

**Cálculo simplificado do número de Nusselt
em escoamentos laminares de fluidos não-Newtonianos
no interior de condutas com temperatura de parede constante**

Andresa Baptista da Silva

Dissertação do MIEM

Orientadores:

Prof. Paulo José da Silva Martins Coelho

Prof. Manuel António Moreira Alves



FEUP

Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto

Mestrado Integrado em Engenharia Mecânica

Setembro 2012

Dedico às minhas sobrinhas Rita e Madalena

e ao Mundo ☺

Resumo

O tema estudado neste trabalho tem como objetivo principal testar uma metodologia destinada a simplificar o cálculo do número de Nusselt em escoamentos laminares de fluidos não-Newtonianos no interior de condutas de secção circular com temperatura de parede constante e condução axial de calor desprezável. Para o efeito ter-se-á que comparar os resultados obtidos pelo método aproximado proposto, com os resultados de uma solução numérica a determinar para os diversos modelos reológicos de fluidos não-Newtonianos utilizados. Estas soluções numéricas, embora de mais difícil obtenção, têm um menor erro e por isso serão consideradas como as soluções padrão.

A metodologia foi testada para os fluidos descritos pelos modelos reológicos de Bingham, Casson, Carreau-Yasuda, Herschel-Bulkley e Phan- Thien-Tanner simplificado (sPTT).

Com vista a se poder implementar o método aproximado testaram-se duas abordagens de forma a se obter uma expressão, atualmente inexistente, para o número de Nusselt no caso de temperatura de parede constante para um fluido lei de potência: num caso obteve-se, por um processo iterativo, uma solução semi-analítica, enquanto que numa segunda abordagem ajustou-se uma função simplificada aos resultados numéricos de Nusselt em função do índice de potência. Desta forma procurar-se-á calcular facilmente o número de Nusselt para um fluido lei de potência, algo que é fundamental para a implementação do método simplificado.

Seguidamente efetuaram-se as avaliações do modelo proposto, por comparação do número de Nusselt obtido pelo método simplificado com o número de Nusselt correto correspondente aos modelos reológicos que foram estudados, neste último caso realizaram-se integrações numéricas para obter o número de Nusselt. Os desvios máximos obtidos entre as expressões analíticas para o número de Nusselt de um fluido lei de potência e a solução numérica correspondente variam entre 0,010% e 0,109%. Os desvios máximos obtidos entre as soluções aproximadas para os diversos fluidos estudados e as respetivas soluções numéricas variam entre 0,36% e 7,25%.

Abstract

Simplified calculation of the Nusselt number in laminar flows of non-Newtonian fluids within conduits with constant wall temperature

The main goal of this work is to test a simplified methodology to calculate the Nusselt number in laminar flow of non-Newtonian fluids in pipes with constant wall temperature and negligible axial heat conduction. For this purpose, we determine the accuracy of the proposed approximate method by comparing the results against those obtained using an accurate numerical method, for the various rheological models analysed. These numerical solutions, although more difficult to obtain, have a lower error and therefore will be considered as the standard solutions.

The methodology was tested for non-Newtonian fluids described by the following rheological models: Bingham, Casson, Carreau-Yasuda, Herschel-Bulkley and simplified Phan-Thien-Tanner (sPTT).

In order to be able to implement the approximate method, two approaches were tested in order to obtain an expression of the Nusselt number (Nu) for constant wall temperature pipe flow of a power law fluid: in the first case, a semi-analytic expression for the Nusselt number of a power law fluid was obtained by an iterative process; the second approach relies on fitting the numeric results of Nusselt number using a nonlinear function. In this way, the Nusselt number of a power law fluid can be easily computed, which is a fundamental requirement for the implementation of the simplified method.

Subsequently, the proposed model was evaluated by comparing the computed values of the Nusselt number using the simplified method with the more accurate numerical results for the rheological models that have been tested. The maximum deviations obtained between the analytical expressions for the Nusselt number of a power law fluid and the numerical solution corresponding vary between 0.010% and 0.109%. The maximum deviations obtained between the approximate solutions to the several fluids studied and their numerical solutions vary between 0.36% and 7.25%.

Agradecimentos

A realização desta dissertação marca o fim de mais uma das etapas da minha vida. Este trabalho não teria sido possível sem a ajuda de muitas pessoas às quais agradeço o apoio dado:

Em primeiro lugar ao Prof. Paulo Coelho, que acreditou em mim aceitando-me como sua orientanda. À sua total disponibilidade desde o primeiro momento, não tenho palavras para agradecer as horas que me recebeu lendo e acompanhando o meu trabalho passo a passo. Pelo apoio e incentivo dado nos momentos certos, o meu obrigada.

Ao Prof. Manuel Alves que aceitou ser meu co-orientador e muito me ajudou na obtenção das soluções numéricas.

A todos os amigos que estiveram sempre presentes, agradeço a força, a amizade e confiança que depositaram em mim.

Por último, manifesto um sentido e profundo reconhecimento à minha família, em especial à minha mãe Fernanda, pelo apoio incondicional ao longo destes anos que me ajudaram a ser quem sou.

Índice de Conteúdos

Resumo	v
Abstract	vii
Agradecimentos	ix
Índice de Conteúdos	xi
Índice de figuras	xiii
Índice de Tabelas	xv
Nomenclatura	xvii
1 Introdução	19
1.2 Justificação do interesse e objetivo do trabalho	19
1.3 Modelo Lei de Potência	20
1.4 Metodologia do método simplificado	21
1.5 Fluidos não-Newtonianos analisados	23
1.6 Estrutura da dissertação	25
2 Determinação do perfil de temperatura para fluxo de calor constante na parede da conduta	27
2.1 Tubo de Secção Circular	27
2.1.1 Integração da equação de energia	32
2.1.2 Cálculo da expressão de Nusselt	34
2.2 Placas Paralelas	35
2.2.1 Integração da equação de energia	37
2.2.2 Cálculo da expressão do número de Nusselt	38
3 Integração da equação de energia para temperatura de parede constante, cálculo da expressão de Nusselt	39
3.1 Tubos de secção Circular	39
3.1.1 Integração da equação de energia	42

3.1.2	Cálculo da expressão de Nusselt	43
3.1.3	Perfil de Temperatura	44
3.1.4	Comparação da solução semi-analítica para Nu com a solução numérica	45
3.1.5	Solução simplificada	46
3.2	Placas paralelas	47
3.2.1	Integração da equação de energia	48
3.2.2	Cálculo da expressão de Nusselt	49
3.2.3	Perfil de Temperatura	50
3.2.4	Comparação da solução semi-analítica para Nu com a solução numérica	51
3.2.5	Solução simplificada	52
4	Análise ao desempenho do método simplificado	55
4.1	Fluidos de Bingham e Herschel-Bulkley	56
4.2	Fluido de Casson	59
4.3	Fluido de Carreau-Yasuda	60
4.4	Fluidos sPTT	61
4.5	Análise de resultados	62
5	Conclusões e perspectivas de trabalhos futuros	63
6	Referências e Bibliografia	65
ANEXOS		67
ANEXO A: Equações da derivada da temperatura na parede e da temperatura média		67
ANEXO B: Método numérico usado na integração da equação de conservação de energia		69
B.1 – Descrição do método numérico		69
B.2.2 Fluido Herschel-Bulkley		73
B.2.3 Fluido de Casson		74
B.2.4 Fluido de Carreau-Yasuda		75
B.2.5 Fluidos sPTT		76

Índice de figuras

Figura 1.1 – Curva da viscosidade para um fluido lei de potência.....	21
Figura 1.2 – Exemplo de aplicação do modelo lei de potência para um ponto na curva de viscosidade de um fluido genérico, figura adaptada do artigo de Cruz (2012).....	21
Figura 2.1 – Esquema do troço de conduta para o balanço de energia, seção circular	30
Figura 2.2 – Esquema do troço de conduta para o balanço de energia, placas paralelas	36
Figura 3.1– Perfil de temperaturas, θ , em tubos de secção circular, linhas da solução semi-analítica , ——— $n=0$; — — $n=0,1$; - - - $n=0,5$; — . — $n=1$; $n=\infty$	45
Figura 3.2 – Representação dos resultados do número de Nusselt para o método semi-analítico e para o método numérico em função do índice de potência n , em tubos de secção circular. — Nu_{IV} - Solução numérica, $\square$ Nu -Solução Semi-analítica.....	46
Figura 3.3 – Perfil de temperaturas, θ , em placas paralelas, linhas da solução semi-analítica , ——— $n=0$; — — $n=0,1$; - - - $n=0,5$; — . — $n=1$; $n=\infty$	51
Figura 3.4 – Representação dos resultados do número de Nusselt para o método semi-analítico e para o método numérico em função do índice de potência n , em placas paralelas. — Nu_{IV} - Solução numérica, $\square$ Nu -Solução Semi-analítica.....	52
Figura 4.1 – Nu versus $K\bar{U}/\tau_0 R$, $\mu_\infty \equiv K$ e $n=1$ do fluido Bingham ver Tabela 4.1. - - - Nu -Resultado do método simplificado. ——— Nu_{IV} -Resultado do método numérico. A barra vertical representa o erro máximo obtido para o caso em análise.....	57
Figura 4.2 – Nu versus $K(\bar{U}/R)^n \tau_0$, $n=0,5$ do fluido Herschel-Bulkley ver Tabela 4.1- - - Nu -Resultado do método simplificado. ——— Nu_{IV} -Resultado do método numérico. A barra vertical representa o erro máximo obtido para o caso em análise.....	57
Figura 4.3 – Nu versus $K(\bar{U}/R)^n \tau_0$, $n=1,5$ do fluido Herschel-Bulkley ver Tabela 4.1. - - - Nu -Resultado do método simplificado. ——— Nu_{IV} -Resultado do método	

- numérico. A barra vertical representa o erro máximo obtido para o caso em análise. 58
- Figura 4.4 – Nu versus $\mu_{\infty}\bar{U}/\tau_0 R$ do fluido Casson ver Tabela 4.1. - - - Nu -Resultado do método simplificado. ——— Nu_{IV} -Resultado do método numérico. A barra vertical representa o erro máximo obtido para o caso em análise. 59
- Figura 4.5 – Variação do número de Nusselt com o grupo adimensional $\lambda\bar{U}/R$ para um fluido que segue o modelo Carreau-Yasuda, $n=0,2$, $a=1,5$ e $\mu_{\infty}/\mu_0=0,08$, são os restantes parâmetros do fluido em causa, ver Tabela 4.1. - - - Nu -Resultado do método simplificado. ——— Nu_{IV} -Resultado do método numérico. A barra vertical representa o erro máximo obtido para o caso em análise. 60
- Figura 4.6 – Variação do número de Nusselt com $\lambda\bar{U}/R$ para um fluido que segue o modelo Carreau-Yasuda, $n=0,358$, $a=2$ e $\mu_{\infty}/\mu_0=1,08 \times 10^{-4}$ são os restantes parâmetros do fluido em causa, ver Tabela 4.1- - - Nu -Resultado do método simplificado. ——— Nu_{IV} -Resultado do método numérico. A barra vertical representa o erro máximo obtido para o caso em análise. 61
- Figura 4.7 – Variação do número de Nusselt com para fluido sPTT, ver Tabela 4.1. - - - Nu -Resultado do método simplificado. ——— Nu_{IV} -Resultado do método numérico. A barra vertical representa o erro máximo obtido para o caso em análise. 62

Índice de Tabelas

Tabela 1.1 – Modelos reológicos testados e respectivos fluidos.....	23
Tabela 1.2 – Grupos adimensionais.....	24
Tabela 1.3 – Expressões para o cálculo de n' para os modelos reológicos testados	25
Tabela 2.1 – Variáveis adimensionais	36
Tabela 3.1 – Equações para adimensionalização.....	41
Tabela 3.2 – Constantes da equação de Nusselt para temperatura de parede constante em tubos.....	44
Tabela 3.3 – Constantes utilizadas para determinação da solução simplificada no caso de tubos.....	47
Tabela 3.4 – Constantes da equação de Nusselt para temperatura de parede constante em placas paralelas	50
Tabela 3.5 – Constantes utilizadas para determinação da solução simplificada no caso de placas paralelas.	52
Tabela 4.1 – Parâmetros reológicos dos vários fluidos utilizados.....	56

Nomenclatura

A	Área [m^2]
a	Parâmetro adimensional do modelo de viscosidade Carreau-Yasuda
c_p	Calor específico do fluido, [J/kg.K]
D	Diâmetro, [m]
D_h	Diâmetro hidráulico, [m]
h	Coefficiente de convecção [$\text{W/m}^2\text{°C}$]
H	Metade da distância entre placas, [m]
K	Índice de consistência do modelo lei de potência, [$\text{N/m}^2.\text{s}^n$]
k	Condutividade térmica, [W/(mK)]
$\dot{m}$	Caudal mássico, [kg/s]
n	Índice de potência do modelo de potência
n'	Índice de potência aparente do modelo da lei de potência
Nu	Número de Nusselt
$\dot{q}_w$	Fluxo de calor constante na parede, [W/m^2]
R	Raio, [m]
r	Coordenada radial, [m]
T	Temperatura, [K]
$\bar{U}$	Velocidade média do escoamento na conduta, [m/s]
u	Componente da Velocidade local na direção axial, [m/s]
v	Componente da velocidade na direção radial, [m/s]
x	Coordenada na direção axial, [m]
x^*	Variável adimensional
y	Coordenada perpendicular à parede, [m]
y^*	Variável adimensional

Símbolos gregos

ρ	Massa volúmica, [kg/m^3]
μ_0	Viscosidade do primeiro patamar newtoniano, [kg/(m.s)]
μ_∞	Viscosidade do segundo patamar Newtoniano, [kg/(m.s)]
ν	Viscosidade cinemática, [m^2/s]

Cálculo simplificado do número de Nusselt em escoamentos laminares de fluidos não-Newtonianos no interior de condutas com temperatura de parede constante

τ	Tensão de corte, [N/m ²]
$\dot{\gamma}$	Taxa de deformação, [s ⁻¹]
ε	Parâmetro extensional no modelo sPTT
Λ	Constante de tempo do modelo Carreau-Yasuda, [s]
η	Viscosidade viscométrica, [kg/(m.s)]
λ	Constante de tempo, [s]
θ	Temperatura adimensional

Grupos Adimensionais

Re	Número de Reynolds
Pe	Número de Péclet
Pr	Número de Prandtl
Nu	Número de Nusselt
Wi	Número de Weissenberg

Superescritos

—	Valor médio
*	Variável adimensionalizada

Subscritos

W	Relativo à parede da conduta
0	Referente a propriedades médias num ponto a montante do analisado
máx	Relativo ao erro máximo
méd	Relativo ao erro médio

1 Introdução

Neste primeiro capítulo será apresentado um resumo do processo que conduziu à constatação da oportunidade deste trabalho. Começar-se-á pois por justificar o interesse do presente trabalho e em seguida ir-se-á apresentar o modelo lei de potência, cujas soluções ao nível da transferência de calor e hidrodinâmicas, servem de base ao método simplificado implementado anteriormente, Cruz (2010) e Cruz *et al.* (2012) e no presente trabalho. Seguir-se-á uma descrição da metodologia utilizada no método simplificado e uma breve apresentação dos fluidos não-Newtonianos que serão analisados bem como dos respetivos grupos adimensionais dos quais depende o perfil de velocidade adimensional e consequentemente a transferência de calor, mais concretamente o número de Nusselt. Finalmente apresentar-se-á a estrutura da tese.

1.2 Justificação do interesse e objetivo do trabalho

Este tema vem no seguimento de alguns trabalhos desenvolvidos por Cruz (2010) e Cruz *et al.* (2012), expondo uma metodologia dirigida à simplificação do cálculo do coeficiente de atrito e do número de Nusselt em escoamentos laminares totalmente desenvolvidos de fluidos não-newtonianos em condutas de secção circular com fluxo de calor constante na parede. Avaliado este trabalho, ficamos então cientes da pertinência de, na sua continuidade, testar a metodologia para o caso de condutas com temperatura de parede constante.

O tema estudado no presente trabalho tem pois como elemento nuclear o teste da metodologia introduzida por Cruz (2010) e Cruz *et al.* (2012), destinada a simplificar o cálculo do número de Nusselt em escoamentos laminares de fluidos não-Newtonianos no interior de condutas de secção circular com fluxo de calor constante na parede. No presente trabalho será testada a aplicação da referida metodologia ao caso de temperatura de parede constante, igualmente para condutas de secção circular. Para o efeito ter-se-á que comparar os resultados obtidos pelo método aproximado proposto com os resultados de soluções numéricas, a determinar,

consideradas como sendo as soluções “exatas” para diversos modelos reológicos de fluidos não-Newtonianos.

Como na literatura não existe uma expressão matemática fiável para o número de Nusselt no caso de temperatura de parede constante e condução axial de calor desprezável, ao contrário do que sucedia para fluxo de calor constante, e que é um elemento fulcral para a implementação do método simplificado, a determinação da referida expressão será a primeira tarefa a realizar no presente trabalho. Nesta fase, ir-se-á determinar também a expressão homóloga para o caso do escoamento entre placas planas, embora para o presente trabalho não fosse necessária, dado o acréscimo de trabalho ser pouco significativo e resultando assim numa análise mais completa.

Deste modo, fica disponível na literatura, um conjunto completo de ferramentas que permitirão a determinação de forma expedita do número de Nusselt para fluidos não-Newtonianos em tubos de secção circular e escoamento laminar, para ambas as condições fronteira, fluxo de calor constante e temperatura de parede constante.

1.3 Modelo Lei de Potência

Sendo o modelo lei de potência, e as soluções de transferência de calor a ele associadas, a base do método simplificado, ir-se-á apresentar nesta secção o modelo reológico em causa.

Os fluidos que seguem o modelo lei de potência possuem um modelo reológico descrito pela equação (1.1) a que corresponde uma curva de viscosidade segundo a Figura 1.1, onde o logaritmo da viscosidade de corte varia de forma linear taxa com o logaritmo da taxa de deformação varia de forma linear com a viscosidade. O modelo lei de potência é pois dado de acordo com a seguinte expressão, Bird *et al.* (1987):

$$\eta = K\dot{\gamma}^{n-1} \text{ e } \tau = K\dot{\gamma}^n \quad (1.1)$$

onde η é a viscosidade viscométrica, K o índice de consistência, $\dot{\gamma}$ é a taxa de deformação, n o índice de potência e τ é a tensão de corte.

