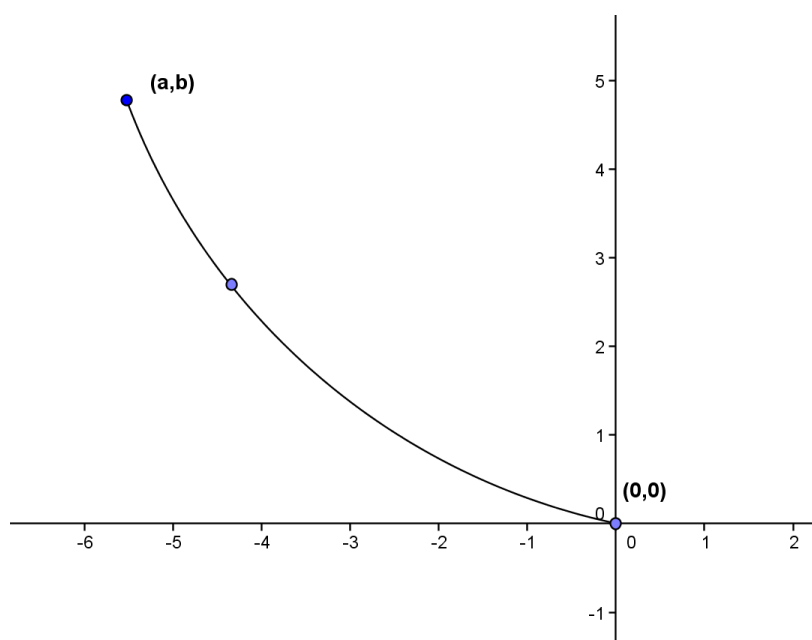


Fig.-1.4.8

Convençamo-nos primeiro de que deve existir uma curva que é percorrida no menor tempo possível. Os traços das curvas que ligam os dois pontos que nos interessam, estão contidos no retângulo com vértices (a, b) , $(a, 0)$, $(0, 0)$ e $(0, b)$. Os bordos destes retângulos são curvas que ligam estes pontos mas, se a única ação é a da força da gravidade, levam um tempo infinito a serem percorridas. Além disso, as curvas que começam em (a, b) quase horizontais e depois se desviam para baixo, na vertical, têm tempos de descida arbitrariamente grandes. Por outro lado, o segmento de reta que

une os dois pontos, e que minimiza a distância percorrida, tem um tempo de descida superior ao de um arco de circunferência com extremos nesses pontos. Parece portanto natural procurar uma curva com tempo de descida mínimo, suspeitando-se que o seu traço se situe entre o do segmento de reta e o do arco de circunferência que nos pontos (a, b) e $(0, 0)$ é tangente às retas vertical e horizontal, respetivamente.

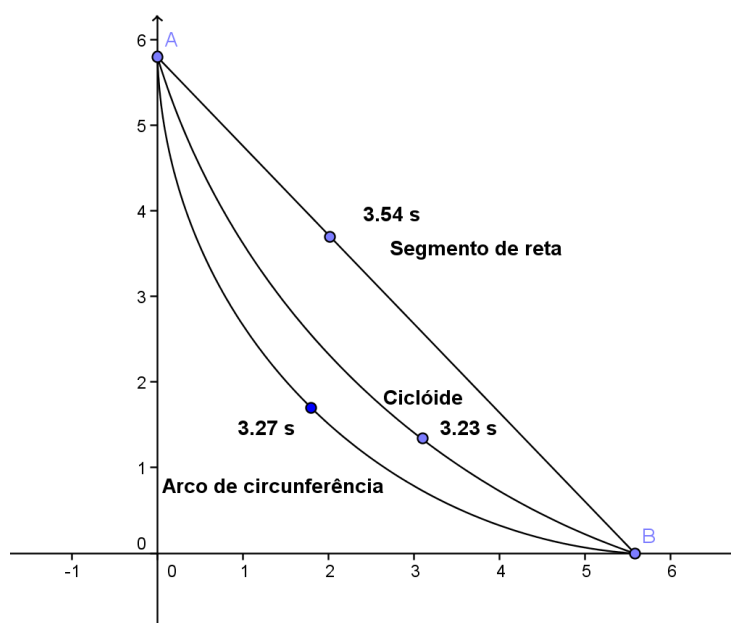


Fig.- 1.4.9

Como deve ser o traço de uma curva mais rápida? Observe-se que, se o ponto (a, b) estivesse na vertical relativamente a $(0, 0)$, isto é, se a fosse 0, a curva com tempo de descida mínimo seria a única que a ação da gravidade permitiria: a linha reta vertical que une os dois pontos. Por isso, quando $a < 0$, esperamos que uma curva de descida mais rápida tenha uma inclinação acentuada no início, perto de (a, b) , como acontece, por exemplo, com o arco de circunferência a que nos referimos. Isso permite ao objeto acelerar e ganhar tempo relativamente a outras curvas de menor declive, como o segmento de reta que une os dois pontos. Contudo, para a curva terminar em $(0, 0)$, tem depois de suavizar a inclinação, sem com isso aumentar a distância (logo o tempo) do percurso, o que o tal arco de circunferência não consegue evitar. É neste ajuste perfeito que está o mérito de uma curva que tenha tempo de descida mínimo.

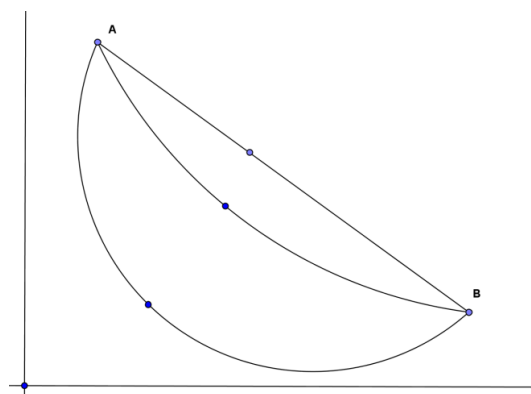


Fig.- 1.4.10

Naturalmente uma tal curva não pode zigzaguar, ou gastará tempo desnecessariamente. Por isso, podemos restringir a busca à família de curvas que unem os dois pontos e são gráficos de funções $y = y(x)$, definidas em $[a, 0]$. Cada distância infinitesimal ds percorrida pelo objeto na curva $y = y(x)$ é igual ao produto da velocidade instantânea, digamos v , pelo tempo dt gasto para a percorrer. Além disso, a distância infinitesimal percorrida pelo objeto é o elemento de comprimento de arco da curva $ds = \sqrt{1 + y'^2} dx$ e a energia potencial do objeto em cada instante é dada por mgh , sendo m a massa do objeto, g a aceleração da gravidade $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ e h a altura a que está o objeto relativamente a um referencial fixado.

Se o percurso se iniciar no ponto (a, b) com velocidade inicial zero (momento em que a energia cinética é nula), então pelo princípio da conservação da energia, sabemos que a energia cinética do objeto em cada instante do seu movimento é igual à energia potencial perdida à medida que diminui a altura. Ou seja,

$$mg(b - y) = \frac{1}{2}mv^2.$$

Então temos $v = \sqrt{2g(b - y)}$ e, a partir da igualdade $ds = vdt$, concluímos que dt é função de y e de y' , dada por

$$dt(y, y') = \frac{ds}{v} = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2g(b - y)}} dx$$

O tempo total gasto para descer de (a, b) até $(0, 0)$ obtém-se integrando esta função em ordem a x , de a a 0

$$t(y, y') = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_a^0 \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{b-y}} dx$$

onde $y(a) = b$ e $y(0) = 0$. É precisamente esta função que se pretende minimizar, sendo certo que a constante $\frac{1}{\sqrt{2g}}$ não tem influência na curva que minimiza (embora influencie o valor mínimo). Note-se que se trata de um integral impróprio pois $y(a) = b$, mas convergente para as curvas que ligam os dois pontos e são gráficos de funções definidas em $[a, 0]$. Após a mudança de variável $u = b - y$, a função a minimizar toma a forma

$$\int_a^0 \frac{\sqrt{1+u'^2}}{\sqrt{u}} dx.$$

Como vimos, se

$$F = \frac{\sqrt{1+u'^2}}{\sqrt{u}},$$

u terá de satisfazer a equação diferencial

$$F - u' \frac{\partial F}{\partial u'} = c$$

para alguma constante c . Uma vez que

$$\frac{\partial F}{\partial u'} = \frac{\partial}{\partial u'} \left(\frac{\sqrt{1+u'^2}}{\sqrt{u}} \right) = \frac{\frac{2u'}{2\sqrt{1+u'^2}}}{\sqrt{u}} = \frac{u'}{\sqrt{u(1+u'^2)}}$$

a equação anterior é na verdade

$$\frac{\sqrt{1+u'^2}}{\sqrt{u}} - u' \frac{u'}{\sqrt{u(1+u'^2)}} = c.$$

Reduzindo os termos desta expressão ao mesmo denominador, obtemos

$$1 + u'^2 - u'^2 = c \sqrt{u(1+u'^2)}$$

$$1 = c \sqrt{u(1+u'^2)}$$

o que garante que c não é zero e permite reformular esta igualdade, fazendo $C = \frac{1}{c}$

$$C = \sqrt{u(1 + u^2)}.$$

A equação diferencial

$$C = \sqrt{u \left(1 + \left(\frac{du}{dx} \right)^2 \right)}$$

é separável e, tendo em conta que y decresce ao longo do movimento e portanto a função $u = b - y$ tem derivada não negativa em ordem a x , equivalente a

$$\frac{du}{dx} = \sqrt{\frac{C^2 - u}{u}}.$$

Separando as variáveis, obtemos

$$dx = \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{C^2 - u}} du$$

$$x = \int \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{C^2 - u}} du.$$

Com a substituição $w = \sqrt{C^2 - u}$, esta igualdade reduz-se a

$$x = -2 \int \sqrt{C^2 - w^2} dw$$

já que $dw = -\frac{1}{2\sqrt{C^2 - u}} du$. Através de uma nova mudança de variável, $w = C \cos \theta$, obtemos $dw = -C \sin \theta d\theta$ e, portanto,

$$\begin{aligned} x(\theta) &= -2 \int C \cos \theta C \cos \theta d\theta = \\ &= -2C^2 \int \cos^2 \theta d\theta = -2C^2 \int \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} d\theta = \\ &= -\frac{C^2}{2} (2\theta + \sin(2\theta)) + r \end{aligned}$$

para alguma constante r . E, dado que $b - y = u = C^2 - w^2 = C^2 - C^2 \sin^2 \theta = C^2 \cos^2 \theta$, temos

$$y(\theta) = -C^2 \cos^2 \theta + b.$$

Observe-se que $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = b$, logo devemos ter $x\left(\frac{\pi}{2}\right) = a$. Isso obriga à igualdade

$$-\frac{C^2}{2}(\pi) + r = a$$

ou seja,

$$-\frac{\pi}{2}C^2 + r = a.$$

Assim, as equações paramétricas da curva são

$$x(\theta) = -\frac{C^2}{2}(2\theta - \pi + \sin(2\theta)) + a$$

$$y(\theta) = -\frac{C^2}{2}(1 + \cos(2\theta)) + b$$

A curva correspondente é um arco de uma cicloide invertida. Recorde-se que a cicloide é a curva que descreve o movimento de um ponto fixado de uma circunferência quando esta se move numa estrada plana sem deslizar.

O que provámos até este momento? Apenas que um arco de cicloide invertida é a curva estacionária do funcional

$$t(y, y') = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_a^0 \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{(b - y)}} dx$$

faltando demonstrar que é efetivamente um mínimo. Contudo, uma vez que há uma curva que minimiza o tempo de descida e obtivemos apenas uma solução da equação de Euler-Lagrange, o arco de cicloide tem de ser essa curva mais rápida.

1.5 Integrais do tipo $\int F(x, y, y')dx$ sob condições iniciais

Com muita frequência, os problemas variacionais estão associados a restrições que têm que ser satisfeitas. Vamos ver nesta secção que modificações têm de ser feitas nos argumentos anteriores de modo atender a este problema mais geral, o de minimizar ou maximizar em $[a, b]$ o integral.

$$\int F(x, y, y')dx$$

sabendo que $y(a)$ e $y(b)$ estão fixos e que $\int_a^b g(x, y, y') dx = c$ sendo c uma constante. Da secção 1.2 concluímos [F, pag. 83] que, se $y = y(x)$ é uma solução do problema, então existe um multiplicador de Lagrange δ tal que

$$\frac{\partial(F-\delta g)}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial(F-\delta g)}{\partial y'} \right) = 0.$$

1.5.1 Exemplo: Um problema isoperimétrico

Fixemos um real positivo l e consideremos todas as curvas planas que unem os pontos $(-a, 0)$ e $(a, 0)$, de comprimento l , cujo traço está no semiplano superior do referencial cartesiano e que são gráficos de funções diferenciáveis, com derivada contínua, definidas num intervalo $[-a, a]$, onde $a > 0$ e $2a < l$. Queremos encontrar aquela que, com o intervalo $[-a, a]$, delimita a região de maior área.

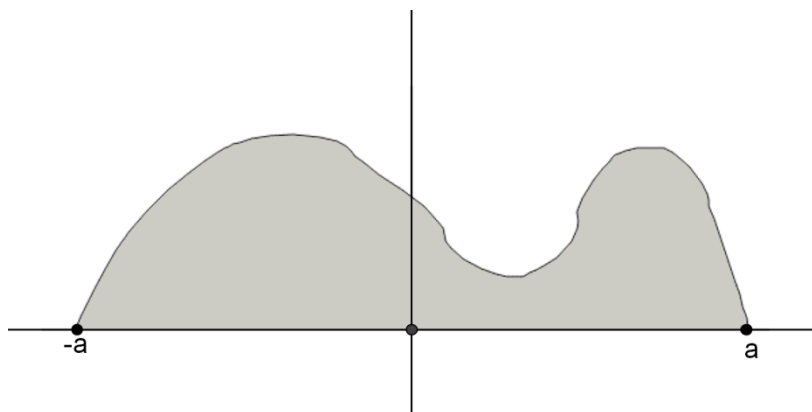


Fig.- 1.5.11

Começemos por simplificar um pouco o problema: podemos procurar uma tal curva entre as que são côncavas (ou seja, têm derivada estritamente decrescente), pois a reflexão de um arco da curva que seja côncavo não altera o perímetro mas aumenta a área englobada. Contudo, é ainda assim, complicado garantir previamente que um tal máximo existe porque o domínio da função J que queremos maximizar, dada pela área da região englobada pela curva e o segmento que liga $(-a, 0)$ e $(a, 0)$, é um conjunto infinito de curvas. Porém, se colocarmos nesse conjunto uma distância que tenha em conta a proximidade dos valores das curvas e das suas derivadas, digamos

$$\text{máximo}_{-a < x < a} \{ |y_1(x) - y_2(x)|, |y'_1(x) - y'_2(x)| \},$$

então a intuição diz-nos que J é contínua. Além disso, algumas experiências com curvas sujeitas à restrição isoperimétrica e à condição que fixa os extremos, sugerem que, num tal subconjunto de curvas, J é majorada e atinge o máximo absoluto.

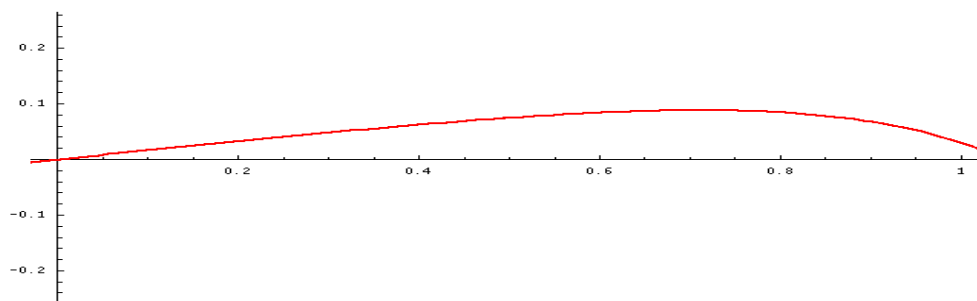


Fig.- 1.5.12

Além de ser côncava, suspeitamos que uma tal curva exiba alguma simetria. De facto, uma curva cujo traço inicial acompanhe de muito perto o eixo dos x 's e depois, para ter perímetro $l > 2a$, termine com uma bossa (como a da figura 1.5.12), não consegue delimitar uma grande área.

