

ALEKSANDER KOKOT

**MODELO DE ELEMENTOS FINITOS
APLICADO A MOTORES ELÉCTRICOS PARA
CARACTERIZAÇÃO DINÂMICA DE ROTORES**

Relatório apresentado como conclusão do período de estágio curricular na empresa WEGeuro Industria Eléctrica S. A., desenvolvido na disciplina de Projecto do curso de Mestrado Integrado em Engenharia Mecânica, do Departamento de Engenharia Mecânica e Gestão Industrial da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.

Orientadores:

André F. C. Rodrigues (WEGeuro)

Pedro M. L. Ribeiro (FEUP)

PORTO

22/07/2009

À minha família.

RESUMO

Com o avanço da ciência cada vez mais se têm máquinas rotativas operando a elevadas rotações, devido ao ganho, por exemplo, de potência produzida. Sendo fundamental a caracterização dinâmica do sistema, pois ao atingir uma frequência característica as vibrações se amplificam a limites extremos, o que pode ocasionar fractura, ruídos ou mau funcionamento, fenómeno conhecido como ressonância. Para análise dinâmica destas estruturas faz-se necessário o conhecimento das respectivas frequências críticas, modos de vibrar e amplitudes de resposta. Assim, o desafio de projectar motores com elevadas potências e elevadas rotações, demanda uma modelagem precisa, para prever o comportamento dinâmico destas máquinas e se necessário intervir no sistema com técnicas de controlo de vibração. Neste trabalho é apresentado um estudo teórico da modelagem dinâmica de rotores. Uma metodologia para obtenção das matrizes de massa, rigidez, amortecimento e giroscópica é apresentada, assim como um estudo dos diversos componentes presentes num motor eléctrico e que influenciam no seu comportamento dinâmico. Algumas ferramentas importantes para a análise dos resultados a partir da equação do movimento do sistema são descritas, tais como: diagrama de Campbell, resposta e modo de vibrar. O modelo para calcular frequências críticas e modos à torção é apresentado, assim como alguns aspectos fundamentais sobre a análise espectral de um rotor. Resultados são apresentados e devidamente discutidos.

ABSTRACT

Advances in engineering allow rotating machines to operate at increasingly higher rotating speeds and increase power delivery. To understand the dynamic behaviour of these machines, the knowledge of their natural frequencies, mode shapes, frequency and time responses becomes necessary. With this knowledge, the design and control of the machine become more efficient, and it is possible to avoid large vibration amplitudes, which can cause fracture, noise or mal functioning. Therefore, the actual challenge to develop motors with high power and raised rotation speed, demands accurate modelling of their dynamic behaviour. In this work a theoretical study on the dynamic modelling of rotors is presented. A methodology to obtain the mass, gyroscopic, stiffness and damping matrices is presented, as well as a study of the electrical engine components and their influence in its dynamic behaviour. Some important tools for the analysis of the results from the equation of the motion of the system are described, such as: Campbell diagram, frequency response and shape modes. The model to calculate bending and torsion frequencies is described and some fundamentals aspects about spectral analysis are presented. Some case studies are carried out and discussed.

AGRADECIMENTOS

A minha família por todo apoio durante a vida.

Aos professores por todo conhecimento, em especial ao professor Carlos Alberto Bavastri, Dr. Eng., Marco Antônio Luersen, Dr. Eng. e Jucélio Tomás Pereira, Dr. Eng.

A empresa WEG Equipamentos Elétricos S.A., em especial aos Senhores Hilton Penha Silva, Francisco José Doubrawa Filho e Hideraldo Luís Vasconcelos do Santos. E também a senhora Silvana Tecila.

A empresa WEGeuro Indústria Elétrica S. A., na pessoa do senhor Luís Araújo. A todos colaboradores do Projecto Mecânico, em especial ao engenheiro André Filipe da Cunha Rodrigues pela orientação neste trabalho. Ao pessoal do laboratório pela ajuda com os experimentos, em especial ao engenheiro Rui Manuel Borges Moura Guedes e Domingos Manuel Silva Oliveira Duarte.

Ao LaVib – Laboratório de Vibrações da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, em especial ao colega de trabalho Eduardo Afonso Ribeiro.

A todos que contribuíram para esta dissertação, em especial ao professor Pedro Manuel Leal Ribeiro da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.

ÍNDICE DE CONTEÚDOS

1.	INTRODUÇÃO	9
1.1	Elementos Finitos Aplicados a Dinâmica de Rotores.....	9
1.2	Proposta de Trabalho.....	10
1.3	Sequência de Capítulos	12
2.	MOTORES ELÉCTRICOS	13
2.1	Veio.....	14
2.2	Massa Rotórica.....	15
2.3	Mancal.....	16
2.3.1	Mancal de rolamento	16
2.3.2	Mancal de filme de óleo	16
2.4	Fundação.....	17
3.	MODELO DE ELEMENTOS FINITOS	18
3.1	Obtenção da Matriz de Rigidez	18
3.1.1	Conceitos de deformação.....	18
3.1.2	Deformação no veio.....	21
3.1.3	Energia potencial de deformação do veio	26
3.1.4	Efeito do carregamento axial	29
3.1.5	Formulação do elemento finito com interpolação linear (2 nós)	29
	Contribuição dos carregamentos externos na rigidez do sistema.....	33
3.2	Obtenção da Matriz de Massa e Giroscópica	34
3.2.1	Obtenção da matriz de transformação de coordenadas.....	34
3.2.2	Composição das rotações.....	37
3.2.3	Energia cinética do disco	39
3.2.4	Formulação de elementos finitos para o disco	40
3.2.5	Energia cinética do veio.....	41
3.2.6	Formulação do elemento finito com interpolação linear (2 nós)	42
3.3	Obtenção das Matrizes de Rigidez e Amortecimento para Mancais e Fundação	44
3.4	Modelo de Interferência entre Pacote de Chapas e Veio	48
3.4.1	Diâmetro equivalente do veio.....	48
3.4.2	Propriedades equivalentes.....	49
3.4	Torção.....	49
4.	METODOLOGIA DE CÁLCULO.....	54
4.1	Solução das Equações do Movimento	52
5.	ANÁLISE ESPECTRAL	57
5.1	Excitação Múltipla da Frequência de Rotação por Defeitos de Fabrico.....	58
5.2	Excitação Múltipla da Frequência de Rotação por Componentes Acoplados ao Rotor ou Devido à Falhas em Rolamentos.....	59
6.	RESULTADOS E COMPARAÇÕES	63
6.1	Código Computacional ROTORDYN.....	61

6.2	Entrada de Dados	61
6.3	Comparação dos Resultados Numéricos com Dados da RENK	63
6.4	Modelo de interferência	70
6.5	Influência da Fundação	77
6.6	Análise do Rotor do Motor W22x 500 KH2 SP01	79
6.7	Análise do Rotor do Motor BFN6 500 H2 SP14.....	81
7.	CONCLUSÕES	97
8.	TRABALHOS FUTUROS	99
	REFERÊNCIAS.....	98
	APÊNDICE A.....	101
	APÊNDICE B	104
	APÊNDICE C	105
	APÊNDICE D.....	106

1. INTRODUÇÃO

Em equipamentos mecânicos em geral observa-se a presença de vibração. Este fenômeno pode ser agravado se a estrutura atingir a ressonância, pois as amplitudes do movimento oscilatório aumentam consideravelmente. A ressonância ocorre quando a frequência de excitação coincide com uma das frequências naturais, o que deve ser evitado. Em máquinas rotativas, faz-se extremamente necessário prever o seu comportamento dinâmico, pois, atualmente cada vez mais se têm máquinas maiores operando em rotações mais elevadas, logo a falha destes equipamentos pode ser catastrófica, além de que os níveis máximos de vibração resultante permitidos são limitados por normas.

1.1. Elementos finitos aplicados a dinâmica de rotores

Na modelagem de um rotor se faz uso de diversos métodos matemáticos e numéricos, tais como, dinâmica do contínuo, modos assumidos, elementos finitos, dentre outros. Um dos métodos numéricos mais utilizados é o método dos elementos finitos. Ruhl e Booker [1] já utilizavam este método para modelar um rotor. A teoria de Euler, também conhecida como teoria para vigas finas foi utilizada por estes autores no desenvolvimento das equações do movimento. Para obter a matriz de rigidez do sistema, parte-se da energia potencial de deformação, e desconsidera-se os efeitos do corte transversal. A matriz de massa é obtida de maneira análoga, utilizando também o método dos elementos finitos mas parte-se da energia cinética, considerando apenas termos referentes a translação.

Os termos da energia cinética referentes a rotação e ao efeito giroscópico são considerados no modelo de Nelson e McVough [2], este modelo é semelhante ao apresentado por Gash [3] para a análise de estabilidade de turbo rotores apoiados em mancais de filme de óleo. Este tipo de mancal apresenta elevados coeficientes de amortecimento, assim, Gash [3] acrescenta ao modelo um amortecimento interno viscoso linear.

Para a dedução das matrizes de rigidez, Chen e Ku [4] utilizam a teoria de viga de Timoshenko. No modelo, os efeitos do amortecimento viscoso e histerético são estudados. Estes autores utilizam o método dos elementos finitos e funções de forma quadráticas da classe C_0 . A equação da energia potencial de deformação do veio, devido à consideração dos efeitos de corte, é diferente da utilizada por Lalanne e Ferraris [5].

O modelo proposto por Chen e Ku [4] para o amortecimento tem como principal característica a inserção não só do amortecimento viscoso, mas também do histerético estrutural através de uma matriz de coeficientes de amortecimento, composta pelo coeficiente de

amortecimento histerético estrutural e o coeficiente de amortecimento viscoso. O amortecimento histerético é incorporado ao modelo através da equação da energia potencial e da equação de Rayleigh.

A diferença entre os modelos propostos por Chen e Ku [4] e Lalanne e Ferraris [5] consiste no modelo de viga utilizado e no modelo de amortecimento. Lalanne e Ferraris [5] propõem um sistema utilizando a teoria de vigas finas, com um factor de correcção para considerar o efeito do corte, e o amortecimento do sistema é modelado considerando apenas coeficientes de amortecimento viscoso que são inseridos directamente pelos mancais.

No modelo de elementos finitos de um motor eléctrico, diversas outras hipóteses e simplificações devem ser formuladas. O pacote de chapas, ou massa rotórica de um motor eléctrico não é um componente homogéneo e rígido, então, vários estudos vêm sendo realizados a fim de adicionar seu efeito sobre os parâmetros modais do sistema. Em motores verticais existe a presença dos esforços axiais, que apesar de pouco contribuírem para a forma de vibrar, podem alterar de maneira importante os valores das frequências naturais do sistema a medida que o módulo do carregamento aumenta, segundo descrito por Gatti e Ferrari [6].

Os efeitos electromagnéticos de um motor também podem ser muito pronunciados, principalmente para motores de alta tensão. Segundo Holopainen *et al* [7], geralmente em motores de alta tensão, o movimento de um rotor excêntrico gera forças devido a uma atracção magnética desequilibrada, assim como os modos de vibrar de flexão. Nos trabalhos de Holopainen *et al* [7] e Holopainen *et al* [8] pode-se observar o modelo parametrizado criado pelos autores para caracterizar os esforços magnéticos que surgem entre o estator e o rotor. Em Holopainen *et al* [9] o modelo é adicionado as equações estabelecidas para um rotor Jeffcott. O cálculo é realizado e os autores concluem que os esforços magnéticos reduzem os valores das frequências características do rotor, este fenómeno é conhecido e diz-se que os esforços magnéticos induzem uma rigidez negativa no sistema.

1.2. Proposta de trabalho

O objectivo deste trabalho é o desenvolvimento de um critério de análise dinâmica de motores para rotores rígidos ou flexíveis através da aplicação de uma teoria consistente de dinâmica de rotores. Apesar das etapas de análise, tais como, cálculo de velocidade de rotação críticas, resposta e modos de vibrar serem idênticas para os dois tipos de rotores, para flexíveis o estudo necessita de uma elevada precisão e de uma quantidade maior de detalhes, pois a probabilidade de falha destas máquinas é muito maior, considerando que as mesmas operam acima de pelo menos uma rotação crítica. Existe ainda a intenção por parte da WEGeuro

Indústrias Eléctricas S. A., responsável pelo projecto de estágio, em aumentar a gama de motores seguindo uma tendência para produção de rotores flexíveis, que são motores que possuem velocidade de trabalho acima de pelo menos uma velocidade crítica.

Seguindo a metodologia apresentada por Lalanne e Ferraris [5] e Chen e Ku [4] a modelagem numérica do rotor e dos principais componentes que influenciam no seu comportamento vibratório é realizada, acrescentando ao modelo efeitos das forças axial, magnética e enrigecimento devido a inserção do pacote de chapas com interferência no veio.

O esforço axial é acrescentado ao modelo com o desenvolvimento da energia potencial de deformação considerando as deformações na direcção longitudinal ao veio. A variação da rigidez devido às forças electromagnéticas é considerada no modelo aplicando-se o princípio do trabalho virtual da força magnética sobre o sistema, e então pode-se chegar a matriz de rigidez. Como este fenómeno induz rigidez negativa, a matriz é subtraída da matriz global de rigidez do sistema, este modelo é semelhante ao apresentado por Andrianoely [10].

A modelagem inicia-se pela obtenção das energias cinética, potencial de deformação e pelas forças generalizadas que actuam no sistema. A massa, rigidez, efeito giroscópico e esforços externos podem ser caracterizados através destas grandezas.

Após a obtenção das matrizes elementares considerando todos os componentes do rotor, através do princípio dos trabalhos virtuais ou aplicação das equações de Lagrange (Lalanne e Ferraris [5]), obtêm-se as equações gerais do sistema.

A análise torsional de um motor eléctrico pode ser realizada seguindo o procedimento apresentado para a análise flexional. Baseado na metodologia apresentada por Ceccon [11], obtêm-se as matrizes através do método dos elementos finitos, resolve-se as equações do movimento, e através do problema de valores e vectores próprios obtêm-se as frequências naturais e formas modais torsionais.

A solução das equações, para a análise flexional ou torsional é obtida neste trabalho através do código computacional ROTORDYN, aprimorado a partir da rotina desenvolvida no Laboratório de Vibrações da Universidade Tecnológica Federal do Paraná sob os termos de cooperação estabelecidos com a WEG Industria Elétrica S. A., e com a Financiadora de Estudos e Projetos - FINEP dentro do projeto PROMOVE 4931/06.

O código computacional além de calcular o diagrama de Campbell, modos de vibrar e respostas, é capaz de considerar nos cálculos, parâmetros variáveis com a frequência de rotação, efeitos da presença de fundação flexível e efeitos da interferência.

Os resultados calculados são confrontados com resultados experimentais dos motores BFN6 H2 SP14 e W22X 500 KH2 SP01, com o objectivo de validar o modelo numérico e a metodologia de projecto desenvolvida.

1.3. Sequência de Capítulos

O Capítulo 2 apresenta uma breve descrição sobre o funcionamento de um motor eléctrico, assim como algumas considerações sobre os componentes que influenciam de maneira importante no comportamento vibratório.

No Capítulo 3 o modelo de elementos finitos é detalhadamente deduzido, assim como efeitos importantes como o efeito giroscópico, modelo de interferência, efeito do carregamento axial e fundação flexível também são explicados, ainda neste capítulo a metodologia para análise torsional é descrita.

No Capítulo 4 é apresentada a metodologia de cálculo utilizada na obtenção dos parâmetros modais do sistema em estudo. Na sequência, o Capítulo 5 mostra alguns detalhes sobre a análise de falhas e defeitos em motores eléctricos basicamente sobre a análise do espectro de vibração da máquina. E por fim, no Capítulo 6 são apresentados através de resultados a validação do modelo numérico proposto.

As conclusões são apresentadas no Capítulo 7 e sugestões para trabalhos futuros são mostradas na oitava secção. Por fim, as referências para realização do trabalho e os apêndices contendo algumas deduções matemáticas são inseridos.

2. MOTORES ELÉCTRICOS

Motores eléctricos são máquinas destinadas a converter energia eléctrica em energia mecânica. Por utilizar energia eléctrica, que possui de uma maneira geral baixo custo e facilidade de transporte, e ser de construção simples, com versatilidade na capacidade de suportar cargas e ter alto rendimento, é o tipo de motor mais utilizado. Para motores de aplicações comuns, que exigem baixa potência, tem-se domínio industrial no fabrico. No entanto, existem máquinas projectadas para operar sob condições mais rigorosas, em elevadas rotações ou ambientes específicos, como atmosferas explosivas, corrosivas ou com amplitudes térmicas muito elevadas. Motores estes que na maioria das vezes são rotores super críticos, ou seja, trabalham acima de pelo menos uma velocidade crítica de rotação e ainda, possuem tolerâncias mais estreitas para as amplitudes de vibração, e que exige então muito conhecimento sobre dinâmica de rotores.

Dentre os componentes de um motor eléctrico que estão mais intimamente ligados a parte rotativa, e que podem contribuir com as características vibratórias da máquina, pode-se citar: veio, rotor, mancais de rolamentos ou de filme de óleo, tampas, ventilador e a carcaça, Figura 1. Sendo o rotor composto geralmente por chapas magnéticas, barras de cobre, anéis de cobre, cintas de aço para garantir a fixação dos anéis, pesos de equilibragem e por vezes resina. Alguns destes componentes são descritos com maiores detalhes nas subsecções seguintes.

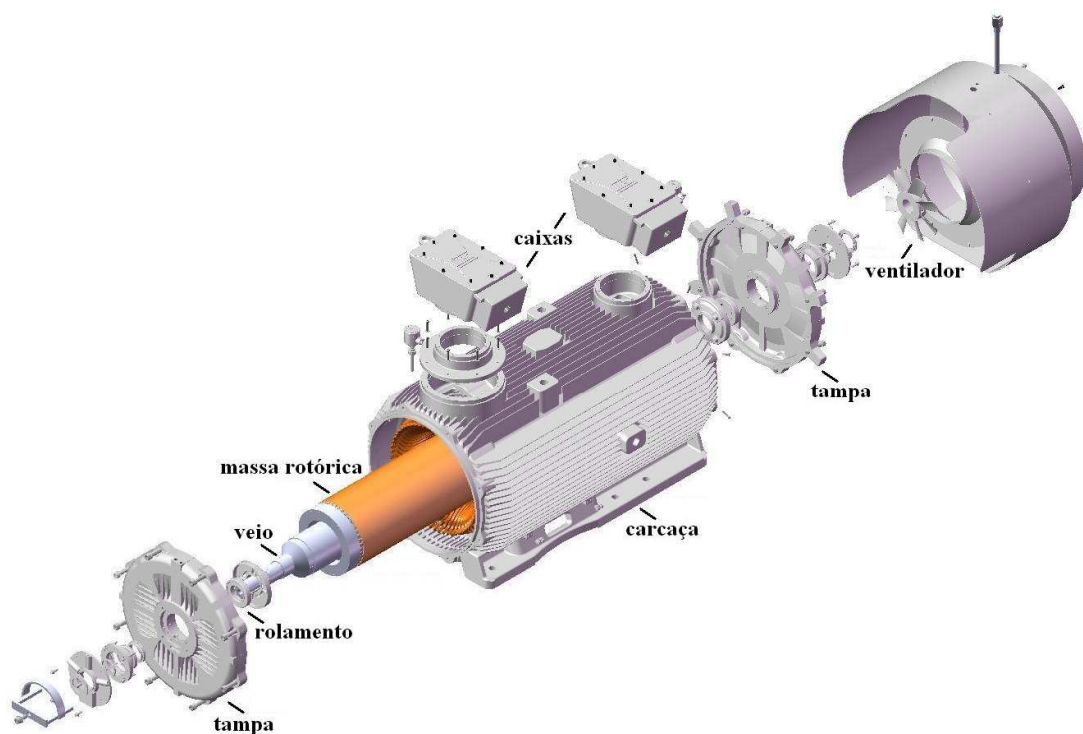


Figura 1: Vista explodida do motor eléctrico.

2.1. Veio

O veio é responsável pela transmissão da potência para o sistema acoplado ao motor, e é a principal fonte de vibração em motores eléctricos por ser o componente rotativo e assim sofrer a influência das forças devido ao desequilíbrio e ao desalinhamento, características que são muito dependentes da qualidade de fabrico. Geralmente o veio possui várias secções com diferentes diâmetros (Figura 2), cada motor possui uma geometria característica para o veio, porém em todos os casos uma secção com elevada rigidez suporta a massa rotórica.

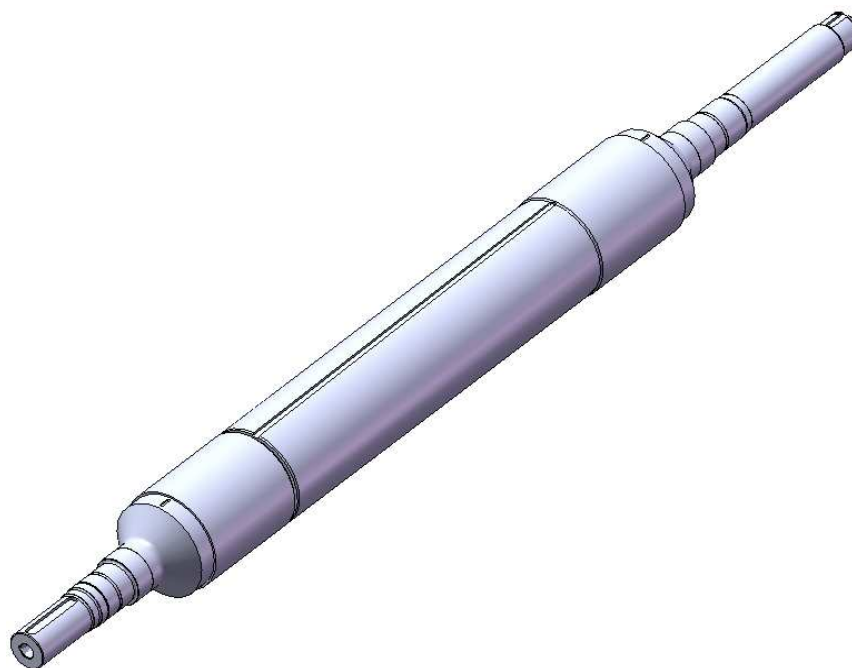


Figura 2: Veio real, motor W22X 509 KH2 SP01.

Detalhes como ranhuras, cantos curvos, chanfros e batentes são geralmente desconsiderados na modelagem, pois não provocam grandes modificações nos cálculos, assim como o material do veio é considerado isotrópico e linear. A modelagem deste componente é feita através de uma teoria de viga e do método numérico dos elementos finitos, assim as propriedades de massa, rigidez e amortecimento são distribuídas em cada elemento finito (Figura 3). Os motores produzidos pela WEGeuro são principalmente máquinas de elevadas potências. Devido a este facto os veios destas máquinas são robustos, o que demanda uma teoria de viga que contemple o efeito do corte transversal.

Por ser a principal fonte de vibração de motores eléctricos, soluções de controlo de vibração devem ser aplicadas directamente ao veio, sendo assim mais eficientes na redução das amplitudes de resposta.

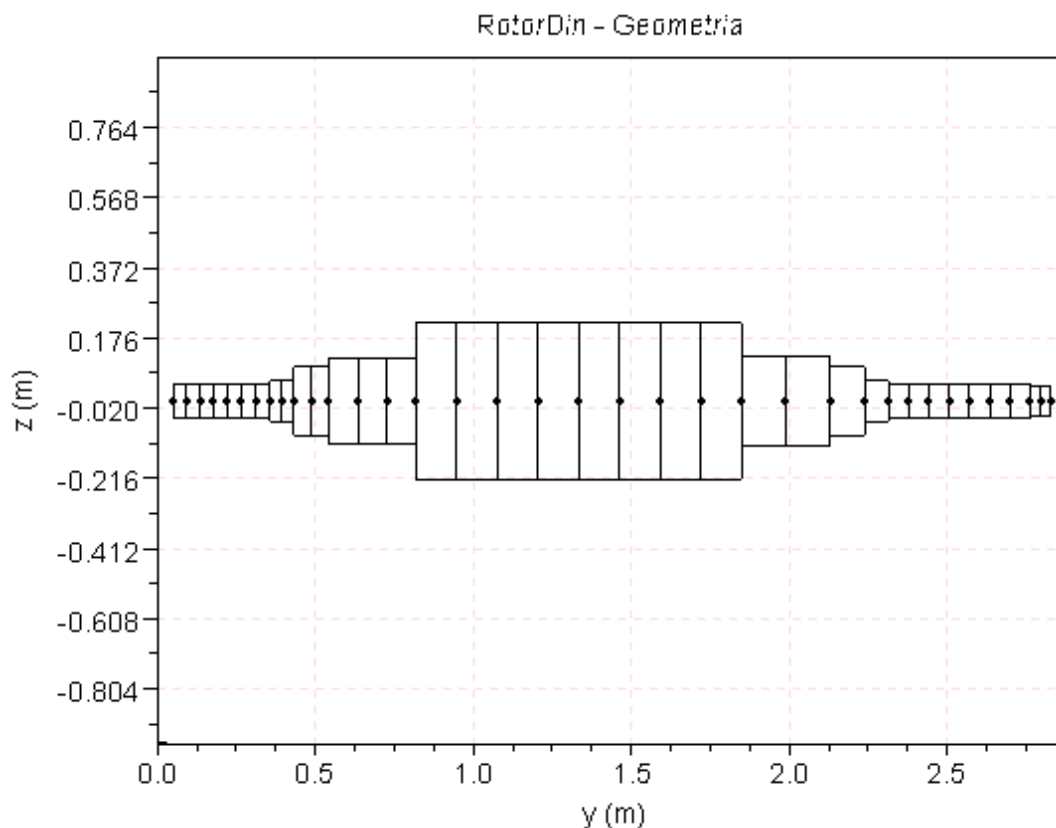


Figura 3: Veio simplificado e discretizado, motor W22X 500 KH2 SP01.

2.2. Massa Rotórica

A massa rotórica é composta geralmente pelas chapas magnéticas, anéis de cobre, barras de cobre, cintas de aço e pesos de equilibragem, por vezes, para máquinas de menor potência é comum a utilização de fios ao invés das barras de cobre ou ainda barras alumínio.

Na modelagem do rotor, a elaboração das hipóteses, de forma a não prejudicar a precisão da solução, é extremamente complicada, pois, a interacção entre os diversos componentes é de difícil avaliação. Os principais componentes que interagem e podem influenciar o comportamento vibratório são as chapas magnéticas, o veio e o material condutor, por exemplo as barras de cobre. Um factor importante que deve ser considerado é a folga entre as cavidades das chapas e o material condutor, pois podem provocar uma alteração na equilibragem do rotor e nos níveis de vibração.

Duas maneiras de analisar a massa rotórica através do método dos elementos finitos são apresentadas. A primeira consiste na divisão do componente em discos indeformáveis e portanto as respectivas massas e momentos de inércia são adicionadas directamente nos nós dos elementos finitos em que se encontram os discos. Pode-se ainda considerar que a massa rotórica sofre deformação e assim tem-se um aumento da rigidez do veio, o modelo descrito mais

detalhadamente na secção 3.4. O segundo modelo fornece melhores resultados quando se tem um comprimento maior da massa rotórica.

Devido ao elevado momento de inércia da massa rotórica este componente contribui de maneira acentuada no efeito giroscópico, característica peculiar de qualquer máquina rotativa. Este fenómeno ocorre sempre que o eixo em torno do qual o corpo está girando também gira em torno de outro eixo (Meriam e Kraige [12]).

2.3. Mancal

A denominação mancal é dada ao apoio do rotor. As frequências naturais, modos de vibrar e amplitude de resposta são fortemente dependentes da sua massa, rigidez e amortecimento. Dois tipos de mancais são apresentados, os mancais de rolamento e os mancais de filme de óleo.

2.3.1 Mancal de rolamento

Mancais de rolamento são caracterizados por apresentarem baixa exigência de lubrificação, não provocarem desgaste no veio, apresentarem pequeno aumento da folga durante vida útil e baixo aquecimento, porém, apresenta baixo amortecimento e elevada sensibilidade aos choques, além de possuir elevado custo de fabricação e sua capacidade de carga ser limitada.

No modelo matemático proposto para os mancais neste trabalho, as propriedades dos mancais de rolamento são inseridas directamente nas matrizes elementares. O amortecimento é usualmente considerado nulo devido aos materiais utilizados no fabrico dos elementos de rolamento não apresentarem amortecimento intrínseco. A rigidez pode ser determinada de forma simplificada através de cálculos que consideram o deslocamento entre os centros das pistas do componente e a carga radial, o deslocamento total se deve a folgas radiais, compressão dos elementos girantes e deformação da pista.

Prasad [13] apresenta valores de rigidez da ordem de 10^9 [N/m] e para efeitos de cálculo geralmente são desprezadas a rigidez da tampa, pois possui fixação rígida na carcaça que por sua vez também possuem rigidez mais elevada que o veio, e ainda a rigidez da fundação, que é um apoio flexível sob o qual está montado o rolamento ou apoiado o motor.

2.3.2 Mancal de filme de óleo

Os mancais de filme de óleo possuem uma característica particular em relação ao mancais de rolamento, a variação das propriedades de acordo com a rotação (Shigley e Mischke [14]). Este tipo de mancal é dependente do regime em que se encontra o fluido lubrificante, para

regimes turbulentos o apoio pode se tornar extremamente instável e excitar o rotor em aproximadamente metade da velocidade de rotação (SPECMAN [15]).

A variação das propriedades do filme de óleo gera uma alteração na distribuição de pressão no interior do mancal, assim os coeficientes de rigidez e amortecimento directos (k_{xx} , k_{zz} , c_{xx} e c_{zz}) e cruzados (k_{xz} , k_{zx} , c_{xz} e c_{zx}) são alterados. Esta variação dos coeficientes com a rotação é não linear e modifica de forma considerável as frequências naturais e modos de vibrar. Então, o diagrama de Campbell e curvas de resposta devem ser calculado considerando a dependência dos parâmetros modais com as propriedades do mancal de filme (Ribeiro [16]), neste trabalho todos os resultados para validação do modelo proposto consideram propriedades dos mancais variáveis com a frequência de rotação, excepto quando avaliados rotores apoiados em mancais de rolamento.

Apesar de ser instável para determinadas rotações e apresentar variação não linear dos coeficientes de rigidez e amortecimento, este tipo de apoio é muito utilizado porque introduz um amortecimento elevado ao sistema e possui mais fácil manutenção em relação ao mancal de rolamento (Ribeiro [16]).

2.4. Fundação

Muitos são os componentes que podem ser considerados fundações para um motor eléctrico, pois nenhum sistema é infinitamente rígido a fim de restringir completamente o deslocamento do sistema. Tampas ou carcaça com baixa rigidez, parte estrutural dos mancais de filme de óleo ou fundação flexível, composta por um conjunto massa - mola - amortecedor em que está apoiado o motor, podem ser consideradas no modelo como fundação. Na Figura 4 pode-se observar uma bancada experimental para testes com rotores sob fundação flexível (bancada de ensaios do LaVib - Laboratório de Vibrações da Universidade Tecnológica Federal do Paraná). Para o estudo do rotor composto por um veio com secção de área constante e com discos posicionados ao longo do veio, uma fundação flexível pode ser considerada.

O modelo de fundação que é apresentado posteriormente numa das secções deste trabalho considera um conjunto massa - mola - amortecedor adicional ao nó em que está o mancal (Edwards *et al* [17]).

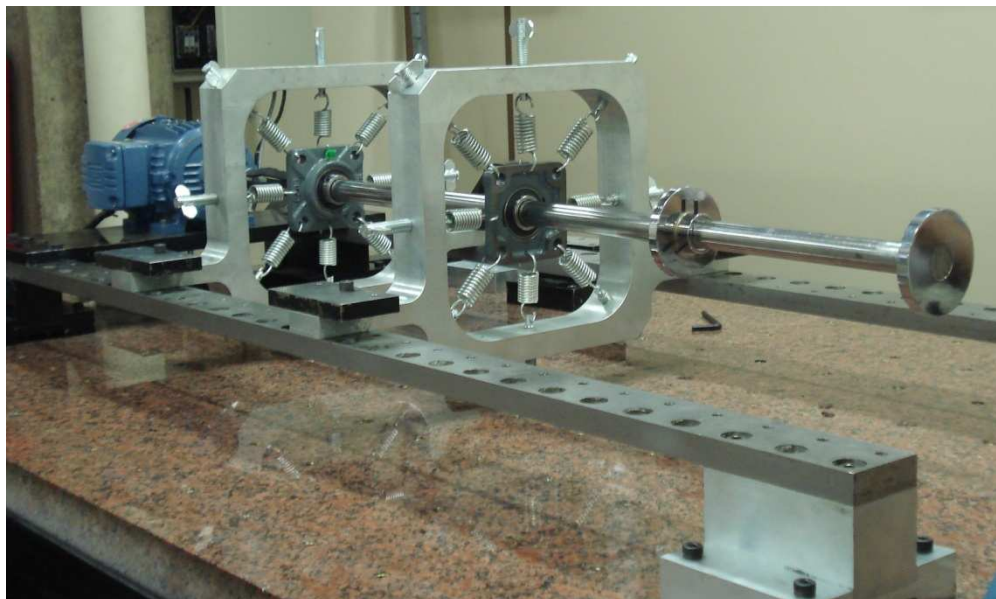


Figura 4: Bancada experimental do Laboratório de Vibrações da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, sistema para estudo de fundação flexível.

3. MODELO DE ELEMENTOS FINITOS

Neste trabalho o modelo de elementos finitos é obtido a partir da teoria de Timoshenko, com funções de forma da classe $C0$, sendo os efeitos giroscópico e de inércias de rotação considerados. Os mancais e fundação são modelados com acréscimo de graus de liberdade nas respectivas direcções, e ainda são considerados mancais com propriedades variáveis com a rotação (Ribeiro [16]). São apresentados dois modelos a fim de avaliar o efeito do aumento da rigidez do veio devido a inserção do pacote de chapas com interferência. A variação da rigidez do sistema devido ao carregamento axial e campo magnético são considerados e seus modelos apresentados. As forças actuantes consideradas são o desequilíbrio e excitações externas harmónicas.

3.1 Obtenção da Matriz de Rigidez

Para se obter a matriz de rigidez do elemento finito de viga, alguns estudos prévios são necessários, pois essa matriz está relacionada com a energia potencial de deformação. Assim, serão introduzidos alguns conceitos de deformação, de energia de deformação e a aplicação da teoria de elementos finitos para que se obtenha a matriz desejada.