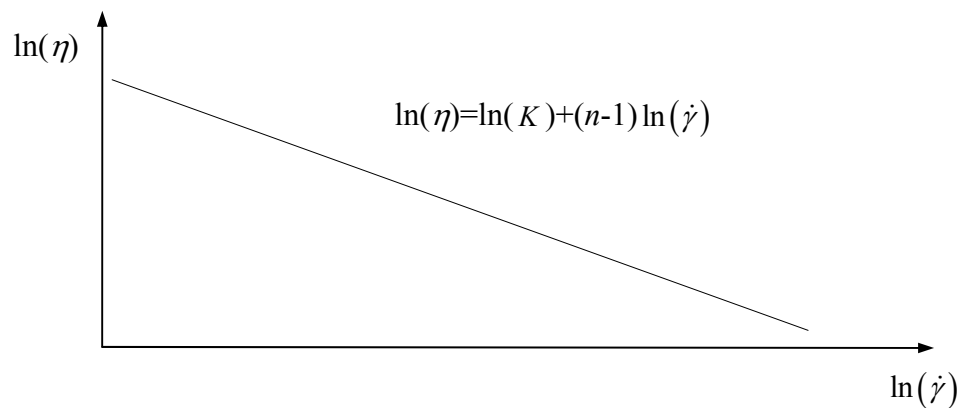


Figura 1.1 – Curva da viscosidade para um fluido lei de potência

1.4 Metodologia do método simplificado

Nesta secção será descrita a metodologia do método simplificado de acordo com Cruz *et al.* (2012).

Na maioria dos casos, os fluidos não-Newtonianos não seguem o modelo lei de potência, na Figura 1.2 apresenta-se uma curva de viscosidade mais comum nos fluidos não-Newtonianos, onde estão presentes os patamares Newtonianos a baixas e elevadas taxas de deformação. Estes comportamentos distintos dos vários fluidos não-Newtonianos, na prática obrigam a recorrer a equações distintas, específicas para cada fluido, de forma a obter o valor do número de Nusselt, Nu . No caso de temperatura de parede constante só existem na maioria dos casos resultados numéricos.

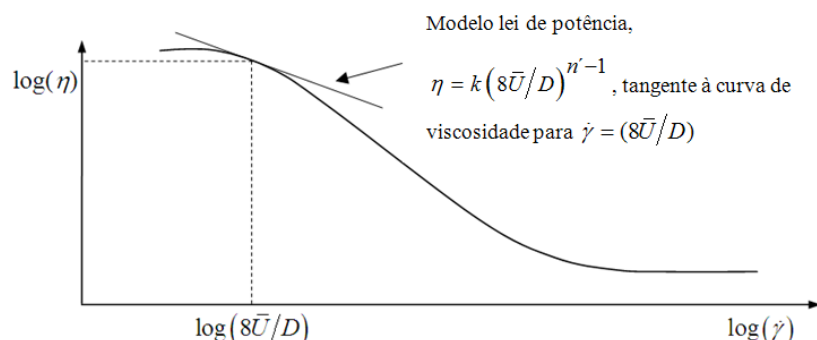


Figura 1.2 – Exemplo de aplicação do modelo lei de potência para um ponto na curva de viscosidade de um fluido genérico, figura adaptada do artigo de Cruz (2012)

O método simplificado proposto por Cruz *et al.* (2012), utiliza sempre a expressão de Nusselt correspondente aos fluidos lei de potência, o que simplifica o processo de cálculo, mas em

contrapartida introduz um erro e obriga à determinação de um índice de potência aparente, n' , para o fluido de trabalho, que é função da taxa de deformação característica, $\dot{\gamma}_{\text{carac.}}$, e que por sua vez depende do diâmetro da tubagem em causa, D , e da velocidade média do escoamento, $\bar{U}$. Como se pode ver através da Figura 1.2, para cada valor de $\dot{\gamma}_{\text{carac.}} = 8\bar{U}/D$ corresponde um índice de potência aparente, n' , inerente à curva de viscosidade do fluido utilizado. Depois de calculado o valor de n' , utiliza-se a expressão do número de Nusselt para o fluido lei de potência de forma a calcular Nu . Cruz (2010) e Cruz *et al.* (2012) mostraram que esta aproximação conduz a erros perfeitamente aceitáveis para as aplicações em engenharia.

Para fluxo de calor constante na parede a expressão de Nusselt usada para o escoamento laminar de um fluido lei de potência foi a seguinte,

$$Nu = \frac{8(3n+1)(5n+1)}{31n^2 + 12n + 1} \quad (1.2)$$

Para temperatura de parede constante, apenas existem valores tabelados do número de Nusselt em função do índice de potência, n , (Harnett et al. 1998) pelo que, ir-se-á iniciar o presente trabalho pela dedução de uma expressão matemática para Nu , que é fundamental para a implementação do método no caso da temperatura de parede constante.

Conhecida a expressão matemática da curva de viscosidade do modelo reológico do fluido de trabalho é possível calcular o índice de potência aparente n' local, i.e., em cada ponto da curva de viscosidade, ver Figura 1.2, o qual será utilizado na expressão de Nu inerente aos fluidos lei de potência.

Para avaliar o valor local de n' , Cruz *et al.* (2012), é necessário calcular a derivada da curva de viscosidade do fluido em causa $d\eta/d\dot{\gamma}$ no ponto $\dot{\gamma} = 8\bar{U}/D$ e igualar o valor obtido à expressão da derivada da curva de viscosidade de um fluido lei de potência aparente, ou seja,

$$\left. \frac{d\eta}{d\dot{\gamma}} \right|_{\text{fluido geral}} = \left. \frac{d\eta}{d\dot{\gamma}} \right|_{\text{fluido lei potência}} = K(n'-1)\dot{\gamma}^{(n'-2)} = \tau(n'-1)\dot{\gamma}^{-2} \quad (1.3)$$

onde $\tau = K\dot{\gamma}^{n'}$ é a tensão de corte que é calculada através do modelo reológico do fluido em causa, simplesmente $\tau = \eta\dot{\gamma}$.

O próximo passo será resolver esta equação (1.3) em ordem a n' , desta forma obtemos a expressão do índice lei de potência local, aparente, para o fluido em causa, ou seja:

$$n' = \frac{d\eta/d\dot{\gamma}|_{\text{fluido geral}}}{\tau\dot{\gamma}^{-2}} + 1 = \frac{d\eta/d\dot{\gamma}}{\eta/\dot{\gamma}} + 1 \quad (1.4)$$

Se analisarmos a expressão obtida (1.4), verificamos que o índice de potência aparente varia com a taxa de deformação dependendo apenas da curva de viscosidade do fluido, sendo $\dot{\gamma}$ a taxa de deformação característica onde se pretende conhecer n' , neste caso $\dot{\gamma} = 8\bar{U}/D$, e η e $d\eta/d\dot{\gamma}$ não são mais que a viscosidade do fluido e a sua derivada no ponto correspondente à taxa de deformação igual a $\dot{\gamma}$. Para mais detalhes consultar o artigo de Cruz *et al.* (2012).

1.5 Fluidos não-Newtonianos analisados

Nesta secção são apresentados os fluidos não-Newtonianos, e respetivo modelo reológico, que serão utilizados neste trabalho de forma a avaliar o desempenho do método proposto.

Tabela 1.1 – Modelos reológicos testados e respetivos fluidos

<i>Fluidos</i>	<i>Modelo reológico</i>
Herschel-Bulkley	$\begin{cases} \eta = \frac{\tau_0}{\dot{\gamma}} + K\dot{\gamma}^{n-1} & \tau > \tau_0 \\ \dot{\gamma} = 0 & \tau \leq \tau_0 \end{cases}$
Bingham	$\begin{cases} \eta = \mu_\infty + \frac{\tau_0}{\dot{\gamma}} & \tau > \tau_0 \\ \dot{\gamma} = 0 & \tau \leq \tau_0 \end{cases}$
Casson	$\begin{cases} \sqrt{\tau} = \sqrt{\tau_0} + \sqrt{\mu_\infty \dot{\gamma}} & \tau > \tau_0 \\ \dot{\gamma} = 0 & \tau \leq \tau_0 \end{cases}$
Carreau-Yasuda	$\eta = \mu_\infty + (\mu_0 - \mu_\infty) \left[1 + (\Lambda \dot{\gamma})^a \right]^{(n-1)/a}$
sPTT	$\eta = \mu \left[1 + (b-1)^2 / (3b) \right]$ $b = \left(c + \sqrt{c^2 - 1} \right)^{1/3}$ $c = 1 + 27\varepsilon (\lambda \dot{\gamma})^2$

A Tabela 1.1 e 1.2 apresenta respetivamente os fluidos em estudo bem como os respetivos grupos adimensionais dos quais depende o perfil de velocidade adimensional e consequentemente a transferência de calor, Nu . A Tabela 1.3 apresenta as expressões para o cálculo do índice lei de potência local, aparente, para os diferentes fluidos, Cruz (2010) e Cruz *et al.* (2012).

Tabela 1.2 – Grupos adimensionais

<i>Modelos</i>	<i>Grupos adimensionais relevantes</i>
Herschel-Bulkley	$K(\bar{U}/R)^n / \tau_0$ e n
Bingham	$K\bar{U}/\tau_0 R, K \equiv \mu_0$
Casson	$\mu_\infty \bar{U}/\tau_0 R$
Carreau-Yasuda	$\Lambda\bar{U}/R, \mu_\infty / \mu_0, a$ e n
sPTT	$\sqrt{\varepsilon}Wi = \sqrt{\varepsilon}\lambda\bar{U}/R$

Tabela 1.3 – Expressões para o cálculo de n' para os modelos reológicos testados

<i>Fluidos</i>	<i>Modelo reológico</i>
Herschel-Bulkley	$n' = \frac{nK\dot{\gamma}^n}{\tau_0 + K\dot{\gamma}^n}$
Bingham	$n' = 1 - \frac{\tau_0}{\mu_\infty\dot{\gamma} + \tau_0}$
Casson	$n' = \frac{\sqrt{\mu_\infty\dot{\gamma}}}{\sqrt{\tau_0} + \sqrt{\mu_\infty\dot{\gamma}}}$
Carreau-Yasuda	$n' = 1 + \frac{(\mu_0 - \mu_\infty)(n-1) \left[1 + (\Lambda\dot{\gamma})^a \right]^{(n-1-a)/a} (\Lambda\dot{\gamma})^a}{\mu_\infty + (\mu_0 - \mu_\infty) \left[1 + (\Lambda\dot{\gamma})^a \right]^{(n-1)/a}}$
sPTT	* A equação é apresentada em baixo. $f = \varepsilon \lambda^2 \gamma^2$ $y = \sqrt{f \cdot z}$ $w = 3\sqrt{3} \sqrt{f \cdot z} + 27f + 1$ $z = 27f + 2$
$* n' = \frac{w^{1/3} (zw^{4/3} + 2\sqrt{3}(243f^2 + 81f + 4)y + z(162f^2 + 48f + 1)) + \sqrt{3}(1944f^2 + 297f + 10)y + z(648f^2 + 75f + 1)}{z((w^{4/3} + 2\sqrt{3}zy + 486f^2 + 54f + 1)w^{1/3} + \sqrt{3}(108f + 5)y + 972f^2 + 81f + 1)}$	

1.6 Estrutura da dissertação

A restante dissertação está estruturada da seguinte forma; no capítulo 2, temos a determinação do perfil de temperatura para fluxo de calor constante na parede da conduta, caso de tubos de secção circular e de placas paralelas, para um fluido lei de potência uma vez que para o processo iterativo é necessário uma solução inicial para o perfil de temperatura. Foi também calculada a expressão do número de Nusselt, para tubos de secção circular e placas paralelas, com base no referido perfil de temperatura e comparada a expressão assim obtida com a existente na literatura de forma a validar os cálculos.

No capítulo 3, integra-se a equação de energia para o caso de temperatura de parede constante apresentando-se os cálculos que permitiram determinar as expressões dos números de Nusselt, em escoamento laminar totalmente desenvolvido, de um fluido lei de potência, em tubos de secção circular e placas paralelas e condução axial de calor desprezável.

No capítulo 4, avalia-se o desempenho da Metodologia proposta para os fluidos analisados. Apresentam-se pois os resultados da aplicação do método simplificado usado para o cálculo do número de Nusselt, nos fluidos Herschel-Bulkley, Bingham, Casson, Carreau-Yasuda e sPTT, sendo nesta fase quantificados os erros inerentes ao método simplificado por comparação com as respectivas soluções numéricas utilizadas como sendo os valores de referência.

Finalmente no capítulo 5, apresentam-se as Conclusões e perspectivas de trabalhos futuros.

2 Determinação do perfil de temperatura para fluxo de calor constante na parede da conduta

Para o presente trabalho foi necessário determinar numa primeira fase, a equação do perfil de temperatura para fluxo de calor constante na parede, para um fluido lei de potência, tendo sempre presente o regime laminar no interior da conduta e escoamento completamente desenvolvido. Este trabalho preliminar é necessário dado o processo de cálculo ser iterativo e necessitar de uma solução inicial para o perfil de temperatura, neste caso será utilizado o perfil de temperaturas para o caso de fluxo de calor constante na parede. De forma a validar a expressão final do perfil de temperatura obtido foi também calculada a expressão do número de Nusselt com base no referido perfil de temperatura e comparada a expressão assim obtida com a existente na literatura.

Tendo em vista complementar o presente trabalho, para além do estudo em condutas de secção circular foi também realizado o cálculo da expressão do número de Nusselt para temperatura de parede constante num escoamento entre placas paralelas. O cálculo do perfil de temperatura inicial, caso do fluxo de calor constante na parede, para esta última geometria também será pois apresentado neste capítulo.

2.1 Tubo de Secção Circular

A equação de conservação de energia em coordenadas cilíndricas apresentada (2.1), é válida no caso dos perfis totalmente desenvolvidos ou em desenvolvimento em troços de conduta retilíneos de secção circular.

$$\begin{array}{c} \text{Transporte de calor} \\ \text{por advecção} \end{array} \underbrace{\rho c_p u \frac{\partial T}{\partial x} + \rho c_p v \frac{\partial T}{\partial r}}_{\substack{\text{Direção Axial} \quad \text{Direção Radial}}} = \underbrace{\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr \frac{\partial T}{\partial r} \right)}_{\text{Direção Radial}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right)}_{\text{Direção Axial}} + \underbrace{\tau_{rx} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial r} \right)}_{\substack{\text{Direção Radial} \\ \text{Efeito do aquecimento por} \\ \text{dissipação viscosa}}} \quad (2.1)$$

sendo ρ a massa volúmica, c_p o calor específico do fluido, u a componente axial da velocidade, T a temperatura, v a componente da velocidade na direção radial, x a

coordenada na direção axial, r a coordenada radial medida a partir do eixo da conduta, k a condutividade térmica e τ_{rx} a tensão de corte.

No caso em estudo $\nu = 0$ e segundo a direção axial $d^2T/dx^2 = 0$, dado tratar-se de escoamento desenvolvido, desprezamos também a dissipação viscosa pelo que a última parcela do lado direito da equação (2.1) é nula.

Simplificando a referida equação temos:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \rho c_p u \frac{\partial T}{\partial x} \quad (2.2)$$

com as seguintes condições fronteira:

$$\begin{cases} r = 0; \frac{\partial T}{\partial r} = 0 \\ r = R; T = T_w(x) \end{cases} \quad (2.3)$$

T_w é a temperatura na parede, que é função da distância axial x , no restante texto, e para simplificar a escrita, ir-se-á escrever apenas T_w , e R representa o raio da tubagem.

Sendo que para o cálculo do número de Nusselt a utilização equação da energia escrita numa forma dimensional não tem um carácter geral, iremos adimensionalizar a referida equação. Neste caso serão utilizadas as seguintes variáveis adimensionais identificadas com um asterisco:

$$u^* = \frac{u}{U} \quad (2.4)$$

$$r^* = \frac{r}{R} \quad (2.5)$$

$$x^* = \frac{x}{D} \quad (2.6)$$

$$u^* = \frac{u}{U} = \frac{3n+1}{n+1} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^{\frac{n+1}{n}} \right] \quad (2.7)$$

Nestas expressões D representa o diâmetro da conduta, $\bar{U}$ a velocidade média do escoamento na conduta e n o índice de potência. A adimensionalização da temperatura é realizada da seguinte forma:

$$T^* = \frac{T - T_0}{\frac{\dot{q}_w D}{k}} \quad (2.8)$$

onde $\dot{q}_w$ é o fluxo de calor constante na parede e T_0 é a temperatura média do fluido numa secção algures a montante do local de integração.

Adimensionalizando a equação (2.2) fica:

$$\frac{1}{r^* R} \frac{\partial}{\partial r^*} \frac{\dot{q}_w D}{k} k \left(r^* R \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \right) = \rho c_p u^* \bar{U} \frac{\dot{q}_w D}{k} \frac{\partial T^*}{\partial x^*} \quad (2.9)$$

$$\frac{1}{R^2} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \right) = \frac{\rho c_p \bar{U}}{k D} u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} \quad (2.10)$$

Sabendo que,

$$P_e = \rho c_p \bar{U} D / k \quad (2.11)$$

onde P_e representa o número de Péclet, produto do número de Reynolds, Re , pelo número de Prandtl, Pe , $Pe = Re \cdot Pr$, podemos dar outra forma à equação adimensional (2.10):

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \right) = \frac{\rho c_p \bar{U}}{k D} R^2 u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} \quad (2.12)$$

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \right) = \frac{\rho c_p \bar{U}}{k D} \frac{D^2}{4} u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} \quad (2.13)$$

obtendo-se a seguinte equação adimensional:

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \right) = \frac{P_e}{4} u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} \quad (2.14)$$

É possível simplificar um pouco a equação anterior fazendo um balanço de energia num troço de conduta, ver Figura 2.1.

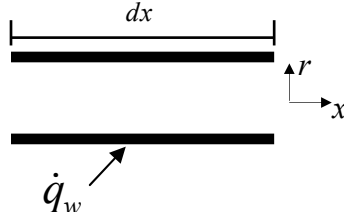


Figura 2.1 – Esquema do troço de conduta para o balanço de energia, seção circular

Assim, para um fluxo de calor constante na parede e na ausência de dissipação temos,

$$\dot{q}_w \pi D dx = \rho c_p \bar{U} \frac{\pi D^2}{4} d\bar{T} \quad (2.15)$$

ou seja, o calor que entra através da parede é igual ao aumento de energia do escoamento. $\bar{T}$ representa a temperatura média, ou temperatura de mistura, do escoamento numa dada secção da tubagem, adimensionalizando a equação anterior temos que:

$$\dot{q}_w dx^* = \frac{\dot{q}_w D}{k} \rho c_p \bar{U} \frac{1}{4} d\bar{T}^* \quad (2.16)$$

$$dx^* = \frac{\rho c_p \bar{U} D}{4k} d\bar{T}^* \quad (2.17)$$

$$\frac{d\bar{T}^*}{dx^*} = \frac{4}{Pe} \quad (2.18)$$

De acordo com Çengel, (2005), é possível mostrar que $dT(r)/dx = d\bar{T}/dx$ (2.19), algo que se fará de seguida.

