

**IncurSION on Crack Propagation using a Meshless Method**  
**Propagação de Fenda Utilizando um Método Sem Malha**

*Luís Filipe Gonçalves Pires*

**Dissertação do MIEM**

Orientador na FEUP: Prof<sup>ª</sup> Lúcia Maria de Jesus Simas Dinis

Co-orientador na FEUP: Doutor Jorge Américo Oliveira Pinto Belinha



**FEUP**

**Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto**  
**Mestrado Integrado em Engenharia Mecânica**

Porto, Junho de 2012

## Agradecimentos

Findado este trabalho, encerra-se um capítulo da minha vida que não se resume a meio ano de trabalho de dissertação mas sim a seis anos neste meu percurso académico. Chegada esta altura, parece-me de cariz fundamental fazer os devidos agradecimentos a todas as pessoas que contribuíram de forma fundamental neste meu percurso.

Em primeiro lugar gostaria de agradecer à Professora Lúcia Maria de Jesus Simas Dinis, minha orientadora na dissertação, pela oportunidade e todas as condições que me proporcionou para o desenvolvimento deste projecto desde o primeiro momento, por toda a compreensão e paciência demonstrada nos momentos de maior pressão.

De seguida, gostaria de fazer um agradecimento muito especial ao Doutor Jorge Américo Oliveira de Pinto Belinha, meu co-orientador neste projecto sem o qual esta dissertação nunca teria existido, por toda a compreensão, disponibilidade e paciência demonstradas ao longo de todo o projecto. Agradecer-lhe por toda a sinceridade e frontalidade demonstradas em conversa comigo e pelos ensinamentos que me transmitiu.

Por todo o companheirismo, amizade e apoio demonstrados ao longo de todo o meu percurso académico queria agradecer ao José Ribeiro, ao Pedro Fonseca e ao Pedro Lebre (*tri-force*), ao Vítor Ferreira, ao David Gonçalves, ao Rafael Lima, ao Luís Guimarães, à Catarina Silva, à Sofia Pinto, à Mariana Ascensão, ao Albano Marinho, ao Fernando Ribeiro e ao Rui Gonçalves. Porque o percurso académico não é só uma evolução a nível de conhecimentos e preparação para o mundo profissional, é também um espaço onde a nossa maturidade a nível pessoal deve ser atingida e sentimentos nobres como a amizade incondicional, o companheirismo e a ajuda completamente desinteressada da obtenção de dividendos são valores muito raros hoje em dia nesta crise de valores em que vivemos; e por que todas as pessoas referidas acima à sua maneira deixaram a sua marca e demonstraram-me que é possível encontrar todas essas características num ser humano, um muito obrigado por terem feito parte de tudo isto.

Gostaria de agradecer, em especial, ao Rui Santos por todo o apoio incondicional quer a nível académico quer pessoal, pessoa sem a qual este capítulo da minha vida teria sido bem mais cinzento.

Agradeço ao Pedro Fernandes, ao João Jacob, à Eliana Pires, ao Ângelo Veiga e à Sofia Ferro por todos os momentos de boa-disposição, descontração e ajuda pessoal que me deram não só recentemente mas em todas as vezes que precisei. Um sincero obrigado por me alegrarem os fins-de-semana no Barnabé.

Um agradecimento sincero ao Ventura por todos os momentos de apoio, sempre com boa disposição.

A ti Bianca, agradeço-te por toda a amizade, carinho e amor demonstrados que tornaram todos os momentos complicados deste percurso mais leves.

Finalmente gostaria de agradecer à minha Mãe e à minha Avó, pessoas sem as quais eu nunca teria chegado onde cheguei, quer pelo Amor quer pelos ensinamentos que me deram e proporcionaram ao longo da minha vida que fazem de mim aquilo que eu sou hoje.

## **Resumo**

O objectivo desta tese é estender a aplicação de métodos sem malha à fractura mecânica.

Nos últimos anos, a comunidade científica tem testemunhado o aparecimento e desenvolvimento de diversos métodos sem malha. O método de elementos finitos (MEF), é um método numérico muito conhecido e desenvolvido para diversas aplicações. Contudo, a utilização de geometrias complexas ou de elementos muito distorcidos gera funções de forma com baixa qualidade afectando directamente a performance do MEF. Os métodos sem malha parecem suprimir essa necessidade. O método sem malha utilizado, para o efeito pretendido neste trabalho, foi o NNRPIM (Natural Neighbour Radial Point Interpolation Method), método numérico cujo desenvolvimento foi efectuado na FEUP. Embora seja recente, este método numérico tem sido aplicado a vários campos de engenharia.

Este trabalho tem como objectivo alargar a aplicação do NNRPIM à análise da fractura mecânica. Numa primeira fase obteve-se, numericamente os factores de intensidade de tensão e os campos de tensão na zona da fenda. De seguida, um algoritmo simples foi implementado de modo a permitir simular o efeito de abertura e propagação de fenda, aproveitando as potencialidades do NNRPIM.

## **Abstract**

The brief objective of the present project is to extend a meshless method to fracture mechanics.

In the last twenty years the scientific community has witness the birth and development of several meshless methods. The Finite Element Method (FEM) complex geometries or the generation of highly distorted elements causes low quality shape functions, which affects directly the performance of the FEM. Meshless methods appear to suppress this need. The meshless method used in this project is the Natural Neighbour Radial Point Interpolation Method (NNRPIM), a numerical method developed in FEUP. Although being a recent numerical method, the NNRPIM has already been extended to many engineering fields.

The aim of this project is the extension of the NNRPIM to mechanic fracture analysis. At first, was obtained, numerically, the stress intensity factors and the stress fields around the crack tip. Then, a basic algorithm was implemented in order to simulate the crack opening and propagation of the tip, taking advantage from the NNRPIM's capabilities.

# **Índice**

1 – Introdução .....	1
1.1– Estado de Arte .....	1
1.2 – Motivação do Trabalho .....	4
1.3 – Desenvolvimento da tese.....	5
2 - Métodos sem malha .....	7
2.1- Introdução aos métodos sem malha .....	7
2.2 - NNRPIM (Natural Neighbour Radial Point Interpolation Method) .....	9
2.2.1 – Vizinhos Naturais.....	10
2.2.2 – Conectividade Nodal e Células de Influência .....	12
2.2.3 – Esquema de Integração.....	14
2.2.4 – Função de Interpolação .....	16
2.3 - Mecânica da Deformação dos Sólidos .....	20
2.3.1-Equações Fundamentais.....	20
2.3.2 - Relação da tensão com a deformação .....	22
2.3.3 - Equações de equilíbrio.....	23
2.3.4 - Problema Bidimensional .....	23
2.4 – Formulação Matricial .....	27
2.4.1 – Forma Fraca.....	27
2.4.2 – Matriz de Rigidez .....	30
2.4.3 – Vector de forças .....	31
2.4.4 – Equação Matricial do Problema Elasto-Estático .....	32
2.5 – Algoritmo de abertura de fenda.....	33
3-Iniciação aos métodos sem malha.....	37
3.1 - RPIM.....	37
3.1.1 - Estudo da convergência .....	38
3.1.2 - Estudo da integração .....	42
3.1.3 - Estudo da influência.....	43
3.2 - Resultados NNRPIM e RPIM.....	46
3.2.1 - Placa quadrada sujeita a tensão uniaxial .....	47
3.2.2 - Viga cantilever.....	54
3.2.3 - Placa infinita com um orifício circular .....	58
4 - Métodos sem malha aplicados à propagação de fendas .....	62

4.1 - Método sem malha com enriquecimento de funções de forma para análise de propagação de fendas.....	62
4.1.1 – Problema de fenda aplicando malha sem densificação .....	62
4.1.2 - Problema de fenda aplicando uma malha mais densa na zona da fenda.....	66
4.2 - Exemplos de Propagação de Fendas Utilizando o NNRPIM.....	70
4.2.1 - Placa com fenda central sujeita a tensão de corte .....	70
4.2.2 - Placa com corte a 45° .....	78
4.2.3 - Placa rectangular com fenda sujeita a carga pontual .....	90
5 - Conclusões .....	94
6 - Referências.....	98

# 1 – Introdução

## 1.1– Estado de Arte

Os métodos numéricos assumem um papel fundamental em engenharia. É através destes métodos que é possível obter solução dos modelos matemáticos, constituídos por equações diferenciais. Estes modelos matemáticos resultam de modelos computacionais formulados para resolver problemas de engenharia.

Entre os vários métodos numéricos existentes, o Método de Elementos Finitos (MEF) (Zienkiewicz, 1970; Turner, 1956; Argyris, 1960) é o mais popular.

No entanto, com o aparecimento de novos desafios e imposições em engenharia surgiu a necessidade de suprimir algumas lacunas que o MEF apresentava, de que é exemplo, a perda de precisão nos casos de domínios com geometrias mais complexas ou geometrias em que haja distorção de malha. Desta forma, os métodos sem malha têm, nos últimos anos, assumido um papel bastante importante na comunidade científica de engenharia.

De uma forma resumida, apresentam-se os seguintes métodos sem malha:

- **Métodos das Diferenças Finitas Generalizadas (MDFG)** (Liszka, 1980), consiste na aplicação do método das diferenças finitas clássico a uma nuvem de pontos distribuídos de forma irregular.
- **Método das Partículas “Smoothed Particle Hydrodynamics Approach” (SPH)** (Monaghan, 1988), utiliza uma representação integral da função teste.
- **Método das Funções de Base Radial (RBFM)** (Kansa, 1990a; Kansa, 1990b), usa funções de base radial, respeitando uma norma euclidiana, para interpolar as variáveis em estudo no domínio total ou pequenos subdomínios do problema. Tendo sido, inicialmente, aplicado a problemas dimensionais de interpolação de dados (Hardy, 1971), este método não necessita de qualquer esquema de integração considerando-se um método verdadeiramente sem malha.

- **Método Livre de Elementos de Galerkin (EFGM)** (Belytschko, 1994), inicialmente proposto por Nayroles (Nayroles, 1992), este método visa a ser uma generalização do Método de Elementos Finitos (MEF). Utiliza uma função de aproximação que é obtida pelo método dos mínimos quadrados. Para integrar as equações diferenciais, é possível utilizar os nós da malha nodal ou uma malha de células de integração independente da discretização nodal (Belytschko, 1996a; Dolbow, 1999; Chen, 2001). É um método com ampla aplicabilidade, sendo utilizado quer em problemas de mecânica dos sólidos quer de fluidos.
- **Método do Núcleo Corrigido (RKPM)** (Liu, 1995), é um método que proporciona um grau de consistência à aproximação do integral finito. Tal como o EFGM também este método possui uma vasta gama de utilização na mecânica dos sólidos e fluidos.
- **Método dos Pontos Finitos (FPM)** (Oñate, 1996a), é um método, que resulta de uma técnica de estabilização (Oñate, 1996b) com uma técnica de colocação pontual usada em conjunto com a aproximação do método dos mínimos quadrados.
- **Método das Nuvens-hp** (Duarte, 1996), utiliza a mesma metodologia do EFGM mas é bastante mais flexível no que toca ao aumento do grau do polinómio que forma as funções de forma e face à introdução de novos nós na malha nodal à medida que se dá análise.
- **Método de Petrov-Galerkin (MPGL)** (Atluri, 1996), sendo considerado um verdadeiro método sem malha, este método foi inicialmente desenvolvido para resolver problemas de potencial linear e não linear. Tem igualmente uma utilização muito vasta, tal como os métodos RKPM e EFGM.
- **Método das Nuvens Finitas (FCM)** (Aluru, 2000), utiliza, tal como o RKPM, uma técnica de núcleo corrigido fixo.
- **Método dos Elementos Naturais (NEM)** (Braun, 1995; Sukumar, 2001), este método aplica o método de Galerkin para resolução das equações em derivadas parciais. A função aproximada e a função teste são construídas utilizando as coordenadas dos vizinhos naturais (Sibson). As células de Voronoï e a triangularização de Delaunay são a base das coordenadas dos vizinhos naturais.
- **Método de Interpolação de Pontos (PIM)** (Liu, 2002), emprega técnicas especiais para construir as funções polinomiais de interpolação. Embora seja , essencialmente, muito semelhante ao MEF, a principal vantagem deste método é

apresentar a propriedade de delta Kronecker, facilitando, a imposição de condições de fronteira essenciais e naturais. Como variáveis deste método existe ainda o NS-PIM(Wu, 2009) que, juntamente com as propriedades do PIM emprega a utilização da forma fraca de Galerkin e o ES-PIM (Wu, 2010) muito utilizado para problemas de transferências de calor.

- **Método de Interpolação de Pontos Radial (RPIM)** (Wang, 2002), é um método que se baseia na combinação de funções de base radiais e polinomiais. A utilização de funções de base radiais permite ultrapassar a singularidade associada aos métodos sem malha baseados unicamente em funções de base polinomiais.
- **Método das soluções fundamentais (MFS)** (Mathon R., 1977) consiste na aproximação da solução do problema através da combinação linear de soluções fundamentais que correspondem a certos pontos de singularidades (pontos-fonte) localizados fora ou dentro do domínio. Embora tenha sido formulado há décadas atrás, apenas ganhou mais relevo, recentemente, na comunidade científica.
- **Boundary Distributed Source Method (BDS)** (Liu, 2010), é um método com base no mesmo conceito que o MFS, contudo neste método os pontos-fonte coincidem com os pontos de colocação sendo ambos colocados directamente na fronteira do domínio do problema. O objectivo é remover as singularidades das soluções fundamentais sobrepondo os pontos-fonte.
- **Edge-Based Point Interpolation Method (ES-PIM)** (Wu, 2010) combina a construção de funções de forma utilizando o polinómio do PIM com a propriedade da função delta Kronecker o que viabiliza o tratamento directo das condições de fronteira essenciais.
- **Node-Based Smoothed Point Interpolation Method (NS-PIM)** (Wu, 2009) é um método muito útil para problemas de transferência de calor que contemplam geometrias complexas e condições de fronteira igualmente complicadas. As funções de forma são construídas à semelhança do ES-PIM, através do PIM que possui a propriedade da função Delta facilitando assim a aplicação das condições de fronteira. É empregue uma forma fraca de Galerkin suave, para criar sistemas de equações discretizados, e domínios nodais suaves são utilizados para levar a cabo uma execução do método suave e a integração numérica.

Incindindo o tema desta tese na abertura e propagação de fendas é importante referir a investigação mais recente e relevante neste campo.

Em (Citarella, 2009) o Método de Elementos Finitos e o Double Boundary Element Method (FEM-DBEM), foram usados em conjunto para tirar partido das vantagens dos dois métodos, foi estudada a propagação de fenda com tensões residuais na zona da abertura da fenda por carga de fadiga ou por deformações plásticas do material. No trabalho de (Rao, 2001) o Método de Elementos Finitos e o Método Livre de Elementos de Galerkin (FEM-EFGM), foram usados para análise de propagação de fendas. Neste caso, EFGM foi utilizado para evitar a reorganização da malha que é necessária no MEF. Optou-se por utilizar EFGM na zona da fenda e no restante domínio utilizou-se o MEF. Mais recentemente em (Bayetesh, 2011; Giner, 2011) o The Extended Finite Element Method (X-FEM) (Bayesteh, 2011; Giner, 2011) foi utilizado para análise de fractura em cascas com enriquecimento na zona da fenda não sendo necessários tantos elementos para análise.

## **1.2 – Motivação do Trabalho**

Numa altura em que os métodos sem malha assumem cada vez mais importância em aplicações de engenharia, é importante estudar todas as hipóteses às quais estes métodos se podem aplicar. Uma vez que, a propagação de fendas é uma preocupação a ter em conta no que toca à segurança e à integridade de qualquer estrutura ou corpo é fundamental, poder prever com a maior exactidão e precisão possível o comportamento face a determinadas condições de fronteira na presença de uma fenda.

É neste contexto, que os métodos sem malha podem representar uma ferramenta muito importante tendo em conta as suas potencialidades. Historicamente, o método de elementos finitos, é um dos métodos numéricos mais utilizados na comunidade científica em aplicações de engenharia, e como referido anteriormente, já vários trabalhos foram feitos no sentido de resolver e estudar problemas de propagação de fendas. No entanto, os métodos sem malha são mais adequados, que o método de elementos finitos, para resolver problemas com grandes distorções e grande gradiente de deformações como é o caso da propagação e fendas. Revelando uma maior precisão no campo de tensões, é pois de enorme interesse,

realizar um trabalho cujo tema se debruça na aplicação de um método numérico com as características referidas.

### **1.3 – Desenvolvimento da tese**

Neste primeiro capítulo, abordou-se, de uma forma introdutória o conceito de métodos sem malha. Alguns exemplos de trabalhos desenvolvidos na comunidade científica, foram descritos e ficando patente a rápida e recente evolução dos métodos sem malha.

De seguida, foram referidos e descritos, de forma breve, alguns trabalhos já realizados sobre o estudo de métodos numéricos aplicados a casos de abertura e propagação de fendas. O primeiro capítulo termina com uma reflexão acerca da importância e das razões que levaram a que este trabalho fosse desenvolvido, descrevendo-se ainda de forma breve e resumida os pontos que serão abordados ao longo deste trabalho.

Após esta fase introdutória, no capítulo seguinte, faz-se uma descrição geral dos métodos sem malha, descrevendo cada uma das fases principais que os constitui (funções de aproximação ou interpolação, formulação e integração). Posteriormente, avança-se para uma descrição mais particular abordando o método sem malha a utilizar na dissertação, NNRPIM. Apresenta-se o método fazendo menção dos pontos mais importantes de salientar e que melhor caracterizam o NNRPIM: vizinhos naturais, conectividade nodal, esquema de integração e funções de interpolação.

Ainda no capítulo 2, são introduzidas com algum pormenor alguma noções de mecânica da deformação dos sólidos, essenciais para compreender de forma completa todos os conceitos em que assentam os métodos numéricos, em particular os métodos sem malha. A formulação matricial é o tema que conclui o segundo capítulo, descrevendo-se a forma fraca, a matriz de rigidez e ainda o vector das forças.

No terceiro capítulo, são testados vários exemplos aplicando métodos sem malha. Inicialmente, são feitos estudos de convergência para o RPIM, tomando como modelo para o problema uma viga cantilever sujeita a carga distribuída. Os estudos são efectuados utilizando malhas regulares e irregulares e obtêm-se o valor de erro das tensões e dos deslocamentos de determinados pontos.

De seguida, utilizando exemplos elasto-estáticos (placa quadrada traccionada, viga cantilever e placa infinita com orifício) compararam-se os métodos RPIM e NNRPIM relativamente ao erro no cálculo de tensões e deslocamentos de pontos.

Após o procedimento referido, testa-se um exemplo de uma placa traccionada com uma fenda calculando o campo de tensão a que a placa está sujeita variando o número de nós com que se discretiza o problema e ainda, variando o comprimento da fenda existente na placa. O procedimento é repetido para malhas irregulares, depois de se obterem os resultados para malhas regulares e é utilizado o método sem malha NNRPIM.

O quarto capítulo inclui três exemplos de fenda, a serem resolvidos com o método NNRPIM obtendo os resultados da direcção de propagação de fendas, respectivos campos de tensões e de deslocamentos.

No capítulo final, são feitas as conclusões deste trabalho e é feita uma análise crítica relativamente aos resultados que se obtêm dos exemplos.

## **2 - Métodos sem malha**

### **2.1- Introdução aos métodos sem malha**

O método utilizado (Natural Neighbour Radial Point Interpolation Method - NNRPIM) neste projecto é um método sem malha (Belinha, 2010). É portanto de extrema importância aprofundar, inicialmente, os conceitos dos métodos sem malha para depois particularizar e explicar o método NNRPIM.

Estes métodos têm ganho, na última década, bastante importância para resolução de equações diferenciais parciais, em particular na comunidade científica de engenharia, apresentando a vantagem de não ser necessário construir uma malha. Nos métodos sem malha, (Belytschko, 1996b; Gu, 2005; Nguyen 2008) os nós podem ser distribuídos de forma arbitrária uma vez que as funções são aproximadas com um domínio de influência ao invés de um elemento. Ao contrário da regra de não-sobreposição imposta no Método de Elementos Finitos (MEF) (Zienkiewicz, 1989; Bathe, 1986), nos métodos sem malha os domínios de influência podem e devem sobrepor-se entre si. Um método numérico pode ser dividido em três fases principais: funções aproximação ou interpolação, a formulação e a integração (Belinha,2004).

As funções de aproximação ou interpolação requerem um domínio de aplicabilidade, fora deste domínio a função assume um valor nulo. No MEF o domínio tem o nome de “elemento”, enquanto nos métodos sem malha se utiliza o termo “domínio de influência”. Nos métodos sem malha é necessário determinar o domínio de influência para cada nó dentro da malha nodal discretizando, assim, o domínio do problema. Consequentemente, a forma e o tamanho do domínio de influência nodal varia consoante o nó. A forma como cada domínio de influência é determinado varia consoante o método sem malha utilizado (Belinha,2010).

Quanto à formulação dos métodos sem malha, pode dividir-se em dois grupos: a formulação forte e a formulação fraca. Sendo que a formulação forte utiliza, directamente as equações diferenciais parciais, para obter a solução do problema; na formulação fraca é utilizado um princípio variacional para o resíduo ponderado das equações diferenciais. O resíduo é obtido substituindo a solução exacta por uma solução

aproximada multiplicada por uma função teste. Como tal, a solução obtida por utilização da formulação fraca dependerá das funções de teste utilizadas. As equações diferenciais, apresentam muitas vezes, surpreendentemente, soluções que não são diferenciáveis, soluções essas cuja única forma de as calcular é através da formulação fraca. Uma vez que em aplicações da vida real, grande parte das equações diferenciais não admitem soluções suficientemente suaves a única forma de as resolver é com a utilização da formulação fraca (Belinha, 2010).

Para calcular o integral do resíduo ponderado da equação diferencial é necessário escolher um método de integração numérica. A integração pode ser efectuada utilizando uma malha como fundo (em segundo plano), abrangendo todo o domínio do problema que é composto pelos pontos de integração. Os pontos de integração possuem uma área de influência (que não se deve sobrepor entre si) e um peso. A malha de fundo proposta para integração é, por norma, independente da malha nodal o que “prejudica” a denominação de método sem malha. Outros métodos de integração, frequentemente utilizados, passam pela não utilização de uma malha de fundo passando os nós a serem os próprios pontos de integração, correspondendo a área de influência ao domínio de influência dos nós e o peso de integração é substituído pelo volume de influência do nó. Isto é, a malha de integração é a própria malha nodal. Na comunidade científica, muitos investigadores olham com alguma desconfiança para estes esquemas de integração, apontando-os como menos precisos o que não corresponde à verdade (Belinha,2010).

## **2.2 - NNRPIM (Natural Neighbour Radial Point**

### **Interpolation Method)**

O NNRPIM resulta da combinação entre o método RPI (Radial Point Interpolation) e o conceito geométrico dos vizinhos naturais (Hardy, 1971). O método RPI advém do método PIM (Point Interpolation Method) que consiste em construir interpolação polinomial, baseada somente num grupo de pontos distribuídos de forma arbitrária, que possuem a propriedade de delta Kronecker. As equações são depois derivadas utilizando princípios variacionais. Contudo, neste método surgem diversos problemas numéricos, como por exemplo o facto de um alinhamento perfeito dos nós produzir soluções singulares no processo de construção da função de interpolação. Para suprimir erros desta índole, foi criado o RPIM. Tendo sido adicionado ao processo de construção da função de interpolação neste método o RBF (Radial Basis Function) de forma a estabilizá-lo. Inicialmente, o RBF foi desenvolvido para a adaptação dos dados da superfície, mais tarde com o trabalho desenvolvido por Kansa (Kansa, 1990a; Kansa, 1990b) o RBF foi usado para resolver equações diferenciais parciais. Contudo, o RPIM utiliza o conceito de “domínio de influência” ao invés de “domínio global” (utilizado no algoritmo de Kansa), gerando matrizes de rigidez esparsas, mais adequadas aos problemas de geometrias complexas (Belinha, 2010).

O NNRPIM é a fase seguinte no RPI. Com o objectivo de impor uma conectividade nodal, o “domínio de influência” foi substituído por um conceito de “células de influência”. Para obter estas “células de influência” o NNRPIM baseia-se em construções geométricas e matemáticas como os diagramas de Voronoï (Voronoï, 1908) e a triangulação de Delaunay (Delaunay, 1934). Desta forma, recorrendo às células de Voronoï, um conjunto de células de influência é criado a partir de um conjunto de nós não estruturado. Os triângulos de Delaunay, são aplicados para criar uma malha de fundo, com dependência entre os nós, utilizando integração numérica das funções interpolação do NNRPIM. Devido à total dependência da malha de integração relativamente à malha nodal, o NNRPIM pode ser considerado um método sem malha puro. Ao contrário do MEF, onde as restrições geométricas dos elementos são impostas para a convergência do método, no NNRPIM não existem tais restrições, o que permite uma distribuição dos nós totalmente aleatória para a discretização do problema. As

funções interpolação do NNRPIM, utilizam a forma fraca de Galerkin e são construídas de uma forma semelhante ao método RPIM, com algumas diferenças que alteram o desempenho do método (Belinha, 2010).

### **2.2.1 – Vizinhos Naturais**

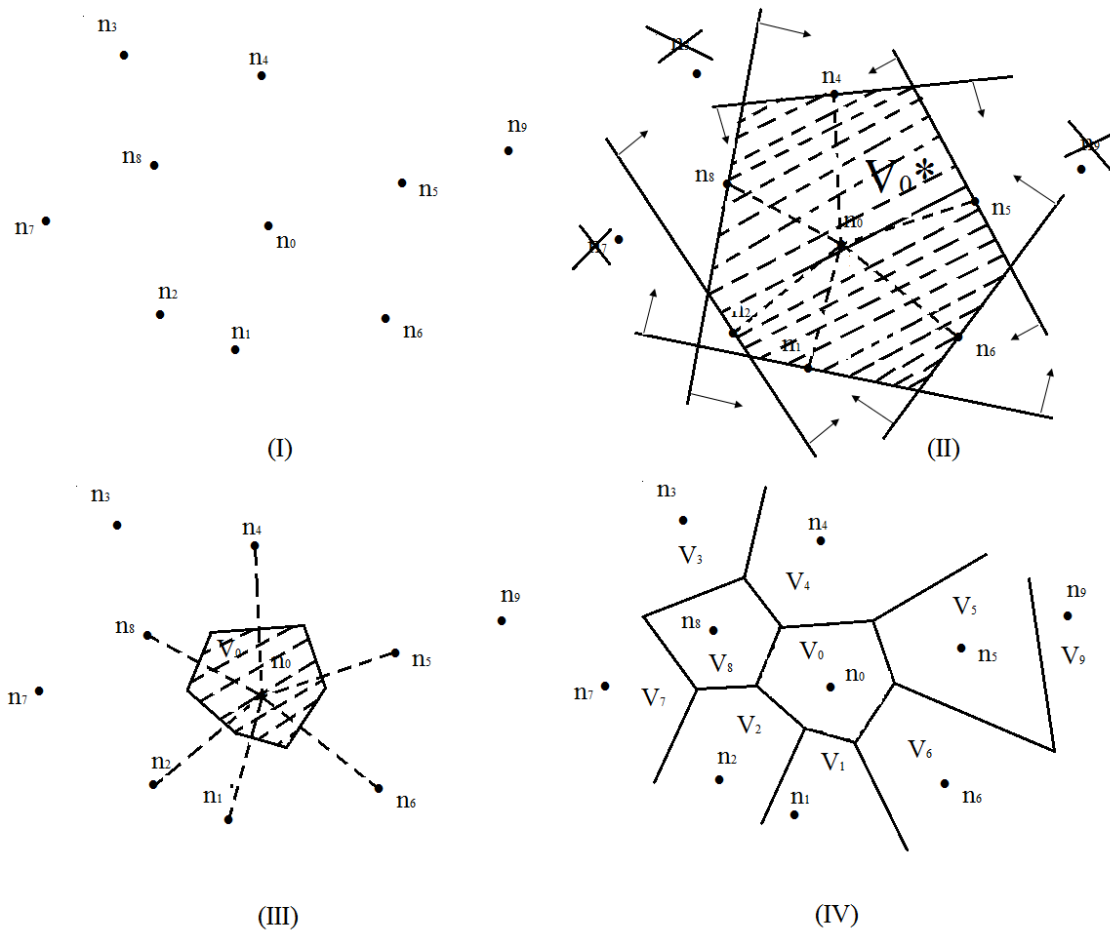
No método NNRPIM, o conceito de vizinhos naturais é utilizado para reforçar a conectividade nodal e serve como auxílio à construção da malha de integração. A definição de vizinhos naturais, foi inicialmente, introduzida por Sibson (Sibson, 1981) para ajuste de dados e suavização. Os diagramas de Voronoï e a triangulação Delaunay representam ferramentas matemáticas extremamente úteis na determinação dos vizinhos naturais de cada nó pertencente à malha nodal global. Esta teoria pode aplicar a um espaço com  $D$  dimensões, no entanto, para efeitos de simplificação considerar-se-á apenas um espaço Euclidiano  $\mathfrak{R}^2$  de duas dimensões. Considerando-se um conjunto  $N$  constituído por  $N$  nós distintos.

$$N = \{n_1, n_2, \dots, n_N\} \in \mathfrak{R}^2 \quad (1.1)$$

O diagrama de Voronoï de  $N$  é a divisória do domínio definido por  $N$  em sub-regiões  $V_I$ , fechada e convexa. Cada sub-região  $V_I$  está associada a um nó  $I$ ,  $n_I$ , de tal forma que qualquer ponto no interior de  $V_I$  está mais próximo de  $n_I$  do que qualquer outro nó  $n_J$ , onde  $n_J \in N \wedge J \neq I$ . Isto é,  $V_I$  representa o lugar geométrico onde todos os pontos estão mais próximos de  $n_I$  do que qualquer outro nó. As sub-regiões  $V_k$  são as “células de Voronoï” que formam o diagrama de Voronoï,  $k = 1, 2, \dots, N$ . Em termos matemáticos a célula de Voronoï pode ser definida por:

$$V_I = \{x \in \mathfrak{R}^2 : E_n(x, x_I) < E_n(x, x_J) \forall J \neq I\} \quad (1.2)$$

Sendo  $E_n(x, x_I)$  a norma euclidiana, isto é, a distância entre um ponto de interesse e um nó  $I$ , com coordenadas definidas por  $x$  e  $x_I$ . Na figura abaixo, encontra-se representada a construção de uma sub-região  $V_I$ , que começa com um conjunto nodal de potenciais vizinhos.



**Figura 1 - (I) Conjunto nodal inicial de potenciais nós vizinhos. (II) Célula final contendo apenas nós vizinhos. (III) Célula de Voronoi. (IV) Diagrama de Voronoi.**

Tal como a figura 1 (II) indica, os nós vizinhos são obtidos pela intersecção de domínios cujos limites são definidos pela linha que intersecta o nó  $J$  (potencial nó vizinho) e é normal à linha tracejada  $\mathbf{0}J$ , onde  $\mathbf{0}$  representa o nó central. Por definição, apenas os nós no perímetro do domínio final,  $V_0^*$ , são considerados como nós vizinhos. A célula Voronoi,  $V_0$ , obtida é determinada como indicado na figura 1(III). A célula  $V_0$  é uma forma homotética de  $V_0^*$ . É aplicado, um procedimento similar, para obter as restantes células de Voronoi como representado na figura 1(IV). Este raciocínio pode ser, facilmente extrapolado, e aplicado num espaço Euclidiano com três dimensões  $\mathcal{R}^3$  (Belinha, 2010).

A triangulação Delaunay é construída a partir da união de nós cujas células de Voronoi possuem domínios em comum. Para que a dualidade entre o diagrama de Voronoi e a triangulação de Delaunay ocorra, tem de existir uma aresta de Delaunay entre dois nós no plano se e só se as células de Voronoi partilharem uma aresta comum. Uma

propriedade importante dos triângulos de Delaunay é o critério do circuncírculo vazio (Lawson, 1977). Se um conjunto de nós  $\mathbf{n}_t = \{n_j, n_k, n_l\} \in N$  forma um triângulo Delaunay então um circuncírculo formado por um triângulo  $N_t$  não contém mais nós de  $N$ . No contexto da interpolação de vizinhos naturais estes círculos são conhecidos como circuncírculos naturais vizinhos (Watson, 1992). O centro do circuncírculo natural vizinho é o vértice da respectiva célula Voronoï. Estas características estão representadas na figura 2 (Belinha, 2010).

No método NNRPIM o diagrama de Voronoï é usado para criar células de influência, reforçando a conectividade entre os nós  $N$ . Por outro lado, a dualidade entre as células de Voronoï e os triângulos de Delaunay é utilizada com o objectivo de construir uma malha nodal de fundo dependente da malha de integração (Belinha, 2010).

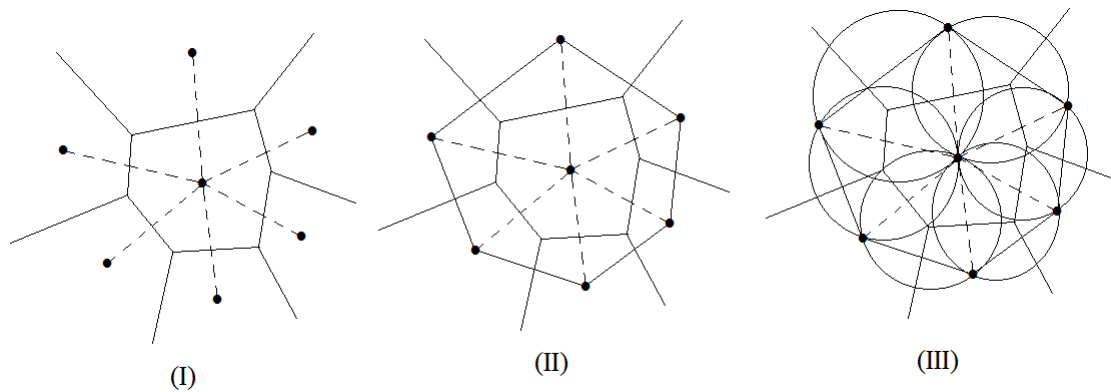


Figura 2 - (I) Diagrama de Voronoï inicial. (b) Triangulação de Delaunay. (c) Circuncírculos naturais vizinhos (Belinha, 2010)

### **2.2.2 – Conectividade Nodal e Células de Influência**

Nos trabalhos iniciais com o RPI (Liu, 2001; Wang, 2001; Wang, 2002) a conectividade nodal é obtida por sobreposição do domínio de influência de cada nó. Estes domínios de influência são encontrados procurando nós suficientes numa área ou volume fixos, para um problema de 2D ou 3D respectivamente (Belinha, 2010). Pela sua simplicidade, muitos outros métodos sem malha utilizam este conceito (Belytschko, 1994; Liu, 1995; Atluri, 1998). Contudo a variação do tamanho ou forma destes domínios de influência juntamente com o domínio do problema afecta o desempenho e a solução final do método sem malha (Belinha, 2010; Belinha, 2004). É importante que todos os domínios

de influência contenham, aproximadamente, o mesmo número de nós. Domínios irregulares ou aglomerados de nós na malha nodal podem levar a domínios de influência desequilibrados (Belinha, 2010). Domínios de influência regulares e constantes não são adequados ao procedimento dos métodos sem malha. Então, no método NNRPIM, a conectividade nodal é imposta pela sobreposição das células de influência (Dinis, 2007; Dinis, 2008), que pode ser considerada como um novo conceito, semelhante ao domínio de influência obtido pelas células de Voronoï. A célula, formada por  $n$  nós, que contribui para interpolação do ponto de interesse  $x_I$  é chamada de “célula de influência”. Uma vez que é bastante mais simples de representar, apenas se encontra ilustrada a determinação de uma célula de influência 2D, contudo este conceito pode ser aplicado a espaços com  $D$  dimensões (Belinha, 2010). Na figura 3 estão ilustrados dois tipos de células de influência:

**Célula de influência de primeiro grau:** Um ponto de interesse,  $x_I$ , procura pelos seus nós da vizinhança seguindo a construção dos vizinhos naturais de Voronoï apresentada anteriormente. Assim, a célula de influência de primeiro grau é composta pelos primeiros vizinhos naturais (Belinha, 2010).

**Célula de influência de segundo grau:** Um ponto de interesse,  $x_I$ , procura pelos seus nós vizinhos, da mesma forma que é feito na célula de influência de primeiro grau. Então, baseado numa construção prévia do diagrama de Voronoï para a malha nodal, os primeiros vizinhos naturais de  $x_I$  são adicionados à célula de influência (Belinha, 2010).

A figura 4 é ilustrativa dos dois tipos de células de influência acabados de descrever. Como é possível observar, naturalmente, o tamanho da célula de influência de primeiro grau é inferior ao da célula de influência de segundo grau.

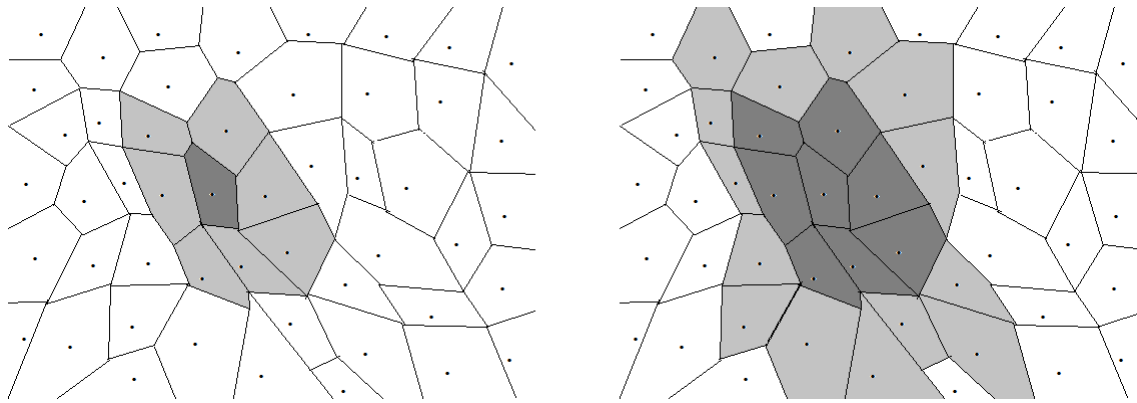


Figura 3 - (I) Células de Influência de Primeiro Grau (II) Células de influência de segundo grau

Numa fase inicial, depois da discretização do domínio, numa malha nodal regular ou irregular, as células de Voronoi de cada nó são construídas. Estas células podem ser consideradas como sendo uma malha de fundo com propósito de integração, sendo determinada a célula de influência para cada um dos pontos de integração (Belinha, 2010).

### **2.2.3 – Esquema de Integração**

Recentemente um método sem malha, baseado no RPI, utilizando uma integração nodal estável (Dai, 2006) foi implementado com sucesso tendo obtido resultados que provam ser melhor que os outras aproximações ao método RPI baseado nos esquemas de integração de Gauss (Wang, 2002). Apesar disso, o tempo extra que se perde na estabilização da integração nodal não compensa o aumento de precisão na solução final (Belinha, 2010). Assim, para o método NNRPIM foi proposto um esquema de integração inovador baseado na triangulação de Delaunay e na tesselação de Voronoi (Belinha, 2010).

