

CAPÍTULO II ANÁLISE DAS DEFORMAÇÕES

2.1. RESUMO DA TEORIA

2.1.1. Deslocamento e Deformação Linear

Sejam (x,y,z) as coordenadas de um ponto genérico P, na configuração inicial do corpo. Depois da transformação, os pontos do corpo passam a ocupar uma outra região (R') . Seja o ponto P', de coordenadas (x', y', z') , a nova posição ocupada pela mesma partícula de material. O vector $\vec{u} = \overrightarrow{PP'}$, com origem na posição inicial P da partícula e extremidade na posição final P', é o *vector deslocamento*, ou simplesmente *deslocamento* do ponto $P(x,y,z)$.

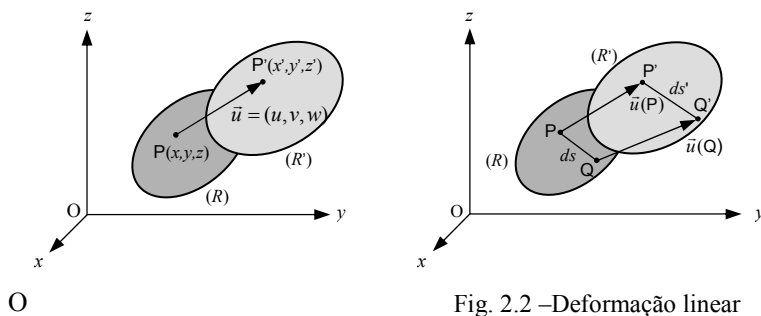


Fig. 2.2 – Deformação linear

Define-se *extensão* ou *deformação linear* do segmento PQ, como sendo a variação relativa do respectivo comprimento, isto é:

$$\varepsilon_{PQ} = \frac{ds' - ds}{ds} \quad (2.1)$$

Fazendo $ds \rightarrow 0$ obtém-se a *deformação linear* ou *extensão linear* no ponto P, segundo a direcção PQ definida pelo versor $\vec{n} = (l, m, n)$:

$$\varepsilon(P, \vec{n}) = \lim_{ds \rightarrow 0} \frac{ds' - ds}{ds} \quad (2.2)$$

Em particular, às direcções dos três eixos coordenados Ox , Oy e Oz correspondem as três *componentes cartesianas lineares da deformação* no ponto P , isto é:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \varepsilon(P, \vec{i}) \\ \varepsilon_{yy} &= \varepsilon(P, \vec{j}) \\ \varepsilon_{zz} &= \varepsilon(P, \vec{k}) \end{aligned} \quad (2.3)$$

2.1.2. Distorção ou Deformação de Corte

Fisicamente, a *deformação de corte ou distorção* traduz o escorregamento relativo de planos paralelos uns sobre os outros. Considerando o caso de um elemento bidimensional, Fig.2.3, a deformação de corte é responsável pela distorção do rectângulo inicial $PACB$, que se transforma no paralelogramo $P'A'C'B'$.

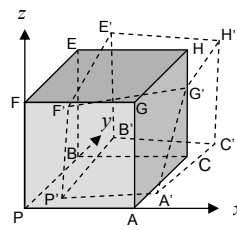
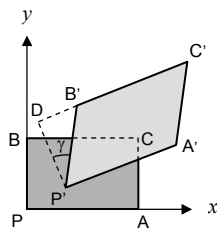


Fig. 2.3 – Distorção dum rectângulo Fig. 2.4 – Distorção dum paralelepípedo

A *deformação de corte* é medida pelo deslocamento tangencial por unidade de comprimento, isto é:

$$\text{Deformação de Corte} = \frac{DB'}{DP} = \text{tg}(\gamma) \cong \gamma$$

Na situação representada na Fig. 2.3, em que as duas direcções inicialmente perpendiculares entre si são paralelas aos eixos coordenados Ox e Oy , a distorção correspondente é representada por γ_{xy} ou γ_{yx} , isto é:

$$\gamma = \gamma_{xy} = \gamma_{yx}$$

No caso dum elemento tridimensional, Fig.2.4, a deformação de corte é traduzida pelas três componentes correspondentes às distorções dos três diedros concorrentes no vértice P. Obtêm-se assim as três *componentes cartesianas da distorção* ou *deformação de corte* no ponto P:

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} ; \quad \gamma_{yz} = \gamma_{zy} ; \quad \gamma_{zx} = \gamma_{xz} \quad (2.4)$$

2.1.3. Matriz e Vector das Deformações

Considere-se um elemento rectangular PACB orientado paralelamente aos eixos coordenados Ox e Oy, que se transforma no quadrilátero P'A'C'B', Fig. 2.5.

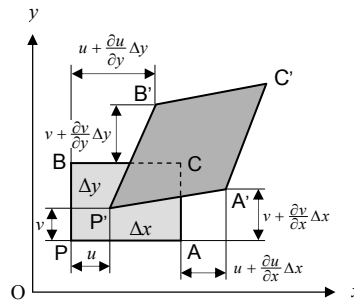


Fig. 2.5 – Componentes cartesianas da deformação no plano xy

As deformações lineares ϵ_{xx} e ϵ_{yy} segundo as direcções x e y e a distorção γ_{xy} do elemento são as *componentes cartesianas* (no plano xy) da deformação no ponto P e podem exprimir-se em termos do *vector deslocamento* desse ponto:

$$\epsilon_{xx} = \frac{(\Delta x + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x) - \Delta x}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{(\Delta y + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y) - \Delta y}{\Delta y} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{(u + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y) - u}{\Delta y} + \frac{(v + \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x) - v}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

Para o conjunto das três direcções cartesianas Oxyz, obtêm-se assim as seis componentes cartesianas da deformação no ponto considerado:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} & \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} & \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} & \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \quad (2.5)$$

As seis componentes cartesianas da deformação podem agrupar-se sob a forma da *matriz das deformações* ou do *vector deformação* no ponto P:

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \varepsilon_{yy} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.6)$$

2.1.4. Deformação Segundo Direcções Arbitrárias

A deformação linear segundo uma direcção arbitrária $\vec{n} = (l, m, n)$, Fig. 2.6. pode exprimir-se em termos das componentes cartesianas da deformação no ponto considerado:

$$\varepsilon(P, \vec{n}) = \varepsilon_{xx} l^2 + \varepsilon_{yy} m^2 + \varepsilon_{zz} n^2 + \gamma_{xy} lm + \gamma_{yz} mn + \gamma_{xz} nl \quad (2.7a)$$

Igualmente a deformação de corte ou distorção entre essa direcção \vec{n} e a respectiva direcção perpendicular \vec{t} , pode também exprimir-se em função das componentes cartesianas da deformação em P:

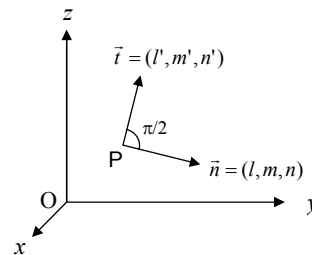


Fig. 2.6 – Distorção γ_{nt}

$$\begin{aligned} \gamma_{n,t} &= 2(\varepsilon_{xx} ll' + \varepsilon_{yy} mm' + \varepsilon_{zz} nn') \\ &+ \gamma_{yz} (mn' + m'n) + \gamma_{xz} (ln' + l'n) + \gamma_{xy} (lm' + l'm) \end{aligned} \quad (2.7b)$$

2.1.5. Leis de Transformação das Deformações

Por aplicação das equações (2.7), podem calcular-se as componentes cartesianas da deformação referidas a um referencial particular $Ox'y'z'$, Fig.2.7, em função das componentes cartesianas da tensão no referencial global $Oxyz$ e dos co-senos directores relativos dos dois referenciais:

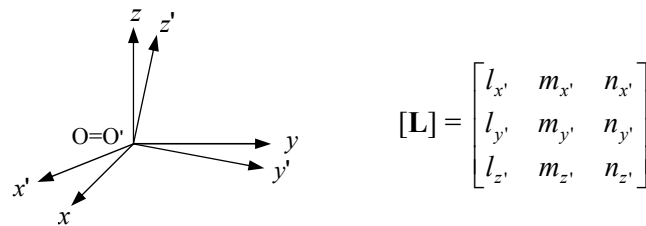


Fig. 2.7- Referenciais $Oxyz$ e $Ox'y'z'$

Assim, obtém-se:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{x'x'} &= \varepsilon_{xx}l_x'^2 + \varepsilon_{yy}m_x'^2 + \varepsilon_{zz}n_x'^2 + \gamma_{yz}m_x'n_x' + \gamma_{xz}n_x'l_x' + \gamma_{xy}l_x'm_x' \\
 \varepsilon_{y'y'} &= \varepsilon_{xx}l_y'^2 + \varepsilon_{yy}m_y'^2 + \varepsilon_{zz}n_y'^2 + \gamma_{yz}m_y'n_y' + \gamma_{xz}n_y'l_y' + \gamma_{xy}l_y'm_y' \\
 \varepsilon_{z'z'} &= \varepsilon_{xx}l_z'^2 + \varepsilon_{yy}m_z'^2 + \varepsilon_{zz}n_z'^2 + \gamma_{yz}m_z'n_z' + \gamma_{xz}n_z'l_z' + \gamma_{xy}l_z'm_z' \\
 \gamma_{y'z'} &= 2\varepsilon_{xx}l_y'l_z' + 2\varepsilon_{yy}m_y'm_z' + 2\varepsilon_{zz}n_y'n_z' + \gamma_{yz}(m_y'n_z' + n_y'm_z') \\
 &\quad + \gamma_{xz}(n_y'l_z' + l_y'n_z') + \gamma_{xy}(l_y'm_z' + m_y'l_z') \\
 \gamma_{x'z'} &= 2\varepsilon_{xx}l_x'l_z' + 2\varepsilon_{yy}m_x'm_z' + 2\varepsilon_{zz}n_x'n_z' + \gamma_{yz}(m_x'n_z' + n_x'm_z') \\
 &\quad + \gamma_{xz}(n_x'l_z' + l_x'n_z') + \gamma_{xy}(l_z'm_x' + m_z'l_x') \\
 \gamma_{x'y'} &= 2\varepsilon_{xx}l_x'l_y' + 2\varepsilon_{yy}m_x'm_y' + 2\varepsilon_{zz}n_x'n_y' + \gamma_{yz}(m_x'n_y' + n_x'm_y') \\
 &\quad + \gamma_{xz}(n_x'l_y' + l_x'n_y') + \gamma_{xy}(l_x'm_y' + m_x'l_y')
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

ou seja, sob a forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{x'x'} & \frac{1}{2}\gamma_{x'y'} & \frac{1}{2}\gamma_{x'z'} \\ \frac{1}{2}\gamma_{x'y'} & \varepsilon_{y'y'} & \frac{1}{2}\gamma_{y'z'} \\ \frac{1}{2}\gamma_{x'z'} & \frac{1}{2}\gamma_{y'z'} & \varepsilon_{z'z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_x' & m_x' & n_x' \\ l_y' & m_y' & n_y' \\ l_z' & m_z' & n_z' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_{yy} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_x' & m_x' & n_x' \\ l_y' & m_y' & n_y' \\ l_z' & m_z' & n_z' \end{bmatrix}^T \tag{2.9}$$

ou ainda, simbolicamente:

$$[\boldsymbol{\varepsilon}'] = [\mathbf{L}] [\boldsymbol{\varepsilon}] [\mathbf{L}]^T \quad (2.10)$$

Inversamente, pode escrever-se:

$$[\boldsymbol{\varepsilon}] = [\mathbf{L}]^T [\boldsymbol{\varepsilon}'] [\mathbf{L}] \quad (2.11)$$

Comparando as equações (2.10) e (2.11) com as equações homólogas (1.13) e (1.14) do capítulo anterior, referentes às *leis de transformação espacial das tensões*, verifica-se que existe uma semelhança notável entre aqueles dois grupos de equações. Com efeito, se se definir uma correspondência do tipo seguinte:

$$\begin{array}{llllll} \sigma_{xx} & \leftrightarrow & \varepsilon_{xx} & & \tau_{yz} & \leftrightarrow & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \sigma_{yy} & \leftrightarrow & \varepsilon_{yy} & \text{e} & \tau_{xz} & \leftrightarrow & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \sigma_{zz} & \leftrightarrow & \varepsilon_{zz} & & \tau_{xy} & \leftrightarrow & \frac{1}{2} \gamma_{xy} \end{array}$$

as equações de transformação em cada uma das situações são idênticas duas a duas, pelo que podem extrapolar-se directamente os conceitos de *deformações principais*, de *direcções principais de deformação* e de *invariantes das deformações* em cada ponto do corpo.

No caso de se utilizar a notação vectorial, as equações de transformação das deformações no referencial global (Oxyz) para o referencial particular (Ox'y'z') podem ainda escrever-se sob a forma seguinte:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'x'} \\ \varepsilon_{y'y'} \\ \varepsilon_{z'z'} \\ \gamma_{y'z'} \\ \gamma_{x'z'} \\ \gamma_{x'y'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} & T_{15} & T_{16} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{24} & T_{25} & T_{26} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & T_{34} & T_{35} & T_{36} \\ T_{41} & T_{42} & T_{43} & T_{44} & T_{45} & T_{46} \\ T_{51} & T_{52} & T_{53} & T_{54} & T_{55} & T_{56} \\ T_{61} & T_{62} & T_{63} & T_{64} & T_{65} & T_{66} \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.12)$$

Isto é:

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}'\} = [\mathbf{T}]^T \{\boldsymbol{\varepsilon}\} \quad (2.13)$$

onde $[\mathbf{T}]$ é a matriz de transformação das tensões definida no parágrafo §1.5. do capítulo anterior.

E inversamente, a equação de transformação do vector deformação no referencial particular ($Ox'y'z'$) para o referencial global ($Oxyz$) é:

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [\mathbf{R}]^T \{\boldsymbol{\varepsilon}'\} \quad (2.14)$$

Independentemente do referencial que se utilize, são sempre constantes as seguintes grandezas:

1º Invariante das Deformações

$$\varepsilon_{xx'} + \varepsilon_{y'y'} + \varepsilon_{z'z'} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = J_1 \quad (2.15)$$

2º Invariante das Deformações

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x'x'}\varepsilon_{y'y'} + \varepsilon_{y'y'}\varepsilon_{z'z'} + \varepsilon_{z'z'}\varepsilon_{x'x'} - \frac{\gamma_{x'y'}^2}{4} - \frac{\gamma_{y'z'}^2}{4} - \frac{\gamma_{z'x'}^2}{4} = \\ = \varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{zz}\varepsilon_{xx} - \frac{\gamma_{xy}^2}{4} - \frac{\gamma_{yz}^2}{4} - \frac{\gamma_{zx}^2}{4} = J_2 \end{aligned} \quad (2.16)$$

3º Invariante das Deformações

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x'x'}\varepsilon_{y'y'}\varepsilon_{z'z'} - \varepsilon_{x'x'}\frac{\gamma_{y'z'}^2}{4} - \varepsilon_{y'y'}\frac{\gamma_{z'x'}^2}{4} - \varepsilon_{z'z'}\frac{\gamma_{x'y'}^2}{4} + \frac{\gamma_{x'y'}\gamma_{y'z'}\gamma_{z'x'}}{4} = \\ = \varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{xx}\frac{\gamma_{yz}^2}{4} - \varepsilon_{yy}\frac{\gamma_{zx}^2}{4} - \varepsilon_{zz}\frac{\gamma_{xy}^2}{4} + \frac{\gamma_{xy}\gamma_{yz}\gamma_{zx}}{4} = J_3 \end{aligned} \quad (2.17)$$

O primeiro invariante das deformações em particular, $J_1 = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$, tem um significado físico importante: é numericamente igual à variação relativa de volume no ponto considerado, isto é:

$$J_1 = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \theta = \frac{\Delta V}{V} \quad (2.18)$$

2.1.6. Deformações Principais

Em cada ponto existem pelo menos três direcções mutuamente ortogonais ($\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$), para as quais são nulas as deformações de corte,

sendo estacionários (*máximos ou mínimos*) os valores das respectivas deformações lineares. Essas direcções são as *direcções principais de deformação*, definidas por um sistema de três equações do tipo:

$$\begin{cases} (\varepsilon_{xx} - \varepsilon)l + \frac{1}{2}\gamma_{xy}m + \frac{1}{2}\gamma_{xz}n = 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy}l + (\varepsilon_{yy} - \varepsilon)m + \frac{1}{2}\gamma_{yz}n = 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz}l + \frac{1}{2}\gamma_{yz}m + (\varepsilon_{zz} - \varepsilon)n = 0 \end{cases} \quad (2.19)$$

onde ε é uma das *deformações principais* no ponto considerado. Estas, por sua vez, são determinadas pela seguinte equação característica do terceiro grau:

$$\varepsilon^3 - (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})\varepsilon^2 + (\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{zz}\varepsilon_{xx} - \frac{1}{4}\gamma_{xy}^2 - \frac{1}{4}\gamma_{yz}^2 - \frac{1}{4}\gamma_{zx}^2)\varepsilon - [\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{xx}(\frac{1}{4}\gamma_{yz}^2) - \varepsilon_{yy}(\frac{1}{4}\gamma_{zx}^2) - \varepsilon_{zz}(\frac{1}{4}\gamma_{xy}^2) + \frac{1}{4}\gamma_{xy}\gamma_{yz}\gamma_{zx}] = 0 \quad (2.20)$$

Tal como no caso das tensões, é habitual ordenar as três *deformações principais* num ponto de tal modo que $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$. Relativamente ao triedro ortonormal das três direcções principais de deformação $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$, as equações que exprimem a *extensão linear* segundo uma direcção arbitrária (l, m, n) e a *deformação de corte* segundo duas direcções ortogonais $\vec{n} = (l, m, n)$ e $\vec{t} = (l', m', n')$ são dadas pelas expressões seguintes, conforme decorre directamente das equações (2.7):

$$\varepsilon_n = l^2 \varepsilon_1 + m^2 \varepsilon_2 + n^2 \varepsilon_3 \quad (2.21)$$

$$\gamma_{nm'} = 2(ll' \varepsilon_1 + mm' \varepsilon_2 + nn' \varepsilon_3) \quad (2.22)$$

2.1.7. Deformações Sobre um Plano

No ponto P, Fig.2.8(a), define-se *deformação ou extensão linear sobre um plano π* , à *deformação linear* ε_π segundo a direcção da respectiva normal $\vec{n} = (l, m, n)$, isto é:

$$\varepsilon_\pi = \varepsilon_{xx}l^2 + \varepsilon_{yy}m^2 + \varepsilon_{zz}n^2 + \gamma_{yz}mn + \gamma_{xz}ln + \gamma_{xy}lm \quad (2.23)$$

Define-se *deformação angular, deformação de corte ou distorção sobre o plano π* , segundo a direcção $\vec{d}' = (l', m', n')$ em π , à deformação angular γ'_π entre a normal \vec{n} e a direcção \vec{d}' , isto é:

$$\begin{aligned} \gamma'_\pi = \gamma_{nd'} = 2\varepsilon_{xx}ll' + 2\varepsilon_{yy}mm' + 2\varepsilon_{zz}nn' + \gamma_{yz}(mn' + nm') \\ + \gamma_{xz}(ln' + nl') + \gamma_{xy}(lm' + ml') \end{aligned} \quad (2.24)$$

Tomando um plano paralelo π' , a uma distância infinitesimal h do plano π , o escorregamento relativo (e') de π' sobre π , segundo a direcção de \vec{d}' , está relacionado com a deformação de corte γ'_π através da equação seguinte, Fig. 2.8(b):

$$e' = h\gamma'_\pi \quad (2.25)$$

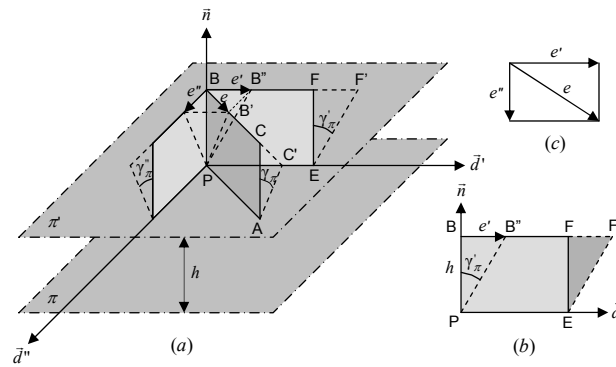


Fig. 2.8 – Deformações sobre um plano π

Igualmente, para uma outra direcção $\vec{d}'' = (l'', m'', n'')$, também sobre o plano π e perpendicular a \vec{d}' , tem-se:

$$\begin{aligned} \gamma''_\pi = 2\varepsilon_{xx}ll'' + 2\varepsilon_{yy}mm'' + 2\varepsilon_{zz}nn'' + \gamma_{yz}(mn'' + nm'') \\ + \gamma_{xz}(ln'' + nl'') + \gamma_{xy}(lm'' + ml'') \end{aligned} \quad (2.26)$$

e o escorregamento (e'') de π' sobre π segundo a direcção \vec{d}'' :

$$e'' = h\gamma''_\pi \quad (2.27)$$

O escorregamento relativo total (e) entre os dois planos π e π' obtém-se pela composição vectorial, Fig.2.8(c):

$$e^2 = e'^2 + e''^2 \quad (2.28)$$

A este escorregamento total corresponde a *deformação de corte* ou *distorção resultante* γ_π sobre o plano π , isto é:

$$\gamma_{\pi} = \frac{e}{h} \quad (2.29)$$

Esta é a deformação angular responsável pela transformação do rectângulo PACB no paralelogramo PAC'B', Fig.2.8(a).