Para fluxo de calor constante na parede podemos escrever que:

$$\dot{Q} = \dot{q}_w \pi D x = \dot{m} c_p [\bar{T}(x) - T_0] \quad (2.20)$$

Sendo $\dot{m}$ o caudal mássico, resolvendo a equação anterior em ordem a $\bar{T}(x)$, fica,

$$\bar{T}(x) = T_0 + \frac{\dot{q}_w \pi D x}{\dot{m} c_p} \quad (2.21)$$

Derivando a equação anterior conclui-se que,

$$\frac{d\bar{T}}{dx} = \frac{\dot{q}_w \pi D}{\dot{m} c_p} = \text{constante} \quad (2.22)$$

por seu lado, pela lei de Newton do arrefecimento é possível escrever que :

$$\dot{q}_w = h(T_w - \bar{T}) \Leftrightarrow T_w = \bar{T} + \frac{\dot{q}_w}{h} \quad (2.23)$$

Sabendo que em regime totalmente desenvolvido o coeficiente de convecção h é constante, conclui-se que a diferença $(T_w - \bar{T})$ é constante e derivando a expressão anterior conclui-se também que,

$$\frac{dT_w}{dx} = \frac{d\bar{T}}{dx} \quad (2.24)$$

Finalmente, sabendo que em escoamento totalmente desenvolvido o perfil de temperatura, $T \equiv T(r)$, adimensionalizado da seguinte forma,

$$\theta = \left(\frac{T_w - T}{T_w - \bar{T}} \right), \quad (2.25)$$

mantêm-se constante, podemos derivar esta expressão, o que nos permite mostrar que:

$$\frac{d\theta}{dx} = d \left(\frac{T_w - T}{T_w - \bar{T}} \right) / dx = 0 \quad (2.26)$$

$$\frac{1}{(T_w - \bar{T})} \left(\frac{dT_w}{dx} - \frac{dT}{dx} \right) = 0 \quad (2.27)$$

$$\frac{dT}{dx} = \frac{dT_w}{dx} \quad (2.28)$$

Esta condição é válida quando as propriedades dos fluidos se mantêm constantes, i.e., não variam com a temperatura. Combinando as equações (2.22), (2.24) e (2.28) conclui-se que para fluxo de calor constante na parede,

$$\frac{dT}{dx} = \frac{dT_w}{dx} = \frac{d\bar{T}}{dx} = \frac{\dot{q}_w \pi D}{\dot{m} c_p} = \text{constante} \quad (2.29)$$

Voltando à equação de energia simplificada, equação (2.14), e atendendo à equação (2.18), obtém-se a seguinte expressão,

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \right) = \frac{P_e}{4} u^* \frac{4}{P_e} \quad (2.30)$$

que resulta na seguinte equação de energia,

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \right) = u^* \quad (2.31)$$

que vai ser integrada sujeita às seguintes condições fronteira adimensionais:

$$r^* = 0 ; \frac{\partial T^*}{\partial r^*} = 0 \quad (2.32)$$

$$r^* = 1 ; T^* = T_w^* \quad (2.33)$$

2.1.1 Integração da equação de energia

Para o cálculo do número de Nusselt o próximo passo será integrar a equação de energia, este processo foi feito através do programa de cálculo simbólico Derive 5.

$$\frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \right) = u^* r^* \quad (2.34)$$

$$r^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*} = \int u^* r^* \partial r^* + C_1 \quad (2.35)$$

Substituindo u^* pela equação (2.7) temos:

$$r^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*} = \int \frac{3n+1}{n+1} \left[1 - (r^*)^{\frac{n+1}{n}} \right] r^* \partial r^* + C_1 \quad (2.36)$$

A primeira integração teve como resultado:

$$r^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*} = - \frac{2nr^{*\left(\frac{3n+1}{n}\right)} - 2C_1(n+1) - r^{*2}(3n+1)}{2(n+1)} \quad (2.37)$$

Segue-se a determinação da constante C_1 a partir da condição fronteira dada pela equação (2.32), tendo como resultado $C_1 = 0$. Substituindo em (2.37) resulta a seguinte equação:

$$\frac{\partial T^*}{\partial r^*} = \frac{-r^{*2} \left(2nr^{*\left(\frac{n+1}{n}\right)} - 3n - 1 \right)}{r^*} \bigg/ 2(n+1) \quad (2.38)$$

integrando a equação anterior temos:

$$T^* = \int \frac{-r^{*2} \left(2nr r^{*\left(\frac{n+1}{n}\right)} - 3n - 1 \right) / 2(n+1)}{r^* \partial r^*} + C_2 \quad (2.39)$$

e simplificando obtemos,

$$T^* = \int -\frac{r^* (2nr^{*\left(\frac{n+1}{n}\right)} - 3n - 1)}{2(n+1)} \partial r^* + C_2 \quad (2.40)$$

Como resultado obtemos a equação do perfil de temperatura $T(r^*)$.

$$T(r^*) = \frac{(3n+1) \left(4C_2(n+1) + r^{*2}(3n+1) \right) - 4n^2 r^{*\left(\frac{3n+1}{n}\right)}}{4(n+1)(3n+1)} \quad (2.41)$$

De forma a determinar a constante C_2 , será necessário simplificar a equação (2.41) e recorrer à condição fronteira (2.33), T_w^* é independente de r mas não de x e corresponde à temperatura da parede num local x .

$$\frac{4C_2(3n+1) + 5n+1}{4(3n+1)} = T_w^* \quad (2.42)$$

Resolvendo em ordem a C_2 , temos:

$$C_2 = \frac{1}{6(3n+1)} + \frac{12T_w^* - 5}{12} \quad (2.43)$$

Substituindo a constante C_2 em (2.41) temos como resultado a equação do Perfil de Temperatura:

$$T(r^*) = \frac{(3n+1) \left(4 \left(\frac{1}{6(3n+1)} + \frac{12T_w^* - 5}{12} \right) (n+1) + r^{*2}(3n+1) \right) - 4n^2 r^{*\left(\frac{3n+1}{n}\right)}}{4(n+1)(3n+1)} \quad (2.44)$$

Isolando T_w^* temos como equação final do perfil de temperatura:

$$T(r^*) = -\frac{n^2 r^{*\left(\frac{3n+1}{n}\right)}}{(n+1)(3n+1)} + \frac{n^2 (9r^{*2} - 5) + 6n(r^{*2} - 1) + r^{*2} - 1}{4(n+1)(3n+1)} + T_w^* \quad (2.45)$$

Para validar a equação anterior ir-se-á de seguida determinar a expressão do número de Nusselt e compará-la com a expressão da literatura.

2.1.2 Cálculo da expressão de Nusselt

A lei de Newton do arrefecimento aplicada na parede da conduta equação (2.46) permite obter a expressão de cálculo do número de Nusselt que é função da temperatura da parede e da temperatura média do escoamento num dado local da conduta, de acordo com a equação (2.47).

$$\dot{q}_w = hA(T_w - \bar{T}) = h(T_w^* - \bar{T}^*) \frac{\dot{q}_w}{kD} \quad (2.46)$$

$$Nu = \frac{hD}{k} = \frac{1}{(T_w^* - \bar{T}^*)} \quad (2.47)$$

A equação de Nusselt depende também da temperatura de mistura, logo torna-se necessário obter essa temperatura através da seguinte equação:

$$\bar{T} = \frac{\int_0^R 2\pi r u(r) T(r) dr}{\pi R^2 \bar{U}} \quad (2.48)$$

sendo que $dr = dr^* R$ (2.49), adimensionalizando:

$$\bar{T}^* = \int_0^1 2r^* u^* T^* dr^* \quad (2.50)$$

Substituindo u^* pela equação (2.7) e T^* pela equação (2.45) temos:

$$\bar{T}^* = \int_0^1 2r^* \left(\frac{3n+1}{n+1} \left[1 - (r^*)^{\frac{n+1}{n}} \right] \right) \left(-\frac{n^2 r^{*\left(\frac{3n+1}{n}\right)}}{(n+1)(3n+1)} + \frac{n^2 (9r^{*2} - 5) + 6n(r^{*2} - 1) + r^{*2} - 1}{4(n+1)(3n+1)} + T_w^* \right) dr^* \quad (2.51)$$

Temos como resultado a temperatura de mistura:

$$\bar{T}^* = \frac{n^2 (120T_w^* - 31) + 4n(16T_w^* - 3) + 8T_w^* - 1}{8(3n+1)(5n+1)} \quad (2.52)$$

Simplificando obtemos,

$$\bar{T}^* = T_w^* - \frac{31n^2 + 12n + 1}{8(3n+1)(5n+1)} \quad (2.53)$$

Conhecendo o perfil de temperatura e a temperatura de mistura, estamos em condições de encontrar a equação para o número de Nusselt.

Substituindo a temperatura da parede da mistura na equação (2.47) temos,

$$Nu = \frac{1}{T_w^* - \left(T_w^* - \frac{31n^2 + 12n + 1}{8(3n+1)(5n+1)} \right)} \quad (2.54)$$

desta forma obtemos a expressão final para o cálculo de Nusselt,

$$Nu = \frac{8(3n+1)(5n+1)}{31n^2 + 12n + 1} \quad (1.2)$$

Verifica-se que a equação obtida está de acordo com a presente no trabalho de Barletta (1997), para fluxo de calor constante na parede com perfis térmicos e hidrodinâmicos completamente desenvolvidos o que valida os cálculos efetuados.

2.2 Placas Paralelas

No caso das placas paralelas, sendo que o processo é idêntico ao anterior a dedução matemática não será demonstrada com detalhe. A equação de energia simplificada em coordenadas cartesianas é a seguinte:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \rho c_p u \frac{\partial T}{\partial x} \quad (2.55)$$

Condições fronteira:

$$\begin{cases} y = 0 ; \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \\ y = 1 ; T = T_w \end{cases} \quad (2.56)$$

Tal como foi feito para tubos de secção circular é necessário adimensionalizar a equação de energia, e para isso utilizaram-se as variáveis adimensionais presentes na Tabela 2.1.

Tabela 2.1 – Variáveis adimensionais

$T^* = \frac{T - T_0}{\dot{q}_w \frac{D_h}{k}}, \text{sendo } D_h = 4H$	$y^* = \frac{y}{H}$
$\begin{cases} D_h = \frac{4A}{P} = \frac{4B2H}{4(2B + 4H)} \\ \text{limite } B \rightarrow \infty \quad D_h = 4H \end{cases}$	$x^* = \frac{x}{D_h} \rightarrow x^* = \frac{x}{4H}$
$T^* = \frac{T - T_0}{\dot{q}_w \frac{4H}{k}}$	$u^* = \frac{u}{\bar{U}} \rightarrow u^* = \frac{2n+1}{n+1} \left(1 - (y^*)^{\frac{n+1}{n}} \right)$

D_h representa o diâmetro hidráulico, H é metade da distância entre placas e y representa a coordenada perpendicular à parede medida a partir do plano de simetria da conduta, ver Figura 2.2.

Fazendo um balanço de energia num troço da conduta, podemos simplificar a equação de energia.

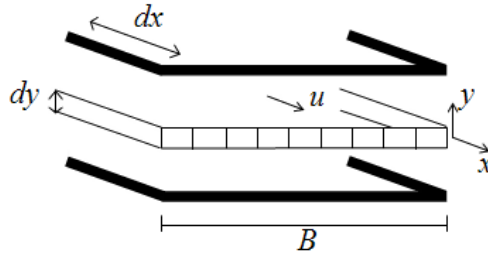


Figura 2.2 – Esquema do troço de conduta para o balanço de energia, placas paralelas

Assim para fluxo de calor constante em placas paralelas temos:

$$\dot{q}_w dx 2B = \rho c_p \bar{U} 2H d\bar{T} \Leftrightarrow \frac{\partial \bar{T}^*}{\partial x^*} = \frac{Pe}{4} \quad (2.57)$$

De acordo com Çengel, (2005), é possível mostrar que $d\bar{T}/dx = dT_w/dx$

$$\frac{d\bar{T}}{dx} = \frac{\dot{q}_w}{\rho c_p \bar{U} H} = \frac{dT_w}{dx} = \frac{dT_w}{dx} \quad (2.58)$$

Voltando então à equação de energia (2.55), adimensionalizando temos:

$$\frac{\dot{q}_w D_h}{K} \frac{k}{H^2} \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^*} = \rho c_p u \frac{\dot{q}_w D_h}{k} \frac{\partial T^*}{\partial x^*} \frac{\bar{U}}{\bar{U} D_h} \quad (2.59)$$

$$\frac{\partial^2 T^*}{\partial y^*} = \frac{Pe}{4} \frac{H}{4H} u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} \quad (2.60)$$

como

$$\frac{\partial T^*}{\partial x^*} = \frac{\partial \bar{T}^*}{\partial x^*} = \frac{Pe}{4} \quad (2.61)$$

chegamos à expressão final da equação de energia que vai ser integrada,

$$\frac{\partial^2 T^*}{\partial y^*} = \frac{u^*}{4} \quad (2.62)$$

2.2.1 Integração da equação de energia

Para obtermos o perfil de temperatura segue-se a integração da equação de energia (2.62), mais uma vez este processo foi feito através da ferramenta de cálculo já referida, o programa Derive 5. A equação de energia adimensionalizada está sujeita às seguintes condições fronteira na forma adimensional,

$$\begin{cases} y^* = 0 ; \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = 0 \\ y^* = 1 ; T^* = T_w^* \end{cases} \quad (2.63)$$

Temos como resultado da primeira integração,

$$\frac{\partial T^*}{\partial y^*} = \int \frac{u^*}{4} = - \frac{y \left(n y^{\frac{n+1}{n}} - 2n - 1 \right)}{4(n+1)} \quad (2.64)$$

Segue-se a segunda integração que nos dá a equação final do perfil de temperaturas,

$$T^*(y^*) = - \frac{n^2 y^{3n+1/n}}{4(n+1)(3n+1)} + \frac{y^2 (2n+1)(3n+1) - (n+1)(4n+1)}{8(n+1)(3n+1)} + T_w^* \quad (2.65)$$

2.2.2 Cálculo da expressão do número de Nusselt

A expressão que permite obter o número de Nusselt para escoamentos laminares totalmente desenvolvidos é apresentada de seguida.

$$Nu = \frac{hD_h}{\lambda} \quad (2.66)$$

Através de balanço de energia equivalente ao da equação (2.46) obtém-se que

$$Nu = \frac{hD_h}{\lambda} = \frac{1}{(T_w^* - \bar{T}^*)} \quad (2.67)$$

O próximo passo será obter a expressão adimensional para a temperatura da mistura, $\bar{T}^*$. Para isso é necessário conhecer a sua expressão e adimensionalizá-la:

$$\bar{T} = \frac{2 \int_0^H B dy u T}{2HB\bar{U}} \quad (2.68)$$

Aplicando as equações da Tabela 4 para adimensionalização obtemos:

$$\bar{T}^* = \int_0^1 u^* T^* dy^* \quad (2.69)$$

Com a utilização do Derive 5 obtemos como resultado final a equação da temperatura de mistura $\bar{T}^*$,

$$\bar{T}^* = \frac{2}{45(5n+2)} + \frac{1}{36(4n+1)} + T_w - \frac{2}{15} \quad (2.70)$$

Substituindo a equação (2.71) e (2.65) na equação (2.67), obtemos a expressão final para o cálculo de Nusselt,

$$Nu = \frac{6(4n+1)(5n+2)}{32n^2 + 17n + 2} \quad (2.71)$$

o que está de acordo com a expressão de Skelland (1967) para o Nu , que é dada por:

$$Nu = \frac{2}{\frac{1}{3} \left(\frac{5n+1}{4n+1} \right) - \left(\frac{n}{2n+1} \right) \left(\frac{n}{3n+1} \right) + \left(\frac{n}{3n+1} \right) \left(\frac{n}{4n+1} \right) \left(\frac{n}{5n+2} \right)} \left(\frac{n+1}{2n+1} \right) \quad (2.72)$$

Simplificando a expressão anterior temos como resultado a equação (2.71) o que corrobora os cálculos efetuados.

3 Integração da equação de energia para temperatura de parede constante, cálculo da expressão de Nusselt

Neste capítulo ir-se-á apresentar os cálculos que permitiram determinar as expressões dos números de Nusselt, para escoamento laminar totalmente desenvolvido, de um fluido lei de potência, em tubos de secção circular e placas paralelas para temperatura de parede constante e condução axial de calor desprezável.

3.1 Tubos de secção Circular

Com base nos pressupostos acima descritos a equação da energia em coordenadas cilíndricas, toma a forma da equação já referida no capítulo 2, equação (2.2),

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \right) = \frac{P_e}{4} u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} \quad (2.2)$$

sendo agora T^* definido para temperatura de parede constante na forma,

$$T^* = \frac{T_w - T}{T_w - T_0} \quad (3.1)$$

onde T_0 é a temperatura de mistura do fluido num local de referência, de notar que o resultado final é independente deste valor, as restantes variáveis adimensionais são as mesmas que foram descritas no capítulo anterior.

Sendo o escoamento totalmente desenvolvido, e à semelhança do que sucedia no capítulo anterior, o perfil de temperatura adimensionalizado da seguinte forma,

$$\frac{T_w - T}{T_w - \bar{T}} = \frac{T_w^* - T^*}{T_w^* - \bar{T}^*} = \theta \quad (2.25)$$

Cálculo simplificado do número de Nusselt em escoamentos laminares de fluidos não-Newtonianos no interior de condutas com temperatura de parede constante

manter-se-á constante ao longo da conduta. Segundo a metodologia de Coelho *et al.* (2001) temos que

$$T^* = -(T_w^* - \bar{T}^*)\theta + T_w^* \quad (3.2)$$

Derivando a expressão anterior resulta que,

$$\frac{\partial T^*}{\partial x^*} = -(T_w^* - \bar{T}^*)\frac{\partial \theta}{\partial x^*} + \theta \frac{\partial \bar{T}^*}{\partial x^*} \quad (3.3)$$

e sabendo que

$$\frac{\partial \theta}{\partial x^*} = 0 \quad (3.4)$$

obtem-se que

$$\frac{\partial T^*}{\partial x^*} = \theta \frac{\partial \bar{T}^*}{\partial x^*} \quad (3.5)$$

Por outro lado, realizando o seguinte balanço de energia a um troço de conduta

$$h(T_w - \bar{T})\pi D dx = \rho \bar{U} c_p \frac{\pi D^2}{4} d\bar{T} \quad (3.6)$$

obtem-se que

$$\frac{d\bar{T}}{dx} = \frac{4h(T_w - \bar{T})}{\rho \bar{U} c_p D} \quad (3.7)$$

Os passos necessários para adimensionalizar a equação anterior são os seguintes,

$$-\frac{(T_w - T_0)}{D} \frac{\partial \bar{T}^*}{\partial x^*} = \frac{4h(T_w - \bar{T})}{\rho \bar{U} c_p D} \frac{k}{k} \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial \bar{T}^*}{\partial x^*} = -\frac{4\bar{T}^*}{P_e} \frac{hD}{k} \quad (3.9)$$

sendo que,

$$Nu = \frac{hD}{k} \quad (2.47)$$

resulta que

$$\frac{\partial \bar{T}^*}{\partial x^*} = -\bar{T}^* Nu \frac{4}{P_e} \quad (3.10)$$

Substituindo na equação (2.2) as equações (3.5) e (3.10) resulta que

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \right) = \frac{P_e}{4} u^* \theta \frac{\partial \bar{T}^*}{\partial x^*} \quad (3.11)$$

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \right) = -\frac{P_e}{4} u^* \theta \bar{T}^* Nu \frac{4}{P_e} \quad (3.12)$$

Como $\theta \bar{T}^* = T^*$, simplificando a equação anterior obtemos,

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \right) = -u^* T^* Nu \quad (3.13)$$

Como a distribuição de temperatura T^* não é conhecida arbitra-se uma distribuição de temperatura inicial, neste caso a solução obtida para fluxo de calor constante na parede, e obtém-se assim uma nova distribuição de temperatura mais próxima da real. Com a distribuição de temperatura assim obtida calcula-se uma nova distribuição de temperatura, obtendo-se em cada nova iteração um perfil de temperatura cada vez mais próximo do real. Naturalmente a complexidade formal das equações obtidas aumenta de uma iteração para outra. Para a dedução da expressão de Nusselt do capítulo anterior consideramos o fluxo de calor constante, $\dot{q}_w = \text{const}$, enquanto que no caso em estudo temos a temperatura da parede constante, $T_w = \text{const}$. Uma vez que a adimensionalização da temperatura para fluxo de calor constante, equação (2.8), é diferente da adimensionalização da temperatura para o caso de temperatura de parede constante, equação (3.1), ir-se-á seguidamente proceder à mudança de adimensionalização do perfil de temperatura obtido no caso de fluxo constante na parede, equação (2.8), para a adimensionalização usada para temperatura constante de parede, equação (3.1), e assim se poder iniciar o processo iterativo tendo em vista obter uma expressão para o número de Nusselt para temperatura de parede constante.

