

Maria do Rosário Campos Ribeiro

# Curvas e Geometria Dinâmica



Departamento de Matemática  
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto  
2012

Maria do Rosário Campos Ribeiro

# Curvas e Geometria Dinâmica



*Tese submetida à Faculdade de Ciências da  
Universidade do Porto para obtenção do grau de Mestre  
em Matemática para Professores*

Departamento de Matemática  
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto  
2012

## Agradecimentos

Para começar, gostaria de agradecer ao meu orientador, Professor Doutor José Carlos Santos, não só pela sua disponibilidade e acompanhamento, mas também pelas suas sugestões e críticas que tiveram um contributo fundamental para o desenvolvimento desta tese.

Agradeço ainda às pessoas mais especiais da minha vida pelo incentivo, compreensão e encorajamento, durante todo este período.

Aos meus colegas de mestrado, pelos momentos de entusiasmo partilhados em conjunto.

A todos os Professores que tornaram possível o bom funcionamento do Mestrado em Matemática para Professores pelo apoio e disponibilidade no esclarecimento de dúvidas.

# Resumo

Com a elaboração desta tese pretendemos demonstrar e chamar a atenção para o facto de que o estudo das curvas e das suas propriedades, normalmente não abordadas no Ensino Básico e Secundário, pode ser introduzida a este nível de modo pertinente e motivador.

Pretendemos, ainda, reforçar a ideia de que a utilização das tecnologias, em ambiente de sala de aula, pode constituir uma mais-valia para a autonomia dos alunos, a construção de conhecimentos e a conquista de aprendizagens, desde que estas tecnologias sejam utilizadas de forma adequada, criativa e crítica.

Para além deste documento escrito, esta tese integra ainda um CD-Rom com duas pastas. Uma das pastas do CD-Rom designa-se por *GeoGebra* e contém construções elaboradas apenas com recurso a este programa de Geometria Dinâmica. A outra pasta do CD-Rom intitula-se HTML. Esta pasta contém ficheiros escritos em linguagem HTML e construções em *GeoGebra* que foram utilizadas na execução desses ficheiros. A designação dos ficheiros escritos em linguagem HTML respeita a seguinte nomenclatura: `index-<assunto>.html` é o ficheiro principal de cada assunto. Por exemplo, `index-conicas.html` é o ficheiro principal do assunto cónicas.

# Conteúdo

<b>Resumo</b>	<b>4</b>
<b>Índice de Tabelas</b>	<b>7</b>
<b>Índice de Figuras</b>	<b>9</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>10</b>
<b>2 Tecnologias no Ensino da Matemática</b>	<b>13</b>
2.1 A importância das tecnologias no ensino da Matemática . . . . .	13
2.2 Programas de Geometria Dinâmica na educação . . . . .	15
2.3 Problemas/cuidados com a utilização de programas de Geometria Dinâmica . . . . .	16
<b>3 As cónicas</b>	<b>21</b>
3.1 A parábola . . . . .	23
3.2 Função quadrática . . . . .	25
3.3 Construção das cónicas em <i>GeoGebra</i> . . . . .	28
3.4 Cónicas no quotidiano . . . . .	29
3.5 Projéteis . . . . .	33
3.5.1 Lançamento de um projétil sem resistência do ar . . . . .	34
3.5.2 Simulação do lançamento de um projétil sem resistência do ar . . . . .	35
3.6 Movimento planetário . . . . .	36

<b>4</b>	<b>Três Problemas Clássicos da Geometria Grega</b>	<b>41</b>
4.1	A trisseção do ângulo . . . . .	42
4.1.1	Construções <i>tipo Nêusis</i> . . . . .	43
4.1.1.1	Trisseção do ângulo reduzida a outro problema do <i>tipo nêusis</i> . . . . .	43
4.1.1.2	Concoide . . . . .	45
4.1.1.3	Trisseção de um ângulo utilizando a concoide de Nicomedes . . . . .	46
4.1.2	Trissetriz de Hípias . . . . .	48
4.2	Quadratura do círculo . . . . .	50
4.3	Duplicação do cubo . . . . .	54
4.3.1	Solução de Menecmo . . . . .	55
4.3.2	Solução de Diocles . . . . .	56
<b>5</b>	<b>Cicloide</b>	<b>63</b>
5.1	Definição . . . . .	63
5.2	O Paradoxo da Roda de Aristóteles . . . . .	64
5.3	Área sob um Arco de Cicloide . . . . .	66
5.4	O Problema da Braquistócrona . . . . .	67
5.5	O Problema da Braquistócrona e o movimento sobre o plano inclinado .	73
	<b>Referências</b>	<b>76</b>

# Lista de Tabelas

3.1	Dados dos planetas do sistema solar. . . . .	38
5.1	Tempo que uma partícula demora a se deslocar de $A$ para $B$ sobre uma dada curva. . . . .	74

# Lista de Figuras

3.1	Secções Cónicas. Retirado de <a href="http://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Secciones_cónicas.svg">http://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Secciones_cónicas.svg</a> . . . . .	23
3.2	Parábola . . . . .	23
3.3	Paraboloide . . . . .	24
3.4	Raio de Sol . . . . .	24
3.5	Reta Tangente . . . . .	25
3.6	Demonstração da propriedade refletora . . . . .	25
3.7	Gráfico da função quadrática . . . . .	26
3.8	Vértice da função quadrática . . . . .	26
3.9	Gráfico da função quadrática é uma parábola . . . . .	27
3.10	Cónicas obtidas, com recurso à equação polar (3.4), para os valores de $d_1$ , de $\epsilon$ e de $\varphi$ indicados. . . . .	29
3.11	Cabo com forma de catenária. Nesta construção os alunos podem alterar os valores de $a$ e de $b$ , em que $a$ é o comprimento do cabo cujo peso é igual à tensão $T_0$ e $b$ o comprimento horizontal do cabo. . .	31
3.12	Cabo com forma de parábola. Nesta construção os alunos podem alterar os valores de $a$ , $b$ , $h$ e $x$ . Em que $a$ é o comprimento do cabo cujo peso é igual à tensão $T_0$ , $b$ o comprimento horizontal do cabo, $h$ a altura mínima do cabo e $x$ a distância horizontal entre dois apoios . . . . .	33
3.13	Simulação do lançamento da uma partícula . . . . .	36
3.14	Zona Algébrica e Folha de Cálculo utilizada na implementação . . . . .	39
3.15	Órbita do planeta Terra . . . . .	40
4.1	Construção por Nêusis . . . . .	43
4.2	Trisseção do ângulo . . . . .	44

4.3	Prova da construção por Nêusis . . . . .	45
4.4	Concoide de Nicomedes . . . . .	46
4.5	concoide se a curva for uma circunferência . . . . .	46
4.6	Limaçon de Pascal . . . . .	47
4.7	Trisseção de um ângulo utilizando a concoide de Nicomedes. . . . .	47
4.8	Trissetriz de Hípias . . . . .	48
4.9	Ilustração de que a trissetriz de Hípias realmente trisseta o ângulo . . . .	49
4.10	Trissetriz . . . . .	51
4.11	Caso de semelhança de triângulos pelo <i>Teorema de Tales</i> . . . . .	52
4.12	Determinação do comprimento do <i>arco DB</i> . . . . .	53
4.13	Quadratura do círculo de raio <i>AD</i> . . . . .	53
4.14	As soluções de Menecmo . . . . .	56
4.15	Cissoide de Diocles pela definição atual. . . . .	57
4.16	Cissoide pela definição de Diocles. . . . .	57
4.17	Solução de Diocles para o problema da duplicação do cubo. . . . .	59
4.18	Solução utilizando a cissoide de Diocles segundo [25]. . . . .	61
5.1	Cicloide . . . . .	63
5.2	Paradoxo da Roda . . . . .	65
5.3	Perímetro do círculo corresponde ao limite da sucessão dos perímetros dos polígonos inscritos. . . . .	65
5.4	Explicação do Paradoxo . . . . .	66
5.5	Área sob um arco de cicloide . . . . .	67
5.6	Folha de Cálculo Utilizada na Simulação . . . . .	69
5.7	Braquistócrona . . . . .	70
5.8	Comparação entre o movimento de uma partícula sobre a cicloide invertida e sobre o plano inclinado. . . . .	74

# Capítulo 1

## Introdução

Numa época em que as tecnologias estão cada vez mais presentes na sociedade torna-se pertinente estarem também presente em ambiente de sala de aula. Por isso compete, também, à disciplina de matemática inserir as tecnologias em sala de aula e estas são uma mais-valia para o professor desenvolver um bom trabalho.

Consideramos que a utilização da tecnologia no ensino contribui para o desenvolvimento das capacidades do aluno de forma diferenciada e respeita a sua individualidade. Contudo sabemos que é necessário ter cuidado na sua utilização pois pode ser bem ou mal usada e um ensino pouco cuidado, repleto de tecnologia, não promove a aprendizagem.

Uma das formas de utilizar a tecnologia é através da utilização de programas de Geometria Dinâmica. Elaborámos, as construções descritas neste documento, com recurso ao programa de Geometria Dinâmica *GeoGebra*. Algumas dessas construções integramos em páginas escritas em HTML (ver CD-Rom). O tema abordado nesta tese é as curvas e as suas propriedades. Consideramos que foi relevante desenvolver o tema da tese com recurso a este *software* de Geometria Dinâmica. Pois, entre outras vantagens referidas mais à frente neste documento (secção 2.2), este *software* permite operar diretamente sobre objetos matemáticos (Zona Gráfica, Zona Algébrica e Folha de Cálculo) e visualizar imediatamente as mudanças produzidas.

Pretendemos, com a elaboração desta tese, mostrar que o estudo das curvas e das suas propriedades é pertinente no ensino Básico e Secundário. Consideramos que o estudo da maioria das curvas abordadas nesta tese é complexo para estes níveis de ensino. Pretendemos chamar a atenção para o facto de que essa complexidade pode ser ultrapassada com recurso a um *software* de Geometria Dinâmica. As construções e os ficheiros em HTML que efetuamos são de carácter exploratório e promovem a investigação. Pensamos que não é fundamental que os alunos saibam demonstrar algebricamente tudo mas sim que consigam interpretar, analisar, especular e concluir. Algumas construções, tais como, o problema da Braquistócrona (secção 5.5), poderão ser apresentadas só como curiosidade e analisadas apenas com os alunos que demons-

trem interesse.

As construções e os ficheiros em HTML podem ser aplicados em turma ou individualmente, sendo que compete sempre ao professor decidir sobre se a sua utilização é ou não pertinente em determinado nível de ensino, para determinada turma ou para determinado aluno. Contudo consideramos importante que o professor tenha: uma postura ativa perante o *software* e a turma, um bom conhecimento da turma antes de aplicar estas tarefas, que atente os alunos para possíveis deduções erradas (como por exemplo, erros de visualização de valores, margens de erro devido aos arredondamentos do *software* e conclusões precipitadas como no caso do Paradoxo da Roda; ver secção 5.2) e para as armadilhas do *software* utilizado.

Tivemos o cuidado de, sempre que possível, fazer a ponte entre as curvas e as suas propriedades e o quotidiano. Pensamos que este será mais um fator motivador para os alunos.

Por conseguinte, pensamos que o estudo das curvas e das suas propriedades, implementado de forma cuidada, pode motivar os alunos para a matemática e estimular a sua curiosidade.

A parte escrita desta tese é composta por cinco capítulos. Os três últimos capítulos deste documento são complementados pelos ficheiros existentes no CD-Rom e dirigidos aos alunos. Nestes capítulos descrevemos a construção dos ficheiros que achamos ser mais relevantes.

No capítulo 1, Introdução, elaboramos esta introdução.

No capítulo 2, Tecnologias no Ensino da Matemática, abordamos as tecnologias e a importância da sua utilização no ensino da Matemática (secção 2.1), analisamos a utilização de programas de Geometria Dinâmica no ensino e descrevemos o motivos que levaram à escolha do *GeoGebra* para o desenvolvimento desta tese (secção 2.2). Na secção 2.3 refletimos sobre os problemas e cuidados a ter com a utilização das tecnologias e mais especificamente com a utilização dos programas de Geometria Dinâmica no ensino.

No capítulo 3, As cónicas, descrevemos resumidamente a história das secções cónicas, analisamos, na secção 3.1, a propriedade refletora da parábola e relatamos uma possível forma de abordar esta propriedade no Ensino. Abordamos ainda, na secção 3.2, a função quadrática, tema desenvolvido no Ensino Secundário e sobre este tema referimos, entre outras coisas, como os alunos podem demonstrar que o gráfico da função quadrática é uma parábola. Na secção 3.3 descrevemos uma construção na qual os alunos podem obter os três tipos de cónicas. Na secção 3.4 retratamos algumas das aplicações, a situações do quotidiano, deste tipo de curvas e demonstramos que quando um cabo está submetido apenas ao seu próprio peso (sem existir uma distribuição horizontal uniforme) a curva que observamos é uma catenária mas quando existe distribuição uniforme horizontal desse peso a curva resultante é uma parábola. Na secção 3.5 analisamos o movimento de partículas após serem projetadas (sem

resistência do ar) e descrevemos a construção de uma simulação desse movimento. Na secção 3.6 falamos sobre o movimento planetário no sistema solar e apresentamos um processo de construção de uma simulação computacional desse movimento.

No capítulo 4, Três Problemas Clássicos da Geometria Grega, analisamos algumas das contribuições de vários matemáticos para a resolução destes três problemas, efetuamos as construções que estes matemáticos deram e descrevemos as dificuldades que surgiram na sua execução. Na secção 4.1 apresentamos dois métodos de resolução do problema da trisseção do ângulo. No primeiro método começamos por analisar a redução do problema da trisseção do ângulo a um problema de *tipo néusis*, posteriormente, utilizamos as propriedades da curva conchoide de Nicomedes para resolver esse problema. No segundo método usamos uma das curvas mais antigas da matemática atualmente conhecida por *trissetriz de Hípias*. Na secção 4.2 analisamos uma possível resolução do problema da quadratura do círculo. Na secção 4.3 descrevemos dois métodos de resolução do problema da duplicação do cubo que utilizam a redução de Hipócrates e habitualmente designados por solução de Menecmo e solução de Diocles.

No capítulo 5, Cicloide, começamos por analisar o paradoxo da roda de Aristóteles (secção 5.2), descrevemos uma construção em que os alunos podem verificar que a área sob uma cicloide é três vezes a área do seu círculo gerador (secção 5.3), referimos que a resolução do problema da braquistócrona é a cicloide invertida e descrevemos os passos de duas simulações computacionais, numa consideramos o tempo discreto e na outra consideramos o tempo contínuo, para este problema (secção 5.5) e comparamos o tempo que uma partícula demora a percorrer uma cicloide invertida e um plano inclinado, nas nossas simulações, com o tempo previsto analiticamente. (secção 5.5).

Esperamos que este trabalho seja um exemplo útil de uma abordagem, com recurso às tecnologias, do estudo de algumas curvas e das suas propriedades adequado a alunos do Ensino Básico e do Ensino Secundário.

## Capítulo 2

# Tecnologias no Ensino da Matemática

Neste capítulo iremos abordar as tecnologias e a importância da sua utilização no ensino da Matemática. Falamos sobre os programas de Geometria Dinâmica e referimos as vantagens e desvantagens da utilização em sala de aula de *software* de utilização livre. Refletimos ainda sobre os problemas e cuidados a ter com a utilização das tecnologias e em particular dos programas de Geometria Dinâmica no ensino.

### 2.1 A importância das tecnologias no ensino da Matemática

Vivemos num mundo cada vez mais tecnológico, dinâmico, exigente e interativo. É necessário um bom domínio das tecnologias para garantir acesso a um emprego e um bom desenvolvimento pessoal. Assim sendo, a escola deve assumir a sua responsabilidade como formadora de criança, jovens e adultos preparando-os para o mercado de trabalho e para viverem de forma ativa na sociedade.

Hoje em dia, é relevante um cidadão ser crítico, inovador, interveniente, persistente e colaborador, é ainda importante ter capacidade de adaptação a novas situações, agilidade de raciocínio e procurar oportunidades.

Por estes motivos, a escola já não encara os seus alunos como um conjunto informe de alunos sem personalidade, mas antes como sujeitos individuais e singulares, portadores de distintas características, contemplados de capacidades diversas, com diferentes modos de aprendizagem e, conseqüentemente, diferentes capacidades e modos de resolver problemas.

A inserção da tecnologia no ensino contribui para o desenvolvimento das capacidades do aluno de forma diferenciada e respeita a sua individualidade.

As Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar (NCTM) [17]

destacam a importância da utilização da tecnologia no ensino e aprendizagem da matemática, pois esta influencia a matemática e melhora a aprendizagem dos alunos. E tendo em conta que a matemática é uma ciência básica para as outras disciplinas, que se desenvolve juntamente com a sua utilização no quotidiano e que a tecnologia está a mudar a matemática e as suas aplicações, as NCTM referem que [17, pág. 9]:

- um computador deve estar disponível em todas as aulas para finalidades de demonstração;
- todo o aluno deve ter acesso a um computador para trabalho individual e em grupo;
- os alunos devem aprender a utilizar o computador como uma ferramenta para processamento da informação e para efetuar cálculos quando investigam e resolvem problemas.

Por um lado, compete, também, à disciplina de matemática inserir as tecnologias em sala de aula e, por outro lado, as tecnologias são uma mais-valia para o professor desenvolver um bom trabalho em sala de aula.

Entre outras coisas o computador:

- permite a exploração de vários exemplos, o que seria impossível de realizar em tempo útil manualmente;
- pode ser utilizado como ferramenta para a realização de tarefas para incentivar a compreensão e intuição matemática;
- proporciona imagens visuais de ideias matemáticas;
- facilita a organização e análise de dados;
- serve de apoio a investigações realizadas por parte dos alunos.

O recurso às tecnologias faz ainda com que «os alunos mostrem níveis mais elevados de motivação e de desenvolvimento e contribui para melhorar o seu desempenho» [13, pág. 4] pelo que a integração deste recurso é uma mais-valia a ter em conta para as aulas de Matemática.

Ao utilizar a tecnologia, a extensão e o nível das tarefas propostas pode ser alargado, pedindo ao aluno que observe factos matemáticos e suas alterações. O professor não precisa de se preocupar com o tempo que seria necessário, para as numerosas construções, caso os alunos realizassem a mesma tarefa apenas com papel e lápis. O uso de tecnologia torna mais fácil a criação de tarefas de natureza mais aberta que são mais desafiantes e estimulam a autoconfiança dos alunos. A tecnologia permite tornar o ensino mais centrado no aluno, incentiva a aprendizagem cooperativa e promove uma maior dinâmica entre o professor e o aluno.

## 2.2 Programas de Geometria Dinâmica na educação

O Plano de Matemática do Ensino Básico (PMEB) recomenda o uso das tecnologias em qualquer ano e em qualquer tema. Segundo este Plano [18, pág. 39]

«Os programas computacionais de Geometria Dinâmica e os *applets* favorecem igualmente a compreensão dos conceitos e relações geométricas, pelo que devem ser também utilizados».

Uma das formas de utilizar a tecnologia é através da utilização de programas de Geometria Dinâmica. São exemplos de programas de Geometria Dinâmica o *Cabri Géomètre* [3], o *C.a.R* [5], o *Cinderella* [6], o *The Geometer's Sketchpad* [26] e o *GeoGebra*[11].

Na elaboração dos materiais referidos ao longo desta tese usamos o programa de Geometria Dinâmica *GeoGebra*. Este programa e o programa *C.a.R* têm a vantagem de serem *software* livre e por isso de fácil acesso.

O programa de Geometria Dinâmica *C.a.R* tem uma vantagem relativamente ao *Geogebra*, pois faz interseção de lugares geométricos. Esta vantagem seria relevante para algumas construções descritas ao longo desta tese. Contudo optamos por utilizar o *GeoGebra*, principalmente, por ser o mais utilizado nos estabelecimentos de ensino portugueses. Mas encontramos outras vantagens para a utilização deste *software*:

- ser um programa de uso fácil e intuitivo;
- ter algumas construções de curvas pré-definidas;
- existir um *site* oficial de fácil consulta;
- existir um manual oficial de utilização [15] e os comandos escritos em português;
- existir um *site* onde o utilizador pode colocar e consultar material (<http://www.geogebra.org/>);
- existir um fórum onde o utilizador pode colocar e responder a questões em várias línguas inclusive em português (<http://www.geogebra.org/forum/>).

O *GeoGebra* proporciona imagens visuais das ideias matemáticas, permite operar diretamente sobre objetos matemáticos e ver de imediato as mudanças produzidas.

Segundo os seus criadores, Judith e Markus Hohenwarter, este é um *software* de Matemática dinâmico para a escola no qual se junta a Geometria, a Álgebra e o Cálculo [15].