Utilizando as construções geométricas referidas, são estabelecidas pequenas áreas, que podem ser quadriláteros ou triângulos consistentes com malha regular ou irregular. Então, com a construção de células de Voronoi,  $V_i$ , a intersecção de pontos,  $P_{ii}$ , das arestas de vizinhança de  $V_i$  pode ser estabelecida, como se verifica na Figura 4. De seguida, os pontos médios,  $M_{ii}$ , entre o nó  $n_i$  e a sua vizinhança são obtidos. Então, as células de Voronoi são divididas em  $n$  quadriláteros, formando células mais pequenas,  $S_{ii}$  (Belinha, 2010).

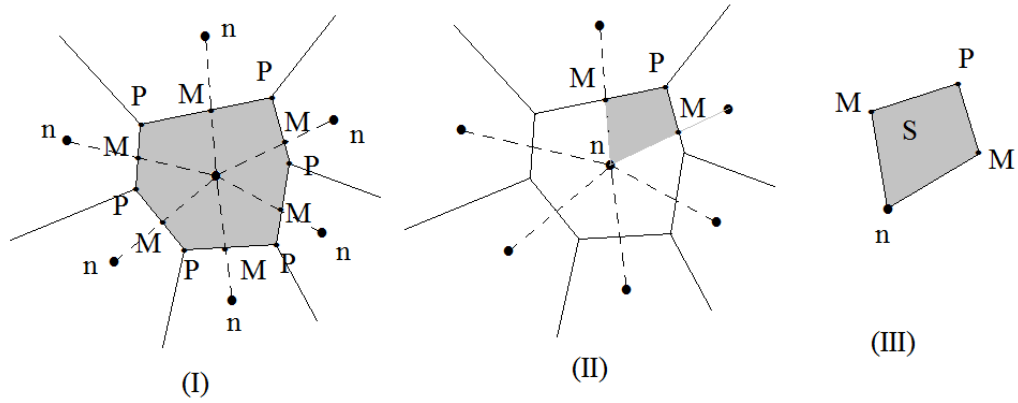


Figura 4 - (I) Célula Voronoi e respectivos pontos de intersecção (II) Pontos médios e respectivos quadriláteros gerados (III) Quadrilátero obtido

Para uma malha regular, os pontos médio  $M_{ii}$  coincidem com as arestas de intersecção entre os pontos  $P_{ii}$ . É possível concluir, observando a figura 5, que a coincidência geométrica leva a que, em vez de quadriláteros, se gerem triângulos como células mais pequenas

Qualquer nó  $n_i$  com  $J$  nós vizinhos, forma uma célula de Voronoi  $V_i$ , tendo  $J$  células mais pequenas,  $S_{ii}$ , onde:

$$A_{V_i} = \sum_{i=1}^n A_{S_{ii}}, \forall A_{S_{ii}} \geq 0 \quad (1.3)$$

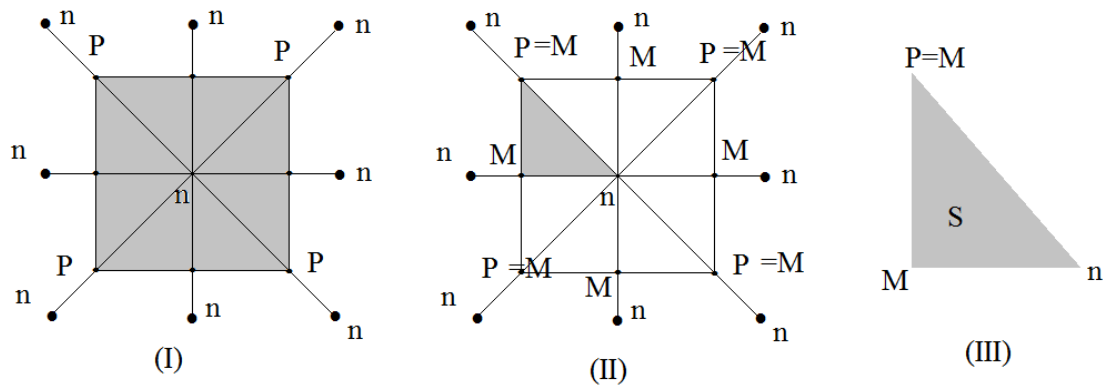


Figura 5 – (I) Célula de Voronoi e respectivos pontos de intersecção (II) Pontos médios e respectivo triângulo gerado (III) Triângulo obtido

Sendo  $A_{V_i}$  a área da célula de Voronoï e  $A_{S_{i_i}}$  a área da célula mais pequena. Se o conjunto de células de Voronoï forem partições sem lacunas do domínio global, então o conjunto de células mais pequenas será também, um domínio global sem lacunas (Belinha, 2010).

Ficou evidente, como é que as células mais pequenas geram dois tipos de formas básicas, triângulos ou quadriláteros. Começando apenas, com estas duas formas, inúmeros esquemas de integração podem ser construídos (Belinha, 2010).

O esquema de integração nodal é tanto mais simples quanto mais a consideração do ponto de integração for coincidente com cada nó. Então, o peso de cada ponto de integração é a soma de cada uma das áreas das sub-células, isto é, é a área da célula de Voronoï obtida pela equação (1.3). Este tipo de integração não é suficiente para integrar as funções de interpolação do método NNRPIM, é necessário aplicar um procedimento de estabilização (Dai, 2006) que aumenta o custo do método computacional reduzindo consequentemente a eficiência do NNRPIM (Belinha, 2010).

#### **2.2.4 – Função de Interpolação**

Considerando a função  $u(x)$  definida no domínio  $\Omega$ , que é discretizado por um conjunto  $N$  de nós. No método NNRPIM, a função  $u(x)$  passa através de todos os nós utilizando uma função radial base (RBF) (Belinha, 2010). Assume-se que os únicos nós dentro da célula de influência do ponto de interesse  $x_I$  têm efeito em  $u(x_I)$ . O valor da função  $u(x_I)$  no ponto de interesse  $x_I$  é obtido por:

$$u(x_I) = \sum_{i=1}^n \mathbf{R}_i(x_I) \cdot \mathbf{a}_i(x_I) + \sum_{j=1}^m \mathbf{p}_j(x_I) \cdot \mathbf{b}_j(x_I) = \mathbf{R}^T(x_I) \cdot \mathbf{a}(x_I) + \mathbf{p}^T(x_I) \mathbf{b}(x_I) \quad (1.4)$$

Onde  $\mathbf{R}_i(x_I)$  é a RBF e  $n$  é o número de nós dentro da célula de influência de  $x_I$ . Os coeficientes  $\mathbf{a}_i(x_I)$  e  $\mathbf{b}_j(x_I)$  são coeficientes não constantes de  $\mathbf{R}_i(x_I)$  e  $\mathbf{p}_j(x_I)$ , de forma respectiva. Os monómios do polinómio de base são definidos por  $\mathbf{p}_j(x_I)$  e  $m$  é o número da base monomial. Os vectores da equação (1.4) podem ser definidos por:

$$\mathbf{R}(x_I) = \{R_1(x_I) \ R_2(x_I) \ \dots \ R_n(x_I)\}^T \quad (1.5)$$

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}_I) = \{p_1(\mathbf{x}_I) \ p_2(\mathbf{x}_I) \ \dots \ p_m(\mathbf{x}_I)\}^T \quad (1.6)$$

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}_I) = \{a_1(\mathbf{x}_I) \ a_2(\mathbf{x}_I) \ \dots \ a_n(\mathbf{x}_I)\}^T \quad (1.7)$$

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}_I) = \{b_1(\mathbf{x}_I) \ b_2(\mathbf{x}_I) \ \dots \ b_m(\mathbf{x}_I)\}^T \quad (1.8)$$

O número de monómios  $m$ , do polinómio de base, deve ser  $m < n$  para obter uma função mais estável. Trabalhos anteriores do RPI (Lawson, 1977) apoiam a ideia de que o RPI juntamente com funções radiais puras, não são consistentes e têm problema em reconstruir um campo linear de forma exacta (Belinha, 2010). A primeira razão, pela qual se adicionaram polinómios na função de base foi para garantir a consistência das funções RPI. Então adicionando ao RBF um polinómio linear assegura-se a reprodução de um campo linear ( $C^1$  consistência) e consequentemente ajudar o RPI a passar o “patch-test”(Belinha, 2010). Contudo, foi provado, que o RPI não requer uma função de base polinomial para passar no patch-test, o que reduz bastante, desta forma, os custos computacionais associados ao método RPIM (Belinha,2010). No RBF a variável é a distância  $r_{ii}$  entre o nó relevante  $x_I$  e o nó vizinho  $x_i$ . Para um espaço tridimensional é definido como:

$$r_{ii} = \sqrt{(x_I - x_i)^2 + (y_I - y_i)^2 + (z_I - z_i)^2} \quad (1.9)$$

Várias funções radiais base conhecidas são bem conhecidas e foram estudadas e desenvolvidas em (Wang, 2002). Este trabalho (Dinis, 2007) usa a função multiquadrada (MQ) proposta inicialmente por Hardy (Hardy, 1971). Outras funções, foram também usadas numa fase inicial, contudo os melhores resultados foram obtidos com a MQ. A forma da MQ-RBF é:

$$R(r_{ii}) = (r_{ii}^2 + c^2)^p \quad (1.10)$$

Onde  $c$  e  $p$  são dos parâmetros de forma que necessitam de optimização (Wang, 2002; Dinis, 2007). Em trabalhos anteriores do RPI (Wang, 2002) o valor óptimo para os parâmetros de forma foi atingida com  $c = 1.42$  e  $p = 1.03$ . Contudo, os valores obtidos carecem de precisão e estabilidade (Dinis, 2007; Delaunay 1934). Esta é a maior desvantagem dos métodos sem malha que utilizam funções radiais de base. A variação

da forma dos parâmetros afecta o desempenho das funções radiais de base e não existem métodos eficientes, rigorosos e teóricos para obter valores óptimos para  $c$  e  $p$ . Experimentaram-se diferentes polinómios para uma análise 2D:

$$\begin{aligned}
\text{Base Constante}(m=1): & \quad \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = \{1\} \\
\text{Base Linear}(m=3) : & \quad \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = \{1 \quad x \quad y\} \\
\text{Base Quadrática}(m=6): & \quad \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = \{1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad xy \quad y^2\}
\end{aligned} \tag{1.11}$$

Depois de várias utilizações do polinómio de base, utilizou-se a base nula, que equivale à ausência do polinómio de base. Neste caso a equação (1.4) torna-se muito mais simples, uma vez que os termos dos polinómios desapareceram, isto é, os termos  $\mathbf{p}_j(\mathbf{x}_1)$  e  $\mathbf{b}_j(\mathbf{x}_1)$  desaparecem da equação (Belinha, 2010). No caso de existir um polinómio de base tem de satisfazer uma condição extra para obter uma solução única:

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{p}_j(\mathbf{x}_i) a_j(\mathbf{x}_i) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_i) \mathbf{a}(\mathbf{x}_i) = 0 \tag{1.12}$$

Sendo  $j = \{1, 2, \dots, m\}$ . Então combinando a equação (1.4) e (1.12):

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}_s \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_Q & \mathbf{P}_m \\ \mathbf{P}_m^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{Bmatrix} = \mathbf{G} \begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{Bmatrix} \tag{1.13}$$

Onde  $\mathbf{u}_s$  é dado por:

$$\mathbf{u}_s = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}^T \tag{1.14}$$

A matriz dos momentos  $\mathbf{R}_Q$  das RFB é obtida com:

$$\mathbf{R}_Q = \begin{bmatrix} R(r_{11}) & R(r_{12}) & \cdots & R(r_{1n}) \\ R(r_{21}) & R(r_{22}) & \cdots & R(r_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R(r_{n1}) & R(r_{n2}) & \cdots & R(r_{nm}) \end{bmatrix} \tag{1.15}$$

E a matriz dos momentos  $P_m$  do polinómio de base,  $n \times m$  é dada por:

$$\mathbf{P}_m = \begin{bmatrix} P_1(x_1) & P_2(x_1) & \cdots & P_m(x_1) \\ P_1(x_2) & P_2(x_2) & \cdots & P_m(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_1(x_n) & P_2(x_n) & \cdots & P_m(x_n) \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

A título de exemplo apresenta-se a base polinomial linear para problemas 2D da seguinte forma:

$$\mathbf{P}_m = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & y_n \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

De notar na equação (1.13), que caso a base polinomial  $\mathbf{P}_m$  não existir então  $\mathbf{R}_Q = \mathbf{G}$  tornando-se o sistema de equações mais curto (Belinha, 2010). A matriz geométrica  $\mathbf{G}$  é uma matriz simétrica uma vez que a distância é independente da direcção, isto é  $R(r_{ij}) = R(r_{ji})$  (Belinha, 2010). Resolvendo a equação (1.13), obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{Bmatrix} = \mathbf{G}^{-1} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_s \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (1.18)$$

E substituindo na equação (1.4):

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}_I) = \{ \mathbf{R}^T(\mathbf{x}_I), \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_I) \} \mathbf{G}^{-1} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_s \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_I) \mathbf{u}_s \quad (1.19)$$

A função de interpolação  $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_I)$ , no ponto de interesse  $\mathbf{x}_I$ , é então dada por:

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_I) = \{ \mathbf{R}^T(\mathbf{x}_I), \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_I) \} \mathbf{G}^{-1} = \{ \varphi_1(\mathbf{x}_I), \varphi_2(\mathbf{x}_I), \dots, \varphi_n(\mathbf{x}_I) \} \quad (1.20)$$

## **2.3 - Mecânica da Deformação dos Sólidos**

### **2.3.1-Equações Fundamentais**

Um sólido ou estrutura sobre o qual estejam aplicadas solicitações ou cargas encontra-se em estado de tensão que conduz a consequentes deformações. A Mecânica dos Sólidos define as grandezas tensão deformação e relaciona-as para um dado ponto do domínio físico do sólido (Belinha, 2004).

Os sólidos podem ter as propriedades materiais a variar com a direcção. São os denominados sólidos com material anisotrópico. Assim uma força causa uma determinada deformação quando aplicada numa dada direcção e uma outra deformação quando aplicada em direcção diferente da primeira (Belinha, 2004).

Considere-se um sólido com um domínio tridimensional  $\Omega$  correspondente ao sólido e tendo uma superfície fronteira  $\Gamma$  como representado na figura 6.

Na Mecânica dos Sólidos, existem dois tipos de condições fronteira que devem ser tidos em conta para o domínio  $\Omega$ . As condições de fronteira essenciais (que estão relacionadas com a imposição e impedimento de deslocamentos) e as condições de fronteira naturais (relacionadas com imposição de cargas, forças ou binários) (Belinha, 2004).

Como tal, no sólido, ao impedimento de deslocamentos, corresponderá uma condição de fronteira essencial  $\Gamma_u$  e à aplicação de uma força externa  $t$  no domínio, uma condição de fronteira natural  $\Gamma_t$ . Se se considerar um volume infinitesimal do sólido, como sendo um ponto P de dimensões  $dx \cdot dy \cdot dz$  sujeito a um estado de tensão, instalado na sua superfície, constituído por seis componentes distintas, podem organizar-se as mesmas segundo sob a forma do tensor das tensões:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \wedge \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \text{ se } i \neq j \text{ .} \quad (1.21)$$

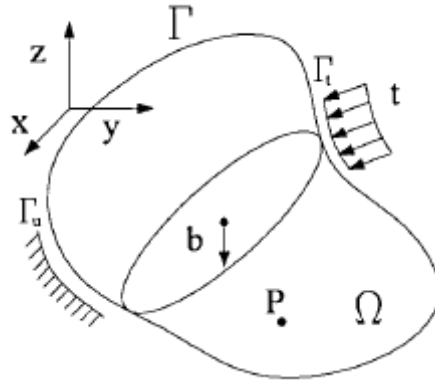


Figura 6 – Sólido, de domínio  $\Omega$ , sujeito a um campo de forças  $t$  imposto e com impedimento de deslocamentos.

As tensões normais são definidas por  $\sigma$  e as tangenciais por  $\tau$ . Os índices são representativos do plano a que as tensões são perpendiculares (primeiro índice) e da sua direcção (segundo índice).

Como dito anteriormente, a cada tensão corresponde uma deformação que podem ser escritas sob a forma vectorial respectivamente:

$$\boldsymbol{\sigma} = \left\{ \sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx} \right\}^T \quad (1.22)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \left\{ \varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{zz} \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx} \right\}^T \quad (1.23)$$

Considerando  $u, v$  e  $w$  os deslocamentos nas respectivas direcções  $x, y$  e  $z$ :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\delta u}{\delta x} & \gamma_{xy} &= \frac{\delta u}{\delta y} + \frac{\delta v}{\delta x} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\delta v}{\delta y} & \gamma_{yz} &= \frac{\delta v}{\delta z} + \frac{\delta w}{\delta y} \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\delta w}{\delta z} & \gamma_{zx} &= \frac{\delta w}{\delta x} + \frac{\delta u}{\delta z} \end{aligned} \quad (1.24)$$

Para representar as deformações matricialmente na forma  $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L} \mathbf{u}$ , é necessário utilizar um operador diferencial  $\mathbf{L}$  e o vector do campo de deslocamentos  $\mathbf{u}$ . Sendo:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\delta}{\delta x} & 0 & 0 & \frac{\delta}{\delta y} & 0 & \frac{\delta}{\delta z} \\ 0 & \frac{\delta}{\delta y} & 0 & \frac{\delta}{\delta x} & \frac{\delta}{\delta z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\delta}{\delta z} & 0 & \frac{\delta}{\delta y} & \frac{\delta}{\delta x} \end{bmatrix}^T \quad \mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad (1.25)$$

Estas deformações lineares são apenas utilizadas em problemas para pequenas deformações.

### **2.3.2 - Relação da tensão com a deformação**

É possível relacionar, analiticamente em elasticidade linear, a tensão e a deformação, através da lei de Hooke generalizada.

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \quad (1.26)$$

Onde  $c$  representa a matriz das constantes materiais determinadas experimentalmente. Pode exprimir-se, também, a deformação em função da tensão:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (1.27)$$

A matriz  $s$  é igual, algebricamente, à matriz  $c^{-1}$ , representando-se da seguinte forma:

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{yx}}{E_y} & -\frac{\nu_{zx}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{xy}}{E_x} & \frac{1}{E_y} & -\frac{\nu_{zy}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{xz}}{E_x} & -\frac{\nu_{yz}}{E_y} & \frac{1}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xy}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{yz}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xz}} \end{bmatrix} \quad (1.28)$$

Onde  $E_i$  representa o módulo de Elasticidade ou de Young, segundo a direcção do índice;  $\nu_{ij}$  representa o coeficiente de Poisson, caracterizando a taxa de deformação na direcção  $j$  quando é aplicada uma tensão na direcção  $i$ ;  $G_{ij}$  é o módulo de Corte entre as direcções  $ij$  (Belinha, 2004).

Esta matriz é para materiais ortotrópicos e as constantes são obtidas experimentalmente e independentes entre si; no entanto, graças à simetria da matriz, é possível relacionar o coeficiente de Poisson com o módulo de Elasticidade,

$$E_i \nu_{ji} = E_j \nu_{ij} \quad (1.29)$$

### **2.3.3 - Equações de equilíbrio**

As componentes do tensor de tensões têm de satisfazer as seguintes equações de equilíbrio:

$$L^T \sigma + b = 0 \quad (1.30)$$

$$\sigma^T = \sigma \quad (1.31)$$

Substituindo na equação (1.26), de forma a simplificar, as equações (1.22) e  $\epsilon = L u$ :

$$L^T c L u + b = 0 \quad (1.32)$$

Consoante o problema de Mecânica dos Sólidos ao qual se aplicam estas equações é possível fazer simplificações das mesmas, por norma, através da geometria apresentada nos problemas (Belinha, 2004).

### **2.3.4 - Problema Bidimensional**

Num problema deste tipo, considera-se que as variáveis são independentes de um determinado eixo sendo que todas as cargas externas são aplicadas num plano perpendicular a esse determinado eixo. Existem dois tipos de problemas bidimensionais: o Estado Plano de Tensão (Fig. 7) e o Estado Plano de Deformação (Fig. 8).

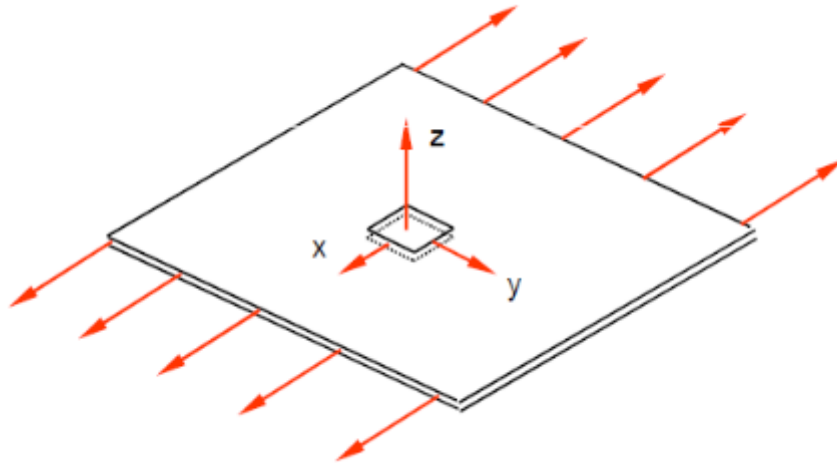


Figura 7 - Problema para resolução com a hipótese do Estado Plano de Tensão

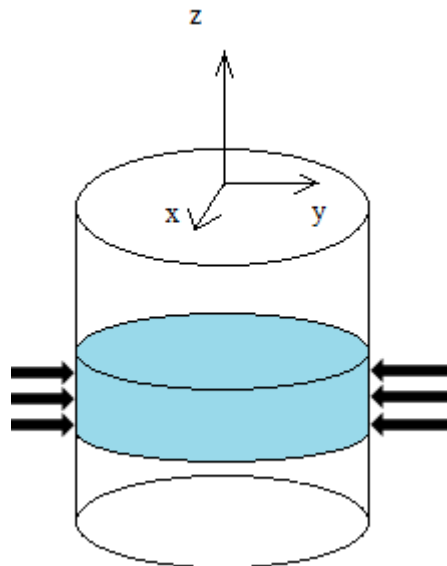


Figura 8 - Problema para resolução com a hipótese do Estado Plano de Deformação

#### **2.3.4.1 - Estado Plano de Deformação**

O Estado Plano de Deformação é caracterizado por situações em que os sólidos possuem dimensões muito grandes no eixo Oz (espessura) relativamente aos restantes eixos, sendo solicitados por forças que actuam perpendicularmente ao eixo e distribuídas de igual forma ao longo da espessura. Como tal, a deformação segundo o eixo Oz, é muito pequena quando comparada com as deformações nas outras direcções. Como tal:

$$\varepsilon_{zz} = \gamma_{zx} = \gamma_{yz} = 0 \quad (1.33)$$

E as deformações a ter em conta neste tipo de problema serão:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \gamma_{xy}\}^T \quad (1.34)$$

Por consequência, as tensões segundo os eixos Ox e Oy são não nulas e a tensão normal ao plano Oxy,  $\sigma_{zz}$ , é linearmente dependente de  $\sigma_{xx}$  e  $\sigma_{yy}$ , o que faz com que seja também diferente de zero. No entanto, as tensões tangenciais  $\tau_{yz}$  e  $\tau_{zx}$  são nulas. Representando-se da seguinte forma, respectivamente, o vector de tensões e das deformações:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \frac{\delta u}{\delta x} \\ \frac{\delta v}{\delta y} \\ \frac{\delta u}{\delta y} + \frac{\delta v}{\delta x} \end{Bmatrix} \quad (1.35)$$

Pelo mesmo raciocínio descrito acima, u e v correspondem às componentes do deslocamento nas direcções x e y, podendo de igual forma apresentar-se esta relação na forma matricial recorrendo à expressão  $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{u}$  representando-se as componentes da seguinte forma:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\delta}{\delta x} & 0 \\ 0 & \frac{\delta}{\delta y} \\ \frac{\delta}{\delta y} & \frac{\delta}{\delta x} \end{bmatrix} \quad \mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad (1.36)$$

Aplicando a lei de Hooke, tendo em atenção as equações consideradas no sub-capítulo da *Relação da tensão com a deformação* e sabendo que a deformação segundo o eixo Oz é nula pode escrever-se:

$$\sigma_{zz} = \frac{\nu_{xz}}{E_x} \cdot E_z \cdot \sigma_{zz} + \frac{\nu_{yz}}{E_y} \cdot E_z \cdot \sigma_{yy} \quad (1.37)$$

Ficando a matriz s:

$$s = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} - \frac{\nu_{zx}^2}{E_z} & -\frac{\nu_{yx}}{E_y} - \frac{\nu_{zy} \cdot \nu_{zx}}{E_z} & 0 \\ -\frac{\nu_{yx}}{E_x} - \frac{\nu_{xy} \cdot \nu_{zx}}{E_z} & \frac{1}{E_y} - \frac{\nu_{zy}^2}{E_z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{xy}} \end{bmatrix} \quad (1.38)$$

### **2.3.4.2 - Estado Plano de Tensão**

A hipótese do Estado Plano de Tensão aplica-se a problemas cuja dimensão dos sólidos segundo o eixo Oz é muito menor relativamente às dimensões em x e y (Fig. 8). Em qualquer ponto, a direcção coordenada Oz é uma direcção principal de tensão, à qual corresponde sempre uma tensão principal nula. Como apenas existem esforços segundo os eixos Ox e Oy, apenas existem tensões segundo os mesmos, sendo então  $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}$  e  $\tau_{xy}$  (Belinha, 2004). Representando-se o vector de tensões da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}\}^T \quad (1.39)$$

De forma análoga, o vector de deformações pode ser definido pelas equações (1.33) e, matricialmente, (1.34). No entanto, não existindo componente de tensão normal ao plano Oxy, existe deformação segundo eixo Oz cuja expressão representativa da mesma é dada por:

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu_{xz} \cdot \sigma_{xx}}{E_x} - \frac{\nu_{yz} \cdot \sigma_{yy}}{E_y} \quad (1.40)$$

Aplicando, da mesma forma, a expressão para cálculo da matriz s, obtém-se o seguinte campo de tensões:

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{yx}}{E_y} & 0 \\ -\frac{\nu_{xy}}{E_x} & \frac{1}{E_y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{xy}} \end{bmatrix} \quad (1.41)$$

### **2.3.4.3 - Equações de Equilíbrio – Problemas Bidimensionais**

Para os dois casos de problemas bidimensionais, as equações de equilíbrio são, de igual forma, escritas na forma matricial segundo a equação (1.30) obtendo de igual forma a equação (1.32) como simplificação. Tendo sido definidos os termos:  $\mathbf{L}$  na equação (1.36) e  $\sigma$  na equação (1.39) podendo  $\mathbf{b}$  ser definido por  $\mathbf{b} = (bx, by)^T$  (Belinha, 2004).

## **2.4 – Formulação Matricial**

### **2.4.1 – Forma Fraca**

O sistema de equações da “forma forte” é o sistema de equações diferenciais que governam o fenómeno em estudo. A “forma fraca” requer uma menor consistência das funções de aproximação adoptadas. Posto isto, o ideal seria conseguir obter sempre a solução exacta para um sistema de equações a partir da “forma forte”, no entanto é muito difícil, conseguir generalizar as “formas fortes” tendo em conta as exigências e a complexidade dos diversos problemas que surgem em engenharia, a fim de ter um solução exacta. (Belinha, 2004)

No entanto, as “formas fracas” produzem um sistema de equações algébricas bastante estável, e preferível aos sistemas de equações diferenciais, uma vez que quando se trabalha com as “formas fracas” se obtêm resultados muito mais precisos, daí abdicar-se da “forma forte” (Belinha, 2004).

Existem dois grandes grupos de princípios para a construção das “formas fracas”, o Método dos Resíduos Pesados e os Métodos Variacionais. Uma vez que o método sem malha utilizado utiliza a formulação de Galerkin, vale a pena incidir sobre este método variacional (Belinha, 2004).

### **2.4.1.1 – Forma Fraca de Galerkin**

A “forma fraca” de Galerkin é um princípio variacional e que se baseia num princípio energético. De entre as várias configurações referentes a deslocamentos que respeitam as condições de compatibilidade e as condições de fronteira essenciais, a configuração que mais precisa, relativamente à solução real é a que minimiza o funcional Lagrangeano  $L$ , onde  $L$  é definido por,

$$L = T - \pi_s + W_f \quad (1.42)$$

Representando  $T$  a energia cinética,  $\pi_s$  corresponde à energia de deformação e  $W_f$  ao trabalho realizado pelas forças externas (Belinha, 2004).

A energia cinética pode ser dada por:

$$T = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \mathbf{u}_t^T \mathbf{u}_t d\Omega \quad (1.43)$$

Correspondendo  $\rho$  à massa volúmica,  $\Omega$  ao volume total do sólido e  $\mathbf{u}_t$  à primeira derivada do campo de deslocamentos relativamente ao tempo, isto é, à velocidade. No caso de materiais elásticos e sólidos, a energia de deformação pode definir-se:

$$\pi_s = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega \quad (1.44)$$

Sendo  $\boldsymbol{\sigma}$  a tensão instalada e  $\boldsymbol{\varepsilon}$  a deformação do corpo. A expressão que define o trabalho realizado pelas forças externas é:

$$W_f = \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (1.45)$$

Em que  $\mathbf{b}$  representa as forças de volume aplicadas ao corpo, e  $\bar{\mathbf{t}}$  representa as forças superficiais aplicadas na fronteira do sólido  $\Gamma_t$ .

Substituindo a equação (1.42) pelas expressões (1.43), (1.44) e (1.45):

$$L = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \mathbf{u}_t^T \mathbf{u}_t d\Omega \quad (1.46)$$

Para resolução de problemas utilizando a forma fraca de Galerkin deve seguir-se a seguinte metodologia: construir as funções de forma para aproximar o campo de variáveis, utilizando os seus valores nos nós no domínio do problema; calcular a energia cinética, a energia de deformação e o trabalho realizado pelas forças externas, referente às aproximações do campo de variáveis. Utilizar o Funcional Lagrangeano e minimizando-o, ou seja:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0 \quad (1.47)$$

Resolver o integral por partes chegando ao conjunto de equações algébricas que após resolvido fornece o campo de variáveis.

Negligenciando a parcela proveniente da energia cinética, pois neste trabalho apenas são considerados problemas elasto-estáticos, e manipulando cada um dos termos da equação (1.42) obtém-se a seguinte expressão:

$$\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma = 0 \quad (1.48)$$

Recorrendo a fórmulas da mecânica de deformação de sólidos é possível fazer simplificações usando as relações tensão/deformação, podendo reescrever-se a equação (1.42):

$$\int_{\Omega} \delta (\mathbf{L}\mathbf{u})^T \mathbf{c}(\mathbf{L}\mathbf{u}) d\Omega - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma = 0 \quad (1.49)$$

Obtendo-se então a Forma Fraca de Galerkin escrita em função do deslocamento para o caso do problema estático. É uma equação vocacionada para a Mecânica dos Sólidos cuja principal vantagem é não ser necessária a integração por partes para ser resolvida (Belinha, 2004).

Utilizando a aproximação de deslocamentos o sistema de equações pode ser derivado facilmente. Para obter o campo de deslocamentos, é necessário aproximar o deslocamento num ponto usando as funções de forma e os parâmetros do deslocamento nodal dos nós contidos no domínio do ponto. De seguida obter um conjunto de equações algébricas através da equação (1.49), e resolvendo essas equações obtêm-se os valores

do campo de parâmetros nodais do deslocamento para os nós do domínio do problema (Belinha, 2004). Aplica-se a expressão que se segue para obtenção do campo de deslocamentos:

$$\mathbf{u} = \sum_j^{n_i} \sum_i^n f_i(x_j) \mathbf{u}_j^h \quad (1.50)$$

Onde  $n_i$  é o número total de nós do problema,  $n$  representa o número de nós dentro do domínio de influência do nó  $i$ , sendo o valor da função de forma  $\phi_i(x_j)$  relativamente ao nó  $i$  relativamente ao nó  $j$ , representando  $j$  o ponto de interesse,  $\mathbf{u}^h$  é o campo de parâmetros nodais do deslocamento e  $\mathbf{u}$  é o campo de deslocamentos.

### **2.4.2 – Matriz de Rigidez**

Sendo  $B_J$  a matriz de deformabilidade do nó  $J$ ,

$$\int_{\Omega} \delta \left[ \sum_I^n \mathbf{B}_I \mathbf{u}_I \right]^T \mathbf{c} \left[ \sum_J^n \mathbf{B}_J \mathbf{u}_J \right] d\Omega - \int_{\Omega} \delta \left[ \sum_I^n \phi_I \mathbf{u}_I \right]^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma_i} \delta \left[ \sum_I^N \phi_I \mathbf{u}_I \right]^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma = 0 \quad (1.51)$$

Escrevendo o primeiro termo da equação (1.47) com a forma:

$$\int_{\Omega} \delta \left[ \sum_I^n \mathbf{B}_I \mathbf{u}_I \right]^T \mathbf{c} \left[ \sum_J^n \mathbf{B}_J \mathbf{u}_J \right] d\Omega = \int_{\Omega} \delta \left[ \sum_I^n \mathbf{u}_I^T \mathbf{B}_I^T \right] \mathbf{c} \left[ \sum_J^n \mathbf{B}_J \mathbf{u}_J \right] d\Omega \quad (1.52)$$

Tal como a soma, o variacional e a integração são operações lineares e portanto, pode permutar-se a sua ordem. Assim sendo:

$$\int_{\Omega} \delta \left[ \sum_I^n \mathbf{B}_I \mathbf{u}_I \right]^T \mathbf{c} \left[ \sum_J^n \mathbf{B}_J \mathbf{u}_J \right] d\Omega = \sum_I^n \sum_J^n \delta \mathbf{u}_I^T \left[ \int_{\Omega} \mathbf{B}_I^T \mathbf{c} \mathbf{B}_J d\Omega \right] \mathbf{u}_J = \sum_I^n \sum_J^n \delta \mathbf{u}_I^T \left[ \mathbf{K}_{IJ}^L \right] \mathbf{u}_J \quad (1.53)$$

Podemos então escrever-se:

$$\int_{\Omega} \delta \left[ \sum_I^n \mathbf{B}_I \mathbf{u}_I \right]^T \mathbf{c} \left[ \sum_J^n \mathbf{B}_J \mathbf{u}_J \right] d\Omega = \sum_I^n \sum_J^n \delta \mathbf{u}_I^T \left[ \mathbf{K}_{IJ} \right] \mathbf{u}_J \quad (1.54)$$

Onde  $\mathbf{K}_{IJ}^L$  é a matriz rigidez local nodal,  $\mathbf{K}_{IJ}$  é a matriz de rigidez global nodal e  $n_i$  representa o número total de nós do problema (Belinha, 2004).

A equação (1.54) representa a assemblagem da matriz de rigidez global nodal. Pode-se então representar a equação (1.54) na forma matricial completa:

$$\sum_I^{n_i} \sum_J^{n_i} \delta \mathbf{u}_I^T [\mathbf{K}_{IJ}] \mathbf{u}_J = \delta \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} \quad (1.55)$$

$$\mathbf{K}_{IJ} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_I \mathbf{c} \mathbf{B}_J d\Omega$$

Onde  $\mathbf{K}$  é a matriz de rigidez global nodal que tem o seguinte aspecto,

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1m_i} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2m_i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{m_i,1} & k_{m_i,2} & \cdots & k_{m_i,m_i} \end{bmatrix} \quad (1.56)$$

Onde  $m_i = 2n_i$  para o caso do problema bidimensional. Onde a matriz deformabilidade é dada por:

$$\mathbf{B}_I = \begin{bmatrix} \frac{d\phi_I}{dx} & 0 \\ 0 & \frac{d\phi_I}{dy} \\ \frac{d\phi_I}{dy} & \frac{d\phi_I}{dx} \end{bmatrix} \quad (1.57)$$

### 2.4.3 – Vector de forças

Analisando o segundo termo da equação (1.60),

$$\int_{\Omega} \delta \left[ \sum_I^n \phi_I \mathbf{u}_I \right]^T \mathbf{b} d\Omega = \sum_I^n \delta \mathbf{u}_I^T \int_{\Omega} \phi_I^T \mathbf{b} d\Omega = \sum_I^{n_i} \delta \mathbf{u}_I^T \mathbf{f}_I \quad (1.58)$$

Onde  $\mathbf{f}_I$  é o chamado vector global das forças nodais, neste caso representa forças de volume. Pode-se escrever a equação (1.55) numa forma vectorial,

$$\sum_I^{n_i} \delta \mathbf{u}_I^T \mathbf{f}_I = \delta \mathbf{U}^T \mathbf{F} \quad (1.59)$$

Sendo  $\mathbf{F}$  o vector global das forças nodais.  $\mathbf{F}$  toma a seguinte forma para o caso bidimensional (Belinha, 2004):

$$\mathbf{F} = \left\{ f_{x1} \quad f_{y1} \quad f_{x2} \quad f_{y2} \quad \cdots \quad f_{xn_i} \quad f_{yn_i} \right\}^T \quad (1.60)$$

Sendo,

$$f_I = \int_{\Omega} \phi_I^T \mathbf{b} d\Omega \quad (1.61)$$

As condições de fronteira essenciais, devido à propriedade de delta Kronecker das funções de interpolação, podem ser impostas pelo método da imposição directa, tal como no método dos elementos finitos.

#### **2.4.4 – Equação Matricial do Problema Elasto-Estático**

Com base na equação (1.49) para um problema elasto-estático é possível escrever a seguinte equação matricial,

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F} \Rightarrow \mathbf{K}^{-1}\mathbf{F} = \mathbf{U} \quad (1.62)$$

Obtendo-se assim o campo de deslocamentos  $\mathbf{U}$ .