Admitamos que a curva que maximiza a área é o gráfico de uma função $y = y(x)$ para a qual o integral $J = \int_{-a}^a y dx$ é máximo, sujeita às condições

$$y(-a) = y(a) = 0 \quad e \quad \int_{-a}^a \sqrt{1 + y'^2} dx = l.$$

Usando o procedimento analisado na secção anterior, uma tal curva tem de ser solução da equação

$$1 - \frac{d}{dx} \left(-\delta \frac{2y'}{2\sqrt{1+y'^2}} \right) = 0,$$

para algum multiplicador $\delta \neq 0$, igualdade que, uma vez integrada, conduz a

$$x + \delta \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = C_1$$

para alguma constante C_1 . O que significa que

$$(x - C_1)^2 = \delta^2 \left(\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right)^2$$

ou seja,

$$(x - C_1)^2 = \delta^2 \frac{y'^2}{1 + y'^2}$$

e portanto

$$\left(\frac{x - C_1}{\delta} \right)^2 (1 + y'^2) = y'^2$$

ou, equivalentemente,

$$y'^2 = \frac{\left(\frac{x - C_1}{\delta} \right)^2}{1 - \left(\frac{x - C_1}{\delta} \right)^2} = \frac{(x - C_1)^2}{\delta^2 - (x - C_1)^2}.$$

Daqui resulta que

$$y' = \pm \sqrt{\frac{(x - C_1)^2}{\delta^2 - (x - C_1)^2}}.$$

Uma vez que y' é estritamente decrescente, visto que reduzimos a busca à família de curvas côncavas, y' mantém o sinal no domínio até se anular. Em cada intervalo em que o sinal é fixo podemos resolver a equação diferencial anterior, que é de primitivação imediata, com uma escolha específica do sinal. Qualquer que seja essa escolha, tem-se

$$y = \pm \left(-\frac{1}{2} \frac{(\delta^2 - (x - C_1)^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C_2 \right)$$

$$y - C_2 = \pm (-\sqrt{\delta^2 - (x - C_1)^2})$$

e portanto

$$(y - C_2)^2 = \delta^2 - (x - C_1)^2.$$

Trata-se da equação cartesiana

$$(x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 = \delta^2$$

de um arco da circunferência centrada em (C_1, C_2) e de raio δ . Os valores de C_1 , C_2 e δ são determinados pelas condições $y(-a) = y(a) = 0$ e $\int_{-a}^a \sqrt{1 + y'^2} dx = l$:

- Das equações

$$\begin{cases} y(a) = 0 \\ y(-a) = 0 \end{cases}$$

isto é

$$\begin{cases} (a - C_1)^2 + (-C_2)^2 = \delta^2 \\ (-a - C_1)^2 + (-C_2)^2 = \delta^2 \end{cases}$$

deduzimos que

$$(a - C_1)^2 = (-a - C_1)^2$$

logo

$$a - C_1 = -a - C_1 \quad \vee \quad a - C_1 = a + C_1$$

e portanto

$$a = 0 \quad \vee \quad C_1 = 0.$$

Mas, como sabemos, $a \neq 0$, daí que se tenha $C_1 = 0$.

- Assim, a equação do arco de circunferência é

$$x^2 + (y - C_2)^2 = \delta^2$$

onde $\delta > a$ uma vez que o ponto $(a, 0)$ pertence ao arco.

- A condição $\int_{-a}^a \sqrt{1 + y'^2} dx = l$ indica que

$$\int_{-a}^a \sqrt{1 + \left(\pm \frac{x}{\sqrt{\delta^2 - x^2}} \right)^2} dx = l$$

ou seja,

$$\int_{-a}^a \frac{|\delta|}{|\delta| \sqrt{1 - \left(\frac{x}{\delta}\right)^2}} dx = l$$

e portanto

$$2\delta \arcsen\left(\frac{a}{\delta}\right) = l.$$

Fixados a e l nas condições anteriores, esta igualdade tem uma única solução δ (que pode contudo ser difícil de determinar explicitamente).

- Resta-nos encontrar C_2 . Voltemos à equação

$$x^2 + (y - C_2)^2 = \delta^2$$

onde só C_2 é desconhecido. Sabendo que o ponto $(a, 0)$ pertence ao arco de circunferência, temos

$$a^2 + C_2^2 = \delta^2$$

logo

$$C_2 = \pm \sqrt{\delta^2 - a^2}.$$

Na figura 1.5.13 estão representadas as duas circunferências correspondentes a estas duas possibilidades (e $b = \sqrt{\delta^2 - a^2}$). Como foi imposta a condição de a curva procurada ser tal que o seu traço está no semiplano superior do referencial cartesiano, devemos ter

$$C_2 = -\sqrt{\delta^2 - a^2}$$

e a sua equação é

$$x^2 + \left(y + \sqrt{\delta^2 - a^2}\right)^2 = \delta^2$$

sendo o seu centro o ponto de coordenadas $(0, -\sqrt{\delta^2 - a^2})$ e o raio igual a δ .

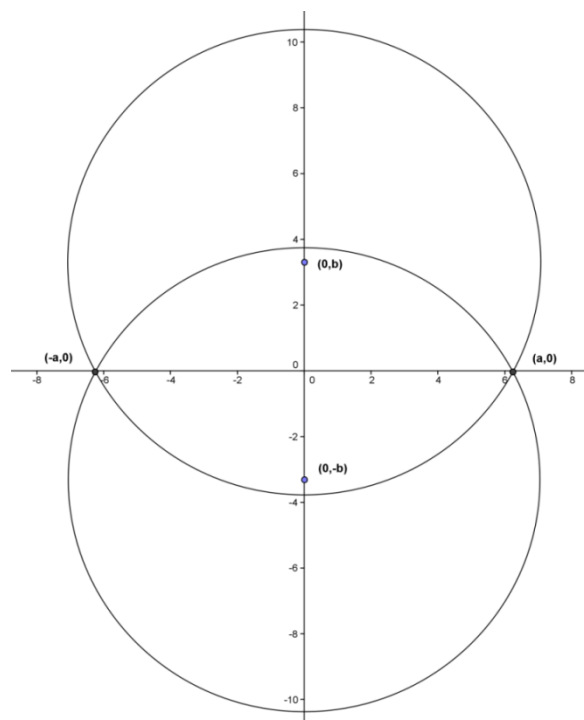


Fig.- 1.5.13

Como a solução encontrada é única, e convencemo-nos de que deve haver um máximo absoluto, este arco de circunferência é a curva procurada.

Refira-se, a propósito, que o problema isoperimétrico pode ser resolvido sem recurso ao cálculo variacional (e até com formulação mais geral do que a que considerámos aqui). A prova (de Steiner e Niven, detalhes em [N]) de que a circunferência de perímetro l é a curva que engloba maior área entre todas as curvas simples e fechadas de igual perímetro, é de natureza geométrica mas não dispensa uma justificação prévia sobre a existência de uma curva que maximize a área.

1.6 Integrais do tipo $\int F(x, y, y', y'') dx$

O tratamento deste tipo de integrais, em que F depende também de y'' , é semelhante ao utilizado nas secções anteriores. Dados dois pontos do plano $A = (a, y_a)$ e $B = (b, y_b)$, consideramos o conjunto de todas as curvas do plano que são gráficos de funções com extremos nestes dois pontos

$$C = \{y = f(x) : f(a) = y_a, f(b) = y_b; a \leq x \leq b\}$$

e o operador $\Phi : C \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$f \rightarrow \Phi(f) = \int_a^b F(x, y, y', y'') dx$$

Como anteriormente, perturbamos a curva $y = f(x)$ dentro da família C e procuramos aí os pontos críticos do funcional Φ .

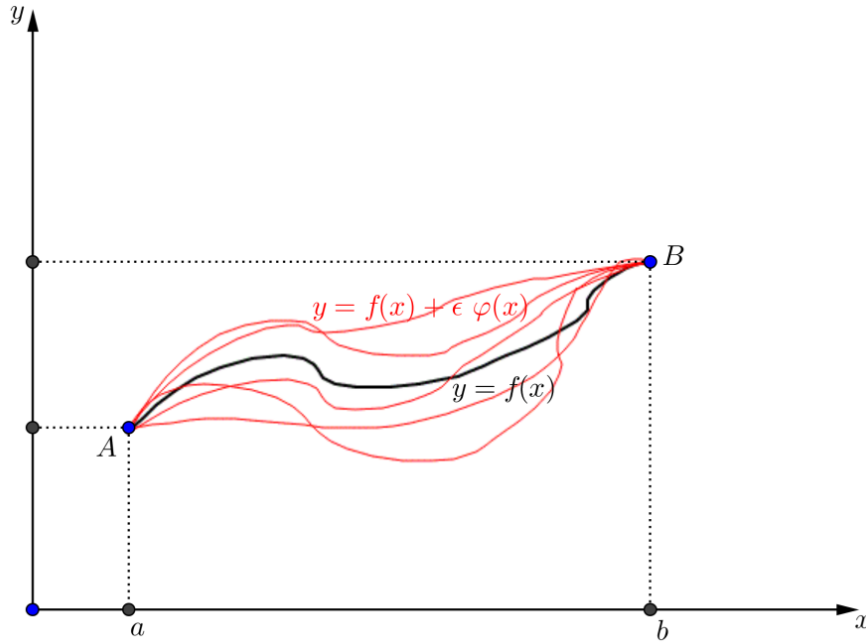


Fig.- 1.6.14

Designemos $f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = q$ e $f'(x) = p$ e seja $y = f(x) + \varepsilon\varphi(x)$ uma perturbação da curva de equação $y = f(x)$ em C , sendo ε é uma constante arbitrária independente de x e de y , φ é uma função arbitrária de x independente de ε . Como estas curvas também passam nos pontos A e B , tal que $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Supomos que as curvas $y = f(x)$ e $y = f(x) + \varepsilon\varphi(x)$ têm derivadas iguais nos pontos extremos, o que implica que $\varphi'(a) = \varphi'(b) = 0$, e $F(x, y, y', y'') = F(x, y, p, q)$ tem derivadas parciais contínuas pelo menos até à segunda ordem com respeito a x, y, p, q .

O que se pretende, é encontrar uma condição a ser satisfeita por F de modo que o funcional Φ tenha um máximo ou mínimo na curva $y = f(x)$. Como anteriormente, seja ψ a função que a cada ε arbitrário associa

$$\Phi(f(x) + \varepsilon\varphi(x)) = \int_a^b F(x, f(x) + \varepsilon\varphi(x), f'(x) + \varepsilon\varphi'(x), f''(x) + \varepsilon\varphi''(x)) dx.$$

Queremos que a derivada de ψ seja zero quando $\varepsilon = 0$. Ora

$$\begin{aligned}
 \delta \Phi|_{\varepsilon=0} &= \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \Phi(f(x) + \varepsilon\varphi(x)) = \\
 &= \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \left(\int_a^b F(x, f(x) + \varepsilon\varphi(x), f'(x) + \varepsilon\varphi'(x), f''(x) + \varepsilon\varphi''(x)) dx \right) = \\
 &= \int_a^b \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} (F(x, f(x) + \varepsilon\varphi(x), f'(x) + \varepsilon\varphi'(x), f''(x) + \varepsilon\varphi''(x))) dx = \\
 &= \int_a^b F_y \varphi(x) + F_p \varphi'(x) + F_q \varphi''(x) dx = \\
 &= \int_a^b F_y \varphi(x) dx + \int_a^b F_p \varphi'(x) dx + \int_a^b F_q \varphi''(x) dx
 \end{aligned}$$

Calculemos o segundo e o terceiro destes três integrais por partes. Começemos pelo segundo:

$$\begin{aligned}
 \int_a^b F_p \varphi'(x) dx &= F_p \varphi(x) \Big|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx} F_p \varphi(x) dx = \\
 &= F_p \varphi(b) - F_p \varphi(a) - \int_a^b \frac{d}{dx} F_p \varphi(x) dx = - \int_a^b \frac{d}{dx} F_p \varphi(x) dx
 \end{aligned}$$

visto que $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Quanto ao terceiro,

$$\begin{aligned}
 \int_a^b F_q \varphi''(x) dx &= F_q \varphi'(x) \Big|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx} F_q \varphi'(x) dx = \\
 &= F_q \varphi'(b) - F_q \varphi'(a) - \int_a^b \frac{d}{dx} F_q \varphi'(x) dx = - \int_a^b \frac{d}{dx} F_q \varphi'(x) dx
 \end{aligned}$$

já que $\varphi'(a) = \varphi'(b) = 0$, e podemos utilizar outra vez integração por partes, obtendo

$$\begin{aligned}
 \int_a^b \frac{d}{dx} F_q \varphi'(x) dx &= \frac{d}{dx} F_q \varphi(x) \Big|_a^b - \int_a^b \frac{d^2}{dx^2} F_q \varphi(x) dx = \\
 &= \frac{d}{dx} F_q \varphi(b) - \frac{d}{dx} F_q \varphi(a) - \int_a^b \frac{d^2}{dx^2} F_q \varphi(x) dx = - \int_a^b \frac{d^2}{dx^2} F_q \varphi(x) dx.
 \end{aligned}$$

Em resumo,

$$\begin{aligned}\delta\Phi|_{\varepsilon=0} &= \frac{d}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0}(\Phi(f(x) + \varepsilon\varphi(x))) = \\ &= \int_a^b \varphi(x) \left(F_y - \frac{d}{dx} F_p + \frac{d^2}{dx^2} F_q \right) dx\end{aligned}$$

e o que se pretende é que este integral seja zero qualquer que seja a função φ . Logo devemos ter [F, pag. 68]

$$F_y - \frac{d}{dx} F_p + \frac{d^2}{dx^2} F_q = 0.$$

Voltemos então ao problema inicial: temos um integral $\int_a^b F(x, y, p, q) dx$ que queremos minimizar, mas sujeito a uma restrição $\int_a^b G(x, y, p) = L$. Então, da secção 1.2 resulta que uma tal solução se determina resolvendo a equação

$$F_y - \frac{d}{dx} F_p + \frac{d^2}{dx^2} F_q + \lambda \left(G_y - \frac{d}{dx} G_p \right) = 0$$

para algum multiplicador de Lagrange λ [Bo, pag. 125].

1.7 Aplicação: A equação da curva elástica

Retornemos ao problema de Euler. Nele tem-se

$$\begin{cases} F(x, y, p, q) = \frac{q^2 dx}{(1 + p^2)^{\frac{5}{2}}} \\ G(x, y, p) = \sqrt{1 + p^2}. \end{cases}$$

Para que o integral $\int_a^b Z dx = \int \frac{q^2 dx}{(1 + p^2)^{\frac{5}{2}}}$ seja mínimo, sujeito à condição

$$\int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{1 + p^2} dx = L \text{ (constante),}$$

terá que ser satisfeita a condição

$$F_y - \frac{d}{dx} F_p + \frac{d^2}{dx^2} F_q + \lambda \left(G_y - \frac{d}{dx} G_p \right) = 0$$

para algum multiplicador λ , ou seja,

$$0 - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2 Q}{dx^2} + \lambda \left(0 - \frac{d}{dx} \frac{2p}{2\sqrt{1+p^2}} \right) = 0$$

$$-\lambda \frac{d}{dx} \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{dP}{dx} - \frac{d^2 Q}{dx^2}$$

$$\alpha \frac{d}{dx} \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{dP}{dx} - \frac{d^2 Q}{dx^2}$$

onde $dZ = Pdp + Qdq$ e $\alpha = -\lambda$. Integrando obtemos

$$\frac{\alpha p}{\sqrt{1+p^2}} + \beta = P - \frac{dQ}{dx}$$

para alguma constante β . Ou seja, sabendo que $qdx = dp$,

$$\frac{\alpha p dp}{\sqrt{1+p^2}} + \beta dp = Pdp - qdQ$$

e, como $Pdp = dZ - Qdq$,

$$\left(\frac{\alpha p}{\sqrt{1+p^2}} + \beta \right) dp = dZ - Qdq - qdQ.$$

Integrando, deduzimos que

$$\alpha \sqrt{1+p^2} + \beta p + \gamma = Z - Qq$$

para alguma constante γ . Mais precisamente, uma vez que $Z = \frac{q^2}{(1+p^2)^{\frac{5}{2}}}$ e $Q = \frac{2q}{(1+p^2)^{5/2}}$,

tem-se

$$\alpha \sqrt{1+p^2} + \beta p + \gamma = \frac{-q^2}{(1+p^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

Resolvendo em ordem a q , podemos escrever

$$q^2 = -(1+p^2)^{\frac{5}{2}} (\alpha \sqrt{1+p^2} + \beta p + \gamma).$$

logo

$$q = \pm(1+p^2)^{\frac{5}{4}} \sqrt{\alpha\sqrt{1+p^2} + \beta p + \gamma}. \quad (*)$$

Neste momento, é necessário impor uma condição adicional às curvas que estamos a estudar: a curvatura não se anula. Uma consequência desta condição, é que então q também não se anula e portanto, como se trata de uma função contínua não muda de sinal.

