

Identificação de propriedades mecânicas de materiais viscoelásticos por um método inverso baseado em EF e FRF

Mariana Jesus da Silva Ascensão

Dissertação do MIEM

Orientador: Prof. Doutor José Dias Rodrigues



FEUP

**Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto
Mestrado Integrado em Engenharia Mecânica**

Julho de 2012

Resumo

Nesta dissertação pretende-se estabelecer e implementar um método inverso de identificação das propriedades mecânicas de um material viscoelástico baseado num modelo de elementos finitos e nas funções de resposta em frequência de tipo transmissibilidade utilizando provetes tipo viga com tratamento viscoelástico.

É apresentada uma breve introdução sobre os materiais viscoelásticos, as suas aplicações na indústria, as várias configurações de tratamentos viscoelásticos e os fatores que influenciam as propriedades do material viscoelástico, tais como, o efeito da frequência, o efeito da temperatura, das tensões cíclicas, o efeito da espessura e do meio envolvente.

Para o modelo de elementos finitos é desenvolvido um elemento finito multicamada baseado num modelo *layerwise*, utilizando a teoria de *Timoshenko* para representar cada camada individualmente. O modelo de elementos finitos permite a discretização dos provetes tipo viga com tratamento viscoelástico e a determinação da função de resposta em frequência de tipo transmissibilidade entre a resposta em qualquer secção da viga e a excitação passiva aplicada na extremidade encastrada.

O módulo complexo do material viscoelástico é representado por um modelo constitutivo de derivadas fracionário de quatro parâmetros. A identificação das propriedades mecânicas do material viscoelástico traduz-se na identificação dos quatro parâmetros do modelo constitutivo através do ajustamento de funções de transmissibilidade medidas experimentalmente e geradas pelo modelo de elementos finitos. O ajustamento das funções de transmissibilidade assenta num critério de minimização do desvio das funções de transmissibilidade a determinadas frequências de controlo definidas na vizinhança das ressonâncias. A minimização do desvio relativo é realizada pela utilização da função *fminsearch* disponível no ambiente MATLAB. A etapa final do processo inverso de identificação consiste na correlação das funções de transmissibilidade experimentais ou de referência com as numéricas através de um indicador de correlação.

Para avaliar o método inverso de identificação implementado, realiza-se uma experimentação utilizando provetes *sandwich* com núcleo em material viscoelástico e ainda um provete com tratamento superficial com camada de restrição. Na montagem experimental, os provetes são montados numa configuração encastrada-livre com excitação passiva aplicada no encastramento medindo-se a transmissibilidade entre a resposta transversal na extremidade livre e a excitação aplicada no encastramento.

Os resultados obtidos revelam potenciais vantagens do método inverso de identificação desenvolvido, em particular no que diz respeito à sua simplicidade e capacidade de obtenção das propriedades do material viscoelástico numa banda larga de frequências utilizando apenas algumas frequências de controlo na vizinhança das ressonâncias presentes na banda de análise. Por outro lado, verificou-se também alguma sensibilidade do método à estimativa inicial dos parâmetros a identificar evidenciando uma eventual falta de robustez no processo de otimização.

Abstract

This thesis intends to establish and implement an inverse method to identify the mechanical properties of a viscoelastic material, based on a multilayer finite element model and the frequency response functions of the type transmissibility using specimens of type beam with viscoelastic treatment.

Beginning by a brief introduction about the referred materials, their use in industry, the different types of viscoelastic treatments and the factors which influence the properties of this material, such as, the effects of frequency, temperature, cycle stress, thickness and the environment.

For the finite element model is developed a multilayer finite element based in a *layerwise* model, using the *Timoshenko* theory to represent each layer individually. The finite element model allows the discretization of the specimens of type beam with viscoelastic treatment and the determination of the frequency response functions of type transmissibility between the response in any section of the beam and the excitation passive applied to the recessed edge.

The complex modulus of the viscoelastic material is represented by a fractional derived constitutive model of four parameters. The identification of the mechanical properties of the viscoelastic material is reflected in the identification of the four parameters of the constitutive model by adjusting the frequency response functions of type transmissibility measured and generated by the finite element model. The adjustments of the frequency response functions of type transmissibility is based on the criterion of minimizing the deviation of the transmissibility functions to certain set of control frequencies in the vicinity of resonances. The minimization of the deviation is performed by using the function *fminsearch* available in MATLAB. The final step of the inverse process of the identification consists in the correlation of the transmissibility functions experimental or reference with the numerical ones through an indicator of correlation.

To evaluate the inverse method of identification implemented, is performed an experimentation using *sandwich* specimens with core of viscoelastic material and also a specimen with surface treatment with a constraint layer. In the experimental apparatus, the specimens are mounted on a recessed-free configuration with passive excitation applied to the embeddedness measuring the transmissibility between the transverse response in the free end and the excitation applied on the embeddedness.

The results obtained reveal potential advantages of the inverse method of identification developed, in particular with regard to its simplicity and the ability to obtain the viscoelastic properties of a large frequency band using only a few control frequencies in the vicinity of the resonances present in the analysed band. Moreover, there was also some sensitivity to the initial estimate parameters of the method to identify indicating a possible lack of robustness in the optimization process.

Agradecimentos

Quero em primeiro lugar agradecer aos meus pais, Manuel e Carolina, o investimento que fizeram na minha educação académica ao longos destes anos todos. Sem eles não teria alcançado este grau académico.

Em segundo lugar agradeço ao Diogo por me apoiar e dar-me força para seguir os meus sonhos, estando sempre presente nos bons e maus momentos.

Agradeço aos meus meninos, por me ajudarem sempre que fosse preciso, e por me acompanharem durante este longo percurso, preenchendo-o de diversão e boa disposição facilitando o dia-a-dia.

Quero agradecer ao meu orientador José Dias Rodrigues, pela disponibilidade, paciência e esforço de motivação que permitiram atingir esta etapa final.

Agradeço, também ao Luís Cardoso que me guiou e ajudou ao longo da dissertação.

Conteúdo

Lista de Figuras	xvi
Lista de Tabelas	xvii
Nomenclatura	xix
1 Introdução	1
1.1 Motivação	3
1.2 Objetivos	4
1.3 Estrutura da dissertação	4
2 Caracterização dos materiais viscoelásticos	5
2.1 Tratamentos viscoelásticos	5
2.2 Configurações de tratamentos viscoelásticos	5
2.2.1 Tratamentos superficiais sem restrição (FLD)	5
2.2.2 Tratamentos superficiais com restrição (CLD)	6
2.2.3 Tratamentos integrados (ILD)	6
2.3 Caracterização das propriedades dos materiais viscoelásticos	6
2.3.1 Efeito da temperatura	6
2.3.2 Efeito da frequência	7
2.3.3 Considerações na caracterização dos materiais viscoelásticos com a frequência	8
2.3.4 Módulo complexo	10
2.3.5 Efeito de tensões cíclicas	11
2.3.6 Efeito da espessura	11
2.3.7 Efeito de outros fatores ambientais	12
2.4 Medição do módulo complexo	12
2.4.1 Vigas com tratamento	12
2.4.1.1 Viga de <i>Oberst</i>	13
2.4.1.2 Viga de <i>Van Oort</i>	14
2.4.1.3 Viga <i>sandwich</i>	14
2.4.1.4 Viga <i>sandwich</i> dupla	16
2.4.2 Sistema discreto com um grau de liberdade	17
2.4.2.1 Configuração do sistema de medição	17
2.4.2.2 Medição da resposta do sistema	18
2.4.2.3 Medição da transmissibilidade do sistema	20
2.4.2.4 Considerações sobre sistemas discretos	21
2.5 Representação do módulo complexo	21
2.5.1 Princípio da correspondência frequência-temperatura	21

2.5.2	Nomograma de frequência reduzida	23
2.6	Modelo constitutivo do material viscoelástico	23
3	Método inverso de identificação	25
3.1	Frequências de controlo	27
3.2	Função de resposta em frequência numérica	28
3.3	Algoritmo de minimização	29
3.4	LAC - “ <i>Local Amplitude Criterion</i> ”	30
4	Formulação do elemento finito <i>layerwise</i>	31
4.1	Teoria de <i>Timoshenko</i>	31
4.1.1	Relação deformação-tensão	33
4.2	Teoria de deformação por camadas - Modelo <i>layerwise</i>	33
4.3	Campo de deslocamentos	34
4.4	Campo de deformações	34
4.4.1	Matriz de deformação	35
4.5	Campo de tensões	36
4.5.1	Matriz elasticidade	36
4.6	Energia potencial de deformação	36
4.7	Campo de velocidades	37
4.8	Energia cinética	37
4.9	Trabalho virtual das forças de superfície	38
4.10	Formulação variacional	38
4.11	Formulação do elemento finito	39
4.11.1	Elemento finito de viga <i>layerwise</i>	39
4.11.1.1	Funções de forma	40
4.11.2	Forma fraca - Discretização do elemento finito	41
4.12	Equações de movimento	42
5	Descrição da montagem experimental e dos provetes	43
5.1	Montagem experimental	43
5.1.1	Vigas de amostra - Provetes	46
6	Caracterização experimental	49
6.1	Vigas base	50
6.2	Viga <i>sandwich</i>	55
6.3	Viga com camada de restrição	66
7	Conclusão	77
7.1	Conclusões	77
7.2	Sugestões de trabalho futuro	78
	Apêndices: Código Matlab do método inverso de identificação	78
A	Identificação das propriedades do material viscoelástico	81
B	Matrizes de massa e rigidez	85
C	Frequências de controlo	87

<i>CONTEÚDO</i>	xi
D Plot das iterações	91
E Funções de transmissibilidade experimentais	93
F Função de transmissibilidade numérica	97
G Sintetização	99
Referências	102

Lista de Figuras

1.1	Ponte de Tacoma Narrows em vibração induzida pelo vento	1
2.1	Variação do módulo de ganho e do fator de perda com a temperatura [4]	7
2.2	Variação da parte real do módulo de ganho e do fator de perda com a frequência [4]	8
2.3	Excitação e resposta harmónica de um material viscoelástico [4]	9
2.4	Ciclo histerético de um material viscoelástico [4]	9
2.5	Variação da parte real do módulo de ganho e do fator de perda com a amplitude de tensão [5]	11
2.6	Viga de <i>Oberst</i> [6]	13
2.7	Viga de <i>Van Oort</i> [6]	14
2.8	Viga <i>sandwich</i> [6]	15
2.9	Viga <i>sandwich</i> dupla [4]	16
2.10	Sistema com um grau de liberdade [4]	17
2.11	Medição da resposta para sistema com um grau de liberdade [4]	18
2.12	Medição da transmissibilidade para um sistema com um grau de liberdade [4] . .	20
2.13	Princípio da correspondência frequência-temperatura [4]	22
2.14	Nomograma do material ISD 112 [8]	23
3.1	Esquema do método inverso proposto [2]	26
3.2	Seleção das frequências de controlo	27
3.3	Viga encastrada-livre: deslocamentos transversais (s) e (u)	29
4.1	Teoria de flexão de vigas de <i>Timoshenko</i>	32
4.2	Teoria de deformação por camadas - Modelo <i>layerwise</i>	33
4.3	Elemento isoparamétrico unidimensional - Sistema de coordenadas local e natural	40
5.1	Representação esquemática da montagem experimental	44
5.2	Shaker eletromagnético - <i>LDS V200</i>	45
5.3	Vibrómetro laser - <i>Polytec OFV 303 Sensor Head</i>	45
5.4	Controlador do vibrómetro laser - <i>Polytec OFV 3001</i>	45
5.5	Amplificador do shaker - <i>LDS PA100E</i>	46
5.6	Analizador dinâmico de sinal - <i>Signal Analyser Unit Type 2035 B&K</i>	46
5.7	Provetes ensaiados	47
6.1	Transmissibilidade de deslocamento em função da frequência da viga Elast_180 (1)	50
6.2	Transmissibilidade de deslocamento em função da frequência da viga Elast_180 (2)	51

6.3	Transmissibilidade de deslocamento em função da frequência da viga Elast_180 (3)	51
6.4	Transmissibilidade de deslocamento em função da frequência da viga Elast_220	52
6.5	Indicador LAC - Viga Elast_180 (1), (2) e (3)	54
6.6	Indicador LAC - Viga Elast_220	55
6.7	Transmissibilidade de deslocamento em função da frequência da viga Sw_180 - $T \approx 24^{\circ}\text{C}$	56
6.8	Propriedades do material viscoelástico da viga Sw_180 - $T \approx 24^{\circ}\text{C}$	56
6.9	Transmissibilidade de deslocamento em função da frequência da viga Sw_220 - $T \approx 24^{\circ}\text{C}$	57
6.10	Propriedades do material viscoelástico da viga Sw_220 - $T \approx 24^{\circ}\text{C}$	57
6.11	Transmissibilidade de deslocamento em função da frequência da viga Sw_260 - $T \approx 24^{\circ}\text{C}$	58
6.12	Propriedades do material viscoelástico da viga Sw_260 - $T \approx 24^{\circ}\text{C}$	58
6.13	Transmissibilidade de deslocamento em função da frequência da viga Sw_300 - $T \approx 24^{\circ}\text{C}$	59
6.14	Propriedades do material viscoelástico da viga Sw_300 - $T \approx 24^{\circ}\text{C}$	59
6.15	Indicador LAC - Vigas <i>sandwich</i>	60
6.16	Propriedades do material viscoelástico da viga Sw_180 - Variação do grau de liberdade medido - $T \approx 24^{\circ}\text{C}$	61
6.17	Propriedades do material viscoelástico da viga Sw_220 - Variação do grau de liberdade medido - $T \approx 24^{\circ}\text{C}$	62
6.18	Propriedades do material viscoelástico da viga Sw_260 - Variação do grau de liberdade medido - $T \approx 24^{\circ}\text{C}$	62
6.19	Propriedades do material viscoelástico da viga Sw_300 - Variação do grau de liberdade medido - $T \approx 24^{\circ}\text{C}$	63
6.20	Vigas <i>sandwich</i> com variação do comprimento livre - Transmissibilidades de deslocamento - $T \approx 24^{\circ}\text{C}$	63
6.21	Propriedades do material 3M ISD112: valores identificados e valores do nomograma - $T \approx 24^{\circ}\text{C}$ [8]	64
6.22	Transmissibilidade de deslocamento em função da frequência da viga com camada de restrição: [0 200]Hz - $T \approx 24^{\circ}\text{C}$	66
6.23	Propriedades do material viscoelástico da viga com camada de restrição: [0 200]Hz - $T \approx 24^{\circ}\text{C}$	67
6.24	Indicador LAC - Viga com camada de restrição: [0 200]Hz	67
6.25	Transmissibilidade de deslocamento em função da frequência da viga com camada de restrição: [0 400]Hz - $T \approx 24^{\circ}\text{C}$	68
6.26	Propriedades do material viscoelástico da viga com camada de restrição: [0 400]Hz - $T \approx 24^{\circ}\text{C}$	68
6.27	Indicador LAC - Viga com camada de restrição: [0 400]Hz	69
6.28	Transmissibilidade de deslocamento em função da frequência da viga com camada de restrição: [0 800]Hz - $T \approx 24^{\circ}\text{C}$	70
6.29	Propriedades do material viscoelástico da viga com camada de restrição: [0 800]Hz - $T \approx 24^{\circ}\text{C}$	70
6.30	Indicador LAC - Viga com camada de restrição: [0 800]Hz	71
6.31	Transmissibilidade de deslocamento em função da frequência da viga com camada de restrição: [0 1600]Hz - $T \approx 24^{\circ}\text{C}$	72

6.32	Propriedades do material viscoelástico da viga com camada de restrição: [0 1600]Hz - $T \approx 24^{\circ}\text{C}$	72
6.33	Indicador LAC - Viga com camada de restrição: [0 1600]Hz	73
6.34	Viga com camada de restrição - Comparação das TRs - $T \approx 24^{\circ}\text{C}$	74
6.35	Viga com camada de restrição - Comparação das propriedades do material viscoelástico - $T \approx 24^{\circ}\text{C}$	74

Lista de Tabelas

2.1	Parâmetro p para viga encastrada	16
5.1	Dimensões das vigas base	46
5.2	Dimensões das vigas <i>sandwich</i>	47
5.3	Dimensões da viga com camada de restrição	47
6.1	Discretização das vigas base	50
6.2	Propriedades do material elástico das vigas Elast_180	52
6.3	Propriedades do material elástico da viga Elast_220	52
6.4	Propriedades adoptadas para o material elástico das vigas base	52
6.5	Discretização das vigas <i>sandwich</i>	55
6.6	Propriedades do material viscoelástico das vigas <i>sandwich</i> de 180mm	64
6.7	Propriedades do material viscoelástico das vigas <i>sandwich</i> de 220mm	64
6.8	Propriedades do material viscoelástico das vigas <i>sandwich</i> de 260mm	65
6.9	Propriedades do material viscoelástico das vigas <i>sandwich</i> de 300mm	65
6.10	Propriedades do material viscoelástico das vigas <i>sandwich</i> - Média	65
6.11	Propriedades do material viscoelástico da viga com camada de restrição	73
6.12	Comparação dos parâmetros do modelo constitutivo do material viscoelástico	75

Nomenclatura

Siglas e outros

MEF	método de elementos finitos
FLD	camada livre ou camada superficial sem restrição
CLD	camada superficial com restrição
ILD	camada integrada
RKU	equações de Ross-Kerwin-Ungar
LAC	indicador local de amplitude
ADF	modelo de campo de deslocamentos inelástico
FRF	função de resposta em frequência
PC	computador pessoal
DMA	análise mecânica direta
Elast_180	viga base de comprimento livre de 180mm
Elast_220	viga base de comprimento livre de 220mm
Sw_180	viga <i>sandwich</i> de comprimento livre de 180mm
Sw_220	viga <i>sandwich</i> de comprimento livre de 220mm
Sw_260	viga <i>sandwich</i> de comprimento livre de 260mm
Sw_300	viga <i>sandwich</i> de comprimento livre de 300mm
ISD 112	material viscoelástico utilizado

Índices

i	contador geral ou grau de liberdade
j	grau de liberdade
k	índice de camada material

Identificadores

$()^M$	referente à componente de membrana do elemento finito
$()^C$	referente à componente de acoplamento do elemento finito
$()^B$	referente à componente de flexão do elemento finito
$()^S$	referente à componente de corte transversal do elemento finito
$()_k$	referente à camada k do elemento finito
(1)	ponto de medição na extremidade da viga
(2)	ponto de medição da TR a 5mm da extremidade da viga
(3)	ponto de medição da TR a 10mm da extremidade da viga

Operadores

$[]^T$	transposta da matriz
$[]^*$	complexa conjugada da matriz
$[]^H$	transposta da complexa conjugada da matriz
$\bar{[]}$	modificação da matriz
$\{\}$	modificação do vetor
$(\bullet)$	modificação da variável
$(\dot{\bullet})$	derivada em ordem ao tempo
$(\ddot{\bullet})$	segunda derivada em ordem ao tempo
$\text{RE}(\bullet)$	componente real
$\text{IM}(\bullet)$	componente imaginária

Variáveis escalares ($\bullet$)

A	área [m^2]
A_C	área da secção de corte [m^2]
A_E	área da secção transversal [m^2]
$\mathcal{A}(\omega)$	função aceleração [ms^{-2}/N]
b	largura da viga [m]
E	módulo de <i>Young</i> [Pa]
$\bar{E}$	módulo de extensão complexo [Pa]
E'	módulo de extensão de ganho [Pa]
E''	módulo de extensão de perda [Pa]
E_0	módulo de extensão elástico ou módulo estático [Pa]
E_∞	assintota do módulo
F	força [N]
f_R	frequência reduzida
$\bar{g}$	parâmetro de corte
G	módulo de corte [Pa]
G_0	módulo de corte estático [Pa]
$\bar{G}$	módulo de corte complexo [Pa]
G'	módulo de corte de ganho [Pa]
G''	módulo de corte de perda [Pa]
G_∞	assintota do módulo de corte
$G_v^*(\omega)$	módulo complexo do núcleo viscoelástico [Pa]
H	espessura [m]
I	momento de segunda ordem de uma secção certa [m^4]
$\mathcal{I}(\omega)$	impedância mecânica [N/ms^{-1}]
j	operador complexo $j = \sqrt{-1}$
K	rigidez equivalente do sistema [N/m]
$\bar{K}$	rigidez complexa equivalente do sistema [N/m]
k_{max}	número total de frequências de controlo
L	comprimento [m]
M	massa de um corpo [Kg]

$\mathcal{M}(\omega)$	função massa aparente
n	número de camada do laminado
t	tempo [s]
T	temperatura [°C]
T ou $TR(\omega)$	função transmissibilidade
$T_{ij}^*(\omega_k)$	função de resposta em frequência do tipo transmissibilidade numérica
$_{exp}T_{ij}^*(\omega_k)$	função de resposta em frequência do tipo transmissibilidade experimental
$\bar{R}$	razão de rigidez
$S_i^*(\omega_k)$	deslocamento transversal da força de excitação no grau de liberdade i
u	translação segundo o eixo x ou translação no plano
$U_j^*(\omega_k)$	deslocamento transversal da resposta no grau de liberdade j
w	translação segundo o eixo z ou translação normal ao plano
$Y(\omega)$	função mobilidade [ms^{-1}/N]
$\mathcal{Z}(\omega)$	função rigidez dinâmica [N/m]
$\alpha(\omega)$	função receptância [m/N]
α_T	fator de translação
β^x	rotação local em torno do eixo y
η	fator de perda
ν	coeficiente de <i>Poisson</i>
ω	frequência circular [rad/s]
ω_k	frequência de controlo [rad/s]
ω_r	frequência de ressonância de ordem r [rad/s]
ω_{0r}	frequência de ressonância de ordem r da viga base [rad/s]
λ_n	comprimento de onda semi-efectivo do modo natural n
δ	desfasamento
ξ	amortecimento viscoso
α	parâmatreo fraccional
τ	tempo de relaxação [s]
Ω	domínio [m^2]
Π	energia de deformação
Π^C	energia cinética
Π^P	energia potencial
ρ	massa volúmica [Kg/m^3]

Variáveis vetoriais { }

$\{d\}$	campo de deslocamentos generalizados
$\{d^e\}$	campo de deslocamentos generalizados do elemento finito
$\{d_i^e\}$	vetor de graus de liberdade do elemento finito
$\{f(t)\}$	vetor de solicitação dinâmica
$\{f_i^e\}$	vetor de forças elementar
$\{f_i\}$	vetor de forças global
$\{u\}_k$	campo de deslocamentos do elemento finito
$\{x(t)\}$	vetor de resposta dinâmica
$\varepsilon/\{\varepsilon\}$	campo/vetor de deformações
$\gamma/\{\gamma\}$	campo/vetor de deformações de corte
$\sigma/\{\sigma\}$	campo/vetor de tensões
$\tau/\{\tau\}$	campo/vetor de tensões de corte

Variáveis matriciais []

$[\mathcal{B}]_k$	matriz de deformação
$[\mathcal{B}]^e$	matriz de deformação do elemento finito
$[\mathcal{D}]_k$	matriz de elasticidade
$[\mathcal{J}]$	matriz de inércia
$[K]$	matriz de rigidez
$[\bar{K}]$	matriz de rigidez complexa
$[K^e]$	matriz de rigidez do elemento finito
$[\mathcal{L}]$	matriz de operadores diferenciais
$[M]$	matriz de massa
$[M^e]$	matriz de massa do elemento finito
$[\mathcal{N}]_k$	matriz de distribuição do campo de deslocamentos
$[R^e]$	matriz de conectividade

Referenciais

x, z	sistema local de coordenadas cartesianas
X, Z	sistema global de coordenadas cartesianas
ξ, η	sistema natural do elemento finito

Capítulo 1

Introdução

As aplicações de vibrações na engenharia são de grande importância. Projetos de máquinas, fundações, estruturas, motores, turbinas, sistemas de controlo e outros exigem que as questões relacionadas com as vibrações sejam tidas em conta.

Muitos dos acidentes que ocorrem em estruturas estão relacionados com falhas de fadiga, induzidas por solicitações cíclicas, impacto ou mesmo ruído, isto porque, a capacidade de amortecimento presente na estrutura é reduzida, de maneira que esta não dissipa a energia de vibração presente.

Um exemplo clássico é o da ponte de Tacoma Narrows (fig.1.1), nos Estados Unidos. Sucedeu que a frequência natural de vibração da ponte coincidiu com a frequência da força externa (vento) e ocorreu o fenómeno de ressonância, colapsando, assim, a ponte.



Figura 1.1: Ponte de Tacoma Narrows em vibração induzida pelo vento

Em virtude dos efeitos devastadores que podem surgir em máquinas e em estruturas, os testes vibratórios tornaram-se num procedimento padrão no projeto e desenvolvimento da maioria dos sistemas em engenharia.

Uma solução para diminuir ou eliminar a vibração é a aplicação de amortecimento passivo. Este tipo de amortecimento envolve a aplicação de materiais viscoelásticos nas estruturas e máquinas. Estes materiais são dotados de uma capacidade de amortecimento bastante superior às ligas metálicas, sendo capazes de dissipar grandes quantidades de energia. Existe uma vasta gama de materiais viscoelásticos, como polímeros industriais ou até mesmo borrachas, quer de origem natural quer de origem sintética.

De forma a compensar a reduzida capacidade de amortecimento da estrutura, é necessário desenvolver mecanismos dissipativos adicionais. Estes mecanismos dissipativos podem ser

introduzidos nas mais diversas formas, desde a aplicação de simples dispositivos discretos colocados em pontos de ligação da estrutura, a mecanismos ativos auto-controlados embebidos na mesma.

De entre os mecanismos passivos de amortecimento, os tratamentos distribuídos e os amortecedores localizados baseados em materiais viscoelásticos assumem uma posição de relevo devida à sua elevada eficiência na aplicação, ao reduzido custo e à reduzida alteração estrutural introduzida pelos mesmos.

O estudo do comportamento dinâmico de uma estrutura pode ser dividido em duas análises, nomeadamente, em previsões analíticas e em ensaios de vibração. Para estruturas simples, como vigas e placas, boas previsões analíticas podem ser facilmente encontradas em livros e tabelas. Para estruturas mais complexas a ferramenta utilizada, normalmente, é a análise por elementos finitos.

Método de elementos finitos

O método de elementos finitos assume que uma estrutura contínua pode ser discretizada, descrevendo-a como uma montagem de elementos finitos (discretos), cada um com pontos de fronteira que são designados por nós. Qualquer estrutura pode, teoricamente, ser dividida em elementos muito pequenos, obtendo-se uma boa aproximação do deslocamento (ou campo de tensões) para cada elemento, recorrendo a funções de forma de segunda e terceira ordem. Este método é amplamente utilizado na indústria, visto que, pode produzir-se uma boa representação de uma verdadeira estrutura.

No entanto, deve-se ter em conta que, devido a limitações no método, um modelo de elementos finitos é sempre uma aproximação da estrutura em estudo. Especialmente em estruturas complexas, aproximações podem levar a erros sendo introduzidos no modelo de elementos finitos, como por exemplo:

- erros de discretização de parâmetros distribuídos devido a suposições defeituosas em funções de forma de elementos individuais e/ou uma malha de má qualidade;
- má aproximação das condições de fronteira;
- modelação inadequada das ligações;
- erros nas propriedades mecânicas dos materiais;
- etc.

Técnicas de ajuste do modelo numérico

Apesar dos métodos numéricos de análise estrutural em uso serem altamente refinados, seus resultados são extremamente dependentes do conhecimento preciso dos parâmetros físicos e geométricos a serem utilizados na modelação, sendo a escolha destes parâmetros crucial para que haja concordância entre os dados experimentais e os resultados analíticos e/ou numéricos. Se as diferenças encontradas forem significativas, assumindo que os dados experimentais são precisos, deve-se proceder ao ajuste do modelo numérico.

As técnicas de ajuste de modelo numérico consistem basicamente na solução de um problema inverso, ou seja, conhecido o comportamento de um sistema físico deseja-se determinar um modelo analítico que reproduza exatamente o seu comportamento. Atualmente, o método dos elementos finitos tem sido largamente utilizado para este fim, empregando-se tanto técnicas

diretas de ajuste de matrizes de rigidez, amortecimento e massa do modelo numérico, como através de métodos iterativos que ajustam os parâmetros utilizados na modelação.

Por exemplo, Moreira [1] considerou o elemento finito de uma viga *sandwich* para a definição do modelo numérico e calculou a função de resposta em frequência numérica pelo método da análise direta em frequência para identificar as propriedades dissipativas de componentes de cortiça.

Outro método inverso serve para identificar os parâmetros do modelo de derivadas fracionárias de 4 parâmetros representando o módulo complexo do material viscoelástico.

O método inverso que se irá usar minimiza a diferença entre o valor experimental e o valor numérico da função de resposta em frequência do tipo transmissibilidade (TR) para certas frequências discretas, a fim de identificar os parâmetros do material que constituem o modelo constitutivo considerado. O método começa pela função de resposta em frequência experimental medida através do teste de vibração forçada com ressonância.

Em primeiro lugar, as propriedades geométricas e físicas da amostra testada são especificadas, a fim de definir o modelo de elementos finitos necessário para calcular a função de resposta em frequência numérica. Assim, é definido um modelo para descrever a dependência das propriedades dinâmicas do material viscoelástico, a ser caracterizado, em relação à frequência, e é fornecida uma estimativa inicial dos parâmetros.

Em seguida, as frequências discretas, referidas como frequências de controlo, onde a diferença entre a função de resposta em frequência experimental e numérica é calculada, são seleccionadas na sequência de alguns critérios estabelecidos. Finalmente, métodos numéricos adequados para o cálculo da função de resposta em frequência numérica e um algoritmo de minimização são requeridos [2].

Os parâmetros do material que constituem o modelo constitutivo são modificados para cada iteração; o modelo de elementos finitos (MEF) é atualizado e a função de resposta em frequência numérica é calculada nas frequências de controlo seleccionadas; o erro é avaliado para tais frequências e o processo iterativo é repetido até que o erro se torne mais pequeno que uma certa tolerância especificada ou o número máximo de iterações seja excedido.

Por fim, a transmissibilidade numérica calculada com os parâmetros convergentes é correlacionada com a TR experimental, validando a identificação das propriedades dinâmicas.

1.1 Motivação

A área de vibrações está em desenvolvimento e há ainda muito mais por descobrir, tais como, métodos de análise de vibrações, mecanismos de amortecimento, aplicações de materiais viscoelástico, etc. Neste caso, pretende-se estudar o caso da aplicação de materiais viscoelásticos correspondendo ao amortecimento passivo de estruturas e máquinas. Estes materiais estão em estudo contínuo, procurando analisar-se o comportamento das suas propriedades fazendo variar a temperatura, frequência, deformação, tensão, etc. por forma a concluir a sua melhor aplicação. Este trabalho despertou o meu interesse, principalmente, por puder fazer a análise experimental, lidando diretamente com o comportamento dos materiais viscoelásticos e casos de vibração, e pelo desafio de estabelecer e implementar um método de identificação comparando o modelo numérico com análise experimental. Pouco conhecia da utilização de amortecimento passivo, complementando assim a minha cultura académica.

1.2 Objetivos

O objetivo principal deste trabalho consiste em estabelecer e implementar um método inverso de identificação das propriedades mecânicas de materiais viscoelásticos utilizando provetes tipo viga com tratamento viscoelástico e baseado num modelo de elementos finitos e nas funções de resposta em frequência de tipo transmissibilidade.

Para atingir o objetivo principal, pretende-se alcançar os seguintes objetivos parciais:

- Pesquisa e recolha de informação sobre os materiais viscoelásticos em geral, aplicações e metodologias de caracterização das propriedades dinâmicas destes;
- Formulação e implementação em *Matlab*[®] de um elemento finito multicamada para modelização de provetes tipo viga com tratamentos viscoelásticos superficiais ou integrados;
- Implementar em *Matlab*[®] uma função geradora de funções de resposta em frequência de tipo transmissibilidade para provetes de tipo viga encastrados-livres com excitação passiva do encastramento;
- Estabelecer e implementar um algoritmo de identificação inversa baseado no modelo de elementos finitos e na função transmissibilidade para identificação das propriedades mecânicas de materiais viscoelásticos minimizando o desvio entre a função transmissibilidade numérica e experimental a determinadas frequências de controlo do processo;
- Realização de ensaios experimentais para validação do método estabelecido para a caracterização das propriedades mecânicas de materiais viscoelásticos.

1.3 Estrutura da dissertação

Esta dissertação está dividida em 7 capítulos.

O primeiro capítulo contém uma introdução genérica ao tema do trabalho e às ferramentas utilizadas para a sua realização, os objetivos do trabalho e a motivação para realizar esta dissertação.

No segundo capítulo é analisado o problema associado à caracterização das propriedades dos materiais viscoelásticos e a respetiva revisão bibliográfica, dando especial relevo aos métodos disponíveis, à medição e representação do módulo complexo e ao modelo constitutivo do material viscoelástico.

No terceiro capítulo é apresentado o método inverso aplicado no processo de identificação do material viscoelástico, explicando a utilização das frequências de controlo, do algoritmo de minimização e do indicador de correlação LAC.

No quarto capítulo é apresentada a formulação do elemento finito multicamada baseado na teoria *layerwise*.

No quinto capítulo apresenta-se a montagem experimental e os provetes utilizados.

O sexto capítulo documenta o estudo experimental desenvolvido sobre os provetes utilizados, com o objetivo de identificar as propriedades do material viscoelástico e validar o método de identificação inverso desenvolvido neste trabalho.