Este *software* fornece três vistas diferentes dos objetos matemáticos: a Zona Gráfica, a Zona Algébrica, ou numérica, e a Folha de Cálculo. Elas permitem mostrar os objetos

matemáticos em três representações distintas: graficamente (por exemplo, pontos, gráficos de funções, curvas), algebricamente (por exemplo, coordenadas de pontos, equações) e nas células da folha de cálculo.

Segundo PMEB [18] a folha de cálculo é

«... um recurso tecnológico importante no desenvolvimento do pensamento algébrico uma vez que permite realizar com rapidez experiências com números e pôr em evidência relações numéricas».

Em algumas das construções descritas ao longo desta tese, como por exemplo, a simulação computacional do movimento planetário (secção 3.6), a interligação entre Zona Gráfica, Zona Algébrica e Folha de Cálculo que este *software* permite foi fundamental. Pois, se um dado problema nos leva à resolução de uma equação diferencial, que não conseguimos resolver analiticamente, podemos ter ideia da sua resolução utilizando um processo de discretização. Conseguimos implementar este processo de discretização apenas porque o *software* usado faz a interligação referida acima. Observe-se que é frequente que uma equação diferencial não tenha soluções que se possam exprimir à custa de funções dadas no Ensino Secundário, o que torna importante esta maneira de se obter soluções aproximadas. Além disso, seria possível que uma solução de uma tal equação diferencial não se pudesse definir à custa das funções pré-definidas por este *software*.

## 2.3 Problemas/cuidados com a utilização de programas de Geometria Dinâmica

Apesar de considerámos que o uso das tecnologias é vantajoso para o ensino da Matemática, devemos ter cuidado, uma vez que, toda a tecnologia pode ser bem ou mal usada. Um ensino desastrado, cheio de tecnologia, não promove a aprendizagem.

Segundo João Pedro Ponte [21, pág. 4] as tecnologias

«têm hoje um papel fundamental na sociedade e a tarefa dos educadores é tirar delas o melhor partido, conservando, como em relação a tudo, o sentido crítico».

Compete ao professor, para maximizar as potencialidades da tecnologia, selecionar ou criar tarefas matemáticas, recorrendo a esta ferramenta digital de forma correta e eficiente, no sentido de melhorar as oportunidades de aprendizagem dos seus alunos.

Segundo o PMEB na resolução de problemas geométricos, como nas tarefas exploratórias e de investigação, o professor deve ter alguns cuidados como ter em atenção que é

«... importante que os alunos tenham um tempo apropriado para realizar experiências, elaborar estratégias, formular conjecturas, descrever processos e justificá-los com rigor progressivo. Ao elaborarem justificações, produzindo pequenas cadeias dedutivas, familiarizam-se com o processo de demonstração e iniciam o raciocínio geométrico dedutivo. Os alunos devem recorrer a *software* de Geometria Dinâmica, sobretudo na realização de tarefas exploratórias e de investigação». [18, pág. 51]

Por vezes a utilização das potencialidades dos programas utilizados são complexas para os conhecimentos de alguns alunos e/ou alguns níveis de ensino. Sendo necessário o professor decidir, perante o aluno e/ou a turma, se a sua utilização deve ou não ficar restrita à vertente geométrica.

Segundo Nuno Candeias e João Pedro Ponte [4] os ambientes computacionais por si só não são suficientes para melhorar o ensino da geometria pelo que devem estar associados a tarefas significativas para os alunos, isto é, tarefas que tenham como objetivo desenvolver a sua competência geométrica.

Michel de Villiers [31] refere que não só as tecnologias exigem novas habilidades, mas também exigem uma consciencialização das armadilhas que estas podem criar. Neste artigo o autor descreve, ainda, oito armadilhas e a cada uma delas atribui uma designação:

1. Sem mudança;
2. Primeiro dominar o *software*;
3. Construção de figuras dinâmicas;
4. Aprendizagem fácil;
5. A visualização torna sempre mais fácil;
6. Reflexão e avaliação insuficiente;
7. Fazer práticas obsoletas;
8. Prova como verificação.

Em relação à primeira armadilha, *Sem mudança*, o autor menciona que muitos professores tendem a utilizar o *software* de Geometria Dinâmica como uma extensão do papel e lápis, isto é, como se fosse uma lousa. Na opinião do autor o professor deve de usar esta ferramenta para transformar as tarefas de modo a aproveitar as competências que o *software* insere e fazer atividades que sem o programa seriam impossíveis de realizar.

Quanto à segunda armadilha, *Primeiro dominar o software*, Michel de Villiers explica que muitas vezes é pressuposto, por professores e livros didáticos, que o aluno domine o *software* para o poderem utilizar em sala de aula. Segundo este artigo o aluno não tem

de dominar o *software* para, efetivamente, o utilizar. O aluno pode explorar exemplos, aprender e criar conjecturas mesmo sem dominar o programa. Para tal o professor deve fornecer aos alunos atividades onde estes só necessitem de arrastar objetos, clicar em botões de animação ou atribuir valores.

Relativamente à terceira armadilha, *Construção de figuras dinâmicas*, é referido que, juntamente com a armadilha anterior e talvez influenciado por uma interpretação errada do construtivismo, é frequente encontrar em livros que primeiro o professor deve requerer a construção de figuras de Geometria Dinâmica como quadrados, retângulos, etc, e só depois os alunos podem explorar as suas propriedades. O que segundo o autor está completamente errado por três razões:

- Requer um bom conhecimento e experiência no *software*;
- Pode demorar muito tempo e o aluno nunca conseguir explorar as suas propriedades ou fazer conjecturas;
- A construção de figuras exige um nível cognitivo mais elevado do que explorar e observar propriedades.

O autor considera ainda que pedir aos estudantes para fazerem as suas figuras dinâmicas é uma estratégia de aprendizagem boa mas que isso só deve ter lugar quando o aluno já sabe todas as propriedades das figuras em causa.

Em relação à armadilha quatro, *Aprendizagem fácil*, o autor comenta que por vezes pensa-se que a investigação de um problema ou teorema através da Geometria Dinâmica faz com que estes sejam automaticamente e rapidamente aprendidos. No artigo é chamada a atenção para o facto de que se o estudante não for criticamente envolvido e cuidadosamente orientado a observar e analisar o que está a acontecer na tela este pode não reter qualquer aprendizagem.

A quinta armadilha, *A visualização torna sempre mais fácil*, relata que a visualização do que acontece quando o estudante arrasta objetos, clica em botões de animação ou atribui valores, pode ser uma mais-valia ou não. Pois esta visualização pode distrair e tornar confusa a construção, principalmente em utilizadores inexperientes.

Quanto à sexta armadilha, *Reflexão e avaliação insuficiente*, o artigo refere que para o professor começar a utilizar efetivamente um *software* de Geometria Dinâmica é preciso repensar criticamente o conteúdo, os objetivos e a abordagem de ensino usada. Por outro lado, o professor deve reavaliar sistematicamente e rever a sua metodologia na utilização do *software*.

Relativamente à sétima armadilha, *Fazer práticas obsoletas*, Michel de Villiers menciona que apesar da importância da tecnologia melhorar práticas obsoletas existem atividades que devem ser mantidas. O autor refere como exemplo o caso das pavimentações que são complexas de manusear com um *software* de Geometria Dinâmica, considerando mais eficaz a utilização de azulejos diferentes e o manuseamento dos mesmos.

Em relação à oitava armadilha, *Prova como verificação*, é referido que o maior problema pedagógico e armadilha do *software* de Geometria Dinâmica é convencer, principalmente os estudantes mais inexperientes, da necessidade de uma prova para verificarem a veracidade das suas deduções. Esta armadilha chama a atenção para o facto de os alunos poderem retirar algumas conclusões falsas das suas observações. Por exemplo, os alunos podem cair nesta armadilha ao analisarem o Paradoxo da Roda de Aristóteles abordado nesta tese na secção 5.2.

Vimolan Mudaly e Michael de Villiers [19] analisam uma tarefa matemática para perceberem o processo de modelação matemática e a sua relação com a prova. Os autores concluíram que a modelação matemática contribui para que os alunos tenham necessidade de provarem o que observam e explorem a diversidade de caminhos possíveis para chegar à prova de um resultado. Sendo que este artigo refere que os altos níveis de convicções que surgiram durante o processo de modelação, provavelmente, contribuiu para o impulso para a prova final, e que, a prova que serviu como explicação foi diferente da prova tradicional do manual.

João Almiro [12, de pág. 275 a 315] analisa até que ponto a utilização de materiais manipuláveis e de tecnologia influencia a contexto de aprendizagem e que constrangimentos traz ao professor a condução de aulas que envolvem a sua utilização. O autor do artigo identifica que as principais dificuldades do professor nestas aulas são:

- Gerir o tempo necessário para a resolução de tarefas;
- Planificação de tarefas adequadas aos alunos (nível de exigência);
- Criar grupos de trabalho e a sua constituição;
- Prestar apoio eficaz e oportuno a todos os grupos;
- Escolher a melhor forma para ajudar o aluno, sem indicar a resposta;
- O elevado número de alunos das turmas;
- Barulho considerado por parte da comunidade escolar como sendo falta de controlo da turma.

Apesar das dificuldades encontradas o autor deste estudo refere que:

«... penso que não há nada mais gratificante do que ver os alunos satisfeitos e muito envolvidos na resolução das tarefas, conseguindo, por vezes, fazer aqueles *clicks* no avanço dos problemas e que nos deixam entusiasmados e a pensar que vale a pena o investimento neste tipo de atividades. Considero que os resultados que apresento evidenciam ter havido da parte dos alunos momentos em que exploraram uma grande diversidade de ideias matemáticas, em que experimentaram e exploraram situações, tornando-os mais aptos a pensar matematicamente, para o que contribuíram os recursos utilizados – o computador e materiais manipuláveis.» [12, pág. 305]

Uma dificuldade que existe no uso das tecnologias, que é transversal a todos os métodos de ensino e que está patente em muitas escolas é a dificuldade e a resistência por parte dos professores a trabalharem em grupo. Para um professor isolado numa escola não é fácil decidir que tarefas deve selecionar e propor aos seus alunos, saber como as deve de orientar e que questões deve colocar, ultrapassar os medos quando experimenta métodos novos e vencer as dificuldades que encontra na gestão das suas aulas. Mas se existir um ambiente colaborativo entre colegas, em que os professores são capazes de discutir entre si sobre os seus dilemas, os seus conflitos e sobre o que acontece nas suas aulas, favorecendo a troca de ideias e de experiências letivas, é possível enriquecer as práticas letivas e promover a inovação e a melhoria da qualidade do ensino.

# Capítulo 3

## As cónicas

O primeiro matemático que os documentos associam às secções cónicas foi Menecmo (c. 380 a.C. – c. 320 a.C.), um possível tutor de Alexandre o Grande e provavelmente irmão de Dinóstrato.

No comentário ao tratado *Da Esfera e do Cilindro*, da autoria de Arquimedes, Eutócio reproduz uma carta (que não se sabe se é autêntica) de Eratóstenes ao rei Ptolomeu III do Egito, em que o autor teria afirmado:

«Não procures conseguir coisas difíceis de executar por meio dos cilindros de Arquitas, nem pela tríade de secções cónicas de Menecmo, nem descrevê-las por alguma espécie de linhas curvas do divino Eudoxo; pois por meio destas placas, construirás milhares de médias, começando por um pequeno número de bases.» [9]

Segundo o autor Carlos Correia de Sá no capítulo *A Matemática na Grécia Antiga* de [9] as «coisas difíceis de executar» são os dois meios proporcionais entre dois segmentos de reta, que Arquitas de Tarento (séculos V – IV a.C.) teria encontrado por intermédio da intersecção de três superfícies para tentar resolver o problema da duplicação do cubo. E a «tríade de secções cónicas de Menecmo» é constituída pelos três tipos de curvas que se podem obter por intersecção de um cone de base circular com um plano, hoje conhecidas pelos nomes de elipses, parábolas e hipérbolas.

O matemático e astrólogo Conon de Samos (246 a.C. – 222 a.C.) era amigo de Arquimedes de Siracusa (287 a.C. – 212 a.C.) e com este trocava ideias e estudos matemáticos. Ambos contribuíram para o estudo das cónicas. Arquimedes, num feito provavelmente lendário, terá construído espelhos parabólicos e com estes espelhos incendiava as galeras romanas antes de estas conseguirem alcançar a cidade de Siracusa. Com os espelhos parabólicos Arquimedes conseguia concentrar a luz do sol num ponto do barco romano, provocando neste um incêndio. Siracusa veio, no entanto, a ser tomada sob o domínio dos romanos e foi durante a invasão da cidade que Arquimedes terá sido morto por um soldado romano, apesar de Marcelo, general comandante dos

invasores, ter dado ordens para que o famoso génio fosse poupado.

Apolónio de Pérgamo (262 a.C. – 190 a.C.), matemático e astrónomo grego, escreveu um tratado intitulado *As cónicas*, uma das principais obras de matemática da Antiguidade, composta por oito livros dos quais o último não chegou aos nossos dias. Nesta obra, Apolónio reúne e organiza os conhecimentos que existiam sobre cónicas até ao momento e apresenta progressos referindo, por exemplo, que a partir de um cone podem-se obter as três curvas cónicas ou que as propriedades destas curvas não dependem do cone ser reto ou oblíquo.

É no comentário de Eutócio sobre *As Cónicas* de Apolónio de Pérgamo que temos conhecimento do primeiro conceito de cónica embora neste comentário o nome de Menecmo não seja mencionado. Gémino, um matemático do século I a.C., é a fonte de informação de Eutócio para escrever o comentário. Parte deste comentário pode ser consultado em [9, pág. 315].

Segundo este comentário, na Grécia até aos finais do século III a.C. as secções cónicas eram sempre produzidas pela intersecção de um cone com um plano perpendicular à geratriz. Obtinham-se as diferentes cónicas por secção de cones de diferentes tipos. A classificação dos cones era feita nessa altura através do ângulo no vértice. Neste comentário é referido ainda que Apolónio de Pérgamo, mais tarde, provou que, geralmente, em todos os cones, retos ou não, se podem obter todas as secções, conforme as diferentes posições do plano relativamente ao cone.

Já no século XVII, com o aparecimento da geometria analítica, iniciou-se o estudo analítico das cónicas, identificando-se o foco e a diretriz.

A designação de cónica advém do facto destas curvas se poderem obter através da intersecção entre uma superfície cónica e um plano (plano de corte). A intersecção dá origem a três tipos de cónicas: elipses, parábolas e hipérbolas. Podemos observar na figura 3.1 as diferentes posições do plano de corte em relação à geratriz e ao eixo de rotação da superfície cónica que dão origem aos três tipos de cónicas:

- se o plano de corte interseccionar todas as geratrizes obtém-se uma elipse – ou um círculo (caso particular da elipse em que os dois eixos têm o mesmo comprimento) se também for perpendicular ao eixo de rotação da superfície cónica;
- se o plano de corte for paralelo a uma geratriz obtém-se uma parábola;
- nos outros casos a curva resultante é uma hipérbole.

A cónica que mais evidenciamos neste capítulo é a parábola. Na secção 3.1 analisamos a propriedade refletora da parábola e relatamos uma possível forma de abordar esta propriedade no Ensino. Na secção 3.2 abordamos a função quadrática, tema desenvolvido no Ensino Secundário e sobre este tema referimos, entre outras coisas, como os alunos podem demonstrar que o gráfico da função quadrática é uma parábola. Na secção 3.3 descrevemos uma construção, em *GeoGebra*, através da qual os alunos

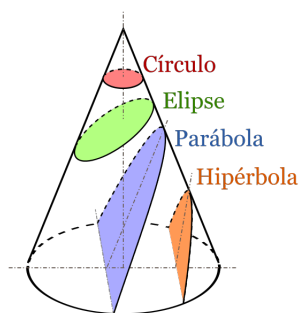


Figura 3.1: Secções Cônicas. Retirado de [http://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Secciones\\_cónicas.svg](http://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Secciones_cónicas.svg)

podem obter os três tipos de cônicas. Na secção 3.4 descrevemos algumas das aplicações, a situações do quotidiano, deste tipo de curvas e demonstramos que quando um cabo está submetido apenas ao seu próprio peso (sem existir uma distribuição horizontal uniforme) a curva é uma catenária mas quando existe distribuição uniforme horizontal desse peso a curva resultante é uma parábola. Na secção 3.5 iremos analisar o movimento de partículas após serem projetadas (sem resistência do ar). Na secção 3.6 falamos sobre o movimento do sistema dos planetas no sistema solar e apresentamos um processo de construção de uma simulação computacional, em *GeoGebra*, para o movimento planetário.

### 3.1 A parábola

A parábola pode-se definir como o conjunto dos pontos do plano equidistantes de um ponto fixo e de uma reta. Ao ponto fixo chama-se foco e à reta diretriz da parábola. A reta que é perpendicular à diretriz e contém o vértice e o foco designa-se por eixo de simetria da parábola. Na figura 3.2 está representada uma parábola e identificado o foco, a diretriz e o eixo de simetria.

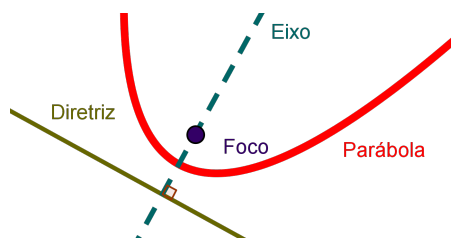


Figura 3.2: Parábola

Quando giramos um arco de parábola, em torno do seu eixo de simetria, a figura resultante é uma parte de um parabolóide. Portanto, através de uma rotação a curva pode ser expandida e dar origem a uma superfície tridimensional parabólica como se pode observar na figura 3.3.

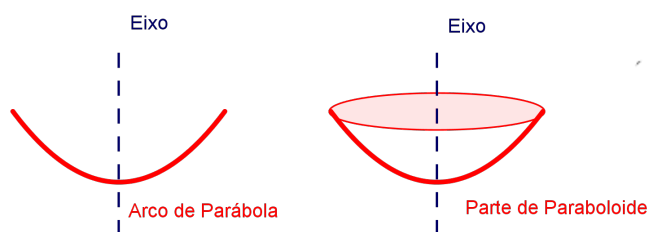


Figura 3.3: Parabolóide

Existem muitas aplicações tecnológicas da parabolóide, nomeadamente na ótica e na acústica, devido à propriedade refletora da parábola.

Para os alunos conseguirem visualizar e concluir qual a propriedade refletora da parábola construímos em *GeoGebra* uma aplicação que exportamos para uma página em HTML (figura 3.4) onde estava representada uma parábola e um raio de sol incidente nesta.

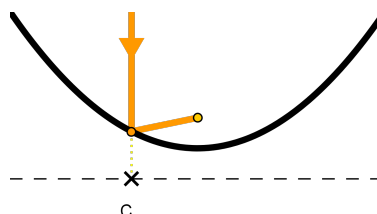


Figura 3.4: Raio de Sol

Nesta aplicação os alunos podem deslocar com a ajuda do rato o ponto  $C$ , o que faz com que o raio de sol mude de posição. Os alunos concluirão facilmente qual a posição relativa do raio de sol em relação ao eixo da parábola. E com a ajuda do professor poderão concluir a propriedade refletora da parábola.

**Propriedade refletora da parábola:** *Em qualquer parábola, um raio paralelo ao seu eixo de simetria reflete-se passando pelo foco, e reciprocamente, todo o raio emitido pelo foco, reflete-se paralelamente ao eixo de simetria.*

Para demonstrar a propriedade refletora da parábola é necessário ter conhecimento do próximo teorema.

#### TEOREMA 3.1.1

*Seja  $A$  um ponto da parábola e  $C$  a sua projeção sobre a diretriz da parábola. A reta tangente à parábola em  $A$  é a bissetriz do ângulo  $C\hat{A}F$ , em que  $F$  é o foco da parábola.*

Realizámos, em *GeoGebra*, uma animação que ilustra a ideia da demonstração do teorema 3.1.1 e exportamos esta animação para uma página em HTML. Nesta página escrevemos uma lista de procedimentos que os alunos devem seguir para perceberem como se demonstra o teorema 3.1.1.

Lista de procedimentos que os alunos devem seguir:

- Verificar que não existe outro ponto da reta que bissecta o ângulo  $C\hat{A}F$  que pertença à parábola.
- Com o rato deslocar o ponto  $C$  e o ponto  $I$  da animação (figura 3.5) e refletir sobre o que se pode concluir.

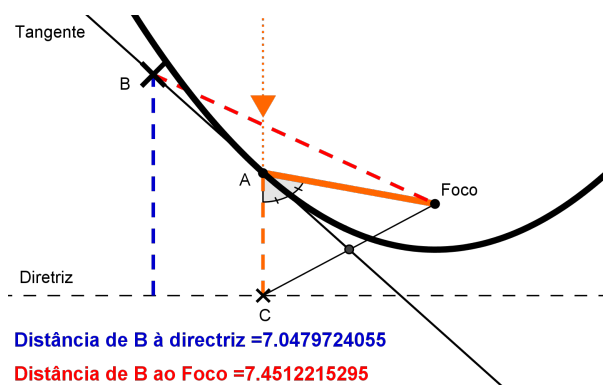


Figura 3.5: Reta Tangente

A propriedade refletora da parábola é bastante simples de demonstrar e os alunos podem ter uma ideia para a sua demonstração analisando a construção que fizemos em *GeoGebra* representada na figura 3.6.