Fixemos o sinal positivo, isto é, suponhamos que a solução $y = y(x)$ que procuramos é o gráfico de uma função convexa. Se pelo contrário, mantivermos o sinal negativo, o argumento é análogo e chegaremos à solução (côncava) simétrica desta relativamente ao segmento de reta que une os pontos A e B .

Uma vez que $q = \frac{dp}{dx}$, a equação (*) é

$$dx = \pm \frac{dp}{(1+p^2)^{\frac{5}{4}} \sqrt{\alpha\sqrt{1+p^2} + \beta p + \gamma}}$$

desde que o denominador (ou seja, q) não se anule. Como $dy = p dx$, a equação anterior reescreve-se

$$dy = \pm \frac{p dp}{(1+p^2)^{\frac{5}{4}} \sqrt{\alpha\sqrt{1+p^2} + \beta p + \gamma}}.$$

Observe-se que

$$d \left[2 \frac{\sqrt{\alpha\sqrt{1+p^2} + \beta p + \gamma}}{(1+p^2)^{\frac{1}{4}}} \right] = \frac{\beta - \gamma p}{(1+p^2)^{\frac{5}{4}} \sqrt{\alpha\sqrt{1+p^2} + \beta p + \gamma}} dp$$

e, como

$$dx = \frac{dp}{(1+p^2)^{\frac{5}{4}} \sqrt{\alpha\sqrt{1+p^2} + \beta p + \gamma}},$$

tem-se

$$d \left[2 \frac{\sqrt{\alpha\sqrt{1+p^2} + \beta p + \gamma}}{(1+p^2)^{\frac{1}{4}}} \right] = (\beta - \gamma p) dx$$

ou, visto que $dy = p dx$,

$$d \left[2 \frac{\sqrt{\alpha\sqrt{1+p^2} + \beta p + \gamma}}{(1+p^2)^{\frac{1}{4}}} \right] = \left(\beta - \gamma \frac{dy}{dx} \right) dx.$$

Consequentemente,

$$2 \frac{\sqrt{\alpha\sqrt{1+p^2} + \beta p + \gamma}}{(1+p^2)^{\frac{1}{4}}} = \beta x - \gamma y + \delta$$

para alguma constante δ . Como a posição do eixo das abcissas foi escolhida de forma arbitrária, podemos sem perda de generalidade tomar $\delta = 0$. Temos agora de resolver esta equação diferencial. Para a simplificar, façamos a seguinte mudança de referencial

$$X = \frac{\beta x - \gamma y}{\sqrt{\beta^2 + \gamma^2}} \quad \text{e} \quad Y = \frac{\gamma x + \beta y}{\sqrt{\beta^2 + \gamma^2}}.$$

Esta mudança de coordenadas corresponde a uma rotação de ângulo φ , isto é,

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

sendo $\cos\varphi = \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 + \gamma^2}}$ e $\sin\varphi = \frac{\gamma}{\sqrt{\beta^2 + \gamma^2}}$. Deste modo, se definirmos $U = \frac{dY}{dX}$, então

$$dY = \frac{\gamma dx + \beta dy}{\sqrt{\beta^2 + \gamma^2}} \quad \text{e} \quad dX = \frac{\beta dx - \gamma dy}{\sqrt{\beta^2 + \gamma^2}}$$

e portanto

$$U = \frac{dY}{dX} = \frac{\frac{\gamma dx + \beta dy}{\sqrt{\beta^2 + \gamma^2}}}{\frac{\beta dx - \gamma dy}{\sqrt{\beta^2 + \gamma^2}}} = \frac{\gamma dx + \beta dy}{\beta dx - \gamma dy} = \frac{\gamma + \beta \frac{dy}{dx}}{\beta - \gamma \frac{dy}{dx}} = \frac{\gamma + \beta p}{\beta - \gamma p}.$$

Resolvendo esta equação em ordem a p , obtemos

$$p = \frac{\beta U - \gamma}{\beta + \gamma U}$$

logo

$$1 + p^2 = 1 + \frac{\beta^2 U^2 - 2\beta\gamma U + \gamma^2}{(\beta + \gamma U)^2} = \frac{(\beta^2 + \gamma^2)(1 + U^2)}{(\beta + \gamma U)^2}.$$

Substituindo esta expressão na equação

$$2 \frac{\sqrt{\alpha \sqrt{1+p^2} + \beta p + \gamma}}{(1+p^2)^{\frac{1}{4}}} = \beta x - \gamma y + \delta$$

e supondo $\delta = 0$, deduzimos que

$$2 \frac{\sqrt{\alpha \frac{\sqrt{(\beta^2 + \gamma^2)(1+U^2)}}{\beta + \gamma U} + \beta \frac{\beta U - \gamma}{\beta + \gamma U} + \gamma}}{\left[\frac{(\beta^2 + \gamma^2)(1+U^2)}{(\beta + \gamma U)^2} \right]^{\frac{1}{4}}} = X \sqrt{\beta^2 + \gamma^2}$$

ou seja,

$$2 \frac{\sqrt{\alpha \sqrt{(\beta^2 + \gamma^2)(1+U^2)} + \beta^2 U + \gamma^2 U}}{[(\beta^2 + \gamma^2)(1+U^2)]^{\frac{1}{4}}} = X \sqrt{\beta^2 + \gamma^2}$$

ou, equivalentemente,

$$2 \frac{(\beta^2 + \gamma^2)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\alpha \sqrt{1+U^2} + U \sqrt{\beta^2 + \gamma^2}}}{[(\beta^2 + \gamma^2)(1+U^2)]^{\frac{1}{4}}} = X \sqrt{\beta^2 + \gamma^2}$$

que se reduz a

$$2 \frac{\sqrt{\alpha \sqrt{1+U^2} + U \sqrt{\beta^2 + \gamma^2}}}{(1+U^2)^{\frac{1}{4}}} = X \sqrt{\beta^2 + \gamma^2}.$$

Denotemos a constante $\sqrt{\beta^2 + \gamma^2}$ por ρ

$$2 \sqrt{\alpha \sqrt{1+U^2} + \rho U} = \rho X (1+U^2)^{\frac{1}{4}}$$

e elevemos ambos os membros ao quadrado, ficando com

$$4\alpha \sqrt{1+U^2} + 4\rho U = \rho^2 X^2 \sqrt{1+U^2}.$$

Ajustemos as constantes de modo a obtermos uma equação mais fácil de integrar

$$\alpha = \frac{4m}{a^2} \quad \text{e} \quad \rho = \frac{4n}{a^2};$$

então a expressão anterior toma a forma

$$4 \frac{4m}{a^2} \sqrt{1+U^2} + 4 \frac{4n}{a^2} U = \frac{16n^2}{a^4} X C^2 \sqrt{1+U^2}$$

isto é,

$$\frac{16n}{a^2} U = \frac{16}{a^4} (n^2 X^2 - m a^2) \sqrt{1+U^2}$$

$$n^2 a^4 U^2 = (n^2 X^2 - m a^2)^2 (1+U^2)$$

$$[n^2 a^4 - (n^2 X^2 - m a^2)^2] U^2 = (n^2 X^2 - m a^2)^2$$

$$U = \pm \frac{n^2 X^2 - m a^2}{\sqrt{n^2 a^4 - (n^2 X^2 - m a^2)^2}}$$

desde que o denominador nunca se anule. Note-se que para garantir que esta divisão é válida, basta supor que nas curvas que estamos a estudar se tem sempre

$$(n^2 X^2 - m a^2)^2 \neq 0.$$

Esta desigualdade impede U de se anular, ou seja, implica que a velocidade com que a curva é percorrida não se anula.

Admitindo que U é função sem zeros, podemos escolher um sinal para U . Vamos determinar a solução que corresponde ao sinal positivo. Observe-se que, se for negativo, obtemos uma solução simétrica relativamente ao eixo dos XX 's.

Chegamos à seguinte expressão:

$$\frac{dY}{dX} = \frac{n^2 X^2 - m a^2}{\sqrt{n^2 a^4 - (n^2 X^2 - m a^2)^2}}$$

$$dY = \frac{n^2 X^2 - m a^2}{\sqrt{n^2 a^4 - (n^2 X^2 - m a^2)^2}} dX$$

Fazendo uma mudança de variável apropriada esta expressão pode reescrever-se como

$$dy = \frac{(\alpha_1 + \beta_1 x + \gamma_1 x^2) dx}{\sqrt{a^4 - (\alpha_1 + \beta_1 x + \gamma_1 x^2)^2}} \quad (1.7.15)$$

que é a equação diferencial geral que caracteriza a curva elástica.

Após ter obtido esta equação, Euler não prova que é solúvel nem sequer que, admitindo que existe solução, ela minimiza a energia potencial de deformação (contudo, uma prova de que assim é pode ler-se em [C]). Euler prossegue verificando se, usando o método das causas efetivas, obtém a mesma resposta. Trata-se de confirmar que a forma que um fio, que foi deformado por ação de forças externas aplicadas nos seus extremos, assume quando está em repouso (isto é, quando há equilíbrio entre essas forças e a resistência do fio) é a mesma que minimiza a energia potencial de deformação. É o que exporemos na próxima secção.

1.8 A elástica usando causas efetivas

No apêndice *De curvis elasticis*, Euler determina uma equação para a *elástica* usando causas efetivas. Mais precisamente, procura a forma que assume um fio quando está sujeito a forças externas, aplicadas aos seus extremos, que o deformam até que a resistência do material que o constitui equilibre o efeito dessas forças e o fio fique em repouso. Começemos por observar a figura 1.8.16, de *Methodus inveniendi lineas curvas*, com que Euler pretende descrever matematicamente o que significa *estar em repouso*.

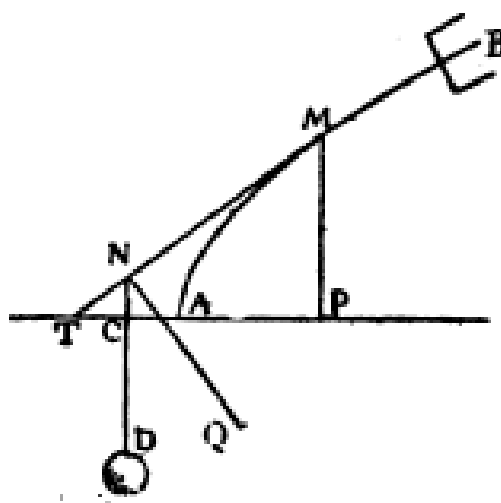


Fig.- 1.8.16

Suponhamos que o fio AB está preso pelo ponto B e que a tangente à curva AB neste ponto tem declive previamente fixado. No outro extremo, A , o fio está preso a uma barra rígida AC à qual vai ser aplicada uma força externa de intensidade constante G , na direção CD e a apontar para baixo. Esta força faz com que o fio assuma a posição curva BMA , pois o peso do fio é desprezável quando comparado com a grandeza G da força. O problema consiste em encontrar uma equação que descreva a forma que o fio assume em equilíbrio.

Euler instalou um referencial cartesiano (de eixos com direções e sentidos de dois vetores unitários $\vec{i}$ e $\vec{j}$ respetivamente) com origem em A de tal modo que a força é dada por $G\vec{j}$ para uma constante positiva G , e o eixo das abcissas contém o segmento AC . Suponhamos ainda que $\overline{AC} = c$, $\overline{AP} = x$ e $\overline{PM} = y$, de onde resulta que o ponto M tem coordenadas (x, y) e que y' é sempre não-positiva. Euler pôde então traduzir a condição de o fio estar em repouso através de duas quantidades físicas, o momento da força $G\vec{j}$ e o momento de flexão do fio por ação dessa força.

Definição 1. O momento de uma força $\vec{F}$ relativamente a um ponto O é igual à norma do produto vetorial entre o vetor $\vec{F}$ e o vetor de posição $\vec{r}$ relativamente a O de um qualquer ponto na linha de ação de $\vec{F}$.

$$\vec{M} = \vec{F} \times \vec{r}$$

isto é, $\|\vec{F}\| \cdot \|\vec{r}\| \sin \theta$, sendo θ o ângulo de $[0, \pi[$ definido pelos dois vetores.

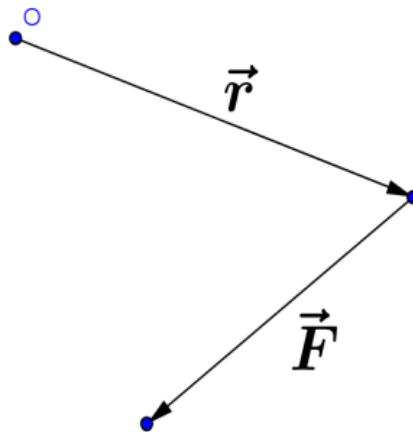


Fig.- 1.8.17

Esta quantidade traduz a capacidade que a força possui de torcer ou rodar o objeto a que está aplicada, em torno do ponto O e relativamente a um eixo imaginário na direção perpendicular ao plano definido pela força $\vec{F}$ e o vector de posição $\vec{r}$.

A flexão de um fio é a deformação que ele exhibe por ação de alguma força e que se revela pela curvatura.

Definição 2. O momento de flexão no ponto M de um fio sujeito a uma força num dos seus extremos, estando o outro extremo fixo, é dado por $\frac{\rho\Delta^2}{R}$, em que ρ e Δ são constantes, a primeira dependente do material que constitui o fio e a segunda do seu diâmetro, e R é o raio de curvatura em M .

O valor deste momento mede essencialmente a robustez e resistência do fio à dobragem que a força externa num extremo, conjugada com o constrangimento no outro extremo do fio, provoca. Euler omite qualquer justificação física para o facto de a expressão $\frac{\rho\Delta^2}{R}$ representar o momento de flexão. Essa justificação passaria por uma investigação relacionada com a estrutura do material constituinte do fio e as dimensões do diâmetro do fio em cada ponto, mas uma análise deste tipo não tinha ainda sido feita naquela época.

Voltemos à figura 1.8.16. O momento exercido pela força externa $G\vec{j}$ no ponto M é igual a $G \cdot (x + c)$, sendo G a intensidade da força e $x + c$ a distância de M à linha de ação da força. Quando o fio está em equilíbrio, o momento de $G\vec{j}$ e o momento de flexão são iguais, isto é,

$$G \cdot (x + c) = \frac{\rho\Delta^2}{R} \quad (1.8.18)$$

visto que, neste estado, o somatório das forças que atuam em cada ponto do fio é nulo. Uma vez que o raio de curvatura é dado por

$$R = \frac{[1 + y'(x)^2]^{\frac{3}{2}}}{y''(x)}$$

a igualdade (1.8.18) é

$$G \cdot (x + c) = \frac{\rho\Delta^2}{\frac{[1 + y'(x)^2]^{\frac{3}{2}}}{y''(x)}}$$

ou seja,

$$G \cdot (x + c) = \frac{\rho\Delta^2 y''(x)}{[1 + y'(x)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

cujas primitivação é imediata

$$G \cdot \left(\frac{x^2}{2} + cx + \xi \right) = \frac{\rho \Delta^2 y'(x)}{[1 + y'(x)^2]^{\frac{1}{2}}} \quad (1.8.19)$$

Sendo ξ uma constante. Elevando ao quadrado ambos os membros da equação (1.8.19),

$$G^2 \cdot \left(\frac{x^2}{2} + cx + \xi \right)^2 = \frac{\rho^2 \Delta^4 y'(x)^2}{1 + y'(x)^2}$$

podemos explicitar y'

$$y'(x)^2 = \frac{G^2 \left(\frac{x^2}{2} + cx + \xi \right)^2}{\rho^2 \Delta^4 - G^2 \left(\frac{x^2}{2} + cx + \xi \right)^2}$$

tendo em conta (veja-se (1.8.19)) que o produto $G \cdot \left(\frac{x^2}{2} + cx + \xi \right)$ é não positivo, sabendo que G é constante positiva e y' é função não positiva, concluímos que

$$dy = \frac{G \left(\frac{x^2}{2} + cx + \xi \right) dx}{\sqrt{\rho^2 \Delta^4 - G^2 \left(\frac{x^2}{2} + cx + \xi \right)^2}} \quad (1.8.20)$$

Esta equação diferencial coincide com a equação geral da elástica que deduzimos na Secção 1.7 (veja-se em 1.7.15). Efetivamente, se tomarmos

- $\alpha_1 = G\xi$
- $\beta_1 = Gc$
- $\gamma_1 = \frac{G}{2}$
- $a^4 = \rho^2 \Delta^4$

a equação (1.8.20) reescreve-se

$$dy = \frac{(\alpha_1 + \beta_1 x + \gamma_1 x^2) dx}{\sqrt{a^4 - (\alpha_1 + \beta_1 x + \gamma_1 x^2)^2}} \quad (1.8.21)$$

sendo a e γ_1 constantes não nulas. O que significa que, tal como Bernoulli conjecturou, a equação diferencial que descreve a curva que, sob certas condições, liga dois pontos e minimiza a energia potencial de deformação é igual à equação que

caracteriza a forma que um fio, ligando os dois pontos e sujeito a uma força externa nos extremos que o verga, assume quando está em equilíbrio. Mais uma vez, Euler não prova que, no contexto desta abordagem física, a equação é solúvel.

