

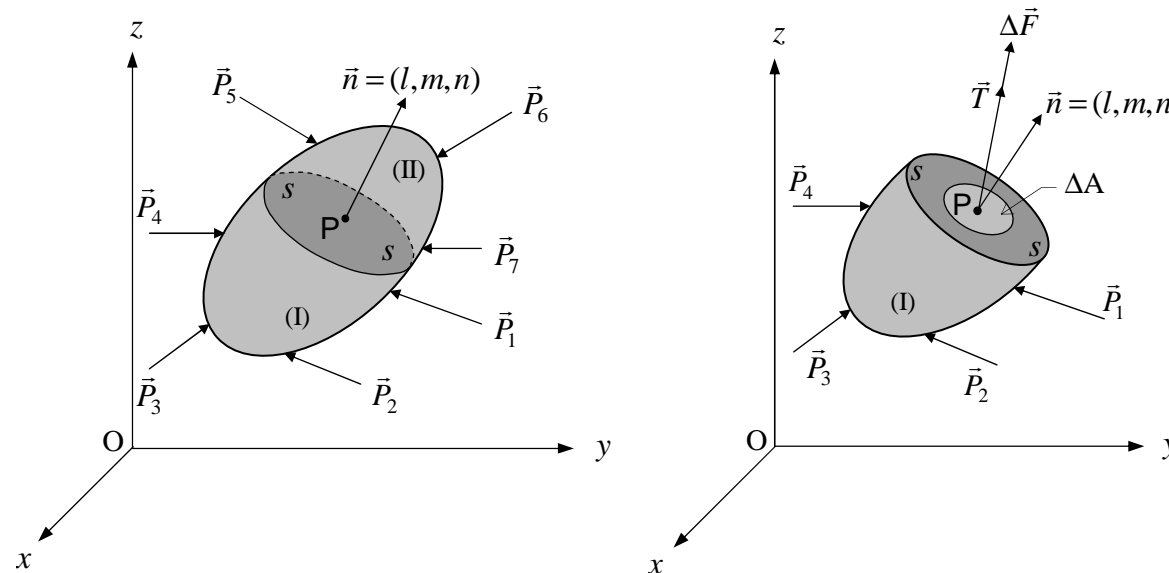
**CAPÍTULO I
ANÁLISE DAS TENSÕES**

1ª AULA

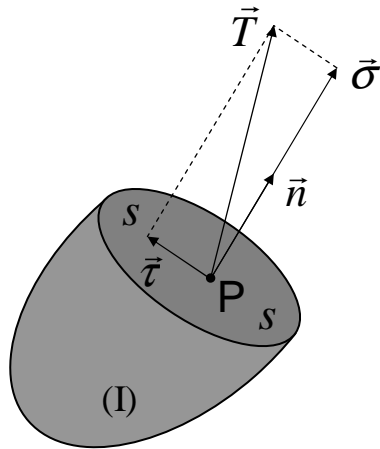
1.1. RESUMO DA TEORIA

1.1.1. Introdução. O Conceito de Tensão

Há, fundamentalmente, dois tipos distintos de forças exteriores que podem ser considerados: (i)-forças de superfície e (ii)-forças de volume. Considere-se o corpo (C) em equilíbrio sob a acção destes dois tipos de forças:



A Tensão Resultante $\vec{T}(P, \vec{n})$, no ponto P, para uma superfície de corte perpendicular a $\vec{n} = (l, m, n)$, define-se pela expressão seguinte:

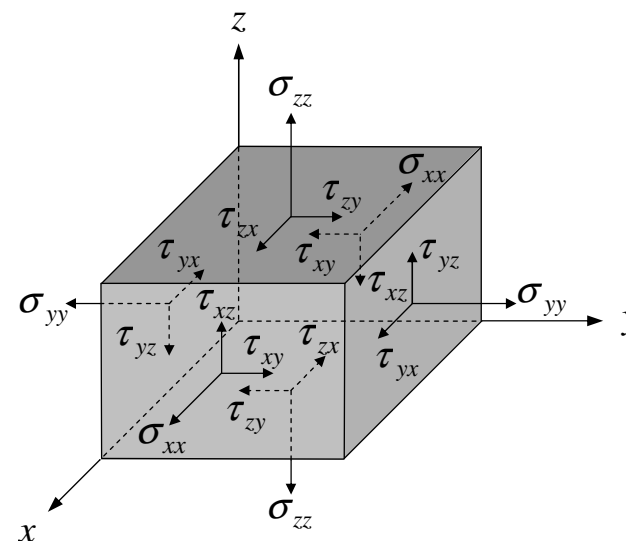
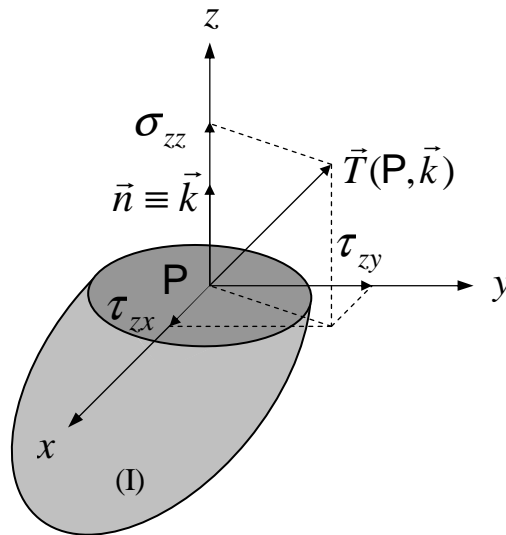