O sétimo e último capítulo é dedicado à apresentação das conclusões retiradas ao longo do trabalho e a um conjunto de sugestões para um futuro trabalho ou melhoramento deste.

Capítulo 2

Caracterização dos materiais viscoelásticos

2.1 Tratamentos viscoelásticos

Os materiais viscoelásticos aplicados em tratamentos viscoelásticos, normalmente, são materiais de base polimérica. Estes materiais, durante a deformação cíclica, induzem uma dissipação de energia sob a forma de calor, que sendo eficientemente dissipada para o exterior, torna o amortecimento eficiente. Exibem um fator de perda (η_r) considerável, que lhes incute uma capacidade importante de amortecimento que depende essencialmente da temperatura e da frequência. A caracterização da dependência das propriedades dinâmicas dos materiais viscoelásticos com a frequência e com a temperatura, e a sua análise, constitui um dos pontos cruciais no processo deste projeto e da otimização de tratamentos passivos com materiais viscoelásticos.

O aproveitamento eficiente da capacidade de amortecimento dos materiais viscoelásticos resulta da sua integração na estrutura, construída a partir de materiais estruturalmente eficientes (ligas de alumínio, ligas de aço e compósitos de carbono), sob a forma de tratamentos dissipativos, isto porque, os materiais viscoelásticos não são estruturalmente eficientes devido a terem uma massa elevada e uma resistência mecânica reduzida. Os apoios de pontes e os pontos de ligação de cabos de sustentação, ou apoios anti-vibração de máquinas de produção e os apoios de lages estruturais de edifícios são alguns exemplos de aplicação eficiente do amortecimento passivo.

2.2 Configurações de tratamentos viscoelásticos

O emprego de camadas de material viscoelástico na estrutura pode ser realizado segundo três configurações: Superficial Sem Restrição ou Livre (FLD - "*Free layer damping*"), Superficial Com Restrição (CLD - "*Constrained layer damping*") e Integrada (ILD - "*Integrated layer damping*").

2.2.1 Tratamentos superficiais sem restrição (FLD)

Consiste num tratamento para controlar a vibração da viga compósita, colando uma camada de material viscoelástico na superfície da viga base, de maneira que a energia seja dissipada por deformação cíclica do material viscoelástico. Uma vez que, a camada viscoelástica é deformada principalmente em extensão-compressão, a deformação imposta pela estrutura em vibração não é muito significativa, exigindo a aplicação de camadas viscoelásticas consideravelmente espessas

de forma a justificar o tratamento, de maneira que a eficiência deste tratamento aumenta com o aumento da espessura da camada viscoelástica [3].

Esta configuração é pois pouco eficiente e pode introduzir grandes alterações de massa na estrutura, devido às elevadas espessuras da camada viscoelástica. Em contrapartida, constitui uma forma eficiente de isolamento térmico e acústico [4].

2.2.2 Tratamentos superficiais com restrição (CLD)

Tratamento que serve para controlar a vibração da viga compósita, colando uma camada de material viscoelástico entre a superfície da viga base e uma camada adicional de material elástico, cuja rigidez relativa é maior do que a do material viscoelástico. Assim, a energia é dissipada por deformação de corte do material viscoelástico [3]. Esta camada de restrição permite desenvolver-se tratamentos bastante eficientes e poucos espessos, sendo normalmente aplicadas camadas de material viscoelástico com espessuras inferiores a $0.5mm$ [4]. Usualmente, a camada de restrição é de alumínio ou aço inoxidável.

2.2.3 Tratamentos integrados (ILD)

Este tratamento também permite controlar a vibração da viga compósita, aplicando uma camada de material viscoelástico no núcleo de uma viga *sandwich*, de maneira a dissipar a energia por deformação de corte, que neste caso, é muito elevada em resultado da posição particular sobre o plano neutro do conjunto. Esta configuração permite aplicar tratamentos muito eficientes [4].

2.3 Caracterização das propriedades dos materiais viscoelásticos

A maioria dos materiais viscoelásticos aplicados em tratamentos de amortecimento podem ser considerados homogêneos, uma vez que as suas propriedades são idênticas em todo o volume da amostra de material, e isotrópicos, ou seja, as suas propriedades são idênticas em qualquer direção. Por outro lado, as suas propriedades dependem fortemente da temperatura, da frequência e da amplitude de deformação. Compreender como se dá a variação das propriedades do amortecimento com o meio envolvente é essencial, para um controlo eficiente do ruído e da vibração, já que a gama de funcionamento é bastante restrita. O fato de as propriedades serem afetadas pelo meio envolvente pode à primeira vista ser uma desvantagem, mas a verdade é que esta variação permite uma maior flexibilidade na escolha do material viscoelástico a utilizar.

2.3.1 Efeito da temperatura

A temperatura é, geralmente, o fator ambiental que mais afeta as propriedades de amortecimento dos materiais viscoelásticos.

Como se pode ver pela figura 2.1 a mínima alteração da temperatura altera as propriedades, deste modo pode-se concluir que cada material tem a sua gama de temperaturas ideal para trabalhar. Pode-se observar, também, que a gama de temperaturas está dividida em quatro zonas.

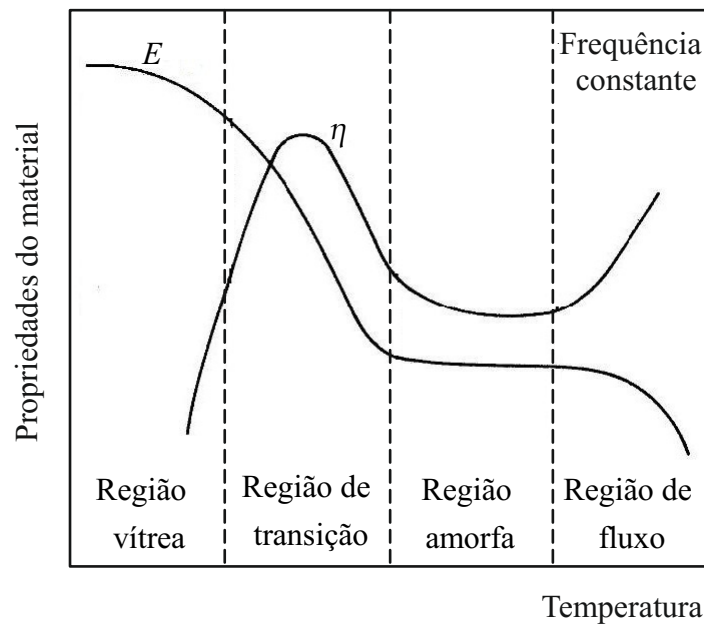


Figura 2.1: Variação do módulo de ganho e do fator de perda com a temperatura [4]

A primeira zona é designada por zona vítrea (*Glassy region*), onde o material encontra-se a baixas temperaturas e possui elevada rigidez. Nesta região, o módulo de ganho atinge o seu valor máximo, variando lentamente com a temperatura, enquanto que, o fator de perda possui valores extremamente baixos e aumenta significativamente com o aumento da temperatura.

A zona de transição (*Transition region*), segunda região, é caracterizada por ter um módulo de ganho que diminui rapidamente com o aumento da temperatura, enquanto que o fator de perda atinge o seu valor máximo.

A terceira região é a zona amorfa (*Rubbery region*), onde ambos, módulo de ganho e fator de perda, tomam valores baixos e pouco variam com a temperatura. Nesta zona o material apresenta o seu valor mínimo de amortecimento.

A quarta zona (*Flow region*) é típica em materiais de amortecimento, como termoplásticos. Nesta zona, o material continua a amolecer com o aumento da temperatura, como se derretesse, enquanto que o fator de perda assume valores elevados. Para a maioria dos materiais baseados em borrachas esta quarta zona não existe, como é o caso.

Em suma, a eficiência do tratamento de amortecimento depende fortemente da relação entre a temperatura de funcionamento e da temperatura de transição do material [5].

2.3.2 Efeito da frequência

O efeito mais importante da frequência é que o módulo de ganho aumenta sempre com o aumento da frequência. Este aumento é ligeiro tanto na zona vítrea como na zona amorfa, ao passo que, na zona de transição possui uma taxa de variação elevada. No que toca ao fator de perda, este aumenta conforme a frequência aumenta na zona amorfa, atingindo o valor máximo na região de transição, e depois diminui com o aumento da frequência na região vítrea (fig.2.2).

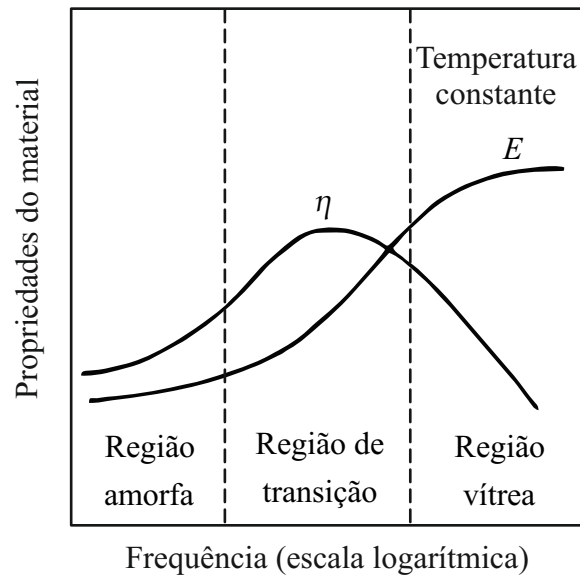


Figura 2.2: Variação da parte real do módulo de ganho e do fator de perda com a frequência [4]

Analisando a figura 2.2 verifica-se que, qualitativamente, o efeito da frequência é o inverso do efeito da temperatura no comportamento do módulo de ganho e no fator de perda. A diferença entre o efeito da frequência e o da temperatura é significativa, uma vez que a variação de umas centenas de graus na temperatura corresponde a uma variação da frequência de ordem 10 ou superior.

Resumidamente, quando se utiliza um material viscoelástico deve-se ter em conta o comportamento do módulo de ganho do material numa certa gama de temperaturas e de frequências [5].

2.3.3 Considerações na caracterização dos materiais viscoelásticos com a frequência

Quando um material viscoelástico é sujeito a um carregamento harmónico, a deformação resultante é também harmónica, apresentado a mesma frequência de carregamento. Ao contrário do que acontece nos materiais elásticos, existe um desfasamento relativo δ de valor significativo entre a deformação $\varepsilon(t)$ obtida e a tensão $\sigma(t)$ imposta pelo carregamento (fig.2.3).

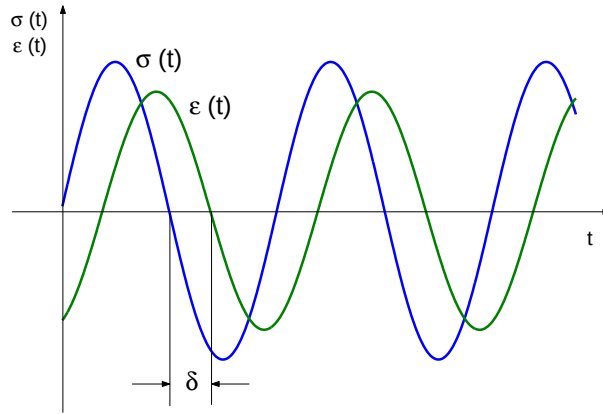


Figura 2.3: Excitação e resposta harmônica de um material viscoelástico [4]

A representação da tensão medida em função da deformação medida é denominada por ciclo de histerese (fig.2.4). Apresenta a forma de uma elipse cujo ângulo formado pelo seu eixo maior e o eixo das abcissas é proporcional à rigidez do material, e a razão entre o eixo menor e o eixo maior é um indicador da sua capacidade de amortecimento. Se o amortecimento for nulo, ou seja, se o material apresentar um comportamento elástico, o ciclo de histerese toma a forma de uma reta, cuja inclinação determina a sua rigidez.

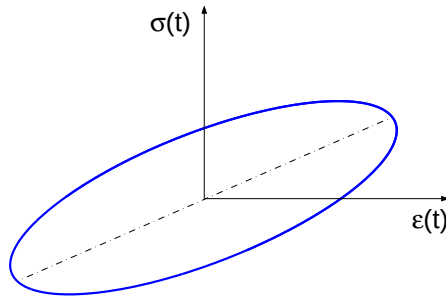


Figura 2.4: Ciclo histerético de um material viscoelástico [4]

Considerando um carregamento harmônico sinusoidal num provete este induz um campo de tensões da forma [4]:

$$\sigma(t) = \sigma_0 \sin(\omega t) \quad (2.1)$$

onde o material viscoelástico responde com uma deformação também do tipo sinusoidal da forma [4]:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \sin(\omega t - \delta) \quad (2.2)$$

A equação 2.1 pode ser reescrita na forma:

$$\sigma(t) = \sigma_0 \sin(\omega t - \delta + \delta) = \sigma_0 \sin(\omega t - \delta) \cos(\delta) + \sigma_0 \cos(\omega t - \delta) \sin(\delta) \quad (2.3)$$

onde a derivada da deformação é:

$$\frac{d\varepsilon(t)}{dt} = \varepsilon_0 \omega \cos(\omega t - \delta) \Leftrightarrow \cos(\omega t - \delta) = \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \frac{1}{\varepsilon_0 \omega} \quad (2.4)$$

substituindo na equação 2.3

$$\sigma(t) = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \varepsilon(t) \cos(\delta) + \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0 \omega} \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \sin(\delta) \quad (2.5)$$

substituindo o termo $\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \cos(\delta)$ pelo módulo de ganho de extensão E' vem:

$$\sigma(t) = E' \varepsilon(t) + \frac{E'}{\omega} \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \tan(\delta) \quad (2.6)$$

Considerando uma deformação de corte $\gamma(t)$, pode ser escrita na seguinte forma:

$$\tau(t) = G' \gamma(t) + \frac{G'}{\omega} \frac{d\gamma(t)}{dt} \tan(\delta) \quad (2.7)$$

onde $\tau(t)$ representa a tensão de corte e G' o módulo de ganho de corte. O termo $\tan(\delta)$ é, usualmente, designado por tangente de delta, é equivalente ao fator de perda do material, correntemente representado por η [4].

2.3.4 Módulo complexo

Se generalizarmos a função da deformada harmónica, representando-a por uma função exponencial complexa do tipo:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 e^{j\omega t} \quad (2.8)$$

a equação 2.6 pode ser escrita no domínio da frequência na forma:

$$\sigma(\omega) = E'(\omega) \varepsilon(\omega) + j E'(\omega) \eta(\omega) \varepsilon(\omega) = [E'(\omega) + j E''(\omega)] \varepsilon(\omega) = \bar{E}(\omega) \varepsilon(\omega) \quad (2.9)$$

ou, na forma homóloga para a deformação em corte, como:

$$\tau(\omega) = [G'(\omega) + j G''(\omega)] \gamma(\omega) = \bar{G}(\omega) \gamma(\omega) \quad (2.10)$$

sendo a variável $\bar{E}(\omega)$ designada por módulo de extensão complexo.

O módulo complexo permite representar, de uma forma simples, o amortecimento viscoelástico e o efeito viscoelástico em regime estacionário harmónico.

A parte real E' do módulo complexo designa-se por módulo de ganho, e representa a capacidade de armazenamento de energia de deformação do material. A componente imaginária define a capacidade de dissipação do material viscoelástico, é obtida pela multiplicação do módulo de ganho pelo fator de perda do material e designa-se por módulo de perda, sendo representada pelo símbolo E'' [4]. O fator de perda, é definido como a razão entre o módulo de perda e o módulo de ganho do material:

$$\eta(\omega) = \frac{E''}{E'} = \frac{\text{Im}(\bar{E})}{\text{Re}(\bar{E})} \quad (2.11)$$

O fator de perda pode, em regime harmónico estacionário e para valores reduzidos, relacionar-se com a razão de amortecimento viscoso ξ pela relação [4]:

$$\eta = 2\xi \quad (2.12)$$

2.3.5 Efeito de tensões cíclicas

O efeito das tensões cíclicas nas propriedades dos materiais viscoelásticos é muito difícil de medir, isto porque, tensões elevadas resultam numa grande dissipação de energia, o que leva à temperatura do material a aumentar rapidamente, deste modo os dois efeitos da temperatura e da tensão estão combinados. Esta combinação realça-se se tentarmos medir o efeito das tensões cíclicas na zona de transição, onde o amortecimento é extremamente elevado. Por outro lado, na zona amorfa, o módulo complexo e o fator de perda variam lentamente com a temperatura, de maneira que o efeito da temperatura nesta região torna-se secundário, predominando o efeito da tensão, daí a maior parte das análises serem realizadas na zona amorfa.

A variação das propriedades de amortecimento com a tensão é idêntica à da temperatura, embora o efeito é muito mais pequeno comparando com o efeito da temperatura. Neste caso, tem-se três zonas, a zona linear, a zona de transição e a zona de equilíbrio (fig.2.5). Acrescenta-se que a variação do módulo de ganho depende da composição do material [5].

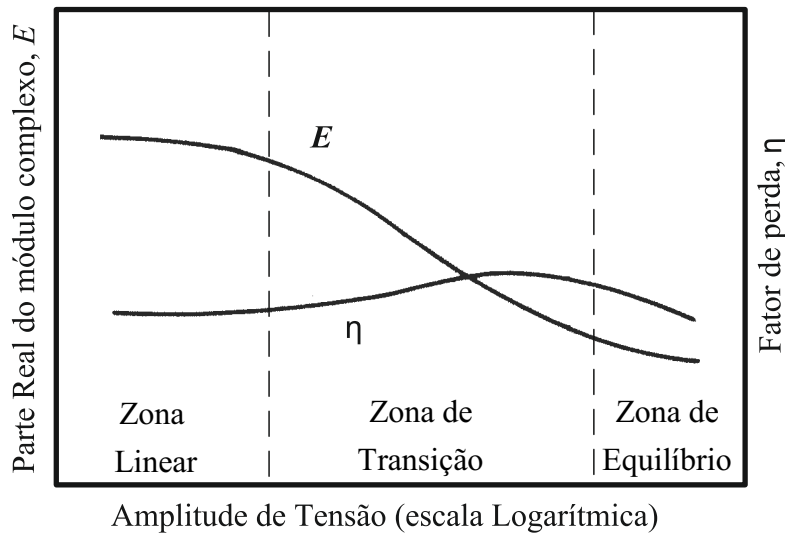


Figura 2.5: Variação da parte real do módulo de ganho e do fator de perda com a amplitude de tensão [5]

2.3.6 Efeito da espessura

Outro fator que influencia as propriedades mecânicas do material viscoelástico é a espessura deste. Supondo uma viga com tratamento viscoelástico do tipo integrado (ILD), se a espessura do material viscoelástico for pequena comparando com a espessura do material elástico, considera-se que o aumento do amortecimento é uma função linear da espessura, ou seja, se a espessura for o dobro a quantidade de amortecimento também é o dobro. Note-se que isto

só se verifica para materiais viscoelásticos em que as propriedades mecânicas do material não tenham grandes alterações com a variação da frequência. Acrescenta-se que à medida que a espessura do material viscoelástico aumenta, a frequência de ressonância também aumenta, especialmente a baixas temperaturas. Também, se verifica que o pico de amortecimento ocorre para temperaturas mais elevadas, isto porque, uma elevada frequência é equivalente a ter-se temperaturas baixas, na medida em que as propriedades do material viscoelástico estão em causa.

Por outro lado, quando a espessura do material viscoelástico é superior à espessura do material elástico, o amortecimento deixa de ser uma função linear da espessura e a viga tem comportamento de material viscoelástico, deste modo não é possível obter um amortecimento mais elevado do que o amortecimento do próprio material viscoelástico.

2.3.7 Efeito de outros fatores ambientais

As propriedades do amortecimento dos materiais viscoelásticos são também afetadas por outros fatores ambientais, para além dos referidos, tais como, exposição a combustíveis, lubrificantes e outros fluídos, vácuo e pressão, que podem alterar a estrutura molecular de um modo irreversível, sendo essa alteração detetada no comportamento do módulo de ganho. Se um material é continuamente exposto a um ambiente específico, como por exemplo a elevadas temperaturas, as suas propriedades são suscetíveis de exibir um aumento no módulo de ganho e um decréscimo nos valores do fator de perda [5].

2.4 Medição do módulo complexo

O processo de medição do módulo complexo de um material viscoelástico reveste-se de um conjunto de características e requisitos que o tornam numa tarefa difícil, requerendo um procedimento de medição rigoroso e metódico. O elevado amortecimento proporcionado pelos materiais viscoelásticos, a heterogeneidade do material e a dificuldade na obtenção de uma montagem experimental, idêntica ao modelo numérico hipoteticamente considerado, constituem as principais dificuldades na obtenção de um sistema capaz de caracterizar convenientemente e de forma simples as propriedades de materiais viscoelásticos com elevado amortecimento.

Existem vários métodos de medição do módulo complexo de materiais viscoelásticos que se podem agrupar em dois grandes grupos: métodos indiretos baseados em provetes tipo viga com tratamento viscoelástico e métodos diretos baseados em provetes de material viscoelástico que constituem o elemento elástico-amortecedor de sistemas discretos onde o módulo complexo é medido através de um ensaio dinâmico.

2.4.1 Vigas com tratamento

A caracterização de camadas de material viscoelástico aplicadas em vigas constitui um processo de determinação do módulo complexo, utilizado vulgarmente em aplicações de amortecimento passivo. O método de determinação do módulo complexo em vigas é regulamentado pela norma “ASTM E756-05: *Standard test method for measuring vibration-damping properties of materials*” [3].

Neste método é utilizada uma viga, usualmente encastrada-livre, sobre a qual é aplicado um tratamento viscoelástico com ou sem restrição.

O material viscoelástico é caracterizado a partir da modificação introduzida pelo tratamento nas frequências naturais e no fator de perda modal para um conjunto restrito de modos naturais de baixa ordem, normalmente os três primeiros modos naturais da viga.

O conjunto viga e tratamento viscoelástico pode assumir diferentes configurações, permitindo caracterizar o módulo de extensão ou o módulo de corte consoante o tipo de deformação imposto à camada viscoelástica.

2.4.1.1 Viga de *Oberst*

Este tipo de viga é também designada por viga com tratamento superficial sem restrição, uma vez que a viga é obtida pela colocação de uma camada sem restrição do material viscoelástico na viga base, preferencialmente metálica (alumínio ou aço inoxidável) (fig. 2.6).

Inicialmente, é caracterizada a viga base de forma a identificar as primeiras frequências naturais ω_{r0} para a gama de temperaturas considerada. Em seguida, é aplicada a camada de material viscoelástico sobre a viga, a qual é ensaiada de forma a obter as novas frequências naturais ω_r e correspondentes fatores de perda η_r .



Figura 2.6: Viga de *Oberst* [6]

A razão entre a rigidez de flexão da viga amortecida e não amortecida é calculada recorrendo à expressão [4]:

$$\bar{R} = \frac{\bar{E}I}{E_1 I_1} = \left(1 + \frac{\rho_2}{\rho_1} h_2\right) \left(\frac{\omega_r}{\omega_{0r}}\right)^2 (1 + j\eta_r) \quad (2.13)$$

onde ρ_1 e ρ_2 representam as massas volúmicas dos materiais constituintes da viga base e da camada viscoelástica, respetivamente. E_1 é o módulo de elasticidade do material da viga base e I e I_1 são os momentos de segunda ordem da secção reta da camada viscoelástica e da viga base. O parâmetro adimensional h_2 traduz a razão entre a espessura da camada viscoelástica H_2 e a espessura da viga de base H_1 .

A razão de rigidez $\bar{R}$ é aplicada no cálculo do módulo de extensão complexo do material viscoelástico através da expressão [4]:

$$\bar{E}_2 = E_1 \frac{-\hat{h} + \sqrt{\hat{h}^2 + 4h_2^2(\bar{R} - 1)}}{2h_2^2} \quad (2.14)$$

onde o parâmetro auxiliar $\hat{h}$ é definido por:

$$\hat{h} = 4 - \bar{R} + 4h_2^2 + 6h_2 \quad (2.15)$$

Para cada temperatura de ensaio são obtidos os valores do módulo de extensão complexo para valores de frequências correspondentes às frequências naturais da viga amortecida, recorrendo ao princípio da correspondência frequência-temperatura.

A elevada diferença entre os coeficientes de dilatação térmica dos materiais constituintes da viga, induz a flexão da viga quando submetida a temperaturas extremas relativamente à temperatura de montagem.

2.4.1.2 Viga de *Van Oort*

Neste tipo de viga são colocadas duas camadas idênticas de material viscoelástico, uma em cada lado da viga base, como apresentado na figura 2.7.



Figura 2.7: Viga de *Van Oort* [6]

A viga *Van Oort* permite evitar o inconveniente que a viga *Oberst* possui quando submetida a temperaturas extremas, uma vez que esta é simétrica. Outra vantagem desta configuração, é o fato da posição do eixo neutro da viga compósita permanecer inalterada relativamente à posição inicial da viga não amortecida, o que permite uma simplificação na expressão da rigidez de flexão da viga compósita.

O processo de obtenção das propriedades dinâmicas da viga de *Van Oort* é realizado de forma idêntica à descrita na viga de *Oberst*. Assim, a razão de rigidez de flexão apresenta-se da seguinte forma [4]:

$$\bar{R} = \frac{\bar{E}I}{E_1 I_1} = \left(1 + 2 \frac{\rho_2}{\rho_1} h_2\right) \left(\frac{\omega_r}{\omega_{0r}}\right)^2 (1 + j\eta_r) \quad (2.16)$$

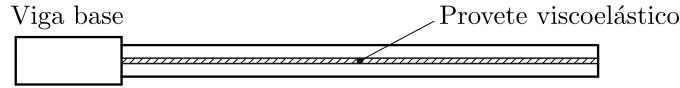
A partir da equação 2.16 é possível determinar o módulo de extensão complexo do material viscoelástico através da expressão [4]:

$$\bar{E}_2 = E_1 \frac{\bar{R} - 1}{(1 + 2h_2)^3 - 1} \quad (2.17)$$

que é significativamente mais simples comparativamente com a expressão do módulo de extensão complexo do material viscoelástico referente à viga de *Oberst*. A configuração segundo *Van Oort* é frequentemente usada quando se pretende analisar a viga experimentalmente dentro de uma gama de temperaturas larga, uma vez que o efeito da temperatura é mínimo, o efeito de flexão da viga também é reduzido [7].

2.4.1.3 Viga *sandwich*

Quando o material viscoelástico a caracterizar apresenta um reduzido módulo de ganho e/ou se pretende caracterizar diretamente o seu módulo de corte complexo, é usual utilizar-se a viga *sandwich*. Esta é obtida através da colocação de uma camada fina de material viscoelástico entre duas vigas metálicas idênticas, obtendo-se uma viga *sandwich* simétrica (fig.2.8). A simetria da viga permite simplificar a expressão da rigidez de flexão da viga compósita.

Figura 2.8: Viga *sandwich* [6]

Para determinar a equação da rigidez de flexão da viga *sandwich* utilizaram-se as equações de RKU (Ross-Kerwin-Ungar), que são obtidas com base num conjunto de hipóteses simplificativas [4].

A primeira hipótese a ter em conta é que estas equações foram desenvolvidas considerando as condições de fronteira da viga simplesmente apoiada. No entanto, a montagem experimental que permite obter as condições de fronteira da viga simplesmente apoiada não é fácil de se realizar na prática. A montagem com vigas encastradas-livres permite simplificar a montagem do equipamento de excitação e de medida. Deste modo, torna-se necessário proceder a um processo de correção aos valores obtidos na caracterização do material viscoelástico.

As equações RKU para este caso podem ainda ser simplificadas desprezando o efeito da rigidez de flexão do núcleo viscoelástico, ou seja, considerando que o seu módulo de extensão é nulo. O erro relativo a esta simplificação é desprezado, uma vez que o módulo de ganho que estes materiais apresentam é reduzido, permitindo, assim, inverter facilmente a equação da viga *sandwich* de forma a caracterizar diretamente o módulo de corte complexo do material viscoelástico.

Inicialmente, no processo de caracterização são determinadas as frequências naturais da viga base, ω_{0r} , seguindo-se a obtenção das frequências naturais ω_r e os correspondentes fatores de perda η_r , usando a mesma metodologia descrita nas configurações anteriores.

Neste caso, a razão de rigidez de flexão da viga compósita é definida por [4]:

$$\bar{R} = \frac{\bar{E}I}{E_1 I_1} = \left(2 + \frac{\rho_2}{\rho_1} h_2\right) \left(\frac{\omega_r}{\omega_{0r}}\right)^2 (1 + j\eta_r) \quad (2.18)$$

Para a determinação do parâmetro de corte $\bar{g}$, utilizou-se a expressão da razão de rigidez de flexão (2.18):

$$\bar{g} = \frac{\bar{R} - 2}{12(1 + h_2)^2 - 2\bar{R} + 4} \quad (2.19)$$

que permite calcular o módulo de corte complexo do material viscoelástico pela relação [4]:

$$\bar{G}_2 = \frac{\bar{g} E_1 H_2 H_3 \pi^2}{\lambda_n^2} = \bar{g} p^2 E_1 H_1 H_2 \quad (2.20)$$

onde os parâmetros E_1 , H_1 e H_2 representam o módulo de extensão do material constituinte das vigas externas, a espessura de cada uma das vigas externas e a espessura da camada viscoelástica, respetivamente. O parâmetro λ_n é o comprimento de onda semi-efectivo do modo natural n . O parâmetro p depende da forma modal correspondente à frequência natural em análise (Tabela 2.1).

Tabela 2.1: Parâmetro p para viga encastrada

r	p^2
1	$3.516/L^2$
2	$22.035/L^2$
3	$61.697/L^2$
4	$120.90/L^2$
5	$199.86/L^2$
6	$298.56/L^2$
$\vdots$	$\vdots$
m	$(2m - 1)^2 \pi^2 / 4L^2$
L : comprimento da viga exposta	

2.4.1.4 Viga *sandwich* dupla

Esta configuração utiliza-se quando se pretende determinar o módulo de corte complexo de materiais viscoelásticos pouco rígidos. Neste caso, a viga tratada possui duas camadas de material viscoelástico com restrição, formando uma viga *sandwich* dupla (fig.2.9).

Figura 2.9: Viga *sandwich* dupla [4]

Esta montagem permite uma simplificação considerável das equações RKU, dado que a posição do eixo neutro do conjunto não é alterada com a aplicação do tratamento. Assim, considerando esta simplificação, é possível obter-se a equação 2.21 da razão da rigidez de flexão a partir das frequências naturais da viga base e da viga compósita, bem como os fatores de perda modais [4].

$$\bar{R} = \frac{\bar{EI}}{E_1 I_1} = 1 \left(+2 \frac{\rho_2}{\rho_1} h_2 + 2 \frac{\rho_3}{\rho_1} h_3 \right) \left(\frac{\omega_r}{\omega_{0r}} \right)^2 (1 + j\eta_r) \quad (2.21)$$

onde h_3 representa a razão entre a espessura da viga base e a espessura de cada uma das camadas de restrição. O parâmetro de corte associado a cada uma das razões de rigidez calculadas é obtido através da equação [4]:

$$\bar{g} = \frac{\bar{R} - 1 - 2e_3 h_3^3}{1 + 2e_3 h_3^3 + 6e_3 h_3 (1 + 2h_2 + h_3)^2 - \bar{R}} \quad (2.22)$$

onde e_3 representa a razão entre o módulo de extensão da viga base e o módulo de extensão das camadas de restrição.

O cálculo do módulo de corte complexo, bem como o procedimento de correção devido às condições de fronteira, desenvolvem-se de forma idêntica à descrita na configuração da viga *sandwich*.

2.4.2 Sistema discreto com um grau de liberdade

O sistema com um grau de liberdade é caracterizado pela sua simplicidade associada à análise do modelo analítico e dos dados medidos e, por outro lado, pela dificuldade em obter uma montagem experimental capaz de representar o modelo numérico considerado.

2.4.2.1 Configuração do sistema de medição

Nesta configuração, o material viscoelástico assume a função de elemento elástico e amortecedor enquanto que o bloco rígido de massa constitui a massa concentrada. O sistema pode ter duas configurações, conforme seja deformado em corte (fig.2.10a)) ou em compressão-extensão (fig.2.10b)).

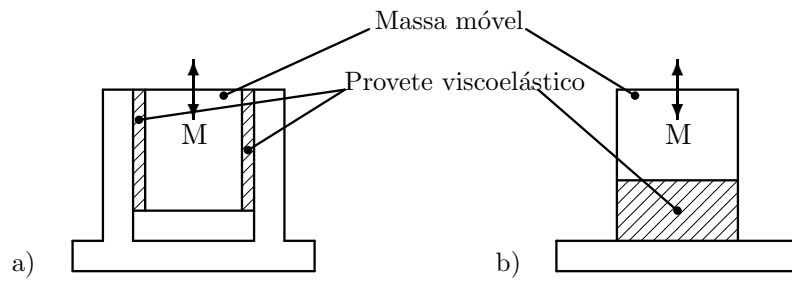


Figura 2.10: Sistema com um grau de liberdade [4]

Assim, a rigidez complexa equivalente é calculada em função dos parâmetros dimensionais do provete de material viscoelástico e do seu módulo complexo, na forma:

- provete em tração-compressão:

$$\bar{K} = \bar{E} \frac{A_E}{L} \quad (2.23)$$

- provete em corte:

$$\bar{K} = \bar{G} \frac{A_C}{h} \quad (2.24)$$

onde $\bar{E}$ é o módulo complexo de extensão do material viscoelástico, A_E é a área transversal do provete, L é o comprimento do provete em extensão, $\bar{G}$ o módulo complexo de corte do material viscoelástico, A_C a área de corte do provete e h a espessura do provete.

