

# Métodos numéricos para a resolução de modelos de crescimento económico

Vera Filipa Santos Pereira

Orientada por:

Professor Doutor Paulo José Abreu Beleza de Vasconcelos  
Professor Doutor Óscar João Atanázio Afonso

Tese de Mestrado em Economia

2012

## Breve Nota Bibliográfica

A candidata terminou a licenciatura em Matemática, com formação complementar em Matemática Aplicada, na Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, em Junho de 2010.

Ingressou, em Setembro de 2010, no Mestrado em Economia, na área de especialização de Modelação e Simulação Económica. Durante o ano de 2010 foi bolsista no Centro de Matemática do Porto, no âmbito de uma bolsa de integração na investigação da FCT, onde desenvolveu trabalhos de investigação na área de Métodos Espectrais para a resolução de equações diferenciais ordinárias.

## Agradecimentos

É com satisfação que agradeço a todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para que fosse possível a realização deste trabalho:

Aos meus orientador e co-orientador, respectivamente, Professor Doutor Paulo Vasconcelos e Professor Doutor Óscar Afonso, pela sua disponibilidade e experiência, indispensável para que os trabalhos fossem desenvolvidos da forma mais indicada.

À minha família que, sem dúvida, constitui o meu pilar e sem a qual tudo seria mais difícil de atingir.

À Joana, com a qual uma parte desta tese de dissertação foi desenvolvida conjuntamente, e que contribuiu para que todos os trabalhos evoluíssem com mais motivação e entusiasmo, permitindo transformar esta jornada numa troca interessante de ideias.

À Soraia, uma amiga incondicional, que com a sua generosidade sempre se disponibilizou para ajudar.

Por fim, a todos aqueles que se cruzaram comigo e que, de alguma forma, contribuíram para o meu percurso académico.

## Resumo

O modelo Ramsey-Cass-Koopmans (RCK) é muito importante em crescimento económico, pois compreende características usadas noutros modelos mais complexos.

Sendo este usualmente abordado na literatura, nem sempre a sua fundamentação matemática é retratada com detalhe. Por essa razão, neste trabalho e usando controlo ótimo, expõe-se a sua derivação e destacam-se as principais propriedades.

São, também, tratados vários métodos numéricos para resolver o problema de valores fronteira, resultante do processo de otimização. Estes métodos são implementados computacionalmente, usando um *software* adequado (MATLAB).

Embora, neste caso, seja conhecida a solução analítica, em geral tal não ocorre nos modelos de crescimento económico, o que atesta a grande utilidade dos referidos métodos numéricos, pois fornecem soluções aproximadas para o problema, permitindo extrair conclusões para extensões do modelo RCK.

## Abstract

The Ramsey-Cass-Koopmans model (RCK) is a very important model in economic growth, because it includes characteristics used in more complexed models.

Since it's usually approached in the literature, not always it's mathematical fundamentation is portrayed in detail. Because of that, in this work and using optimal control, we expose the derivation and highlight the main proprieties.

We, also, studied several numerical methods to solve the boudery value problem, resulting from the optimization process. These methods are computationally implementend using an appropriate software (MATLAB).

Although, in this case, the analytical solution is known, in general this doesn't happend in economic growth models, which underscores the great utility of these methods, used to find the approximate solutions, allowing the extraction of conclusions for extensions of the RCK model.

# Índice

1	Introdução . . . . .	1
2	Otimização de um modelo de crescimento económico . . . . .	3
3	O modelo de Ramsey-Cass-Koopmans (RCK) . . . . .	6
3.1	Pressupostos do modelo . . . . .	6
3.2	Resolução do modelo . . . . .	9
4	Simulação do modelo usando métodos numéricos . . . . .	13
4.1	Análise de sensibilidade à tolerância dos métodos . . . . .	20
5	Conclusões . . . . .	29
6	Apêndices . . . . .	30
6.1	Apêndice A: Cálculo em Variações . . . . .	30
6.1.1	Extremo de uma funcional com condições: . . . . .	30
6.1.2	Abordagem variacional para sistemas de controlo ótimo . . . . .	35
6.2	Apêndice B: Determinação da solução analítica . . . . .	43
7	Referências bibliográficas . . . . .	48

# Lista de Figuras

1	Solução analítica. . . . .	14
2	Solução analítica com a numérica, usando "bvp4c". . . . .	16
3	Solução numérica usando o "bvp4c", estendida através do "bvpxtend".	17
4	Solução analítica com a numérica, usando "bvp5c". . . . .	18
5	Solução analítica com a numérica, usando "bvp6c". . . . .	19
6	Interface do "bvpsuite". . . . .	20
7	Solução analítica com a numérica, usando "bvpsuite". . . . .	21
8	Erros relativos usando as tolerâncias por defeito, nos vários métodos.	22
9	Erros relativos usando as tolerâncias por defeito (tempos intermédios).	22
10	Erros relativos usando as tolerâncias por defeito (tempos finais). . . .	23
11	Erros relativos usando as tolerâncias opcionais (tempos intermédios).	24
12	Erros relativos usando as tolerâncias opcionais (tempos finais). . . .	25
13	Erros relativos usando "bvp5c", para as diferentes tolerâncias (tempos intermédios). . . . .	25
14	Erros relativos usando "bvp5c", para as diferentes tolerâncias (tempos finais). . . . .	26
15	Sistema de valores finais fixos de tempo e estado (Naidu, 2003). . . .	33
16	Sistema de valores finais livres de tempo e estado (Naidu, 2003). . . .	37
17	Sistema de pontos fixos dependentes (Naidu, 2003). . . . .	41

# 1 Introdução

Existem várias teorias de crescimento económico, das quais se destacam a corrente clássica (Adam Smith (1776), David Ricardo (1817), Thomas Malthus (1798)), a corrente keynesiana (Domar (1946), Harrod (1939)), a corrente neo-clássica (Solow (1956), Swan (1956)) e o crescimento endógeno (Lucas (1988) e Romer (1986)).

A corrente clássica defende um limite máximo ao crescimento, imposto por barreiras de várias naturezas (espaço insuficiente de cultivo, escassez de nutrientes, etc.). A corrente keynesiana baseia-se na ideia de que o nível de investimento influencia diretamente a poupança de cada país e o ritmo de crescimento do seu produto.

Na corrente neo-clássica, o crescimento é explicado exogenamente, e assume-se sempre que há um limite máximo para este ("*steady-state*"). O modelo de Ramsey-Cass-Koopmans (RCK) pertence a esta corrente, contudo, distingue-se do modelo de Solow-Swan, pois a poupança é calculada endogenamente.

Por fim, na teoria de crescimento endógeno, tal como o nome indica, o crescimento económico é explicado pelo próprio modelo. O modelo AK (protótipo de crescimento endógeno) decorre da existência de rendimentos constantes à escala, e pode ser o resultado da consideração da soma do capital físico com o capital humano no capital da função produção. Nesse contexto, a taxa de crescimento torna-se positiva, sem necessidade de intervenção exógena. Esta nova visão deu mote à criação de novos modelos, onde se assume o conhecimento como sendo o motor do crescimento endógeno.

Voltando ao modelo RCK, é importante explicar com mais detalhe a sua origem. Foi em 1928, que Frank Ramsey, num artigo visto como várias décadas à frente do seu tempo, considerou a maximização da utilidade para um horizonte infinito e a acumulação de capital de Solow Swan; ou seja, permitiu que a poupança pudesse deixar-se ser exógena e constante. De facto, mais tarde, David Cass e Tjalling Koopmans (1965) seguiram a sugestão de Ramsey, considerando a taxa de poupança endógena: a taxa de poupança passa a ser determinada através de um problema de otimização do consumidor. O usualmente denominado modelo de Ramsey-Cass-Koopmans (RCK) decorre desse trabalho. Este modelo de crescimento ótimo, com horizonte temporal infinito, tem como base a maximização da utilidade intertemporal, e foi o ponto de partida para os modelos de crescimento económico neoclássicos mais contemporâneos.

Neste trabalho é feita, primeiramente, uma análise, usando ferramentas matemáticas, nomeadamente cálculo em variações, das principais etapas do processo de otimização de um modelo de crescimento económico. Para fins de ilustração, aplica-se, posteriormente, o estudo ao modelo de crescimento RCK, em tempo contínuo.

Este modelo foi abordado do ponto de vista teórico, destacando os principais pressupostos, e resolvido de seguida. Outra componente explorada foi a sua implementação em MATLAB, considerado um *software* indicado pois possibilita, para além da resolução numérica do problema, uma fácil interpretação dos resultados, através de representações gráficas elucidativas.

Este é um tema bastante importante uma vez que, na maior parte dos modelos deste tipo, não é possível obter a solução analítica e, portanto, há a necessidade de desenvolver computacionalmente algoritmos que permitam obter soluções numéricas. Neste caso, porém, existe a vantagem de se conseguir calcular a solução analítica e, assim, pode-se comprovar a qualidade da aproximação das soluções numéricas.

A estrutura do trabalho é a seguinte.

Na secção dois, é feita a descrição de uma problema de otimização dinâmica e são focados os principais pontos da obtenção das condições de primeira ordem. Com o intuito de facilitar a compreensão, é realizada, ainda nesta secção, uma breve síntese das etapas de otimização descritas anteriormente.

Na secção três, é estudado um modelo de crescimento económico em particular, o modelo Ramsey-Cass-Koopmans (RCK). Explicitam-se, primeiramente, os seus pressupostos, e, em seguida, procede-se à sua resolução, aplicando o estudo feito na secção dois.

A simulação do modelo é realizada na secção quatro. Aqui, são tratados vários métodos numéricos para resolver o problema de valores fronteira, resultante do processo de otimização. A solução analítica do problema, calculada na secção anterior, é aqui indispensável pois, só assim, é possível comprovar a qualidade das soluções numéricas. Ainda nesta secção, é feita uma análise de sensibilidade à tolerância dos métodos, ou seja, as soluções numéricas são calculadas com diferentes valores de tolerância e, com a ajuda de gráficos, são comparados os resultados obtidos.

Na secção cinco, para além de sumariadas as principais conclusões, é focado o objetivo global do trabalho, destacando o contributo deste para a comunidade. São, ainda, expostas as dificuldades enfrentadas durante a execução da tese.

Finalmente a sexta, e última, secção, constitui um apêndice matemático do trabalho. Aqui encontram-se explicações mais detalhadas de resultados utilizados durante o trabalho.

## 2 Otimização de um modelo de crescimento econômico

Com o intuito de analisar um problema de otimização dinâmica, estudou-se cálculo em variações (Naidu, 2003) e, neste capítulo, foca-se os pontos essenciais para obter as condições de primeira ordem. (Ver apêndice A)

Assim, considera-se a funcional

$$J(x(t), u(t), t) = \int_{t_0}^{t_f} V(x(t), u(t), \dot{x}(t), \dot{u}(t), t) dt, \quad (2.1)$$

sendo  $x(t)$  a variável estado e  $u(t)$  a variável controle

sujeita à restrição

$$g(x(t), u(t), \dot{x}(t), \dot{u}(t)) = 0 \quad (2.2)$$

com os pontos fixos

$$\begin{aligned} x(t_0) &= x_0 & u(t_0) &= u_0 \\ x(t_f) &= x_f & u(t_f) &= u_f \end{aligned}$$

Nos problemas de otimização é usual considerar-se o Lagrangiano  $\mathcal{L}$ , associado ao problema.

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}(x(t), u(t), \dot{x}(t), \dot{u}(t), \lambda(t), t) = \\ &= V(x(t), u(t), \dot{x}(t), \dot{u}(t), t) + \lambda(t) * g(x(t), u(t), \dot{x}(t), \dot{u}(t)) \end{aligned} \quad (2.3)$$

onde  $\lambda$  é o multiplicador de Lagrange.

Após algum estudo mais técnico, nomeadamente recorrendo ao cálculo em variações, constante no Apêndice A, resultaram as seguintes equações:

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\mathcal{L}}{dx}\right)_* - \frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathcal{L}}{d\dot{x}}\right)_* &= 0 \\ \left(\frac{d\mathcal{L}}{du}\right)_* - \frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathcal{L}}{d\dot{u}}\right)_* &= 0 \\ \left(\frac{d\mathcal{L}}{d\lambda}\right)_* - \frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathcal{L}}{d\dot{\lambda}}\right)_* &= 0\end{aligned}$$

Estas equações são, geralmente, denominadas por equações de Euler-Lagrange, e representam as condições necessárias para encontrar os extremos da funcional (2.1) sujeita à restrição (2.2).

Em economia, é comum considerar-se o Hamiltoniano, calculado no ótimo, como

$$H^*(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t) = V(x^*(t), u^*(t), t) + \lambda^{*\prime}(t)f(x^*(t), u^*(t), t) \quad (2.4)$$

Então, comparando a função Hamiltoniano (2.4) com o Lagrangiano (2.3), resulta a relação:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^* &= \mathcal{L}^*(x^*(t), \dot{x}^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t) = \\ &= H^*(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t) - \lambda^{*\prime}(t)\dot{x}^*(t)\end{aligned}$$

Usando a relação anterior, as Equações de Euler-Lagrange (condições de ótimo) podem ser reescritas como

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u}\right)_* = 0 &\rightarrow \left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)_* = 0 \\ \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}\right)_* - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}}\right)_* = 0 &\rightarrow \left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)_* = -\dot{\lambda}^{*\prime}(t) \\ \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\lambda}\right)_* = 0 &\rightarrow \left(\frac{\partial H}{\partial\lambda}\right)_* = \dot{x}^*(t)\end{aligned}$$

## Síntese das etapas de otimização

Em vez de se desenvolver toda a derivação das condições de primeira ordem, através do cálculo em variações, em problemas de otimização dinâmica é equivalente usar o seguinte procedimento (Barro e Sala-i-Martin, 1999):

Fase 1: Construir o Hamiltoniano somando a função objetivo e o produto da restrição com o multiplicador de Lagrange.

$$H = V(x, u, t) + \lambda(t) * g(x, u, t)$$

Fase 2: Derivar o Hamiltoniano em ordem à variável controlo e igualar a zero.

$$\partial H / \partial u = \partial V / \partial u + \lambda * \partial g / \partial u = 0 \quad (2.5)$$

Fase 3: Derivar o Hamiltoniano em ordem à variável estado e igualar ao simétrico da derivada temporal do multiplicador de Lagrange.

$$\partial H / \partial x = \partial V / \partial x + \lambda * \partial g / \partial x = -\dot{\lambda} \quad (2.6)$$

Fase 4: Condição de transversalidade.

- Caso 1: Horizonte temporal finito. Definir o produto do multiplicador de Lagrange com o stock de capital, no término temporal ( $T$ ), igual a zero.

$$\lambda(T) * x(T) = 0 \quad (2.7)$$

- Caso 2: Horizonte temporal infinito com taxa de desconto. A condição de transversalidade é

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) * \lambda(t) = 0 \quad (2.8)$$

- Caso 3: Horizonte temporal infinito sem taxa de desconto. A condição de transversalidade é

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [H(t)] = 0 \quad (2.9)$$

Manipulando as equações (2.5) e (2.6) e a restrição  $g(x, u, t)$  pode-se chegar a um sistema dinâmico de Equações Diferenciais Ordinárias (ODE's), em  $\dot{u}$  e  $\dot{x}$ . Para que esse sistema seja bem definido, é necessário ter uma condição inicial para  $x$  e uma condição final, que é dada pela condição de transversalidade, equações (2.7), (2.8) ou (2.9), dependendo das características temporais do problema.