$$\vec{T} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta A}$$

Em geral, o vector tensão resultante $\vec{T}_{(P, \vec{n})}$ tem uma direcção distinta da normal \vec{n} e poderá decompor-se segundo duas direcções ortogonais, conforme ilustrado na figura:

Uma componente perpendicular ao plano de corte, designada por *tensão normal* e representada por σ , e uma segunda componente no plano de corte, designada por *tensão tangencial* ou *tensão de corte*, representada por τ .

1.1.2. Componentes Cartesianas da Tensão



Em cada ponto $P(x,y,z)$, é possível definir um conjunto de nove componentes cartesianas do estado de tensão nesse ponto, que podem ser agrupadas numa matriz quadrada sob a forma seguinte:

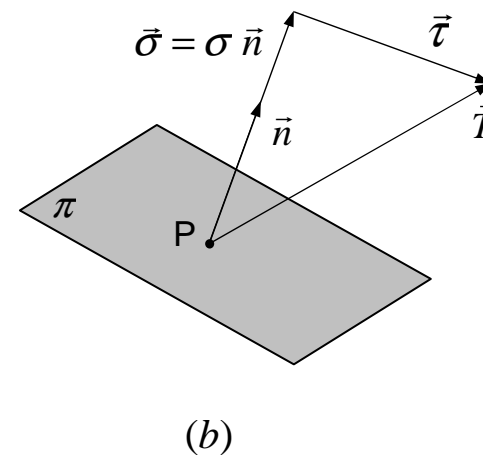
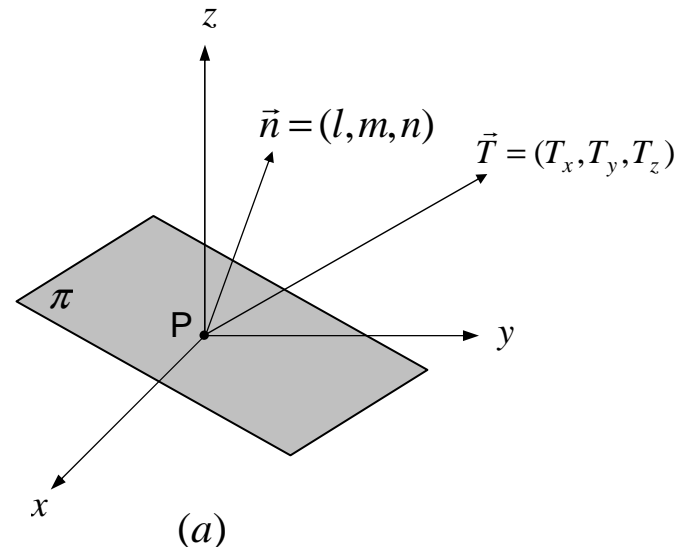
Matriz das Tensões:

$$[\tau] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

Vector Tensão:

$$\sigma = \{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

1.1.3. Tensão para uma Orientação Arbitrária



$$\begin{aligned}T_x &= l\sigma_{xx} + m\tau_{xy} + n\tau_{xz} \\T_y &= l\tau_{yx} + m\sigma_{yy} + n\tau_{yz} \\T_z &= l\tau_{zx} + m\tau_{zy} + n\sigma_{zz}\end{aligned}$$

ou, sob a forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix}$$

As componentes normal (σ) e tangencial (τ) da tensão em P são dadas, respectivamente, pelas expressões seguintes:

$$\sigma = \sigma_{xx}l^2 + \sigma_{yy}m^2 + \sigma_{zz}n^2 + 2\tau_{xy}lm + 2\tau_{yz}mn + 2\tau_{zx}nl \quad (1)$$

e

$$\tau^2 = T_x^2 + T_y^2 + T_z^2 - \sigma^2 \quad (2)$$

A direcção da tensão de corte τ no plano π , $\vec{n}_c = (l_c, m_c, n_c)$, fica definida pelos respectivos co-senos directores:

$$\begin{aligned}l_c &= (T_x - l\sigma) / \tau \\m_c &= (T_y - m\sigma) / \tau \\n_c &= (T_z - n\sigma) / \tau\end{aligned}$$

2ª AULA

1.1.4. Equações de Equilíbrio

As seis funções que definem o campo das tensões estão ligadas por três equações diferenciais:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + F_x = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} + F_y = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + F_z = 0 \end{cases}$$

Estas são as *equações de equilíbrio* da teoria da elasticidade ou equações de equilíbrio das tensões.