Combinando as equações (2.25)-(2.29) pode então escrever-se:

$$\gamma_{\pi}^2 = \gamma'_{\pi}{}^2 + \gamma''_{\pi}{}^2 \quad (2.30)$$

Substituindo agora as expressões para γ'_{π} e γ''_{π} dadas pelas equações (2.24) e (2.26), tendo em conta a expressão (2.23) para a extensão linear ε_{π} , e atendendo ainda às condições de ortogonalidade entre as direcções \vec{n} , \vec{d}' e \vec{d}'' , isto é:

$$ll'+mm'+nn'=0 ; ll''+mm''+nn''=0 ; l'l''+m'm''+n'n''=0 \quad (2.31)$$

obtém-se a seguinte expressão final para a *deformação de corte* ou *distorção resultante sobre o plano π* :

$$\left(\frac{1}{2}\gamma_{\pi}\right)^2 = (D_x^2 + D_y^2 + D_z^2) - \varepsilon_{\pi}^2 \quad (2.32)$$

onde:

$$\begin{aligned} D_x &= \varepsilon_{xx}l + \frac{1}{2}\gamma_{xy}m + \frac{1}{2}\gamma_{xz}n \\ D_y &= \frac{1}{2}\gamma_{xy}l + \varepsilon_{yy}m + \frac{1}{2}\gamma_{yz}n \\ D_z &= \frac{1}{2}\gamma_{xz}l + \frac{1}{2}\gamma_{yz}m + \varepsilon_{zz}n \end{aligned} \quad (2.33)$$

É de notar que a equação (2.32) é formalmente idêntica à equação (1.11), para as tensões. Com efeito, para se passar de uma daquelas equações para a outra, basta considerar uma correspondência do tipo:

$$\begin{aligned} \sigma &\leftrightarrow \varepsilon_{\pi} \\ \tau &\leftrightarrow \frac{1}{2}\gamma_{\pi} \\ \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{bmatrix} &\leftrightarrow \begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.34)$$

A deformação de corte ($\gamma_\pi/2$) é pois a grandeza equivalente à tensão de corte τ , na análise das tensões. E a direcção segundo a qual actua a deformação de corte γ_π , isto é, a direcção segundo a qual se processa o *escorregamento* dos planos paralelos a π uns sobre os outros, é determinada por expressões semelhantes às das tensões, equações (1.14). Assim, obtém-se:

$$\begin{aligned} l_c &= \frac{(\varepsilon_{xx}l + \frac{1}{2}\gamma_{xy}m + \frac{1}{2}\gamma_{xz}n) - \varepsilon_\pi l}{\frac{1}{2}\gamma_\pi} = \frac{D_x - \varepsilon_\pi l}{\frac{1}{2}\gamma_\pi} \\ m_c &= \frac{(\varepsilon_{yy}m + \frac{1}{2}\gamma_{yz}n + \frac{1}{2}\gamma_{xy}l) - \varepsilon_\pi m}{\frac{1}{2}\gamma_\pi} = \frac{D_y - \varepsilon_\pi m}{\frac{1}{2}\gamma_\pi} \\ n_c &= \frac{(\varepsilon_{zz}n + \frac{1}{2}\gamma_{xz}l + \frac{1}{2}\gamma_{yz}m) - \varepsilon_\pi n}{\frac{1}{2}\gamma_\pi} = \frac{D_z - \varepsilon_\pi n}{\frac{1}{2}\gamma_\pi} \end{aligned} \quad (2.35)$$

onde (l_c, m_c, n_c) são os co-senos directores da direcção sobre o plano de corte, segundo a qual se efectua o *escorregamento*.

Tomando para referência o *triedro principal* em P, as componentes *normal* e *tangencial* da deformação sobre um plano qualquer (π) definido pela respectiva normal $\vec{n}=(l,m,n)$ são dadas, respectivamente, pelas expressões seguintes:

$$\varepsilon_\pi = \varepsilon_1 l^2 + \varepsilon_2 m^2 + \varepsilon_3 n^2 \quad (2.36)$$

$$\left(\frac{1}{2}\gamma_\pi\right)^2 = \varepsilon_1^2 l^2 + \varepsilon_2^2 m^2 + \varepsilon_3^2 n^2 - \varepsilon_\pi^2 \quad (2.37)$$

conforme decorre directamente das equações (2.23) e (2.32).

2.1.8. Valores Estacionários das Deformações Sobre um Plano

Tal como acontece para as tensões, os valores estacionários da deformação normal coincidem com as deformações principais no ponto considerado. E se se tomar $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$, o valor máximo absoluto da deformação linear é igual à maior das deformações principais (ε_1) no ponto considerado.

Quanto aos valores estacionários (*máximos e mínimos*) da deformação de corte, aqueles ocorrem sobre os planos principais de deformação, para os

quais é $\gamma_\pi=0$, e sobre os planos cujas normais bissectam pares de duas quaisquer das direcções principais de deformação. O valor máximo absoluto da distorção será, naturalmente, $\gamma_{\pi(max)}=\varepsilon_1-\varepsilon_3$ e ocorre sobre o plano cuja normal (\vec{n}) tem, relativamente ao triedro principal, os seguintes co-senos directores:

$$\vec{n}=(\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2)$$

2.1.9. Equações de Compatibilidade

As seis componentes da deformação não podem ser fixadas arbitrariamente, devendo ter de satisfazer determinadas condições que garantam a existência das três funções contínuas $u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$ e $w(x,y,z)$, capazes de definirem uma deformação coerente de todo o corpo. Essas condições são traduzidas por seis equações, denominadas *Equações de Compatibilidade* das deformações:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} & 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2} & 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{yx}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2} & 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{zy}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (2.38)$$

2.1.10. Construção de Mohr para as Deformações

Existe uma construção de Mohr para as deformações $(\varepsilon_\pi, \gamma_\pi)$, em tudo semelhante à construção homóloga para as tensões, Fig. 2.10:

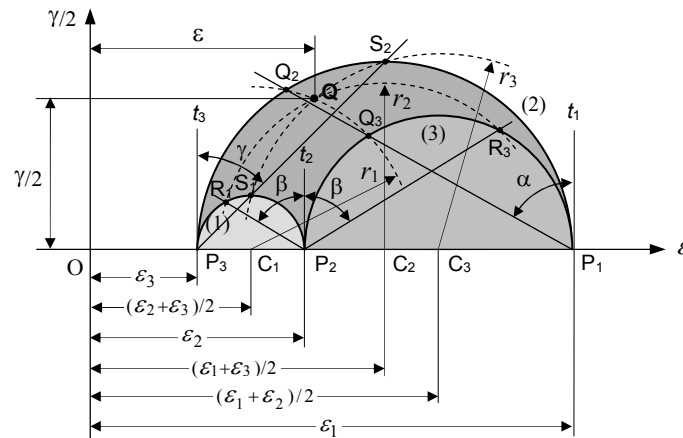


Fig. 2.10 - Construção de Mohr para as deformações

A única diferença relativamente à construção homóloga para as tensões é que as tensões normais (σ) são substituídas por (ϵ_π) e as tensões de corte (τ) por metade das deformações ($\gamma_\pi/2$):

2.1.11. Estado Plano de Deformação

Um campo plano de deformações é caracterizado por serem nulas as componentes ϵ_{zz} , γ_{yz} e γ_{xz} , isto é:

$$\epsilon_{zz} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

e pelas componentes não nulas da deformação e dos deslocamentos serem funções apenas das coordenadas x e y , isto é:

$$\epsilon_{xx} = \epsilon_{xx}(x, y)$$

$$\epsilon_{yy} = \epsilon_{yy}(x, y)$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{xy}(x, y)$$

e

$$u = u(x, y)$$

$$v = v(x, y)$$

$$w = 0$$

Num estado plano de deformação, a expressão (2.23) para a extensão linear (ε) segundo uma direcção paralela ao plano Oxy e inclinada de um ângulo θ relativamente ao eixo dos xx , reduz-se à forma seguinte:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) + \frac{1}{2}(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}) \cos(2\theta) + \frac{1}{2}\gamma_{xy} \sin(2\theta) \quad (2.39)$$

e a deformação de corte, sobre o plano perpendicular a essa mesma direcção, é dada por:

$$\frac{1}{2}\gamma = -\frac{1}{2}(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}) \sin(2\theta) + \frac{1}{2}\gamma_{xy} \cos(2\theta) \quad (2.40)$$

A deformação de corte anula-se para um ângulo θ_p , definido por:

$$\operatorname{tg}(2\theta_p) = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}} \quad (2.41)$$

Existem duas direcções mutuamente perpendiculares que satisfazem a condição (2.41), isto é θ_1 e $\theta_2 = \theta_1 + \pi/2$. São as *direcções principais de deformação* \bar{n}_1 e \bar{n}_2 , que correspondem às extensões principais ε_1 e ε_2 :

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \\ \varepsilon_2 &= \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \end{aligned} \quad (2.42)$$

2.1.12. Deformações Principais Secundárias

Na situação mais geral dum estado de deformação tridimensional, as equações (2.39)-(2.42) continuam válidas para as deformações no plano (x, y) , embora possam ser diferentes de zero as componentes ε_{zz} , γ_{xz} e γ_{yz} . Neste caso as deformações dadas pelas equações (2.42) dizem-se as *deformações principais secundárias* no plano (x, y) e representam-se pelos símbolos ε'_1 e ε'_2 , respectivamente:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1' &= \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + \gamma_{xy}^2} \\ \varepsilon_2' &= \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + \gamma_{xy}^2} \end{aligned} \quad (2.43)$$

As direcções definidas pela equação (2.41) são as *direcções principais secundárias* \bar{n}_1' e \bar{n}_2' da deformação em P, no plano (x, y).

2.1.13. Círculo de Mohr para o Estado Plano de Deformação

À semelhança do que foi feito para o estado plano de tensão, também aqui a *extensão linear* ε e a *distorção* γ podem ser directamente relacionadas com as coordenadas do ponto D sobre o *círculo de Mohr para as deformações*, Fig. 2.11, construído de forma semelhante à do *círculo de Mohr para as tensões*, tendo em conta as equivalências anteriormente referidas.

Assim, as deformações ou extensões lineares são referidas ao eixo das abcissas, positivamente no sentido da esquerda para a direita.

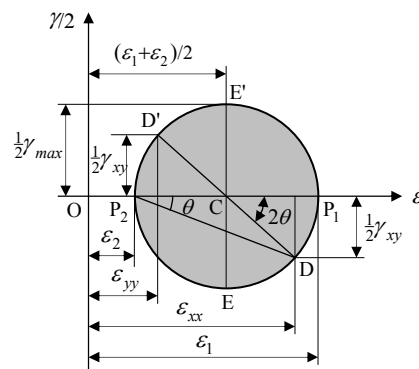


Fig. 2.11 - Construção de Mohr para o estado plano de deformação

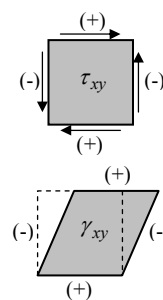


Fig. 2.12 - Convenção de sinais para τ e γ

Quando a deformação angular γ é positiva, ($\gamma_{xy} > 0$), o ponto D representativo da direcção Ox é marcado a uma distância $\frac{1}{2}\gamma_{xy}$ para baixo do eixo horizontal, e o ponto D' representativo da direcção Oy, a uma distância $\frac{1}{2}\gamma_{xy}$ para cima; e vice-versa, quando γ_{xy} é negativa.

De notar que esta convenção para o sinal da deformação de corte coincide com a que foi adoptada na construção do círculo de *Mohr* para as tensões. Este pormenor, relativo à convenção de sinais em ambos os casos, é posto em evidência no esquema apresentado na Fig.2.12.

2.1.14. Análise de Rosetas

Experimentalmente, é mais fácil medir directamente as extensões lineares do que as distorções. Por isso, é frequente pôr-se o problema de determinar as extensões principais num ponto, a partir da medição das extensões lineares $\varepsilon_a, \varepsilon_b, \varepsilon_c$, segundo três direcções distintas sobre o plano de deformação, Fig. 2.13. Supondo que aquelas três direcções fazem ângulos θ_a, θ_b e θ_c , respectivamente, com a direcção do eixo dos xx . De acordo com a equação (2.39), pode escrever-se:

$$\begin{cases} \varepsilon_a = \varepsilon_{xx}\cos^2(\theta_a) + \varepsilon_{yy}\sin^2(\theta_a) + \gamma_{xy}\sin(\theta_a)\cos(\theta_a) \\ \varepsilon_b = \varepsilon_{xx}\cos^2(\theta_b) + \varepsilon_{yy}\sin^2(\theta_b) + \gamma_{xy}\sin(\theta_b)\cos(\theta_b) \\ \varepsilon_c = \varepsilon_{xx}\cos^2(\theta_c) + \varepsilon_{yy}\sin^2(\theta_c) + \gamma_{xy}\sin(\theta_c)\cos(\theta_c) \end{cases} \quad (2.44)$$

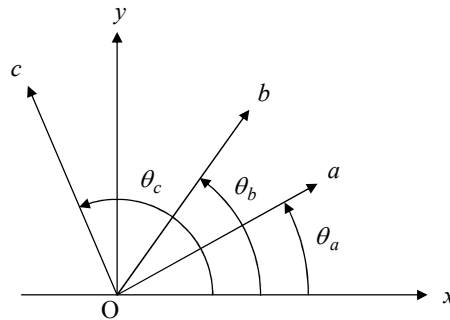


Fig.2.13-Roseta de três elementos arbitrariamente orientados em relação aos eixos coordenados x e y .

Resolvendo o sistema de equações (2.44) relativamente a ε_{xx} , ε_{yy} e γ_{xy} , podem obter-se depois as deformações principais, utilizando as equações (2.41) e (2.42). O problema pode ser mais ou menos complexo, conforme os valores dos ângulos θ_a , θ_b e θ_c das três direcções consideradas. Existem dois casos particulares de interesse prático, correspondentes a (A) roseta rectangular de três elementos e (B) roseta delta de três elementos.

A)- Roseta Rectangular de três elementos

Corresponde à situação em que as três direcções estão espaçadas de 45° . Nas aplicações práticas esta situação é materializado através das rosetas rectangulares de três extensómetros, que têm um aspecto conforme representado na Fig.2.13.

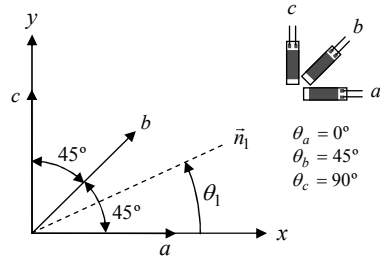


Fig.2.13-Roseta rectangular de três elementos.

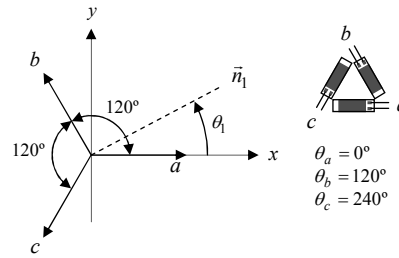


Fig.2.14-Roseta delta (Δ) de três elementos.

Neste caso particular, as deformações principais e as respectivas direcções são dadas pelas equações seguintes (ver problema 2.2.7a):

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_c}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\varepsilon_a - \varepsilon_c)^2 + (2\varepsilon_b - \varepsilon_a - \varepsilon_c)^2} \\ \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_c}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\varepsilon_a - \varepsilon_c)^2 + (2\varepsilon_b - \varepsilon_a - \varepsilon_c)^2} \end{cases} \quad (2.45)$$

e

$$\text{tg}(2\theta_{1,2}) = \frac{2\varepsilon_b - \varepsilon_a - \varepsilon_c}{\varepsilon_a - \varepsilon_c} \quad (2.46)$$

onde o valor do ângulo θ_1 dado pela equação (2.46) é identificado de acordo com as seguintes regras:

- (i) $0 < \theta_1 < \pi/2$, quando $\varepsilon_b > (\varepsilon_a + \varepsilon_c)/2$
- (ii) $-\pi/2 < \theta_1 < 0$, quando $\varepsilon_b < (\varepsilon_a + \varepsilon_c)/2$
- (iii) $\theta_1 = 0$, quando $\varepsilon_a > \varepsilon_c$ e $\varepsilon_a = \varepsilon_1$
- (iv) $\theta_1 = \pm\pi/2$, quando $\varepsilon_a < \varepsilon_c$ e $\varepsilon_a = \varepsilon_2$

B)- Roseta Delta (Δ) de três elementos

Corresponde à situação em que as três direcções estão espaçadas de 45° . Nas aplicações práticas esta situação é materializado através das rosetas rectangulares de três extensómetros, que têm um aspecto conforme representado na Fig.2.14.

Neste caso particular, as deformações principais e as respectivas direcções são dadas pelas equações seguintes (ver problema 2.2.7b):

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_b + \varepsilon_c}{3} + \sqrt{\left[\varepsilon_a - \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_b + \varepsilon_c}{3} \right]^2 + \frac{(\varepsilon_c - \varepsilon_b)^2}{3}} \\ \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_b + \varepsilon_c}{3} - \sqrt{\left[\varepsilon_a - \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_b + \varepsilon_c}{3} \right]^2 + \frac{(\varepsilon_c - \varepsilon_b)^2}{3}} \end{cases} \quad (2.47)$$

e

$$\operatorname{tg}(2\theta_{1,2}) = \frac{\sqrt{3}(\varepsilon_c - \varepsilon_b)}{2\varepsilon_a - (\varepsilon_b + \varepsilon_c)} \quad (2.48)$$

onde o valor do ângulo θ_1 dado pela equação (2.48) é identificado de acordo com as seguintes regras:

- (i) $0 < \theta_1 < \pi/2$, quando $\varepsilon_c > \varepsilon_b$
- (ii) $-\pi/2 < \theta_1 < 0$, quando $\varepsilon_c < \varepsilon_b$
- (iii) $\theta_1 = 0$, quando $\varepsilon_b = \varepsilon_c$ e $\varepsilon_a > \varepsilon_b$
- (iv) $\theta_1 = \pm\pi/2$, quando $\varepsilon_b = \varepsilon_c$ e $\varepsilon_a < \varepsilon_b$

Em alternativa à solução analítica, pode sempre utilizar-se a construção gráfica ilustrada na Fig.2.15:

(i)-Desenhar uma recta horizontal (h) e sobre ela fixar uma origem arbitrária O' ;

(ii)-Marcar sobre essa recta os pontos E_a , E_b e E_c , às distâncias ε_a , ε_b , ε_c , respectivamente, medidas a partir da origem O' ;

(iii)-Pelos pontos E_a , E_b e E_c levantar as rectas e_a , e_b e e_c perpendiculares ao eixo horizontal h ;

(iv)-Sobre a recta e_b , escolher um ponto B' qualquer e desenhar as rectas e'_a e e'_c , inclinadas de ângulos β e γ , para um e outro lado de e_b . Sejam A e C os pontos de intersecção com as verticais e_a e e_c , respectivamente;

(v)-Desenhar a circunferência que passa pelos pontos A, B' e C. Este é o círculo de Mohr para as deformações no ponto considerado. O centro do círculo de Mohr é o ponto C_1 de intersecção das mediatrizes dos segmentos AB' e AC ;

(vi)-Completar o diagrama, desenhando o eixo das abcissas (ϵ) e o eixo das ordenadas ($\frac{1}{2}\gamma$).

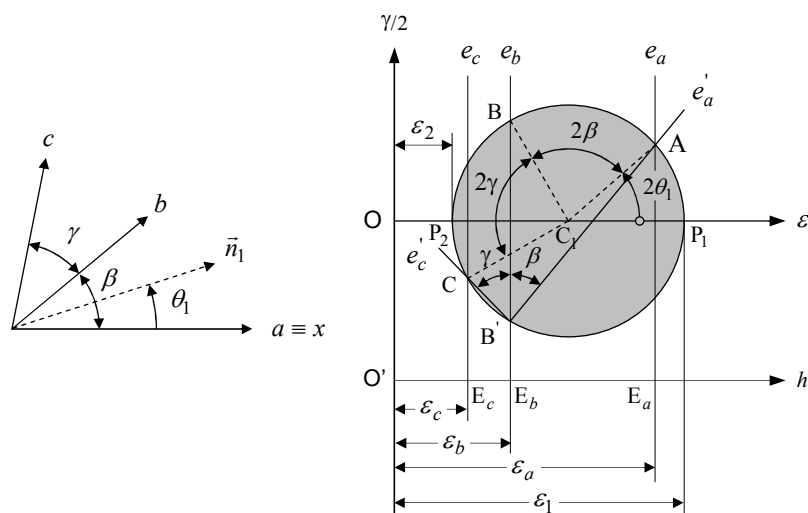


Fig. 2.15-Construção do círculo de Mohr a partir de três deformações lineares

Na Fig. 2.15, os pontos A, B e C são os pontos representativos dos planos perpendiculares às direcções a , b e c , respectivamente. As deformações principais ϵ_1 e ϵ_2 são as abcissas dos pontos de intersecção do círculo de Mohr com o eixo dos $\epsilon\epsilon$. O ângulo θ_1 que define a orientação da direcção principal de deformação \bar{n}_1 relativamente à direcção ($a \equiv x$) é igual a metade do ângulo ao centro P_1C_1A .

2.2. PROBLEMAS RESOLVIDOS**PROBLEMA – 2.2.1.**

O campo dos deslocamentos num meio material é definido pelas seguintes componentes:

$$u = 3x^4 + 2x^2y^2 + x + y + z^3 + 1$$

$$v = 3xy + y^3 + y^2z + z^2 + 1$$

$$w = x^2 + xy + yz + 2zx + y^2 + z^2 + 2$$

a)- Determine o campo das deformações que lhe está associado;

b)- Determine a deformação linear ε , no ponto P de coordenadas (0, 1, 1), segundo a direcção \vec{n} igualmente inclinada relativamente aos três eixos coordenados, isto é, $\vec{n} = (\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3)$.