3.1.1 Conceitos de deformação

Na Figura 5 é apresentado esquematicamente um segmento PQ em um corpo nos seus estados não deformado $\mathbf{R}$ e deformado $\mathbf{R}^*$.

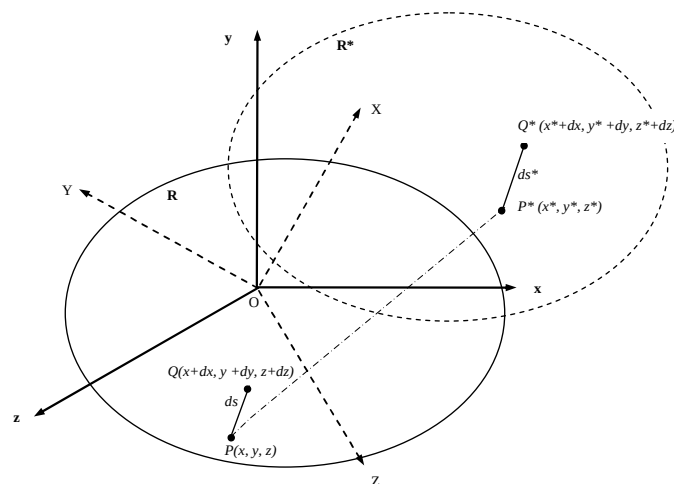


Figura 5: Segmento linear PQ no corpo não deformado (-) e deformado (--).

De acordo com o esquema da Figura 5, os pontos P e Q possuem as seguintes coordenadas:

$$P(x, y, z) \quad 3.1$$

e

$$Q(x + dx, y + dy, z + dz). \quad 3.2$$

Com a deformação, esses pontos se deslocam para

$$P^*(x^*, y^*, z^*) \quad 3.3$$

e

$$Q^*(x^* + dx^*, y^* + dy^*, z^* + dz^*). \quad 3.4$$

O elemento linear infinitesimal passa de um comprimento

$$PQ = dS \quad 3.5$$

para

$$P^*Q^* = dS^*. \quad 3.6$$

Segundo Fung e Tong [18], a deformação normal ε_E deste elemento é calculada através de

$$\varepsilon_E = \frac{dS^* - dS}{dS}, \quad 3.7$$

na qual

$$(dS)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 \quad 3.8$$

e

$$(dS^*)^2 = (dx^*)^2 + (dy^*)^2 + (dz^*)^2. \quad 3.9$$

Aplicando-se o conceito de diferencial total,

$$(dx^*) = \frac{\partial x^*}{\partial x} dx + \frac{\partial x^*}{\partial y} dy + \frac{\partial x^*}{\partial z} dz, \quad 3.10$$

$$(dy^*) = \frac{\partial y^*}{\partial x} dx + \frac{\partial y^*}{\partial y} dy + \frac{\partial y^*}{\partial z} dz \quad 3.11$$

e

$$(dz^*) = \frac{\partial z^*}{\partial x} dx + \frac{\partial z^*}{\partial y} dy + \frac{\partial z^*}{\partial z} dz. \quad 3.12$$

Sendo

$$x^* = x + u, \quad 3.13$$

$$y^* = y + v \quad 3.14$$

e

$$z^* = z + w, \quad 3.15$$

obtém-se:

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{dS^*}{dS} \right)^2 - 1 \right] = \epsilon_E + \frac{1}{2} \epsilon_E^2 = \\ &= l^2 \epsilon_{xx} + lm \epsilon_{xy} + nl \epsilon_{xz} + ml \epsilon_{yx} + m^2 \epsilon_{yy} + mn \epsilon_{yz} + nl \epsilon_{zx} + nm \epsilon_{zy} + n^2 \epsilon_{zz}, \quad 3.16 \\ &= l^2 \epsilon_{xx} + m^2 \epsilon_{yy} + n^2 \epsilon_{zz} + 2nl \epsilon_{xz} + 2ml \epsilon_{xy} + 2mn \epsilon_{yz} \end{aligned}$$

sendo u , v e w os deslocamentos nas direcções x , y e z respectivamente, e M o Factor de Amplificação, no qual

$$l = \frac{dx}{dS}, \quad 3.17$$

$$m = \frac{dy}{dS}, \quad 3.18$$

$$n = \frac{dz}{dS}, \quad 3.19$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right], \quad 3.20$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{dv}{dy} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right], \quad 3.21$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{dw}{dz} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right], \quad 3.22$$

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right], \quad 3.23$$

$$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} \right] \quad 3.24$$

e

$$\varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} \right]. \quad 3.25$$

Para pequenos deslocamentos, pode-se desconsiderar os termos quadráticos. ε_{xx} , ε_{yy} e ε_{zz} podem ser interpretados como deformações longitudinais do elemento diferencial dS paralelas a x , y e z respectivamente (Fung e Tong [18]). Para dS paralelo ao eixo de coordenadas x , com $l=1$ e $m=n=0$, logo, tem-se a equação 3.26. Pode-se resolver analogamente para os outros eixos coordenados.

$$M_x = \varepsilon_{Ex} + \frac{1}{2} \varepsilon_{Ex}^2 = \varepsilon_{xx}. \quad 3.26$$

Os termos de deformação ε_{xy} , ε_{xz} e ε_{yz} representam a variação angular entre dois elementos lineares inicialmente paralelos aos eixos $x-y$, $x-z$ e $y-z$ respectivamente.

Estes conceitos de deformação podem ser aplicados a um veio, com o objectivo de obter a sua energia potencial de deformação.

3.1.2 Deformação no veio

Para calcular as deformações de um ponto B qualquer do veio, com coordenadas (x_1, z_1) , define-se um sistema de coordenadas inercial, denominado sistema global XYZ e um sistema móvel xyz , com a rotação de um ângulo Ωt , que é denominado sistema de coordenadas local. A Figura 6 apresenta os dois sistemas no plano XZ . u e w são os deslocamentos relativos às coordenadas globais X e Z enquanto u^* e w^* são os deslocamentos relativos às coordenadas locais x e z .

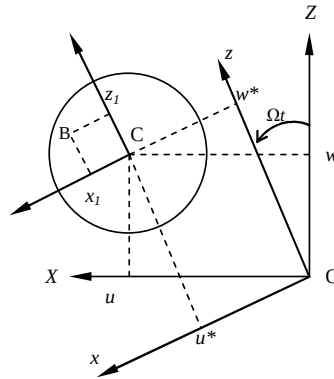


Figura 6: Coordenadas do centro geométrico C e um ponto arbitrário B no veio, numa vista transversal ao seu comprimento (Lalanne e Ferraris [5]).

Para relacionar os deslocamentos entre os dois sistemas de referência apresentados na Figura 6, utiliza-se a matriz de transformação de coordenadas $\mathbf{T}$ conforme mostrado na equação 3.28:

$$\begin{Bmatrix} u^* \\ w^* \end{Bmatrix} = \mathbf{T} \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix}, \quad 3.27$$

na qual

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \Omega t & -\sin \Omega t \\ \sin \Omega t & \cos \Omega t \end{bmatrix}, \quad 3.28$$

é a matriz de transformação de coordenadas globais para locais, sendo Ω a velocidade angular do veio. Multiplicando a inversa da matriz de transformação em ambos os lados da equação, tem-se:

$$\mathbf{T}^{-1} \begin{Bmatrix} u^* \\ w^* \end{Bmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{T} \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Omega t & \sin \Omega t \\ -\sin \Omega t & \cos \Omega t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^* \\ w^* \end{Bmatrix}. \quad 3.29$$

Logo,

$$u = u^* \cos \Omega t + w^* \sin \Omega t , \quad 3.30$$

e

$$w = -u^* \sin \Omega t + w^* \cos \Omega t . \quad 3.31$$

Os deslocamentos apresentados pelas equações 3.30 e 3.31 são utilizados para obter as deformações do veio. Estas deformações podem ser obtidas de formas distintas dependendo da teoria de viga utilizada para modelar o veio. A Figura 7 apresenta a deformação de uma viga de Euler - Bernoulli e a Figura 8 a deformação de uma viga de Timoshenko nos planos yz e yx . A partir da Figura 7 e da Figura 8 pode-se obter as expressões das deformações, em função dos deslocamentos transversais, assim como o deslocamento longitudinal. Em ambas as figuras, u_x , u_y e u_z representam os deslocamentos de um ponto qualquer da viga na direcção x , y , e z respectivamente. Sendo que u^* , v^* e w^* representam os deslocamentos do ponto média da linha neutra nas direcções x , y , e z respectivamente. γ_{yz} e γ_{yx} são as deformação de corte. $\theta(y)$ e $\psi(y)$ são as rotações da secção transversal da viga segundo Timoshenko, note-se que como o sistema de coordenadas da Figura 8 é um sistema de coordenadas dextrógiro, a rotação da secção transversal $\psi(y)$ é negativa.

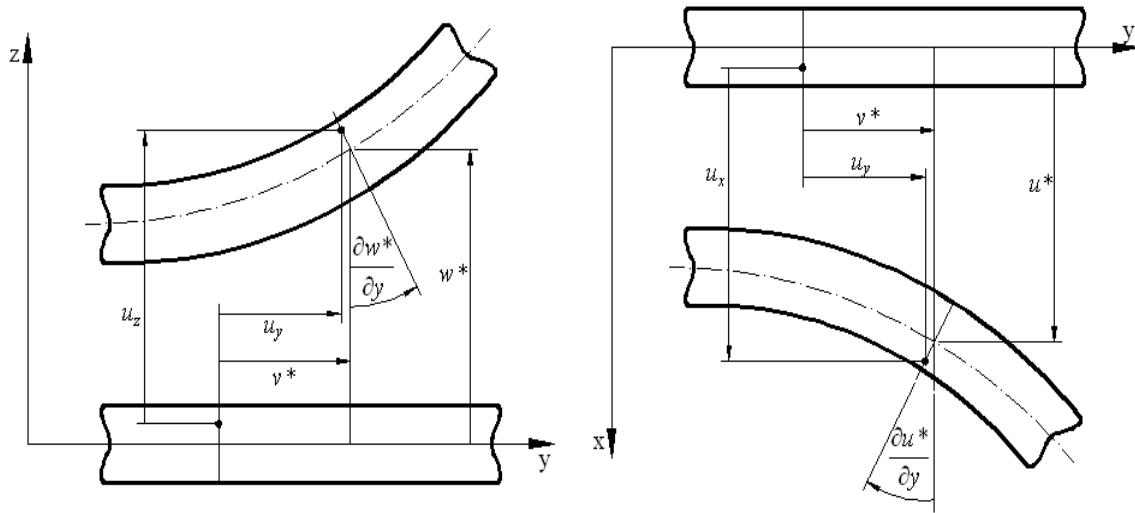


Figura 7: Deslocamento em uma viga de Euler - Bernoulli, para as coordenadas y, z e y, x .

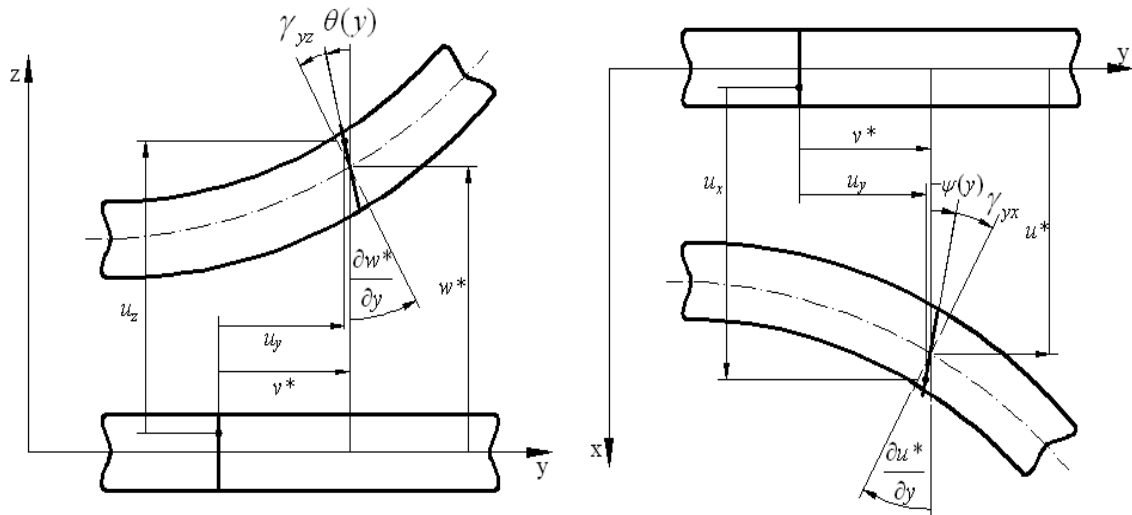


Figura 8: Deslocamento em uma viga de Timoshenko, para as coordenadas y, z e y, x .

A teoria de viga de Euler Bernoulli tem como hipótese fundamental que a secção transversal da viga permanece ortogonal a sua linha neutra após a deformação, são desprezados os efeitos do corte. Por não representar bem o comportamento de vigas robustas é conhecida como a teoria clássica das vigas finas (Figura 7).

A teoria de Timoshenko considera que a secção transversal não se mantém necessariamente ortogonal a linha neutra. Logo, apresenta-se um termo de deformação de corte (Figura 8). Assim obtém-se uma representação mais fiel do comportamento físico de vigas robustas e ainda de vigas vibrando em altas frequências.

Existem autores que utilizam correcções para a teoria clássica das vigas finas com o objectivo de melhor representar o efeito do corte no comportamento de vigas mais espessas. Em Lalanne e Ferraris [5] pode-se observar o acréscimo de um factor de correcção inserido directamente na matriz de rigidez à flexão do sistema. Neste trabalho é apresentada a teoria de viga de Timoshenko aplicada à dinâmica de rotores, para pequenos deslocamentos tem-se:

$$v = v^* + x\psi(y) - z\theta(y), \quad 3.32$$

na qual as rotações podem ser escritas por:

$$\theta(y) = \frac{\partial w^*}{\partial y} - \gamma_{yz} \quad 3.33$$

e

$$\psi(y) = \gamma_{yx} - \frac{\partial u^*}{\partial y}. \quad 3.34$$

Sendo γ_{yx} e γ_{yz} as deformações de corte nos planos yx e yz respectivamente. Substituindo os deslocamentos, dados pelas equações 3.30, 3.31 e 3.32 na equação da deformação longitudinal do veio (equação 3.21), e para cada termo tem-se:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v^*}{\partial y} + x \frac{\partial \psi(y)}{\partial y} - z \frac{\partial \theta(y)}{\partial y}, \quad 3.35$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = \left(\frac{\partial u^*}{\partial y} \right)^2 \cos^2 \Omega t + \left(\frac{\partial w^*}{\partial y} \right)^2 \sin^2 \Omega t + 2 \frac{\partial u^*}{\partial y} \frac{\partial w^*}{\partial y} \cos \Omega t \sin \Omega t \quad 3.36$$

e

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 = \left(\frac{\partial w^*}{\partial y} \right)^2 \cos^2 \Omega t + \left(\frac{\partial u^*}{\partial y} \right)^2 \sin^2 \Omega t - 2 \frac{\partial u^*}{\partial y} \frac{\partial w^*}{\partial y} \cos \Omega t \sin \Omega t. \quad 3.37$$

O termo $\left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2$ é muito pequeno e geralmente é desconsiderado. É assumido como hipótese

que as deformações axiais da linha neutra do veio são nulas, assim o termo $\frac{\partial v^*}{\partial y}$ da equação 3.35 pode ser desconsiderado, e a deformação normal do veio é dada por:

$$\varepsilon_{yy} = +x \frac{\partial \psi(y)}{\partial y} - z \frac{\partial \theta(y)}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^*}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w^*}{\partial y} \right)^2, \quad 3.38$$

sendo que o primeiro e o segundo termos da equação 3.38 representam as parcelas lineares da deformação (ε_l), enquanto que o terceiro e quarto termos representam as quantidades não lineares (ε_{nl}).

As deformações de corte podem ser obtidas directamente das equações 3.33 e 3.34, sendo portanto dadas por:

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zy} = -\theta(y) + \frac{\partial w^*}{\partial y} \quad 3.39$$

e

$$\gamma_{yx} = \gamma_{xy} = \psi(y) + \frac{\partial u^*}{\partial y}. \quad 3.40$$

Note-se que $\gamma_{yz} = 2\varepsilon_{yz}$ e $\gamma_{yx} = 2\varepsilon_{xy}$. As deformações de corte dadas pela equação 3.39 e equação 3.40 podem ser obtidas da equação 3.25 e equação 3.23 linearizando.

3.1.3 Energia potencial de deformação do veio

Quando é aplicado carregamento em um material, este se deforma. Considerando que não há perda de energia sob a forma de calor, o trabalho externo realizado pelas cargas será convertido em trabalho interno chamado de energia de deformação (Hibbler [19]).

Para um material com comportamento linear na relação tensão e deformação, a expressão da energia de deformação U é:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV. \quad 3.41$$

Na qual $\boldsymbol{\varepsilon}$ é o vector de deformações e $\boldsymbol{\sigma}$ é o vector de tensões:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad 3.42$$

e

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}. \quad 3.43$$

Considerando as tensões normais σ_{xx} , σ_{zz} e a tensão de corte τ_{xz} nulas tem-se:

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\varepsilon_{yy} \sigma_{yy} + \tau_{yx} \gamma_{yx} + \tau_{zy} \gamma_{zy}). \quad 3.44$$

Adoptando a hipótese do material ser isotrópico e linear, aplica-se a lei de Hooke (equação 3.45).

$$\begin{cases} \sigma_{yy} = E\varepsilon_{yy} \\ \tau_{yx} = G\gamma_{yx} \\ \tau_{zy} = G\gamma_{zy} \end{cases} . \quad 3.45$$

Na qual E é o módulo de elasticidade e G o módulo de corte.

Separando o integral de volume em um integral de área S e um integral de comprimento L e substituindo a equação 3.45 em 3.44, obtém-se:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \int_S \left(\underbrace{E\varepsilon_{yy}^2}_{(i)} + \underbrace{G\gamma_{yx}^2}_{(ii)} + \underbrace{G\gamma_{zy}^2}_{(iii)} \right) dS dy . \quad 3.46$$

Analisando os termos separadamente, e tomando primeiramente o termo (i) da equação 3.46 referente à energia de deformação longitudinal, tem-se:

$$\begin{aligned} (i) \rightarrow \quad & \frac{1}{2} \int_0^L \int_S E\varepsilon_{yy}^2 dS dy = \frac{1}{2} \int_0^L \int_S E(\varepsilon_l + \varepsilon_{nl})^2 dS dy = \\ & = \frac{1}{2} \int_0^L \int_S E \left(\underbrace{\varepsilon_l^2}_{(I)} + \underbrace{\varepsilon_{nl}^2}_{(II)} + \underbrace{2\varepsilon_{nl}\varepsilon_l}_{(III)} \right) dx dy dz . \end{aligned} \quad 3.47$$

Considerando apenas pequenos deslocamentos os termos (II) e (III) se aproximam de zero e podem ser desprezados. Então a equação 3.47, de acordo com APÊNDICE A, resulta em:

$$\frac{E}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial \psi(y)}{\partial y} \right)^2 \int_S x^2 ds + \left(\frac{\partial \theta(y)}{\partial y} \right)^2 \int_S z^2 ds \right] dy , \quad 3.48$$

em que

$$I_x = \int_S z^2 ds \quad 3.49$$

e

$$I_z = \int_S x^2 ds \quad 3.50$$

são os momentos de inércia de área da secção transversal em relação aos eixos x e z respectivamente.

Assim,

$$\frac{E}{2} \int_0^L \int_S \varepsilon_i^2 dS dy = \frac{1}{2} \int_0^L \left[EI_z \left(\frac{\partial \psi(y)}{\partial y} \right)^2 + EI_x \left(\frac{\partial \theta(y)}{\partial y} \right)^2 \right] dy. \quad 3.51$$

Então pode-se reescrever a equação 3.47 como:

$$\frac{1}{2} \int_0^L \int_S E \varepsilon_{yy}^2 dS dy = \frac{1}{2} \int_0^L \left[EI_z \left(\frac{\partial \psi(y)}{\partial y} \right)^2 + EI_x \left(\frac{\partial \theta(y)}{\partial y} \right)^2 \right] dy. \quad 3.52$$

Ou ainda, para posterior aproximação por elementos finitos, pode-se escrever:

$$\frac{1}{2} \int_0^L \int_S E \varepsilon_{yy}^2 dS dy = \frac{1}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial \psi(y)}{\partial y} \right)^T EI_z \left(\frac{\partial \psi(y)}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial \theta(y)}{\partial y} \right)^T EI_x \left(\frac{\partial \theta(y)}{\partial y} \right) \right] dy. \quad 3.53$$

Tomando-se agora o termo (ii) relativo à energia de deformação de corte no plano xy , parcela da energia total de deformação dada pela equação 3.46, tem-se:

$$\frac{1}{2} \int_0^L \int_S G \left(\psi(y) + \frac{\partial u^*}{\partial y} \right)^2 dS dy = \frac{1}{2} \int_0^L \left[G \left(\psi(y) + \frac{\partial u^*}{\partial y} \right)^2 \int_S dS \right] dy. \quad 3.54$$

Como a distribuição da tensão de corte é parabólica, simplifica-se a mesma considerando-a constante e multiplicada por um factor de correcção μ , que para vigas cuja secção é circular $\mu = 0.898936$ segundo Timoshenko e Goodier [20] ou para secções rectangulares $\mu = 5/6$ segundo Bathe [21].

Assim pode-se escrever:

$$\frac{1}{2} \int_0^L \int_S G \gamma_{yx}^2 dS dy = \frac{1}{2} \mu \int_0^L \left(\psi(y) + \frac{\partial u^*}{\partial y} \right)^T G S \left(\psi(y) + \frac{\partial u^*}{\partial y} \right) dy. \quad 3.55$$

Para a energia de deformação de corte no plano yz procede-se de maneira análoga, e na forma matricial obtém-se:

$$\frac{1}{2} \int_0^L \int_S G \gamma_{yz}^2 dS dy = \frac{1}{2} \mu \int_0^L \left(-\theta(y) + \frac{\partial w^*}{\partial y} \right)^T GS \left(-\theta(y) + \frac{\partial w^*}{\partial y} \right) dy. \quad 3.56$$

Assim, pode-se finalmente obter a energia potencial de deformação do veio:

$$\begin{aligned} U = & \frac{1}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial \psi(y)}{\partial y} \right) EI_z \left(\frac{\partial \psi(y)}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial \theta(y)}{\partial y} \right) EI_x \left(\frac{\partial \theta(y)}{\partial y} \right) \right] dy + \\ & + \frac{1}{2} \mu \int_0^L \left(\psi(y) + \frac{\partial w^*}{\partial y} \right)^T GS \left(\psi(y) + \frac{\partial w^*}{\partial y} \right) dy + \\ & + \frac{1}{2} \mu \int_0^L \left(-\theta(y) + \frac{\partial w^*}{\partial y} \right)^T GS \left(-\theta(y) + \frac{\partial w^*}{\partial y} \right) dy \end{aligned} \quad 3.57$$

3.1.4 Efeito do carregamento axial

Um fenómeno presente em vigas submetidas à carga axial é o acréscimo ou decréscimo da energia de deformação flexional. Logo, este efeito pode ser contabilizado com a determinação da energia potencial de deformação devido ao esforço axial, e somado a outra parcela de energia mostrada na equação 3.47. Considerando uma força axial constante F_0 , a qual produz uma tensão constante, a energia de deformação é dado por

$$U_2 = \int_V \sigma_{yy} \epsilon_{yy} dV = \int_V \frac{F_0}{S} \left(\underbrace{\epsilon_{yy_l}}_{(j)} + \underbrace{\epsilon_{yy_{nl}}}_{(jj)} \right) dV. \quad 3.58$$

A integral do termo (j) resulta em zero devido a hipótese adoptada de que a linha neutra do veio não se deforma axialmente, e ainda, por não existir rotação da secção transversal do veio. Logo, a energia apresentada na equação 3.58 tem sua contribuição acrescentada apenas nos graus de liberdade de translação, então pode ser escrita como

$$U_2 = \frac{F_0}{2} \int_0^L \left(\left(\frac{\partial u^*}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w^*}{\partial y} \right)^2 \right) dy. \quad 3.59$$

Note-se que aqui foram considerados termos não lineares.

3.1.5 Formulação do elemento finito com interpolação linear (2 nós)

Nesta secção é realizada uma aproximação por elementos finitos do tipo linear, com o intuito de se obter a matriz de rigidez. O elemento finito correspondente possui dois nós e quatro graus de liberdade por nó, sendo u_1 e u_2 os graus de liberdade de deslocamento na

direcção x nos nós 1 e 2 respectivamente, analogamente tem-se w_1 e w_2 para a direcção z . Os graus de liberdade de rotação para os nós 1 e 2 e em relação aos eixos x e z respectivamente são θ_1 , θ_2 , ψ_1 e ψ_2 conforme mostra a Figura 9.

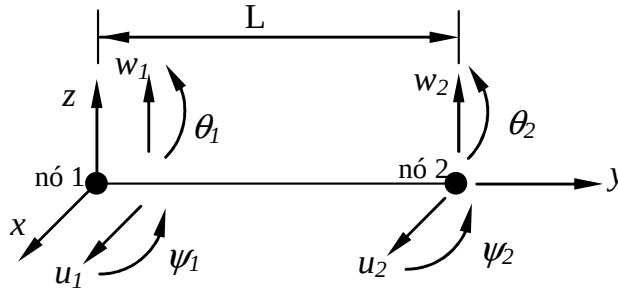


Figura 9: Representação dos graus de liberdade no elemento finito de viga de 2 nós.

Aproximando as funções deslocamento através de deslocamentos nodais e das funções de interpolação N_i , tem-se:

$$\theta(y) = N_1(y)\theta_1 + N_2(y)\theta_2 = \mathbf{N}^T \boldsymbol{\theta}, \quad 3.60$$

$$\psi(y) = N_1(y)\psi_1 + N_2(y)\psi_2 = \mathbf{N}^T \boldsymbol{\psi}, \quad 3.61$$

$$u^*(y) = N_1(y)u_1 + N_2(y)u_2 = \mathbf{N}^T \mathbf{u} \quad 3.62$$

e

$$w^*(y) = N_1(y)w_1 + N_2(y)w_2 = \mathbf{N}^T \mathbf{w}. \quad 3.63$$

sendo $\boldsymbol{\theta}$, $\boldsymbol{\psi}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{w}$ os vectores contendo as rotações e os deslocamentos nodais e $\mathbf{N}$ é o vector das funções de interpolação para elemento linear, dado por

$$\mathbf{N}^T = \left\{ 1 - \frac{y}{L} \quad \frac{y}{L} \right\}. \quad 3.64$$

Introduzindo as expressões 3.60, 3.61, 3.62 e 3.63 na equação 3.57, tem-se:

$$\begin{aligned}
U = & \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial}{\partial y} (\mathbf{N}^T \boldsymbol{\theta}) \right)^T EI_x \left(\frac{\partial}{\partial y} (\mathbf{N}^T \boldsymbol{\theta}) \right) dy + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial}{\partial y} (\mathbf{N}^T \boldsymbol{\psi}) \right)^T EI_z \left(\frac{\partial}{\partial y} (\mathbf{N}^T \boldsymbol{\psi}) \right) dy + \\
& + \frac{1}{2} \mu \int_0^L \left(\mathbf{N}^T \boldsymbol{\psi} + \frac{\partial}{\partial y} (\mathbf{N}^T \mathbf{u}) \right)^T GS \left(\mathbf{N}^T \boldsymbol{\psi} + \frac{\partial}{\partial y} (\mathbf{N}^T \mathbf{u}) \right) dy + \\
& + \frac{1}{2} \mu \int_0^L \left(-\mathbf{N}^T \boldsymbol{\theta} + \frac{\partial}{\partial y} (\mathbf{N}^T \mathbf{w}) \right)^T GS \left(-\mathbf{N}^T \boldsymbol{\theta} + \frac{\partial}{\partial y} (\mathbf{N}^T \mathbf{w}) \right) dy
\end{aligned} \tag{3.65}$$

Considera-se $\mathbf{B}$ a derivada de $\mathbf{N}$ em ordem a y , e as propriedades das equações 3.67 e 3.68, mostradas pelas matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{D}$ quaisquer.

$$\mathbf{B}^T = \left\{ -\frac{1}{L} \quad \frac{1}{L} \right\} \tag{3.66}$$

$$(\mathbf{AD})^T = \mathbf{D}^T \mathbf{A}^T \tag{3.67}$$

$$(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A} \tag{3.68}$$

Manipulando os termos após realizadas as substituições, tem-se

$$\begin{aligned}
U = & \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta}^T \underbrace{\int_0^L \mathbf{B} \mathbf{B}^T EI_x dy}_{\mathbf{K}_1} \boldsymbol{\theta} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\psi}^T \underbrace{\int_0^L \mathbf{B} \mathbf{B}^T EI_z dy}_{\mathbf{K}_2} \boldsymbol{\psi} + \\
& + \frac{1}{2} \boldsymbol{\psi}^T \underbrace{\mu \int_0^L \mathbf{N} \mathbf{N}^T GS dy}_{\mathbf{K}_3} \boldsymbol{\psi} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\psi}^T \underbrace{\mu \int_0^L \mathbf{N} \mathbf{B}^T GS dy}_{\mathbf{K}_4} \mathbf{u} + \\
& + \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \underbrace{\mu \int_0^L \mathbf{B} \mathbf{N}^T GS dy}_{\mathbf{K}_5} \boldsymbol{\psi} + \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \underbrace{\int_0^L \mathbf{B} \mathbf{B}^T GS dy}_{\mathbf{K}_6} \mathbf{u} + \\
& + \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta}^T \underbrace{\mu \int_0^L \mathbf{N} \mathbf{N}^T GS dy}_{\mathbf{K}_7} \boldsymbol{\theta} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta}^T \underbrace{\mu \int_0^L \mathbf{N} \mathbf{B}^T GS dy}_{\mathbf{K}_8} \mathbf{w} + \\
& + \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \underbrace{\mu \int_0^L \mathbf{B} \mathbf{N}^T GS dy}_{\mathbf{K}_9} \boldsymbol{\theta} + \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \underbrace{\int_0^L \mathbf{B} \mathbf{B}^T GS dy}_{\mathbf{K}_{10}} \mathbf{w}
\end{aligned} \tag{3.69}$$

na qual $\mathbf{K}_i$ para $(i=1,...,10)$ são as matrizes de rigidez relativas aos graus de liberdade a que estão associadas. A parcela de rigidez da matriz elementar relativa a flexão é obtida à partir da integração completa de $\mathbf{K}_1$ e $\mathbf{K}_2$. Os termos de $\mathbf{K}_3$ a $\mathbf{K}_{10}$ relativos ao corte são subintegrados a partir de uma integração gaussiana selectiva dando origem à contribuição do corte na matriz de rigidez elementar (Hughes [22]). O APÊNDICE A mostra com detalhes a integração de cada termo isoladamente para a formação da matriz de rigidez elementar.

Para a obtenção da matriz de rigidez elementar aplica-se as equações de Lagrange (equação 3.70) em todas as parcelas $\mathbf{K}_i$.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial \dot{q}_i} = F_{q_i}, \quad 3.70$$

sendo T a energia cinética, U a energia potencial de deformação, $\mathfrak{S}$ a função de dissipação de Rayleigh, F_{q_i} os esforços generalizados em relação as coordenadas generalizadas q_i e $\dot{q}_i$ as velocidades generalizadas do sistema.

Expandindo o termo relativo à matriz $\mathbf{K}_1$, que refere-se apenas o grau de liberdade θ :

$$\frac{1}{2} [\theta_1 \ \theta_2] \mathbf{K}_1 [\theta_1 \ \theta_2]^T = \frac{1}{2} [(\theta_1 K_{11}^1 + \theta_2 K_{21}^1) \theta_1 + (\theta_1 K_{12}^1 + \theta_2 K_{22}^1) \theta_2], \quad 3.71$$

e aplicando as equações de Lagrange, com a consideração de que $K_{12}^1 = K_{21}^1$, tem-se:

$$\frac{\partial U}{\partial \theta_1} = \theta_1 K_{11}^1 + \theta_2 K_{12}^1 \quad 3.72$$

e

$$\frac{\partial U}{\partial \theta_2} = \theta_1 K_{21}^1 + \theta_2 K_{22}^1. \quad 3.73$$

As equações 3.72 e 3.73 representam as relações entre os graus de liberdade θ_1 e θ_2 e os coeficientes de rigidez da matriz $\mathbf{K}_1$. Considerando que os graus de liberdades são dispostas na matriz elementar como mostrado na equação 3.74, tem-se a equação 3.75.

$$\delta^T = [u_1 \ w_1 \ \theta_1 \ \psi_1 \ u_2 \ w_2 \ \theta_2 \ \psi_2] \quad 3.74$$

$$\begin{matrix} & u_1 & w_1 & \theta_1 & \dots & \theta_2 & \psi_2 \\ u_1 & \left[\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{11}^1 & \dots & K_{12}^1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & K_{21}^1 & \dots & K_{22}^1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right]_{8 \times 8} & . \end{matrix} \quad 3.75$$

Este procedimento é realizado de maneira análoga para todas as parcelas $\mathbf{K}_i$, e assim é possível obter a matriz elementar do sistema (APÊNDICE A).

Contribuição dos carregamentos externos na rigidez do sistema

Se existirem esforços axiais constantes, a partir da energia potencial de deformação dada pela equação 3.59, tem-se:

$$U_2 = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \int_0^L \mathbf{B} F_0 \mathbf{B}^T dy \mathbf{u} + \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \int_0^L \mathbf{B} F_0 \mathbf{B}^T dy \mathbf{w} . \quad 3.76$$

Os termos da equação 3.76 são integrados de maneira completa e após a aplicação das equações de Lagrange obtém-se uma matriz de rigidez que será adicionada à matriz de rigidez elementar (APÊNDICE B).