Além das equações de equilíbrio, verifica-se também que as componentes de corte em cada ponto são iguais duas a duas, isto é:

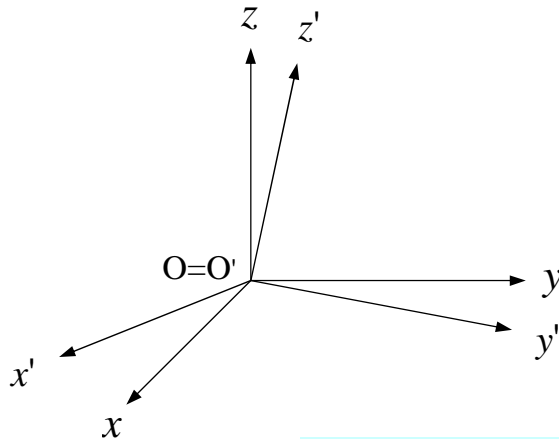
$$\begin{aligned} \tau_{yx} &= \tau_{xy} \\ \tau_{zy} &= \tau_{yz} \\ \tau_{zx} &= \tau_{xz} \end{aligned}$$

A simetria das tensões tangenciais expressa pelas equações anteriores implica uma *lei de reciprocidade* mais geral, que se pode exprimir através da seguinte equação vectorial:

$$\vec{T}(\mathbf{P}, \vec{n}) | \vec{n}' = \vec{T}(\mathbf{P}, \vec{n}') | \vec{n}$$

Este resultado traduz a denominada *lei da reciprocidade das tensões* ou *Teorema de Cauchy*.

1.1.5. Leis de Transformação das Tensões



Por aplicação das equações anteriores para a tensão segundo uma direcção arbitrária, podem calcular-se as componentes cartesianas da tensão referidas a um referencial particular $Ox'y'z'$, em função das componentes cartesianas da tensão no referencial global $Oxyz$ e dos co-senos directores que definem a posição relativa dos dois referenciais:

$$\begin{aligned} \sigma_{x'x'} &= \sigma_{xx}l_x'^2 + \sigma_{yy}m_x'^2 + \sigma_{zz}n_x'^2 + 2\tau_{yz}m_x'n_x' + 2\tau_{xz}n_x'l_x' + 2\tau_{xy}l_x'm_x' \\ \sigma_{y'y'} &= \sigma_{xx}l_y'^2 + \sigma_{yy}m_y'^2 + \sigma_{zz}n_y'^2 + 2\tau_{yz}m_y'n_y' + 2\tau_{xz}n_y'l_y' + 2\tau_{xy}l_y'm_y' \\ \sigma_{z'z'} &= \sigma_{xx}l_z'^2 + \sigma_{yy}m_z'^2 + \sigma_{zz}n_z'^2 + 2\tau_{yz}m_z'n_z' + 2\tau_{xz}n_z'l_z' + 2\tau_{xy}l_z'm_z' \\ \tau_{y'z'} &= \sigma_{xx}l_y'l_z' + \sigma_{yy}m_y'm_z' + \sigma_{zz}n_y'n_z' + \tau_{yz}(m_y'n_z' + n_y'm_z') \\ &\quad + \tau_{xz}(n_y'l_z' + l_y'n_z') + \tau_{xy}(l_y'm_z' + m_y'l_z') \\ \tau_{x'z'} &= \sigma_{xx}l_z'l_x' + \sigma_{yy}m_z'm_x' + \sigma_{zz}n_z'n_x' + \tau_{yz}(m_z'n_x' + n_z'm_x') \\ &\quad + \tau_{xz}(n_z'l_x' + l_z'n_x') + \tau_{xy}(l_z'm_x' + m_z'l_x') \\ \tau_{x'y'} &= \sigma_{xx}l_x'l_y' + \sigma_{yy}m_x'm_y' + \sigma_{zz}n_x'n_y' + \tau_{yz}(m_x'n_y' + n_x'm_y') \\ &\quad + \tau_{xz}(n_x'l_y' + l_x'n_y') + \tau_{xy}(l_x'm_y' + m_x'l_y') \end{aligned}$$

ou, inversamente:

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= \sigma_{x'x'}l_x'^2 + \sigma_{y'y'}l_y'^2 + \sigma_{z'z'}l_z'^2 + 2\tau_{y'z'}l_y'l_z' + 2\tau_{x'z'}l_z'l_x' + 2\tau_{x'y'}l_x'l_y' \\
\sigma_{yy} &= \sigma_{x'x'}m_x'^2 + \sigma_{y'y'}m_y'^2 + \sigma_{z'z'}m_z'^2 + 2\tau_{y'z'}m_y'm_z' + 2\tau_{x'z'}m_z'm_x' + 2\tau_{x'y'}m_x'm_y' \\
\sigma_{zz} &= \sigma_{x'x'}n_x'^2 + \sigma_{y'y'}n_y'^2 + \sigma_{z'z'}n_z'^2 + 2\tau_{y'z'}n_y'n_z' + 2\tau_{x'z'}n_z'n_x' + 2\tau_{x'y'}n_x'n_y' \\
\tau_{yz} &= \sigma_{x'x'}m_x'n_x' + \sigma_{y'y'}m_y'n_y' + \sigma_{z'z'}l_z'n_z' + \tau_{y'z'}(m_y'n_z' + m_z'n_y') \\
&\quad + \tau_{x'z'}(m_z'n_x' + m_x'n_z') + \tau_{x'y'}(m_x'n_y' + m_y'n_x') \\
\tau_{xz} &= \sigma_{x'x'}n_x'l_x' + \sigma_{y'y'}n_y'l_y' + \sigma_{z'z'}n_z'l_z' + \tau_{y'z'}(n_y'l_z' + n_z'l_y') \\
&\quad + \tau_{x'z'}(n_z'l_x' + n_x'l_z') + \tau_{x'y'}(n_x'l_y' + n_y'l_x') \\
\tau_{xy} &= \sigma_{x'x'}l_x'm_x' + \sigma_{y'y'}l_y'm_y' + \sigma_{z'z'}l_z'm_z' + \tau_{y'z'}(l_y'm_z' + l_z'm_y') \\
&\quad + \tau_{x'y'}(l_z'm_x' + l_x'm_z') + \tau_{x'y'}(l_x'm_y' + l_y'm_x')
\end{aligned}$$

Estas equações de transformação podem escrever-se de uma maneira concentrada, sob a forma matricial seguinte:

$$[\boldsymbol{\tau}'] = [\mathbf{L}] [\boldsymbol{\tau}] [\mathbf{L}]^T$$

onde $[\mathbf{L}]$ é a matriz de transformação de coordenadas e $[\mathbf{L}]^T$ é a respectiva matriz transposta.

Inversamente, pode escrever-se:

$$[\boldsymbol{\tau}] = [\mathbf{L}]^T [\boldsymbol{\tau}'] [\mathbf{L}]$$

Em alternativa, quando se utiliza a notação vectorial da tensão, as equações de transformação das tensões escrevem-se:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [\mathbf{T}] \begin{Bmatrix} \sigma_{x'x'} \\ \sigma_{y'y'} \\ \sigma_{z'z'} \\ \tau_{y'z'} \\ \tau_{x'z'} \\ \tau_{x'y'} \end{Bmatrix}$$

ou, simplesmente :

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbf{T}] \{\boldsymbol{\sigma}'\}$$

onde:

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} & T_{15} & T_{16} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{24} & T_{25} & T_{26} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & T_{34} & T_{35} & T_{36} \\ T_{41} & T_{42} & T_{43} & T_{44} & T_{45} & T_{46} \\ T_{51} & T_{52} & T_{53} & T_{54} & T_{55} & T_{56} \\ T_{61} & T_{62} & T_{63} & T_{64} & T_{65} & T_{66} \end{bmatrix}$$

com:

$$\begin{aligned} T_{11} &= l_x'^2; & T_{12} &= l_y'^2; & T_{13} &= l_z'^2; & T_{14} &= 2l_y'l_z'; & T_{15} &= 2l_z'l_x'; & T_{16} &= 2l_x'l_y'; & T_{21} &= m_x'^2; & T_{22} &= m_y'^2; & T_{23} &= m_z'^2; & T_{24} &= 2m_y'm_z'; \\ T_{25} &= 2m_z'm_x'; & T_{26} &= 2m_x'm_y'; & T_{31} &= n_x'^2; & T_{32} &= n_y'^2; & T_{33} &= n_z'^2; & T_{34} &= 2n_y'n_z'; & T_{35} &= 2n_z'n_x'; & T_{36} &= 2n_x'n_y'; \\ T_{41} &= m_x'n_x'; & T_{42} &= m_y'n_y'; & T_{43} &= l_z'n_z'; & T_{44} &= m_y'n_z' + m_z'n_y'; & T_{45} &= m_z'n_x' + m_x'n_z'; & T_{46} &= m_x'n_y' + m_y'n_x'; \end{aligned}$$

$$T_{51} = l_x n_x'; \quad T_{52} = l_y n_y'; \quad T_{53} = l_z n_z'; \quad T_{54} = n_y l_z' + n_z l_y'; \quad T_{55} = n_z l_x' + n_x l_z'; \quad T_{56} = n_x l_y' + n_y l_x'; \quad T_{61} = l_x m_x';$$

$$T_{62} = l_y m_y'; \quad T_{63} = l_z m_z'; \quad T_{64} = l_y m_z' + l_z m_y'; \quad T_{65} = l_z m_x' + l_x m_z'; \quad T_{66} = l_x m_y' + l_y m_x'.$$