Como já foi referido, esta configuração permite representar um sistema teórico que permite um tratamento matemático simples e direto na caracterização do módulo complexo do material viscoelástico. É, contudo, muito difícil impor restrições na montagem experimental de forma a que esta possua unicamente o grau de liberdade considerado. Com efeito, a montagem experimental da figura 2.10b) apresenta, para além do modo de vibração correspondente à translação vertical, um modo de rotação, cuja frequência é inferior mas muito próxima da do modo pretendido. Desta forma, torna-se importante restringir este movimento.

2.4.2.2 Medição da resposta do sistema

Este método de caracterização é, também, designado por método de impedância. A caracterização do material viscoelástico é realizada através da rigidez complexa da mola, $\bar{K}$, do sistema teórico com um grau de liberdade (fig.2.11), determinada a partir da sua resposta.

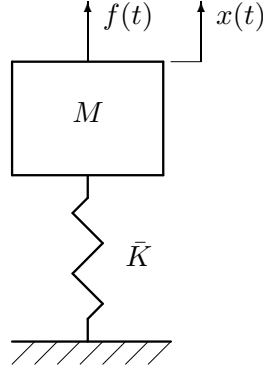


Figura 2.11: Medição da resposta para sistema com um grau de liberdade [4]

A equação de movimento do sistema com um grau de liberdade e massa M é definida como:

$$M\ddot{x}(t) + \bar{K}x(t) = f(t) \quad (2.25)$$

Considerando que o carregamento imposto é harmónico, $f(t) = Fe^{j\omega t}$, a resposta do sistema é também harmónica do tipo $x(t) = \bar{X}e^{j\omega t}$, sendo possível reescrever a equação de movimento do sistema na forma:

$$[-\omega^2 M + \bar{K}] \bar{X} = F \quad (2.26)$$

A função de resposta em frequência e respetiva inversa, pode, então, ser determinadas na forma:

- Receptância, α :

$$\alpha(\omega) = \frac{\bar{X}}{F} = \frac{1}{-\omega^2 M + \bar{K}} \quad (2.27)$$

- Rigidez dinâmica, $\mathcal{Z}$:

$$\mathcal{Z}(\omega) = \frac{F}{\bar{X}} = -\omega^2 M + \bar{K} \quad (2.28)$$

- Mobilidade, Y :

$$Y(\omega) = \frac{j\omega \bar{X}}{F} = \frac{j\omega}{-\omega^2 M + \bar{K}} \quad (2.29)$$

- Impedância mecânica, $\mathcal{I}$:

$$\mathcal{I}(\omega) = \frac{F}{j\omega\bar{X}} = \frac{-\omega^2 M + \bar{K}}{j\omega} \quad (2.30)$$

- Aceleração, $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A}(\omega) = \frac{-\omega^2\bar{X}}{F} = \frac{\omega^2}{\omega^2 M - \bar{K}} \quad (2.31)$$

- Massa aparente, $\mathcal{M}$:

$$\mathcal{M}(\omega) = \frac{F}{-\omega^2\bar{X}} = \frac{\omega^2 M - \bar{K}}{\omega^2} \quad (2.32)$$

A determinação da componente real da rigidez complexa, $K = \text{RE}(\bar{K})$, que permite caracterizar o módulo de ganho do material viscoelástico, e do fator de perda, $\eta = \frac{\text{IM}(\bar{K})}{\text{RE}(\bar{K})}$, torna-se relativamente mais simples utilizando diretamente as inversas das funções de resposta em frequência (rigidez dinâmica, impedância mecânica e massa aparente). Desta forma, é possível determinar a rigidez complexa em função das inversas das funções de resposta em frequência através das seguintes expressões:

- Rigidez dinâmica, $(K, \eta) = f(\mathcal{Z})$

$$\bar{K} = \omega^2 M + \mathcal{Z} \quad (2.33)$$

$$K(\omega) = \omega^2 M + \text{RE}(\mathcal{Z}) \quad (2.34)$$

$$\eta(\omega) = \frac{\text{IM}(\mathcal{Z})}{\omega^2 M + \text{RE}(\mathcal{Z})} \quad (2.35)$$

- Impedância mecânica, $(K, \eta) = f(\mathcal{I})$

$$\bar{K} = \omega^2 M + j\omega\mathcal{I} \quad (2.36)$$

$$K(\omega) = \omega [\omega M - \text{IM}(\mathcal{I})] \quad (2.37)$$

$$\eta(\omega) = \frac{\text{RE}(\mathcal{I})}{\omega M - \text{IM}(\mathcal{I})} \quad (2.38)$$

- Massa aparente, $(K, \eta) = f(\mathcal{M})$

$$\bar{K} = \omega^2 M - \omega^2 \mathcal{M} \quad (2.39)$$

$$K(\omega) = \omega^2 [M - \text{RE}(\mathcal{M})] \quad (2.40)$$

$$\eta(\omega) = -\frac{\text{IM}(\mathcal{M})}{M - \text{RE}(\mathcal{M})} \quad (2.41)$$

2.4.2.3 Medição da transmissibilidade do sistema

O sistema com um grau de liberdade pode ser modificado para a configuração de base móvel (fig.2.12), a qual é excitada passivamente por um movimento harmónico, $x_0(t) = X_0 e^{j\omega t}$, sendo a caracterização do material viscoelástico realizada através da medição da função transmissibilidade absoluta entre a base e a massa concentrada MP.

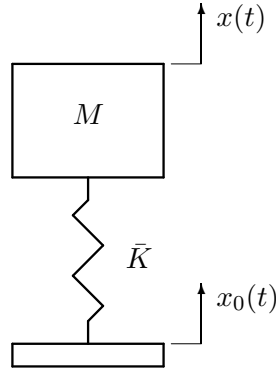


Figura 2.12: Medição da transmissibilidade para um sistema com um grau de liberdade [4]

O movimento do sistema com um grau de liberdade excitado pela base móvel é descrito pela equação de movimento:

$$M\ddot{x}(t) + \bar{K}(x(t) - x_0(t)) = 0 \quad (2.42)$$

Uma vez que o movimento da base móvel é do tipo harmónico, a massa concentrada MP descreve um movimento igualmente harmónico com a mesma frequência, todavia desfasado da oscilação da base em resultado do amortecimento viscoelástico, do tipo $x(t) = \bar{X}e^{j\omega t}$. Assim, a equação de movimento do sistema pode ser reescrita na forma:

$$[-\omega^2 M + \bar{K}] \bar{X} = \bar{K} X_0 \quad (2.43)$$

A função transmissibilidade absoluta do sistema pode então ser calculada pela equação:

$$T = \frac{\bar{X}}{X_0} = \frac{\bar{K}}{-\omega^2 M + \bar{K}} \quad (2.44)$$

Resolvendo a equação anterior a ordem a $\bar{K}$, obtém-se a seguinte relação:

$$\bar{K}(\omega) = \omega^2 M \left[\frac{T}{T - 1} \right] \quad (2.45)$$

Separando a rigidez complexa na sua componente real, K , e no respetivo fator de perda, η , obtém-se:

$$K(\omega) = \omega^2 M \left[\frac{\text{RE}(T) (\text{RE}(T) - 1) + (\text{IM}(T))^2}{(\text{RE}(T) - 1)^2 + (\text{IM}(T))^2} \right] \quad (2.46)$$

$$\eta(\omega) = \frac{-\text{IM}(T)}{\text{RE}(T) (\text{RE}(T) - 1) + (\text{IM}(T))^2} \quad (2.47)$$

Tal como se viu na caracterização baseada na medição da resposta do sistema, a determinação da rigidez complexa a partir da inversa da função transmissibilidade absoluta torna-se mais simples. Assim, a inversa da função transmissibilidade é definida por:

$$T^{-1} = \frac{\bar{K} - \omega^2 M}{\bar{K}} \quad (2.48)$$

que pode ser reescrita de forma a determinar a rigidez complexa:

$$\bar{K}(\omega) = \frac{\omega^2 M}{1 - T^{-1}} \quad (2.49)$$

ou, na suas componentes:

$$K(\omega) = \omega^2 M \left[\frac{\text{RE}(T^{-1}) - 1}{(\text{RE}(T^{-1}) - 1)^2 + (\text{IM}(T^{-1}))^2} \right] \quad (2.50)$$

$$\eta(\omega) = \frac{\text{IM}(T^{-1})}{\text{RE}(T^{-1})} \quad (2.51)$$

2.4.2.4 Considerações sobre sistemas discretos

Os métodos de caracterização de materiais viscoelásticos baseados em sistemas discretos com um ou mais graus de liberdade permitem utilizar uma descrição muito simples do modelo analítico, facilitando a identificação direta do módulo complexo do material em função da frequência, a partir da medição efetuada de funções de resposta em frequência.

Por outro lado, a aplicação deste método de caracterização de materiais com elevado amortecimento deve revestir-se de alguns cuidados especiais, pois apresenta uma elevada sensibilidade ao ruído inerente à cadeia de medição, aos efeitos colaterais devidos à montagem experimental e aos parâmetros dimensionais do sistema nomeadamente aos valores de massas móveis.

Apesar da dificuldade inerente à montagem experimental, este método de caracterização, recorrendo quer à medição da resposta do sistema quer à medição da sua transmissibilidade, é amplamente aplicado na determinação experimental de um vasto conjunto de materiais viscoelásticos, desde fibras finas viscoelásticas a espumas poliméricas rígidas [4].

2.5 Representação do módulo complexo

O processo de caracterização do material viscoelástico é efetuado de uma forma discreta, medindo o módulo complexo para valores discretos de frequência e de temperatura. Assim, é constituído um conjunto de valores do módulo complexo para diferentes pares de valores frequência-temperatura.

2.5.1 Princípio da correspondência frequência-temperatura

É possível combinar os efeitos da frequência e da temperatura numa única variável, normalmente designada por frequência reduzida (f_R). Este princípio da correspondência frequência-temperatura decorre da observação de que diferentes pares de frequência e de temperatura podem apresentar o mesmo módulo complexo, existindo entre esses pares uma relação bem definida. Supondo que existem dois pares de frequência-temperatura, (f_1, T_1) e (f_2, T_2) para os quais se verifique a relação:

$$\bar{G}(f_1, T_1) = \bar{G}(f_2, T_2) \quad (2.52)$$

então esse dois pares definem o mesmo valor de frequência reduzida, da forma:

$$f_R = f_1 \alpha_T(T_1) = f_2 \alpha_T(T_2) \quad (2.53)$$

onde $\alpha_T(T)$ designa-se por fator de translação, sendo única e exclusivamente uma função da temperatura.

A determinação do fator de translação baseia-se na observação de que é possível construir uma única curva do módulo de ganho e do fator de perda por simples translação horizontal dos conjuntos de pontos medidos a diferentes temperaturas (fig.2.13).

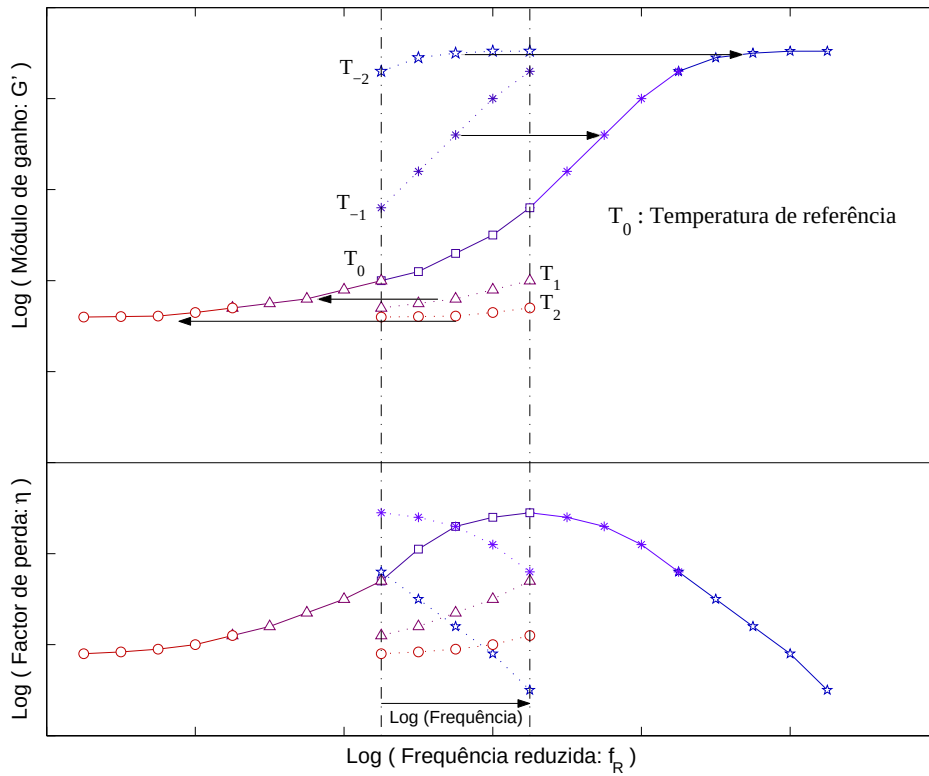


Figura 2.13: Princípio da correspondência frequência-temperatura [4]

Considerando um conjunto hipotético de pontos experimentais obtidos para diferentes temperaturas ($T_{-2}, T_{-1}, T_0, T_1, T_2$) e para diferentes frequências, representados na figura 2.13 pelos pontos ligados por linhas interrompidas, verifica-se que a translação dos conjuntos de pontos isotérmicos em relação à temperatura de referência permite definir uma única curva principal. A curva gerada é função da frequência reduzida e permite determinar o valor do módulo complexo do material viscoelástico para diferentes pares de frequência-temperatura, mesmo que estes não tenham sido considerados na caracterização experimental. Neste procedimento é necessário recorrer à relação que define o valor do fator de translação em função da temperatura, de forma a determinar o valor da frequência reduzida correspondente.

2.5.2 Nomograma de frequência reduzida

A representação do módulo de ganho e do fator de perda em função da frequência reduzida, em conjunto com a distribuição do fator de translação ao longo da temperatura, permite descrever eficazmente a variação do módulo complexo com a frequência e com a temperatura. Por outro lado, esta metodologia exige a análise simultânea de dois gráficos e a determinação do fator de translação e, consecutivamente, do valor da frequência reduzida correspondente ao par de frequência-temperatura pretendido.

Uma forma de representar num único gráfico a distribuição do módulo de ganho e do fator de perda em função da frequência, conjuntamente com o fator de translação, é pelo nomograma de frequência-temperatura ou nomograma de frequência reduzida (fig.2.14).

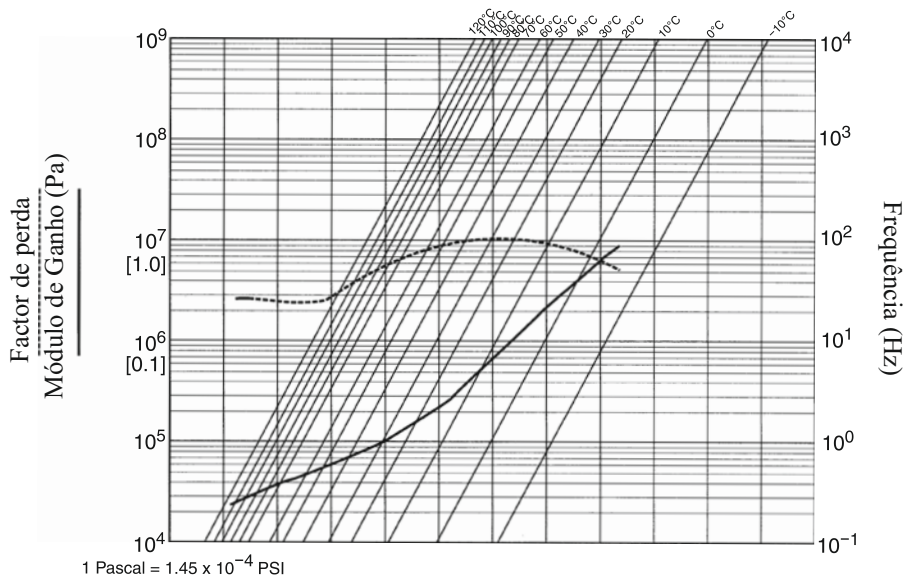


Figura 2.14: Nomograma do material ISD 112 [8]

Através deste gráfico é possível determinar o valor da frequência reduzida correspondente ao par de temperatura-frequência pretendido, através da intersecção entre a linha horizontal definida pela frequência e a linha isotérmica correspondente à temperatura desejada. A linha vertical, que passa por esta intersecção, intersecta as curvas do módulo de ganho e do fator de perda permitindo determinar diretamente o valor destas propriedades.

É normalmente através desta representação gráfica que os fabricantes de materiais viscoelásticos para aplicações de amortecimento passivo apresentam e distribuem as propriedades dos seus materiais.

2.6 Modelo constitutivo do material viscoelástico

O modelo considerado, que representa a dependência da frequência do material viscoelástico a ser caracterizado, é um modelo de derivadas fracionárias de quatro parâmetros [2]. Este descreve a dependência da frequência do módulo complexo de corte do material viscoelástico $G_v^*(\omega)$. Este modelo é, também, conhecido como o modelo generalizado de Zener e é dado pela equação diferencial fracionária:

$$\sigma(t) + \tau^\alpha \frac{\partial^\alpha \sigma(t)}{\partial t^\alpha} = E_0 \epsilon(t) + E_\infty \tau^\alpha \frac{\partial^\alpha \epsilon(t)}{\partial t^\alpha} \quad (2.54)$$

onde E_0 é o módulo estático, E_∞ é a assintota do módulo, τ é o tempo de relaxação e α é o parâmetro fracional, todos a serem definidos pelos dados experimentais. Assumindo que o coeficiente de *Poisson* ν_v é real e constante dentro da gama de frequências analisadas, o módulo complexo de corte pode ser definido como:

$$G_v^*(\omega) = \frac{G_0 + G_\infty (i\omega\tau)^\alpha}{1 + (i\omega\tau)^\alpha} \quad (2.55)$$

onde G_0 e G_∞ são o módulo de corte estático e a assintota do módulo de corte, respetivamente.

A seleção do modelo constitutivo 2.55 justifica-se pela sua simplicidade, apenas 4 parâmetros são necessários, e porque de acordo com a literatura [2] é representativo de uma vasta gama de materiais viscoelásticos.

Capítulo 3

Método inverso de identificação

A caracterização das propriedades dinâmicas dos materiais viscoelásticos, pelo método experimental indicado na norma [3] requer muitos ensaios, devido ao fato de se basear na identificação das propriedades apenas nas frequências de ressonância e à forte dependência da frequência dos materiais viscoelásticos, o que requer ensaios em vários provetes com diferentes comprimentos de modo a abranger várias frequências. Assim, de modo a reduzir o número elevado de testes, desenvolve-se neste trabalho um método inverso de identificação que consiste num procedimento sistemático que poderá simplificar o processo de caracterização, sendo mais rápido e preciso.

O método inverso proposto minimiza o resíduo entre funções de resposta em frequência do tipo transmissibilidade (TR) experimentais e numéricas para certas frequências discretas a fim de identificar os parâmetros que constituem o modelo constitutivo do material.

O método começa pela função de resposta em frequência experimental medida pelo teste de vibração forçada com ressonância. Em primeiro lugar, os dados geométricos e físicos dos provetes são especificados de maneira a definir o modelo de elementos finitos necessário para calcular a TR numérica. Em seguida, são definidos, arbitrariamente, os parâmetros do modelo constitutivo do material que representa a dependência das propriedades dinâmicas do material viscoelástico em relação à frequência. Após o cálculo do resíduo entre o valor experimental e o valor numérico das TR, às frequências discretas, referidas como frequências de controlo, são seleccionadas conforme alguns critérios. Finalmente, serão necessários métodos numéricos para calcular a função de resposta em frequência do tipo transmissibilidade numérica e um algoritmo de minimização adequados.

Os parâmetros do modelo constitutivo do material viscoelástico mudam a cada iteração; o modelo de elementos finitos é atualizado e a função de resposta em frequência do tipo transmissibilidade numérica é calculada para as frequências de controlo seleccionadas; o erro resultante é avaliado para tais frequências, e o processo iterativo é repetido até que o erro seja menor que um certo valor de tolerância ou o número máximo de iterações seja excedido. Por fim, a função de resposta em frequência do tipo transmissibilidade calculada, com os parâmetros identificados, é correlacionada com a função experimental para validação da identificação das propriedades dinâmicas (fig.3.1).

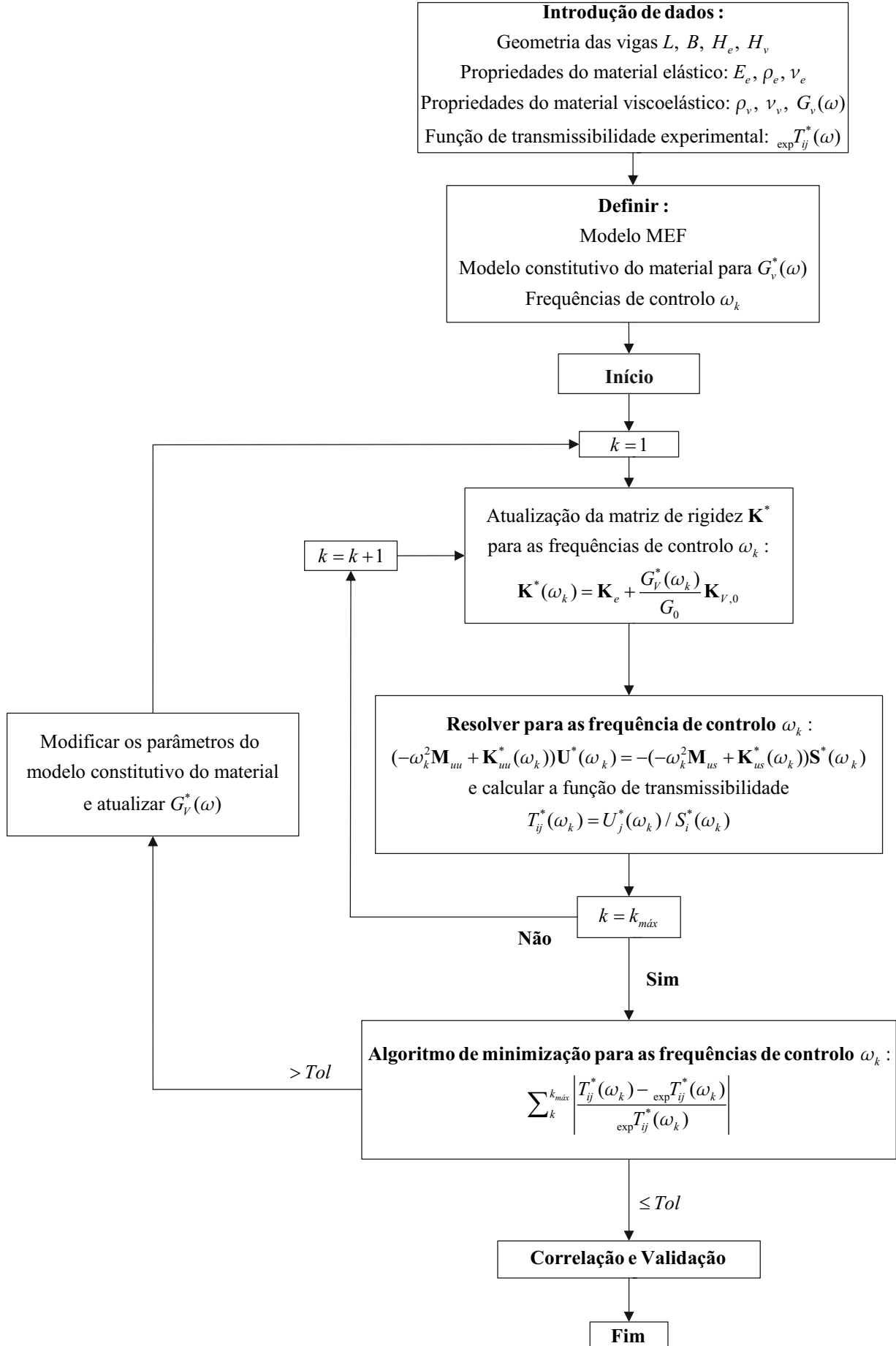


Figura 3.1: Esquema do método inverso proposto [2]

3.1 Frequências de controlo

As frequências de controlo são frequências discretas convenientemente selecionadas, onde o resíduo entre o valor experimental e o valor calculado da função de resposta em frequência é avaliado para cada iteração. A utilização destas frequências oferece vantagens, tais como, o ruído experimental e a presença de fraco rácio de sinal/ruído em certas bandas de frequências de uma função de resposta em frequência experimental são evitados; a eficiência deste método é significativamente aperfeiçoada, visto que a função de resposta em frequência calculada é determinada a partir das frequências de controlo.

Em seguida, apresenta-se o critério de seleção das frequências de controlo:

- as frequências de controlo devem estar localizadas nas ressonâncias, uma vez que estas caracterizam a resposta dinâmica do sistema em análise, e um bom rácio sinal/ruído é garantido;
- o procedimento de seleção das frequências de controlo para cada banda de ressonância (fig.3.2) consiste em selecionar as frequências de valor mínimo e máximo da parte real (pontos 3 e 2), e de valor máximo absoluto da parte imaginária (ponto 1) da função de resposta em frequência ;
- a seleção de três frequências para cada ressonância deve ser o suficiente, apesar de que, em princípio, com um número maior de frequências obtém-se um melhor ajustamento da função de resposta em frequência experimental com a respetiva TR calculada.

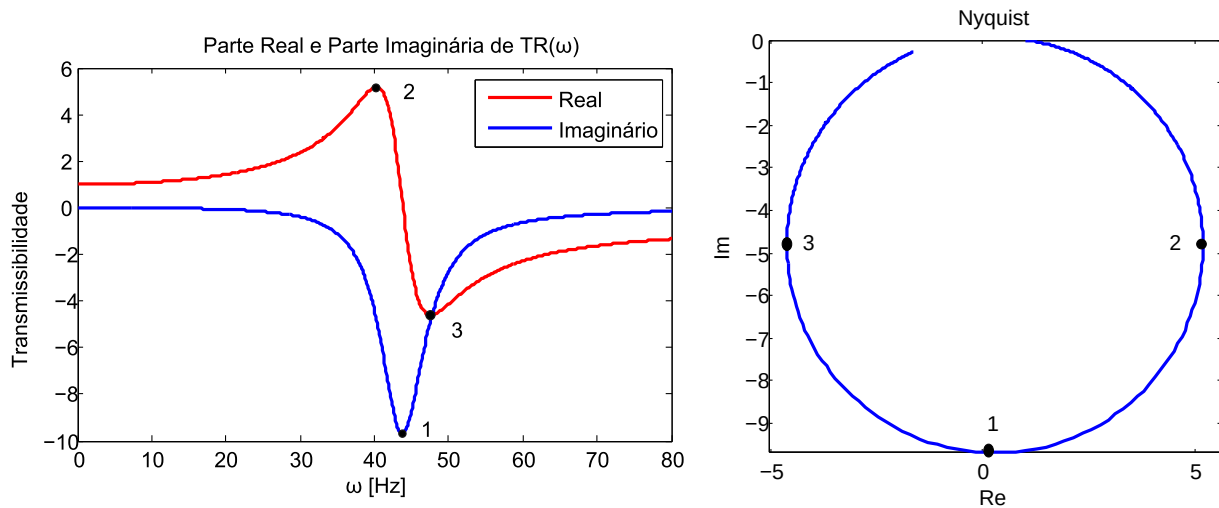


Figura 3.2: Seleção das frequências de controlo

A escolha de se utilizar frequências de controlo para calcular a função de resposta em frequência numérica surge, também, para diminuir o custo computacional, isto é, o tempo e custo computacional despendido é muito mais elevado se se gerar as funções de resposta em frequência para uma gama completa de frequências em vez de se gerar as FRFs apenas para

algumas frequências discretas previamente selecionadas. Acrescenta-se que não há necessidade de gerar as funções de resposta em frequência numéricas para uma gama de frequências, uma vez que, a banda das frequências de ressonância é que descrevem as FRFs, sendo por isso, suficientes para gerar as funções de resposta em frequência numéricas.

3.2 Função de resposta em frequência numérica

Após selecionadas as frequências de controlo é elaborado um modelo numérico para o cálculo da resposta dinâmica das vigas CLD e ILD. A equação de movimento de um sistema discreto com amortecimento viscoelástico é representada por um conjunto de equações diferenciais de segunda ordem, não lineares:

$$M\ddot{u}(t) + K^*(\omega)u(t) = f(t) \quad (3.1)$$

onde $f(t)$, $\ddot{u}(t)$ e $u(t)$ são o vetor força, o vetor aceleração e o vetor deslocamento, respetivamente. M e $K^*(\omega)$ são as matrizes massa e rigidez complexa em função da frequência ω , respetivamente. A matriz rigidez complexa pode ser decomposta na matriz de rigidez constante, K_e , relativamente aos componentes elásticos, e na parte complexa da matriz rigidez que é dependente da frequência, $K_v^*(\omega)$, relacionada com o material viscoelástico:

$$K^*(\omega) = K_e + K_v^*(\omega) \quad (3.2)$$

sendo

$$K_v^*(\omega) = K_v'(\omega) + iK_v''(\omega) \quad (3.3)$$

onde $K_v'(\omega)$ e $K_v''(\omega)$ representam a matriz de rigidez e a matriz de amortecimento da camada viscoelástica, respetivamente, em função da frequência.

Se a força de excitação for do tipo harmónica, $f(t) = F^*e^{i\omega t}$, sendo F^* a amplitude do vetor de força complexo, a resposta resultante é também harmónica, $u(t) = U^*e^{i\omega t}$, sendo U^* o vetor de deslocamento da resposta complexa. Assim, a equação de movimento pode ser escrita como:

$$(-\omega^2 M + K^*(\omega)) U^* = F^* \quad (3.4)$$

Por outro lado, a equação de movimento no domínio da frequência de uma viga sujeita ao movimento harmónico da base, $s(t) = S^*e^{i\omega t}$, é escrita separando os graus de liberdade, relativamente ao deslocamento da base (índice s) e aos deslocamentos desconhecidos (índice u), tal como,

$$\left(-\omega^2 \begin{bmatrix} M_{ss} & M_{su} \\ M_{us} & M_{uu} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{ss}^*(\omega) & K_{su}^*(\omega) \\ K_{us}^*(\omega) & K_{uu}^*(\omega) \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} S^* \\ U^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R^* \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.5)$$

onde S^* , U^* e R^* são as amplitudes dos vetores complexos do movimento da base da viga, dos deslocamentos desconhecidos e das forças de reação da base, respetivamente.

Os parâmetros do material são modificados para cada iteração, e a matriz de rigidez complexa $K_v^*(\omega)$ do material viscoelástico é atualizada para cada frequência de controlo ω_k , como

$$K_v^*(\omega_k) = \frac{G_v^*(\omega_k)}{G_0} K_{v,0} \quad (3.6)$$

onde $K_{v,0}$ é a matriz de rigidez estática do material viscoelástico, e $K^*(\omega_k)$ é a matriz de rigidez complexa total obtida pela equação 3.2. A função de resposta em frequência numérica é calculada para cada frequência de controlo ω_k , resolvendo a seguinte equação:

$$(-\omega_k^2 M_{uu} + K_{uu}^*(\omega_k)) U^*(\omega_k) = -(-\omega_k^2 M_{us} + K_{us}^*(\omega_k)) S^*(\omega_k) \quad (3.7)$$

A função de resposta em frequência de tipo transmissibilidade, $T_{ij}^*(\omega_k)$, definida pela razão entre a amplitude $U_j^*(\omega_k)$ do deslocamento transversal da resposta no grau de liberdade j , e a amplitude $S_i^*(\omega_k)$ do deslocamento transversal da excitação aplicada no grau de liberdade i (fig.3.3), é dada pela expressão,

$$T_{ij}^*(\omega_k) = \frac{U_j^*(\omega_k)}{S_i^*(\omega_k)} \quad (3.8)$$

Refira-se que $U_j^*(\omega_k)$ corresponde à amplitude do deslocamento transversal na extremidade livre do provete e $S_i^*(\omega_k)$ à amplitude do deslocamento transversal imposto ao encastramento.

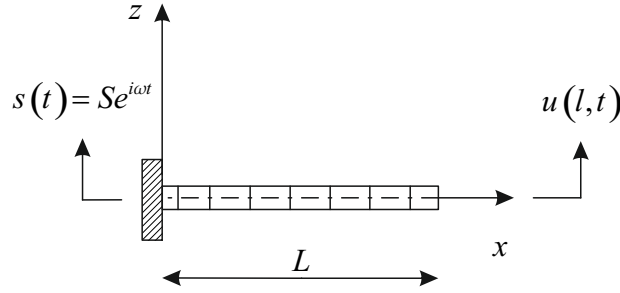


Figura 3.3: Viga encasturada-livre: deslocamentos transversais (s) e (u)

3.3 Algoritmo de minimização

Após ter-se determinado as funções de resposta em frequência do tipo transmissibilidade, recorreu-se a um algoritmo de minimização para identificar os parâmetros do modelo constitutivo do material viscoelástico. O algoritmo de minimização utilizado cumpre o procedimento do algoritmo de Nelder-Mead [2], sendo este implementado através da função *fminsearch* disponível no software *Matlab*®. Através desta função de minimização, o resíduo entre o valor experimental e o valor numérico da função de resposta em frequência foi minimizado em ambas as partes, real e imaginária.