Tabela 3.1 – Equações para adimensionalização

Para $T_w = \text{const}$	Para $\dot{q}_w = \text{const}$
$T_w^* = \frac{T_w - T}{T_w - T_0}$	$T_{q_w}^* = \frac{T - T_0}{\frac{\dot{q}_w D}{k}}$

Adimensionalizando temos:

$$T_{T_w}^* = \frac{T_{w_{q_w}}^* - T_{q_w}^*}{T_{w_{q_w}}^* - T_{0_{q_w}}^*} \quad (3.14)$$

que é igual a

$$T_{T_w}^* = \frac{T_{w_{q_w}}^* - T_{q_w}^*}{T_{w_{q_w}}^*} \quad (3.15)$$

uma vez que $T_{0_{q_w}}^* = 0$ por definição, ver equação (2.8). Desta forma o perfil de temperaturas a utilizar na primeira iteração é o seguinte.

$$T_{T_w}^* \equiv T^* = \frac{4n^2 r^{*\frac{3n+1}{n}} + n^2(5-9)r^{*2} + (6n(1+r^{*2})) - r^{*2} + 1}{4T_{q_w}^* (n+1)(3n+1)} \quad (3.16)$$

3.1.1 Integração da equação de energia

Voltando à equação de conservação de energia, equação (3.13) estamos em condições de nela substituir as expressões de u^* , equação (2.7), e T^* , equação (3.16), e integrar segundo as seguintes condições fronteira,

$$\begin{aligned} r^* = 0 ; \quad \frac{\partial T^*}{\partial r^*} &= 0 \\ r^* = 1 ; \quad T^* &= 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

A equação resultante é a seguinte,

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \right) = - \left(\frac{3n+1}{n+1} \left[- \left(r^* \right)^{\frac{n+1}{n}} \right] \right) \left(\frac{4n^2 r^{*\frac{3n+1}{n}} + n^2(5-9)r^{*2} + (6n(1+r^{*2})) - r^{*2} + 1}{4T_{q_w}^* (n+1)(3n+1)} \right) Nu \quad (3.18)$$

Como já se referiu, a integração, para obter o perfil de temperatura, é repetida 3 vezes com o objetivo de minimizar o erro na solução final sem aumentar em demasia a complexidade das expressões resultantes.

Conhecida a expressão final de T^* estamos em condições de determinar a temperatura de mistura, substituindo T^* na equação (2.50), obtém-se a expressão da temperatura de mistura.

$$\bar{T}^* = \int_0^1 2r^* u^* T^* dr^* \quad (2.50)$$

Dada a expressão de $\bar{T}^*$ ser extensa optou-se por apresentar a mesma no Anexo A (A.1), assim como a expressão da derivada na parede que será necessária para calcular Nu , como se verá seguidamente $\partial T / \partial r|_{r^*=1}$ (A.2).

3.1.2 Cálculo da expressão de Nusselt

Uma forma de chegarmos à equação do número de Nusselt é novamente através da lei de Newton do arrefecimento, assim temos

$$h(T_w - \bar{T}) = \dot{q}_w \Leftrightarrow h = \frac{\dot{q}_w}{T_w - \bar{T}} = \frac{k(\partial T / \partial r)|_{r=R}}{T_w - \bar{T}} \quad (3.19)$$

desta forma o número de Nusselt vem dado por,

$$Nu = \frac{2Rh}{k} = \frac{2R(\partial T / \partial r)|_{r=R}}{T_w - \bar{T}} \quad (3.20)$$

ou seja,

$$Nu = \frac{-2(\partial T^* / \partial r^*)|_{r^*=1}}{\bar{T}^*} \quad (3.21)$$

Conhecendo a equação para o cálculo de Nusselt, já estamos em condições de substituir a primeira derivada, equação (A.2) e a temperatura de mistura, equação (A.1) na equação (3.21), assim temos como solução final para Nu após três iterações um polinómio de grau 15 com a seguinte forma:

$$Nu = \frac{1980}{342} \left(\frac{1 + \sum_{i=1}^{i=15} \alpha_i n^i}{1 + \sum_{i=1}^{i=15} \beta_i n^i} \right) \quad (3.22)$$

as constantes, α_i e β_i , são apresentadas na Tabela 3.2.

Tabela 3.2 – Constantes da equação de Nusselt para temperatura de parede constante em tubos

i	α_i	β_i
1	83,5	85,5
2	3229,252525	3394,309941
3	$7,672947474 \times 10^4$	$8,300473099 \times 10^4$
4	$1,252382343 \times 10^6$	$1,397957350 \times 10^6$
5	$1,486835131 \times 10^7$	$1,716826247 \times 10^7$
6	$1,325803733 \times 10^8$	$1,587332434 \times 10^8$
7	$9,038186868 \times 10^8$	$1,124385479 \times 10^9$
8	$4,747708761 \times 10^9$	$6,148516863 \times 10^9$
9	$1,921241063 \times 10^{10}$	$2,594249605 \times 10^{10}$
10	$5,939512238 \times 10^{10}$	$8,373480448 \times 10^{10}$
11	$1,377515552 \times 10^{11}$	$2,029841685 \times 10^{11}$
12	$2,320088257 \times 10^{11}$	$3,576725596 \times 10^{11}$
13	$2,679239824 \times 10^{11}$	$4,324653091 \times 10^{11}$
14	$1,897163372 \times 10^{11}$	$3,208502493 \times 10^{11}$
15	$6,210777409 \times 10^{10}$	$1,101221364 \times 10^{11}$

3.1.3 Perfil de Temperatura

A variação do perfil de temperatura adimensional, θ , equação (2.25), para tubos de secção circular em regime laminar, com o raio r^* , é representado na figura 3.1 para diferentes valores do parâmetro índice de potência n . Como seria de esperar, as temperaturas extremas ocorrem no centro da conduta e na parede, o ponto do perfil cuja temperatura é igual à temperatura média, isto é, para $\theta=1$, varia entre $0,5 < r^* < 0,68$, quando o índice de potência varia entre $\infty > n > 0$.

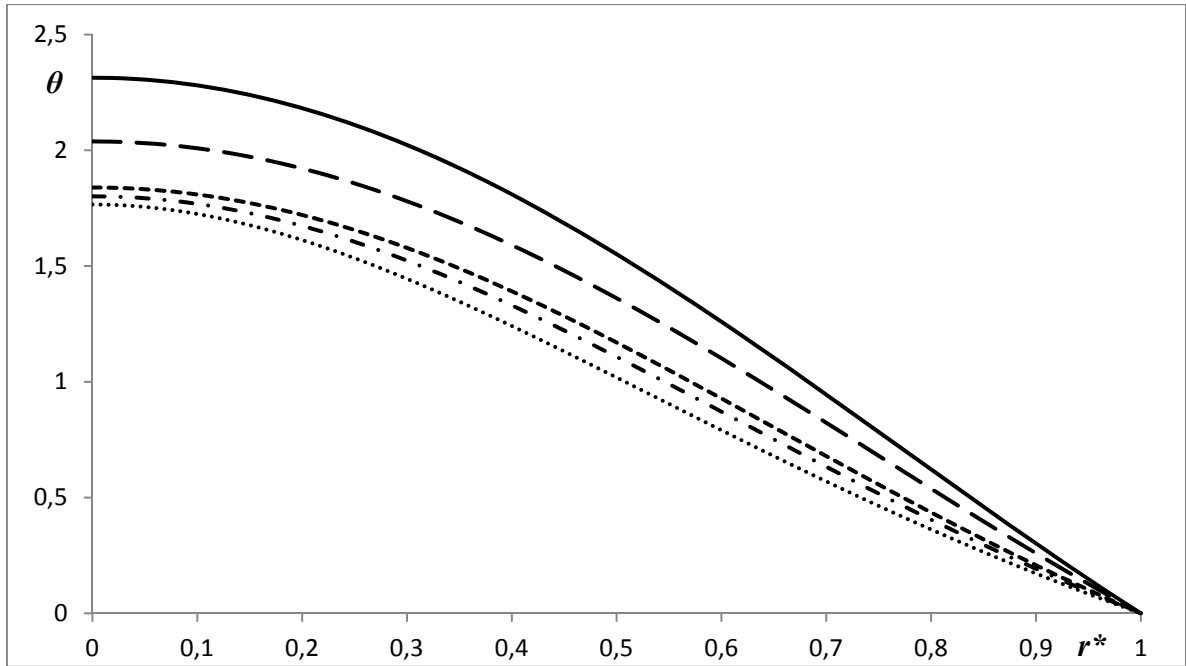


Figura 3.1- Perfil de temperaturas, θ , em tubos de secção circular, linhas da solução semi-analítica, — $n=0$;
— — $n=0,1$; - - - $n=0,5$; — · — $n=1$; $n=\infty$

3.1.4 Comparação da solução semi-analítica para Nu com a solução numérica

Na Figura 3.2 apresentam-se os resultados dos números de Nusselt em função do índice de potência n , obtidos pelo método semi-analítico e pelo método numérico calculados em cerca de 1500 valores distintos de n desde $n=10^{-4}$ até $n=10^4$. Os resultados do método numérico foram utilizados como valores de referência. No Anexo B descreve-se a metodologia utilizada na integração numérica da equação (3.13) para os vários fluidos testados bem como se quantifica o efeito do recurso, na discretização da referida equação, a um maior ou menor número de pontos ao longo da direção radial, sobre o valor do número de Nusselt e o seu grau de exatidão.

Utilizando então como padrão os resultados numéricos, Nu_{IV} , obtidos usando na discretização 24000 pontos ao longo da direção radial, obtemos um erro médio do número de Nusselt para o método semi-analítico (Nu) de 0,052% e um erro máximo de 0,109%. Para o cálculo do erro do número de Nu utilizou-se a seguinte equação:

$$Erro\ Nu\ (\%) = \left| \frac{Nu - Nu_{IV}}{Nu_{IV}} \times 100 \right| \quad (3.23)$$

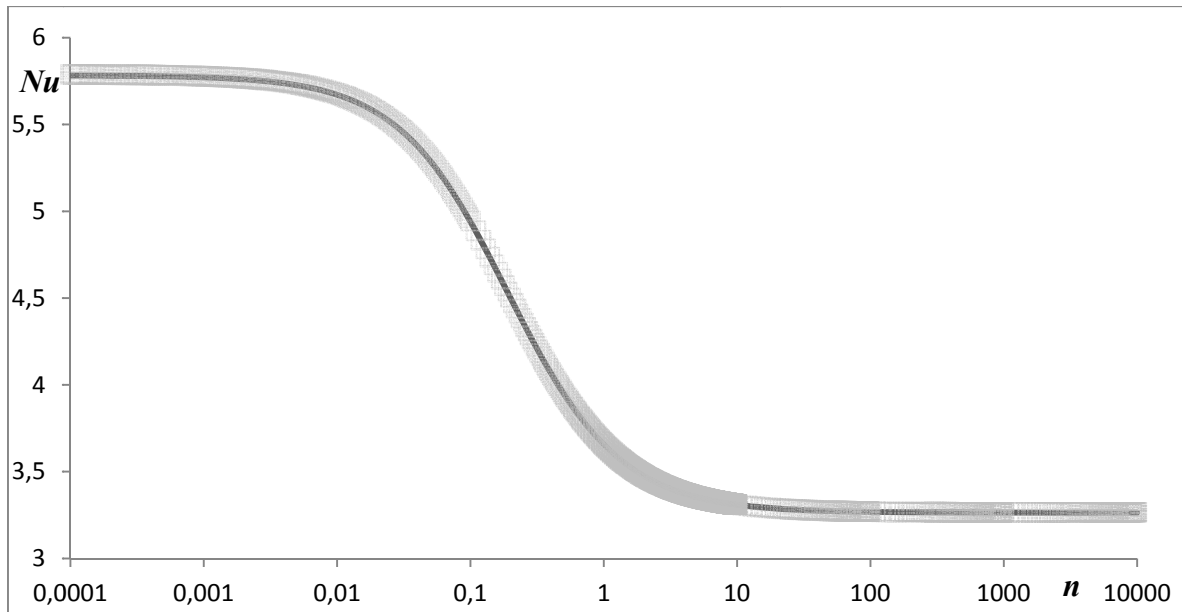


Figura 3.2 – Representação dos resultados do número de Nusselt para o método semi-analítico e para o método numérico em função do índice de potência n , em tubos de secção circular. — Nu_{IV} - Solução numérica, $\square$ Nu -Solução Semi-analítica

3.1.5 Solução simplificada

Como a expressão de Nu obtida através da integração semi-analítica, equação (3.22) é formalmente bastante extensa, optou-se também por ajustar aos valores de Nu_{IV} em função de n , obtidos por integração numérica, expressões do género da equação (1.2), ou seja na forma genérica da equação (3.24), formalmente mais simples. A esta solução designou-se de solução simplificada.

Para obtermos as soluções simplificadas utilizamos como ferramenta o programa de otimização Solver da folha de cálculo Excel que possibilita atingir um dado objetivo por alteração de um dado número de parâmetros, ou sejam, as constantes a_i presentes na equação (3.24).

Neste caso o somatório de todos os erros já determinados representa a função objetivo do programa solver cujo valor se pretende minimizar. Na Tabela 3.3 apresentam-se os valores iniciais, arbitrados, e finais das constantes presentes na equação (3.24).

$$Nu = \frac{a_1 \cdot (a_2 \cdot n^2 + a_3 \cdot n + 1)}{a_4 \cdot n^2 + a_5 \cdot n + 1} \quad (3.24)$$

Tabela 3.3 – Constantes utilizadas para determinação da solução simplificada no caso de tubos

Constantes	Constantes iniciais, equação (3.24)	Constantes após otimização
a_1	8	5,7829
a_2	3	34,2025
a_3	5	13,5891
a_4	31	60,5965
a_5	12	15,5622

É também importante avaliar o erro da implementação da solução simplificada, para isso é necessário recorrer novamente à equação do erro (3.23) calculando o seu valor em todos os 1500 valores de n . Neste caso a solução simplificada apresentou um erro médio de 0,003% e um erro máximo de 0,017%, ou seja, ajusta melhor os 1500 valores de Nu em função de n calculados numericamente que a solução semi-analítica obtida na terceira iteração.

3.2 Placas paralelas

Sendo que o procedimento para a determinação da equação de cálculo do número de Nusselt de temperatura de parede constante em placas paralelas segue o mesmo raciocínio descrito para tubos circulares, serão apresentadas as equações e o procedimento com menor detalhe, assim partimos da equação de energia simplificada na forma adimensional,

$$\frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} = u^* \frac{Pe}{16} \frac{\partial T^*}{\partial x^*} \Leftrightarrow \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} = u^* \frac{Pe}{16} \theta \frac{\partial \bar{T}^*}{\partial x^*} \quad (3.25)$$

fazendo um balanço de energia num troço da conduta, ver Figura 2.2, temos:

$$h(T_w - \bar{T})dx2B = 2BH\rho\bar{U}c_p d\bar{T} \quad (3.26)$$

uma vez que

$$d\bar{T} = -d(T_w - \bar{T}) \quad (3.27)$$

resulta que

$$\frac{d(T_w - \bar{T})}{dx} = -\frac{h(T_w - \bar{T})4K}{\rho \bar{U} c_p 4K} \quad (3.28)$$

$$\frac{(T_w - \bar{T})}{D_h} \frac{\partial \bar{T}^*}{\partial x^*} = -\frac{h(T_w - \bar{T})4K}{\rho \bar{U} c_p 4K} \quad (3.29)$$

$$\frac{\partial \bar{T}^*}{\partial x^*} = -\frac{Nu}{Pe} 4\bar{T}^* \quad (3.30)$$

substituindo este resultado na equação (3.25) obtém-se a seguinte expressão,

$$\frac{\partial^2 T^*}{\partial y^*} = -\frac{u^*}{4} T^* Nu \quad (3.31)$$

em que as condições fronteira são idênticas àquelas presentes na equação (3.17).

Sendo que a distribuição de temperaturas T^* não é conhecida arbitra-se uma distribuição de temperatura inicial, tal como fizemos para tubos circulares, será utilizada neste caso o perfil de temperatura obtido para fluxo de calor constante na parede.

Utilizando a equação (3.15) obtemos o seguinte perfil de temperaturas adimensional,

$$T_{T_w}^* \equiv T^* = \frac{2n^2 y^{*(3n+1)/n} - y^{*2} (2n+1)(3n+1) + (n+1)(4n+1)}{8T_{qw}^* (n+1)(3n+1)} \quad (3.32)$$

3.2.1 Integração da equação de energia

Voltando à equação (3.31) já podemos substituir as expressões de u^* (Tabela 2.1) e T^* equação (3.32) e desta forma integrar segundo as condições fronteira já conhecidas, equação (3.17). Esta integração é repetida três vezes, tal como foi feito na situação dos tubos circulares, de forma a se poder utilizar o terceiro perfil de temperaturas obtido. Segue-se a obtenção da temperatura de mistura, através da equação (2.69), e cuja equação está apresentada no Anexo A equação (A.3), dada a sua complexidade, bem como o cálculo da derivada do perfil de temperatura na parede $\partial T / \partial r|_{r^*=1}$, expressão está também apresentada no Anexo A, equação (A.4).