1.9 Parâmetros

Precisamos agora de resolver a equação (1.8.20). A dificuldade em o fazer e a natureza das soluções dependem naturalmente dos parâmetros. Para os fixarmos, convirá que recordemos o seu papel na equação (1.8.21) e na figura 1.8.16. Tem-se:

- $\frac{G}{2} = \gamma_1$ e $Gc = \beta_1$, logo

$$c = \frac{\beta_1}{2\gamma_1} = \overline{AC}$$

- $G\xi = \alpha_1$, e portanto

$$\xi = \frac{\alpha_1}{2\gamma_1}$$

- $\rho\Delta^2 = a^2$

- $G = \overline{CD}$, daí que $\frac{2\rho\Delta^2\gamma_1}{a^2} = \overline{CD}$.

Capítulo II: As espécies de elástica

Neste capítulo, vamos verificar como varia com os parâmetros a solução da equação diferencial

$$dy = \frac{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)dx}{\sqrt{a^4 - (\alpha + \beta x + \gamma x^2)^2}} \quad (2.1.22)$$

e a *elástica* que descreve.

2.1 Escolha do referencial

Começemos por efetuar a mudança de variável (recorde-se que γ é constante não nula)

$$X = x + \frac{\beta}{2\gamma}.$$

que tem como efeito somar a cada raiz do polinómio $\alpha + \beta x + \gamma x^2$ metade da soma das duas raízes (que é igual a $-\frac{\beta}{\gamma}$) e, desse modo, anular o coeficiente de x :

$$\alpha + \beta x + \gamma x^2 = \alpha + \beta \left(X - \frac{\beta}{2\gamma}\right) + \gamma \left(X - \frac{\beta}{2\gamma}\right)^2 = \gamma X^2 + \alpha - \frac{\beta^2}{4\gamma}$$

Com nova mudança de variável e de origem, a equação (2.1.22) transforma-se em

$$dy = \frac{x^2 + \eta}{\sqrt{a^4 - (x^2 + \eta)^2}} dx$$

e, como $a^4 - (x^2 + \eta)^2 = (a^2 - \eta - x^2)(a^2 + \eta + x^2)$, reescreve-se

$$dy = \frac{(a^2 - \mu^2 + x^2)}{\sqrt{(\mu^2 - x^2)(2a^2 - \mu^2 + x^2)}} dx \quad (2.1.23)$$

onde $\mu^2 = a^2 - \eta$. Note-se que, adotando a equação esta forma, se tem agora o coeficiente de x^2 igual a 1.

No que se segue poderemos atestar outras vantagens destas mudanças.

2.2 Considerações gerais sobre a curva solução

Na figura 2.2.24, de Euler, A é a origem do sistema de coordenadas, AE e AB definem as direções positivas dos eixos dos $xx's$ e $yy's$, respetivamente, e M é um ponto genérico da curva AMC , que satisfaz a equação (2.1.23). E obriga a que, em particular, os parâmetros a e μ sejam tais que $\mu\sqrt{2a^2 - \mu^2} \neq 0$ e $2a^2 - \mu^2 > 0$ (*) pois A (cuja abcissa é $x = 0$) pertence à curva.

Recorde-se que estamos a supor que a força externa $G\vec{j}$, de intensidade $G = \frac{2\rho\Delta^2}{a^2}$, atua segundo a direção e sentido do eixo dos $yy's$, acordado como positivo. Euler imaginou que os pontos A e B podem ser entendidos como estando ligados por uma linha de modo a ser plausível que uma força oposta a G atue em B e o fio consiga ficar em equilíbrio.

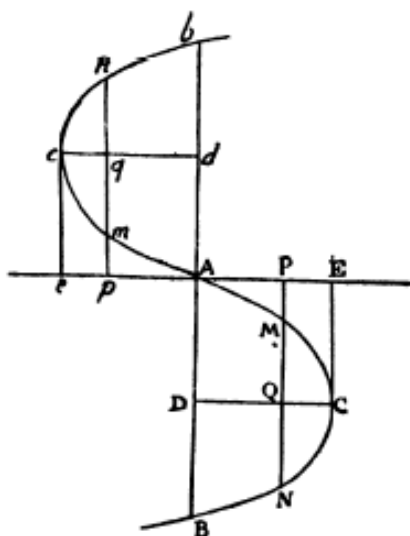


Fig.- 2.2.24

Como no numerador da equação (2.1.23) o coeficiente de x é nulo, concluímos que

$$\overline{AC} = 0$$

(veja-se a Secção 1.8) e portanto que a força externa normal a AP atua no ponto A com a direção de AD . Em A , a derivada da curva é igual a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a^2 - \mu^2}{\mu\sqrt{2a^2 - \mu^2}}$$

expressão que nos dá a tangente ao ângulo PAM que a curva AM faz com o eixo AP em A . Então, como

$$1 + tg^2(PAM) = \frac{1}{\cos^2(PAM)}$$

e PAM é um ângulo de $]0, \frac{\pi}{2}[$, temos

$$\text{sen}(PAM) = 1 - \frac{\mu^2}{a^2}.$$

Note-se agora que o ângulo PAM que a curva faz com o eixo AP no ponto A diminui à medida que a^2 decresce. Isto é, se a resistência do fio à dobragem diminui, esta é mais acentuada e M fica mais próximo do eixo dos xx 's. Por outras palavras, como a intensidade da força é $\frac{2\rho\Delta^2}{a^2}$, se a^2 diminui esperamos que o efeito da força aumente.

Da equação (2.1.23), que constitui a base do estudo que se segue, conclui-se também que, quando x se aproxima de μ , a derivada $\frac{dy}{dx}$ tende para infinito (na figura 2.2.24, o ponto correspondente à abcissa $x = \mu$ está assinalado com a letra C); a linha que contém o segmento EC é tangente à curva e $\overline{AE} = \mu$). Por outro lado, se y e x forem substituídos na equação por $-x$ e $-y$, então $\frac{dy}{dx}$ fica inalterada. Logo a curva é simétrica relativamente a A , que é um ponto de inflexão uma vez que

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2x \frac{a^4}{\left((\mu^2 - x^2)(2a^2 - \mu^2 + x^2)\right)^{\frac{3}{2}}}$$

e, portanto, a segunda derivada anula-se quando $x = 0$. Isto é, para $x \leq 0$, a curva consiste no arco Amc que é congruente com AMC mas localizado no lado oposto do eixo dos yy 's; e portanto, na figura 2.2.24 os pontos p, m, c e e são tais que $Ap = AP, pm = PM$ e $EC = ec$. Basta por isso analisar a curva para valores positivos de x .

A equação 2.1.10 permite ainda deduzir que há restrições aos valores de x . De facto, equação obriga a que se tenha

$$(\mu^2 - x^2)(2a^2 - \mu^2 + x^2) > 0.$$

e, para que este produto seja positivo, devemos ter ou

- $\mu^2 - x^2 < 0$ e $2a^2 - \mu^2 + x^2 < 0$

uma conjunção de condições impossível uma vez que, sendo $\mu^2 - x^2 < 0$, então $2a^2 - \mu^2 + x^2 = 2a^2 + (-\mu^2 + x^2)$ é uma soma de dois quadrados, logo é não-negativa;

ou

- $\mu^2 - x^2 > 0$ e $2a^2 - \mu^2 + x^2 > 0$

o que, como $2a^2 - \mu^2 > 0$ (*), significa que apenas a primeira desigualdade é uma restrição aos valores de x ; e, como $x \geq 0$, ela impõe que se tenha $x^2 < \mu^2$, isto é, que $0 \leq x < \mu$ e que a curva está contida entre as retas EC e ec .

Vejamos agora em que condições pode a curva ir além do ponto C (ou, por simetria, além do ponto c). Consideremos a reta que contém o segmento CD , paralela a AE (figura 2.2.24), como um eixo (em vez do eixo dos xx 's mas com igual orientação) e a origem em Q . Neste novo referencial, denotemos $\overline{CQ} = t$ e $\overline{QM} = u$; então $x + t = \overline{AE} = \overline{CD} = \mu$ e $y + u = \overline{CE} = \overline{AD} = \omega$. Logo $x = \mu - t$, $y = \omega - u$, $dy = -du$ e $dx = -dt$. Esta mudança equivale a transferir a origem do referencial para o ponto $C(\mu, \omega)$ e inverter o sentido dos eixos. Efetivando esta mudança de variável na equação (2.1.23), obtemos uma nova equação da curva em função das novas coordenadas t e u :

$$du = \frac{(a^2 - 2\mu t + t^2)dt}{\sqrt{t(2\mu - t)(2a^2 - 2\mu t + t^2)}} \quad (2.2.25)$$

Se t é suficientemente pequeno, então a equação (2.2.25) é aproximadamente

$$du = \frac{a^2 dt}{\sqrt{2\mu t(2a^2)}}$$

isto é,

$$du = \frac{a dt}{2\sqrt{\mu t}}$$

e portanto $u = a\sqrt{\frac{t}{\mu}}$. O que indica que, na figura 2.2.24, o arco da curva entre os pontos C e N é idêntico ao que liga C e M : são ambos arcos da parábola $u^2 = a^2 \frac{t}{\mu}$, que é simétrica relativamente a DC . Ou seja, perto de C a curva elástica é aproximadamente uma parábola.

Por outro lado, se supusermos que x está próximo de zero, a equação original (2.1.23) reescreve-se como

$$dy = \frac{(a^2 - \mu^2)}{\sqrt{(\mu^2)(2a^2 - \mu^2)}} dx$$

$$dy = \frac{(a^2 - \mu^2)}{\mu\sqrt{(2a^2 - \mu^2)}} dx$$

logo

$$y = \frac{(a^2 - \mu^2)}{\mu\sqrt{(2a^2 - \mu^2)}} x.$$

Trata-se da equação de uma reta, o que significa que, perto de A a curva é aproximadamente linear. Note-se que, sendo A ($x = 0$) um ponto de inflexão, o raio de curvatura neste ponto é infinitamente grande $R = \frac{[1+y'(x)^2]^{\frac{3}{2}}}{y''(x)}$ e a curvatura nula.

Recorde-se que, por simetria, se substituirmos por cd (figura 2.2.24) o segmento de reta CD , assim como a curva Acb em vez de ACB , a conclusão é análoga. Assim, toda a curva elástica fica determinada se conhecermos apenas a pequena porção AMC . Podemos resumir estas considerações dizendo que a curva que é solução da equação (2.1.23) é simétrica relativamente às retas cd e DC .

Naturalmente, poderíamos agora procurar a solução da equação diferencial com condição inicial B . As considerações que fizemos anteriormente mantêm-se válidas, o que significa que o pedaço de curva elástica que analisámos se estende periodicamente a partir de B . Note-se, contudo, que esta análise qualitativa só é válida nas hipóteses da figura 2.2.24.

2.3 Resolução aproximada da equação

Apesar de estas considerações serem relevantes, por nos permitirem intuir sobre a forma da curva elástica, o ideal seria obter a solução da equação explicitamente. De facto, se conhecermos a distância $\overline{AE} = \mu$ e pudermos integrar a equação

$$dy = \frac{(a^2 - \mu^2 + x^2) dx}{\sqrt{(\mu^2 - x^2)(2a^2 - \mu^2 + x^2)}},$$

determinamos a distância EC , ou seja, a função y . De igual modo, integrando a equação

$$ds = \frac{a^2 dx}{\sqrt{(\mu^2 - x^2)(2a^2 - \mu^2 + x^2)}},$$

que se obtém da anterior usando a igualdade $ds^2 = dx^2 + dy^2$, ficamos a conhecer o valor do comprimento de arco AC . Lamentavelmente não é possível integrar em termos elementares nenhuma destas equações diferenciais na sua forma geral.

Para contornar este problema, Euler considerou o desenvolvimento em série de Taylor em torno de zero das funções integrandas, para valores de x entre 0 e μ , o que lhe permitiu obter expressões aproximadas para o comprimento do segmento AD (que designaremos por $\overline{AD}$) e do arco AC (que se denotará por $\overline{AC}$). Analisemos este procedimento em detalhe.

Denotemos por z a raiz $\sqrt{\mu^2 - x^2}$. Então

$$PM = y(x) = \int \frac{(a^2 - z^2) dx}{z\sqrt{2a^2 - z^2}}$$

e

$$AM = s(x) = \int \frac{a^2 dx}{z\sqrt{2a^2 - z^2}}.$$

O desenvolvimento da função $\frac{1}{\sqrt{2a^2 - z^2}}$ em série de Taylor em torno de zero é dado por

$$\frac{1}{\sqrt{2a^2 - z^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}a} \left(1 + \frac{1}{4} \frac{z^2}{a^2} + \frac{1 \times 3}{4 \times 8} \frac{z^4}{a^4} + \frac{1 \times 3 \times 5}{4 \times 8 \times 12} \frac{z^6}{a^6} + \dots \right)$$

para valores de z no intervalo $]-\sqrt{2} a, \sqrt{2} a[$, logo

$$s = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \left(\frac{a}{z} + \frac{1}{4} \frac{z}{a} + \frac{1 \times 3}{4 \times 8} \frac{z^3}{a^3} + \frac{1 \times 3 \times 5}{4 \times 8 \times 12} \frac{z^5}{a^5} + \dots \right) dx.$$

Como

$$s - y = \int \frac{z^2 dx}{z \sqrt{2a^2 - z^2}} = \int \frac{z dx}{\sqrt{2a^2 - z^2}},$$

tem-se

$$s - y = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \left(\frac{z}{a} + \frac{1}{4} \frac{z^3}{a^3} + \frac{1 \times 3}{4 \times 8} \frac{z^5}{a^5} + \frac{1 \times 3 \times 5}{4 \times 8 \times 12} \frac{z^7}{a^7} + \dots \right) dx$$

daí que

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \left(\frac{a}{z} + \frac{1}{4} \frac{z}{a} + \frac{1 \times 3}{4 \times 8} \frac{z^3}{a^3} + \frac{1 \times 3 \times 5}{4 \times 8 \times 12} \frac{z^5}{a^5} + \dots \right) dx \\ - \frac{1}{\sqrt{2}} \int \left(\frac{z}{a} + \frac{1}{4} \frac{z^3}{a^3} + \frac{1 \times 3}{4 \times 8} \frac{z^5}{a^5} + \frac{1 \times 3 \times 5}{4 \times 8 \times 12} \frac{z^7}{a^7} + \dots \right) dx.$$

Integrando termo a termo a série de s , obtemos

$$\int_0^\mu \frac{1}{z} dx = \int_0^\mu \frac{1}{\sqrt{\mu^2 - x^2}} dx = \arcsen\left(\frac{x}{\mu}\right) \Big|_0^\mu = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^\mu z dx = \int_0^\mu \sqrt{\mu^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} \frac{\pi \mu^2}{2}$$

$$\int_0^\mu z^3 dx = \int_0^\mu \left(\sqrt{\mu^2 - x^2} \right)^3 dx = \frac{1 \times 3}{2 \times 4} \frac{\pi}{2} \mu^4$$

$$\int_0^\mu z^5 dx = \int_0^\mu \left(\sqrt{\mu^2 - x^2} \right)^5 dx = \frac{1 \times 3 \times 5}{2 \times 4 \times 6} \frac{\pi}{2} \mu^6$$

$$\int_0^\mu z^7 dx = \int_0^\mu \left(\sqrt{\mu^2 - x^2} \right)^7 dx = \frac{1 \times 3 \times 5 \times 7}{2 \times 4 \times 6 \times 8} \frac{\pi}{2} \mu^8$$

etc.