RESOLUÇÃO:**a)-Campo das Deformações**

O campo das deformações pode obter-se por derivação directa do campo dos deslocamentos, isto é, tendo em conta as expressões dadas para as componentes do vector deslocamento em cada ponto:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = 12x^3 + 4xy^2 + 1$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = 3x + 3y^2 + 2yz$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = 2x + y + 2z$$

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = x + y^2 + 2y + 3z$$

$$\gamma_{xz} = \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 2x + y + 3z^2 + 2z$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 4x^2y + 3y + 1$$

b)-Deformação linear ε

No ponto P \equiv (0, 1, 1), as componentes cartesianas da deformação são as seguintes:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= 1 \\ \varepsilon_{yy} &= 5 \\ \varepsilon_{zz} &= 3 \\ \gamma_{yz} &= \gamma_{zy} = 6 \\ \gamma_{xz} &= \gamma_{zx} = 6 \\ \gamma_{xy} &= \gamma_{yx} = 4\end{aligned}$$

Donde, a matriz das deformações no ponto considerado:

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_{yy} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Utilizando agora a expressão geral para a deformação segundo uma direcção arbitrária:

$$\varepsilon = \varepsilon_{xx}l^2 + \varepsilon_{yy}m^2 + \varepsilon_{zz}n^2 + \gamma_{yz}mn + \gamma_{zx}nl + \gamma_{xy}lm$$

Obtém-se, por substituição dos valores das componentes cartesianas da deformação e dos co-senos directores da direcção $\vec{n} = (\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3)$:

$$\varepsilon(P, \vec{n}) = 1 \times \frac{1}{3} + 5 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{1}{3} + 4 \times \frac{1}{3} + 6 \times \frac{1}{3} + 6 \times \frac{1}{3} = \frac{25}{3}$$

PROBLEMA 2.2.2

Transforme as componentes cartesianas de deformação relativamente a um sistema de eixos global $Oxyz$:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= 3 & \varepsilon_{yy} &= 2 & \varepsilon_{zz} &= -1 \\ \gamma_{xy} &= 3 & \gamma_{yz} &= 2 & \gamma_{zx} &= -1\end{aligned}$$

para um sistema de eixos cartesianos particular $Ox'y'z'$, cuja orientação em relação ao sistema global é definida pelos seguintes ângulos:

ângulo	a)	b)	c)	d)
$(x-x')$	$\pi/4$	$\pi/2$	0	$\pi/2$
$(y-y')$	$\pi/4$	$\pi/2$	$\pi/2$	0
$(z-z')$	0	0	$\pi/2$	$\pi/2$

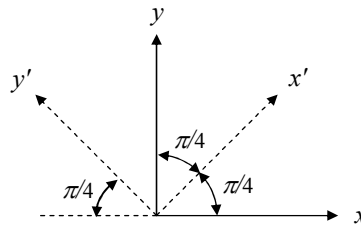
RESOLUÇÃO:

Basta aplicar directamente as equações de transformação das deformações, conforme apresentadas no parágrafo §2.5:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{x'x'} &= \varepsilon_{xx}l_{x'}^2 + \varepsilon_{yy}m_{x'}^2 + \varepsilon_{zz}n_{x'}^2 + \gamma_{yz}m_{x'}n_{x'} + \gamma_{xz}n_{x'}l_{x'} + \gamma_{xy}l_{x'}m_{x'} \\
 \varepsilon_{y'y'} &= \varepsilon_{xx}l_{y'}^2 + \varepsilon_{yy}m_{y'}^2 + \varepsilon_{zz}n_{y'}^2 + \gamma_{yz}m_{y'}n_{y'} + \gamma_{xz}n_{y'}l_{y'} + \gamma_{xy}l_{y'}m_{y'} \\
 \varepsilon_{z'z'} &= \varepsilon_{xx}l_{z'}^2 + \varepsilon_{yy}m_{z'}^2 + \varepsilon_{zz}n_{z'}^2 + \gamma_{yz}m_{z'}n_{z'} + \gamma_{xz}n_{z'}l_{z'} + \gamma_{xy}l_{z'}m_{z'} \\
 \gamma_{y'z'} &= 2\varepsilon_{xx}l_{y'}l_{z'} + 2\varepsilon_{yy}m_{y'}m_{z'} + 2\varepsilon_{zz}n_{y'}n_{z'} + \gamma_{yz}(m_{y'}n_{z'} + n_{y'}m_{z'}) \\
 &\quad + \gamma_{xz}(n_{y'}l_{z'} + l_{y'}n_{z'}) + \gamma_{xy}(l_{y'}m_{z'} + m_{y'}l_{z'}) \\
 \gamma_{x'z'} &= 2\varepsilon_{xx}l_{z'}l_{x'} + 2\varepsilon_{yy}m_{z'}m_{x'} + 2\varepsilon_{zz}n_{z'}n_{x'} + \gamma_{yz}(m_{z'}n_{x'} + n_{z'}m_{x'}) \\
 &\quad + \gamma_{xz}(n_{z'}l_{x'} + l_{z'}n_{x'}) + \gamma_{xy}(l_{z'}m_{x'} + m_{z'}l_{x'}) \\
 \gamma_{x'y'} &= 2\varepsilon_{xx}l_{x'}l_{y'} + 2\varepsilon_{yy}m_{x'}m_{y'} + 2\varepsilon_{zz}n_{x'}n_{y'} + \gamma_{yz}(m_{x'}n_{y'} + n_{x'}m_{y'}) \\
 &\quad + \gamma_{xz}(n_{x'}l_{y'} + l_{x'}n_{y'}) + \gamma_{xy}(l_{x'}m_{y'} + m_{x'}l_{y'})
 \end{aligned}$$

Considerando-se sucessivamente os diferentes casos propostos, tem-se:

a) Os eixos z e z' são coincidentes, pelo que temos a situação representada geometricamente na figura seguinte:



Os co-senos directores dos eixos x' , y' e z' no referencial original $Oxyz$ são, respectivamente:

$$\begin{cases}
 l_{x'} = \cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2 \\
 m_{x'} = \cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2 \\
 n_{x'} = \cos(\pi/2) = 0
 \end{cases}$$

$$\begin{cases}
 l_{y'} = -\cos(\pi/4) = -\sqrt{2}/2 \\
 m_{y'} = +\cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2 \\
 n_{y'} = \cos(\pi/2) = 0
 \end{cases}$$

$$\begin{cases} l_{z'} = \cos(\pi/2) = 0 \\ m_{z'} = \cos(\pi/2) = 0 \\ n_{z'} = \cos(0) = 1 \end{cases}$$

Donde a matriz de transformação de coordenadas:

$$[L] = \begin{bmatrix} l_{x'} & m_{x'} & n_{x'} \\ l_{y'} & m_{y'} & n_{y'} \\ l_{z'} & m_{z'} & n_{z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Substituindo nas equações de transformação de deformações acima, obtém-se:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x'x'} &= 3 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2} - 1 \times 0 + 3 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times 0 - 1 \times 0 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 4 \\ \varepsilon_{y'y'} &= 2 \times \frac{1}{2} - 1 \times 0 + 3 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times 0 - 1 \times 0 \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 3 \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 \\ \varepsilon_{z'z'} &= -1 \times 1 + 3 \times 0 + 2 \times 0 - 1 \times 1 \times 0 + 3 \times 0 \times 0 + 2 \times 0 \times 1 = -1 \\ \gamma_{y'z'} &= 2 \times \left(2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times 0 - 1 \times 0 \times 1 + 3 \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \times 0\right) \\ &\quad + 2 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \times 1 + 0 \times 0\right) - 1 \times \left(0 \times 0 + 1 \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) \\ &\quad + 3 \times \left(\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \times 0 + 0 \times \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3 \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \gamma_{z'x'} &= 2 \times \left(-1 \times 1 \times 0 + 3 \times 0 \times 0 + 2 \times 0 \times \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &\quad - 1 \times \left(1 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 \times 0\right) + 3 \times \left(0 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times 0\right) \\ &\quad + 2 \times \left(0 \times 0 + \frac{\sqrt{2}}{2} \times 1\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \gamma_{x'y'} &= 2 \times \left(3 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \times 0 \times 0\right) \\ &\quad + 3 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \times 0 + \frac{\sqrt{2}}{2} \times 0\right) \\ &\quad - 1 \times \left(0 \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 0 \times \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1 \end{aligned}$$

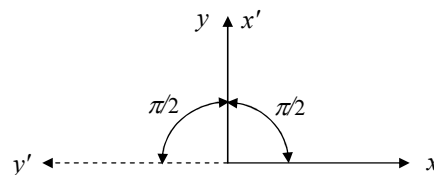
A matriz das deformações no referencial particular $Ox'y'z'$ é, portanto, a seguinte:

$$[e'] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{x'x'} & \frac{1}{2}\gamma_{y'x'} & \frac{1}{2}\gamma_{z'x'} \\ \frac{1}{2}\gamma_{x'y'} & \varepsilon_{y'y'} & \frac{1}{2}\gamma_{z'y'} \\ \frac{1}{2}\gamma_{z'x'} & \frac{1}{2}\gamma_{y'z'} & \varepsilon_{z'z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{3\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{3\sqrt{2}}{4} & -1 \end{bmatrix}$$

ou, utilizando a notação vectorial:

$$\boldsymbol{\varepsilon}' = \{\boldsymbol{\varepsilon}'\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'x'} \\ \varepsilon_{y'y'} \\ \varepsilon_{z'z'} \\ \gamma_{y'z'} \\ \gamma_{x'z'} \\ \gamma_{x'y'} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \\ \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -1 \end{Bmatrix}$$

b)-Neste caso temos também $z' \equiv z$, numa situação conforme representada geometricamente na figura seguinte:



A matriz de transformação de coordenadas é, agora:

$$[\mathbf{L}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Substituindo nas equações de transformação, obtém-se:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x'x'} &= \varepsilon_{yy} \times 1 = 2 \\ \varepsilon_{y'y'} &= \varepsilon_{xx} \times 1 = 3 \\ \varepsilon_{z'z'} &= \varepsilon_{zz} \times 1 = -1 \\ \gamma_{x'y'} &= \gamma_{y'x'} = \gamma_{xy} \times (-1) \times 1 = -3 \\ \gamma_{y'z'} &= \gamma_{z'y'} = \gamma_{xz} \times 1 \times (-1) = 1 \\ \gamma_{x'z'} &= \gamma_{z'x'} = \gamma_{yz} \times 1 \times 1 = 2 \end{aligned}$$

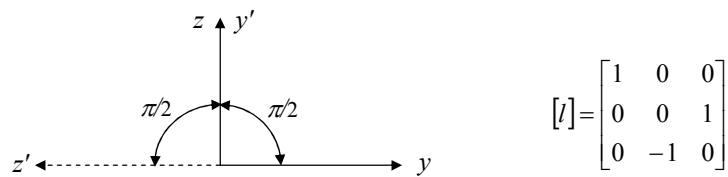
Donde a matriz das deformações no referencial particular $Ox'y'z'$:

$$[\boldsymbol{\varepsilon}'] = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{3}{2} & 3 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

ou o vector das deformações:

$$\boldsymbol{\varepsilon}' = \{\boldsymbol{\varepsilon}'\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'x'} \\ \varepsilon_{y'y'} \\ \varepsilon_{z'z'} \\ \gamma_{y'z'} \\ \gamma_{x'z'} \\ \gamma_{x'y'} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \\ -3 \end{Bmatrix}$$

c)-Agora os eixos x e x' são coincidentes, sendo a situação conforme representada geometricamente na figura seguinte:



Substituindo nas equações de transformação, obtém-se, para este caso:

$$\varepsilon_{x'x'} = \varepsilon_{xx} \times 1 = 3$$

$$\varepsilon_{y'y'} = \varepsilon_{zz} \times 1 = -1$$

$$\varepsilon_{z'z'} = \varepsilon_{yy} \times 1 = 2$$

$$\gamma_{x'y'} = \gamma_{y'x'} = \gamma_{xz} \times 1 = -1$$

$$\gamma_{y'z'} = \gamma_{z'y'} = \gamma_{yz} \times (-1) = -2$$

$$\gamma_{x'z'} = \gamma_{z'x'} = \gamma_{xy} \times (-1) = -3$$

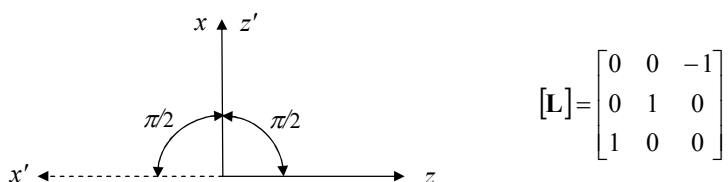
Donde a matriz das deformações no novo referencial $Ox'y'z'$:

$$[\boldsymbol{\varepsilon}'] = \begin{bmatrix} 3 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 & -1 \\ -\frac{3}{2} & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

ou o vector deformação:

$$\boldsymbol{\varepsilon}' = \{\boldsymbol{\varepsilon}'\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'x'} \\ \varepsilon_{y'y'} \\ \varepsilon_{z'z'} \\ \gamma_{y'z'} \\ \gamma_{x'z'} \\ \gamma_{x'y'} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \\ -3 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

d)-Neste caso os eixos y e y' são coincidentes, sendo a situação conforme representada geometricamente na figura seguinte:



Substituindo nas equações de transformação, obtém-se, neste caso:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x'x'} &= \varepsilon_{zz} \times 1 = -1 \\ \varepsilon_{y'y'} &= \varepsilon_{yy} \times 1 = 2 \\ \varepsilon_{z'z'} &= \varepsilon_{xx} \times 1 = 3 \\ \gamma_{x'y'} &= \gamma_{y'x'} = \gamma_{yz} \times (-1) = -2 \\ \gamma_{y'z'} &= \gamma_{z'y'} = \gamma_{xy} \times 1 = 3 \\ \gamma_{x'z'} &= \gamma_{z'x'} = \gamma_{zx} \times (-1) = 1 \end{aligned}$$

Donde a matriz das deformações no referencial particular $Ox'y'z'$:

$$[\boldsymbol{\varepsilon}'] = \begin{bmatrix} -1 & -1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 2 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 3 \end{bmatrix}$$

ou o vector deformação:

$$\boldsymbol{\varepsilon}' = \{\boldsymbol{\varepsilon}'\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'x'} \\ \varepsilon_{y'y'} \\ \varepsilon_{z'z'} \\ \gamma_{y'z'} \\ \gamma_{x'z'} \\ \gamma_{x'y'} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{Bmatrix}$$

PROBLEMA 2.2.3

O campo das deformações num meio material é definido pelas seguintes componentes cartesianas:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= 5 + x^2 + y^2 + x^4 + y^4 \\ \varepsilon_{yy} &= 6 + 3x^2 + 3y^2 + x^4 + y^4 \\ \varepsilon_{zz} &= 3 \\ \gamma_{xy} &= 10 + 4xy(x^2 + y^2 + 2) \\ \gamma_{yz} &= 0 \\ \gamma_{zy} &= 0 \end{aligned}$$

- a)-Determine o campo dos deslocamentos que lhe está associado, admitindo que o deslocamento na origem das coordenadas é nulo;
- b)- Calcule as deformações principais e as respectivas direcções principais na origem das coordenadas

RESOLUÇÃO:**a)- Campo dos Deslocamentos**

Trata-se de determinar as três funções,

$$\begin{aligned} u &= u(x, y, z) \\ v &= v(x, y, z) \\ w &= w(x, y, z), \end{aligned}$$

que caracterizam o campo dos deslocamentos, a partir do conhecimento do campo das deformações, definido pelas respectivas componentes cartesianas dadas no enunciado do problema.

Considerem-se as relações entre os deslocamentos e as deformações:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (a)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (b)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (c)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (d)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (e)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (f)$$

Tomando a equação (a), por exemplo, pode escrever-se:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 5 + x^2 + y^2 + x^4 + y^4$$

Donde, por integração, se obtém:

$$u = 5x + \frac{x^3}{3} + y^2x + \frac{x^5}{5} + xy^4 + f(y, z) \quad (g)$$

Onde $f(y, z)$ é uma função arbitrária das variáveis y e z .

Igualmente, partindo da equação (b), pode escrever-se:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 6 + 3x^2 + 3y^2 + x^4 + y^4$$

Integrando, obtém-se:

$$v = 6y + 3x^2y + y^3 + x^4y + \frac{y^5}{5} + g(x, z) \quad (h)$$

Onde $g(x, z)$ é uma função arbitrária das variáveis x e z .

Também, partindo da equação (c), pode escrever-se:

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 3$$

Donde, por integração, se obtém:

$$w = 3z + h(x, y) \quad (i)$$

Tomando agora em consideração a equação (d), e utilizando as expressões (g) e (h) para u e v , respectivamente, pode escrever-se:

$$10 + 4x^3y + 4xy^3 + 8xy = 2xy + 4xy^3 + \frac{\partial f}{\partial y} + 6xy + 4x^3y + \frac{\partial g}{\partial x}$$

Ou seja,

$$\frac{\partial f(y, z)}{\partial y} + \frac{\partial g(x, z)}{\partial x} = 10 \quad (j)$$

Esta equação só pode ser satisfeita em todo o domínio das variáveis independentes x, y, z se e só se cada um dos termos do primeiro membro depender apenas da variável z , isto é:

$$\frac{\partial f(y, z)}{\partial y} = 10 - \frac{\partial g(x, z)}{\partial x} = F(z) \quad (k)$$

Agora, por integração de cada uma das equações (5), obtém-se:

$$f(y, z) = yF(z) + P(z) \quad (l)$$

$$g(x, z) = -xF(z) + 10x + Q(z) \quad (m)$$

Onde $P(z)$ e $Q(z)$ são duas funções arbitrárias da variável z .

Tomando agora a equação (e) e substituindo v e w pelas expressões (h) e (i), respectivamente, obtém-se:

$$\frac{\partial g(x, z)}{\partial z} + \frac{\partial h(x, y)}{\partial y} = 0 \quad (n)$$

Esta equação só pode ser satisfeita em todo o domínio das variáveis independentes x, y, z se e só se cada um dos termos do primeiro membro depender apenas da variável x , isto é:

$$\frac{\partial g(x, z)}{\partial z} = -\frac{\partial h(x, y)}{\partial y} = G(x) \quad (o)$$

Donde, por integração, se obtém:

$$g(x, z) = zG(x) + R(x) \quad (p)$$

$$h(x, y) = -yG(x) + S(x) \quad (q)$$

Tomando, finalmente, a equação (f) e substituindo u e w pelas expressões (g) e (i), respectivamente, obtém-se:

$$\frac{\partial f(y, z)}{\partial z} + \frac{\partial h(x, y)}{\partial x} = 0 \quad (r)$$

Esta equação só pode ser satisfeita em todo o domínio das variáveis independentes x, y, z se e só se cada um dos termos do primeiro membro depender apenas da variável y , isto é:

$$\frac{\partial f(y, z)}{\partial z} = -\frac{\partial h(x, y)}{\partial x} = H(y) \quad (s)$$

Donde, por integração, se obtém:

$$f(y, z) = zH(y) + T(y) \quad (t)$$

$$h(x, y) = -xH(y) + U(y) \quad (u)$$

Comparando agora as equações (l) e (t), obtém-se:

$$yF(z) + P(z) = zH(y) + T(y)$$

Esta relação deve ser válida para todos os valores de y e z , pelo que deverá ser:

$$\begin{aligned} P(z) &= T(y) = C_1 \\ F(z) &= C_2 z \\ H(y) &= C_2 y \end{aligned} \quad (v)$$

Por outro lado, comparando as equações (q) e (u), obtém-se:

$$-yG(x) + S(x) = -xH(y) + U(y)$$

Esta relação deve ser válida para todos os valores de x e y , pelo que deverá ser:

$$\begin{aligned} S(x) &= U(y) = C_3 \\ G(x) &= C_4 x \\ H(y) &= C_4 y \end{aligned} \quad (w)$$

Finalmente, comparando as equações (m) e (p), obtém-se:

$$-xF(z) + 10x + Q(z) = zG(x) + R(x)$$

Ou seja:

$$-xF(z) + Q(z) = zG(x) + [R(x) - 10x]$$

Esta relação deve ser válida para todos os valores de x e z , pelo que deverá ser:

$$\begin{aligned} R(x) - 10x &= Q(z) = C_5 \\ F(z) &= -C_6 z \\ G(x) &= C_6 x \end{aligned} \quad (x)$$

Em resumo, tem-se as seguintes expressões para as diferentes funções:

$$\begin{aligned} F(z) &= C_2 z = -C_6 z \\ G(x) &= C_4 x = C_6 x \\ H(y) &= C_2 y = C_4 y \end{aligned} \quad (y)$$

Donde: $C_2 = C_4 = C_6 = 0$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} P(z) &= C_1 \\ Q(z) &= C_5 \\ R(z) &= C_5 + 10x \\ S(z) &= C_3 \\ T(z) &= C_1 \\ U(z) &= C_3 \end{aligned} \quad (z)$$

Substituindo agora nas expressões para as funções $f(y,z)$, $g(x,z)$ e $h(x,y)$ e depois nas expressões (g), (h) e (i) para as componentes dos deslocamentos, obtêm-se:

$$\begin{aligned} u &= 5x + \frac{x^3}{3} + y^2 x + \frac{x^5}{5} + xy^4 + C_1 \\ v &= 6y + 3x^2 y + y^3 + x^4 y + \frac{y^5}{5} + 10x + C_5 \\ w &= 3z + C_3 \end{aligned}$$

Atendendo a que a componente vectorial do deslocamento (C_1 , C_5 , C_3) representa uma translação rígida, que pode ser retirada, obtêm-se as seguintes expressões finais para o campo dos deslocamentos:

$$\begin{aligned} u &= 5x + \frac{x^3}{3} + y^2 x + \frac{x^5}{5} + xy^4 \\ v &= 6y + 3x^2 y + y^3 + x^4 y + \frac{y^5}{5} + 10x \\ w &= 3z \end{aligned}$$

b)- Deformações Principais e Direcções na Origem das Coordenadas

Na origem das coordenadas ($x = y = z = 0$) tem-se:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= 5 \quad , \quad \varepsilon_{yy} = 6 \quad , \quad \varepsilon_{zz} = 3 \\ \gamma_{yz} &= 0 \quad , \quad \gamma_{xz} = 0 \quad , \quad \gamma_{xy} = 10 \end{aligned}$$

donde a matriz das deformações na origem:

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 0 \\ 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Da análise da matriz das deformações pode concluir-se imediatamente que, por serem nulas ambas as componentes de corte em z ($\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$), a direcção do eixo dos zz é uma direcção principal de deformação, sendo a respectiva deformação principal igual a 3 (isto é $\varepsilon_{zz} = 0$).

De qualquer forma, as deformações principais no ponto considerado obtêm-se resolvendo a equação característica:

$$\begin{vmatrix} 5 - \varepsilon & 5 & 0 \\ 5 & 6 - \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 3 - \varepsilon \end{vmatrix} = 0$$

ou seja, desenvolvendo o determinante segundo a última linha:

$$(3 - \varepsilon)[(5 - \varepsilon)(6 - \varepsilon) - 25] = 0$$

ou ainda:

$$(3 - \varepsilon)(\varepsilon^2 - 11\varepsilon + 5) = 0$$

cujas soluções são as três deformações principais na origem das coordenadas:

$$\varepsilon_1 = 10.5 \quad ; \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_{zz} = 3 \quad ; \quad \varepsilon_3 = 0.5$$

Já se sabe que a direcção principal correspondente a $\varepsilon_2 = \varepsilon_{zz} = 3$ é o eixo dos zz , pelo que se pode escrever, desde já:

$$\vec{n}_2 = (0, 0, 1)$$

quanto às restantes duas direcções principais, estas obtêm-se resolvendo o sistema habitual:

$$\begin{cases} (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_n)l + \frac{1}{2}\gamma_{xy}m + \frac{1}{2}\gamma_{xz}n = 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy}l + (\varepsilon_{yy} - \varepsilon_n)m + \frac{1}{2}\gamma_{yz}n = 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz}l + \frac{1}{2}\gamma_{yz}m + (\varepsilon_{zz} - \varepsilon_n)n = 0 \end{cases}$$

Neste caso tem-se, na origem das coordenadas:

$$\begin{cases} (5 - \varepsilon_n)l + 5m + 0n = 0 \\ 5l + (6 - \varepsilon_n)m + 0n = 0 \\ 0l + 0m + (3 - \varepsilon_n)n = 0 \end{cases}$$

Para calcular \vec{n}_1 , substitui-se $\varepsilon_n = \varepsilon_1$:

$$\begin{cases} (5 - 10.5)l + 5m & = 0 \\ 5l + (6 - 10.5)m & = 0 \\ n & = 0 \end{cases}$$

ou seja:

$$\begin{cases} -5.5l + 5m & = 0 \\ 5l + 4.5m & = 0 \\ n & = 0 \end{cases}$$

Donde, explicitando a solução em termos de l :

$$M = 1.1l \quad ; \quad n = 0$$

Um vector com a direcção \vec{n}_1 obtém-se, por exemplo, fazendo $l = 1$:

$$\vec{V}_1 = (1, 1.1, 0)$$

Donde, o vector unitário \vec{n}_1 :

$$\vec{n}_1 = \frac{\vec{V}_1}{|\vec{V}_1|} = \frac{(1, 1.1, 0)}{1.487} = (0.67, 0.74, 0)$$

Igualmente para a direcção principal \vec{n}_3 , substitui-se $\varepsilon_n = \varepsilon_3$, isto é:

$$\begin{cases} (5 - 0.5)l + 5m & = 0 \\ 5l + (6 - 0.5)m & = 0 \\ n & = 0 \end{cases}$$

Ou seja:

$$\begin{cases} 4.5l + 5m & = 0 \\ 5l + 5.5m & = 0 \\ n & = 0 \end{cases}$$

Donde, explicitando a solução em termos de l :

$$m = -0.9l \quad ; \quad n = 0$$

Um vector com a direcção \vec{n}_3 obtém-se, por exemplo, fazendo $l = 1$:

$$\vec{V}_3 = (1, -0.9, 0)$$

Donde, o vector unitário \bar{n}_3 :

$$\bar{n}_3 = \frac{\vec{V}_3}{|\vec{V}_3|} = \frac{(1, -0.9, 0)}{1.345} = (0.74, -0.67, 0)$$

PROBLEMA 2.2.4

O estado de deformação num ponto P dum corpo material é definido pelas seguintes componentes cartesianas,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= 80 \times 10^{-6} & \varepsilon_{yy} &= 60 \times 10^{-6} & \varepsilon_{zz} &= 30 \times 10^{-6} \\ \gamma_{xy} &= 0 & \gamma_{yz} &= 0 & \gamma_{zx} &= -20 \times 10^{-6} \end{aligned}$$

- a)- Demonstre que xz é um dos planos principais de deformação no ponto P em questão;
- b)- Calcule as deformações principais e as respectivas direcções principais no ponto considerado.