3.2.2 Cálculo da expressão de Nusselt

A expressão que permite obter o número de Nusselt em escoamentos laminares totalmente desenvolvidos entre placas paralelas é dada pela lei de Newton do arrefecimento, ou seja:

$$\lambda \left. \frac{dT}{dy} \right|_{y=H} = h(T_w - \bar{T}) \quad (3.33)$$

Sendo Nu dado por,

$$Nu = \frac{hD_h}{\lambda} \quad (3.34)$$

adimensionalizando a equação (3.33) temos:

$$\lambda \frac{D_h q_w}{\lambda H} \frac{dT^*}{dy^*} = h \frac{D_h q_w}{\lambda} (-\bar{T}^*) \quad (3.35)$$

$$\frac{dT^*}{dy^*} = \frac{h4H}{-\bar{T}^*} \quad (3.36)$$

desta forma obtemos então a expressão final para o calculo de Nusselt,

$$Nu^* = \frac{4 \left. \frac{dT^*}{dy^*} \right|_{y^*=1}}{-\bar{T}^*} \quad (3.37)$$

Conhecendo a equação para o cálculo de Nusselt, equação (3.37), já estamos em condições de nela substituir a derivada do perfil de temperatura na parede equação (A.4), e a temperatura de mistura equação (A.3), e assim obtém-se como solução final para Nu o seguinte polinómio de grau 16:

$$Nu = \frac{7050240}{714240} \left(\frac{1 + \sum_{i=1}^{i=16} \alpha_i n^i}{1 + \sum_{i=1}^{i=16} \beta_i n^i} \right) \quad (3.38)$$

as constantes, α_i e β_i , são apresentadas na Tabela 3.4.

Tabela 3.4 – Constantes da equação de Nusselt para temperatura de parede constante em placas paralelas

i	α_i	β_i
1	73,3	74,3
2	2491,785212	2564,090905
3	$5,217447773 \times 10^4$	$5,458451494 \times 10^4$
4	$7,534216043 \times 10^5$	$8,025456623 \times 10^5$
5	$7,958054885 \times 10^6$	$8,642830723 \times 10^6$
6	$6,361142515 \times 10^7$	$7,052626209 \times 10^7$
7	$3,925542220 \times 10^8$	$4,448099585 \times 10^8$
8	$1,890286618 \times 10^9$	$2,191252190 \times 10^9$
9	$7,126880112 \times 10^9$	$8,459058042 \times 10^9$
10	$2,097059292 \times 10^{10}$	$2,550342298 \times 10^{10}$
11	$4,765611558 \times 10^{10}$	$5,941866391 \times 10^{10}$
12	$8,200657153 \times 10^{10}$	$1,048746958 \times 10^{11}$
13	$1,033148678 \times 10^{11}$	$1,355692646 \times 10^{11}$
14	$8,988397074 \times 10^{10}$	$1,210543146 \times 10^{11}$
15	$4,825643328 \times 10^{10}$	$6,671880785 \times 10^{10}$
16	$1,204654431 \times 10^{10}$	$1,710114858 \times 10^{10}$

3.2.3 Perfil de Temperatura

A variação do perfil de temperatura adimensional, θ , equação (2.25), com a distância y^* , é representado na Figura 3.3 para diferentes valores do parâmetro índice de potência n . A variação com n segue o mesmo comportamento descrito para tubos de secção circular, havendo neste caso uma menor variação “radial” de temperatura. O ponto do perfil cuja temperatura é igual à temperatura média, isto é, para $\theta=1$, varia entre $0,38 < y^* < 0,56$, quando o índice de potência varia entre $\infty > n > 0$.

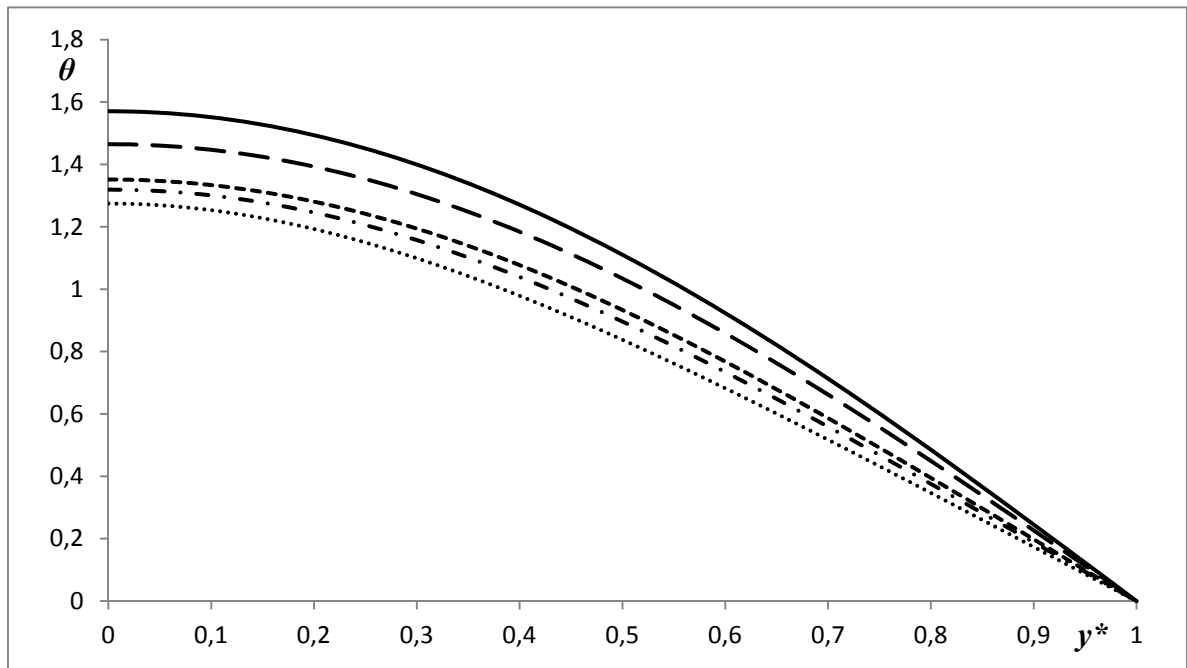


Figura 3.3 – Perfil de temperaturas, θ , em placas paralelas, linhas da solução semi-analítica, — $n=0$;
— — $n=0,1$; - - - $n=0,5$; — . — $n=1$; $n=\infty$

3.2.4 Comparação da solução semi-analítica para Nu com a solução numérica

A Figura 3.4 representa os resultados do número de Nusselt em função do índice de potência obtido pelo método semi-analítico e pelo método numérico. Mantendo como referência o obtido pelo método numérico, o erro médio do número de Nusselt foi agora de 0,004% e o erro máximo foi de 0,014%, equação (3.23).

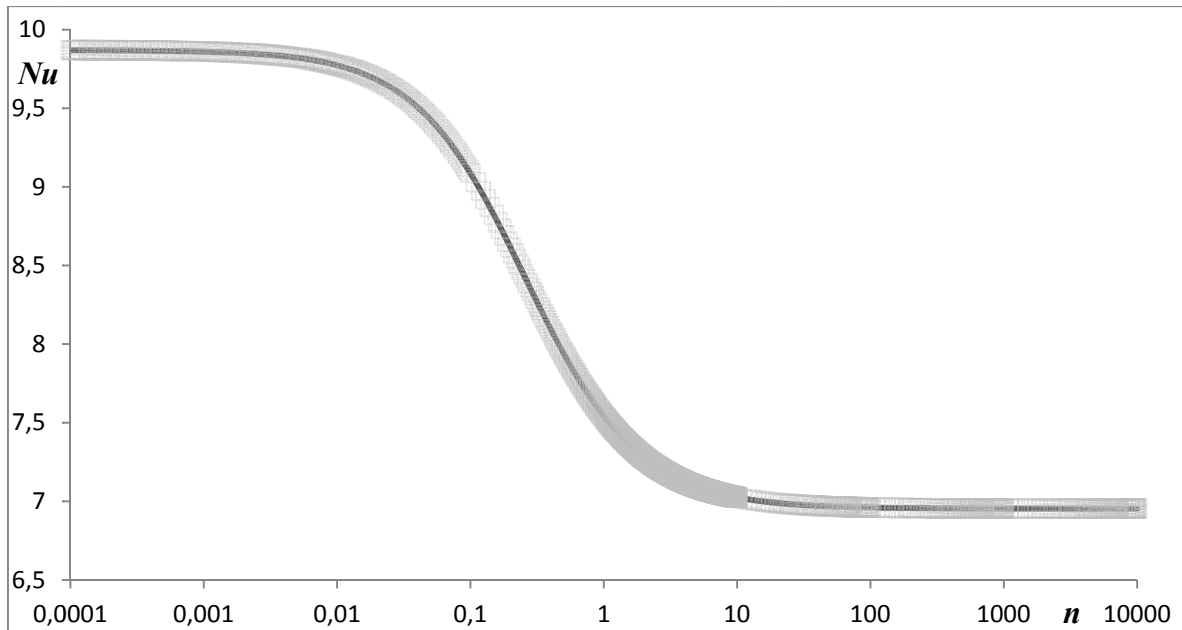


Figura 3.4 – Representação dos resultados do número de Nusselt para o método semi-analítico e para o método numérico em função do índice de potência n , em placas paralelas. — Nu_{IV} - Solução numérica, $\square$ Nu -Solução Semi-analítica

3.2.5 Solução simplificada

Para a determinação da solução simplificada, de Nu em função de n , foi utilizada mais uma vez como modelo a equação (3.24). O método de cálculo das constantes é o mesmo descrito para o caso dos tubos de secção circular, as constantes neste caso são apresentadas na Tabela 3.5.

Tabela 3.5 – Constantes utilizadas para determinação da solução simplificada no caso de placas paralelas.

Constantes	Constantes iniciais, equação (3.24)	Constantes otimizadas
a_1	6	9,8694
a_2	4	26,7773
a_3	5	11,7895
a_4	32	38,0066
a_5	17	12,7778

Foi calculado também neste caso o erro inerente à solução simplificada utilizando para o efeito a equação (3.23). Neste caso a solução simplificada apresentou um erro médio de 0,002% e um erro máximo de 0,010%, ou seja, também neste caso ajusta melhor os 1500 valores de Nu_{IV} em função de n calculados numericamente que a solução semi-analítica obtida na terceira iteração.

4 Análise ao desempenho do método simplificado

Neste capítulo serão apresentados os resultados da aplicação do método simplificado usado para o cálculo do número de Nusselt, e testado para os seguintes fluidos: Herschel-Bulkley, Bingham, Casson, Carreau-Yasuda e sPTT. Esta análise de resultados teve sempre como referência os resultados do método numérico, i.e., Nu_{IV} , descrito no Anexo B.

Conhecendo as características do escoamento, $\bar{U}$ e D , e os parâmetros de cada modelo reológico, calculou-se a taxa de deformação característica $\dot{\gamma} = 8\bar{U}/D$, e posteriormente foi determinado o índice de potência aparente n' (Tabela 1.3) que permitiu por fim calcular o valor do número de Nusselt pelo método simplificado, Nu' , substituindo n' na equação (3.24) (constantes dadas na Tabela 3.3). A Tabela 4.1 indica os valores dos parâmetros reológicos característicos dos vários fluidos, já apresentados na Tabela 1.1, utilizados para testar a metodologia.

Posteriormente representou-se Nu' e Nu_{IV} em função dos grupos adimensionais dos quais estes dependem exclusivamente, cf. Tabela 1.2, sendo nesta fase que os erros inerentes ao método simplificado são quantificados de acordo com a seguinte equação,

$$Erro\ Nu' (\%) = \left| \frac{Nu' - Nu_{IV}}{Nu_{IV}} \times 100 \right| \quad (4.1)$$

Para cada fluido, o número de pontos ao longo dos quais este erro, equação (4.1), foi avaliado foi de 1500, tendo-se para cada caso determinado o valor máximo, $e_{m\acute{a}x}$, e o valor médio, $e_{m\acute{e}d}$, dos erros calculados.

Tabela 4.1 – Parâmetros reológicos dos vários fluidos utilizados.

Bingham e Herschel- Bulkley	$\mu_{\infty} \equiv K \text{ [Pa}\cdot\text{s]}$		$\tau_0 \text{ [Pa]}$		$n \text{ [-]}$	$R \text{ [m]}$
	0,05		0,07		0,5 1 1.5	0,2
Casson	$\mu_{\infty} \text{ [Pa}\cdot\text{s]}$		$\tau_0 \text{ [Pa]}$		$R \text{ [m]}$	
	0,55		0,062502		0,2	
Carreau- Yasuda	$\mu_{\infty} \text{ [Pa}\cdot\text{s]}$	$\mu_0 \text{ [Pa}\cdot\text{s]}$	$\lambda \text{ [s]}$	$a \text{ [-]}$	$n \text{ [-]}$	$R \text{ [m]}$
	0,08 0,000108	1	10	1,5 2	0,2 0,358	0,2
sPTT	$\mu \text{ [Pa}\cdot\text{s]}$	$\varepsilon \text{ [-]}$	$\lambda \text{ [s]}$		$R \text{ [m]}$	
	0,55	1,1	10		0,2	

4.1 Fluidos de Bingham e Herschel-Bulkley

A Figura 4.1 apresenta os resultados para o fluido Bingham, $n=1$, e as Figuras 4.2 e 4.3 para os fluidos Herschel-Bulkley, $n=0,5$ e $n=1,5$ nelas se mostra a variação dos números de Nusselt obtidas pelo método simplificado e pelo método numérico, Nu' e Nu_{IV} , respetivamente, em função do parâmetro adimensional $K(\bar{U}/R)^n / \tau_0$. Nestes gráficos as barras verticais indicam o valor do erro máximo, e o local onde ocorre, encontrado para cada caso, equação (4.1).

Para o fluido Herschel-Bulkley temos para $n=0,5$ um erro máximo de $e_{\text{máx}}=2,36\%$ e um erro médio de $e_{\text{méd}}=0,71\%$, e para $n=1,5$ um erro máximo de $e_{\text{máx}}=7,45\%$ e um erro médio de $e_{\text{méd}}=0,70\%$. No caso do fluido Bingham, $n=1$, detetou-se um erro máximo de $e_{\text{máx}}=5,25\%$ e um erro médio de $e_{\text{méd}}=0,78\%$ o que se aproxima dos valores obtidos para os fluidos Herschel-Bulkley.

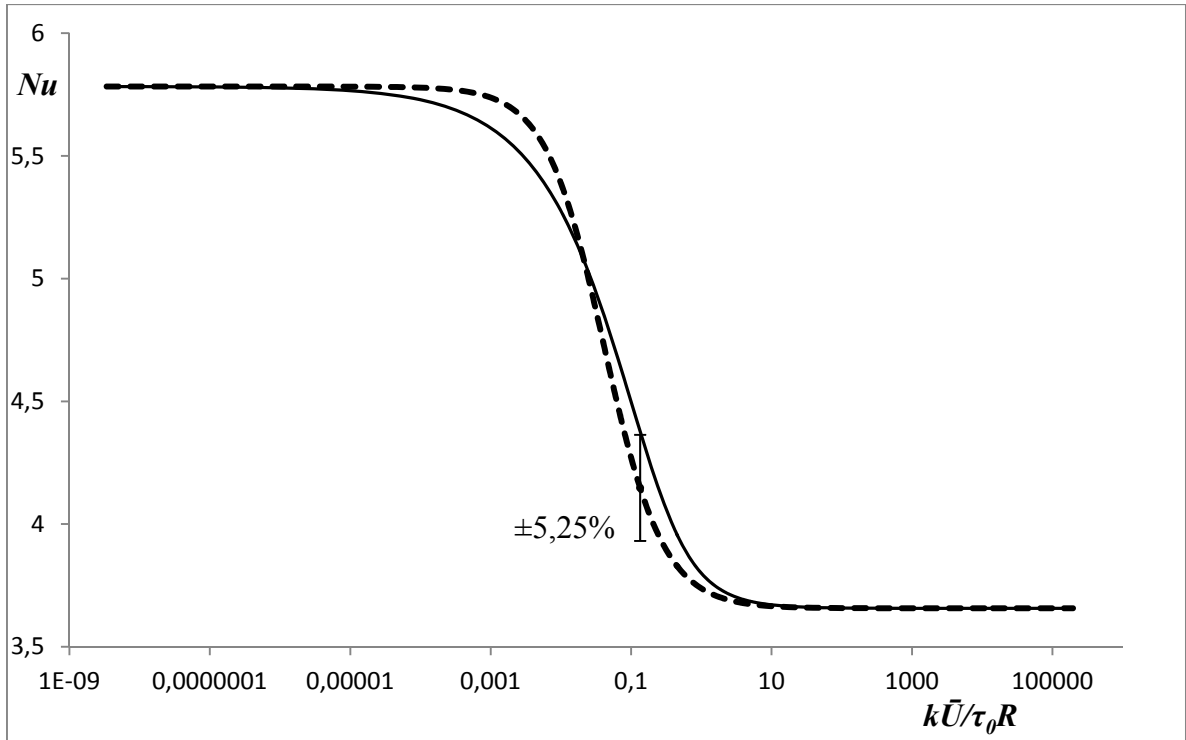


Figura 4.1 – Nu versus $K\bar{U}/\tau_0 R$, $\mu_\infty \equiv K$ e $n = 1$ do fluido Bingham ver Tabela 4.1. - - - Nu -Resultado do método simplificado. — Nu_{IV} -Resultado do método numérico. A barra vertical representa o erro máximo obtido para o caso em análise.

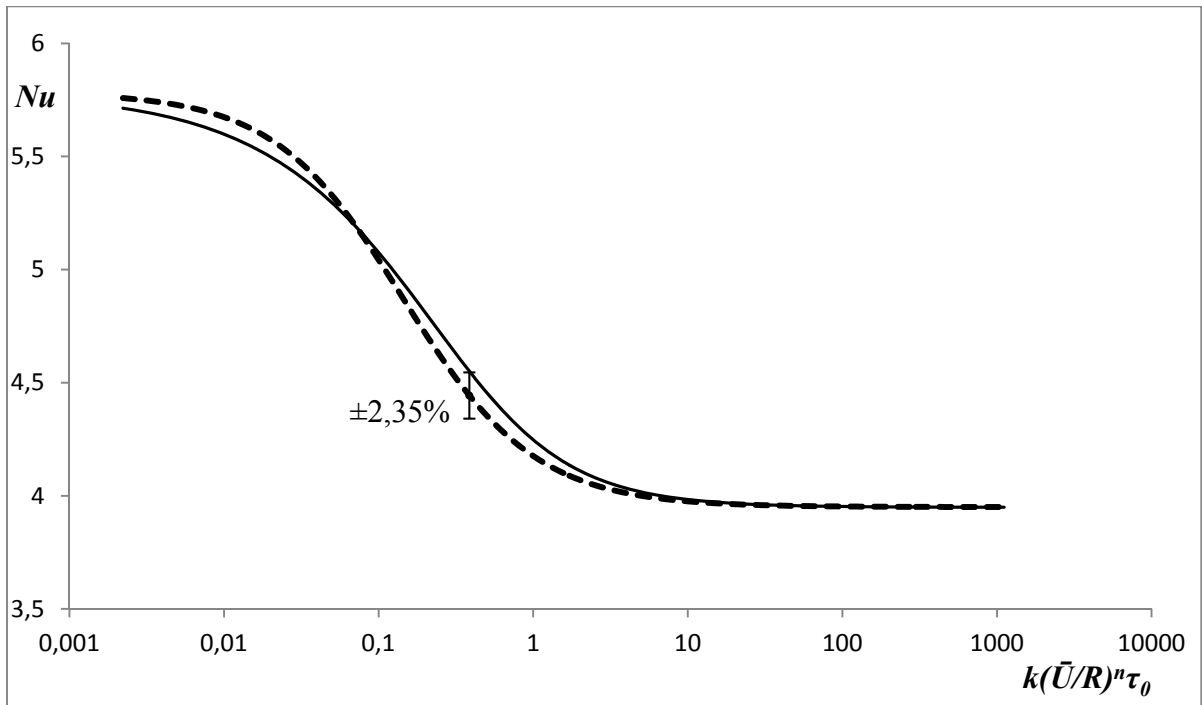


Figura 4.2 – Nu versus $K(\bar{U}/R)^n \tau_0$, $n = 0,5$ do fluido Herschel-Bulkley ver Tabela 4.1- - - Nu -Resultado do método simplificado. — Nu_{IV} -Resultado do método numérico. A barra vertical representa o erro máximo obtido para o caso em análise.