## 2.5 – Algoritmo de abertura de fenda

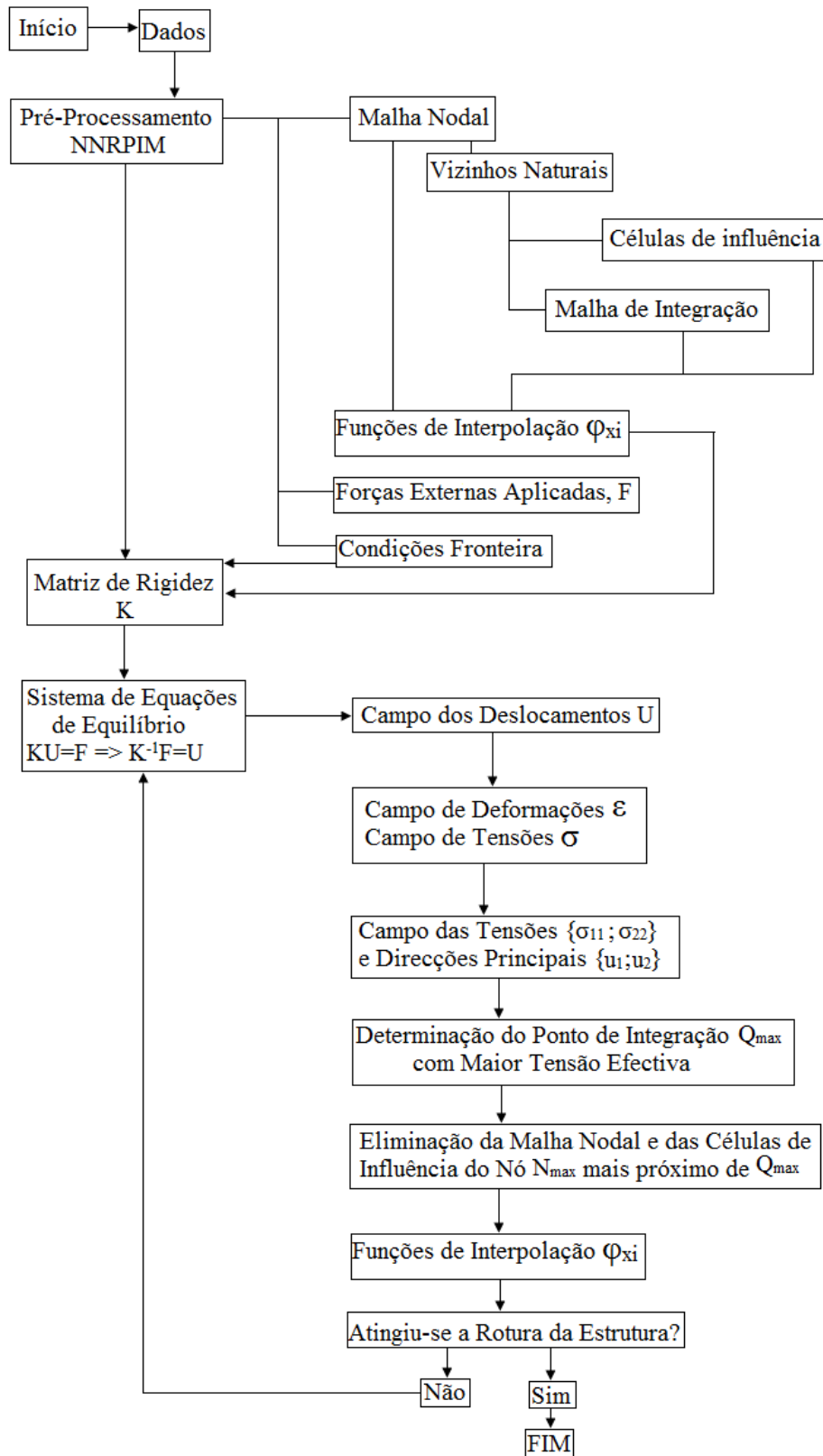


Figura 9 - Organigrama explicativo do algoritmo utilizado para o estudo da propagação de fenda

Para determinação da propagação da fenda foi utilizado um algoritmo iterativo, ilustrado na figura 9.

Utilizando o programa MATLAB é executado, inicialmente, o NNRPIM, sendo discretizada e determinada a malha nodal e também a malha de integração. A malha nodal é discretizada tendo em conta o número de divisões a efectuar segundo as duas direcções do problema dimensional.

Seguidamente, com base na malha nodal é gerada a malha de integração.

É no pré-processamento que o nó correspondente à ponta de fenda,  $N_{fenda}$ , é estabelecido.

As funções de interpolação são então construídas, depois de definidas as células de influência, a partir de Interpoladores Radiais Pontuais (Belinha, 2010).

De seguida, são aplicadas as condições de fronteira essenciais e naturais.

São determinados os domínios de influência, sendo, neste problema específico, células de influência.

É então, determinada a matriz rigidez da estrutura a estudar, podendo, de seguida calcular-se os deslocamentos através de  $u = K^{-1}F$ .

Os campos de tensões e deformações da placa são determinadas, pelas expressões  $\sigma = B \cdot c \cdot u$  e  $\varepsilon = B \cdot u$ . Tendo a matriz das tensões, e fazendo a determinação dos valores e vectores próprios desta matriz são então determinados os campos das tensões e direcções principais.

Cada ponto de integração possui um valor de  $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}$  e  $\tau_{xy}$ , como tal, pela mecânica dos sólidos, para problemas bidimensionais as tensões principais podem ser calculadas para cada ponto por:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \\ \sigma_{22} &= \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}\end{aligned}\tag{1.63}$$

Cujas direcções principais podem ser calculadas pela expressão:

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})} \quad (1.64)$$

Tendo em conta que  $\tan(2\theta_p) = \tan(2\theta_p + \pi)$  pode dizer-se que existem duas direcções mutuamente perpendiculares, que satisfazem a condição de ser  $\tau_{xy} = 0$  (Silva Gomes, 2004). Os par vectorial  $\vec{u}_1$  e  $\vec{u}_2$  representa as duas direcções principais, respectivamente para  $\sigma_{11}$  e  $\sigma_{22}$ .

De seguida, é aplicado um pequeno algoritmo, para determinar o nó seguinte por onde a fenda se propagará partindo da sua extremidade.

É então identificado o nó  $N_{max}$ , que em princípio corresponderá à ponta da fenda,  $N_{fenda}$ . Depois, é feita a localização de todos os pontos de integração gerados pelo nó  $N_{max}$ .

Através da identificação do ponto de integração  $Q_{max}$ , gerado pelo nó  $N_{max}$  correspondente à extremidade da fenda, com maior valor de tensão efectiva, que pode ser expressa, segundo o critério de Von Mises:

$$\sigma = \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + 6\tau_{xy}^2)} \quad (1.65)$$

determina-se a direcção de abertura da fenda com base na direcção principal  $\vec{u}_2$ . Considerando apenas os nós vizinhos do nó  $N_{max}$  procede-se ao cálculo dos vectores  $w_i = x_i - Q_{max}$ , sendo  $x_i$  as coordenadas dos nós vizinhos do nó  $N_{max}$ .

Determinam-se então os ângulos entre  $\vec{u}_2$  e todos os  $w_i$  através da expressão:

$$\theta_i = \arccos \left( \frac{|\vec{u}_2 \times w_i|}{|\vec{u}_2| |w_i|} \right) \quad (1.66)$$

O nó  $i$  que apresentar menor  $\theta_i$  será o novo  $N_{fenda}$  na próxima iteração.

Identificado o vector, localiza-se o nó que lhe corresponde que será o nó por onde a fenda se propagará de seguida. Identifica-se este nó como sendo a nova extremidade da fenda e exclui-se da malha o nó  $N_{fenda}$  anterior.

Após a identificação de  $N_{max}$  e dos pontos de integração gerados pelo mesmo, é estabelecida uma nova malha nodal e de pontos de integração.

Já sem o nó  $N_{max}$  e sem os pontos de integração gerados por  $N_{max}$  são, seguidamente, eliminados os domínios dos primeiros vizinhos e segundos vizinhos do nó  $N_{max}$ .

Finalmente, são determinadas as novas funções de interpolação, com base nas novas malhas de nós e de integração e com base nas células de influência actualizadas.

Uma nova matriz de rigidez é determinada e o processo prossegue até à rotura da estrutura.

### **3-Iniciação aos métodos sem malha**

Em relação ao RPIM, a formulação descrita em (Wang, 2002) foi a considerada. Os parâmetros de forma  $c = 1,42$  e  $p = 1,03$ . No que respeita ao esquema de integração do RPIM foram considerados  $4 \times 4$  pontos de integração por célula de integração (Wang, 2002). Em relação ao domínio de influência foram considerados os 16 nós mais próximos do ponto de interesse.

#### **3.1 - RPIM**

Recorrendo a um programa, desenvolvido e programado, previamente, pelo Doutor Jorge Belinha, em linguagem MATLAB, começou por fazer-se uma abordagem aos métodos sem malha utilizando o método RPIM.

Utilizando como exemplo, para estudar algumas características deste método, uma viga cantilever como a representada na figura abaixo com comprimento  $L = 8m$ ,  $D = 2m$ ,  $e = 1m$ , com um módulo de Young  $E = 1000Pa$  e um coeficiente de Poisson  $\nu = 0,3$ . Considera-se uma carga vertical uniformemente distribuída na extremidade da viga,  $q = 1 N/m$ .

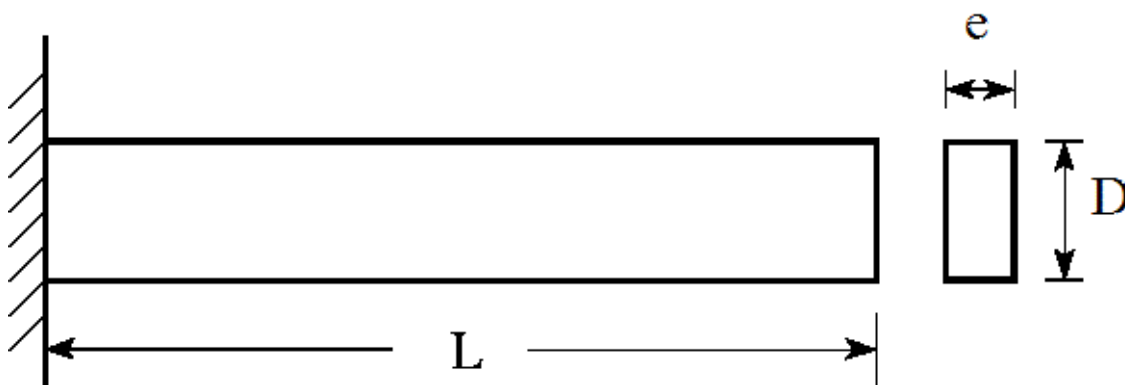


Figura 10 - Exemplo de uma viga cantilever

### 3.1.1 - Estudo da convergência

Com a finalidade de estudar o erro relativo do deslocamento vertical do ponto A (coordenadas  $x=L$  e  $y=D/2$ ) decidiu fazer-se variar o número de nós e pontos de integração (proporcionalmente) o erro foi obtido comparando a solução obtida com o RPIM com a solução analítica:

$$Erro = \frac{|v_{A(RPIM)} - v_{A(Exacto)}|}{|v_{A(Exacto)}|} \quad (1.67)$$

Os resultados das figuras 11 e 12 referem-se ao estudo das malhas nodais regulares.

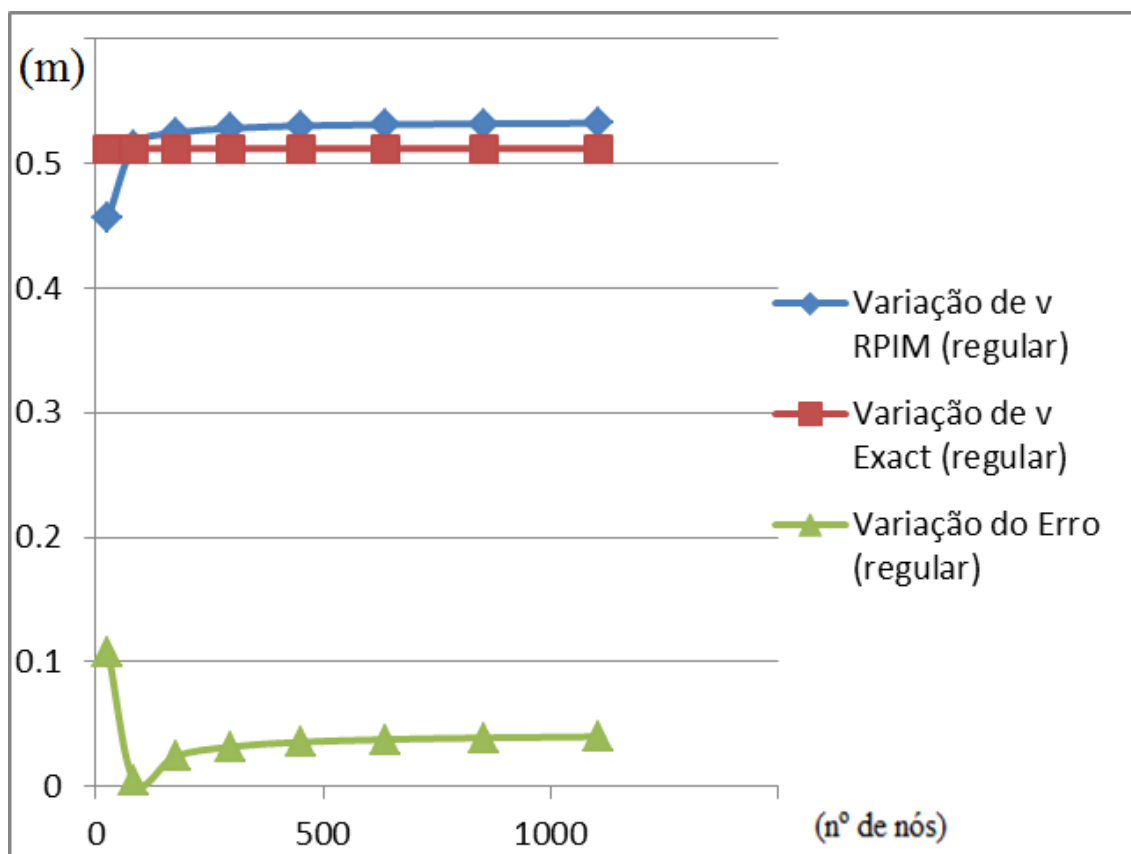
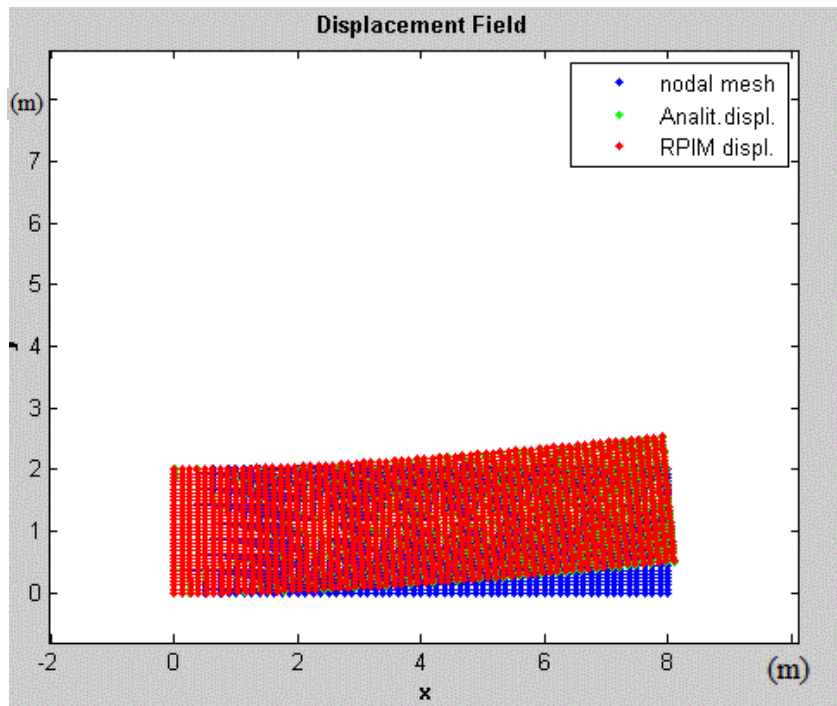


Figura 11 - Variação do valor de deslocamento e do erro com o número de nós numa malha regular



**Figura 12- Campo dos deslocamentos utilizando uma malha regular**

Pode observar-se na figura 11, que os resultados obtidos, pelo RPIM, para o deslocamento convergem quase de imediato para o valor exacto à medida que se utilizam malhas cada vez mais discretizadas (com maior número de nós).

De seguida apresentam-se, nas figuras 13 e 14, os resultados obtidos referentes a malhas nodais irregulares. Para malhas nodais irregulares, verifica-se na figura 13 uma evolução praticamente igual à da figura 11, sendo que o valor do erro apresenta uma curva de variação similar quando a malha é cada vez mais discretizada.

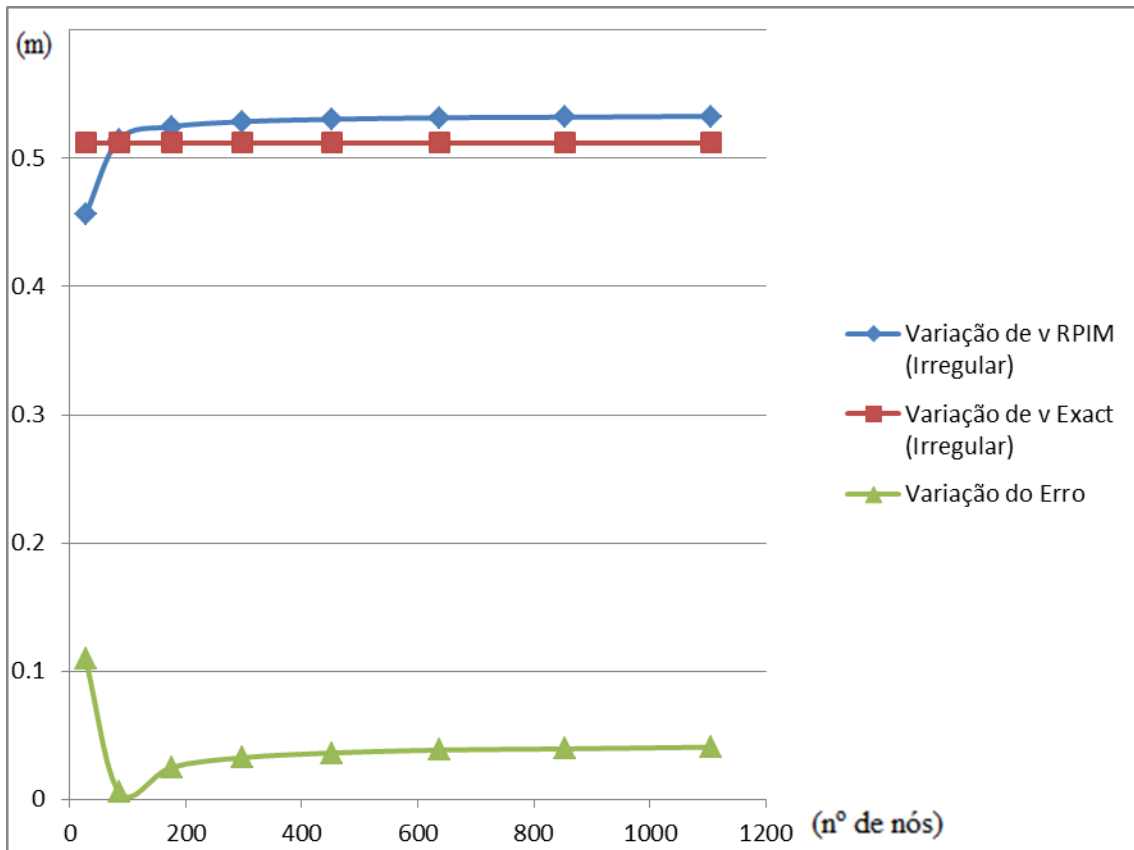


Figura 13 - Variação do valor de deslocamento e do erro com o número de nós numa malha irregular

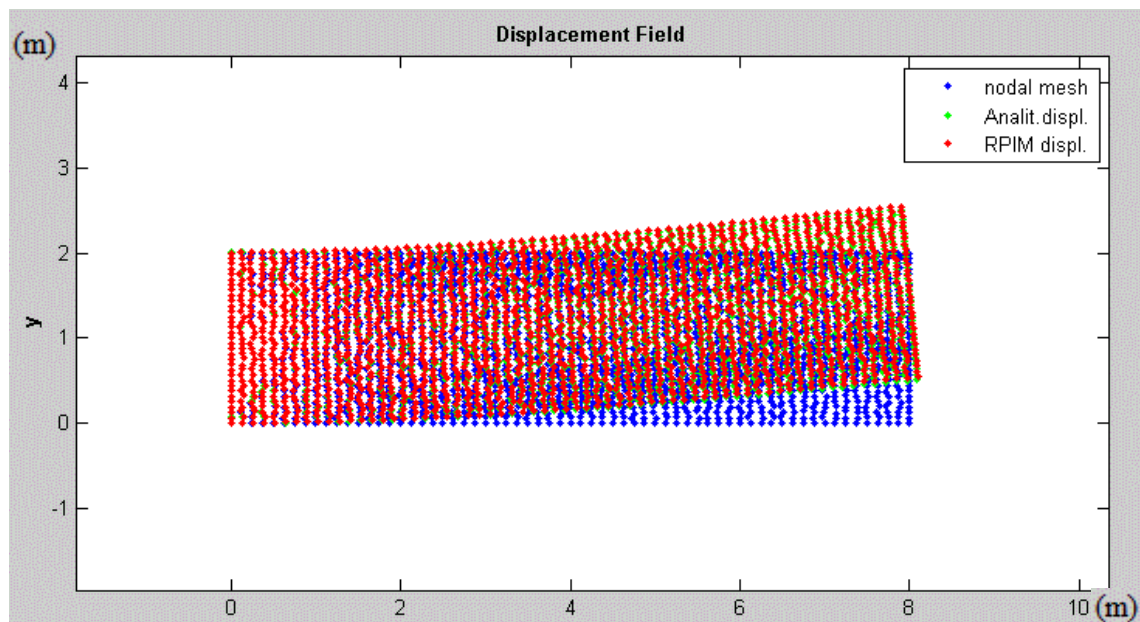
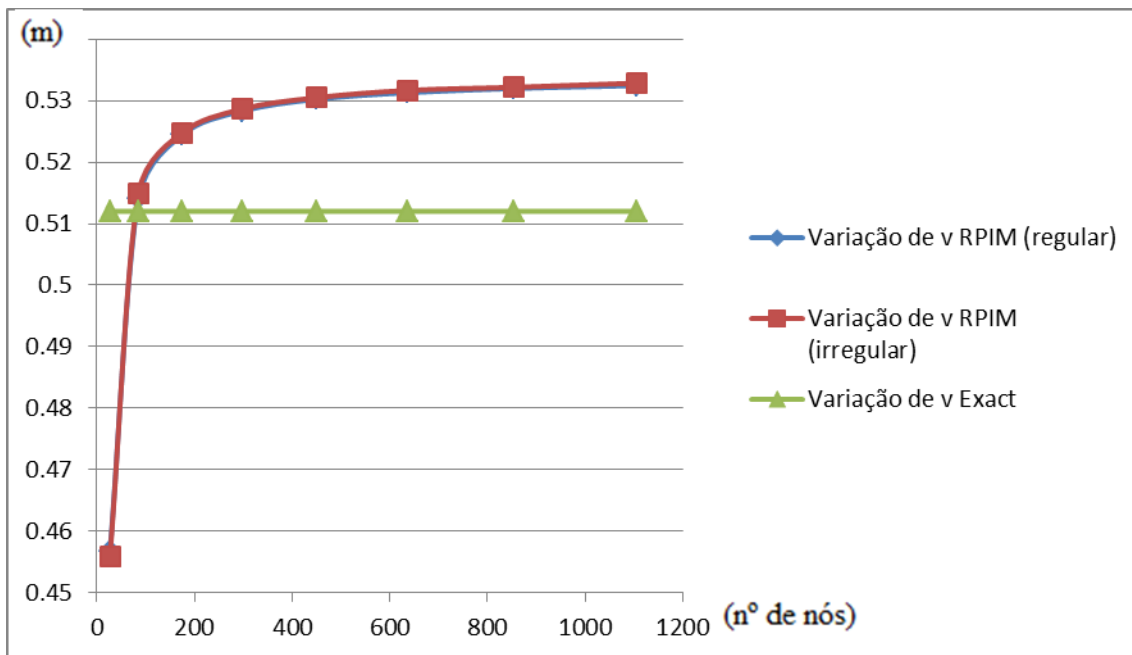
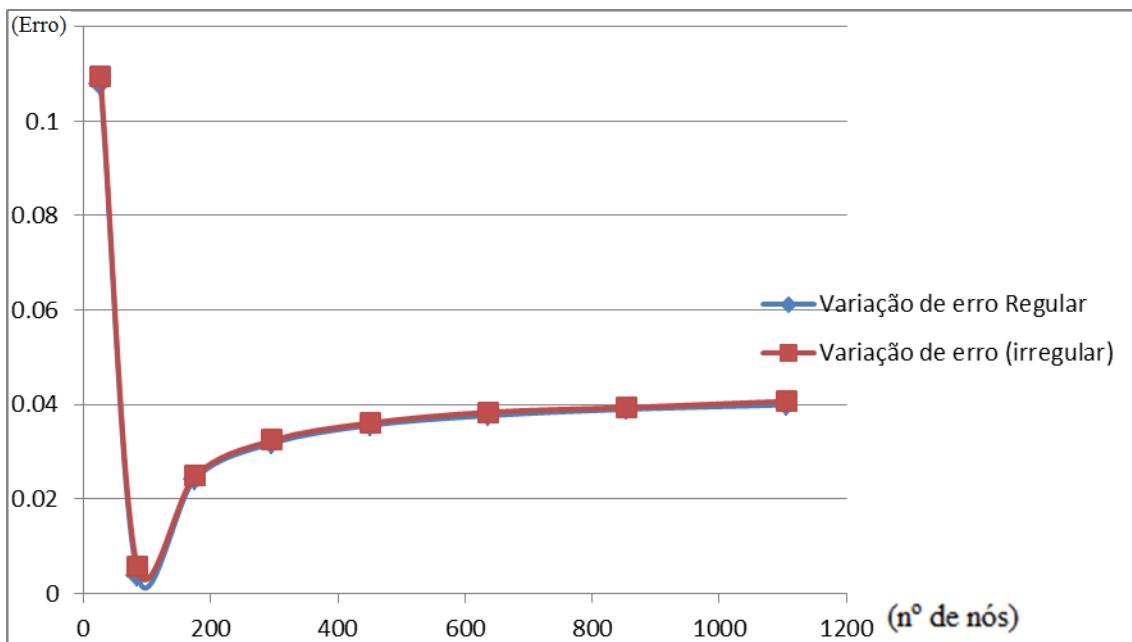


Figura 14 – Campo dos deslocamentos utilizando uma malha irregular



**Figura 15 - Comparação da variação do cálculo do deslocamento pelo método RPIM com malha regular e irregular**



**Figura 16 - Variação do erro para malha regular e irregular**

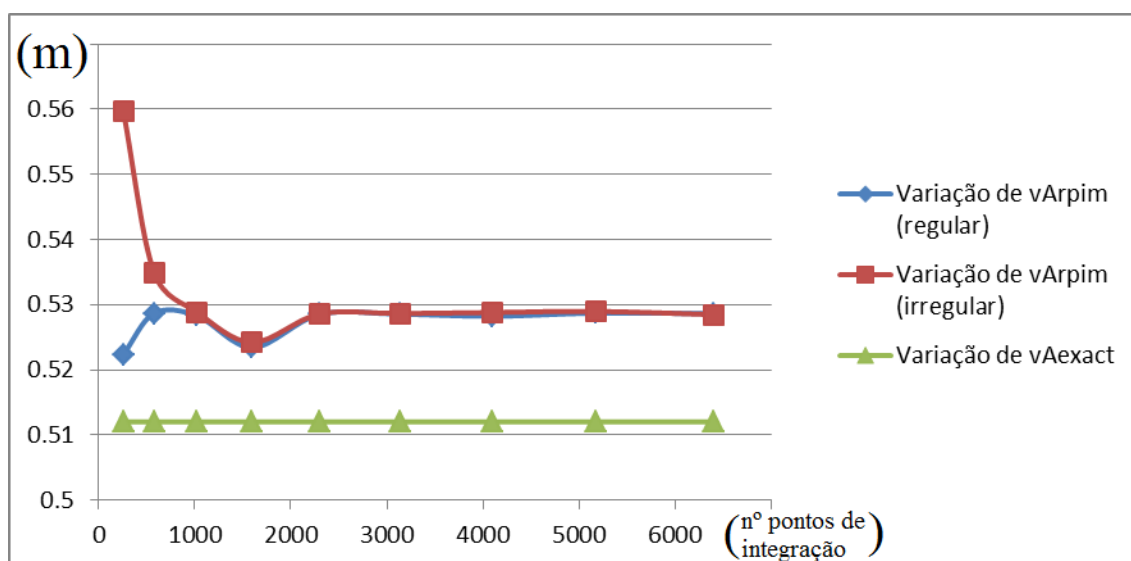
Na figura 15, são comparadas as curvas de variação do valor de deslocamento do ponto A para malhas nodais regulares e irregulares. Pode dizer-se, que a figura 15 reforça o facto de os resultados serem bastante similares nas variações das figuras 11 e 13,

concluindo que existe convergência quer num caso quer noutra. Uma vez que os resultados obtidos, para os valores de deslocamento (figura 15), são praticamente iguais verifica-se que a variação do erro, relativamente a soluções exactas, em ambos os casos (malha nodal regular e irregular) apresenta uma variação semelhante.

Após análise dos gráficos é possível verificar que a solução converge.

### **3.1.2 - Estudo da integração**

Neste exemplo, o ponto considerado, foi também o ponto A para cálculo do seu deslocamento. Foram consideradas as mesmas propriedades mecânicas e geométricas do exemplo anterior. Nesta análise foram utilizadas duas malhas, uma regular com 297 nós e uma malha irregular com 297 nós. Fez-se então variar a malha de fundo de integração, considerando malhas cada vez mais densas. A finalidade, foi estudar a variação do valor do erro no cálculo do deslocamento do ponto A, com o número total de pontos de integração.



**Figura 17 - Variação do valor dos deslocamentos com o número de pontos de integração**

Como é possível observar, por análise da figura 17, para um número baixo de pontos de integração existe alguma discrepância no cálculo dos valores de deslocamento. No entanto, como se pode constatar à medida que se aumenta o número de pontos de

integração, o valor tende para um valor constante e corroborando esta ideia através do Gráfico 6 também o erro tende para um valor.

Analisando a figura 18 pode ver-se que existe um valor óptimo para o qual o erro é menor entre 1000 a 2000 pontos de integração, quer para malha regular quer para malha irregular.

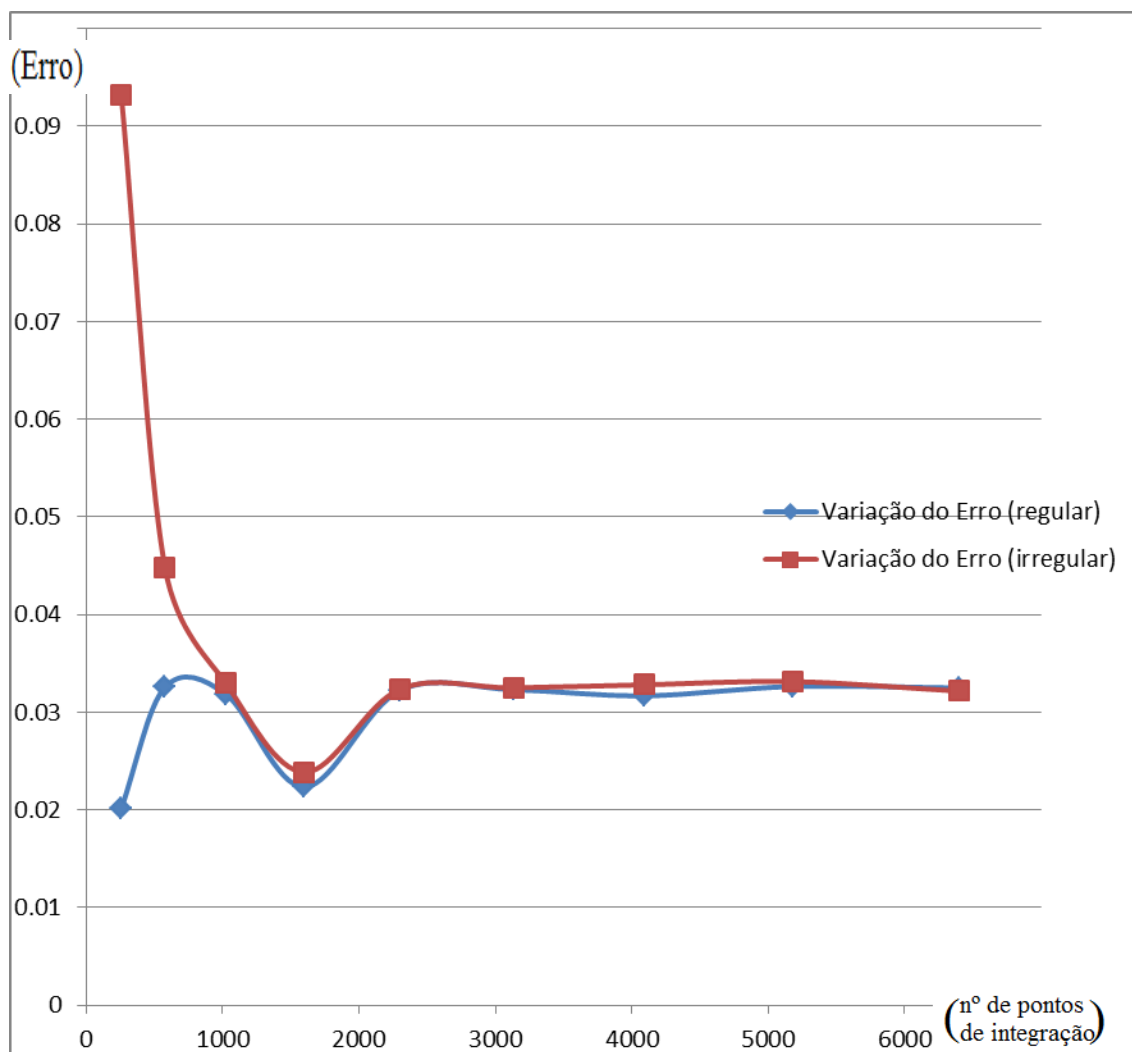


Figura 18 - Variação do valor do erro de cálculo de deslocamentos com o número de pontos de integração

### **3.1.3 - Estudo da influência**

Neste último exemplo, pretende verificar-se a variação do cálculo do deslocamento do mesmo ponto A com a variação do número de pontos no domínio de influência de cada nó. Este estudo foi efectuado quer para malha regular quer para malha irregular.

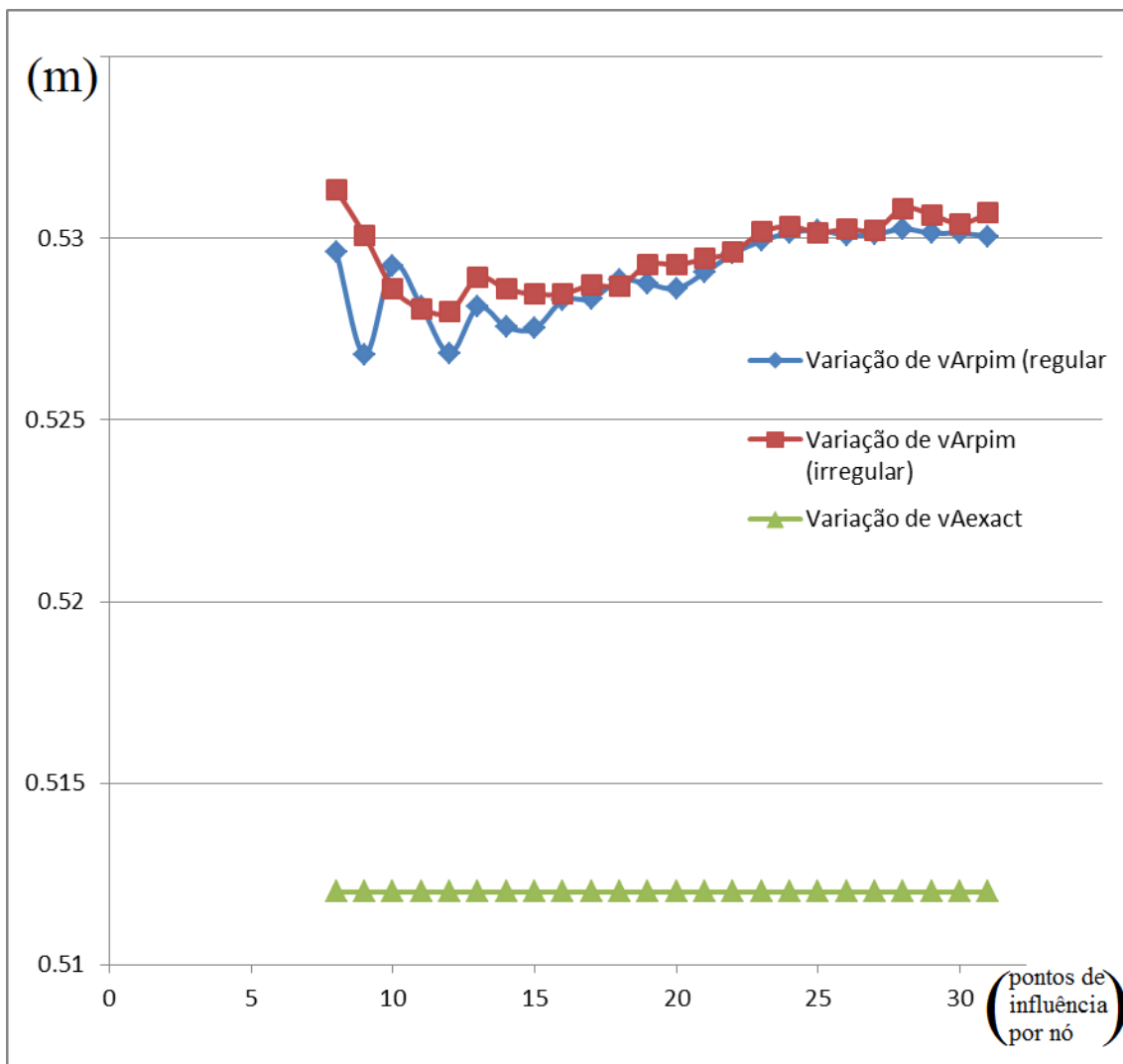


Figura 19 - Variação do valor do deslocamento com o número de pontos no domínio de influência

Verifica-se que os valores do deslocamento apresentam uma variação bastante acentuada quando a dimensão dos domínios de influência é mais baixa, chegando mesmo a haver valores em que a malha regular apresenta mais discrepância do que a malha irregular no valor do deslocamento; no entanto, como verificado nos dois últimos estudos, à medida que se aumenta a variável no eixo dos xx, neste caso o número de pontos no domínio de influência, o deslocamento tende para um valor (existe convergência).

É ainda de salientar que dos três estudos efectuados, este é aquele, onde o facto de a malha ser ou não regular se apresenta como um factor bastante determinante na precisão da solução do problema.