## 3 O modelo de Ramsey-Cass-Koopmans (RCK)

### 3.1 Pressupostos do modelo

Inicialmente, tomou-se como pressuposto, no modelo de Ramsey, que as famílias e as empresas são agentes separados que interagem no mercado (modelo descentralizado).

Assim, as famílias são proprietárias do fator trabalho e dos ativos financeiros, auferindo, por isso, salários e juros/dividendos. Conseqüentemente, decidem a parte desse rendimento que devem afetar ao consumo e à poupança. Relativamente às empresas, estas procuram trabalho a troco de um salário e capital a troco de juros/dividendos, para, assim, tomarem decisões de produção.

Famílias e empresas encontram-se no mercado e os preços do trabalho, do capital e do produto são tais que os três mercados estão em equilíbrio.

- Pressupostos básicos das empresas:
  - Número muito elevado de empresas competitivas idênticas, no sentido em que tomam todos os preços como dados (concorrência perfeita);
  - O progresso técnico ( $A$ ) é exógeno;
  - Função produção neoclássica (rendimentos constantes à escala, produtividade marginal dos *inputs* positiva, mas decrescente, condições de Inada são satisfeitas);
  - Especificação da função produção Cobb-Douglas:  $Y = AK^\alpha H^{1-\alpha}$  ( $y = Ak^\alpha$ , na forma intensiva), onde  $Y$  é o produto,  $K$  o capital,  $H$  o *stock* de capital humano (considerado igual à população)<sup>1</sup> e  $\alpha \in ]0, 1[$  é a elasticidade do capital físico do produto ( $\frac{\partial Y}{\partial K} / \frac{Y}{K}$ ).
  - O objetivo das empresas é maximizar o lucro:  
 $\max_{K,H} (\pi = Y - RK - wH)$ , onde  $R = r + \delta$  ( $r$ : taxa de juro e  $\delta$ : taxa de depreciação do capital) e  $w$  é o salário real.

Das condições de primeira ordem deste problema de maximização vem que o rendimento dos fatores iguala a sua produtividade marginal, isto é:

$$\begin{aligned}\frac{\partial Y}{\partial K} = R (= r + \delta) &\Leftrightarrow \alpha \frac{y}{k} = r + \delta \\ \frac{\partial Y}{\partial H} = w &\Leftrightarrow (1 - \alpha)y = w\end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Supõe-se pois que todos os elementos da família trabalham, pelo que a população corresponde à quantidade de trabalho. Ignora-se, assim, o desemprego, a acumulação de capital humano e a reforma.

- Pressupostos básicos das famílias:

- Número elevado de famílias homogêneas (*"Price-Takers"*);
- Horizonte temporal infinito, ou seja, cada família é vista como uma dinastia, que cresce à taxa  $n$ . Assim, a população no momento  $t$  é igual a  $H(t) = H(0)e^{nt}$  e, normalizando a população inicial  $H(0) = 1$ , vem  $H(t) = e^{nt}$ .
- Cada membro da família oferece (de forma inelástica) uma unidade de trabalho, o que implica que a oferta de trabalho cresce, exponencialmente, à taxa  $n$ ;
- O objetivo das famílias é maximizar a sua utilidade ao longo da vida. Considerando a função utilidade da forma:

$$U = \int_{t=0}^{t=\infty} v(k, c, t) dt = \int_{t=0}^{t=\infty} e^{-\rho t} u[c(t)] e^{nt} dt \quad , \quad \rho > 0$$

onde  $\rho$  designa o fator de desconto intertemporal, isto é, reflete a impaciência dos indivíduos, e  $u[c(t)]$  expressa a utilidade instantânea em função do consumo *per capita*.

- Neste trabalho, assumiu-se que  $u[c(t)] = \frac{c(t)^{1-\theta}-1}{1-\theta}$  ( $\theta > 0$ ), sendo  $\theta$  o coeficiente de aversão relativa ao risco. Este parâmetro, que mede o grau de concavidade de  $u[c(t)]$ , pode ser representado pela expressão  $\theta = -\frac{c(t)u''[c(t)]}{u'[c(t)]}$ , e influencia a vontade das famílias trocarem consumo entre períodos de tempo. Quanto maior o valor de  $\theta$ , mais lentamente diminui a utilidade marginal do consumo à medida que este aumenta, pelo que, o indivíduo tem mais desejo em alisar o consumo ao longo do tempo.

Relativamente à função utilidade instantânea, pode notar-se que, se  $\theta < 1$ ,  $c(t)^{1-\theta} - 1$  é crescente em  $c(t)$ , mas é decrescente se  $\theta > 1$ , pelo que, dividindo por  $1 - \theta$  garante-se que a utilidade marginal do consumo é positiva, qualquer que seja o valor de  $\theta$ .

- Restrição orçamental das famílias

As famílias são proprietárias do fator trabalho, obtendo, por isso, um salário  $w$ . Como  $H$  representa a quantidade de trabalho realizado por todos os membros das famílias, os rendimentos salariais totais são  $wH$ . As famílias possuem, também, ativos financeiros,  $B$ , que geram um rendimento representado por  $r$ : se  $B > 0$ , o produto  $Br$  representa parte do rendimento das famílias; se  $B < 0$ ,  $Br$  corresponde ao pagamento de dívida.

O rendimento total dos indivíduos é dividido entre o consumo e a poupança. Desta forma, a restrição orçamental dos indivíduos vem dada por

$$\dot{B} = rB + wH - C$$

Na forma intensiva pode ser escrita como

$$\dot{b} = (r - n)b + w - c, \text{ onde } b = \frac{B}{H} \text{ e } c = \frac{C}{H}$$

Assim, os indivíduos têm como objetivo

$$\max U \Rightarrow \max \int_{t=0}^{t=\infty} e^{-(\rho-n)t} \frac{c(t)^{1-\theta} - 1}{1-\theta} dt \quad (3.1)$$

sujeito às restrições

$$\begin{cases} \dot{b} = (r - n)b + w - c \\ b(0) = b_0 > 0 \end{cases}$$

Para que o integral (3.1) seja convergente, de modo a que o problema tenha significado económico, é necessário impor a restrição:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(\rho-n)t} \frac{c(t)^{1-\theta} - 1}{1-\theta} = 0 \Leftrightarrow \rho > n$$

- Modelo centralizado

Como foi já referido, os consumidores e as empresas interagem no mercado: os salários que os empresarios pagam são recebidos pelos trabalhadores, os juros que as empresas pagam são recebidos pelas famílias, e o preço que as empresas cobram pelo bem produzido é o mesmo que os consumidores pagam.

Deve existir, ainda, equilíbrio no mercado financeiro. Neste modelo, a economia é fechada e não existe governo. Estes dois pressupostos implicam que, no equilíbrio do mercado financeiro, o único ativo com oferta líquida não negativa seja o capital, isto é,  $b = k$ . Isto acontece pois, embora os indivíduos possam emprestar e pedir emprestado qualquer quantidade de ativos financeiros, a economia é fechada e sem governo, logo, o valor dos ativos emprestados, tem de igualar o valor dos ativos recebidos. Assim, a taxa de juro,  $r$ , deve ajustar-se de modo a que  $b = k$ , e todos os créditos são exatamente iguais a todos os

débitos, ou seja, a dívida agregada líquida é nula e o único ativo líquido é o capital físico.

O modelo em estudo, passa, então, de descentralizado a centralizado.

Desta forma, a condição de equilíbrio no mercado de ativos/capital, vem

$$r : b = k \quad (B = K)$$

Portanto, as condições no mercado de Bens e Serviços (B&S) são

$$\begin{cases} \dot{b} = \dot{k} \\ \dot{k} = (r - n)k + w - c \end{cases} \quad (3.2)$$

$$\text{Dados } \begin{cases} \frac{\partial \pi}{\partial K} = 0 \\ \frac{\partial \pi}{\partial H} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \frac{y}{k} = r + \delta \\ (1 - \alpha)y = w \end{cases}$$

e substituindo em (3.2) obtem-se a restrição orçamental agregada

$$\dot{k} = y - (\delta + n)k - c$$

### 3.2 Resolução do modelo

Com vista a resolver o modelo descrito anteriormente, aplicou-se o estudo do capítulo 2 ao mesmo modelo. Assim, tem-se a seguinte formalização

$$\max U \Rightarrow \max \int_{t=0}^{t=\infty} e^{-(\rho-n)t} \frac{c(t)^{1-\theta} - 1}{1-\theta} dt$$

sujeito às restrições

$$\begin{cases} \dot{k} = g(k, c, t) \\ k(0) = k_0 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{k} = y - c - (\delta + n)k \\ k(0) = k_0 > 0 \end{cases}$$

Como se verificou do estudo,  $\mathcal{L}^* = H^*(k^*(t), c^*(t), \lambda^*(t), t) - \lambda^{*'}(t)\dot{k}^*(t)$ , onde  $\mathcal{L}^* = \mathcal{L}^*(k^*(t), \dot{k}^*(t), c^*(t), \lambda^*(t), t)$  representa o Lagrangiano e  $H$  o Hamiltoniano do modelo. Ou seja, no RCK,

$$\mathcal{L} = \underbrace{e^{-(\rho-n)t} \frac{c(t)^{1-\theta} - 1}{1-\theta} + \lambda(Ak^\alpha - c - (\delta + n)k)}_H - \lambda \dot{k}.$$

Assim, pode-se concluir que as condições de primeira ordem (CPO), em termos do Hamiltoniano, ficam como as que se reconhecem da literatura (Naidu, 2003).

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c}\right)_* = 0 \rightarrow \left(\frac{\partial H}{\partial c}\right)_* = 0 \quad (3.3)$$

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k}\right)_* - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{k}}\right)_* = 0 \rightarrow \left(\frac{\partial H}{\partial k}\right)_* = -\dot{\lambda}^*(t) \quad (3.4)$$

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}\right)_* = 0 \rightarrow \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right)_* = \dot{k}^*(t) \quad (3.5)$$

Desenvolvendo estas condições e fazendo algumas manipulações algébricas (ver apêndice B), obtém-se uma expressão com grande significado económico e sobre a qual recairá, de seguida, o estudo. Essa expressão é habitualmente denominada equação de Euler e reflete a trajetória ótima do consumo, no tempo:

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \frac{1}{\theta} (r - \rho) \quad (3.6)$$

Analisando (3.6), conclui-se que a evolução do consumo depende da taxa de juro real,  $r$ , da medida de aversão ao risco,  $\theta$  e da taxa de desconto,  $\rho$ . Caso  $r$  exceda  $\rho$ , então  $\dot{c} > 0$ , pelo que os indivíduos estarão dispostos a adiar o consumo, pelo contrário, se  $r < \rho$ ,  $\dot{c} < 0$ , o que indica que os indivíduos anteciparão o consumo. Por outro lado, quanto menor  $\theta$ , maior será  $\frac{\dot{c}}{c}$ , ou seja, as alterações da utilidade marginal face a mudanças no consumo serão menores e, portanto, maiores serão as variações de consumo em resposta a diferenças entre  $r$  e  $\rho$ .

A equação de Euler tem como finalidade descrever a trajetória do consumo, por unidade de trabalho efectivo, dado um valor inicial de consumo. A restrição orçamental definirá o valor de  $c(0)$  e haverá apenas um que satisfaz (3.6). Isto acontece porque as famílias podem sempre rearranjar o seu consumo de forma a aumentar a utilidade, sem alterar o valor presente do seu gasto ao longo da vida, e assim, fazer com que o consumo evolua de acordo com a equação de Euler. Se não vejamos, caso  $c(0)$  seja muito baixo, o consumo ao longo da trajetória que satisfaz (3.6) não esgota a riqueza adquirida ao longo da vida, logo será possível uma trajetória mais elevada; caso  $c(0)$  seja muito elevado, o consumo excede a riqueza ao longo da vida, logo essa trajetória não será possível.

Para perceber com mais clareza a equação de Euler deve escrever-se (3.6) na forma:

$$\rho + \theta \frac{\dot{c}}{c} = r \quad (3.7)$$

O membro da esquerda expressa o benefício (ou rendimento) que advém do consumo; a taxa de desconto,  $\rho$ , indica o aumento da utilidade obtida por consumir mais no presente e menos no futuro, pois, para o indivíduo, é mais útil consumir no presente do que deixar para os seus descendentes. O termo  $\theta \frac{\dot{c}}{c}$  pode ser interpretado da seguinte forma: se o indivíduo pretender alisar o consumo ao longo do tempo (ou seja, se  $\theta$  é elevado), sempre que preveja que o consumo vá ser maior no futuro (ou seja, se  $\frac{\dot{c}}{c} > 0$ ), desejará aumentar o seu consumo no presente. Por outras palavras, o indivíduo deseja, também deste ponto de vista, substituir parte do seu consumo futuro por consumo presente.

O termo da direita corresponde à taxa de juro dos ativos financeiros, ou seja, expressa o benefício (ou rendimento líquido) obtido através da poupança.

Assim, a expressão (3.7) reflete que, na margem, os indivíduos otimizadores terão uma atitude de indiferença entre consumir ou poupar.

A condição de transversalidade neste modelo (horizonte temporal infinito com taxa de desconto intertemporal) é da forma  $\lim_{t \rightarrow \infty} k(t) * \lambda(t) = 0$ . O multiplicador de Lagrange,  $\lambda(t)$ , reflete o "preço sombra", ou seja, a variação de utilidade resultante de uma alteração infinitesimal do capital.

A interpretação económica desta condição passa por considerar que os indivíduos otimizadores não pretendem deixar nada que possua valor para depois da sua morte. Este pressuposto faz sentido pois, só assim, os indivíduos estão a otimizar a sua utilidade. Desta forma, se o *stock* capital fosse nulo e  $\lambda(t) > 0$ , então, como o capital teria valor em termos de utilidade, as famílias consumiriam tudo antes do término. Por outro lado, se  $k(t) > 0$  e  $\lambda(t) = 0$  então as famílias terminariam com capital mas este não teria qualquer valor. O caso menos interessante acontece quando ambas as componentes da restrição são nulas, ou seja, as famílias não têm capital, mas este também não tem valor para elas.

Manipulando as CPO, referidas anteriormente, tem-se  $\lambda(t) = e^{-(\rho-n)t} * c(t)^{-\theta}$ . Assim, nos casos em que  $\lambda(t) = 0$ , também se pode afirmar que o valor do consumo futuro, atualizado para o presente, é nulo.