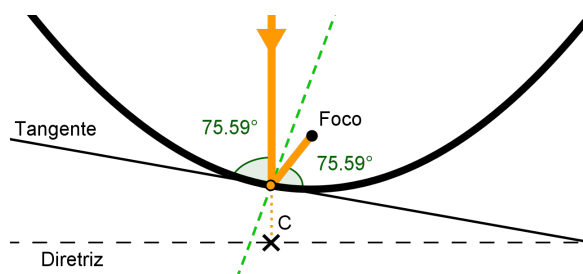


Figura 3.6: Demonstração da propriedade refletora

## 3.2 Função quadrática

**DEFINIÇÃO 3.2.1** Uma função quadrática é uma função real de variável real  $f$  definida por:  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , onde  $a$ ,  $b$  e  $c$  são números reais e  $a \neq 0$ .

Fizemos em *GeoGebra* uma construção onde os alunos podem visualizar o gráfico de uma função quadrática e identificar a sua forma, figura 3.7. Nesta aplicação os alunos podem atribuir valores a  $a$ ,  $b$  e  $c$ , e verificarem quais as alterações que o gráfico desta

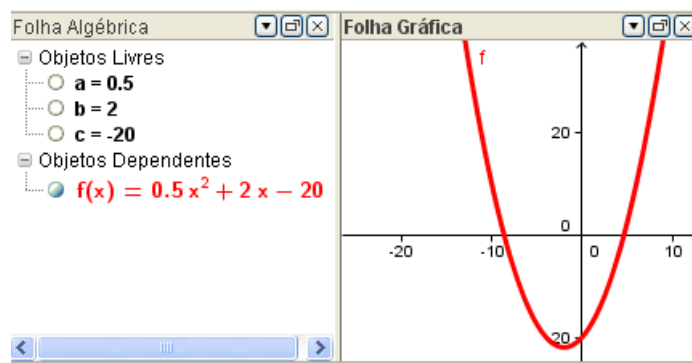


Figura 3.7: Gráfico da função quadrática

função sofre. Na descrição escrita em linguagem HTML que acompanha a construção em *GeoGebra* é chamada a atenção dos alunos para não se esquecerem de atribuir valores negativos a todos os parâmetros

Dada uma função quadrática  $f$  como definimos em 3.2.1 é sempre possível escrevê-la na forma  $f(x) = a(x - h)^2 + k$ , em que  $V(h, k)$  é o vértice da parábola. O vértice da parábola corresponde ao ponto com ordenada máxima ou ao ponto com ordenada mínima do gráfico da função quadrática  $f$ .

Na figura 3.8 está representada uma construção em *GeoGebra* onde os alunos podem descobrir as coordenadas do vértice da parábola e verificar que realmente se pode escrever a função quadrática utilizando os valores de  $a$ ,  $h$  e  $k$ , na forma  $f(x) = a(x - h)^2 + k$ .

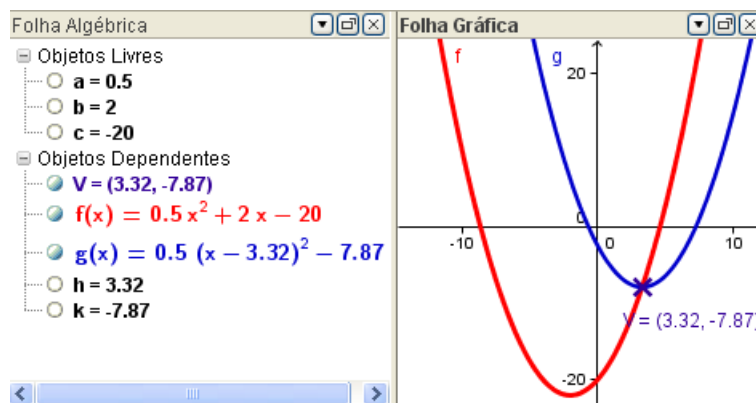


Figura 3.8: Vértice da função quadrática

Aparentemente, pelas figuras 3.7 e 3.8, o gráfico da função quadrática é uma parábola. Isto é verdade?

Como já foi referido, na secção 3.1, a parábola pode-se definir como o conjunto dos pontos do plano equidistantes de um ponto fixo (foco) e de uma reta (diretriz). Então para verificarmos que o gráfico de uma função quadrática é uma parábola basta, portanto, encontrar o ponto e a reta dos quais a função quadrática é equidistante.

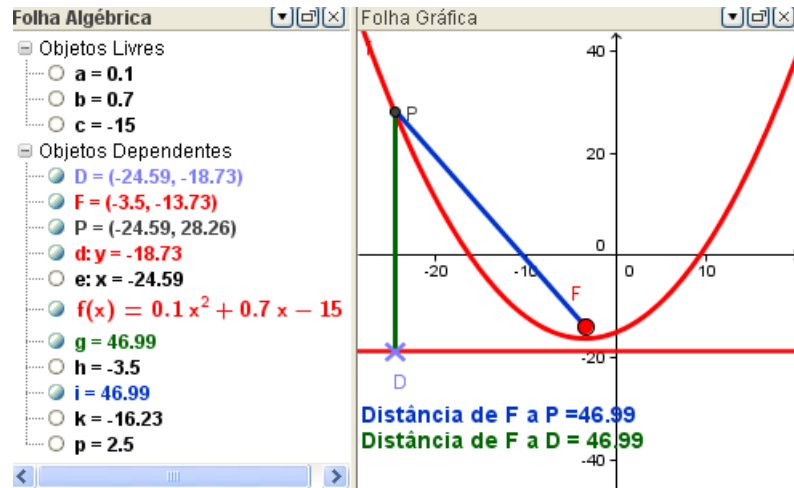


Figura 3.9: Gráfico da função quadrática é uma parábola

Na figura 3.9 está representada uma construção interativa onde os alunos podem verificar que existe sempre um ponto e uma reta nas condições acima e, por conseguinte, concluírem que o gráfico de uma função quadrática, realmente, é uma parábola.

De seguida demonstramos analiticamente que a conclusão que os alunos retiram da construção interativa é verdadeira. Consideramos que os alunos do Ensino Secundário mais interessados conseguem entender esta demonstração analítica e por isso disponibiliza-mo-la, com pormenores mais detalhados, no ficheiro escrito em HTML referente a este tema.

**DEMONSTRAÇÃO:** Vamos obter a expressão analítica de uma parábola com vértice  $V(h, k)$  cuja diretriz é uma reta horizontal. Consideremos  $r : y = k - p$  a diretriz e o ponto  $F = (h, k + p)$  o foco da parábola. Dado um ponto qualquer  $P = (x, y)$  da parábola este tem de ser equidistante de  $r$  e de  $F$ , pela definição de parábola.

Temos que:

- A distância de  $P$  a  $r$  é  $d(P, r) = y - (k - p) = y + p - k$ , porque  $r$  é uma reta horizontal.
- A distância de  $P$  a  $F$  é  $d(P, F) = \sqrt{(x - h)^2 + (y - (k + p))^2}$ .

E como  $P$  pertence à parábola, então  $d(P, r) = d(P, F)$ , portanto, temos a equação (3.1).

$$\sqrt{(x - h)^2 + (y - (k + p))^2} = y + p - k \quad (3.1)$$

Elevando a expressão ao quadrado, desenvolvendo os quadrados, dividindo os termos

por  $4p$  e reduzido os termos semelhantes obtemos a equação (3.2).

$$y = \frac{x^2}{4p} - \frac{2hx}{4p} + \frac{h^2}{4p} + k \quad (3.2)$$

Logo, como uma função quadrática se pode escrever na forma  $f(x) = ax^2 + bx + c = y$ , temos que  $p$ ,  $h$  e  $k$  são obtido pelas expressões (3.3).

$$\begin{cases} p = \frac{1}{4a} \\ h = -2bp \\ k = \frac{h^2}{4p} - c \end{cases} \quad (3.3)$$

Por conseguinte, o gráfico da função quadrática  $f$  tem a forma de uma parábola que consiste no lugar geométrico dos pontos do plano equidistantes do ponto  $F = (h, k + p) = \left(-2bp, \frac{h^2}{4p} - c + \frac{1}{4a}\right)$  e da reta  $r : y = k - p = \frac{h^2}{4p} - c - \frac{1}{4a}$ . ■

### 3.3 Construção das cónicas em *GeoGebra*

Nesta secção iremos apresentar o processo de construção de uma simulação computacional para obter os três tipos de cónicas. Para executar esta construção utilizamos a equação em coordenadas polares (3.4). Esta equação foi obtida com base em [23].

Dado um número real não negativo  $\epsilon$  (a excentricidade), um ponto  $F$  (o foco) e uma reta  $r$  (a diretriz), que não contém o ponto  $F$ , vai-se considerar a cónica formada pelo lugar geométrico dos pontos  $P$  tais que  $d(P, F) = \epsilon \times d(P, r)$ .

Consideremos  $s$  a reta perpendicular à diretriz que passa pelo foco da cónica.

Vamos supor que  $F = O(0, 0)$  e seja  $d_1$  a distância de  $r$  a  $F$ . Com a equação polar:

$$p = \frac{k}{1 + \epsilon \cos(\theta - \varphi)} \quad (3.4)$$

em que  $k = d_1 \times \epsilon$  e  $\varphi$  é o ângulo entre a reta  $s$  e o eixo dos  $xx$ , conseguimos obter as seguintes cónicas :

- se  $\epsilon = 0$  é o ponto  $F$ ;
- se  $\epsilon < 1$  é uma elipse;
- se  $\epsilon = 1$  é uma parábola;
- se  $\epsilon > 1$  é uma hipérbole.

A vantagem de utilizar a equação (3.4) é que esta permite obter de forma unificada e estritamente bi-dimensional todas as cónicas com a exceção da circunferência. A circunferência (de raio  $k$ ) é um caso limite em que  $d_1$  é muito grande e  $\epsilon$  muito próximo de zero ( $e k = d_1 \times \epsilon$ ).

Na construção que efetuamos sobre as cónicas os alunos podem alterar os valores de  $\epsilon$ , de  $d_1$  e de  $\varphi$ . Esta construção está retratada na figura abaixo.

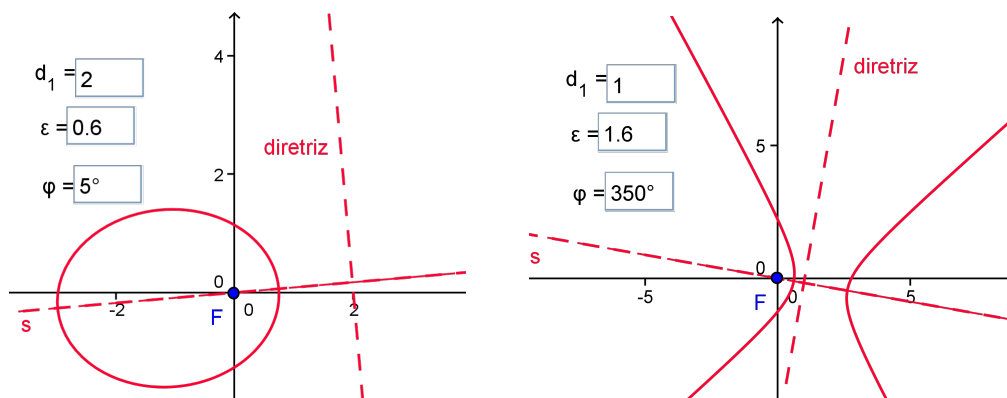


Figura 3.10: Cónicas obtidas, com recurso à equação polar (3.4), para os valores de  $d_1$ , de  $\epsilon$  e de  $\varphi$  indicados.

### 3.4 Cónicas no quotidiano

Nesta secção iremos apresentar alguns exemplos de cónicas na natureza, arquitetura, engenharia, astronomia e na tecnologia.

As cónicas podem ser encontradas na natureza e por esse motivo foram objeto de estudo, ao longo do tempo, por muitos matemáticos. A elipse e a hipérbole, por exemplo, correspondem às órbitas de alguns planetas, cometas e outros corpos celestes. A trajetórias de projéteis, bolas, pontos, partículas atômicas, jatos de água, etc, são, geralmente, arcos de parábolas, que são tanto mais perfeitos quanto menor é a resistência do ar. À ciência que estuda a trajetória e impacto dos projéteis chama-se Balística a qual iremos abordar na secção 3.5.

A hipérbole, ao rodar em torno de um dos eixos de simetria, gera uma superfície que tem o nome de hiperboloide de revolução. Segundo Enéias Prado e Daniel Geraldino [22] o hiperboloide de uma folha é usado na construção das torres de arrefecimento de centrais de energia, nomeadamente em centrais atômicas devido a serem construções muito resistentes.

O astrónomo e matemático alemão Johannes Kepler, em 1609, descobriu que cada planeta descreve uma elipse da qual o Sol ocupa um dos focos como veremos na secção 3.6. O interesse de Kepler pelas cónicas surgiu devido às suas aplicações à ótica e à construção de espelhos parabólicos.

É comum observarmos no alto das residências e dos edifícios antenas parabólicas. Estas antenas captam ondas eletromagnéticas que são enviadas por satélites em órbita ao redor da Terra. Isto só é possível devido à parábola refletir o conjunto de raios recebidos num único ponto (o foco da parábola). Neste ponto encontra-se posicionado o recetor de ondas, que enviará o sinal recebido para um conversor que as descodificará e enviará para o recetor da televisão. Os aparelhos de radar recebem o eco de pulsos eletromagnéticos de forma semelhante às antenas parabólicas.

Os refletores parabólicos dos faróis e das lanternas permitem que a luz da lâmpada localizada no foco se propague em raios paralelos ao eixo da parábola formando o feixe. As lentes parabólicas posicionadas na parte de trás dos faróis dos veículos permitem que a luz gerada pelos mesmos seja direcionada para um ponto específico, o foco da parábola, que normalmente é apontado para o solo, evitando desta forma que a luz de um carro ofusque a visão de um condutor que vem em direção oposta.

Na engenharia o cabo de uma ponte flexível homogêneo suspenso em equilíbrio pode assumir a forma de uma catenária ou de uma parábola. Este assume a forma de uma curva denominada de catenária quando o cabo está submetido apenas ao seu próprio peso e assume a forma de uma parábola quando está submetido a uma força uniformemente distribuída na horizontal. Está submetido a uma força uniformemente distribuída na horizontal por exemplo no caso de uma ponte suspensa de um cabo quando o peso do cabo é insignificante comparado com o da ponte.

De seguida, vamos demonstrar que quando o cabo de uma ponte está submetido a uma força uniformemente distribuída na horizontal, ou seja, quando a carga que ocorre sobre o cabo é uniformemente distribuída ao longo da distância entre os dois apoios sucessivos esta ponte tem a forma de parábola. Nesta demonstração vamos começar por demonstrar que quando o cabo está submetido apenas ao seu próprio peso (sem existir uma distribuição horizontal uniforme) a curva é uma catenária mas quando há distribuição uniforme horizontal desse peso a curva resultante é uma parábola.

**DEMONSTRAÇÃO:** Consideremos um cabo de uma ponte flexível homogêneo suspenso por dois apoios, com a mesma altura, em equilíbrio e apenas sujeito ao seu próprio peso.

Seja  $s$  o comprimento do segmento de cabo  $AB$ , em que  $A$  é o ponto do cabo com altura mínima e  $B$  um ponto do cabo à direita de  $A$ .

Temos que, tal como podemos observar na figura 3.11, sobre o ponto  $A$  atua uma força horizontal que consideramos com intensidade  $T_0$  e sobre o ponto  $B$  atua uma força oblíqua que consideramos ter intensidade  $T_1$  e que faz um ângulo  $\theta$  com a horizontal.

Podemos decompor a força  $T_1$  segundo as suas componentes horizontal ( $T_{1,x}$ ) e vertical ( $T_{1,y}$ ) cuja intensidade é dada pelas equações (3.5) e (3.6) respetivamente.

$$T_{1,x} = T_1 \cos \theta \tag{3.5}$$

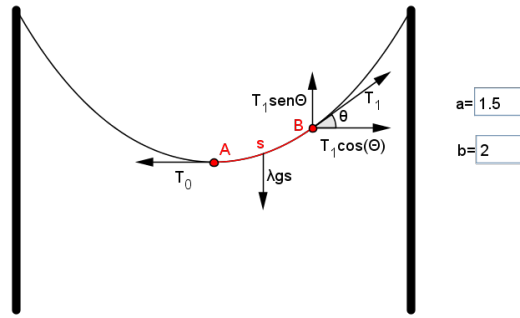


Figura 3.11: Cabo com forma de catenária. Nesta construção os alunos podem alterar os valores de  $a$  e de  $b$ , em que  $a$  é o comprimento do cabo cujo peso é igual à tensão  $T_0$  e  $b$  o comprimento horizontal do cabo.

$$T_{1,y} = T_1 \sin \theta \quad (3.6)$$

Temos ainda que sobre um segmento de cabo  $AB$  atua uma força cuja intensidade é  $\lambda gs$ , em que  $\lambda$  é a massa por unidade de tempo,  $g$  a aceleração de gravidade e  $s$  o comprimento.

Como o cabo está em equilíbrio temos que, pela segunda Lei de Newton, as forças que atuam segundo a componente horizontal anulam-se (com intensidades  $T_0$  e  $T_{1,x} = T_1 \cos \theta$ ) e as forças que atuam segundo a componente vertical, também, se anulam (com intensidades  $\lambda gs$  e  $T_{1,y} = T_1 \sin \theta$ ). Isto é, as forças que atuam segundo a componente horizontal e as forças que atuam segundo a componente vertical respeitam as equações (3.7) e (3.8) respectivamente.

$$T_0 = T_1 \cos \theta \quad (3.7)$$

$$\lambda gs = T_1 \sin \theta \quad (3.8)$$

Das equações (3.7) e (3.8) podemos obter a equação (3.9).

$$\tan \theta = \frac{\lambda gs}{T_0} \quad (3.9)$$

Consideremos  $a = \frac{T_0}{\lambda g}$  o comprimento do material cujo peso é igual à intensidade  $T_0$ . Então a equação (3.9) é dada pela equação (3.10).

$$\tan \theta = \frac{s}{a} \quad (3.10)$$

Como o valor de  $\tan \theta$  é o declive da reta tangente em  $B$  obtemos a equação (3.11).

$$\frac{dy}{dx} = \frac{s}{a} \quad (3.11)$$

Como sabemos que o comprimento de arco de uma curva é dado pela fórmula:

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Temos que,

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \frac{s^2}{a^2}} &\Leftrightarrow \frac{ds}{\sqrt{1 + \frac{s^2}{a^2}}} = dx \\ &\Rightarrow a \operatorname{arcsinh}\left(\frac{s}{a}\right) = x + k \end{aligned}$$

em que  $k$  é um número real e podemos considerar  $k = 0$  sem perda de generalidade, isto é,  $a \operatorname{arcsinh}\left(\frac{s}{a}\right) = x$ .

Logo, obtemos a equação (3.12).

$$\frac{s}{a} = \sinh\left(\frac{x}{a}\right) \quad (3.12)$$

Através das equações (3.11) e (3.12) temos que:

$$\frac{dy}{dx} = \sinh\left(\frac{x}{a}\right)$$

portanto, temos que

$$y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right) + k_1$$

em que  $k_1$  é um número real e podemos novamente considerar  $k_1 = 0$  sem perda de generalidade. Portanto,  $y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$  é a expressão analítica de uma catenária.

Ou seja, até este momento demonstrámos que quando o cabo está submetido apenas ao seu próprio peso tem a forma de uma catenária. Agora precisamos de demonstrar que quando existe uma distribuição uniforme horizontal do peso a forma do cabo é uma parábola.

Consideremos  $x$  a distância entre dois pontos de apoio sucessivos, como podemos ver na figura 3.12, e consideremos que o peso está uniformemente distribuído. A equação (3.11) será traduzida, neste caso, pela equação:

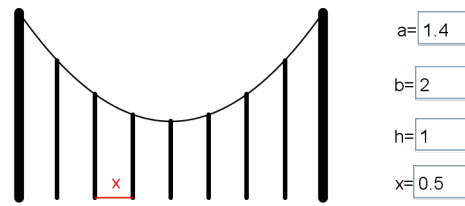


Figura 3.12: Cabo com forma de parábola. Nesta construção os alunos podem alterar os valores de  $a$ ,  $b$ ,  $h$  e  $x$ . Em que  $a$  é o comprimento do cabo cujo peso é igual à tensão  $T_0$ ,  $b$  o comprimento horizontal do cabo,  $h$  a altura mínima do cabo e  $x$  a distância horizontal entre dois apoios .