A matriz $[T]$ definida pelos coeficientes T_{ij} é designada por *matriz de transformação das tensões*. Inversamente, pode escrever-se:

$$\{\sigma'\} = [T]^{-1} \{\sigma\} = [R] \{\sigma\}$$

onde:

$$[R] = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & R_{14} & R_{15} & R_{16} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & R_{24} & R_{25} & R_{26} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & R_{34} & R_{35} & R_{36} \\ R_{41} & R_{42} & R_{43} & R_{44} & R_{45} & R_{46} \\ R_{51} & R_{52} & R_{53} & R_{54} & R_{55} & R_{56} \\ R_{61} & R_{62} & R_{63} & R_{64} & R_{65} & R_{66} \end{bmatrix}$$

com:

$$R_{11} = l_x^2; \quad R_{12} = m_x^2; \quad R_{13} = n_x^2; \quad R_{14} = 2m_x n_x'; \quad R_{15} = 2n_x l_x'; \quad R_{16} = 2l_x m_x'; \quad R_{21} = l_y^2; \quad R_{22} = m_y^2; \quad R_{23} = n_y^2;$$

$$R_{24} = 2m_y n_y'; \quad R_{25} = 2n_y l_y'; \quad R_{26} = 2l_y m_y'; \quad R_{31} = l_z^2; \quad R_{32} = m_z^2; \quad R_{33} = n_z^2; \quad R_{34} = 2m_z n_z'; \quad R_{35} = 2n_z l_z';$$

$$R_{36} = 2l_z m_z'; \quad R_{41} = l_y l_z'; \quad R_{42} = m_y m_z'; \quad R_{43} = n_y n_z'; \quad R_{44} = m_y n_z' + n_y m_z'; \quad R_{45} = n_y l_z' + l_y n_z';$$

$$R_{51} = l_x l_z'; \quad R_{52} = m_x m_z'; \quad R_{53} = n_x n_z'; \quad R_{54} = m_z n_x' + n_z m_x'; \quad R_{55} = n_z l_x' + l_z n_x'; \quad R_{56} = l_z m_x' + m_z l_x'; \quad R_{61} = l_x l_y';$$

$$R_{62} = m_x m_y'; \quad R_{63} = n_x n_y'; \quad R_{64} = m_x n_y' + n_x m_y'; \quad R_{65} = n_x l_y' + l_x n_y'; \quad R_{66} = l_x m_y' + m_x l_y'$$

Independentemente do referencial que se utilize, são sempre constantes as seguintes grandezas:

1º Invariante das Tensões

$$\sigma_{x'x'} + \sigma_{y'y'} + \sigma_{z'z'} = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = I_1$$

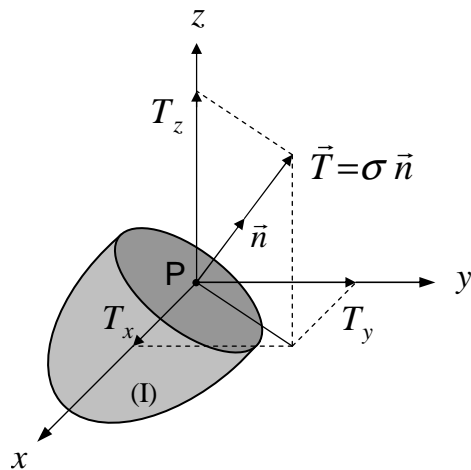
2º Invariante das Tensões

$$\sigma_{x'x'}\sigma_{y'y'} + \sigma_{y'y'}\sigma_{z'z'} + \sigma_{z'z'}\sigma_{x'x'} - \tau_{x'y'}^2 - \tau_{y'z'}^2 - \tau_{z'x'}^2 = \sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} + \sigma_{zz}\sigma_{xx} - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = I_2$$