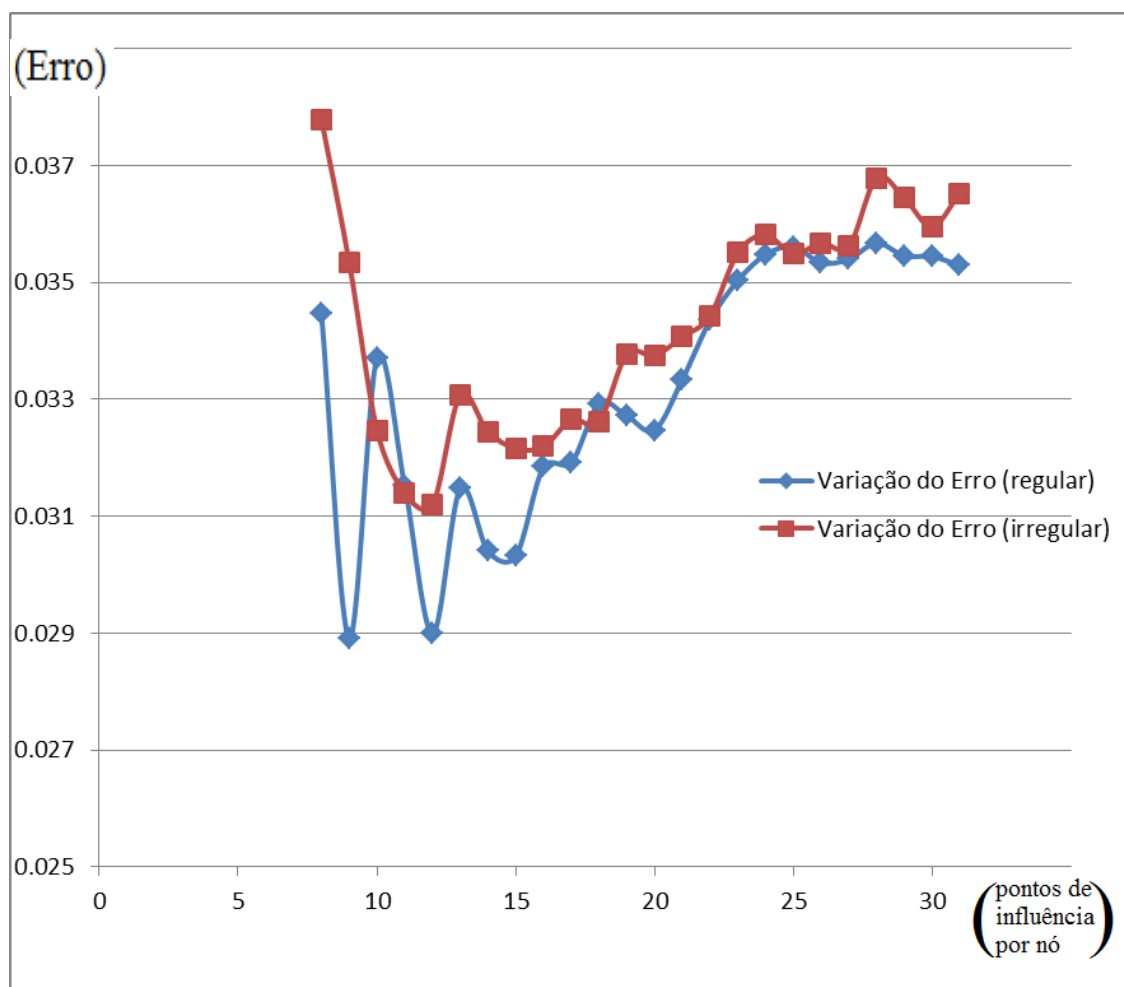


Figura 20 - Variação do erro no cálculo do deslocamento com o número de pontos no domínio de influência

Analisando a figura 20 pode concluir-se que o erro vai aumentando gradualmente com o número de pontos no domínio de influência, tendendo para um valor no final. Verifica-se que existe uma zona entre os 8 e os 12 pontos no domínio de influência para a qual o valor do erro é menor, quer para malha regular quer para malha irregular. Pode verificar-se que, no caso dos pontos no domínio de influência, um dos factores mais importantes pode ser a regularidade da malha pois para poucos pontos no domínio de influência, a malha irregular apresenta valores de erro bastante acentuados.

## **3.2 - Resultados NNRPIM e RPIM**

Após correr alguns exemplos, e enriquecer com algumas condições de fronteira essenciais e naturais, o código, em MATLAB do programa utilizado para correr o RPIM foi facultado pelo Doutor Jorge Belinha, um programa com código também em MATLAB destinado a ser utilizado para testar exemplos utilizando o método NNRPIM.

Numa primeira fase, foram testados três exemplos, resolvidos por ambos os métodos e no final compararam-se os resultados.

Os três exemplos que se seguem, encontram-se no artigo da Referência (Dinis, 2007) e foram testados para conseguir obter uma análise da precisão destes dois métodos sem malha e de os poder comparar.

### 3.2.1 - Placa quadrada sujeita a tensão uniaxial

Neste exemplo foi considerada uma placa de dimensões  $L \times L$  sujeita a uma tensão uniforme  $\sigma = 10 \text{ kPa}$  na direcção horizontal. Considerou-se que ao material da placa possuía um módulo de rigidez de  $E = 100 \text{ kPa}$ , um coeficiente de Poisson de  $\nu = 0,25$  e um comprimento  $L = 1,0 \text{ m}$ .

A solução analítica para o cálculo dos deslocamentos é dada por:

$$\begin{aligned} u &= \frac{\sigma}{E} \cdot \frac{x}{L} \\ v &= -\frac{\nu \sigma}{E} \cdot \frac{y}{L} \end{aligned} \quad (1.68)$$

As condições de fronteira (quer essenciais quer naturais) estão ilustradas na figura 21 abaixo.

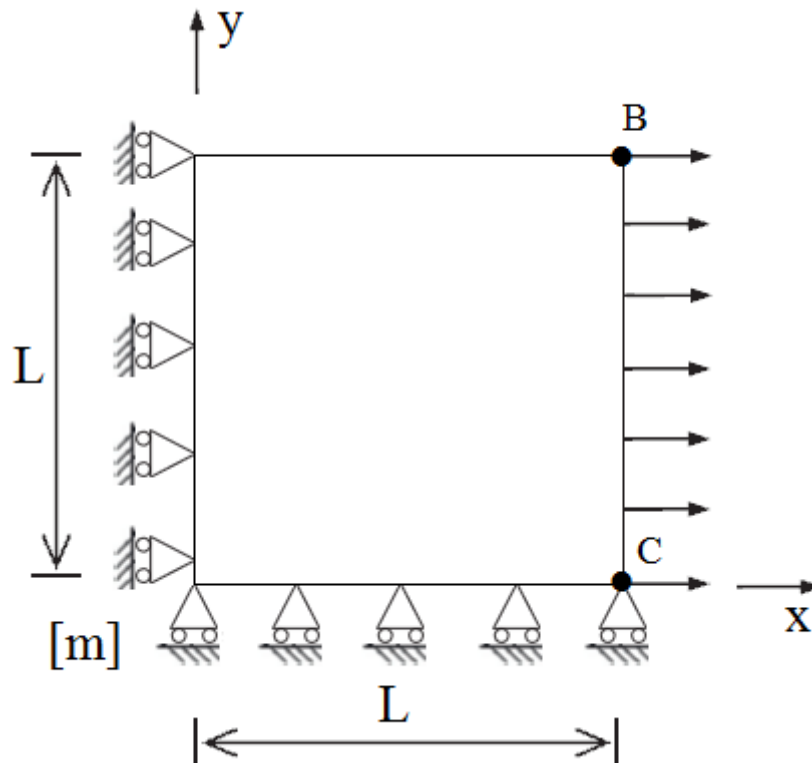


Figura 21 - Placa quadrada sujeita a tensão uniaxial

O problema em questão, foi discretizado para ambos os métodos, em malhas regulares e irregulares. Exemplo de uma malha regular com 289 nós e de uma malha irregular com 289 nós, são apresentadas na figura 22 (a) e (b).

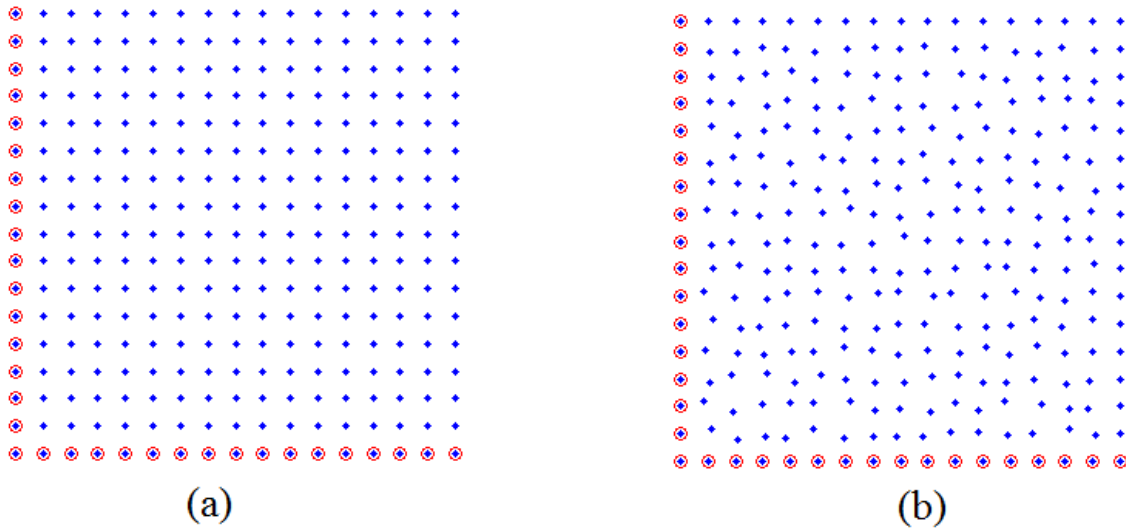


Figura 22- (a) Malha nodal regular (b) Malha nodal irregular

Considerando os pontos B (de coordenadas  $x=L$  e  $y=D$ ) e C (de coordenadas  $x=L$  e  $y=0$ ) fez-se o estudo de convergência dos deslocamentos destes dois pontos e o estudo de convergência da tensão na placa.

No caso do ponto C, uma vez que uma das condições de fronteira é o impedimento do deslocamento vertical, fez-se o estudo de convergência apenas para o deslocamento horizontal ( $u_c$ ). Para o ponto B, foi efectuado o estudo de convergência para o deslocamento horizontal e vertical ( $u_B$  e  $v_B$ ).

Para o cálculo do erro nos estudos de convergência foram utilizadas as expressões:

$$\begin{aligned} \varepsilon_u &= \frac{1}{n} \sum_i^n \frac{|u_i - u_{iexacto}|}{|u_{iexacto}|} \\ \varepsilon_v &= \frac{1}{n} \sum_i^n \frac{|v_i - v_{iexacto}|}{|v_{iexacto}|} \end{aligned} \tag{1.69}$$

Onde  $n$  representa o número de nós que discretiza o domínio do problema.

Para o cálculo do erro médio da tensão considerou-se a tensão exacta/teórica  $\sigma_{xxexacto} = 10kPa$  e tendo em conta os valores obtidos pelo método a expressão usada para o estudo de convergência foi:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{n_Q} \sum_i^{n_Q} \frac{|\sigma_{xxi} - \sigma_{xxexacto}|}{|\sigma_{xxexacto}|} \quad (1.70)$$

Onde  $n_Q$  representa o número de pontos de integração do domínio de influência do problema.

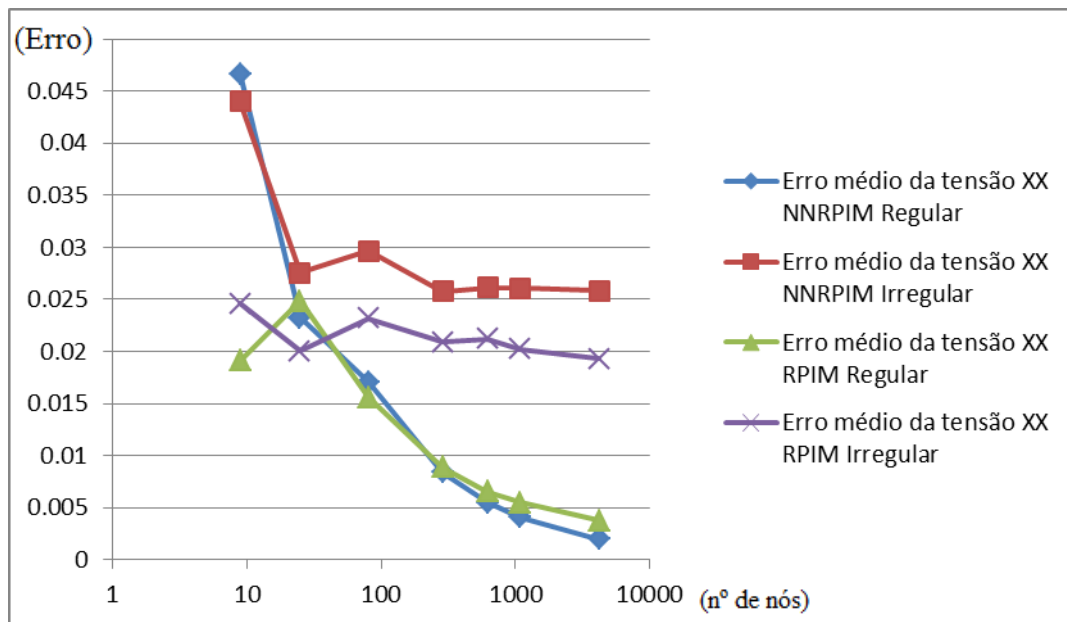


Figura 23 - Variação dos valores do erro médio da tensão em x com o número de nós do problema

Após análise da figura 23, pode observar-se que o valor do erro decresce de forma consistente.

Denota-se pela evolução do gráfico que, para malhas regulares o valor do erro médio da tensão tende para valores menores no caso do método NNRPIM e para malhas irregulares o valor do erro é menor no caso do método RPIM. É ainda, de salientar que, como esperado o valor do erro para malhas irregulares é superior do que no caso de malhas regulares.

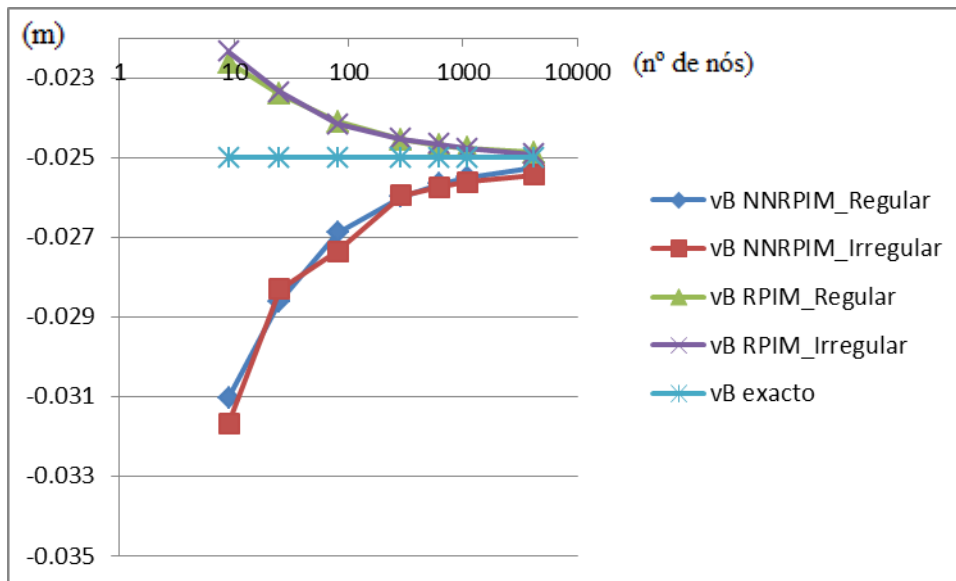


Figura 24 - Variação dos valores do deslocamento vertical do ponto B com o número de nós

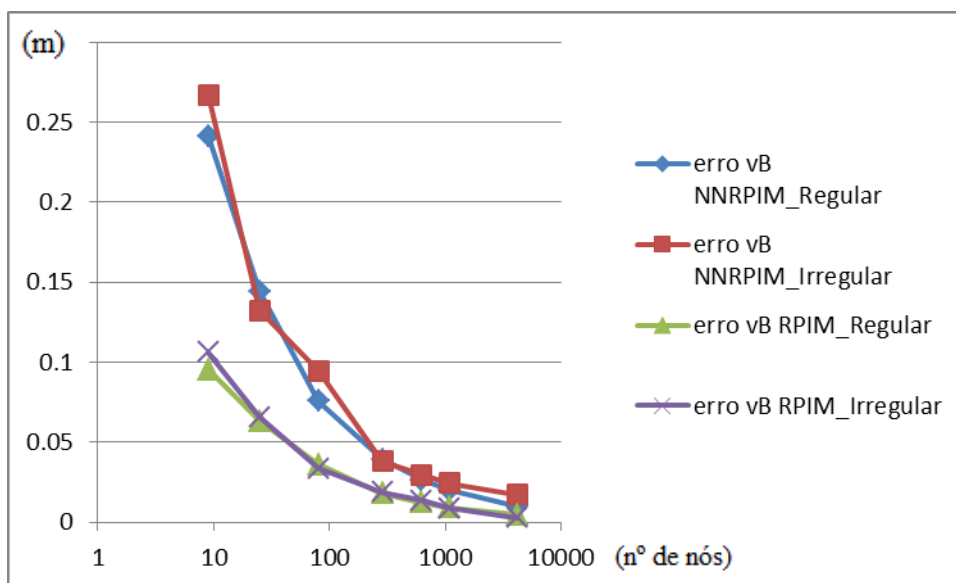


Figura 25 - Variação do erro do deslocamento vertical do ponto B com o número de nós

Quer no caso do cálculo do deslocamento, quer no valor do erro conclui-se que quanto maior for o número de nós que discretizam o problema, mais os valores se aproximam do valor do deslocamento teórico (figura 24) e menor será o valor do erro (figura 25). Conclui-se ainda que para malhas regulares os valores são mais próximos dos teóricos do que para malhas irregulares.

De notar que os valores obtidos pelo método RPIM são mais próximos dos valores teóricos do que os valores obtidos pelo método NNRPIM, tendendo no entanto para valores muito similares quando o número de nós, que discretizam o problema, já é bastante elevado.

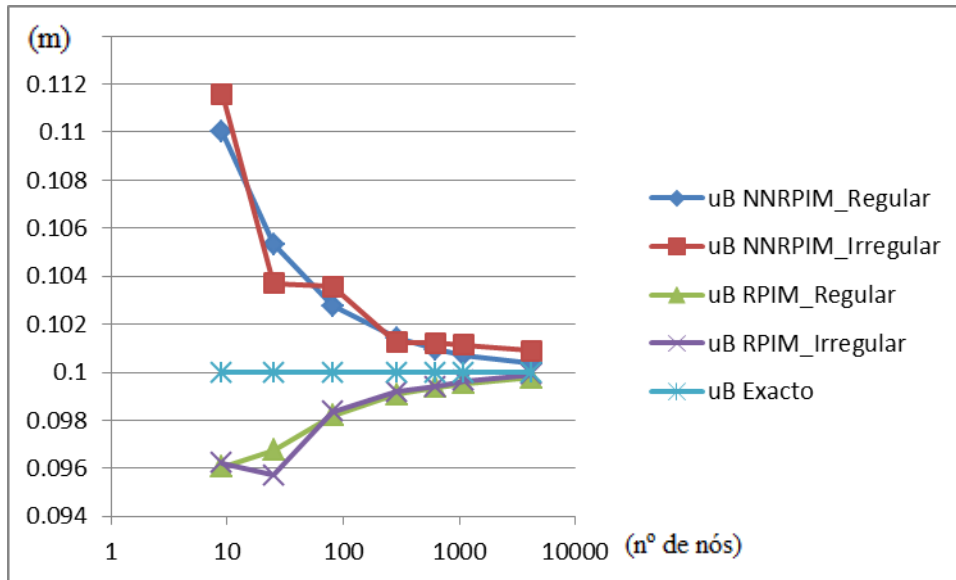


Figura 26 - Variação dos valores do deslocamento horizontal do ponto B com o número de nós

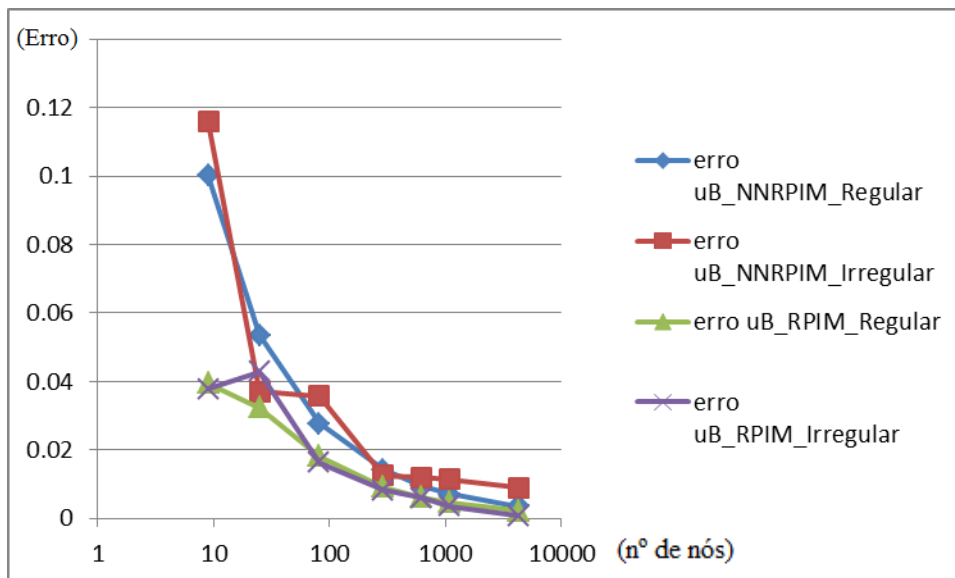


Figura 27 - Variação do erro do deslocamento horizontal do ponto B com o número de nós

No caso do deslocamento horizontal do ponto B, como se pode observar no figura 26, a evolução dos resultados e o estudo da convergência é bastante similar ao obtido no

deslocamento vertical deste mesmo ponto (figura 24). No entanto, aqui os valores do deslocamento horizontal, bem como o erro (figura 27), parecem tender mais rapidamente para o mesmo valor do que no caso do deslocamento vertical (figura 25).

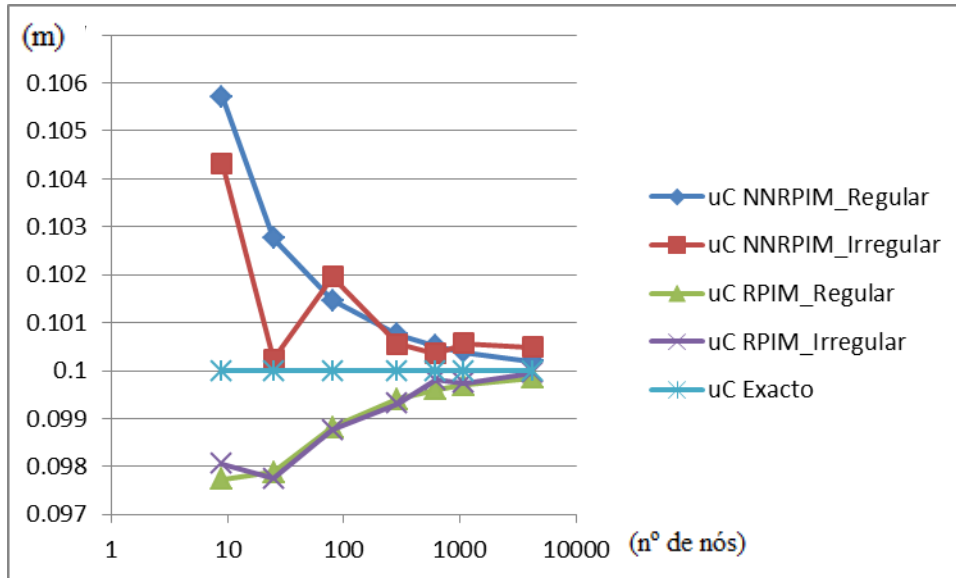


Figura 28 - Variação dos valores do deslocamento horizontal do ponto C com o número de nós

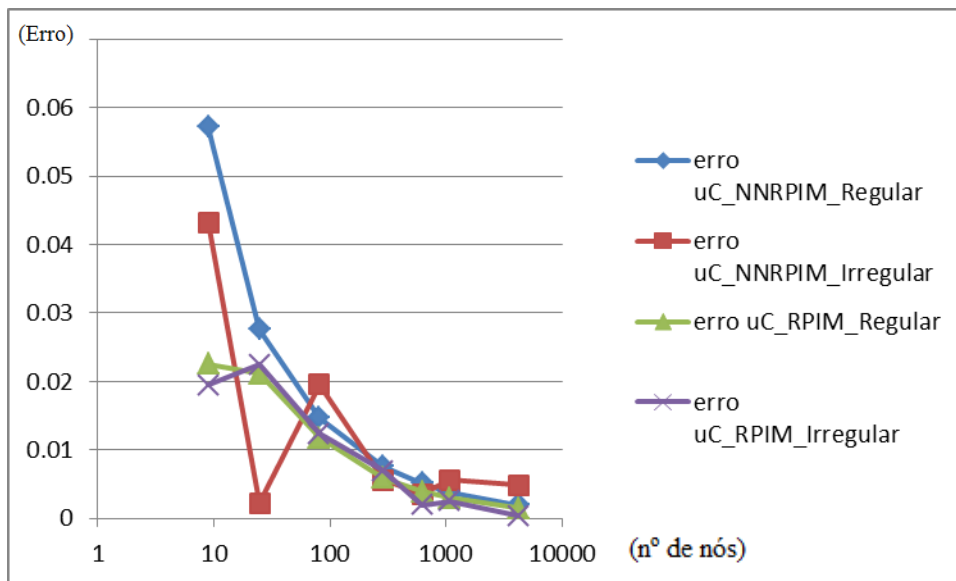


Figura 29 - Variação do erro do deslocamento horizontal do ponto C com o número de nós

Nos resultados relativos ao deslocamento horizontal do ponto C é possível observar, nas figuras 28 e 29, que nos resultados para o método RPIM, os valores tendem mais rapidamente para o valor exacto do que nos resultados do método NNRPIM. No entanto, para malhas com mais nós o resultado é bastante similar, exceptuando, neste

caso, para malhas irregulares com o método NNRPIM que apresenta grandes flutuações nos resultados; sendo até um dos resultados muito mais preciso do que para malhas regulares, mas, não deve ser tido em conta, uma vez que nos resultados seguintes se aproxima mais de uma curva com erro superior às restantes malhas.

Neste exemplo, de uma placa quadrada, pode concluir-se que o método NNRPIM é mais preciso para valores de cálculo da tensão horizontal do que o método RPIM. No entanto, para o cálculo de deslocamentos, o método RPIM parece ser ligeiramente mais preciso que o método NNRPIM mas esta diferença não é muito significativa.

É possível ainda observar que o NNRPIM e o RPIM apresentam taxas de convergência similares.

### 3.2.2 - Viga cantilever

Neste exemplo foi considerada uma viga cantilever (figura 30) de dimensões  $L \times D$  sujeita a uma carga parabólica distribuída  $P = -1kN$  na extremidade  $x = L$ . Considerou-se que ao material da placa possuía um módulo de rigidez de  $E = 100kPa$ , um coeficiente de Poisson de  $\nu = 0,25$  e um comprimento  $L = 2,0m$  e uma altura  $D = 1,0m$  bem como uma espessura  $e = 1,0m$ .

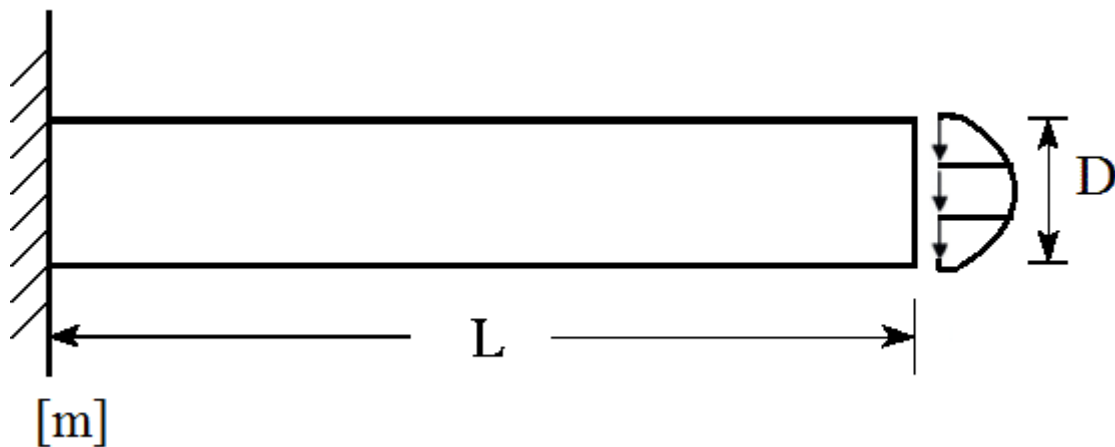


Figura 30 - Viga cantilever sujeita a carga parabólica distribuída

A equação (1.71) traduz o campo de tensões no domínio da viga:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= -\frac{P(L-x)y}{I} \\ \sigma_{yy} &= 0 \\ \sigma_{xy} &= \frac{P}{2I} \left( \frac{D^2}{4} - y^2 \right)\end{aligned}\tag{1.71}$$

A tensão aplicada nas fronteiras  $x = 0$  e  $x = L$  é também obtida por recurso à equação (1.71).

Sendo que  $I$  representa o momento de inércia e é dado por  $I = \frac{D^3}{12}$ .

O problema foi discretizado em malhas regulares e irregulares. São ilustrados exemplos de uma malha regular e irregular na figura 31 (a) e (b) respectivamente, possuindo 163 nós ambos os casos.

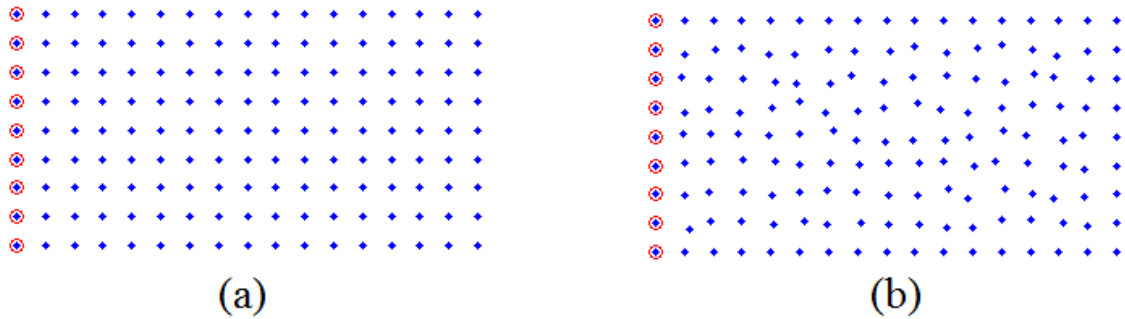


Figura 31 - (a) Malha nodal regular (b) Malha nodal irregular

Estudou-se a convergência do deslocamento vertical de um ponto A, de coordenadas  $x = L$  e  $y = D/2$ , pertencente à viga e sujeito às condições enunciadas do problema. A solução exacta para o campo de deslocamentos neste problema é dada por:

$$u = -\frac{P}{6EI} \left[ (2L-x)3x + (2+\nu) \left( y^2 - \frac{D^2}{4} \right) \right] \quad (1.72)$$

$$v = \frac{P}{6EI} \left[ x^2 (3L-x) + 3\nu(L-x)y^2 + \frac{4+5\nu}{4} D^2 x \right]$$

Para o cálculo do erro das tensões e dos valores de deslocamento, utilizaram-se equações similares às descritas em (1.71) e (1.72).

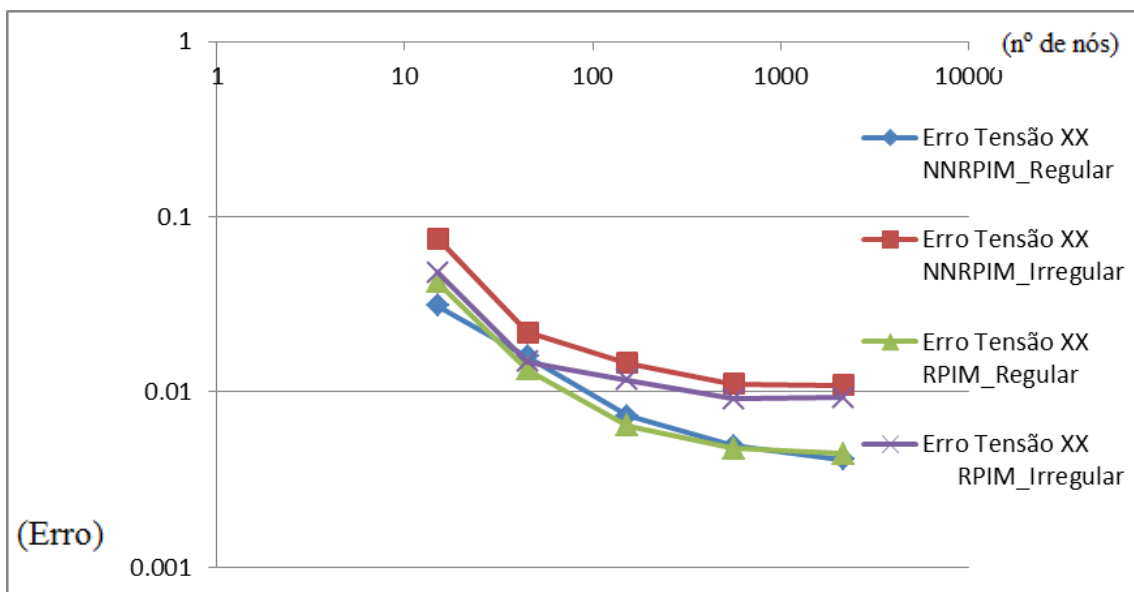


Figura 32 - Variação do erro da tensão x com o número de nós

Como seria de esperar, e analisando a figura 32, o erro assume valores menores para malhas com maior número de nós. O erro da tensão, para malhas regulares, apresenta valores muito similares para ambos os métodos; nos resultados referentes a malhas irregulares, a tensão segundo o método NNRPIM começa com um valor de erro bastante mais elevado para malhas com menor número de nós, no entanto, à medida que se aumenta o número de nós no problema, quer para o método RPIM quer para o NNRPIM o valor tende a estabilizar e finaliza praticamente com o mesmo valor de erro.

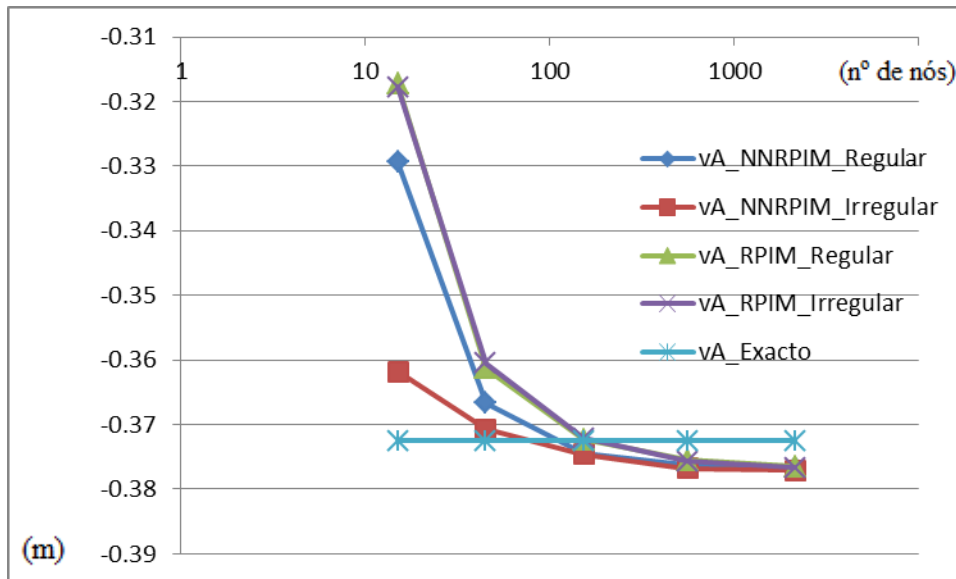


Figura 33 - Variação do valor do deslocamento do ponto A com o número de nós

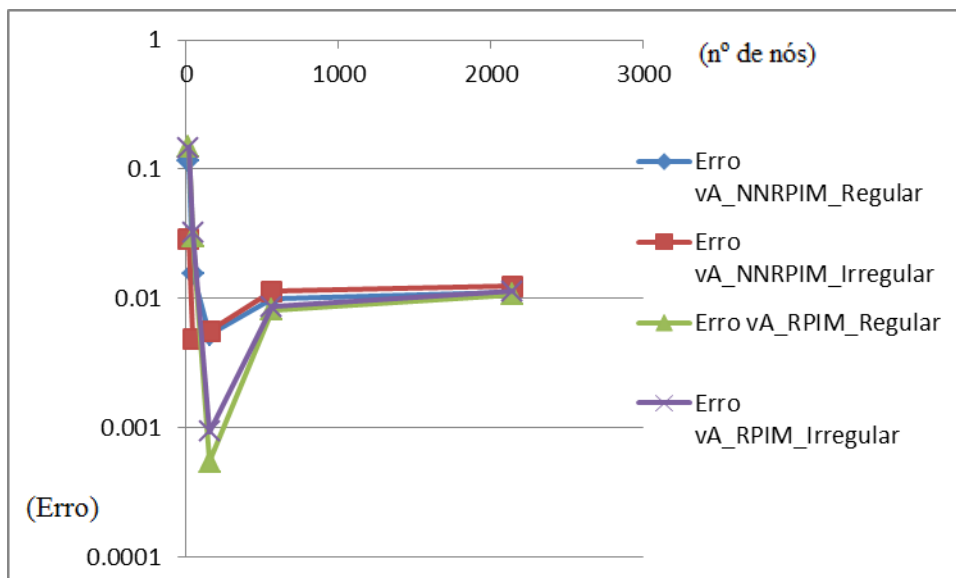


Figura 34 - Variação do erro do deslocamento vertical A com o número de nós

Analisando, pela figura 33, a evolução do deslocamento vertical do ponto A, pode observar-se que para o método RPIM os valores são, inicialmente, mais díspares que os valores do método NNRPIM, relativamente ao valor exacto do deslocamento. Como tal, essa diferença, reflecte-se igualmente na evolução do erro relativamente ao deslocamento como se observa na figura 34. No entanto à medida que o número de nós, discretizados no problema, aumenta os valores obtidos pelo método RPIM rapidamente convergem, chegando a ultrapassar, em precisão os valores do método NNRPIM. No final, ambos os métodos se encontram praticamente equivalentes quanto ao valor para o qual convergem os resultados.

### 3.2.3 - Placa infinita com um orifício circular

Neste exemplo, é considerada uma placa quadrada  $L \times L$ , sujeita a um campo de tensões normais e tangenciais com um orifício circular. Devido à existência de simetria, é apenas considerado um quarto da placa como ilustrado na figura 14, bem como as condições de fronteira a considerar no problema. A placa possui um módulo de rigidez  $E = 10kPa$ , um coeficiente de Poisson  $\nu = 0,25$  uma espessura  $e = 1,0m$ , comprimento  $L = 5,0m$  e um orifício de raio  $a = 1m$ .