Usando as equações (3.3),(3.4) e (3.5), obtem-se o seguinte sistema dinâmico.

$$\begin{cases} \dot{c}(t) = \frac{c(t)}{\theta} [A\alpha k(t)^{\alpha-1} - \rho - \delta] \\ \dot{k}(t) = Ak(t)^\alpha - c(t) - (\delta + n)k \end{cases} \quad (3.8)$$

dados

$$k(0) = k_0 > 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} k(t) * e^{-(\rho-n)t} * c(t)^{-\theta} = 0 \quad (3.9)$$

O sistema dinâmico (3.8), juntamente com a condição inicial e a de transversalidade (3.9), definem um problema de valores fronteira. Nas simulações que serão realizadas, usar-se-á para condição final, o consumo num determinado estado estacionário, e para condição inicial, um capital diferente do de estado estacionário.

Com vários objetivos, entre eles o cálculo da solução analítica e a implementação computacional, determinou-se os pontos de equilíbrio do sistema, embora só um deles tenha interesse para o presente estudo, uma vez que é o único *steady-state* interior. Esse ponto,

$\left( k^* = \left( \frac{A}{\rho+\delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, c^* = A \left( \frac{A\alpha}{\rho+\delta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - (\delta+n) \left( \frac{A\alpha}{\rho+\delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \right)$ , é um ponto de sela (ver Apêndice B).

A solução analítica para este sistema é da forma

$$\phi(t) = k_1 e^{\lambda_a t} v_a + k_2 e^{\lambda_b t} v_b, \quad k_i \in \mathbb{R} \quad (3.10)$$

Para chegar a esta forma foi necessário linearizar o sistema, calculando os valores próprios ( $\lambda_a$  e  $\lambda_b$ ), os vetores próprios ( $v_a$  e  $v_b$ ) e as constantes,  $k_1$  e  $k_2$ , provenientes da aplicação das condições fronteira  $k(0) = \frac{k_{ss}}{10}$  e  $c(t_f) = c_{ss}$ . Todo esse estudo pode ser consultado no Apêndice B.

## 4 Simulação do modelo usando métodos numéricos

Grande parte dos modelos de crescimento económico apresentam um grau de complexidade elevado, o que torna difícil a determinação da solução analítica. Por essa razão, é necessário recorrer a métodos numéricos que permitem obter uma solução aproximada.

O MATLAB (MATrix LABoratory) foi o *software* eleito para simular o modelo RCK, uma vez que dispõe de um vasto leque de funções que auxiliam na implementação e simulação do modelo. São exemplo as funções "BVP", que resolvem problemas de valores fronteira para sistemas de equações diferenciais ordinárias (ODE's). Estas, permitem obter uma solução numérica a partir do sistema dinâmico e das condições fronteira.

Elegeram-se os valores dos parâmetros  $\theta$ ,  $\alpha$ ,  $A$ ,  $\delta$ ,  $\rho$  e  $n$ , através de pesquisa bibliográfica (Barro e Sala-i-Martin, 1999). Estas constantes foram definidas a partir de testes de calibragem e têm como objectivo refletir fielmente a realidade. Assim, os parâmetros têm os valores  $\theta = 0.95$ ,  $\alpha = 1/3$ ,  $A = 1$ ,  $\delta = 0.05$ ,  $\rho = 0.02$ ,  $n = 0.01$ .

Neste modelo, ao contrário do que acontece na maioria dos casos, é relativamente simples a obtenção da solução analítica. Procedeu-se, no Apêndice B, a esse cálculo, do qual resultaram as seguintes expressões:

```
%Codigo1
%solucoes
k=@(t)2*k1*exp(lambda1*t)+2*k2*exp(lambda2*t)+kss;
c=@(t)(b-d)*k1*exp(lambda1*t)+(b+d)*k2*exp(lambda2*t)+css;

%onde:
a=(1/theta)*(alpha-1)*(rho+delta)*((rho+delta)/alpha-(delta+n));
b=rho+n;
d=sqrt(b^2-4*a);
k1 e k2 representam duas constantes resultates da aplicacao das
condicoes fronteira, e lambda1 e lambda2 sao os valores propios
do problema.
```

Fazendo a representação gráfica do código anterior, resulta a Figura 1.

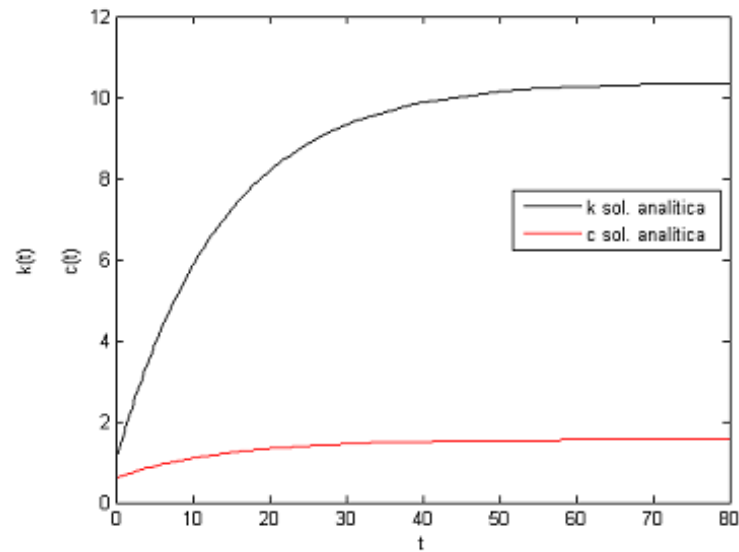


Figura 1: Solução analítica.

Não é demais lembrar que esta é uma vantagem relativamente à maioria dos modelos, pois, só assim, é possível avaliar a precisão dos métodos numéricos.

O "bvp4c" é um processo de diferenças finitas que implementa a fórmula de Lobatto IIIA. Este *solver* é de quarta ordem uma vez que usa um polinómio dessa ordem para fornecer uma solução  $C^1$ -contínua.

De seguida são apresentadas as funções, em MATLAB, necessárias à implementação deste método.

```
%Codigo2
function dy = twoode(t,y)
%funcao que representa o sistema de equacoes diferenciais dado.

%t: vector dos tempos
%y(1)=k
%y(2)=c
%steady state:
global theta alpha A delta rho n
kss=((alpha*A)/(delta+rho))^(1/(1-alpha));
css=A*kss^alpha-(delta+n)*kss;

dy = zeros(2,1);
```

```

dy(1) = A*y(1)^alpha-y(2)-(delta+n)*y(1);
dy(2) = (1/theta)*(alpha*A*y(1)^(alpha-1)-delta-rho)*y(2);
end

```

```

function res = twobc(ya,yb)
%funcao que representa as condicoes fronteira do problema.

```

```

global theta alpha A delta rho n j

```

```

%steady state:
kss=((alpha*A)/(delta+rho))^(1/(1-alpha));
css=A*kss^alpha-(delta+n)*kss;

```

```

%condicoes fronteira: k(0)=kss/j e c(100)=css.

```

```

res = [ ya(1)-(kss/j)
yb(2)-css];
end

```

A primeira, descreve o sistema de EDO que representa o problema de valores fronteira, e a segunda explicita as condições fronteira do referido problema.

Como as soluções do modelo são já bem conhecidas, é possível incorporar essa informação nos *input's* do procedimento. Isso é feito através da escolha de funções que tenham um comportamento análogo ao das referidas soluções. A função "finit" traduz essa informação:

```

%Codigo3
function yinit=finit(t)
%procedimento que representa funcoes com comportamento semelhante
ao das solucoes.

yinit=[log(exp(10.3913/10)+t)
-exp(-t)+exp(-80)+1.5587];
end

```

Com estas funções, é, então, possível usar o solver "bvp4c", assim, calcular a solução.

```

%solucao numerica, calculada usando o bvp4c.
>> options = bvpset('RelTol',1e-3,'AbsTol',1e-6,'stats','on');
>> solinit1=bvpinit(linspace(0,80,100),@finit);
>> sol1=bvp4c(@twoode,@twobc,solinit1,options);
The solution was obtained on a mesh of 206 points.
The maximum residual is 1.384e-004.
There were 3849 calls to the ODE function.
There were 37 calls to the BC function.

```

Após a execução deste método, simultaneamente com a solução exata, obteve-se a Figura 2.

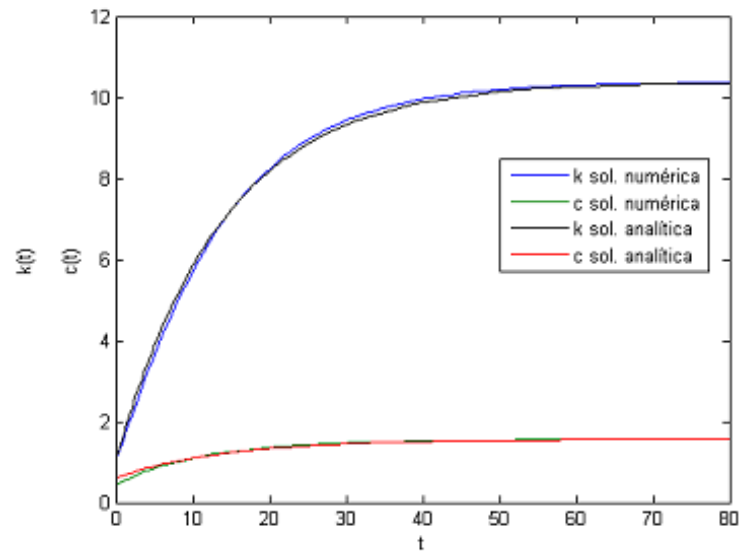


Figura 2: Solução analítica com a numérica, usando "bvp4c".

Para usar o "bvp4c" foi necessário reduzir o modelo a um problema de horizonte temporal finito. O "bvpextend" permite estender a solução a partir do tempo finito definido anteriormente (80) até ao definido posteriormente (150), através da previsão do comportamento da solução (Código 4).

Como sugere o código seguinte, esta função, usa uma solução calculada anteriormente (neste caso usando o "bvp4c") e estende-a até ao valor temporal desejado. Ver Figura 3.

```

%Codigo4
%extensao da solucao numerica, calculada usando o bvp4c, atraves do
bvpxtend
>> solx=bvpxtend(sol1,150)

```

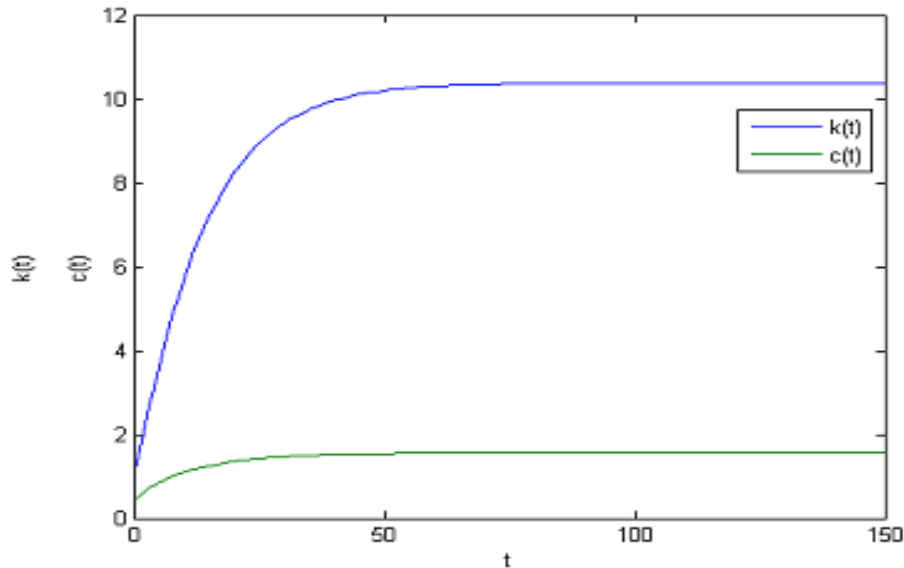


Figura 3: Solução numérica usando o "bvp4c", estendida através do "bvpxtend".

Como seria de esperar, a Figura 3 ilustra que, a partir de um certo  $t$ , as soluções se mantêm estáveis e, por isso, não haverá necessidade de usar o "bvpxtend" futuramente. Contudo, em problemas cujas soluções apresentem outro tipo de características, esta ferramenta poderia tornar-se bastante útil.

Existe outro *solver*, de ordem superior, denominado "bvp5c", bastante semelhante ao anterior, já que também utiliza o método de diferenças finitas e implementa a fórmula de Lobatto IIIA a quatro estágios. O "bvp5c" é considerado um método de colocação, sendo o polinómio associado de quinta ordem, que fornece uma solução  $C^1$ -contínua. Pode-se afirmar que este processo implementa, implicitamente, a fórmula de Runge-Kutta. Para além disso, é muito parecido com o anterior, também, no que diz respeito aos resultados, contudo mais eficiente para as tolerâncias dos pequenos erros.

A aplicação deste *solver* é, em tudo, semelhante à do anterior, como se pode verificar no código seguinte.

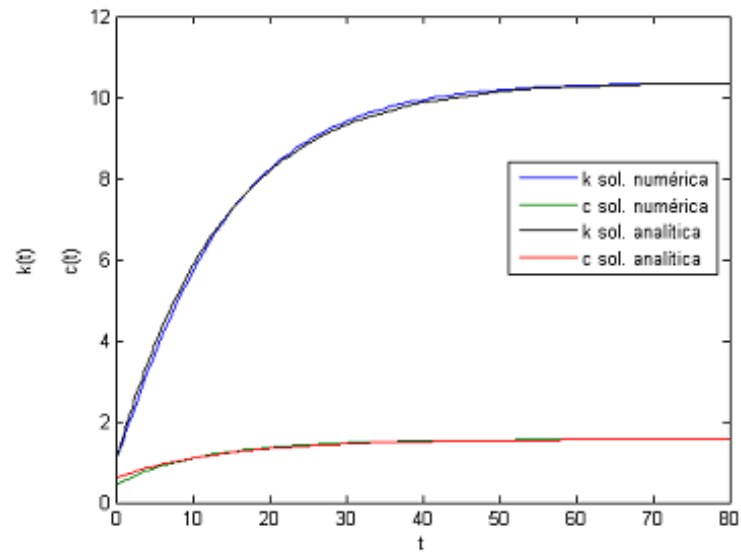


Figura 4: Solução analítica com a numérica, usando "bvp5c".

```
%Codigo5
%solucao numerica, calculada usando o bvp5c.
>> sol2=bvp5c(@twoode,@twobc,solinit1,options);
The solution was obtained on a mesh of 100 points.
The maximum error is 1.663e-004.
There were 3282 calls to the ODE function.
There were 25 calls to the BC function.
```

Representando graficamente a solução numérica obtida, simultaneamente, com a solução analítica, tem-se a Figura 4.

O método numérico mais recente em MATLAB, para a resolução de ODE's, foi desenvolvido por N.P.Hale (Hale,2006) e intitula-se "bvp6c". Esta função, mais complexa, usa o método Cash-Singhal, com precisão de sexta ordem e foi desenvolvida a partir do "bvp4c", com o intuito de melhorar a sua precisão. Assim, evidentemente que requer o aumento dos pontos avaliados no intervalo, ou seja, que estes sejam menos espaçados na malha. Contrariamente aos métodos anteriores, este não consta na versão *standard* do MATLAB e, por isso, foi retirado do trabalho referido anteriormente. A implementação desta rotina é idêntica à dos anteriores (Código 6) e resultou na Figura 5.