3º Invariante das Tensões

$$\begin{aligned} \sigma_{x'x'}\sigma_{y'y'}\sigma_{z'z'} - \sigma_{x'x'}\tau_{y'z'}^2 - \sigma_{y'y'}\tau_{z'x'}^2 - \sigma_{z'z'}\tau_{x'y'}^2 + 2\tau_{x'y'}\tau_{y'z'}\tau_{z'x'} = \\ = \sigma_{xx}\sigma_{yy}\sigma_{zz} - \sigma_{xx}\tau_{yz}^2 - \sigma_{yy}\tau_{zx}^2 - \sigma_{zz}\tau_{xy}^2 + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} = I_3 \end{aligned}$$

1.1.6. Tensões Principais



$$\vec{T} = \sigma \vec{n}:$$

$$\begin{vmatrix} \sigma_{xx} - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$$

(Tensões Principais em P)

ou seja, desenvolvendo a expressão para o determinante acima:

$$\sigma^3 - (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})\sigma^2 + (\sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} + \sigma_{zz}\sigma_{xx} - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{xz}^2)\sigma - (\sigma_{xx}\sigma_{yy}\sigma_{zz} - \sigma_{xx}\tau_{yz}^2 - \sigma_{yy}\tau_{xz}^2 - \sigma_{zz}\tau_{xy}^2 + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{xz}) = 0$$

Para cada uma dessas tensões principais, a respectiva direcção é dada pelo sistema de equações:

$$\begin{cases} (\sigma_{xx} - \sigma)l + \tau_{xy}m + \tau_{xz}n = 0 \\ \tau_{xy}l + (\sigma_{yy} - \sigma)m + \tau_{yz}n = 0 \\ \tau_{xz}l + \tau_{yz}m + (\sigma_{zz} - \sigma)n = 0 \end{cases}$$

onde σ assume os valores σ_1 , σ_2 ou σ_3 , respectivamente.

Relativamente ao triedro principal $\{\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3\}$, as expressões (1) e (2) para as componentes da tensão normal e de corte para a um plano qualquer, (l, m, n) , são as seguintes:

$$\sigma = l^2\sigma_1 + m^2\sigma_2 + n^2\sigma_3$$

e

$$\begin{aligned} \tau^2 &= l^2\sigma_1^2 + m^2\sigma_2^2 + n^2\sigma_3^2 - (l^2\sigma_1 + m^2\sigma_2 + n^2\sigma_3)^2 \\ &= (\sigma_1 - \sigma_2)^2 l^2 m^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 m^2 n^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 n^2 l^2 \end{aligned}$$

1.1.7. Valores Máximos das Tensões Normais e de Corte

Os valores estacionários das *tensões normais* num ponto ocorrem para planos de corte coincidentes com os planos principais de tensão nesse ponto. Considerando a convenção habitual em tomar $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, o valor máximo da tensão normal é igual à maior das tensões principais σ_1 e o valor mínimo é igual a σ_3 .

Quanto à tensão de corte, o valor máximo em cada ponto é dado pela expressão seguinte:

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

e ocorre para um plano de corte definido por um vetor normal \vec{n}_c , cujos co-senos directores no triedro principal são os seguintes:

$$\vec{n}_c = (\pm\sqrt{2}/2, 0, \pm\sqrt{2}/2)$$

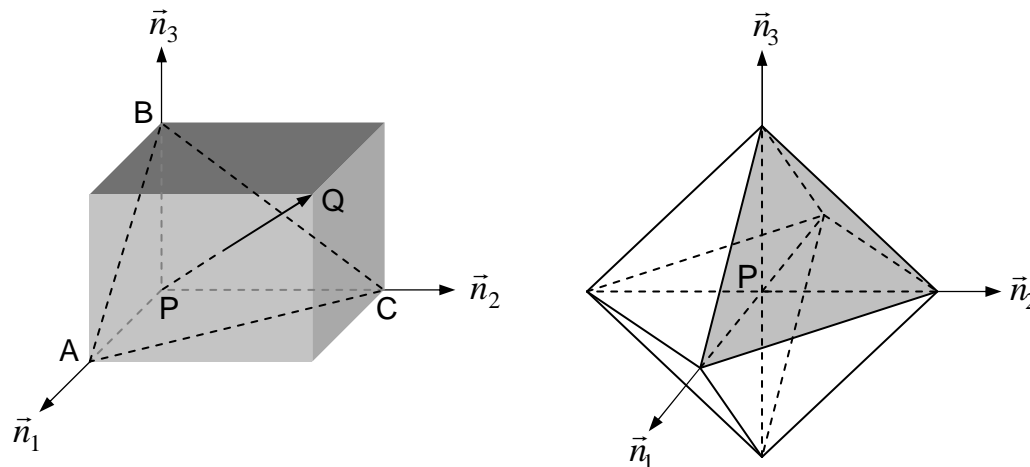
1.1.8. Tensões Octaédricas

3ª AULA

As direcções e planos cujos co-senos directores, no referencial principal no ponto P, satisfazem a condição:

$$l^2 = m^2 = n^2 = \frac{1}{3}$$

são designadas direcções e *planos octaédricos* no ponto considerado:



A área triangular ABC na Fig. 1.9 representa o plano octaédrico correspondente ao primeiro quadrante, perpendicular à diagonal PQ. Considerando todos os planos octaédricos à volta do ponto, obtém-se um octaedro regular, conforme ilustrado na Fig.1.10.