Com a ajuda destes integrais podemos então escrever

$$\overline{AC} = \frac{\pi a}{2\sqrt{2}} \left(1 + \frac{1^2}{2^2} \times \frac{\mu^2}{2a^2} + \frac{1^2 \times 3^2}{2^2 \times 4^2} \times \frac{\mu^4}{4a^4} + \frac{1^2 \times 3^2 \times 5^2}{2^2 \times 4^2 \times 6^2} \times \frac{\mu^6}{8a^6} + \dots \right) \quad (2.3.26)$$

e

$$\overline{AD} = \frac{\pi a}{2\sqrt{2}} \left(1 - \frac{1^2}{2^2} \times \frac{3}{1} \times \frac{\mu^2}{2a^2} - \frac{1^2 \times 3^2}{2^2 \times 4^2} \times \frac{5}{3} \times \frac{\mu^4}{4a^4} - \frac{1^2 \times 3^2 \times 5^2}{2^2 \times 4^2 \times 6^2} \times \frac{7}{5} \times \frac{\mu^6}{8a^6} - \dots \right). \quad (2.3.27)$$

Graças a estas fórmulas, conhecidos os valores de $\overline{AD}$ e de μ , podemos determinar valores aproximados do comprimento $\overline{AC}$ do arco AC e a constante a . Inversamente, dado o comprimento do arco AC e a constante a , é possível calcular aproximações das distâncias AD e AE , uma vez que $\overline{AE} = \overline{CD} = \mu$.

2.4 Classificação das curvas elásticas

Variando os parâmetros a e μ da equação (2.1.23)

$$dy = \frac{(a^2 - \mu^2 + x^2)}{\sqrt{(\mu^2 - x^2)(2a^2 - \mu^2 + x^2)}} dx$$

Euler descreveu os diferentes tipos de curvas elásticas que, à semelhança da classificação de Lineu para os géneros botânicos, designou por *espécies*. As diferentes espécies de curvas elásticas foram obtidas considerando a amplitude do ângulo PAM (figura 2.2.24) a variar entre -90° e 90° . Esse procedimento é equivalente a representar as configurações assumidas pelo fio AB à medida que a intensidade da força G , exercida no ponto A , aumenta.

1ª Espécie

Suponhamos que μ é uma constante muito próxima de zero, de tal forma que o quociente $\frac{\mu^2}{a^2}$ é muito pequeno. Então o ângulo PAM na figura 2.2.24 mede aproximadamente 90° , visto que $\text{sen}(PAM) = 1 - \frac{\mu^2}{a^2}$ é aproximadamente igual a 1. Nestas condições, como x não pode ser maior do que μ ,

- o fio ACB tem uma curvatura pequena, é quase um segmento de reta vertical;
- as expressões $a^2 - \mu^2 + x^2$ e $2a^2 - \mu^2 + x^2$ são aproximadamente a^2 e $2a^2$ e a equação (2.1.23) está próxima de

$$dy = \frac{a \, dx}{\sqrt{2(\mu^2 - x^2)}}.$$

E portanto, para $-\mu \leq x \leq \mu$,

$$y(x) = \frac{a}{\sqrt{2}} \arcsen\left(\frac{x}{\mu}\right)$$

descreve aproximadamente o arco da curva elástica que contém A e se situa entre os pontos c e C . É o que se representa na figura 2.4.29.

Note-se que, neste caso, o arco AD mede aproximadamente $\frac{\pi a}{2\sqrt{2}}$ (veja-se a igualdade 2.3.27) e, visto que o ângulo DAM é muito pequeno, também o comprimento do arco AC está próximo deste valor. Logo a força $\frac{2\rho\Delta^2}{a^2}$ necessária para produzir esta curvatura muito pequena do fio, é aproximadamente igual a

$$\frac{2\rho\Delta^2}{\frac{8\overline{AC}^2}{\pi^2}} = \frac{\rho\Delta^2}{\overline{AC}^2} \cdot \frac{\pi^2}{4} \quad (2.4.28)$$

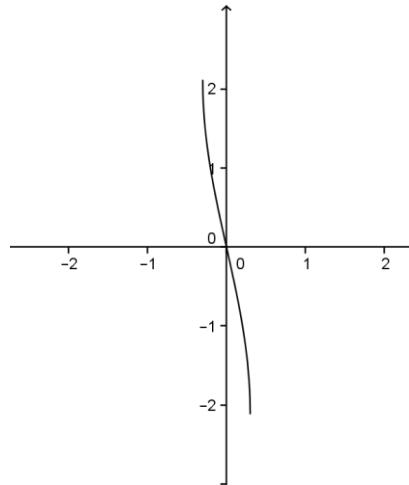


Fig.- 2.4.29

2ª Espécie

Se $0 < \varepsilon < \frac{\mu^2}{\alpha^2} < 1$, então a amplitude do ângulo PAM é positiva mas menor do que 90° e a curva tem a forma que se representa na figura seguinte.

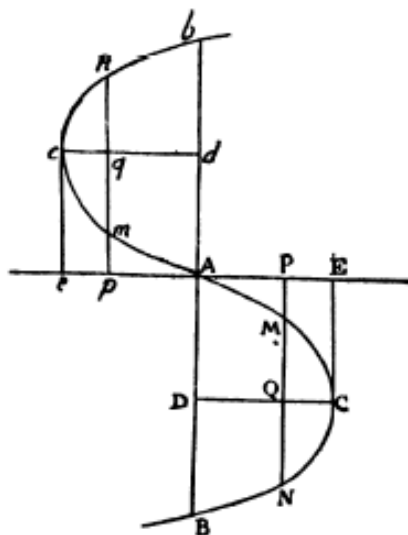


Fig.- 2.4.30

O ângulo DAM mede menos do que 90° pois o seu *coseno*, que é igual ao *seno* do ângulo PAM , vale $1 - \frac{\mu^2}{a^2}$, sendo $0 < 1 - \frac{\mu^2}{a^2} < 1$. Note-se ainda que, como $\mu < a$, se tem $\frac{\mu^2}{2a^2} < \frac{1}{2}$, logo a série que define $\overline{AC}$ na igualdade 2.3.26 é convergente. Além disso, como $\frac{\mu^2}{2a^2} > 0$, tem-se

$$\overline{AC} > \frac{\pi a}{2\sqrt{2}},$$

ou seja, $a^2 < \frac{8\overline{AC}^2}{\pi^2}$. Por outras palavras, a força necessária para que o fio assumia a forma da figura anterior $\frac{2\rho\Delta^2}{a^2}$ é superior à que produz as curvas de 1ª espécie, visto que neste caso a^2 é menor.

3ª Espécie

Se $a = \mu$, então o ângulo PAM tem amplitude zero, visto que $\sin PAM = 1 - \frac{\mu^2}{a^2} = 0$. A curva correspondente é a chamada *elástica retangular*, que já tinha sido obtida por Jakob Bernoulli e é descrita pela equação diferencial

$$dy = \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^4 - x^4}}.$$

e

$$ds = \frac{a^2 dx}{\sqrt{a^4 - x^4}}$$

A condição $a = \mu$ não é genérica (é rara de acontecer na realidade) e não é robusta (é fácil de destruir). Além disso, a função $\frac{x^2}{\sqrt{a^4 - x^4}}$ não tem primitiva elementar [Y], logo não temos uma fórmula explícita para $y = y(x)$. Contudo, das igualdades (2.3.26) e (2.3.27) para este caso,

$$\overline{AC} = \frac{\pi a}{2\sqrt{2}} \left(1 + \frac{1^2}{2^2} \times \frac{1}{2} + \frac{1^2 \times 3^2}{2^2 \times 4^2} \times \frac{1}{4} + \frac{1^2 \times 3^2 \times 5^2}{2^2 \times 4^2 \times 6^2} \times \frac{1}{8} + \dots \right)$$

e

$$\overline{AD} = \frac{\pi a}{2\sqrt{2}} \left(1 - \frac{1^2}{2^2} \times \frac{3}{1 \times 2} - \frac{1^2 \times 3^2}{2^2 \times 4^2} \times \frac{5}{3 \times 4} + \frac{1^2 \times 3^2 \times 5^2}{2^2 \times 4^2 \times 6^2} \times \frac{7}{5 \times 8} - \dots \right)$$

Euler deduziu (provavelmente a partir de tabelas com valores aproximados das somas parciais deste tipo de séries) que $\overline{AC}$ é aproximadamente igual a $\frac{5a\pi}{12}$, logo a intensidade da força necessária para originar esta curva é aproximadamente igual a

$$\frac{2\rho \Delta^2}{a^2} = \frac{2\rho \Delta^2}{144 \overline{AC}^2} 25\pi^2 = \frac{\rho \Delta^2}{\overline{AC}^2} \frac{25\pi^2}{72}.$$

A curva tem a forma representada na figura 2.4.31

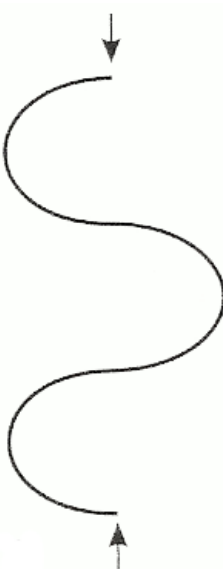


Fig.- 2.4.31

4ª Espécie

Suponhamos agora que $a < \mu$. Neste caso, $\sin PAM = 1 - \frac{\mu^2}{a^2} < 0$ e portanto o ângulo PAM tem amplitude negativa. Note-se que, como $\mu > a$, a curva eleva-se acima do eixo AE , isto é, o ponto M está no quarto quadrante. Além disso, à medida que $\frac{\mu^2}{a^2}$ aumenta, a distância entre A e B diminui. A curva tem agora forma da figura 2.4.32.

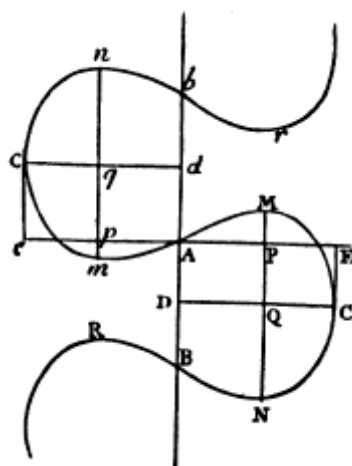


Fig.- 2.4.32

5ª Espécie

Enquanto se mantém a desigualdade $a < \mu$, o valor do quociente $\frac{\mu^2}{a^2}$ pode crescer, embora tenha de estar garantido que $\frac{\mu^2}{a^2} \leq 2$. À medida que $\frac{\mu^2}{a^2}$ aumenta, o valor da distância entre A e B decresce porque a amplitude do ângulo PAM é negativa e a curva é simétrica relativamente a CD . No limite, os pontos A e B coincidem e a distância AD é zero. Euler usou a igualdade 2.3.27 para determinar uma aproximação do valor ζ que $\frac{\mu^2}{a^2}$ tem nesse momento, e obteve 1.651868, o que correspondente a um ângulo PAM de cerca de $-40^\circ 41'$. A curva que o fio forma é agora uma lemniscata, tendo o ângulo MAN amplitude aproximadamente igual a $81^\circ 22'$ (o dobro de $40^\circ 41'$).

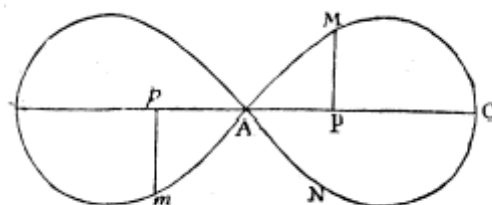


Fig.- 2.4.33

6ª Espécie

Se as duas extremidades A e B do fio, depois de coincidirem, forem sujeitas a uma força mais forte, isto é, se

$$2 \geq \frac{\mu^2}{a^2} > \zeta$$

deslocar-se-ão em sentidos opostos e a curva assume a forma representada na figura 2.4.34 que se segue, onde a amplitude do ângulo PAM está entre -90° e $-40^\circ 41'$.

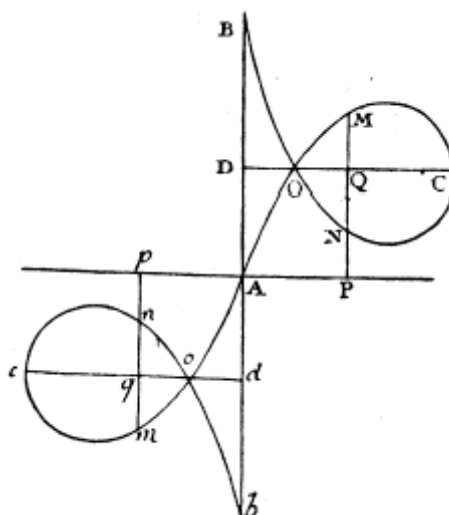


Fig.- 2.4.34

7ª Espécie

Suponhamos agora que os parâmetros a e μ verificam a condição $\mu^2 = 2a^2$. Nesse caso, a equação 2.1.23

$$dy = \frac{(a^2 - \mu^2 + x^2)}{\sqrt{(\mu^2 - x^2)(2a^2 - \mu^2 + x^2)}} dx$$

reduz-se a

$$dy = \frac{x^2 - a^2}{x\sqrt{2a^2 - x^2}} dx \quad (**)$$

Se, na série (2.3 26), substituirmos μ^2 por $2a^2$, obtemos

$$\overline{AC} = \frac{\pi a}{2\sqrt{2}} \left(1 + \frac{1^2}{2^2} + \frac{1^2 \times 3^2}{2^2 \times 4^2} + \frac{1^2 \times 3^2 \times 5^2}{2^2 \times 4^2 \times 6^2} + \dots \right)$$

que é uma série de termo geral dado por

$$u_0 = \frac{\pi a}{2\sqrt{2}}$$

$$u_1 = \frac{\pi a}{2\sqrt{2}} \left(\frac{1^2}{2^2} \right)$$

$$u_n = \frac{\pi a}{2\sqrt{2}} \left(\frac{1^2 \times 3^2 \times 5^2 \times \dots \times (2n-1)^2}{2^2 \times 4^2 \times 6^2 \times \dots \times (2n)^2} \right).$$

Note-se que, para todo o natural n ,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+3)^2}{(2n+2)^2} \geq 1,$$

e, portanto, a sucessão $(u_n)_n$ é crescente, com $u_1 > 0$. Logo o limite de $(u_n)_n$ não é zero, e portanto a série diverge. O que significa que os arcos AMC e BNC têm agora comprimento infinito (mas, naturalmente, o fio ocupa apenas uma parte limitada desta curva).

A equação (**) pode ser integrada em termos elementares. Façamos a mudança de variável

$$x = \sqrt{2} a \operatorname{sen}(\theta)$$

para valores de θ no intervalo $]0, \frac{\pi}{2}[$. Desse modo, o cálculo de uma primitiva de

$$\frac{x^2 - a^2}{x\sqrt{2a^2 - x^2}}$$

corresponde à determinação de uma primitiva, na variável θ , de

$$-\sqrt{2}a \operatorname{sen}(\theta) - \frac{a}{\sqrt{2} \operatorname{sen}(\theta)}.$$

Uma primitiva é

$$-\sqrt{2}a \cos(\theta) - \frac{a}{\sqrt{2}} \log |\operatorname{cosec}(\theta) - \cot g(\theta)|$$

que na variável x corresponde a

$$y(x) = -\sqrt{2a^2 - x^2} - \frac{a}{\sqrt{2}} \log \left| \frac{\sqrt{2}a - \sqrt{2a^2 - x^2}}{x} \right|.$$

A curva solução é a que se ilustra na Figura que se segue. O traço é obtido como reunião do gráfico da função $y = y(x)$ dada pela expressão acima (que tem concavidade voltada para cima, ou seja, está definida num intervalo onde a segunda derivada de y mantém o sinal positivo) com o seu simétrico relativamente ao eixo dos x 's. O ponto D é a origem do referencial e $x = \overline{DQ}$, $y = \overline{QM}$ são as coordenadas de um ponto genérico M da curva. O traço da curva intersecta o eixo DC no ponto C e no ponto O , as soluções da equação $y(x) = 0$. Usando tabelas de logaritmos, Euler obteve a aproximação $x \simeq 0.2884191 \mu$ para a abcissa do ponto O .

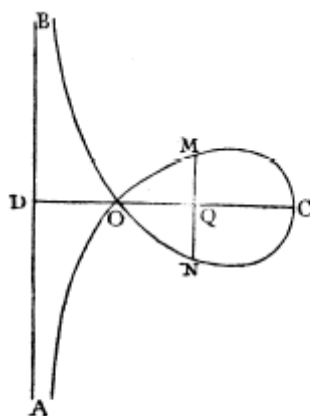


Fig.- 2.4.35

8ª Espécie

Trata-se agora de estudar o caso em que $\mu^2 > 2a^2$. Substituindo μ^2 por $2a^2 + g^2$, para algum $g > 0$, ou seja, se $a^2 = \frac{\mu^2 - g^2}{2}$, então a equação (2.1.23) toma a forma

$$dy = \int \frac{(x^2 - \frac{1}{2}\mu^2 - \frac{1}{2}g^2)}{\sqrt{(\mu^2 - x^2)(x^2 - g^2)}} dx.$$

Os valores (positivos) de x devem variar (estritamente) entre g e μ , uma vez que têm de verificar a desigualdade $(\mu^2 - x^2)(x^2 - g^2) > 0$ e que $0 < g < \mu$. Euler conclui experimentalmente que a curva tem a forma da figura 2.4.36. Note-se que as séries (2.3.26) e (2.3.27), que constituem a base da sua investigação, já não são válidas neste contexto pois as séries que as definem divergem. Contudo, os arcos GNC e HMC têm comprimento finito. As curvas solução, obtidas a partir de condições iniciais distintas, unem-se e formam infinitos laços, embora no fio vejamos apenas um número finito deles.