Considerou-se a função de resposta em frequência do tipo transmissibilidade experimental medida apenas num grau de liberdade, de maneira que a função de minimização fica:

$$\sum_k^{k_{max}} \left| \frac{T_{ij}^*(\omega_k) -_{exp} T_{ij}^*(\omega_k)}{exp T_{ij}^*(\omega_k)} \right| \quad (3.9)$$

onde ω_k são as frequências de controlo e k_{max} é o número total de frequências de controlo.

3.4 LAC - “*Local Amplitude Criterion*”

O LAC, indicador local, permite quantificar o nível de correlação entre duas funções de resposta em frequência individuais em função da frequência, ou funções de transmissibilidade individuais em função da frequência. Desta forma, é possível determinar as gamas de frequências com má correlação para cada um dos graus de liberdade selecionados e verificar se essas gamas são coincidentes para todos os graus de liberdade considerados. Este indicador apresenta como resultado um valor real compreendido entre 0 (nenhuma correlação) e 1 (correlação perfeita).

O LAC é definido por:

$$LAC_{ij}(\omega) = \frac{2 |\{H_{ij}^X(\omega)\}^T \{H_{ij}^A(\omega)\}|}{(\{H_{ij}^X(\omega)\}^T \{H_{ij}^X(\omega)\}) + (\{H_{ij}^A(\omega)\}^T \{H_{ij}^A(\omega)\})} \quad (3.10)$$

onde os vetores $\{H_{ij}^X(\omega)\}$ e $\{H_{ij}^A(\omega)\}$ são, respetivamente, a transmissibilidade de deslocamento experimental e numérica em função da frequência entre os graus de liberdade i e j .

Capítulo 4

Formulação do elemento finito *layerwise*

Os tratamentos viscoelásticos, aplicados numa configuração integrada sob a forma de estrutura *sandwich* ou na configuração de tratamento superficial com restrição, devem a sua eficiência à elevada deformação de corte que é imposta à camada viscoelástica. Por isso, a simulação do comportamento dinâmico da estrutura tratada depende sobretudo da correta representação da deformação de corte que ocorre na camada viscoelástica dissipativa e da energia de deformação associada. Assim, considera-se importante desenvolver e validar um elemento finito baseado na teoria *layerwise*, considerando as seguintes suposições:

- a translação e rotação de inércia de todas as camadas são tidas em conta;
- a teoria linear elástica e viscoelástica são usadas;
- os materiais de cada camadas são considerados isotrópicos e homogêneos.

Nas seguintes secções apresenta-se a formulação e implementação numérica do elemento finito de viga *sandwich* proposto. Tendo em conta a opção de se formular a matriz de massa e de rigidez, de cada uma das camadas individuais que constitui o laminado, com base na teoria de *Timoshenko*.

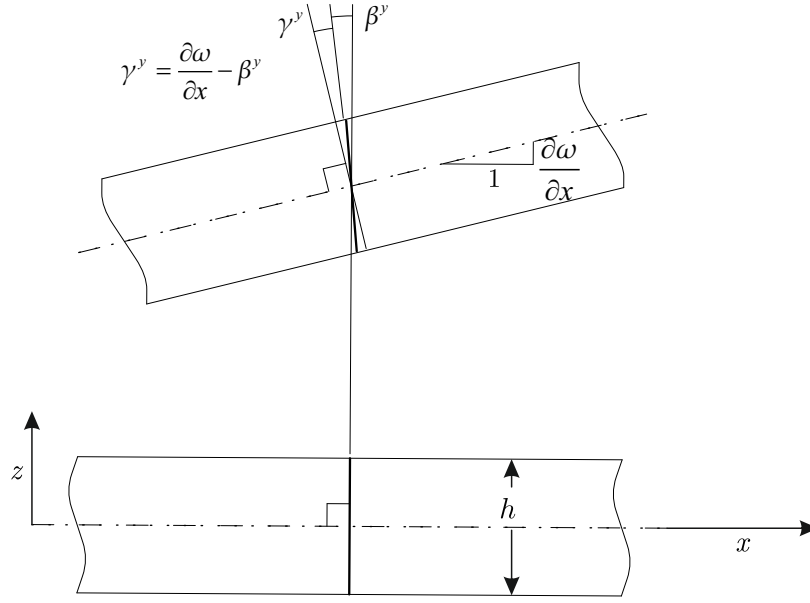
4.1 Teoria de *Timoshenko*

Considera-se uma viga de comprimento L , de largura B e espessura H e área de secção A , sobre a qual atua uma carga vertical (fig.4.1).

Assim, a teoria de vigas de *Timoshenko* compartilha as seguintes hipóteses:

- deformação em extensão e em corte de todas as camadas são consideradas;
- a deformação ao longo da largura é negligenciada;
- as secções planas normais para o eixo da viga antes da deformação mantêm-se planas, porém não necessariamente normais ao eixo depois da deformação (fig.4.1).

Na teoria de vigas de *Timoshenko*, o estado de deformação da viga é caracterizado por duas variáveis: o deslocamento normal à viga (w) e a rotação da secção reta segundo a direção y (β^y). A figura 4.1 representa a cinemática de uma viga segundo a teoria de *Timoshenko*. Por convenção, assume-se que o vetor da variável normal (w) é paralelo ao eixo z .

Figura 4.1: Teoria de flexão de vigas de *Timoshenko*

Esta hipótese representa uma maior aproximação da deformação real da secção transversal em vigas.

O domínio do elemento viga é representado por:

$$\Omega_k = \left\{ (x, z_k) \in \mathbb{R}^2 \mid z_k \in \left[-\frac{h_k}{2}, \frac{h_k}{2} \right], x \in L \subset \mathbb{R} \right\} \quad (4.1)$$

sendo Ω_k e h_k a área e a espessura de uma camada genérica k -th, respetivamente.

Pela figura 4.1 tem-se que a rotação da secção normal pode ser expressa por:

$$\gamma^y = \frac{\partial w}{\partial x} - \beta^y \quad (4.2)$$

na qual $\frac{\partial w}{\partial x}$ é o declive da deformação do eixo da viga e β^y é a rotação adicional devido à deformação por corte.

Assim, o campo de deslocamentos da viga expressa-se da seguinte forma:

$$\begin{aligned} u(x, z) &= z\beta^y \\ w(x, z) &= w \end{aligned} \quad (4.3)$$

Por outro lado, as equações 4.2 e 4.3 mostram que as deformações não nulas são as seguintes:

$$\begin{aligned} \varepsilon^{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = z \frac{\partial \beta^y}{\partial x} \\ \gamma^{xz} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} = \beta^y + \frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned} \quad (4.4)$$

onde ε^{xx} é a deformação normal e γ^{xz} é a deformação por corte transversal.

4.1.1 Relação deformação-tensão

Sendo a viga considerada isotrópica e homogênea, as duas tensões não nulas σ^{xx} (componente de flexão da viga) e τ^{xz} (componente de corte transversal), relacionam-se com as correspondentes deformações:

$$\begin{aligned}\sigma^{xx} &= E\epsilon^{xx} \\ \tau^{xz} &= G\gamma^{xz} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma^{xz}\end{aligned}\quad (4.5)$$

onde E e ν representam o módulo de *Young* e o coeficiente de *Poisson*, respetivamente, do material isotrópico e homogêneo.

É com base nesta teoria que se desenvolverá a teoria de deformação por camadas.

4.2 Teoria de deformação por camadas - Modelo *layerwise*

A Teoria de deformação por camadas [9], associa um campo independente de rotações a cada uma das camadas individuais. Considerando uma viga laminada constituída por n camadas (fig.4.2) pode-se associar a cada camada genérica k uma rotação β_k^y particular para essa camada e independente das restantes. Assim, é possível descrever com maior rigor o comportamento de vigas laminadas constituídas por camadas de materiais diferentes, como por exemplo, os tratamentos viscoelásticos.

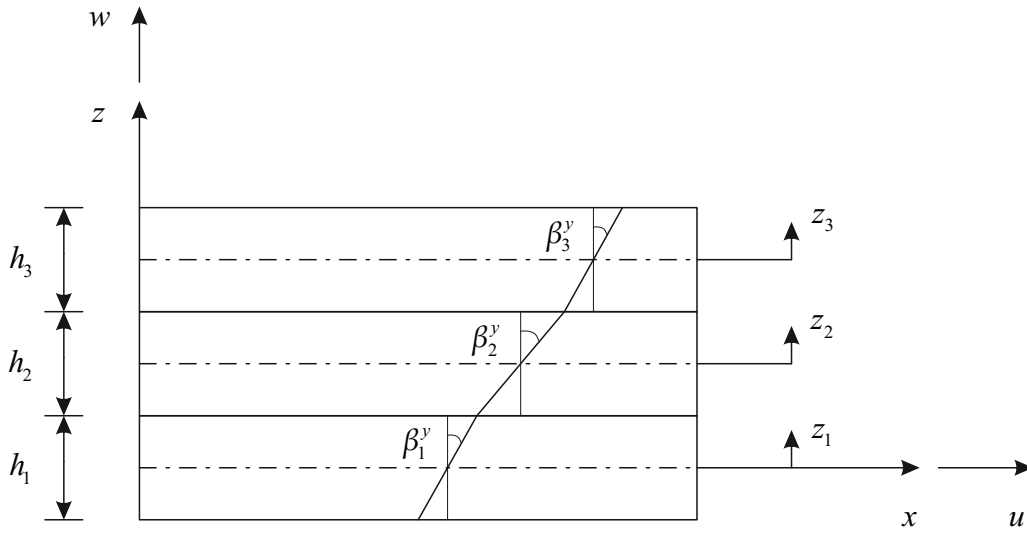


Figura 4.2: Teoria de deformação por camadas - Modelo *layerwise*

A hipótese de Timoshenko é aplicada individualmente a cada camada, ou seja, as secções retas de cada camada permanecem retas mas não necessariamente normais ao plano médio da camada. Esta hipótese, permitida pela independência das rotações, considera as deformações de corte transversal em cada uma das camadas.

4.3 Campo de deslocamentos

Considerando o modelo *layerwise*, pode-se definir o campo de deslocamentos de uma camada genérica k como sendo:

$$\{u\}_k = \left\{ \begin{array}{c} u_k \\ w_k \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} u_0 + \frac{h_1}{2}\beta_1^y + \sum_{j=2}^{k-1} h_j \beta_j^y + \frac{h_k}{2}\beta_k^y + z_k \beta_k^y \\ w_0 \end{array} \right\} \quad (4.6)$$

onde u_0 e w_0 são as translações referentes à primeira camada ($k = 1$), e β_k^y é a rotação normal ao eixo dos zz . A continuidade do deslocamento entre as camadas da viga *sandwich* é garantida através de termos de acoplamento presentes na definição do campo de deslocamentos.

O campo de deslocamentos, $\{u\}_k$, pode ser representado através das variáveis generalizadas, tal como:

$$\{u\}_k = [\mathcal{N}]_k \{d\} \quad (4.7)$$

onde,

$$\{d\} = \{u_0, w_0, \beta_1^y, \dots, \beta_k^y, \dots, \beta_n^y\}^T \quad (4.8)$$

representa o campo de deformações generalizado e a matriz $[\mathcal{N}]_k$ é definida como:

$$[\mathcal{N}]_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{h_1}{2} & \dots & h_j & \dots & \frac{h_k}{2} + z_k & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

permite definir o campo de deslocamentos da camada genérica k a partir do vetor de deslocamentos generalizados da viga laminada.

4.4 Campo de deformações

O campo de deformações da camada k , é obtido pelo campo de deslocamentos (eq.4.6), definido pelo vetor de deformações $\{\varepsilon\}_k$:

$$\{\varepsilon\}_k = \{\varepsilon^{xx} \ \gamma_k^{xz}\}^T \quad (4.10)$$

pode ser escrito na forma:

$$\{\varepsilon\}_k^{xx} = \frac{\partial u_k}{\partial x} \quad (4.11)$$

$$\gamma_k^{xz} = \frac{\partial u_k}{\partial z} + \frac{\partial w_k}{\partial x} \quad (4.12)$$

Assim, aplicando os operadores diferenciais definidos nas equações 4.10, 4.11 e 4.12 ao campo de deslocamentos descrito na equação 4.6, obtém-se o campo de deformações $\{\varepsilon\}_k$ definido por:

$$\{\varepsilon\}_k = \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_{xx}^M + \varepsilon_{xx}^C + \varepsilon_{xx}^B \\ \gamma_{xz}^S \end{array} \right\}_k \quad (4.13)$$

onde M , C , B e S representam os componentes de membrana, acoplamento, flexão e corte transversal, respectivamente, sendo:

$$\varepsilon_{xx}^M = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4.14)$$

$$\varepsilon_{xx}^C = \frac{h_1}{2} \frac{\partial \beta_1^y}{\partial x} + \sum_{j=2}^{k-1} \left[h_j \frac{\partial \beta_j^y}{\partial x} \right] + \frac{h_k}{2} \frac{\partial \beta_k^y}{\partial x} \quad (4.15)$$

$$\varepsilon_{xx}^B = z_k \frac{\partial \beta_k^y}{\partial x} \quad (4.16)$$

$$\gamma_k^{xz} = \beta_k^y + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (4.17)$$

4.4.1 Matriz de deformação

Segundo as equações 4.11 e 4.12, o vetor de deformações $\{\varepsilon\}_k$ é obtido a partir do campo de deslocamentos $\{u\}_k$ através da multiplicação deste pela matriz de operadores diferenciais $[\mathcal{L}]$, na forma:

$$\{\varepsilon\}_k = [\mathcal{L}]\{u\}_k \quad (4.18)$$

onde,

$$[\mathcal{L}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

Segundo a equação 4.7, o campo de deslocamentos de uma camada genérica k é definido através das componentes de um vetor de deslocamentos generalizados $\{d\}$ (eq.4.8) que representam os graus de liberdade da viga. Por isso, pode-se relacionar o campo de deformações diretamente a partir do vetor de deslocamentos generalizados, através da matriz de deformação $[\mathcal{B}]_k$:

$$\{\varepsilon\} = [\mathcal{B}]_k \{d\} \quad (4.20)$$

A matriz de deformação pode ser obtida pela multiplicação matricial da forma:

$$[\mathcal{B}]_k = [\mathcal{L}][\mathcal{N}]_k \quad (4.21)$$

Por forma a simplificar a formulação, o vetor de campo de deformações pode ser composto por três partições, combinando a componente de membrana com o termo de acoplamento, através da separação apresentada nas equações 4.14, 4.15, 4.16 e 4.17:

$$\{\varepsilon\}_k = \left\{ \{\varepsilon\}_k^M + \{\varepsilon\}_k^C \quad ; \quad \{\varepsilon\}_k^B \quad ; \quad \{\gamma\}_k^S \right\}^T. \quad (4.22)$$

Assim, a matriz de deformação $[\mathcal{B}]_k$ pode ser rearranjada, sendo definida por três sub-matrizes de deformação independentes:

$$[\mathcal{B}]_k = \left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{h_1}{2} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & h_j \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{h_k}{2} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_k \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ \hline 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] [0] \quad (4.23)$$

onde a primeira sub-matriz é a matriz de deformação da componente membrana e acoplamento, $[\mathcal{B}]_k^{MC}$, a segunda sub-matriz é a matriz de deformação de flexão, $[\mathcal{B}]_k^B$, e a terceira representa a matriz de deformação de corte, $[\mathcal{B}]_k^S$. A variável h_j ($j = 2, \dots, k-1$) representa a espessura da camada j .

4.5 Campo de tensões

O campo de tensões a que uma camada genérica k da viga está sujeita é determinado pelo respetivo campo de deformações, sendo essa relação definida pela lei constitutiva do material. Assim, de acordo com a equação 4.22, o campo de tensões pode ser definido pelo seguinte vetor:

$$\begin{aligned} \{\sigma\}_k &= \{\sigma_k^{xx} \tau_k^{xy}\}^T \\ &= \left\{ \{\sigma\}_k^M + \{\sigma\}_k^C ; \{\sigma\}_k^B ; \{\sigma\}_k^S \right\}^T \end{aligned} \quad (4.24)$$

sendo MP , C , B e S as componentes de membrana, acoplamentos, flexão e corte transversal, respetivamente.

4.5.1 Matriz elasticidade

O campo de tensões das camadas das vigas *sandwich* é relacionado com o campo de deformações através da lei constitutiva do material, sendo descrito pelo operador matricial $[\mathcal{D}]_k$, como:

$$\{\sigma\}_k = [\mathcal{D}]_k \{\varepsilon\}_k \quad (4.25)$$

Uma vez que o material assumido é considerado isotrópico e com comportamento linearmente elástico, a matriz de elasticidade é definida por:

$$[\mathcal{D}]_k = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

Em análise de frequência, a caracterização do material viscoelástico, no qual varia com a frequência, pode ser representado pelo módulo complexo. Por consequência, as matrizes de rigidez do material viscoelástico são atualizadas conforme o módulo complexo, para cada frequência. Contudo, a formulação do elemento finito do modelo espacial é totalmente independente da relação viscoelástica do modelo constitutivo, o qual pode ser introduzido de modo alternativo recorrendo a outras metodologias, tais como, o método ADF (*Anelastic Displacement Fields*) e o Modelo das derivadas fracionárias.

4.6 Energia potencial de deformação

O ganho de energia elástica da viga *sandwich* é obtido através dos integrais sobre a espessura da camada e o seu comprimento, para todo o conjunto de n camadas individuais, como:

$$\begin{aligned} \Pi^P &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} B \int_l \int_{z_k} \{\varepsilon\}_k^T \{\sigma\}_k dz_k dx \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} B \int_l \int_{z_k} \{\varepsilon\}_k^T [\mathcal{D}]_k \{\varepsilon\}_k dz_k dx \end{aligned} \quad (4.27)$$

substituindo a equação 4.20 na equação 4.27, e calculando explicitamente o integral em relação à espessura, a energia de deformação é obtida a partir de:

$$\Pi^P = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} B \int_l \{d\}^T [\hat{\mathcal{B}}]_k^T [\hat{\mathcal{D}}]_k [\hat{\mathcal{B}}]_k \{d\} dx \quad (4.28)$$

onde a matriz $[\hat{\mathcal{D}}]_k$ é a matriz de elasticidade modificada, incluindo agora o resultado dos termos de integração, sendo:

$$[\hat{\mathcal{D}}]_k = \begin{bmatrix} h_k E & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h_k^3}{12} E & 0 \\ 0 & 0 & h_k G \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

A matriz de deformação modificada, $[\hat{\mathcal{B}}]_k$, é obtida a partir da equação 4.23, sendo descrita como:

$$[\hat{\mathcal{B}}]_k = \begin{bmatrix} [\mathcal{B}]_k^{MC} \\ \frac{1}{z_k} [\mathcal{B}]_k^B \\ [\mathcal{B}]_k^S \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

4.7 Campo de velocidades

O campo de velocidades de uma camada genérica k pode ser obtido a partir do respetivo campo de deslocamentos (eq.4.6) por derivação em ordem ao tempo, sendo definido por:

$$\{\dot{u}\}_k = \begin{Bmatrix} \dot{u}_k \\ \dot{w} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{u} + \frac{h_1}{2} \dot{\beta}_1^y + \sum_{j=2}^{k-1} h_j \dot{\beta}_j^y + z_k \dot{\beta}_k^y \\ \dot{w} \end{Bmatrix} \quad (4.31)$$

Recorrendo à matriz $[\mathcal{N}]$, que relaciona o campo de deslocamentos com o vetor de deslocamentos generalizados $\{d\}$, pode-se obter o campo de velocidades através da multiplicação matricial da forma:

$$\{\dot{u}\}_k = [\mathcal{N}]_k \{\dot{d}\} \quad (4.32)$$

onde $\{\dot{d}\} = \{\dot{u}, \dot{w}, \dots\}$ representa a derivada no tempo do vetor de deslocamentos generalizados $\{d\}$.

4.8 Energia cinética

A energia cinética de uma viga laminada é obtida através dos integrais ao longo da espessura da camada e do comprimento da viga para um conjunto de camadas individuais, como:

$$\Pi^C = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} B \int_l \int_{z_k} \{\dot{u}\}_k^T [\mathcal{J}]_k \{\dot{u}\}_k dz_k dx \quad (4.33)$$

onde $\{\dot{u}\}$ representa o campo de velocidades para cada camada k , e a matriz de inércia do sistema $[\mathcal{J}]_k$ é definida por:

$$[\mathcal{J}]_k = \begin{bmatrix} \rho_k & 0 \\ 0 & \rho_k \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

sendo ρ_k a massa volúmica da camada k .

Substituindo o campo de velocidades pela relação (4.32), pode-se reescrever a expressão da energia cinética de cada camada k na forma:

$$\Pi^C = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} B \int_l \int_{z_k} \{\dot{d}\}^T [\mathcal{N}]_k^T [\mathcal{J}]_k [\mathcal{N}]_k \{\dot{d}\} dz_k dx$$

que também pode ser escrita como:

$$\Pi^C = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} B \int_l \int_{z_k} \{\dot{d}\}^T [J]_k \{\dot{d}\} dz_k dx \quad (4.35)$$

sendo a matriz $[J]_k$ definida por:

$$[J]_k = [\mathcal{N}]_k^T [\mathcal{J}]_k [\mathcal{N}]_k \quad (4.36)$$

Assim, calculando explicitamente o integral em ordem à espessura da camada, tem-se:

$$\Pi^C = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} B \int_l \{\dot{d}\}^T [\hat{J}]_k \{\dot{d}\} dx \quad (4.37)$$

sendo a matriz de inércia modificada $[\hat{J}]_k$, para $k > 1$, definida como:

$$[\hat{J}]_k = \rho_k h_k \left[\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & \frac{h_1}{2} & \dots & h_j & \dots & \frac{h_k}{2} & \\ & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \\ & & \frac{h_1^2}{4} & \dots & h_j \frac{h_1}{2} & \dots & \frac{h_1}{2} \frac{h_k}{2} & \\ & & & \ddots & & & & \\ & & & & h_j^2 & \dots & h_j \frac{h_k}{2} & \\ & & & & & \ddots & & \\ \hline sim. & & & & & & \frac{h_k^2}{3} & \\ \hline & & & & & & & [0] \end{array} \right] \quad (4.38)$$

4.9 Trabalho virtual das forças de superfície

Se nas faces das camadas da viga *sandwich* for aplicado uma carga transversal, $\{f\}$, o trabalho virtual δW realizado pelas forças externas é dado por:

$$\delta W = B \int_l \{\delta d\}^T \{f\} dx \quad (4.39)$$

onde l é o comprimento da viga, B é a largura da viga e $\{\delta d\}$ é o deslocamento virtual.

4.10 Formulação variacional

O princípio de Hamilton aqui adotado é descrito por:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (\Pi^C - \Pi^P) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W dt = 0 \quad (4.40)$$

onde Π^C e Π^P são a energia cinética e a energia potencial do sistema, respetivamente, e δW é o trabalho virtual realizado pelas forças externas.

Introduzindo as equações 4.28, 4.37 e 4.39 na equação 4.40, e realizando a integração por partes, o princípio de Hamilton apresentado acima fica:

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \left(- \sum_{k=1}^n B \int_l \{\delta d\}^T [\hat{J}]_k \{\ddot{d}\} dx \right. \\ & \quad - \sum_{k=1}^n B \int_l \{\delta d\}^T [\hat{\mathcal{B}}]_k^T [\hat{\mathcal{D}}]_k [\hat{\mathcal{B}}]_k \{d\} dx \\ & \quad \left. + B \int_l \{\delta d\}^T \{f\} dx \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.41)$$

Como a equação 4.41 deve satisfazer um vetor arbitrário $\{\delta d\}$ dentro de um intervalo de tempo, t_1 a t_2 , que só pode ser verificado se os termos entre parêntesis desaparecerem ao longo do intervalo de tempo. Assim, a forma fraca pode ser expressa na notação matricial como:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n B \int_l \{\delta d\}^T [\hat{J}]_k \{\ddot{d}\} dx \\ & + \sum_{k=1}^n B \int_l \{\delta d\}^T [\hat{\mathcal{B}}]_k^T [\hat{\mathcal{D}}]_k [\hat{\mathcal{B}}]_k \{d\} dx \\ & - B \int_l \{\delta d\}^T \{f\} dx = 0; \quad \forall \{\delta d\} \end{aligned} \quad (4.42)$$

4.11 Formulação do elemento finito

A formulação de elementos finitos mais utilizada opera diretamente sobre o campo de deslocamentos. Este é definido dentro do elemento finito através da interpolação, usando funções interpoladoras simples, dos valores das componentes do vetor de deslocamentos generalizados $\{d^e\}$, nos nós do elemento. Assim, o problema é resolvido pela resolução de um sistema de equações, no qual as incógnitas são as componentes do campo de deslocamentos generalizados presentes em cada um dos nós do domínio em análise.

4.11.1 Elemento finito de viga *layerwise*

O elemento finito proposto é um elemento isoparamétrico unidimensional com dois nós (fig.4.3).

A viga é representada num sistema de coordenadas global (X, Z) , e a matriz de rigidez e matriz de massa de cada elemento são calculadas em sistemas de coordenadas local (x, z) .

Antes de se fazer o “assembly” das matrizes elementares de massa e de rigidez, definidas num sistemas de coordenadas locais (x, z) , estas são transformadas num sistemas de coordenadas naturais (ξ, η) na qual ξ é coincidente com a direção de x .

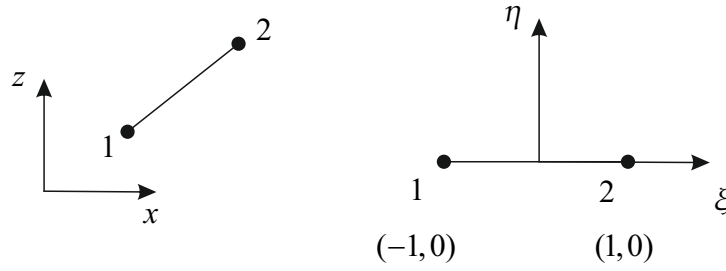


Figura 4.3: Elemento isoparamétrico unidimensional - Sistema de coordenadas local e natural

Esta transformação pode ser definida com base numa aproximação geométrica, aplicando funções de interpolação:

$$\begin{aligned} x(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^2 N_i(\xi, \eta) x_i \\ z(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^2 N_i(\xi, \eta) z_i \end{aligned} \quad (4.43)$$

onde x_i e z_i representam as coordenadas cartesianas dos nós do elemento e $N_i(\xi, \eta)$ são as funções de interpolação geométrica do elemento finito, designadas por funções de forma.

Para além da geometria do elemento é também necessária a aplicação de uma interpolação às variáveis do problema. Assim, sendo cada nó descrito pelas suas coordenadas nodais (x_i, z_i) e respetivo vetor de graus de liberdade $\{d_i^e\} = \{u_i, w_i, \beta_{1_i}^y, \dots, \beta_{n_i}^y\}^T$, pode-se calcular o vetor de deslocamentos generalizados do elemento, $\{d^e\}$, pela aplicação das funções de forma:

$$\{d^e\} = \sum_{i=1}^2 N_i(\xi, \eta) \{d_i^e\} \quad (4.44)$$

4.11.1.1 Funções de forma

As funções de forma são normalmente funções polinomiais simples, que devem satisfazer as condições de continuidade dentro do elemento e permitir a correta aproximação da variável interpolada.

Assim, para o elemento de 2 nós, são aplicadas funções de forma da seguinte maneira:

$$N_1 = \frac{1}{2}(1 - \xi) \quad (4.45)$$

$$N_2 = \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad (4.46)$$

sendo N_1 a função de forma correspondente ao nó 1 e N_2 a função de forma correspondente ao nó 2 de um elemento isoparamétrico.

4.11.2 Forma fraca - Discretização do elemento finito

A forma fraca global apresentada na equação 4.42 pode ser expressa pelo somatório dos integrais das formas elementares, conduzindo para a definição das matrizes e vetores lineares. Adicionando a contribuição de todos os elementos finitos n_E , a forma fraca global pode ser expressa como:

$$\begin{aligned} & \sum_{e=1}^{n_E} \left(\sum_{k=1}^n B \int_l \{\delta d^e\}^T [\hat{J}]_k \{\ddot{d}^e\} dx \right. \\ & + \sum_{k=1}^n B \int_l \{\delta d^e\}^T [\hat{\mathcal{B}}]_k^T [\hat{\mathcal{D}}]_k [\hat{\mathcal{B}}]_k \{d^e\} dx \\ & \left. - B \int_l \{\delta d^e\}^T \{f\} dx \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.47)$$

onde as variáveis generalizadas $\{d^e\}$ são restritas ao domínio de integração l , o vetor $\{f\}$ representa a força de excitação aplicada ao sistema.

Normalmente, a relação entre os graus de liberdade elementares e globais é estabelecida através das matrizes de conectividade $[R^e]$, expressas como:

$$\{d_i^e\} = [R^e] \{d_i\} \quad (4.48)$$

onde $\{d_i\}$ representa o vetor global dos graus de liberdade.

Substituindo a equação 4.8 na equação 4.42, tem-se:

$$\begin{aligned} & \sum_{e=1}^{n_E} \left(\{\delta d_i^e\}^T \sum_{k=1}^n B \int_l [N]^T [\hat{J}]_k [N] dx \{\ddot{d}_i^e\} \right. \\ & + \{\delta d_i^e\}^T \sum_{k=1}^n B \int_l [N]^T [\hat{\mathcal{B}}]_k^T [\hat{\mathcal{D}}]_k [\hat{\mathcal{B}}]_k [N] dx \{d_i^e\} \\ & \left. - \{\delta d_i^e\}^T B \int_l [N]^T \{f\} dx \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.49)$$

permitindo definir a matriz de massa elementar $[M^e]$, a matriz de rigidez elementar $[K^e]$ e o vetor de forças elementar $\{f_i^e\}$, como:

$$[M^e] = \sum_{k=1}^n [M^e]_k = \sum_{k=1}^n B \int_l [N]^T [\hat{J}]_k [N] dx \quad (4.50)$$

$$[K^e] = \sum_{k=1}^n [K^e]_k = \sum_{k=1}^n B \int_l [B]_k^T [\hat{\mathcal{D}}]_k [B]_k dx \quad (4.51)$$

$$\{f_i^e\} = B \int_l [N]^T \{f\} dx \quad (4.52)$$

onde $[B]_k$ é a matriz de deformação de uma camada genérica k do elemento finito, sendo definido como:

$$[B]_k = [\hat{\mathcal{B}}]_k [N] \quad (4.53)$$

Em suma, as matrizes elementares de rigidez e de massa são obtidas através da soma de matrizes individuais correspondentes para cada camada da viga *sandwich* e avaliadas usando um procedimento de integração numérica de 2D.

4.12 Equações de movimento

Obtidas as matrizes de rigidez elementar, de massa elementar e vetor de forças elementar, segue-se para a substituição destas na equação 4.49:

$$\{\delta d_i\}^T [M] \{\ddot{d}_i\} + \{\delta d_i\}^T [K] \{d_i\} - \{\delta d_i\}^T \{f_i\} = 0; \forall \{\delta d_i\} \quad (4.54)$$

onde a matriz global de massa $[M]$, a matriz global de rigidez $[K]$ e o vetor global de força $\{f_i\}$ são definidos por:

$$[M] = \sum_{e=1}^{n_E} [R^e]^T [M^e] [R^e] \quad (4.55)$$

$$[K] = \sum_{e=1}^{n_E} [R^e]^T [K^e] [R^e] \quad (4.56)$$

$$\{f_i\} = \sum_{e=1}^{n_E} [R^e]^T \{f_i^e\} \quad (4.57)$$

Finalmente, as equações de movimento da viga *sandwich* são dadas por:

$$[M] \{\ddot{d}_i\} + [K] \{d_i\} = \{f_i\} \quad (4.58)$$

Note-se que a utilização do módulo complexo para caracterizar as propriedades de materiais viscoelásticos leva a que a matriz de rigidez seja também complexa. Assim, esta é constituída pela parte real da matriz que representa a parte elástica da viga *sandwich* e a parte imaginária que representa a camada da viga de material viscoelástico, na qual depende da temperatura e da frequência.

Capítulo 5

Descrição da montagem experimental e dos provetes

A parte experimental do trabalho consistiu essencialmente na medição das funções de resposta em frequência de tipo transmissibilidade para um conjunto de provetes com tratamento viscoelástico. As funções de transmissibilidade medidas experimentalmente funcionaram como funções de referência para o método inverso de identificação. Os provetes tipo viga considerados para este estudo foram vigas com tratamento integrado, viga *sandwich*, e uma viga com tratamento superficial com restrição, viga com camada de restrição.

5.1 Montagem experimental

A montagem experimental é essencialmente constituída pelos provetes em ensaio numa configuração de viga encastrada-livre e excitada passivamente através de um deslocamento imposto ao encastramento e pela instrumentação adequada para a geração do sinal de excitação, para a excitação do provete e para a medição e tratamento da excitação e da resposta para gerar a função de transmissibilidade. Os ensaios foram realizados no laboratório a uma temperatura ambiente de cerca de 24°C. Na figura 5.1 apresenta-se um esquema representativo da montagem experimental e dos equipamentos utilizados.