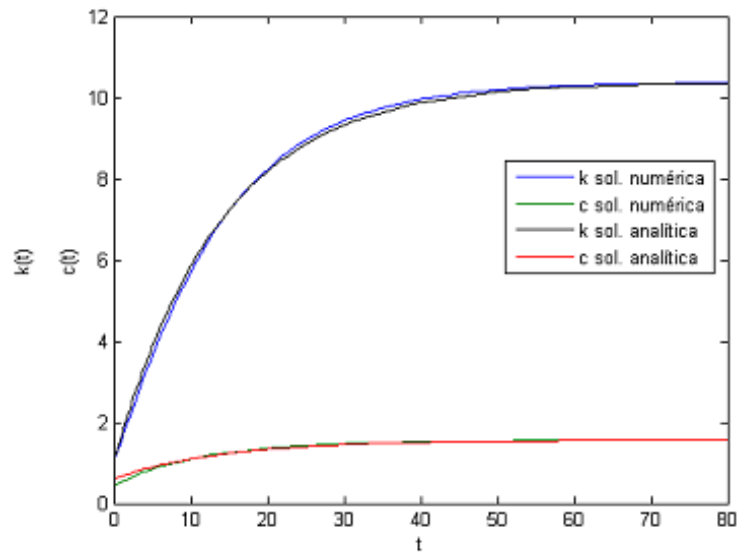


Figura 5: Solução analítica com a numérica, usando "bvp6c".

```
%Codigo6
%solucao numerica, calculada usando o bvp6c.
>> sol3=bvp6c(@twoode,@twobc,solinit1,options);
The solution was obtained on a mesh of 210 points.
The maximum residual is 1.396e-006.
There were 7057 calls to the ODE function.
There were 37 calls to the BC function.
```

Pode-se analisar o problema na perspectiva de horizonte temporal infinito. Para isso, existe *online* (Ausinger et al., 2010) uma *toolbox* denominada "bvpsuite", que transforma automaticamente o intervalo semi-infinito  $[0, \infty[$  no intervalo  $[0, 1]$ . No final, o código aproxima a solução no intervalo arbitrário  $[0, b]$ ,  $b < \infty$ . Esta ferramenta possibilita a escolha do método de resolução do problema, tendo-se optado pelo método de Gauss. A transformação referida acima poderia, também, ter sido feita nos outros *solvers* analisados. Contudo, pelo facto da escolha da função que transforma o intervalo infinito num finito ser bastante complexa (ao contrário do que acontece no "bvpsuite", onde esse processo é automático) optou-se por não explorar essa matéria.

A solução numérica que o "bvpsuite" produz é determinada usando o sistema de ODE's e as condições fronteira. Apesar destes requisitos serem os mesmos que os das outras ferramentas ("bvp4c", "bvp5c" e "bvp6c"), este tem a vantagem de apresentar um *interface* de fácil compreensão, como ilustra a Figura 6.

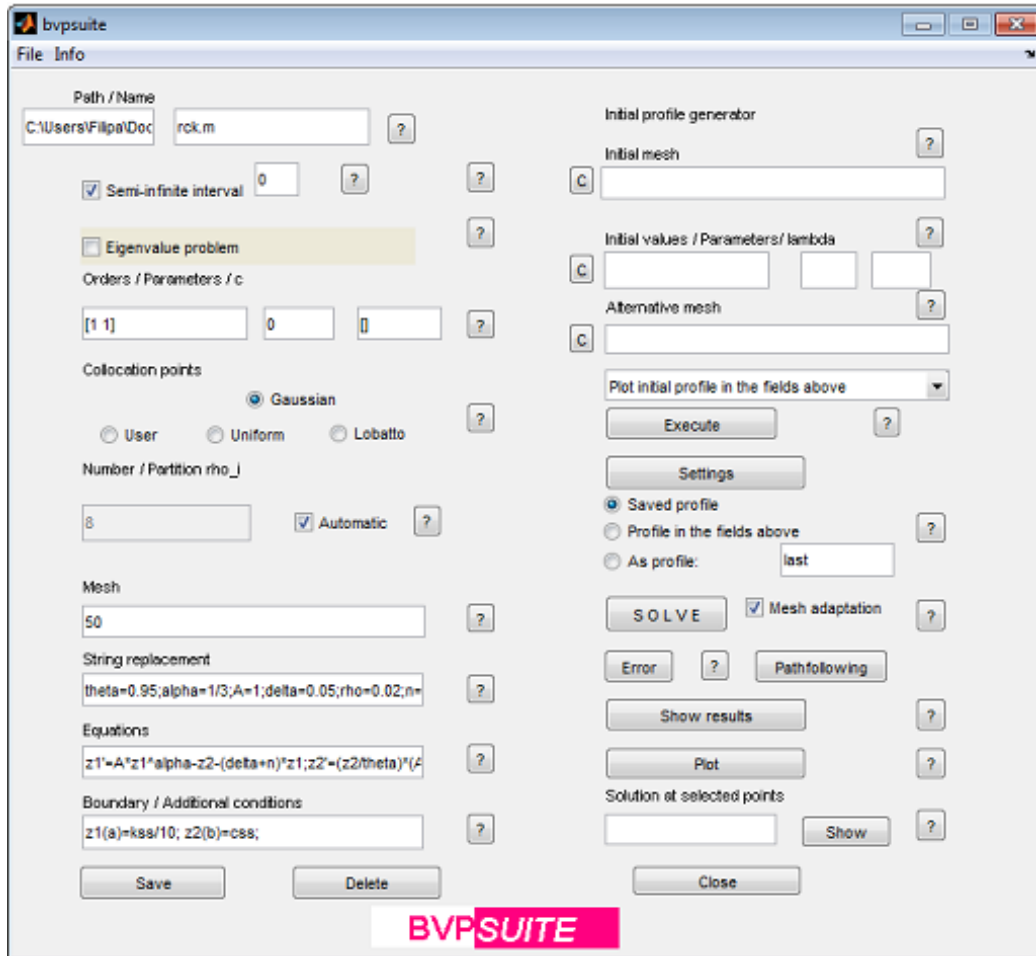


Figura 6: Interface do "bvpsuite".

Com o intuito de analisar os resultados, representaram-se graficamente as soluções numéricas com as analíticas (ver Figura 7).

Face ao observado anteriormente, poder-se-ia pensar que, escolhendo um horizonte temporal grande, o "bvpextend" se equivaleria ao método anterior, no entanto, tal não acontece pois o primeiro nunca tratará o modelo como um problema de horizonte temporal infinito.

#### 4.1 Análise de sensibilidade à tolerância dos métodos

O objetivo seguinte prende-se com a avaliação do impacto da diminuição das tolerâncias relativa e absoluta. Assim, para além da utilização das tolerâncias *default* (tolerância relativa=1e-3 e tolerância absoluta=1e-6) procedeu-se, também, à

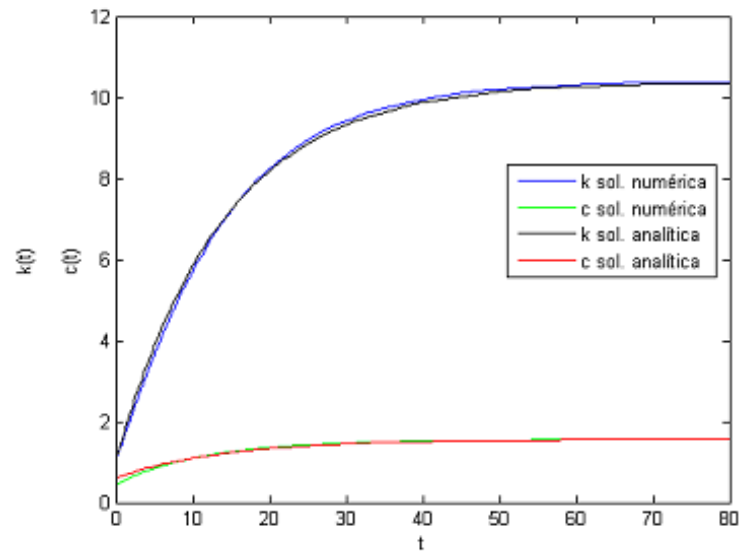


Figura 7: Solução analítica com a numérica, usando "bvpsuite".

aplicação dos vários métodos com as tolerâncias relativa  $1e-6$  e absoluta  $1e-12$ . Para quantificar essa análise, calcularam-se os erros relativos à solução exata, para as duas tolerâncias em nove pontos, três iniciais, três intermédios e três no final do intervalo temporal. Representaram-se, graficamente, esses resultados na Figura 8.

É de notar que o erro relativo do consumo no tempo inicial é significativo, uma vez que não se dispõe de uma condição inicial para esta variável. Contrariamente para o capital, esse erro é nulo pois tem-se o valor inicial de  $k$ .

Como se pode verificar, pela Figura 8, não é perceptível, nem clara, a diferença entre os vários métodos. Desta forma, decidiu-se representar separadamente as três fases. No entanto, como na primeira os erros relativos são praticamente coincidentes, optou-se por não a apresentar. Ver Figuras 9 e 10.

O que realça da primeira imagem é o facto do erro relativo do capital, associado ao "bvp5c", ser bastante inferior ao dos outros métodos. Outro aspeto que se pode salientar é o facto de os erros não estarem, necessariamente, calculados nos mesmos pontos, no entanto, encontram-se numa pequena vizinhança. Isto acontece pois os métodos otimizam o passo em que calculam a solução numérica. Poder-se-ia ter optado por avaliar as soluções numéricas nos mesmos pontos, mas assim cometer-se-iam erros mais grosseiros.

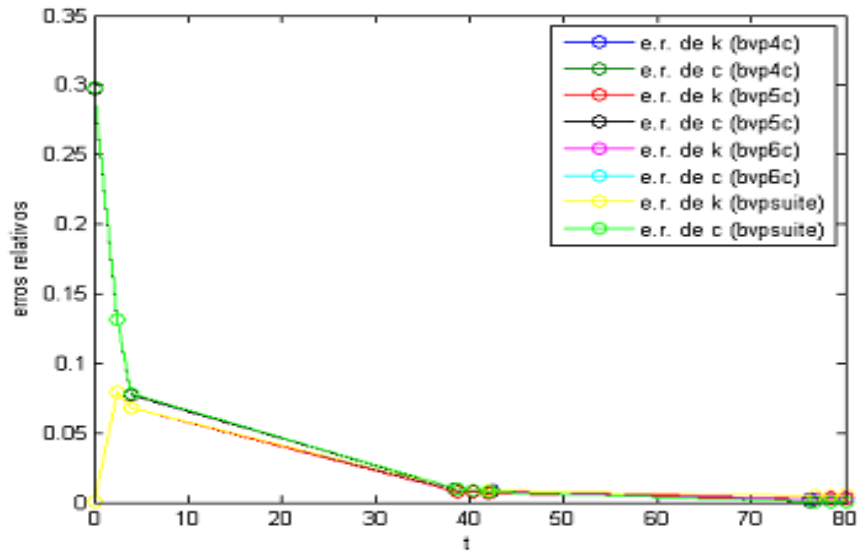


Figura 8: Erros relativos usando as tolerâncias por defeito, nos vários métodos.

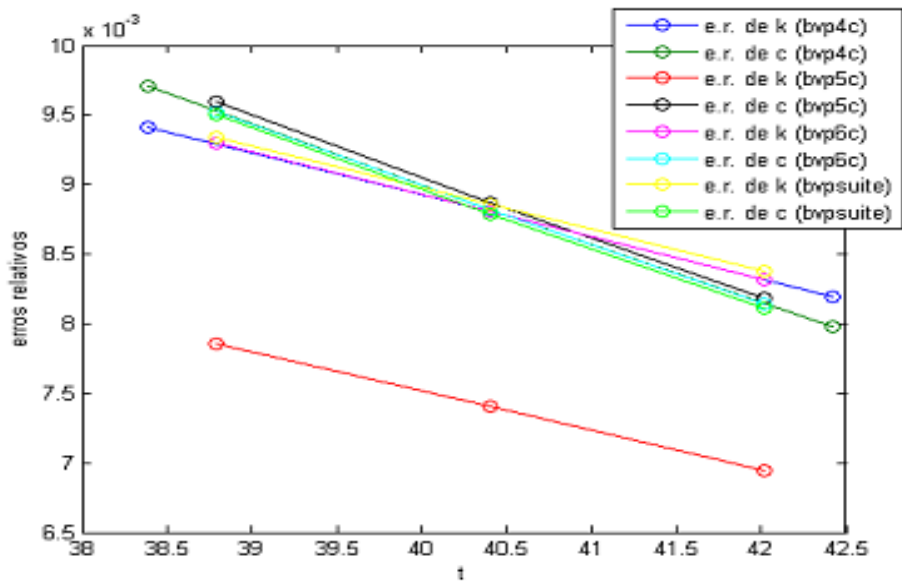


Figura 9: Erros relativos usando as tolerâncias por defeito (tempos intermédios).

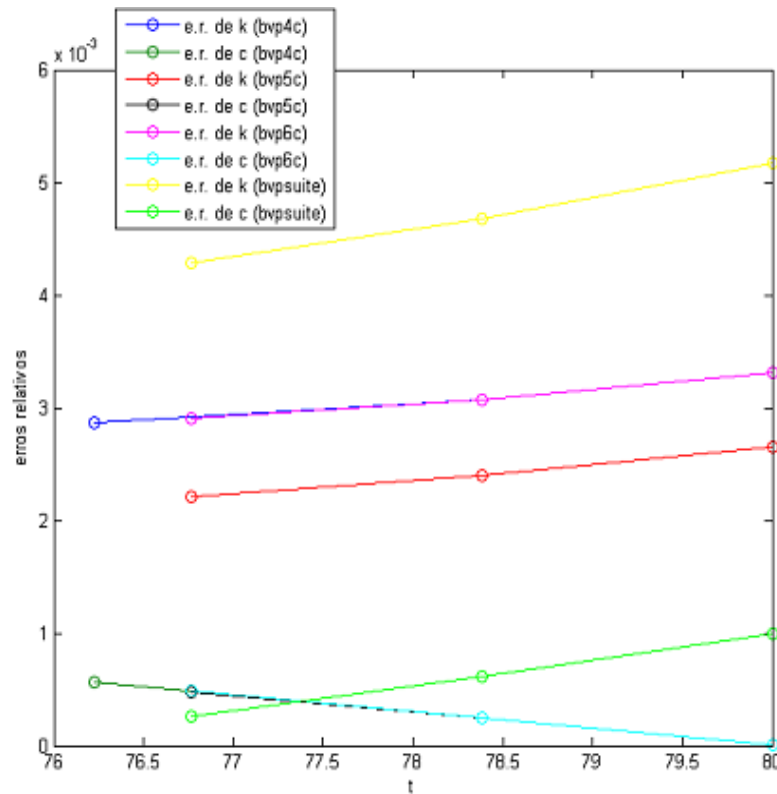


Figura 10: Erros relativos usando as tolerâncias por defeito (tempos finais).

Observa-se também, na figura, que os erros relativos nos diferentes métodos são não coincidentes mas próximos.