RESOLUÇÃO:

a)–O plano xz é plano principal de deformação

Com efeito, da análise da matriz das deformações no ponto considerado:

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} 80 & 0 & -10 \\ 0 & 60 & 0 \\ -10 & 0 & 30 \end{bmatrix} \times 10^{-6}$$

Constata-se que são nulas ambas as componentes de corte em y , ($\gamma_{xy} = \gamma_{yz} = 0$). Isso significa que a direcção do eixo dos yy , isto é, $\bar{n} = (0, 1, 0)$ é uma direcção principal de deformação e, portanto, o plano que lhe é perpendicular (plano xz) é um plano principal de deformação no ponto considerado. A deformação principal correspondente é $\varepsilon = \varepsilon_{yy} = 60 \times 10^{-6}$

b)–Cálculo das Deformações Principais e respectivas Direcções

As deformações principais e respectivas direcções principais de deformação poderiam calcular-se seguindo a metodologia geral que foi utilizada para resolver a alínea **b)** do problema anterior.

Uma maneira alternativa de resolver o problema é a seguinte:

Dado que uma das direcções principais está já identificada como sendo o eixo dos yy , as outras duas direcções estarão no plano principal que lhe está associado, isto é, o plano yz . Podem ser, portanto, determinadas utilizando as fórmulas para o cálculo das *deformações principais secundárias* no plano xz , isto é:

$$\varepsilon_1' = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{zz}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{zz}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xz}}{2}\right)^2}$$

$$\varepsilon_2' = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{zz}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{zz}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xz}}{2}\right)^2}$$

$$\operatorname{tg}(2\theta_p) = \frac{\gamma_{xz}}{(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{zz})}$$

Onde θ_p ($p=1,2$) são os ângulos das duas *direcções principais secundárias* relativamente ao eixo dos xx .

Substituindo os valores correspondentes para ε_{xx} , ε_{zz} e γ_{xz} , obtém-se:

$$\varepsilon_1' = 82 \times 10^{-6}$$

$$\varepsilon_2' = 28 \times 10^{-6}$$

$$\operatorname{tg}(2\theta_p) = \frac{-20}{50} = -0,4$$

Donde:

$$\theta_1 = -10,9^\circ \quad \text{e} \quad \theta_2 = +79,1^\circ$$

As deformações principais no ponto considerado são, então:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1' = 82 \times 10^{-6}$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_{yy} = 60 \times 10^{-6}$$

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_2' = 28 \times 10^{-6}$$

E as três direcções principais de deformação são, respectivamente:

$$\vec{n}_1 = [\cos(-10,9^\circ), 0, \operatorname{sen}(-10,9^\circ)] = (0,98, 0, -0,19)$$

$$\vec{n}_2 = \vec{j} = (0, 1, 0)$$

$$\vec{n}_3 = [\cos(79,1^\circ), 0, \operatorname{sen}(79,1^\circ)] = (0,19, 0, 0,98)$$

PROBLEMA 2.2.5

O estado de deformação num ponto P dum corpo material é definido pelas seguintes componentes cartesianas,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= -150 \times 10^{-6} & \varepsilon_{yy} &= -150 \times 10^{-6} & \varepsilon_{zz} &= -300 \times 10^{-6} \\ \gamma_{xy} &= 100 \times 10^{-6} & \gamma_{yz} &= 0 & \gamma_{zx} &= 0 \end{aligned}$$

- a)-Determine as deformações principais e as respectivas direcções principais no ponto considerado;
- b)-Determine as componentes normal e de corte da deformação sobre um plano π cuja normal está igualmente inclinada sobre os três eixos coordenados ($l = m = n = \sqrt{3}/3$);
- c)-Identifique os planos octaédricos no ponto considerado e, sobre eles, determine as respectivas deformações normal e de corte.

RESOLUÇÃO:**a)-Deformações principais no ponto P**

Pelo facto de serem nulas as componentes de corte no plano xy , isto é $\gamma_{yz} = \gamma_{zy} = 0$, isso significa que esse é um plano principal de deformação, sendo a respectiva normal (o eixo dos zz) uma direcção principal de deformação no ponto considerado. Assim sendo, fica desde já identificada uma das deformações principais no ponto P, isto é:

$$\varepsilon_{zz} = -300 \times 10^{-6}, \text{ com } \bar{n} = (0, 0, 1)$$

De qualquer forma, as deformações principais obtêm-se resolvendo a equação característica em ε :

$$\begin{vmatrix} (\varepsilon_{xx} - \varepsilon) & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & (\varepsilon_{yy} - \varepsilon) & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & (\varepsilon_{zz} - \varepsilon) \end{vmatrix} = 0$$

Ou seja, substituindo os valores para as componentes cartesianas da deformação neste caso:

$$\begin{vmatrix} (-150 \times 10^{-6} - \varepsilon) & 50 \times 10^{-6} & 0 \\ 50 \times 10^{-6} & (-150 \times 10^{-6} - \varepsilon) & 0 \\ 0 & 0 & (-300 \times 10^{-6} - \varepsilon) \end{vmatrix} = 0$$

Desenvolvendo o determinante segundo a última linha, obtém-se:

$$(-300 \times 10^{-6} - \varepsilon) \times [(-300 \times 10^{-6} - \varepsilon)^2 - (50 \times 10^{-6})^2] = 0$$

Ou seja:

$$(-300 \times 10^{-6} - \varepsilon) \times (-200 \times 10^{-6} - \varepsilon) \times (-100 \times 10^{-6} - \varepsilon) = 0$$

Portanto, as deformações principais:

$$\varepsilon_1 = -100 \times 10^{-6}; \quad \varepsilon_2 = -200 \times 10^{-6}; \quad \varepsilon_3 = -300 \times 10^{-6}$$

Quanto às direcções principais de deformação, podemos desde já escrever que:

$$\bar{n}_3 = (0, 0, 1)$$

E as outras duas direcções principais, isto é \bar{n}_2 e \bar{n}_1 , obtêm-se substituindo ε por ε_2 e ε_1 , sucessivamente, nas equações seguintes:

$$\begin{cases} (\varepsilon_{xx} - \varepsilon)l + \frac{1}{2}\gamma_{xy}m + \frac{1}{2}\gamma_{xz}n = 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy}l + (\varepsilon_{yy} - \varepsilon)m + \frac{1}{2}\gamma_{yz}n = 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz}l + \frac{1}{2}\gamma_{yz}m + (\varepsilon_{zz} - \varepsilon)n = 0 \end{cases}$$

Assim, para \bar{n}_2 tem-se:

$$\begin{cases} (-150 + 200) \times 10^{-6}l + 50 \times 10^{-6}m = 0 \\ 50 \times 10^{-6}l + (-150 + 200) \times 10^{-6}m = 0 \\ n = 0 \end{cases}$$

Ou seja:

$$\begin{cases} l + m = 0 \\ n = 0 \end{cases} \Rightarrow \bar{n}_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$$

e para \bar{n}_1 tem-se, igualmente:

$$\begin{cases} (-150 + 100) \times 10^{-6}l + 50 \times 10^{-6}m = 0 \\ 50 \times 10^{-6}l + (-150 + 100) \times 10^{-6}m = 0 \\ n = 0 \end{cases}$$

Ou seja:

$$\begin{cases} l - m = 0 \\ n = 0 \end{cases} \Rightarrow \bar{n}_3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$$

b)–Deformação normal e deformação de corte sobre o plano π

O plano π fica definido pela respectiva normal $\vec{n} = (l, m, n)$, em que, no presente caso, os cossenos directores satisfazem a condição:

$$l = m = n = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

A deformação normal ε_π sobre o plano π obtém-se através da expressão geral:

$$\varepsilon_\pi = \varepsilon_{xx}l^2 + \varepsilon_{yy}m^2 + \varepsilon_{zz}n^2 + \gamma_{xy}lm + \gamma_{yz}mn + \gamma_{zx}nl$$

Ou seja, substituindo:

$$\varepsilon_\pi = \frac{1}{3}(-150 - 150 - 300 + 100) \times 10^{-6} = -166,7 \times 10^{-6}$$

Quanto à deformação de corte γ_π sobre o plano π , tem-se:

$$\left(\frac{1}{2}\gamma_\pi\right)^2 = (D_x^2 + D_y^2 + D_z^2) - (\varepsilon_\pi)^2$$

Onde:

$$D_x = \varepsilon_{xx}l + \frac{1}{2}\gamma_{xy}m + \frac{1}{2}\gamma_{xz}n = (-150 + 50)\frac{\sqrt{3}}{3} \times 10^{-6} = -\frac{100\sqrt{3}}{3} \times 10^{-6}$$

$$D_y = \frac{1}{2}\gamma_{xy}l + \varepsilon_{yy}m + \frac{1}{2}\gamma_{yz}n = (50 - 150)\frac{\sqrt{3}}{3} \times 10^{-6} = -\frac{100\sqrt{3}}{3} \times 10^{-6}$$

$$D_z = \frac{1}{2}\gamma_{xz}l + \frac{1}{2}\gamma_{yz}m + \varepsilon_{zz}n = -100\sqrt{3} \times 10^{-6}$$

Ou seja:

$$\left(\frac{1}{2}\gamma_\pi\right)^2 = \left(\frac{10^4}{3} + \frac{10^4}{3} + 3 \times 10^4\right) \times 10^{-12} - \frac{25 \times 10^4}{9} \times 10^{-12}$$

Isto é:

$$\gamma_\pi = -188,6 \times 10^{-6}$$

c)–Planos Octaédricos

Os planos octaédricos ficam identificados pelas respectivas normais, as quais estão igualmente inclinadas relativamente às três direcções principais \vec{n}_1 , \vec{n}_2 e \vec{n}_3 no ponto considerado. Assim sendo, pode escrever-se:

$$\vec{n}_{oct} = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}\vec{n}_1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}\vec{n}_2 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}\vec{n}_3$$

Ou seja:

$$\vec{n}_{oct} = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}(0,0,1) \pm \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) \pm \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$$

Donde as 4 direcções octaédricas possíveis:

$$\begin{aligned} + + + &\Rightarrow \vec{n}_{oct}^{(1)} = \left(0, 0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, 0\right) + \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, 0\right) = \left(\frac{\sqrt{6}}{3}, 0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \\ + + - &\Rightarrow \vec{n}_{oct}^{(2)} = \left(0, 0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, 0\right) - \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, 0\right) = \left(0, -\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \\ + - + &\Rightarrow \vec{n}_{oct}^{(3)} = \left(0, 0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) - \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, 0\right) + \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, 0\right) = \left(0, \frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \\ + - - &\Rightarrow \vec{n}_{oct}^{(4)} = \left(0, 0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) - \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, 0\right) - \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, 0\right) = \left(-\frac{\sqrt{6}}{3}, 0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \end{aligned}$$

Quanto aos valores das deformações octaédricas, estes obtêm-se a partir das expressões gerais:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{oct} &= \varepsilon_m = \frac{1}{3}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) \\ \gamma_{oct} &= \frac{2}{3}\sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2} \end{aligned}$$

Ou seja, substituindo os valores para ε_1 , ε_2 e ε_3 :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{oct} &= -200 \times 10^{-6} \\ \gamma_{oct} &= \frac{2}{3}\sqrt{10000 + 10000 + 40000} \times 10^{-6} = 163,3 \times 10^{-6} \end{aligned}$$

PROBLEMA 2.2.6

Reconsidere o **PROBLEMA 2.2.5**, agora para o caso em que o estado de deformação no ponto P é definido pelas seguintes componentes cartesianas,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= 30 \times 10^{-6} & \varepsilon_{yy} &= 30 \times 10^{-6} & \varepsilon_{zz} &= 60 \times 10^{-6} \\ \gamma_{xy} &= -20 \times 10^{-6} & \gamma_{yz} &= 0 & \gamma_{zx} &= 0 \end{aligned}$$

Determine, recorrendo directamente à construção dos círculos de Mohr, as deformações principais e as respectivas direcções principais no ponto considerado.

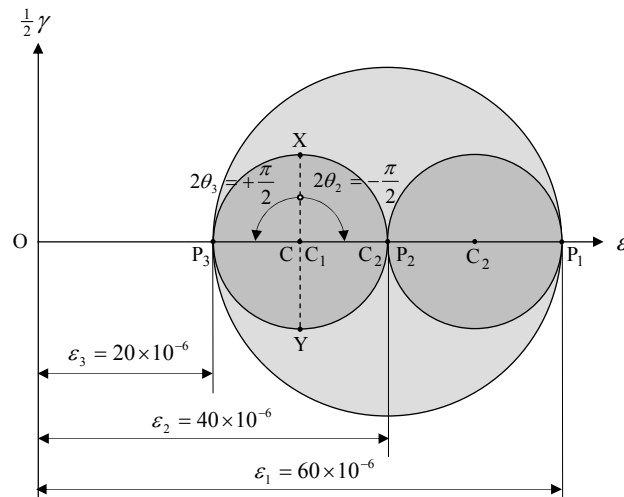
RESOLUÇÃO:

Sabendo, à partida, que o plano xy é um dos planos principais de deformação, podemos desenvolver a construção dos círculos de Mohr da seguinte maneira:

1)-No diagrama de Mohr ($\varepsilon, \frac{1}{2}\gamma$) marquem-se as posições dos pontos X e Y representativos dos pares $(\varepsilon_{xx}, -\frac{1}{2}\gamma_{xy})$ e $(\varepsilon_{yy}, \frac{1}{2}\gamma_{yx})$, respectivamente, isto é, no caso em questão, $X \equiv (30, 10)$ e $Y \equiv (30, -10)$;

2)-O segmento DD' é um diâmetro do círculo de Mohr no plano principal xy e a sua intersecção com o eixo das abcissas define a posição do centro C desse círculo de Mohr;

3)-Com centro em C desenha-se o círculo de Mohr a passar pelos pontos X e Y;

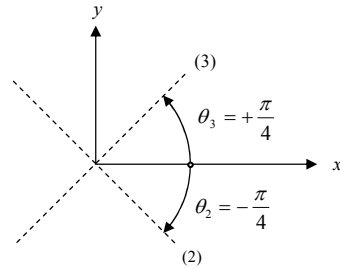


4)-A circunferência de Mohr intersecta o eixo ε em dois pontos cujas abcissas definem precisamente os valores $\varepsilon = 20 \times 10^{-6}$ e $\varepsilon = 40 \times 10^{-6}$ das deformações principais no plano xy, respectivamente. Como estes valores são ambos inferiores à 3ª deformação principal já conhecida ($\varepsilon_{zz} = 60 \times 10^{-6}$), podemos então escrever:

$$\varepsilon_1 = 60 \times 10^{-6}; \quad \varepsilon_2 = 40 \times 10^{-6}; \quad \varepsilon_3 = 20 \times 10^{-6}$$

e identificar assim os pontos P_1, P_2 e P_3 que definem os diâmetros dos três círculos de Mohr e os respectivos centros C_1, C_2 e C_3 (ver figura);

5)-As orientações das direcções principais (2) e (3) no plano xy (com versores \vec{n}_2 e \vec{n}_3 , respectivamente) ficam definidas pelos ângulos θ_2 e θ_3 , relativamente ao eixo dos xx, medindo no diagrama os ângulos $2\theta_1$ e $2\theta_2$, a partir do raio CD para os pontos P_2 e P_3 , respectivamente. Por medição directa sobre o diagrama, tira-se: $2\theta_2 = -\pi/2$ (no sentido do movimento dos ponteiros do relógio) e $2\theta_3 = +\pi/2$ (no sentido contrário ao do movimento dos ponteiros do



Tem-se, portanto:

$$\begin{aligned} \vec{n}_1 &= (0, 0, 1) \\ \vec{n}_2 &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) \\ \vec{n}_3 &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) \end{aligned}$$

PROBLEMA 2.2.7

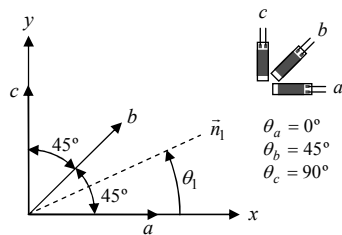
Partindo do conhecimento das deformações lineares segundo três direcções distintas (a, b, c) num ponto da superfície dum corpo material, deduza as expressões das deformações principais e respectivas direcções no ponto considerado, para os seguintes casos particulares:

- a)- As direcções a, b e c estão angularmente espaçadas de 45° (roseta rectangular).
- b)- As direcções a, b e c estão angularmente espaçadas de 120° (roseta delta).

RESOLUÇÃO

a)- Roseta rectangular

Trata-se da situação representada na figura a seguir. Aplicando directamente as equações (2.44) referidas no parágrafo §2.12 da introdução teórica, e tomando $\beta = \gamma = 45^\circ$, obtêm-se as deformações $\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}$ e γ_{xy} :



$$\begin{cases} \epsilon_{xx} = \epsilon_a \\ \epsilon_{yy} = \epsilon_b \\ \gamma_{xy} = 2\epsilon_b - \epsilon_a - \epsilon_c \end{cases}$$

As deformações principais podem obter-se a partir das equações (2.42):

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \\ \epsilon_2 &= \frac{\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \end{aligned}$$

Donde, substituindo:

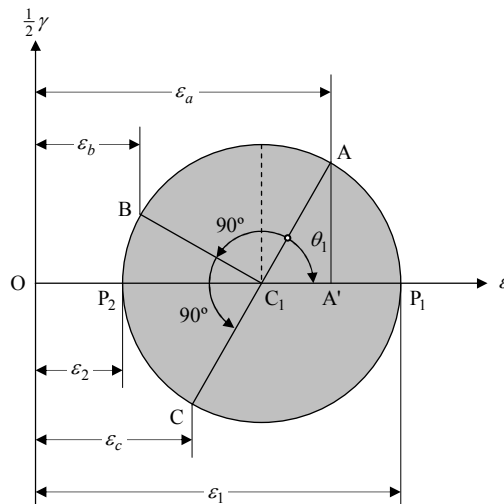
$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_c}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\varepsilon_a - \varepsilon_c)^2 + (2\varepsilon_b - \varepsilon_a - \varepsilon_c)^2} \\ \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_c}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\varepsilon_a - \varepsilon_c)^2 + (2\varepsilon_b - \varepsilon_a - \varepsilon_c)^2} \end{cases}$$

Por outro lado, substituindo os valores para ε_{xx} , ε_{yy} e γ_{xy} na equação (2.41), obtém-se:

$$\operatorname{tg}(2\theta_p) = \frac{2\varepsilon_b - \varepsilon_a - \varepsilon_c}{\varepsilon_a - \varepsilon_c}$$

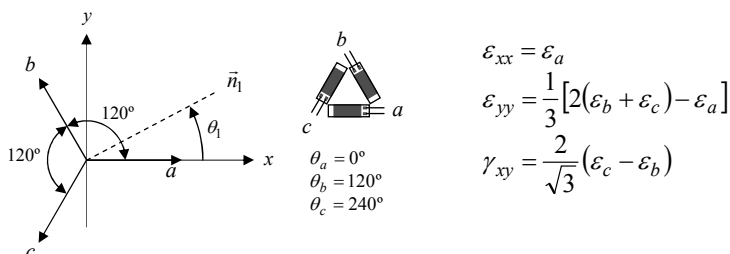
A solução da equação anterior para a determinação do ângulo θ_p é constituída por dois valores, no intervalo $[-\pi/2, +\pi/2]$. Seja θ_1 o ângulo da direcção associada à maior deformação principal (ε_1) relativamente ao eixo dos xx (ou extensómetro a) e $\theta_2 = \theta_1 \pm \pi/2$ o ângulo da direcção associada à menor deformação principal (ε_2), também em relação ao mesmo eixo dos xx . Da análise do diagrama do círculo de Mohr representado na figura a seguir, resulta que a localização do ângulo θ_1 , no intervalo $[-\pi/2, +\pi/2]$, é feita com base nas seguintes regras:

- (i) $0 < \theta_1 < \pi/2$, quando $\varepsilon_b > (\varepsilon_a + \varepsilon_c)/2$
- (ii) $-\pi/2 < \theta_1 < 0$, quando $\varepsilon_b < (\varepsilon_a + \varepsilon_c)/2$
- (iii) $\theta_1 = 0$, quando $\varepsilon_a > \varepsilon_c$ e $\varepsilon_a = \varepsilon_1$
- (iv) $\theta_1 = \pm\pi/2$, quando $\varepsilon_a < \varepsilon_c$ e $\varepsilon_a = \varepsilon_2$



b)- Roseta equiangular (Δ) de três elementos

Os três extensómetros estão orientados segundo os lados dum triângulo equilátero, conforme indicado na figura a seguir. A orientação dos eixos dos extensómetros é aqui mais equilibrada do que no caso da roseta rectangular, mas as fórmulas resultantes para o cálculo das tensões principais e respectivas orientações são mais complexas. Tomando o eixo de referência Ox coincidente com a direcção do extensómetro (a), das equações (2.44) resulta (fazendo $\beta = \gamma = 120^\circ$):