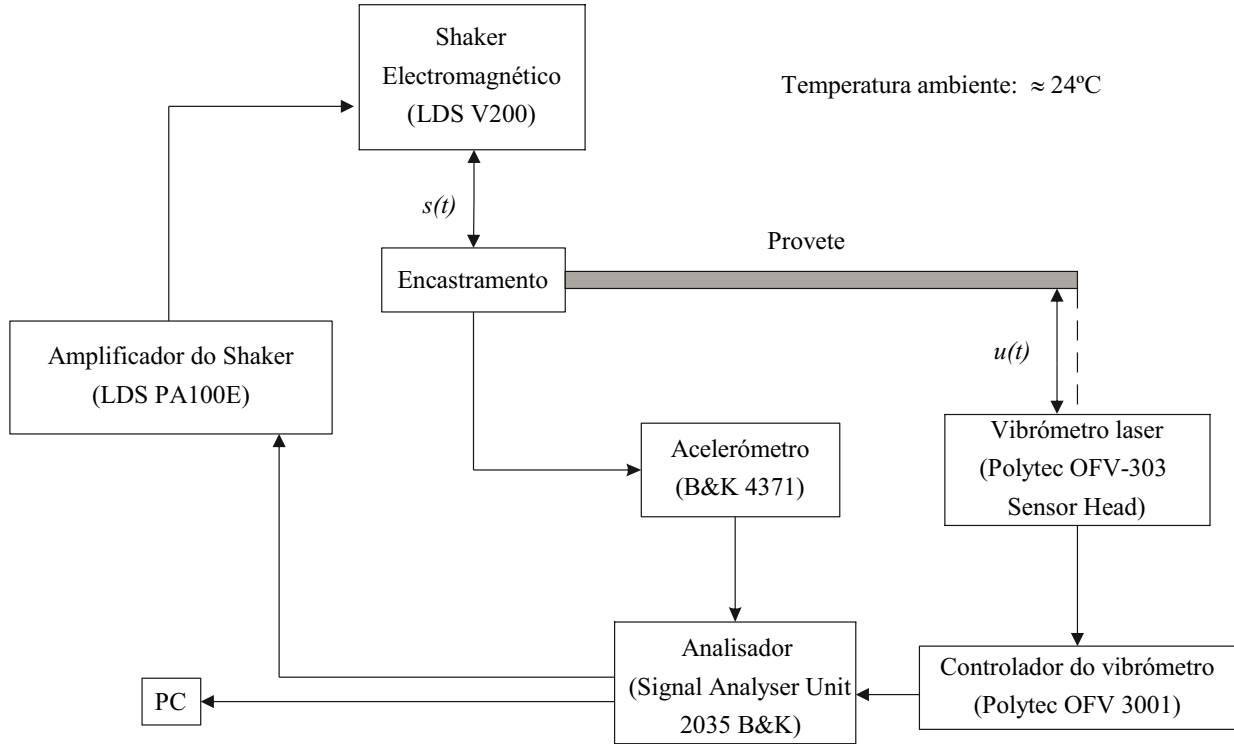


Figura 5.1: Representação esquemática da montagem experimental

Pela figura acima apresentada (fig.5.1) compreende-se melhor a montagem experimental e o comportamento do sistema. Inicialmente, o sinal (ruído branco) é gerado pelo analisador dinâmico de sinal (*Signal Analyser Unit Type 2035 B&K*), seguindo este para o amplificador do shaker (*LDS PA100E*), regulando o ganho do sinal. Este sinal amplificado chega ao shaker eletromagnético (*LDS V200*), onde o provete a ensaiar está encastrado, de maneira que o shaker aplica um deslocamento de excitação na direção da espessura que constitui o movimento da base ($s(t)$). Este movimento imposto ao encastramento e em consequência à extremidade encastrada do provete é medido sob a forma de aceleração por um acelerómetro (*B&K 4371*).

O movimento de resposta forçada na extremidade livre do provete, consequência da excitação na extremidade encastrada, é medido por um vibrómetro laser (*Polytec OFV 303 Sensor Head*) sob a forma de velocidade ($\dot{u}(t)$) dessa extremidade, seguindo esse sinal para o controlador do vibrómetro (*Polytec OFV 3001*). Refira-se que a medição da resposta pode ser efetuada num outro ponto escolhido.

O sinal medido pelo acelerómetro e pelo vibrómetro é adquirido e tratado pelo analisador dinâmico de sinal, integrando duas vezes a aceleração e integrando uma vez a velocidade de modo a dispor da excitação e da resposta sob a forma de deslocamento. Em seguida, o analisador determina a função transmissibilidade de deslocamento do provete entre a resposta na extremidade livre e o deslocamento imposto na extremidade encastrada, $_{exp}T^*(\omega)$, através da expressão,

$$_{exp}T^*(\omega) = \frac{\tilde{u}(\omega)}{\tilde{s}(\omega)} \quad (5.1)$$

onde $\tilde{u}(\omega)$ e $\tilde{s}(\omega)$ são as transformadas de Fourier dos deslocamentos transversais medidos no ponto de resposta, $u(t)$, e do movimento da base, $s(t)$, respetivamente.

Finalmente, as funções de transmissibilidade são armazenadas num PC para posterior análise.

Nas figuras 5.3-5.6 apresentam-se algumas fotos dos equipamentos utilizados:

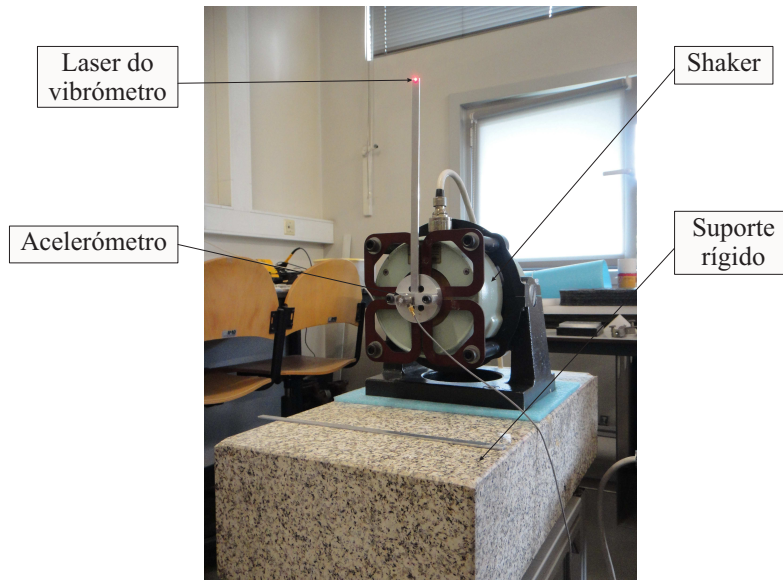


Figura 5.2: Shaker eletromagnético - *LDS V200*



Figura 5.3: Vibrômetro laser - *Polytec OFV 303 Sensor Head*

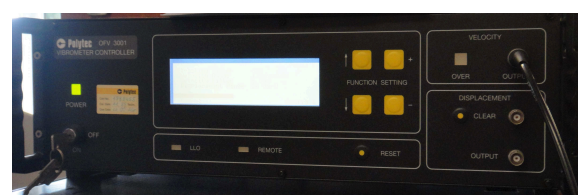


Figura 5.4: Controlador do vibrômetro laser - *Polytec OFV 3001*

Figura 5.5: Amplificador do shaker - *LDS PA100E*Figura 5.6: Analisador dinâmico de sinal - *Signal Analyser Unit Type 2035 B&K*

5.1.1 Vigas de amostra - Provetes

Para a caracterização das propriedades dinâmicas do núcleo viscoelástico foi necessário, primeiro, determinar o módulo de ganho do material metálico. Assim, através das vigas base, isto é, feita em alumínio, determina-se o módulo de ganho da camada metálica, E_e .

Em seguida, através de vigas do tipo CLD (“*constraining layers damping*”) e do tipo ILD (“*Integrated layer damping*”), obtém-se o módulo complexo de corte do material viscoelástico, $G_v^*(\omega)$. Para estas vigas o material elástico utilizado é, também, alumínio e o material viscoelástico é o ISD112.

Assim, apresenta-se as dimensões dos provetes que se utilizou:

Tabela 5.1: Dimensões das vigas base

Viga	Comprimento	Espessura	Largura	Massa	Massa Volúmica
Elast_180	180mm	1mm	10mm	4.958g	2543 kg/m ³
Elast_220	220mm	2mm	15mm	19.352g	2745 kg/m ³

Tabela 5.2: Dimensões das vigas *sandwich*

Viga	Comprimento	Espessura total	Largura
Sw_180	180mm	2.127mm	10mm
Sw_220	220mm	2.127mm	10mm
Sw_260	260mm	2.127mm	10mm
Sw_300	300mm	2.127mm	10mm

Tabela 5.3: Dimensões da viga com camada de restrição

Viga	Comprimento	Espessura	Largura
camada de restrição	220mm	2.207mm	15mm



Figura 5.7: Provete ensaiados

Note-se que, a espessura da viga *sandwich* representa a soma da espessura de duas camadas de material elástico ($1mm + 1mm$), acrescentando a espessura do material viscoelástico ISD112, que tanto na viga *sandwich* como na viga com camada de restrição, é de $0.127mm$. De igual modo, a espessura total da viga com camada de restrição é constituída pela espessura da viga base ($2mm$), mais a espessura do material viscoelástico, acima apresentado, mais a espessura da camada de restrição, sendo esta também de alumínio, de espessura $0.08mm$. Acrescenta-se que o comprimento real das vigas tem uma extensão de $15mm$ estando relacionado com o comprimento da viga que está encastrada, de forma que, o comprimento apresentado nas tabelas acima (5.1, 5.2 e 5.3) é o comprimento livre da viga.

Capítulo 6

Caracterização experimental: análise de resultados e validação

Quando realizado o processo de caracterização do material viscoelástico obtém-se vários valores para o módulo de ganho e para o fator de perda, correspondendo a diferentes valores de frequência. É importante verificar a qualidade dos resultados obtidos independentemente da quantidade dos mesmos, identificar os erros sistemáticos e os erros aleatórios associados e filtrar um conjunto de resultados coerentes e representativos do material em análise.

Enquanto que os erros aleatórios têm origem em causas esporádicas que perturbam a montagem experimental, são facilmente identificados na globalidade do conjunto de resultados, a detecção dos erros sistemáticos requer alguma experiência e uma análise cuidada dos dados medidos. As causas deste tipo de erros encontram-se normalmente associadas a falhas do processo de caracterização, mais concretamente na falta de garantia do equilíbrio térmico do material, na falta de representatividade da montagem experimental relativamente ao modelo numérico admitido e à aplicação de uma deformação inadequada ao material viscoelástico em análise.

De forma a evitar este tipo de erros é necessário garantir um conjunto de condições durante a realização do processo de caracterização, das quais as mais relevantes são:

- garantir o equilíbrio térmico e molecular do provete de material viscoelástico em análise, ou seja, não é suficiente atingir só as condições isotérmicas no provete viscoelástico; é também necessário que o processo de relaxação da cadeia molecular atinja uma situação de equilíbrio antes de cada medição;
- a deformação imposta ao provete viscoelástico deve estar contida no regime linear do material de forma a evitar o erro associado ao seu comportamento não linear;
- o nível das grandezas medidas, relativas ao carregamento e à deformação imposta, deve permitir obter uma relação sinal/ruído elevada de forma a evitar este tipo de perturbação;
- a representatividade da montagem experimental deve ser garantida em toda a gama de frequências considerada, garantindo as condições de fronteira e os graus de liberdade previamente estabelecidos e considerados no modelo numérico;
- a montagem experimental deve evitar a contaminação da medição devida às ressonâncias do sistema e à vibração externa transmitida ao sistema.

6.1 Vigas base

O objetivo de testar as vigas do tipo base foi para identificar o módulo de ganho das camadas de material elástico, E_e , a fim de definir o modelo de elementos finitos das vigas do tipo CLD e ILD. Testaram-se duas vigas bases porque uma delas (Elast_180) tem as dimensões da camada de material elástico de uma das vigas *sandwich*, e a outra viga base (Elast_220) tem as dimensões da camada de material elástico da viga com camada de restrição.

Pela tabela 6.1 é possível observar a discretização das vigas base, onde para a viga Elast_180 fizeram-se três medições, variando o nó de medição de maneira a evitar erros devido ao ruído, sendo designado por (1) a medição feita na extremidade da viga livre, a medição (2) feita a 5mm da extremidade livre e a medição (3) é feita a 10mm da extremidade livre da viga. Assim, para esta viga base obtiveram-se três medições de funções de transmissibilidade experimentais.

No caso da viga Elast_220, a discretização também está apresentada na tabela 6.1. Fez-se apenas uma medição na extremidade livre da viga obtendo-se, assim, uma medição da função de transmissibilidade experimental. Acrescenta-se que a gama de frequências deste ensaio foi de 0 a 400Hz de maneira a incluir as duas primeiras frequências de ressonância.

Tabela 6.1: Discretização das vigas base

Vigas	Nr ^o de elementos	Nó de medição (1)	Nó de medição (2)	Nó de medição (3)	Gama de frequência (Hz)
Elast_180	36	37	36	35	[0 200]
Elast_220	44	45	-	-	[0 400]

Seguem-se as representações de comparação das funções de transmissibilidade numéricas e experimentais, figuras 6.1 a 6.3, como também, os valores obtidos para o módulo de ganho e o fator de perda, para ambas as vigas base, 6.3 a 6.4.

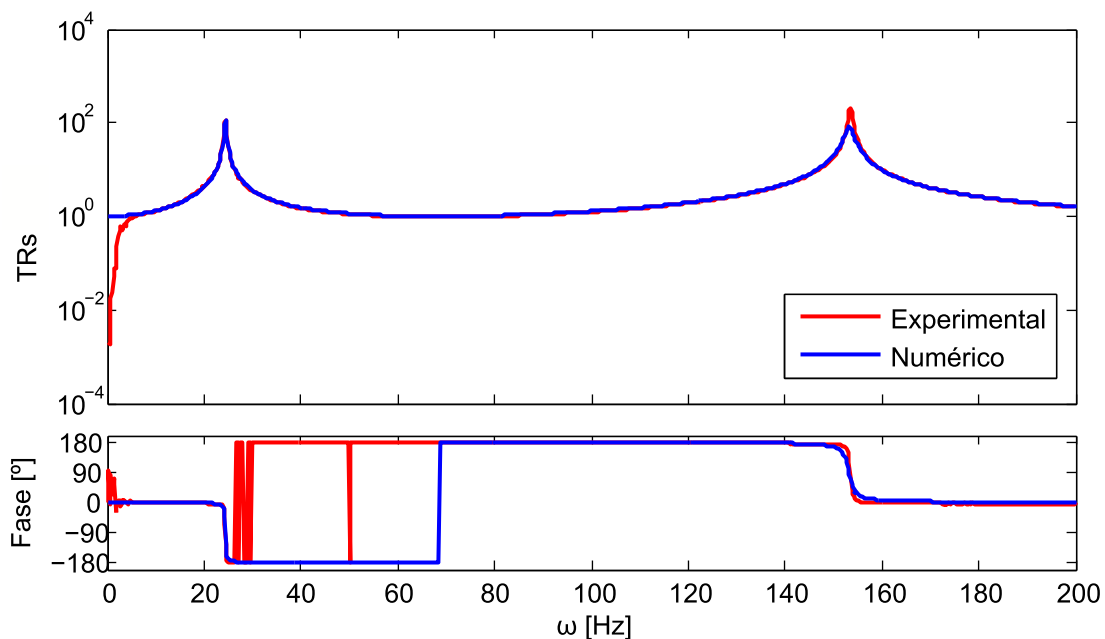


Figura 6.1: Transmissibilidade de deslocamento em função da frequência da viga Elast_180 (1)

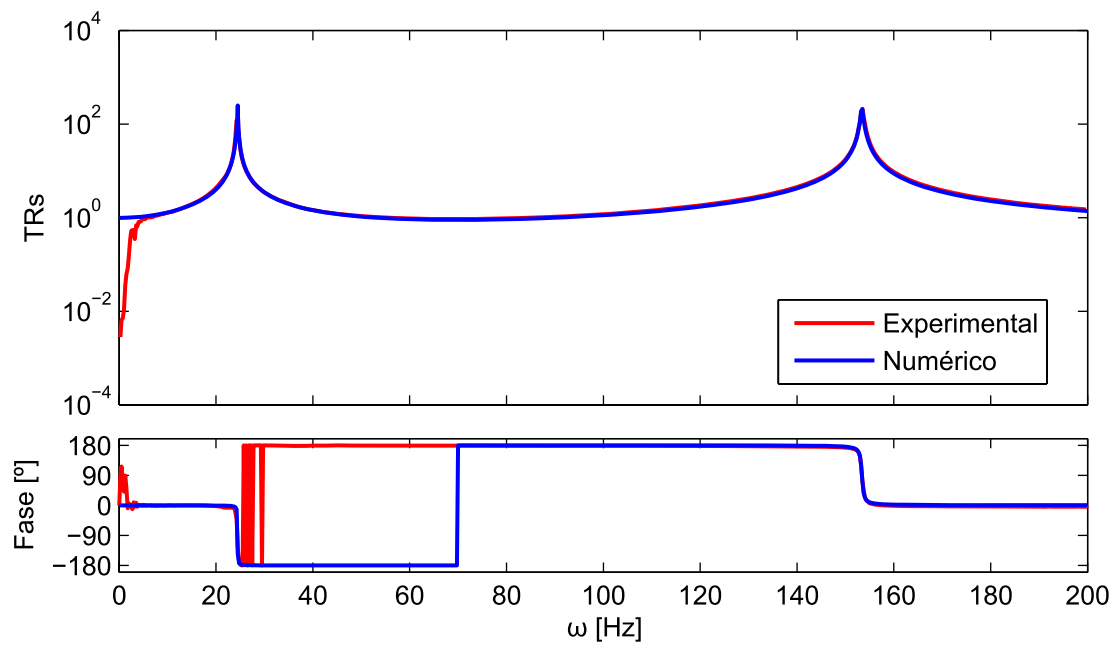


Figura 6.2: Transmissibilidade de deslocamento em função da frequência da viga Elast_180 (2)

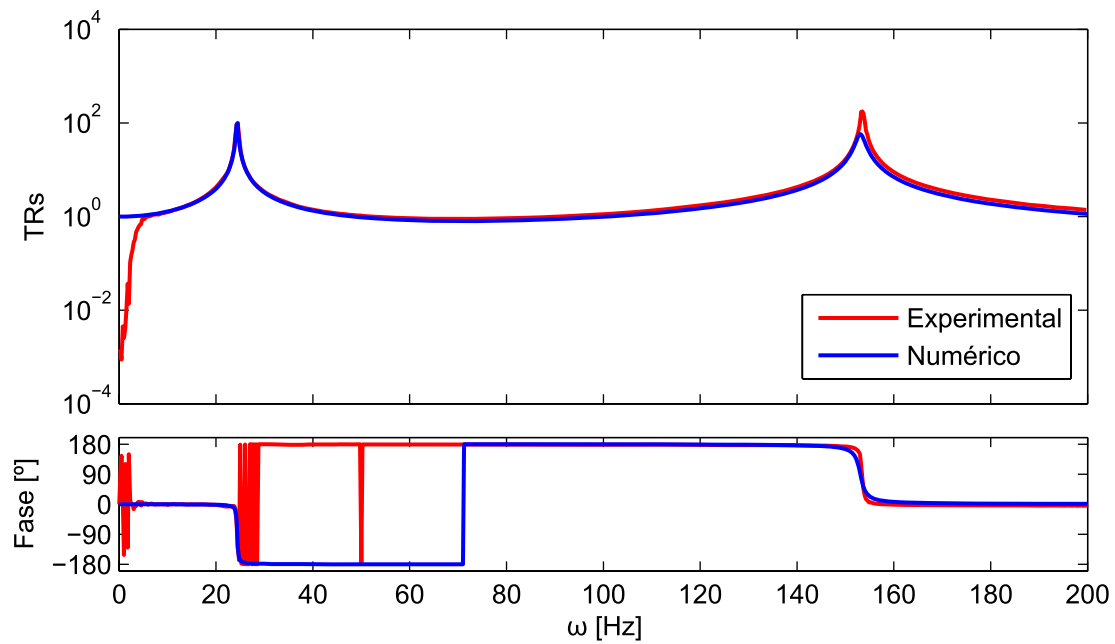


Figura 6.3: Transmissibilidade de deslocamento em função da frequência da viga Elast_180 (3)

Tabela 6.2: Propriedades do material elástico das vigas Elast_180

Viga	$E_e(GPa)$	η_e
Elast_180(1)	60.915	0.0108
Elast_180(2)	61.095	0.0034
Elast_180(3)	60.820	0.0109
Média	60.943	0.0084

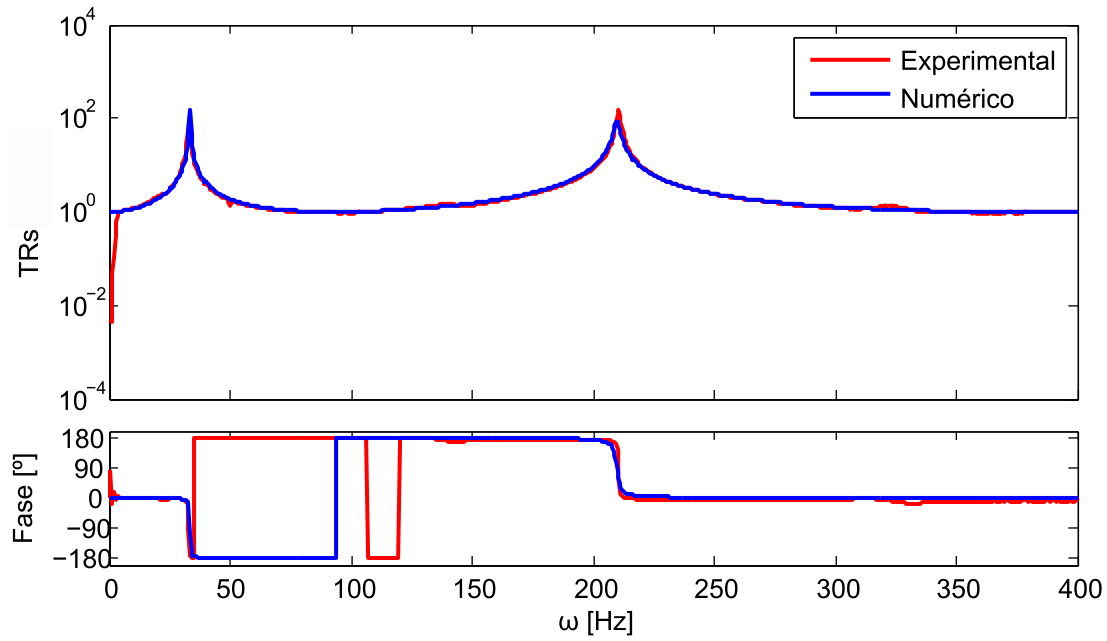


Figura 6.4: Transmissibilidade de deslocamento em função da frequência da viga Elast_220

Tabela 6.3: Propriedades do material elástico da viga Elast_220

Viga	$E_e(GPa)$	η_e
Elast_220	68.921	0.0103

Tabela 6.4: Propriedades adoptadas para o material elástico das vigas base

Viga	$G(GPa)$	η_e	$E_e(GPa)$	ν_e
Elast_180	23.429	0.0108	60.915	0.3
Elast_220	26.508	0.0103	68.921	0.3

A tabela 6.4 mostra um pequeno desvio nos valores das propriedades do material elástico obtidos a partir das duas vigas base. Assim, os valores finais utilizados do módulo de ganho elástico (E_e) foram de $61GPa$ para a viga base de comprimento livre de $180mm$ e de $69GPa$ para a viga base de comprimento livre de $220mm$. Em relação ao fator de perda (η_e), os valores identificados em ambas as vigas foram bastante próximos, 0.01.

O valor do coeficiente de Poisson (ν_e) não foi identificado experimentalmente, daí que se utilizou sempre o valor teórico, 0.3.

Pelas figuras 6.1 a 6.4, pode-se observar que as funções de transmissibilidade numéricas, geradas pelo modelo de elementos finitos utilizando as propriedades identificadas, são bastante idênticas às funções de transmissibilidade obtidas experimentalmente, fato que valida as propriedades do material elástico identificadas (tab. 6.4).

Para a análise da influencia da localização do ponto de medição, considerou-se a viga base de comprimento livre $180mm$ com o ponto de medição da função de transmissibilidade localizado a $5mm$ (2) e a $10mm$ (3) da extremidade livre. Verificou-se que as funções de transmissibilidade numéricas geradas convergiram com as funções de transmissibilidade experimentais, em toda a gama de frequências (figs. 6.2 e 6.3). Por consequência, pode-se confirmar pela tabela 6.2 que as propriedades do material elástico geradas também são bem sucedidas.

Apesar das representações das curvas sobrepostas apresentadas acima, que permite comparar os resultados obtidos medidos experimentalmente com os dados obtidos pelo modelo numérico, esta comparação é de carácter subjetivo e qualitativo. Assim, torna-se necessário recorrer a procedimentos de comparação quantitativa e objetiva, usando um indicador de correlação. Por isso, utilizando o indicador de correlação LAC, apresentado na secção 3.4, representou-se este indicador para cada comparação de transmissibilidade numérica com experimental, onde o valor 0 significa que não existe qualquer correlação e o valor 1 representa a correlação perfeita.

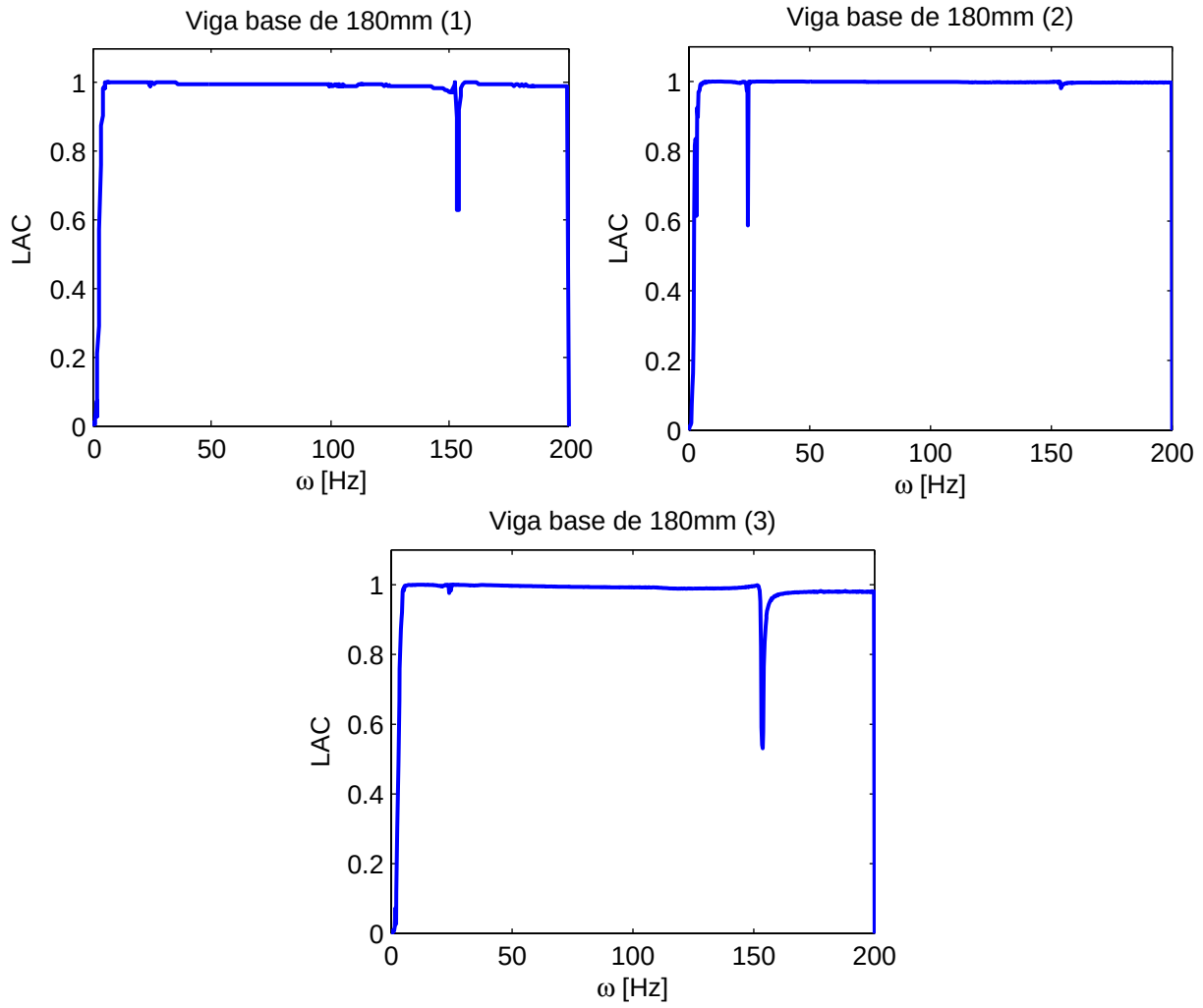


Figura 6.5: Indicador LAC - Viga Elast_180 (1), (2) e (3)

Verifica-se que para a viga base de 180mm de comprimento livre (fig.6.5), quando a medição é feita na extremidade livre da viga (1) e a 10mm da extremidade livre (3), apenas na segunda frequência de ressonância é que ocorre uma maior discrepância. Por outro lado, quando a medição da transmissibilidade é feita a 5mm (2), a maior discrepância ocorre na primeira frequência de ressonância. No entanto, globalmente, a correlação (LAC) entre as transmissibilidade experimentais e numéricas pode considerar-se muito satisfatória visto que é aproximadamente igual a 1 em toda a gama de frequências.

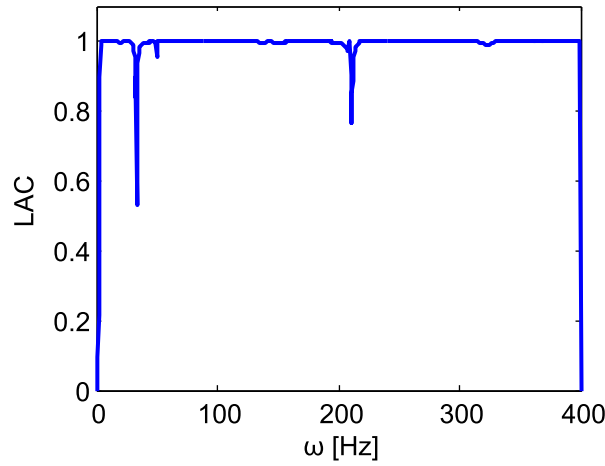


Figura 6.6: Indicador LAC - Viga Elast_220

Pela figura 6.6 observa-se que não existem grandes discrepâncias entre as TRs numérica e experimental para a viga base de 220mm de comprimento exceto, essencialmente, nas frequências de ressonância (33.5Hz e 211Hz), ver figura 6.4.

6.2 Viga *sandwich*

Feita a análise das vigas de base, prosseguiu-se para a análise das vigas *sandwich*, com o propósito de gerar as funções de resposta em frequência do tipo transmissibilidade, implementando o modelo constitutivo do material viscoelástico. Assim, para o modelo numérico gerar as propriedades do material viscoelástico foi necessário, inicialmente, arbitrar os quatro parâmetros do modelo constitutivo, sendo $G_0 = 1 \times 10^9 Pa$, $G_\infty = 1 \times 10^8 Pa$, $\alpha = 0.5$ e $\tau = 1 \times 10^{-6} s$. É de ter em atenção o efeito da amplitude de deformação nas propriedades dinâmicas do material viscoelástico, visto que, a rigidez diminui e o fator de perda aumenta quando a deformação atinge valores para além do comportamento linear do material viscoelástico [2].

Pela tabela 6.5 pode-se observar a discretização feita para cada viga *sandwich*, os pontos de medição das TRs e gamas de frequências utilizadas.

Tabela 6.5: Discretização das vigas *sandwich*

Vigas	Nr ^o de elementos	Nó de medição (1)	Nó de medição (2)	Nó de medição (3)	Gama de frequência (Hz)
Sw_180	36	37	36	35	[0 400]
Sw_220	44	45	44	43	[0 200]
Sw_260	52	53	52	51	[0 200]
Sw_300	60	61	60	59	[0 200]

Nas figuras seguintes pode-se observar a sobreposição das funções de transmissibilidade numéricas e experimentais, como também, das propriedades geradas numericamente e experimentalmente, para diferentes comprimentos livres de viga.