O efeito da atracção magnética é representado por um carregamento proporcional ao deslocamento do veio, representado por $f dy$, este fenómeno afecta directamente a rigidez do sistema. Assim, considerando o trabalho realizado sobre o sistema, conforme o modelo proposto por Lalanne e Ferraris [5], sendo δu e δw os deslocamentos virtuais de um ponto do elemento nas direcções x e z respectivamente, tem-se o trabalho virtual da força magnética na direcção horizontal somado ao vertical escrito como:

$$\delta W = \delta W_u + \delta W_w = \int_0^L f dy u \delta u + \int_0^L f dy w \delta w . \quad 3.77$$

As funções deslocamento podem ser aproximadas através de deslocamentos nodais e das funções de interpolação $\mathbf{N}$, assim tem-se:

$$u(y) = N_1(y)u_1 + N_2(y)u_2 = \mathbf{N}^T \mathbf{u} \quad 3.78$$

e

$$w(y) = N_1(y)w_1 + N_2(y)w_2 = \mathbf{N}^T \mathbf{w}. \quad 3.79$$

Os deslocamentos virtuais u e w podem, da mesma forma, ser aproximados como:

$$\delta u(y) = N_1(y)\delta u_1 + N_2(y)\delta u_2 = \mathbf{N}^T \delta \mathbf{u} \quad 3.80$$

e

$$\delta w(y) = N_1(y)\delta w_1 + N_2(y)\delta w_2 = \mathbf{N}^T \delta \mathbf{w}. \quad 3.81$$

Introduzindo então as equações 3.78, 3.79, 3.80 e 3.81 na expressão do trabalho virtual, tem-se:

$$\delta W = \underbrace{\mathbf{u}^T \int_0^L f \mathbf{N} \mathbf{N}^T dy}_{Kmu} \delta \mathbf{u} + \underbrace{\mathbf{w}^T \int_0^L f \mathbf{N} \mathbf{N}^T dy}_{Kmw} \delta \mathbf{w}, \quad 3.82$$

que pode ser escrito como

$$\delta W = \mathbf{F}_u^T \delta \mathbf{u} + \mathbf{F}_w^T \delta \mathbf{w}. \quad 3.83$$

Pode-se observar que os termos que contribuem para alterar a rigidez do sistema, mostrados na equação 3.82, são relativos aos graus de liberdade de translação. Assim, é possível obter a matriz de rigidez devido a atracção magnética (APÊNDICE B).

3.2 Obtenção da Matriz de Massa e Giroscópica

Nesta secção é apresentado um procedimento para a obtenção da expressão da energia cinética para o veio, da qual se podem extrair as matrizes de massa e giroscópica. Este procedimento parte da determinação da energia cinética de um disco considerado como um corpo rígido, que pode ser expandido com o objectivo de determinar a energia cinética do sistema.

3.2.1 Obtenção das matrizes de transformação de coordenadas

A Figura 10 apresenta os sistemas de eixos coordenados de referência inercial $x_0 y_0 z_0$, móvel $x_1 y_1 z_1$ e um ponto qualquer P .

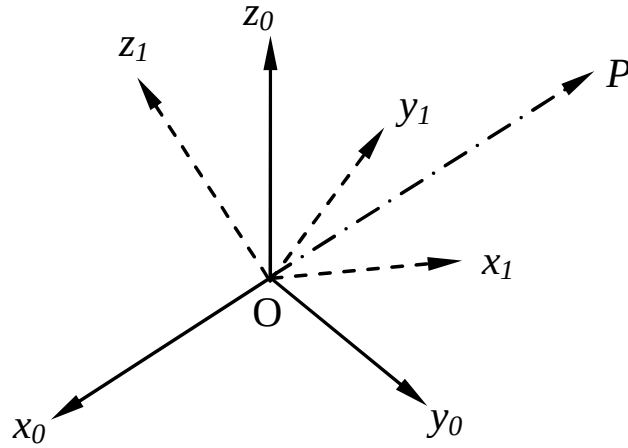


Figura 10 – Sistema de referência inercial (-) e móvel (- -).

Adoptando $\hat{i}_0$, $\hat{j}_0$ e $\hat{k}_0$ como os vectores unitários do sistema inercial, e $\hat{i}_1$, $\hat{j}_1$ e $\hat{k}_1$ como os vectores unitários do sistema móvel, pode-se representar um ponto através de dois sistemas de coordenadas distintos, $p_o = (p_{ox}, p_{oy}, p_{oz})$ e $p_1 = (p_{1x}, p_{1y}, p_{1z})$. Assim tem-se:

$$\vec{p}_o = p_{ox}\hat{i}_o + p_{oy}\hat{j}_o + p_{oz}\hat{k}_o \quad 3.84$$

e

$$\vec{p}_1 = p_{1x}\hat{i}_1 + p_{1y}\hat{j}_1 + p_{1z}\hat{k}_1. \quad 3.85$$

Pode-se ainda escrever:

$$p_{ox} = \vec{p}_o \cdot \hat{i}_o = \vec{p}_1 \cdot \hat{i}_o, \quad 3.86$$

$$p_{oy} = \vec{p}_o \cdot \hat{j}_o = \vec{p}_1 \cdot \hat{j}_o \quad 3.87$$

e

$$p_{oz} = \vec{p}_o \cdot \hat{k}_o = \vec{p}_1 \cdot \hat{k}_o. \quad 3.88$$

Como $\vec{p}_o$ e $\vec{p}_1$ representam o mesmo ponto, ao se efectuar o produto interno com os vectores unitários, obtém-se a projecção destes vectores no sistema de coordenadas que se deseja (Ribeiro [23]). Assim substituindo a equação 3.85 nas equações 3.86, 3.87 e 3.88, tem-se que:

$$p_{ox} = p_{1x} \hat{i}_1 \cdot \hat{i}_0 + p_{1y} \hat{j}_1 \cdot \hat{i}_0 + p_{1z} \hat{k}_1 \cdot \hat{i}_0, \quad 3.89$$

$$p_{oy} = p_{1x} \hat{i}_1 \cdot \hat{j}_0 + p_{1y} \hat{j}_1 \cdot \hat{j}_0 + p_{1z} \hat{k}_1 \cdot \hat{j}_0 \quad 3.90$$

e

$$p_{oz} = p_{1x} \hat{i}_1 \cdot \hat{k}_0 + p_{1y} \hat{j}_1 \cdot \hat{k}_0 + p_{1z} \hat{k}_1 \cdot \hat{k}_0. \quad 3.91$$

Para:

$$\vec{p}_0 = \mathbf{R}_0^1 \vec{p}_1, \quad 3.92$$

pode-se determinar a matriz de rotação $\mathbf{R}_0^1$, dada por:

$$\mathbf{R}_0^1 = \begin{bmatrix} \hat{i}_1 \hat{i}_0 & \hat{j}_1 \hat{i}_0 & \hat{k}_1 \hat{i}_0 \\ \hat{i}_1 \hat{j}_0 & \hat{j}_1 \hat{j}_0 & \hat{k}_1 \hat{j}_0 \\ \hat{i}_1 \hat{k}_0 & \hat{j}_1 \hat{k}_0 & \hat{k}_1 \hat{k}_0 \end{bmatrix}. \quad 3.93$$

Então, através da equação 3.92 é possível a transformação do vector $\vec{p}_1$ do sistema móvel para o sistema inercial. Observa-se que os seus vectores colunas são os cossenos directores dos eixos do sistema móvel em relação aos eixos do sistema inercial. Através da multiplicação da equação 3.92 pela inversa da matriz de rotação tem-se:

$$\vec{p}_0 = \mathbf{R}_1^0 \vec{p}_1. \quad 3.94$$

Sendo

$$\mathbf{R}_1^0 = \begin{bmatrix} \hat{i}_0 \hat{i}_1 & \hat{j}_0 \hat{i}_1 & \hat{k}_0 \hat{i}_1 \\ \hat{i}_0 \hat{j}_1 & \hat{j}_0 \hat{j}_1 & \hat{k}_0 \hat{j}_1 \\ \hat{i}_0 \hat{k}_1 & \hat{j}_0 \hat{k}_1 & \hat{k}_0 \hat{k}_1 \end{bmatrix}, \quad 3.95$$

a matriz de rotação que permite a transformação do vector $\vec{p}_1$ do sistema fixo para o sistema móvel. E então, os vectores colunas são os cossenos directores dos eixos do sistema fixo em relação aos eixos do sistema móvel.

Através da comparação das equações 3.93, 3.94 e 3.95, tem-se que:

$$\mathbf{R}_1^0 = (\mathbf{R}_0^1)^{-1} = (\mathbf{R}_0^1)^T. \quad 3.96$$

Tem-se então que o determinante da matriz de rotação é igual a 1 e devido a matriz inversa ser igual a sua transposta ela é dita ortogonal.

Para facilitar a escrita, considera-se a partir deste ponto neste trabalho $\theta(y)$ e $\psi(y)$, como θ e ψ . Então, supondo que o sistema móvel sofra uma rotação de um ângulo θ em torno de z_0 , tem-se:

$$\mathbf{R}_{0z,\theta}^1 = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) & \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) & \cos(\theta) & \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & \cos(0) \end{bmatrix}. \quad 3.97$$

Então conclui-se que:

$$\mathbf{R}_{0z,\psi}^1 = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad 3.98$$

$$\mathbf{R}_{0y,\phi}^1 = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & 0 & \sin(\phi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\phi) & 0 & \cos(\phi) \end{bmatrix} \quad 3.99$$

e

$$\mathbf{R}_{0x,\theta}^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}. \quad 3.100$$

3.2.2 Composição de rotações

Para o caso de um rotor tem-se uma composição de rotações que pode ser adoptada como sendo na seguinte ordem, uma rotação em torno do eixo z , uma em torno do eixo x e finalmente em torno de y , logo, para realizar a transformação de coordenadas utilizar-se-á o modelo apresentado na Figura 11.

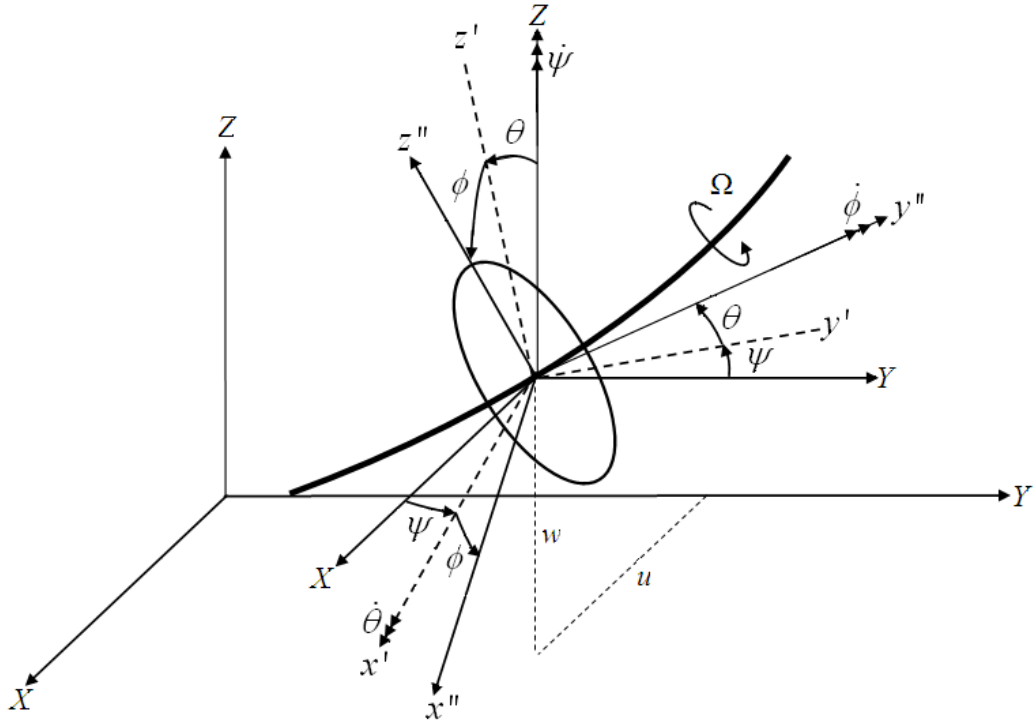


Figura 11 – Eixos de referência para um disco que sofre rotação num veio flexível (Lalanne e Ferraris [6]).

O vector de velocidades angulares, do sistema móvel para o sistema inercial, baseado na Figura 11, pode então ser escrito como:

$$\boldsymbol{\omega}_0^1 = \frac{d\psi}{dt} \mathbf{z}_0 + \frac{d\theta}{dt} \mathbf{x}' + \frac{d\phi}{dt} \mathbf{y}'' . \quad 3.101$$

sendo que os termos $\mathbf{z}_0$, $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{y}''$ correspondentes às transformações de coordenadas e podem ser expandidos, então tem-se:

$$\boldsymbol{\omega}_0^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{d\psi}{dt} \end{bmatrix}^T (\mathbf{R}_{1z,\psi}^0 \times \mathbf{R}_{1x,\theta}^0 \times \mathbf{R}_{1y,\phi}^0) + \begin{bmatrix} \frac{d\theta}{dt} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T (\mathbf{R}_{1x,\theta}^0 \times \mathbf{R}_{1y,\phi}^0) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{d\phi}{dt} \\ 0 \end{bmatrix}^T (\mathbf{R}_{1y,\phi}^0). \quad 3.102$$

E finalmente deduz-se que:

$$\boldsymbol{\omega}_0^1 = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -\frac{d\psi}{dt} \cos(\theta) \sin(\phi) + \frac{d\theta}{dt} \cos(\phi) \\ \frac{d\phi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \sin(\theta) \\ \frac{d\psi}{dt} \cos(\theta) \cos(\phi) + \frac{d\theta}{dt} \sin(\phi) \end{bmatrix}^T. \quad 3.103$$

3.2.3 Energia cinética do disco

A energia cinética total do disco em termos da sua massa M_D e de seus momento de inércia de massa I_{Dx} , I_{Dy} e I_{Dz} pode ser escrita como:

$$T_D = \frac{M_D v^2}{2} + \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} I_{Dx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{Dy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{Dz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix}, \quad 3.104$$

sendo que a velocidade de translação total correspondente à soma das velocidades de translação nas direcções x e z é dada por:

$$v^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \quad 3.105$$

Logo, substituindo a equação 3.105 em 3.104 tem-se

$$T_D = \frac{1}{2} M_D \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} (I_{Dx} \omega_x^2 + I_{Dy} \omega_y^2 + I_{Dz} \omega_z^2). \quad 3.106$$

Devido à simetria do problema $I_{Dx} = I_{Dy}$, pequenos deslocamentos e consequentemente pequenos ângulos θ e ψ , velocidade angular constante $\Omega = \dot{\phi}$, pode-se simplificar a equação da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (I_{Dx} \omega_x^2 + I_{Dy} \omega_y^2 + I_{Dz} \omega_z^2) &= \frac{1}{2} I_{Dx} \left[(\dot{\psi}^2 \cos^2 \theta \sin^2 \phi + \dot{\theta}^2 \cos^2 \phi - 2\dot{\psi}\dot{\theta} \cos \theta \sin \phi \cos \phi) + \right. \\ &+ \left. (\dot{\psi}^2 \cos^2 \theta \cos^2 \phi + \dot{\theta}^2 \sin^2 \phi - 2\dot{\psi}\dot{\theta} \cos \theta \cos \phi \sin \phi) \right] + \frac{1}{2} I_{Dy} [\dot{\phi}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta + 2\dot{\phi}\dot{\psi} \sin \theta] = \quad \cdot \\ &= \frac{1}{2} I_{Dx} \left[\underbrace{\dot{\theta}^2 (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi)}_{=1} + \dot{\psi}^2 \underbrace{\cos^2 \theta}_{=1} \underbrace{(\cos^2 \phi + \sin^2 \phi)}_{=1} \right] + \frac{1}{2} I_{Dy} \left[\underbrace{\dot{\phi}^2}_{=\Omega^2} + \dot{\psi}^2 \underbrace{\sin^2 \theta}_{=\theta^2} + 2 \underbrace{\dot{\phi}}_{=\Omega} \underbrace{\dot{\psi} \sin \theta}_{=\theta} \right] \end{aligned}$$

Note-se que a notação para a derivada em relação ao tempo $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$ por vezes é utilizada com um ponto sobre a função na qual se aplica a derivada, a fim de facilitar a escrita para as equações. Utiliza-se também, dois pontos para o caso de derivadas de segunda ordem em relação ao tempo. Na equação 3.107 o termo $\dot{\psi}^2 \dot{\theta}^2$ é muito pequeno e pode ser desconsiderado, então 3.106 resulta em:

$$\begin{aligned}
 T_D = & \frac{1}{2} M_D \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] + \\
 & + \frac{1}{2} I_{Dx} \left[\left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 \right] + . \\
 & + \frac{1}{2} I_{Dy} \left[\Omega^2 + 2\Omega \theta \frac{\partial \psi}{\partial t} \right]
 \end{aligned} \tag{3.108}$$

Na equação 3.108 nota-se a presença do efeito giroscópico representado pelo termo proporcional à velocidade $\dot{\psi}$ e à coordenada generalizada θ , o qual é dado por $\frac{1}{2} I_{Dy} 2\Omega \theta \dot{\psi}$. Esta parcela da energia cinética é responsável pela geração da matriz giroscópica.

Observa-se também que o termo $\frac{1}{2} I_{Dy} \Omega^2$ é constante e ao aplicar as equações de Lagrange (equação 3.70) torna-se nulo.

3.2.4 Formulação de elementos finitos para o disco

Cada disco apresentará uma matriz de massa e uma matriz giroscópica referente ao nó em que está posicionado. Para determinar estas matrizes aplica-se as equações de Lagrange (equação 3.70) na equação 3.108, resultando em:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}} \right) - \frac{\partial T}{\partial u} = M_D \ddot{u}, \tag{3.109}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{w}} \right) - \frac{\partial T}{\partial w} = M_D \ddot{w}, \tag{3.110}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} = I_{Dx} \ddot{\theta} - \Omega I_{Dy} \dot{\psi} \tag{3.111}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \psi} = I_{Dx} \ddot{\psi} + \Omega I_{Dy} \dot{\theta}. \quad 3.112$$

Logo,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} M_D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{Dx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{Dx} \end{bmatrix}}_{\text{Matriz de massa}} \begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{w} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} + \underbrace{\Omega \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{Dy} \\ 0 & 0 & I_{Dy} & 0 \end{bmatrix}}_{\text{Matriz giroscópica}} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}. \quad 3.113$$

3.2.5 Energia cinética do veio

Para o veio pode-se considerar a energia cinética como sendo o integral das energias cinéticas de cada disco infinitesimal ao longo do seu comprimento, portanto tem-se:

$$\begin{aligned} \partial T_s &= \frac{1}{2} \partial M_D \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \partial I_{Dx} \left[\left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 \right] + , \\ &+ \frac{1}{2} \partial I_{Dy} \left[\Omega^2 + 2\Omega \theta \frac{\partial \psi}{\partial t} \right] \end{aligned} \quad 3.114$$

para:

$$\partial I_{Dx} = \frac{1}{4} r^2 \partial m = \frac{1}{4} r^2 \rho \partial V = \frac{1}{4} r^2 \rho \pi r^2 \partial y = \rho I \partial y, \quad 3.115$$

$$\partial I_{Dy} = \frac{1}{2} r^2 \partial m = \frac{1}{2} r^2 \rho \partial V = \frac{1}{2} r^2 \rho \pi r^2 \partial y = 2\rho I \partial y \quad 3.116$$

e Ω constante conclui-se então que:

$$\begin{aligned} T_s &= \frac{1}{2} \rho S \int_0^{L_v} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] \partial y + \frac{1}{2} \rho I \int_0^{L_v} \left[\left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 \right] \partial y + \\ &+ \rho I L_v \Omega^2 + 2\rho I \Omega \int_0^{L_v} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \theta \right) dy \end{aligned} \quad 3.117$$

Sendo ρ a massa específica do veio, L_v o comprimento total do veio e I o momento de inércia do disco.

3.2.6 Formulação do elemento finito com interpolação linear (2 nós)

Uma aproximação por elementos finitos do tipo linear com o intuito de se obter as matrizes de massa e giroscópica é apresentada. O elemento finito utilizado é apresentado na Figura 9. Aproximando as funções de velocidade através de velocidades nodais e funções de interpolação N_i , tem-se:

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}(y) = N_1(y)\dot{\theta}_1 + N_2(y)\dot{\theta}_2 = \mathbf{N}^T \dot{\boldsymbol{\theta}}, \quad 3.118$$

$$\dot{\boldsymbol{\psi}}(y) = N_1(y)\dot{\psi}_1 + N_2(y)\dot{\psi}_2 = \mathbf{N}^T \dot{\boldsymbol{\psi}}, \quad 3.119$$

$$\dot{\mathbf{u}}(y) = N_1(y)\dot{u}_1 + N_2(y)\dot{u}_2 = \mathbf{N}^T \dot{\mathbf{u}} \quad 3.120$$

e

$$\dot{\mathbf{w}}(y) = N_1(y)\dot{w}_1 + N_2(y)\dot{w}_2 = \mathbf{N}^T \dot{\mathbf{w}}, \quad 3.121$$

sendo que $\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dots, \dot{w}_1$ e $\dot{w}_2$ são valores das velocidades nodais e $\dot{\boldsymbol{\theta}}, \dot{\boldsymbol{\psi}}, \dot{\mathbf{u}}$ e $\dot{\mathbf{w}}$ são as velocidades nodais na forma de vectores.

Introduzindo as equações 3.118, 3.119, 3.120 e 3.121 na equação 3.117,

$$\begin{aligned} T_s = & \underbrace{\frac{1}{2} \rho S \int_0^{L_y} (\mathbf{N}^T \dot{\mathbf{u}})^T (\mathbf{N}^T \dot{\mathbf{u}}) dy}_{(i)} + \underbrace{\frac{1}{2} \rho S \int_0^{L_y} (\mathbf{N}^T \dot{\mathbf{w}})^T (\mathbf{N}^T \dot{\mathbf{w}}) dy}_{(ii)} + \\ & + \underbrace{\frac{1}{2} \rho S \int_0^{L_y} (\mathbf{N}^T \dot{\boldsymbol{\theta}})^T (\mathbf{N}^T \dot{\boldsymbol{\theta}}) dy}_{(iii)} + \underbrace{\frac{1}{2} \rho S \int_0^{L_y} (\mathbf{N}^T \dot{\boldsymbol{\psi}})^T (\mathbf{N}^T \dot{\boldsymbol{\psi}}) dy}_{(iv)} + \\ & + \underbrace{\rho I L_y \Omega^2}_{(v)} + \underbrace{2 \rho I \Omega \int_0^{L_y} (\mathbf{N}^T \dot{\boldsymbol{\psi}})^T (\mathbf{N}^T \dot{\boldsymbol{\theta}}) dy}_{(vi)} \end{aligned} \quad 3.122$$

e analisando apenas os termos (i), (ii), (iii) e (iv) da equação 3.122, referentes à matriz de massa pode-se chegar à:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}^T \underbrace{\rho S \int_0^{L_V} \mathbf{N} \mathbf{N}^T dy}_{M_1} \dot{\mathbf{u}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{w}}^T \underbrace{\rho S \int_0^{L_V} \mathbf{N} \mathbf{N}^T dy}_{M_2} \dot{\mathbf{w}} + \\
& + \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\theta}}^T \underbrace{\rho I \int_0^{L_V} \mathbf{N} \mathbf{N}^T dy}_{M_3} \dot{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\psi}}^T \underbrace{\rho I \int_0^{L_V} \mathbf{N} \mathbf{N}^T dy}_{M_4} \dot{\boldsymbol{\psi}}
\end{aligned} \quad , \quad 3.123$$

E da mesma maneira como apresentado na montagem da matriz de rigidez, aplica-se as equações de Lagrange e obtém-se a matriz de massa para o veio (APÊNDICE C). A disposição dos valores na matriz de massa elementar segue a ordem do vector de acelerações nodais (equação 3.124).

$$\ddot{\delta} = [\ddot{u}_1 \quad \ddot{w}_1 \quad \ddot{\theta}_1 \quad \ddot{\psi}_1 \quad \ddot{u}_2 \quad \ddot{w}_2 \quad \ddot{\theta}_2 \quad \ddot{\psi}_2], \quad 3.124$$

Retornando à equação 3.122, tomando apenas o termo referente à matriz giroscópica, termo (vi), e considerando a aproximação da função velocidade para o grau de liberdade $\boldsymbol{\psi}$ e a função deslocamento para o grau de liberdade $\boldsymbol{\theta}$, tem-se:

$$\begin{aligned}
2\rho I \Omega \int_0^L \dot{\boldsymbol{\psi}}^T \boldsymbol{\theta} dy &= 2\rho I \Omega \int_0^L (\mathbf{N}^T \dot{\boldsymbol{\psi}})^T (\mathbf{N}^T \boldsymbol{\theta}) dy = \\
&= \dot{\boldsymbol{\psi}}^T \underbrace{2\rho I \Omega \int_0^L \mathbf{N} \mathbf{N}^T dy}_{\mathbf{G1}} \boldsymbol{\theta}
\end{aligned} \quad . \quad 3.125$$

Como o termo $\mathbf{G1}$ que gera a matriz giroscópica é proporcional a $\dot{\boldsymbol{\psi}}$ e a $\boldsymbol{\theta}$ tem-se uma matriz anti-simétrica, ao contrário das outras matrizes determinadas. Assim, expandindo a equação 3.125:

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{\psi}}^T \underbrace{2\rho I \Omega \int_0^L \mathbf{N} \mathbf{N}^T dy}_{\mathbf{G1}} \boldsymbol{\theta} &= [\dot{\psi}_1 \quad \dot{\psi}_2] \mathbf{G1} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \\
&= (\dot{\psi}_1 G_{11} + \dot{\psi}_2 G_{12}) \theta_1 + (\dot{\psi}_1 G_{21} + \dot{\psi}_2 G_{22}) \theta_2
\end{aligned} \quad , \quad 3.126$$

e aplicando a equação de Lagrange (equação 3.70), tem-se:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta_1} = -\dot{\psi}_1 G_{11} - \dot{\psi}_2 G_{12}, \quad 3.127$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta_2} = -\dot{\psi}_1 G_{1_{12}} - \dot{\psi}_2 G_{1_{22}}, \quad 3.128$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial \psi_1} = \dot{\theta}_1 G_{1_{11}} + \dot{\theta}_2 G_{1_{12}}, \quad 3.129$$

e

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial \psi_2} = \dot{\theta}_1 G_{1_{21}} + \dot{\theta}_2 G_{1_{22}}. \quad 3.130$$

Assim, seguindo a ordenação dos graus de liberdade de velocidades nodais

$$\dot{\delta} = [\dot{u}_1 \quad \dot{w}_1 \quad \dot{\theta}_1 \quad \dot{\psi}_1 \quad \dot{u}_2 \quad \dot{w}_2 \quad \dot{\theta}_2 \quad \dot{\psi}_2], \quad 3.131$$

obtém-se a matriz giroscópica do elemento linear de viga utilizando a formulação de elementos finitos com 2 nós por elemento (APÊNDICE D).

3.3 Obtenção das Matrizes de Rigidez e Amortecimento para Mancais e Fundação

O modelo de mancal utilizado nesse trabalho consiste em considerá-lo como massa concentrada, com rigidez e amortecimento associados. Como essas propriedades são inseridas directamente no nó onde está o mancal e consideradas em paralelo com a rigidez do veio no respectivo nó, estas são simplesmente somadas à matriz global de rigidez (Kang *et al* [24] e Edwards *et al* [17]). A matriz de amortecimento do sistema global é formada apenas pelos termos respectivos ao amortecimento viscoso inserido pelos mancais, pois não é considerado qualquer tipo de amortecimento interno do sistema. A Figura 12 apresenta uma simplificação do modelo utilizado, ou seja, é a visualização do modelo no plano xz , sendo K_{mi} , C_{mi} e M_{mi} a rigidez, o amortecimento e a massa do i -ésimo mancal respectivamente (para $i=1, \dots$, número de mancais).

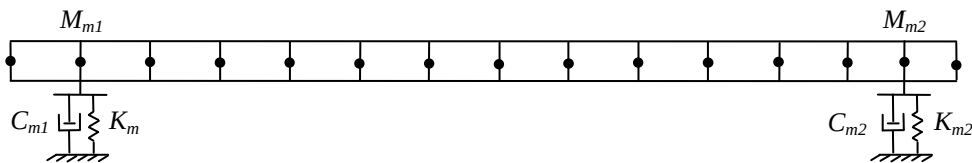


Figura 12: Representação do veio discretizado com 14 elementos finitos e 2 mancais.

Os graus de liberdade associados ao mancal são os deslocamentos u e w . Por não considerar restrição à rotação, graus de liberdade θ e ψ , a matriz de rigidez, amortecimento e massa, equações 3.132, 3.133 e 3.134, relativas aos mancais que serão adicionadas às matrizes globais do sistema, não apresentam qualquer contribuição sob os graus de liberdade de rotação.

$$K_{mi} = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xz} \\ k_{zx} & k_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix}. \quad 3.132$$

$$C_{mi} = \begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xz} \\ c_{zx} & c_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \end{bmatrix}. \quad 3.133$$

$$M_{mi} = \begin{bmatrix} m_{mi} & 0 \\ 0 & m_{mi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{w} \end{bmatrix}. \quad 3.134$$

Os termos da matriz de rigidez k_{xx} , k_{zz} , k_{xz} e k_{zx} representam respectivamente a rigidez directa nas direcções x e z e os termos cruzados para as mesmas direcções. Da mesma forma são formadas as matrizes de amortecimento, com os termos directos e cruzados c_{xx} , c_{zz} , c_{xz} e c_{zx} , na respectivas direcções x e z . Por fim, m_{mi} representa a massa do mancal. O modelo de fundação utilizado mostrado na Figura 13 é o apresentado por Ribeiro *et al* [25].

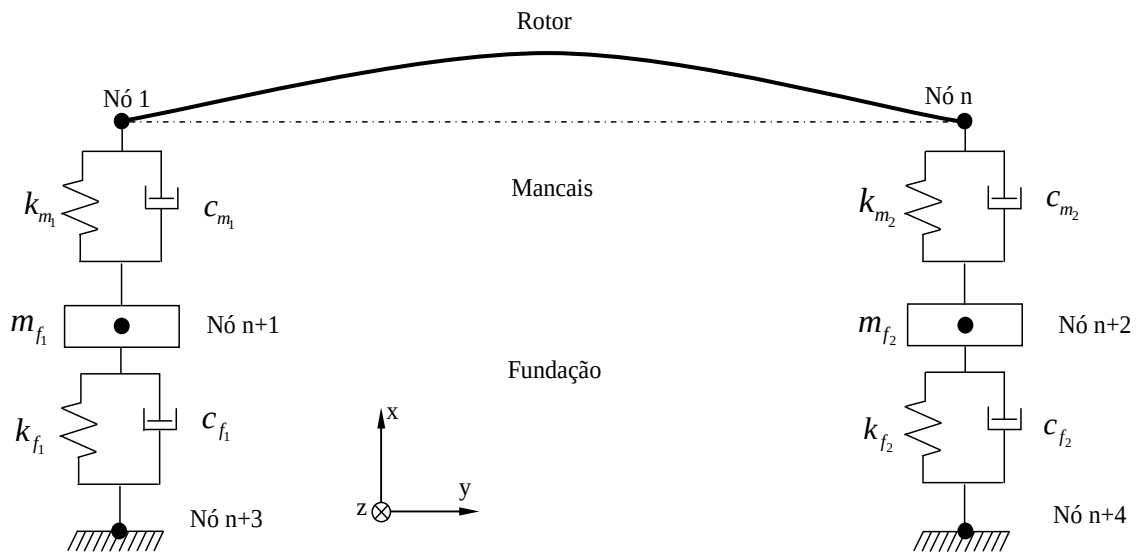


Figura 13. Representação do modelo simplificado de fundação utilizado.

Para a representação matricial do sistema, devem ser inseridos novos graus de liberdade relativos ao movimento da fundação. Na Figura 13, k_{m1} é a rigidez do primeiro e k_{m2} a rigidez do segundo mancal. k_{f1} e k_{f2} são os termos de rigidez das respectivas fundações. Embora a Figura 13 apresente apenas dois mancais e duas fundações, o modelo proposto pode introduzir n mancais e fundações, considerando que junto com cada mancal existe uma fundação.

De acordo com a Figura 13, pode-se observar que a rigidez do mancal da esquerda é compartilhada por dois nós, *nó* 1 e *nó* $n+1$, e não mais por apenas o primeiro nó (no caso de não se considerar a fundação). Já a rigidez da fundação está sujeita ao deslocamento relacionado com o nó $n+1$ tendo em vista que o nó $n+3$ na outra extremidade está engastado. Assim, tomando-se apenas os graus de liberdade de deslocamento u , a matriz de rigidez associada aos mancais e fundação é dada por:

$$\mathbf{K}_{ad} = \begin{bmatrix} u_1 & u_{n+1} \\ k_{mu1} & -k_{mu1} \\ -k_{mu1} & k_{mu1} + k_{fu1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_{n+1} \end{bmatrix}, \quad 3.135$$

sendo k_{mu1} e k_{fu1} a rigidez do mancal 1 e da fundação 1 na direcção do deslocamento u , respectivamente. Analogamente é possível estender este raciocínio para o deslocamento w resultando em:

$$\mathbf{K}_{ad} = \begin{bmatrix} w_1 & w_{n+1} \\ k_{mw1} & -k_{mw1} \\ -k_{mw1} & k_{mw1} + k_{fw1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_{n+1} \end{bmatrix}. \quad 3.136$$

A rigidez do mancal 1 e da fundação 1 na direcção do deslocamento w são, respectivamente, k_{mw1} e k_{fw1} . É possível observar que o modelo proposto é capaz de considerar problemas não axisimétricos, ou seja, fundações com valores de rigidez diferentes para as duas direcções x e sendo assim um modelo geral.