As deformações principais podem obter-se a partir das equações (2.42):

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

Donde, substituindo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_a + \frac{1}{3}[2(\varepsilon_b + \varepsilon_c) - \varepsilon_a]}{2} \\ \quad + \frac{1}{2} \sqrt{\left\{ \varepsilon_a - \frac{1}{3}[2(\varepsilon_b + \varepsilon_c) - \varepsilon_a] \right\}^2 + \frac{4}{3}(\varepsilon_c - \varepsilon_b)^2} \\ \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_a + \frac{1}{3}[2(\varepsilon_b + \varepsilon_c) - \varepsilon_a]}{2} \\ \quad - \frac{1}{2} \sqrt{\left\{ \varepsilon_a - \frac{1}{3}[2(\varepsilon_b + \varepsilon_c) - \varepsilon_a] \right\}^2 + \frac{4}{3}(\varepsilon_c - \varepsilon_b)^2} \end{array} \right.$$

As expressões anteriores podem ainda simplificar-se:

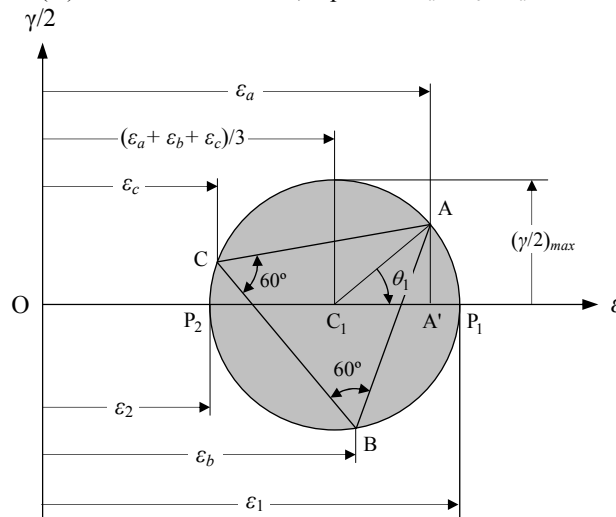
$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_b + \varepsilon_c}{3} + \sqrt{\left[\varepsilon_a - \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_b + \varepsilon_c}{3} \right]^2 + \frac{(\varepsilon_c - \varepsilon_b)^2}{3}} \\ \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_b + \varepsilon_c}{3} - \sqrt{\left[\varepsilon_a - \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_b + \varepsilon_c}{3} \right]^2 + \frac{(\varepsilon_c - \varepsilon_b)^2}{3}} \end{cases}$$

Por outro lado, substituindo os valores para ε_{xx} , ε_{yy} e γ_{xy} na equação (2.41), obtém-se:

$$\operatorname{tg}(2\theta_p) = \frac{(2/\sqrt{3})(\varepsilon_c - \varepsilon_b)}{2\left[\varepsilon_a - \frac{1}{3}(\varepsilon_a + \varepsilon_b + \varepsilon_c)\right]} = \frac{\sqrt{3}(\varepsilon_c - \varepsilon_b)}{2\varepsilon_a - (\varepsilon_b + \varepsilon_c)}$$

A solução da equação anterior para a determinação do ângulo θ_p é constituída por dois valores, no intervalo $[-\pi/2, +\pi/2]$. Seja θ_1 o ângulo da direcção associada à maior deformação principal (ε_1) relativamente ao eixo dos xx (ou extensómetro a) e $\theta_2 = \theta_1 \pm \pi/2$ o ângulo da direcção associada à menor deformação principal (ε_2), também em relação ao mesmo eixo dos xx . Da análise do diagrama do círculo de Mohr representado na figura a seguir, resulta que a localização do ângulo θ_1 , no intervalo $[-\pi/2, +\pi/2]$, é feita com base nas seguintes regras:

- (i) $0 < \theta_1 < \pi/2$, quando $\varepsilon_b > (\varepsilon_a + \varepsilon_c)/2$
- (ii) $-\pi/2 < \theta_1 < 0$, quando $\varepsilon_b < (\varepsilon_a + \varepsilon_c)/2$
- (iii) $\theta_1 = 0$, quando $\varepsilon_a > \varepsilon_c$ e $\varepsilon_a = \varepsilon_1$
- (iv) $\theta_1 = \pm\pi/2$, quando $\varepsilon_a < \varepsilon_c$ e $\varepsilon_a = \varepsilon_2$



PROBLEMA 2.2.8

Num ponto P da superfície livre dum corpo material, mediram-se as deformações lineares segundo três direcções a, b, c espaçadas de 45° :

$$\varepsilon_a = 1000 \times 10^{-6}; \quad \varepsilon_b = 400 \times 10^{-6}; \quad \varepsilon_c = 200 \times 10^{-6}$$

- Determine as deformações principais no ponto considerado e as respectivas orientações;
- Determine o valor da deformação de corte máxima e a orientação do plano segundo o qual ela se processa
- Resolva as alíneas anteriores recorrendo exclusivamente à construção dos círculos de Mohr.

RESOLUÇÃO:**a)–Deformações principais no ponto P**

No ponto considerado são conhecidas as seguintes deformações lineares segundo três direcções angularmente espaçadas de 45° são as seguintes:

$$\varepsilon_a = +1000 \times 10^{-6}$$

$$\varepsilon_b = +400 \times 10^{-6}$$

$$\varepsilon_c = +200 \times 10^{-6}$$

Neste caso ($\beta = \gamma = 45^\circ$), as deformações principais são dadas pelas expressões seguintes (ver problema anterior):

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_c}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\varepsilon_a - \varepsilon_c)^2 + (2\varepsilon_b - \varepsilon_a - \varepsilon_c)^2}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_c}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\varepsilon_a - \varepsilon_c)^2 + (2\varepsilon_b - \varepsilon_a - \varepsilon_c)^2}$$

Donde, substituindo pelos valores correspondentes:

$$\varepsilon_1 = \left(\frac{1200}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{800^2 + 400^2} \right) \times 10^{-6} = +1047 \times 10^{-6}$$

$$\varepsilon_2 = \left(\frac{1200}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{800^2 + 400^2} \right) \times 10^{-6} = +153 \times 10^{-6}$$

Quanto à orientação das direcções principais, tem-se:

$$\operatorname{tg}(2\theta) = \frac{2\varepsilon_b - \varepsilon_a - \varepsilon_c}{\varepsilon_a - \varepsilon_c}$$

ou seja:

$$\operatorname{tg}(2\theta) = -\frac{400}{800} = -0,5$$

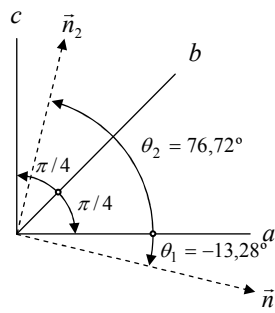
Donde:

$$2\theta = -26,56^\circ \Rightarrow \theta = -13,28^\circ \text{ ou } \theta = 76,72^\circ$$

Atendendo a que $\varepsilon_b = 400 \times 10^{-6} < \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_c}{2} = 600 \times 10^{-6}$, de acordo com a regra definida no parágrafo §2.1.14, o ângulo θ_1 é negativo. Donde:

$$\theta_1 = -13,28^\circ \text{ e } \theta_2 = \theta_1 + 90^\circ = 76,72^\circ$$

Tem-se, assim, a representação gráfica seguinte:



E, portanto:

$$\vec{n}_1 = (+0.97, -0.23, 0)$$

$$\vec{n}_2 = (+0.23, +0.97, 0)$$

b) – Deformação de corte máxima

A deformação de corte máxima no ponto considerado é dada pela expressão seguinte:

$$\gamma_{max} = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = (1047 - 153) \times 10^{-6} = 894 \times 10^{-6}$$

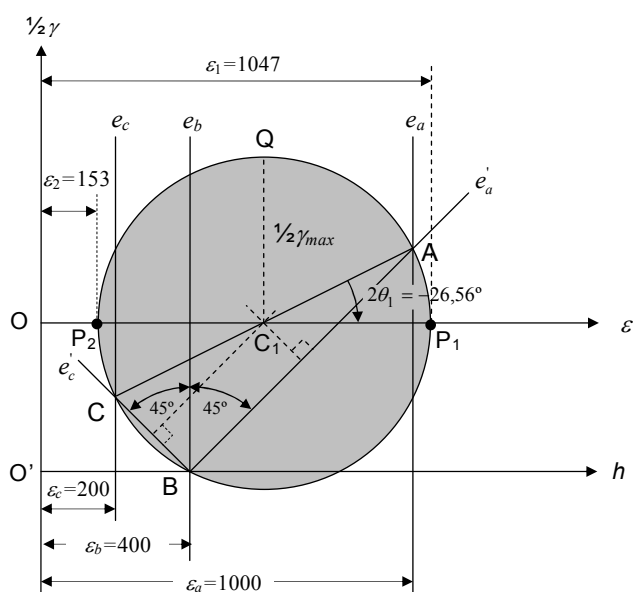
e ocorre sobre o plano cuja normal bissecta as direcções \vec{n}_1 e \vec{n}_2 , isto é:

$$\vec{n} = \frac{\vec{n}_1 + \vec{n}_2}{|\vec{n}_1 + \vec{n}_2|} = (0.851, 0.525, 0)$$

c) – Construção do Círculo de Mohr

1)-No diagrama $(\varepsilon, \gamma/2)$, desenham-se as três rectas verticais e_a , e_b e e_c , às distâncias ε_a , ε_b e ε_c da origem O' ;

2)-Sobre a recta e_b toma-se um ponto B e, a partir deste ponto, desenham-se as rectas e'_a e e'_c , inclinadas de ângulos $\beta = 45^\circ$ e $\gamma = 45^\circ$, respectivamente;



3)-Identificar os pontos A e C onde as rectas e'_a e e'_c intersectam as verticais e_a e e_c , respectivamente;

4)-Identificar o centro C_1 do círculo de Mohr, pela intersecção das mediatrizes dos segmentos AB e BC (no caso particular duma roseta rectangular, o centro C_1 pode ser identificado pelo ponto médio do diâmetro AC).

5)-Desenhar o círculo de Mohr (centro em C_1 e a passar pelos pontos A, B e C);

6)-Desenhar o eixo das abcissas do diagrama de Mohr (diâmetro horizontal) da circunferência a que se refere o ponto anterior;

7)-Identificar os pontos P1 e P2 de intersecção do eixo das abcissas com a circunferência de Mohr;

8)-Medindo as distâncias OP_1 e OP_2 obtêm-se os valores das duas deformações principais no ponto considerado, isto é:

$$\varepsilon_1 = 1047 \times 10^{-6} \quad \text{e} \quad \varepsilon_2 = 153 \times 10^{-6}$$

9)-A orientação das direcções principais obtém-se medindo o ângulo $2\theta_1 = \angle AC_1P_1$:

$$2\theta_1 = -26,56^\circ$$

ou seja:

$$\theta_1 = -13,28^\circ$$

Conforme sugerido pela figura, o ângulo $\phi_1 = -13,28^\circ$ é medido a partir da direcção (a), no sentido do movimento dos ponteiros do relógio. Assim, tem-se:

$$\vec{n}_1 = (+0,97, -0,23, 0)$$

$$\vec{n}_2 = (+0,23, +0,97, 0)$$

O valor máximo da deformação de corte obtém-se medindo a ordenada do ponto Q sobre o diâmetro vertical do círculo de Mohr (ver figura):

$$\frac{1}{2}\gamma_{max} = 447 \times 10^{-6},$$

ou seja:

$$\gamma_{max} = 894 \times 10^{-6}$$

PROBLEMA 2.2.9

Utilizando rosetas rectangulares de três extensómetros, mediram-se as deformações em cinco pontos A, B, C, D e E na superfície dum corpo material. Determine as deformações principais em cada um desses pontos e as respectivas direcções.

a)-Ponto A: $\varepsilon_{0^\circ} = -600 \times 10^{-6}$, $\varepsilon_{45^\circ} = -400 \times 10^{-6}$, $\varepsilon_{90^\circ} = 200 \times 10^{-6}$

b)-Ponto B: $\varepsilon_{0^\circ} = -200 \times 10^{-6}$, $\varepsilon_{45^\circ} = 600 \times 10^{-6}$, $\varepsilon_{90^\circ} = 400 \times 10^{-6}$

c)-Ponto C: $\varepsilon_{0^\circ} = 400 \times 10^{-6}$, $\varepsilon_{45^\circ} = -200 \times 10^{-6}$, $\varepsilon_{90^\circ} = 600 \times 10^{-6}$

d)-Ponto D: $\varepsilon_{0^\circ} = 600 \times 10^{-6}$, $\varepsilon_{45^\circ} = 400 \times 10^{-6}$, $\varepsilon_{90^\circ} = -200 \times 10^{-6}$

e)-Ponto E: $\varepsilon_{0^\circ} = 600 \times 10^{-6}$, $\varepsilon_{45^\circ} = -200 \times 10^{-6}$, $\varepsilon_{90^\circ} = -200 \times 10^{-6}$

RESOLUÇÃO:

a)-Ponto A

Tratando-se de rosetas de extensómetros a 45° , podem aplicar-se directamente as expressões apresentadas no parágrafo 2.1.14 para as rosetas rectangulares:

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_c}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\varepsilon_a - \varepsilon_c)^2 + (2\varepsilon_b - \varepsilon_a - \varepsilon_c)^2}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_c}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\varepsilon_a - \varepsilon_c)^2 + (2\varepsilon_b - \varepsilon_a - \varepsilon_c)^2}$$

Donde, substituindo pelos valores correspondentes:

$$\varepsilon_1 = \left(-\frac{400}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{800^2 + 400^2} \right) \times 10^{-6} = 247,21 \times 10^{-6}$$

$$\varepsilon_2 = \left(-\frac{400}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{800^2 + 400^2} \right) \times 10^{-6} = -647,21 \times 10^{-6}$$

Quanto à orientação das direcções principais, tem-se:

$$\operatorname{tg}(2\theta) = \frac{2\varepsilon_b - \varepsilon_a - \varepsilon_c}{\varepsilon_a - \varepsilon_c}$$

ou seja:

$$\operatorname{tg}(2\theta) = \frac{-400}{-800} = 0,5$$

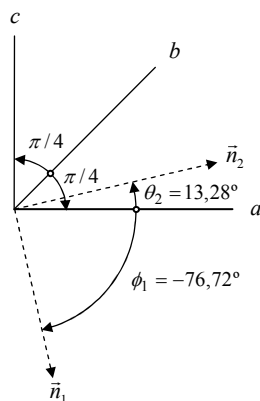
Donde:

$$2\theta = 26,56^\circ \Rightarrow \theta = 13,28^\circ \text{ ou } \theta = -76,72^\circ$$

Atendendo a que $\varepsilon_b = -400 \times 10^{-6} < \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_c}{2} = -200 \times 10^{-6}$, de acordo com a regra apropriada, o ângulo θ_1 é negativo, pelo que:

$$\theta_1 = -76,72^\circ \text{ e } \theta_2 = \theta_1 + 90^\circ = 13,28^\circ$$

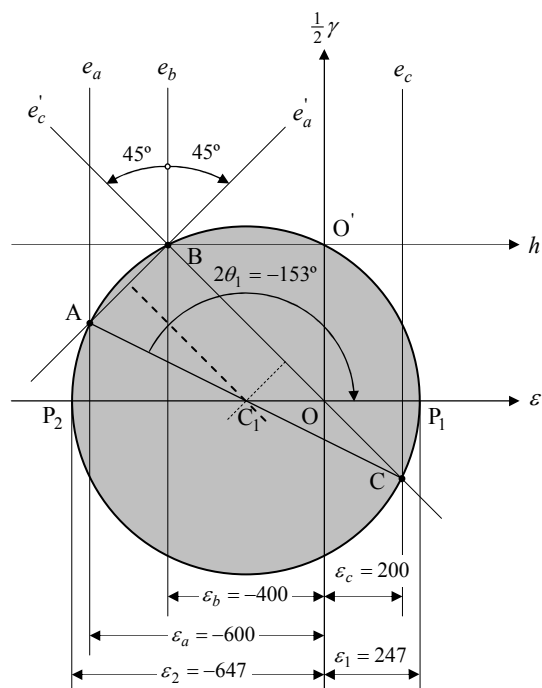
Graficamente, tem-se:



$$\vec{n}_1 = (+0,97, -0,23, 0)$$

$$\vec{n}_2 = (+0,23, +0,97, 0)$$

Em alternativa, poder-se-ia ter utilizado a construção de Mohr:



Conforme sugerido pela figura, o ângulo $\theta_1 = -76,72^\circ$ é medido a partir da direcção (a), no sentido do movimento dos ponteiros do relógio. Assim, tem-se:

$$\vec{n}_1 = (+0,23, -0,97, 0) \quad \vec{n}_2 = (+0,97, +0,23, 0)$$

b)–Ponto B

Neste caso, tem-se:

$$\varepsilon_1 = \left(\frac{200}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{600^2 + 1000^2} \right) \times 10^{-6} = 683,10 \times 10^{-6}$$

$$\varepsilon_2 = \left(\frac{200}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{600^2 + 1000^2} \right) \times 10^{-6} = -483,10 \times 10^{-6}$$

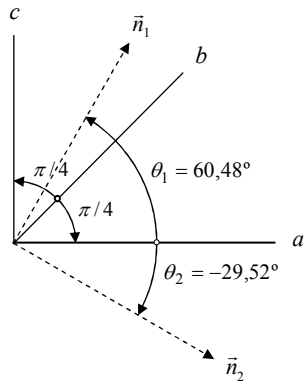
Quanto à orientação das direcções principais, tem-se:

$$\operatorname{tg}(2\theta) = \frac{2\varepsilon_b - \varepsilon_a - \varepsilon_c}{\varepsilon_a - \varepsilon_c} = \frac{1000}{-600} = -1,67$$

Donde:

$$2\theta = -59,04^\circ \Rightarrow \theta = -29,52^\circ \text{ ou } \theta = 60,48^\circ$$

Atendendo a que $\varepsilon_b = 600 \times 10^{-6} > \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_c}{2} = 100 \times 10^{-6}$, de acordo com a regra definida no parágrafo 2.1.14, o ângulo θ_1 é positivo. Donde:



$$\theta_1 = 60,48^\circ$$

$$\theta_2 = \theta_1 - 90^\circ = -29,52^\circ$$

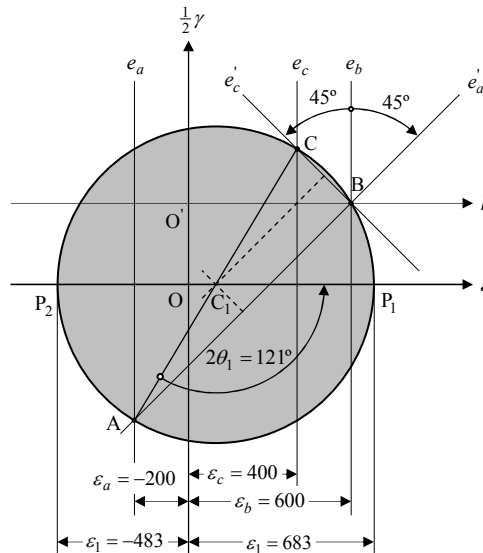
$$\vec{n}_1 = (+0,49, \quad 0,87, \quad 0)$$

$$\vec{n}_2 = (+0,87, \quad -0,49, \quad 0)$$

Em alternativa, poder-se-ia ter utilizado a construção de Mohr representada na figura a seguir. Conforme é sugerido pela figura, o ângulo $\theta_1=60,5^\circ$ deve ser medido a partir da direcção (a), no sentido directo. Assim, tem-se:

$$\vec{n}_1 = (+0,49, \quad +0,87, \quad 0)$$

$$\vec{n}_2 = (+0,87, \quad -0,49, \quad 0)$$



c) Ponto C

Neste caso, tem-se:

$$\varepsilon_1 = \left(\frac{1000}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{200^2 + 1400^2} \right) \times 10^{-6} = 1207,11 \times 10^{-6}$$

$$\varepsilon_2 = \left(\frac{1000}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{200^2 + 1400^2} \right) \times 10^{-6} = -207,11 \times 10^{-6}$$

Quanto à orientação das direcções principais:

$$\operatorname{tg}(2\theta) = \frac{2\varepsilon_b - \varepsilon_a - \varepsilon_c}{\varepsilon_a - \varepsilon_c} = \frac{-1400}{-200} = 7,00$$

Donde:

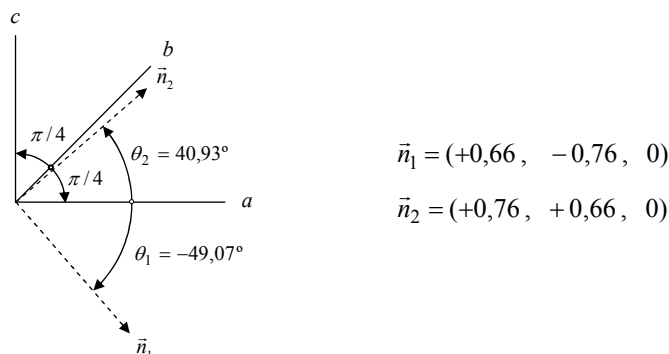
$$2\theta = 81,87^\circ \Rightarrow \theta = 40,93^\circ \text{ ou } \theta = -49,07^\circ$$

Atendendo a que $\varepsilon_b = -200 \times 10^{-6} < \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_c}{2} = 500 \times 10^{-6}$, de acordo com a regra apropriada definida no parágrafo §2.1.14, o ângulo θ_1 é negativo. Donde os ângulos θ_1 e θ_2 :

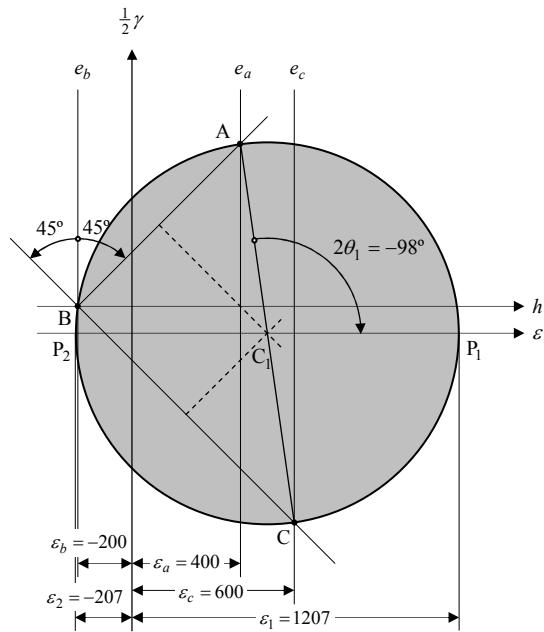
$$\theta_1 = -49,07^\circ$$

$$\theta_2 = \theta_1 + 90^\circ = +40,93^\circ$$

e, portanto, as direcções principais ficam definidas pelos seguintes versores:



Em alternativa, a solução poderia ser obtida a partir duma construção de Mohr, semelhante à utilizada nas alíneas anteriores:



Conforme é sugerido pela figura, o ângulo $\theta_1 = -49^\circ$ deve ser medido a partir da direcção (a), no sentido dos ponteiros do relógio. Pode, assim, escrever-se:

$$\vec{n}_1 = (+0,66, -0,76, 0)$$

$$\vec{n}_2 = (+0,76, +0,66, 0)$$

d)–Ponto D

Neste ponto, tem-se:

$$\varepsilon_1 = \left(\frac{400}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{800^2 + 400^2} \right) \times 10^{-6} = 647,21 \times 10^{-6}$$

$$\varepsilon_2 = \left(\frac{400}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{800^2 + 400^2} \right) \times 10^{-6} = -247,21 \times 10^{-6}$$

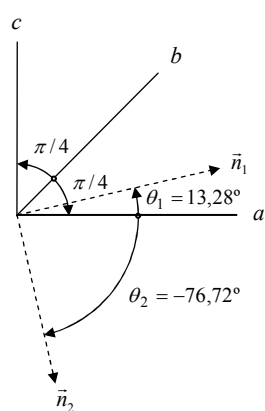
Quanto à orientação das direcções principais:

$$\operatorname{tg}(2\theta) = \frac{2\varepsilon_b - \varepsilon_a - \varepsilon_c}{\varepsilon_a - \varepsilon_c} = \frac{400}{800} = 0,5$$

Donde:

$$2\theta = 26,56^\circ \Rightarrow \theta = 13,28^\circ \text{ ou } \theta = -76,72^\circ$$

Atendendo a que $\varepsilon_b = 400 \times 10^{-6} > \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_c}{2} = 200 \times 10^{-6}$, de acordo com a regra definida no parágrafo §2.1.14 para a direcção principal (1), o ângulo θ_1 é positivo. Donde os ângulos θ_1 e θ_2 que definem as direcções principais:



$$\theta_1 = +13,28^\circ$$

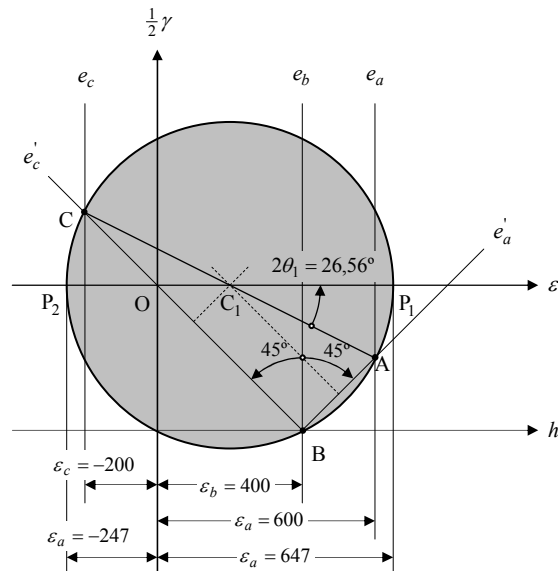
$$\theta_2 = \theta_1 - 90^\circ = -76,72^\circ$$

e, portanto, os correspondentes versores:

$$\vec{n}_1 = (+0,97, +0,23, 0)$$

$$\vec{n}_2 = (+0,23, -0,97, 0)$$

Também aqui, a solução poderia ser obtida a partir duma construção de Mohr, semelhante à utilizada nas alíneas anteriores:



O ângulo $\theta_1=13,28^\circ$ deve ser medido a partir da direcção (a), no sentido directo. Assim, pode escrever-se:

$$\vec{n}_1 = (+0,97, +0,23, 0)$$

$$\vec{n}_2 = (+0,23, -0,97, 0)$$

e)–Ponto E

No ponto E, tem-se:

$$\varepsilon_1 = \left(\frac{400}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{800^2 + 800^2} \right) \times 10^{-6} = 765,69 \times 10^{-6}$$

$$\varepsilon_2 = \left(\frac{400}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{800^2 + 800^2} \right) \times 10^{-6} = -365,69 \times 10^{-6}$$

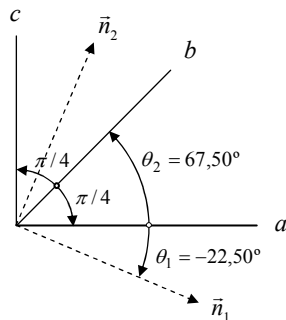
Quanto à orientação das direcções principais:

$$\operatorname{tg}(2\theta) = \frac{2\varepsilon_b - \varepsilon_a - \varepsilon_c}{\varepsilon_a - \varepsilon_c} = \frac{-800}{800} = -1,00$$

Donde:

$$2\theta = -45^\circ \Rightarrow \theta = -22,50^\circ \text{ ou } \theta = +67,50^\circ$$

Atendendo a que $\varepsilon_b = -200 \times 10^{-6} < \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_c}{2} = 200 \times 10^{-6}$, o ângulo θ_1 é negativo. Donde os ângulos θ_1 e θ_2 que definem as direcções principais:



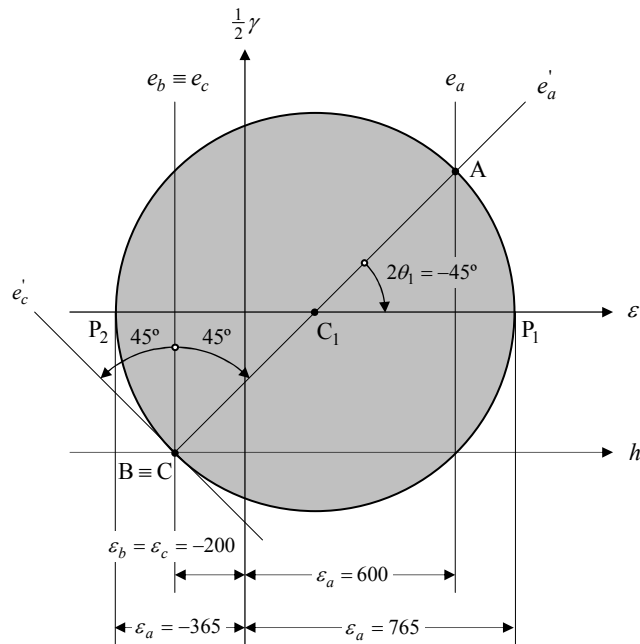
$$\theta_1 = -22,50^\circ$$

$$\theta_2 = \theta_1 + 90^\circ = +67,50^\circ$$

$$\vec{n}_1 = (+0,92, -0,38, 0)$$

$$\vec{n}_2 = (+0,38, +0,92, 0)$$

A construção de Mohr correspondente é a seguinte:



Neste caso particular, em que $\varepsilon_b = \varepsilon_c$, os pontos B e C são coincidentes, o círculo de Mohr é tangente à recta $e'_b \equiv e'_c$ e o centro C_1 é o ponto médio do segmento AB.

O ângulo $\theta_1 = -22,50^\circ$ deve ser medido a partir da direcção (a), no sentido retrógrado. Sendo assim, pode escrever-se:

$$\vec{n}_1 = (+0,92, -0,38, 0)$$

$$\vec{n}_2 = (+0,38, +0,92, 0)$$

PROBLEMA 2.2.10

Utilizando rosetas delta (Δ) de três extensómetros, mediram-se as deformações em cinco pontos A, B, C, D e E na superfície dum corpo material. Determine as deformações principais em cada um desses pontos e as respectivas direcções.

a)-Ponto A: $\varepsilon_{0^\circ} = +600 \times 10^{-6}$, $\varepsilon_{120^\circ} = +400 \times 10^{-6}$, $\varepsilon_{240^\circ} = -200 \times 10^{-6}$

b)-Ponto B: $\varepsilon_{0^\circ} = -200 \times 10^{-6}$, $\varepsilon_{120^\circ} = +400 \times 10^{-6}$, $\varepsilon_{240^\circ} = +100 \times 10^{-6}$

c)-Ponto C: $\varepsilon_{0^\circ} = -700 \times 10^{-6}$, $\varepsilon_{120^\circ} = -300 \times 10^{-6}$, $\varepsilon_{240^\circ} = +200 \times 10^{-6}$

$$d)\text{-Ponto D: } \varepsilon_{0^\circ} = -100 \times 10^{-6}, \quad \varepsilon_{120^\circ} = -600 \times 10^{-6}, \quad \varepsilon_{240^\circ} = +700 \times 10^{-6}$$

$$e)\text{-Ponto E: } \varepsilon_{0^\circ} = +300 \times 10^{-6}, \quad \varepsilon_{120^\circ} = -200 \times 10^{-6}, \quad \varepsilon_{240^\circ} = +800 \times 10^{-6}$$

RESOLUÇÃO:**a)–Ponto A**

Utilizando as expressões (2.47) para as rosetas delta de três elementos:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_b + \varepsilon_c}{3} + \sqrt{\left[\varepsilon_a - \frac{1}{3}(\varepsilon_a + \varepsilon_b + \varepsilon_c)\right]^2 + \frac{1}{3}(\varepsilon_c - \varepsilon_b)^2} \\ \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_b + \varepsilon_c}{3} - \sqrt{\left[\varepsilon_a - \frac{1}{3}(\varepsilon_a + \varepsilon_b + \varepsilon_c)\right]^2 + \frac{1}{3}(\varepsilon_c - \varepsilon_b)^2} \end{cases}$$

obtem-se:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \left(\frac{600}{3} + \sqrt{400^2 + \frac{1}{3}400^2}\right) \times 10^{-6} \\ \varepsilon_2 = \left(\frac{600}{3} - \sqrt{400^2 + \frac{1}{3}400^2}\right) \times 10^{-6} \end{cases}$$

ou seja:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = 661,88 \times 10^{-6} \\ \varepsilon_2 = -261,88 \times 10^{-6} \end{cases}$$

Quanto às direcções principais, da equação (2.48) pode escrever-se:

$$\operatorname{tg}(2\theta) = \frac{\sqrt{3}(\varepsilon_c - \varepsilon_b)}{2\varepsilon_a - (\varepsilon_b + \varepsilon_c)}$$

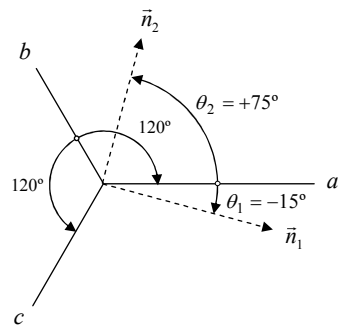
Tira-se:

$$\operatorname{tg}(2\theta) = \frac{\sqrt{3} \times (-400)}{1200} = -0,58$$

Donde:

$$2\theta = -30^\circ \Rightarrow \theta = -15^\circ \quad \text{ou} \quad \theta = +75^\circ$$

Atendendo a que $\varepsilon_c = -200 \times 10^{-6} < \varepsilon_b = +200 \times 10^{-6}$, o ângulo θ_1 deverá estar no intervalo $-\pi/2 < \alpha_1 < 0$. Portanto:



$$\theta_1 = -15^\circ$$

$$\theta_2 = \theta_1 + 90^\circ = +75^\circ$$

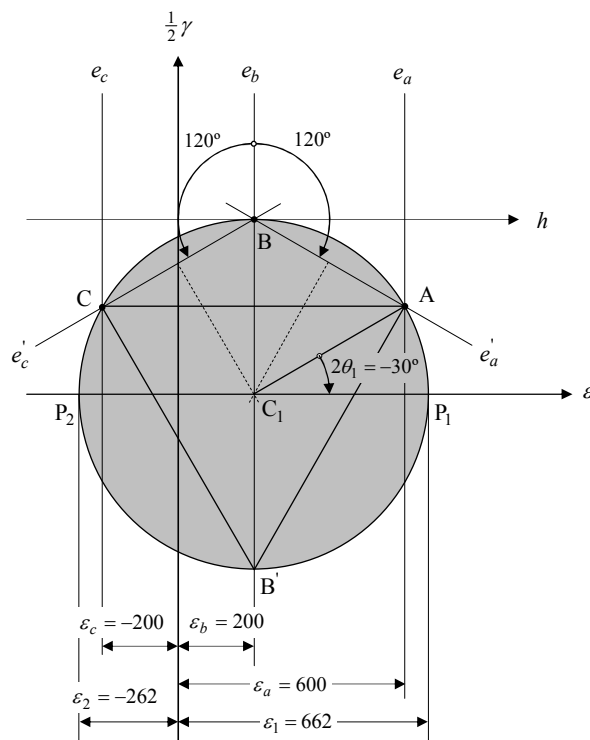
$$\vec{n}_1 = (+0,97, -0,26, 0)$$

$$\vec{n}_2 = (+0,26, +0,97, 0)$$

A solução podia, também, ser obtida através da construção de Mohr a seguir apresentada. Conforme sugerido pela figura, o ângulo $\phi_1 = -15^\circ$ deve ser medido a partir da direção (a), no sentido retrógrado. Assim, pode escrever-se:

$$\vec{n}_1 = (+0,97, -0,26, 0)$$

$$\vec{n}_2 = (+0,26, +0,97, 0)$$



b)–Ponto B

Usando as mesmas expressões utilizadas na alínea anterior, obtém-se:

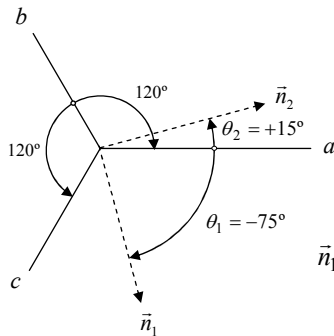
$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \left(\frac{300}{3} + \sqrt{300^2 + \frac{1}{3}300^2} \right) \times 10^{-6} = 446,41 \times 10^{-6} \\ \varepsilon_2 = \left(\frac{600}{3} - \sqrt{400^2 + \frac{1}{3}400^2} \right) \times 10^{-6} = -246,41 \times 10^{-6} \end{cases}$$

Quanto às direcções principais, tem-se:

$$\operatorname{tg}(2\theta) = \frac{\sqrt{3}(\varepsilon_c - \varepsilon_b)}{2\varepsilon_a - (\varepsilon_b + \varepsilon_c)} = \frac{\sqrt{3} \times (-300)}{-900} = +0,58$$

Donde:

$$2\theta = +30^\circ \Rightarrow \alpha = +15^\circ \text{ ou } \alpha = -75^\circ$$



Atendendo a que

$$\varepsilon_c = +100 \times 10^{-6} < \varepsilon_b = +400 \times 10^{-6},$$

o ângulo θ_1 deverá estar no intervalo $-\pi/2 < \alpha_1 < 0$. Isto é:

$$\theta_1 = -75^\circ \text{ e } \theta_2 = \theta_1 + 90^\circ = +15^\circ$$

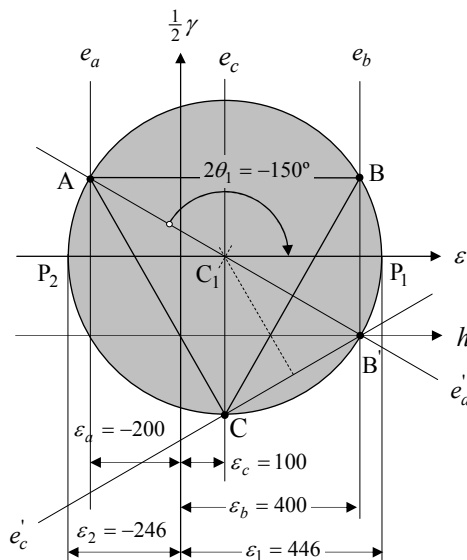
$$\vec{n}_1 = (+0.26, -0.97, 0) \text{ e } \vec{n}_2 = (+0.97, +0.26, 0)$$

A solução pode, também, ser obtida através da construção de Mohr apresentada na figura ao lado.

O ângulo $\phi_1 = -75^\circ$ deve ser medido a partir da direcção (a), no sentido dos ponteiros do relógio. Assim, pode escrever-se:

$$\vec{n}_1 = (+0.26, -0.97, 0)$$

$$\vec{n}_2 = (+0.97, +0.26, 0)$$



c) Ponto C

Neste caso, substituindo os valores de ε_a , ε_b e ε_c nas expressões gerais:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_b + \varepsilon_c}{3} + \sqrt{\left[\varepsilon_a - \frac{1}{3}(\varepsilon_a + \varepsilon_b + \varepsilon_c)\right]^2 + \frac{1}{3}(\varepsilon_c - \varepsilon_b)^2} \\ \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_b + \varepsilon_c}{3} - \sqrt{\left[\varepsilon_a - \frac{1}{3}(\varepsilon_a + \varepsilon_b + \varepsilon_c)\right]^2 + \frac{1}{3}(\varepsilon_c - \varepsilon_b)^2} \end{cases}$$

obtem-se:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \left(\frac{-800}{3} + \sqrt{433^2 + \frac{1}{3} \times 500^2}\right) \times 10^{-6} = 254,02 \times 10^{-6} \\ \varepsilon_2 = \left(\frac{-800}{3} - \sqrt{433^2 + \frac{1}{3} \times 500^2}\right) \times 10^{-6} = -787,35 \times 10^{-6} \end{cases}$$

Quanto às direcções principais, tem-se:

$$\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{\sqrt{3}(\varepsilon_c - \varepsilon_b)}{2\varepsilon_a - (\varepsilon_b + \varepsilon_c)} = \frac{\sqrt{3} \times 500}{-1300} = -0,67$$

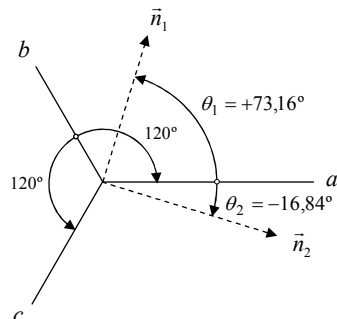
Donde:

$$2\theta = -33,67^\circ \Rightarrow \theta = -16,84^\circ \text{ ou } \theta = +73,16^\circ$$

Atendendo a que $\varepsilon_c = +200 \times 10^{-6} > \varepsilon_b = -300 \times 10^{-6}$, o ângulo θ_1 deverá estar no intervalo $0 < \alpha_1 < +\pi/2$. Isto é:

$$\theta_1 = +73,16^\circ$$

$$\theta_2 = \theta_1 - 90^\circ = -16,84^\circ$$



Os versores das direcções principais são, portanto:

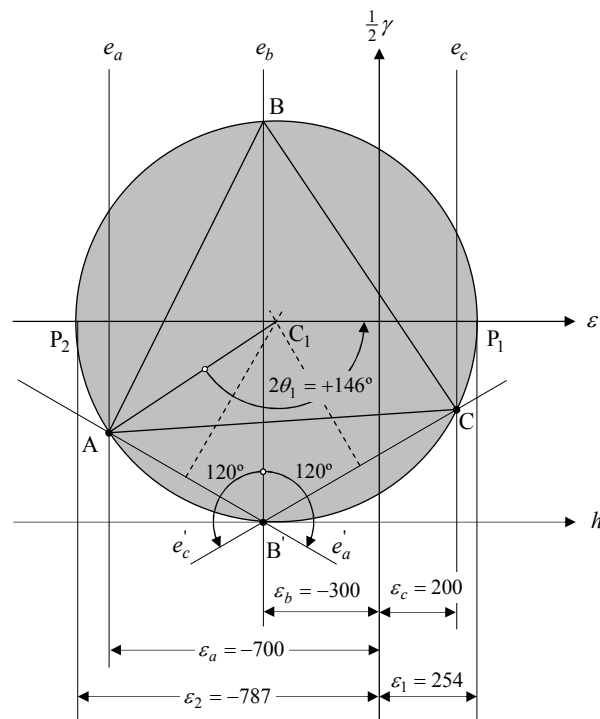
$$\vec{n}_1 = (+0,96, +0,29, 0)$$

$$\vec{n}_2 = (+0,29, -0,96, 0)$$

A solução pode, também, ser obtida através da construção de Mohr representada na figura a seguir. Conforme sugerido pela figura, o ângulo $\theta_1 = +73^\circ$ deve ser medido a partir da direcção (a), no sentido directo. Assim, pode escrever-se:

$$\vec{n}_1 = (+0,96, +0,29, 0)$$

$$\vec{n}_2 = (+0,29, -0,96, 0)$$



d)–Ponto D

Substituindo os valores de ε_a , ε_b e ε_c nas expressões (2.47) para as deformações principais ε_1 e ε_2 , obtém-se:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \left(\frac{0}{3} + \sqrt{100^2 + \frac{1}{3} \times 1300^2} \right) \times 10^{-6} = +757,19 \times 10^{-6} \\ \varepsilon_2 = \left(\frac{0}{3} - \sqrt{100^2 + \frac{1}{3} \times 1300^2} \right) \times 10^{-6} = -757,19 \times 10^{-6} \end{cases}$$

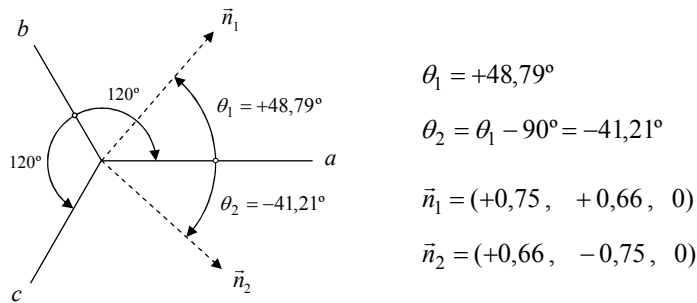
Quanto às direcções principais no ponto D, substituindo na equação (2.48), obtém-se:

$$\operatorname{tg}(2\theta) = \frac{\sqrt{3}(\varepsilon_c - \varepsilon_b)}{2\varepsilon_a - (\varepsilon_b + \varepsilon_c)} = \frac{\sqrt{3} \times 1300}{-300} = -7,51$$

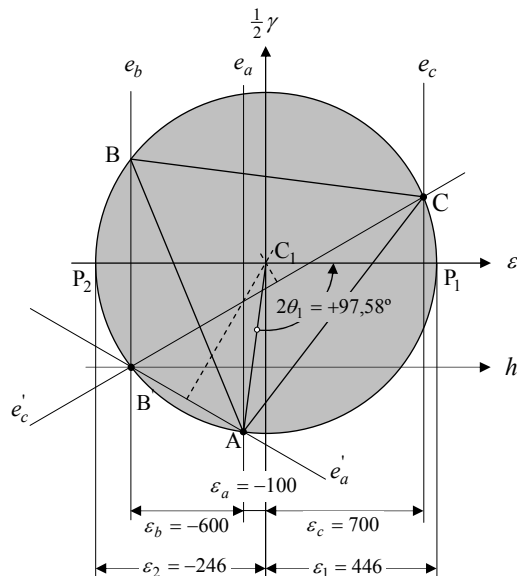
Donde:

$$2\theta = -82,41^\circ \Rightarrow \theta = -41,21^\circ \text{ ou } \theta = +48,79^\circ$$