É de destacar que, na Figura 9, os erros relativos do capital associados ao "bvp5c" são inferiores aos dos outros métodos, como acontece na imagem anterior. Por outro lado, estes erros são os mais elevados se utilizarmos o "bvpsuite".

Relativamente ao consumo, pode-se afirmar que, à exceção do "bvpsuite", os erros relativos decorrentes do uso dos outros métodos são muito próximos, se não se tiver em conta o facto dos pontos estarem avaliados numa vizinhança. Distingue-se ainda que os erros resultantes do "bvpsuite" aumentam no intervalo representado graficamente (Figura 9). Isto provavelmente acontece devido ao facto deste *solver* tratar o problema como tendo um horizonte temporal infinito. Por esta razão, o erro relativo do consumo, em  $t=80$ , proveniente do uso do "bvpsuite" não é inferior a  $10e-3$ , contrariamente ao que acontece com todos os outros métodos. Portanto, não é possível eleger um método que tenha menor erro relativo, pois nenhum deles tem erros menores que os outros, em todos os pontos.

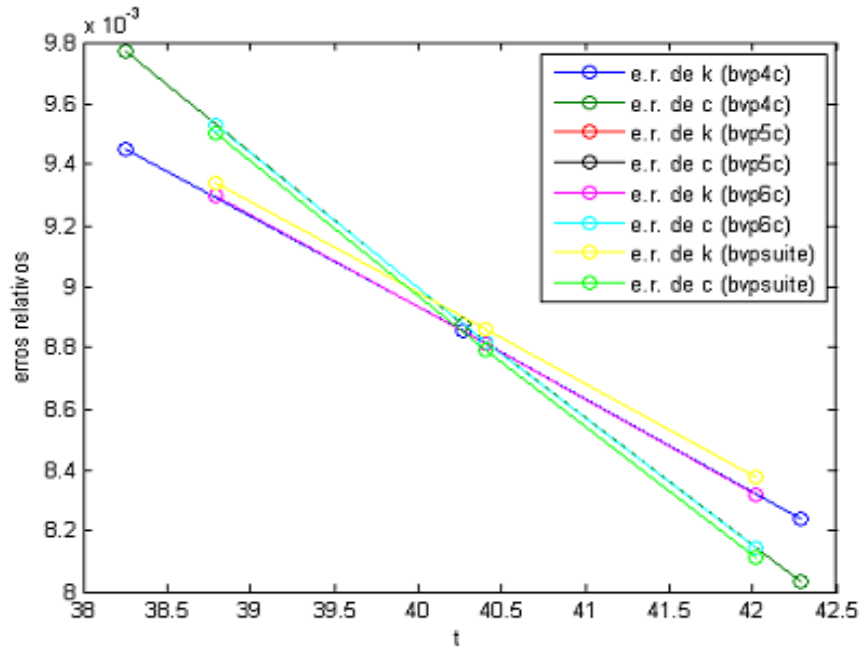


Figura 11: Erros relativos usando as tolerâncias opcionais (tempos intermédios).

Tal como anteriormente, também com as tolerâncias menores (tolerância relativa=  $1e-6$  e tolerância absoluta=  $1e-12$ ) é difícil analisar os erros relativos para os diferentes métodos quando estão representados, simultaneamente, as três fases temporais. Assim, adotou-se a mesma prática que nas tolerâncias *default*. Ver Figuras 11 e 12.

Pelos gráficos anteriores percebe-se que nenhum dos métodos se evidenciou, contrariamente ao que ocorreu com as tolerâncias por defeito.

Com o intuito de avaliar, com mais clareza, o impacto da alteração das tolerâncias, em cada método, representou-se individualmente os respetivos erros relativos. Apresentaram-se, apenas, os gráficos referentes ao "bvp5c" (fase intermédia e final) uma vez que, nos outros a alteração das tolerâncias não provoca qualquer modificação significativa nas soluções. Ver Figuras 13 e 14.

É de realçar, pelas imagens anteriores, que a este método estão associados maiores erros quando se define menor tolerância. Isto, provavelmente, ocorre devido ao facto dos algoritmos de integração numérica terem associados dois tipos

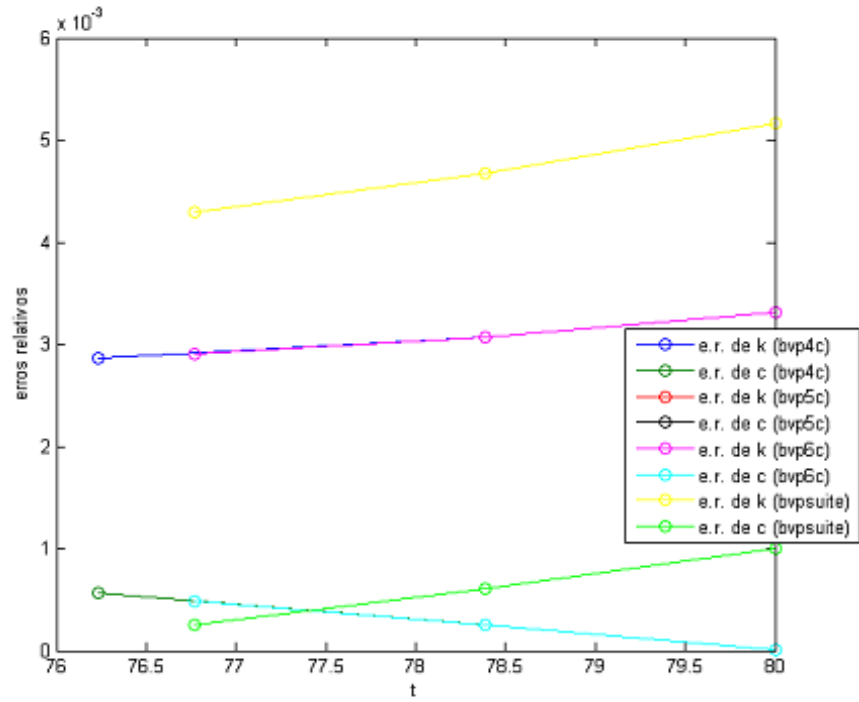


Figura 12: Erros relativos usando as tolerâncias opcionais (tempos finais).

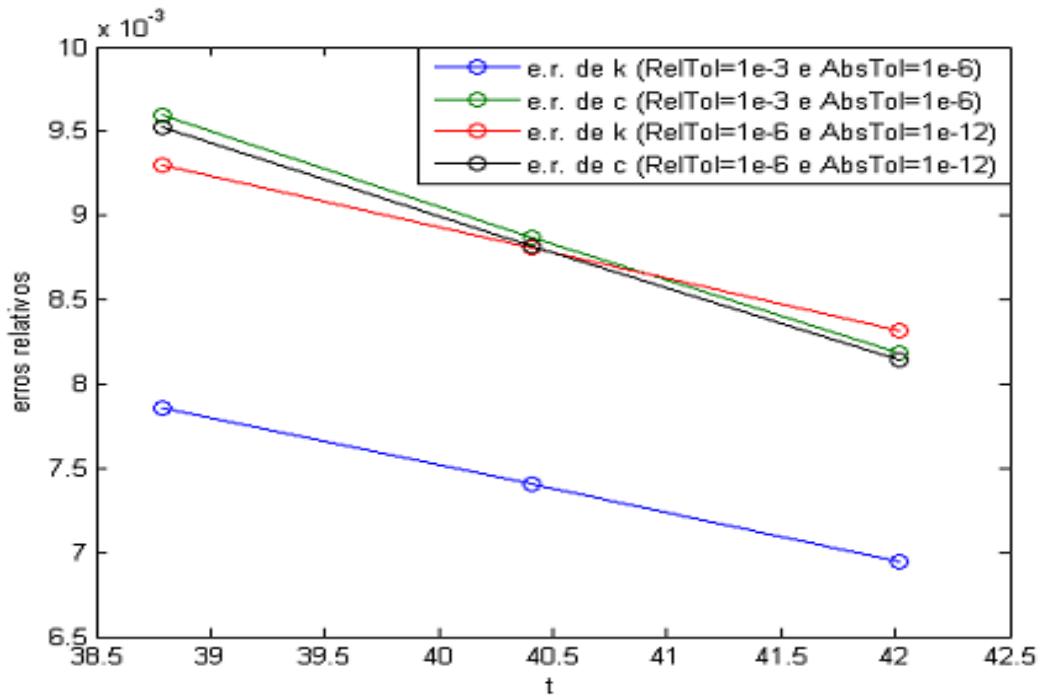


Figura 13: Erros relativos usando "bvp5c", para as diferentes tolerâncias (tempos intermédios).

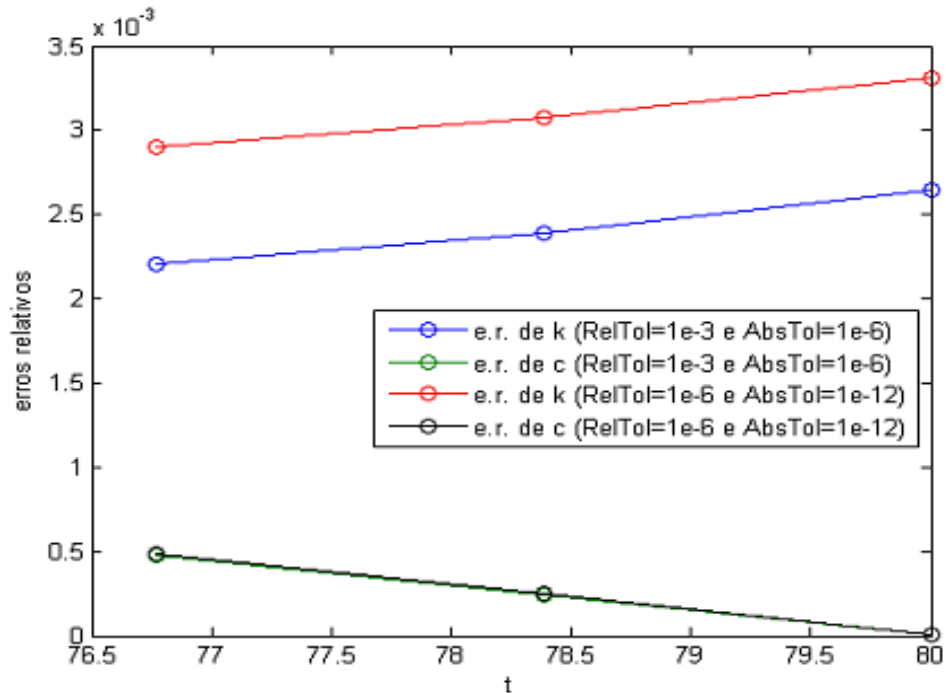


Figura 14: Erros relativos usando "bvp5c", para as diferentes tolerâncias (tempos finais).

de erros, que se propagam entre iterados: os erros de truncatura e os erros de arredondamento. Quando a tolerância é menor, o passo de integração é mais curto, pelo que estes erros têm maior significância. Este efeito acumulativo dos erros tem mais impacto neste método talvez porque o algoritmo de integração a ele associado seja mais propício a que ocorra este fenómeno. Assim, torna-se evidente que não é necessário exigir mais precisão computacional.

Portanto, no modelo em estudo e tendo em conta o critério de avaliação usado anteriormente, nenhum método garante melhores resultados, quando se impõe mais rigor às soluções.

O "bvp6c", apesar de ser um método de ordem superior, não se destaca dos restantes, contrariamente ao que seria de esperar. Este resultado pode dever-se ao facto do *solver* anterior ter sido desenvolvido a nível académico, sem testes muito exaustivos, e o uso de derivadas de sexta ordem pode não ser relevante para o modelo em estudo.

Note-se que a metodologia de avaliação (escolha dos nove pontos) pode não refletir o panorama geral do problema.

Com vista a complementar a análise, decidiu-se calcular uma medida mais global que permitisse comparar facilmente os métodos. Assim, optou-se por determinar a

norma euclidiana do vetor que contém os erros relativos, associados aos nove pontos. Escolheu-se esta medida de desempenho com o objetivo de avaliar a grandeza desse vetor. Sumariou-se os resultados anteriores nas tabelas 1 e 2.

	"bvp4c"	"bvp5c"	"bvp6c"	"bvpsuite"
Tolerâncias A	0.105329869	0.105653997	0.105326761	0.105527124
Tolerâncias B	0.105336479	0.105326732	0.105326732	0.105527159

Tabela 1. Norma Euclidiana dos erros relativos do capital.

Sendo, Tolerâncias A: RelTol=1e-3, AbsTol=1e-6 e Tolerâncias B:RelTol=1e-6, AbsTol=1e-12.

	"bvp4c"	"bvp5c"	"bvp6c"	"bvpsuite"
Tolerâncias A	0.335424932	0.334609426	0.335416791	0.335420333
Tolerâncias B	0.335422802	0.335416756	0.335416756	0.335420334

Tabela 2. Norma Euclidiana dos erros relativos do consumo.

Sendo, Tolerâncias A: RelTol=1e-3, AbsTol=1e-6 e Tolerâncias B:RelTol=1e-6, AbsTol=1e-12.

Numa análise global facilmente se conclui que os quatro métodos apresentam erros semelhantes. Esta constatação é importante, pois permite perspetivar o uso indiscriminado de qualquer um destes métodos, na resolução de problemas de crescimento com fundamentação baseada no modelo RCK.

Através da observação da Tabela 1, pode-se afirmar que o "bvp6c" nunca é pior que os outros métodos, tendo em conta a norma euclidiana. Também para este indicador, verifica-se que apenas os *solvers* "bvp5c" e "bvp6c" melhoram com a diminuição das tolerâncias.

No que diz respeito à tabela 2, constata-se que o "bvp5c", para as tolerâncias *default*, é o que apresenta melhores resultados. Para as outras tolerâncias, os métodos de quinta e sexta ordem são os que se destacam.

Pode-se, ainda, salientar que, para esta medida de desempenho, o "bvp6c" fornece melhores resultados que o "bvp4c", algo que não é contraintuitivo, uma vez que o primeiro foi desenvolvido numa tentativa de melhorar a precisão do segundo.

Do estudo feito anteriormente verifica-se que, à exceção dos três primeiros pontos avaliados, os erros relativos são da ordem de 1e-3, o que leva a afirmar que a aproximação é boa.

Na primeira abordagem comparativa, o método que se destacou, no geral, foi o "bvp5c", o mesmo não se verificou na segunda abordagem, pelo que, dependendo dos indicadores que queremos analisar, o método eleito pode diferir.

Resta ainda realçar, pelo estudo efetuado até aqui, que o aumento do rigor da solução numérica não compensa o esforço computacional, uma vez que a diminuição do erro não é significativa podendo, por vezes, nem ocorrer.

## 5 Conclusões

O objetivo desta dissertação consistiu em estudar, detalhadamente, um modelo de crescimento económico. A análise foi focalizada no modelo de Ramsey-Cass-Koopmans (RCK), considerado muito importante em crescimento económico, já que incorpora características usadas noutros modelos com grau de complexidade superior. Para além da usual fundamentação teórica, este trabalho conta, também, com uma pormenorizada derivação matemática do modelo, com a sua implementação computacional e resolução analítica e numérica. Apesar de possível neste caso, a obtenção da solução analítica comportou algumas dificuldades, que se deveram, sobretudo, ao elevado número de parâmetros do sistema de ODE's que descreve o modelo.