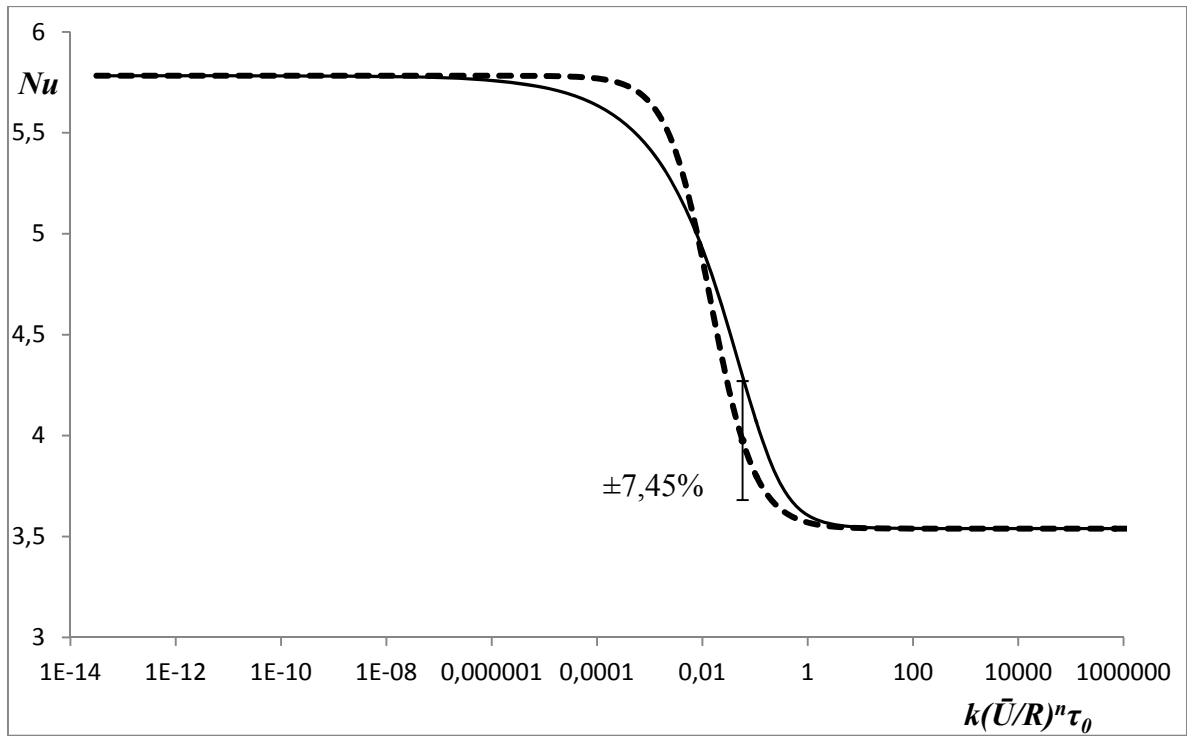


Figura 4.3 – Nu versus $K(\bar{U}/R)^n \tau_0$, $n=1,5$ do fluido Herschel-Bulkley ver Tabela 4.1. - - - Nu -Resultado do método simplificado. — Nu_{IV} -Resultado do método numérico. A barra vertical representa o erro máximo obtido para o caso em análise.

4.2 Fluido de Casson

Na Figura 4.4 analisam-se os resultados de Nu' e Nu_{IV} versus $\mu_\infty \bar{U}/\tau_0 R$ obtidos pelo método simplificado e pelo método numérico para o fluido Casson tendo-se verificado para este caso um erro máximo de $e_{\text{máx}} = 2,98\%$ e um erro médio de $e_{\text{méd}} = 0,83\%$.

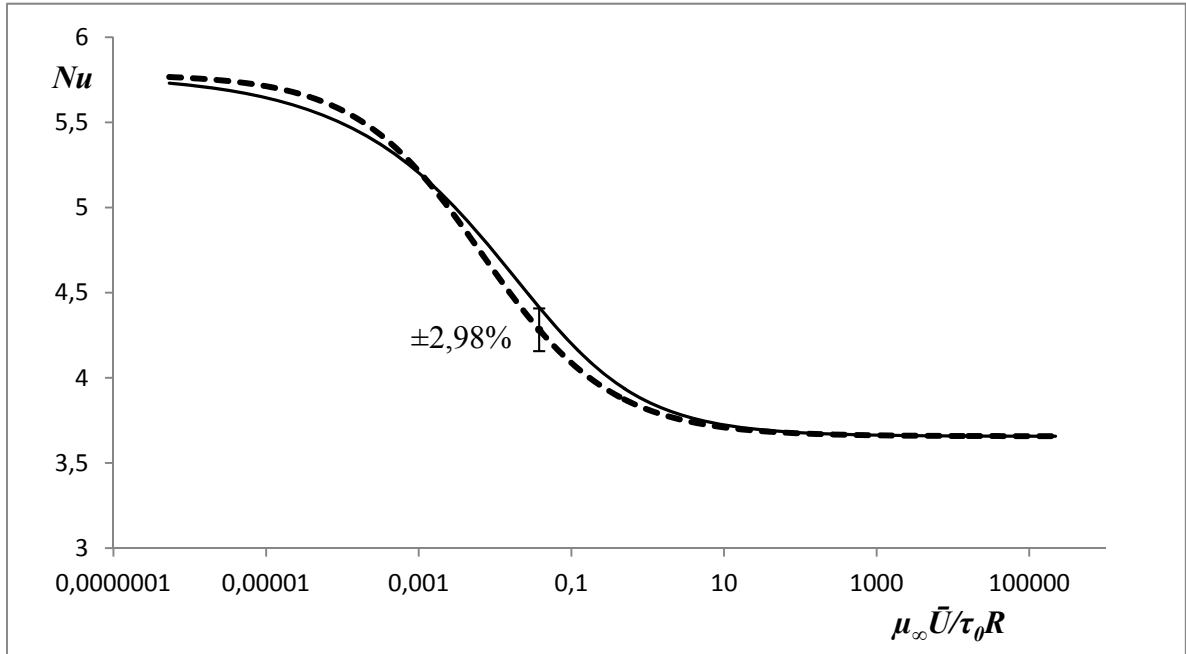


Figura 4.4 – Nu versus $\mu_\infty \bar{U}/\tau_0 R$ do fluido Casson ver Tabela 4.1. - - - Nu -Resultado do método simplificado. — Nu_{IV} -Resultado do método numérico. A barra vertical representa o erro máximo obtido para o caso em análise.

4.3 Fluido de Carreau-Yasuda

As Figuras 4.5 e 4.6 mostram a variação dos números de Nusselt Nu' e Nu_{IV} com o grupo adimensional $\Lambda \bar{U}/R$ para dois fluidos distintos do modelo Carreau-Yasuda. Neste caso verificou-se para o fluido com os parâmetros $n=0,2$, $a=1,5$ e $\mu_{\infty}/\mu_0=0,08$ um erro máximo de $e_{\text{máx}}=2,35\%$ e um erro médio de $e_{\text{méd}}=0,40\%$, Figura 4.5. Alterando os parâmetros anteriores para $n=0,358$, $a=2$ e $\mu_{\infty}/\mu_0=1,08 \times 10^{-4}$ verificou-se um ligeiro aumento do erro máximo, $e_{\text{máx}}=2,99\%$, no entanto para o erro médio esse aumento foi menos expressivo $e_{\text{méd}}=0,41\%$, Figura 4.6.

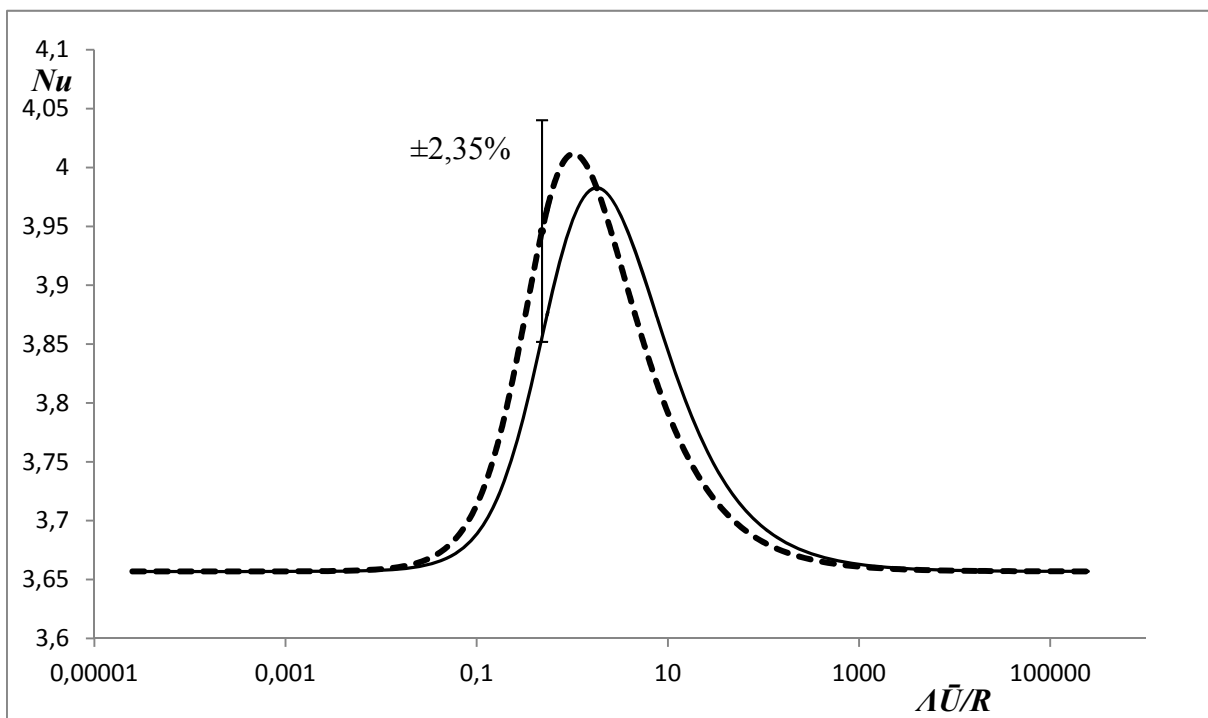


Figura 4.5 – Variação do número de Nusselt com o grupo adimensional $\Lambda \bar{U}/R$ para um fluido que segue o modelo Carreau-Yasuda, $n=0,2$, $a=1,5$ e $\mu_{\infty}/\mu_0=0,08$, são os restantes parâmetros do fluido em causa, ver Tabela 4.1. - - - Nu -Resultado do método simplificado. — Nu_{IV} -Resultado do método numérico. A barra vertical representa o erro máximo obtido para o caso em análise.

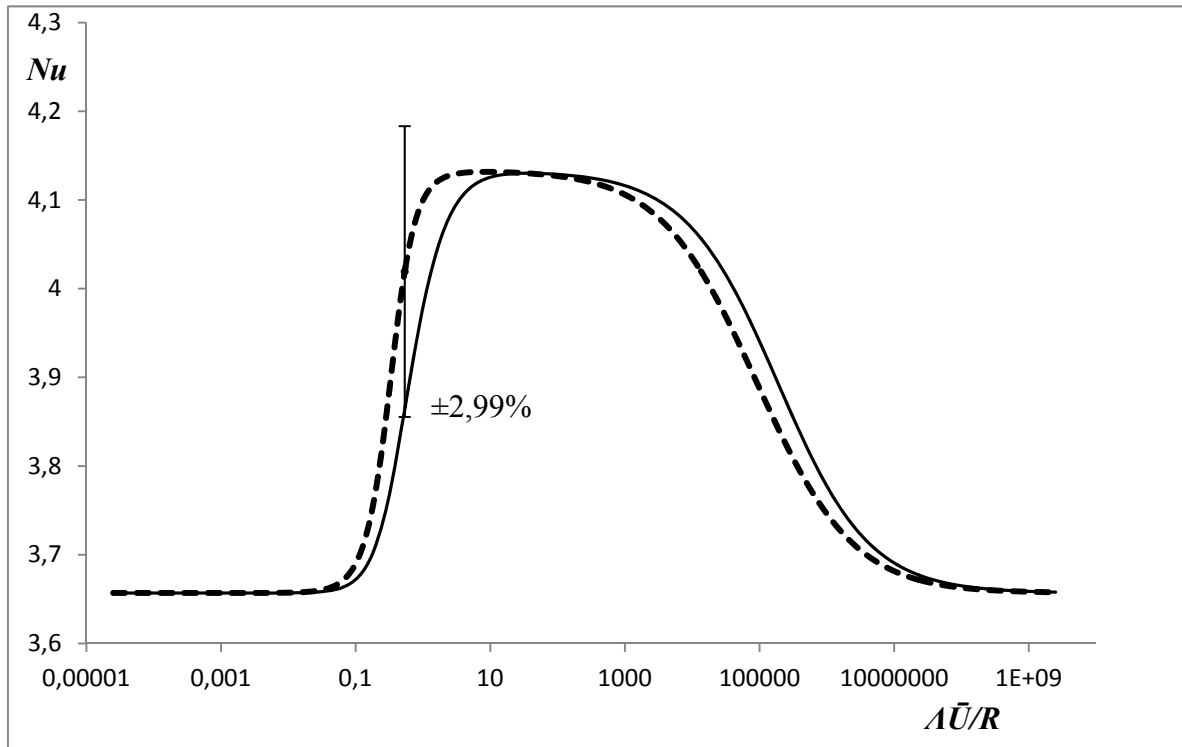


Figura 4.6 – Variação do número de Nusselt com $\Lambda \bar{U}/R$ para um fluido que segue o modelo Carreau-Yasuda, $n=0,358$, $a=2$ e $\mu_{\infty}/\mu_0=1,08 \times 10^{-4}$ são os restantes parâmetros do fluido em causa, ver Tabela 4.1- - - Nu -Resultado do método simplificado. — Nu_{IV} -Resultado do método numérico. A barra vertical representa o erro máximo obtido para o caso em análise.

4.4 Fluidos sPTT

A Figura 4.7 apresenta a variação do número de Nusselt com o grupo adimensional $\sqrt{\varepsilon}Wi=\sqrt{\varepsilon}\lambda\bar{U}/R$ para o fluido sPTT. Embora o seu modelo reológico seja o mais complexo foi o fluido onde os valores da solução simplificada se aproximaram mais da solução numérica, tendo como resultado um erro máximo de $e_{\text{máx}}=1,96\%$ e um erro médio de $e_{\text{méd}}=0,36\%$.

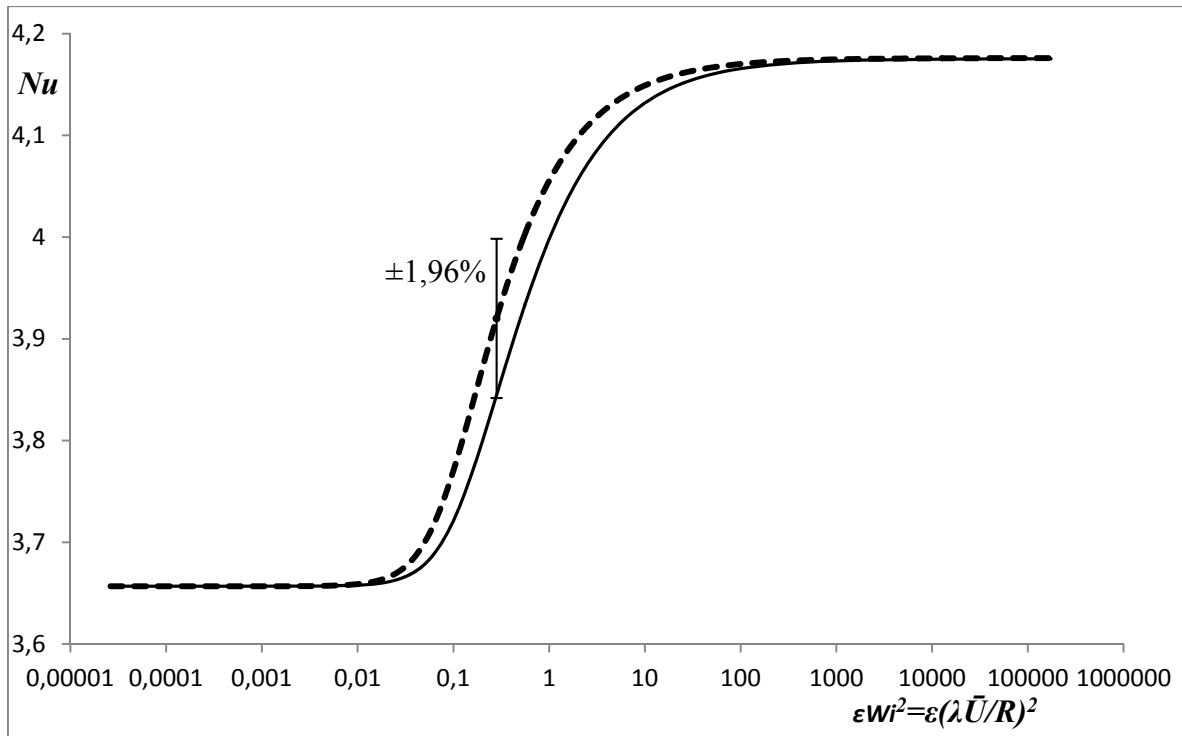


Figura 4.7 – Variação do número de Nusselt com para fluido sPTT, ver Tabela 4.1. - - - Nu -Resultado do método simplificado. — Nu_{IV} -Resultado do método numérico. A barra vertical representa o erro máximo obtido para o caso em análise.