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{a}$$

logo,

$$y(x) = \frac{x^2}{2a} + h$$

em que  $h$  é um número real e, portanto, obtivemos a expressão analítica de uma parábola. ■

### 3.5 Projéteis

Nesta secção iremos analisar o movimento de partículas após serem projetadas.

Balística é a Ciência que estuda o movimento dos projéteis lançados no espaço por uma força determinada, o que geralmente está relacionado com o disparo de projéteis por uma arma de fogo. Ao estudar-se um projétil disparado por uma arma de fogo, pode-se separar o movimento em três partes distintas: a balística interior, balística exterior e a balística terminal. A balística interior fica encarregada de estudar o que ocorre desde o momento do disparo até o instante em que o projétil abandona a arma. Este estudo analisa a temperatura, volume e pressão dos gases no interior da arma durante a explosão do material combustível, assim como também analisa o formato da arma e do projétil. Dependendo da quantidade utilizada de pólvora, deve ser estudado qual o material utilizado para a construção da arma e do projétil para evitar explosões desagradáveis.

A construção do cano interno da arma também tem de ser bem projetada. Grandes desenvolvimentos da balística interior foram realizados por Benjamin Robins, um engenheiro que realizou diversas experiências nesta área no século XVIII. A balística exterior trata de estudar o que ocorre a partir do instante em que o projétil abandona a arma e o instante em que este atinge o alvo. Neste estudo entra a aerodinâmica,

preocupada em estudar qual é a relação entre o movimento do projétil e o ar que o envolve. Calibre, formato, massa, velocidade inicial e rotação são fatores determinantes para a construção de um projétil com grande poder de destruição. Da simples análise física do assunto utilizando energia, podemos deduzir que a massa e a velocidade são muito importantes no desenvolvimento de uma arma e de um projétil, já que a energia cinética de um corpo é igual a  $\frac{1}{2}mv^2$ , e como a energia que será transmitida ao alvo será igual à energia cinética, a maximização desta permitirá um melhor resultado. Um dos motivos de controvérsia do passado estava relacionado com a trajetória dos projéteis.

Antes de Galileu, acreditava-se que a trajetória descrita por um projétil era retilínea, porém Galileu e Newton demonstraram que a trajetória de qualquer corpo sob ação da gravidade era parabólica. Os métodos utilizados para a medição da velocidade dos projéteis eram variados, e podiam ser feitos através da medição do momento ( $p = mv$ ) deles ou então da distância percorrida entre dois pontos em um intervalo de tempo.

A balística terminal encarrega-se de estudar o que ocorre no momento do impacto do projétil com o alvo.

Nos últimos anos, o estudo da balística tem obtido grandes êxitos, já que o desenvolvimento de fotografias de alta-velocidade e do estroboscópio têm permitido o estudo aprofundado da movimentação de projéteis desde o momento em que são disparados até o instante em que atingem o alvo. Estes estudos são feitos através da inclusão destes dados em computadores que permitem a otimização de armas e projéteis.

Na próxima subsecção vamos analisar o lançamento de uma partícula sem ter em conta a resistência do ar.

### 3.5.1 Lançamento de um projétil sem resistência do ar

Consideremos o lançamento de um projétil que nesta secção será o lançamento de uma partícula de massa 1 a partir do ponto  $P_0 = (x_0, y_0)$  e com uma velocidade inicial  $v_0$ , que faz um ângulo  $\theta$  com o eixo dos  $xx$  ( $\theta$  pode ser igual a zero). Portanto, a velocidade inicial da partícula é dada pelo vetor (3.13).

$$\vec{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y}) = (v_0 \cos \theta, v_0 \sin \theta) \quad (3.13)$$

Por outro lado, como nesta secção desprezamos a resistência do ar, o projétil está apenas sujeito à aceleração da gravidade ( $g$ ) que atua em sentido contrário ao eixo dos  $yy$ . Assim sendo, o vetor aceleração é dado por (3.14).

$$\vec{a} = (0, -g) \quad (3.14)$$

e, por conseguinte, as componentes horizontal ( $a_x$ ) e vertical ( $a_y$ ) da aceleração são, respetivamente, (3.15) e (3.16).

$$\vec{a}_x = 0 \vec{e}_x \quad (3.15)$$

$$\vec{a}_y = -g \vec{e}_y \quad (3.16)$$

considerando  $\vec{e}_x$  é o vetor unitário segundo o eixo dos  $xx$  e  $\vec{e}_y$  é o vetor unitário segundo o eixo dos  $yy$ .

Integrando as componentes da aceleração em ordem a  $t$  e considerando as condições iniciais para a velocidade,  $\vec{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y}) = (v_0 \cos \theta, v_0 \sin \theta)$ , obtemos que as componentes horizontal e vertical da velocidade são, respetivamente, as equações (3.17) e (3.18).

$$\vec{v}_x = v_{0x} \vec{e}_x = v_0 \cos \theta \vec{e}_x \quad (3.17)$$

$$\vec{v}_y = (v_{0y} - gt) \vec{e}_y = (v_0 \sin \theta - gt) \vec{e}_y \quad (3.18)$$

Integrando agora as componentes da velocidade em ordem a  $t$  e tendo em atenção a posição inicial da partícula  $P_0 = (x_0, y_0)$ , determinamos que as componentes horizontal e vertical do vetor posição da partícula são, respetivamente, (3.19) e (3.20).

$$\vec{x} = (x_0 + (v_0 \cos \theta) t) \vec{e}_x \quad (3.19)$$

$$\vec{y} = \left( y_0 + (v_0 \sin \theta) t - \frac{1}{2}gt^2 \right) \vec{e}_y \quad (3.20)$$

Portanto a partícula ocupa a posição

$$P_t = \left( x_0 + (v_0 \cos \theta) t, y_0 + (v_0 \sin \theta) t - \frac{1}{2}gt^2 \right)$$

no instante  $t$  e o seu movimento tem a forma de uma parábola.

### 3.5.2 Simulação do lançamento de um projétil sem resistência do ar

Nesta subsecção iremos apresentar o processo de construção de uma simulação computacional para o lançamento de um projétil. Nesta construção tivemos em conta o desenvolvido na secção anterior e recorreremos ao uso do *software* de Geometria Dinâmica *GeoGebra*.

Começamos por construir um ponto  $P_0 = (x_0, y_0)$  móvel, três seletores para representar o valor de  $v_0$ ,  $\theta$  e  $t$  e considerar  $g = 9,8$ . Representamos  $\vec{v}_0 = (v_0 \cos \theta, v_0 \sin \theta)$  com origem em  $P_0$  e utilizamos a equação (3.21) para obtermos a posição do ponto no instante  $t$ .

$$P_t = \left( x(P_0) + (v_0 \cos \theta) t, y(P_0) + (v_0 \sin \theta) t - \frac{1}{2}gt^2 \right) \quad (3.21)$$

Para representar a trajetória da partícula ao longo do tempo  $t$  utilizamos o comando curva de acordo com o comando representado em (5.5).

$$\text{Curva}[v_0 \cos \theta t + x(P_0), -\frac{1}{2} \times 9.8 t + v_0 \sin \theta t + y(P_0), t, 0, 20] \quad (3.22)$$

Após a introdução destes comandos obtivemos uma simulação do lançamento da partícula que está representada na figura 3.13.

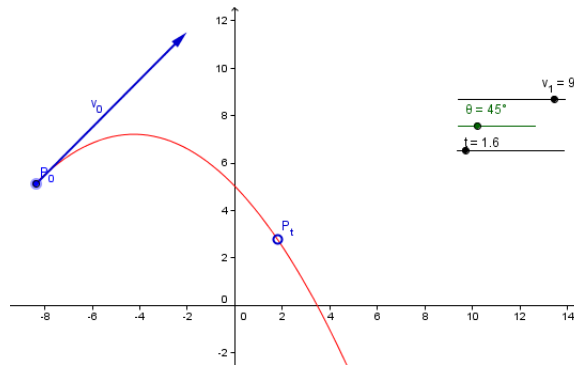


Figura 3.13: Simulação do lançamento da uma partícula

Nesta simulação os alunos podem:

- alterar o ponto a partir do qual a partícula é lançada, o valor da velocidade inicial e o ângulo que a velocidade inicial faz com o eixo dos  $xx$ ;
- visualizar a trajetória da partícula e o tempo que demora a percorrer essa trajetória.

## 3.6 Movimento planetário

De acordo com a lei da gravitação universal de Newton a força entre o Sol e um planeta é dada pela fórmula:

$$\vec{F} = -\frac{GM_S M_P \vec{r}}{r^3}$$

em que  $M_S$  é a massa do Sol,  $M_P$  a massa do planeta,  $\vec{r}$  o vetor posição do planeta relativamente ao Sol,  $r$  a distância entre o Sol e o planeta e  $G$  a constante gravitacional.

Assumimos que o movimento do Sol pode ser desprezado devido à sua massa ser muito maior comparativamente com a massa dos planetas. Aplicando a segunda Lei de Newton,  $\vec{F} = M_P \vec{\ddot{r}}$ , temos que  $\vec{\ddot{r}}$  é dado pela seguinte equação:

$$\vec{\ddot{r}} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\frac{GM_S \vec{r}}{r^3} = F(\vec{r}) = F(r) \vec{e}_r \quad (3.23)$$

em que  $\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$  é o vetor unitário que representa a componente radial e  $F(r) = \|F(\vec{r})\|$ .

O movimento dos planetas é plano, como é demonstrado em [23, pág. 7]. Vamos supor que os planetas movimentam-se no plano  $xy$  e que o Sol é origem do referencial  $xOy$ .

Podemos escrever a equação (3.23) em coordenadas cartesianas, para tal vamos ter em conta que:

$$\vec{r} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y,$$

$$\vec{e}_r = \cos(\theta) \vec{e}_x + \sin(\theta) \vec{e}_y$$

e

$$F(\vec{r}) = F(r) \cos(\theta) \vec{e}_x + F(r) \sin(\theta) \vec{e}_y$$

considerando que  $\theta$  é o ângulo que  $\vec{r}$  faz com o eixo dos  $xx$ ,  $\vec{e}_x$  é o vetor unitário segundo o eixo dos  $xx$  e  $\vec{e}_y$  é o vetor unitário segundo o eixo dos  $yy$ .

Como  $\vec{r}'' = F(\vec{r})$  temos que as Equações Diferenciais Ordinárias de 2<sup>a</sup> ordem são:

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = F(r) \cos(\theta) = \frac{F(r)}{r}x \\ \frac{d^2y}{dt^2} = F(r) \sin(\theta) = \frac{F(r)}{r}y \end{cases} \quad (3.24)$$

sendo  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

Podemos transformar as equações do sistema (3.24) no sistema de Equações Diferenciais Ordinárias de 1<sup>a</sup> ordem seguinte.

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = \frac{F(r)}{r}x \\ \frac{dx}{dt} = v_x \\ \frac{dv_y}{dt} = \frac{F(r)}{r}y \\ \frac{dy}{dt} = v_y \end{cases} \quad (3.25)$$

Discretizando o sistema (3.25) através do método de Euler-Cromer [10] obtemos o sistema abaixo.

$$\begin{cases} v_{x,i+1} = v_{x,i} + \frac{F(r_i)}{r_i}x_i\Delta t \\ x_{i+1} = x_i + v_{x,i+1}\Delta t \\ v_{y,i+1} = v_{y,i} + \frac{F(r_i)}{r_i}y_i\Delta t \\ y_{i+1} = y_i + v_{y,i+1}\Delta t \end{cases} \quad (3.26)$$

De seguida iremos apresentar o processo de construção de uma simulação computacional, em *GeoGebra*, para o movimento planetário com base no sistema (3.26).

Devido às distâncias e tempos que envolvem a resolução deste problema achamos conveniente usar as seguintes unidades:

- unidade de comprimento: semieixo maior da órbita da terra ( $\approx 1,5 \times 10^{11} m$ );
- unidade de tempo: ano terrestre ( $\approx 3,2 \times 10^7 s$ );
- unidade de massa: massa do sol.

Como podemos ver em [23, pág. 14] se utilizarmos as unidades astronômicas temos que a constante gravitacional é  $G = 4\pi^2$  ( $u.a.^3/ano^2$ ).

Tendo em consideração as unidades astronômicas e a equação (3.23), determinamos que  $F(r) = -4\pi^2/r^2$  e o sistema (3.26) dá origem ao sistema abaixo.

$$\begin{cases} v_{x,i+1} = v_{x,i} - \frac{4\pi^2}{r_i^3} x_i \Delta t \\ x_{i+1} = x_i + v_{x,i+1} \Delta t \\ v_{y,i+1} = v_{y,i} - \frac{4\pi^2}{r_i^3} y_i \Delta t \\ y_{i+1} = y_i + v_{y,i+1} \Delta t \end{cases} \quad (3.27)$$

Na implementação desta simulação temos em conta a primeira Lei de Kepler que diz que a órbita de um planeta em torno do Sol é elíptica [1, Cap. 17].

Precisamos de obter as condições iniciais para a posição e velocidade do planeta e dos valores do semieixo maior e da excentricidade da trajetória do planeta (ver tabela 3.1 obtida com base em [20]).

Planeta	Semieixo Maior	Excentricidade
Mercúrio	0.39	0.206
Vénus	0.72	0.007
Terra	1.00	0.0167
Marte	1.52	0.093
Júpiter	5.20	0.048
Saturno	9.54	0.056
Úrano	19.19	0.046
Neptuno	10.06	0.010

Tabela 3.1: Dados dos planetas do sistema solar.

Consideramos que a posição inicial do planeta,  $P_0 = (x_0, y_0)$ , é a posição em que o planeta está mais afastado do Sol e, por conseguinte, a posição em que a sua velocidade é mínima. Consideremos ainda que nessa posição o planeta está sobre o eixo dos  $xx$ . Segundo Edwin Munévar [20] as condições iniciais neste caso são:

$$\begin{cases} x_0 = r_{max} = a(1+e) \\ y_0 = 0 \\ v_{x,0} = 0 \\ v_{y,0} = v_{min} = \sqrt{\frac{GM_s(1-e)}{a(1+e)}} \end{cases}$$

em que  $a$  é o semieixo maior e  $e$  a excentricidade da órbita do planeta.

Nesta implementação fizemos uso da Folha de Cálculo, da Zona Algébrica e da Zona Gráfica disponíveis no *GeoGebra*.

Começamos por, na Zona Algébrica (ver figura 3.14), considerar o Sol como a origem do referencial e atribuir seletores, de que os alunos podem alterar os valores, para  $a$ ,  $e$ ,  $GM_S$  e  $\Delta t$ . Ainda na Zona Algébrica determinamos o valores das condições iniciais.

	A	B	C	D	E	F	G
1	-0.38192...	1.01288...	6.1791178...	0.06179...	1.01476...	(1.01288...	0.38688...
2	-0.76459...	1.00523...	6.1557729...	0.12334...	1.01277...	(1.00523...	0.77447...
3	-1.14661...	0.99376...	6.1088962...	0.18443...	1.01073...	(0.99376...	1.16135...
4	-1.52656...	0.97850...	6.0383794...	0.24482...	1.00866...	(0.97850...	1.54607...
5	-1.90299...	0.95947...	5.9441974...	0.30426...	1.00656...	(0.95947...	1.92716...
6	-2.27441...	0.93672...	5.8264125...	0.36252...	1.00443...	(0.93672...	2.30312...
7	-2.63934...	0.91033...	5.6851793...	0.41937...	1.00229...	(0.91033...	2.67245...
8	-2.99627...	0.88037...	5.5207484...	0.47458...	1.00014...	(0.88037...	3.03362...
9	-3.34367...	0.84693...	5.3334701...	0.52792...	0.99799...	(0.84693...	3.38509...
10	-3.68005...	0.81013...	5.1237989...	0.57915...	0.99586...	(0.81013...	3.72534...

Figura 3.14: Zona Algébrica e Folha de Cálculo utilizada na implementação

Vamos descrever os passos efetuados na Folha de Cálculo para determinar a posição do planeta a cada instante (ver figura 3.14). O *número da linha* identifica o número de intervalos de tempo ( $i$ ) que decorreram desde o início da simulação. Os valores de cada coluna são determinados pelas seguintes fórmulas:

- coluna A:  $v_{x,i+1} = v_{x,i} - \frac{4\pi^2}{r_i^3} x_i \Delta t$ ;
- coluna B:  $x_{i+1} = x_i + v_{x,i+1} \Delta t$ ;
- coluna C:  $v_{y,i+1} = v_{y,i} - \frac{4\pi^2}{r_i^3} y_i \Delta t$ ;
- coluna D:  $y_{i+1} = y_i + v_{y,i+1} \Delta t$ ;
- coluna E:  $r_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2}$ ;
- coluna F:  $F_i = (x_i, y_i)$ ;
- coluna G:  $|v_i| = \sqrt{v_{x,i}^2 + v_{y,i}^2}$ .

Segundo Edwin Munévar [20] o valor aconselhado para  $\Delta t$ , no caso da órbita terrestre, é  $\Delta t = 0,001$ , logo para simularmos o ano completo temos de correr 1000 linhas de cada coluna da Folha de Cálculo.

Surgiu então uma dificuldade no *software* de Geometria Dinâmica utilizado, a impossibilidade de «correr» as células de uma coluna da Folha de Cálculo somente de uma

vez. Para resolvermos esta limitação «corremos» célula a célula. Se considerássemos o  $\Delta t$  aconselhado teríamos de «correr»  $1000 \text{ linhas} \times 7 \text{ colunas}$  células, o que demoraria muito tempo para uma resultado que consideramos pouco melhor do que quando  $\Delta t = 0,01$ . Decidimos, portanto, considerar  $\Delta t = 0,01$ .

Após efetuar todos os cálculos analisamos os resultados, para o caso do planeta Terra, obtidos na Folha de Cálculo, em particular, as condições iniciais. Verificámos, nesse caso, que  $v_{y,0} = v_{min}$  como pretendíamos e que  $x_0 = 1,0167 \neq r_{max} = 1,036105945653687$ . Pensamos que esta diferença se deve aos arredondamentos e ao facto de termos utilizado  $\Delta t = 0,01$ .

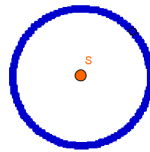


Figura 3.15: Órbita do planeta Terra

Na figura 3.15 está representada a órbita do planeta Terra em torno do Sol obtida na simulação. Tal como era de esperar esta órbita deste planeta é praticamente circular, pois a excentricidade é quase nula. Consideramos importante referir que nesta simulação os alunos apenas podem ver parte da órbita dos planetas mais afastados que a Terra do Sol.

# Capítulo 4

## Três Problemas Clássicos da Geometria Grega

Pensa-se que a matemática dos antigos gregos nasceu do contacto deste povo com o Oriente e, em particular, com o Egito, onde os sábios mais ilustres da Grécia foram ampliar as suas ideias e o seu saber.

Os primeiros quatro séculos do período helénico (séc. VI a.C. a V d.C.) constituem um período de realizações excepcionais da matemática grega. Foi neste período que se iniciou o estudo de três problemas geométricos que desafiaram a criatividade de inúmeros matemáticos e intelectuais, ao longo de mais de dois mil anos.

Durante séculos diversas soluções foram propostas para a resolução destes problemas geométricos mas não estavam de acordo com as «regras do jogo», presumivelmente, colocadas na Academia de Platão, onde apenas construções com régua não graduada e compasso eram admitidas. Estes problemas ficaram famosos, talvez por serem os primeiros onde surgem diversas dificuldades de resolução, de acordo com as regras inicialmente colocadas. São conhecidos pelos *Três Problemas Clássicos da Geometria Grega*:

***Trisseção do ângulo:*** o problema de dividir um ângulo arbitrário em três partes iguais;

***Quadratura do círculo:*** o problema de construir um quadrado cuja área é igual à de um círculo dado;

***Duplicação do cubo:*** o problema de construir a aresta de um cubo cujo volume é o dobro do de um cubo dado.

Hoje já se sabe que estes problemas não podem ser resolvidos utilizando unicamente régua não graduada e compasso. A prova desta impossibilidade assenta no facto de que as únicas medidas que se podem obter nas construções utilizando apenas régua

não graduada e compasso, são as que se podem obter através da adição, subtração, multiplicação, divisão e extração da raiz quadrada a partir de números naturais.

A resolução destes problemas envolve a construção de medidas que não podem ser obtidas desta forma, como por exemplo, a construção de medidas cujo comprimento é um número transcendente, isto é, um número real ou complexo que não é raiz de nenhuma equação polinomial não nula com coeficientes racionais. Podemos consultar uma demonstração do que acabámos de referir em [30, Cap. 7].