Foi a componente numérica, porém, que mereceu mais destaque neste trabalho. A principal razão para isso foi o facto de, na maioria dos modelos de crescimento económico, não se dispor de uma solução analítica, pelo que, há a necessidade de recorrer a soluções numéricas para o problema. Desta forma, este trabalho constitui um importante contributo nesse sentido, pois permite extrair conclusões para extensões ao modelo RCK. Foram tratados vários métodos numéricos para resolver o problema de valores fronteira, resultante do processo de otimização. A implementação destes métodos em MATLAB não foi trivial já que, à exceção da biblioteca do *software*, a documentação disponível sobre esta matéria é bastante escassa. O "bvp6c", em particular, comportou, ainda, outros problemas já que, tratando-se de uma função que não consta da versão *standard* do MATLAB, a implementação do código foi um pouco mais complexa.

Como neste caso se dispunha da solução analítica, procedeu-se ao cálculo dos erros relativos à solução exata, como medida de avaliação da qualidade das soluções numéricas. Da análise gráfica, conclui-se que, à exceção dos primeiros pontos, os erros relativos são da ordem de  $1e-3$ , o que leva a afirmar que a aproximação é boa. Embora os vários métodos tenham associados algoritmos diferentes de resolução, após uma análise global, constatou-se que os resultados foram muito semelhantes, quer nas tolerâncias *default*, quer nas mais reduzidas. Esta constatação é muito relevante, pois permite perspetivar o uso indiscriminado de qualquer um destes métodos, na resolução de problemas de crescimento com fundamentação baseada no modelo RCK.

## 6 Apêndices

### 6.1 Apêndice A: Cálculo em Variações

Com vista a resolver o problema

$$\max U \Rightarrow \max \int_{t=0}^{t=\infty} e^{-(\rho-n)t} \frac{c(t)^{1-\theta} - 1}{1-\theta} dt$$

sujeito a

$$\begin{cases} \dot{k} = y - c - (\delta + n)k \\ k(0) = k_0 > 0 \end{cases}$$

estudou-se otimização usando cálculo em variações (Naidu, 2003).

#### 6.1.1 Extremo de uma funcional com condições:

Considere-se a funcional

$$J(x_1(t), x_2(t), t) = J = \int_{t_0}^{t_f} V(x_1(t), x_2(t), \dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), t) dt, \quad (6.1)$$

sendo  $x_1(t)$  a variável estado e  $x_2(t)$  a variável controle

sujeita à restrição

$$g(x_1(t), x_2(t), \dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t)) = 0 \quad (6.2)$$

com os pontos fixos

$$\begin{aligned} x_1(t_0) &= x_{10} & x_2(t_0) &= x_{20} \\ x_1(t_f) &= x_{1f} & x_2(t_f) &= x_{2f} \end{aligned}$$

- Lagrangiano:

Nos problemas de otimização é usual considerar a funcional aumentada

$$J_a = \int_{t_0}^{t_f} \mathcal{L}(x_1(t), x_2(t), \dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \lambda(t), t) dt$$

onde  $\lambda$  é o multiplicador de Lagrange e o Lagrangiano  $\mathcal{L}$  é definido como

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \mathcal{L}(x_1(t), x_2(t), \dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \lambda(t), t) = \\ &= V(x_1(t), x_2(t), \dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), t) + \lambda(t) * g(x_1(t), x_2(t), \dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t))\end{aligned}\tag{6.3}$$

- Variações e incrementos:

Assumindo as variações e os incrementos

$$x_i(t) = x_i^*(t) + \delta x_i(t) \quad e \quad \dot{x}_i(t) = \dot{x}_i^*(t) + \delta \dot{x}_i(t), i = 1, 2.$$

tem-se

$$\Delta J_a = J_a(x_i^*(t) + \delta x_i(t), \dot{x}_i^* + \delta \dot{x}_i(t), t) - J_a(x_i^*(t), \dot{x}_i^*(t), t), i = 1, 2$$

onde  $x_i^*$  é o valor ótimo.

Desenvolvendo  $\Delta J_a$  em série de Taylor, obtem-se:

$$\begin{aligned}\Delta J_a &= \int_{t_0}^{t_f} \mathcal{L}(x_1(t) + \delta x_1(t), x_2(t) + \delta x_2(t), \dot{x}_1(t) + \delta \dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t) + \\ &\quad + \delta \dot{x}_2(t), \lambda(t), t) dt - \int_{t_0}^{t_f} \mathcal{L}(x_1(t), x_2(t), \dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \lambda(t), t) dt \\ \Delta J_a &= \int_{t_0}^{t_f} \left[ \mathcal{L} + \frac{d\mathcal{L}}{dx_1} \delta x_1 + \frac{d\mathcal{L}}{dx_2} \delta x_2 + \frac{d\mathcal{L}}{d\dot{x}_1} \delta \dot{x}_1 + \frac{d\mathcal{L}}{d\dot{x}_2} \delta \dot{x}_2 + \frac{1}{2} \frac{d^2\mathcal{L}}{dx_1^2} (\delta x_1)^2 + \right. \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{d^2\mathcal{L}}{dx_2^2} (\delta x_2)^2 + \frac{1}{2} \frac{d^2\mathcal{L}}{d\dot{x}_1^2} (\delta \dot{x}_1)^2 + \frac{1}{2} \frac{d^2\mathcal{L}}{d\dot{x}_2^2} (\delta \dot{x}_2)^2 + \frac{d^2\mathcal{L}}{dx_1 dx_2} (\delta^2 x_1 x_2) + \\ &\quad + \frac{d^2\mathcal{L}}{dx_1 d\dot{x}_1} (\delta^2 x_1 \dot{x}_1) + \frac{d^2\mathcal{L}}{dx_1 d\dot{x}_2} (\delta^2 x_1 \dot{x}_2) + \frac{d^2\mathcal{L}}{dx_2 d\dot{x}_1} (\delta^2 x_2 \dot{x}_1) + \\ &\quad \left. + \frac{d^2\mathcal{L}}{dx_2 d\dot{x}_2} (\delta^2 x_2 \dot{x}_2) + \dots \right] dt - \int_{t_0}^{t_f} \mathcal{L} dt\end{aligned}\tag{6.4}$$

onde  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(x_1(t), x_2(t), \dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \lambda(t), t)$ .

A condição de primeira ordem em relação a  $\lambda(t)$  é diretamente derivável do Lagrangiano (6.3) acima.

$$\frac{d\mathcal{L}}{d\lambda} = g(x_1(t), x_2(t), \dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t))$$

isto implica que  $\frac{d\mathcal{L}}{d\lambda} = 0 \Rightarrow g(x_1(t), x_2(t), \dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t)) = 0$ .

Por esta razão, não é considerada a condição de primeira ordem em relação a  $\lambda(t)$ , no desenvolvimento de  $\Delta J_a$  em série de Taylor.

- Primeira Variação:

Então, pelo cálculo em variações, a primeira variação é dada pelos termos de primeira ordem do desenvolvimento de Taylor de (6.4)

$$\delta J_a = \int_{t_0}^{t_f} \left[ \left( \frac{d\mathcal{L}}{dx_1} \right)_* \delta x_1 + \left( \frac{d\mathcal{L}}{dx_2} \right)_* \delta x_2 + \left( \frac{d\mathcal{L}}{d\dot{x}_1} \right)_* \delta \dot{x}_1 + \left( \frac{d\mathcal{L}}{d\dot{x}_2} \right)_* \delta \dot{x}_2 \right] dt \quad (6.5)$$

Com o objectivo de facilitar os cálculos são reescritos os termos em  $\delta \dot{x}_1$  e  $\delta \dot{x}_2$  como funções de  $\delta x_1$  e  $\delta x_2$ , respectivamente. Para isso utilizou-se a integração por partes  $\left( \int u dv = u * v - \int v du, \text{ neste caso } u = \frac{d\mathcal{L}}{d\dot{x}_1} \text{ e } dv = \delta * \dot{x}_1(t) \right)$ :

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_f} \left( \frac{d\mathcal{L}}{d\dot{x}_1} \right)_* \delta \dot{x}_1(t) dt &= \int_{t_0}^{t_f} \left( \frac{d\mathcal{L}}{d\dot{x}_1} \right)_* * \frac{d}{dt} (\delta x_1(t)) dt = \\ &= \left[ \left( \frac{d\mathcal{L}}{d\dot{x}_1} \right)_* \delta x_1(t) \right]_{t_0}^{t_f} - \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt} \left( \frac{d\mathcal{L}}{d\dot{x}_1} \right)_* \delta x_1(t) dt \end{aligned}$$

Calculando, de forma análoga para  $\delta \dot{x}_2$ , e substituindo na equação (6.5), obtem-se:

$$\begin{aligned} \delta J_a &= \int_{t_0}^{t_f} \left[ \left( \frac{d\mathcal{L}}{dx_1} \right)_* \delta x_1 + \left( \frac{d\mathcal{L}}{dx_2} \right)_* \delta x_2 \right] dt + \left[ \left( \frac{d\mathcal{L}}{d\dot{x}_1} \right)_* \delta x_1(t) \right]_{t_0}^{t_f} + \\ &+ \left[ \left( \frac{d\mathcal{L}}{d\dot{x}_2} \right)_* \delta x_2 \right]_{t_0}^{t_f} - \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt} \left( \frac{d\mathcal{L}}{d\dot{x}_1} \right)_* \delta x_1(t) dt - \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt} \left( \frac{d\mathcal{L}}{d\dot{x}_2} \right)_* \delta x_2(t) dt \end{aligned}$$

Dado tratar-se de um problema de valores finais fixos de tempo e estado, ou seja, não são permitidas variações nos pontos finais, tem-se que  $\delta x_1(t_0) = \delta x_2(t_0) = \delta x_1(t_f) = \delta x_2(t_f)$  (ver Figura 15).

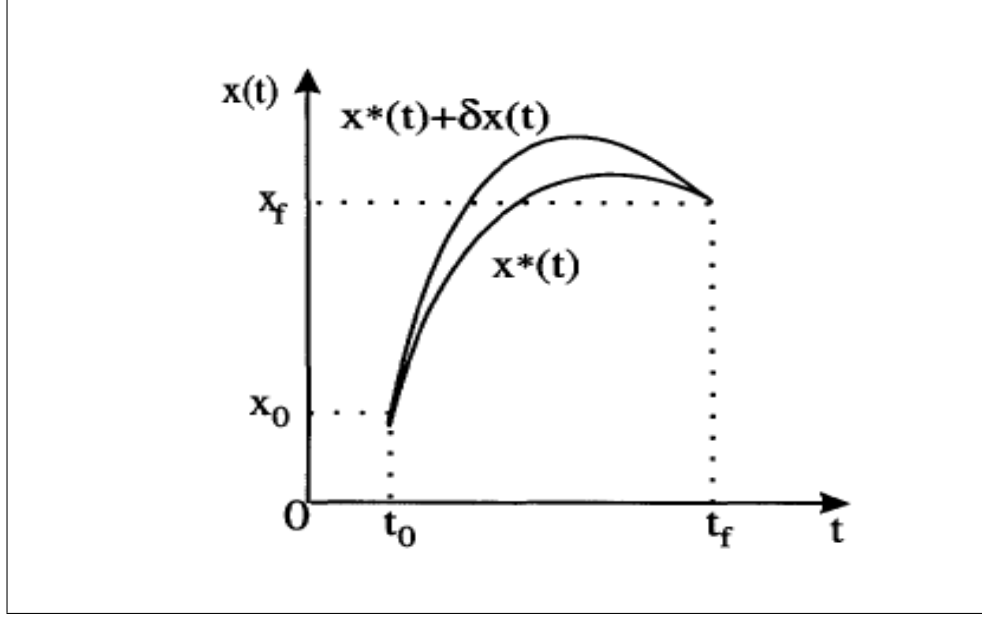


Figura 15: Sistema de valores finais fixos de tempo e estado (Naidu, 2003).

Assim,

$$\left[ \left( \frac{d\mathcal{L}}{d\dot{x}_1} \right)_* \delta x_1(t) \right]_{t_0}^{t_f} + \left[ \left( \frac{d\mathcal{L}}{d\dot{x}_2} \right)_* \delta x_2 \right]_{t_0}^{t_f} = 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \delta J_a = & \int_{t_0}^{t_f} \left[ \left( \frac{d\mathcal{L}}{dx_1} \right)_* - \frac{d}{dt} \left( \frac{d\mathcal{L}}{d\dot{x}_1} \right)_* \right] \delta x_1(t) dt + \\ & + \int_{t_0}^{t_f} \left[ \left( \frac{d\mathcal{L}}{dx_2} \right)_* - \frac{d}{dt} \left( \frac{d\mathcal{L}}{d\dot{x}_2} \right)_* \right] \delta x_2 dt \end{aligned} \quad (6.6)$$

### - Teorema Fundamental do Cálculo em Variações (Teorema 1):

Para  $x^*(t)$  ser candidato a ótimo é condição necessária que, a primeira variação de  $J$  seja zero em  $x^*(t)$ , isto é,  $\delta J(x^*(t), \delta x(t)) = 0$  para todos os valores de  $\delta x(t)$ . É condição suficiente de mínimo que a segunda variação  $\delta^2 J > 0$  e de máximo  $\delta^2 J < 0$ .

Aplicando o teorema, para encontrar o ótimo é necessário que  $\delta J_a = 0$ .

$\delta x_1(t)$  e  $\delta x_2(t)$  são dependentes porque  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  estão relacionados pela restrição (6.2). Desta forma, optou-se por considerar  $\delta x_2(t)$  como variação independente e  $\delta x_1(t)$  variação dependente.

Dado que  $\lambda^*$  é introduzido arbitrariamente, foi escolhido de forma a que o coeficiente da variação dependente  $\delta x_1(t)$  fosse zero.

Ou seja,

$$\left(\frac{d\mathcal{L}}{dx_1}\right)_* - \frac{d}{dt} \left(\frac{d\mathcal{L}}{d\dot{x}_1}\right)_* = 0 \quad (6.7)$$

Então

$$\delta J_a = \int_{t_0}^{t_f} \left[ \left(\frac{d\mathcal{L}}{dx_2}\right)_* - \frac{d}{dt} \left(\frac{d\mathcal{L}}{d\dot{x}_2}\right)_* \right] \delta x_2 dt = 0$$

**- Lema Fundamental do Cálculo em Variações:**

Se para toda a função contínua  $g(t)$

$$\int_{t_0}^{t_f} g(t) \delta x(t) dt = 0$$

onde  $\delta x(t)$  é contínua no intervalo  $[t_0, t_f]$ , então  $g(t)$  tem de ser zero em todo o intervalo  $[t_0, t_f]$ .