Considerando apenas deslocamentos u e w , a ordem da matriz global de rigidez será incrementada em duas vezes o número de fundações, conforme mostrado pela matriz da equação 3.137, para um sistema com dois mancais e duas fundações.

$$\mathbf{K} = \begin{matrix} & \begin{matrix} u_1 & w_1 & \cdots & u_n & w_n & \cdots & u_{n+1} & w_{n+1} & u_{n+2} & w_{n+2} \end{matrix} \\ \begin{matrix} u_1 \\ w_1 \\ \vdots \\ u_n \\ w_n \\ \vdots \\ u_{n+1} \\ w_{n+1} \\ u_{n+2} \\ w_{n+2} \end{matrix} & \left[\begin{array}{cccccccccc} k_{mu1} & & & & & & -k_{mu1} & 0 & 0 & 0 \\ & k_{mw1} & & & & & 0 & -k_{mw1} & 0 & 0 \\ & & \ddots & & & & \vdots & & -k_{mu2} & \\ & & & k_{mu2} & & & 0 & 0 & 0 & -k_{mw2} \\ & & & & k_{mw2} & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & \vdots & & & \ddots & \vdots & & & \\ -k_{mu1} & 0 & & 0 & 0 & & k_{mu1} + k_{fu1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_{mw1} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & k_{mw1} + k_{fw1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & -k_{mu2} & 0 & & 0 & 0 & k_{mu2} + k_{fu2} & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & -k_{mw2} & & 0 & 0 & 0 & k_{mw2} + k_{fw2} \end{array} \right]_{n+4 \times n+4} \end{matrix} \quad .3.137$$

Considera-se o amortecimento intrínseco do veio nulo, então admite-se amortecimento apenas nos graus de liberdade referentes aos mancais e à fundação. Na equação 3.138 é apresentada a matriz de amortecimento relacionada com o veio, mancais e fundação.

$$\mathbf{C} = \begin{matrix} & \begin{matrix} \dot{u}_1 & \dot{w}_1 & \cdots & \dot{u}_n & \dot{w}_n & \cdots & \dot{u}_{n+1} & \dot{w}_{n+1} & \dot{u}_{n+2} & \dot{w}_{n+2} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \dot{u}_1 \\ \dot{w}_1 \\ \vdots \\ \dot{u}_n \\ \dot{w}_n \\ \vdots \\ \dot{u}_{n+1} \\ \dot{w}_{n+1} \\ \dot{u}_{n+2} \\ \dot{w}_{n+2} \end{matrix} & \left[\begin{array}{cccccccccc} c_{mu1} & & & & & & -c_{mu1} & 0 & 0 & 0 \\ & c_{mw1} & & & & & 0 & -c_{mw1} & 0 & 0 \\ & & \ddots & & & & \vdots & & -c_{mu2} & \\ & & & c_{mu2} & & & 0 & 0 & 0 & -c_{mw2} \\ & & & & c_{mw2} & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & \vdots & & & \ddots & \vdots & & & \\ -c_{mu1} & 0 & & 0 & 0 & & c_{mu1} + c_{fu1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c_{mw1} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{mw1} + c_{fw1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & -c_{mu2} & 0 & & 0 & 0 & c_{mu2} + c_{fu2} & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & -c_{mw2} & & 0 & 0 & 0 & c_{mw2} + c_{fw2} \end{array} \right]_{n+4 \times n+4} \end{matrix} \quad , \quad 3.138$$

Os coeficientes c_{mu1} e c_{mw1} são relativos ao amortecimento dos mancais, c_{fu1} e c_{fw1} são os coeficientes de amortecimento da fundação, nas direcções dos deslocamento u e w respectivamente.

A fundação não exerce influência nenhuma sobre a matriz giroscópica do sistema, logo, esta deve apenas ser ampliada com linhas e colunas nulas para que tenha a mesma dimensão das demais matrizes, possibilitando a resolução do problema de valores e vectores próprios.

A matriz de massa, por sua vez, tem seu tamanho aumentado devido à inserção da massa da fundação somente nos nós relativos à fundação, m_{f1} relativa à massa da fundação sob o primeiro mancal e m_{f2} para o segundo mancal. Por exemplo, tomando-se apenas os graus de liberdade relativos ao eixo x , a matriz de massa relativa à fundação do primeiro mancal e que será adicionada na matriz global é dada por

$$\mathbf{M}_{ad} = \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 & \ddot{u}_{n+1} \\ 0 & 0 \\ 0 & m_{f1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_{n+1} \end{bmatrix} . \quad 3.139$$

Para a direcção de deslocamento w a matriz de massa de adição fica idêntica à mostrada para a direcção x . Portanto, a matriz de massa global para a estrutura em estudo fica na forma

$$\mathbf{M} = \begin{matrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{w}_1 \\ \vdots \\ \ddot{u}_n \\ \ddot{w}_n \\ \vdots \\ \ddot{u}_{n+1} \\ \ddot{w}_{n+1} \\ \ddot{u}_{n+2} \\ \ddot{w}_{n+2} \end{matrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 & \ddot{w}_1 & \cdots & & \ddot{u}_{n+1} & \ddot{w}_{n+1} & \ddot{u}_{n+2} & \ddot{w}_{n+2} \\ M & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & A & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & S & & & & \vdots & \\ & & & S & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & A & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & m_{f1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & m_{f1} & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{f2} \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{f2} \end{bmatrix}_{n+4 \times n+4}, \quad 3.140$$

3.4 Modelos de Interferência entre Pacote de Chapas e Veio

Quando um disco é inserido em um veio, geralmente considera-se apenas inércia deste componente no sistema e a rigidez não é modificada. No entanto no caso de máquinas eléctricas componentes chamados de pacote de chapas ou massa rotórica, como descrito na secção 2.2, não podem ser apenas modelados como inércias. Isto se deve ao fato do ajuste entre o pacote de chapas e o rotor, o qual em grande parte das máquinas possui elevada interferência, logo um aumento de rigidez do sistema é gerado. Alguns modelos vêm sendo criados para adicionar ao cálculo dos parâmetros do rotor o efeito da interferência, neste trabalho dois modelos são apresentados.

3.4.1 Diâmetro equivalente do veio

Uma teoria para considerar o efeito da inserção de discos com ajuste de interferência em veios é apresentada por Lalanne e Ferraris [5]. A proposta do autor é a correcção dos diâmetros do veio na região onde o disco está inserido, pois considera que o disco comprimindo o veio provoca um aumento da rigidez na secção a qual está inserido. Essa correcção consiste no acréscimo do valor da espessura do disco em seu diâmetro (Figura 14).

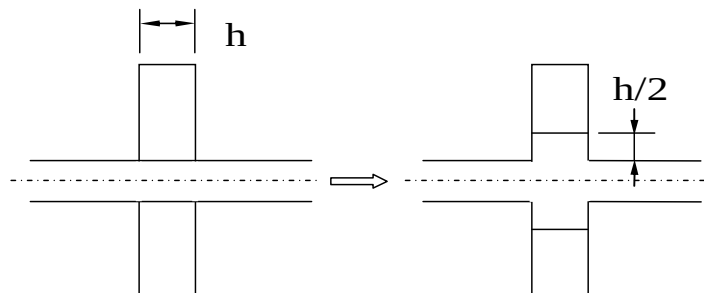


Figura 14 – Modelo de como seria o diâmetro equivalente do eixo para considerar a influência da montagem do pacote de chapas por interferência no veio.

O aumento no diâmetro deixa a secção do veio em que o disco está inserido mais rígida, o que simula a inserção do disco com interferência ao veio. Criado através de ajuste de resultados experimentais, este modelo apresenta melhores resultados quando se têm discos pouco espessos, pois para discos muito espessos a secção fica demasiado rígida e os erros elevados.

3.4.2 Propriedades equivalentes

Como uma forma auxiliar de considerar os efeitos da alteração na rigidez do veio devido a inserção do pacote de chapas um modelo foi desenvolvido dentro do acordo de cooperação entre o LaVib – Laboratório de Vibrações da Universidade Tecnológica Federal do Paraná e a empresa WEG Indústrias Eléctricas através dos convénios: Termo de cooperação 01/2004, 02/2006 e o Projecto FINEP 4931/06.

O modelo consiste na hipótese de que todas as propriedades de inércia e rigidez do disco serão unidas ao veio, fazendo com que a região, na qual fisicamente os componentes estão em contacto as propriedades sejam equivalentes (propriedades consideradas: módulo de elasticidade E , densidade de massa ρ , momento de inércia I , área de secção transversal S e módulo de elasticidade transversal G). Logo, têm-se as seguintes relações:

$$(\rho S)_{eq.} = \rho_{veio} S_{veio} + \rho_{disco} S_{disco}, \quad 3.141$$

$$(\rho I)_{eq.} = \rho_{veio} I_{veio} + \rho_{disco} I_{disco}, \quad 3.142$$

$$(EI)_{eq.} = E_{veio} I_{veio} + E_{disco} I_{disco} \quad 3.143$$

e

$$(GS)_{eq.} = G_{veio} S_{veio} + G_{disco} S_{disco}. \quad 3.144$$

Para o caso da existência de um terceiro elemento no conjunto veio - disco, o procedimento é realizado da mesma maneira, apenas somando mais um termo às propriedades equivalentes.

3.5 Torção

Vibração torsional pode ser definida como movimento oscilatório angular em torno da sua linha de centro devido a um torque pulsante. As amplitudes deste tipo de vibração dependem da relação entre a inércia e a rigidez torsional.

A vibração torsional apresenta modos desacoplados dos modos flexionais, isto é, um não apresenta influência sobre o outro. Além disto, como as frequências de vibração torsional são geralmente superiores as frequências devido à flexão não é comum o seu estudo. Contudo, o amortecimento dos modos de vibração torsional é pequeno ou praticamente desprezável, é se existir a excitação do modo pode ocorrer a falha súbita do equipamento. Para evitar este tipo de problema, para equipamentos que operam em elevadas rotações pode-se adicionar absorvedores de vibração torsionais, como apresentado por Ceccon [11] que propõem absorvedores torsionais viscoelásticos ótimos para rotores.

Neste trabalho é apresentada uma metodologia para a análise torsional de rotores. Seguindo e mesma metodologia apresentada para a análise flexional, através de um elemento finito com dois nós por elemento (Figura 9), porém, considera-se para esta análise apenas graus de liberdade de rotação ϕ em torno do eixo y .

Utilizando funções de forma linear para interpolar os graus de liberdade de rotação do elemento finito pode-se escrever a energia potencial de deformação como:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L GJ \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 dy. \quad 3.145$$

Sendo J o momento polar de inércia, e para uma secção transversal constante tem-se o momento de inércia de massa, dado por

$$I_\phi = \rho J. \quad 3.146$$

Escrevendo na forma matricial então pode-se obter

$$U = \frac{GJ}{2L} \begin{Bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix}, \quad 3.147$$

sendo que a parcela que corresponde a matriz de rigidez a torção é da forma:

$$K_t = \frac{GJ}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad 3.148$$

Na análise da energia cinética, dada por:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L I_\phi (\dot{\phi})^2 dy, \quad 3.149$$

Escrita na forma matricial como:

$$T = \frac{\rho J L}{12} \begin{Bmatrix} \dot{\phi}_1 & \dot{\phi}_2 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \end{Bmatrix}. \quad 3.150$$

Pode-se então determinar a parcela correspondente a matriz de massa, que é dada pela equação 3.151.

$$M_t = \frac{\rho J L}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad 3.151$$

Estas matrizes de massa e rigidez formam o sistema de equações, e de acordo com a discretização do sistema tem-se um problema de ordem maior ou menor como se queira. O problema é resolvido considerando um sistema sem amortecimento, e para análise de vibração livre, pode-se resolver um problema de valores e vectores próprios generalizado para se obter os modos de vibrar e as frequências naturais. Uma simulação numérica é apresentada na secção de resultados e comparações.

4. METODOLOGIA DE CÁLCULO

Para fazer uma análise modal numérica de um rotor, ou seja, determinar os parâmetros modais, uma metodologia de cálculo que busca determinar os valores e os vectores próprios do sistema é utilizada. Esses parâmetros são as principais fontes de informação com as quais são calculados o diagrama de Campbell, as curvas de resposta no domínio da frequência, a resposta no domínio do tempo (órbitas) e os modos naturais.

Algumas definições importantes, e muito utilizadas em análise dinâmica de rotores:

- Velocidade crítica de flexão/rotação crítica: é aquela na qual a máxima flexão do rotor é significativamente maior do que os deslocamentos dos mancais.
- Velocidade crítica de modo de corpo rígido/frequência natural de corpo rígido: é a velocidade do rotor na qual o máximo deslocamento do mancal é significativamente maior do que a flexão do rotor.
- Modo principal de flexão do rotor/modo de vibrar: para sistemas rotor - mancal não amortecidos é a forma que o rotor assume em qualquer uma das rotações críticas de flexão.

4.1 Solução das Equações do Movimento

Através das matrizes obtidas com o método dos elementos finitos pode-se obter o sistema de equações:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + (\mathbf{C} + \mathbf{G}(\Omega))\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{f}(t), \quad 4.1$$

sendo $\mathbf{q}$ o vector de coordenadas generalizadas, que engloba todos os graus de liberdade do sistema, conforme equação 3.74. Assim procede-se para o cálculo dos parâmetros modais considerando um problema de vibração livre, ou seja, desconsiderando os esforços generalizados $\mathbf{f}(t)$.

Através da mudança de variáveis do espaço de configurações para o espaço de estado pode-se escrever:

$$\mathbf{y}(t)_{2n \times 1} = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}(t)_{n \times 1} \\ \dot{\mathbf{q}}(t)_{n \times 1} \end{Bmatrix}, \quad 4.2$$

logo,

$$[\mathbf{C} + \mathbf{G} \quad \mathbf{M}]_{n \times 2n} \dot{\mathbf{y}}(t)_{2n \times 1} + [\mathbf{K} \quad \mathbf{0}]_{n \times 2n} \mathbf{y}(t)_{2n \times 1} = \mathbf{f}(t)_{n \times 1} \quad 4.3$$

e

$$[\mathbf{M} \quad \mathbf{0}]_{n \times 2n} \dot{\mathbf{y}}(t)_{2n \times 1} + [\mathbf{0} \quad -\mathbf{M}]_{n \times 2n} \mathbf{y}(t)_{2n \times 1} = \mathbf{0}_{n \times 1}. \quad 4.4$$

Assim o sistema de equações toma a forma:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{C} + \mathbf{G} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{AA} \quad 2n \times 2n} \dot{\mathbf{y}}(t)_{2n \times 1} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{M} \end{bmatrix}}_{\mathbf{BB} \quad 2n \times 2n} \mathbf{y}(t)_{2n \times 1} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}(t) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}_{2n \times 1}, \quad 4.5$$

na qual $\mathbf{y}(t)$ é a variável de estado, $\mathbf{0}$ é a matriz quadrada de zeros com dimensão n . A mudança de variáveis do espaço de configurações para o espaço de estado é necessária tendo em vista que o amortecimento do sistema não é proporcional, logo deve ser considerado nos cálculos dos parâmetros modais. Na sequência, pode-se a partir das matrizes $\mathbf{AA}$ e $\mathbf{BB}$ resolver um problema de valores (λ) e vectores próprios (Φ) generalizado (equação 4.6).

$$-i\lambda \mathbf{AA}\Phi = \mathbf{BB}\Phi, \quad 4.6$$

Como resultado do problema de valores e vectores próprios, podem ser extraídas as frequências naturais do problema. Porém, como existe uma dependência do problema com a frequência de rotação devido a matriz giroscópica, o problema de valores e vectores próprios deve ser calculado para cada frequência de rotação, dando assim origem ao diagrama de Campbell ou diagrama frequência velocidade, (Figura 15). Na prática, em análises numéricas o problema é resolvido em um número discreto de pontos, e as frequências interpoladas ao longo da frequência de rotação.

O diagrama apresentado na Figura 15 é resultado dos cálculos realizados para uma rotor de configuração idêntica à apresentada por Lalanne e Ferraris [5], (Figura 16). Uma série de outras informações importantes e referentes ao rotor em estudo podem ser extraídas do diagrama. Pode-se determinar a influência do efeito giroscópico no modo de vibrar, pois quanto maior a variação no módulo da frequência natural ao longo da rotação, maior o efeito giroscópico sobre esta frequência. Através da análise dos valores das frequências naturais para rotação nula é possível verificar o comportamento dos coeficientes de rigidez dos mancais, pois, os pontos de partida das linhas das frequências que se distanciam deve ser único para mancais simétricos.

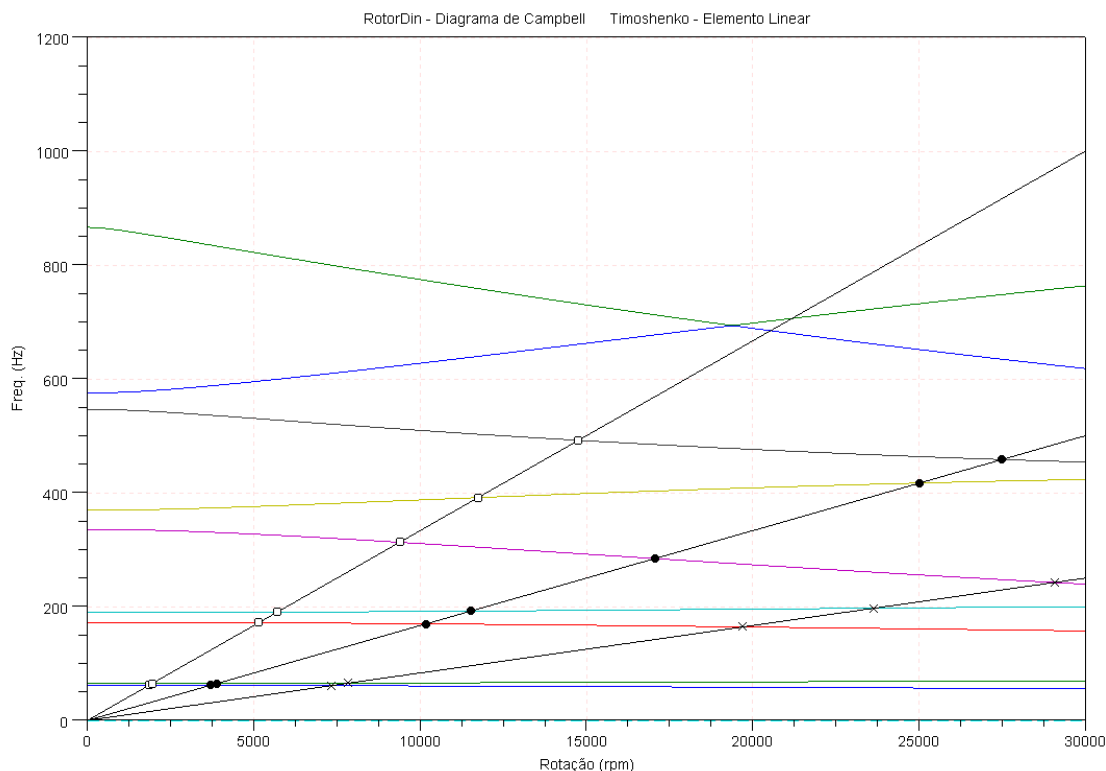


Figura 15 – Diagrama de Campbell para o esquema, Figura 16.

No diagrama de Campbell geralmente são estabelecidas linhas rectas com única inclinação que determinam relações entre frequência de rotação e frequência de excitação, estas linhas são úteis para determinar as rotações críticas do sistema.

As linhas do diagrama de Campbell representam as frequências naturais do sistema, cada uma respectiva a um modo de vibrar, podendo ser interpretadas de maneira crescente ao longo do eixo das abcissas em relação ao número de modos. Pode-se observar a variação das frequências naturais de acordo com a frequência de rotação. Outra informação importante obtida do diagrama é a influência do efeito giroscópico nos modos de vibrar, fenómeno responsável por dobrar o número de frequências naturais em relação ao sistema estático. Mancais de filme de óleo também geram dependência do sistema em relação a frequência de rotação, porém, neste caso além da matriz giroscópica as matrizes de rigidez e amortecimento do sistema do sistema, também são dependentes da frequência de rotação.

As linhas diagonais representam as excitações actuantes no sistema, que possuem frequência proporcional à frequência de rotação Ω_{rpm} . Do cruzamento destas linhas com as linhas das frequências naturais, obtém-se as chamadas rotações críticas. As excitações proporcionais à frequência de rotação, mais comumente consideradas são: o desalinhamento, o desequilíbrio e

as instabilidades nos mancais de filme de óleo, que correspondem às relações, $2\Omega_{rpm}$, $1\Omega_{rpm}$ e $0,5\Omega_{rpm}$ respectivamente.

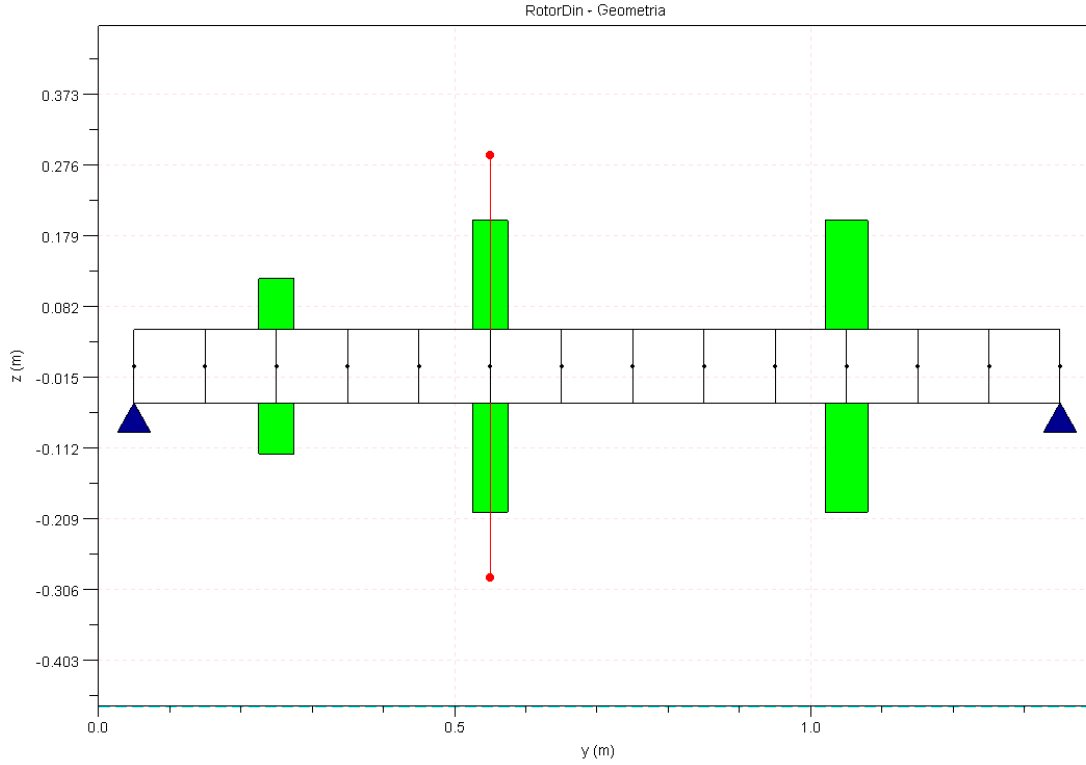


Figura 16 – Esquema do rotor (Lalanne e Ferraris [5]).

Ainda considerando o problema de valores e vectores próprios, pode-se obter para cada valor próprio (frequência natural), seu respectivo vector próprio que representa a forma modal de vibrar da estrutura. A partir destes modos, considerando uma excitação harmónica, procede-se a normalização dos modos em relação a matriz $\mathbf{AA}$ (equação 4.7).

$$\overline{\Phi} = \frac{\Phi}{\sqrt{\mathbf{AA}_{ii}}} . \quad 4.7$$

Sendo $\overline{\Phi}$ o vector próprio a esquerda normalizado e $\overline{\Psi}$ o vector próprio a direita normalizado. Voltando a equação 4.5, pré multiplicando-a pelo vector próprio a direita normalizado transposto, no domínio da frequência pode-se escrever:

$$\overline{\Psi}^T_{2n \times 2n} (i\Omega \mathbf{AA}_{2n \times 2n} + \mathbf{BB}_{2n \times 2n}) \mathbf{Y}(\Omega)_{2n \times 1} = \mathbf{F}(\Omega)_{2n \times 1} , \quad 4.8$$

Fazendo uma modificação de coordenadas

$$\mathbf{Y}(\Omega)_{2n \times 1} = \overline{\Phi}_{2n \times 2n} \mathbf{p}(\Omega)_{2n \times 1}, \quad 4.9$$

Tem-se que

$$i\Omega[\mathbf{I}]_{2n \times 2n} \mathbf{p}(\Omega)_{2n \times 1} + \boldsymbol{\lambda}_{2n \times 2n} \mathbf{p}(\Omega)_{2n \times 1} = \overline{\Psi}^T \mathbf{F}(\Omega)_{2n \times 1}, \quad 4.10$$

Sendo $[\mathbf{I}]$ a matriz identidade, $\boldsymbol{\lambda}$ a matriz diagonal dos valores próprios e $\mathbf{F}(\Omega)$ o vector das amplitudes das forças generalizadas harmónicas. Considerando o princípio da ortogonalidade dos modos em relação às matrizes que os geraram, passando o sistema do espaço de estado, para o espaço modal do espaço de estado tem-se a resposta do sistema:

$$\mathbf{Y}(\Omega) = \overline{\Phi}(i\Omega\mathbf{I} + \boldsymbol{\lambda})^{-1} \overline{\Psi}^T \mathbf{F}(\Omega), \quad 4.11$$

5. ANÁLISE ESPECTRAL

Numa cadeia produtiva várias são as etapas em que o produto ultrapassa até a sua conclusão, e como os processos de fabrico não são perfeitos, o produto final pode apresentar defeitos, tais como desequilíbrio, desalinhamento, não homogeneidade do material, folgas e componentes defeituosos. Estes defeitos em componentes rotativos geram forças que podem excitar o rotor, mas assim como defeitos do processo de fabrico, existem componentes de transmissão de potência que podem contribuir para o aumento das vibrações da estrutura, assim como correias e engrenagens. Além destes factores o mau dimensionamento das chumaceiras e rolamentos também geram excitações no espectro de frequências e podem excitar a estrutura aumentando as amplitudes de vibração.

As frequências características de um motor eléctrico de indução trifásico que podem ser visualizadas num espectro de frequência segundo Cardoso [26] são:

- Componente relacionada com a velocidade de rotação e seus harmónicos;
- Uma e duas vezes frequência da rede eléctrica local;
- Frequência de rotação do campo electromagnético;
- Frequência de escorregamento: velocidade de rotação do campo electromagnético menos a velocidade de rotação do rotor;
- Frequência de passagem dos pólos: frequência de escorregamento vezes o número de pares de pólos;
- Frequência de passagem de barras: quando se tem rotores em que os elementos condutores são barras, esta frequência é dada pelo número de barras do rotor vezes a velocidade de rotação do rotor;
- Frequência de passagem de cavas, que é igual ao número de ranhuras do estator vezes velocidade de rotação do rotor.

Apesar de estarem bem definidas as frequências de excitação de um sistema rotativo, o estudo de um espectro de frequências real não é uma tarefa fácil e exige uma boa experiência do analista. Os erros e ruídos que surgem durante as medições podem induzir erros na interpretação das componentes de excitação, além de que as excitações aparecem com seus múltiplos que podem encobrir outros problemas existentes na máquina.

5.1 Excitação Múltipla da Frequência de Rotação por Defeitos de Fabrico

Problemas no fabrico ou na montagem do estator, assim como a sua inserção na carcaça podem originar um componente excêntrico. Esta excentricidade produz uma variação no entre ferro, que por sua vez produz uma variação na força magnética no rotor. Este defeito gera picos no espectro de frequência em uma ou duas vezes a frequência de rotação, um espectro teórico pode ser observado na Figura 17.

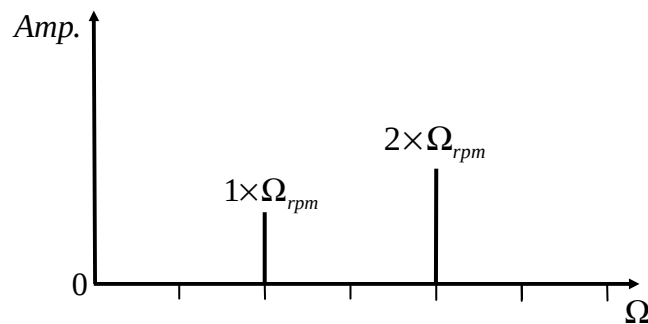


Figura 17: Espectro de frequência teórico para excitação proporcionais a 1 e 2 vezes a frequência de rotação do rotor.

A excentricidade de rotores produz um efeito semelhante ao estator excêntrico, com excepção de um pico no espectro de frequência correspondente à frequência de passagem dos pólos. Gradientes de temperatura muito severos são encontrados em rotores devido ao desequilíbrio na distribuição da corrente eléctrica. Este efeito gera uma curvatura não simétrica no rotor e aparece no espectro de frequência como um desequilíbrio, ou seja, com pico em uma vez a frequência de rotação.

Para rotores que possuem como elementos condutores barras metálicas podem surgir no espectro de frequência componentes que correspondem às excitações provocadas por barras fissuradas ou soltas. O espectro de frequências gerado por barras fissuradas apresenta bandas laterais à frequência de passagem dos pólos. Para barras defeituosas a amplitude muda suavemente para cima e para baixo ao dobro da frequência de escorregamento, fenómeno chamado de batimento. As barras, o rotor, as ligações ou os enrolamentos de um motor eléctrico soltos, assim como o empenamento térmico gerado pela falta de isolamento eléctrico entre as

chapas que compõem a massa rotórica, geram componentes que podem ser observadas no espectro de frequências (SPECMAN [15]).

Pode-se observar através destes dados que as causas de vibração em motores eléctricos são muitas e dependem da qualidade do processo de fabrico, assim pode-se concluir que um enfoque no controle de vibração (Ribeiro [16]) e no projecto do rotor, pode ser mais viável e eficiente do que um controle severo da qualidade e tolerâncias dimensionais muito estreitas para o fabrico.

Como o desequilíbrio, o desalinhamento e a instabilidade nos mancais são os três principais tipos de excitação harmónica presentes em rotores, no diagrama de Campbell são geralmente mostradas rectas proporcionais em uma, duas e meia vez a velocidade de rotação. A análise deste diagrama ajuda muito no estudo do espectro de frequência.

5.2 Excitação Múltipla da Frequência de Rotação por Componentes Acoplados ao Rotor ou Devido a Falhas em Rolamentos

Vários defeitos podem ser estudados, controlados e eliminados através de um estudo do espectro de frequência da máquina, a maioria dos defeitos geram picos com amplitudes variadas mas com frequências características, que são proporcionais a velocidade de rotação ($n \times \Omega_{rpm}$) (Muszynska [27]).

A ventoinha é uma parte do motor eléctrico que pode gerar componentes de excitação num espectro de frequência se estiver avariada. No espectro o pico correspondente a excitação gerada pelo componente será proporcional ao número de pás vezes a velocidade de rotação (SPECMAN [15]).

Para rotores apoiados em mancais de rolamento, as principais componentes de excitação que podem surgir no espectro de frequências são devido a imperfeições da (os): pista interna, pista externa, gaiola e (ou) elementos rolantes. A proporcionalidade entre a frequência de excitação e a velocidade provocada por imperfeições na pista interna do rolamento é dada por:

$$n = \frac{1}{2} N_e \left(1 + \frac{d}{D} \cos \alpha \right). \quad 5.1$$

Sendo n a relação de proporção entre a velocidade de rotação Ω_{rpm} e a frequência de excitação no espectro, N_e o número de elementos rolantes, d o diâmetro do elemento rolante, D a distância entre dois centros de elementos rolantes opostos no rolamento e α o ângulo de

contacto. Para excitação provocada por imperfeições na pista externa, no elemento rolante e na gaiola, as relações são dadas pelas equações 5.2, 5.3 e 5.4 respectivamente.

$$n = \frac{1}{2} N_e \left(1 - \frac{d}{D} \cos \alpha \right) \quad 5.2$$

$$n = \frac{1}{2} \frac{d}{D} \left[1 + \left(\frac{d}{D} \right)^2 \cos^2 \alpha \right] \quad 5.3$$

$$n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{d}{D} \cos \alpha \right) \quad 5.4$$

Em situações em que componentes para transmissão de potência estão acoplados ao rotor, como caixas de engrenagens, polias ou correias, novas frequências podem ser observadas no espectro. Para o caso de transmissões com engrenagens esta nova frequência é dada pela velocidade do motor multiplicada pela relação de transmissão (número de dentes do pinhão de entrada sobre número de dentes do pinhão de saída). Para transmissão por correias a análise é semelhante, porém a relação de transmissão é calculada através da divisão entre o diâmetro da polia de entrada pelo diâmetro da polia de saída (SPECMAN [15]).

6. RESULTADOS E COMPARAÇÕES

Para resolver o sistema de equações, obtido através do método dos elementos finitos e aplicação das equações de Lagrange, ou princípio dos trabalhos virtuais, um código computacional existente teve sua linguagem de programação alterada, sendo adaptado a realidade da WEGeuro.

6.1 Código Computacional ROTORDYN

O código computacional chamado ROTORDYN se baseia na metodologia de cálculo apresentada neste trabalho. O código já existente, ROTORDIN, foi aprimorado e algumas funções adicionadas. O programa foi inicialmente desenvolvido no Laboratório de Vibrações da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, sob termos de cooperação com a WEG Indústria Elétrica e Projeto PROMOVE, realizado em acordo com a FINEP – Financiadora de Estudo e Projetos.

O código foi desenvolvido utilizando o programa livre Scilab 5.0. Este programa de cálculos permite o desenvolvimento de funções em linguagem de programação de alto nível, o que facilita a programação, e ainda apresenta funções prontas, desenvolvidas por diversos colaboradores para a solução de problemas de valores e vectores próprios, construção de gráficos e operações matriciais.

No actual código computacional, aprimorado neste projecto, pode-se calcular resposta em frequência e diagrama de Campbell para mancais com coeficientes de rigidez e amortecimento variáveis. Estas funções foram programadas para adequar a rotina de cálculos ao projecto de motores com rotores flexíveis, ou que utilizam mancais de filme de óleo. Para a análise torsional uma função foi criada, a fim de obter os parâmetros modais do sistema, assim como para a análise flexional.

As excitações externas harmónicas também podem ser consideradas no modelo do rotor, assim como as alterações provocadas pela existência de força magnética e força axial.