Neste capítulo iremos analisar algumas das contribuições de vários matemáticos para a resolução destes três problemas. Iremos também descrever as construções que realizámos no programa de Geometria Dinâmica *GeoGebra* sobre este assunto e as dificuldades que surgiram na sua execução. Na secção 4.1 apresentamos dois métodos de resolução do problema da trisseção do ângulo. No primeiro método iremos começar por analisar a redução do problema da trisseção do ângulo a um problema de *tipo néusis*. Posteriormente, iremos utilizar as propriedades da curva conchoide de Nicomedes para resolver esse problema. No segundo método usaremos uma das curvas mais antigas da matemática a *trissetriz de Hípias*. Na secção 4.2 iremos analisar uma possível resolução do problema da quadratura do círculo. Na secção 4.3 descrevemos dois métodos de resolução do problema da duplicação do cubo que utilizam a redução de Hipócrates e habitualmente designados por solução de Menecmo e solução de Diocles.

## 4.1 A trisseção do ângulo

Existe pelo menos um aspeto em que o problema da trisseção do ângulo se diferencia dos outros dois problemas da geometria grega. Com efeito, não é possível quadrar um círculo ou duplicar um cubo, com régua não graduada e compasso, sejam quais forem os valores do raio do círculo ou da aresta do cubo, mas, no entanto, é possível trissetar ângulos com algumas amplitudes. Por exemplo, no livro IV da obra *Coleção Matemática*, Papo de Alexandria descreve um método para trissetar um ângulo reto que respeita «as regras».

Nesta secção iremos ter um conta que para resolver o problema de trissetar um ângulo basta resolver o problema de trissetar um ângulo agudo. Pois, no caso de um ângulo reto é possível trissetá-lo com régua não graduada e compasso, recorrendo à bissecção de um ângulo de um triângulo equilátero; no caso de um ângulo obtuso podemos decompô-lo na soma de um ângulo reto com um ângulo agudo.

Decidimos nesta secção apresentar dois métodos de resolução deste problema. No primeiro método começamos por analisar a redução do problema da trisseção do ângulo a outro problema e, posteriormente, utilizamos as propriedades da curva conchoide de Nicomedes para resolver esse problema. No segundo método usamos uma das curvas mais antigas da matemática atualmente conhecida por *trissetriz de Hípias*.

### 4.1.1 Construções *tipo Nêusis*

Os matemáticos gregos não se limitaram à utilização da régua não graduada e do compasso nas suas construções. Por vezes, sentiam necessidade de recorrer a construções que exigiam instrumentos de tipos diferentes. De entre estas construções estão as construções de *tipo nêusis*. As construções *tipo nêusis* são definidas em [9] através da definição abaixo.

**DEFINIÇÃO 4.1.1** Dados um ponto  $P$ , um segmento de reta e duas linhas  $L_1$  e  $L_2$ , a construção de dois pontos  $A$  e  $B$  tais que  $A$ ,  $B$  e  $P$  sejam colineares, os segmentos de reta  $AB$  e  $s$  tenham o mesmo comprimento,  $B$  esteja sobre  $L_1$  e  $A$  esteja sobre  $L_2$  diz-se uma *construção por nêusis* (ou construção de *tipo nêusis*).

Isto é, uma construção de *tipo nêusis* consiste em inserir entre as duas linhas um segmento de reta igual a  $s$  e de tal modo que  $P$  esteja ou sobre ele ou no seu prolongamento.

A figura 4.1 ilustra uma construção *tipo nêusis*.

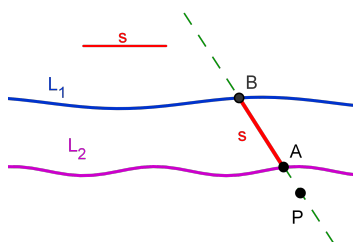


Figura 4.1: Construção por Nêusis

Papou da Alexandria, geómetra e comentador dos séculos III e IV d.C., apresenta uma *construção por nêusis* da terça parte de qualquer ângulo agudo. Os historiadores pensam que este modo de trissectar um ângulo já era utilizado muitos séculos antes.

#### 4.1.1.1 Trisseção do ângulo reduzida a outro problema do *tipo nêusis*

Sejam, como na figura 4.2,  $BA$  e  $BC$  os lados que determinam o ângulo que pretendemos trissectar. Pelo ponto  $A$  de um dos lados, tiram-se uma paralela e uma perpendicular ao outro lado. O segmento  $DE$  é inserido entre estas duas retas de modo a que o seu comprimento seja duplo do comprimento do segmento  $AB$  e, ainda, de tal modo que o ponto  $B$ , vértice do ângulo a trissectar, esteja no seu prolongamento. Então, o ângulo  $DBC$  é a terça parte do ângulo  $ABC$ .

Na figura 4.2 está representada uma construção em *GeoGebra*, na qual os alunos podem deslocar o  $X$  para alterar a amplitude do ângulo agudo e verificar o descrito acima.

Segundo a afirmação acima o problema da trisseção de um ângulo agudo fica resolvido se soubermos inserir o segmento  $DE$  (duplo de  $BA$ ) entre as retas  $FA$  e  $AE$  e apontado

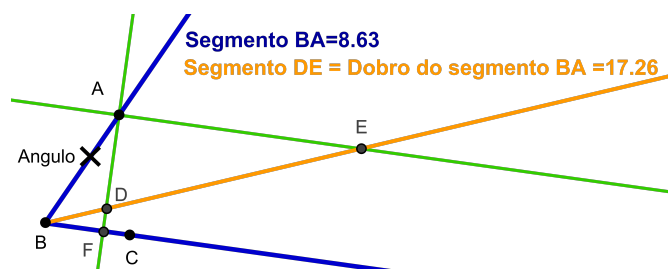


Figura 4.2: Trissecção do ângulo

para o ponto  $B$ . Assim, o problema da trissecção do ângulo fica reduzido a um problema do tipo *nêusis*. O problema de encontrar tal segmento não foi resolvido utilizando apenas régua não graduada e compasso, como vamos analisar na secção 4.1.1.3.

De seguida vamos demonstrar que o ângulo  $ABC$  é trissecado pela reta  $BD$ , ou seja, que o ângulo  $DBC$  é a terça parte do ângulo  $ABC$ .

DEMONSTRAÇÃO: Seja  $M$  o ponto médio de  $DE$ . Temos que os segmentos  $AB$ ,  $AM$ ,  $DM$  e  $ME$  são iguais, uma vez que, por um lado,  $AB = DM = ME$  porque  $DE = 2AB$  e  $M$  é o ponto médio de  $DE$ , e, por outro lado,  $AB = AM$  porque o triângulo  $DAE$  é um triângulo retângulo contido numa semicircunferência de diâmetro  $DE$  e centro  $M$  (o triângulo  $DAE$  é um triângulo retângulo por construção).

Como os segmentos  $AB$  e  $AM$  são iguais então o triângulo  $ABM$  é isósceles e a amplitude do ângulo  $ABM$  é igual à amplitude do ângulo  $AMB$ .

Como os segmentos  $MA$  e  $ME$  são iguais então o triângulo  $AME$  é isósceles e a amplitude do ângulo  $MAE$  é igual à amplitude do ângulo  $MEA$ .

O ângulo  $AMB$  é um ângulo externo do triângulo  $AME$ , logo é igual à soma dos ângulos  $MAE$  e  $MEA$  (internos a adjacentes). Mas, os ângulos  $ABM$  e  $AMB$  são iguais, logo o ângulo  $ABM$  é também igual à soma dos ângulos  $MAE$  e  $MEA$ .

A reta  $DE$  intersecta as retas  $AE$  e  $BC$  (paralelas), logo os ângulos internos  $MEA$  e  $DBC$  são geometricamente iguais.

Portanto, os ângulos  $MAE$ ,  $MEA$  e  $DBC$  são iguais. Conclui-se que o ângulo  $ABM$  é o dobro do ângulo  $DBC$  e, por conseguinte, o ângulo  $DBC$  é a terça parte do ângulo  $ABC$ . ■

A figura 4.3 ilustra uma construção que fizemos em *GeoGebra* para os alunos poderem verificar os passos da demonstração. Os alunos podem ainda deslocar o  $X$ , numa aplicação da construção integrada na página escrita em linguagem HTML, para alterar a amplitude do ângulo agudo inicial e verificarem que são verdadeiros os passos da demonstração independentemente desse ângulo inicial.



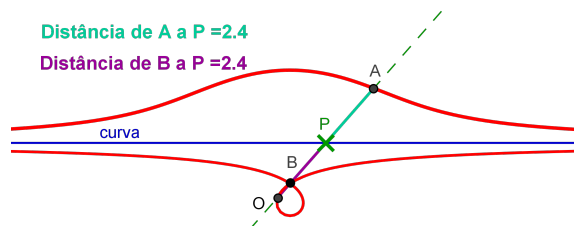


Figura 4.4: Concoide de Nicomedes

- No caso da curva ser uma circunferência, podemos ver na figura 4.5 uma ilustração de uma construção, que fizemos em *GeoGebra*, deste tipo de concoides. Nesta construção os alunos podem realizar o mesmo tipo de análise efetuada na construção da concoide de Nicomedes e ainda podem:
  - deslocar o ponto  $O$ ;
  - alterar o raio da curva (circunferência) no seletor.

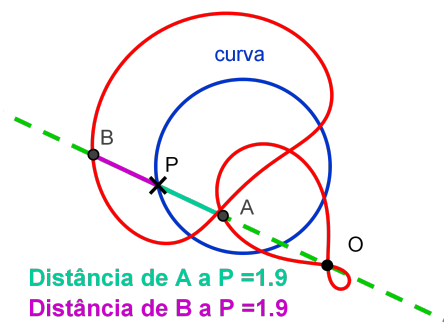


Figura 4.5: concoide se a curva for uma circunferência

- No caso da curva ser uma circunferência e o ponto  $O$  um ponto da circunferência à concoide chama-se *Limaçon de Pascal*. A figura 4.6 ilustra uma construção da Limaçon de Pascal que fizemos em *GeoGebra*. Nesta construção os alunos podem realizar o mesmo tipo de análise efetuada na construção anterior, mas claro apenas podem deslocar o ponto  $O$  na curva (circunferência).

#### 4.1.1.3 Trisseção de um ângulo utilizando a concoide de Nicomedes

Podemos usar a *concoide de Nicomedes* para efetuar a trisseção do ângulo utilizando o método *tipo nêusis*.

Tal como já referimos na subsecção 4.1.1, neste método pretende-se inserir um segmento de reta, de comprimento predefinido, entre duas retas, de forma que um certo ponto se encontre no prolongamento desse segmento.

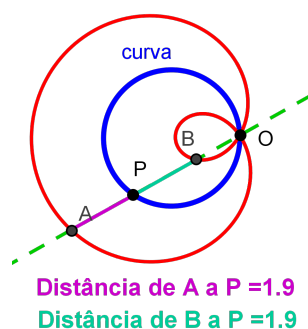


Figura 4.6: Limaçon de Pascal

Dado um ângulo  $ABC$  para o trissetar podemos construir uma concoide do seguinte modo: Por um ponto  $A$  de um dos lados do ângulo, tiram-se uma paralela e uma perpendicular ao lado  $BC$ , seja  $F$  a interseção da perpendicular com o lado  $BC$ . Traça-se a *concoide de Nicomedes* em que a distância predefinida é  $2BA$ , a curva considerada é a reta  $AF$  e o polo é o ponto  $B$ . Seja  $E$  a interseção do ramo da concoide, no lado oposto ao polo, com a reta, paralela a  $BC$ , que passa por  $A$ . Portanto, utilizando a *concoide de Nicomedes*, inserimos o segmento  $DE$ , duplo do segmento  $BA$ , entre as retas  $AF$  e  $AE$  e apontado para o ponto  $B$ , que tal como demonstramos na subsecção 4.1.1.1 era necessário para trissetar o ângulo  $ABC$ .

Na figura 4.7 está representada uma construção que realizámos em *GeoGebra*, na qual os alunos podem:

- deslocar o  $X$  para alterar a amplitude do ângulo agudo  $ABC$ ;
- mover o ponto  $A$  para verificar que a posição do ponto não altera a solução do problema;
- verificar que ângulo  $DBC$  é, realmente, a terça parte do ângulo  $ABC$ .

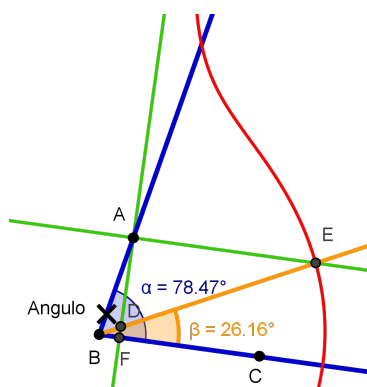


Figura 4.7: Trisseção de um ângulo utilizando a concoide de Nicomedes.

Na execução desta construção debatemo-nos contra uma limitação do *GeoGebra*. Este *software* de Geometria Dinâmica não consegue determinar o ponto de interseção entre

uma curva e uma reta. Por conseguinte, foi necessário utilizar um artifício para determinar o ponto  $E$  da nossa construção. O ponto  $E$  deveria ser a interseção do ramo da concoide, no lado oposto ao polo, com a reta, paralela a  $BC$ , que passa por  $A$ . Mas, este ponto foi determinado pela interseção da reta paralela a  $BC$  e que passa por  $A$  com a reta resultante da rotação de  $BC$  em torno de  $B$  e de um ângulo igual a um terço do ângulo  $ABC$ .

### 4.1.2 Trissetriz de Hípias

Papo de Alexandria no livro IV da sua *Coleção Matemática* descreve uma das mais antigas curvas da matemática atualmente conhecida por *trissetriz de Hípias*. Esta curva permite trissetar um ângulo e, posteriormente, foi usada por Dinóstrato de Atenas para a quadratura do círculo.

Realizámos a construção da trissetriz de Hípias, em *GeoGebra*, e para tal tivemos em conta a definição descrita de seguida.

Considerem-se dois movimentos sincronizados, um retilíneo e outro circular. O lado  $DC$  do quadrado  $ABCD$  desloca-se paralelamente a si próprio, até coincidir com o lado  $AB$ . Simultaneamente, o lado  $AD$  gira em torno de  $A$ , até coincidir com  $AB$ . Os dois movimentos são uniformes (isto é, as suas velocidades são constantes), devendo começar no mesmo instante e acabar no mesmo instante. Em cada instante, com a exceção do último, os dois segmentos  $HE$  e  $AD'$  interseitam-se num ponto  $I$ . Enquanto os segmentos se deslocam,  $I$  traça a curva de Hípias.

A construção desta curva está representada na figura 4.8. Os alunos podem animar a construção e observar a curva a ser traçada.

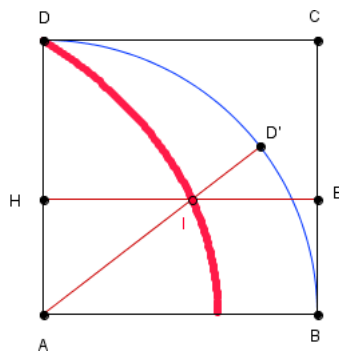


Figura 4.8: Trissetriz de Hípias

Pelo método de construção da curva de Hípias podemos afirmar que:

- a distância percorrida pelo lado  $DC$  é proporcional ao tempo gasto no seu percurso;

- a amplitude do arco determinado na circunferência de centro  $A$  e raio  $AD$  é proporcional ao tempo percorrido no percurso circular deste raio.

Assim, existe proporcionalidade entre a distância retilínea percorrida pelo lado  $DC$  e a amplitude angular percorrida pelo lado  $AD$ . Ou seja, em todas as posições do ponto  $I$ , a condição (4.1) é verificada.

$$\frac{AD}{AH} = \frac{\text{arco } BD}{\text{arco } D'B} \quad (4.1)$$

Portanto, a *trissetriz de Hípias* permite transformar todas as questões de proporcionalidade entre ângulos em questões análogas entre segmentos de reta e, em particular, permite reduzir a trisseção de um ângulo dado à trisseção de um segmento de reta.

Tal como já foi referido nesta secção, para resolver o problema de trissetar um ângulo basta resolver o problema de trissetar um ângulo agudo. Sendo o segmento  $AG$  a terça parte do segmento  $AH$ , considere-se o segmento  $GJ$  paralelo ao segmento  $AB$  e seja  $K$  a sua interseção com a curva. Sendo  $L$  a interseção de  $AK$  com o quarto de circunferência, o ângulo  $BAL$  é a terça parte do ângulo  $BAD'$ .

Fizemos uma construção em *GeoGebra* (figura 4.9) onde os alunos podem verificar facilmente a afirmação acima. Nesta construção os alunos podem deslocar o ponto  $H$ , de forma a alterar o ângulo agudo inicial, e verificar que para qualquer ângulo inicial tem-se que: o ângulo  $BAL$  é a terça parte do ângulo  $BAD'$ .

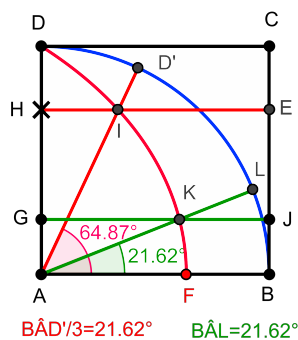


Figura 4.9: Ilustração de que a trissetriz de Hípias realmente trisseta o ângulo

Na realização desta construção voltamos a contornar a limitação que o *GeoGebra* tem, de não conseguir determinar o ponto de interseção entre uma curva e uma reta. Neste caso não conseguimos determinar o ponto  $K$  como a interseção entre o segmento  $GJ$  paralelo ao segmento  $AB$  com a trissetriz de Hípias. Para ultrapassar este obstáculo determinamos o ponto  $K$  através da interseção entre o segmento  $GJ$ , paralelo ao segmento  $AB$ , com a reta resultante da rotação de  $AB$  em torno de  $A$  e de um ângulo igual a um terço do ângulo  $BAD'$ .

DEMONSTRAÇÃO: Designemos por  $D'$  e  $L$  os pontos de interseção do quarto de circunferência  $DB$  com as retas  $AI$  e  $AK$ , respetivamente, e por  $E$  e  $J$  os pontos de interseção do lado  $CB$  com as retas  $HI$  e  $GK$ , respetivamente.

No instante em que o lado  $DC$  ocupa a posição  $HE$ , o lado  $AD$  ocupa a posição  $AD'$  (uma vez que  $HE$  e  $AD'$  se interseçam num ponto da trissetriz,  $I$ ); analogamente, no instante em que o lado  $DC$  ocupa a posição  $GJ$ , o lado  $AD$  ocupa a posição  $AL$  (uma vez que  $GJ$  e  $AL$  se interseçam num ponto da trissetriz,  $K$ ). Portanto, temos a proporcionalidade (4.2).

$$\frac{AH}{AG} = \frac{\text{arco } D'B}{\text{arco } LB} = \frac{\angle BAD'}{\angle BAL} \quad (4.2)$$

Como o segmento de reta  $AG$  é a terça parte do segmento de reta  $AH$  temos que também o ângulo  $BAL$  é a terça parte do ângulo  $BAD'$ . ■

Esta curva não permite apenas trissetar um ângulo. Se procedermos de um modo semelhante ao descrito nesta sub-secção, a trissetriz de Hípias possibilita também a divisão de um ângulo agudo em qualquer outra razão, desde que esta possa ser expressa como razão de dois segmentos de reta.

## 4.2 Quadratura do círculo

O problema da quadratura do círculo consiste em construir um quadrado cuja área é igual à de um círculo dado. O matemático alemão Ferdinand Lindemann, em 1882, provou que  $\pi$  é um número transcendente, ou seja, que não existe um polinómio com coeficientes inteiros ou racionais, não nulos, dos quais  $\pi$  seja uma raiz (segundo [http://pt.wikipedia.org/wiki/Quadratura\\_do\\_círculo](http://pt.wikipedia.org/wiki/Quadratura_do_círculo) podemos consultar uma demonstração deste facto em [27]). Desta forma ficou provado que o problema da quadratura do círculo não pode ser resolvido utilizando apenas régua não graduada e compasso, pois, já se sabia que se  $\pi$  fosse transcendente tal acontecia.

Nesta secção iremos analisar uma possível resolução deste problema clássico da antiga Grécia.

Um século depois de Hípias de Elis ter descoberto a trissetriz, outro matemático ateniense, Dinóstrato, descobriu que essa curva podia também ser utilizada na solução dum problema geométrico diferente a retificação da circunferência e, por conseguinte, solução do problema da quadratura do círculo. Proclo Lício designa a curva de Hípias por quadratriz (figura 4.10), embora não lhe associe o nome de Dinóstrato. Papo de Alexandria, por sua vez, ao descrever a curva, associa-lhe os nomes de Dinóstrato e de Nicomedes, e afirma que ambos a utilizaram para quadrar o círculo.