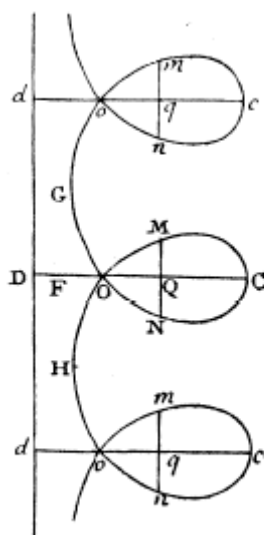


Fig.- 2.4.36

9ª Espécie

Partindo das curvas de 8ª Espécie, consideremos a situação extrema em que μ e g tendem ambos para infinito mas a sua diferença h é finita. Isso corresponde essencialmente a manter a força que atua nos extremos mas a supor que a resistência do fio está a aumentar para valores arbitrariamente grandes. Para encontrar a configuração que, nestas circunstâncias, o fio assume, reescrevamos

$$g = \mu - 2h$$

onde $h > 0$. Recorde-se que x varia (estritamente) entre g e μ ; por isso, podemos fazer a mudança da origem do referencial de modo que se tenha, para h constante,

$$x = \mu - h - t$$

onde $-h < t < h$. Então, como os termos $2h^2$, t^2 e $2ht$ são muito pequenos quando comparados com μ ,

$$\frac{\mu^2}{2} + \frac{g^2}{2} = \mu^2 - 2\mu h + 2h^2 \approx \mu^2 - 2\mu h$$

$$x^2 - \frac{\mu^2}{2} - \frac{g^2}{2} = \mu^2 - 2\mu h + h^2 + t^2 - 2\mu t + 2ht - \mu^2 + 2\mu h \approx -2\mu t$$

$$\mu^2 - x^2 = \mu^2 - \mu^2 + 2\mu h - h^2 - t^2 + 2\mu t - 2ht \approx 2\mu(h + t)$$

$$x^2 - g^2 = \mu^2 - 2\mu h + h^2 + t^2 - 2\mu t + 2ht - \mu^2 + 4\mu h - 4h^2 \approx 2\mu(h - t)$$

e, portanto, a equação

$$dy = \int \frac{\left(x^2 - \frac{1}{2}\mu^2 - \frac{1}{2}g^2\right)}{\sqrt{(\mu^2 - x^2)(x^2 - g^2)}} dx$$

é, na nova variável t , aproximadamente

$$dy = \frac{-2\mu t dt}{\sqrt{2\mu(h + t)2\mu(h - t)}}$$

ou seja

$$dy = \frac{-t dt}{\sqrt{h^2 - t^2}}.$$

Esta equação tem como solução

$$y(t) = \sqrt{h^2 - t^2}$$

ou seja, por simetria da curva,

$$y^2 + t^2 = h^2$$

que é a equação cartesiana da circunferência no plano t, y centrada em $(0,0)$ e de raio h . O que significa que, neste caso, os extremos do fio unem-se e ele curva-se numa circunferência.

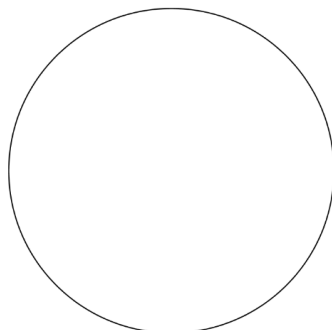


Fig.- 2.4.37

A figura que se segue resume as conclusões a que chegámos nesta secção

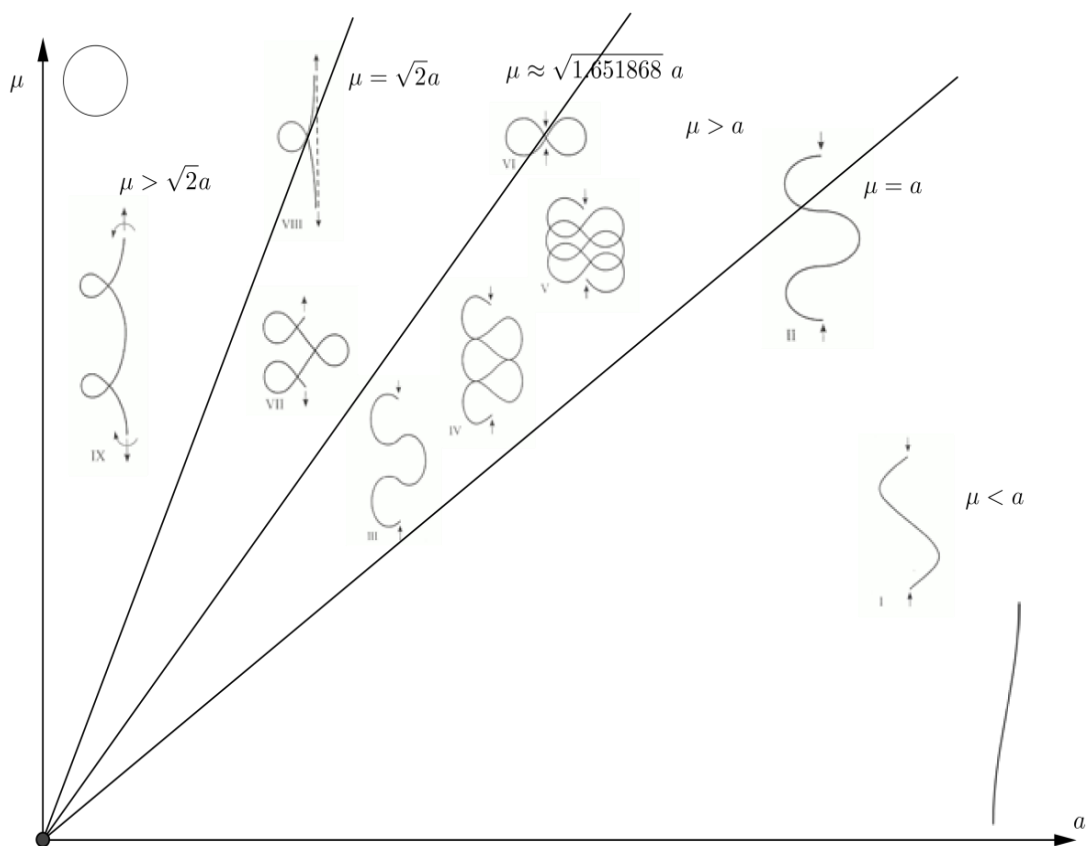


Fig.- 2.4.38

2.5 Aplicação

Uma vez enumeradas todas as espécies de curvas elásticas, dada uma destas curvas é simples determinar a espécie a que pertence. Imaginemos que um fio elástico está fixo numa parede no ponto G e que, no outro extremo (que designamos por A), está apoiado um peso P de tal modo que o fio assume a forma GA (Figura 2.4.39).

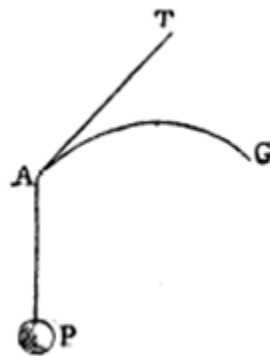


Fig.- 2.4.39

Consideremos a tangente AT à curva AG no ponto A . Tal como foi descrito na Secção 2.4, a espécie a que pertence cada curva depende dos diferentes valores que pode tomar o ângulo TAP . Nomeadamente:

1. Se o ângulo TAP for agudo, a curva é de 2ª espécie.
2. Se o ângulo TAP for reto, a curva é de 3ª espécie e portanto uma *elástica retangular*.
3. Se o ângulo TAP for obtuso mas menor do que aproximadamente $130^\circ 41'$, então a curva é de 4ª espécie.
4. Se o ângulo TAP for igual a cerca de $130^\circ 41'$, então a curva é de 5ª espécie.
5. Se o ângulo TAP for obtuso mas maior do que aproximadamente $130^\circ 41'$, então a curva é de 6ª espécie.

6. Se o ângulo TAP valer 180° , temos uma curva de 7ª espécie (mas, na prática, esta classe e as seguintes não podem ser obtidas apenas colocando um peso no ponto A do fio).

2.6 Comentário final

No trabalho de Euler, há duas formas de encarar o problema de determinar uma curva elástica. Ambos conduzem à equação diferencial

$$dy = \frac{(a^2 - \mu^2 + x^2)}{\sqrt{(\mu^2 - x^2)(2a^2 - \mu^2 + x^2)}} dx$$

cujas soluções Euler classificou de um ponto de vista meramente matemático sem, contudo, se esquecer da sua interpretação física. Por isso, teve em atenção que a origem do problema é um fio feito de algum tipo de material e, portanto, que a configuração da curva solução da equação diferencial depende desse material e da força G que provoca a deformação. Mesmo quando considera que a força tem intensidade infinita e que a curva deixa de ter pontos extremos, Euler parece tão interessado na solução matemática da equação diferencial como na informação que ela dá para o problema real, sobre a deformação do fio. Assim temos uma curva *híbrida*, visto que é um objeto com identidade física mas, por vezes, apenas com existência matemática.

Por outras palavras, ao classificarmos as soluções da equação diferencial, a teoria é independente de qualquer interpretação mecânica. No entanto, as variáveis da equação que foi estudada têm um significado físico: são a *intensidade da força* exercida sobre o fio e o *deslocamento lateral do fio* (ou seja, o valor mínimo e máximo que pode ter a abcissa de qualquer ponto da curva). O propósito de Euler, ao classificar as diferentes espécies de curvas elásticas, foi o de as enumerar tal como Newton tinha feito com as curvas algébricas. Porém, Euler foi mais longe: desenvolveu uma teoria matemática que tem uma interpretação física. Por exemplo, as curvas de 1ª espécie são, do ponto de vista dos parâmetros, indistinguíveis das de 2ª espécie, mas do ponto de vista físico é essencial considerá-las separadamente. Como veremos na próxima secção, é a abordagem relativa à elástica de 1ª espécie que permite entender o comportamento de colunas sujeitas a forças de compressão, como uma palmeira sob o peso do seu tronco e da folhagem que o encima.

Capítulo III: Colunas

Euler discutiu a estabilidade de uma coluna na secção *De vi columnarum* (*Sobre a força das colunas*) da obra *De curvis elasticis* [Ol, Du]. O problema consiste em determinar a força mínima necessária para deformar uma coluna cilíndrica com uma altura e largura dadas. Trata-se de um exemplo de aplicação à física e à engenharia de um resultado matemático notável e mostra que, na época em que Euler escreveu este tratado, a separação entre a física e a matemática não era tão acentuada como atualmente.

3.1 A robustez das colunas

Quando a altura da coluna é muito maior do que o seu diâmetro, este problema é semelhante ao de determinar a força mínima necessária para curvar um fio elástico vertical com comprimento dado. Neste contexto, e tal como nas curvas elásticas, Euler considerou o peso das colunas desprezável. Ora, quando estudámos as curvas de 1ª espécie, utilizámos a expressão (2.4.29)

$$P = \frac{\rho \Delta^2}{\overline{AC}^2} \cdot \frac{\pi^2}{4} \quad (3.1.40)$$

que define a força mínima necessária para produzir uma ligeira flexão no fio. Recorde-se que, na Secção 2, ρ e Δ^2 eram dois parâmetros, que dependiam do material que constitui o fio e da sua espessura, cujo produto se designa *elasticidade absoluta* do fio; e que $\overline{AC}$ denota o comprimento de arco da curva AC . Euler não apresenta uma justificação para esta fórmula; admitimos que se trate de uma lei experimental, deduzida através da comparação de vários tipos de fios. Euler estudou a aplicabilidade desta fórmula a colunas com uma base fixa e com um peso P a atuar no outro extremo na direção do eixo da coluna.

Imaginemos que uma coluna AB (Figura 3.1.41) de altura L sustém um peso P que atua segundo a direção vertical, de modo que o extremo A da coluna está fixo e a força P atua na extremidade livre B .



Fig.- 3.1.41

Se a coluna for tal que a força P não lhe pode provocar um deslizamento, então a coluna poderá manter-se direita, sofrer uma ligeira flexão ou dobrar. Se a coluna tiver estas características é considerada elástica.

Apliquemos, como fez Euler, a fórmula (2.4.29) a uma coluna de altura nestas condições. A fórmula (3.1.40) é, neste contexto,

$$P = \frac{\rho \Delta^2}{L^2} \cdot \frac{\pi^2}{4} \quad (3.1.42)$$

onde L designa a altura da coluna. O que nos permite desde já concluir que o peso máximo que uma coluna pode sustentar sem dobrar é inversamente proporcional ao quadrado do seu comprimento. Qualquer força com intensidade inferior à da fórmula (3.1.42) não conseguirá mover a coluna da sua posição vertical. Por outro lado, se a força for superior a P , a coluna será incapaz de resistir a ser dobrada.

A fórmula (3.1.42) é utilizada atualmente em engenharia e é conhecida como *carga crítica de Euler*. À força P , da mesma fórmula, passou a chamar-se *força crítica*

$$P_{crítica} = \frac{\rho \Delta^2}{L^2} \cdot \frac{\pi^2}{4}$$

e:

- Se $P \leq P_{crítica}$, a coluna após a aplicação da força, assume a posição de equilíbrio inicial, na vertical. Dizemos então que o sistema é *estável*.
- Se, pelo contrário, $P > P_{crítica}$, a coluna afasta-se da posição inicial e estabiliza numa nova posição de equilíbrio após ter fletido. O sistema diz-se *instável*.
- Se $P = P_{crítica}$, a coluna sofre uma flexão pequena, isto é, após a perturbação, quando a coluna volta à sua posição de equilíbrio, está numa posição ligeiramente diferente da vertical.

A importância da fórmula (3.1.42) em engenharia justifica-se: ela permite saber quão estável é uma estrutura vertical que suporta uma força axial. Na prática, isto traduz-se em conhecer previamente qual a capacidade que uma coluna tem de suportar determinado peso sem sofrer uma mudança abrupta na sua configuração.

A figura que se segue ilustra o que acabou de ser escrito.

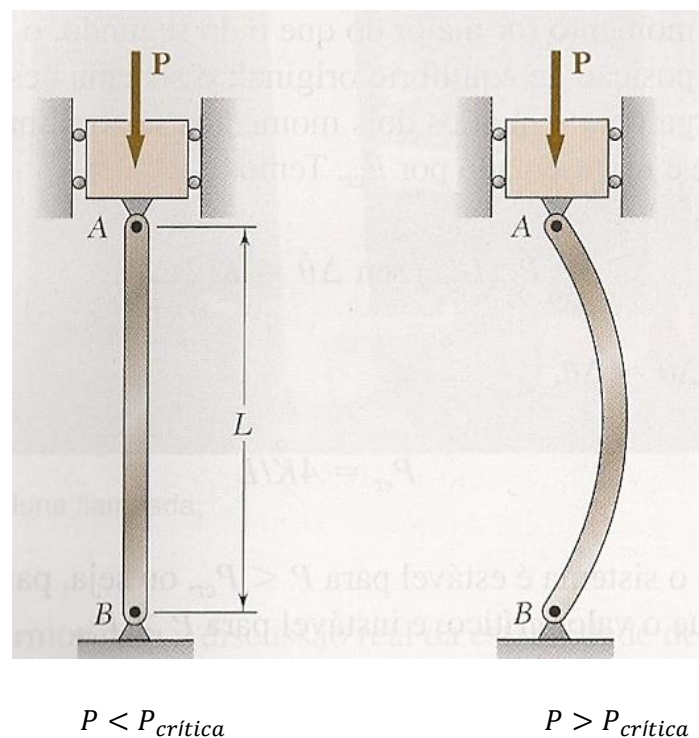


Fig.- 3.1.43

Além da obra *De curvis elasticis*, Euler publicou três artigos sobre colunas, apresentados na Academia de S. Petersburgo em 1757 e 1778 (os dois últimos). Tratam do problema da altura máxima que deverá ter uma coluna de modo a não arquear devido ao seu peso. Euler resolveu este problema relacionando a altura da coluna com o seu diâmetro. Lagrange [L] prosseguiu o trabalho de Euler de modo a, fixado um valor para a altura, determinar a forma da coluna mais robusta. Este problema foi resolvido por J. B Keller em 1960 [K]: a coluna mais forte é a que é adelgada no cimo e tem como secção um triângulo equilátero.