A tensão normal em qualquer um dos planos octaédricos obtém-se através da expressão habitual definida pela equação (1.25):

$$\sigma_{oct} = l^2 \sigma_1 + m^2 \sigma_2 + n^2 \sigma_3 = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) = \sigma_m$$

A tensão de corte octaédrica τ_{oct} é a tensão num plano octaédrico e obtém-se a partir da equação (1.26), fazendo $l^2=m^2=n^2=1/3$, isto é:

$$\begin{aligned} \tau_{oct}^2 &= (\sigma_1 - \sigma_2)^2 l^2 m^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 m^2 n^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 n^2 l^2 \\ &= \frac{1}{9} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right] \\ &= \frac{1}{9} \left[(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6\tau_{xy}^2 + 6\tau_{yz}^2 + 6\tau_{zx}^2 \right] \end{aligned}$$

1.1.9. Construção de Mohr

(i)-Num diagrama rectangular plano, marque-se sobre o eixo das abcissas os pontos P_1 , P_2 e P_3 de tal modo que:

$$OP_1 = \sigma_1, \quad OP_2 = \sigma_2, \quad OP_3 = \sigma_3$$

(ii)-Tomando os segmentos P_2P_3 , P_1P_3 e P_1P_2 como diâmetros, desenhar os três *círculos de Mohr* (1), (2) e (3) com centros nos pontos médios C_1 , C_2 e C_3 , respectivamente.

(iii)-A partir da vertical t_1 em P_1 marcar o ângulo $\alpha = \arccos(l)$ que define a recta $P_1Q_3Q_2$, que intersecta os *círculos de Mohr* (2) e (3) nos pontos Q_2 e Q_3 , os quais estão sobre uma mesma circunferência com centro em C_1 .

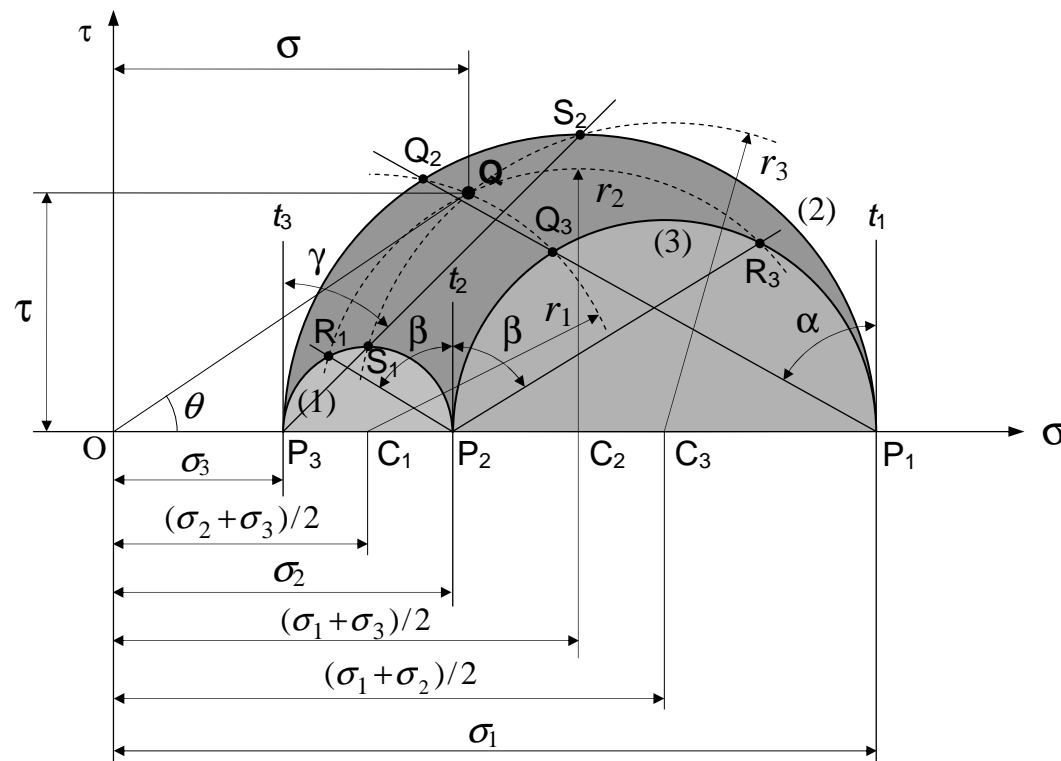
(iv)-Com centro nesse ponto C_1 , desenhar o arco de circunferência Q_2QQ_3 ;

(v)-Seguindo um procedimento análogo a (iii), a partir da vertical t_3 em P_3 , marcar o ângulo $\gamma = \arccos(n)$ e desenhar a recta $P_3S_1S_2$ que intersecta os círculos de Mohr (1) e (2) nos pontos S_1 e S_2 , respectivamente.