Dinóstrato terá descoberto que o lado do quadrado é meio proporcional entre o (comprimento do) arco de circunferência  $DB$  e o segmento de reta  $AF$ , o que se pode

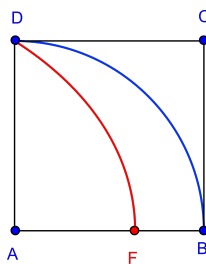


Figura 4.10: Trissetriz

escrever segundo a equação (4.3).

$$\frac{\text{arco } DB}{AD} = \frac{AD}{AF} \quad (4.3)$$

Consideramos relevante chamar a atenção de que do ponto de vista da matemática grega a determinação do ponto  $F$  desta forma é problemática. Pois, tal como podemos observar quando os dois segmentos de reta móveis ocupam ambos a posição do lado  $AB$ , isto é, quando são coincidentes, estes não determinam nenhum ponto. Do ponto de vista moderno o ponto  $F$  é obtido como um limite.

Papo da Alexandria apresenta a demonstração deste resultado por dupla redução ao absurdo. Esta demonstração assenta em dois resultados que são pela primeira vez formulados por Arquimedes no *Tratado Da Esfera e do Cilindro* [14]:

«o perímetro do círculo é maior do que o perímetro de qualquer polígono inscrito e menor do que o perímetro de qualquer polígono circunscrito.»

Pode-se consultar mais sobre a demonstração de Papo em [9, pág. 296] ou em [2, pág. 66].

A equação 4.3 permite construir um segmento de reta igual à quarta parte do perímetro da circunferência de raio  $AD$ .

O resultado de Dinóstrato não fornece diretamente uma quadratura do círculo, mas sim uma retificação da circunferência. No século seguinte àquele em que Dinóstrato viveu, Arquimedes de Siracusa estabeleceu a ligação entre as duas questões (a da quadratura do círculo e a da retificação da circunferência), ao demonstrar que todo o círculo tem área igual a um triângulo com altura igual ao raio do círculo e base igual ao perímetro do círculo (o perímetro do círculo é igual ao comprimento da retificação da circunferência com o mesmo raio), isto é,

$$A_{\text{círculo}} = \pi r^2 = \frac{r \times 2\pi r}{2} = A_{\text{triângulo}}$$

em que  $r$  é o raio do círculo. Por conseguinte, demonstrou que todo o círculo tem

área igual a um retângulo com largura igual ao raio do círculo e comprimento igual a metade do perímetro do círculo.

Consideremos  $r = AD$  e temos que a área do círculo é dado pela fórmula (4.4), isto é, a área do círculo é igual à área do retângulo de comprimento  $2 \times \text{arco } DB$  e largura  $AD$ , ou seja,

$$A_{\text{círculo}} = AD \times \frac{\text{perímetro do círculo}}{2} = AD \times 2 \times \text{arco } DB. \quad (4.4)$$

De seguida vamos descrever uma possível forma de utilizar o resultado de Dinóstrato para quadrar um círculo de raio  $AD$ . Como já referimos o resultado de Dinóstrato, expresso na equação (4.3), refere que o lado do quadrado,  $AD$ , é meio proporcional entre o (comprimento do) arco de circunferência  $DB$  e o (comprimento do) segmento de reta  $AF$ .

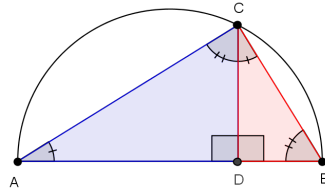


Figura 4.11: Caso de semelhança de triângulos pelo *Teorema de Tales*

Utilizando este resultado os matemáticos da época conseguiam determinar o comprimento do *arco*  $DB$  tendo conhecimento do comprimento de  $AD$  e de  $AF$ . Pois, estes matemáticos tinham conhecimento, pelo *Teorema de Tales*, que «se dois triângulos tiverem os ângulos dois a dois iguais então são semelhantes» [9, pág. 263] e, por conseguinte, já sabiam que o triângulo  $[ACD]$  e o triângulo  $[CBD]$ , da figura 4.11, são semelhantes.

Por outro lado, os matemáticos também tinham conhecimento do *Teorema da Altura* [9, pág. 264].

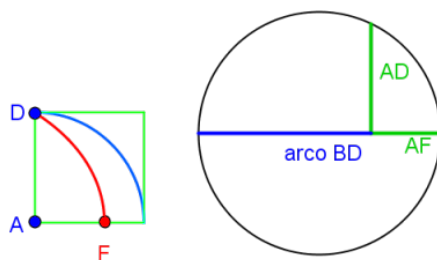
#### TEOREMA 4.2.1

*Num triângulo retângulo a altura relativa à hipotenusa é o meio proporcional entre os segmentos que determina na hipotenusa.*

Se considerarmos o triângulo  $[ABC]$ , retângulo em  $C$  da figura 4.11 utilizando o *Teorema da Altura* obtém-se a proporção (4.5).

$$\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{DB} \quad (4.5)$$

E se consideramos  $AD$ ,  $CD$  e  $DB$  da proporção (4.5), respetivamente, *arco*  $DB$ ,  $AD$  e  $AF$  da equação (4.3) conseguimos obter um segmento com o comprimento do *arco*  $DB$ , como podemos ver na figura 4.12.

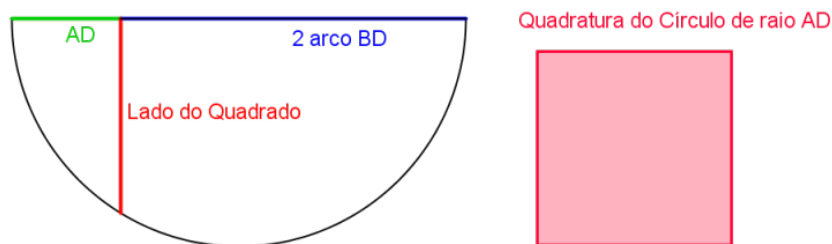

 Figura 4.12: Determinação do comprimento do *arco DB*.

Com o conhecimento do comprimento do *arco DB*, os matemáticos sabiam determinar geometricamente o comprimento de metade do perímetro do círculo (o dobro do comprimento do *arco DB*) e, conseqüentemente, as medidas do retângulo de comprimento  $2 \times \text{arco } DB$  e largura  $AD$  cuja área é igual à área do círculo de raio  $AD$ , pela equação (4.4).

Bastava, portanto, determinarem o comprimento do lado do quadrado que quadra o retângulo para conseguirem quadrar o círculo. Podemos traduzir o que acabamos de referir pela equação (4.6) que é equivalente à equação (4.7) e utilizando mais uma vez o *Teorema da Altura* obtemos o comprimento do lado do quadrado pretendido, como podemos ver na figura 4.13.

$$\text{Lado do quadrado}^2 = AD \times 2 \times \text{arco } DB \quad (4.6)$$

$$\frac{AD}{\text{Lado do quadrado}} = \frac{\text{Lado do quadrado}}{2 \text{ arco } DB} \quad (4.7)$$


 Figura 4.13: Quadratura do círculo de raio  $AD$ .

Na página escrita em HTML que realizámos sobre este assunto decidimos colocar apenas um esquema dos passos a realizar para quadrar o círculo por este método, assim como uma figura, realizada em *GeoGebra*, com esses passos.

### 4.3 Duplicação do cubo

O problema da duplicação do cubo resume-se à construção de uma aresta de um cubo cujo volume é o dobro do volume de um cubo dado.

Segundo José Miguel Rodrigues de Sousa [28] numa suposta carta de Eratóstenes ao rei Ptolomeu refere que Hipócrates de Quios (século V a.C.) havia mencionado que:

«se entre duas linhas retas, das quais a maior seja dupla da menor, se inscreverem duas médias em proporção contínua, o cubo ficará duplicado».

Este matemático reduziu o problema da duplicação do cubo a um outro, que continua a não ser resolvido somente com régua não graduada e compasso.

Ainda segundo autor acima referido (ver [28]) o que Hipócrates de Quios diz é que, dado um cubo de aresta  $a$ , existem dois segmentos  $x$  e  $y$  tais que:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b} \quad (4.8)$$

ou seja, que existem dois meios proporcionais entre os segmentos  $a$  e  $b$ , então o cubo de aresta  $x$  tem o volume ampliado na razão  $b/a$ . Vamos apresentar a demonstração do que acabámos de referir de seguida.

DEMONSTRAÇÃO: Podemos deduzir das proporcionalidades (4.8) que  $x^3 = a^2b$ .

Logo, tem-se:

$$x = \sqrt[3]{a^2b} = \sqrt[3]{a^3 \frac{b}{a}} = a \sqrt[3]{\frac{b}{a}} \quad (4.9)$$

e, portanto,

$$x^3 = \left( a \sqrt[3]{\frac{b}{a}} \right)^3 = a^3 \frac{b}{a} \quad (4.10)$$

Portanto, pela equação (4.10) se existem os dois meios proporcionais entre os segmentos  $a$  e  $b$ , então o cubo de aresta  $x$  tem o volume ampliado na razão  $b/a$ . ■

A duplicação do cubo é um caso particular, quando  $b = 2a$  e pretendemos portanto encontrar os segmentos  $x$  e  $y$  que verifiquem as proporcionalidades (4.11):

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a} \quad (4.11)$$

De facto, conseguimos deduzir das proporcionalidades (4.11) que  $x^3 = 2a^3$ , pois

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{a}{x} = \frac{x}{y} \\ \frac{a}{x} = \frac{y}{2a} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} ay = x^2 \\ y = \frac{2a^2}{x} \end{array} \right. \Rightarrow x^3 = 2a^3 \quad (4.12)$$

o que demonstra que o cubo de aresta  $x$  tem o dobro do volume do cubo de aresta  $a$ . E, portanto, fica demonstrada a equivalência entre o problema da duplicação do cubo e o problema da construção de dois meios proporcionais entre a aresta do cubo inicial e o seu dobro.

Posteriormente à redução do problema efetuada por Hipócrates pensa-se que os esforços dos matemáticos concentraram-se somente no sentido de encontrarem uma construção para os dois meios proporcionais em causa.

Nesta secção vamos descrever dois métodos de resolução deste problema que utilizam a redução de Hipócrates: a solução de Menecmo e a solução de Diocles.

### 4.3.1 Solução de Menecmo

Tal como já referimos no capítulo 3, o matemático do século IV a.C. Menecmo está relacionado com as curvas que atualmente designamos por cónicas (elipse, parábola e hipérbole). Este matemático está ligado mais especificamente à descoberta de que as cónicas podem ser obtidas através da intersecção de um cone reto de base circular com um plano.

As soluções de Menecmo para o problema da duplicação do cubo, que pensa-se terem sido preservadas por Eutócio, baseiam-se na construção de um ponto através da intersecção de duas cónicas, num dos casos duas parábolas e no outro caso uma parábola e uma hipérbole.

Tendo em conta a redução (4.8) de Hipócrates de Quios, como já foi referido, o problema da duplicação do volume do cubo fica reduzido à determinação de dois meios proporcionais ( $x$  e  $y$ ) entre os segmentos  $a$  e  $b = 2a$  tais que as proporcionalidades 4.11 são respeitadas e, em que,  $a$  é a aresta do cubo a duplicar e  $x$  a aresta do cubo que duplica o volume.

Das proporcionalidades (4.11) aferimos que basta que se satisfaçam duas das três equações apresentadas abaixo para obtermos  $x$ .

$$x^2 = ay \tag{4.13}$$

$$xy = 2a^2 \tag{4.14}$$

$$y^2 = 2ax \tag{4.15}$$

Logo, podemos obter  $x$  de três modos:

- como abcissa do ponto de intersecção da parábola  $y = \frac{x^2}{a}$  com a hipérbole  $xy = 2a^2$  – a primeira solução de Menecmo;

- como abcissa do ponto de interseção da parábola  $y = \frac{x^2}{a}$  com a parábola  $x = \frac{y^2}{2a}$  – a segunda solução de Menecmo;
- como abcissa do ponto de interseção da parábola  $x = \frac{y^2}{2a}$  com a hipérbole  $xy = 2a^2$ .

Segundo José Miguel Sousa [28] Menecmo apenas apresenta os dois primeiros métodos para obter  $x$ .

Na figura 4.14 representamos uma construção, em *GeoGebra*, das duas soluções de Menecmo. Nesta construção os alunos podem verificar que independentemente do valor atribuído a  $a$  a solução obtida é, realmente, solução para o problema da duplicação do cubo. Na construção efetuada é possível visualizar os modos para obter  $x$  em simultâneo, mas também é possível visualizar os dois modos separadamente. Os alunos através da análise da construção devem concluir que é possível obter  $x$  pelo o terceiro modo.

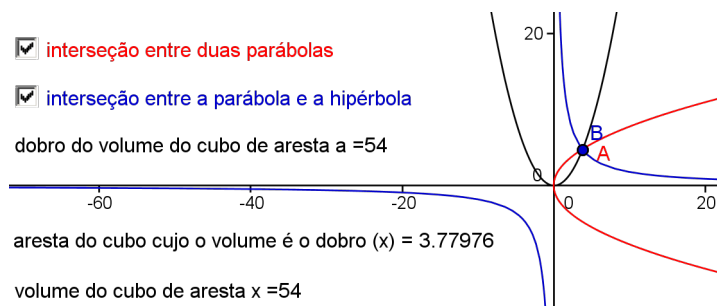


Figura 4.14: As soluções de Menecmo

### 4.3.2 Solução de Diocles

Pensa-se que o matemático grego Diocles (c. 240 a.C. – c. 180 a.C.) foi quem inventou uma curva designada por cissoide com o intuito de resolver o problema da duplicação do cubo.

Mais tarde, o processo utilizado para criar a curva que se atribui a Diocles foi generalizado. E todas as curvas obtidas por um método análogo ao da cissoide deste matemático são denominadas por cissoides.

De seguida expomos com base na definição dada por Robert Yates em [32] a curva cissoide, no caso geral.

**DEFINIÇÃO 4.3.1** Sejam  $f_1$  e  $f_2$  duas curvas quaisquer e  $O$  um ponto fixo. Desenhemos uma semirreta com origem em  $O$  e que intersete  $f_1$  e  $f_2$  em  $R$  e  $Q$ , respetivamente. Consideremos ainda um ponto  $C$  tal que  $OC = QR$ . Ao lugar geométrico descrito por  $P$  chama-se *cissoide de  $f_1$  e  $f_2$  relativamente ao ponto  $O$* .

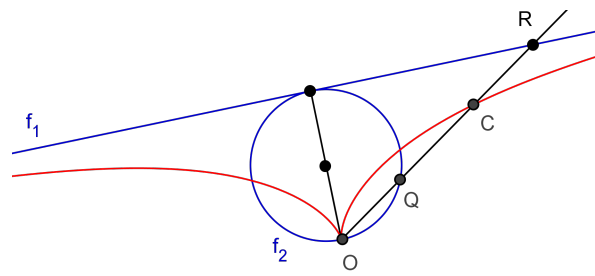


Figura 4.15: Cissoide de Diocles pela definição atual.

Na figura 4.15 representamos o que atualmente conhecemos por cissoide de Diocles. Neste caso as duas curvas envolvidas são uma circunferência e uma linha reta tangente à circunferência e o ponto fixo é o ponto da circunferência diametralmente oposto ao ponto de tangência. Contudo este matemático grego definiu a sua curva em relação, apenas, a um quadrante da circunferência envolvida, como podemos ver na figura 4.16.

Neste seguimento vamos relatar, com base em [28], a construção que realizámos da cissoide definida por Diocles.

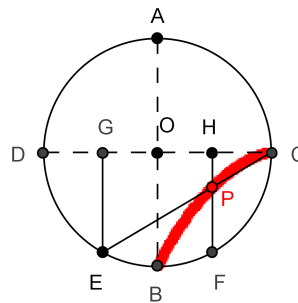


Figura 4.16: Cissoide pela definição de Diocles.

Consideramos uma circunferência de centro  $O$  em que  $AB$  e  $DC$  são diâmetros perpendiculares entre si. Sejam  $E$  e  $F$  pontos da circunferência pertencentes aos quadrantes  $BD$  e  $BC$ , respetivamente, e colocados de modo a que os arcos  $EB$  e  $BF$  sejam iguais.

Desenhamos os segmentos  $GE$  e  $HF$  perpendiculares a  $DC$  e o segmento  $EC$ . Consideramos  $P$  o ponto de interseção entre  $EC$  e  $HF$ . A cissoide de Diocles é a curva traçada pelo ponto  $P$  quando os pontos  $E$  e  $F$  ocupam todas as posições possíveis nas condições referidas acima.

Nesta construção, representada na figura 4.16, é necessário que os alunos movam o ponto  $E$  para obter o traçado do ponto  $P$ . A curva definida desta forma também pode ser visualizada através do comando **Locus**.

A solução de Diocles para a resolução do problema da duplicação do cubo passou, tal como a solução de Menecmo, pela determinação de dois meios proporcionais entre dois segmentos.

De seguida veremos como podemos encontrar os dois meios proporcionais utilizando a cissoide de Diocles.

Tendo em conta a construção do ponto  $P$  descrita acima podemos demonstrar que os segmentos  $HF$  e  $HC$  são dois meios proporcionais entre os segmentos  $DH$  e  $HP$ , ou seja, a igualdade (4.16) que será demonstrada abaixo.

$$\frac{DH}{HF} = \frac{HF}{HC} = \frac{HC}{HP} \quad (4.16)$$

DEMONSTRAÇÃO: Pelo Teorema 4.2.1 temos que  $HF$  é o meio proporcional entre os segmentos  $DH$  e  $HC$ , isto é,  $\frac{DH}{HF} = \frac{HF}{HC}$ .

Pelas condições do construção da figura 4.16 sabemos que  $\frac{DH}{HF} = \frac{GC}{GE}$ , uma vez que  $HF = GE$  e  $DG = HC$ .

Por outro lado, como os triângulos  $GEC$  e  $HPC$  são proporcionais os quocientes entre os lados correspondentes são sempre iguais, logo,  $\frac{GC}{GE} = \frac{HC}{HP}$ . E portanto a igualdade (4.16) fica demonstrada. ■

Vamos agora descrever como podemos construir os dois meios proporcionais entre os segmentos  $a$  e  $b$ .

Começemos por construir uma circunferência de centro  $O = (0, 0)$  em que  $AB$  e  $DC$  são os diâmetros perpendiculares entre si. Seguidamente, construímos a cissoide pelo método de Diocles, mas desta vez utilizamos o comando Locus, e criamos um ponto  $K$  no segmentos  $OB$  de maneira a que a igualdade (4.17) seja respeitada.

$$\frac{DO}{OK} = \frac{a}{b} \quad (a > b) \quad (4.17)$$

Unimos o ponto  $D$  ao ponto  $K$  e prolongamos o segmento  $DK$  de modo a intersectar a curva cissoide num ponto que vamos designar por  $Q$ .

O programa de Geometria Dinâmica utilizado não permite intersetar semirretas com lugares geométrico. Portanto, necessitámos de o construir este ponto através de um artifício. Mais à frente, nesta secção, vamos descrever o artifício usado para determinar o ponto  $Q$ , que aparentemente será determinado pela interseção do prolongamento do segmento  $DK$  com a cissoide.

Vamos supor que conseguimos obter o ponto  $Q$  pela forma descrita acima. Passando por  $Q$  construímos o segmento  $ML$  paralelo a  $AB$ .

Pelo que demonstramos anteriormente,  $ML$  e  $MC$  são dois meios proporcionais entre  $DM$  e  $MQ$ , ou seja, verificam as igualdades (4.18).

$$\frac{DM}{ML} = \frac{ML}{MC} = \frac{MC}{MQ} \quad (4.18)$$



Destes dois factos surgiu o artifício que usamos para a construção do ponto  $Q$ . Para construir o ponto  $Q$  começamos por construir um ponto  $X$  segundo (4.23).

$$X = \left( x(D) + a, -a\sqrt[3]{\frac{b}{a}} \right) \quad (4.23)$$

Estamos, portanto, a obrigar a que  $x$  seja a distância do ponto  $X$  ao segmento  $DC$  da figura 4.17.

Tendo em conta a proporcionalidade (4.21) conseguimos determinar o ponto  $L$ , realizando a interseção da semirreta  $\dot{D}X$  com a circunferência.

Determinamos o ponto  $M$  executando a interseção da reta que passa por  $L$  perpendicular ao segmento  $DC$  com o próprio segmento  $DC$ . Construimos o segmento  $ML$ . E por fim, determinamos o ponto  $Q$  pela interseção do segmento  $ML$  com a semirreta  $\dot{D}K$ .

Vamos, agora, demonstrar que, realmente, podemos obter os meios proporcionais  $x$  e  $y$ , entre os segmentos  $a$  e  $b$ , através da construção do quarto proporcional das proporcionalidades (4.21) e (4.22).