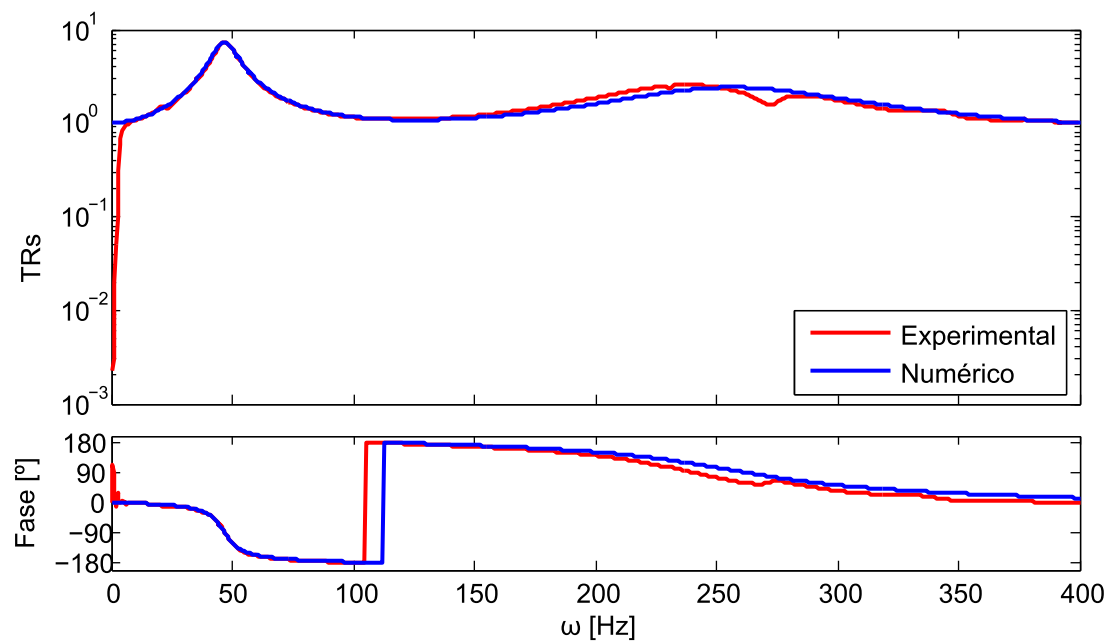


Figura 6.7: Transmissibilidade de deslocamento em função da frequência da viga Sw_180 - $T \approx 24^\circ\text{C}$

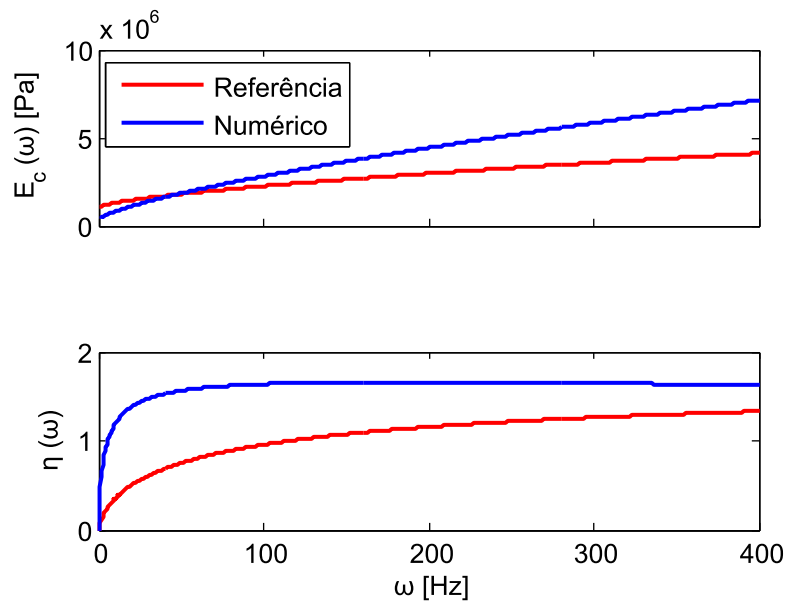


Figura 6.8: Propriedades do material viscoelástico da viga Sw_180 - $T \approx 24^\circ\text{C}$

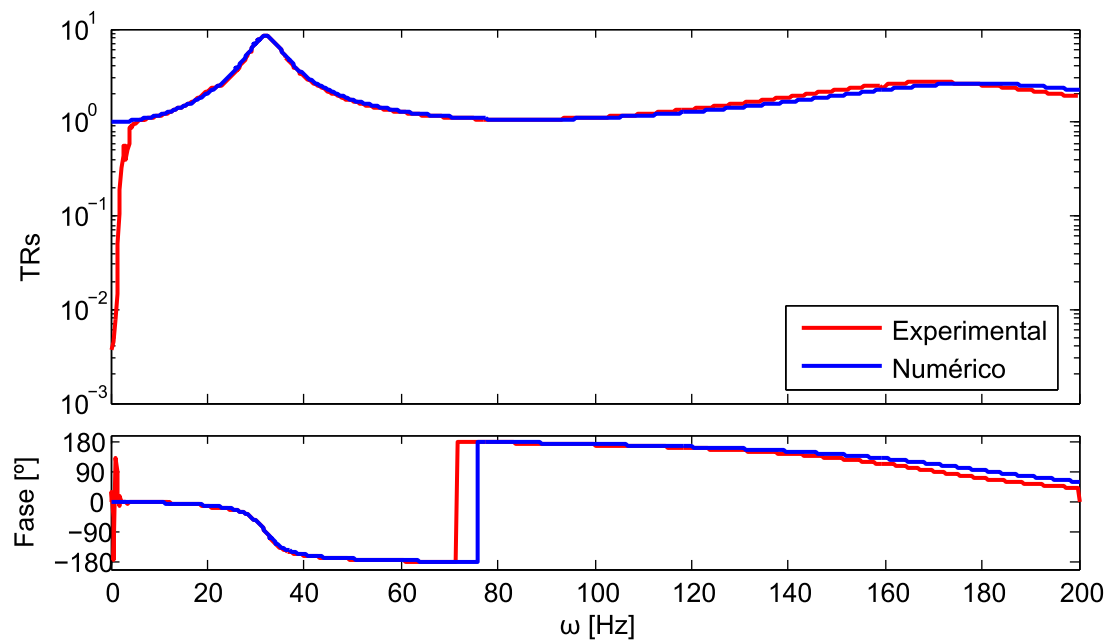


Figura 6.9: Transmissibilidade de deslocamento em função da frequência da viga Sw_220 - $T \approx 24^\circ\text{C}$

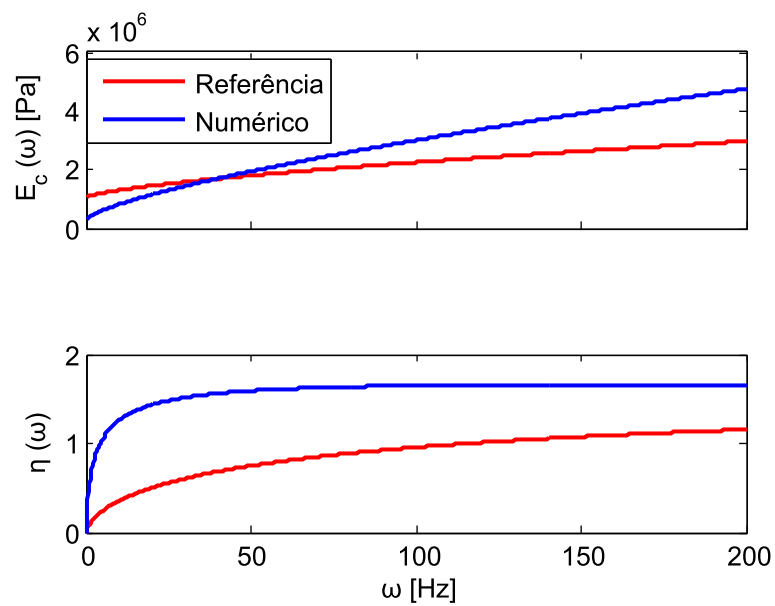


Figura 6.10: Propriedades do material viscoelástico da viga Sw_220 - $T \approx 24^\circ\text{C}$

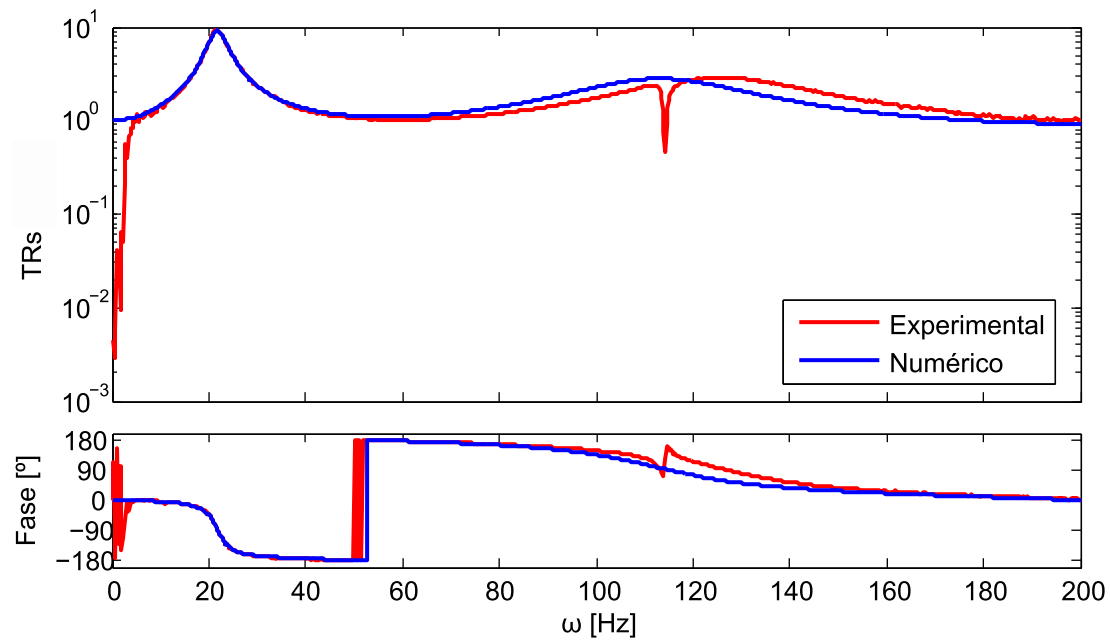


Figura 6.11: Transmissibilidade de deslocamento em função da frequência da viga Sw_260 - $T \approx 24^\circ\text{C}$

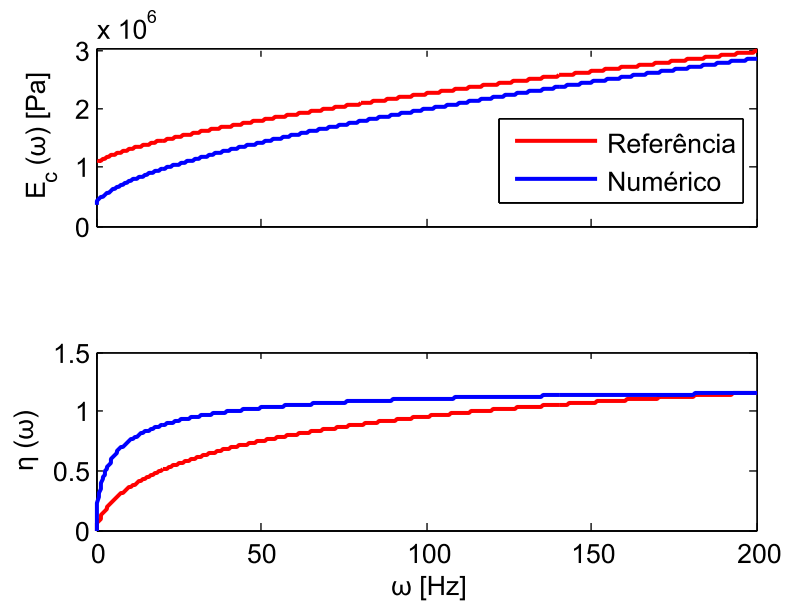


Figura 6.12: Propriedades do material viscoelástico da viga Sw_260 - $T \approx 24^\circ\text{C}$

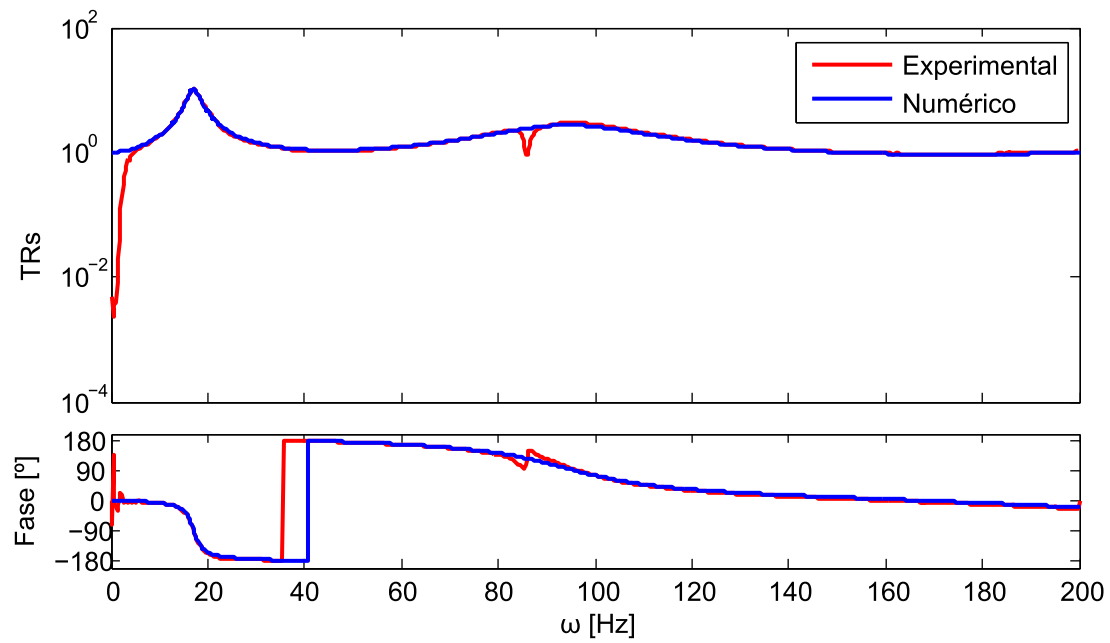


Figura 6.13: Transmissibilidade de deslocamento em função da frequência da viga Sw_300 - $T \approx 24^\circ\text{C}$

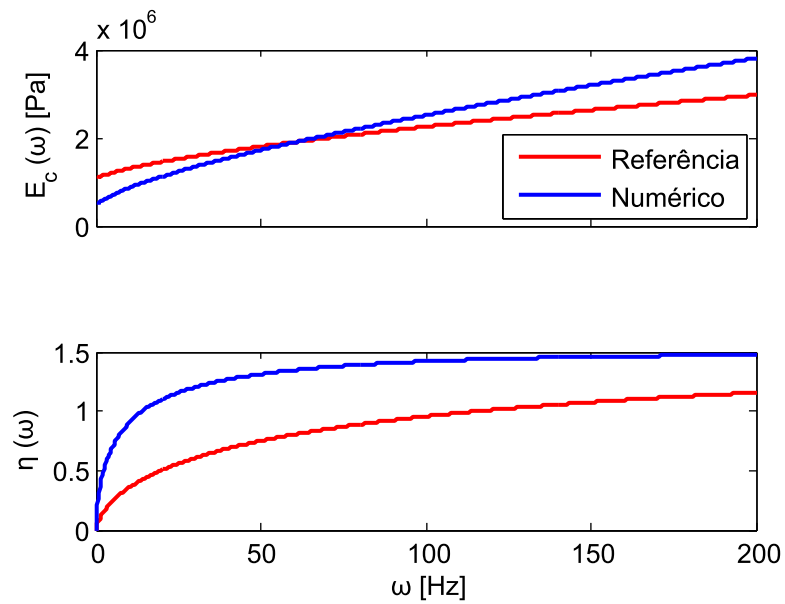
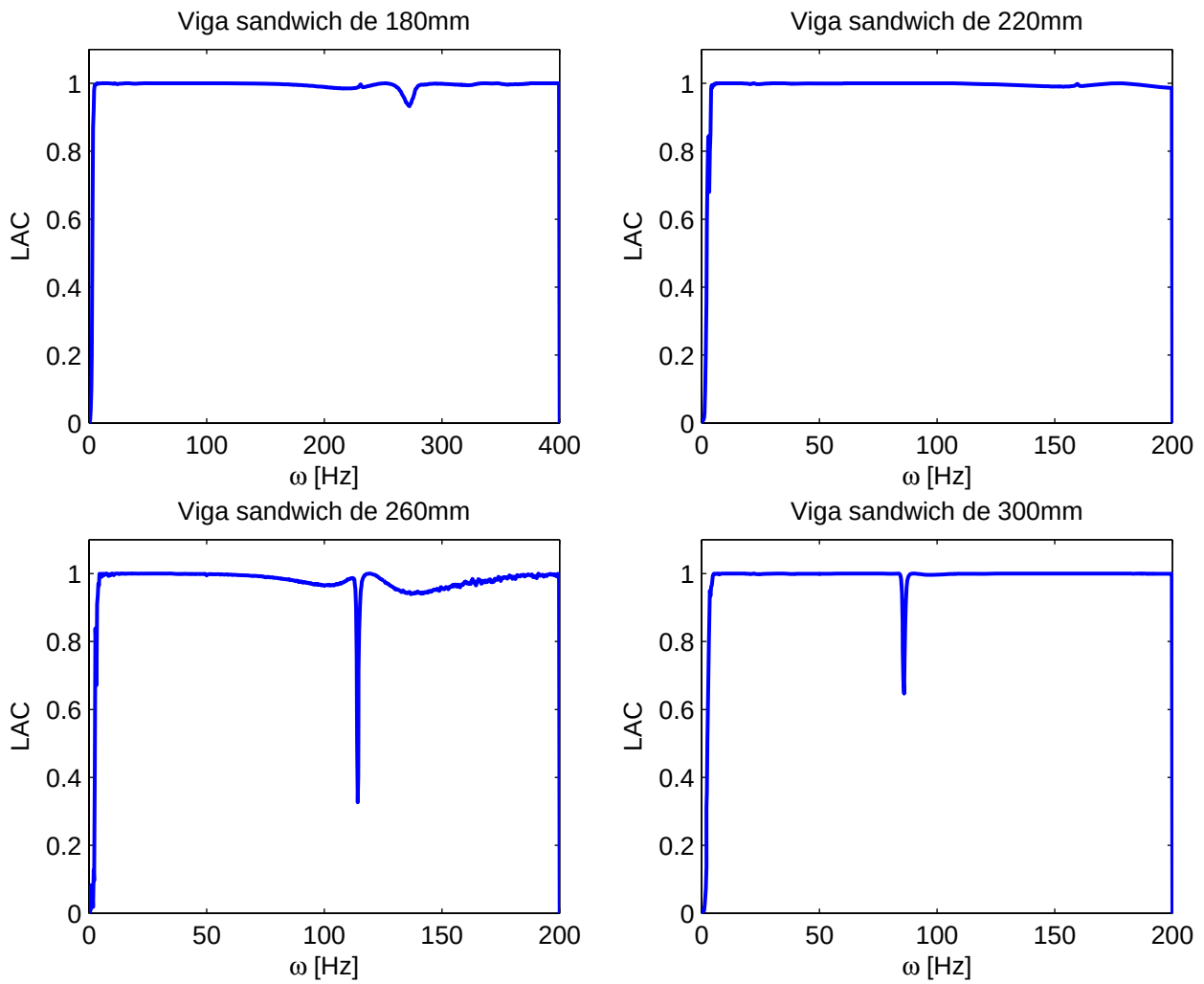


Figura 6.14: Propriedades do material viscoelástico da viga Sw_300 - $T \approx 24^\circ\text{C}$

Figura 6.15: Indicador LAC - Vigas *sandwich*

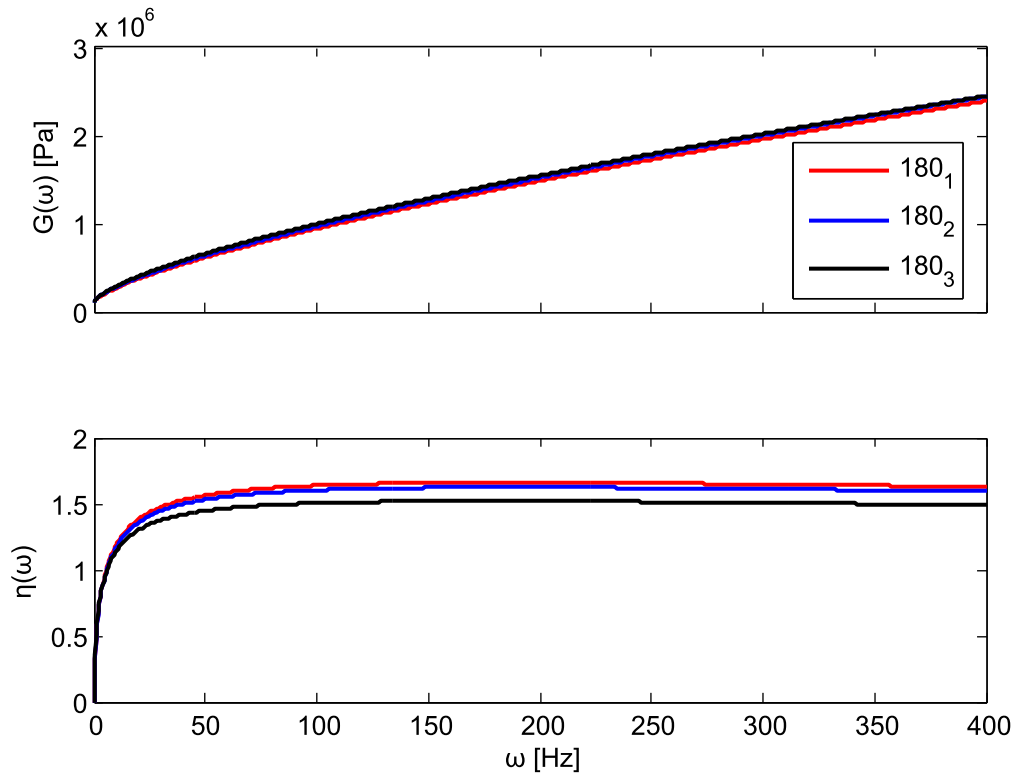


Figura 6.16: Propriedades do material viscoelástico da viga Sw_180 - Variação do grau de liberdade medido - $T \approx 24^\circ\text{C}$

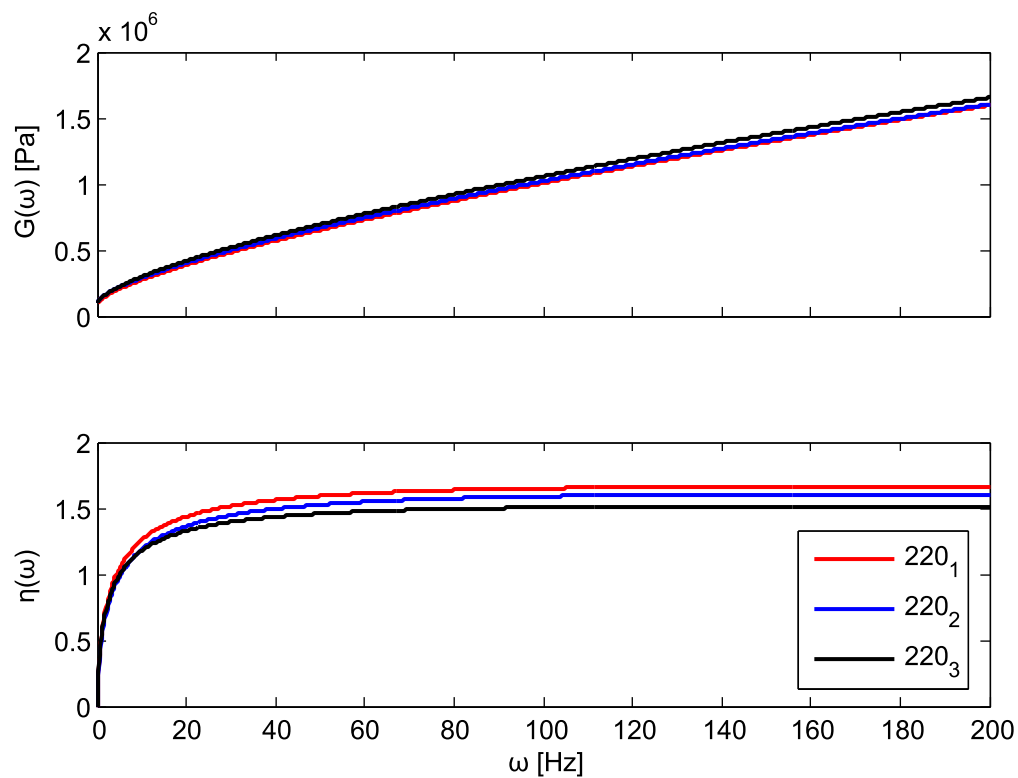


Figura 6.17: Propriedades do material viscoelástico da viga Sw_220 - Variação do grau de liberdade medido - $T \approx 24^\circ\text{C}$

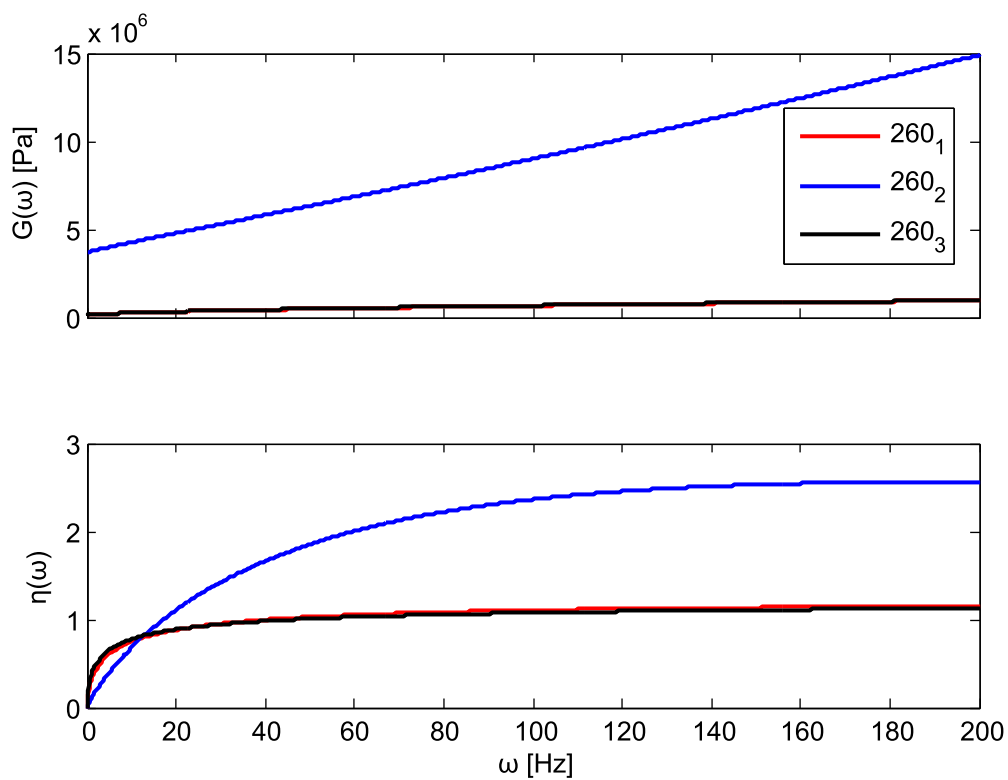


Figura 6.18: Propriedades do material viscoelástico da viga Sw_260 - Variação do grau de liberdade medido - $T \approx 24^\circ\text{C}$

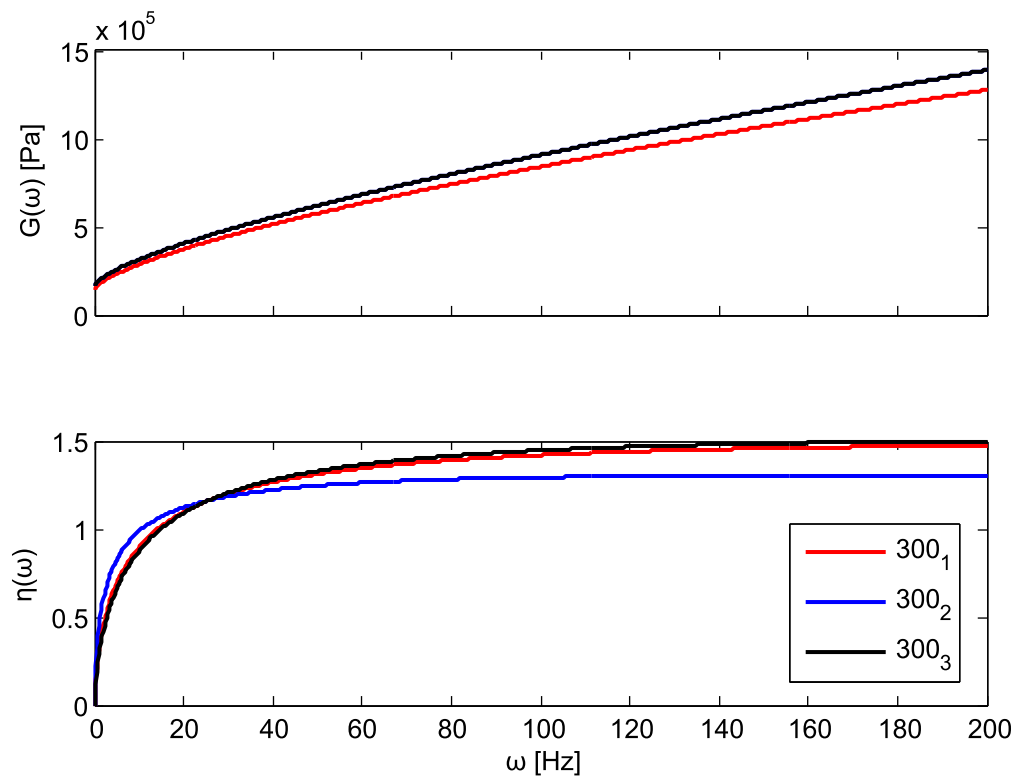


Figura 6.19: Propriedades do material viscoelástico da viga Sw_300 - Variação do grau de liberdade medido - $T \approx 24^\circ\text{C}$

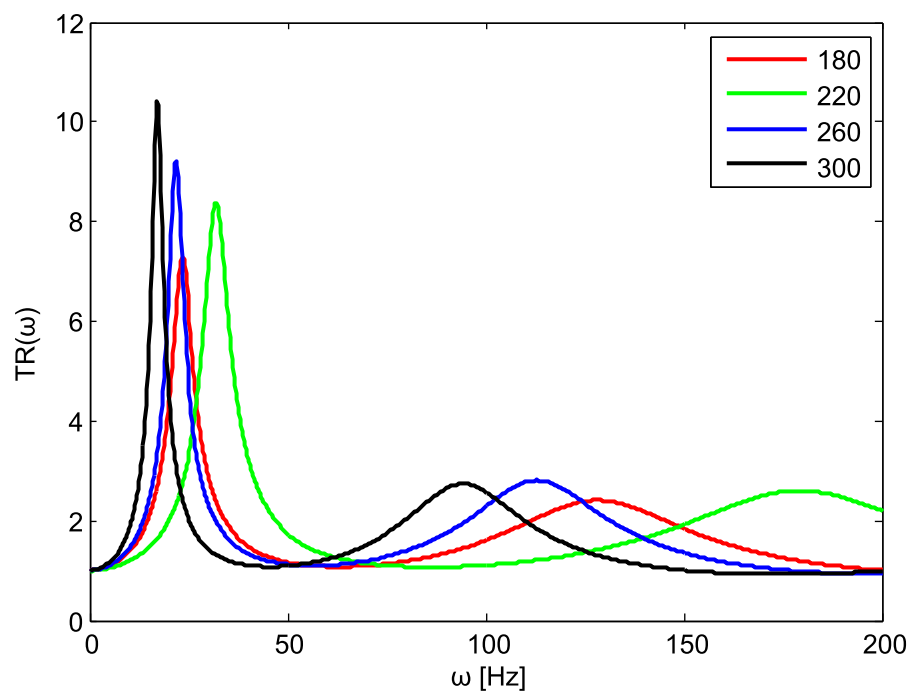


Figura 6.20: Vigas *sandwich* com variação do comprimento livre - Transmissibilidades de deslocamento - $T \approx 24^\circ\text{C}$

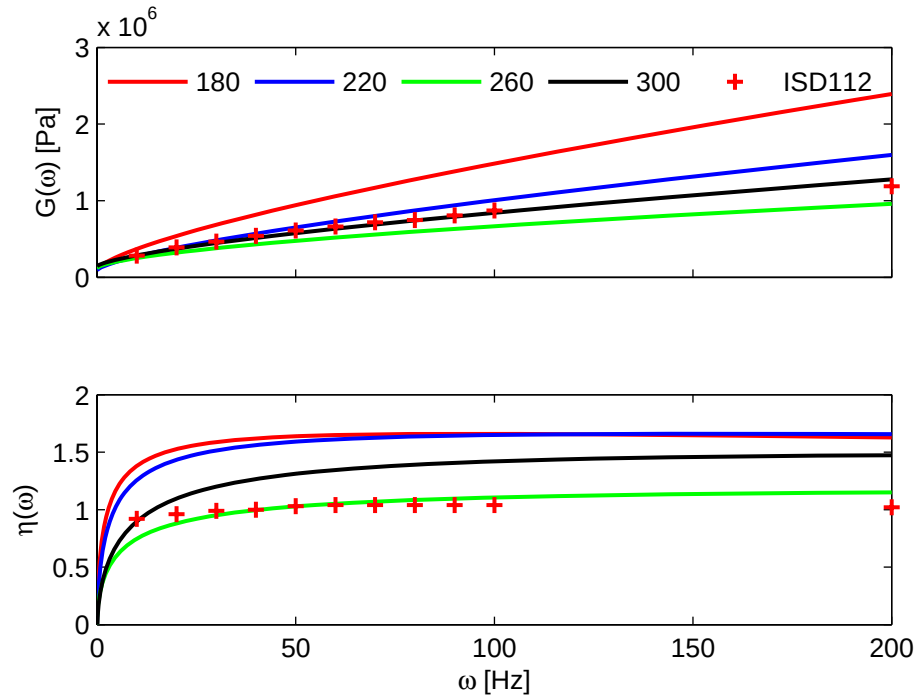


Figura 6.21: Propriedades do material 3M ISD112: valores identificados e valores do nomograma - $T \approx 24^\circ\text{C}$ [8]

Tabela 6.6: Propriedades do material viscoelástico das vigas *sandwich* de 180mm

Viga	$G_0(\text{Pa})$	$G_\infty(\text{Pa})$	α	$\tau(\text{s})$
Sw_180_1	1.010×10^5	7.478×10^7	0.696	7.365×10^{-6}
Sw_180_2	1.039×10^5	7.372×10^7	0.690	7.342×10^{-6}
Sw_180_3	9.918×10^4	6.824×10^7	0.671	6.902×10^{-6}

Tabela 6.7: Propriedades do material viscoelástico das vigas *sandwich* de 220mm

Viga	$G_0(\text{Pa})$	$G_\infty(\text{Pa})$	α	$\tau(\text{s})$
Sw_220_1	9.184×10^4	7.426×10^7	0.694	8.203×10^{-6}
Sw_220_2	1.019×10^5	7.469×10^7	0.686	7.471×10^{-6}
Sw_220_3	9.596×10^4	5.828×10^7	0.671	9.675×10^{-6}

Tabela 6.8: Propriedades do material viscoelástico das vigas *sandwich* de 260mm

Viga	$G_0(\text{Pa})$	$G_\infty(\text{Pa})$	α	$\tau(\text{s})$
Sw_260_1	1.155×10^5	3.632×10^7	0.604	3.745×10^{-6}
Sw_260_2	3.668×10^6	4.370×10^8	0.875	5.333×10^{-5}
Sw_260_3	9.670×10^4	3.027×10^8	0.574	6.645×10^{-8}

Tabela 6.9: Propriedades do material viscoelástico das vigas *sandwich* de 300mm

Viga	$G_0(\text{Pa})$	$G_\infty(\text{Pa})$	α	$\tau(\text{s})$
Sw_300_1	1.416×10^5	5.507×10^7	0.677	7.046×10^{-6}
Sw_300_2	1.032×10^5	3.760×10^7	0.638	9.952×10^{-6}
Sw_300_3	1.674×10^5	4.559×10^7	0.692	1.189×10^{-5}

Tabela 6.10: Propriedades do material viscoelástico das vigas *sandwich* - Média

Viga	$G_0(\text{Pa})$	$G_\infty(\text{Pa})$	α	$\tau(\text{s})$
Sw_180	1.014×10^5	7.224×10^7	0.686	7.203×10^{-6}
Sw_220	9.655×10^4	6.908×10^7	0.684	8.444×10^{-6}
Sw_300	1.374×10^5	4.609×10^7	0.669	9.628×10^{-6}
Média	1.118×10^5	6.247×10^7	0.680	8.425×10^{-6}

Pelas figuras 6.7, 6.9, 6.11 e 6.13, para a mesma gama de frequências (0 a 200Hz), verifica-se que à medida que o comprimento livre da viga *sandwich* aumenta, as frequências onde ocorrem as respectivas ressonâncias diminui. Apesar de que a transmissibilidade numérica da viga Sw_260 ter sido gerada com sucesso, figura 6.11, como também as suas respectivas propriedades do material viscoelástico (fig.6.12), os valores obtidos para os parâmetros do modelo constitutivo são bastante distintos (tab.6.8). Verifica-se também, que conforme se varia o ponto de medição, a TR experimental dá bastante diferente (fig.6.18). Por estas razões, decidiu-se desprezar a viga *sandwich* de comprimento livre de 260mm no resto trabalho.