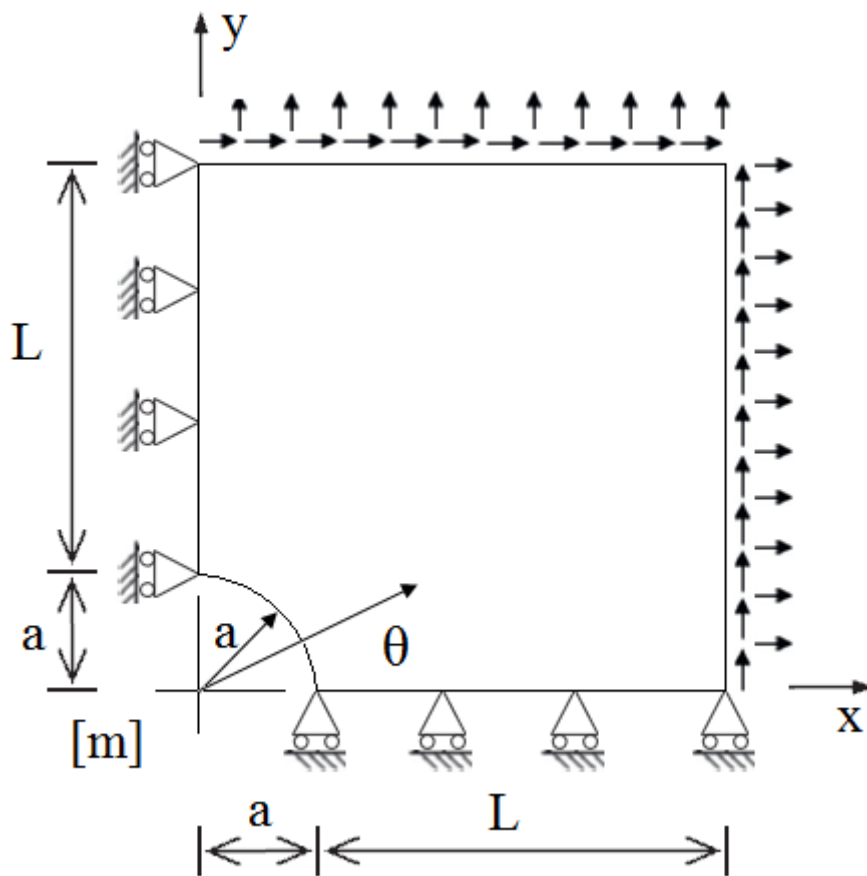


Figura 35 - Placa infinita com orifício circular

O campo de tensões pode ser calculado pela solução exacta:

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= 1 - \frac{a^2}{r^2} \left( \frac{3}{2} \cos(2\theta) + \cos(4\theta) \right) + \frac{3a^4}{2r^4} \cos(4\theta) \\
\sigma_{yy} &= 1 - \frac{a^2}{r^2} \left( \frac{1}{2} \cos(2\theta) - \cos(4\theta) \right) - \frac{3a^4}{2r^4} \cos(4\theta) \\
\sigma_{xy} &= -\frac{a^2}{r^2} \left( \frac{1}{2} \sin(2\theta) + \sin(4\theta) \right) + \frac{3a^4}{2r^4} \sin(4\theta)
\end{aligned} \tag{1.73}$$

O problema foi, tal como os casos anteriores, discretizado para malhas regulares e irregulares. Exemplo de uma malha regular com 426 nós está ilustrado na figura 36 (a) e de uma malha irregular, também com 426 nós na figura 36 (b).

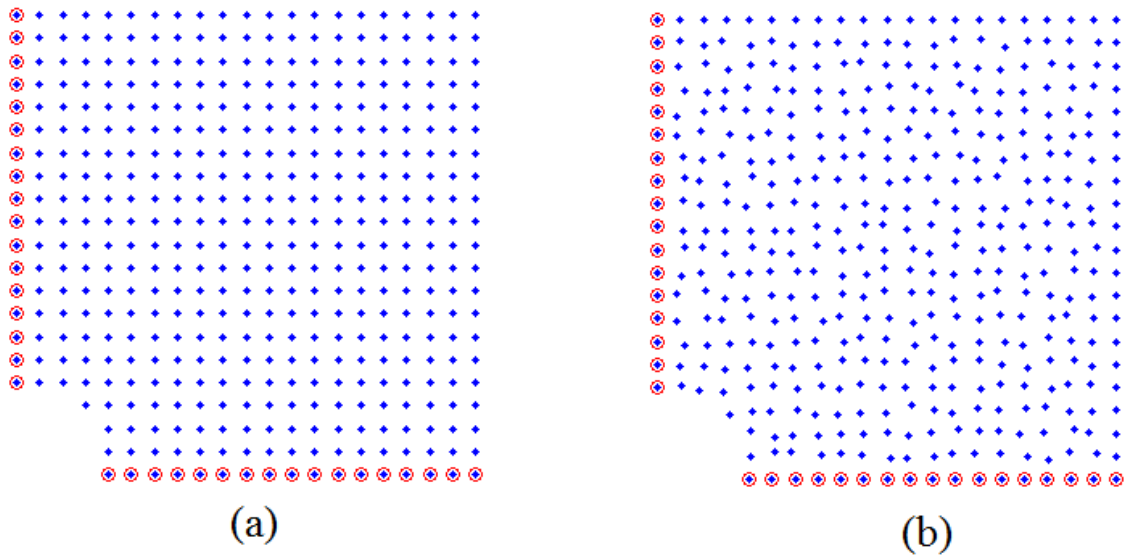


Figura 36 - (a) Malha nodal regular (b) Malha nodal irregular

Neste exemplo, estudou-se a convergência para as três tensões  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  e  $\sigma_{xy}$ .

De seguida, apresentam-se os resultados para os valores de erro das tensões à medida que se discretizam as malhas cada vez mais utilizando os métodos RPIM e NNRPIM.

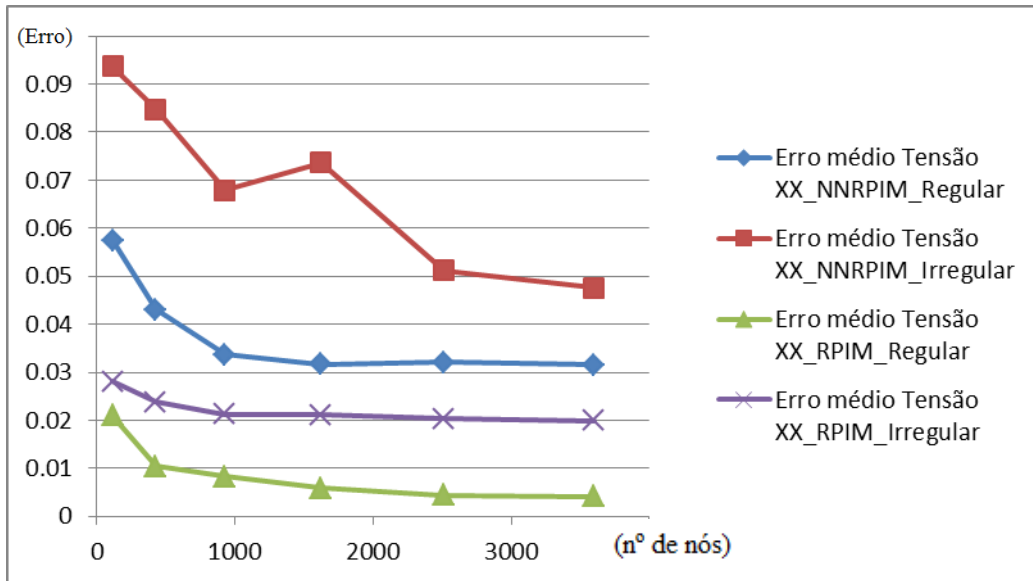


Figura 37 - Variação do erro da tensão xx com o número de nós

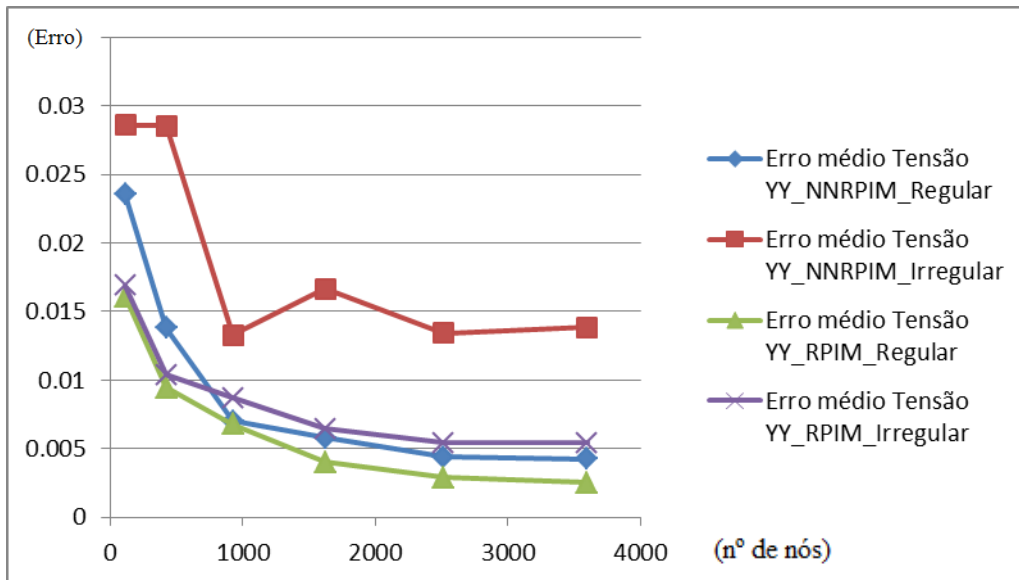


Figura 38 - Variação do erro da tensão yy com o número de nós

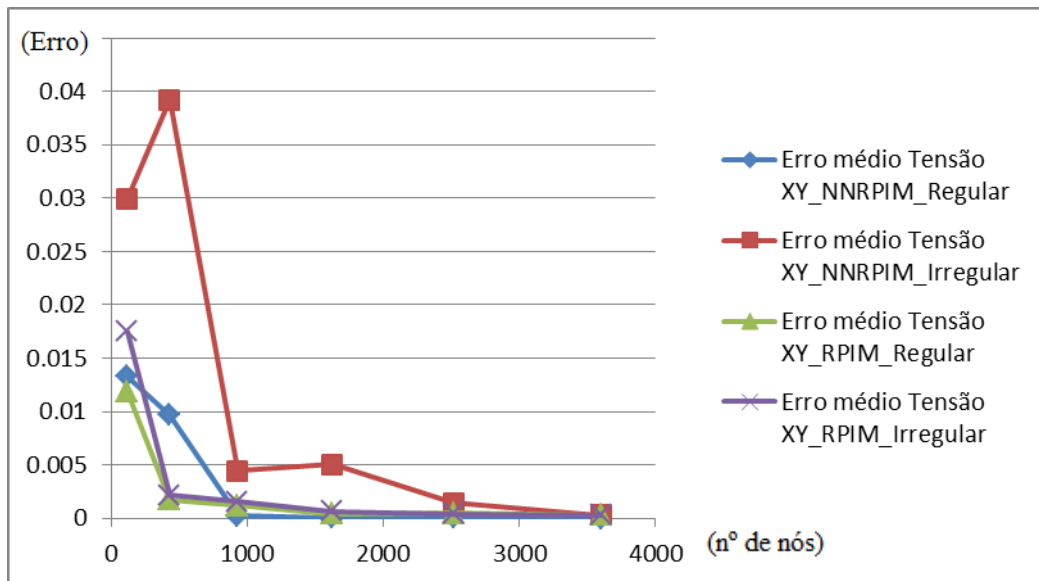


Figura 39 - Variação do erro da tensão xy com o número de nós

Por análise da figura 37, é possível verificar que para o cálculo da tensão  $\sigma_{xx}$ , se verificou uma evolução mais precisa nos resultados para o método RPIM, verificando-se mesmo menor erro relativamente ao NNRPIM face a irregularidades na sua malha.

No estudo de convergência, referente à tensão  $\sigma_{yy}$ , verifica-se na figura 38 que apenas no caso, da malha irregular no método NNRPIM, existe uma ligeira discrepância no erro da tensão obtido relativamente aos outros três casos cujas evoluções tendem todas para o mesmo valor.

Finalmente, no caso da tensão  $\sigma_{xy}$ , por análise da figura 39, verificam-se inicialmente, resultados com valores de erro superiores para o caso de malha irregular no NNRPIM. No entanto, com o aumento do número de nós, os valores acabam por tender para o esperado. Sendo que, para malhas com um número muito elevado de nós, o resultado é, praticamente, independente do método ou da regularidade da malha.

## 4 - Métodos sem malha aplicados à propagação de fendas

### 4.1 - Método sem malha com enriquecimento de funções de forma para análise de propagação de fendas

#### 4.1.1 – Problema de fenda aplicando malha sem densificação

Numa fase seguinte, para aplicação do método NRPIM, testou-se um exemplo que se encontra no artigo da referência (Gu, 2011). Uma placa rectangular de comprimento  $2L$ , com uma fenda de comprimento  $a$  no centro da sua geometria, é traccionada por cargas distribuídas aplicadas na sua extremidade como ilustrado na figura 40.

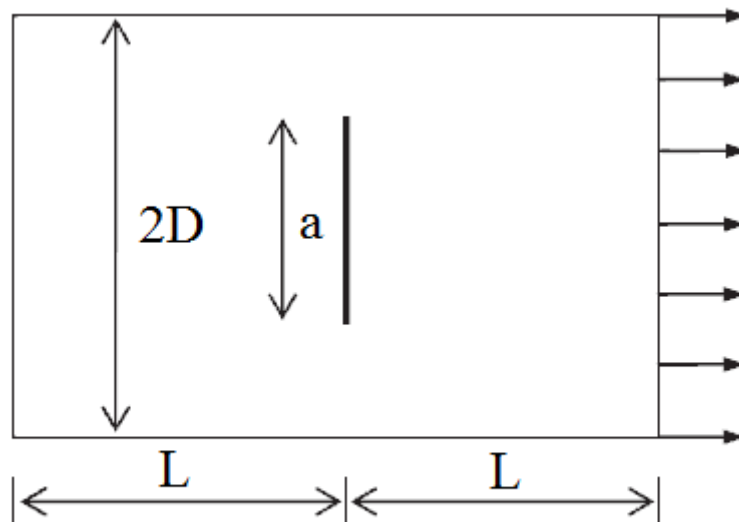


Figura 40 - Placa rectangular, com fenda central, sujeita a cargas distribuídas

Uma vez que a placa é simétrica é possível simplificar o problema como se pode verificar na figura 41 para malha regular e com condições fronteira a impedir o deslocamento normal às extremidades da placa.

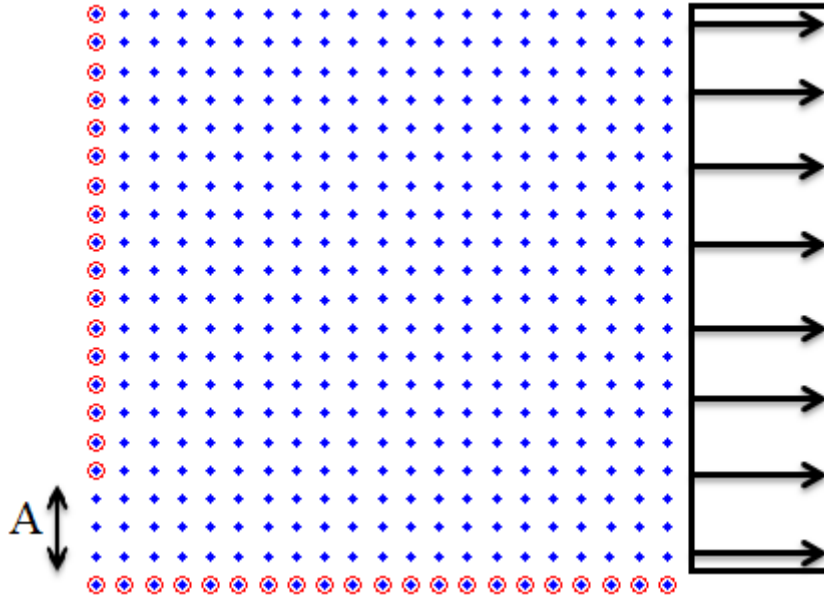


Figura 41- Malha nodal regular de uma placa tracionada com uma fenda de comprimento A

Neste problema de mecânica da fractura, as seguintes equações dão o campo de tensões na extremidade da fenda:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right) \\
 \sigma_{yy} &= \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right) \\
 \sigma_{xy} &= \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right)
 \end{aligned}
 \tag{1.74}$$

Onde K:

$$K = q_0 \sqrt{2\pi A}
 \tag{1.75}$$

Sendo  $q_0 = 1N$  a carga distribuída aplicada à placa.

Considerou-se então a placa quadrada da figura 41 com comprimento e altura iguais  $L = D = 5m$ , e um comprimento de fenda para  $A = D/5$  e para  $A = D/10$  fazendo-se o estudo de convergência para a tensão  $\sigma_{xx}$  para malha regular.

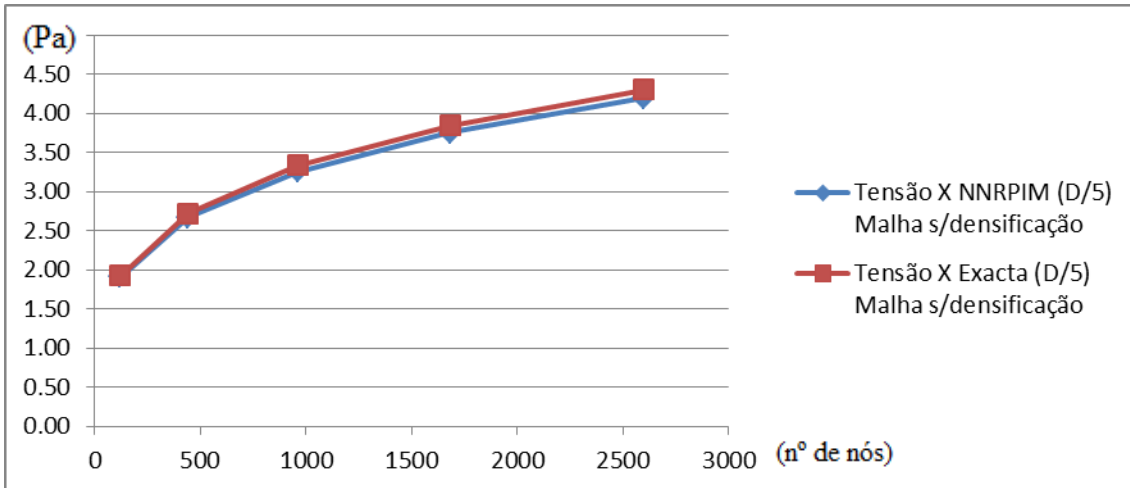


Figura 42 - Variação do valor da tensão xx com o número de nós para um comprimento de fenda D/5

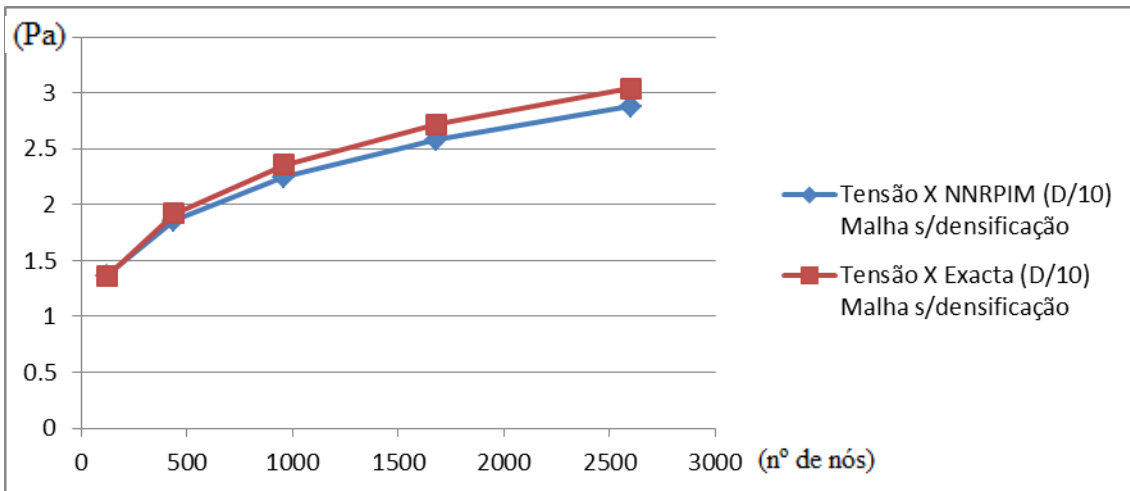


Figura 43 - Variação do valor da tensão xx com o número de nós para um comprimento de fenda D/10

Após observação das figuras 42 e 43, pode verificar-se que os valores obtidos pelo método NNRPIM descrevem uma curva com uma evolução muito similar à dos valores exactos.

De seguida, estudou-se a variação do valor de tensão ao longo da extremidade da placa onde se encontra a fenda, desde a localização da extremidade da fenda  $D = 1m$  até à extremidade da placa  $D = 5m$  e uma malha com 2601 nós.

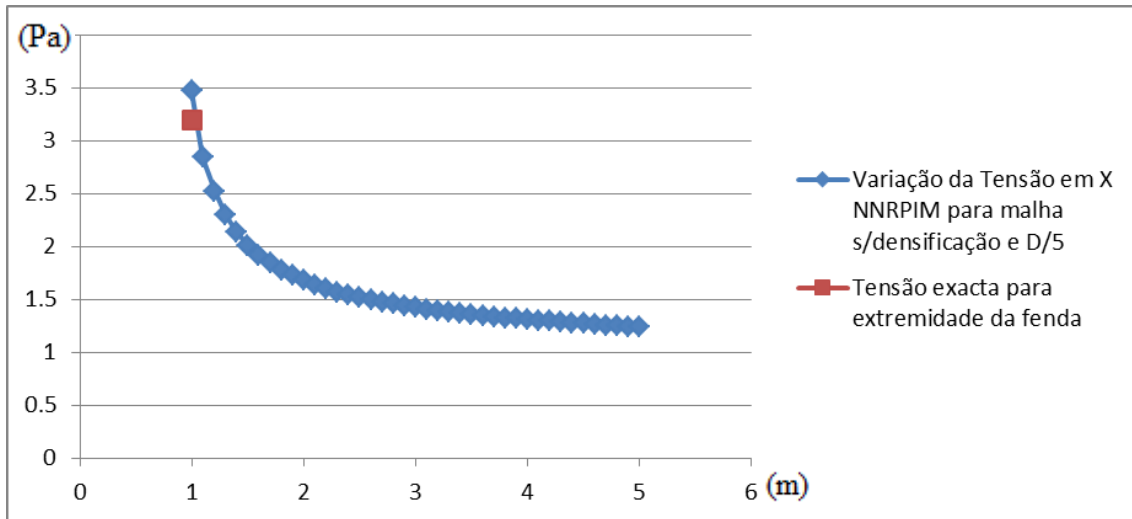


Figura 44 - Variação do valor da tensão xx ao longo da altura da extremidade da placa com comprimento da fenda D/5

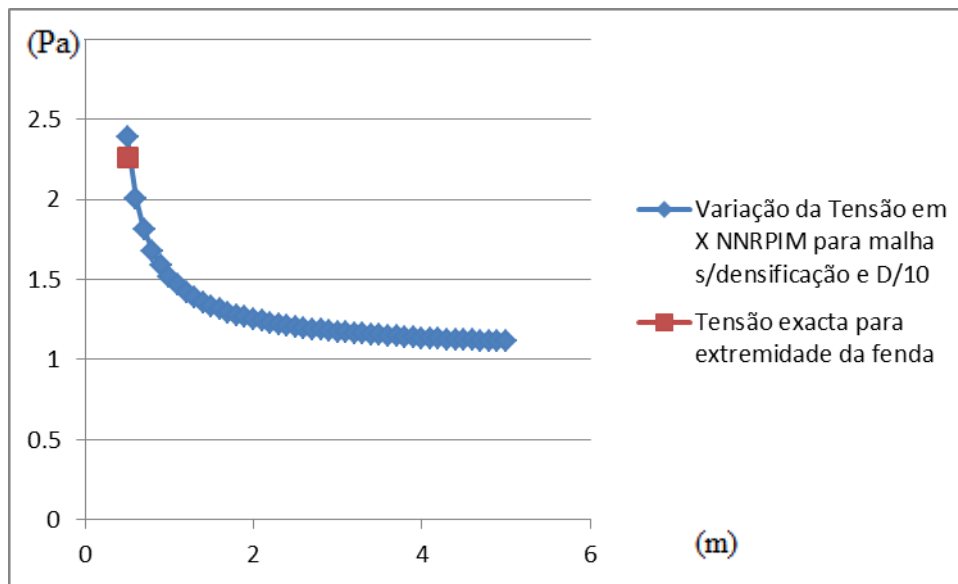


Figura 45 - Variação do valor da tensão xx ao longo da altura da extremidade da placa com comprimento da fenda D/10

Como seria de esperar, e após a análise das figuras 44 e 45 verifica-se que a tensão assume valor máximo na extremidade da fenda decrescendo o valor da tensão à medida que se “avança” na extremidade da placa.

Verifica-se que, em ambos os casos, quer na figura 44 e 45 o valor da tensões na extremidade da fenda obtido pelo método NNRPIM é bastante próximo do valor exacto obtido analiticamente pelas equações referidas em (1.72).

#### **4.1.2 - Problema de fenda aplicando uma malha mais densa na zona da fenda**

Para os mesmos exemplos já efectuados, e descritos acima, foi efectuada uma nova malha com mais nós e respectivos pontos de integração na zona da fenda. O resultado da malha nodal e de integração encontra-se, na figura 46 e na figura 47 por ordem respectiva.

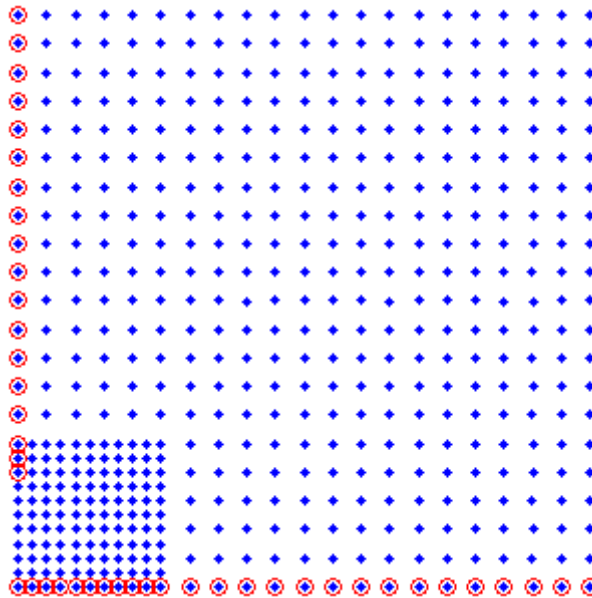


Figura 46 - Malha nodal com densificação na zona da fenda

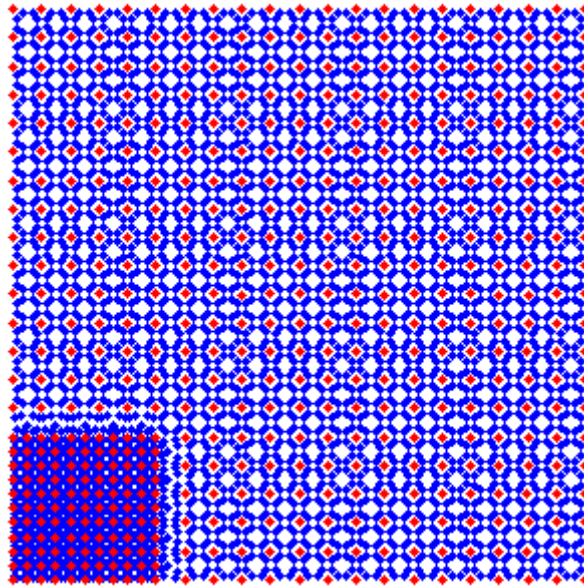


Figura 47 - Malha de integração com densificação na zona da fenda

Considerando as mesmas condições de fronteira e carregamento do ponto 4.1.1, fez-se o estudo da convergência para as tensões à medida que se aumentava o número de nós para dois tipos de fenda:  $A = D/5$  e  $A = D/10$ , e também a variação do valor de tensão ao longo da extremidade da fronteira  $x = 0 \wedge y \in [A; D]$ .

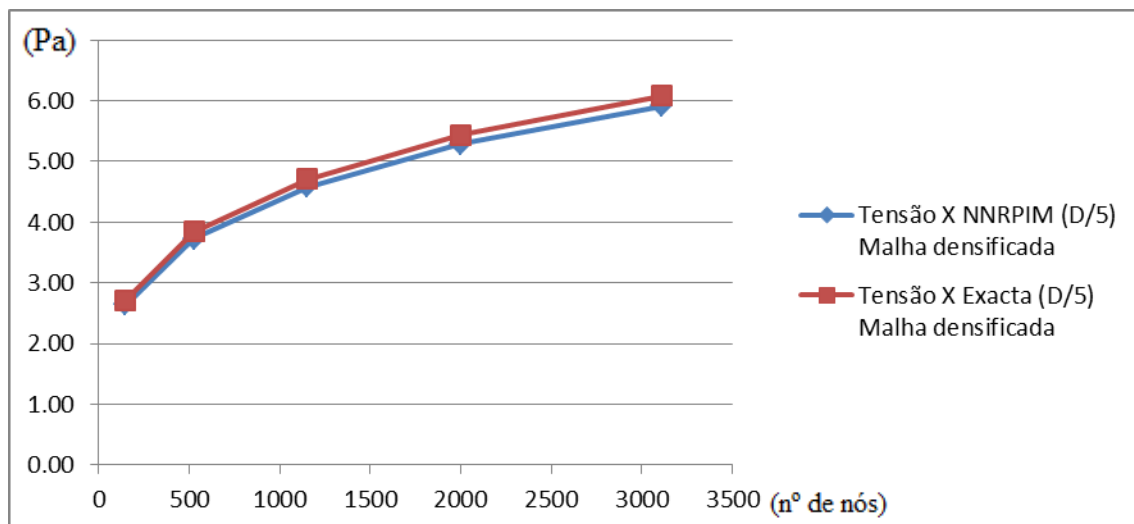


Figura 48 - Variação do valor da tensão xx com o número de nós para um comprimento de fenda D/5

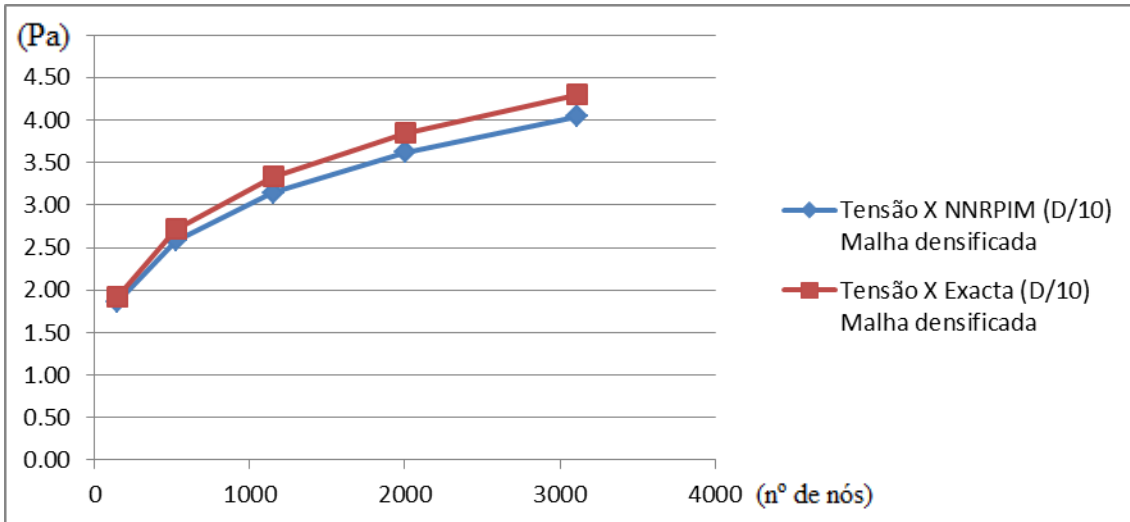


Figura 49 - Variação do valor da tensão xx com o número de nós para um comprimento de fenda D/10

Analisando as figuras 48 e 49, comparativamente, à malha sem densificação, embora o comportamento da curva, que representa a evolução do valor da tensão, seja idêntico aos valores obtidos, para este caso os valores de tensão são ligeiramente superiores aos resultados sem densificação

A placa apresenta valores de tensão mais elevados, como seria de esperar, para o caso em que a fenda tem maior comprimento.

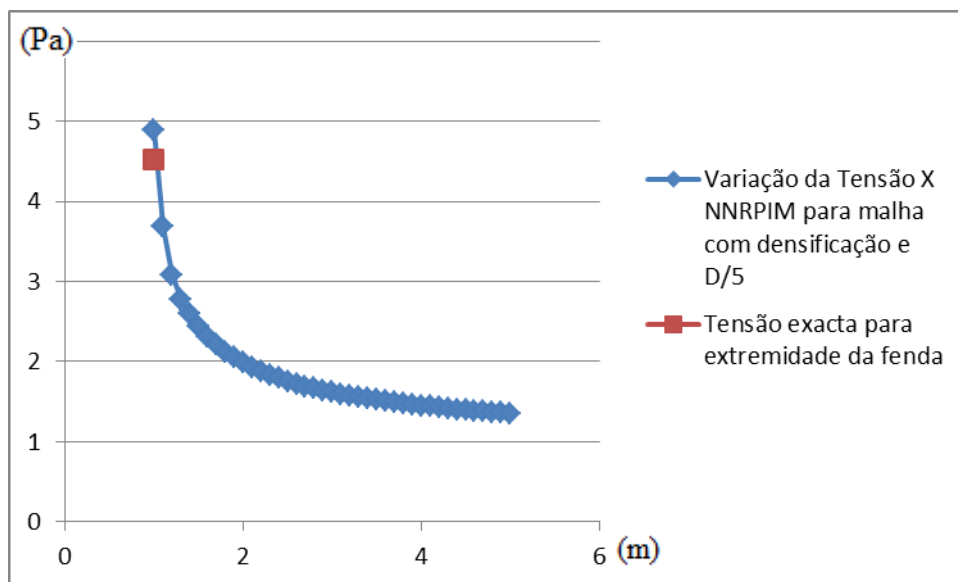


Figura 50 - Variação do valor da tensão xx ao longo da altura da extremidade da placa com comprimento da fenda D/5 com malha densa na zona da fenda

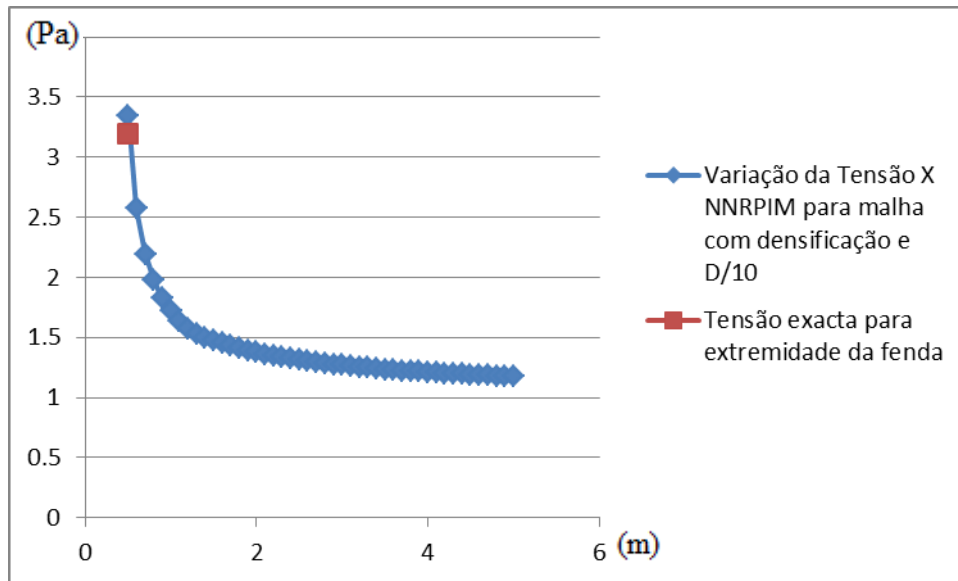


Figura 51 - Variação do valor da tensão xx ao longo da altura da extremidade da placa com comprimento da fenda  $D/10$  com malha densa na zona da fenda

Nas figuras 50 e 51 observa-se que o valor da tensão obtido pelo método NNRPIM na extremidade da fenda é muito próximo do valor da tensão exacto obtido pelas equações descritas em (1.74). À semelhança da malha sem densificação, o valor da tensão decresce quanto maior for a distância à extremidade da fenda. Tal como era esperado, para o caso da fenda com altura superior ( $D/5$ ), os valores de tensão obtidos são também superiores.

Os valores que foram obtidos, para o caso da densificação da malha, são superiores, relativamente ao caso da malha regular normal.

## **4.2 - Exemplos de Propagação de Fendas Utilizando o**

### **NNRPIM**

Recentemente têm sido objecto de estudo alguns casos de propagação de fendas tendo em conta determinados modelos. No artigo da referência (Nguyen-Xuan, 2012) foram testados alguns exemplos utilizando um Método de Elementos Finitos, ES-FEM, que utiliza uma malha de elementos triangulares.

Para esses exemplos, utilizou-se então, nesta dissertação, o método NNRPIM para estudar a propagação de fendas, através da ferramenta MATLAB, e verificar que este método pode ser aplicável a este tipo de problemas.

#### **4.2.1 - Placa com fenda central sujeita a tensão de corte**

Considerando uma placa cujas condições estão ilustradas na figura 52 utilizou-se o método NNRPIM para determinar quais os pontos de integração com maior tensão, sabendo que serão os pontos por onde a fenda se propagará. Partindo deste pressuposto, faz-se um processo iterativo repetindo várias vezes o método até a fenda romper na totalidade a placa.

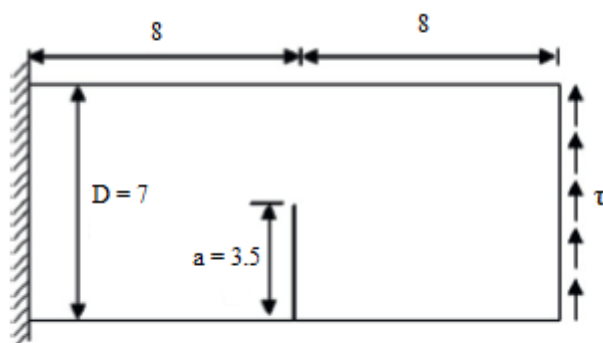


Figura 52 - Placa com uma fenda na extremidade sujeita a tensão de corte (dimensões em m)

Fez-se o estudo de propagação da fenda para malha regular e irregular. A fim de obter melhor precisão no resultado final, densificou-se a zona da placa, por onde a fenda se

propaga, duas vezes, uma inicialmente mais densa que o resto da malha, e outra ainda mais densa relativamente à primeira.