DEMONSTRAÇÃO: Temos que as proporcionalidades (4.21) e (4.22) são equivalentes às proporcionalidades (4.24) e (4.25), respetivamente.

$$\frac{DM}{ML} = \frac{a}{x} \quad (4.24)$$

$$\frac{MQ}{MC} = \frac{b}{y} \quad (4.25)$$

Por outro lado, tendo em conta (4.20), temos que:

$$\frac{ML}{MC} = \frac{ML}{DM} \times \frac{DM}{MQ} \times \frac{MQ}{MC} = \frac{x}{a} \times \frac{a}{b} \times \frac{b}{y}$$

ou seja, a igualdade (4.26).

$$\frac{ML}{MC} = \frac{x}{y} \quad (4.26)$$

Por fim, tendo em conta (4.24), (4.25) e (4.26) temos que  $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$ , isto é, encontramos os dois meios proporcionais,  $x$  e  $y$ , entre os segmentos  $a$  e  $b$ . ■

Para resolver o problema da duplicação do cubo basta considerar  $b = a/4$  e o comprimento da aresta do cubo cujo volume é o dobro do volume do cubo dado é  $2x$ . Pois, pela igualdade (4.9) temos que,

$$x = a\sqrt[3]{\frac{b}{a}} = a\sqrt[3]{\frac{a}{4a}} = \frac{a}{\sqrt[3]{4}}$$

e, portanto,

$$(2x)^3 = \left(2\frac{a}{\sqrt[3]{4}}\right)^3 = 2a^3$$

como pretendemos.

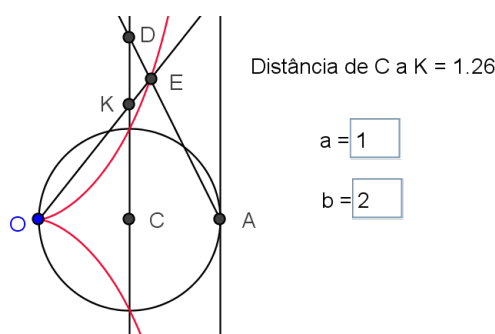


Figura 4.18: Solução utilizando a cissoide de Diocles segundo [25].

Realizámos outra construção para o problema da duplicação do cubo com recurso à cissoide de Diocles. Esta construção está descrita na figura 4.18.

Neste caso, para resolver o problema da duplicação do cubo temos de considerar  $b = 2a$  e o comprimento da aresta do cubo cujo volume é o dobro do volume do cubo inicial é dada pela distância entre os pontos  $C$  e  $K$ . Podemos ver uma demonstração de que esta construção funciona em [25].

De seguida, iremos descrever os passos que efetuamos, com base no primeiro volume do Tratado das Curvas de Gomes Teixeira, para executar esta construção:

1. construir o que atualmente conhecemos por cissoide de Diocles em que as duas curvas envolvidas são uma circunferência de raio  $a$  e centro  $C = (a, 0)$  e uma linha reta tangente à circunferência em  $A = (2a, 0)$  e o ponto fixo é o ponto  $O = (0, 0)$ ;
2. designemos por  $D$  o ponto pertencente à reta paralela à assíntota da cissoide que passa por  $C$  e tal que a distância desse ponto ao ponto  $C$  seja  $b$ ;
3. o ponto  $E$  é o ponto de interseção da semirreta  $\overrightarrow{AD}$  com a cissoide. Mas voltamo-nos a deparar com a mesma limitação, do programa de Geometria Dinâmica *GeoGebra*, da construção anterior, por conseguinte, passamos para o passo seguinte;

4. o ponto  $K$  é o ponto de interseção da semirreta  $\dot{O}E$  com a reta definida por  $C$  e por  $D$ , como não construímos o ponto  $E$  passamos ao passo seguinte.
5. como a distância entre os pontos  $C$  e  $K$  é  $a\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$ , para resolver as limitações dos passos anteriores marcamos o ponto  $K$  da seguinte forma

$$K = \left( 0, a\sqrt[3]{\frac{b}{a}} \right)$$

e depois determinamos o ponto  $E$  pela interseção entre as semirretas  $\dot{O}K$  e  $\dot{A}D$ .

# Capítulo 5

## Cicloide

Devido às suas propriedades a cicloide foi uma das curvas mais estudadas ao longo de muitos séculos.

Neste capítulo vamos começar por analisar o Paradoxo da Roda de Aristóteles, verificar que a área sob uma cicloide é três vezes a área do seu círculo gerador, referir que a resolução do problema da braquistócrona é a cicloide invertida, descrever os passos de duas simulações computacionais para este problema e comparar o tempo que uma partícula demora a percorrer uma cicloide invertida e um plano inclinado, nas nossas simulações, com o tempo previsto analiticamente.

### 5.1 Definição

Na figura 5.1 está representada uma cicloide definida na página 617 de [16] como «a curva traçada por um ponto no aro de uma roda a rolar ao longo de uma reta».

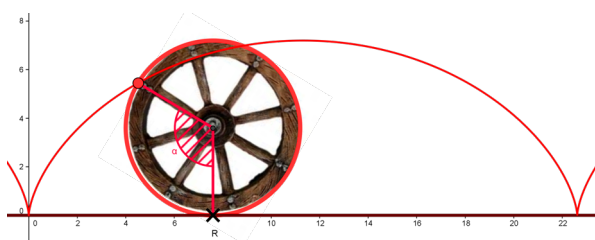


Figura 5.1: Cicloide

**DEFINIÇÃO 5.1.1** Seja  $C$  uma circunferência de raio  $r$ ,  $s$  uma reta e  $P$  um ponto de  $C$ . Denominamos por cicloide a curva descrita pelo ponto  $P$  quando  $C$  rola sobre a reta  $s$ , sem deslizar, dada pela equação paramétrica (5.1).

$$\begin{cases} x = r(\alpha - \sin \alpha) \\ y = r(1 - \cos \alpha) \end{cases} \quad (5.1)$$

A equação cartesiana da cicloide é dada pela equação (5.2).

$$x = r \arccos\left(1 - \frac{y}{r}\right) - \sqrt{2ry - y^2} \quad (5.2)$$

## 5.2 O Paradoxo da Roda de Aristóteles

Um paradoxo é uma declaração aparentemente verdadeira que leva a uma contradição lógica, ou a uma situação que contradiz a intuição comum. Desde sempre que o infinito está associado a diversos paradoxos. Aos poucos, alguns dos paradoxos foram sendo explicados, mas ainda assim, não se trata de um assunto sem controvérsia.

Nesta secção vamos descrever o Paradoxo da Roda de Aristóteles[8] e refletir sobre uma explicação possível para este conhecido paradoxo.

Consideremos duas rodas com centro no mesmo ponto e raios diferentes e a rolar em simultâneo. Quando a roda maior rola de  $A$  para  $A'$ , dando uma volta completa, o aro da roda menor roda de  $B$  para  $B'$ , ao longo de uma linha paralela como podemos ver na figura 5.2. Temos que em cada instante, um único ponto do aro da roda grande toca no segmento  $AA'$  e um único ponto do aro da roda pequena toca no segmento  $BB'$ . Não se excluiu ponto algum de qualquer das duas circunferências. Isto leva-nos ao paradoxo da Roda de Aristóteles, uma vez que, em primeira análise podemos concluir que os perímetros das duas circunferências são iguais. E sabemos que esta conclusão não é verdadeira.

Na figura 5.2 está representada uma construção que realizámos, em *GeoGebra*, do paradoxo da roda. Nesta construção os alunos devem deslocar o ponto  $R$  de forma às rodas rolarem uma volta completa e analisar a imagem. Na análise desta construção os alunos devem de ser confrontados com a possibilidade de os perímetros das duas rodas serem iguais e refletirem sobre como podem explicar o facto de:

- o perímetro ser o mesmo se os raios são diferentes;
- o perímetro ser diferente se, tal como observam, em cada instante, um único ponto do aro da roda grande toca no segmento  $AA'$  e um único ponto do aro da roda pequena toca no segmento  $BB'$ , logo o perímetro tem de ser igual.

Após a reflexão dos alunos sobre o paradoxo poderá ser apresentada uma ideia de uma possível explicação deste paradoxo. Para tal utilizamos um texto de apoio ao aluno escrito em HTML e realizámos algumas construções em *GeoGebra*, que serão referidas de seguida.

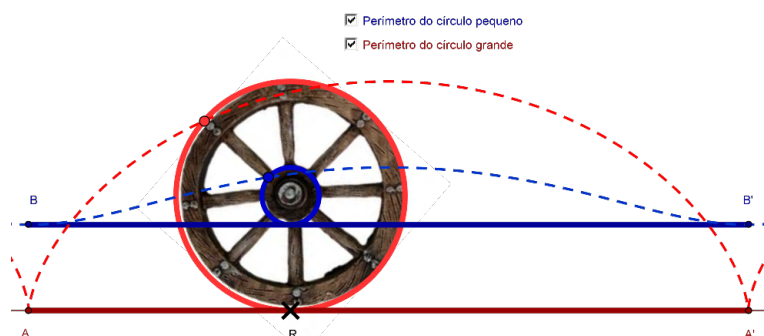


Figura 5.2: Paradoxo da Roda

A definição de circunferência utilizada mais frequentemente é que esta é o lugar geométrico de todos os pontos do plano que estão a uma dada distância (raio) de um ponto fixo (centro da circunferência). Mas a circunferência pode ser encarada como um polígono regular com um número infinito de lados.

Arquimedes usou este conceito para determinar o perímetro de um círculo. Este calculou o valor do perímetro de um círculo a partir da sucessão dos perímetros dos polígonos regulares inscritos nele. À medida que o número de lados aumenta, o perímetro do polígono aproxima-se cada vez mais do perímetro do círculo. Assim, o perímetro do círculo corresponde ao limite da sucessão dos perímetros correspondentes ao limite da sucessão dos perímetros dos polígonos inscritos, quando o número de lados tende para infinito (como podemos ver na figura 5.3).

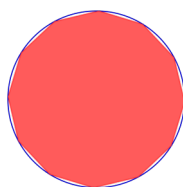


Figura 5.3: Perímetro do círculo corresponde ao limite da sucessão dos perímetros dos polígonos inscritos.

Para dar a ideia da explicação do paradoxo da roda fizemos uma construção, em *GeoGebra*, onde recorreremos à noção de circunferência usada por Arquimedes. Nesta construção os alunos podiam observar o que acontece quando fazemos rolar dois polígonos regulares com um número de lados finito e concêntricos (utilizamos um polígono regular com seis lados, figura 5.4). Essa construção será analisada com os alunos de forma a deduzirem o que acontece quando o número de lados do polígono regular é infinito.

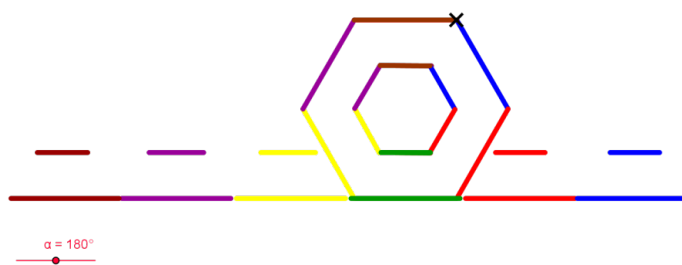


Figura 5.4: Explicação do Paradoxo

### 5.3 Área sob um Arco de Cicloide

O matemático Gilles Roberval, por volta de 1637, demonstrou que a área sob uma cicloide é três vezes a área do círculo gerador. Para tal, este matemático utilizou o que hoje é conhecido pelo *Princípio de Cavalieri*, mas que já havia sido usado por matemáticos como Herão e Galileu.

**Princípio de Cavalieri:** «Se duas figuras planas têm alturas iguais e se secções feitas por linha paralelas às bases e a distâncias iguais delas são sempre na mesma proporção, então as figuras planas também estão nesta proporção.» [9, 16]

Gilles Roberval definiu ainda uma nova curva à qual chamou *companheira da cicloide*. Esta era definida como sendo o lugar geométrico definido pelo ponto  $(x(R), y(R'))$  da figura 5.5.

Na figura 5.5 está representada uma construção feita em *GeoGebra*. Nesta construção os alunos podem:

- deslocar o ponto  $R$  e verificar que os segmentos que na figura medem 2.84 têm sempre o mesmo comprimento;
- deslocar o ponto  $I$  e verificar que os segmentos que na figura medem 6.38 têm sempre o mesmo comprimento.

Dependendo do nível de ensino ao qual esta atividade seja aplicada os alunos mais empenhados conseguirão concluir, após a análise da construção, que a área sob uma cicloide é três vezes a área do círculo gerador.

No seu raciocínio os alunos deverão ter em conta que:

- a área entre metade do arco de cicloide e a companheira da cicloide é igual a metade da área do círculo gerador;

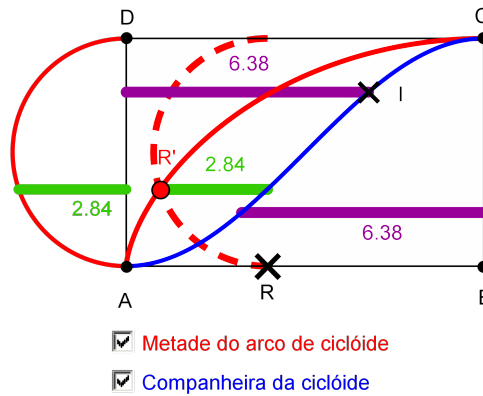


Figura 5.5: Área sob um arco de cicloide

- a área do retângulo  $[ABCD]$  é igual ao produto de metade do perímetro do círculo pelo o seu diâmetro, isto é,  $2\pi r^2$ , onde  $r$  é o raio do círculo gerador;
- a área sob a curva companheira da cicloide é metade da área do retângulo  $[ABCD]$  logo é igual à área do círculo gerador, ou seja,  $\pi r^2$ ;
- a área sob metade do arco de cicloide é igual a  $3/2$  da área do círculo;
- a área sob o arco inteiro é três vezes a área do círculo.

## 5.4 O Problema da Braquistócrona

O problema da Braquistócrona foi apresentado pela primeira vez aos leitores da revista científica *Acta Eruditorum* pelo matemático suíço Johann Bernoulli, em 1696, como um problema que já havia resolvido. Na publicação Johann Bernoulli desafiava os filósofos da época a apresentarem soluções para o problema. O enunciado original é o seguinte [7]:

«*Datis in plano verticali duobus punctis A et B assignare mobili M, viam AMB per quam gravitate sua descendit et moveri incipiens a puncto A, brevissimo tempore perveniat ad alterum punctum B.*»

Em português contemporâneo pode ser formulado da seguinte forma:

«Sejam  $A$  e  $B$  dois pontos de um plano vertical. Encontre a curva na qual uma partícula  $M$ , sujeita somente a ação da gravidade, descreve a trajetória mais rápida entre os pontos  $A$  e  $B$ .»

O Problema da Braquistócrona consiste, portanto, em encontrar a curva ao longo da qual uma partícula se desloca entre dois pontos no menor intervalo de tempo, sendo

que esta partícula está sujeita a um campo gravitacional constante, sem atrito e com velocidade inicial nula. Para além disso, é suposto que os dois pontos não se encontrem sobre a mesma reta horizontal ou sobre a mesma reta vertical. Uma vez que, se os pontos estiverem sobre a mesma reta horizontal não haverá movimento e se os pontos estiverem sobre a mesma reta vertical a solução do problema é a própria reta.

A curva que resolve este problema denomina-se Braquistócrona, do grego *brachistos* (mínimo) e *chronos* (tempo). A solução do Problema da Braquistócrona é uma cicloide invertida. Podemos ver uma demonstração do que acabámos de referir em [29, secção 3.1].

Efetuamos diversas tentativas para fazer uma simulação computacional do Problema da Braquistócrona no caso particular em que pretendemos encontrar a curva ao longo da qual uma partícula, com forma de bola e de massa 1, se desloca entre os pontos  $A = (0, 0)$  e  $B = (\pi, -2)$  no menor intervalo de tempo. Neste caso a solução do Problema da Braquistócrona é a cicloide invertida cujo círculo gerador tem raio 1. Das várias tentativas que realizámos decidimos descrever neste documento uma simulação em que consideramos o tempo discreto e outra simulação em que consideramos o tempo contínuo. Embora, neste caso, a discretização não seja fundamental, é importante que se conheça a técnica para o caso de se estar a lidar com uma curva para a qual não se consiga fazer a simulação de outro modo.

Vamos começar por descrever a construção que realizámos com base na discretização do tempo.

Para construir esta simulação do Problema da Braquistócrona foi necessário utilizar a folha de cálculo do programa de geometria dinâmica *GeoGebra*. Começámos esta construção com a definição das quantidades  $g = 9,8$  e  $t_1 = 0,01$  e com a criação de uma ferramenta que, aplicada a um ponto  $P$  com ordenada entre  $-2$  e  $0$  (inclusive), dá a interseção do arco de cicloide com a reta horizontal que passa pelo ponto  $P$ . Mais precisamente, aplicando a ferramenta ao ponto de coordenadas  $(x, y)$ , obtém-se o ponto

$$(\arccos(y + 1) - \sin(\arccos(y + 1)), y) = \left( \arccos(y + 1) - \sqrt{-y^2 - 2y}, y \right)$$

determinado com base nas equações, paramétrica (5.1) e cartesiana (5.2), da cicloide de raio 1.

Inicialmente pensámos que seria impossível, com auxílio do *software* de geometria dinâmica utilizado, resolver o problema de forma contínua. Tivemos dificuldades na realização da simulação em que considerámos o tempo discreto. Estas dificuldades devem-se aos factos do *software* de Geometria Dinâmica utilizado não efetuar interseções entre uma curva e outros tipos de representações (como por exemplo, retas, circunferências, gráficos, curvas) e não representar graficamente funções escritas em função de  $y$  (isto é, como a função dada pela equação cartesiana (5.2)). Para resolver esta dificuldade, optámos por na execução desta simulação discretizar o tempo em intervalos de tempo ( $t_1 = 0,01$ ) pequenos e prever, por cálculos efetuados na Folha de

Cálculo, qual a posição da partícula no instante seguinte, como podemos ver na figura 5.6.

Folha de Cálculo				
	A	B	C	D
1	(0, 0)	0	0	$(x - 0.08)^2 + y^2 = 0.0064$
2	(0.00001, -0.00049)	0.03131	0.01	$(x - 0.08)^2 + (y - 0.00076)^2 = 0.0064$
3	(0.00003, -0.00147)	0.05423	0.02	$(x - 0.08)^2 + (y - 0.0007)^2 = 0.0064$
4	(0.00008, -0.00317)	0.0796	0.03	$(x - 0.08002)^2 + (y - 0.00002)^2 = 0.0064$
5	(0.0002, -0.00566)	0.10641	0.04	$(x - 0.08009)^2 + (y + 0.0014)^2 = 0.0064$
6	(0.0004, -0.00898)	0.13412	0.05	$(x - 0.08022)^2 + (y + 0.00362)^2 = 0.0064$

Figura 5.6: Folha de Cálculo Utilizada na Simulação

De seguida vamos descrever a função de cada uma das quatro colunas da Folha de Cálculo utilizadas na construção.

- **Coluna A:** É uma coluna de pontos, dos quais o primeiro é  $(0, 0)$  e o segundo é o resultado de se aplicar a ferramenta a  $(0, -gt_1^2/2)$ . A partir da terceira linha, cada ponto  $A_{i+1}$  é obtido de  $A_i$  pelo seguinte processo:
  - soma-se a  $A_i$  o vetor tangente unitário à cicloide no ponto onde  $A_i$  toca na cicloide, multiplicado pela velocidade escalar da bola nesse momento (que é o produto de  $t_1$  pela raiz quadrada do produto de  $2g$  pelo simétrico da ordenada de  $A_i$ , em que  $g$  representa a aceleração da gravidade e o simétrico da ordenada de  $A_i$  representa o deslocamento vertical da partícula, como é demonstrado mais abaixo);
  - aplica-se a ferramenta ao ponto anterior.

Ou seja,

$$A_{i+1} = Ferramenta \left[ A_i + t_1 \sqrt{-2gy(A_i)} \times (\sin(B_i/2), -\cos(B_i/2)) \right]$$

Este método não poderia ser aplicado logo no primeiro passo devido à velocidade inicial ser nula.

- **Coluna B:** Se  $A_i = (\theta - \sin(\theta), -1 + \cos(\theta))$  então  $B_i = \theta$ , isto é,  $B_i = \arccos(1 + y(A_i))$ . Esta coluna é necessária para calcular  $A_{i+1}$  uma vez que o vetor tangente unitário é  $(\sin(\theta/2), -\cos(\theta/2))$ .

- **Coluna C:**  $C_i = t_1 \times i$ .
- **Coluna D:** Equação do círculo de raio  $r$  (partícula) tangente à cicloide no ponto  $A_i$ , isto é,  $D_i = \text{Circunferência}[A_i + r(\cos(B_i/2), \sin(B_i/2)), A_i]$ . O valor de  $r$  é controlável por um seletor. Além disso, o círculo só é visível quando  $t$  (que toma valores de 0 a 1,5 com saltos de  $t_1$ ) for igual a  $C_i$ .