Pelas tabelas 6.6, 6.7 e 6.9 verifica-se que os valores obtidos para os parâmetros do modelo constitutivo do material viscoelástico são bastante próximos, para os três pontos de medição distintos, podendo afirmar-se que as propriedades mecânicas do material viscoelástico foram geradas com sucesso (figs.6.8, 6.10 e 6.14). Esta correlação quase perfeita, pode-se observar pela figura 6.15, onde está apresentado o indicador local LAC, notando-se a ocorrência de alguma discrepância nas segundas frequências de ressonância para a viga Sw_260 e Sw_300.

À medida que se varia o ponto de medição da resposta da viga na extremidade livre (1), (2) e (3), as propriedades do material viscoelástico obtidas devem ser idênticas. Pelas figuras 6.16, 6.17 e 6.19 confirma-se que os valores obtidos para as propriedades do material viscoelástico são bastante próximos, ao longo da frequência.

Salienta-se para o fato de que aparece sempre uma perturbação na TR experimental um pouco antes da segunda frequência de ressonância. Esta perturbação verificou-se em todas as vigas *sandwich* testadas.

Apesar dos valores obtidos para os parâmetros do modelo constitutivo das três vigas (180, 220 e 300) serem muito próximos (tab.6.10), fez-se duas representações, uma da transmissibilidade de deslocamento (fig.6.20) e das propriedades do material viscoelástico (fig.6.21), verificando que existe uma certa diferença nos seus valores ao longo da frequência. Apesar de que o comprimento da viga influencia o valor das frequências de ressonância (fig.6.20), mas não influencia as propriedades do material viscoelástico (fig.6.21), obteve-se um certo desvio dos valores das propriedades conforme se aumentou o comprimento da viga.

Na figura 6.21 representam-se igualmente os valores das propriedades do material 3M ISD112 retiradas do nomograma fornecido pelo fabricante [8]. Para o módulo de ganho, os valores identificados situam-se em torno dos valores da 3M, enquanto que para o fator de perda os valores da 3M situam-se na fronteira da faixa de valores identificados. Com esta comparação valida-se a metodologia de identificação inversa desenvolvida.

6.3 Viga com camada de restrição

Posteriormente, fez-se a análise da viga de tratamento com camada de restrição (fig.5.7). Neste caso, fizeram-se quatro medições, variando a gama de frequências, de forma a medir-se a função de transmissibilidade sempre na extremidade livre da viga. As gamas de frequências são 0 a 200Hz, 0 a 400Hz, 0 a 800Hz e 0 a 1600Hz. Como já foi referido anteriormente, o comprimento livre desta viga é de 220mm, e por isso, o número de elementos considerado foi 44, ou seja, 45 nós, sendo o último nó (45) o ponto de medição feita pelo vibrômetro laser. Em seguida, estão apresentadas as funções de transmissibilidade e as propriedades obtidas, fazendo a respetiva comparação entre o resultado obtido numericamente e experimentalmente. Por último, encontra-se a tabela 6.11 onde estão pormenorizados os parâmetros obtidos numericamente para o modelo constitutivo do material viscoelástico. Durante o ensaio da viga, à medida que se aumentava a gama de frequências, verificou-se o aparecimento de quatro frequências de ressonância.

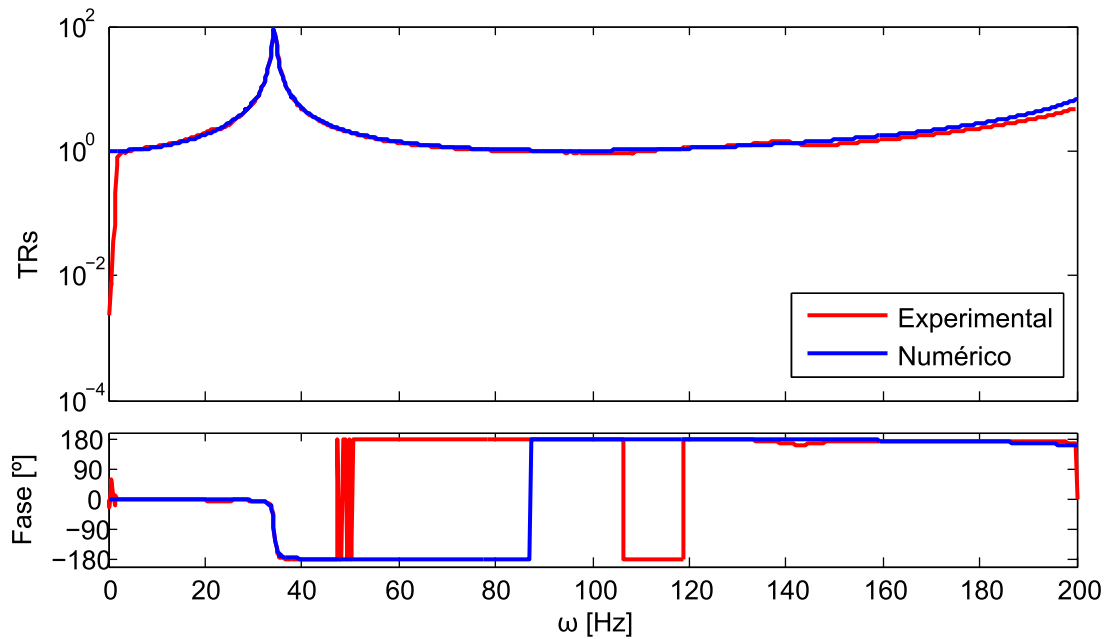


Figura 6.22: Transmissibilidade de deslocamento em função da frequência da viga com camada de restrição: [0 200]Hz - $T \approx 24^{\circ}\text{C}$

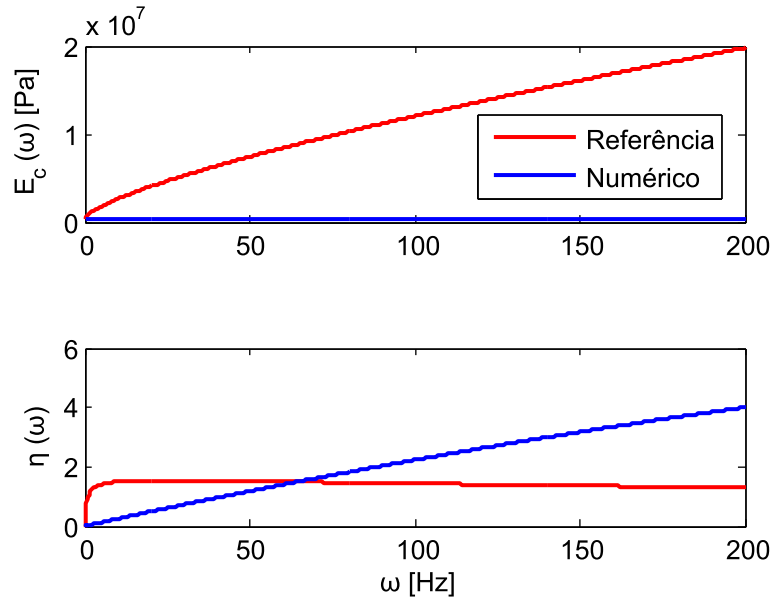


Figura 6.23: Propriedades do material viscoelástico da viga com camada de restrição: [0 200]Hz - $T \approx 24^\circ\text{C}$

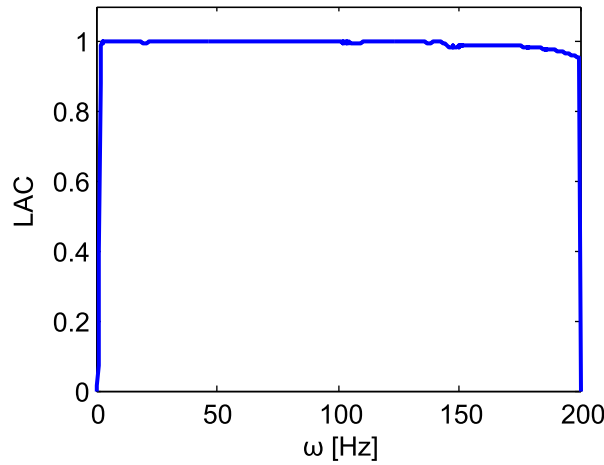


Figura 6.24: Indicador LAC - Viga com camada de restrição: [0 200]Hz

Para a gama de frequências [0 200]Hz apenas aparece uma frequência de ressonância (fig.6.22), por isso, as frequências de controlo, três frequências no total, a serem usadas no processo de identificação numérico das propriedades do material viscoelástico, foram retiradas desta primeira zona de ressonância. Como se pode confirmar pela figura 6.23, a aplicação destas frequências de controlo seleccionadas em volta da primeira frequência de ressonância foi bem sucedida, uma vez que o modelo numérico convergiu com os valores obtidos experimentalmente.

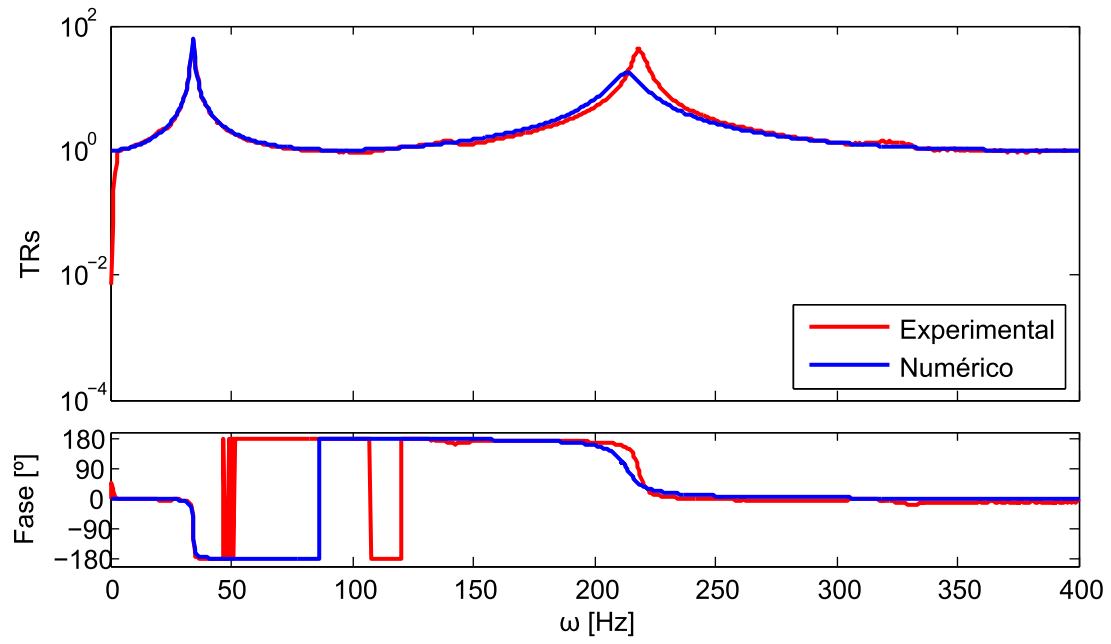


Figura 6.25: Transmissibilidade de deslocamento em função da frequência da viga com camada de restrição: $[0\ 400]\text{Hz}$ - $T \approx 24^\circ\text{C}$

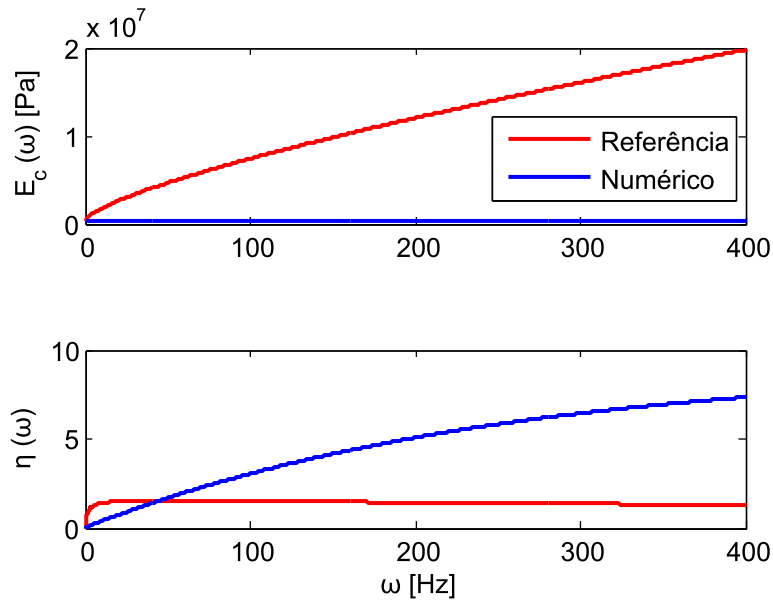


Figura 6.26: Propriedades do material viscoelástico da viga com camada de restrição: $[0\ 400]\text{Hz}$ - $T \approx 24^\circ\text{C}$

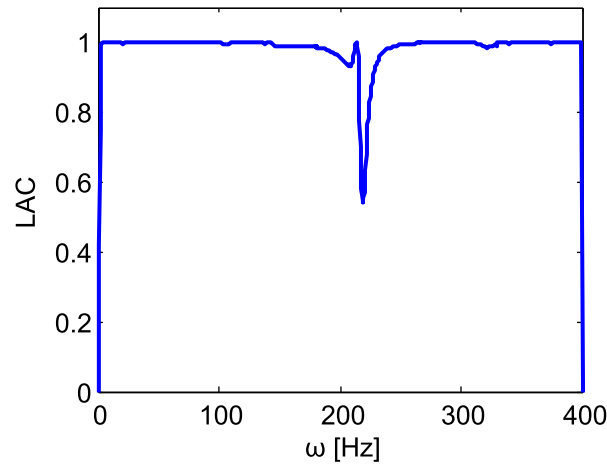


Figura 6.27: Indicador LAC - Viga com camada de restrição: $[0 \ 400]$ Hz

Seguidamente, analisou-se a viga para a gama de frequências $[0 \ 400]$ Hz. Neste caso já se apresenta a segunda frequência de ressonância (fig.6.25), de modo que, no total, seis frequências de controlo foram escolhidas para a aplicação do modelo numérico. Inicialmente, os resultados obtidos numericamente foram inaceitáveis. Por exemplo, o parâmetro G_0 possuía um valor negativo o que é impossível na realidade este parâmetro tomar valor nulo ou negativo. Por consequência, os restantes parâmetros também não atingiram valores razoáveis. Fez-se uma segunda tentativa, agora considerando apenas três frequências de controlo em volta da primeira frequência de ressonância. Assim, já se obtiveram resultados favoráveis, pelo menos todos os parâmetros do modelo constitutivo apresentaram valores positivos (ver tabela 6.11)! Esta afirmação pode ser confirmada observando a figura 6.25, onde as funções de transmissibilidade estão quase perfeitamente sobrepostas, e a figura 6.26, onde se verifica que as propriedades obtidas numericamente divergem como aconteceu na gama de frequências $[0 \ 200]$ Hz.

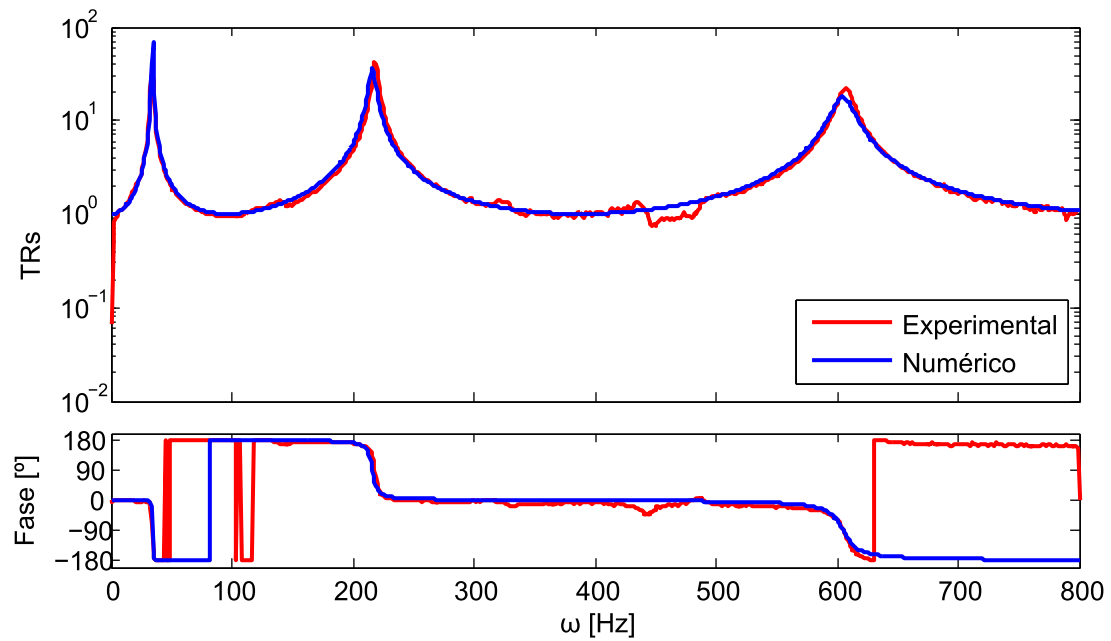


Figura 6.28: Transmissibilidade de deslocamento em função da frequência da viga com camada de restrição: $[0\ 800]\text{Hz}$ - $T \approx 24^\circ\text{C}$

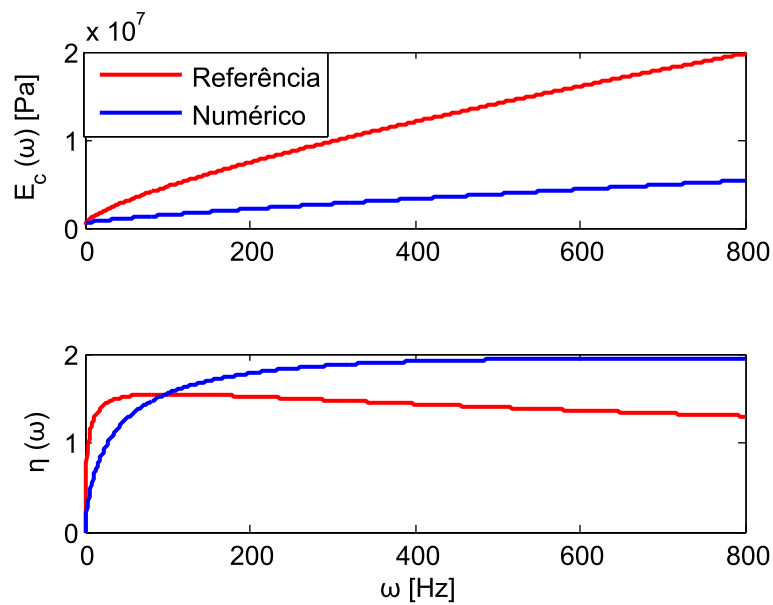


Figura 6.29: Propriedades do material viscoelástico da viga com camada de restrição: $[0\ 800]\text{Hz}$ - $T \approx 24^\circ\text{C}$

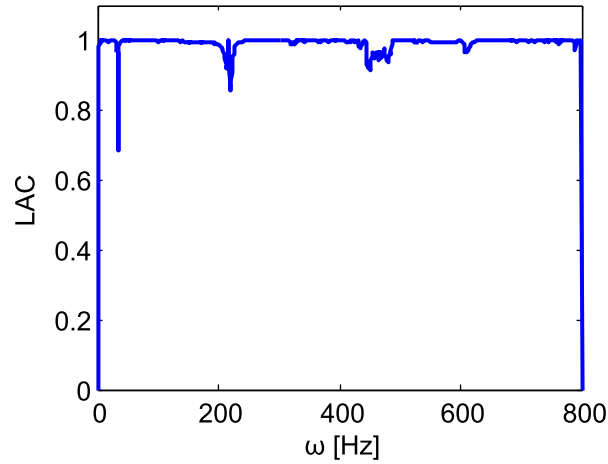


Figura 6.30: Indicador LAC - Viga com camada de restrição: $[0\ 800]\text{Hz}$

Posteriormente, fazendo o ensaio experimental da viga com camada de restrição para a gama de frequências $[0\ 800]\text{Hz}$, conseguiu-se abranger a terceira frequência de ressonância. Deste modo, no procedimento inverso de identificação dos quatro parâmetros do modelo constitutivo, selecionaram-se seis frequências de controlo, nas bandas da primeira e terceira ressonâncias. A segunda ressonância foi ignorada na escolha das frequências de controlo visto que, anteriormente, para a gama de $[0\ 400]\text{Hz}$ não se alcançaram bons resultados. Assim, observando a figura 6.28, verifica-se que as funções de transmissibilidade em função da frequência são idênticas, apesar de uma certa diferença nas zonas de ressonância. De igual modo, pela figura 6.29 observa-se que o módulo complexo numérico diverge bastante do de referência, o que sucede também para os valores do fator de perda. Apesar destas divergências, os valores dos parâmetros do modelo do material viscoelástico estão próximos dos que se obtiveram para as outras gamas (ver tab.6.11); daí que se considera este caso uma boa aproximação.

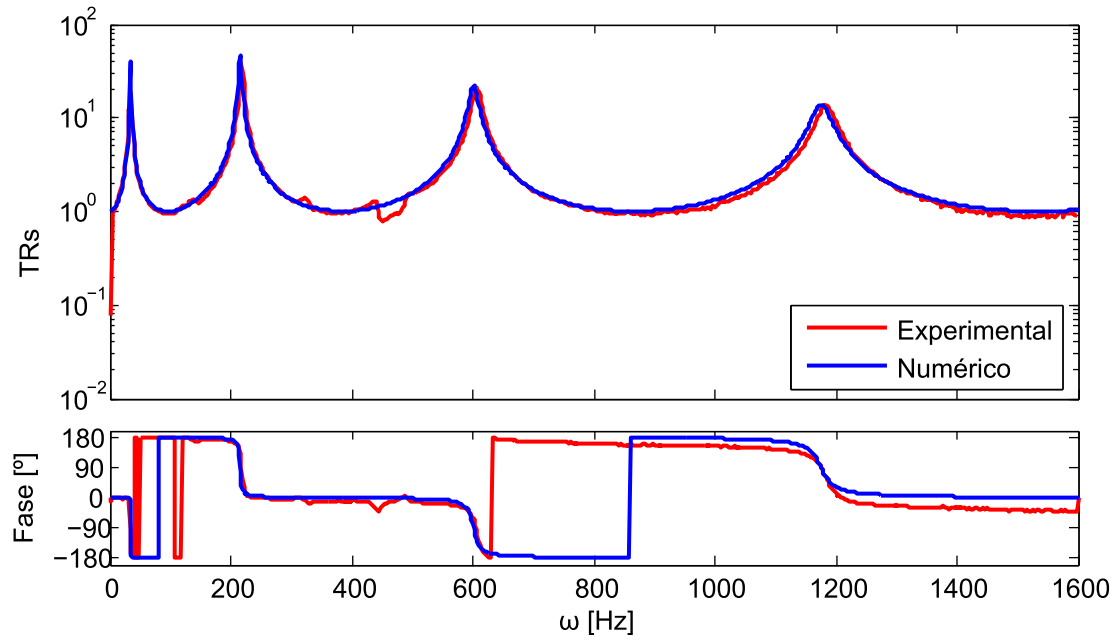


Figura 6.31: Transmissibilidade de deslocamento em função da frequência da viga com camada de restrição: $[0\ 1600]\text{Hz}$ - $T \approx 24^\circ\text{C}$

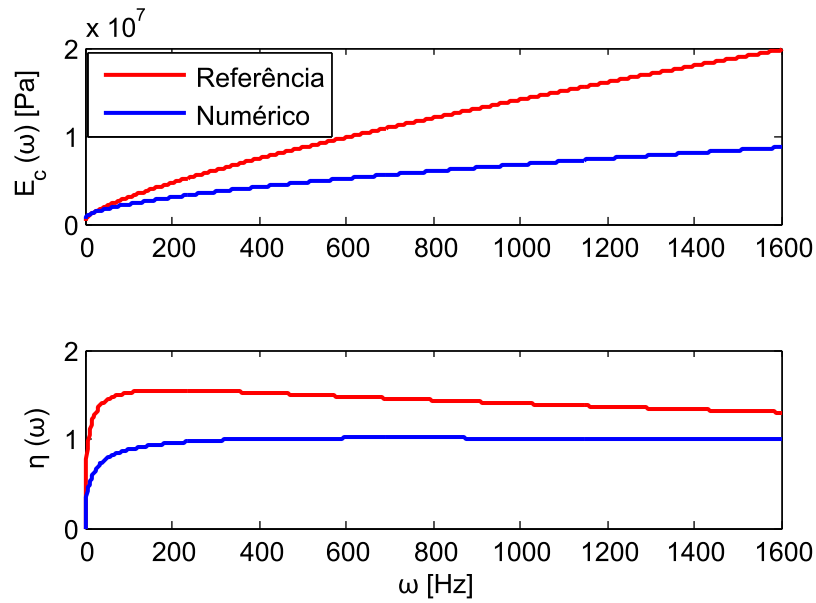


Figura 6.32: Propriedades do material viscoelástico da viga com camada de restrição: $[0\ 1600]\text{Hz}$ - $T \approx 24^\circ\text{C}$

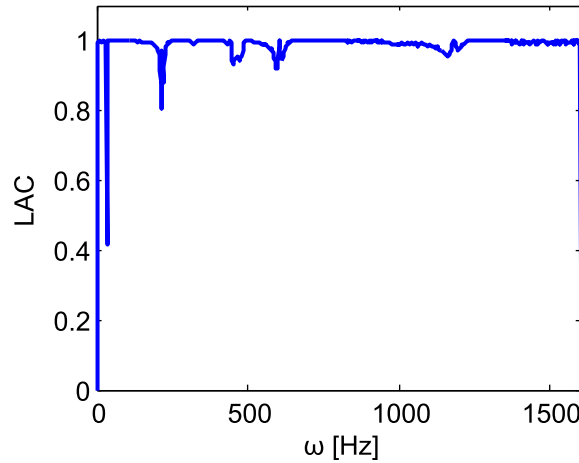


Figura 6.33: Indicador LAC - Viga com camada de restrição: $[0 \ 1600]$ Hz

Finalmente, fez-se um último ensaio da viga com camada de restrição na gama de frequências $[0 \ 1600]$ Hz, de modo a incluir a quarta frequência de ressonância. De igual modo, selecionou-se as frequências de controlo, sendo no total também seis frequências, mas nas proximidades da terceira e quarta ressonâncias. Gerando a transmissibilidade numérica verificou-se que é idêntica à transmissibilidade experimental, realçando que nas ressonâncias existe uma certa discrepância entre estas (fig.6.33). Analisando os valores obtidos numericamente para os parâmetros do modelo do material constitutivo, afirma-se que estes são próximos dos restantes valores para as diferentes gamas de frequências, considerando assim que as propriedades do material viscoelástico foram geradas com sucesso, apesar de que, observando a figura 6.32, os fatores de perda numérico e de referência ($\eta(\omega)$) convergem à medida que a frequência aumenta, verificando-se o oposto para o módulo complexo do material ($E_c(\omega)$).

Pelas figuras 6.24, 6.27, 6.30 e 6.33, verifica-se que na gama de frequências de 0 a 200Hz e de 0 a 400Hz, a correlação é quase perfeita, podendo afirmar-se que a função de resposta em frequência do tipo transmissibilidade obtida numericamente foi bem gerada. À medida que a gama de frequências aumenta (gama de 0 a 800Hz e de 0 a 1600Hz), existe uma correlação bastante variável, sugerindo que a função de transmissibilidade numérica não foi gerada com sucesso de forma a ser idêntica à transmissibilidade experimental.

Tabela 6.11: Propriedades do material viscoelástico da viga com camada de restrição

Gama de frequências (Hz)	G_0 (Pa)	G_∞ (Pa)	α	τ (s)
0 a 200	1.096×10^5	4.629×10^7	0.982	8.295×10^{-6}
0 a 400	7.987×10^4	6.355×10^7	0.971	6.136×10^{-6}
0 a 800	1.709×10^5	6.967×10^7	0.755	4.451×10^{-6}
0 a 1600	2.197×10^5	3.332×10^7	0.582	2.954×10^{-6}
Média	1.450×10^5	5.321×10^7	0.822	5.459×10^{-6}

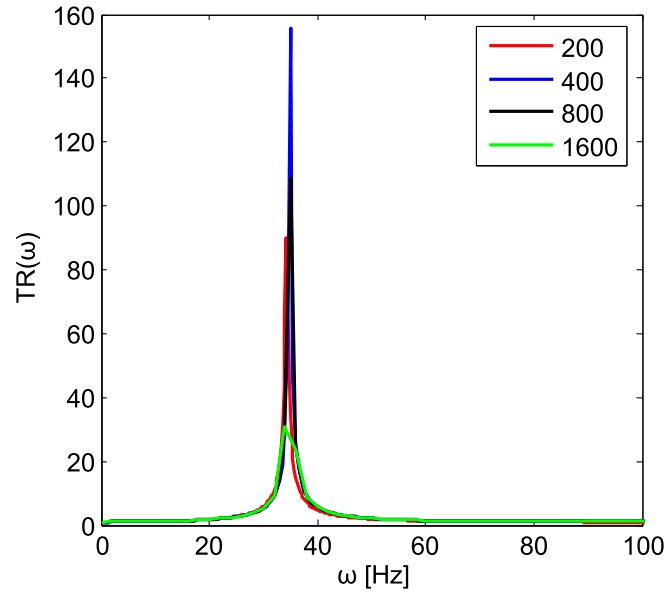


Figura 6.34: Viga com camada de restrição - Comparação das TRs - $T \approx 24^{\circ}\text{C}$

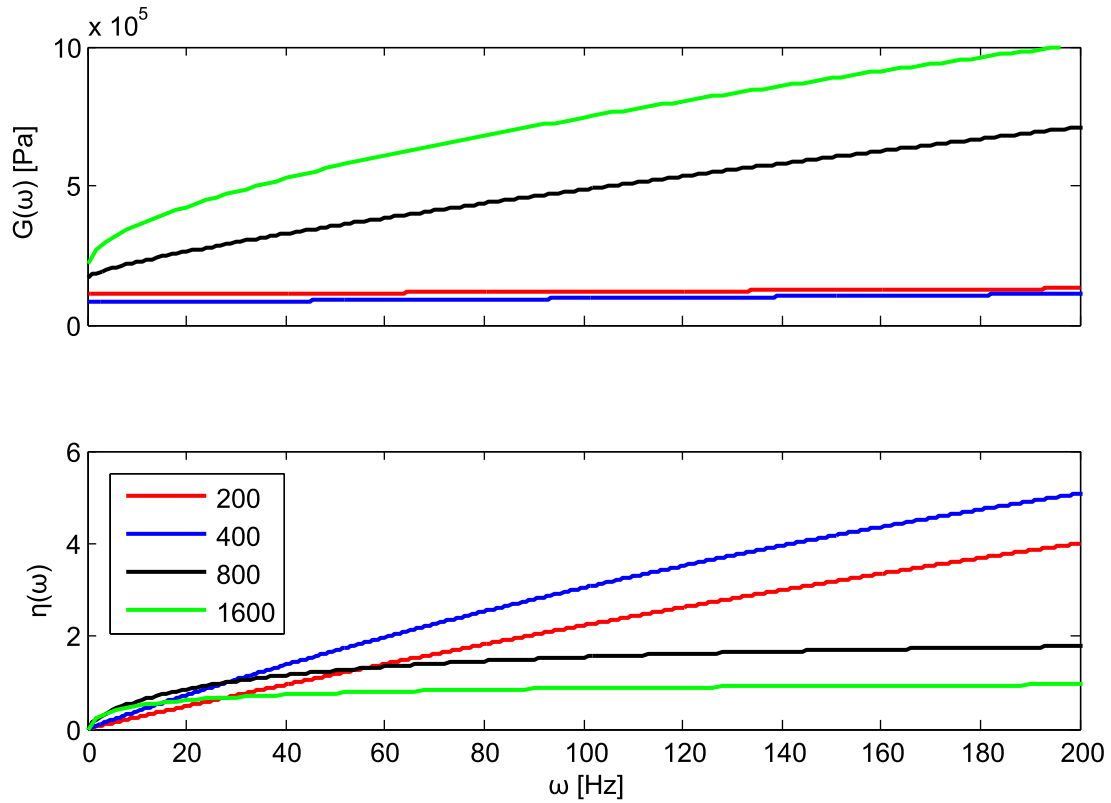


Figura 6.35: Viga com camada de restrição - Comparação das propriedades do material visco-elástico - $T \approx 24^{\circ}\text{C}$

Fazendo uma comparação global entre as diferentes gamas de frequências, verifica-se que a amplitude da função de transmissibilidade para a primeira frequência de ressonância varia

bastante, sendo na gama $[0 \text{ } 1600]\text{Hz}$ onde tem o valor menor, e na gama $[0 \text{ } 200]\text{Hz}$ onde possui o valor mais elevado. Por outro lado, através da figura 6.35, verifica-se que o módulo complexo $G(\omega)$ tende a aumentar à medida que se aumenta a gama de frequências. Em contrapartida, verifica-se o oposto no fator de perda $\eta(\omega)$, em que este diminui à medida que se aumenta a gama de frequências.