3.2 A robustez das árvores

As conclusões referidas no parágrafo anterior podem ser aplicadas a árvores se os seus troncos são aproximadamente colunas cilíndricas ou cónicas. Em 1881, o matemático A. G. Greenhill analisou, no artigo [G1], qual deve ser a altura máxima, digamos $l_{crítica}$, que pode ter uma árvore deste tipo, conhecidos o diâmetro e o peso por unidade de volume, de modo a não arquear devido ao seu peso. Deduziu a fórmula seguinte:

$$l_{crítica} = 0.851 \left| \frac{E}{\rho} \right|^{\frac{1}{3}} d^{\frac{2}{3}} \quad (3.2.44)$$

onde d representa o diâmetro da árvore à altura do peito (isto é, a cerca de 1,30 m de altura do tronco), E representa a elasticidade da madeira (um valor médio da capacidade do material em recuperar de deformações, obtido através de testes em árvores vivas)¹ [G1] e ρ é o peso por unidade de volume. A fórmula (3.2.44) foi obtida supondo-se que a força P , o peso da árvore, atua no seu centro de massa. Se admitirmos que a força devida ao peso atua de forma distribuída sobre toda a coluna, a altura crítica é dada por

$$l_{crítica} = 0.792 \left| \frac{E}{\rho} \right|^{\frac{1}{3}} d^{\frac{2}{3}} \quad (3.2.45)$$

¹ Nos laboratórios do Departamento de Física e Astronomia da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto há módulos interativos que permitem determinar a elasticidade de vários materiais. O seu uso é parte da componente experimental de uma unidade curricular do segundo ano da licenciatura em Física. [Informação do Prof. Manuel J. B. Marques, DFA_FCUP.]

fórmula que é qualitativamente idêntica à anterior, apenas a constante inicial diminuiu (o que significa que o valor crítico da altura baixou)

A. G. Greenhill demonstrou ainda em [G1] que, se a forma da coluna passar de cilíndrica a cônica, ou assumir a forma de um parabolóide de revolução, a fórmula (3.2.44) permanece válida, alterando-se contudo o valor da constante. Em resumo: trata-se de uma fórmula independente de muitos detalhes do modelo que adotámos.

O que deduzimos destas fórmulas? Que uma árvore cuja altura seja superior a este valor crítico começará a arquear devido ao peso. E que a altura máxima admissível para que o tronco não ceda ao próprio peso é proporcional à potência $\frac{2}{3}$ do seu diâmetro.

Esse aspeto qualitativo sugeriu que representássemos a relação entre altura e o diâmetro, em escala logarítmica, de uma vasta lista de árvores classificadas dos distritos do Porto e de Lisboa (cujos dados constam do portal do Instituto da Conservação da Natureza e das Florestas, [ICNF]), de modo a verificar se o ajuste linear dessa amostra se conformava à igualdade

$$\text{Log}(l_{\text{crítica}}) = \frac{2}{3}\text{Log}(d) + \text{constante}. \quad (3.2.46)$$

As árvores dessa amostra têm dimensões significativamente diferentes. O gráfico de dispersão, em escala logarítmica, assim como a reta de regressão estão representados na Figura 3.2.47.

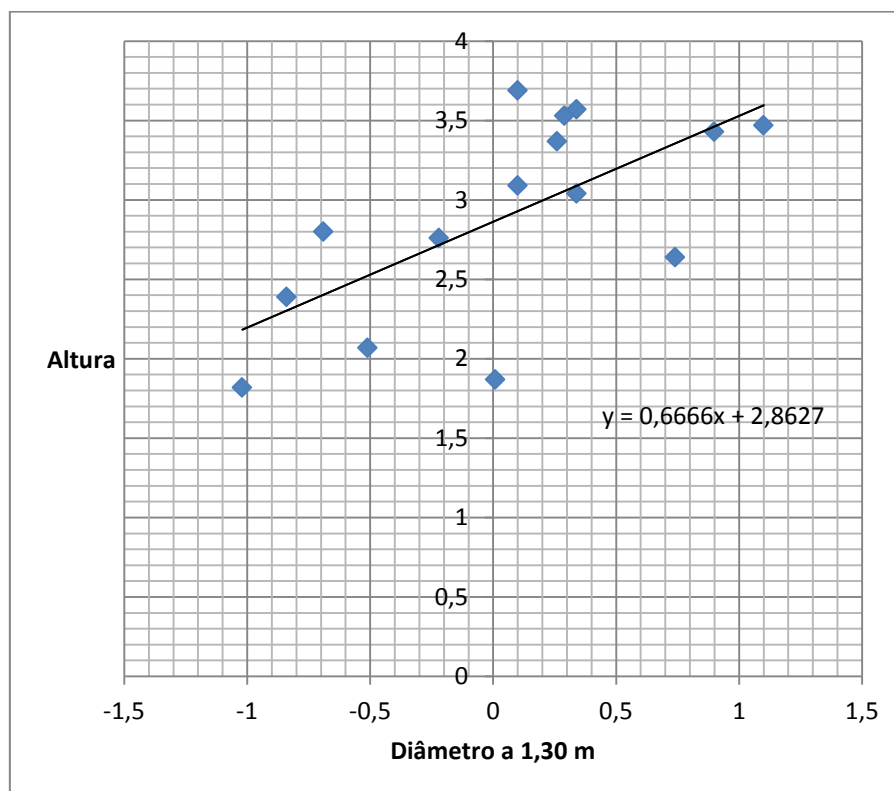


Fig.- 3.2.47

Como podemos observar, o declive da reta de regressão é aproximadamente $\frac{2}{3}$ e a maioria dos dados não se afasta muito da reta de regressão.

Convém referir que, nesta amostra, as árvores são de diferentes espécies e que as constantes E e ρ variam de espécie para espécie. No entanto, provou-se [G2], que a razão $\frac{E}{\rho}$ é aproximadamente constante para a maioria destas árvores, igual ao quociente entre $E = 1,05 \times 10^5$ quilogramas por metro quadrado e $\rho = 6,18 \times 10^2$ quilogramas por metro cúbico [M]. O gráfico que se segue, obtido através de um programa de geometria dinâmica, contém também a reta (a vermelho) que representa a equação 3.2.45 em escala logarítmica para estes valores de E e ρ .

A reta a vermelho representa a altura crítica a partir da qual uma árvore verga devido ao seu peso. Note-se como nenhuma das árvores da pequena amostra aqui considerada tem uma relação altura/diâmetro que se aproxime da situação crítica.

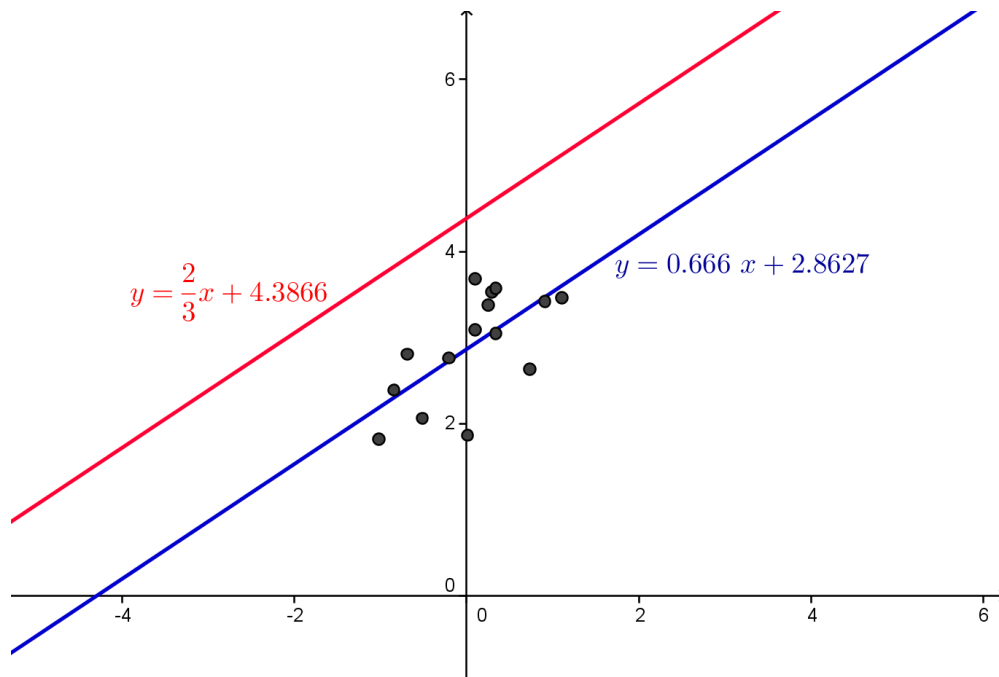


Fig.- 3.2.48

A conclusão é a de que as proporções destas árvores estão limitadas por critérios elásticos, visto que nenhum dos pontos desrespeita a altura crítica. Um estudo feito nos Estados Unidos da América com 576 árvores, representando aproximadamente todas as espécies de árvores existentes nesse país, permitiu chegar às mesmas conclusões [M].

3.3 Contributo dos ramos

Os ramos das árvores também têm que estar em posição adequada e não exceder um certo comprimento de modo a conseguirem sustentar-se no tronco presos apenas pela base e a não sobrecarregarem em demasia o peso da coluna que a árvore representa. De facto, à medida que os ramos crescem, a distância das suas pontas ao tronco, medida na horizontal, não deverá ultrapassar um valor crítico pois a partir dele, os ramos começam a inclinar-se tanto que as suas pontas, em vez de se afastarem, aproximam-se cada vez mais do tronco. Há por isso, também um comprimento crítico para os ramos das árvores e um tamanho adequado para a sua copa.

É plausível admitir que os ramos de uma árvore crescem de forma a que as suas folhas não estejam na sombra provocada pelos ramos mais altos da árvore. Deste modo, o crescimento tem como objetivo alcançar a máxima distância lateral

relativamente ao tronco. Provou-se em [M] que o ramos não podem crescer mais do que

$$l_{crítica} = C \left| \frac{E}{\rho} \right|^{\frac{1}{3}} d^{\frac{2}{3}} \quad (3.3.49)$$

onde C depende essencialmente da inclinação do ramo, ou seja, do ângulo que o ramo faz com o tronco, e d é o diâmetro do ramo. Também neste caso, o comprimento crítico é diretamente proporcional ao diâmetro de cada ramo elevado a $\frac{2}{3}$.

Capítulo IV: Método de Euler para calcular logaritmos

Atualmente é extremamente simples calcular um logaritmo ou uma raiz quadrada. Graças aos avanços tecnológicos, qualquer aluno das nossas escolas com mais de doze anos possui uma calculadora científica à qual pode recorrer para fazer esse tipo de cálculos. No século XVIII tudo era diferente: embora os matemáticos conseguissem calcular raízes quadradas com relativa rapidez, à mão, o mesmo não acontecia com o cálculo de logaritmos. Eles recorriam a tabelas de logaritmos para os obter. As tabelas mais usadas na época, de valores com sete casas decimais corretas, eram as de Briggs e Vlacq. Foram utilizadas por mais de cem anos e a sua construção dependia essencialmente do desenvolvimento em série de potências da função logaritmo.

Euler precisou de recorrer a tabelas de logaritmos para desenvolver a sua teoria sobre curvas elásticas. Tabelas como essas eram muito usadas na época para se obterem valores aproximados de raízes quadradas, logaritmos ou funções trigonométricas. Neste capítulo veremos um método simples, inventado por Euler [S], que permite o cálculo de valores aproximados de logaritmos em qualquer base sem se recorrer ao desenvolvimento em série de potências.

4.1 Logaritmos à mão

Em 1748, Euler publica a obra *Introductio in analysin infinitorum* na qual, baseando-se em propriedades elementares da função logaritmo, apresentou um método de cálculo de logaritmos que dispensa o uso de séries e que se adequa ao cálculo de valores aproximados do logaritmo de qualquer real positivo em qualquer base positiva. Vejamos como funciona.

Recordemos que a função logaritmo (digamos, na base 10, que designaremos por $\log$) tem a propriedade de transformar produtos de números reais positivos em somas, isto é,

$$\log(yv) = \log(y) + \log(v).$$

Daqui resulta que, se $v > 0$, $y > 0$, $z = \log(y)$ e $x = \log(v)$, então

$$\log \sqrt{vy} = \frac{x+z}{2}$$

uma vez que

$$\log \sqrt{vy} = \log(vy)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log(vy) = \frac{1}{2} [\log(v) + \log(y)] = \frac{1}{2} (x + z) = \frac{x + z}{2}.$$

Ou seja, o logaritmo da média geométrica de dois números é a média aritmética dos seus logaritmos.

Exemplifiquemos o método de Euler. Suponhamos que queremos calcular o logaritmo, na base 10, de 5. Observemos que

$$1 < 5 < 10$$

logo, como a função $\log$ é estritamente crescente, temos

$$\log(1) < \log(5) < \log(10)$$

isto é,

$$0 < \log(5) < 1.$$

Além disso, a média geométrica de 1 e 10 (que é $\sqrt{10}$) tem como logaritmo a média aritmética de $\log(1) = 0$ e $\log(10) = 1$:

$$A = 1 \quad \log(A) = 0$$

$$B = 10 \quad \log(B) = 1$$

$$C = \sqrt{AB} \simeq 3,162277$$

$$\log(C) = 0.5.$$

Temos agora dois intervalos, de extremos A , C e B , C respetivamente, e sabemos que 5 está num (e num só) deles:

$$C < 5 < B.$$

De novo, porque a função logaritmo é estritamente crescente, deduzimos que

$$0.5 = \log(C) < \log(5) < \log(B) = 1;$$

pelo argumento anterior, se $D = \sqrt{BC} \simeq 5,623413$, então

$$\log(D) = \frac{0.5 + 1}{2} = 0.75$$

e, como 5 está entre C e D ,

$$0.5 = \log(C) < \log(5) < \log(D) = 0.75.$$

Prosseguindo, usando médias geométricas e aritméticas e considerando em cada etapa intervalos mais pequenos, Euler construiu a tabela que se segue. Nela os números surgem com sete dígitos corretos, tal como acontecia com as tabelas de Briggs e Vlacq, e a função logaritmo na base escolhida é representada pela letra l .

76 DE QUANTITATIBUS			
LIB. I.	$A = 1, 000000;$	$lA = 0, 0000000$	fit
—	$B = 10, 000000;$	$lB = 1, 0000000;$	$C = \sqrt{AB}$
	$C = 3, 162277;$	$lC = 0, 5000000;$	$D = \sqrt{BC}$
	$D = 5, 623413;$	$lD = 0, 7500000;$	$E = \sqrt{CD}$
	$E = 4, 216964;$	$lE = 0, 6250000;$	$F = \sqrt{DE}$
	$F = 4, 869674;$	$lF = 0, 6875000;$	$G = \sqrt{DF}$
	$G = 5, 232991;$	$lG = 0, 7187500;$	$H = \sqrt{FG}$
	$H = 5, 048065;$	$lH = 0, 7031250;$	$I = \sqrt{FH}$
	$I = 4, 958069;$	$lI = 0, 6953125;$	$K = \sqrt{HI}$
	$K = 5, 002865;$	$lK = 0, 6992187;$	$L = \sqrt{IK}$
	$L = 4, 980416;$	$lL = 0, 6972656;$	$M = \sqrt{KL}$
	$M = 4, 991627;$	$lM = 0, 6982421;$	$N = \sqrt{KM}$
	$N = 4, 99742;$	$lN = 0, 6987304;$	$O = \sqrt{KN}$
	$O = 5, 000052;$	$lO = 0, 6989745;$	$P = \sqrt{NO}$
	$P = 4, 998647;$	$lP = 0, 6988525;$	$Q = \sqrt{OP}$
	$Q = 4, 999350;$	$lQ = 0, 6989135;$	$R = \sqrt{OQ}$
	$R = 4, 999701;$	$lR = 0, 6989440;$	$S = \sqrt{OR}$
	$S = 4, 999876;$	$lS = 0, 6989592;$	$T = \sqrt{OS}$
	$T = 4, 999963;$	$lT = 0, 6989668;$	$V = \sqrt{OT}$
	$V = 5, 000008;$	$lV = 0, 6989707;$	$W = \sqrt{TV}$
	$W = 4, 999984;$	$lW = 0, 6989687;$	$X = \sqrt{WV}$
	$X = 4, 999997;$	$lX = 0, 6989697;$	$Y = \sqrt{VX}$
	$Y = 5, 000003;$	$lY = 0, 6989702;$	$Z = \sqrt{XY}$
	$Z = 5, 000000;$	$lZ = 0, 6989700;$	

Fig.- 4.1.50

Em geral, dados dois reais positivos x e b , se queremos determinar uma boa aproximação do logaritmo de x na base b , começamos por situar x entre duas potências naturais consecutivas de b , digamos b^m e b^{m+1} . Isso determina um intervalo de amplitude 1, de extremos m e $m+1$, onde está $\log(x)$. Ou seja, m (ou $m+1$) é uma aproximação do valor de $\log(x)$. Para melhorar esta estimativa, consideramos a média geométrica de b^m e b^{m+1} , isto é, $b^{m+\frac{1}{2}}$ e determinamos em que intervalo, de extremos

$$b^m \text{ e } b^{m+\frac{1}{2}} \quad \text{ou} \quad b^{m+\frac{1}{2}} \text{ e } b^{m+1},$$

está x . Desse modo, $\log(x)$ situa-se entre

$$m \text{ e } m + \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad m + \frac{1}{2} \text{ e } m + 1.$$

Prosseguindo com este argumento, bissectamos sucessivamente o intervalo onde está $\log(x)$, obtendo assim aproximações cada vez melhores deste valor.