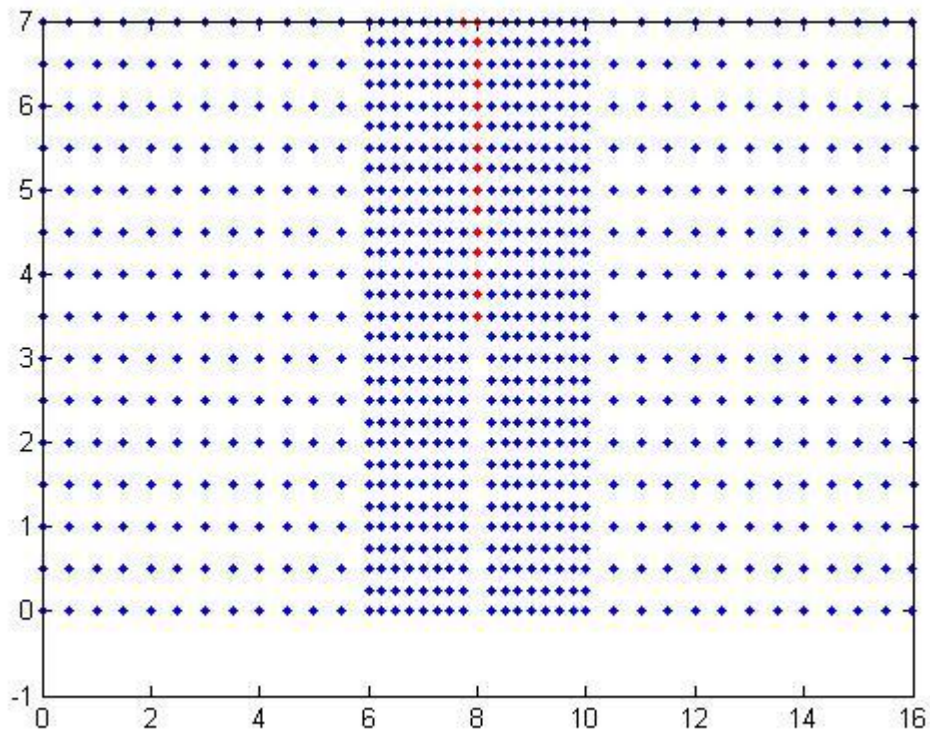


Figura 53 - Propagação da fenda em malha regular

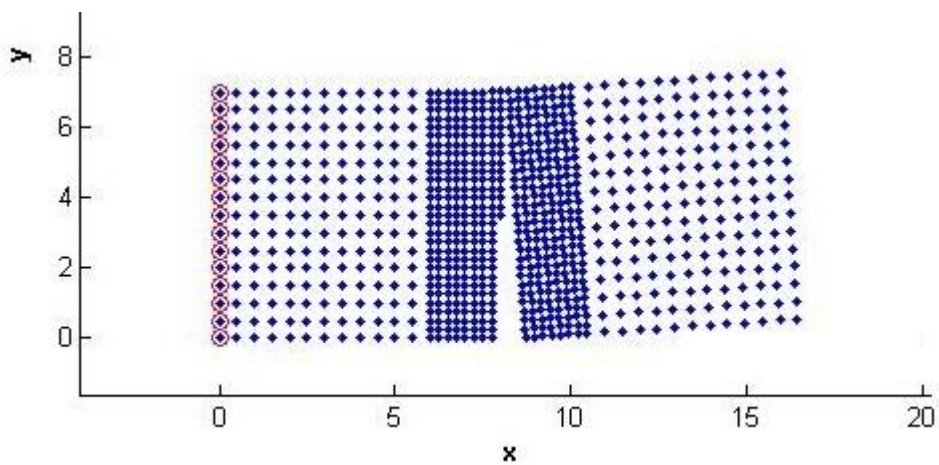


Figura 54 - Deformação da placa aquando da carga

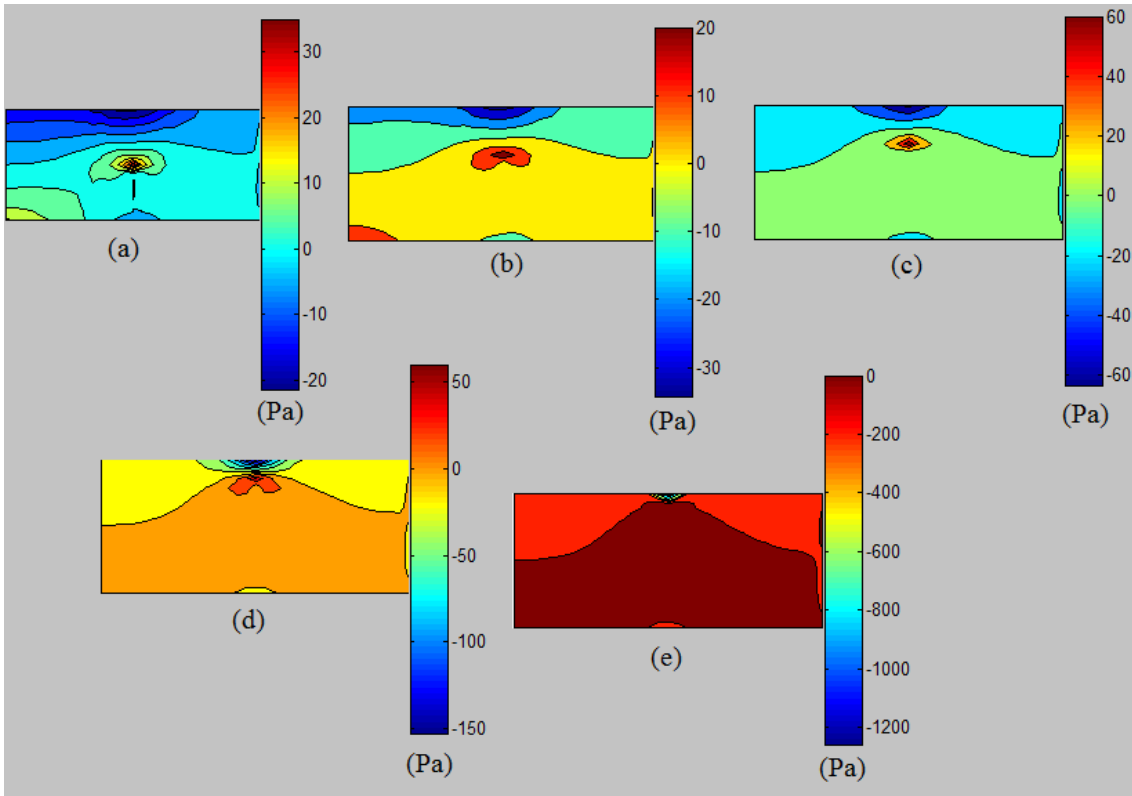


Figura 55 - Evolução da tensão  $S_{xx}$

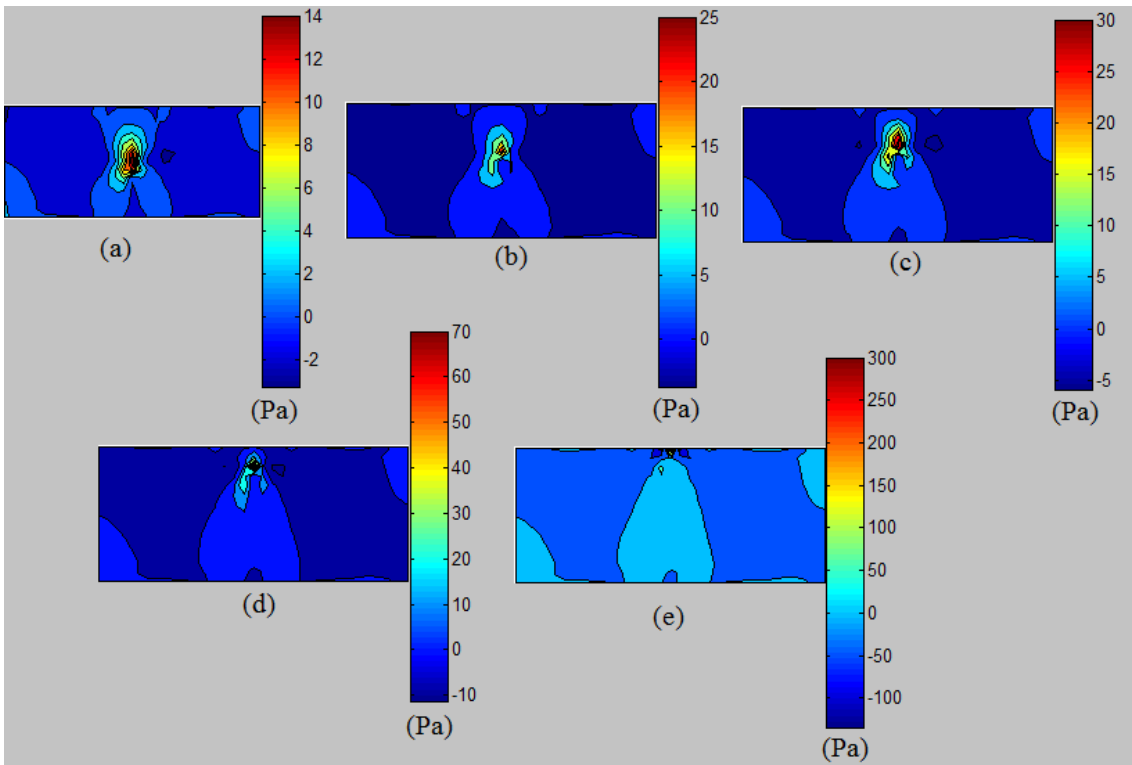


Figura 56 - Evolução da tensão  $S_{yy}$

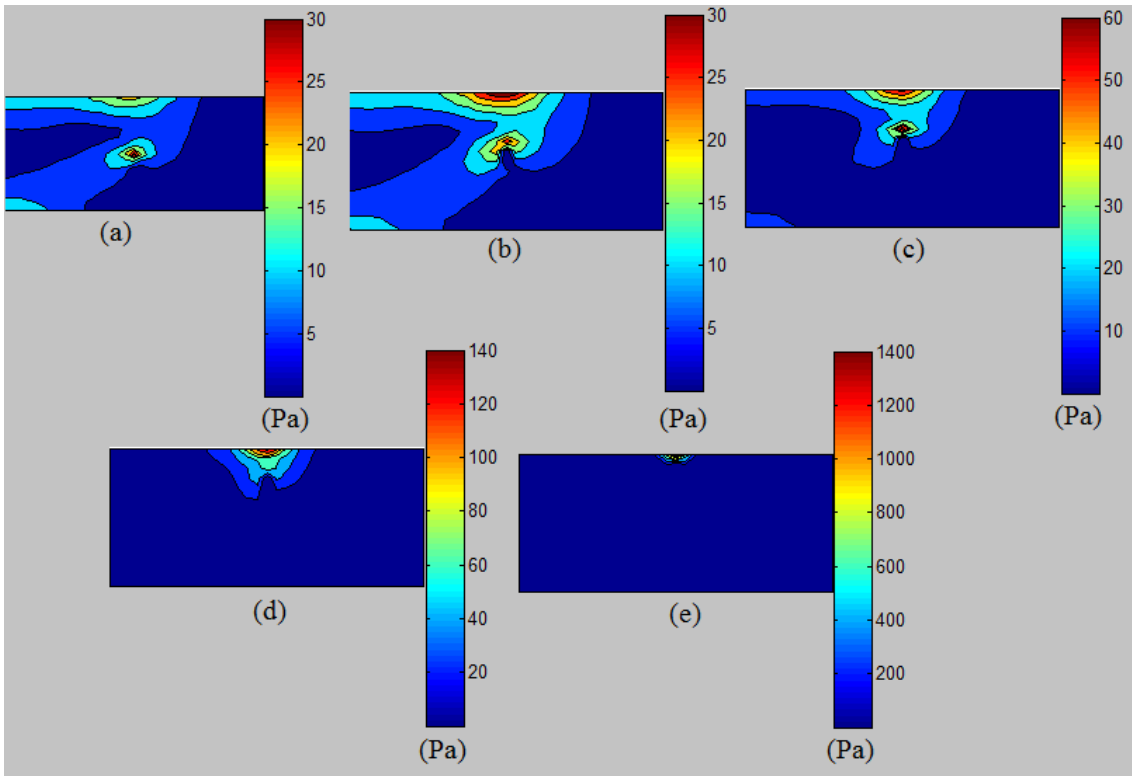


Figura 57 - Evolução da tensão efectiva

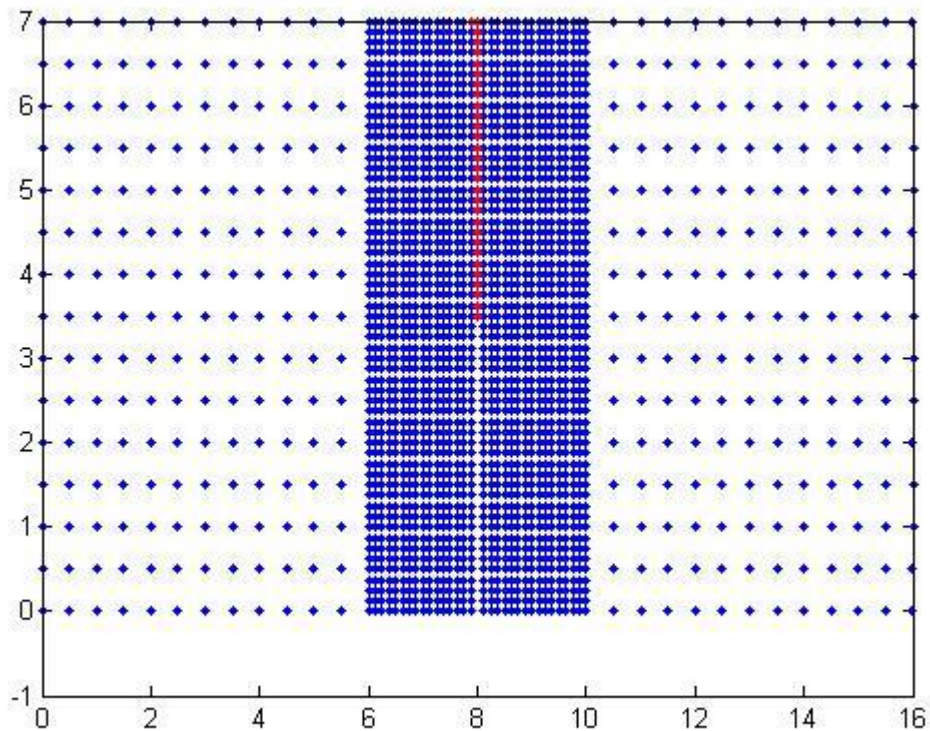


Figura 58 - Propagação da fenda para malha regular com malha mais densa na zona da fenda

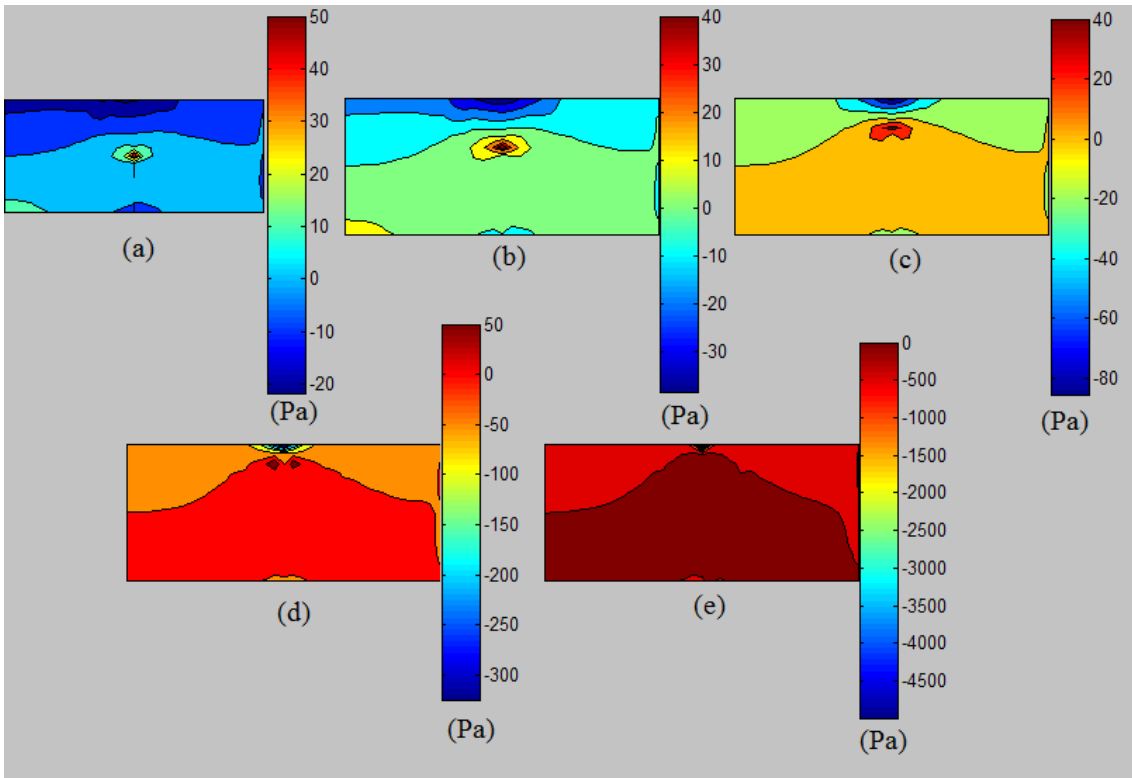


Figura 59 - Evolução da tensão  $S_{xx}$  para malha mais densa

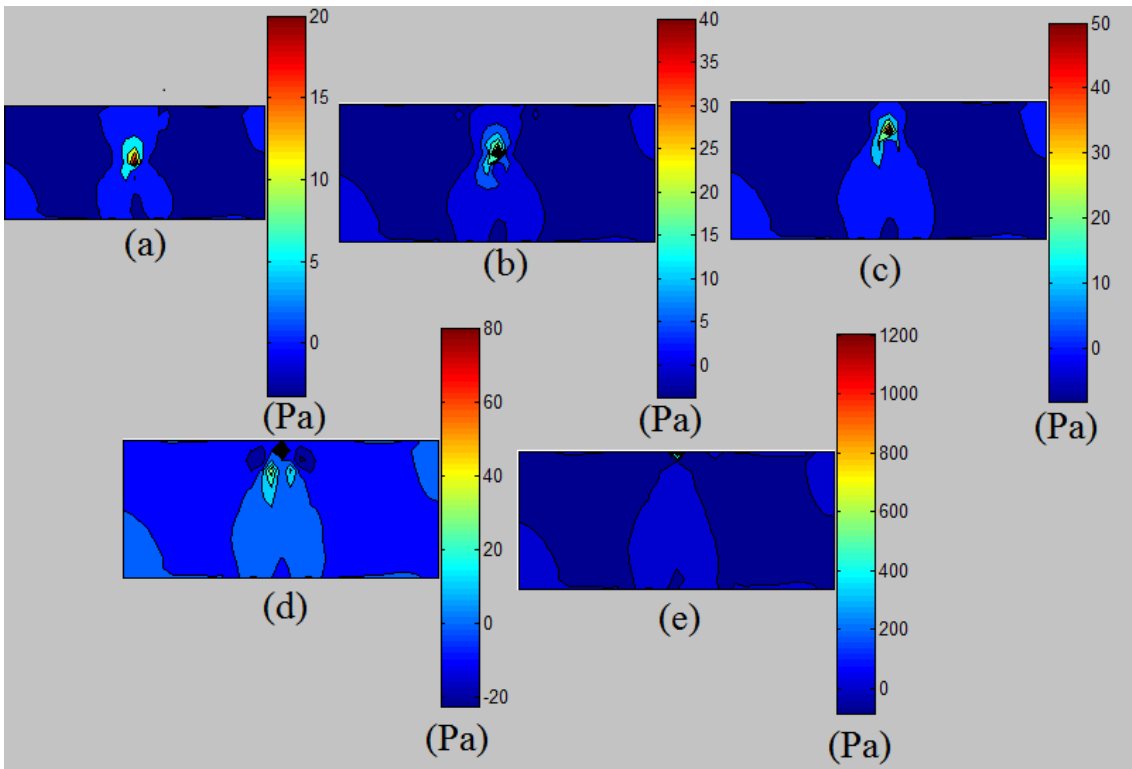


Figura 60 - Evolução da tensão  $S_{yy}$  para malha mais densa

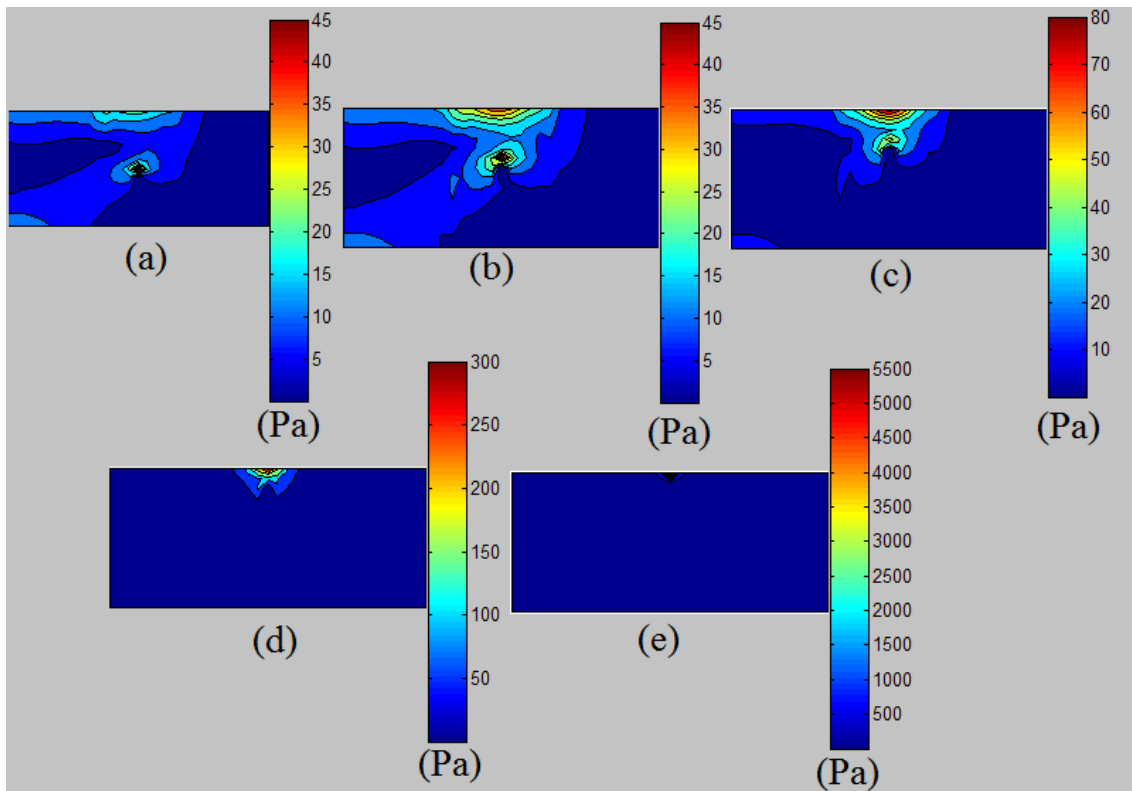


Figura 61 - Evolução da tensão efectiva para malha mais densa

Neste caso, a fenda propaga-se verticalmente de uma forma linear sem qualquer imperfeição. Assim sendo, a placa separar-se-á em duas partes praticamente iguais.

Na figura 53, observa-se uma propagação da fenda vertical, para malha regular, que corresponde a uma rotura da peça praticamente simétrica observada na figura 54. Nas figuras 55,56 e 57 observa-se a evolução dos campos das tensões  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  e  $\sigma_{efectiva}$ , respectivamente; o máximo valor das tensões tem uma variação que acompanha a extremidade da fenda até à rotura.

De seguida, na figura 58 é representada a propagação de fenda para uma malha regular mais densa apresentando uma evolução exactamente igual à da figura 24. Os gráficos 59,60 e 61 referentes às evoluções das tensões  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  e  $\sigma_{efectiva}$ , à semelhança do caso da malha regular sem densificação, acompanham a propagação da fenda, sendo que o máximo valor de tensão evoluiu verticalmente até à rotura.

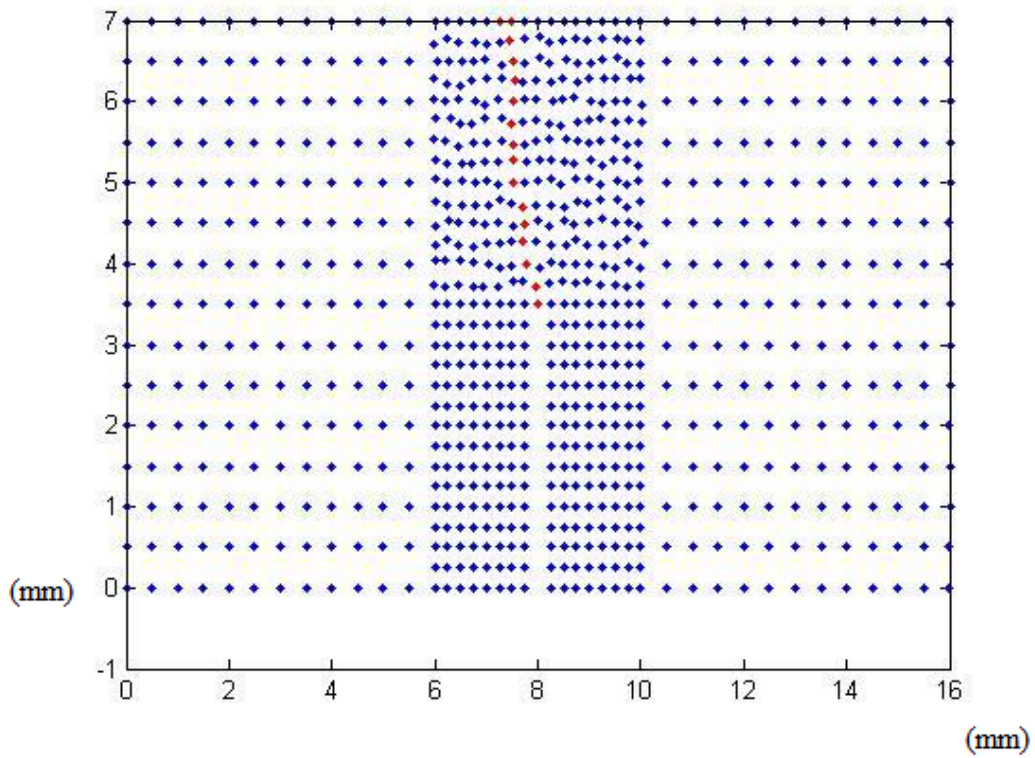


Figura 62 - Propagação da fenda em malha irregular

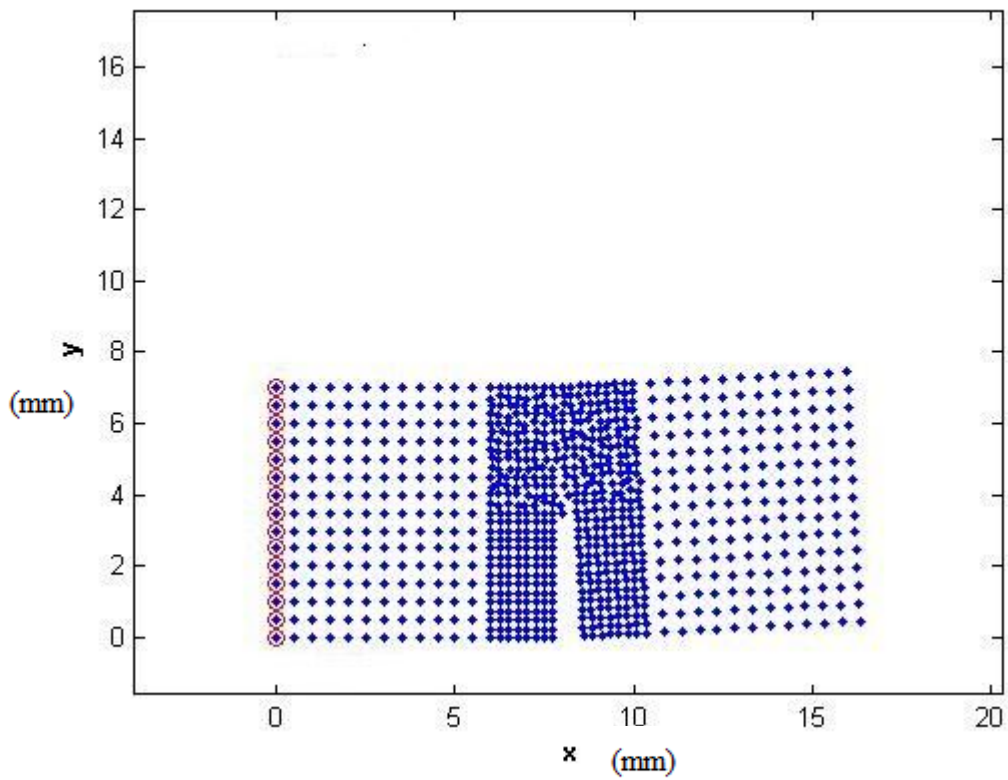


Figura 63 - Deformação da placa para malha irregular

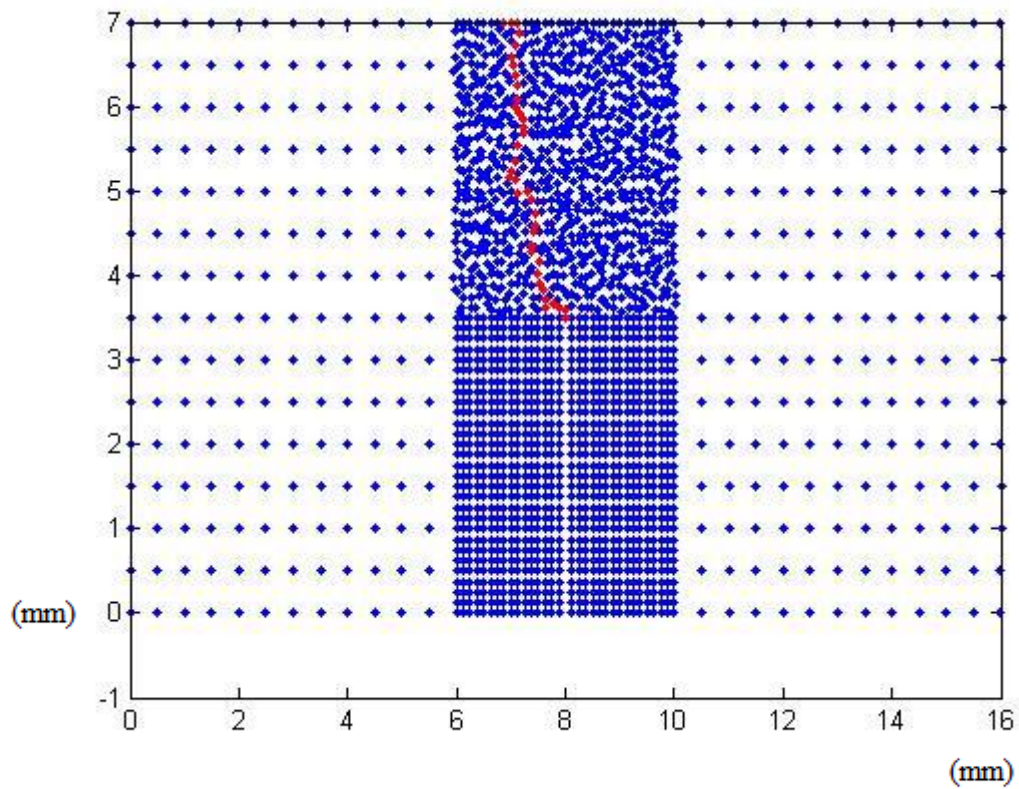


Figura 64 - Propagação de fenda para malha irregular mais densa

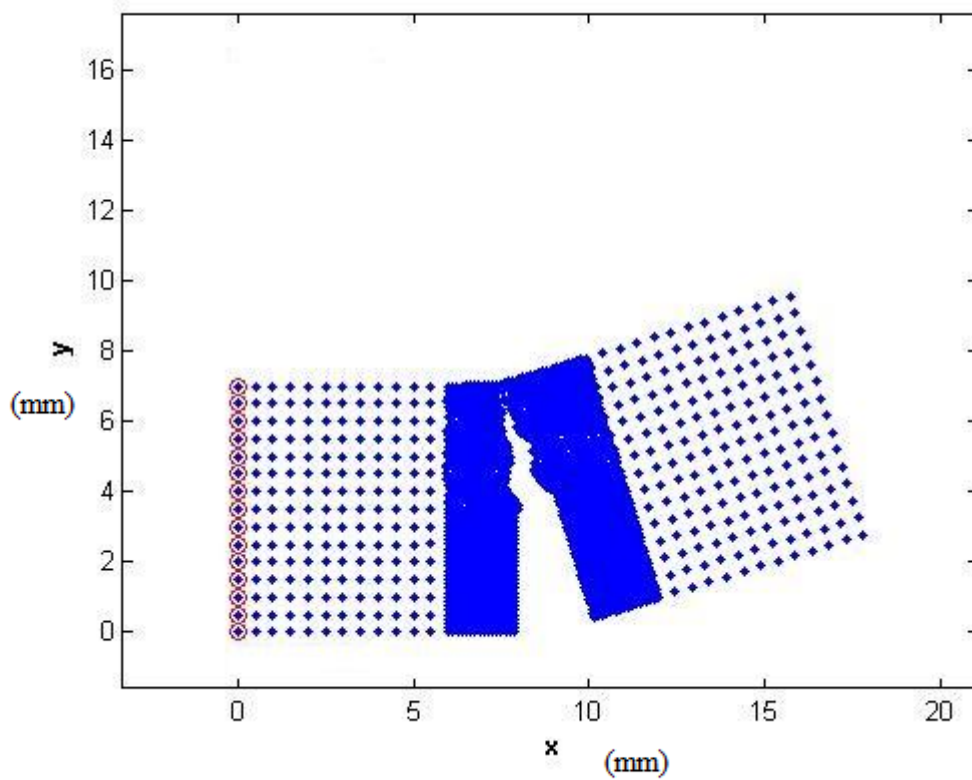


Figura 65 - Deformação da placa em malha irregular mais densa na zona da fenda

Na figura 62 observa-se, a discretização do problema para uma malha irregular. Neste caso a propagação da fenda sofre um ligeiro desvio no sentido da extremidade da placa que está encastrada observando-se uma deformação da placa (figura 63), ligeiramente diferente da observada para a malha regular (figura 53).

Após o procedimento referido, é feito de forma análoga, aos exemplos de discretização de malha regular, uma densificação para malha irregular ilustrada na figura 64 cuja propagação da fenda evoluiu, verticalmente e no sentido da extremidade da placa que se encontra encastrada. A deformação da placa, para este caso, está patente na figura 65 e reforça os resultados obtidos no sentido de uma rotura proveniente de uma propagação de fenda assimétrica.

Esta solução é, similar à obtida no artigo da (Nguyen-Xuan, 2012) podendo então concluir-se que o NNRPIM é um método válido no estudo de propagação de fenda deste tipo de problemas.

#### **4.2.2 - Placa com corte a 45°**

Utilizando o método NNRPIM para cálculo dos pontos de integração com maior valor de tensão e aplicando-o sucessivamente, de forma iterativa, foi possível estudar para este caso a propagação da fenda.

A placa em questão possui um corte triangular como a figura 66 mostra, de comprimento  $a = 20mm$ , que faz um ângulo de  $45^\circ$  com a vertical, e tem dimensões  $200mm \times 100mm$ . É aplicada uma carga distribuída na horizontal de  $1 N/m$  na extremidade da placa cujas condições de fronteira estão representadas na figura abaixo.

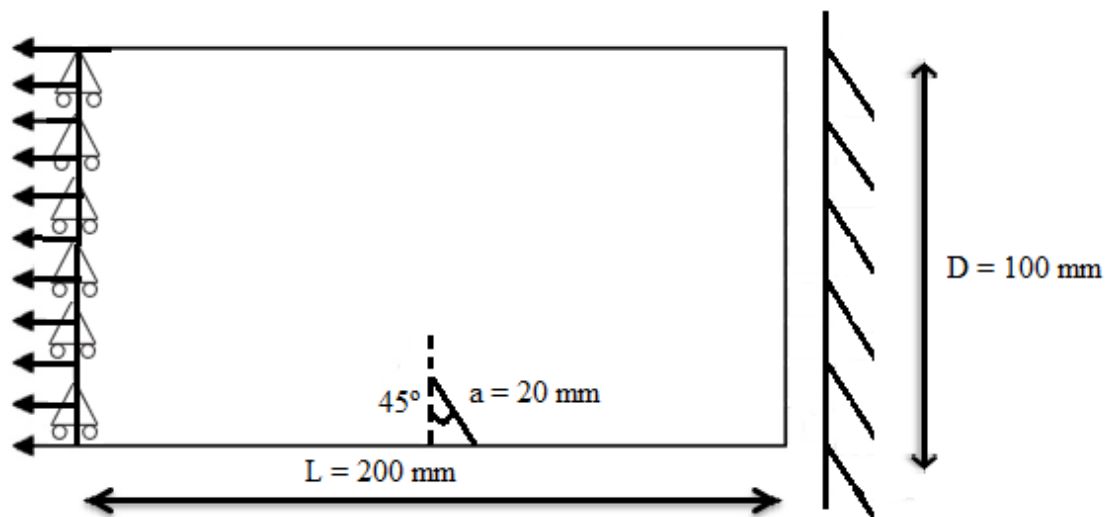


Figura 66 - Placa com fenda inclinada sujeita a uma carga distribuída

Através do método NRPIM e utilizando o programa MATLAB, estudou-se a propagação da fenda, o campo de deslocamentos e verificou-se a evolução das tensões à medida que a fenda se propagava. Utilizou-se, uma malha regular como ilustrado na figura 67:

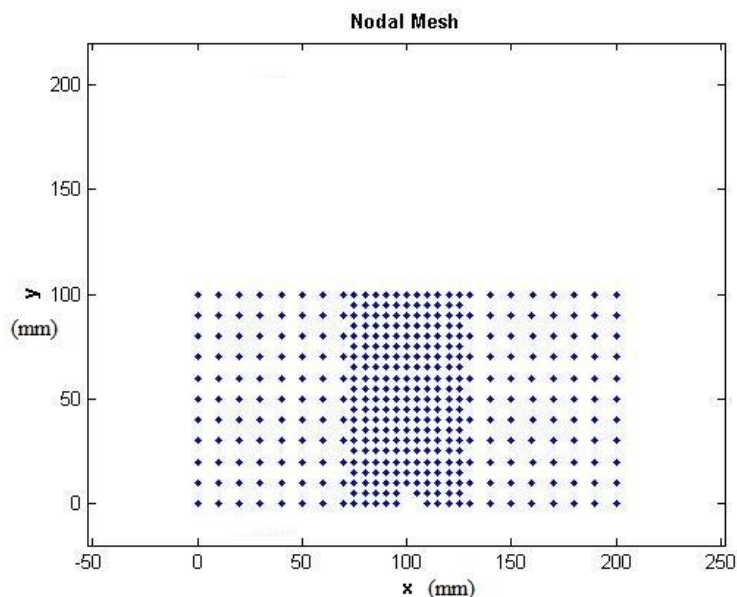


Figura 67 - Malha Nodal Regular da Placa

Através das figuras 68,69 e 70 que ilustram a evolução do estado das tensões  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  e  $\sigma_{efectiva}$  da placa conclui-se que a fenda se propaga verticalmente. Verifica-

se que o valor de tensão é sempre máximo na extremidade da fenda e a figura 71 é demonstrativa disso e corrobora os resultados obtidos para os campos de tensão.