6.2 Entrada de Dados

Uma entrada de dados através do programa Excel foi desenvolvida durante o projecto. A entrada de dados é realizada através de uma folha de cálculo. Após preenchidos todos os campos necessários uma rotina em Visual Basic é executada para gerar um ficheiro de formato

texto *.txt na pasta que contém todas as funções de cálculo. Esta entrada possibilita de maneira simples e funcional o usuário inserir todos os parâmetros necessários para os cálculos desejados. Uma parte de um ficheiro de exemplo é mostrada na Figura 18. Pode-se observar as funções para entrada de dados para a discretização do rotor, geometria e propriedades do veio, dos discos, das costelas e mancais com propriedades constantes.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	
4	DESCRICAO										
5	Motor BFGS 400LJ 4P										
6											
7	Conferir sempre número de seções com a quantidade e comprimento total do veio										
8	QtdSecoes	Comprimo	Ndivisoes	Max_Divis	Relac_L/D	 Discretização					
9	000000008	1.8250000	000000004	000000003	000000005						
10											
11	Posições devem conferir com a quantidade										
12	PosEscrto	DiamExtno	DiamIntno	Mod_Young	CfPoisson	Densidade	Div	 Geometria do veio			
13	210.00E-3	110.00E-3	0.0000000	210.00E+9	0000000.3	7850.0000					
14	311.00E-3	120.00E-3	0.0000000	210.00E+9	0000000.3	7850.0000					
15	409.00E-3	140.00E-3	0.0000000	210.00E+9	0000000.3	7850.0000					
16	1380.00E-3	160.00E-3	0.0000000	210.00E+9	0000000.3	7850.0000					
17	1462.00E-3	170.00E-3	0.0000000	210.00E+9	0000000.3	7850.0000					
18	1569.00E-3	140.00E-3	0.0000000	210.00E+9	0000000.3	7850.0000					
19	1745.00E-3	120.00E-3	0.0000000	210.00E+9	0000000.3	7850.0000					
20	1825.00E-3	099.00E-3	0.0000000	210.00E+9	0000000.3	7850.0000					
21	SecCostel	NbrCostel	Larg_Alma	AlurAlma	LargFlang	Alt_Flang	 Costelas				
23	0.0000000										
24											
25	QtdDiscos										
26	000000004										
27											
28	PosDiscos	DiamExtno	Comprimo	Densidade	DiamIntno	 Discos					
29	636.25E-3	358.90E-3	212.50E-3	5762.0000	160.00E-3						
30	0.8487500	358.90E-3	212.50E-3	5762.0000	160.00E-3						
31	1.0612500	358.90E-3	212.50E-3	5762.0000	160.00E-3						
32	1.2737500	358.90E-3	212.50E-3	5762.0000	160.00E-3						
33											
34	QtdMncals	TipolMncal	 Mancais								
35	000000002	000000001									
36											
37	Pos_Mncal	Rigid_Kxx	Rigid_Kxz	Rigid_Kzz	Rigid_Kxy	Amort_cxx	Amort_cxz	Amort_czz	Amort_cyx	PesoMncal	
38	282.00E-3	1.000E+10	0.0000000	1.000E+07	0.0000000	1.000E+01	0.0000000	1.000E+01	0.0000000	0.0000000	
39	1.5980000	1.000E+10	0.0000000	1.000E+07	0.0000000	1.000E+01	0.0000000	1.000E+01	0.0000000	0.0000000	

Figura 18: Folha de cálculo para entrada de dados do ROTORDYN.

Pode-se observar também na Figura 19 a entrada de dados para o cálculo do diagrama de Campbell, propriedades do desequilíbrio do rotor, de outras forças externas harmônicas, opções para o cálculo das formas modais de vibrar e da resposta no tempo e em frequência. Uma tabela contendo as propriedades de mancais variáveis com a frequência de rotação, além dos vectores com os esforços axiais e a força magnética nas secções também são inseridos na folha de cálculo para a inserção dos dados. Cada opção de cálculo pode ser escolhida para que sua respectiva função seja executada no código, a selecção é realizada através de letras (variáveis *string*), da seguinte maneira: diagrama de Campbell (C), rotações críticas à flexão, análise torsional (W), modos de vibrar de flexão (M), resposta no tempo (T) e respostas em frequência para as excitações do tipo desequilíbrio (F) ou externa harmónica (Y).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
40										
41	CampInic	CampFinal	Camp_Divs	Num_Crite	Pont_Intg	CPMSF	Diagrama de Campbell			
42	0.00000000	1.500E+04	00500.000	000000010	000000002					
43										
44	Dados dos desequilíbrios e para FRF									
45	Qtd_Deseq	RotIniFRF	RotFimFRF	Divis_FRF	Qtd_Modos	Resposta para: Rotacao_conste	_Rotacao_	FreIniFRF	FreFimFRF	Divis_FRF
46	000000002	1.0000000	1.500E+04	2.000E+03	000000010		4000.0000	0.0000000	5.000E+02	4.000E+03
47										
48	Pos_Deseq	Massa_Exc	Fase_Desq							
49	0.5300000	313.00E-6	0.0000000							
50	1.3800000	182.00E-6	0.0000000							
51										
52	QtdForças									
53	000000002									
54										
55	Pos_Forca	Mod_forca								
56	0.5300000	1.0000000								
57	1.3800000	1.0000000								
58										
59	NumroFRFs	Num_Modos	PosTmpRsp							
60	1.0000000	8.0000000	1.0000000							
61										
62	Posio_FRF	GdLib_FRF								
63	0.7843750	1.0000000								
64										
65	FuncaoExc	Teoria_Ut	FundacaoE							
66	LECF	3.0000000	0.0000000							
67										
68	Rigid_Kxx	Rigid_Kzz	Amort_cxx	Amort_czz	PesoMncal					
69										
70	ForoAxial									
71	0									
72										
73	ConsFoMgn	ForoMagnt								
74	0	0								
75										
76	NumRotacs									
77	000000020									
78										
79	_Rotacao_	Rigid_Kxx	Rigid_Kzz	Rigid_Kzz	Rigid_Kzz	Amort_cxx	Amort_czz	Amort_czz	Amort_czz	PesoMncal
80	500.00000	165927000	53469000	992020000	498235000	1890000.0	3980000.0	19181000	40470000.0	
81	1000.0000	166749000	32914000	772206000	448080000	10830000.0	19210000.0	84800000.0	19500000.0	
82	1500.0000	167056000	25213000	689863000	429292000	7560000.0	12640000.0	53760000.0	12820000.0	
83	2000.0000	167173000	22288000	658560000	422149000	5770000.0	9430000.0	39530000.0	9560000.0	

Figura 19: Folha de cálculo para entrada de dados do ROTORDYN.

6.3 Comparação dos Resultados Numéricos com Dados da RENK

Com o objectivo de comparar os resultados calculados pelo código computacional desenvolvido, ROTORDYN, alguns estudos de caso são realizados. A primeira comparação apresentada neste trabalho é através dos diagramas de Campbell e das curvas de resposta calculadas e obtidas do Estudo do Motor BFN6 [28].

Os cálculos são realizados para um rotor com geometria semelhante, porém não se sabe o método utilizado para obter as curvas do estudo. No código computacional ROTORDYN, baseado no método dos elementos finitos, utiliza-se para o veio uma relação comprimentos pelo diâmetro (L/d) igual a 0,5, sendo que nas posições dos desequilíbrios, discos, mancais, forças externas e escalonamentos são adicionados nós independentemente desta relação. As posições e dimensões dos discos são apresentadas na Tabela 1. O material dos discos é considerado homogêneo, com módulo de elasticidade $E = 210[\text{GPa}]$, densidade volúmica $\rho = 7850[\text{kg/m}^3]$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$.

Tabela 1: Dimensões dos discos que simula o pacote de chapas.

Posição dos discos [mm]	Diâmetro externo [mm]	Diâmetro interno [mm]	Espessura [mm]
982,5	482,6	190	245
1227,5	482,6	190	245
1472,5	482,6	190	245
1717,5	482,6	190	245

O rotor é composto por veio maciço de dimensões mostradas na Tabela 2. As propriedades de módulo de elasticidade, coeficiente de Poisson e densidade volúmica são idênticas às dos discos.

Tabela 2: Dimensões do veio do rotor que compõem o motor BFN6 H2 SP14.

Posição final do escalonamento no veio [mm]	Diâmetro do escalonamento [mm]
170	80
480	100
595	160
1900	190
2114	200
2253	160
2618	100
2678	85

O esquema planificado do rotor descrito nesta secção é mostrado Figura 20. Os discos são apresentados em verde, o veio em branco, os mancais em azul e desequilíbrios em vermelho.

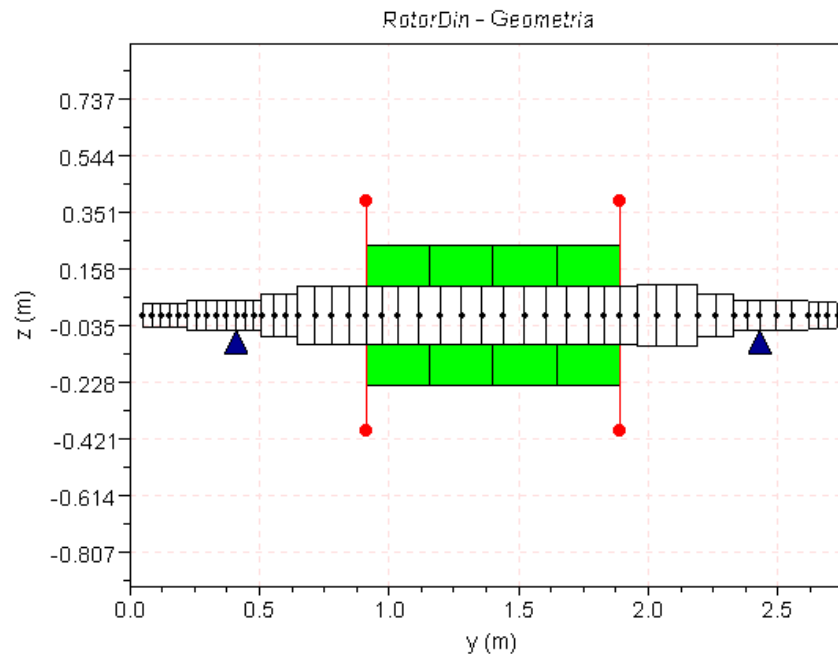


Figura 20: Rotor do motor BFN6 500 H2 SP14 discretizado com $L/d=0,5$. Mancais representados por triângulos azuis, veio por retângulos brancos, discos por retângulos verdes e desequilíbrios em vermelho.

Para o cálculo dos parâmetros modais do sistema considera-se os mesmos critérios e mancais utilizados pela RENK. Alterações dos parâmetros do rotor devido ao ajuste com interferência entre veio e pacote de chapas são desconsiderados, assim como a variação dos coeficientes de rigidez e amortecimento de acordo com a frequência de rotação. As propriedades dos mancais são obtidas da rotina SBCALC 3.0 (Figura 21), fornecida pela RENK para o cálculo de parâmetros de mancal de filme de óleo.

Figura 21: Interface da rotina de cálculos RENK para obter as propriedades dos mancais de filme de óleo.

A Tabela 3 apresenta os resultados com as posições dos mancais e seus coeficientes de rigidez e amortecimento, dos quais é desprezada a massa. Os modelos de mancais filme de óleo RENK seleccionados são: EFNLK e EFNLQ, pois são as mais utilizadas pela empresa WEGeuro. Comprimento 9[mm] e diâmetro 90[mm], com lubrificação por fluido ISO-VG 32, sem alterações na folga, temperatura do lubrificante de 40[°C], velocidade de projecto 10610[rpm] e rotação nominal de 3000[rpm]. Estes mancais apresentam carregamentos de 8,26[kN] e 8,05[kN] nos bordos de ataque e oposto ao ataque respectivamente.

Tabela 3: Propriedades dos mancais de filme de óleo a 3000 [rpm].

Coeficientes de Rigidez [N/m]				Posição [m]
k_{xx}	k_{xz}	k_{zz}	k_{zx}	
142525000	34919000	756050000	420066000	0,36
134940000	39250000	782649000	413385000	2,38
Coeficientes de Amortecimento [Ns/m]				Posição [m]
c_{xx}	c_{xz}	c_{zz}	c_{zx}	
318000	589000	2663000	598000	0,36
288000	565000	2636000	574000	2,38

Para a fundação a rigidez estrutural do mancal é considerada, e segundo a rotina SBCALC 3.0 possui coeficientes segundo mostra a Tabela 4. Note-se que o amortecimento e a massa são desprezados, pois não são fornecidos pela rotina de cálculos.

Tabela 4: Parâmetros da fundação da chumaceira EFNLQ 9-90.

k_{xx} [kN/m]	k_{zz} [kN/m]	c_{xx} [Ns/m]	c_{zz} [Ns/m]	massa[kg]
350000	480000	0	0	0

Na Figura 22 observa-se o diagrama de Campbell obtido do Estudo do Motor BFN6 [28]. Este diagrama é comparado com o resultado obtido pelo código ROTORDYN, mostrado na Figura 23 com o objectivo de validar os resultados obtidos pelo código computacional implementado.

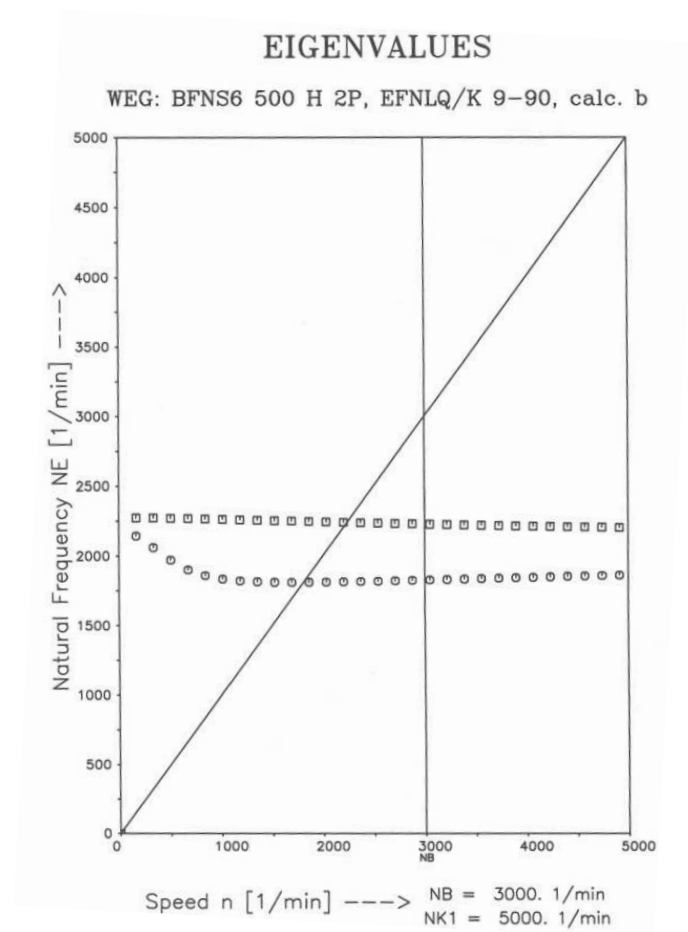


Figura 22: Diagrama de Campbell, dados do Estudo do Motor BFN6 [28].

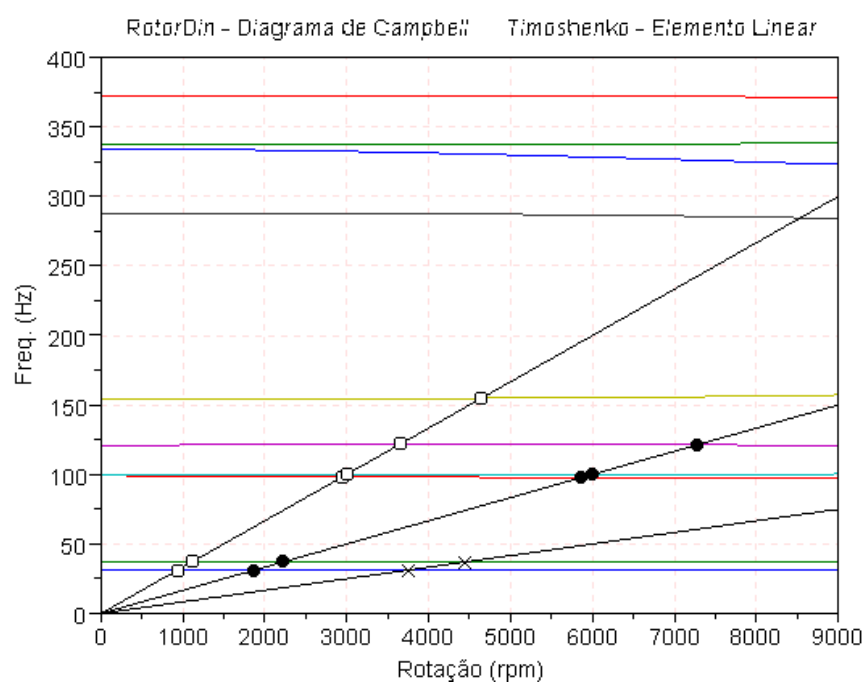


Figura 23: Diagrama de Campbell para o rotor em estudo do motor BNF6 500 H 2P, com mancais de filme de óleo, utilizando a teoria de viga de Timoshenko com 2 nós por elemento, funções de interpolação lineares.

Considera-se os pontos de desequilíbrio da Tabela 5 (Estudo do Motor BFN6 [28]) como excitações que resultam nas respostas mostradas na Figura 24, nesta curva podem ser observadas as respostas nas extremidades do veio (*Beginning of the shaft* e *End of the shaft*), mancais no ataque (1. *HA Bearings*) e lado oposto ao ataque (4. *HA Bearings*), e início e fim do pacote de chapas (2. *HA* e 3. *HA*).

Tabela 5: Dados para o desequilíbrio hipotético do rotor.

Local do desequilíbrio	1º Ponto – 860 [mm]	2º Ponto – 1840 [mm]
$m \cdot e$ [g mm]	313	182
ϕ [°]	0	0

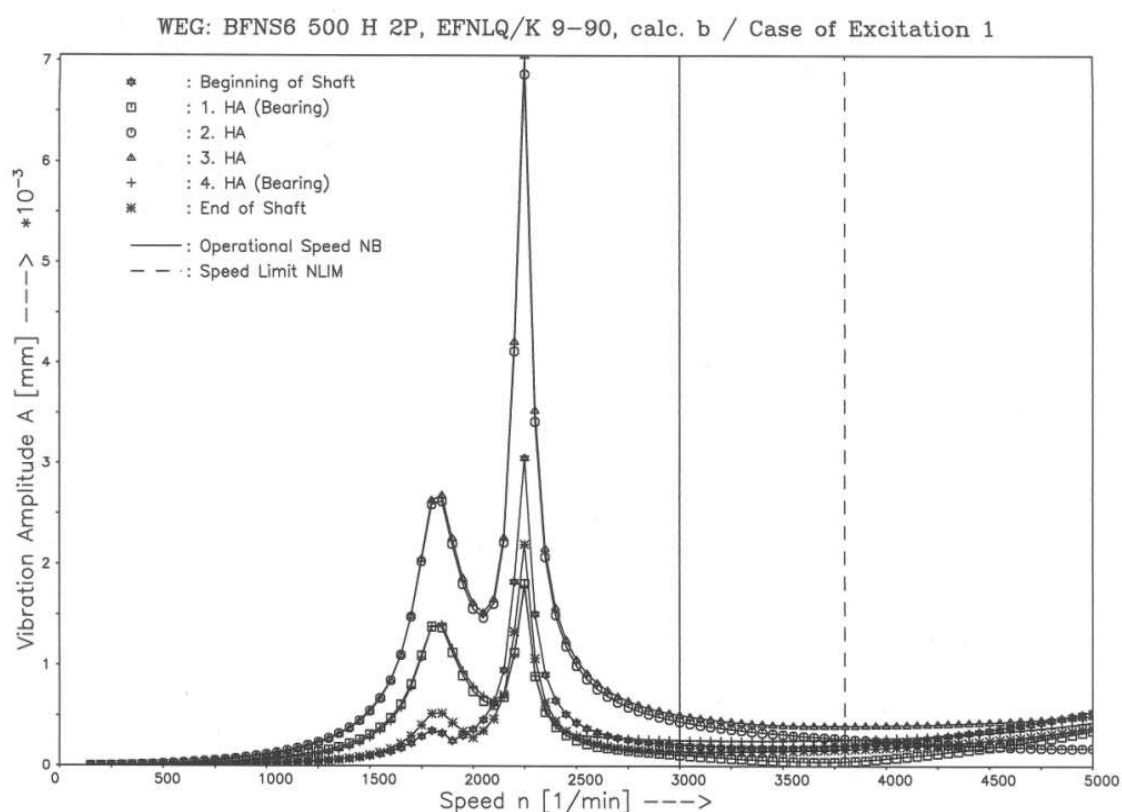


Figura 24: FRF para o rotor em estudo, com chumaceira EFNLC, obtida do estudo da RENK.

As curvas de resposta mostradas na Figura 25 representam os deslocamentos verticais, calculados a 860[mm] e 1840[mm] do bordo de ataque do veio. Considera-se no cálculo o rotor descrito nesta secção, as excitações da Tabela 5, a teoria de viga de Timoshenko com 2 nós por elemento e mancais com coeficientes constantes ao longo da frequência de rotação.

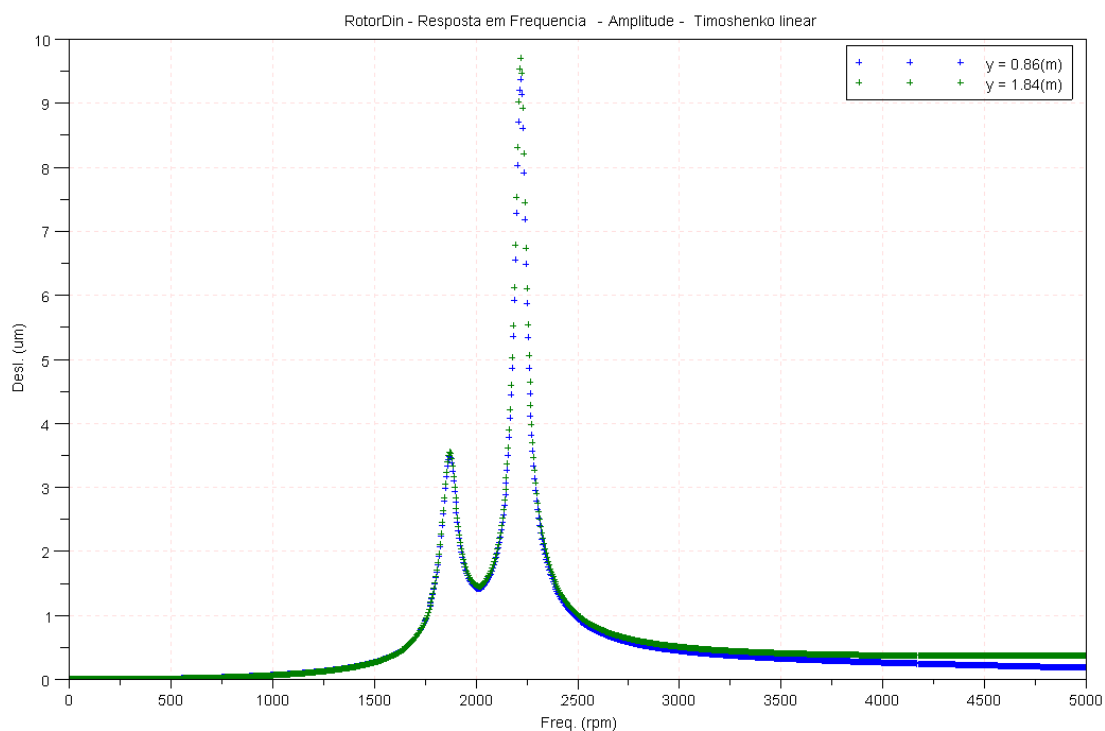


Figura 25: FRF para o rotor em estudo, com chumaceira EFNLK, utilizando a teoria de viga de Timoshenko com 3 nós por elemento, funções de interpolação quadráticas, obtida numericamente.

O cálculo das diferenças relativas (equação 6.1) entre as rotações críticas obtidas do diagrama de Campbell e as amplitudes de resposta obtidas das respectivas curvas é mostrado na Tabela 6.

$$\Delta_{1-2} = \left| \frac{\text{valor1} - \text{valor2}}{\text{valor1}} \right| * 100. \quad 6.1$$

Tabela 6: Comparação entre as rotações críticas.

Resultado	RENK [rpm]	ROTORDYN [rpm]	Δ_{1-2} [%]
1ª Rotação Crítica	1820	1867	2,6
2ª Rotação Crítica	2220	2217	0,1

Tabela 7: Comparação entre as amplitudes de resposta.

Resultado	RENK [μm]	ROTORDYN [μm]
Amplitude para a 1ª Rotação Crítica	2,6	3,6
Amplitude para a 2ª Rotação Crítica	7,0	9,7

6.4 Modelo de Interferência

O efeito da inserção do pacote de chapas ao veio com ajustes de interferência pode provocar erros nos resultados nos cálculos dos parâmetros modais do sistema, como descrito na respectiva secção. Portanto, uma aproximação deve ser incorporada na formulação do problema a fim de compensar os efeitos da interferência e também da não homogeneidade do pacote de chapas. Considerando o pacote de chapas inserido ao veio do motor BFN6 H2 SP14, e da maioria dos motores de grande porte da WEGeuro demasiado longos, o modelo de interferência proposto por Lalanne e Ferraris [5] pode apresentar erros muito elevados nos resultados.

Desconsidera-se a comparação com o Estudo do Motor BFN6 [28] e desenvolve-se nesta secção uma nova discretização para o rotor do motor BFN6 H2 SP14 (Tabela 14), para que então o modelo fique o mais adequado e próximo do protótipo construído. Discos de equilibragem e massas para enrigecimento do pacote de chapas são adicionadas no rotor (Tabela 8), portanto, devem ser acrescentadas no modelo numérico.

Seguindo o modelo apresentado por Lalanne e Ferraris [5], seria inviável o aumento do diâmetro do veio de acordo com o comprimento total do pacote de chapas, pois o aumento no diâmetro seria maior que o diâmetro dos discos. Porém, como os discos contribuem no cálculo apenas com suas respectivas massas, pode-se modelar o pacote de chapas como quatro discos idênticos posicionados em sequência e, pode-se assim fazer uso desta teoria.

O pacote de chapas tem comprimento total de 980[mm] está inserido na secção do veio com diâmetro de 200[mm], (secção com 190[mm] da Tabela 2). Dividindo este comprimento em quatro tem-se que os discos devem ter espessura de 245[mm], adicionando esta espessura ao diâmetro do veio o modelo ficará como o apresentado na Figura 26 - (a), note-se que são mostrados os discos de equilibragem e as massas para enrigecimento do pacote de chapas (Tabela 8). Pode-se desta forma calcular as rotações críticas e respostas em frequência

para o novo rotor. Para a modelagem do pacote de chapas através de 8 discos, tem-se que a espessura será de 122,5[mm] e o modelo final é o mostrado na Figura 26 - (b).

Tabela 8: Dimensões dos discos de equilibragem e para enrigecimento do pacote de chapas.

Posição dos discos [mm]	Diâmetro externo [mm]	Diâmetro interno [mm]	Espessura [mm]
598,0	482,6	200	25
777,5	482,6	200	55
1905,0	482,6	210	55
2140,0	482,6	210	25

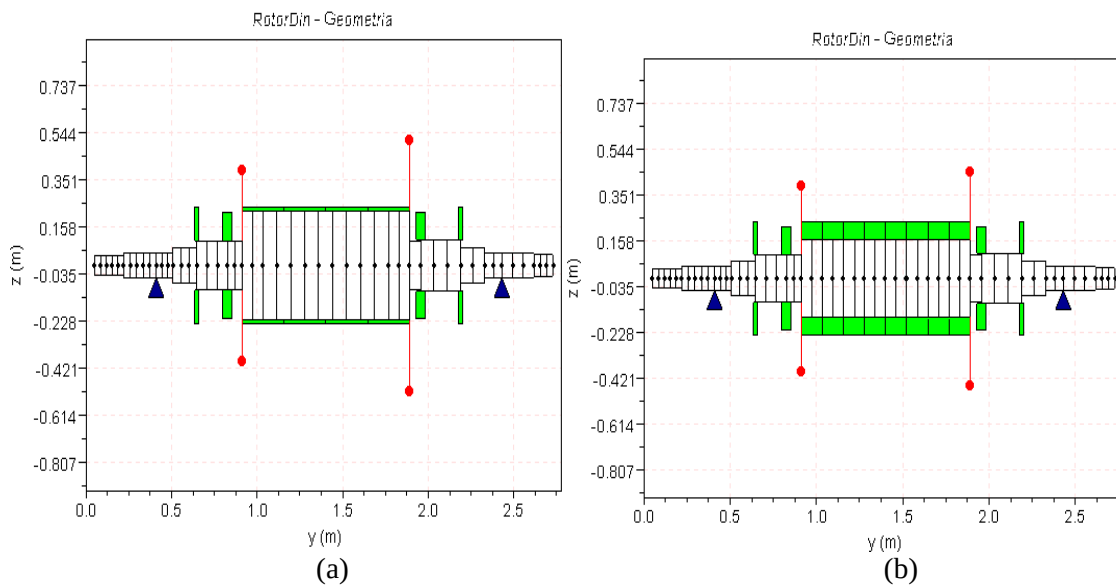


Figura 26: Esquema do rotor para modelo de interferência, (a) pacote de chapas dividido em 4 discos, (b) pacote de chapas dividido em 8 discos.

Com o novo modelo para o rotor, considerando os mancais de filme de óleo EFNLK/Q, com propriedades dependentes da frequência de rotação (Ribeiro [25]), pode-se calcular os diagramas de Campbell e obter as velocidades de rotação críticas considerando diferentes divisões para o pacote de chapas. Como o limite máximo para o diâmetro acrescido no veio, não é teoricamente definido, apenas sugere que o máximo diâmetro seja o próprio diâmetro do veio, a modelagem pode não corresponder com a situação real, e então, o que se nota é que o comportamento dinâmico do sistema é bastante alterado, suas rotações críticas apresentam grande variação, conforme mostrado na Tabela 9.

Tabela 9: Valor das frequências naturais de acordo com o número de discos que modelam o pacote de chapas.

Quantidade de discos	1ª Rotação Crítica - [rpm]	2ª Rotação Crítica - [rpm]
4	2423,7	3940,2
8	2349,0	3597,3
20	2183,4	3016,8
100	1980,9	2501,1
1000	1916,1	2365,2
Sem Interferência	1908,0	2349,0

No gráfico apresentado na Figura 27 pode-se observar a variação nos valores das rotações críticas. As diferenças relativas são calculadas segundo a equação 6.1, sendo o valor de referência as rotações críticas do modelo sem interferência. Este modelo torna-se muito flexível, e sua utilização difícil, no sentido de que, para uma configuração inicial, que não permite o acréscimo directamente do comprimento total do pacote de chapas no diâmetro do veio, é extremamente complicado saber em quantos discos é necessária a divisão do pacote de chapas para melhor representar a situação real.

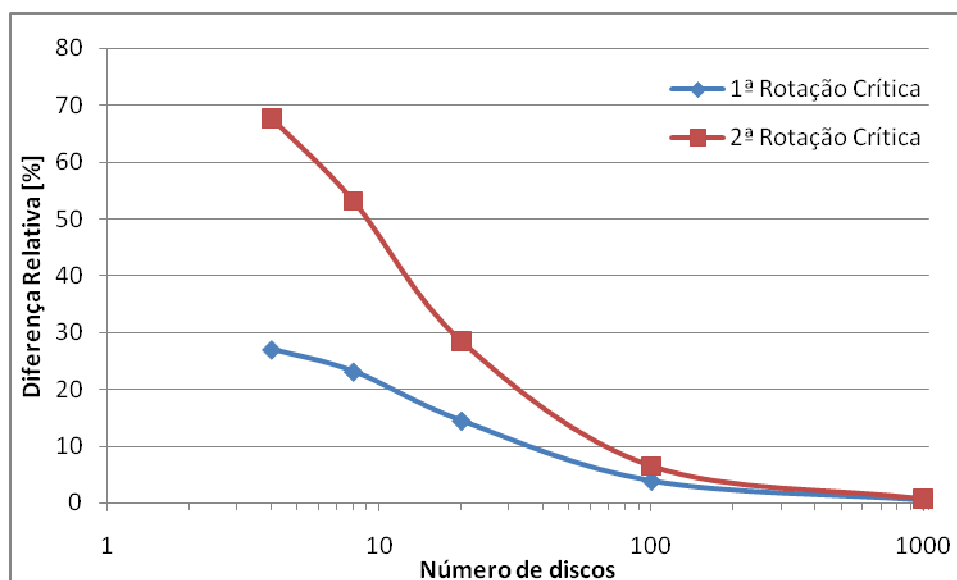


Figura 27: Gráfico que mostra a convergência nos valores das rotações críticas à medida que se aumenta o número de discos para modelar a interferência.

Através apenas deste modelo é complicado avaliar a influência da interferência nos parâmetros do rotor, pois para uma divisão menor a diferença entre os resultados pode

ultrapassar os 65% para a segunda rotação crítica, e para um elevado número de divisões esta diferença não chega a 1% , logo, se o número de discos que modela a massa rotórica for demasiado grande, os resultados tendem ao modelo que não considera influência da interferência. Portanto, faz-se extremamente necessário o estudo de um outro método para adicionar a influência da interferência no cálculo dos parâmetros do rotor.

O modelo de parâmetros equivalentes é uma metodologia alternativa, apresentada para prever o comportamento dinâmico de rotores com a consideração dos efeitos da inserção do pacote de chapas ao veio com interferência.

O ajuste dos parâmetros equivalentes é realizado para o motor BFN6 H2 SP14 a fim de avaliar o método apresentado. Com o rotor pendurado por uma extremidade (bordo de ataque) através de correntes, simulando uma condição de viga livre no espaço, posicionando o acelerómetro nesta mesma extremidade de sustentação e através de um impulso na extremidade oposta ao ataque, (Figura 28) pode-se obter as curvas de resposta em frequência apresentadas na Figura 29 e na Figura 30. O impacto é provocado por uma marreta comum, sendo a leitura dos sinais provenientes do acelerómetro iniciada manualmente num analisador de sinais comum.



Figura 28: Ensaio de medição da curva de resposta em frequência.