Com a estimativa de $\log(5) \simeq 0.6989700$, é agora fácil calcular, por exemplo, uma aproximação de $\log(2)$. Sigamos Euler: como $\frac{10}{5} = 2$, tem-se

$$\log(2) = \log\left(\frac{10}{5}\right) = \log(10) - \log(5) \simeq 1 - 0.6989700 = 0.3010300.$$

Com estes dois valores, podemos obter valores aproximados dos logaritmos de 4, 8, 16, 32, 64, etc, qualquer outra potência natural de base dois. Ou dos logaritmos de 20, 40, 80, 25, 50, etc. Exemplifiquemos:

$$\log(4) = \log(2^2) = 2\log(2) \simeq 2 \times 0.3010300 = 0.6020600$$

$$\log(8) = \log(2^3) = 3\log(2) \simeq 3 \times 0.3010300 = 0.9030900$$

e, em geral, para qualquer m natural,

$$\log(2^m) = m\log(2) \simeq m \times 0.3010300.$$

E, analogamente,

$$\log(20) = \log(4 \times 5) = \log(4) + \log(5) \simeq 0.6020600 + 0.689700 = 1.2917600$$

$$\log(40) = \log(8 \times 5) = \log(8) + \log(5) \simeq 0.9030900 + 0.6989700 = 1.6020600$$

$$\log(25) = \log(5 \times 5) = 2\log(5) \simeq 1,3979400$$

$$\log(50) = \log(2 \times 25) = \log(2) + \log(25) \simeq 1,6989700.$$

4.2 Raízes quadradas

Para beneficiar do procedimento anterior, Euler precisava de um método expedito para calcular raízes quadradas. Para elas, havia também vastas tabelas de apoio que poderão ter sido obtidas com o método de Heron (que mais tarde Newton generalizou) ou, quem sabe, com o algoritmo que há duas décadas era ainda ensinado no terceiro ciclo do ensino básico, mas que neste momento, não faz parte dos programas de Matemática do ensino básico ou secundário. Recordemo-lo.

Suponhamos que pretendíamos calcular, por exemplo, a raiz quadrada de 144. Começemos por separar este número, da direita para a esquerda, em pares de dígitos, assinalando essa partição com um ponto:

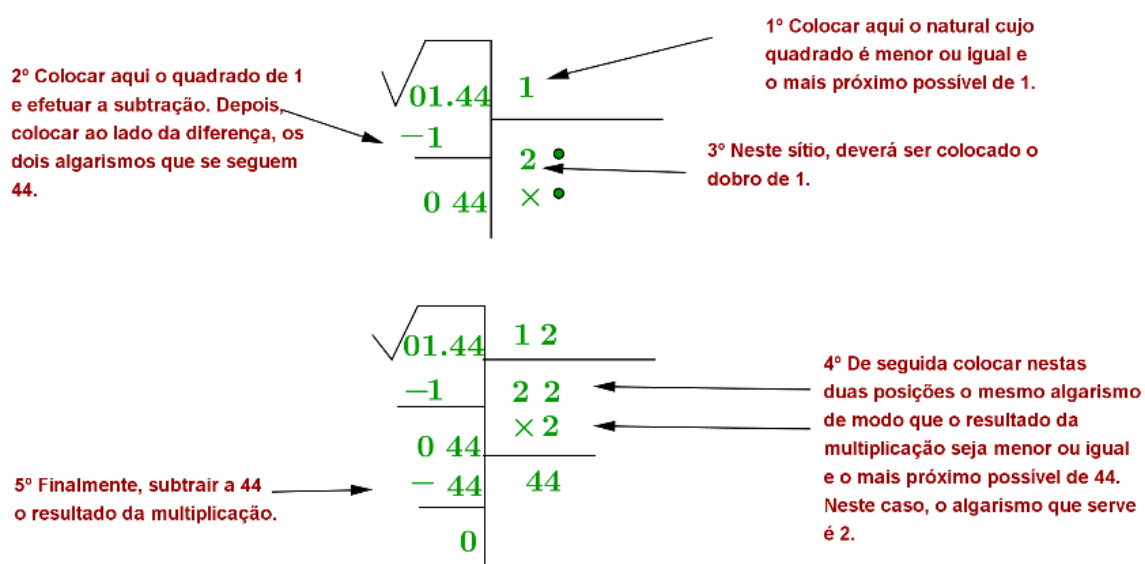


Fig.- 4.2.51

Obtemos resto zero, o que significa que 144 é um quadrado perfeito, isto é, que $\sqrt{144} = 12$.

Se quisermos calcular a raiz quadrada de um número com mais do que três algarismos basta prosseguir repetindo os passos referidos listados anteriormente. Vejamos um tal exemplo. Trata-se agora de calcular $\sqrt{124532}$. Como indicado, comecemos por dividir o número em grupos de dois dígitos da direita para a esquerda:

$$\begin{array}{r}
 \sqrt{12.45.32} \\
 \underline{-9} \\
 345 \\
 \underline{-325} \\
 20
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 35 \\
 65 \\
 \times 5 \\
 325
 \end{array}$$

Fig.- 4.2.52

O que podemos observar na figura 4.2.52, é o resultado de um processo semelhante ao descrito anteriormente para o par 12.45. Prossigamos com o algoritmo que, neste caso, ainda não terminou. Juntamos à direita do último resto o par 32 e continuemos:

$$\begin{array}{r}
 \sqrt{12.45.32} \\
 \underline{-9} \\
 345 \\
 \underline{-325} \\
 2032
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 35 \\
 65 \\
 \times 5 \\
 325
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 70 \cdot \\
 \times \\
 \hline
 \end{array}$$

Colocar aqui o algarismo, de tal modo que o produto seja menor ou igual e o mais próximo possível de 2032.

Fig.- 4.2.53

Depois de duplicarmos 35, obtendo 70, procuramos um algarismo de $\{0,1,\dots,9\}$ que é colocado na posição azul e tal que o resultado da multiplicação indicada seja menor ou igual a 2032 e o mais próximo possível deste número:

$\begin{array}{r} 12.45.32 \\ - 9 \\ \hline 345 \\ - 325 \\ \hline 2032 \\ - 1404 \\ \hline 628 \end{array}$	$\begin{array}{r} 352 \\ \hline 65 \\ \times 5 \\ \hline 325 \end{array}$	$\begin{array}{r} 702 \\ \times 2 \\ \hline 1404 \end{array}$
--	---	---

Fig.- 4.2.54

Chegamos à conclusão de que 352 é um valor aproximado da $\sqrt{124532}$, com um erro igual a 628. Ou seja,

$$352^2 = 123904$$

$$352^2 + 628 = 124532.$$

Poderíamos continuar, colocando à direita de 32 uma vírgula e dois zeros, e repetindo o processo utilizado até agora; obtemos desse modo uma aproximação de $\sqrt{124532}$ melhor que a anterior.

4.2.1 Justificação do algoritmo

Fixemos um número positivo N com representação decimal finita de que pretendemos um valor aproximado da raiz quadrada.

1º passo: Dividimos N em pares de dígitos da direita para a esquerda antes da vírgula (caso exista), e da esquerda para a direita a partir da vírgula

Exemplo: 0581,4522 $\rightarrow$ 0 5.81,45.22

2º passo: Começando pelo par de algarismos mais à esquerda, que designamos por c , determinamos o quadrado mais próximo de c e menor ou igual a c , digamos q^2 . Calculemos $c - q^2$.

3º passo: Multiplicamos $c - q^2$ por 100 e de seguida adicionamos-lhe os dois dígitos seguintes de N . Seja d o número obtido.

4º passo: Determinamos o maior algarismo $x \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ tal que $(20q + x)x \leq d$. Este x é o novo dígito da raiz quadrada. Seja $Q = 10q + x$.

5º passo: Calculamos o resto $C = d - (20q + x)x$. Se não for zero, repetimos o procedimento desde o 3º passo usando C e Q em vez de c e q .

6º passo: Acertamos a posição da vírgula.

Sigamos num outro exemplo os seis passos anteriores.

$$\begin{array}{r}
 \sqrt{152,2756} \quad 12,34 \\
 \underline{-1} \\
 052 \\
 \underline{-44} \\
 0827 \\
 \underline{-729} \\
 9856 \\
 \underline{-9856} \\
 0000
 \end{array}$$

Fig.- 4.2.55

Relacionando com o que foi enunciado em seis etapas, temos:

$$q = 1$$

$$x = 2 \quad (20 + x) \times x = 22 \times 2 = 44$$

$$x = 3 \quad (240 + x) \times x = 243 \times 3 = 729$$

$$x = 4 \quad (2460 + 4) \times 4 = 9856$$

O algoritmo termina e a raiz quadrada de 152,2756 é 12,34.

Verifiquemos agora por que o algoritmo funciona. Façamo-lo num exemplo que ilustra o caso geral: calculemos um valor aproximado de $\sqrt{10}$.

1º passo: O quadrado menor que 10 e o mais próximo possível de 10 é $9 = 3^2$. E portanto,

$$\sqrt{10} = 3 + \frac{a}{10}$$

para algum número real positivo a . Elevando ambos os membros desta igualdade ao quadrado, obtemos

$$10 = 9 + \frac{2 \times 3a}{10} + \frac{a^2}{100} = 9 + \frac{(20 \times 3 + a) \times a}{100}$$

ou seja,

$$(10 - 9) \times 100 = (20 \times 3 + a) \times a.$$

Como não conhecemos a , procuremos o algarismo A de $\{0,1, \dots, 9\}$ tal que

$$(10 - 9) \times 100 \geq (20 \times 3 + A) \times A \quad (4.2.52)$$

e $(20 \times 3 + A) \times A$ esteja o mais próximo possível de $(10 - 9) \times 100$. Ao fim de um número finito de cálculos, verificamos que devemos ter $A = 1$. E A é o algarismo das décimas de $\sqrt{10}$, isto é, $\sqrt{10} \simeq 3,1$, uma vez que as condições sobre a escolha de A asseguram que

$$3.1 < \sqrt{10} < 3.2.$$

De facto, $9 < 10 < 16$ e, se $A \in \{0,1, \dots, 9\}$ verifica as desigualdades

$$3 + \frac{A}{10} \leq \sqrt{10} < 3 + \frac{(A+1)}{10}, \quad (4.2.53)$$

então A é o dígito das décimas. Ora, a expressão (4.2.53) é equivalente a

$$9 + \frac{3.2.A}{10} + \frac{A^2}{100} \leq 10 < 9 + \frac{3.2.(A+1)}{10} + \frac{(A+1)^2}{100}$$

ou seja,

$$(3.20 + A).A \leq (10 - 9).100 < [3.20 + (A + 1)](A + 1).$$

E, portanto, o valor de A que escolhemos para cumprir as condições (4.2.52) satisfaz também (4.2.53).

2º passo: Gostaríamos de conhecer o número real b tal que

$$\sqrt{10} = 3 + \frac{1}{10} + \frac{b}{100}.$$

Elevando ambos os membros ao quadrado, obtemos

$$10 = 9 + \frac{1}{100} + \frac{b^2}{10000} + \frac{2 \times 3}{10} + \frac{2 \times 3b}{100} + \frac{2b}{1000}$$

ou seja,

$$[(10 - 9) \times 100 - (20 \times 3 + 1) \times 1] \times 100 = (20 \times 31 + b) \times b.$$

Como não sabemos quem é b , procuremos o algarismo B de $\{0,1, \dots, 9\}$ tal que

$$[(10 - 9) \times 100 - (20 \times 3 + 1) \times 1] \times 100 \geq (20 \times 31 + B) \times B$$

e $(20 \times 31 + B) \times B$ esteja o mais próximo possível de

$$[(10 - 9) \times 100 - (20 \times 3 + 1) \times 1] \times 100.$$

Depois de verificarmos que o valor de B que satisfaz esta exigência é 6, concluímos, pelo modo como foi escolhido, que B é o dígito das centésimas de $\sqrt{10}$, uma vez que

$$3,16 < \sqrt{10} < 3,17.$$

Ou seja,

$$\sqrt{10} \approx 3,16$$

e 6 é o dígito correcto da segunda casa decimal. Caso queiramos um valor aproximado de $\sqrt{10}$ com mais do que duas casas decimais certas, basta repetir a rotina anterior.

Apesar de ser mais lento do que o método de Herão ou do que o de Newton ([Y]), este processo tem algumas vantagens:

1. Trata-se de um cálculo à mão, e por isso um bom exercício de aritmética.
2. Cada dígito que se encontra é o correto de uma das representações decimais da raiz quadrada.
3. O procedimento lembra, no esquema que o representa, a divisão inteira de dois naturais, surgindo o resultado na posição do divisor.

Bibliografia

- [Bo] N. N. Bogolyubov, G. K. Mikhallov, A. P. Yushkevich, R. Burns, *Euler and Modern Science*, Mathematical Association of America, 2007
- [Br] R. Bradley, L. A. D'Antonio, C. E. Sandifer (ed.), *Euler at 300: An Appreciation*, Mathematical Association of America, 2007
- [Bri] J. Brinkhuis, *Optimization: Insights and Applications*, Princeton University Press, 2005
- [C] M. do Carmo, *Geometria Riemanniana*, Projecto Euclides, IMPA, 1989
- [Du] W. Dunham (ed.), *The Early Mathematics of Leonhard Euler*, Mathematical Association of America, 2007
- [E] C. A. Ellis, W. A. Oldfather e D. M. Brown, *Leonhard Euler's Curves*, University of Chicago Press, 1933
- [F] C. Fox, *An Introduction to the Calculus of Variations*, Dover Publications, 1987
- [F1] C. G. Fraser, *Mathematical Technique and Physical Conception in Euler's Investigation of the Elastica*, Centaurus, 1991
- [G] I. M. Gelfand e S. V. Fomin, *Calculus of Variations*, Dover Publications, Inc., 1991
- [G1] G. Greenhill, *Determination of the greatest height consistent with stability that a vertical pole or mast can be made, and of the greatest height to which a tree of given proportion can grow*, Proc. Cambridge Phil. Soc 4 (1881), 65-73
- [G2] G. A. Garratt, *The mechanical properties of wood*, Wiley, New York, 1931
- [K] J. B. Keller, *The shape of the strongest column*, Arch. Rat. Mech. Anal. 5 (1960), 275-285.
- [L] J.-L. Lagrange, *Sur la figure des colonnes*, Serret, M.J.-A (ed.), *Oeuvres de Lagrange*, 1868, Vol. 2. Gauthier-Villars, Paris, pp. 125-170
- [M] T. McMahon, *Size and Shape in Biology*, Science, vol. 179 (1973), 1201-1204
- [N] I. Niven, *Minima and maxima without calculus*, Dolciani Mathematical Expositions, 6, Mathematical Association of America, 1981

[O] J. Oprea, *Differential Geometry and its Applications*, Mathematical Association of America, 2007

[OI] W.A. Oldfather, C. A. Ellis e Donald M. Brown, *Leonard Euler's Elastic Curves*, The University of Chicago Press, vol. 20 (1933), 72-160

[S] C. E. Sandifer, *How Euler Did It*, Mathematical Association of America, 2007

[S1] C. E. Sandifer, *The Genius of Euler: Reflections*, Mathematical Association of America, 2007

[Y] R. Young, *Excursions in Calculus*, Dolciani Mathematical Expositions, 13, Mathematical Association of America, 1992

[Netprof] <http://www.netprof.pt/matematica/pdf/enriquecimentoraiz.pdf> (27 de Março de 2013)

[EA] <http://eulerarchive.maa.org/> (27 de Março de 2013)

[ICNF] <http://www.icnf.pt/portal/florestas/aip> (27 de Março de 2013)