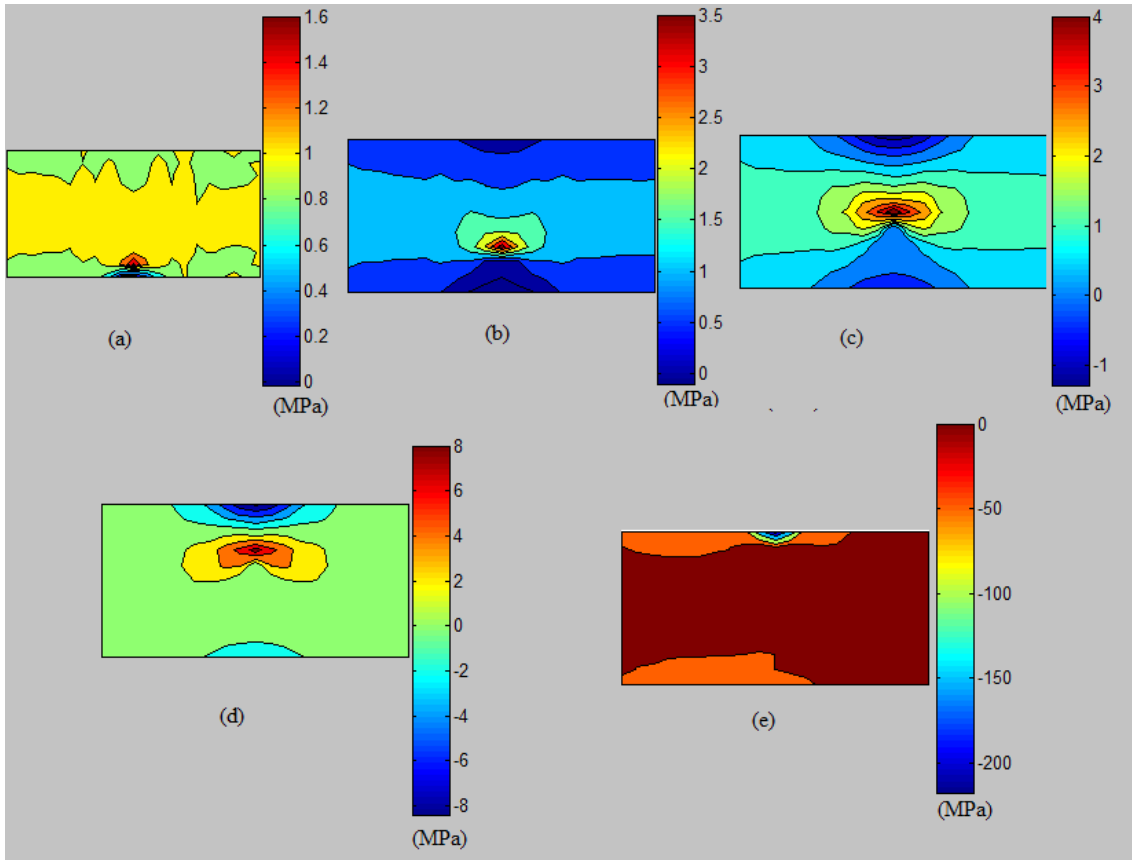


Figura 68- Evolução da tensão Sxx

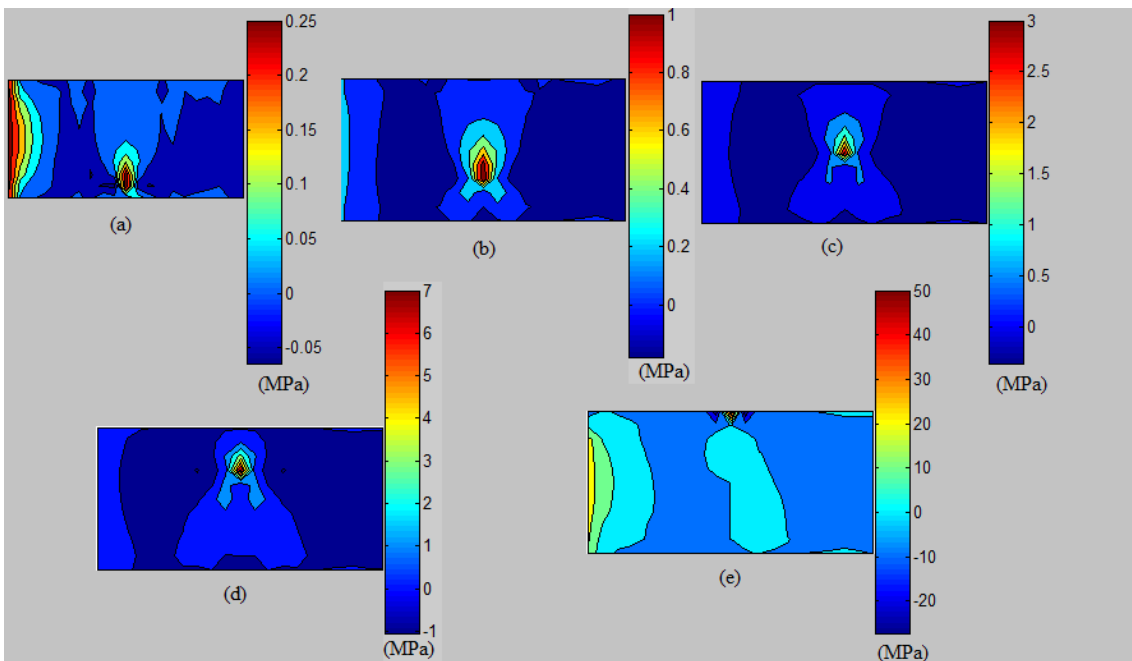


Figura 69 - Evolução da tensão Syy

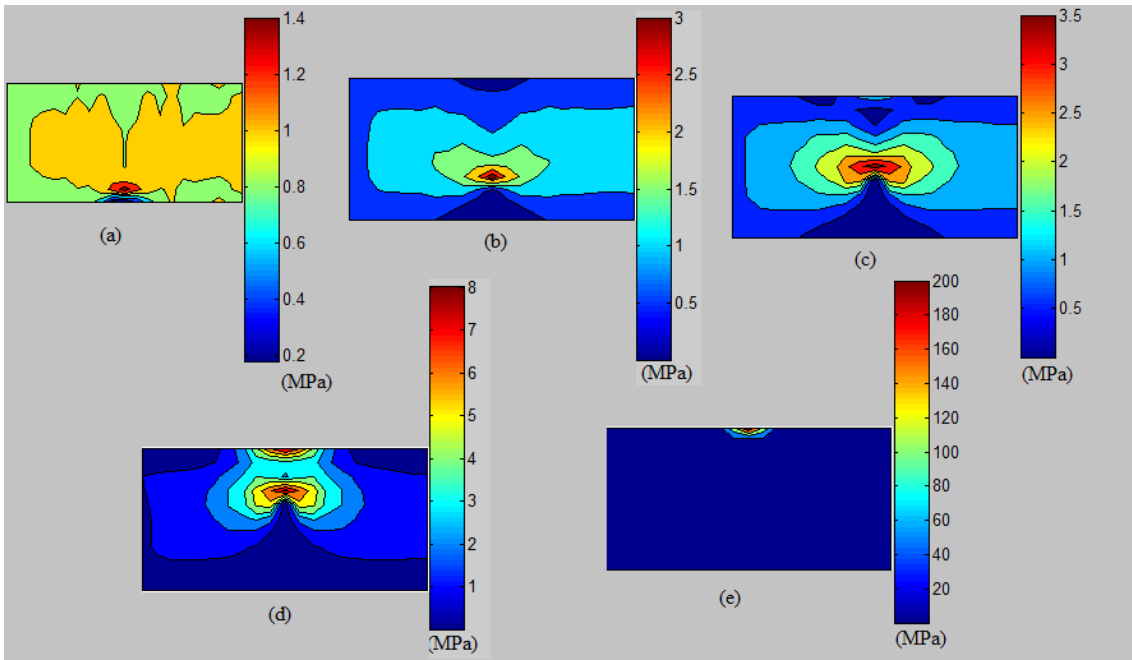


Figura 70 - Evolução da tensão efectiva

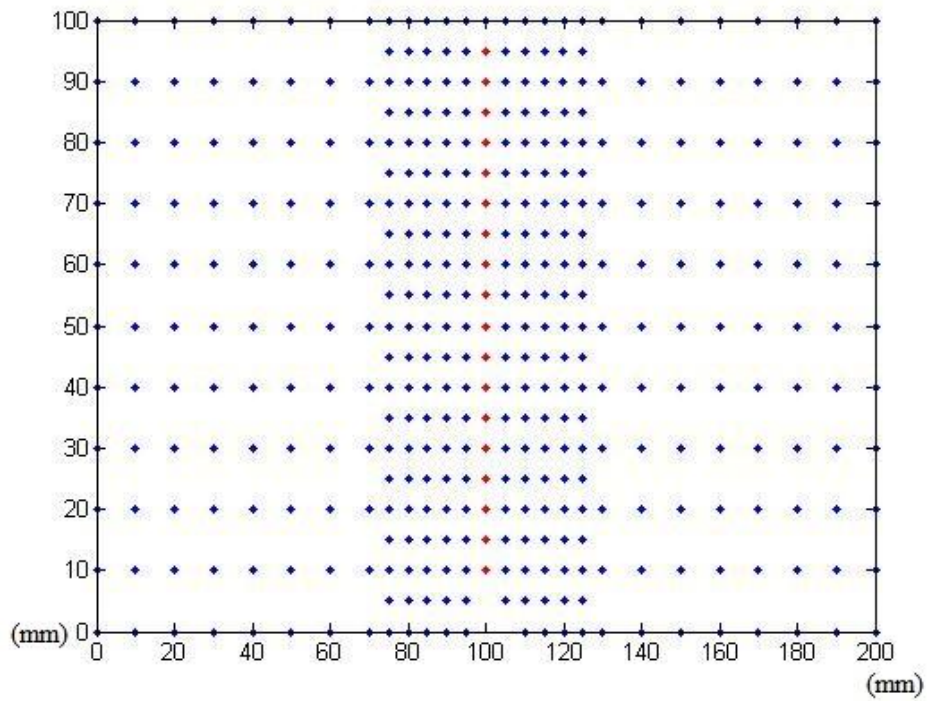
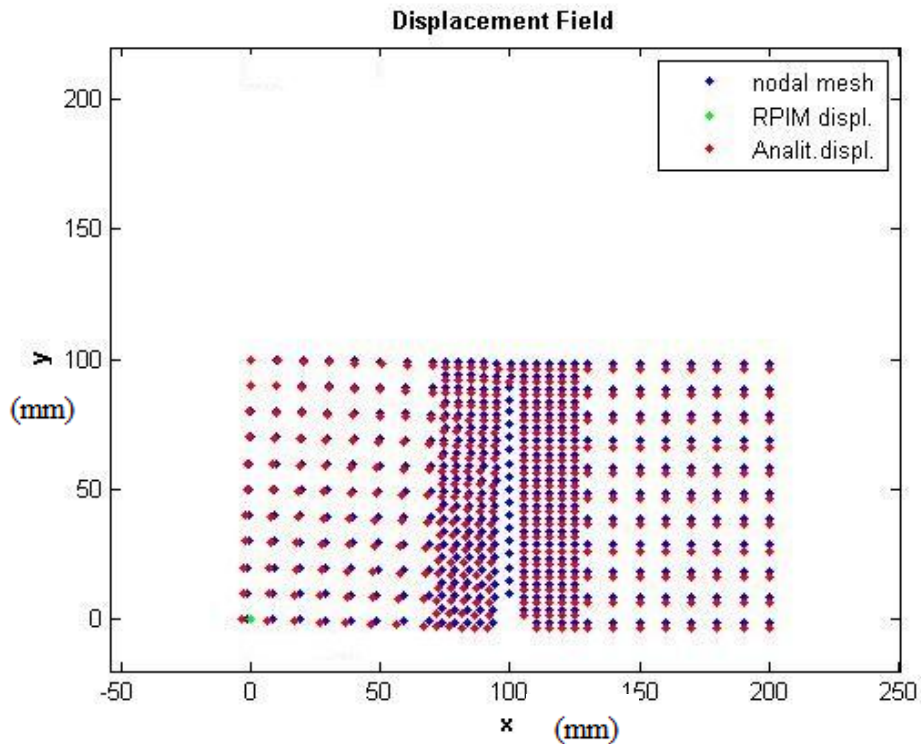


Figura 71 - Propagação de fenda em malha regular



**Figura 72 - Campo de deslocamentos antes da fractura para malha regular**

Na figura 72, observa-se os deslocamentos dos pontos que discretizam a malha e conclui-se que a propagação da fenda evoluiu, de forma completamente vertical.

De seguida, para o mesmo problema, utilizou-se o método NRPIM para uma malha regular com maior densificação na zona de propagação da fenda ilustrada na figura 48. À semelhança do que foi feito para a malha anterior obteve-se o campo de tensões, de deslocamentos e a evolução da propagação da fenda.

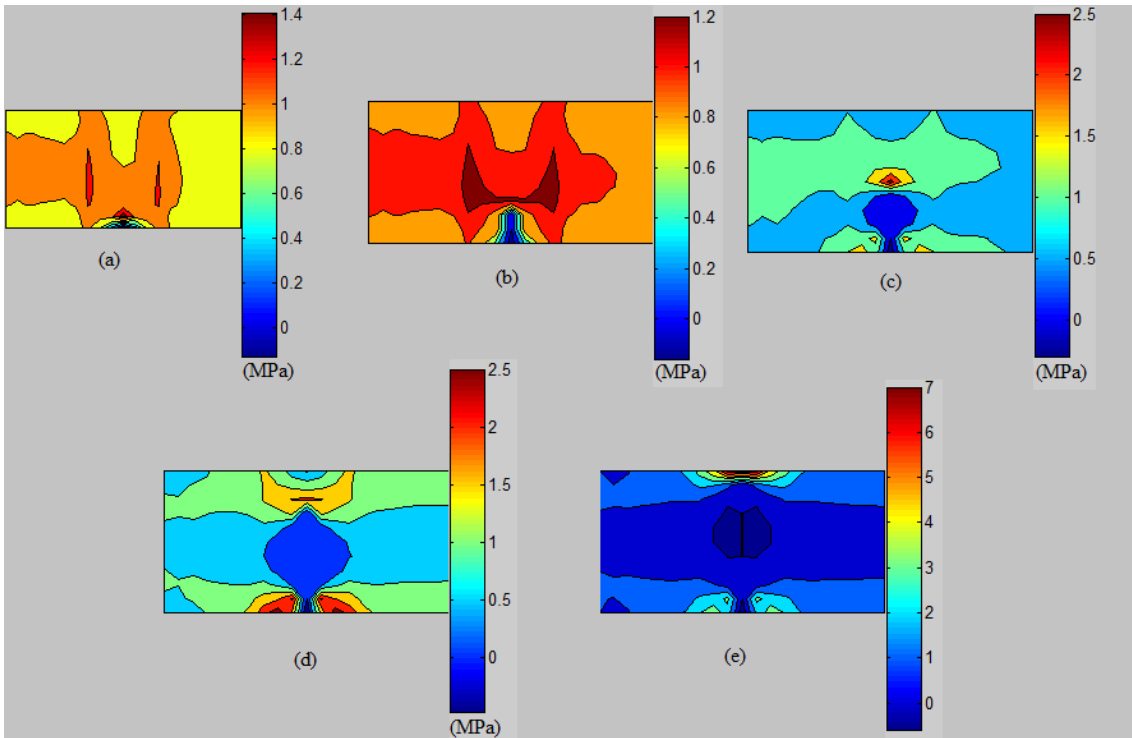


Figura 73 - Evolução da tensão  $S_{xx}$  para malha mais densa

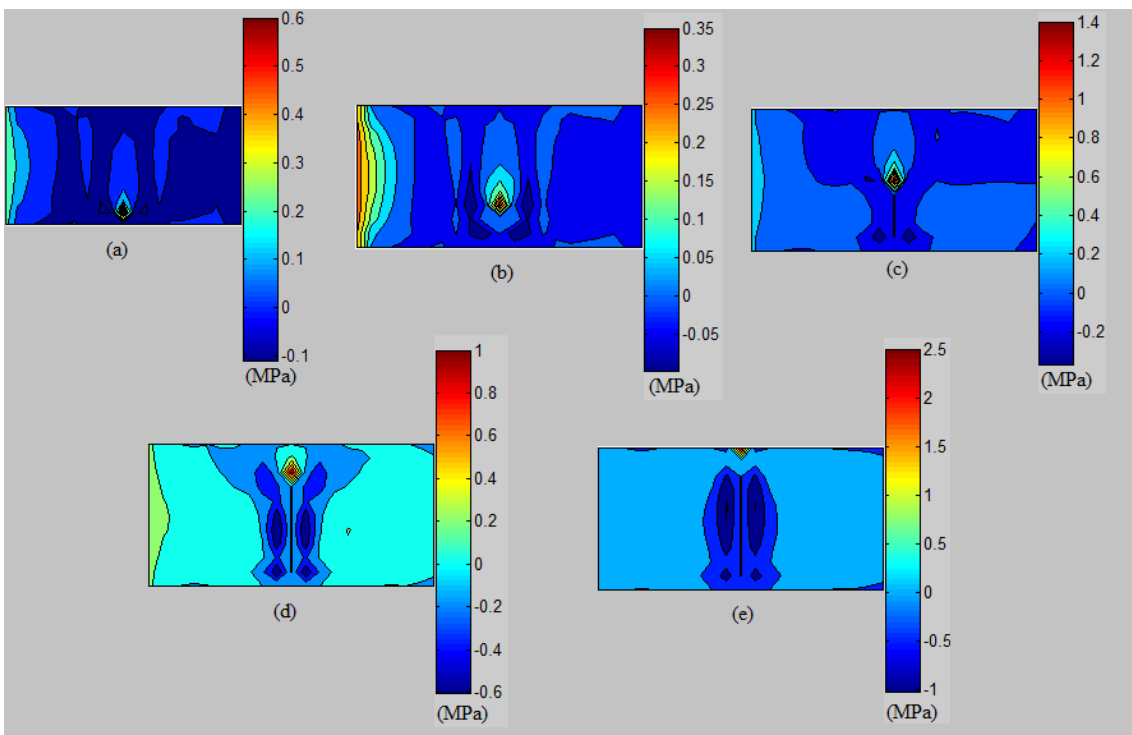


Figura 74 - Evolução da tensão  $S_{yy}$  para malha mais densa

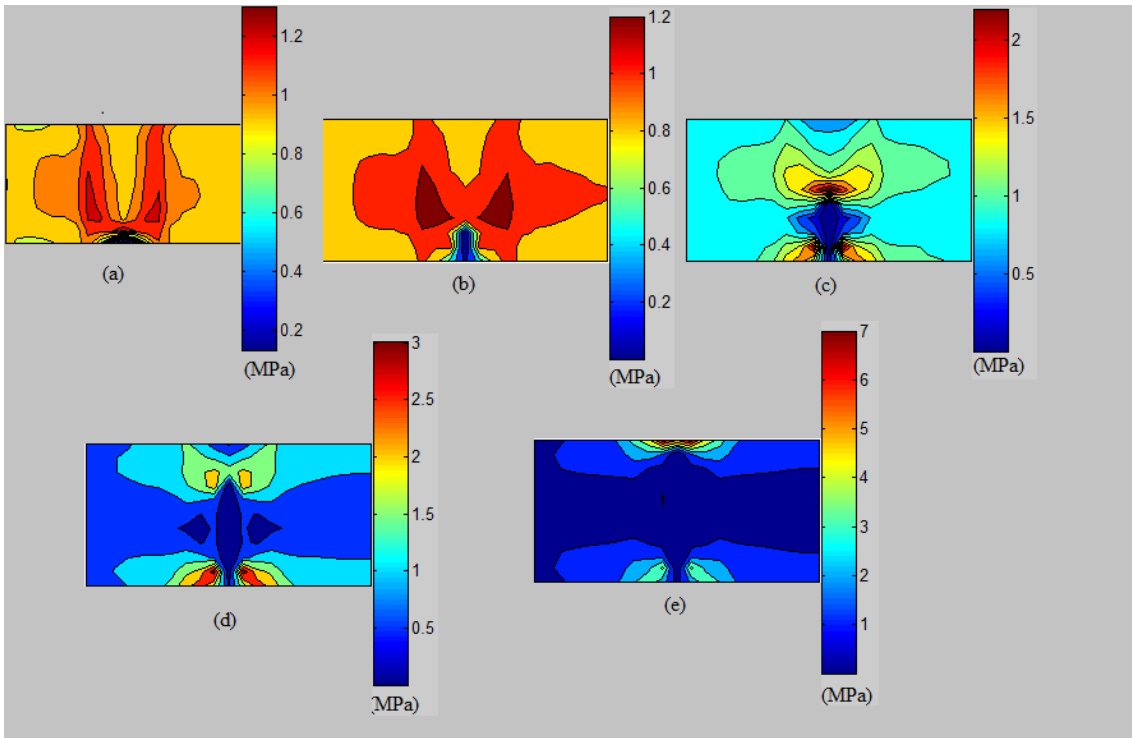


Figura 75 - Evolução da tensão efectiva para malha mais densa

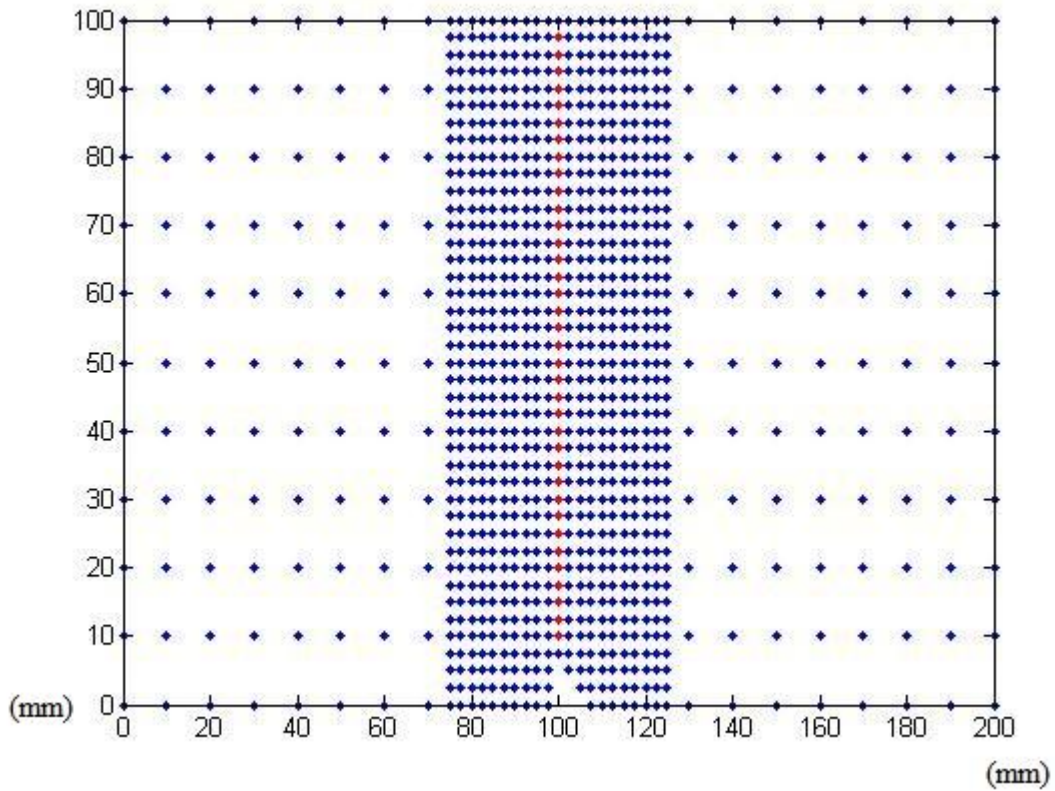


Figura 76 - Propagação da fenda em malha regular mais densificada na zona da fenda

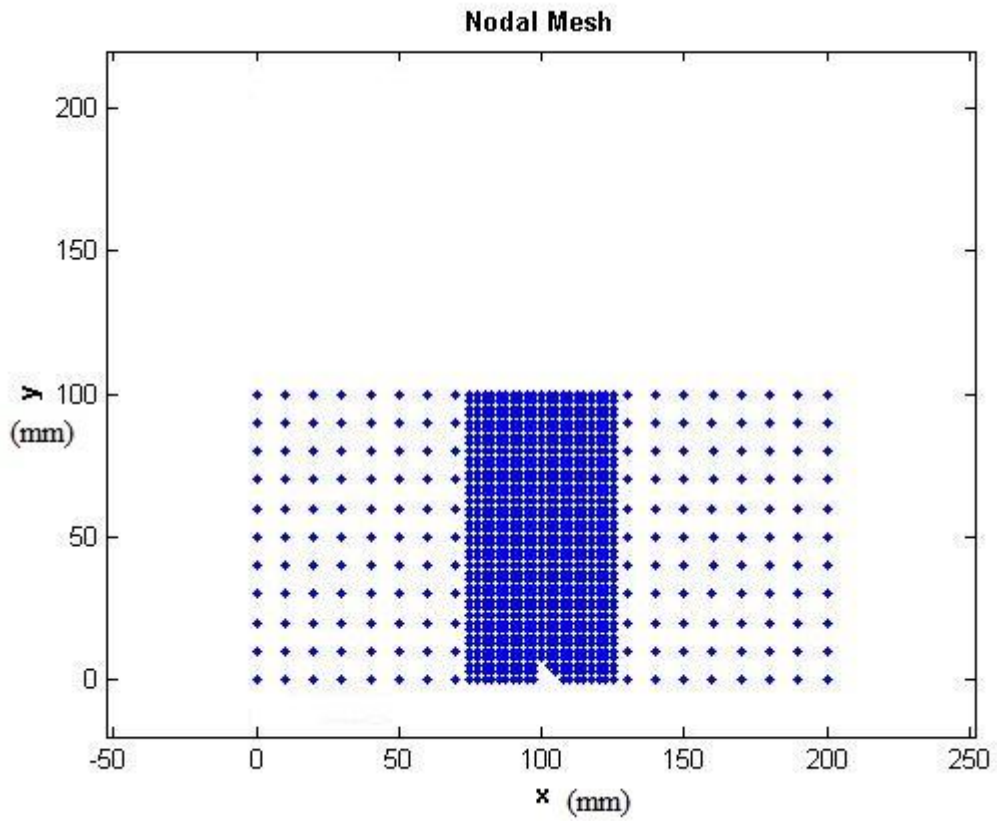


Figura 77 - Malha nodal regular com densificação na zona da fenda

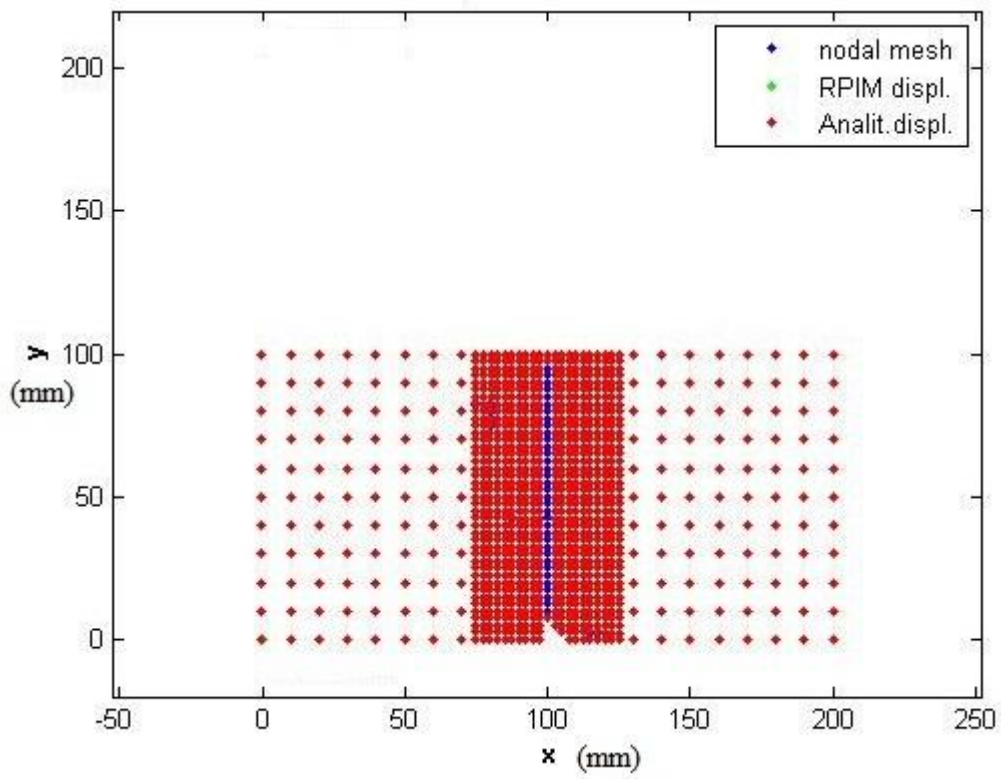
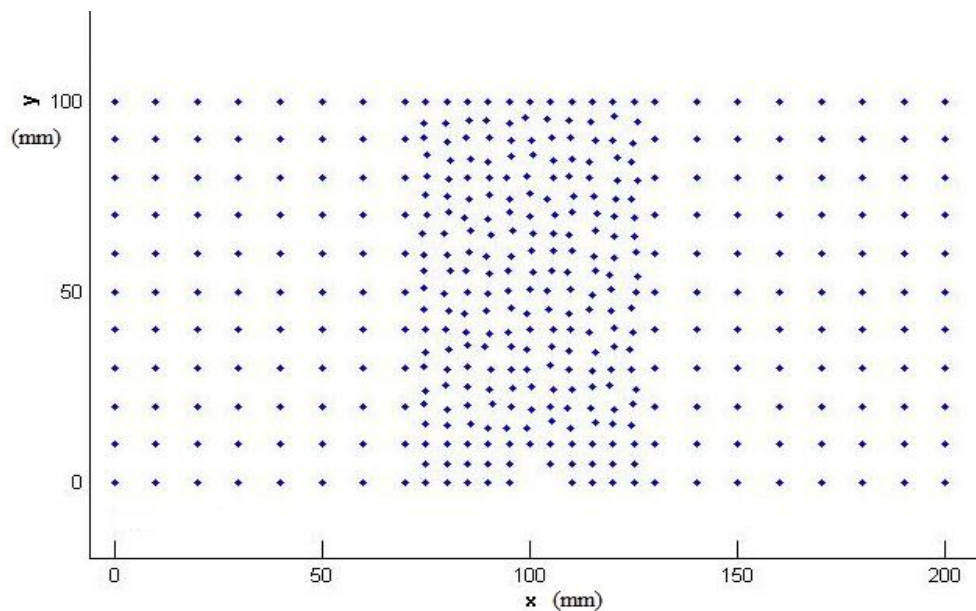


Figura 78 - Campo de deslocamentos de malha regular com densificação na zona da fenda

Analisando as figuras 73,74 e 75 onde se encontram representadas as evoluções das tensões  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  e  $\sigma_{efectiva}$  respectivamente, verifica-se, tal como no caso sem densificação, que a zona de maior tensão corresponde sempre à extremidade da fenda acompanhando a evolução valor máximo de tensão a propagação da fenda, ilustrada na figura 76.

Pode ainda observar-se, na figura 78 o campo de deslocamentos para este caso, cujos resultados reforçam a conclusão de uma propagação de fenda verticalmente perfeita.

De seguida, repetiram-se os procedimentos anteriores deste problema, para malhas irregulares, com densificação da zona da fenda e de seguida uma densificação mais acentuada nessa mesma zona.



**Figura 79 - Malha Irregular com densificação na zona da fenda**

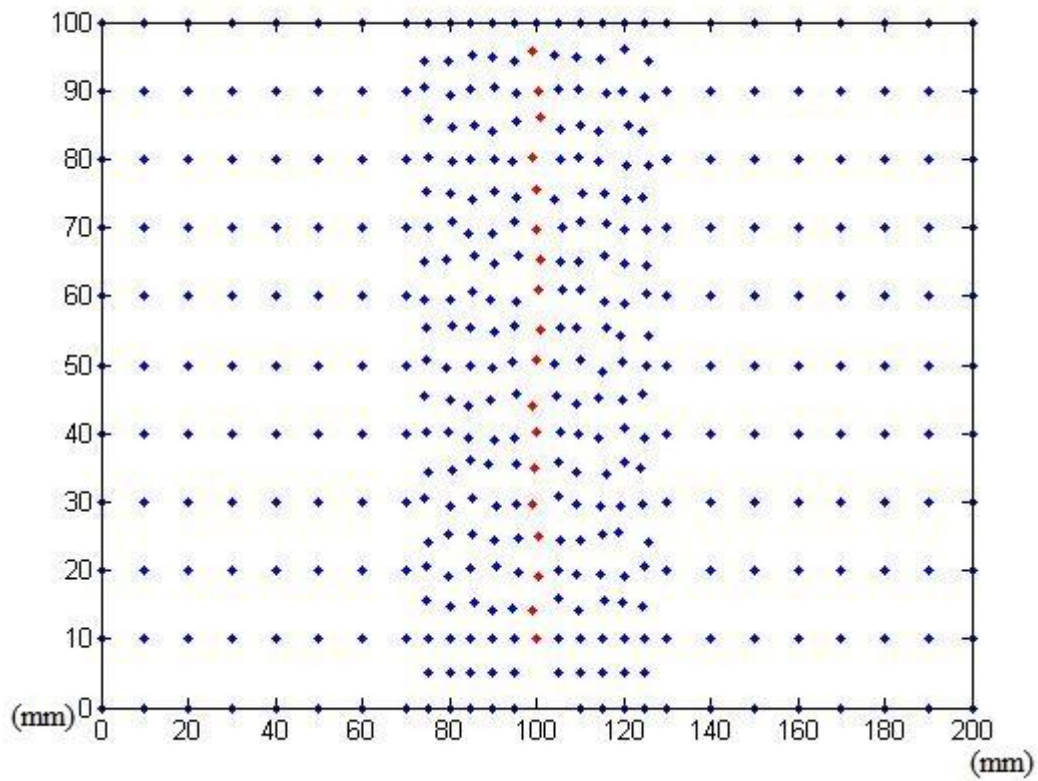


Figura 80 – Propagação de fenda em malha irregular e densificada na zona da fenda

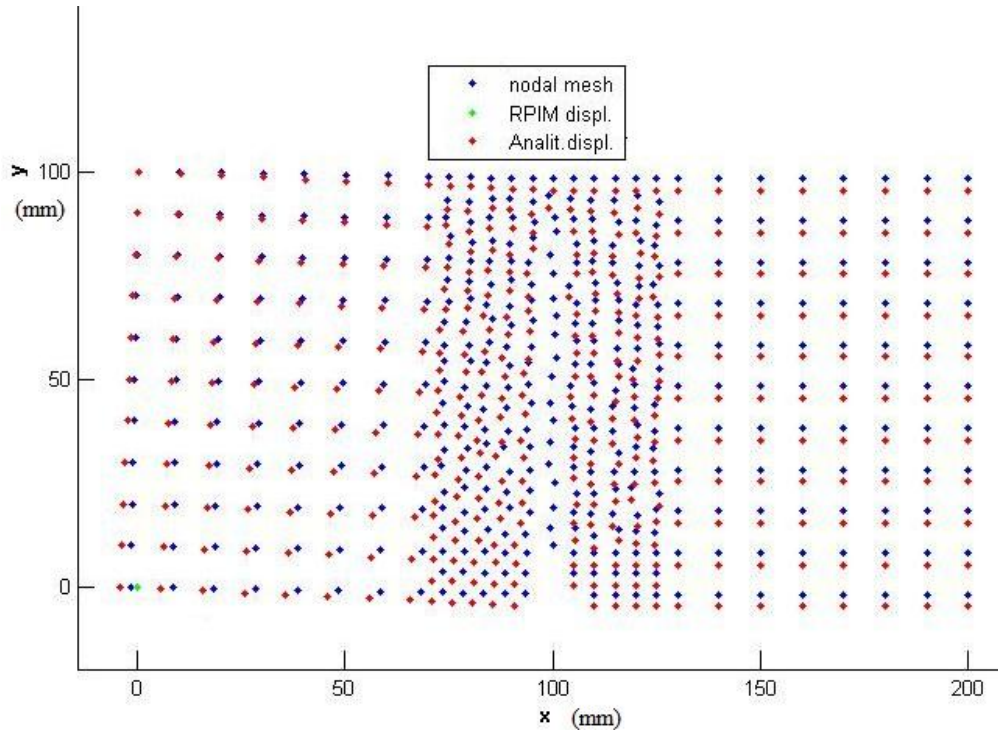


Figura 81 - Campo de deslocamentos de malha irregular densa na zona da fenda

Considerando a discretização patente na figura 79, verifica-se um comportamento semelhante ao obtido nas malhas regulares, isto é, uma propagação de fenda na vertical

observada na figura 80, caracterizada por um campo de tensões, ilustrado na figura 81. cujo seu valor máximo acompanha a extremidade da fenda.

De seguida obtiveram-se, para malha irregular e mais densa na zona da fenda, os resultados que caracterizam o estado de tensão, o campo de deslocamentos e a propagação da fenda na placa.