Trigger Arm: Manual Waterfall Steps: 15
[FFT] Chn Level: 10 mV Slope: Positive
Date: 07-07-09 **Time:** 03:01:00 AM

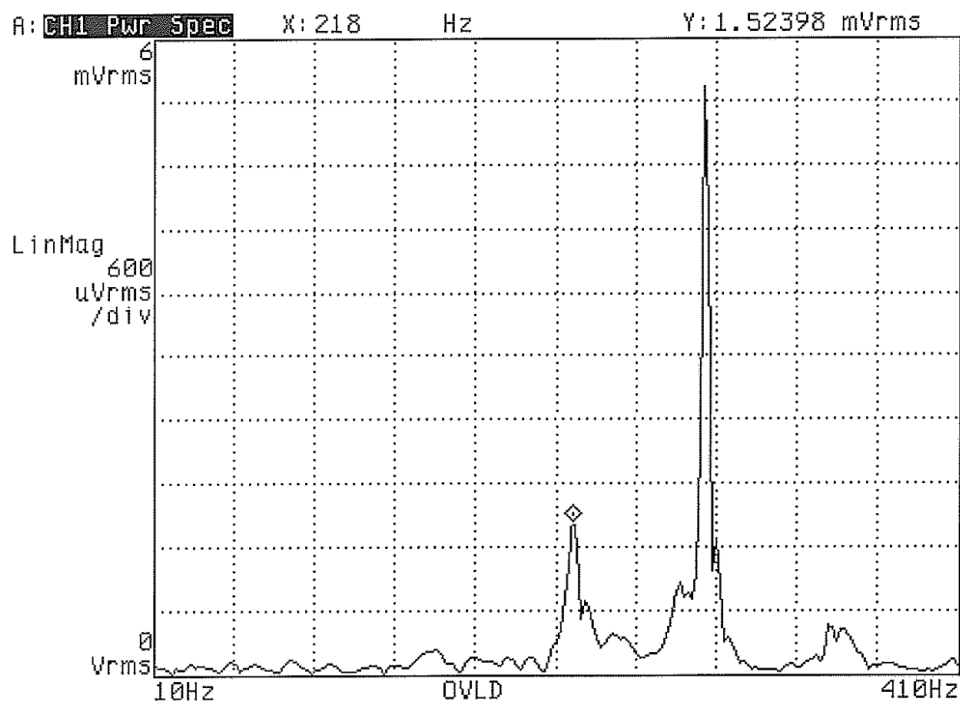


Figura 29: Ensaio de medição da curva de resposta em frequência.

Trigger Arm: Manual Waterfall Steps: 15
[FFT] Chn Level: 10 mV Slope: Positive
Date: 07-07-09 **Time:** 03:12:00 AM

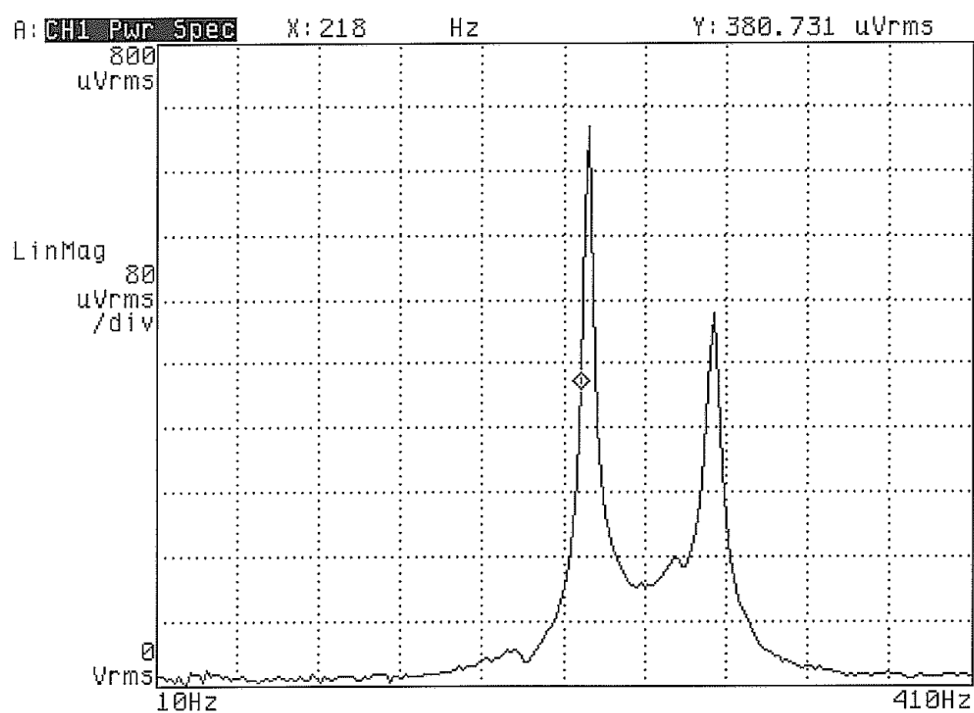


Figura 30: Curva de resposta em frequência experimental do rotor BFN6 H2 SP14.

A posição do acelerómetro e da aplicação do impulso foram escolhidos através da análise do primeiro e segundo modos, pois ambas as extremidades apresentam grandes deslocamentos nos dois primeiros modos para os quais se pretende obter a resposta. O primeiro e terceiro modo de vibrar à flexão para o sistema estático são mostrados na Figura 31. Note que como apresentado na curva de resposta, no bordo de ataque, origem do eixo coordenado y a amplitude do terceiro modo é maior que a amplitude do primeiro modo.

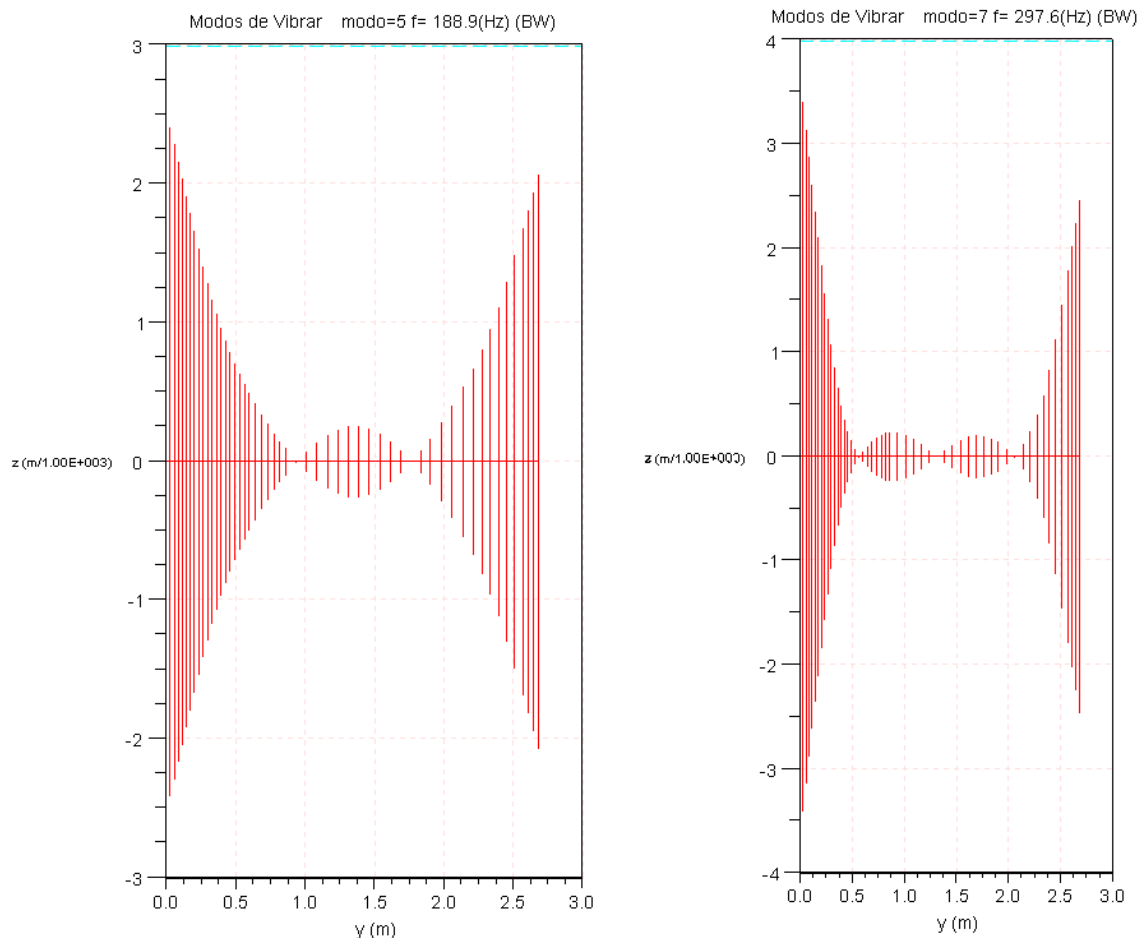


Figura 31: Primeiro e terceiro modo de vibrar de flexão do rotor que compõem o motor BFN5 H2 SP14, factor de escala 5000.

Os valores das frequências naturais obtidas experimentalmente são apresentados na Tabela 10. Nesta mesma tabela pode-se observar os valores da primeira e segunda frequência natural, calculadas com diferentes módulos de elasticidade equivalente. As diferenças relativas calculada através da equação 6.1, sendo o valor obtido experimentalmente a referência. Note-se que como o experimento foi realizado com o rotor suspenso, poderia ser acrescentado o efeito da força axial, porém, considerando apenas o peso próprio do rotor, a variação nos valores das frequências naturais foi muito pequeno, então, desconsidera-se esta influência.

Tabela 10: Comparação entre as frequências naturais do rotor do motor BFN6 500 H2 SP14.

	1ª Frequência Natural - [Hz]	2ª Frequência Natural - [Hz]	$\Delta_{\text{exp}-1^{\text{a}} \text{Numérica}}$ [%]	$\Delta_{\text{exp}-2^{\text{a}} \text{Numérica}}$ [%]
Experimental	218	283	-	-
ROTOR DYN $E_{eq} = 11[\text{GPa}]$	170	287	22,0	1,4
ROTOR DYN $E_{eq} = 23[\text{GPa}]$	219	313	0,4	10,6
ROTOR DYN $E_{eq} = 17[\text{GPa}]$	199	303	8,7	7,0

Pode-se observar que, o módulo equivalente maior é o que melhor se ajusta para representar a alteração na rigidez do veio para a primeira frequência natural, esta influência depende do modo de deformação do rotor, deve-se considerar como a secção que modela o pacote de chapas se deforma.

Como na maioria dos casos, pretende-se predizer com maior precisão o maior número de rotações críticas possíveis e com um erro uniforme para todas estas frequências, um módulo de elasticidade médio ($E_{eq} = 17[\text{GPa}]$) é utilizado para a predição das duas primeiras rotações críticas com o menor desvio, para os demais parâmetros não há alteração, a massa volúmica não se altera, pois depende das dimensões e da massa que são mantidas no modelo da secção correspondente à massa rotórica.

A análise da resposta livre-livre do rotor é importante, pois além do pacote de chapas ser inserido com interferência ao veio, tem-se os elementos condutores e outros componentes da massa rotórica que alteram o comportamento dinâmico do rotor e que não podem ser eliminados num ensaio com o motor em rotação. Para o sistema estático, estas variáveis são eliminadas ou seus efeitos são muito pequenos que podem ser desconsiderados. Sendo que o interesse maior é eliminar a influência do mancal de filme de óleo, pois, o cálculo de seus coeficientes apresenta inúmeras variáveis e geralmente não são muito precisos.

Contudo, através das simulações, pode-se observar nos resultados obtidos com ambos os modelos que o fato do pacote de chapas ser inserido no veio com interferência as características dinâmicas do rotor são alteradas. Portanto, conclui-se que se faz extremamente necessário um estudo detalhado de cada rotor, caso a caso, para considerar a interferência, principalmente

quando se têm rotores que trabalham acima das rotações críticas ou que simplesmente operam em elevadas rotações.

6.5 Influência da Fundação

Na sequência deste estudo, considerando o modelo de interferência através de parâmetros equivalentes ($E_{eq} = 17[\text{GPa}]$), e mancais com coeficientes variáveis (mancal de filme de óleo de referência apresentado por Ribeiro [25]), são calculados os diagramas de Campbell para avaliar a influência da fundação nas rotações críticas do sistema. Considerando a geometria do rotor descrita na secção 6.4 tem-se o modelo apresentado pela Figura 32.

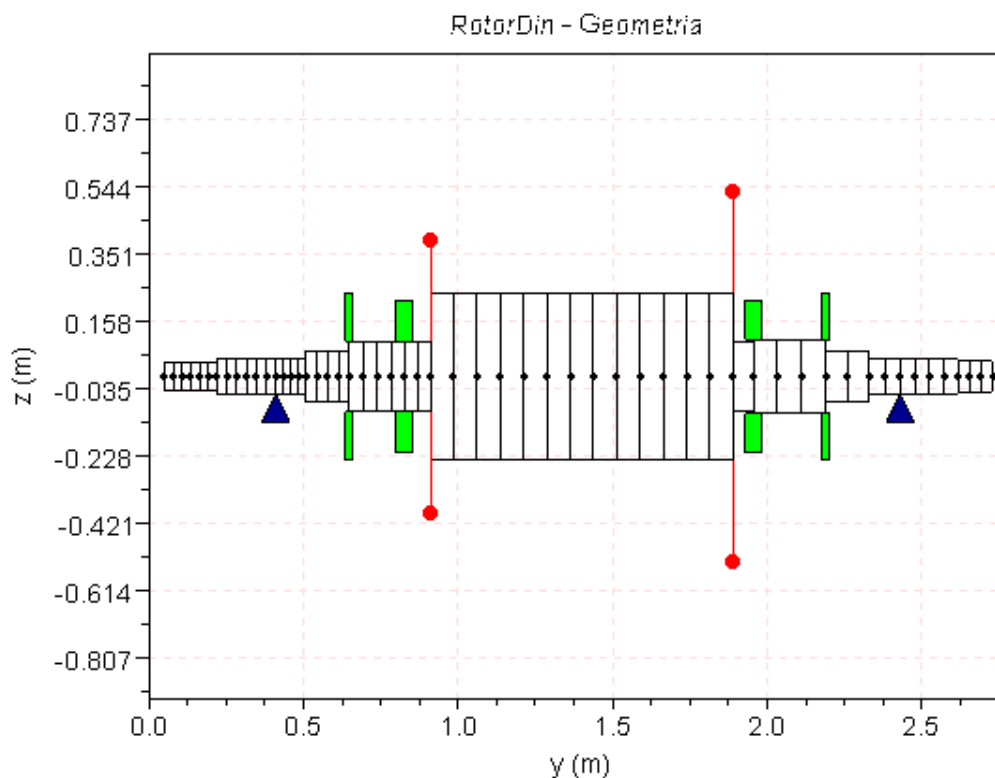


Figura 32: Rotor do motor BFN6 500 H2 SP14 discretizado com 54 elementos finitos, mancais representados por triângulos azuis, veio por rectângulos brancos, discos por rectângulos verdes e desequilíbrios em vermelho.

O modelo proposto neste trabalho para a fundação, apesar de acrescentar graus de liberdade ao sistema, pouco afecta o tempo computacional, pois as dimensões do problema são pouco aumentadas. As rotações críticas obtidas dos diagramas de Campbell da Figura 33 (modelo com fundação rígida) e Figura 34 (modelo com fundação flexível) são mostradas na Tabela 11. Sendo as propriedades da fundação obtidas da rotina de cálculo SBCALC 3.0, apresentadas na Tabela 4.

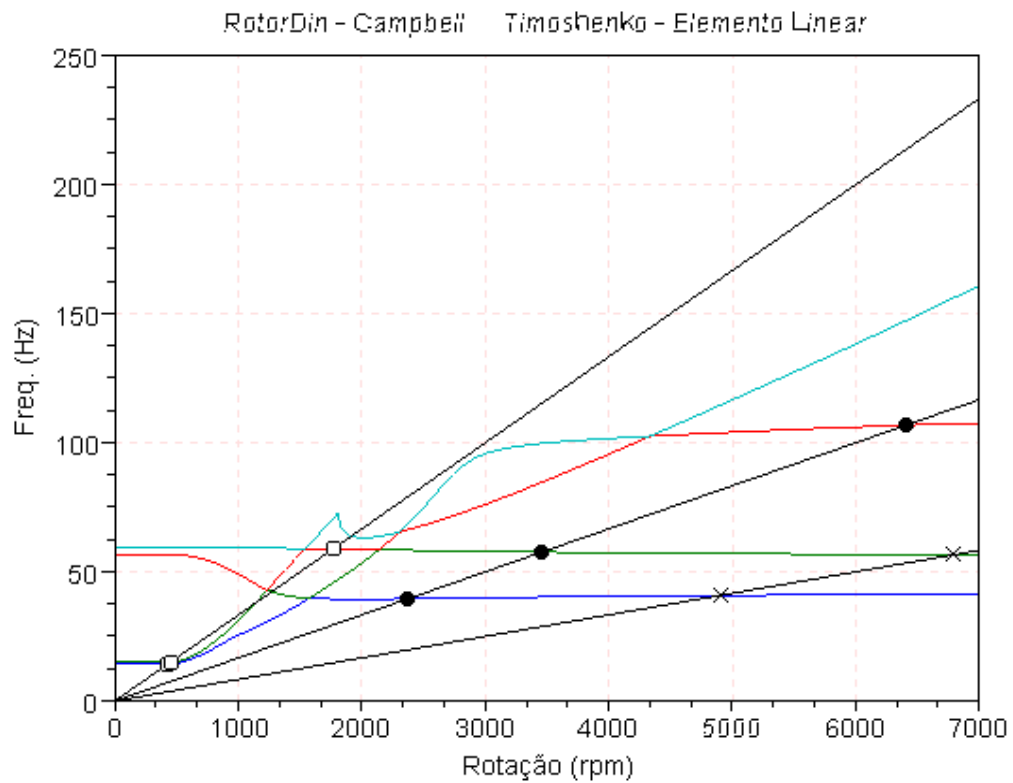


Figura 33: Diagrama de Campbell para o rotor do motor BFN6 500 H2 SP14 discretizado com 54 elementos finitos, sem a consideração da influência da fundação.

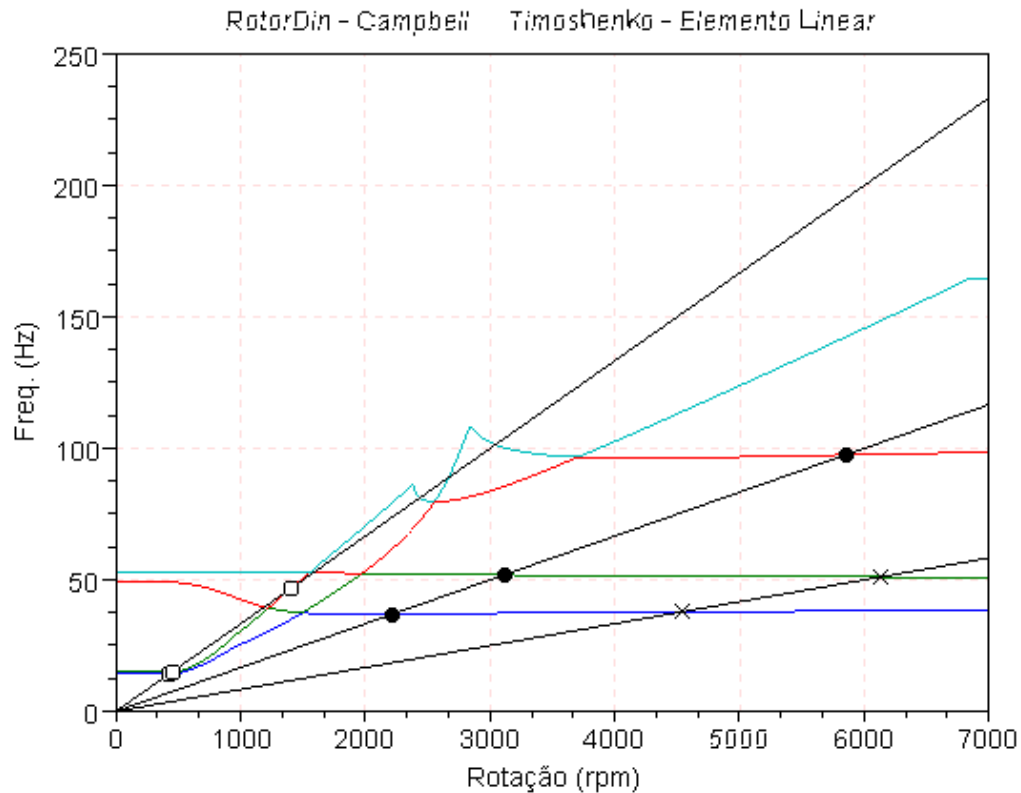


Figura 34: Diagrama de Campbell para o rotor do motor BFN6 500 H2 SP14 discretizado com 54 elementos finitos, considerando a influência da fundação.

Tabela 11: Comparação entre as rotações críticas para o rotor em estudo.

Modelo	Sem fundação	Com fundação	$\Delta_{sem-com}$ [%]
1ª Rotação Crítica [rpm]	2373,0	2216,2	6,6
2ª Rotação Crítica [rpm]	3460,1	3311,8	4,2

6.6 Análise do Rotor do Motor W22X 500KH2 SP01

Através da geometria estabelecida no projecto do veio e demais componentes do motor W22X 500KH2 SP01, pode-se modelar o respectivo rotor considerado rígido para o projecto (Figura 35). Através da teoria apresentada neste trabalho considera-se o efeito da inserção do pacote de chapas com interferência no veio com o modelo de parâmetros equivalentes. Considera-se o mesmo módulo equivalente para o motor BFN6 ($E_{eq} = 17$ [GPa]), porém, sabe-se que várias simulações são necessárias para adequar o modelo de acordo com valores experimentais, pois este módulo depende de cada rotor e do ajuste de interferência utilizado na fabricação.

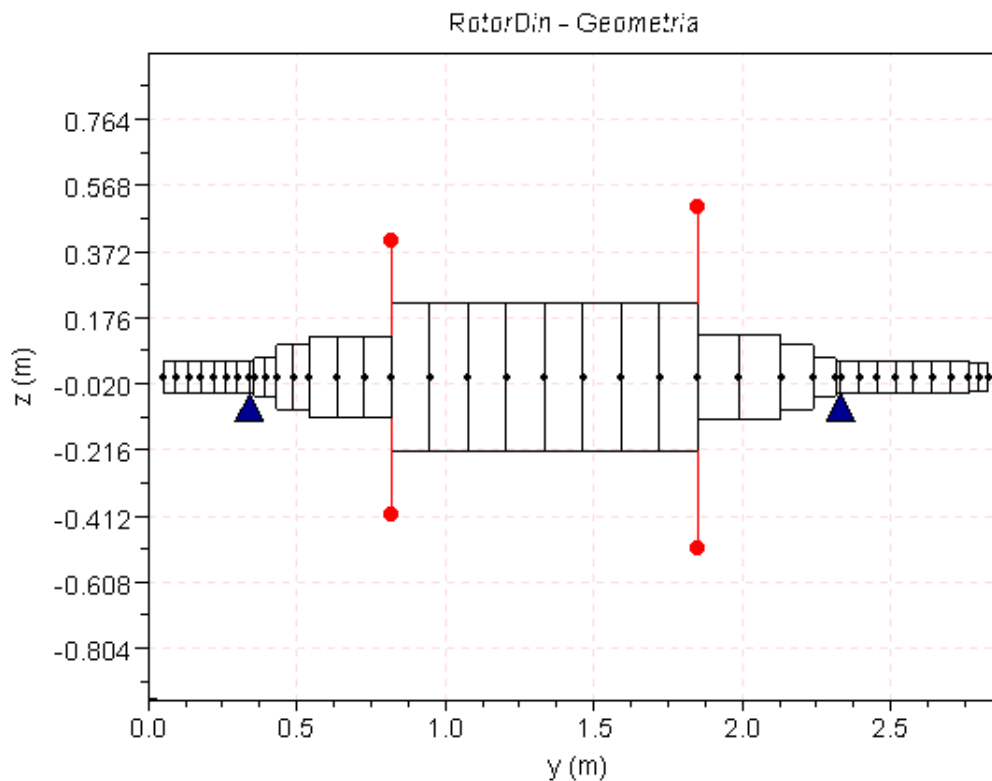


Figura 35: Modelo de Elementos Finitos considerando interferência do pacote de chapas.

Considera-se um rotor rígido qualquer rotor flexível que trabalha abaixo da primeira rotação crítica (normas determinam cerca de 30% abaixo para a segurança), como mostra a curva de resposta da Figura 36.

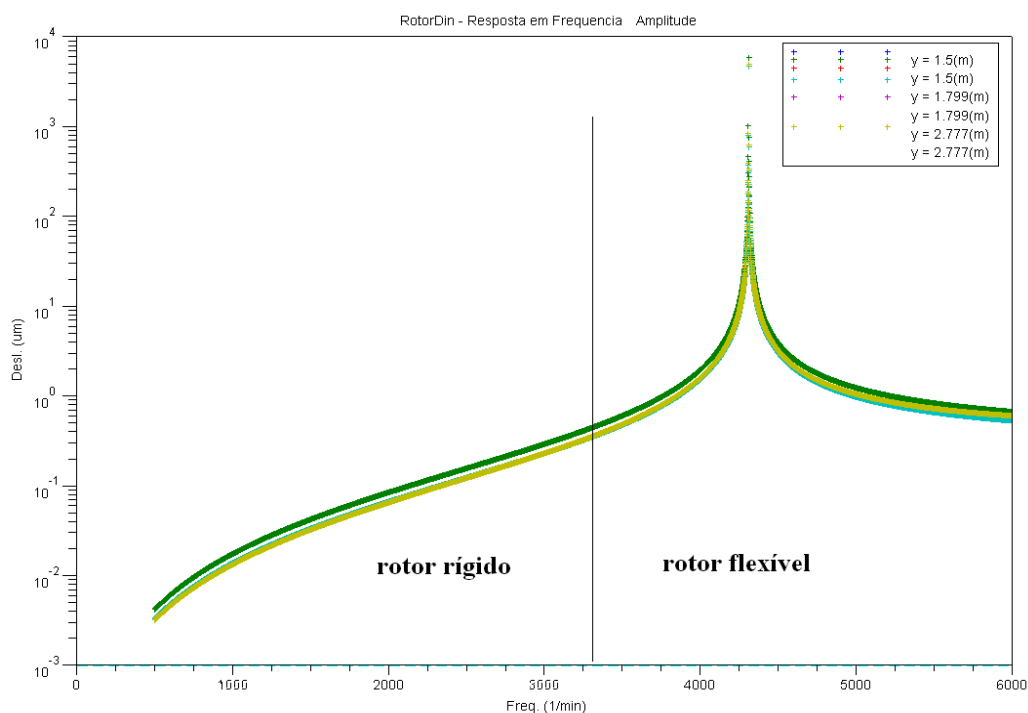


Figura 36: Resposta em frequência (módulo) nas posições 1500 [mm], 1799 [mm] e 2777 [mm], nas direcções vertical e horizontal para cada posição, calculada com o desequilíbrio da Tabela 5.

O projecto do motor W22X 500 H2 SP01 prevê a operação do motor como rotor rígido, portanto, conforme observa-se na curva de resposta, este rotor pode-se operar com segurança na rotação que é prevista para trabalho, a 3000[rpm] .

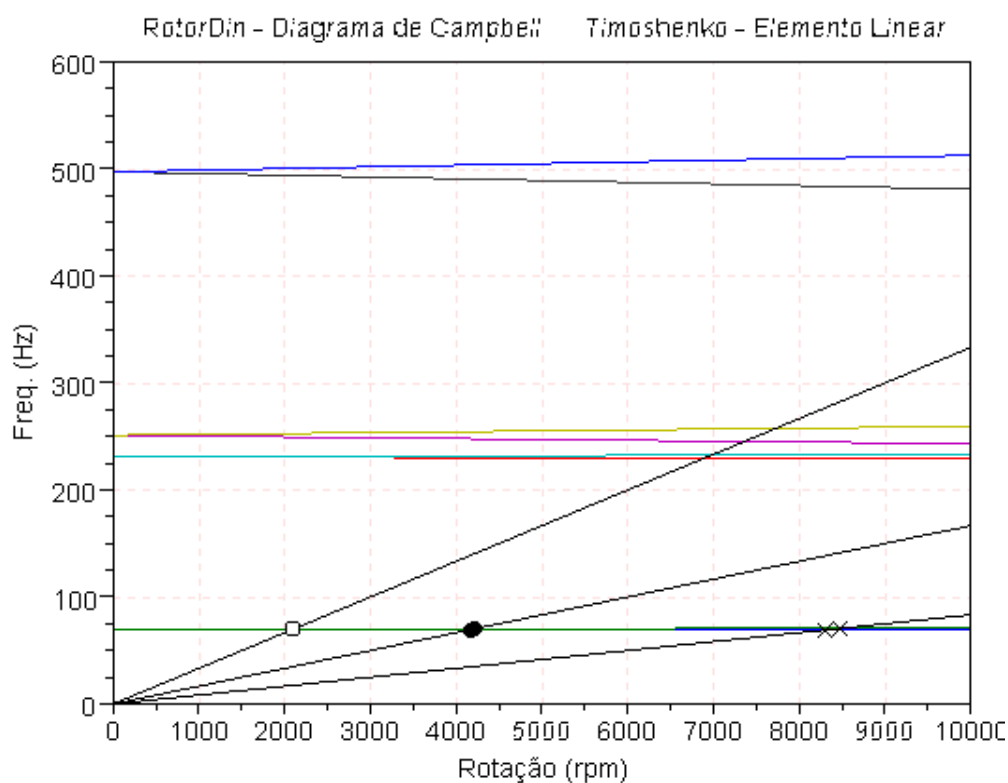


Figura 37: Diagrama de Campbell do motor W22X 500 KH2 SP01.

Através do diagrama de Campbell pode-se obter os valores das rotações críticas do motor W22X 500 KH2 SP01, mostradas na Tabela 12.

Tabela 12: Valores das rotações críticas obtidas do diagrama de Campbell.

1ª Rotação Crítica [rpm]	4172,0
2ª Rotação Crítica [rpm]	4214,0

6.7 Análise do Rotor do Motor BFN6 500 H2 SP14

Considera-se para a análise de um rotor flexível o motor BFN6 H2 SP14, que é modelado com sendo apoiado em fundação flexível (Tabela 4), tendo coeficientes de rigidez e amortecimento variáveis com a velocidade de rotação (Ribeiro [25]), e desequilíbrios, dimensões do veio e dos discos conforme Tabela 13, Tabela 14 e Tabela 15 respectivamente.

Tabela 13: Dados para o desequilíbrio teórico do rotor (Ribeiro [26]).

Local do desequilíbrio	1º Ponto – 860 [mm]	2º Ponto – 1840 [mm]
$m \cdot e$ [g mm]	170	147
ϕ [°]	20,6	168

Tabela 14: Dimensões do veio do rotor que compõem o motor BFN6 H2 SP14.

Posição final do escalonamento no veio [mm]	Diâmetro do escalonamento [mm]
170	80
458	100
598	149
860	200
1840	482,6
1905	200
2140	210
2280	149
2569	100
2679	90

Tabela 15: Dimensões dos discos que simula o pacote de chapas.

Posição dos discos [mm]	Diâmetro externo [mm]	Diâmetro interno [mm]	Espessura [mm]
563,0	482,6	144	25
777,5	440,0	200	55
982,5	482,6	190	245
1227,5	482,6	190	245
1472,5	482,6	190	245
1717,5	482,6	190	245
1905,0	440,0	210	55
2175,0	482,6	144	25

O cálculo das rotações críticas e resposta do rotor pode então ser efectuados. Os resultados são obtidos utilizando a discretização apresentada na Figura 38, considera-se no modelo relação $L/d = 0,8$.

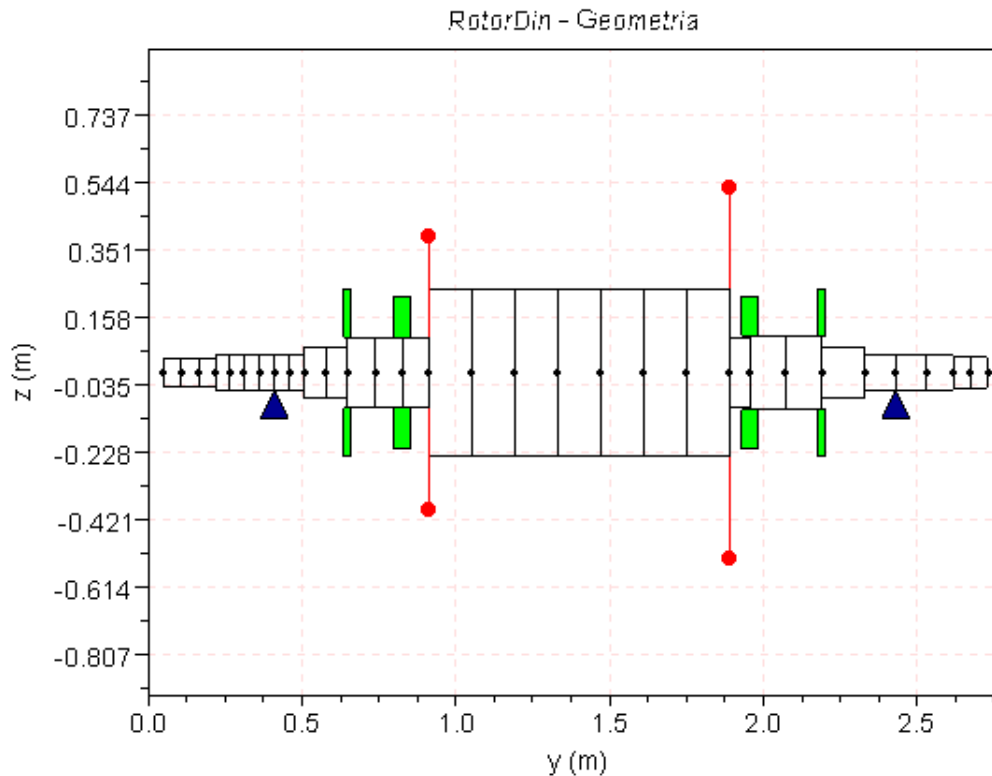


Figura 38: Discretização do veio do motor BFN6 500 H2 SP14.

Curvas de resposta, obtidas experimentalmente com um ensaio do tipo desaceleração do motor, são comparadas com as curvas calculadas com o código ROTRDYN. As curvas experimentais foram obtidas com sensores de proximidade, posicionados nos mancais; no outro canal do analisador de sinais foi ligado um tacómetro *laser*. Compara-se cada curva obtida nas direcções vertical e horizontal em cada mancal de filme de óleo com curvas calculadas com o código computacional ROTORDYN. Os pontos para o cálculo de resposta e medição experimental são a 260[mm] do bordo de ataque do veio e a 200[mm] do bordo oposto.

Descreve-se os dados para cada curva na forma de tópicos para facilitar a leitura e visualização dos dados deste trabalho. Note-se que nas curvas medidas a rotação decresce ao longo do respectivo eixo, enquanto na curva calculada os valores das rotações aumentam no sentido positivo do eixo das abcissas.