4.5 Análise de resultados

Com base nos resultados obtidos, i.e., um erro máximo inferior a 5,3%, com exceção do fluido Herschel-Bulkley $n=1,5$, e um erro médio inferior a 0,85%, pode concluir-se que, também para o caso de temperatura de parede constante, o método simplificado pode ser utilizado na maioria das aplicações de engenharia, no cálculo da transferência de calor com fluidos não Newtonianos em escoamento laminar totalmente desenvolvido no interior de tubos.

Este método é particularmente útil no caso de fluidos como o de Carreau-Yasuda, cujo modelo reológico é bastante versátil, e por isso se pode ajustar à curva de viscosidade de uma grande variedade de fluidos não-Newtonianos, e para o qual é impossível encontrar uma relação universal entre Nu e um ou dois parâmetros adimensionais, como sucede nos restantes fluidos aqui analisados. Neste caso, encontrar uma expressão matemática para o número de Nusselt, conhecendo a curva de viscosidade do fluido, é agora uma tarefa relativamente simples.

5 Conclusões e perspectivas de trabalhos futuros

5.1 Conclusões

Neste trabalho foram obtidas as expressões semi-analíticas, formalmente mais complexas, e expressões simplificadas para o número de Nusselt em escoamento laminar totalmente desenvolvido de fluidos lei de potência em condutas de secção circular e entre placas paralelas para temperatura de parede constante.

Por forma a validar as expressões semi-analíticas compararam-se os resultados obtidos pelo método aproximado proposto com os resultados de soluções numéricas.

Contrariamente ao esperado concluiu-se que as expressões simplificadas ajustam melhor os valores de números de Nusselt numéricos de elevada exatidão que os valores dados pelas expressões semi-analíticas. Os valores de referência obtidos numericamente em função do índice de potência n , foram calculados em cerca de 1500 valores distintos de n , variando este entre 0,0001 e 10000 (gama muito mais alargada do que em condições habituais para fluidos descritos pelo modelo lei de potência). Para os tubos de secção circular, obteve-se um erro máximo da solução simplificada de 0,017% e um erro médio de 0,003% e para o caso de placas paralelas obteve-se um erro máximo da solução simplificada de 0,010% e um erro médio de 0,002%.

Para o método semi-analítico, apesar da complexidade das expressões de Nu obtidas, verificou-se um maior erro nestas quando comparado com o das expressões simplificadas, mais uma vez os resultados numéricos de elevada exatidão serviram de referência. Para tubos de secção circular as soluções semi-analíticas apresentam um erro máximo de 0,109% e um erro médio de 0,052%, e para placas paralelas exibem um erro máximo de 0,014% e um erro médio de 0,004%. Embora o resultado do método semi-analítico apresente maior erro, quando comparado com o das expressões simplificadas, permite no entanto obter também as expressões matemáticas do perfil de temperatura adimensional, θ , e estudar o seu comportamento. O ponto do referido perfil, cuja temperatura é igual à temperatura média, isto

é, para $\theta=1$, varia entre $0,5 < r^* < 0,68$ para tubos de secção circular e entre $0,38 < y^* < 0,56$ para placas paralelas, quando o índice de potência varia entre $\infty > n > 0$.

Relativamente à análise do desempenho do método simplificado, com base nos resultados obtidos, verificamos um erro máximo inferior a 5,3%, com exceção do fluido Herschel-Bulkley $n=1,5$, e um erro médio inferior a 0,85%. Desta forma, o método em estudo, para o caso de temperatura de parede constante, pode ser utilizado na maioria das aplicações de engenharia, no cálculo da transferência de calor com fluidos não Newtonianos em escoamento laminar totalmente desenvolvido no interior de tubos.

Este método é particularmente útil no caso de fluidos como o de Carreau-Yasuda, cujo modelo reológico é bastante versátil, e desta forma pode-se ajustar à curva de viscosidade de uma grande variedade de fluidos não-Newtonianos, e para o qual é impossível encontrar uma relação universal entre Nu e os respetivos parâmetros adimensionais relevantes, como sucede nos restantes fluidos aqui analisados. Desta forma, encontrar uma expressão matemática para o número de Nusselt, conhecendo a curva de viscosidade do fluido, é agora uma tarefa relativamente simples.

5.2 Perspetivas de trabalhos futuros

Na sequência do presente trabalho seria importante realizar estudos para os fluidos testados na condição de fluxo de calor constante e de temperatura na parede constante para placas paralelas uma vez que neste trabalho só foi possível analisar o caso dos tubos de secção circular.

Seria também interessante analisar se esta metodologia de cálculo simplificado de Nu se poderia aplicar a escoamento turbulento de fluidos inelásticos.

6 Referências e Bibliografia

- Barletta, A. (1997), Fully developed laminar forced convection in circular ducts for power-law fluids with viscous dissipation, *International Journal Heat and Mass Transfer* Vol.40, pág.15-26.
- Coelho, P.M., Pinho, F.T. e Oliveira, P.J. (2002), Fully developed forced convection of the Phan-Thien –Tanner fluid in ducts with a constant wall temperature, *Int. Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 45, pp 1413-1423.
- Cruz, D.A. (2010), Cálculo simplificado do coeficiente de atrito e do número de Nusselt em escoamentos laminares de fluidos não-Newtonianos em condutas circulares, *Dissertação para obtenção de grau de mestre em engenharia mecânica na Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto*.
- Cruz, D.A., Coelho,P.M. e Alves,M.A. (2012), A simplified of Method for Calculating Heat Transfer Coefficients and Friction Factors in Laminar Pipe Flow of Non-Newtonian fluids, *Journal of Heat Transfer ASME* Vol. 134, Setembro.
- Çengel,Y.A.e Turner, R.H. (2005), “Fundamentals of Thermal-Fluid Sciences”, McGraw-Hill, Chap.,19, pp. 873-875.
- Hartnett, J.P e Cho, Y.I. (1998), Non-Newtonian fluids. *Handbook of heat transfer* Chap.10 (3rd ed.W.Rohsenow, J.Hartnett e Y. Cho), 10.1-10.53, New York: McGraw-Hill.
- Skelland,A.H.P. (1967), *Non-Newtonian Flow and Heat Transfer*, John Wiley & Sons., pp. 428-431.

ANEXOS

ANEXO A: Equações da derivada da temperatura na parede e da temperatura média

Neste anexo apresentam-se as equações da derivada do perfil de temperatura na parede e temperatura de mistura, obtidos para escoamento laminar totalmente desenvolvido de fluidos lei de potência dentro de tubos de secção circular e entre placas paralelas com temperatura de parede constante. A equação (A.1) representa a temperatura de mistura $\bar{T}^*$ para temperatura de parede constante para tubo circular:

$$\bar{T}^* = \frac{\left(Nu^3 \left(\begin{aligned} &7532354130840n^{14} + 20439686232690n^{13} + 25492689896683n^{12} + 19366265101691n^{11} + \\ &10010864107787n^{10} + 3725287805115n^9 + 1029409168972n^8 + 214676719662n^7 + 33972622894n^6 + \\ &4062829272n^5 + 361743299n^4 + 23271623n^3 + 1023199n^2 + 27531n + 342 \end{aligned} \right) \right)}{\left(30720T_w^* (3n+1)^4 (4n+1)(5n+1)^2 (6n+1)(7n+1)(7n+2)(9n+1)(11n+1)(11n+3)(13n+3) \right)} \quad (A.1)$$

A seguinte equação (A.2) mostra a primeira derivada para temperatura de parede constante, para tubo circular:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r^*=1} = - \frac{Nu^3 \left(\begin{aligned} &682503012n^{10} + 1328996125n^9 + 1150262833n^8 + 582639884n^7 + 191307588n^6 + \\ &42574846n^5 + 6511542n^4 + 677036n^3 + 45904n^2 + 1837n + 33 \end{aligned} \right)}{6144T_w^* (3n+1)(4n+1)(5n+1)(7n+1)(9n+1)(11n+3)} \quad (A.2)$$

A equação (A.3) representa a temperatura de mistura $\bar{T}^*$ para temperatura de parede constante para placas paralelas:

Cálculo simplificado do número de Nusselt em escoamentos laminares de fluidos não-Newtonianos
no interior de condutas com temperatura de parede constante

$$\bar{T}^* = \frac{\left(\begin{aligned} &12214324362240000n^{16} + 47653241323699200n^{15} + 86461833720642560n^{14} + \\ &96828991569150016n^{13} + 74905702788869872n^{12} + 42439186512554112n^{11} + \\ &18215564830077104n^{10} + 6041797616392832n^9 + 1565079964830077n^8 + \\ &317701064822147n^7 + 50372677438370n^6 + 6173055415992n^5 + 573210213856n^4 + \\ &38986443952n^3 + 1831376288n^2 + 53068032n + 714240 \end{aligned} \right)}{\left(\begin{aligned} &362880T_w^* (4n+1)^3 (5n+2)^2 (6n+1)(7n+2)(8n+1)(8n+3)(9n+2)(10n+1)(10n+3) \\ &(11n+2)(11n+4)(13n+4)(14n+5) \end{aligned} \right)} \quad (A.3)$$

A equação (A.4) representa mostra a primeira derivada para temperatura de parede constante
para placas paralelas:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y^*=1} = - \frac{Nu^3 \left(\begin{aligned} &58920960000n^{11} + 165519505920n^{10} + 209032679360n^9 + 156618258352n^8 + \\ &77347433796n^7 + 26438401664n^6 + 6383887405n^5 + 1089391392n^4 + 128832560n^3 + \\ &10063216n^2 + 467568n + 9792 \end{aligned} \right)}{80640T_w^* (4n+1)^2 (5n+2)^2 (6n+1)(7n+2)(8n+1)(8n+3)(9n+2)(10n+3)(11n+4)} \quad (A.4)$$

ANEXO B: Método numérico usado na integração da equação de conservação de energia

B.1 – Descrição do método numérico

A integração numérica da equação de conservação de energia na forma diferencial, equação (2.31), é essencial para este estudo, uma vez que os valores de Nu utilizados como referência provêm da mesma, isto é, permite-nos comparar os valores de Nu obtidos numericamente, de menor erro, com os valores de Nu obtidos pelo método simplificado e desta forma validar este último. Neste anexo será descrito o método numérico utilizado e que se baseia na discretização e integração da equação diferencial de conservação de energia. Embora a descrição que se segue está dirigida para o caso de tubos de secção circular, facilmente se pode adaptar ao caso de escoamento entre placas paralelas.

Nesta análise temos de ter em conta que para alguns modelos reológicos a taxa de deformação não é uma função explícita da tensão, tendo como exemplo o fluido Carreau-Yasuda, e nestes casos utiliza-se a seguinte abordagem:

- I.a Arbitrar um valor para a taxa de deformação na parede $\dot{\gamma}_w$, com base na qual será posteriormente calculada a velocidade média correspondente na conduta, ver ponto VI.
- II.a De seguida determinam-se $N+1$ valores de taxas de deformação compreendidas entre zero, eixo da conduta, e $\dot{\gamma}_w$, parede, aos quais vão estar associados pontos, i , ao longo da coordenada radial desde $i = 0$ até N . Tendo em vista uma boa precisão do método numérico deverá ser utilizado um valor de N elevado, já que quanto maior esse valor menor será o erro numérico. A distribuição de taxas de deformação é considerada na forma, $\dot{\gamma}_i = \frac{i}{N} \dot{\gamma}_w$.
- III.a Para cada um dos pontos i considerados a tensão de corte correspondente é determinada através da curva de viscosidade dada pelo modelo reológico. No caso do modelo Carreau-Yasuda, usado como exemplo, temos que
$$\eta = \mu_\infty + (\mu_0 - \mu_\infty) \left[1 + (\Lambda \dot{\gamma})^a \right]^{(n-1)/a}.$$

Sabendo a relação entre a tensão e a taxa de deformação, $\tau = \eta \dot{\gamma}$, obtemos a expressão para o cálculo da tensão de corte em cada ponto, dada por
$$\tau_i = \eta_\infty + (\eta_0 - \eta_\infty) [1 + (\Lambda \dot{\gamma}_i)^a]^{(n-1/a)} \dot{\gamma}_i.$$

No caso de fluidos com tensão de cedência, fluido de Bingham por exemplo, ou outros em que a taxa de deformação é uma função explícita da tensão, seguimos a seguinte abordagem, ligeiramente diferente da anterior:

- I.b Arbitrar um valor para a tensão de corte na parede τ_w , com base na qual será posteriormente calculada a velocidade média correspondente na conduta, ver ponto VI.
- II.b De seguida determinam-se $N+1$ valores de tensões de corte compreendidas entre zero, eixo da conduta, e τ_w , aos quais vão estar associados pontos, i , ao longo da coordenada radial desde $i = 0$ até N . Tendo em vista uma boa precisão do método numérico deverá ser utilizado um valor de N elevado. A distribuição de tensão de corte é considerada na forma $\tau_i = \frac{i}{N} \tau_w$.

- III.b Para cada um dos pontos i considerados a taxa de deformação correspondente é determinada através da curva de viscosidade dada pelo modelo reológico em questão;

no caso do modelo de Bingham temos que,
$$\begin{cases} \eta = \mu_\infty + \frac{\tau_0}{\dot{\gamma}} & \text{ou } \tau = \dot{\gamma} \mu_\infty + \tau_0 & \tau > \tau_0 \\ \dot{\gamma} = 0 & & \tau \leq \tau_0 \end{cases}$$

onde a taxa de a taxa de deformação em cada ponto i , $\dot{\gamma}_i$, é dada por,

$$\dot{\gamma}_i = \max \left(0, \frac{\tau_i - \tau_0}{\mu_\infty} \right).$$

Depois de conhecidos os valores da taxa de deformação, $\dot{\gamma}_i$, e da tensão de corte, τ_i , em cada ponto i , os seguintes passos aplicam-se a ambos os tipos de fluidos.

- IV.ab A posição radial de cada um dos pontos i , r_i^* , ao longo da direção radial é agora possível ser determinada através da conhecida variação linear da tensão de corte ao longo das coordenadas radiais, ou seja, $r_i^* = \frac{\tau_i}{\tau_w} r_N$, com $\tau_N = \tau_w$.
- V.ab Através do conhecimento da variação radial do perfil de taxa de deformação é possível agora calcular o perfil de velocidades recorrendo para tal à integração numérica

(sendo $\dot{\gamma}_i = (-du/dr)_i$ e $u_{i=N} = 0$). Dada a sua simplicidade utiliza-se a regra dos trapézios em que $u_i = u_{i+1} + (r_{i+1} - r_i)(\dot{\gamma}_i + \dot{\gamma}_{i+1})/2$, para $i = N-1$ até 0.

VI.ab A velocidade média é calculada a partir da definição, $\bar{U} = 2 \int_0^1 u r^* dr^*$. Numericamente este integral pode ser aproximado utilizando a regra dos trapézios:

$\bar{U} = \sum_{i=1}^N (u_{i-1} r_{i-1}^* + u_i r_i^*)(r_i^* - r_{i-1}^*)$. O perfil da velocidade normalizada pode ser calculado através de $u_i^* = u_i / \bar{U}$.

Segue-se a descrição da integração da equação da energia, $\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \right) = -Nu \cdot u^* T^*$. Por motivos que serão referidos mais tarde, optou-se por utilizar a seguinte adimensionalização específica da temperatura, T^+ , com $T^+ = (T_w - T) / [Nu(T_w - T_{\text{eixo}})]$, para realizar a integração numérica. Para tal basta, dividir ambos os membros da equação de energia por $(Nu \cdot T_{\text{eixo}}^*)$.

Efetuada a mudança de variável $T^+ = T^* / (Nu \cdot T_{\text{eixo}}^*)$, a equação da energia resulta em

$\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial T^+}{\partial r^*} \right) = -Nu \cdot u^* T^+$, com condições fronteira $\left(\frac{\partial T^+}{\partial r^*} \right)_{r^*=0} = 0$ e $T^+_{r^*=1} = 0$. O número

de Nusselt pode também ser reescrito na forma $Nu = 1/T_{\text{eixo}}^+$. Arbitrando um valor para T_{eixo}^+ e consequentemente para Nu , já que $Nu = 1/T_{\text{eixo}}^+$, é possível efetuar a integração da equação da energia, até à parede, onde se deverá observar a condição $T^+_{r^*=1} = 0$. O valor de T_{eixo}^+ arbitrado deve ser variado até que se verifique essa igualdade, e dessa forma determina-se o valor correspondente de Nu . A integração numérica da equação da energia segue o seguinte procedimento:

Começando em $i = 0$ com o valor arbitrado de T_{eixo}^+ :

(i) *Predictor*: $\left(\frac{\partial T^+}{\partial r^*} \right)_{i+1}^{**} = \frac{r_i^*}{r_{i+1}^*} \left(\frac{\partial T^+}{\partial r^*} \right)_i - Nu \frac{u_i^* r_i^* + u_{i+1}^* r_{i+1}^*}{2r_{i+1}^*} T_i^+ (r_{i+1}^* - r_i^*)$ em que não se usa a média

dos valores de T^+ entre i e $i+1$ porque não se conhece ainda o valor de T_{i+1}^+ . Assim, este

passo permite prever uma estimativa para $\left(\frac{\partial T^+}{\partial r^*} \right)_{i+1}$, que se representa por $\left(\frac{\partial T^+}{\partial r^*} \right)_{i+1}^{**}$.

$$(ii) \left(T^+\right)_{i+1}^{**} = T_i^+ + \frac{(r_{i+1}^* - r_i^*)}{2} \left[\left(\frac{\partial T^+}{\partial r^*} \right)_i + \left(\frac{\partial T^+}{\partial r^*} \right)_{i+1}^{**} \right]$$

(iii) Podemos agora recalcular o passo (i) com esta nova estimativa. *Corretor*:

$$\left(\frac{\partial T^+}{\partial r^*} \right)_{i+1}^{**} = \frac{r_i^*}{r_{i+1}^*} \left(\frac{\partial T^+}{\partial r^*} \right)_i - Nu \frac{u_i^* T_i^+ r_i^* + u_{i+1}^* (T^+)_{i+1}^{**} r_{i+1}^*}{2r_{i+1}^*} (r_{i+1}^* - r_i^*)$$

$$(iv) T_{i+1}^+ = T_i^+ + \frac{(r_{i+1}^* - r_i^*)}{2} \left[\left(\frac{\partial T^+}{\partial r^*} \right)_i + \left(\frac{\partial T^+}{\partial r^*} \right)_{i+1}^{**} \right]$$

Os passos (i) a (iv) são repetidos para valores de i sucessivamente crescentes até se determinar o perfil completo de T^+ . Confirmar se a igualdade $T_{i=N}^+ = 0$ é verificada, caso contrário deverá repetir-se o procedimento com nova estimativa para o valor de T_{eixo}^+ .

(v) Quando se obtiver o perfil adequado, determina-se o número de Nusselt pela igualdade $Nu = 1/T_{\text{eixo}}^+$. Como a integração tem de ser realizada a partir do eixo da conduta, caso contrário é impossível progredir na direção r^* , ver ponto (i), é conveniente que o número de Nusselt, que está implícito na equação de energia, dependa também de forma simples da variável arbitrada, T_{eixo}^+ , o que sucede se T^+ for aquele que foi escolhido. Deste modo, ao arbitrar T_{eixo}^+ está-se implicitamente a arbitrar-se Nu já que, como se referiu, $Nu = 1/T_{\text{eixo}}^+$.