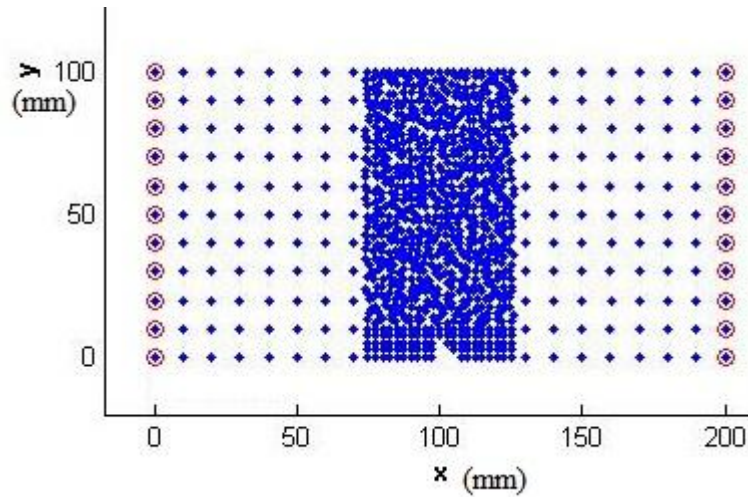


Figura 82 – Malha nodal irregular e mais densa na zona da fenda

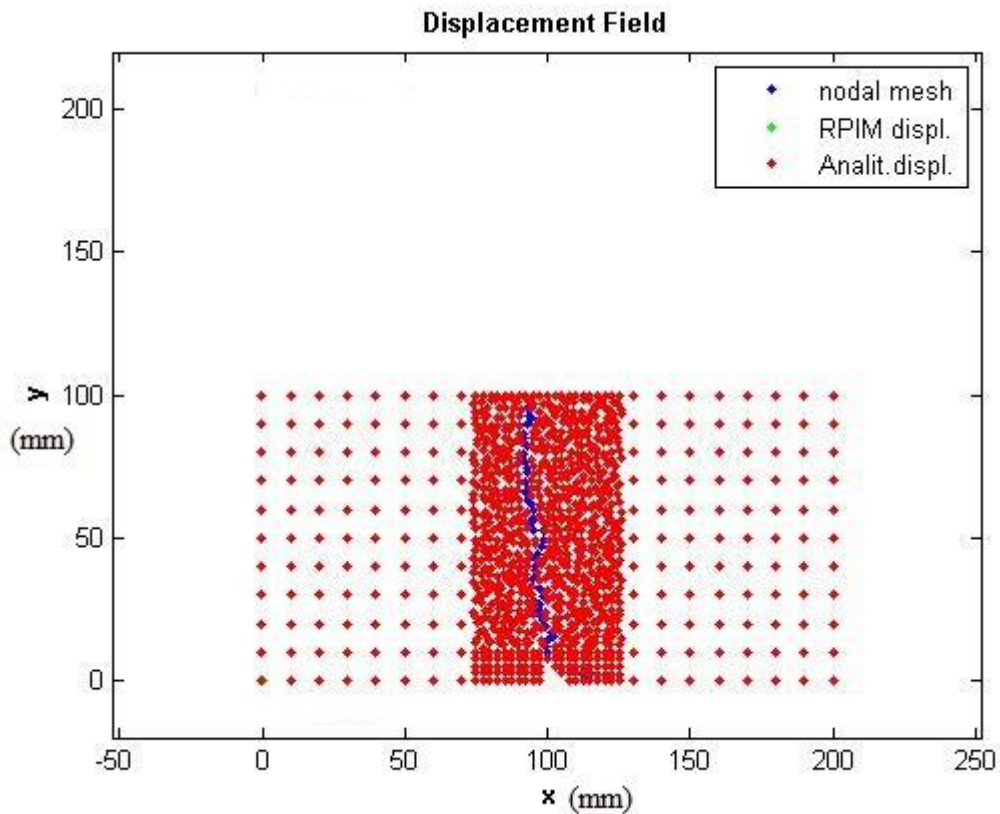
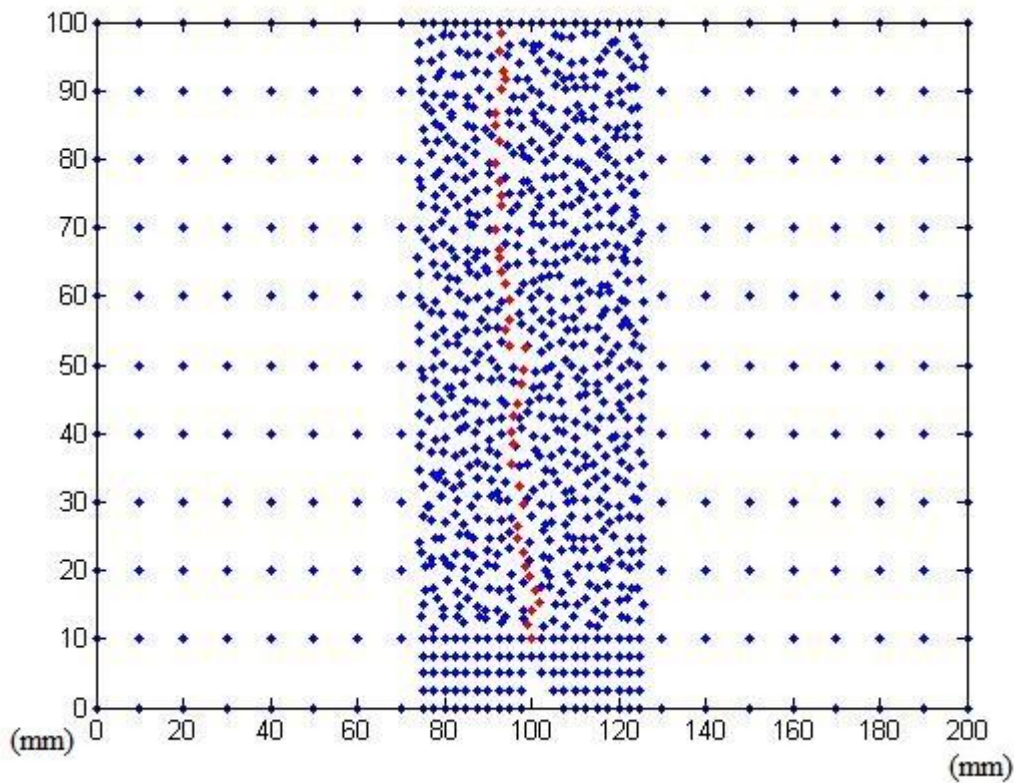


Figura 83 - Campo de deslocamentos de malha irregular mais densa na zona da fenda



**Figura 84 - Propagação da fenda em malha irregular mais densa na zona de fenda**

Na figura 82, observa-se a discretização mais acentuada da malha irregular deste problema.

Observando este último exemplo do problema, pode observar-se uma propagação da fenda vertical e ligeiramente para a esquerda mas de forma pouco significativa (figura 84). O campo de deslocamentos obtido (figura 83) suplanta os resultados que se obtiveram para uma propagação do tipo da referida.

De uma forma geral, pode concluir-se que o NNRPIM é um método cuja solução resultante é muito semelhante às soluções obtidas por métodos já utilizados.

No entanto, para malhas mais irregulares, a propagação da fenda revelou-se um pouco diferente relativamente a trabalhos já realizados anteriormente como em (Nguyen-Xuan, 2012), tendo sido utilizado o ES-FEM.

Uma possível explicação face às soluções divergentes, relativamente ao método ES-FEM utilizado no trabalho (Nguyen-Xuan, 2012), é que a utilização do algoritmo para estudo de abertura e propagação de fenda possa não ter sido a mais correcta em termos de precisão.

### **4.2.3 - Placa rectangular com fenda sujeita a carga pontual**

A fim de estudar a propagação de uma fenda, considera-se, neste exemplo, uma placa rectangular, cujas condições de fronteira estão ilustradas na figura 85. De comprimento  $L=10m$  , altura  $D=8m$  e um comprimento de fenda  $a=1m$  aplicando uma carga pontual  $q_0 = -4,5N$  , aplica-se, repetidamente, o método NNRPIM para o estudo da propagação de fenda.

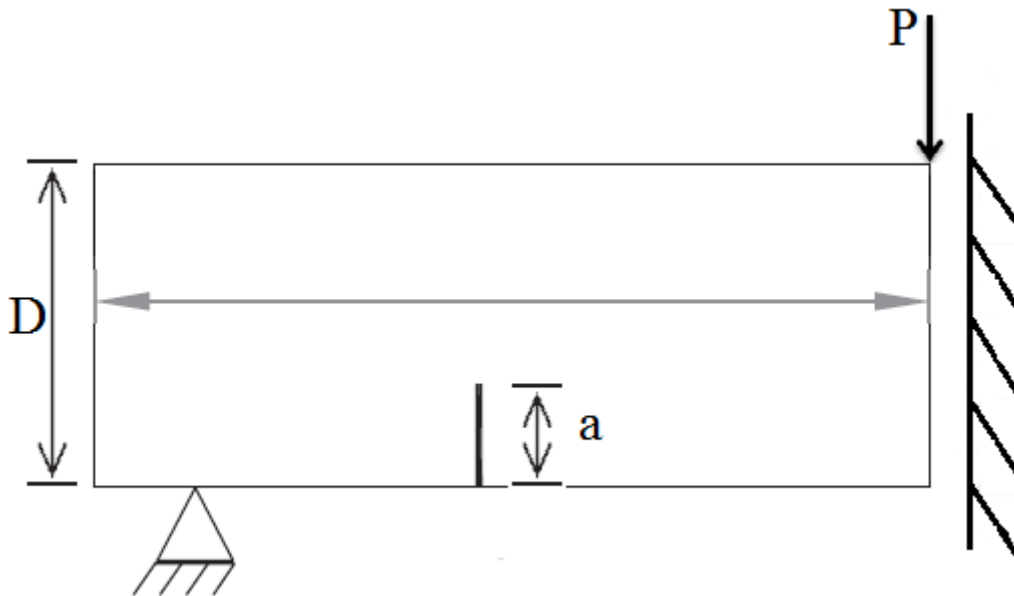
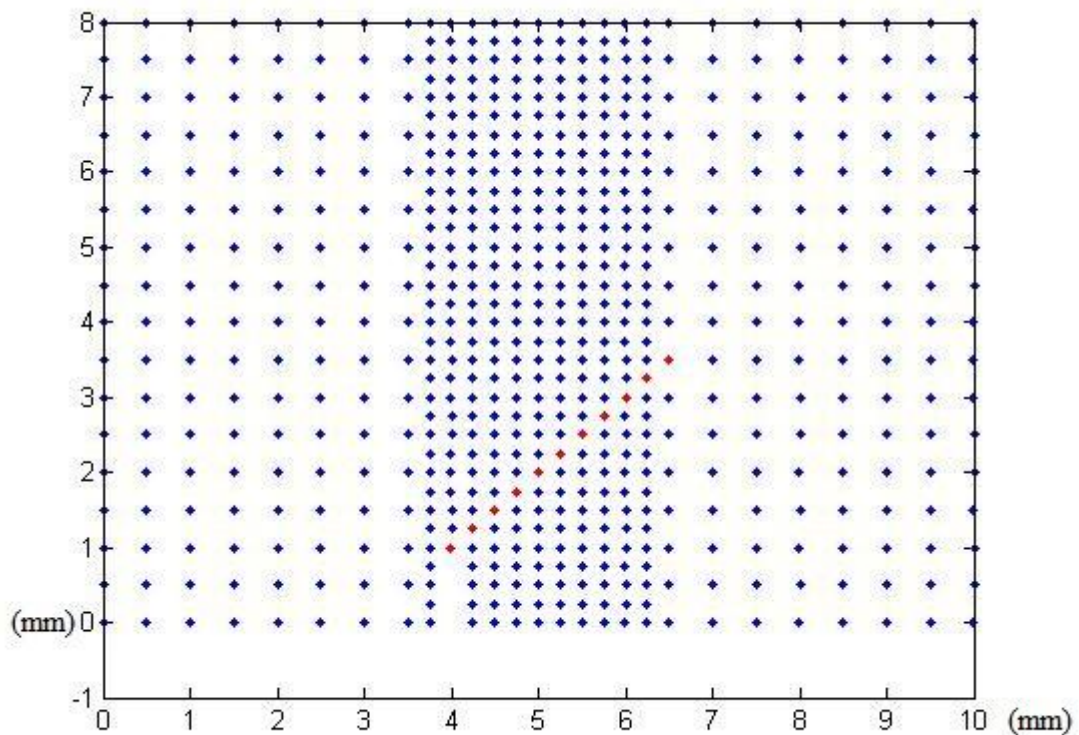


Figura 85 - Placa sujeita a carga pontual com fenda

Este problema foi discretizado para malhas regulares e irregulares com maior e menor densificação na zona da fenda.

Após aplicação do método, foi inicialmente utilizada uma malha regular, mais densificada na zona da fenda.

Observando o resultado obtido ilustrado na figura 86, pode dizer-se que a fenda se propaga numa direcção segundo uma recta de declive igual a 1.



**Figura 86 - Propagação de uma fenda numa malha regular e densificada na zona da fenda**

De seguida, repetiu-se o exemplo, utilizando agora para a solução, uma malha também regular, mas com a malha na zona da fenda ainda mais densa que a anterior.

Analisando a propagação, nesta nova malha, verifica-se que o resultado é similar (figura 87) sendo que a direcção a fenda se propaga, igualmente, segundo uma recta de declive igual à unidade.

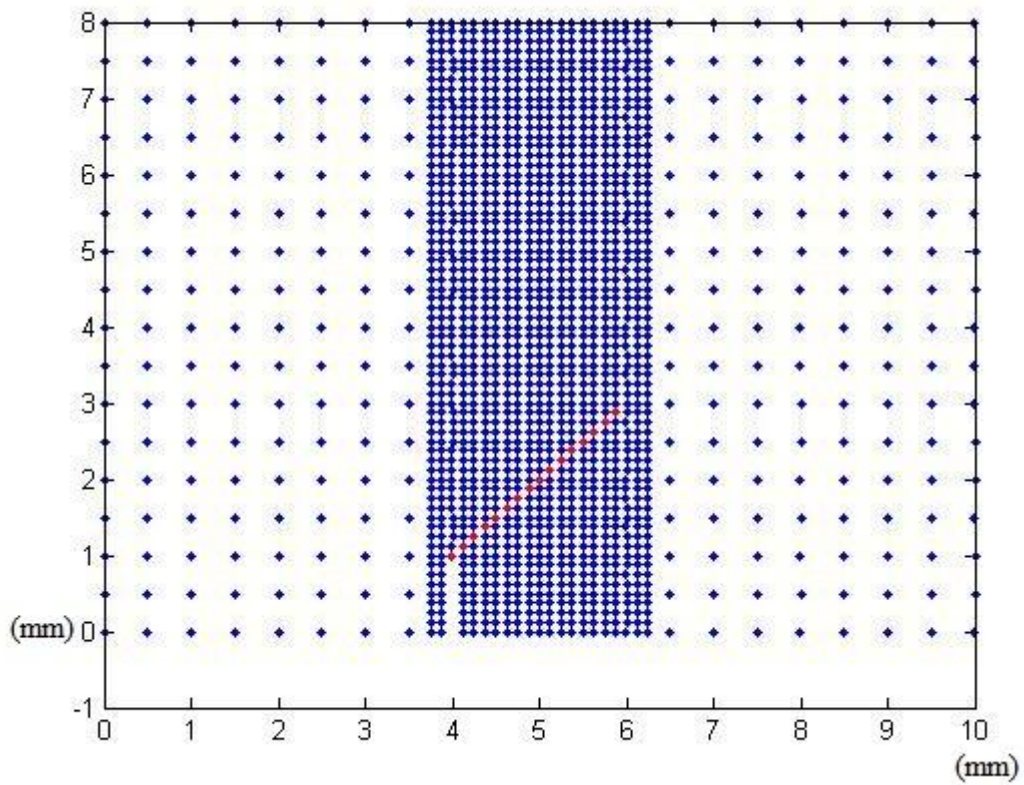


Figura 87 - Propagação de uma fenda numa malha regular mais densificada na zona da fenda

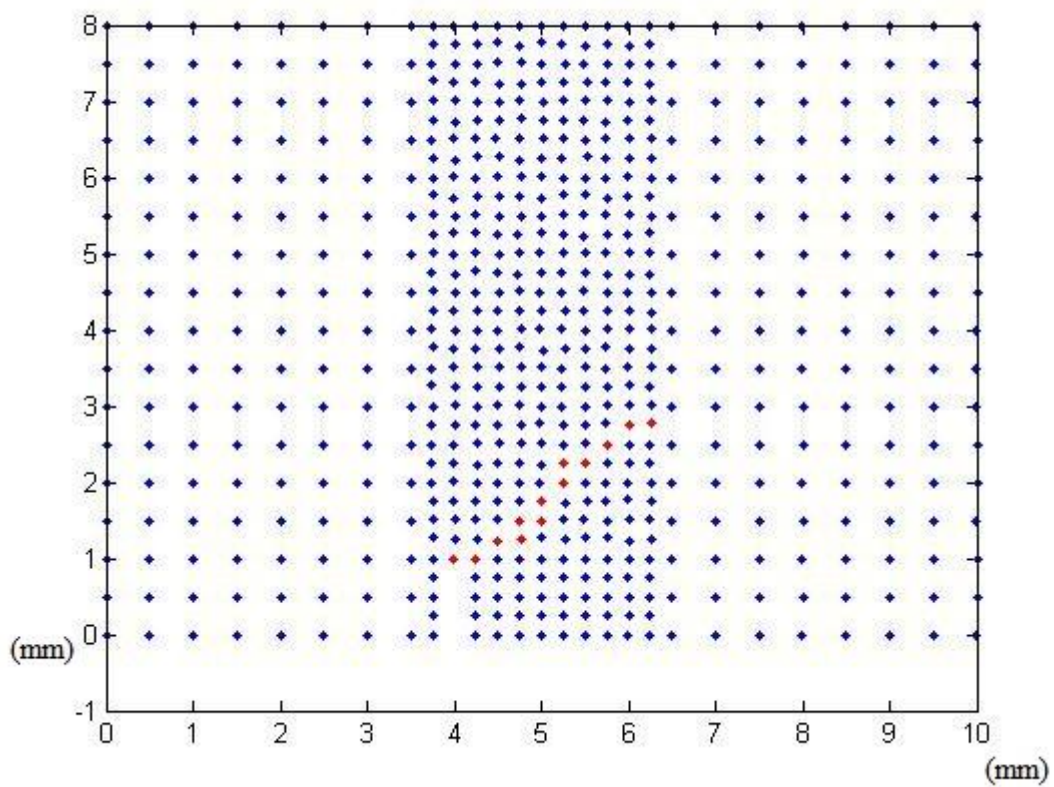


Figura 88 - Malha nodal irregular com zona da fenda densificada

Utilizando uma malha irregular, densificando a zona da fenda (figura 88), obtiveram-se agora resultados ligeiramente diferentes relativamente aos obtidos para malha regular.

Embora a fenda, à semelhança das malhas regulares, se propague na direcção vertical e, simultaneamente, para a zona da carga aplicada, neste exemplo a fenda propaga-se com um declive inferior ao verificado nos exemplos anteriores.

Uma propagação mais horizontal, relativamente às malhas regulares, isto é, com declive menos acentuado, obtém-se igualmente, para uma malha irregular com zona ainda mais densificada (figura 89).

Os resultados para este problema, utilizando o NNRPIM, revelam um caminho de abertura de fenda semelhante à de outros obtidos utilizando outros métodos. Concluindo-se então, que este método sem malha, pode ser considerada uma alternativa fiável e precisa para o estudo de propagação de fendas neste tipo de problemas.

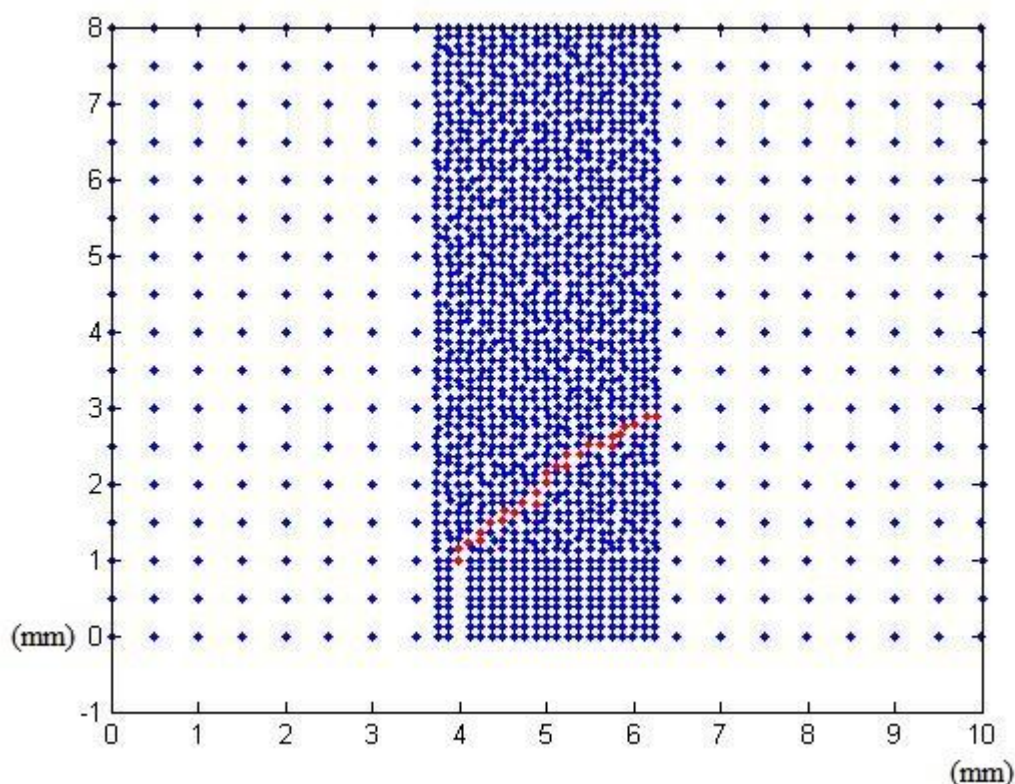


Figura 89 – Malha nodal irregular e mais densa na zona da fenda

## **5 - Conclusões**

O grande objectivo deste trabalho, era verificar a aplicabilidade do método NNRPIM (Natural Neighbour Radial Point Interpolation Method) e das suas potencialidades no estudo de abertura e propagação de fendas. Vários exemplos elasto-estáticos foram analisados com o NNRPIM, e algumas conclusões podem ser aferidas.

Antes de se estudarem directamente, exemplos de problemas relacionados com abertura e propagação de fendas, foi feita, uma abordagem inicial ao estudo de algumas das características do método RPIM de modo a poder perceber melhor de que forma os métodos sem malha na sua generalidade funcionam. Este estudo preliminar do RPIM permitiu compreender melhor as semelhanças e diferenças em relação ao NNRPIM.

Vários estudos, foram efectuados considerando o RPIM. Analisou-se o exemplo da viga cantilever, no qual se efectuou o estudo de convergência, fazendo variar a discretização da malha nodal. Obtiveram-se valores de deslocamento pontual que convergiram para valores muito próximos das soluções teóricas e ainda foram obtidos valores de erro médio do campo de deslocamentos que permitiram observar a alta taxa de convergência do NNRPIM.

Ainda com o mesmo exemplo, estudou-se o efeito da malha de integração variando a densidade da mesma. Verificou-se que os valores obtidos, para o deslocamento, à medida que se aumentava a densidade da malha de integração, estabilizavam para uma solução próxima da solução analítica.

Finalizou-se o estudo das características do RPIM com o estudo dos domínios de influência, concluindo-se que utilizando entre 8 a 12 nós no interior de cada domínio de influência permite minimizar o erro da solução RPIM em relação à solução analítica.

Todos os estudos foram discretizados quer em malhas regulares quer em irregulares, verificando-se um ligeiro aumento do erro para quando as malhas eram mais distorcidas e irregulares.

Pode concluir-se então, que a precisão do RPIM depende da discretização do domínio do problema, da densidade da malha de integração e ainda do número de nós no interior

do domínio de influência. Verificou-se também uma diminuição na precisão da solução para malhas mais irregulares e distorcidas.

Para efeitos de comparação entre o RPIM e o NNRPIM, três exemplos elasto-estáticos foram testados, confrontando no final os resultados de ambos os métodos. Este estudo comparativo permitiu tirar conclusões acerca do funcionamento dos dois métodos, visando uma melhor percepção das características inerentes.

Analisou-se um exemplo com uma placa quadrada traccionada por uma carga distribuída. Discretizou-se o problema para malhas regulares e irregulares obtendo-se, para ambos os métodos, valores do erro médio da tensão  $\sigma_{xx}$  na placa e do deslocamento pontual, calculando o respectivo erro, de dois pontos da placa. Os resultados foram elucidativos da convergência do RPIM e do NNRPIM relativamente ao valor do deslocamento do ponto da placa quando se aumenta o número de nós, concluindo que para malhas irregulares e distorcidas, estes métodos perdem, como seria de esperar alguma precisão. Esta conclusão reforça os resultados obtidos nos estudos efectuados apenas com o RPIM.

Utilizou-se, também, o exemplo da viga cantilever sujeita a uma carga distribuída parabólica na extremidade livre, discretizando o problema para malhas regulares e irregulares e determinando o valor do erro médio de tensão e do deslocamento de um ponto variando o número de nós da malha do problema. Conclui-se que para o exemplo da viga cantilever os métodos RPIM e NNRPIM possuem bastante fiabilidade e precisão até para malhas irregulares e distorcidas.

O estudo comparativo entre os dois métodos terminou com a análise de um exemplo de uma placa infinita com um orifício circular, discretizando o problema para malhas regulares e irregulares. Neste caso foi obtido o erro médio para as tensões  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  e  $\sigma_{xy}$ . Observa-se assim uma convergência dos valores do erro médio das tensões  $\sigma_{yy}$  e  $\sigma_{xy}$ . É visível com este exemplo que a análise do NNRPIM, utilizando malhas irregulares, conduz a valores do erro médio ligeiramente mais elevados. Para a tensão  $\sigma_{xx}$  o valor do erro médio assume valores um pouco díspares quer para as diferentes discretizações do problema quer para os diferentes métodos.

Conclui-se mais uma vez, a ligeira perda de precisão dos métodos sem malha quando se trata de malhas irregulares.

É de fundamental importância referir, que as diferenças assinaladas nos valores de erro mais discrepantes, no caso da utilização das malhas irregulares, não são muito significativas em termos de valor absoluto relativamente a valores obtidos por malhas regulares. Este facto, deve ser tido em conta para entender a potencialidade destes métodos sem malha como óptimas ferramentas para o estudo de malhas irregulares e distorcidas.

Numa fase seguinte, utilizando o NNRPIM, testou-se um exemplo com uma placa rectangular com uma fenda central. O problema foi discretizado para malha regular com e sem densificação e obtiveram-se os resultados para os valores da tensão ao longo da extremidade da fenda e para diferentes valores de comprimento da fenda. Pode concluir-se, que os resultados obtidos pelo NNRPIM foram muito semelhantes aos calculados por solução analítica para todos os casos testados. Conclui-se então, que o NNRPIM é um método que tem bastante utilidade para o estudo e análise de campos de tensão, em placas com fendas.

Após todos os problemas e estudos realizados e referidos, foram então testados exemplos de propagação de fendas, já estudados com outros métodos numéricos anteriormente, utilizando neste trabalho o NNRPIM.

Para um problema com uma fenda na extremidade de uma placa encastrada e aplicando uma tensão tangencial, obtiveram-se resultados muito semelhantes aos obtidos na literatura (Nguyen-Xuan, 2012). Tendo em conta os resultados obtidos conclui-se que neste exemplo o NNRPIM é um método fiável e com boa precisão inclusive para malhas irregulares sujeitas a grandes distorções.

O segundo problema utilizado para estudo de propagação de fendas, foi o caso de uma placa com corte a 45°. Neste exemplo, os resultados obtidos com o NNRPIM, utilizando uma malha irregular, apresentaram diferenças significativas quando comparados com os resultados obtidos com o ES-FEM (Nguyen-Xuan, 2012). Uma possível explicação face às soluções divergentes, relativamente ao método ES-FEM, é que a utilização do algoritmo para estudo de abertura e propagação de fenda possa não ter sido a mais correcta em termos de precisão

Finalizando o estudo de propagação de fendas, utilizou-se um exemplo de uma placa rectangular com uma fenda central, sujeita a uma carga pontual. Os resultados obtidos relativamente à propagação de fenda, utilizando o NNRPIM, foram similares aos obtidos já anteriormente utilizando outros métodos (Nguyen-Xuan, 2012). Conclui-se então que para este exemplo, o NNRPIM constitui uma opção viável e alternativa ao estudo deste tipo de problemas.

Tendo sido apresentado e descrito, o NNRPIM, revelou-se uma ferramenta muito útil, quer no estudo de abertura e propagação de fendas, quer em exemplos testados. Pelos resultados obtidos ao longo deste trabalho, tanto o RPIM como o NNRPIM demonstraram que os métodos sem malha possuem grande precisão, sobretudo nos resultados referentes aos campos de tensões; e ficou corroborada uma das grandes potencialidades destes métodos, mantêm boa precisão, relativamente às soluções analíticas mesmo para malhas muito irregulares. Nos exemplos de propagação de fenda, os resultados foram bastante similares aos obtidos por métodos já utilizados para estudos desta índole.

Conclui-se que o NNRPIM pode ser mais uma valia na comunidade científica tendo características e dadas as grandes potencialidades do método, capazes não só de dar uma boa resposta a problemas de propagação de fenda, como abranger outras áreas onde são utilizados os métodos de integração numérica.

## **6 - Referências**

- Aluru, N.R., Li, G., (2000) – *Finite cloud method: a true meshless method based on a fixed reproducing kernel approximation*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, (2000). **vol.50**:p. 2373-2410.
- Atluri S.N. and Zhu T., (1998) - *A new meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics*. Computational Mechanics, 1998. **vol22**: p. 117-127.
- Argyris, J. H. and Kelsey, S., (1960) - “*Energy Theorems and Structural Analysis*”, Butterworth Scientific Publications, London, 1960.
- Bathe K.J., (1996) – *Finite Element Procedures*. 1996: Prentice-Hall: Englewood Cliffs, NJ.
- Bayesteh H., Mohammadi S., (2011) – *XFEM fracture analysis of shells: The effect of crack tip enrichments*. Computational Materials Science, (2011), **vol. 50**, p. 2793-2813.
- Benesh M., Qiao K., (2007) – *Shell- Transition Dependence of 12-particle Yukawa Clusters*. Journal of Young Investigators, (2007), **vol. 16**.
- Belinha J. (2004). "Elasto-Plastic Analysis Considering the Element Free Galerkin Method." MSc Thesis, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto: 275.
- Belinha J. (2010). "The Natural Neighbour Radial Point Interpolation Method - Solid Mechanics and Mechanobiology Applications." PhD Thesis, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto: 280.
- Belytschko T., Lu Y.Y., and Gu L., (1994) - *Element-Free Galerkin Method*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1994. **vol37**: p. 229-256.
- Belytschko T, Beissel, S., (1996a) – *Nodal Integration of the Element Free Galerkin Method*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, (1996a). **vol.39**: p.49-74.

- Belytschko T., Krongauz Y., Organ D., Fleming M., and Krysl P., (1996b) – *Meshless Methods: an overview and recent developments*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1996. **vol.139**: p. 3-47.
- B.N.Rao, S. Rahman, (2001) - *A coupled meshless-finite element method for fracture analysis of cracks*. International Journal of Pressure Vessels and Piping, (2001) **vol.78**: p. 647-657
- Braun, J., Sambridge, M., (1995) – *A numerical method for solving partial differential equations on highly irregular unstructured grids*. Nature, (1995). **vol.376**: p. 655-660.
- Chen, J.S., Wu, C.T., Yoon, S., You, Y., (2001) – *A stabilized conforming nodal integration for Galerkin meshfree methods*. International Journal for Numeric Methods in Engineering, (2001). **vol.50**: p. 435-466.
- Cittarella R., CriCri G., (2009) – *A two-parameter model for crack growth simulation by combined FEM-DBEM approach*. Advances in Engineering Software, 2009, **Vol. 40**: p. 363-377.
- Dai K.Y., Liu G.R., Han X., and Li Y., (2006) - *Inelastic analysis of 2D solids using a weak-form RPIM based on deformation theory*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2006. **195**: p. 4179- 4193.
- De, S, Bathe, K.J., (2000) - *The method of finite spheres*. Computational Mechanics, (2000).**vol25**: p. 329-345.
- Dinis L.M.J.S., Jorge R.M.N., and Belinha J., (2007) – *Analysis of 3D solids using the natural neighbour radial point interpolation method*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2007. **196**(13-16): p. 2009-2028.
- Dinis L.M.J.S., Jorge R.M.N., and Belinha J., (2008) – *Analysis of plates and laminates using the natural neighbour radial point interpolation method*. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2008. **32**(3): p. 267-279.
- Dolbow, J., Belytschko T., (1999) - *Numerical Intergration of Galerkin Weak form in meshfree methods*. Computational Mechanics (1999). **vol. 23**: p. 219-230.
- Delaunay B., (1934) - *Sur la sphère vide. A la memoire de Georges Voronoï*. Izv. Akad. Nauk SSSR, Otdelenie Matematicheskikh i Estestvennyh Nauk, 1934. **vol. 7**:p. 793-800.

- Duarte, C.A., Oden J. T., (1996) - *H-p clouds: Na H-p meshless method*. Numerical Methods for Partial Differential Equations, (1996). **vol. 12:** p.673-705.
- Giner E., Sabsabi M., Fuenmayor F. J., (2011) - *Calculation of  $K_{II}$  in crack face contacts using X-FEM. Application to fretting fatigue*. Engineering Fracture Mechanics, (2011), **Vol. 78**, p. 428-445.
- Gu Y.T., (2005) – *Meshfree methods and their comparisons*. International Journal of Computational Methods, 2005. **vol. 2:** p. 477-515.
- Gu, Y.T., Wang W., Zhang L.C. and Feng X. Q., (2011) - *An enriched radial point interpolation method (e-RPIM) for analysis of crack tip fields*. Engineering Fracture Mechanics (2011), **78:** p.175-190
- Hardy, R.L., (1971) – *Multiquadric equations of topography and other irregular surfaces*. Geophys.Res, (1971). **vol. 176:** p. 1905-1915.
- Kansa, E.J., (1990) - *Multiquadrics- A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid dynamics. I: Surface approximations and partial derivative estimates*. Comput. Math. Appl, (1990). **vol. 19:**p- 127-145.
- Kansa, E.J., (1990) - *Multiquadrics- A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid dynamics. II: Solutions to parabolic, hyperbolic and elliptic partial differential equations*. Comput. Math. Appl., (1990). **vol. 19:**p. 147-161.
- Lawson C.L., (1977) – *Software for C1 surface interpolation*. In J. R. Rice (ed.). Mathematical Software III. Vol. 3. Academic Press. New York, N.Y., 1977.
- Liszka, T., e Orkisz, J., (1980) - *The finite difference method at arbitrary irregular grids and its application in applied mechanics*. Computer & Structures, Pergamon Press., (1980).**vol11:** p. 83-95.
- Liu G.R. and Gu Y.T., (2001) - *A Point Interpolation Method for Two-Dimensional Solids*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2001. **50:** p. 937-951.
- Liu, G.R., (2002) – *Mesh free Methods: Mving beyond the Finite Element Method*. CRC Pres, New York., (2002).

- Liu W.K., Jun S., and Zhang Y.F., (1995) - *Reproducing Kernel Particle Methods*. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 1995. **vol. 20**: p. 1081-1106
- Liu, Y.J., (2010) - "A new boundary meshfree method with distributed sources", Engineering Analysis with Boundary Elements, **vol. 34**, (2010), p. 914-919.
- Mathon R., Johnston R.L., (1977) – *The approximate solution of elliptic boundary-value problems by fundamental solutions*, Siam Journal on Numerical Analysis. (1977) p. 638-650.
- Monaghan, J.J., (1988) - *An Introduction to SPH*. Computer Physics Communications, (1988). **vol.48(1)**: p. 89-96.
- Nayroles B., Touzot G., and Villon P., (1992) - *Generalizing the Finite Element Method: Diffuse Approximation and Diffuse Elements*. Computational Mechanics, 1992. **vol10**: p. 307-318.
- Nguyen-Xuan H., Liu G.R., Nourbakhshnia N. and Chen L., (2012) - *A novel singular ES-FEM for crack growth simulation*. Engineering Fracture Mechanics (2012), **84**: p. 41-66
- Nguyen V.P., Ranzuck T., Bordas S., and Duflo M., (2008) – *Meshless methods: A review and computer implementation aspects*. Mathematics and Computers in Simulation, 2008. **vol. 79**: p. 763-813.
- Oñate, E., Idelsohn, S., Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L., Sacco, C.A., (1996a) - *A stabilized finite point method for analysis of fluid mechanics problems*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering (1996). **vol. 139**: p. 315-346.
- Oñate, E., Idelsohn, S., Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L., (1996b) - *A finite point method in computation mechanics, Applications to convective transport and fluid flow*. International Journal for Numeric Methods in Engineering, (1996). **vol. 39**: p. 3839-3966.
- Rao B.N., Rahman S., (2001) – *A coupled meshless-finite element method for fracture analysis of cracks*. International Journal of Pressure Vessels and Piping, (2001), **Vol. 78**: p. 647-657.

- Sibson R., (1981) - *A brief description of natural neighbor interpolation*. Interpreting Multivariate Data, in V. Barnett (ed.), (Wiley, Chichester), 1981: p. 21-36.
- Silva Gomes J.F., (2004) – *Mecânica dos Sólidos e Resistência dos Materiais*, Edições Inegi, 2004.
- Sukumar, N., Moran, B., Yu, S., Belikov, V. V., (2001) – *Natural neighbor Galerkin methods*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, (2001). **vol. 50**: p. 1-27.
- Turner, M. R., Clough, R., Martin, H. and Topp, L., (1956) - “Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures”, *J. Aero. Sci.*, 1956, 23, no. 9, p. 805-823.
- Voronoï G.M., (1908) - *Nouvelles applications des parametres continus à la théorie des formes quadratiques. Deuxième Mémoire: Recherches sur les paralléloèdres primitifs*, *J. Reine Angew. Math.*, (1908) **vol. 134**: p.198-287.
- Wang J.G., Liu G.R., and Wu Y.G., (2001) - *A Point Interpolation Method for Simulating Dissipation Process of Consolidation*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2001. **190**: p. 5907-5922.
- Wang J.G. and Liu G.R., (2002) - *On the Optimal Shape Parameters of Radial Basis Functions used for 2-D Meshless Methods*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2002. **vol.191**: p. 2611-2630.
- Watson D.F., (1992) - *Contouring: A Guide to the Analysis and Display of Spatial Data*. Pergamon Press. Oxford, 1992.
- Wu S.C., Liu G.R., Cui X.Y., Nguyen T.T., Zhang G.Y., (2010) – *An edge-based smoothed point interpolation method (ES-PIM) for heat transfer analysis of rapid manufacturing system*. International Journal of Heat and Mass Transfer (2010) **vol. 53**: p. 1938-1950.
- Wu S.C., Liu G.R., Zhang H.O., Xu X., Li Z.R., (2009) – *A node-based smoothed point interpolation method (NS-PIM) for three-dimensional heat transfer problems*. International Journal of Thermal Sciences (2009) **vol. 48**: p. 1367-1376.
- Zienkiewicz, O. C., (1989) - *The Finite Element Method* 4<sup>th</sup> ed. 1989: McGraw-Hill.

- Zienkiewicz, O. C. and Taylor, R. L., (1970) - "The Finite Element Method: From Intuition to Generality", *Appl. Mech. Ver.*, 23, no. 23, pp 249-256, March, 1970.