- Medição (Figura 39) e cálculo de resposta, amplitude (Figura 40) e fase (Figura 41), no mancal do bordo de ataque e na direcção vertical:

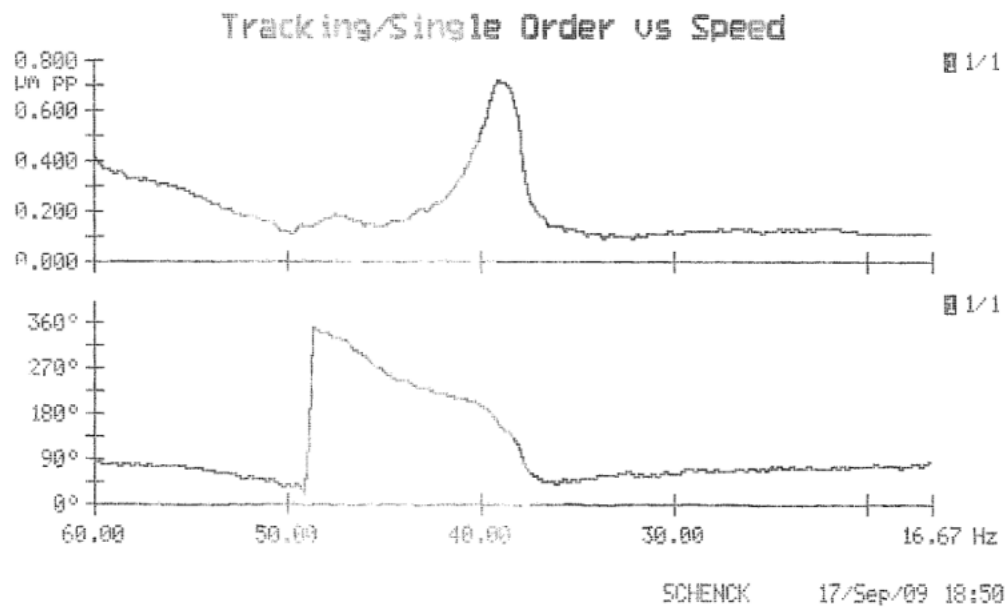


Figura 39: Medição experimental de resposta do rotor ao desequilíbrio, direcção vertical, a 260 [mm] do bordo de ataque.

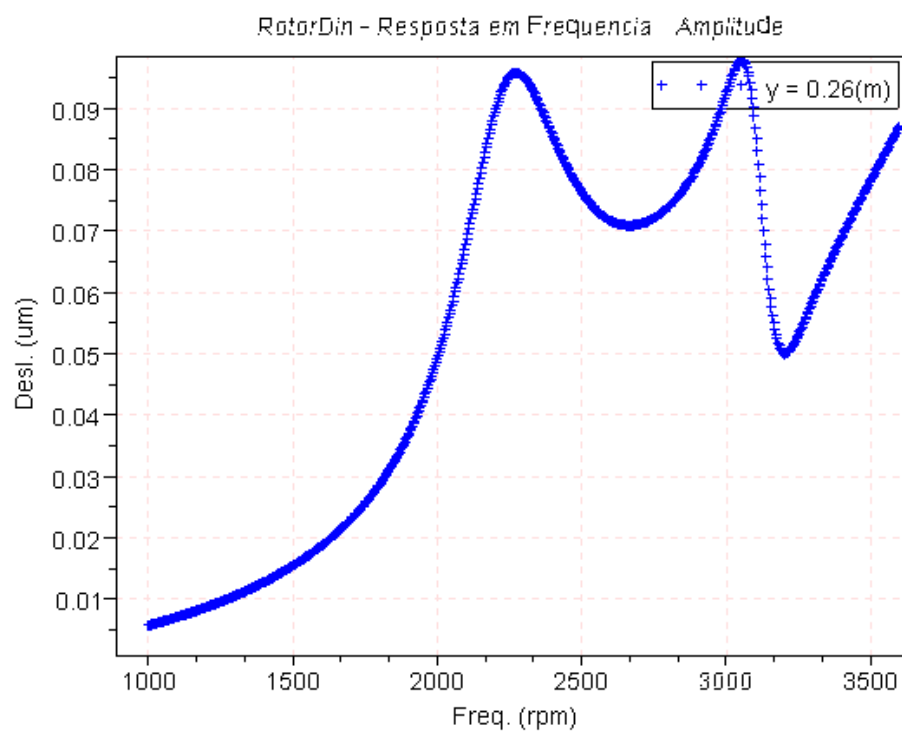


Figura 40: Resposta numérica ao desequilíbrio, direcção vertical, a 260 [mm] do bordo de ataque, amplitude.

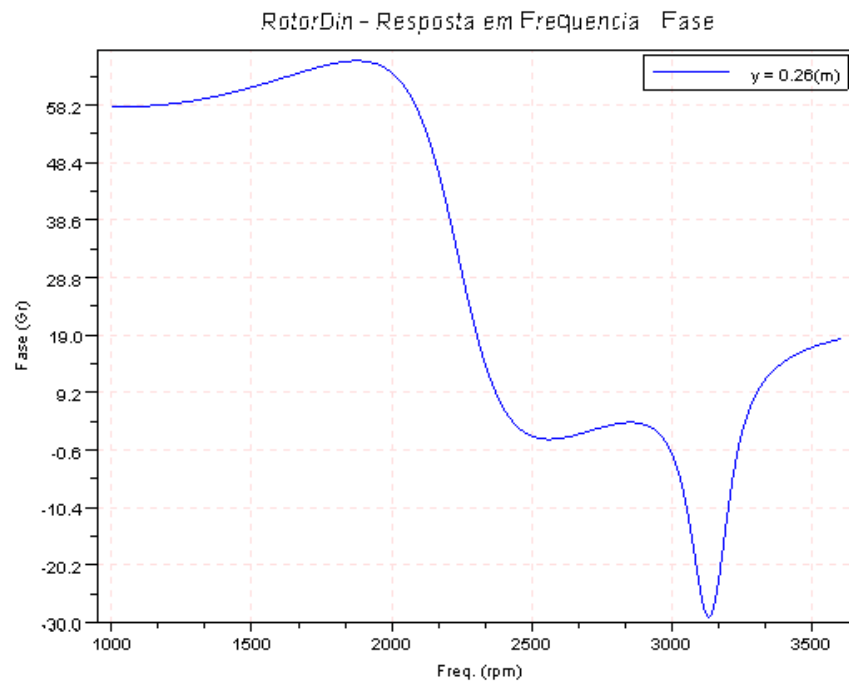


Figura 41: Resposta numérica ao desequilíbrio, direcção vertical, a 260 [mm] do bordo de ataque, fase entre a excitação e a resposta.

- Medição (Figura 42) e cálculo de resposta, amplitude (Figura 43) e fase (Figura 44), no mancal do bordo de ataque e na direcção horizontal:

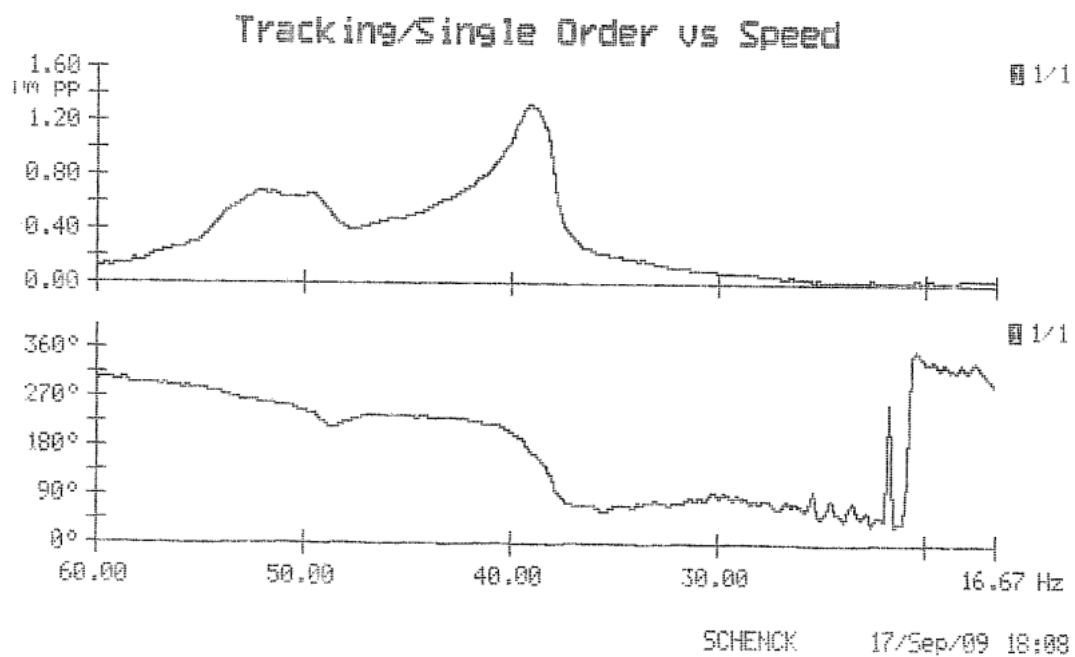


Figura 42: Medição experimental de resposta do rotor ao desequilíbrio, direcção horizontal, a 260 [mm] do bordo de ataque.

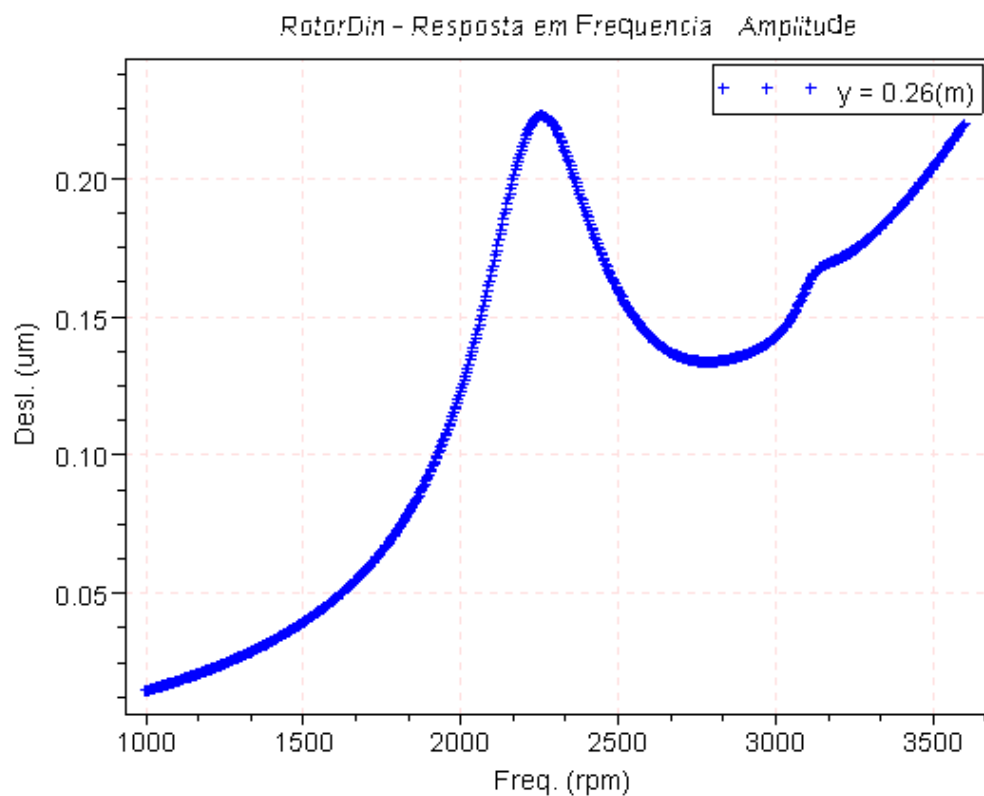


Figura 43: Resposta numérica ao desequilíbrio, direcção horizontal, a 260 [mm] do bordo de ataque, amplitude.

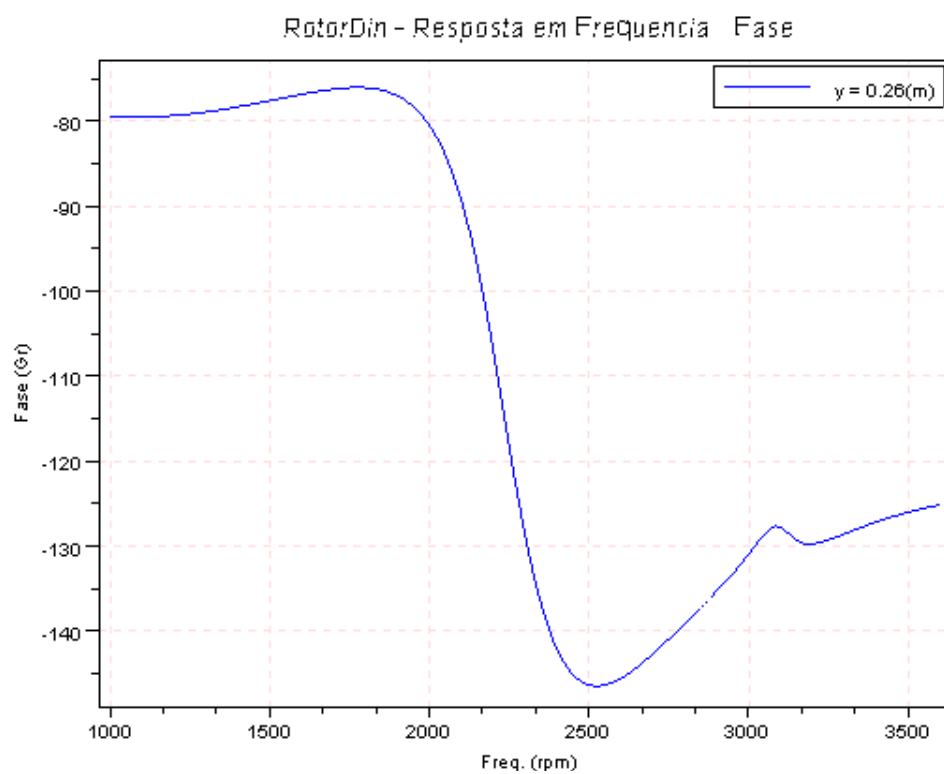


Figura 44: Resposta numérica ao desequilíbrio, direcção horizontal, a 260 [mm] do bordo de ataque, fase entre a excitação e a resposta.

- Medição (Figura 45) e cálculo de resposta, amplitude (Figura 46) e fase (Figura 47), no mancal do bordo de ataque e na direcção vertical:

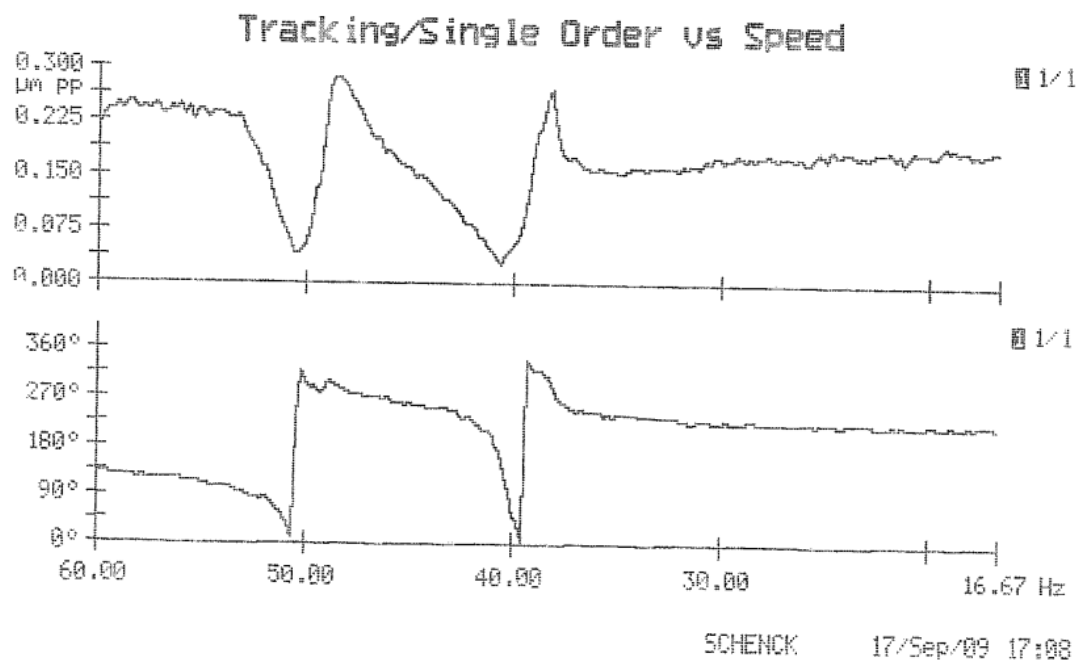


Figura 45: Medição experimental de resposta do rotor ao desequilíbrio, direcção vertical, a 200 [mm] do bordo oposto ao ataque.

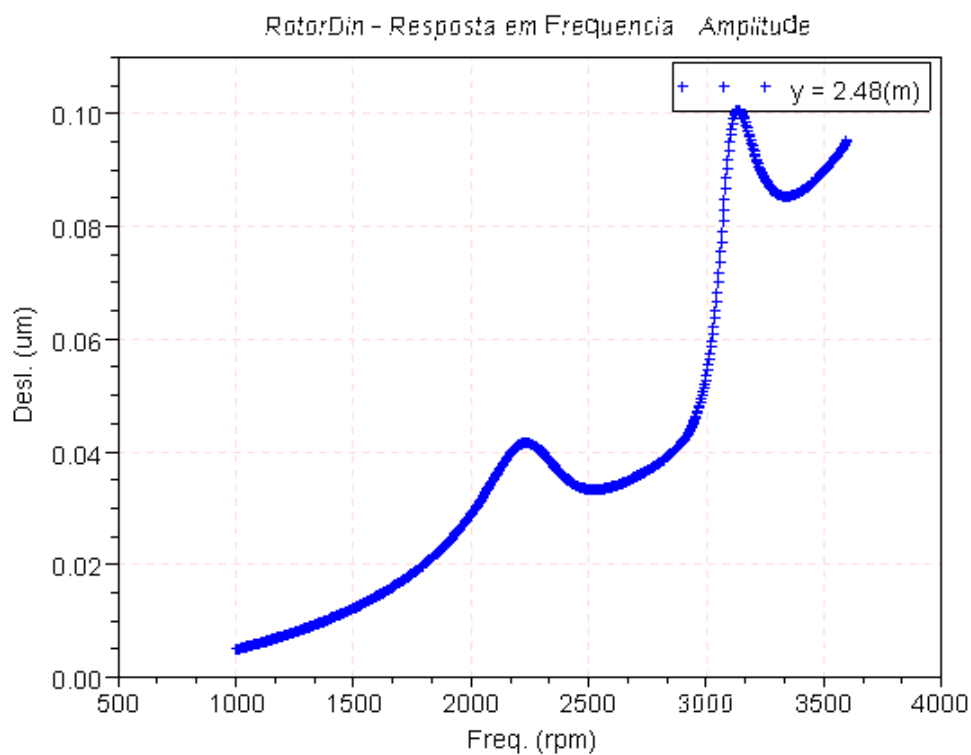


Figura 46: Resposta numérica ao desequilíbrio, direcção vertical, a 200 [mm] do bordo oposto ao ataque, amplitude.

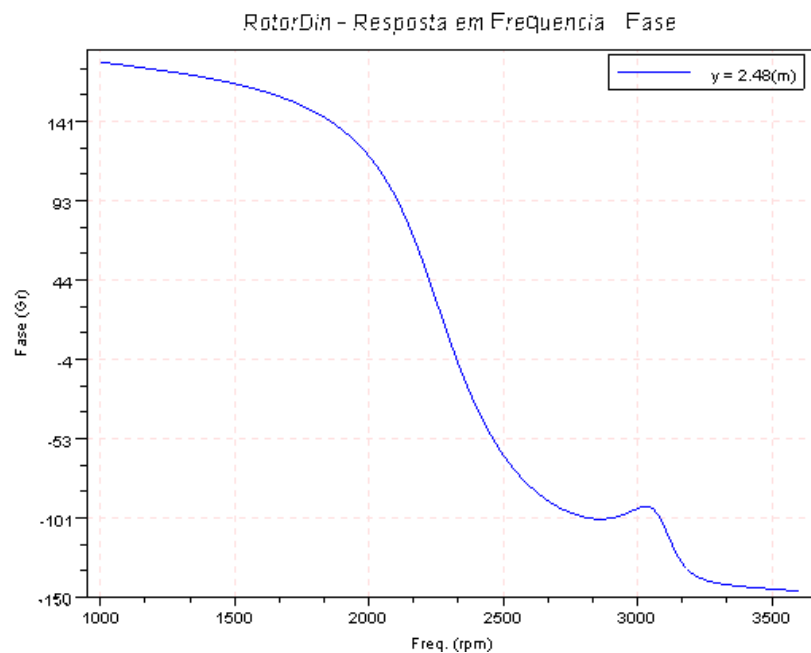


Figura 47: Resposta numérica ao desequilíbrio, direcção vertical, a 200 [mm] do bordo oposto ao ataque, fase entre a excitação e a resposta.

- Medição (Figura 48) e cálculo de resposta, amplitude (Figura 49) e fase (Figura 50), no mancal do bordo de ataque e na direcção vertical:

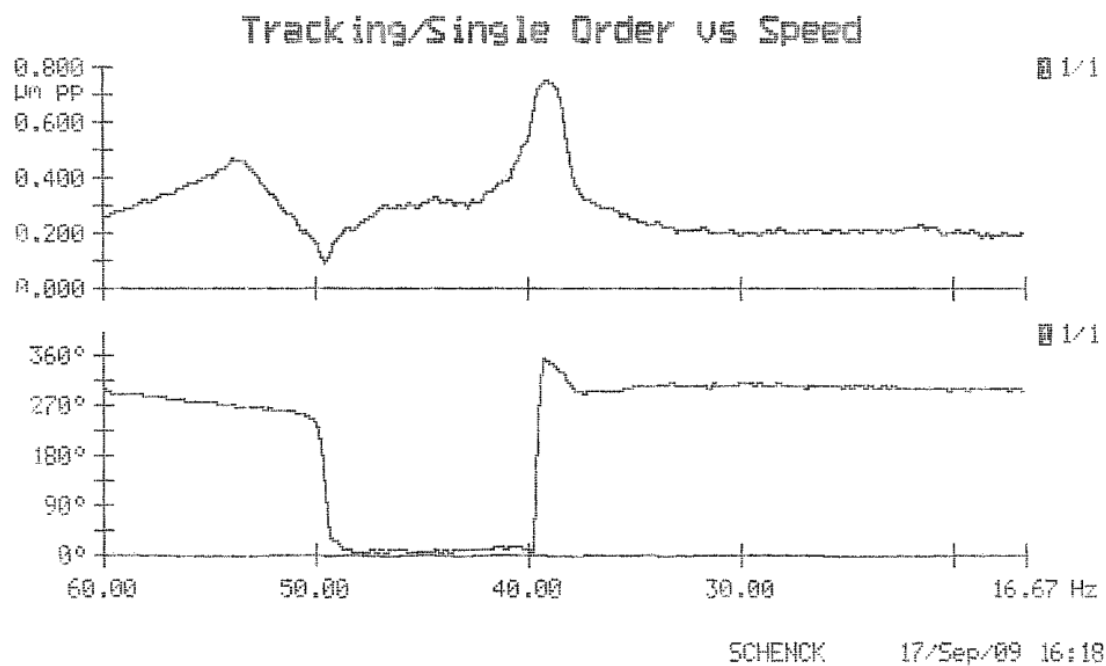


Figura 48: Medição experimental de resposta do rotor ao desequilíbrio, direcção horizontal, a 200 [mm] do bordo oposto ao ataque.

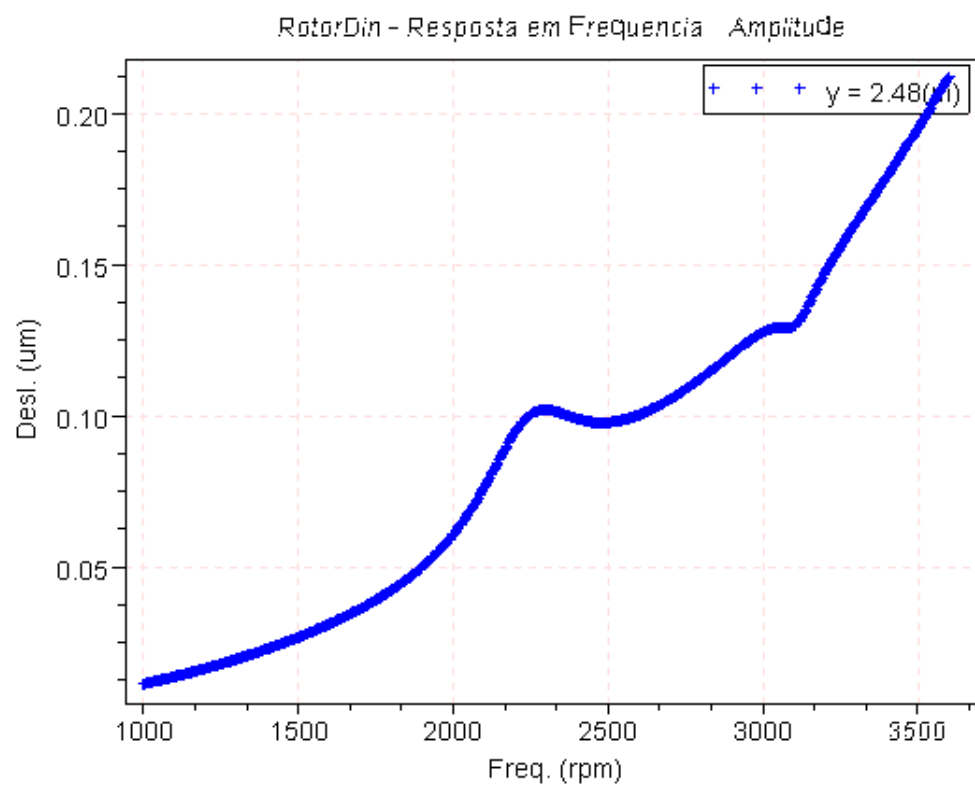


Figura 49: Resposta numérica ao desequilíbrio, direcção horizontal, a 200 [mm] do bordo oposto ao ataque, amplitude.

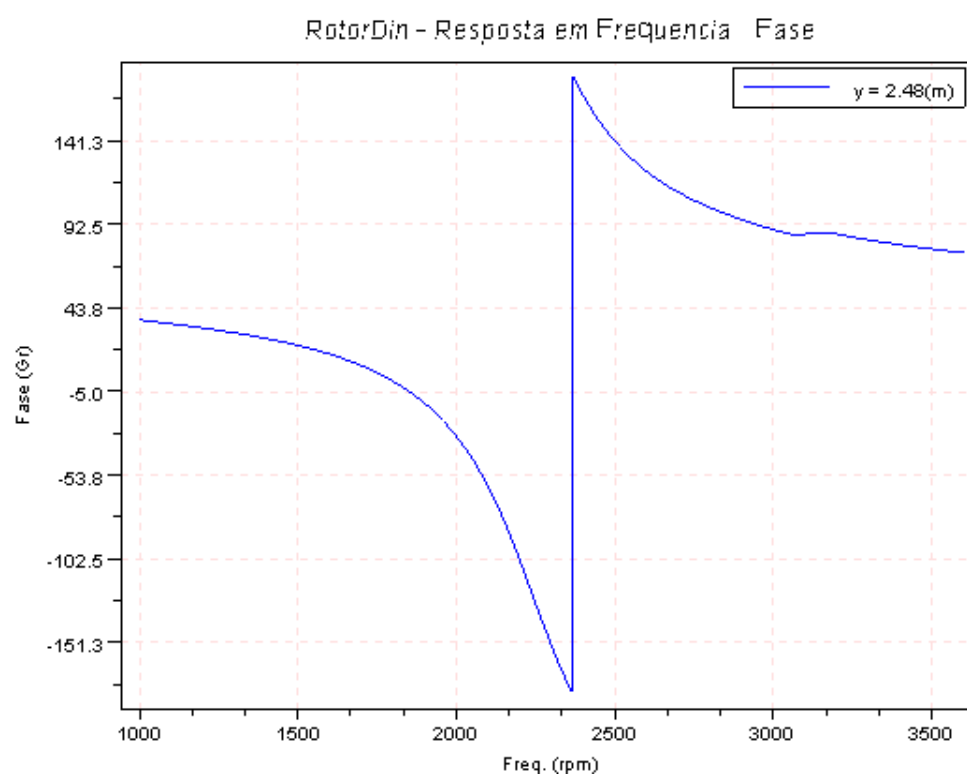


Figura 50: Resposta numérica ao desequilíbrio, direcção horizontal, a 200 [mm] do bordo oposto ao ataque, fase entre a excitação e a resposta.

O comportamento das curvas de resposta experimental e numérica é na maioria das curvas semelhante, as amplitudes apresentam valores coerentes. O diagrama de Campbell apresentado na Figura 51 foi obtido para o rotor descrito nesta secção. Assim a Tabela 16 é construída para visualização dos valores das rotações críticas calculadas numericamente e através das curvas de resposta do rotor em ensaios de desaceleração apresentadas previamente.

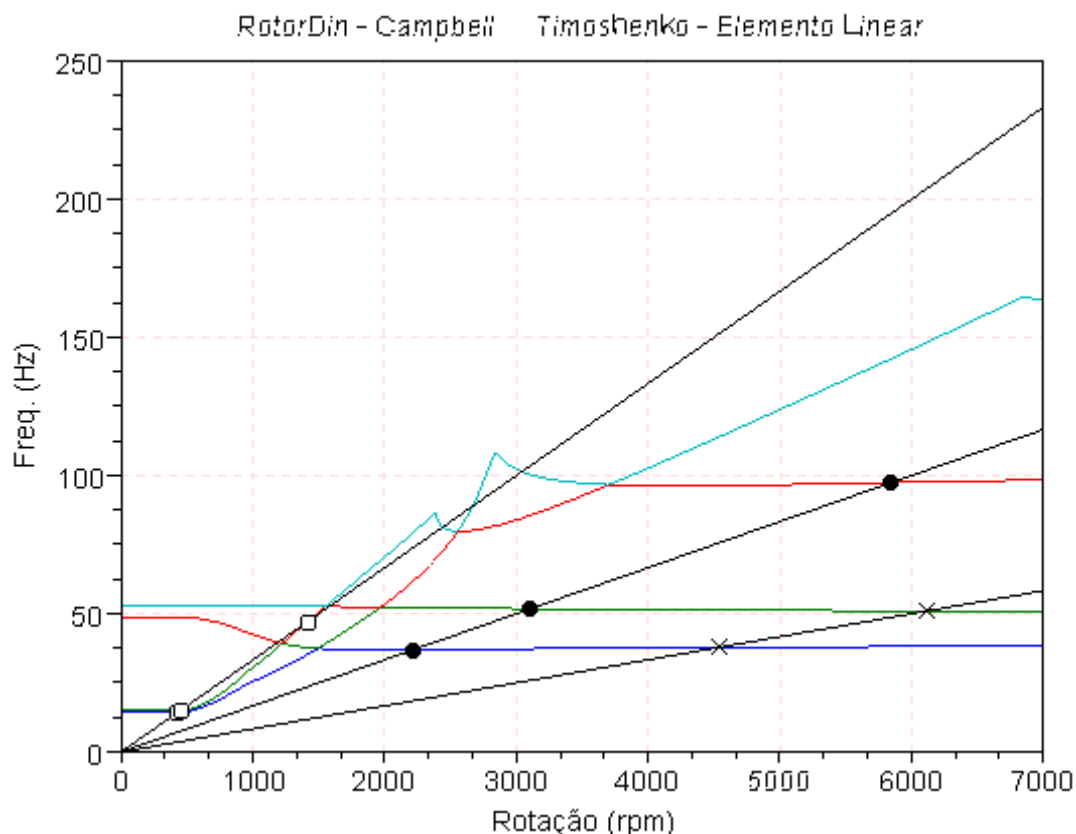


Figura 51: Diagrama de Campbell para o rotor em estudo do motor BNF6, com mancais de filme de óleo, utilizando a teoria de viga de Timoshenko com 3 nós por elemento, funções de interpolação quadráticas.

Tabela 16: Comparação entre as rotações críticas, obtidas numericamente e experimentalmente.

Resultado	Experimentalmente [rpm]	Numericamente [rpm]	$\Delta_{\text{exp-num}}$ [%]
1ª Rotação Crítica	2304	2214,1	3,9
2ª Rotação Crítica	2940	3104,5	5,6

Observa-se que os valores entre o modelo experimental e o proposto não apresentam diferenças relativas superiores a 6%. Porém, quando considera-se o modelo de interferência proposto por Lalanne e Ferraris [5], considerando o diâmetro de correcção máximo, a diferença relativa entre os resultados numérico e experimental pode chegar a 20%. Avaliando a

convergência do algoritmo de elementos finitos na predição das rotações críticas, através dos diagramas de Campbell pode-se construir o gráfico da Figura 52.

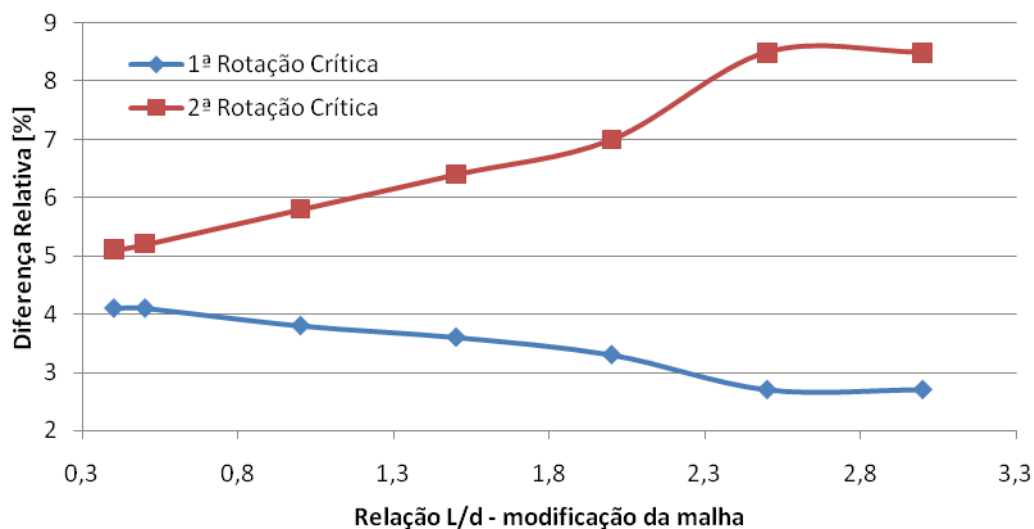


Figura 52: Gráfico que mostra a convergência nos valores das rotações crítica à medida que diminui a relação comprimento pelo diâmetro para o rotor em estudo.