Na secção seguinte ir-se-á apresentar os resultados da avaliação ao desempenho da integração numérica para obtenção do valor de Nu . Como se irá constatar, os valores deste número adimensional, utilizados como valores de referência, estão corretos pelo menos até à quarta casa decimal para qualquer um dos fluidos utilizados neste trabalho.

B.2 Avaliação dos resultados numéricos

B.2.1 Fluido lei de potência para placas paralelas e tubagens.

Para ambos os casos estudados, isto é, as placas paralelas e tubos de secção circular, as integrações numéricas foram feitas de forma a obter 1500 valores distintos de números de Nusselt para um igual número de diferentes valores do índice de potência, n , variando este último desde de $n = 0,0001$ até $n = 10000$, utilizando os seguintes números de pontos N ao longo da coordenada “radial”, I-3000, II - 6000, III-12000 e IV-24000. Estes mesmos números de pontos serão também utilizados nas integrações no caso dos restantes fluidos estudados.

As diferenças nos valores de Nu obtidos com grau crescente de precisão, $|Nu_{II}-Nu_I|$, $|Nu_{III}-Nu_{II}|$ e $|Nu_{IV}-Nu_{III}|$, são mostrados na Figura B-1. Como pode ser visto nesta figura os valores de Nu_{IV} , usados como valor padrão, estão corretos em pelo menos 4 casas decimais.

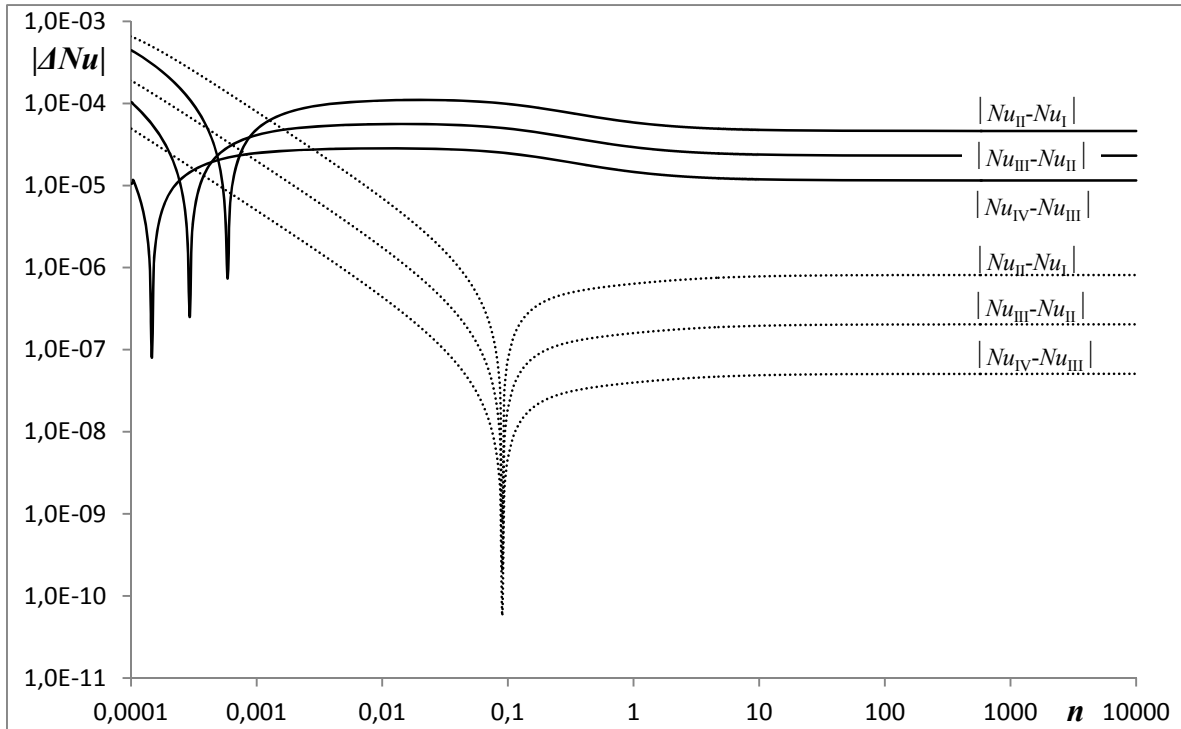


Figura B-1 – Diferença entre os valores de Nu obtidos por integração numérica com diferentes números de pontos ao longo da coordenada perpendicular à parede. Número de pontos, N , utilizados na integração: I-3000, II-6000, III-12000, IV-24000. Linhas: placas paralelas —. Linhas: tubos de seção circular

B.2.2 Fluido Herschel-Bulkley

Para o caso estudado, isto é, escoamento no interior de tubos de seção circular, as integrações numéricas foram feitas de forma a obter 1500 valores distintos de números de Nusselt para um igual número de diferentes valores do parâmetro adimensional $k(\bar{U}/R)^n / \tau_0$, cf. Tabela 1.2, variando este último desde de 0,001 até 10000.

As diferenças nos valores de Nu obtidos com grau crescente de precisão, $|Nu_{II}-Nu_I|$, $|Nu_{III}-Nu_{II}|$ e $|Nu_{IV}-Nu_{III}|$, são mostrados na Figura B-2 para o caso em que $n=0,5$. Como pode ser visto nesta figura os valores de Nu_{IV} neste caso estão corretos em pelo menos 6 casas decimais.

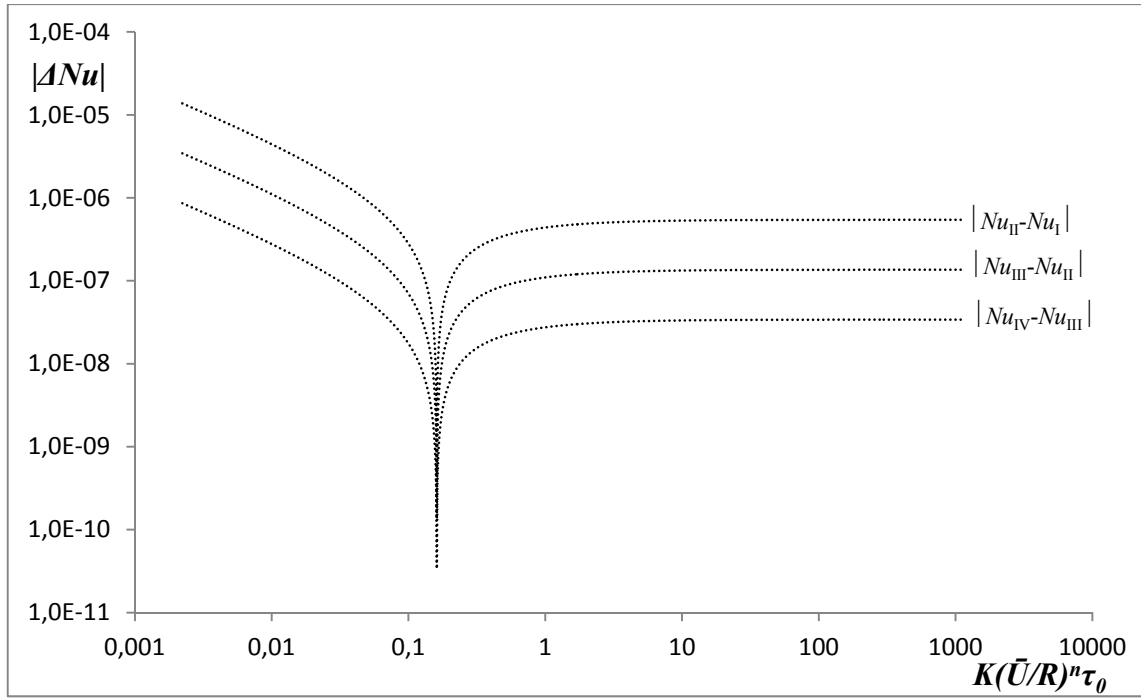


Figura B-2 – Diferença entre os valores de Nu versus $K(\bar{U}/R)^n \tau_0$, caso de $n=0,5$, obtidos por integração numérica com diferentes números de pontos ao longo da coordenada radial. Número de pontos, N , utilizados: I-3000, II-6000, III-12000, IV-24000.

B.2.3 Fluido de Casson

Para o caso estudado escoamento no interior de tubos de secção circular, as integrações numéricas foram feitas de forma a obter 1500 valores distintos de números de Nusselt para um igual número de diferentes valores do parâmetro adimensional $\mu_\infty \bar{U} / \tau_0 R$, cf. Tabela 1.2, variando este último desde de 0,0000001 até 100000.

As diferenças nos valores de Nu obtidos com grau crescente de precisão, $|Nu_{II} - Nu_I|$, $|Nu_{III} - Nu_{II}|$ e $|Nu_{IV} - Nu_{III}|$, são mostrados na Figura B-3. Como pode ser visto nesta figura os valores de Nu_{IV} neste caso estão corretos em pelo menos 6 casas decimais.

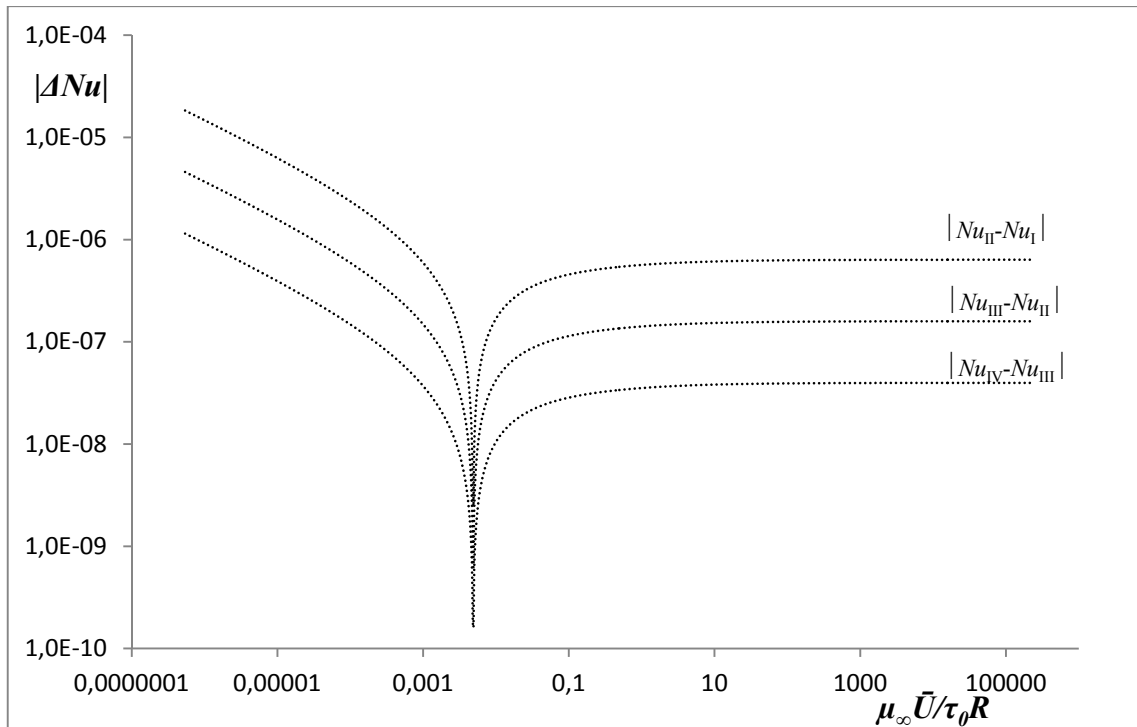


Figura B-3 – Diferença entre os valores de Nu versus $\mu_{\infty}\bar{U}/\tau_0 R$ obtidos por integração numérica com diferentes números de pontos ao longo da coordenada radial. Número de pontos, N , utilizados: I-3000, II-6000, III-12000, IV-24000.

B.2.4 Fluido de Carreau-Yasuda

Para o caso estudado as integrações numéricas foram feitas de forma a obter 1500 valores distintos de números de Nusselt para um igual número de diferentes valores do parâmetro adimensional $\lambda\bar{U}/R$ para o caso em que $n=2$ cf. Tabela 1.2, variando este último desde de 0,000001 até 100000.

As diferenças nos valores de Nu obtidos com grau crescente de precisão, $|Nu_{II}-Nu_I|$, $|Nu_{III}-Nu_{II}|$ e $|Nu_{IV}-Nu_{III}|$, são mostrados na Figura B-4 para o caso em que $\mu_{\infty}/\mu_0 = 8 \times 10^{-2}$, $a=1,5$ e $n=0,2$. Como pode ser visto nesta figura os valores de Nu_{IV} neste caso estão corretos em pelo menos 7 casas decimais.

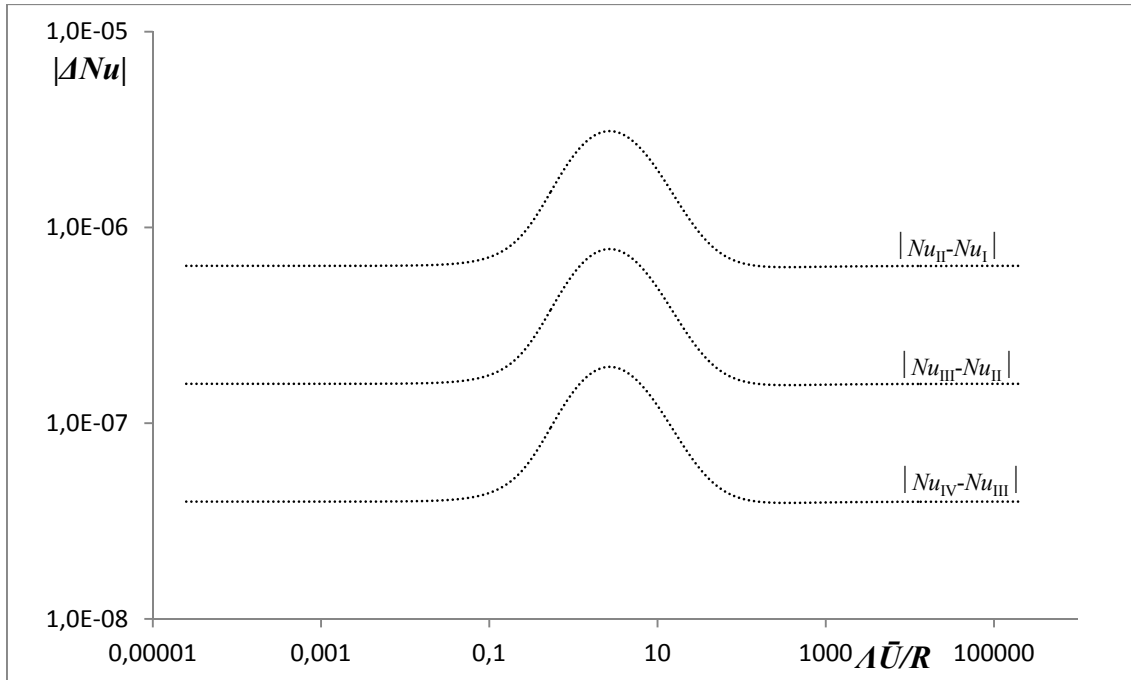


Figura B-4 – Diferença entre os valores de Nu versus $A\bar{U}/R$, caso de $\mu_\infty / \mu_0 = 8 \times 10^{-2}$, $a=1,5$ e $n=0,2$, obtidos por integração numérica com diferentes números de pontos ao longo da coordenada radial. Número de pontos, N , utilizados: I-3000, II-6000, III-12000, IV-24000.

B.2.5 Fluidos sPTT

Para o fluido sPTT, no caso em estudo, tubos de secção circular, as integrações numéricas foram feitas de forma a obter 1500 valores distintos de números de Nusselt para um igual número de diferentes valores do parâmetro adimensional $\varepsilon Wi^2 = \varepsilon (\lambda \bar{U}/R)^2$, cf. Tabela 1.2, variando este último desde de 0,00001 até 100000.

As diferenças nos valores de Nu obtidos com grau crescente de precisão, $|Nu_{II}-Nu_I|$, $|Nu_{III}-Nu_{II}|$ e $|Nu_{IV}-Nu_{III}|$, são mostrados na Figura B-5. Como pode ser visto nesta figura os valores de Nu_{IV} neste caso estão corretos em pelo menos 4 casas decimais.

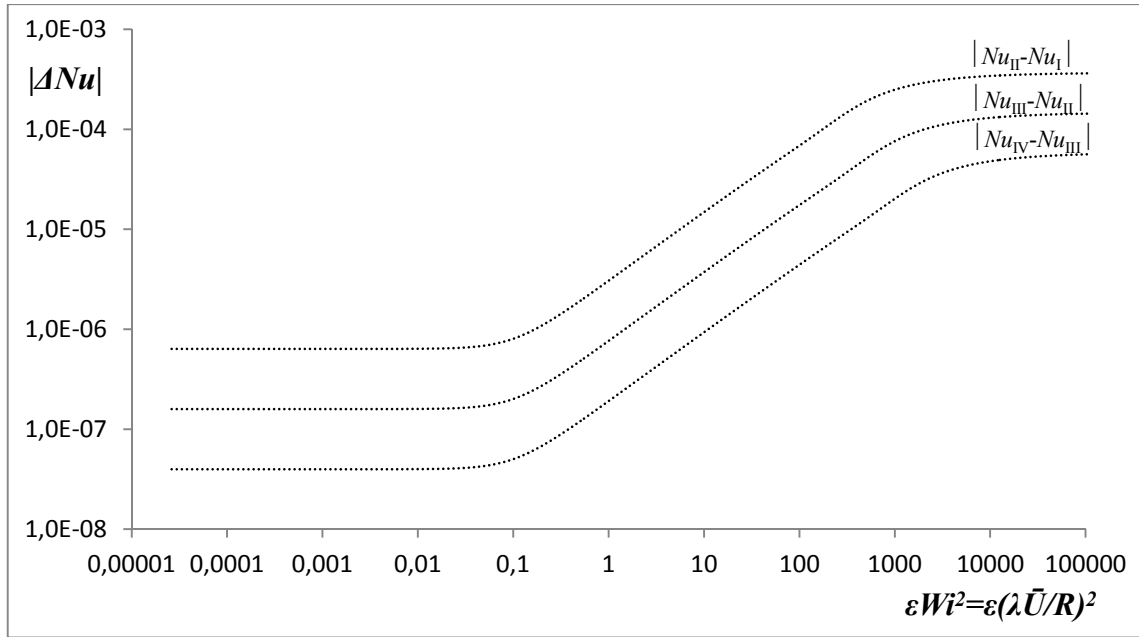


Figura B-5 – Diferença entre os valores de Nu versus $\varepsilon Wi^2 = \varepsilon(\lambda \bar{U}/R)^2$ obtidos por integração numérica com diferentes números de pontos ao longo da coordenada. Número de pontos, N , utilizados: I-3000, II-6000, III-12000, IV-24000.