Uma vez que  $\delta x_2(t)$  foi escolhido como variação independente e, portanto, arbitrária, usando o lema anterior, tem-se que

$$\left(\frac{d\mathcal{L}}{dx_2}\right)_* - \frac{d}{dt} \left(\frac{d\mathcal{L}}{d\dot{x}_2}\right)_* = 0 \quad (6.8)$$

Note-se que

$$\left(\frac{d\mathcal{L}}{d\lambda}\right)_* = g(x_1(t), x_2(t), \dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t)) = 0$$

Como o Lagrangiano,  $\mathcal{L}$  (6.3) é independente de  $\dot{\lambda}(t)$ , pode-se enunciar:

$$\left(\frac{d\mathcal{L}}{d\lambda}\right)_* - \frac{d}{dt} \left(\frac{d\mathcal{L}}{d\dot{\lambda}}\right)_* = 0 \quad (6.9)$$

- Equações de Euler-Lagrange:

Combinando as equações (6.7), (6.8) e (6.9), as condições necessárias para encontrar os extremos da funcional (6.1) sujeita à restrição (6.2) são:

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\mathcal{L}}{dx_1}\right)_* - \frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathcal{L}}{d\dot{x}_1}\right)_* &= 0 \\ \left(\frac{d\mathcal{L}}{dx_2}\right)_* - \frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathcal{L}}{d\dot{x}_2}\right)_* &= 0 \\ \left(\frac{d\mathcal{L}}{d\lambda}\right)_* - \frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathcal{L}}{d\dot{\lambda}}\right)_* &= 0\end{aligned}$$

Generalizando para um sistema de ordem  $n$ , a funcional é dada por

$$J = \int_{t_0}^{t_f} V(x(t), \dot{x}(t)) dt$$

(onde  $x(t)$  é um vetor estado de ordem  $n$ ),  
sujeita à restrição  $g_i(x(t), \dot{x}(t), t) = 0, i = 1, 2, \dots, m$ , e às condições fronteira  $x(t_0)$  e  $x(t_f)$ .

Construindo a funcional aumentada  $J_a = \int_{t_0}^{t_f} \mathcal{L}(x(t), \dot{x}(t), \lambda(t), t) dt$ , onde o Lagrangiano  $\mathcal{L}$  é dado por

$$L(x(t), \dot{x}(t), \lambda(t), t) = V(x(t), \dot{x}(t), t) + \lambda'(t) * g_i(x(t), \dot{x}(t), t)$$

e o multiplicador de Lagrange por  $\lambda(t) = [\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_m(t)]'$ , obtemos as seguintes equações de Euler-Lagrange

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\mathcal{L}}{dx}\right)_* - \frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathcal{L}}{d\dot{x}}\right)_* &= 0 \\ \left(\frac{d\mathcal{L}}{d\lambda}\right)_* - \frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathcal{L}}{d\dot{\lambda}}\right)_* &= 0 \Leftrightarrow g_i(x(t), \dot{x}(t), t) = 0\end{aligned}$$

### 6.1.2 Abordagem variacional para sistemas de controlo ótimo

-Problema com uma função terminal:

Neste problema, conhecido como problema de Bolza, existe uma função terminal adicionada à funcional (6.1), ou seja,

$$J(u(t)) = S(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} V(x(t), u(t), t) dt \quad (6.10)$$

sujeita à restrição

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \quad (6.11)$$

e às condições fronteira  $x(t_0) = x_0$ ,  $x(t_f)$  é livre e  $t_f$  é livre, onde  $x(t)$  e  $u(t)$  são vectores de dimensões  $n$  e  $r$ , respectivamente, e  $x(t)$  representa as variáveis estado ( $k(t)$ ), enquanto que  $u(t)$  representa as variáveis de controlo ( $c(t)$ ).

Note-se que

$$\int_{t_0}^{t_f} \frac{dS(x(t), t)}{dt} dt = S(x(t), t)|_{t_0}^{t_f} = S(x(t_f), t_f) - S(x(t_0), t_0) \quad (6.12)$$

Usando a equação (6.10) e (6.12), obtem-se outra funcional :

$$\begin{aligned} J_2(u(t)) &= \int_{t_0}^{t_f} \left[ V(x(t), u(t), t) + \frac{dS}{dt} \right] dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_f} V(x(t), u(t), t) + S(x(t_f), t_f) - S(x(t_0), t_0) \end{aligned} \quad (6.13)$$

Desde que  $S(x(t_0), t_0)$  seja uma quantidade fixa, a otimização da funcional original (6.10) é equivalente à otimização da funcional (6.13) chegando, porém, a um valor ótimo diferente, mas que corresponde ao mesmo ponto ótimo.

Assim, a funcional (6.10) fica reduzida a uma funcional do tipo da estudada anteriormente.

- Pressupostos das condições ótimas:

Assumindo que as variáveis estado e controlo são ótimas em  $x^*(t)$  e  $u^*(t)$ , respetivamente, obtem-se:

$$\begin{aligned} J(u^*(t)) &= \int_{t_0}^{t_f} \left[ V(x^*(t), u^*(t), t) + \frac{dS(x^*(t), t)}{dt} \right] dt \\ \dot{x}^*(t) &= f(x^*(t), u^*(t), t) \end{aligned}$$

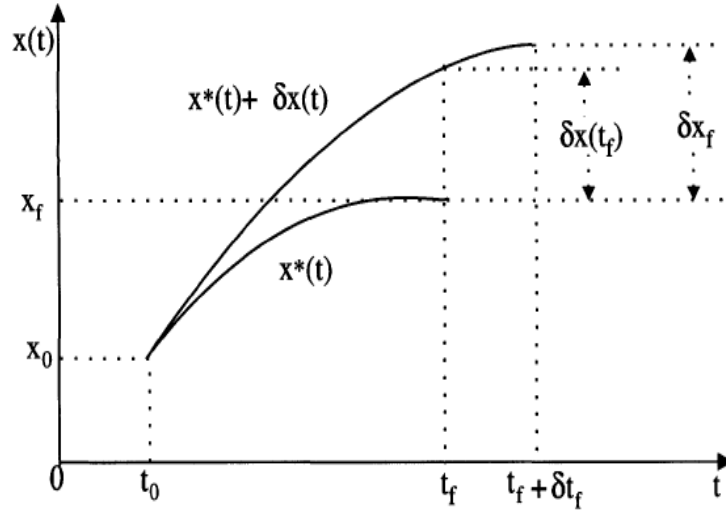


Figura 16: Sistema de valores finais livres de tempo e estado (Naidu, 2003).

-Variações das variáveis controle e estado:

Considerando as seguintes variações (perturbações) nos vetores controle e estado (ver Figura 16)

$$x(t) = x^*(t) + \delta x(t) \quad e \quad u(t) = u^*(t) + \delta u(t)$$

vem que

$$\dot{x}^*(t) + \delta \dot{x}(t) = f(x^*(t) + \delta x(t), u^*(t) + \delta u(t), t)$$

$$e \quad J(u(t)) = \int_{t_0}^{t_f + \delta t_f} \left[ V(x^*(t) + \delta x(t), u^*(t) + \delta u(t), t) + \frac{dS}{dt} \right] dt$$

- Multiplicador de Lagrange:

Introduzindo o multiplicador de Lagrange  $\lambda(t)$  (também denominado por vetor co-estado), no ponto ótimo tem-se a seguinte funcional aumentada:

$$J_a(u^*(t)) = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ V(x^*(t), u^*(t), t) + \frac{dS}{dt} + \lambda'(t) * [f(x^*(t), u^*(t), t) - \dot{x}^*(t)] \right\} dt$$

Note-se que

$$\frac{dS(x^*(t), t)}{dt} = \left(\frac{dS}{dx}\right)'_* \frac{dx}{dt} + \frac{dS}{dt} = \left(\frac{dS}{dx}\right)'_* \dot{x}(t) + \frac{dS}{dt}$$

E, portanto

$$J_a(u^*(t)) = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ V(x^*(t), u^*(t), t) + \left(\frac{dS}{dx}\right)'_* \dot{x}^*(t) + \left(\frac{dS}{dt}\right)_* + \lambda'(t) [f(x^*(t), u^*(t), t) - \dot{x}^*(t)] \right\} dt$$

Para qualquer outra condição (perturbada):

$$J_a(u(t)) = \int_{t_0}^{t_f} \left[ V(x^*(t) + \delta x(t), u^*(t) + \delta u(t), t) + \left(\frac{dS}{dx}\right)'_* [\dot{x}^*(t) + \delta \dot{x}(t)] + \left(\frac{dS}{dt}\right)_* + \lambda'(t) [f(x^*(t) + \delta x(t), u^*(t) + \delta u(t), t) - (\dot{x}^*(t) + \delta \dot{x}(t))] \right] dt$$

- Lagrangiano

Define-se a função Lagrangiano, no ótimo, como:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}(x^*(t), \dot{x}^*(t), u^*(t), \lambda(t), t) & (6.14) \\ &= V(x^*(t), u^*(t), t) + \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)'_* \dot{x}^*(t) + \left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)_* + \lambda'(t) \{f(x^*(t), u^*(t), t) - \dot{x}^*(t)\} \end{aligned}$$

e para qualquer outra condição (perturbada):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^\delta &= \mathcal{L}^\delta(x^*(t) + \delta x(t), \dot{x}^*(t) + \delta \dot{x}(t), u^*(t) + \delta u(t), \lambda(t), t) \\ &= V(x^*(t) + \delta x(t), u^*(t) + \delta u(t), t) + \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)'_* (\dot{x}^*(t) + \delta \dot{x}(t)) + \\ &+ \left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)_* + \lambda'(t) [f(x^*(t) + \delta x(t), u^*(t) + \delta u(t), t) - (\dot{x}^*(t) + \delta \dot{x}(t))] \end{aligned}$$

com isto, a funcional aumentada na condição ótima, e para qualquer outra

condição, vem:

$$J_a(u^*(t)) = \int_{t_0}^{t_f} \mathcal{L}(x^*(t), \dot{x}^*(t), u^*(t), \lambda(t), t) dt = \int_{t_0}^{t_f} L dt$$

$$J_a(u(t)) = \int_{t_0}^{t_f + \delta t_f} \mathcal{L}^\delta dt = \int_{t_0}^{t_f} \mathcal{L}^\delta dt + \int_{t_f}^{t_f + \delta t_f} \mathcal{L}^\delta dt$$

Usando o Teorema do Valor Médio e o desenvolvimento em Série de Taylor e, considerando apenas os termos lineares, obtém-se

$$\begin{aligned} \int_{t_f}^{t_f + \delta t_f} \mathcal{L}^\delta dt &= \mathcal{L}_{|t_f}^\delta \delta t_f \approx \left[ \mathcal{L} + \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \right)'_* \delta x(t) + \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right)'_* \delta \dot{x}(t) + \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} \right)'_* \delta u(t) \right]_{|t_f} \delta t_f \approx \\ &\approx \mathcal{L}_{|t_f} \delta t_f \end{aligned}$$

- Primeira Variação

$$\Delta J = J_a(u(t)) - J_a(u^*(t)) = \int_{t_0}^{t_f} (\mathcal{L}^\delta - \mathcal{L}) dt + \mathcal{L}_{|t_f} \delta t_f$$

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \right)'_* \delta x(t) + \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right)'_* \delta \dot{x}(t) + \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} \right)'_* \delta u(t) \right] dt + \mathcal{L}_{|t_f} \delta t_f$$

Considere-se novamente a integração por partes para se obter  $\delta \dot{x}(t)$  como função de  $\delta x(t)$ :

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_f} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right)'_* \delta \dot{x}(t) dt &= \int_{t_0}^{t_f} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right)'_* \frac{d}{dt} (\delta x(t)) dt = \\ &= \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right)'_* \delta x(t) \right]_{t_0}^{t_f} - \int_{t_0}^{t_f} \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right)'_* \right] \delta x(t) dt \end{aligned}$$

Sabendo também que  $x(t_0)$  é fixo,  $\delta x(t_0) = 0$ , vem que

$$\begin{aligned} \delta J &= \int_{t_0}^{t_f} \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \right)'_* - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right)'_* \right] \delta x(t) dt + \int_{t_0}^{t_f} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} \right)'_* \delta u(t) dt + \\ &+ \mathcal{L}_{|t_f} \delta t_f + \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right)'_* \delta x(t) \right]_{|t_f} \end{aligned}$$

- Condições de extremo:

De acordo com o Teorema 1, para se obter o extremo de uma funcional é necessário que  $\delta J = 0$ . Note-se que num problema típico de controlo ótimo como (6.10),  $\delta u(t)$  é a variação de controlo independente e  $\delta x(t)$  é a variação estado dependente.

Escolhendo  $\lambda(t) = \lambda^*(t)$  tal que o coeficiente da variação dependente  $\delta x(t)$  se anule, temos a seguinte equação de Euler-Lagrange:

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}\right)_* - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right)_* = 0 \quad (6.15)$$

Dado que a variação de controlo independente é arbitrária, o seu coeficiente tem de ser nulo, ou seja

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u}\right)_* = 0 \quad (6.16)$$

Finalmente,

$$\delta J = 0 \iff \mathcal{L}^*|_{t_f} \delta t_f + \left[ \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right)'_* \delta x(t) \right] |_{t_f} = 0 \quad (6.17)$$

A equação (6.11) pode ser reescrita, em termos do Lagrangiano (6.14), como:

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}\right)_* = 0 \quad (6.18)$$

Com o objetivo de converter a expressão que contem  $\delta x(t)$  (6.17) numa que contem  $\delta x_f$  (ver Figura 17), observou-se que a derivada de  $x^*(t_f) + \delta x(t_f)$  em  $t_f$  é, aproximadamente,

$$\dot{x}^*(t_f) + \delta \dot{x}(t_f) \approx \frac{\delta x_f - \delta x(t_f)}{\delta t_f} \quad (6.19)$$

Reescrevendo (6.19), tem-se

$$\delta x_f = \delta x(t_f) + (\dot{x}^*(t_f) + \delta \dot{x}(t_f)) \delta t_f \quad (6.20)$$

Retendo apenas os termos lineares em  $\delta$ , vem que

$$\delta x(t_f) = \delta x_f - \dot{x}^*(t_f) \delta t_f \quad (6.21)$$

Usando esta expressão na condição fronteira (6.17), tem-se

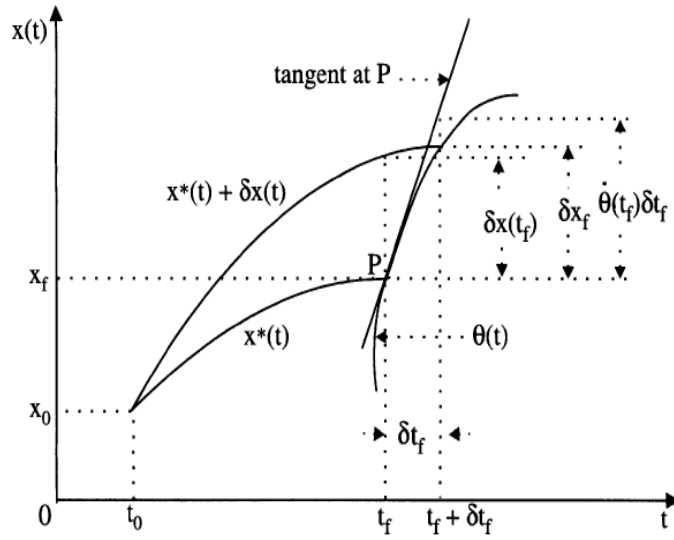


Figura 17: Sistema de pontos fixos dependentes (Naidu, 2003).