Através do modelo apresentado para a análise torsional pode obter as formas de vibrar e as frequências naturais à torção. A Figura 53 apresenta o primeiro modo, que representa o modo de corpo livre do veio, correspondente à rotação do veio em torno de sua linha de centro. O segundo modo é que realmente apresenta a torção do veio, com um nó central, como mostra a Figura 54.

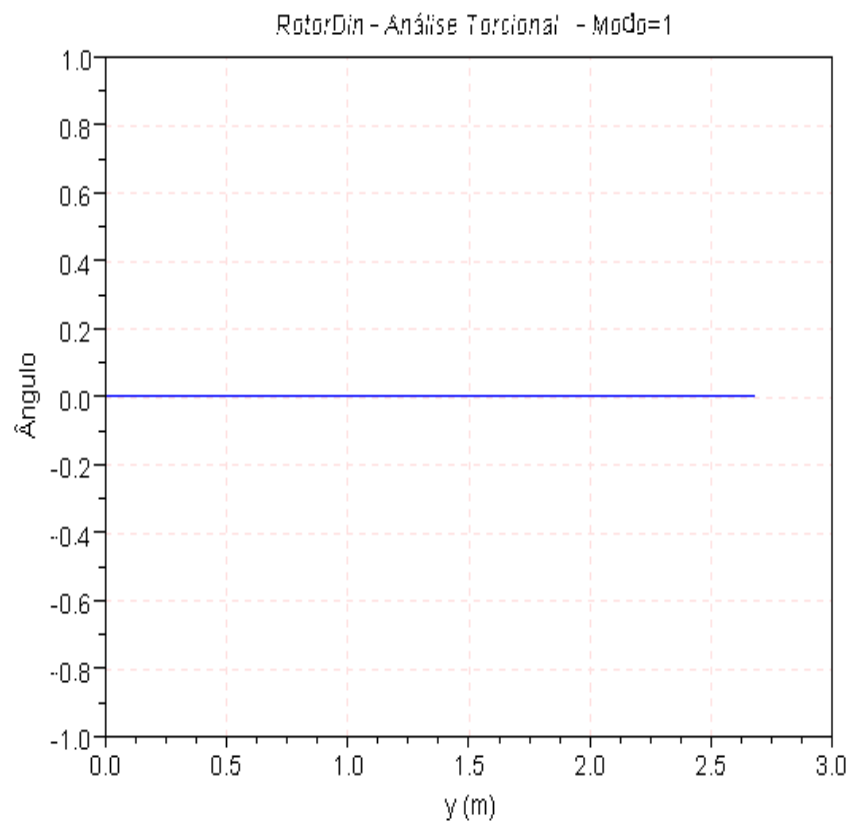


Figura 53: Modo de vibrar à torção, primeira frequência de corpo livre, sem deformação do veio do rotor que compõem o motor BFN6 500H2 SP14.

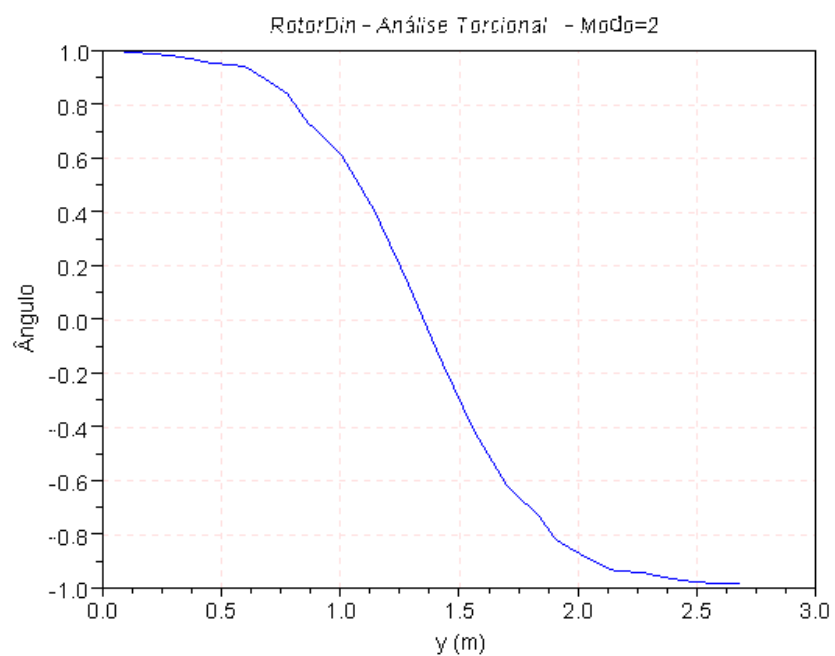


Figura 54: Modo de vibrar à torção, primeiro modo com deformação do veio do rotor que compõem o motor BFN6 500 H2 SP14.

Tabela 17: Frequências naturais à torção do motor W22X 500 KH2 SP01.

Resultado	ROTORDYN
1ª Frequência Natural à Torção [Hz]	0,0
2ª Frequência Natural à Torção [Hz]	398,4

Percebe-se que a análise torsional é mais sensível à discretização do que a análise flexional, portanto, avaliando a convergência dos resultados tem-se o gráfico da Figura 55.

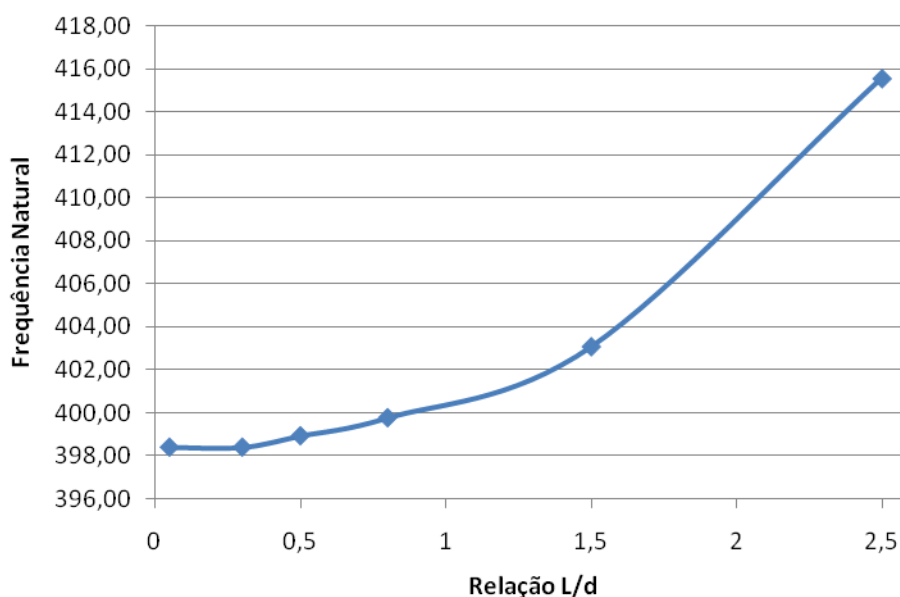


Figura 55: Gráfico que mostra a convergência nos valores da frequência natural à torção a medida que é variada a discretização.

Um espectro típico de um rotor real é mostrado na Figura 56. Observa-se um pico com amplitude elevada na frequência de 50[Hz], que é devido a frequência da rede eléctrica local ou como o ensaio foi realizado com uma velocidade de rotação de 3000[rpm] pode ser devido a um desequilíbrio, pode-se observar também o pico correspondente ao múltiplo da frequência de rotação em 100[Hz], que por sua vez é menor que a componente em três vezes a rotação.

Através da Figura 56 pode-se observar que não é muito simples a análise de um espectro, principalmente porque os ruídos de medição podem influenciar muito nas conclusões. Uma análise mais detalhada do espectro não é realizada, pois a curva foi medida com um acelerómetro posicionado na carcaça do motor, o que não reproduz a real vibração do veio. Vários ensaios seriam necessários para avaliar que tipo de excitação é predominante no rotor.

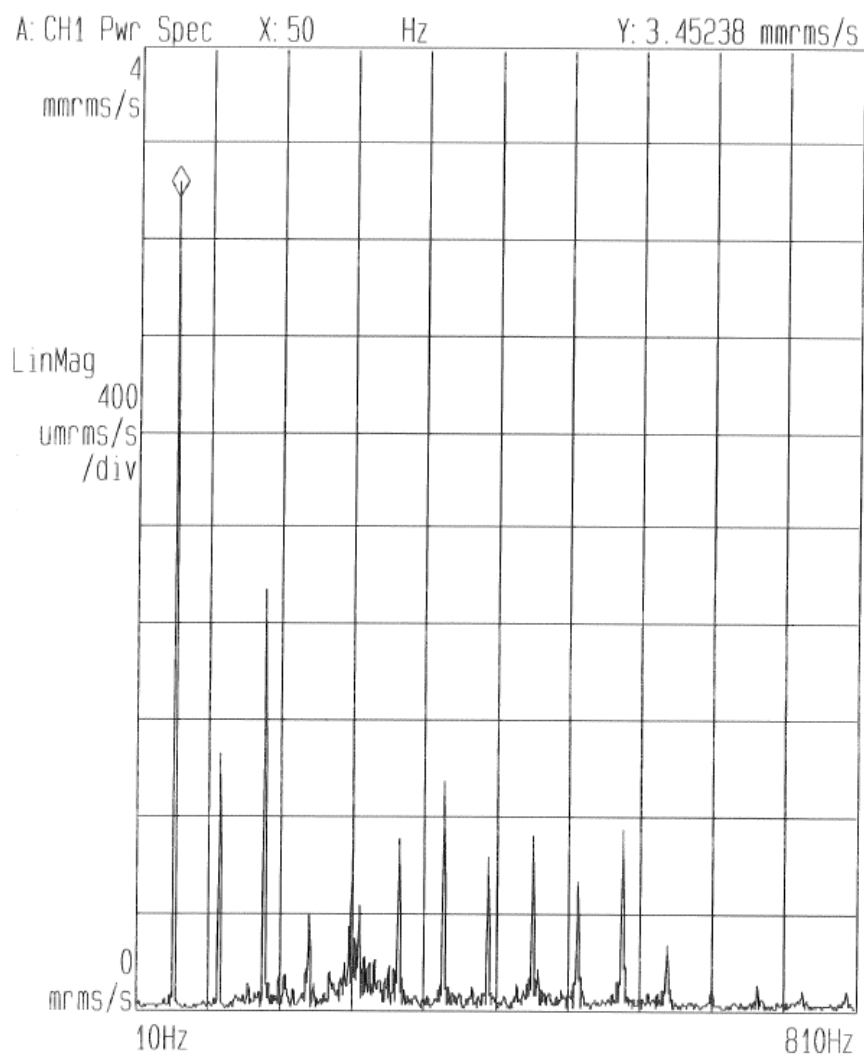


Figura 56: Espectro de frequência do motor BFN6 500 H2 SP14.

7. CONCLUSÕES

Uma metodologia para a obtenção dos parâmetros modais de um sistema rotativo foi proposta. A metodologia apresentada, baseada na teoria de vigas de Timoshenko e no método dos elementos finitos é adequada. O método consiste em obter através do princípio dos trabalhos virtuais ou aplicação das equações de Lagrange as matrizes elementares do sistema. Com estas matrizes são estabelecidas as equações do sistema e então após resolvido o problema de valores e vectores próprios tem-se as frequências naturais e modos de vibrar da estrutura. Sendo que neste trabalho foi formulado o elemento finito de dois nós.

Para a solução do problema um código computacional foi implementado, funções que realizam o cálculo das frequências naturais e reposta, com a consideração dos coeficientes dos mancais variáveis com a velocidade de rotação, foram implementadas, assim como uma função capaz de realizar a análise do veio à torção.

Os resultados obtidos com o código computacional foram comparados com os mostrados no estudo realizado durante o projecto do motor BFN6 500 H2 SP14. As curvas de resposta apresentam comportamento semelhante, excepto as amplitudes nas frequências de ressonância, região que depende muito da discretização da faixa de frequências, assim, como no cálculo com o ROTORDYN as respostas foram calculadas para mais pontos, é razoável aceitar como coerentes resultados de amplitudes maiores. A diferença relativa entre os valores das rotações críticas não ultrapassou 3%, e ainda erros podem ter ocorrido na obtenção dos valores do estudo, logo pode-se considerar que o modelo é uma boa aproximação.

A variação da rigidez do veio devido ao ajuste com interferência entre pacote de chapas e veio foi considerada através dos modelos descritos no trabalho. Como previsto o modelo apresentado por Lalanne e Ferraris [5] é muito susceptível ao número de discos com que se discretiza o pacote de chapas, e assim pode apresentar valores maiores que 60%. O modelo de parâmetros equivalentes se mostrou adequado, a diferença relativa entre os valores das rotações críticas numéricos e experimentais não ultrapassam 6% para o motor BFN6. Porém, este modelo precisa ser ajustado para cada rotor, pois é dependente dos valores de ajuste entre veio e pacote de chapas.

Modelos para considerar a influência da força axial e magnética foram apresentados, porém nos motores estudados a influência de ambas as forças é pequena e foram desconsideradas.

Considera-se outro factor importante no modelo a presença de fundação flexível, sendo que os resultados para um rotor apoiado em mancal de filme de óleo, considerando como apoios flexíveis a respectiva rigidez estrutural do mancal, podem apresentar diferenças relativas em torno de 4%. Conclui-se que o modelo apresentado neste trabalho é bastante adequado pois apresenta bons resultados finais e o tempo computacional é pouco alterado.

A análise do rotor rígido W22X 500 KH2 SP01 mostra que o motor poderá operar como rotor rígido com segurança, como previsto no projecto.

Uma introdução à análise espectral é apresentada é brevemente comentada sobre um espectro medido para o rotor flexível BFN6, para o qual também foi realizada a análise torsional. As frequências à torção apresentam valores elevados e dificilmente serão excitadas durante a operação do motor. As curvas de resposta medidas durante a desaceleração deste motor apresentam em sua maioria comportamento e valores de amplitude coerentes com os obtidos através do código computacional, sendo os valores do desequilíbrio calculados através de algoritmos genéticos numa rotina de optimização (Ribeiro [16]). Considera-se fundamental para uma análise mais crítica a importância de se medir o espectro no veio, que é a fonte de vibrações.

Através dos diversos estudos de casos e simulações realizadas, conclui-se que o código computacional ROTORDYN, de acordo com a realidade da WEGeuro pode ser uma ferramenta importante utilizada nas etapas de projecto de rotores, pois apresenta boa precisão em seus cálculos e fácil utilização após a implementação da entrada de dados com a folha de cálculos proposta.

8. TRABALHOS FUTUROS

O modelo de interferência pode ser aprimorada e melhor estudado com a consideração e experimentação de diferentes tipos e configurações de rotores, a fim de avaliar como as tolerâncias dimensionais do ajuste podem influenciar nos resultados finais.

Avaliações de diversos espectros de frequência do veio devem ser melhor estudados para determinar o tipo de excitação ou problemas do rotor.

A fundação pode ser aprimorada considerando a inserção de mais nós e mais graus de liberdade no sistema. A influência excitação electromagnética pode ser avaliada para ambos os motores.

REFERÊNCIAS.

- [1] K. E. Ruhl, J. L. Booker, A Finite Element Model for Distributed Parameter Turborotor Systems, *ASME Journal of Engineering for Industry*, **94**, (1972), pp 126-132.
- [2] H. D. Nelson, J. M. McVough, The dynamics of rotor-bearings systems using finite elements, *ASME Journal of Engineering for Industry*, **98**, (1976) pp. 593-600.
- [3] R. Gash, Vibration of large turbo-rotors in fluid film bearings on an elastic foundation, *Journal of Sound and Vibration*, **47**, (1976) pp. 53-73.
- [4] L. -W. Chen, D. -M. Ku, *Analysis of whirl speeds of rotor-bearings systems with internal damping by C0 finite elements*, Finite Elements in Analysis and Design, **9**, (1991) pp. 169-176.
- [5] M. Lalanne, G. Ferraris, *Rotordynamics Prediction in Engineering*, New York, John Wiley & Sons Ltd, (1990).
- [6] P. L. Gatti, V. Ferrari, *Applied Structural and Mechanical Vibrations: Theory, Methods and measuring Instrumentation*, London, E&FN SPON, (1999).
- [7] T. P. Holopainen, A. Tenhunen, E. Lantto, A. Arkkio, Unbalanced magnetic pull induced by arbitrary eccentric motion of cage rotor in transient operation. Part 1: Analytical model, *Electrical Engineering*, **88**, (2005), pp 13-24.
- [8] T. P. Holopainen, A. Tenhunen, E. Lantto, A. Arkkio, Unbalanced magnetic pull induced by arbitrary eccentric motion of cage rotor in transient operation. Part 2: Verification and numerical parameter estimation, *Electrical Engineering*, **88**, (2005), pp 25-34.
- [9] T. P. Holopainen, A. Tenhunen, A. Arkkio, Electromechanical interaction in rotordynamics of cage induction motors, *Journal of sound and vibration*, **284**, (2005), pp 733-755.
- [10] M. A. Andrianoely, A. Berlioz, G. Ferraris, M. Lalanne, A. Thivillier, *Rotorinsa: User manual*, INSA de Lyon, Ver. 3.1.2, (2005), pp 80-81.

- [11] E. R. Ceccon, *Controle de vibração torcional usando neutralizadores dinâmicos viscoelásticos*, Curitiba, UTFPR, Monografia, (2008).
- [12] J. L. Meriam, L. G. Kraige, *Mecânica: Dinâmica*, Rio de Janeiro, LTC, (1997).
- [13] F. H. Prasad, Determination of stiffness of roller bearings: an alternative approach, *IEI – MC*, **84**, (2004), pp 186-192.
- [14] J. E. Shigley, C. R. Mischke, *Machine Design Fundamentals*, New York, McGraw Hill, (1989).
- [15] SPECMAN, *Manual do Curso Técnico: Analista de Vibrações – Categoria II*, Mobius Institute, (2005).
- [16] E. A. Ribeiro, *Análise Dinâmica de Motores Eléctricos: Modelo e Controlo, Projecto*, (2009).
- [17] S. Edwards, A. W. Lees, M. I. Friswell, Experimental identification of excitation and support parameters of a flexible rotor-bearings-foundation system form a single run-down, *Journal of Sound and Vibration*, (2000), pp. 963-992.
- [18] Y. C. Fung, P. Tong, *Classical and Computacional Solid mechanics*, World Scientific, Singapore, (2004).
- [19] R. C. Hibbler, *Resistência dos Materiais*, Rio de Janeiro, LTC, (2000).
- [20] S. Timoshenko, J. N. Goodier, *Teoria da Elasticidade*, Rio de Janeiro, Guanabara Dois, (1980).
- [21] K. Bathe, *Finite Elements Procedures*, Englewood Cliffs, Prentice-Hall, (1982).
- [22] T. J. R. Hughes, *The Finite Element Method*, Mineola, Dover Publications, (2000).
- [23] M. P. Ribeiro, *Robótica: Conceitos Básicos*, último acesso em: 06/Maio/2009.

Disponível em: <http://www.de9.ime.eb.br/~mpribeiro/robot/DCA0414%20-%20UFRN/cap2.pdf>

- [24] Y. Kang, Y.-P. Chang, J. -W. Tsai, L. -H. Mu, Y. -F. Chang, An investigation in stiffness effects on Dynamics of rotor-bearing-foundation systems, *Journal of Sound and Vibration*, **231**, (2000), pp 343-374.
- [25] E. A. Ribeiro, A. Kokot, H. L. V. Santos, M. A. Luersen, C. A. Bavastri, *Modelo de fundação em máquinas rotativas utilizando parâmetros equivalentes generalizados*, Salvador, CONEM, CON08-1817, (2008).
- [26] A. J. M. Cardoso, *Diagnóstico de avarias em motores de indução trifásicos*, Coimbra, Coimbra, 1991.
- [27] A. Muszynska, *Rotordynamics*, Taylor & Francis, Nevada, 2005.
- [28] Estudo do Motor BFN6 500 H2 SP14, WEGeuro Indústria Eléctrica, (2008).

APÊNDICE A – ANÁLISE DA ENERGIA DE DEFORMAÇÃO DEVIDO A FLEXÃO E OBTENÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ

Desprezando os termos não lineares da equação 4.47. O desenvolvimento da integral para o termo (I) resulta em:

$$\begin{aligned} (I) &= \frac{E}{2} \int_0^L \int_S \left(-x \frac{\partial \psi}{\partial y} - z \frac{\partial \theta}{\partial y} \right)^2 dS dy = \\ &= \frac{E}{2} \int_0^L \int_S \left[x^2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + z^2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)^2 + 2xz \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right) \right] dS dy \end{aligned} \quad A/1$$

na qual o terceiro termo da integral dupla é nulo como mostrado no Quadro A 1.

Para coordenadas retangulares:

$$\int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-b/2}^{b/2} 2xz \, dy \, dz \, dx \, dy$$

0

Para coordenadas polares:

$$x = r \cos[\theta];$$

$$z = r \sin[\theta];$$

$$\int_0^L \int_0^R \int_{-\pi}^{\pi} 2xz \, dy \, dr \, d\theta \, dy$$

0

Quadro A 1 – Desenvolvimento do primeiro termo da energia potencial de deformação em software de matemática simbólica.

Os termos $\mathbf{K}_1$ e $\mathbf{K}_2$ da equação 4.69 são integrados de forma completa como mostrado no Quadro A 2.

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}_i &= \begin{pmatrix} 1 - y/L \\ y/L \end{pmatrix}; \text{MatrixForm}[\mathbf{N}_i] \\
&\begin{pmatrix} 1 - \frac{y}{L} \\ \frac{y}{L} \end{pmatrix} \\
\mathbf{B}_i &= \partial_y \mathbf{N}_i; \text{MatrixForm}[\mathbf{B}_i] \\
&\begin{pmatrix} -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{pmatrix} \\
\mathbf{K}_1 &= \int_0^L \mathbf{B}_i \cdot \text{Transpose}[\mathbf{B}_i] \, E E I_x \, dy; \text{MatrixForm}[\mathbf{K}_1] \\
&\begin{pmatrix} \frac{E E I_x}{L} & -\frac{E E I_x}{L} \\ -\frac{E E I_x}{L} & \frac{E E I_x}{L} \end{pmatrix} \\
\mathbf{K}_2 &= \int_0^L \mathbf{B}_i \cdot \text{Transpose}[\mathbf{B}_i] \, E E I_z \, dy; \text{MatrixForm}[\mathbf{K}_2] \\
&\begin{pmatrix} \frac{E E I_z}{L} & -\frac{E E I_z}{L} \\ -\frac{E E I_z}{L} & \frac{E E I_z}{L} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Quadro A 2 – Termos de rigidez relativos à flexão.

Os termos relativos ao corte devem ser sub-integrados com o objectivo de evitar o locking, ou bloqueio de solução. Para proceder a sub-integração gaussiana deve-se modificar os limites de integração para adequar o problema ao modelo:

$$\begin{cases} 0 \rightarrow L \Rightarrow y \\ -1 \rightarrow 1 \Rightarrow \xi \end{cases}, \quad \frac{dy}{d\xi} = \frac{L}{2}$$

C/1

e aplicando a quadratura gaussiana para um ponto e com peso w_f igual a 2, conforme a Tabela A 1, tem-se:

$$\int_0^L f(y) dy = \int_{-1}^1 f(\xi) \frac{L}{2} d\xi = w_f(\xi=0) \frac{L}{2} = 2 f(\xi=0) \frac{L}{2} = L f(\xi=0).$$

C/2

Então pode-se calcular os termos relativos ao corte (Quadro A 3).

Tabela A 1: Posição dos pontos e pesos para a quadratura gaussiana no intervalo de -1 a 1.

N (nº de pontos)	Localização dos pontos	Pesos
1	0.0	2.0
2	$\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$	1.0

$$y=L/2 \ (\xi+1)$$

$$\frac{1}{2} L (1 + \xi)$$

$$K3=L \ \mu \ Ni.Transpose[Ni] \ G \ S/. \xi \rightarrow 0; MatrixForm[K3]$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} G L S \mu & \frac{1}{4} G L S \mu \\ \frac{1}{4} G L S \mu & \frac{1}{4} G L S \mu \end{pmatrix}$$

$$K4=L \ \mu \ Ni.Transpose[Bi] \ G \ S/. \xi \rightarrow 0; MatrixForm[K4]$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} G S \mu & \frac{G S \mu}{2} \\ -\frac{1}{2} G S \mu & \frac{G S \mu}{2} \end{pmatrix}$$

$$K5=L \ \mu \ Bi.Transpose[Ni] \ G \ S/. \xi \rightarrow 0; MatrixForm[K5]$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} G S \mu & -\frac{1}{2} G S \mu \\ \frac{G S \mu}{2} & \frac{G S \mu}{2} \end{pmatrix}$$

$$K6=L \ \mu \ Bi.Transpose[Bi] \ G \ S/. \xi \rightarrow 0; MatrixForm[K6]$$

$$\begin{pmatrix} \frac{G S \mu}{L} & -\frac{G S \mu}{L} \\ -\frac{G S \mu}{L} & \frac{G S \mu}{L} \end{pmatrix}$$

$$K7=L \ \mu \ Ni.Transpose[Ni] \ G \ S/. \xi \rightarrow 0; MatrixForm[K7]$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} G L S \mu & \frac{1}{4} G L S \mu \\ \frac{1}{4} G L S \mu & \frac{1}{4} G L S \mu \end{pmatrix}$$

$$K8=-L \ \mu \ Ni.Transpose[Bi] \ G \ S/. \xi \rightarrow 0; MatrixForm[K8]$$

$$\begin{pmatrix} \frac{G S \mu}{2} & -\frac{1}{2} G S \mu \\ \frac{G S \mu}{2} & -\frac{1}{2} G S \mu \end{pmatrix}$$

$$K9=-L \ \mu \ Bi.Transpose[Ni] \ G \ S/. \xi \rightarrow 0; MatrixForm[K9]$$

$$\begin{pmatrix} \frac{G S \mu}{2} & \frac{G S \mu}{2} \\ -\frac{1}{2} G S \mu & -\frac{1}{2} G S \mu \end{pmatrix}$$

$$K10=L \ \mu \ Bi.Transpose[Bi] \ G \ S/. \xi \rightarrow 0; MatrixForm[K10]$$

$$\begin{pmatrix} \frac{G S \mu}{L} & -\frac{G S \mu}{L} \\ -\frac{G S \mu}{L} & \frac{G S \mu}{L} \end{pmatrix}$$

Quadro A 3 – Integração dos termos relativos ao corte.

Posicionando todos os termos na matriz global de rigidez, pode-se chegar na matriz mostrada no Quadro A 4.

$$\begin{pmatrix} \frac{G S \mu}{L} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} G S \mu & -\frac{G S \mu}{L} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} G S \mu \\ 0 & \frac{G S \mu}{L} & \frac{G S \mu}{2} & 0 & 0 & -\frac{G S \mu}{L} & \frac{G S \mu}{2} & 0 \\ 0 & \frac{G S \mu}{2} & \frac{E E I x}{L} + \frac{1}{4} G L S \mu & 0 & 0 & -\frac{1}{2} G S \mu & -\frac{E E I x}{L} + \frac{1}{4} G L S \mu & 0 \\ -\frac{1}{2} G S \mu & 0 & 0 & \frac{E E I z}{L} + \frac{1}{4} G L S \mu & \frac{G S \mu}{2} & 0 & 0 & -\frac{E E I z}{L} + \frac{1}{4} G L S \mu \\ -\frac{G S \mu}{L} & 0 & 0 & \frac{G S \mu}{2} & \frac{G S \mu}{L} & 0 & 0 & \frac{G S \mu}{2} \\ 0 & -\frac{G S \mu}{L} & -\frac{1}{2} G S \mu & 0 & 0 & \frac{G S \mu}{L} & -\frac{1}{2} G S \mu & 0 \\ 0 & \frac{G S \mu}{2} & -\frac{E E I x}{L} + \frac{1}{4} G L S \mu & 0 & 0 & -\frac{1}{2} G S \mu & \frac{E E I x}{L} + \frac{1}{4} G L S \mu & 0 \\ -\frac{1}{2} G S \mu & 0 & 0 & -\frac{E E I z}{L} + \frac{1}{4} G L S \mu & \frac{G S \mu}{2} & 0 & 0 & \frac{E E I z}{L} + \frac{1}{4} G L S \mu \end{pmatrix}$$

Quadro A 4 – Matriz global de rigidez.

APÊNDICE B – FORÇA AXIAL

Ao realizar a integração, pode mostrar que a matriz de rigidez devido aos esforços axiais pode ser obtida como mostrada no Quadro B 1.

$$\begin{aligned}
 K21 &= \int_0^L Bi \cdot \text{Transpose}[Bi] F_0 dy; \text{MatrixForm}[K21] \\
 &\begin{pmatrix} \frac{F_0}{L} & -\frac{F_0}{L} \\ -\frac{F_0}{L} & \frac{F_0}{L} \end{pmatrix} \\
 K22 &= \int_0^L Bi \cdot \text{Transpose}[Bi] F_0 dy; \text{MatrixForm}[K22] \\
 &\begin{pmatrix} \frac{F_0}{L} & -\frac{F_0}{L} \\ -\frac{F_0}{L} & \frac{F_0}{L} \end{pmatrix} \\
 K23 &= \begin{pmatrix} K21_{[1,1]} & 0 & 0 & 0 & K21_{[1,2]} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K22_{[1,1]} & 0 & 0 & 0 & K22_{[1,2]} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K21_{[2,1]} & 0 & 0 & 0 & K21_{[2,2]} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K22_{[2,1]} & 0 & 0 & 0 & K22_{[2,2]} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \text{MatrixForm}[K23] \\
 &\begin{pmatrix} \frac{F_0}{L} & 0 & 0 & 0 & -\frac{F_0}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{F_0}{L} & 0 & 0 & 0 & -\frac{F_0}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{F_0}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{F_0}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{F_0}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{F_0}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Quadro B 1 – Matriz de rigidez devido aos esforços axiais.

Para o elemento de Timoshenko utilizando funções de interpolação linear a matriz de rigidez devido às forças magnéticas é mostrada no Quadro B 2.

$$\begin{pmatrix} \frac{fL}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{fL}{6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{fL}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{fL}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{fL}{6} & 0 & 0 & 0 & \frac{fL}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{fL}{6} & 0 & 0 & 0 & \frac{fL}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Quadro B 2 – Matriz de rigidez devido às forças magnéticas.

APÊNDICE C – DETERMINAÇÃO DA MATRIZ DE MASSA

O Quadro C 1 apresenta o desenvolvimento das integrais das parcelas da equação 4.123.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{N}_i &= \begin{pmatrix} 1 - y/L \\ y/L \end{pmatrix}; \text{MatrixForm}[\mathbf{N}_i] \\
 &\begin{pmatrix} 1 - \frac{y}{L} \\ \frac{y}{L} \end{pmatrix} \\
 \mathbf{M}_1 &= \rho S \int_0^L \mathbf{N}_i \cdot \text{Transpose}[\mathbf{N}_i] \, dy; \text{MatrixForm}[\mathbf{M}_1] \\
 &\begin{pmatrix} \frac{LS\rho}{3} & \frac{LS\rho}{6} \\ \frac{LS\rho}{6} & \frac{LS\rho}{3} \end{pmatrix} \\
 \mathbf{M}_2 &= \rho S \int_0^L \mathbf{N}_i \cdot \text{Transpose}[\mathbf{N}_i] \, dy; \text{MatrixForm}[\mathbf{M}_2] \\
 &\begin{pmatrix} \frac{LS\rho}{3} & \frac{LS\rho}{6} \\ \frac{LS\rho}{6} & \frac{LS\rho}{3} \end{pmatrix} \\
 \mathbf{M}_3 &= \rho I \int_0^L \mathbf{N}_i \cdot \text{Transpose}[\mathbf{N}_i] \, dy; \text{MatrixForm}[\mathbf{M}_3] \\
 &\begin{pmatrix} \frac{IIL\rho}{3} & \frac{IIL\rho}{6} \\ \frac{IIL\rho}{6} & \frac{IIL\rho}{3} \end{pmatrix} \\
 \mathbf{M}_4 &= \rho I \int_0^L \mathbf{N}_i \cdot \text{Transpose}[\mathbf{N}_i] \, dy; \text{MatrixForm}[\mathbf{M}_4] \\
 &\begin{pmatrix} \frac{IIL\rho}{3} & \frac{IIL\rho}{6} \\ \frac{IIL\rho}{6} & \frac{IIL\rho}{3} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Quadro C 1 – Parcelas correspondentes a matriz de massa elementar.

Baseado na ordenação dos graus de liberdade apresentada na equação 4.124 expandindo os termos e aplicando as equações de Lagrange obtém-se a matriz elementar de massa (Quadro C 2).

$$\begin{pmatrix} \frac{LS\rho}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{LS\rho}{6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{LS\rho}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{LS\rho}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{IIL\rho}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{IIL\rho}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{IIL\rho}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{IIL\rho}{6} \\ \frac{LS\rho}{6} & 0 & 0 & 0 & \frac{LS\rho}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{LS\rho}{6} & 0 & 0 & 0 & \frac{LS\rho}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{IIL\rho}{6} & 0 & 0 & 0 & \frac{IIL\rho}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{IIL\rho}{6} & 0 & 0 & 0 & \frac{IIL\rho}{3} \end{pmatrix}$$

Quadro C 2 – Matriz elementar de massa

APÊNDICE D – DETERMINAÇÃO DA MATRIZ GIROSCÓPICA

A partir do resultado obtido com o cálculo da integral da parcela correspondente aos efeitos giroscópicos (equação 4.125) pode-se apresentar o Quadro D 1.

$$G1 = 2 \rho II \Omega \int_0^L Ni \cdot \text{Transpose}[Ni] \, dy; \text{MatrixForm}[G1]$$

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} II L \rho \Omega & \frac{1}{3} II L \rho \Omega \\ \frac{1}{3} II L \rho \Omega & \frac{2}{3} II L \rho \Omega \end{pmatrix}$$

Quadro D 1 – parcela correspondente a matriz de rigidez.

Executando o procedimento de expansão dos termos e aplicando as equações de Lagrange obtém-se a matriz giroscópica elementar (Quadro D 2).

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} II L \rho \Omega & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} II L \rho \Omega \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} II L \rho \Omega & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} II L \rho \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} II L \rho \Omega & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} II L \rho \Omega \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} II L \rho \Omega & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} II L \rho \Omega & 0 \end{pmatrix}$$

Quadro D 2 – parcela correspondente a matriz de rigidez.