Finalmente, fez-se uma comparação dos parâmetros do modelo constitutivo do material viscoelástico obtidos pela análise das vigas *sandwich* e pela análise da viga com camada de restrição.

Tabela 6.12: Comparação dos parâmetros do modelo constitutivo do material viscoelástico

Vigas	$G_0(\text{Pa})$	$G_\infty(\text{Pa})$	α	$\tau(\text{s})$
Sandwich	1.118×10^5	6.247×10^7	0.680	8.425×10^{-6}
Camada de restrição	1.450×10^5	5.321×10^7	0.822	5.459×10^{-6}

Pela tabela 6.12 pode-se concluir que os quatros parâmetros do modelo constitutivo possuem valores bastante próximos para os dois tipos de tratamento viscoelástico (CLD e ILD). Este resultado era expetável uma vez que ambos os tratamentos utilizam o mesmo material viscoelástico 3M ISD112.

Capítulo 7

Conclusão

7.1 Conclusões

Da realização deste trabalho decorrem as seguintes conclusões globais:

- o método inverso de identificação das propriedades de materiais viscoelásticos desenvolvido foi implementado com sucesso, uma vez que os parâmetros obtidos para o modelo constitutivo convergem aproximadamente para o mesmo valor (ver tab.6.10) quando se fez variar o comprimento livre da viga;
- a configuração experimental necessária à implementação do método de identificação desenvolvido releva-se mais simples de implementar que a fornecida pela norma ASTM E756-05 [3];
- a quantidade de informação experimental necessária à identificação das propriedades do material viscoelástico pelo método desenvolvido é significativamente menor do que a requerida pela norma ASTM E756-05 [3];
- a correlação entre as funções de transmissibilidade experimentais e numéricas, avaliada pelo indicador LAC, revela-se satisfatória para os vários provetes ensaiados, em particular para os provetes *sandwich*.

Como conclusões de índole mais específica apontam-se as seguintes:

- o elemento finito multicamada baseado num modelo *layerwise* e na teoria de *Timoshenko* revelou-se apropriado na modelação dos provetes com tratamento viscoelástico, visto que as funções de transmissibilidade numéricas e experimentais ficam, maioritariamente, sobrepostas ao longo das gamas de frequência analisadas;
- os quatro parâmetros do modelo constitutivo apresentam diferentes sensibilidades no processo de identificação, por exemplo, o parâmetro G_0 por pouco que se mude o seu valor este influencia bastante o resultado final obtido para as propriedades do material viscoelástico ($G(\omega)$ e $\eta(\omega)$); em contrapartida, se se variar o valor de τ este já não influencia tanto o resultado final;
- como se pode verificar no capítulo 6, obtiveram-se alguns valores negativos para o parâmetro G_0 do modelo constitutivo do material viscoelástico. Como foi referido, tal não é aceitável, daí que se pode concluir que o algoritmo de minimização utilizado não é, porventura, o mais apropriado para este estudo. Uma possível forma de contornar este

problema, se possível, seria implementar no algoritmo de minimização a condição de que os parâmetros (os quatro) não podem tomar valores negativos ou até mesmo serem nulos;

- verificou-se que para alguns casos as funções de transmissibilidade ficavam praticamente sobrepostas, podendo-se concluir que a TR numérica tinha sido bem gerada, mas, posteriormente, observando as figuras das propriedades do material viscoelástico, verificava-se que as propriedades obtidas não convergiam com as propriedades de referência. Uma forma possível de tentar corrigir esta divergência seria, no algoritmo de minimização, aplicar coeficientes de ponderação. Estes coeficientes de ponderação, muito provavelmente iriam variar conforme a sensibilidade de cada um dos parâmetros do modelo constitutivo;
- os ensaios dos provetes tendo sido realizados em dias diferentes, pode-se afirmar que a temperatura a que se fizeram os ensaios não foi muito controlada. Dado que as propriedades do material viscoelástico também variam com a temperatura, este aspecto poderá contribuir para as ligeiras discrepâncias verificadas com os diferentes provetes;
- as funções de transmissibilidade dos provetes de viga *sandwich* apresentam, para os diferentes comprimentos, uma perturbação de intensidade diferente entre a primeira e a segunda frequências de ressonância; esta perturbação de causa não identificada poderá, eventualmente, também contribuir para a ligeira discrepância entre os resultados, embora a correlação entre as funções experimentais e numéricas seja elevada.

7.2 Sugestões de trabalho futuro

Como sugestões para um melhoramento deste trabalho ou realização de trabalhos futuros referem-se as seguintes:

- análise da sensibilidade dos parâmetros do modelo constitutivo do material viscoelástico;
- algoritmo de minimização que permita a introdução de condições de restrição como a condição de que os parâmetros do modelo constitutivo não podem tomar valores negativos;
- aplicação de coeficientes de ponderação durante a fase de minimização do desvio aos valores da transmissibilidade experimental às frequências de controlo;
- utilização de uma outra função disponível no *Matlab*® que implemente um outro algoritmo de minimização;
- utilização de uma câmara ambiental por forma a controlar a temperatura durante a realização dos ensaios;
- construção de mais provetes na configuração de tratamento superficial com camada de restrição, onde varie o comprimento livre da viga e, também, a espessura da camada viscoelástica;
- identificação da causa da perturbação que se verificou nos provetes *sandwich* entre a primeira e a segunda ressonâncias.

Apêndices: Código Matlab do método inverso de identificação

Apêndice A

Identificação das propriedades do material viscoelástico

```

1 %Idmef: Identificacao mef
2 %   U.PORTO-FEUP-DEMec
3 %   2010.11.13/2012.05.28
4
5 %%
6 clear all; close all; clc;
7 disp('Faculdade de Engenharia da U.PORTO')
8 disp('Departamento de Engenharia Mecânica')
9 disp('Identificação das propriedades do material')
10 disp('Material Viscoelástico')
11
12 %% parametros arbitrados(G0, Ginf, alpha,tau(tempo de relaxação))
13 p1=1e5;
14 p2=1e8;
15 p3=0.5;
16 p4=10e-6;
17 par0=[p1 p2 p3 p4];
18
19 %% Load de valores de referência
20
21 load('c:\datatase\matrizes.mat')
22 load('c:\datatase\TR.mat')
23
24 %% Formação das submatrizes
25
26 disp('formação das submatrizes')
27 [Muu,Mus,Kuue,Kuuv,Kuse,Kusv]=matrizes(kesp,kvsp,msp);
28
29 [ref,vw,nueqResp]=funref(varfrf,varassemb,TrX);
30
31 %% Plot de valores de referência
32
33 fontname='Times'; fontsize=10;
34
35 %criação de uma janela para representar o zoom das bandas
36 scrsz = get(0,'ScreenSize');
37 figRef =figure('NumberTitle','off', ...
38     'Name','[FEUP-DEMec] Magnitude da transmissibilidade de referência', ...
39     'Units','pixels', ...
40     'Position', [scrsz(3)/2 scrsz(2) scrsz(3)/2 scrsz(4)]);
41
42 subplot(2,1,1)
43 set(gca,'FontName',fontname,'FontSize',fontsize);
44 semilogy(vw/2/pi,ref.m,'linewidth',1.5)
45 xlabel('\omega [Hz]');
46 ylabel('Magnitude [mN^{-1}]');
47
48 %Parte real e parte imaginaria
49 scrsz = get(0,'ScreenSize');
50 figRI =figure('NumberTitle','off', ...
51     'Name','[FEUP-DEMec] Parte real e Parte imaginária da transmissibilidade de referência', ...
52     'Units','pixels', ...
53     'Position', [scrsz(1) scrsz(4)/3 scrsz(3)/2 scrsz(4)/2]);
54
55 subplot(2,1,1)
56 set(gca,'FontName',fontname,'FontSize',fontsize);
57 plot(vw/2/pi,ref.Re,'linewidth',1.5)
58 xlabel('\omega [Hz]');

```

```

59 ylabel('Re');
60 subplot(2,1,2)
61 set(gca,'FontName',fontname,'FontSize',fontsize);
62 plot(vw/2/pi,ref.Im,'linewidth',1.5)
63 xlabel('\omega [Hz]');
64 ylabel('Im');
65
66 %% Frequências de controlo e amplitudes
67 [wrefhz,Yref] = identificafreqref(vw,ref,figRef,figRI)
68
69 %% fminsearch
70 modelo=@(par)transm(Muu,Mus,Kuue,Kuuv,Kuse,Kusv,...
71     nueqResp,par,wrefhz*2*pi,Yref);
72
73 % figure('Name','[FEUP-DEMec] Iteração',...
74 %     'NumberTitle','on')
75 figure(500)
76 set(gca,'FontName',fontname,'FontSize',fontsize);
77 semilogy(wrefhz,abs(Yref),'ob');hold on;
78 xlabel('\omega [Hz]');ylabel('Magnitude [mN^{-1}]');
79 handle=semilogy(wrefhz,abs(Yref),'^r');
80 plotfun=@(x,optimvalues,state)plotiter(x,optimvalues,state,handle,modelo);
81
82 options=optimset('display','iter',...
83     'OutputFcn',plotfun);
84 [par,fval]=fminsearch(modelo,par0,options)
85
86 close (figRef,figRI,figure(500));
87
88 %% Sintetização
89 sinte(Kuue,Kuuv,Muu,Mus,Kuse,Kusv,...
90     ref,vw,nueqResp,par);
91
92 %% output final
93 data='fim';
94 fprintf('\n...fim de execução !!!\t %s \n\n\n',data);

```


Apêndice B

Matrizes de massa e rigidez

```
1 function [Muu,Mus,Kuue,Kuuv,Kuse,Kusv]=matrizes(ke,kv,m)
2 % variáveis de referência: matriz rigidez(ke e kv) e matriz de massa
3 ndofa=size(ke,1);
4
5 %matrizes de massa e rigidez
6 Muu=m(2:ndofa,2:ndofa);
7 Mus=m(2:ndofa,1);
8 Kuue=ke(2:ndofa,2:ndofa);
9 Kuuv=kv(2:ndofa,2:ndofa);
10 Kuse=ke(2:ndofa,1);
11 Kusv=kv(2:ndofa,1);
12 end
```

Apêndice C

Frequências de controle

```

1 function [wrefhz,Yref] = identificafreqref(vw,ref,figMag,figRI)
2 %% definição das frequências de referência: max-min/max
3 mag=ref.m;
4 w=vw/2/pi;
5 frf=ref.ref;
6 fontname='Times'; fontsize=10;
7
8 %% ciclo while
9 but=1; kcount=0;
10 while but~=3
11     kcount=kcount+1;
12
13     figure(figMag)% representação da frf
14     [wl,qq,but]=ginput(1);
15     if but == 3
16         break
17     end
18     kw=find(w > wl); kl=kw(1)-1;
19
20     [wu,qq,but]=ginput(1);
21     if but == 3
22         break
23     end
24     kw=find(w > wu); ku=kw(1)-1;
25
26     %% plot da banda seleccionada
27
28     grid on; hold on;
29     plot(w(kl:ku),mag(kl:ku),'-','LineWidth',2,'color',[1 0 0]);
30     hold off;
31
32     if kl > ku
33         w0=wl; wl=wu; wu=w0;
34         kw=find(w > wl); kl=kw(1)-1;
35         kw=find(w > wu); ku=kw(1)-1;
36     end
37
38     bmag=mag(kl:ku); bw=w(kl:ku);
39     bfrf=frf(kl:ku);
40
41     %figure(figzoom)%plot apenas da banda seleccionada
42     subplot(2,1,2)
43     plot(bw,bmag,'ob','MarkerSize',2); grid on;
44     set(gca,'FontName',fontname,'FontSize',fontsize);
45     xlabel('\omega /Hz'); ylabel('Mag. /...');
46
47     %% identificação das frequências de referência
48     %wA: max(real) /wB: min(real) /wR: max(imag)
49     [qq,posR]=max(abs(imag(bfrf)));
50     wr=bw(posR);%guarda a frequência de imag max
51     [qq,posA]=max(real(bfrf));
52     wA=bw(posA);%guarda a frequência de real max
53     [qq,posB]=min(real(bfrf));
54     wB=bw(posB);%guarda a frequência de real min
55
56     %% plot dos valores de referência
57
58     %figure(figMag)
59     subplot(2,1,1)

```

```

60     grid on;hold on;
61     plot(wA,abs(bfrf(posA)), 'sr');
62     plot(wB,abs(bfrf(posB)), 'sk');
63     plot(wr,abs(bfrf(posR)), 'sb');
64
65     %figure(figzoom)
66     subplot(2,1,2)
67     hold on;
68     plot(wA,abs(bfrf(posA)), '^r', 'markerfacecolor', 'r');
69     plot(wB,abs(bfrf(posB)), '^r', 'markerfacecolor', 'r');
70     plot(wr,abs(bfrf(posR)), '^r', 'markerfacecolor', 'r');
71     hold off;
72
73     %% Plot Frequencias de referência (real e imag)
74
75     figure(figRI)
76     subplot(2,1,1)
77     hold on;
78     plot(wA,real(bfrf(posA)), 'sb');
79     plot(wB,real(bfrf(posB)), 'sk');
80     hold off;
81
82     subplot(2,1,2)
83     hold on;
84     plot(wr,imag(bfrf(posR)), 'sr');
85     hold off;
86
87     %% guardar os valores (frequências e frf) de referência
88     wrefhz(1:3,kcount)=transpose([wA wr wB]);
89     Yref(1:3,kcount)=transpose([bfrf(posA) bfrf(posR) bfrf(posB)]);
90
91 end
92 %figure(figzoom); close;%fechar a janela
93 %frequencias de referencia num vector linha
94 wrefhz=reshape(wrefhz,1,3*size(wrefhz,2));
95 %valores da Tr para as frequencias de referencia num vector linha
96 Yref=reshape(Yref,1,3*size(Yref,2));
97
98 %ordenar as frequencias de referencia
99 [wrefhz, kp]=sort(wrefhz);
100 Yref=Yref(kp);
101
102 end%end{function}

```


Apêndice D

Plot das iterações

```
1 %plot das iterações
2
3 function stop=plotiter(x,optimvalues,state,handle,modelo)
4 stop=false;
5 if strcmp(state,'iter')
6     [erro,Ts]=modelo(x);
7     figure(500)
8     set(handle,'ydata',abs(Ts))
9     drawnow
10 end
11 end
```

Apêndice E

Funções de transmissibilidade experimentais

```

1 %funref: funções de referência
2
3 function [ref,vw,nueqResp]=funref(varfrf,varassemb,TR)
4 % variáveis de referência: Transmissibilidade,
5 % e frequências (whz)
6 % vw=TR.whz*2*pi;
7 % ref.Im=TR.Im;
8 % ref.Re=TR.Re;
9 % ref.m=TR.m;
10 % ref.ref=TR.ref;
11 ref.Ec=TR.Ec;
12
13 %% identificação dos nos e dofs
14 idnos=varassemb.eqnos;
15 noResp=varfrf.noresp;
16 dofResp=varfrf.dofresp;
17
18 %% tipo de viga - comprimento e elemento de medicaao
19
20 tipocomprimento = {'180','220','260','300'};
21 [s,v] = listdlg('PromptString','Select Comprimento:',...
22     'SelectionMode','single',...
23     'ListString',tipocomprimento);
24 comprimento=char(tipocomprimento(s)); TIPOcomprimento=s;
25
26 tipomedicaao = {'1','2','3'};
27 [s,v] = listdlg('PromptString','Select Elemento de medição:',...
28     'SelectionMode','single',...
29     'ListString',tipomedicaao);
30 medicaao=char(tipomedicaao(s));
31
32 switch lower(comprimento)
33     case '180'
34
35         switch lower(medicaao)
36             case '1'
37                 load('c:\datatase\Tr180_1.mat')
38                 ref.ref=Tr180_1(:,2);
39                 ref.whz=Tr180_1(:,1);
40                 ref.m=abs(Tr180_1(:,2));
41                 ref.p=angle(Tr180_1(:,2))*180/pi;
42                 ref.Re=real(Tr180_1(:,2));
43                 ref.Im=imag(Tr180_1(:,2));
44                 nueqResp=idnos(dofResp,noResp)-1
45             case '2'
46                 load('c:\datatase\Tr180_2.mat')
47                 ref.ref=Tr180_2(:,2);
48                 ref.whz=Tr180_2(:,1);
49                 ref.m=abs(Tr180_2(:,2));
50                 ref.p=angle(Tr180_2(:,2))*180/pi;
51                 ref.Re=real(Tr180_2(:,2));
52                 ref.Im=imag(Tr180_2(:,2));
53                 nueqResp=idnos(dofResp,noResp)-6
54             case '3'
55                 load('c:\datatase\Tr180_3.mat')
56                 ref.ref=Tr180_3(:,2);
57                 ref.whz=Tr180_3(:,1);
58                 ref.m=abs(Tr180_3(:,2));
59                 ref.p=angle(Tr180_3(:,2))*180/pi;

```

```

60         ref.Re=real(Tr180_3(:,2));
61         ref.Im=imag(Tr180_3(:,2));
62         nueqResp=idnos(dofResp,noResp)-11
63     otherwise
64         disp('...número desconhecido')
65     end
66
67 case '220'
68
69     switch lower (medicao)
70     case '1'
71         load('c:\datatese\Tr220_1.mat')
72         ref.ref=Tr220_1(:,2);
73         ref.whz=Tr220_1(:,1);
74         ref.m=abs(Tr220_1(:,2));
75         ref.p=angle(Tr220_1(:,2))*180/pi;
76         ref.Re=real(Tr220_1(:,2));
77         ref.Im=imag(Tr220_1(:,2));
78         nueqResp=idnos(dofResp,noResp)-1
79     case '2'
80         load('c:\datatese\Tr220_2.mat')
81         ref.ref=Tr220_2(:,2);
82         ref.whz=Tr220_2(:,1);
83         ref.m=abs(Tr220_2(:,2));
84         ref.p=angle(Tr220_2(:,2))*180/pi;
85         ref.Re=real(Tr220_2(:,2));
86         ref.Im=imag(Tr220_2(:,2));
87         nueqResp=idnos(dofResp,noResp)-6
88     case '3'
89         load('c:\datatese\Tr220_3.mat')
90         ref.ref=Tr220_3(:,2);
91         ref.whz=Tr220_3(:,1);
92         ref.m=abs(Tr220_3(:,2));
93         ref.p=angle(Tr220_3(:,2))*180/pi;
94         ref.Re=real(Tr220_3(:,2));
95         ref.Im=imag(Tr220_3(:,2));
96         nueqResp=idnos(dofResp,noResp)-11
97     otherwise
98         disp('...número desconhecido')
99     end
100
101 case '260'
102
103     switch lower (medicao)
104     case '1'
105         load('c:\datatese\Tr260_1.mat')
106         ref.ref=Tr260_1(:,2);
107         ref.whz=Tr260_1(:,1);
108         ref.m=abs(Tr260_1(:,2));
109         ref.p=angle(Tr260_1(:,2))*180/pi;
110         ref.Re=real(Tr260_1(:,2));
111         ref.Im=imag(Tr260_1(:,2));
112         nueqResp=idnos(dofResp,noResp)-1
113     case '2'
114         load('c:\datatese\Tr260_2.mat')
115         ref.ref=Tr260_2(:,2);
116         ref.whz=Tr260_2(:,1);
117         ref.m=abs(Tr260_2(:,2));
118         ref.p=angle(Tr260_2(:,2))*180/pi;

```

```

119         ref.Re=real(Tr260_2(:,2));
120         ref.Im=imag(Tr260_2(:,2));
121         nueqResp=idnos(dofResp,noResp)-6
122     case '3'
123         load('c:\datatese\Tr260_3.mat')
124         ref.ref=Tr260_3(:,2);
125         ref.whz=Tr260_3(:,1);
126         ref.m=abs(Tr260_3(:,2));
127         ref.p=angle(Tr260_3(:,2))*180/pi;
128         ref.Re=real(Tr260_3(:,2));
129         ref.Im=imag(Tr260_3(:,2));
130         nueqResp=idnos(dofResp,noResp)-11
131     otherwise
132         disp('...número desconhecido')
133 end
134
135 case '300'
136
137     switch lower(medicao)
138     case '1'
139         load('c:\datatese\Tr300_1.mat')
140         ref.ref=Tr300_1(:,2);
141         ref.whz=Tr300_1(:,1);
142         ref.m=abs(Tr300_1(:,2));
143         ref.p=angle(Tr300_1(:,2))*180/pi;
144         ref.Re=real(Tr300_1(:,2));
145         ref.Im=imag(Tr300_1(:,2));
146         nueqResp=idnos(dofResp,noResp)-1
147     case '2'
148         load('c:\datatese\Tr300_2.mat')
149         ref.ref=Tr300_2(:,2);
150         ref.whz=Tr300_2(:,1);
151         ref.m=abs(Tr300_2(:,2));
152         ref.p=angle(Tr300_2(:,2))*180/pi;
153         ref.Re=real(Tr300_2(:,2));
154         ref.Im=imag(Tr300_2(:,2));
155         nueqResp=idnos(dofResp,noResp)-6
156     case '3'
157         load('c:\datatese\Tr300_3.mat')
158         ref.ref=Tr300_3(:,2);
159         ref.whz=Tr300_3(:,1);
160         ref.m=abs(Tr300_3(:,2));
161         ref.p=angle(Tr300_3(:,2))*180/pi;
162         ref.Re=real(Tr300_3(:,2));
163         ref.Im=imag(Tr300_3(:,2));
164         nueqResp=idnos(dofResp,noResp)-11
165     otherwise
166         disp('...número desconhecido')
167     end
168
169 otherwise
170     disp('..comprimento desconhecido!!');
171 end
172
173 vw=ref.whz*2*pi;
174 end

```

Apêndice F

Função de transmissibilidade numérica

```

1 %gerar transmissibilidades numéricas
2
3 function [erro,trt] = transm(Muu,Mus,Kuue,Kuuv,Kuse,Kusv,...
4     nueqResp,par,vw,Yref)
5
6 %% varrimento em frequência
7 %modelo constitutivo
8
9 npw=length(vw);
10
11 for pw=1:npw
12     w=vw(pw);
13     G(pw)=(par(1)+par(2)*(1i*w*par(4))^par(3))...
14         /(1+(1i*w*par(4))^par(3));
15 end
16
17 niu=0.49;
18 Ec=G*2*(1+niu);
19
20 %% movimento de deslocamento da base
21
22 S=1;
23
24 for pw=1:npw
25     wa=vw(pw);
26     Ecw=Ec(pw);% viscoelastic complex modulus
27     Kuu=Kuue+Ecw*Kuuv; %update a matriz kuu
28     Kus=Kuse+Ecw*Kusv; %update a matriz kus
29
30     Resp=(Kuu-wa^2*Muu)\(-(Kus-wa^2*Mus)*S);%resolucao do sistema de equações
31
32     trt(pw)=Resp(nueqResp);%transmissibilidade
33
34 end
35
36 %valores numéricos
37 Ynum.Re=real(trt)';
38 Ynum.Im=imag(trt)';
39
40 %valores de referência
41 Y.Re=real(Yref);
42 Y.Im=imag(Yref);
43
44 %% algoritmo de minimização
45 erro_im=0;
46 erro_real=0;
47
48 for pw=1:npw
49
50     erro_im=erro_im+abs((Ynum.Im(pw)-Y.Im(pw))/(Y.Im(pw)));
51     erro_real=erro_real+abs((Ynum.Re(pw)-Y.Re(pw))/(Y.Re(pw)));
52
53 end
54
55 erro=erro_im+erro_real;
56 end
57

```

Apêndice G

Sintetização

```

1 %sintetização
2
3 function sinte(Kuue,Kuuv,Muu,Mus,Kuse,Kusv,...
4     ref,vw,nueqResp,par)
5
6 fontname='Times'; fontsize=10;
7
8 %% varrimento em frequência
9 %modelo constitutivo
10
11 npw=length(vw);
12 for pw=1:npw
13     w=vw(pw);
14     G(pw)=(par(1)+par(2)*(1i*w*par(4))^par(3))....
15         /(1+(1i*w*par(4))^par(3));
16 end
17 niu=0.49;
18 Ec=G*2*(1+niu);
19
20 %% movimento de deslocamento da base
21
22 S=1;
23
24 for pw=1:npw
25
26     wa=vw(pw);
27     Ecw=Ec(pw);% viscoelastic complex modulus
28     Kuu=Kuue+Ecw*Kuuv; %update a matriz kuu
29     Kus=Kuse+Ecw*Kusv; %update a matriz kus
30     Resp=(Kuu-wa^2*Muu)\(-(Kus-wa^2*Mus)*S);%resolucao do sistema de equações
31     trt(pw)=Resp(nueqResp);%transmissibilidade
32
33 end
34
35 num.m=abs(trt)';%[npw,1]
36 fref=ref.m;%[npw,1]
37 num.p=angle(trt) '*180/pi;
38
39
40 %% Validação LAC
41
42 for pw=1:npw
43
44     LAC(pw)=2*abs(fref(pw) '*num.m(pw))/...
45         ((fref(pw) '*fref(pw))+(num.m(pw) '*num.m(pw)));
46 end
47
48
49 scrsz = get(0,'ScreenSize');
50 figure('Name','[FEUP-DEMec] Modelo 4p - LAC (TR)',...
51     'NumberTitle','off','Position',...
52     [scrsz(3)/4 scrsz(3)/4 scrsz(3)/4 scrsz(3)/5]);
53
54 yrange=[0 1.1];
55 xrange=[0 vw(end)/2/pi];
56 set(gca,'FontName',fontname,'FontSize',fontsize);
57 plot(vw/2/pi,LAC,'-b','linewidth',1.5);
58 xlabel('\omega [Hz]'); ylabel('LAC');
59 axis([xrange yrange]);

```

```

60 title('Viga Sandwich de 300mm');
61
62 %% representação de comparação
63
64 titulo='Comparação das transmissibilidades';
65 scrsz = get(0,'ScreenSize');
66 position=[scrsz(3)/4 scrsz(3)/4 scrsz(3)/2 scrsz(3)/3];
67 figure('Name',[ '[FEUP-DEMec] Transmissibilidade: ',titulo],...
68       'NumberTitle','off','OuterPosition',position);
69
70 % phase
71 yrange=[-200 200];
72 subplotL=subplot(2,1,2);
73 set(subplotL,'Position', [0.13 0.11 0.775 0.2]);
74 set(gca,'FontName',fontname,'FontSize',fontsize);
75 plot(vw/2/pi,ref.p,'r','linewidth',1.5);
76 hold on;
77 plot(vw/2/pi,num.p,'b','linewidth',1.5);
78 axis([xrange yrange]);
79 set(subplotL,'Ytick',[-180 -90 0 90 180]);
80 xlabel('\omega [Hz]'); ylabel('Fase [°]');
81
82
83 % magnitude
84 subplotU=subplot(2,1,1);
85 set(subplotU,'Position', [0.13 0.36 0.775 0.56]);
86 set(gca,'FontName',fontname,'FontSize',fontsize);
87 semilogy(vw/2/pi,fref,'r','linewidth',1.5)
88 hold on;
89 semilogy(vw/2/pi,num.m,'b','linewidth',1.5)
90 legend('Experimental','Numérico');
91 ylabel('TRs [mN^{-1}]');
92 set (subplotU,'xLim',xrange); set (subplotU,'xTickLabel',' ');
93 title('Viga Sandwich de 300mm')
94
95 % propriedades
96 scrsz = get(0,'ScreenSize');
97 figure('Name','[FEUP-DEMec] Comparação de E_c e de \eta (TR)',...
98       'NumberTitle','off','position',...
99       [scrsz(3)/4 scrsz(3)/4 scrsz(3)/3 scrsz(3)/4]);
100
101 subplotU=subplot(2,1,1);
102 set(gca,'FontName',fontname,'FontSize',fontsize);
103 plot(vw/2/pi,real(ref.Ec),'r','linewidth',1.5);hold on;
104 plot(vw/2/pi,real(Ec),'b','linewidth',1.5);
105 ylabel('E_c (\omega) [Pa]');
106 legend('Referência','Numérico');
107 title('Viga Sandwich de 300mm');
108 set (subplotU,'xLim',xrange); set (subplotU,'xTickLabel',' ');
109
110 subplot(2,1,2)
111 set(gca,'FontName',fontname,'FontSize',fontsize);
112 plot(vw/2/pi,imag(ref.Ec)./real(ref.Ec),'r','linewidth',1.5);hold on;
113 plot(vw/2/pi,imag(Ec)./real(Ec),'b','linewidth',1.5);
114 xlabel('\omega [Hz]');
115 ylabel('\eta (\omega)');
116 end

```


Referências

- [1] R.A.S. Moreira and R. de-Carvalho. Inverse method for dynamic characterisation of cork compounds. *International Journal Materials Engineering Innovation*, 1(2):254–275, 2009.
- [2] Martinez Aguirre Manex. *Experimental and numerical dynamic analysis of press-formed viscoelastic sandwich structures*. Tese de Doutorado, Departamento de Engenharia Mecânica, Escola Politécnico Superior, Universidade de Mondragon, Espanha, 2011.
- [3] ASTM E756-05. Standard test method for measuring vibration-damping properties of materials. 2010.
- [4] Rui António da Silva Moreira. *Modelação e análise de tratamentos viscoelásticos multicamada para controlo passivo de vibrações*. Tese de Doutorado, Departamento de Engenharia Mecânica, Faculdade de Engenharia, Universidade do Porto, Porto, Portugal, 2004.
- [5] A. D. Nashif, D. I. G. Jones, and J. P. Henderson. *Vibration Damping*. John Wiley & Sons, 1985.
- [6] Emídio Manuel Pereira Ramos. *Identificação do módulo complexo de materiais viscoelásticos pelo método da viga de Oberst Modificado*. Tese de Mestrado, Departamento de Engenharia Mecânica, Faculdade de Engenharia, Universidade do Porto, Porto, Portugal, 2010.
- [7] D. I. G. Jones. *Handbook of viscoelastic vibration damping*. John Wiley, Chichester; New York, 2001.
- [8] 3M. Scotchdamp Vibration Control Systems: Product information and performance data. Technical report, 3M Industrial Tape and Specialties Divison, St. Paul, Minnesota, US, 1993.
- [9] R. A. S. Moreira, J. D. Rodrigues, and A. J. M. Ferreira. A generalized layerwise finite element for multi-layer damping treatments. *Computational Mechanics*, 37(5):426–444, 2006.
- [10] Nivaldo Benedito Ferreira Campos. *Ajuste de Modelos Numéricos usando Funções de Resposta em Frequência*. Tese de Doutorado, Departamento de Engenharia Mecânica Computacional, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, Brasil, 2002.
- [11] Wilhelmina Josefine Visser. *Updating Structural Dynamics Models Using Frequency Response Data*. Thesis for the degree of Doctor, Department of Mechanical Engineering, Imperial College of Science, Technology and Medicine, University of London, London, England, 1992.

- [12] M. Martinez-Agirre and M. J. Elejabarrieta. Dynamic characterization of high damping viscoelastic materials from vibration test data. *Journal of Sound and Vibration*, 330(16): 3930–3943, 2011.
- [13] R. A. S. Moreira and J. D. Rodrigues. Multilayer damping treatments: Modeling and experimental assessment. 12, 2010.