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^* |_{t_f} \delta t_f + \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right)' |_{t_f} (\delta x_f - \dot{x}^*(t_f) \delta t_f) &= 0 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \left[ \mathcal{L}^* - \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right)' |_{t_f} \dot{x}^*(t) \right] \delta t_f + \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right)' |_{t_f} \delta x_f &= 0 \quad (6.22)
\end{aligned}$$

- Hamiltoniano

Definindo o Hamiltoniano  $H^*$  no ótimo como:

$$H^*(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t) = V(x^*(t), u^*(t), t) + \lambda^{*'}(t) f(x^*(t), u^*(t), t) \quad (6.23)$$

Então, comparando a função Hamiltoniano (6.23) com o Lagrangiano (6.14), vê-se que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^* &= \mathcal{L}^*(x^*(t), \dot{x}^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t) = \\
&= H^*(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t) + \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)' |_{t_f} \dot{x}^*(t) + \left( \frac{\partial S}{\partial t} \right)' |_{t_f} - \lambda^{*'}(t) \dot{x}^*(t) \quad (6.24)
\end{aligned}$$

Note-se que no modelo de Ramsey não existe a função  $S(x(t), t)$ .

Usando (6.24) em (6.15), (6.16) e (6.18), as relações do ótimo são:

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u}\right)_* = 0 \rightarrow \left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)_* = 0 \quad (6.25)$$

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}\right)_* - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right)_* = 0 \rightarrow \left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)_* = -\dot{\lambda}^{*'}(t) \quad (6.26)$$

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}\right)_* = 0 \rightarrow \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right)_* = \dot{x}^*(t) \quad (6.27)$$

Observando (6.26) e (6.27), pode-se salientar que são equações de estrutura similar e, sendo  $x^*(t)$  o estado ótimo, é claro que  $\lambda(t)$  é denominado vetor co-estado.

Para concluir, usando a relação (6.24), a condição fronteira (6.22), no ótimo, fica reduzida a:

$$\left\{ \mathcal{L}^* + \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)'_* \dot{x}^*(t) + \left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)_* - \lambda^{*'}(t) \dot{x}^*(t) - \left[ \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)'_* - \lambda^{*'}(t) \dot{x}^*(t) \right] \right\} |_{t_f} \delta t_f + \left[ \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)'_* - \lambda^{*'}(t) \right] |_{t_f} \delta x_f = [H^* + \left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)] |_{t_f} \delta t_f + \left[ \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)'_* - \lambda^{*'}(t) \right] |_{t_f} \delta x_f = 0$$

Esta é uma condição fronteira geral para sistemas de pontos finais livres, em termos de Hamiltoniano.

## 6.2 Apêndice B: Determinação da solução analítica

Recordando o problema de otimização a ser tratado,

$$\max \int_{t=0}^{t=\infty} e^{-(\rho-n)t} \frac{c(t)^{1-\theta} - 1}{1-\theta} dt$$

sujeito a

$$\begin{cases} \dot{k} = y - c - (\delta + n)k \\ k(0) = k_0 > 0 \end{cases}$$

em que a variável estado é  $k$ , a variável controle é  $c$  e a variável co-estado é  $\lambda$ .

Com vista à resolução deste problema construímos o Lagrangiano,

$$\mathcal{L} = \underbrace{e^{-(\rho-n)t} \frac{c(t)^{1-\theta} - 1}{1-\theta} + \lambda(Ak^\alpha - c - (\delta + n)k) - \lambda \dot{k}}_H$$

Usando as equações de Euler-Lagrange, deduzidas anteriormente, no modelo de Ramsey obtém-se:

$$\begin{cases} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c} \right)_* = 0 \\ \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k} \right)_* - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{k}} \right) = 0 \\ \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} \right)_* = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \frac{\partial H}{\partial c} = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial k} = -\dot{\lambda}(t) \\ \frac{\partial H}{\partial \lambda} = \dot{k}(t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda(t) = e^{-(\rho-n)t} * c(t)^{-\theta} \\ \lambda(t)(A\alpha k(t)^{\alpha-1} - (\delta + n)) = -\dot{\lambda}(t) \\ \frac{\partial H}{\partial \lambda} = \dot{k}(t) \end{cases} \quad (6.28)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} k(t)\lambda(t) = 0 \rightarrow \text{Condição de Transversalidade}$$

Aplicando logaritmos à primeira equação de (6.28):

$$\ln(\lambda(t)) = -(\rho - n)t + \ln(c(t)^{-\theta})$$

e de seguida derivando em ordem a  $t$ , vem:

$$\frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda(t)} = -(\rho - n) - \theta \frac{\dot{c}(t)}{c(t)}$$

Usando a segunda equação de (6.28), obtem-se a equação de Euler do consumo (trajetória ótima do consumo):

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \frac{1}{\theta} [A\alpha k(t)^{\alpha-1} - \rho - \delta]$$

Esta equação pode ser reescrita como

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \frac{1}{\theta} (r - \rho)$$

pois, como é sabido,  $y = Ak(t)^\alpha$  e  $\alpha \frac{y(t)}{k(t)} = r + \delta$ .

- Sistema Dinâmico:

$$\begin{cases} \dot{c}(t) = \frac{c(t)}{\theta} [A\alpha k(t)^{\alpha-1} - \rho - \delta] \\ \dot{k}(t) = Ak(t)^\alpha - c(t) - (\delta + n)k \end{cases}$$

dados

$$k(0) = k_0 > 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} k(t)e^{-(\rho-n)t} * c(t)^{-\theta} = 0$$

• Cálculo do *steady-state*:

No *steady-state*:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \dot{c}(t) = 0 \\ \dot{k}(t) = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} A\alpha k(t)^{\alpha-1} - \rho - \delta = 0 \quad \vee \quad \frac{c(t)}{\theta} = 0 \\ Ak(t)^\alpha - c(t) - (\delta + n)k = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} k(t) = \left(\frac{A\alpha}{\rho+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad \vee \quad c(t) = 0 \\ c(t) = Ak(t)^\alpha - (\delta + n)k(t) \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} k(t) = \left(\frac{A\alpha}{\rho+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad \vee \quad c(t) = 0 \\ c(t) = A \left(\frac{A\alpha}{\rho+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - (\delta + n) \left(\frac{A\alpha}{\rho+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Se } c(t) = 0 &\Rightarrow k(t) (Ak(t)^{\alpha-1} - \delta - n) \\ &\Leftrightarrow k(t) = 0 \vee k = \left(\frac{\delta+n}{A}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \vee k = \left(\frac{A}{\delta+n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \end{aligned}$$

Assim, tem-se 3 *steady-state's* (da forma  $(k(t)^*, c(t)^*)$ ):

$$(0, 0); \left( \left(\frac{A}{\delta+n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, 0 \right); \left( \left(\frac{A}{\rho+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, A \left(\frac{A\alpha}{\rho+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - (\delta+n) \left(\frac{A\alpha}{\rho+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \right)$$

Destes 3 pontos de equilíbrio apenas o último é importante para este estudo, uma vez que é o único *steady-state* interior.

- Determinação da solução analítica:

Para determinar a solução analítica é necessário, primeiramente, linearizar o sistema. Com esse objetivo, calculou-se a matriz Jacobiana no ponto de *steady-state*.

$$\begin{aligned} J(k^*, c^*) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial k}{\partial k} & \frac{\partial k}{\partial c} \\ \frac{\partial \dot{c}}{\partial k} & \frac{\partial \dot{c}}{\partial c} \end{bmatrix}_{(k^*, c^*)} = \\ &= \begin{bmatrix} A\alpha k(t)^{\alpha-1} - (\delta + n) & -1 \\ \frac{c(t)}{\theta} [A\alpha(\alpha-1)k(t)^{\alpha-2}] & \frac{1}{\theta} [A\alpha k(t)^{\alpha-1} - \rho - \delta] \end{bmatrix}_{(k^*, c^*)} \\ &= \begin{bmatrix} \rho + n & -1 \\ \frac{(\rho+\delta)(\alpha-1)}{\theta} \left[ \frac{\rho}{\alpha} - n + \delta \left( \frac{1}{\alpha} - 1 \right) \right] & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$\det(J) = \frac{(\rho+\delta)(\alpha-1)}{\theta} \left[ \frac{\rho}{\alpha} - n + \delta \left( \frac{1}{\alpha} - 1 \right) \right]$  é negativo pois  $\frac{(\rho+\delta)(\alpha-1)}{\theta} < 0$  ( $\alpha \in ]0, 1[$ ) e  $\left[ \frac{\rho}{\alpha} - n + \delta \left( \frac{1}{\alpha} - 1 \right) \right] > 0$  uma vez que  $\frac{\rho}{\alpha} > n$  (porque  $\rho > n$  e  $\alpha \in ]0, 1[$ ) e  $\delta \left( \frac{1}{\alpha} - 1 \right) > 0$ .

Relativamente ao traço de  $J$ ,  $Tr(J) = \rho + n > 0$ .

Portanto, o ponto de equilíbrio

$$\left( k^* = \left( \frac{A}{\rho + \delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, c^* = A \left( \frac{A\alpha}{\rho + \delta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - (\delta + n) \left( \frac{A\alpha}{\rho + \delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \right)$$

é um ponto de sela.

- Sistema linearizado:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{k}(t) \\ \dot{c}(t) \end{bmatrix} &= J_{|(k^*, c^*)} * \begin{bmatrix} k(t) - k^* \\ c(t) - c^* \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \dot{k}(t) \\ \dot{c}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \rho + n & -1 \\ \frac{(\rho+\delta)(\alpha-1)}{\theta} \left[ \frac{(\rho+\delta)}{\alpha} - (n + \delta) \right] & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k(t) - k^* \\ c(t) - c^* \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Valores próprios de  $J$ :

$$\lambda_a = \frac{(\rho + n) + \sqrt{((\rho + n)^2 - 4A)}}{2} \quad \vee \quad \lambda_b = \frac{(\rho + n) - \sqrt{((\rho + n)^2 - 4A)}}{2},$$

$$\text{onde } A = \frac{(\rho + \delta)(\alpha - 1)}{\theta} \left[ \frac{(\rho + \delta)}{\alpha} - (n + \delta) \right]$$

Assim, os vetores próprios de  $J$  são

$$v_a = \left[ 2, (\rho + n) - \sqrt{((\rho + n)^2 - 4A)} \right] \quad \text{e} \quad v_b = \left[ 2, (\rho + n) + \sqrt{((\rho + n)^2 - 4A)} \right]$$

associados a  $\lambda_a$  e a  $\lambda_b$ , respetivamente.

A solução analítica para este sistema é da forma

$$\phi(t) = k_1 e^{\lambda_a t} v_a + k_2 e^{\lambda_b t} v_b, \quad k_i \in \mathbb{R} \quad (6.29)$$

Substituindo os vetores próprios, vem que

$$\begin{aligned} \phi(t) = & k_1 e^{\lambda_a t} \begin{bmatrix} 2 \\ \rho + n - \sqrt{(\rho + n)^2 - 4a} \end{bmatrix} + \\ & + k_2 e^{\lambda_b t} \begin{bmatrix} 2 \\ \rho + n + \sqrt{(\rho + n)^2 - 4a} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{ss} \\ css \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} k(t) \\ c(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2k_1 e^{\lambda_a t} + 2k_2 e^{\lambda_b t} + k_{ss} \\ k_1 e^{\lambda_a t} (\rho + n - \sqrt{(\rho + n)^2 - 4a}) + k_2 e^{\lambda_b t} (\rho + n + \sqrt{(\rho + n)^2 - 4a}) + css \end{bmatrix}$$

Com vista a determinar as constantes  $k_1$  e  $k_2$  usaram-se as condições fronteira  $k(0) = \frac{k_{ss}}{10}$  e  $c(t_f) = css$ . Assim, tem-se

$$\begin{cases} 2k_1 + 2k_2 + k_{ss} = \frac{k_{ss}}{10} \\ k_1 e^{\lambda_a t_f} (\rho + n - \sqrt{(\rho + n)^2 - 4a}) + k_2 e^{\lambda_b t_f} (\rho + n + \sqrt{(\rho + n)^2 - 4a}) + css = css \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} k_1 = -k_2 - \frac{9}{20}kss \\ k_2 = \left[ e^{\lambda_a t_f}(\rho + n - \sqrt{(\rho + n)^2 - 4a}) - e^{\lambda_b t_f}(\rho + n + \sqrt{(\rho + n)^2 - 4a}) \right]^{-1} * \\ * \left[ e^{\lambda_b t_f}(\rho + n - \sqrt{(\rho + n)^2 - 4a}) \left( \frac{-9}{20}kss \right) \right] \end{array} \right.$$

Finalmente, substituindo as constantes, os valores próprios e os vetores próprios na equação (6.29) obtém-se a solução analítica.

## 7 Referências bibliográficas

- [1] Rao, A. V., Darby, C. L., Garg, D., Huntington, G. T. , Benson, D. A., Patterson, M., Mahon, B. e Francolin, C. (2011), User's Manual for GPOPS Version 4.x: A MATLAB Software for Solving Multiple-Phase Optimal Control Problems Using *hp*-Adaptive Pseudospectral Methods. *GPOPS Open-Source General Pseudospectral Optimal Control Software* [Online]. Disponível em: <http://www.gpops.org/> [Consult. 10.Fevereiro.2012].
- [2] Auzinger, W., Karner, E., Kitzhofer, G., Koch, O., Pulverer, G., Simon, C. e Weinmüller, E. (2010), BVPSUITE, A New MATLAB Solver for Singular Implicit Boundary Value Problems. *Software development for implicit singular BVPs* [Online]. Disponível em: [http://www.math.tuwien.ac.at/~ewa/software\\_development3.htm](http://www.math.tuwien.ac.at/~ewa/software_development3.htm) [Consult. 23.Março.2012].
- [3] Barro, R. J e Sala-I-Martin, X. (1999), *Economic Growth*, The MIT Press.
- [4] Chiang, A.C. (1992), *Elements of Dynamic Optimization*, McGraw Hill.
- [5] Gandolfo, G. (1997), *Economic Dynamics*, Springer.
- [6] Hale, N.P. (2006), "A Sixth-Order Extension to the MATLAB bvp4c Software of J. Kierzenka and L. Shampine", Department of Mathematics, Imperial College London.
- [7] MATLAB (1994), *MathWorks*, Massachusetts: MathWorks, Inc. Disponível em: <http://www.mathworks.com/> [Consult. Setembro.2011 - Maio.2012 ].
- [8] Mulligan, C. B. e Sala-i-Martin, X. (1991), "A note on the time elimination method for solving recursive dynamic economic models", NBER Technical Working Paper No. 116, National Bureau of Economic Research, Inc.
- [9] Naidu, D.S. (2003), *Optimal Control Systems*, CRS Press.
- [10] Vasconcelos, P. B. e Afonso, O (2010), "O modelo de Ramsey: resolução numérica", *Investigação - Trabalhos em curso*, Faculdade de Economia da Universidade do Porto.