Atendendo a que $\varepsilon_c = +700 \times 10^{-6} > \varepsilon_b = -600 \times 10^{-6}$, o ângulo α deverá estar no intervalo $0 < \alpha_1 < +\pi/2$. Isto é:



A solução pode, também, ser obtida através da construção de Mohr:



Conforme ressalta da análise da figura, o ângulo $\theta_1 = +48,79^\circ$ deve ser medido a partir da direcção (a), no sentido directo. Assim, pode escrever-se:

$$\vec{n}_1 = (+0,26, -0,97, 0)$$

$$\vec{n}_2 = (+0,97, +0,26, 0)$$

e)–Ponto E

Neste caso, substituindo os valores de ε_a , ε_b e ε_c nas expressões gerais:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_b + \varepsilon_c}{3} + \sqrt{\left[\varepsilon_a - \frac{1}{3}(\varepsilon_a + \varepsilon_b + \varepsilon_c)\right]^2 + \frac{1}{3}(\varepsilon_c - \varepsilon_b)^2} \\ \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_b + \varepsilon_c}{3} - \sqrt{\left[\varepsilon_a - \frac{1}{3}(\varepsilon_a + \varepsilon_b + \varepsilon_c)\right]^2 + \frac{1}{3}(\varepsilon_c - \varepsilon_b)^2} \end{cases}$$

obtém-se:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \left(\frac{900}{3} + \sqrt{0^2 + \frac{1}{3} \times 1000^2}\right) \times 10^{-6} = 877,35 \times 10^{-6} \\ \varepsilon_2 = \left(\frac{900}{3} - \sqrt{0^2 + \frac{1}{3} \times 1000^2}\right) \times 10^{-6} = -277,35 \times 10^{-6} \end{cases}$$

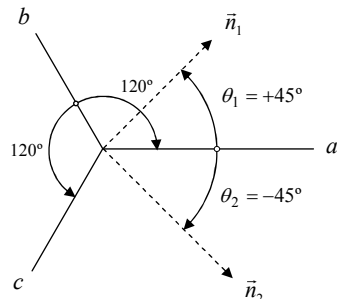
Quanto às direcções principais, tem-se:

$$\operatorname{tg}(2\theta) = \frac{\sqrt{3}(\varepsilon_c - \varepsilon_b)}{2\varepsilon_a - (\varepsilon_b + \varepsilon_c)} = \frac{\sqrt{3} \times 1000}{0} = +\infty$$

Donde:

$$2\theta = \pm 90^\circ \Rightarrow \theta = +45^\circ \text{ ou } \theta = -45^\circ$$

Atendendo a que $\varepsilon_c = +800 \times 10^{-6} > \varepsilon_b = -200 \times 10^{-6}$, o ângulo α deverá estar no intervalo $0 < \alpha_1 < +\pi/2$. Isto é:



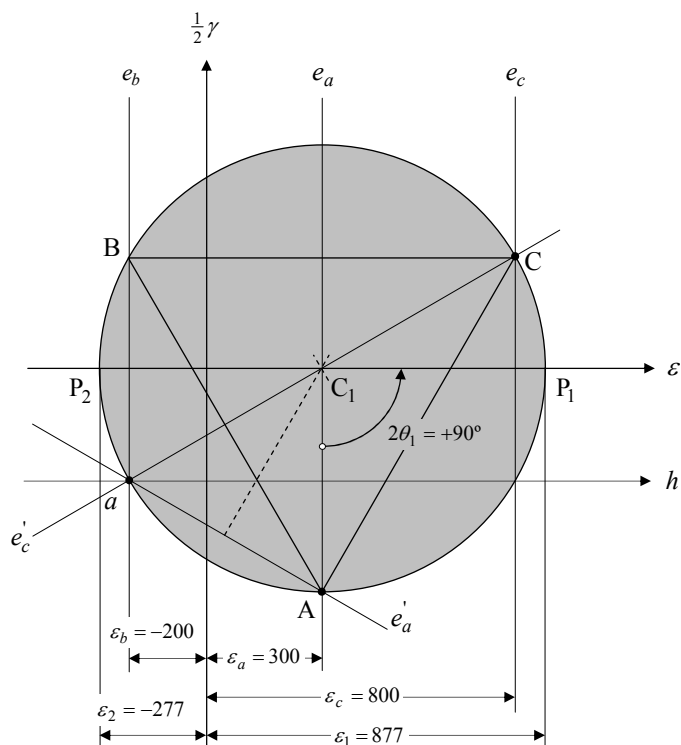
$$\theta_1 = +45^\circ$$

$$\theta_2 = \phi_\theta - 90^\circ = -45^\circ$$

$$\vec{n}_1 = \left(+\frac{\sqrt{2}}{2}, +\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$$

$$\vec{n}_2 = \left(+\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$$

A solução podia, também, ser obtida através da construção de Mohr representada na figura a seguir:



Conforme sugerido pela figura, o ângulo $\theta_1 = +45^\circ$ deve ser medido a partir da direcção (a) , no sentido directo. Assim, pode escrever-se:

$$\vec{n}_1 = \left(+\frac{\sqrt{2}}{2}, +\frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right)$$

$$\vec{n}_2 = \left(+\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right)$$

2.3. PROBLEMAS PROPOSTOS

2.3.1. O campo dos deslocamentos num meio material é definido pelas seguintes componentes:

$$\begin{aligned}u &= x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + xz + yz + 2 \\v &= x^3 + 3y^4 + 2y^2 z^2 + y + z + 1 \\w &= x^2 + z^3 + z^2 x + 3yz + 1\end{aligned}$$

Determine o campo das deformações que lhe está associado.

Solução: $\varepsilon_{xx} = 2x + 2y + z$; $\varepsilon_{yy} = 12y^3 + 4yz^2 + 1$;
 $\varepsilon_{zz} = 3z^2 + 2xz + 3y$; $\tau_{yz} = 4y^2 z + 3z + 1$;
 $\tau_{xz} = z^2 + y + 2z + 3x$; $\tau_{xy} = 3x^2 + 2x + 2y + z$.

2.3.2. Relativamente ao campo de deslocamentos a que se refere o problema anterior, determine a deformação linear ε , no ponto P de coordenadas (1, 0, 1), segundo uma direcção \bar{n} igualmente inclinada relativamente aos três eixos coordenados, $\bar{n} = (\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3)$.

Solução: $\varepsilon(P, \bar{n}) = 25/3$.

2.3.3. Ainda relativamente ao campo de deslocamentos a que se refere o problema 2.3.1., determine a distorção entre as duas direcções ortogonais $\bar{n}_1 = (\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ e $\bar{n}_2 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2})$, no ponto O(0, 0, 0).

Solução: $\gamma_{\bar{n}_1, \bar{n}_2} = \sqrt{6}/6$.

2.3.4. Num referencial global Oxyz, as componentes cartesianas da deformação num ponto P são as seguintes:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= -100; \varepsilon_{yy} = 300; \varepsilon_{zz} = 200 \text{ (x}10^{-6}\text{)} \\ \tau_{yz} &= 300; \tau_{xz} = 200; \tau_{xy} = -100 \text{ (x}10^{-6}\text{)}.\end{aligned}$$

Determine as componentes da deformação num referencial particular Ox'y'z', onde as orientações dos eixos x',y',z' são definidas pelos seguintes ângulos:

$$(x, x') = 0; (y, y') = \pi/4; (z, z') = \pi/4.$$

Solução:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{x'x'} &= -100; \varepsilon_{y'y'} = +400; \varepsilon_{z'z'} = +100 \text{ (x}10^{-6}\text{)}; \\ \gamma_{y'z'} &= -100; \gamma_{x'z'} = 150\sqrt{2}; \gamma_{x'y'} = 50\sqrt{2} \text{ (x}10^{-6}\text{)}\end{aligned}$$

2.3.5. Para o estado de deformação a que se refere o problema 2.3.4, determine as componentes da deformação num referencial particular Ox'y'z', onde as orientações dos eixos x',y',z' são definidas pelos seguintes ângulos:

$$(x, x') = 0; (y, y') = \pi/2; (z, z') = \pi/2.$$

Solução:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{x'x'} &= -100; \varepsilon_{y'y'} = +200; \varepsilon_{z'z'} = +300 \text{ (x}10^{-6}\text{)}; \\ \gamma_{y'z'} &= -300; \gamma_{x'z'} = +100; \gamma_{x'y'} = +200 \text{ (x}10^{-6}\text{)}\end{aligned}$$

2.3.6. Para o estado de deformação a que se refere o problema 2.3.4, determine as componentes da deformação num referencial particular Ox'y'z', onde as orientações dos eixos x',y',z' são definidas pelos seguintes ângulos:

$$(x, x') = \pi/2; (y, y') = 0; (z, z') = \pi/2.$$

Solução:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{x'x'} &= +200; \varepsilon_{y'y'} = +300; \varepsilon_{z'z'} = -100 \text{ (x}10^{-6}\text{)}; \\ \gamma_{y'z'} &= -100; \gamma_{x'z'} = -200; \gamma_{x'y'} = -300 \text{ (x}10^{-6}\text{)}.\end{aligned}$$

2.3.7. Para o estado de deformação a que se refere o problema 2.3.4, determine as componentes da deformação num referencial particular Ox'y'z', onde as orientações dos eixos x',y',z' são definidas pelos seguintes ângulos:

$$(x, x') = \pi/2; (y, y') = \pi/2; (z, z') = 0.$$

Solução:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{x'x'} &= +300; \varepsilon_{y'y'} = -100; \varepsilon_{z'z'} = +200 \text{ (x}10^{-6}\text{)}; \\ \gamma_{y'z'} &= -200; \gamma_{x'z'} = +300; \gamma_{x'y'} = +100 \text{ (x}10^{-6}\text{)}\end{aligned}$$

2.3.8. Um campo plano de deformações é definido pelas seguintes componentes cartesianas (x10⁻⁶):

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= 6x + 2y \\ \varepsilon_{yy} &= 4y - 1 \\ \gamma_{xy} &= 2x + 1\end{aligned}$$

Determine o campo dos deslocamentos que lhe está associado, admitindo que o deslocamento na origem das coordenadas é nulo.

Solução: $u = (3x^2 + 5y + 2xy) \times 10^{-6}$;
 $v = (2y^2 - y - 4x) \times 10^{-6}$.

2.3.9. Relativamente ao campo de deformações a que se refere o problema anterior, determine a variação da área de um quadrado com $2m$ de lado, centrado na origem das coordenadas e lados paralelos aos eixos coordenados x e y .

Solução: $\Delta A = -4mm^2$.

2.3.10. Ainda relativamente ao campo de deformações a que se refere o problema 2.3.8., determine as deformações principais na origem das coordenadas e as respectivas direcções principais.

Solução:

$\epsilon_1 = 0,21 \times 10^{-6}$; $\bar{n}_1 = (0,92, 0,38, 0)$
 $\epsilon_2 = 0$; $\bar{n}_2 = (0, 0, 1)$
 $\epsilon_3 = -1,21 \times 10^{-6}$; $\bar{n}_3 = (-0,38, 0,92, 0)$.

2.3.11. O campo das deformações num meio material é definido pelas seguintes componentes cartesianas ($\times 10^{-6}$):

$\epsilon_{xx} = 2x - 2y - z - 5$
 $\epsilon_{yy} = -x + y - z + 3$
 $\epsilon_{zz} = -x + y + 2z + 2$
 $\gamma_{xy} = -2x - y + 6$
 $\gamma_{yz} = -y + z$
 $\gamma_{xz} = -x - z$

Determine o campo dos deslocamentos que lhe está associado, admitindo que o deslocamento na origem das coordenadas é nulo.

Solução:

$u = x(x - 2y - z - 5) \times 10^{-6}$
 $v = y\left(-x + \frac{y}{2} - z + 3\right) \times 10^{-6}$
 $w = z(-x + y + z + 2) \times 10^{-6}$.

2.3.12. Relativamente ao campo de deformações a que se refere o problema anterior, determine a variação de volume de uma esfera com centro na origem das coordenadas e $1,5m$ de raio.

Solução: $\Delta V = 0$.

2.3.13. Ainda relativamente ao campo de deformações a que se refere o problema 2.3.11., determine as deformações principais e as respectivas direcções principais na origem das coordenadas.

Solução:

$\epsilon_1 = 4 \times 10^{-6}$; $\bar{n}_1 = (0,32, 0,95, 0)$
 $\epsilon_2 = 2 \times 10^{-6}$; $\bar{n}_2 = (0, 0, 1)$
 $\epsilon_3 = -6 \times 10^{-6}$ $\bar{n}_3 = (0,95, -0,32, 0)$.

2.3.14. O campo das deformações num meio material é definido pelas seguintes componentes cartesianas ($\times 10^{-6}$):

$\epsilon_{xx} = 3$
 $\epsilon_{yy} = y^4 + y^2 + z^4 + z^2 + 5$
 $\epsilon_{zz} = 6 + 3y^2 + 3z^2 + y^4 + z^4$
 $\gamma_{yz} = 4y^3z + 4yz^3 + 8yz + 10$
 $\gamma_{xz} = 0$; $\gamma_{xy} = 0$

Determine o campo dos deslocamentos que lhe está associado, admitindo que o deslocamento na origem das coordenadas é nulo.

Solução:

$u = 3x \times 10^{-6}$
 $v = \left(\frac{y^5}{5} + \frac{y^3}{3} + yz^4 + yz^2 + 5y\right) \times 10^{-6}$
 $w = \left(\frac{z^5}{5} + z^3 + 3y^2z + y^4z + 6z + 10y\right) \times 10^{-6}$.

2.3.15. Relativamente ao campo de deformações a que se refere o problema anterior, determine a variação de volume de um cubo com $1m$ de lado, centrado na origem das coordenadas e faces paralelas aos planos coordenados.

Solução: $\Delta V = 2,88cm^3$.

2.3.16. Ainda relativamente ao campo de deformações a que se refere o problema 2.3.14., determine as deformações principais e as respectivas direcções principais na origem das coordenadas.

Solução:

$\epsilon_1 = 10,5 \times 10^{-6}$; $\bar{n}_1 = (0, 0,67, 0,74)$

$$\begin{aligned}\varepsilon_2 &= 3 \times 10^{-6}; & \bar{n}_2 &= (1, 0, 0) \\ \varepsilon_3 &= 0,5 \times 10^{-6} & \bar{n}_3 &= (0, 0,74, -0,67).\end{aligned}$$

2.3.17. O estado de deformação num ponto P dum corpo material é definido pela seguinte matriz das deformações:

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} 30 & -10 & 0 \\ -10 & 80 & 0 \\ 0 & 0 & 60 \end{bmatrix} \times 10^{-6}$$

- a)- Demonstre que o plano xy é um dos planos principais de deformação em P.
b)- Calcule as deformações principais e as direcções principais no ponto P.

Solução: a) Porque são nulas as duas tensões de corte no plano xy ($\tau_{xx} = \tau_{yy} = 0$).

$$\begin{aligned}b) \quad \varepsilon_1 &= 82 \times 10^{-6}; & \bar{n}_1 &= (-0,19, 0,98, 0) \\ \varepsilon_2 &= 60 \times 10^{-6}; & \bar{n}_2 &= (0, 0, 1) \\ \varepsilon_3 &= 28 \times 10^{-6} & \bar{n}_3 &= (0,98, 0,19, 0).\end{aligned}$$

2.3.18. Relativamente ao estado de deformação a que se refere o problema anterior, determine as componentes normal e de corte da deformação sobre um plano π cuja normal está sobre o plano xy e igualmente inclinada relativamente aos eixos coordenados x e y .

Solução: $\varepsilon_\pi = 50 \times 10^{-6}$, $\gamma_\pi = 50 \times 10^{-6}$.

2.3.19. Relativamente ao estado de deformação a que se refere o problema 2.4.14, determine:

- a)- A orientação dos planos octaédricos no ponto P.
b)- As deformações octaédricas em P.

Solução:

$$\begin{aligned}a) \quad \bar{n}_{oct} &= (\pm 0,456, \pm 0,676, \pm 0,577) \\ b) \quad \varepsilon_{oct} &= 56,67 \times 10^{-6}; & \gamma_{oct} &= 44,34 \times 10^{-6}.\end{aligned}$$

2.3.20. O estado de deformação num ponto P dum corpo material é definido pelas seguintes componentes cartesianas,

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= 120 \times 10^{-6} & \gamma_{yz} &= -40 \times 10^{-6} \\ \varepsilon_{yy} &= 60 \times 10^{-6} & \gamma_{xz} &= 0 \\ \varepsilon_{zz} &= 60 \times 10^{-6} & \gamma_{xy} &= 0\end{aligned}$$

Determine as deformações principais e as direcções principais no ponto P.

Solução:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= 120 \times 10^{-6}; & \bar{n}_1 &= (1, 0, 0) \\ \varepsilon_2 &= 80 \times 10^{-6}; & \bar{n}_2 &= (0, \sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2) \\ \varepsilon_3 &= 40 \times 10^{-6} & \bar{n}_3 &= (0, \sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2).\end{aligned}$$

2.3.21. Relativamente ao estado de deformação a que se refere o problema anterior, determine as componentes normal e de corte da deformação sobre um plano π cuja normal está igualmente inclinada sobre os três eixos coordenados.

Solução: $\varepsilon_\pi = 66,7 \times 10^{-6}$, $\gamma_\pi = 75,4 \times 10^{-6}$

2.3.22. O estado de deformação num ponto P dum corpo material é definido pelas seguintes componentes cartesianas:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= 60 \times 10^{-6} & \gamma_{yz} &= 0 \\ \varepsilon_{yy} &= 120 \times 10^{-6} & \gamma_{xz} &= -40 \times 10^{-6} \\ \varepsilon_{zz} &= 60 \times 10^{-6} & \gamma_{xy} &= 0\end{aligned}$$

Determine, por via analítica, as deformações principais e as respectivas direcções principais no ponto considerado.

Solução:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= 120 \times 10^{-6}; & \bar{n}_1 &= (0, 1, 0) \\ \varepsilon_2 &= 80 \times 10^{-6}; & \bar{n}_2 &= (-\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2) \\ \varepsilon_3 &= 40 \times 10^{-6} & \bar{n}_3 &= (\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2).\end{aligned}$$

2.3.23. Resolva o problema anterior, agora recorrendo directamente à construção dos círculos de Mohr.

Solução:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= 120 \times 10^{-6}; & \bar{n}_1 &= (0, 1, 0) \\ \varepsilon_2 &= 80 \times 10^{-6}; & \bar{n}_2 &= (-\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2) \\ \varepsilon_3 &= 40 \times 10^{-6} & \bar{n}_3 &= (\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2).\end{aligned}$$

2.3.24. Um estado plano de deformação é definido pelas seguintes componentes cartesianas:

$$\varepsilon_{xx} = +80; \varepsilon_{yy} = +320; \gamma_{xy} = -90 \quad (\times 10^{-6})$$

Determine, analiticamente, as deformações principais e as respectivas direcções.

Solução: $\varepsilon_1 = +328 \times 10^{-6}$, $\varepsilon_2 = +72 \times 10^{-6}$
 $\theta_1 = -79,72^\circ$; $\theta_2 = +10,28^\circ$.

2.3.25. Ainda relativamente ao estado de deformação a que se refere o problema anterior, determine:

a)- A deformação de corte máxima no plano, a deformação normal correspondente e as direcções segundo as quais actuam.

a)- A deformação de corte máxima absoluta.

Solução: a) $\gamma_{max} = 256 \times 10^{-6}$, $\varepsilon_c = 200 \times 10^{-6}$
 $\theta_c = -34,72^\circ$ e $\theta'_c = +55,28^\circ$.

b) $\gamma_{max/abs} = 328 \times 10^{-6}$.

2.3.26. Resolva o problema 2.3.21, agora recorrendo directamente à construção dos círculos de Mohr.

Solução: $\varepsilon_1 = +328 \times 10^{-6}$, $\varepsilon_2 = +72 \times 10^{-6}$
 $\theta_1 = -79,72^\circ$; $\theta_2 = +10,28^\circ$.

2.3.27. Resolva o problema 2.3.22, agora recorrendo directamente à construção dos círculos de Mohr.

Solução: a) $\gamma_{max} = 256 \times 10^{-6}$, $\varepsilon_c = 200 \times 10^{-6}$
 $\theta_c = -34,72^\circ$ e $\theta'_c = +55,28^\circ$

b) $\gamma_{max/abs} = 328 \times 10^{-6}$.

2.3.28. Um estado plano de deformação é definido pelas seguintes componentes:

$$\varepsilon_{xx} = 320; \varepsilon_{yy} = 160; \gamma_{xy} = 300 \quad (\times 10^{-6})$$

Determine, analiticamente, as deformações principais e as respectivas direcções.

Solução: $\varepsilon_1 = +410 \times 10^{-6}$, $\varepsilon_2 = +70 \times 10^{-6}$
 $\theta_1 = +31^\circ$; $\theta_2 = -59^\circ$.

2.3.29. Ainda relativamente ao estado de deformação a que se refere o problema anterior, determine:

a)- A deformação de corte máxima no plano, a deformação normal correspondente e as direcções segundo as quais actuam.

a)- A deformação de corte máxima absoluta.

Solução: a) $\gamma_{max} = 340 \times 10^{-6}$, $\varepsilon_c = 240 \times 10^{-6}$
 $\theta_c = -14,04^\circ$ e $\theta'_c = +75,96^\circ$

b) $\gamma_{max/abs} = 410 \times 10^{-6}$

2.3.30. Resolva o problema 2.3.25, agora recorrendo directamente à construção do círculo de Mohr.

Solução: $\varepsilon_1 = +410 \times 10^{-6}$, $\varepsilon_2 = +70 \times 10^{-6}$
 $\theta_1 = +31^\circ$; $\theta_2 = -59^\circ$.

2.3.31. Resolva o problema 2.3.26, agora recorrendo directamente à construção do círculo de Mohr.

Solução: a) $\gamma_{max} = 340 \times 10^{-6}$, $\varepsilon_c = 240 \times 10^{-6}$
 $\theta_c = -14,04^\circ$ e $\theta'_c = +75,96^\circ$

b) $\gamma_{max/abs} = 410 \times 10^{-6}$.