Obtivemos desta forma a animação do movimento de uma partícula, com forma de bola, sobre a cicloide representada na figura 5.7. Nesta construção, em *GeoGebra*, os alunos podem alterar o raio da partícula entre 0 e 0,2, visualizar a posição da partícula num dado instante de tempo entre 0 e 1,5 e verificar o tempo que esta leva a percorrer a cicloide invertida.

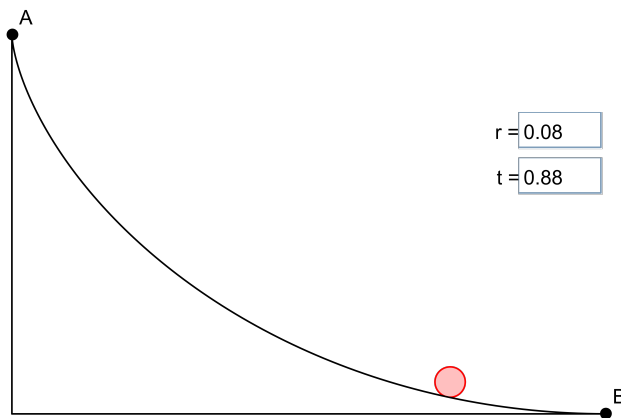


Figura 5.7: Braquistócrona

Para elaborarmos a simulação computacional na qual considerámos o tempo contínuo, para o nosso caso particular do Problema da Braquistócrona, tivemos de encontrar uma expressão analítica da curva Braquistócrona que respeite uma das duas propriedades seguintes:

**1ª Propriedade:** a velocidade escalar ( $v$ ) de um corpo (de massa  $m$ ) que se desloca sobre uma curva (partindo da altura 0 e com velocidade nula) num campo sujeito apenas à força gravítica é  $\sqrt{2gy}$  em que  $g$  é a aceleração da gravidade e  $y$  representa o deslocamento vertical da partícula;

**2ª Propriedade:** a aceleração tangencial ( $\vec{a}_T(t)$ ) de um corpo (de massa  $m$ ) que se desloca sobre uma curva (partindo da altura 0 e com velocidade nula) num campo sujeito apenas à força gravítica é, a cada instante  $t$ , igual ao produto de  $-g \sin(\theta)$  pelo vetor tangente unitário  $\vec{T}(t)$  em que  $g$  é a aceleração da gravidade e  $\theta$  é o ângulo que este último vetor faz com a horizontal.

Apesar de não apresentarmos uma demonstração nesta tese pode-se demonstrar que estas duas propriedades são equivalentes.

Nesta tese vamos começar por demonstrar que a expressão analítica da curva Braquistócrona que resolve o nosso problema tem que respeitar a **1ª Propriedade**, obter uma expressão analítica que respeite a **1ª Propriedade** e verificar que esta expressão analítica também respeita a **2ª Propriedade**.

Pelo princípio da conservação da energia sabemos que a energia total ( $E$ ) de um sistema isolado é conservada. Isto é, sabemos que a soma das duas componentes da energia total (energia cinética e energia potencial) respeita a seguinte igualdade

$$E = mgy + \frac{1}{2}mv^2 = k$$

em que  $m$  é a massa do corpo,  $g$  a aceleração da gravidade,  $y$  a altura a que o corpo se encontra,  $v$  a velocidade escalar e  $k$  uma constante.

Consideremos um corpo cuja altura inicial é 0 e este corpo começa-se a mover logo a sua velocidade inicial é nula e, por conseguinte, a energia potencial e a energia cinética são nulas, isto é, obtemos a igualdade 5.3.

$$mgy + \frac{1}{2}mv^2 = 0 \quad (5.3)$$

Quando este corpo atinge a altura  $-y$  ( $y \geq 0$ ) a igualdade 5.3 equivale a afirmar que

$$v = \sqrt{2gy}. \quad (5.4)$$

Demonstrámos assim que um corpo nas condições acima respeita a **1ª Propriedade**. Vamos agora encontrar a expressão analítica da curva Braquistócrona que respeita esta propriedade.

Uma expressão analítica da curva que resolve o nosso problema é dada pela função  $c : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  definida pela igualdade 5.5.

$$c(t) = (t - \sin(t), -1 + \cos(t)) \quad (5.5)$$

Mas como esta expressão analítica da curva Braquistócrona ( $c$ ) não envolve a aceleração da gravidade não conseguimos obter, através desta expressão, a velocidade escalar dada pela equação 5.4.

Portanto, vamos reparametrizar  $c$  de modo à velocidade escalar ser dada pela equação 5.4. Pretendemos então substituir  $c$  pela função  $c \circ s$ , onde  $s$  é alguma bijeção derivável de algum intervalo de tempo  $[0, T]$  em  $[0, \pi]$ . Então, como

$$\begin{aligned} c'(t) &= (1 - \cos(t), -\sin(t)) \\ &= \left(1 - \left(1 - 2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\right), -2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right) \\ &= 2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\left(\sin\left(\frac{t}{2}\right), -\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right), \end{aligned}$$

como  $\|(\sin(\frac{t}{2}), -\cos(\frac{t}{2}))\| = 1$  e como  $2\sin(\frac{t}{2}) \geq 0$ , a velocidade escalar no instante  $t$  é  $2\sin(\frac{t}{2})$ . Logo, se se considerar  $c \circ s$ , a velocidade escalar no instante  $t$  será  $2\sin(\frac{s(t)}{2})s'(t)$  e afirmar que se tem 5.4 é afirmar que:

$$\begin{aligned} 2\sin\left(\frac{s(t)}{2}\right)s'(t) &= \sqrt{2g(1 - \cos(s(t)))} \\ &= 2\sqrt{g}\sin\left(\frac{s(t)}{2}\right), \end{aligned}$$

ou seja, que  $s'(t) = \sqrt{g}$ . Logo,  $s(t) = \sqrt{g}t$ . Assim sendo, podemos definir a expressão analítica da curva Braquistócrona que resolve o nosso problema, pois respeita a **1ª Propriedade**, pela função:

$$\begin{aligned} c_1 : \left[0, \frac{\pi}{\sqrt{g}}\right] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto (\sqrt{g}t - \sin(\sqrt{g}t), -1 + \cos(\sqrt{g}t)). \end{aligned}$$

Com esta definição  $c_1$  da curva Braquistócrona, o ponto inicial é  $(0, 0)$  e a velocidade inicial é nula como pretendíamos.

Quando um corpo (de massa  $m$ ) que se desloca sobre uma curva num campo sujeito apenas à ação da gravidade (partindo da altura 0 e com velocidade nula) temos que:

$$\vec{a} = -g\vec{e}_y = \vec{a}_N(t) + \vec{a}_T(t) = -g\cos(\theta)\vec{N}(t) - g\sin(\theta)\vec{T}(t)$$

em que  $g$  é a aceleração da gravidade,  $\vec{e}_y$  o vetor unitário segundo o eixo dos  $yy$ ,  $\vec{a}_N(t)$  a aceleração normal,  $\vec{N}(t)$  vetor normal unitário,  $\vec{a}_T(t)$  aceleração tangencial,  $\vec{T}(t)$  vetor tangente unitário e  $\theta$  é o ângulo que este último vetor faz com a horizontal.

Vamos agora demonstrar que  $c_1$  respeita a **2ª Propriedade**, isto é, que a aceleração tangencial  $\vec{a}_T(t)$  é, a cada instante  $t$ , igual ao produto de  $-g\sin(\theta)$  pelo vetor tangente unitário  $\vec{T}(t)$ . Um cálculo direto revela que:

$$\vec{a}_T(t) = g\cos\left(\frac{\sqrt{g}t}{2}\right) \underbrace{\left(\sin\left(\frac{\sqrt{g}t}{2}\right), -\cos\left(\frac{\sqrt{g}t}{2}\right)\right)}_{=\vec{T}(t)}. \quad (5.6)$$

Mas

$$\begin{aligned} \left(\sin\left(\frac{\sqrt{g}t}{2}\right), -\cos\left(\frac{\sqrt{g}t}{2}\right)\right) &= \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{g}t}{2}\right), -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{g}t}{2}\right)\right) \\ &= \left(\cos\left(\frac{\sqrt{g}t}{2} - \frac{\pi}{2}\right), \sin\left(\frac{\sqrt{g}t}{2} - \frac{\pi}{2}\right)\right). \end{aligned}$$

Logo,  $\theta = \frac{\sqrt{g}t}{2} - \frac{\pi}{2}$  e, portanto,

$$\begin{aligned}
 -g \sin(\theta) &= -g \sin\left(\frac{\sqrt{gt}}{2} - \frac{\pi}{2}\right) \\
 &= g \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{gt}}{2}\right) \\
 &= g \cos\left(\frac{\sqrt{gt}}{2}\right)
 \end{aligned}$$

o que, juntamente com 5.6, confirma que  $\vec{a}_T(t) = -g \sin(\theta) \vec{T}(t)$ .

Com base na expressão analítica de  $c_1$  construímos uma simulação onde os alunos podem alterar o raio da partícula entre 0 e 0,2, visualizar a posição da partícula num dado instante de tempo entre 0 e 1,2 e verificar o tempo exato que a partícula leva a percorrer a cicloide invertida  $(t = \frac{\pi}{\sqrt{g}} \simeq 1,00354)$ . O aspeto visual desta construção é igual ao da figura 5.7.

## 5.5 O Problema da Braquistócrona e o movimento sobre o plano inclinado

Nesta secção vamos comparar o tempo que uma partícula demora a percorrer uma cicloide invertida e um plano inclinado, nas nossas simulações, com o tempo previsto analiticamente.

Para tal fizemos duas construções em *GeoGebra*, com aspeto visual igual, retratadas na figura 5.8. Nestas simulações os estudantes podem comparar o movimento de uma partícula, com forma de bola e de massa 1, que se desloca entre os pontos  $A = (0, 0)$  e  $B = (\pi, -2)$  sobre a cicloide invertida (numa considerando o tempo discreto e na outra contínuo) e sobre um plano inclinado. Os alunos nestas simulações podem constatar que, realmente, a partícula chega mais rapidamente a  $B = (\pi, -2)$  quando se desloca sobre a cicloide invertida.

As simulações do movimento de uma partícula sobre a cicloide invertida desta secção foi construída da mesma forma da simulação descrita na secção 5.4. Obtivemos a simulação do movimento de uma partícula sobre o plano inclinado com base nos apontamentos das aulas da disciplina Métodos Matemáticos em Ciência [24].

Tendo por base estes apontamentos a equação da posição de um corpo de massa 1 que desliza desde a posição inicial  $x_0 = 0$ , sem rolar, sem atrito, com velocidade inicial nula ( $v_0 = 0$ ), num plano inclinado que faz um ângulo  $\theta$  com a horizontal é dada pela equação (5.7).

$$x(t) = \frac{1}{2}t^2g \sin \theta \tag{5.7}$$

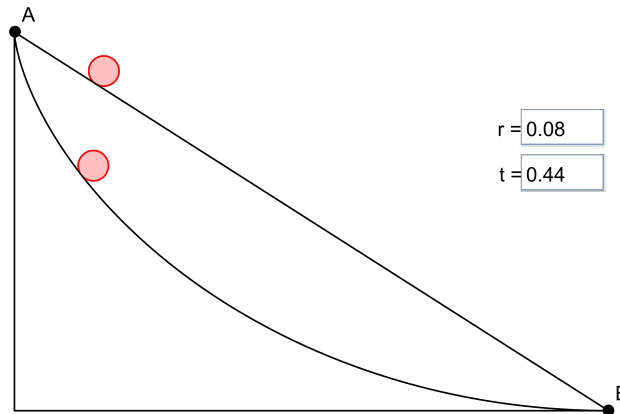


Figura 5.8: Comparação entre o movimento de uma partícula sobre a cicloide invertida e sobre o plano inclinado.

A construção sobre o plano inclinado foi realizada através de uma adaptação da construção fornecida pelo Doutor João Nuno Tavares nas aulas de Métodos Matemáticos em Ciências à equação (5.7).

Para calcular analiticamente o tempo que uma partícula demora a percorrer, de  $A$  para  $B$ , uma cicloide invertida e um plano inclinado tivemos em conta [29, Secção 3]. Segundo o autor o tempo total ( $t(x)$ ) que uma partícula demora a se deslocar de  $A$  para  $B$  pode ser determinado pelo seguinte integral

$$t(x) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^\pi \sqrt{\frac{1 + y'^2(s)}{-y(s)}} ds$$

no qual

$$s(x) = \int_0^x \sqrt{1 + y'^2(\xi)} d\xi.$$

Curva	$x$	$y$	$t(x)$	$t(x)$ (simulação discreta)
Cicloide invertida	$\theta - \sin(\theta)$	$-1 + \cos(\theta)$	1,00354	]0,99, 1]
Plano inclinado	$x$	$-\frac{2}{\pi}x$	1,18965	]1,18; 1,19]

Tabela 5.1: Tempo que uma partícula demora a se deslocar de  $A$  para  $B$  sobre uma dada curva.

Com base nestes integrais obtivemos os valores da tabela 5.5. No caso da simulação que contém a cicloide invertida em que considerámos o tempo contínuo o tempo que a partícula demora a chegar a  $B$  é igual ao valor obtido analiticamente, por isso, não os diferenciamos na tabela. Tal como era de esperar constatamos que, realmente, a partícula chega mais rapidamente a  $B = (\pi, -2)$  quando se desloca sobre a cicloide invertida.

Quando comparamos e analisamos o tempo que a partícula leva a chegar ao ponto  $B$  obtido analiticamente com o da simulação da Braquistócrona em que consideramos o tempo discreto verificamos que:

- no caso da cicloide invertida o tempo da nossa simulação é ligeiramente inferior;
- no caso do plano inclinado o tempo é igual.

Pensamos que a ligeira diferença, no caso da cicloide invertida, se deve à discretização do tempo em intervalos de tempo ( $t_1 = 0,01$ ) e aos arredondamentos.

# Referências

- [1] Bers, Lipman e Karal, Frank. *Calculus (2<sup>a</sup> ed)*. United States of America, 1976.
- [2] Boyer, Carl B.. *História da Matemática 2<sup>a</sup> Edição* (Tradução: Elza F. Gomide). Editora Edgard Blucher Ltda, São Paulo, 2001.
- [3] Cabri Geomètre. *Site oficial* <http://www.cabri.com.br/index.php> a 22 de Março de 2012.
- [4] Candeias, Nuno; Ponte, João Pedro. *Uma proposta curricular para o ensino da geometria do 8<sup>o</sup> ano*. Retirado de <http://www.ese.ualg.pt/eiem2006/GD%20orienta%C3%A7%C3%B5es%20curriculares%20actuais/Uma%20proposta%20curricular%20para%20o%20ensino%20da%20geometria%20do%208.%C2%BA%20ano.pdf> em 25 de Março de 2012.
- [5] C.a.R. *Site oficial* <http://zirkel.sourceforge.net/> a 22 de Março de 2012.
- [6] Cinderella. *Site oficial* <http://www.cinderella.de/tiki-index.php> a 22 de Março de 2012.
- [7] Cunha Junior, Americo Barbosa. *O Problema da Braquistócrona e Algumas Noções de Cálculo Variacional*. Retirado de [http://web.me.com/americo/pubs/other/pbncv\\_report.pdf](http://web.me.com/americo/pubs/other/pbncv_report.pdf) em 19 de Dezembro de 2011.
- [8] Drabkin, Israel E. Aristotle's Wheel: Notes on the History of the Paradox. *Osiris* 9, 162–198, 1950.
- [9] Estrada, Maria Fernanda; Sá, Carlos; Queiró, João; Silva, Maria do Céu e Costa, Maria José. *História da Matemática*. Universidade Aberta, Lisboa, 2000.
- [10] Franz, J. Vesely. *Computational Physics: An Introduction (2nd edition)*. Springer-Verlag, 2001.
- [11] GeoGebra. *Site oficial* <http://www.geogebra.org/cms/> a 20 de Setembro de 2011.
- [12] Grupo de Trabalho de Investigação. *O professor e o Desenvolvimento Curricular*. Associação De Professores de Matemática, 2005.

- [13] Harvey-Woodall, Antionette. *Integrating Technology into the Classroom: How Does It Impact Student Achievement?* Jackson State University. July 16, 2009. Retirado de <http://www.eric.ed.gov/PDFS/ED505984.pdf> a 12 de Março de 2012.
- [14] Heath, Thomas. *The Works of Archimedes*. Dover, New York, 1912.
- [15] Hohenwarter, Judith e Hohenwarter, Markus. Ajuda GeoGebra, Manual Oficial da versão 3.2. Retirado de [http://www.geogebra.org/help/docupt\\_PT.pdf](http://www.geogebra.org/help/docupt_PT.pdf) em 20 de Outubro de 2011.
- [16] Katz, Victor J.. *História da Matemática*. Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 2010.
- [17] NCTM (2007). *Normas para o currículo e a avaliação em Matemática escolar*. Texto original em inglês publicado em 2000, Lisboa.
- [18] ME-DGIDC (2008). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Retirado de [http://area.dgicd.min-edu.pt/materiais\\_NPMEB/028\\_ProgramaMatematicaEnsinoBasico.pdf](http://area.dgicd.min-edu.pt/materiais_NPMEB/028_ProgramaMatematicaEnsinoBasico.pdf) em 30 de Janeiro de 2012.
- [19] Mudaly, Vimolan e Villiers, Michael. *Mathematical Modeling and Proof*. Retirado de <http://mysite.mweb.co.za/residents/profmd/vimmodel.pdf> em 27 de Setembro de 2011.
- [20] Munévar, Edwin. *Tarea 4: Movimiento Planetario*. Universidad Distrital. Retirado de [funpro1000.homedns.org/Tarea4/Tarea04.pdf](http://funpro1000.homedns.org/Tarea4/Tarea04.pdf) em 30 de Janeiro de 2012.
- [21] Ponte, João Pedro (2003). *O ensino da Matemática em Portugal: Uma prioridade educativa? O ensino da Matemática: Situação e perspectivas* (pp. 21-56). Lisboa: Conselho Nacional de Educação. Retirado de [http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/02-Ponte\(CNE\).pdf](http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/02-Ponte(CNE).pdf) em 19 de Março de 2012.
- [22] Prado, Enéias e Geraldino, Daniel. *Aplicações de concordância, tangência e curvas cónicas na arquitetura*. Universidade Estadual de Londrina. Retirado de <http://www.mat.uel.br/geometrica/artigos/PA-21-TC.pdf> em 10 de Janeiro de 2012.
- [23] Tavares, João Nuno. *Movimento num campo central. Leis de Kepler e Newton*. Apontamentos da disciplina Métodos Matemáticos em Ciência do Mestrado em Matemática para Professores, 2011.
- [24] Tavares, João Nuno. *Projetéis. Plano inclinado*. Apontamentos da disciplina Métodos Matemáticos em Ciência do Mestrado em Matemática para Professores, 2011.
- [25] Teixeira, F. Gomes. *Obras sobre Matemática*. Volume 4, Capítulo 1, Secção 1. Editora Imprensa da Universidade de Coimbra, 1908.

- [26] The Geometer's Sketchpad. *Site oficial* <http://www.dynamicgeometry.com/> a 22 de Março de 2012.
- [27] Gupta, R. C. *Lindemann's discovery of the transcendence of  $\pi$  : a centenary tribute*. Ganita-Bharati. Bulletin of the Indian Society for the History of Mathematics (1982).
- [28] Sousa, José Miguel. *Trissecção do Ângulo e Duplicação do Cubo: as Soluções na Antiga Grécia*. Universidade do Porto, 2001. Retirado de <http://www.prof2000.pt/users/miguel/tese/pdf.html> em 10 de Outubro de 2011.
- [29] Sousa Júnior, José Ribamar Alves. *O Cálculo Variacional e o Problema da Braquistócrona*. Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2010. Retirado de [http://www.rc.unesp.br/igce/pos/mestrado\\_profissional/Arquivos/Dissertacoes/Jos%C3%A9%20Ribamar%20Alves%20de%20Sousa%20J%C3%BAnior.pdf](http://www.rc.unesp.br/igce/pos/mestrado_profissional/Arquivos/Dissertacoes/Jos%C3%A9%20Ribamar%20Alves%20de%20Sousa%20J%C3%BAnior.pdf) em 5 de Dezembro de 2011.
- [30] Stewart, Ian. *Galois theory*. Chapman & Hall, 1989.
- [31] Villiers, Michael. *Some pitfalls of dynamic geometry software*. Retirado de <http://mysite.mweb.co.za/residents/profmd/pitfalls.pdf> em 20 de Setembro de 2011.
- [32] Yates, Robert C.. *Curves and Their Properties*. The National Council of Teachers of Mathematics. United States of America, 1974.