2.3.32. Um estado plano de deformação é definido pelas seguintes componentes cartesianas:

$$\varepsilon_{xx} = +400; \varepsilon_{yy} = 0; \gamma_{xy} = +300 \quad (\times 10^{-6})$$

Determine, analiticamente, as deformações principais e as respectivas direcções.

Solução: $\varepsilon_1 = +450 \times 10^{-6}$, $\varepsilon_2 = -50 \times 10^{-6}$
 $\theta_1 = +18,43^\circ$; $\theta_2 = -71,57^\circ$.

2.3.33. Ainda relativamente ao estado de deformação a que se refere o problema anterior, determine:

a)- A deformação de corte máxima no plano, a deformação normal correspondente e as direcções segundo as quais actuam.

b)- A deformação de corte máxima absoluta.

Solução: a) $\gamma_{max} = 500 \times 10^{-6}$, $\varepsilon_c = 200 \times 10^{-6}$;
 $\theta_c = -26,57^\circ$ e $\theta'_c = +63,43^\circ$

b) $\gamma_{max/abs} = 500 \times 10^{-6}$.

2.3.34. Resolva o problema 2.3.29, agora recorrendo directamente à construção do círculo de Mohr.

Solução: $\varepsilon_1 = +450 \times 10^{-6}$, $\varepsilon_2 = -50 \times 10^{-6}$
 $\theta_1 = +18,43^\circ$; $\theta_2 = -71,57^\circ$.

2.3.35. Resolva o problema 2.3.30, agora recorrendo directamente à construção do círculo de Mohr.

Solução: a) $\gamma_{max} = 500 \times 10^{-6}$, $\varepsilon_c = 200 \times 10^{-6}$,
 $\theta_c = -26,57^\circ$ e $\theta'_c = +63,43^\circ$
 b) $\gamma_{max/abs} = 500 \times 10^{-6}$.

2.3.36. Um estado plano de deformação é definido pelas seguintes componentes cartesianas:

$$\varepsilon_{xx} = +250; \varepsilon_{yy} = 150; \gamma_{xy} = +140 (\times 10^{-6})$$

Determine, analiticamente, as deformações principais e as respectivas direcções.

Solução: $\varepsilon_1 = +286 \times 10^{-6}$, $\varepsilon_2 = +114 \times 10^{-6}$
 $\theta_1 = +27,23^\circ$; $\theta_2 = -62,77^\circ$.

2.3.37. Ainda relativamente ao estado de deformação a que se refere o problema anterior, determine:

a)- A deformação de corte máxima no plano, a deformação normal correspondente e as direcções segundo as quais actuam.

b)- A deformação de corte máxima absoluta.

Solução: a) $\gamma_{max} = 172 \times 10^{-6}$, $\varepsilon_c = 200 \times 10^{-6}$,
 $\theta_c = -17,77^\circ$ e $\theta'_c = +72,23^\circ$
 b) $\gamma_{max/abs} = 286 \times 10^{-6}$.

2.3.38. Resolva o problema 2.3.33, agora recorrendo directamente à construção do círculo de Mohr.

Solução: $\varepsilon_1 = +286 \times 10^{-6}$, $\varepsilon_2 = +114 \times 10^{-6}$
 $\theta_1 = +27,23^\circ$; $\theta_2 = -62,77^\circ$.

2.3.39. Resolva o problema 2.3.34, agora recorrendo directamente à construção do círculo de Mohr.

Solução: a) $\gamma_{max} = 172 \times 10^{-6}$, $\varepsilon_c = 200 \times 10^{-6}$,
 $\theta_c = -17,77^\circ$ e $\theta'_c = +72,23^\circ$
 b) $\gamma_{max/abs} = 286 \times 10^{-6}$.

2.3.40. Um estado plano de deformação é definido pelas seguintes componentes:

$$\varepsilon_{xx} = -200; \varepsilon_{yy} = -280; \gamma_{xy} = 320 (\times 10^{-6})$$

Determine, analiticamente, as deformações principais e as respectivas direcções.

Solução: $\varepsilon_1 = -75 \times 10^{-6}$, $\varepsilon_2 = -405 \times 10^{-6}$
 $\theta_1 = +37,98^\circ$; $\theta_2 = -52,02^\circ$.

2.3.41. Ainda relativamente ao estado de deformação a que se refere o problema anterior, determine:

a)- A deformação de corte máxima no plano, a deformação normal correspondente e as direcções segundo as quais actuam.

b)- A deformação de corte máxima absoluta.

Solução: a) $\gamma_{max} = 330 \times 10^{-6}$, $\varepsilon_c = -240 \times 10^{-6}$,
 $\theta_c = -7,02^\circ$ e $\theta'_c = +82,98^\circ$
 b) $\gamma_{max/abs} = 405 \times 10^{-6}$.

2.3.42. Resolva o problema 2.3.37, agora recorrendo directamente à construção do círculo de Mohr.

Solução: $\varepsilon_1 = -75 \times 10^{-6}$, $\varepsilon_2 = -405 \times 10^{-6}$
 $\theta_1 = +37,98^\circ$; $\theta_2 = -52,02^\circ$.

2.3.43. Resolva o problema 2.3.38, agora recorrendo directamente à construção do círculo de Mohr.

Solução: a) $\gamma_{max} = 330 \times 10^{-6}$, $\varepsilon_c = -240 \times 10^{-6}$,
 $\theta_c = -7,02^\circ$ e $\theta'_c = +82,98^\circ$
 b) $\gamma_{max/abs} = 405 \times 10^{-6}$.

2.3.44. Um estado plano de deformação é definido pelas seguintes componentes:

$$\varepsilon_{xx} = -360; \varepsilon_{yy} = 180; \gamma_{xy} = -320 (\times 10^{-6})$$

Determine, analiticamente, as deformações principais e as respectivas direcções.

Solução: $\varepsilon_1 = +224 \times 10^{-6}$, $\varepsilon_2 = -404 \times 10^{-6}$
 $\theta_1 = -74,67^\circ$; $\theta_2 = +15,33^\circ$.

2.3.45. Ainda relativamente ao estado de deformação a que se refere o problema anterior, determine:

a)- A deformação de corte máxima no plano, a deformação normal correspondente e as direcções segundo as quais actuam.

b)- A deformação de corte máxima absoluta.

Solução: a) $\gamma_{max} = 628 \times 10^{-6}$, $\varepsilon_c = -90 \times 10^{-6}$,
 $\theta_c = -29,67^\circ$ e $\theta'_c = +60,33^\circ$
 b) $\gamma_{max/abs} = 628 \times 10^{-6}$.

2.3.46. Resolva o problema 2.3.41, agora recorrendo directamente à construção do círculo de Mohr.

Solução: $\varepsilon_1 = +224 \times 10^{-6}$, $\varepsilon_2 = -404 \times 10^{-6}$
 $\theta_1 = -74,67^\circ$; $\theta_2 = +15,33^\circ$.

2.3.47. Resolva o problema 2.3.42, agora recorrendo directamente à construção do círculo de Mohr.

Solução: a) $\gamma_{max} = 628 \times 10^{-6}$, $\varepsilon_c = -90 \times 10^{-6}$;
 $\theta_c = -29,67^\circ$ e $\theta'_c = +60,33^\circ$

b) $\gamma_{max/abs} = 628 \times 10^{-6}$.

2.3.48. Num ponto P da superfície livre dum corpo material, mediram-se as deformações lineares segundo três direcções *a*, *b*, *c* espaçadas de 45° ($\times 10^{-6}$):

$$\varepsilon_a = 500; \quad \varepsilon_b = 200; \quad \varepsilon_c = 100$$

Determine, por via analítica:

a)- As deformações principais no ponto considerado e as respectivas orientações.

b)- O valor da deformação de corte máxima e a orientação do plano segundo o qual ela actua.

Solução:

a) $\varepsilon_1 = +523,6 \times 10^{-6}$; $\theta_1 = -13,28^\circ$
 $\varepsilon_2 = +76,4 \times 10^{-6}$; $\theta_2 = +76,72^\circ$

b) $\gamma_{max} = 447,2 \times 10^{-6}$
 $\theta_c = -58,28^\circ$ e $\theta'_c = +31,72^\circ$.

2.3.49. Resolva o problema anterior, agora recorrendo exclusivamente à construção do círculo de Mohr.

Solução:

a) $\varepsilon_1 = +523,6 \times 10^{-6}$; $\theta_1 = -13,28^\circ$
 $\varepsilon_2 = +76,4 \times 10^{-6}$; $\theta_2 = +76,72^\circ$

b) $\gamma_{max} = 447,2 \times 10^{-6}$
 $\theta_c = -58,28^\circ$ e $\theta'_c = +31,72^\circ$.

2.3.50. Utilizando uma roseta rectangular de três extensómetros montada num ponto P da superfície dum corpo material, mediram-se as deformações segundo três direcções espaçadas de 45° :

$$\varepsilon_{0^\circ} = -500 \times 10^{-6},$$

$$\varepsilon_{45^\circ} = 250 \times 10^{-6}$$

$$\varepsilon_{90^\circ} = 200 \times 10^{-6}$$

Determine, analiticamente:

a)- As deformações principais no ponto considerado e as respectivas direcções.

b)- O valor da deformação de corte máxima e a orientação dos planos segundo os quais ela actua.

Solução:

a) $\varepsilon_1 = +381,5 \times 10^{-6}$; $\theta_1 = +65,59^\circ$
 $\varepsilon_2 = -681,5 \times 10^{-6}$; $\theta_2 = -24,41^\circ$

b) $\gamma_{max} = 1063 \times 10^{-6}$
 $\theta_c = -69,41^\circ$ e $\theta'_c = +20,59^\circ$.

2.3.51. Resolva o problema anterior, agora recorrendo exclusivamente à construção do círculo de Mohr.

Solução:

a) $\varepsilon_1 = +381,5 \times 10^{-6}$; $\theta_1 = +65,59^\circ$
 $\varepsilon_2 = -681,5 \times 10^{-6}$; $\theta_2 = -24,41^\circ$

b) $\gamma_{max} = 1063 \times 10^{-6}$
 $\theta_c = -69,41^\circ$ e $\theta'_c = +20,59^\circ$.

2.3.52. Utilizando uma roseta rectangular de três extensómetros montada num ponto P da superfície dum corpo material, mediram-se as deformações segundo três direcções espaçadas de 45° :

$$\varepsilon_{0^\circ} = +600 \times 10^{-6},$$

$$\varepsilon_{45^\circ} = -300 \times 10^{-6}$$

$$\varepsilon_{90^\circ} = -220 \times 10^{-6}$$

Determine, analiticamente:

a)- As deformações principais no ponto considerado e as respectivas direcções.

b)- O valor da deformação de corte máxima e a orientação dos planos segundo os quais ela actua.

Solução:

a) $\varepsilon_1 = +828,9 \times 10^{-6}$; $\theta_1 = -25,04^\circ$
 $\varepsilon_2 = -448,9 \times 10^{-6}$; $\theta_2 = +64,96^\circ$

b) $\gamma_{max} = 1278 \times 10^{-6}$
 $\theta_c = -74,04^\circ$ e $\theta'_c = +19,96^\circ$.

2.3.53. Resolva o problema anterior, agora recorrendo exclusivamente à construção do círculo de Mohr.

Solução:

a) $\varepsilon_1 = +828,9 \times 10^{-6}$; $\theta_1 = -25,04^\circ$
 $\varepsilon_2 = -448,9 \times 10^{-6}$; $\theta_2 = +64,96^\circ$

b) $\gamma_{max}=1278 \times 10^{-6}$
 $\theta_c = -74,04^\circ$ e $\theta'_c = +19,96^\circ$.

2.3.54. Utilizando uma roseta rectangular de três extensómetros montada num ponto P da superfície dum corpo material, mediram-se as deformações segundo três direcções espaçadas de 45° :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{0^\circ} &= +400 \times 10^{-6}, \\ \varepsilon_{45^\circ} &= -200 \times 10^{-6} \\ \varepsilon_{90^\circ} &= -200 \times 10^{-6}\end{aligned}$$

Determine, analiticamente:

- a)- As deformações principais no ponto considerado e as respectivas direcções.
 b)- O valor da deformação de corte máxima e a orientação dos planos segundo os quais ela actua.

Solução:

a) $\varepsilon_1 = +514,5 \times 10^{-6}$; $\theta_1 = -21,55^\circ$
 $\varepsilon_2 = -334,5 \times 10^{-6}$; $\phi_2 = +68,45^\circ$
 b) $\gamma_{max} = 849 \times 10^{-6}$
 $\theta_c = -66,55^\circ$ e $\theta'_c = +23,45^\circ$.

2.3.55. Resolva o problema anterior, agora recorrendo exclusivamente à construção do círculo de Mohr.

Solução:

a) $\varepsilon_1 = +514,5 \times 10^{-6}$; $\theta_1 = -21,55^\circ$
 $\varepsilon_2 = -334,5 \times 10^{-6}$; $\phi_2 = +68,45^\circ$
 b) $\gamma_{max} = 849 \times 10^{-6}$
 $\theta_c = -66,55^\circ$ e $\theta'_c = +23,45^\circ$.

2.3.56. Utilizando uma roseta rectangular de três extensómetros montada num ponto P da superfície dum corpo material, mediram-se as deformações segundo três direcções espaçadas de 45° :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{0^\circ} &= +100 \times 10^{-6}, \\ \varepsilon_{45^\circ} &= +100 \times 10^{-6} \\ \varepsilon_{90^\circ} &= -500 \times 10^{-6}\end{aligned}$$

Determine, analiticamente:

- a)- As deformações principais no ponto considerado e as respectivas direcções.
 b)- O valor da deformação de corte máxima e a orientação dos planos segundo os quais ela actua.

Solução:

a) $\varepsilon_1 = +203,6 \times 10^{-6}$; $\theta_1 = +22,50^\circ$
 $\varepsilon_2 = -503,6 \times 10^{-6}$; $\phi_2 = -67,50^\circ$
 b) $\gamma_{max} = 707,1 \times 10^{-6}$
 $\theta_c = -22,50^\circ$ e $\theta'_c = +67,50^\circ$.

2.3.57. Resolva o problema anterior, agora recorrendo exclusivamente à construção do círculo de Mohr.

Solução:

a) $\varepsilon_1 = +203,6 \times 10^{-6}$; $\theta_1 = +22,50^\circ$
 $\varepsilon_2 = -503,6 \times 10^{-6}$; $\phi_2 = -67,50^\circ$
 b) $\gamma_{max} = 707,1 \times 10^{-6}$
 $\theta_c = -22,50^\circ$ e $\theta'_c = +67,50^\circ$.

2.3.58. Utilizando uma roseta delta de três extensómetros montada num ponto P da superfície dum corpo material, mediram-se as deformações segundo três direcções espaçadas de 120° :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{0^\circ} &= -300 \times 10^{-6}, \\ \varepsilon_{120^\circ} &= +200 \times 10^{-6} \\ \varepsilon_{240^\circ} &= -800 \times 10^{-6}\end{aligned}$$

Determine, analiticamente:

- a)- As deformações principais no ponto considerado e as respectivas direcções.
 b)- O valor da deformação de corte máxima e a orientação dos planos segundo os quais ela actua.

Solução:

a) $\varepsilon_1 = +277,4 \times 10^{-6}$; $\theta_1 = -45,00^\circ$
 $\varepsilon_2 = -877,4 \times 10^{-6}$; $\phi_2 = +45,00^\circ$
 b) $\gamma_{max} = 1155 \times 10^{-6}$
 $\theta_c = 0^\circ$ e $\theta'_c = \pm 90^\circ$.

2.3.59. Resolva o problema anterior, agora recorrendo exclusivamente à construção do círculo de Mohr.

Solução:

a) $\varepsilon_1 = +277,4 \times 10^{-6}$; $\theta_1 = -45,00^\circ$
 $\varepsilon_2 = -877,4 \times 10^{-6}$; $\phi_2 = +45,00^\circ$
 b) $\gamma_{max} = 1155 \times 10^{-6}$.

2.3.60. Utilizando uma roseta delta de três extensómetros montada num ponto P da superfície dum corpo material,

mediram-se as deformações segundo três direcções espaçadas de 120°:

$$\varepsilon_{0^\circ} = +300 \times 10^{-6},$$

$$\varepsilon_{120^\circ} = +600 \times 10^{-6}$$

$$\varepsilon_{240^\circ} = +200 \times 10^{-6}$$

Determine, analiticamente:

a)- As deformações principais no ponto considerado e as respectivas direcções.

b)- O valor da deformação de corte máxima e a orientação dos planos segundo os quais ela actua.

Solução:

a) $\varepsilon_1 = +607,0 \times 10^{-6}; \theta_1 = -53,05^\circ$

$\varepsilon_2 = +126,3 \times 10^{-6}; \theta_2 = +36,95^\circ$.

b) $\gamma_{max} = 480,7 \times 10^{-6}$
 $\theta_c = -8,05^\circ$ e $\theta'_c = +81,95^\circ$.

2.3.61. Resolva o problema anterior, agora recorrendo exclusivamente à construção do círculo de Mohr.

Solução:

a) $\varepsilon_1 = +607,0 \times 10^{-6}; \theta_1 = -53,05^\circ$

$\varepsilon_2 = +126,3 \times 10^{-6}; \theta_2 = +36,95^\circ$.

b) $\gamma_{max} = 480,7 \times 10^{-6}$
 $\theta_c = -8,05^\circ$ e $\theta'_c = +81,95^\circ$.

2.3.62. Utilizando uma roseta delta de três extensómetros montada num ponto P da superfície dum corpo material, mediram-se as deformações segundo três direcções espaçadas de 120°:

$$\varepsilon_{0^\circ} = +400 \times 10^{-6},$$

$$\varepsilon_{120^\circ} = -400 \times 10^{-6}$$

$$\varepsilon_{240^\circ} = +200 \times 10^{-6}$$

Determine, analiticamente:

a)- As deformações principais no ponto considerado e as respectivas direcções.

b)- O valor da deformação de corte máxima e a orientação dos planos segundo os quais ela actua.

Solução:

a) $\varepsilon_1 = +547,4 \times 10^{-6}; \theta_1 = +23,05^\circ$

$\varepsilon_2 = -414,1 \times 10^{-6}; \theta_2 = -66,95^\circ$

b) $\gamma_{max} = 961,5 \times 10^{-6}$
 $\theta_c = -21,95^\circ$ e $\theta'_c = +68,05^\circ$.

2.3.63. Resolva o problema anterior, agora recorrendo exclusivamente à construção do círculo de Mohr.

Solução:

a) $\varepsilon_1 = +547,4 \times 10^{-6}; \theta_1 = +23,05^\circ$

$\varepsilon_2 = -414,1 \times 10^{-6}; \theta_2 = -66,95^\circ$

b) $\gamma_{max} = 961,5 \times 10^{-6}$
 $\theta_c = -21,95^\circ$ e $\theta'_c = +68,05^\circ$.

2.3.64. Utilizando uma roseta delta de três extensómetros montada num ponto P da superfície dum corpo material, mediram-se as deformações segundo três direcções espaçadas de 120°:

$$\varepsilon_{0^\circ} = +300 \times 10^{-6},$$

$$\varepsilon_{120^\circ} = -300 \times 10^{-6}$$

$$\varepsilon_{240^\circ} = +300 \times 10^{-6}.$$

Determine, analiticamente:

a)- As deformações principais no ponto considerado e as respectivas direcções.

b)- O valor da deformação de corte máxima e a orientação dos planos segundo os quais ela actua.

Solução:

a) $\varepsilon_1 = +500 \times 10^{-6}; \theta_1 = +30^\circ$

$\varepsilon_2 = -300 \times 10^{-6}; \theta_2 = -60^\circ$

b) $\gamma_{max} = 800 \times 10^{-6}$
 $\theta_c = -15^\circ$ e $\theta'_c = +75^\circ$.

2.3.65. Resolva o problema anterior, agora recorrendo exclusivamente à construção do círculo de Mohr.

Solução:

a) $\varepsilon_1 = +500 \times 10^{-6}; \theta_1 = +30^\circ$

$\varepsilon_2 = -300 \times 10^{-6}; \theta_2 = -60^\circ$.

b) $\gamma_{max} = 800 \times 10^{-6}$
 $\theta_c = -15^\circ$ e $\theta'_c = +75^\circ$.

2.4. BIBLIOGRAFIA

- [2.1]-Araújo, F.C., "Elasticidade e Plasticidade", Ed. Imprensa Portuguesa, Porto (1961).
- [2.2]-Beer, Ferdinand P.; Johnston, E. Russell Jr., and DeWolf, John T., "Resistência dos Materiais", Ed. McGraw-Hill Book Company, São Paulo, Brasil (2006).
- [2.3]-Boresi, A.P., "Elasticity in Engineering Mechanics", Ed. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J. (1965).
- [2.4]-Branco, C.A.M., "Mecânica dos Materiais", Ed. Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa (1985).
- [2.5]-Dally, J.W. and Riley, E.W., "Experimental Stress Analysis", Ed. McGraw-Hill Book Company, New York (1965).
- [2.6]-Fenner R.T., "Engineering Elasticity", Ed. John Wiley & Sons, New York (1986).
- [2.7]-Ford, H. and Alexander, J.M., "Advanced Mechanics of Materials", Ed. Longmans, Green and Co. Ltd., London (1963).
- [2.8]-Gere, James M., "Mecânica dos Materiais", Ed. Thomson, São Paulo, Brasil (2003).
- [2.9]-Gere, James M. and Timoshenko, S.P., "Mechanics of Materials", Ed. Chapman & Hall, New York (1995).
- [2.10]-Massonnet, C., "Résistance des Matériaux, Dunod, Paris (1968).
- [2.10]-Nash, William A., "Resistência de Materiais", Ed. McGraw-Hill, Lisboa (2001).
- [2.11]-Silva Gomes, J.F., "Mecânica dos Sólidos e Resistência dos Materiais", Edições INEGI, Porto (2004).
- [2.12]-Silva Gomes, J.F., "Análise de Tensões em Placas, Cascas e Reservatórios", Edições INEGI, Porto (2006).
- [2.13]-Sokolnikoff, I.S., "Mathematical Theory of Elasticity", Ed. McGraw-Hill Book Company, New York (1956).
- [2.14]-Southwell, R.V., "An Introduction to The Theory of Elasticity", Ed. Dover Publications, Inc., New York (1969).
- [2.15]-Timoshenko, S.P. and D. Young, "Elements of Strength of Materials", Ed. Van Nostrans Reinhold Company, New York (1968).

[2.16]-Timoshenko, S.P. and Goodier, J.N., "Theory of Elasticity", Ed. McGraw-Hill Book Company, New York (1970).

[2.17]-Ugural, A.C. and Fenster, S.K., "Advanced Strength and Applied Elasticity", Ed. Elsevier North-Holland Publishing Company, Inc., New York (1975).

[2.18]-Wang, C.T., "Applied Elasticity", Ed. McGraw-Hill Book Company, New York (1953).