(vi)- Com centro no ponto C_3 , desenhar o arco de circunferência S_1QS_2 ;

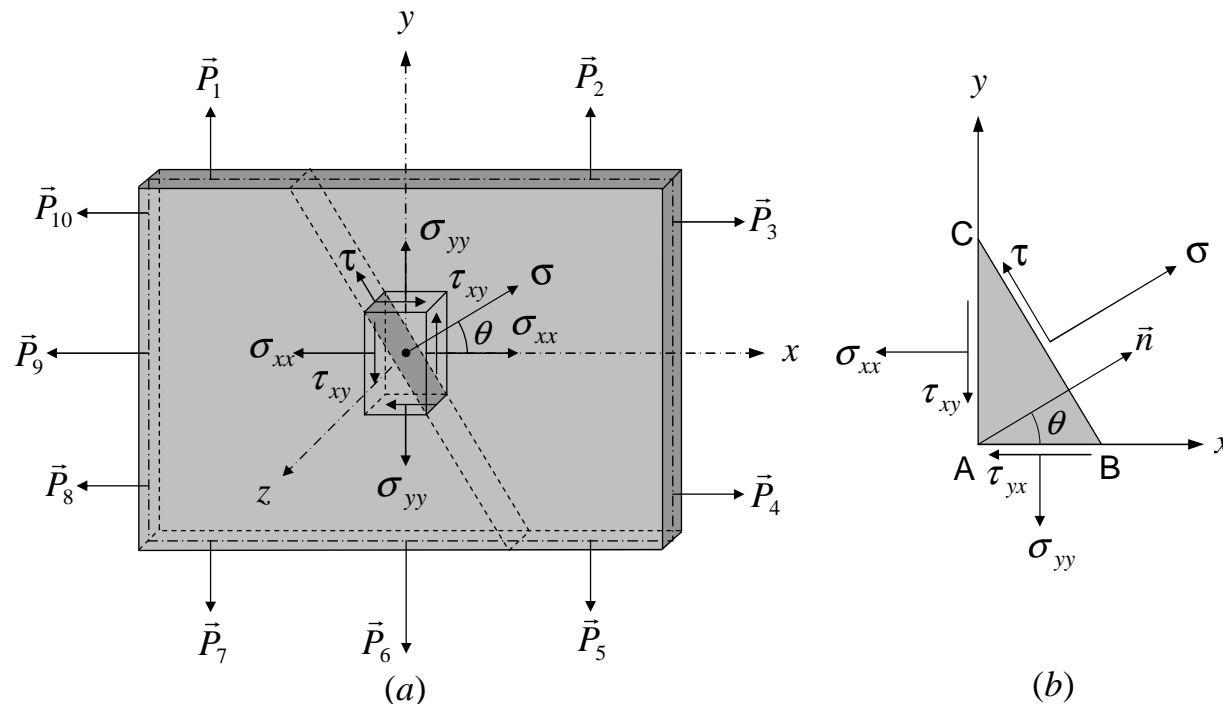
(vii)-A intersecção dos dois arcos de circunferência (iv) e (vi) define o ponto Q:

$$Q \equiv \left[(l^2\sigma_1 + m^2\sigma_2 + n^2\sigma_3), \sqrt{l^2\sigma_1^2 + m^2\sigma_2^2 + n^2\sigma_3^2 - (l^2\sigma_1 + m^2\sigma_2 + n^2\sigma_3)^2} \right]$$



1.1.10. Estado Plano de Tensão

Um estado plano de tensão corresponde ao caso em que as forças de volume e as forças de superfície definem um plano único - o plano (x,y) , por exemplo - que contém as tensões em cada ponto:



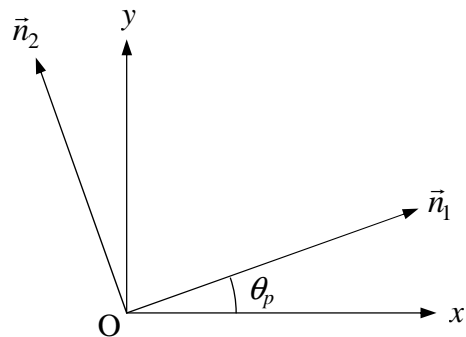
Um estado plano de tensão fica caracterizado pelas três componentes $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}$, sendo nulas as restantes componentes, isto é, $\sigma_{zz}=\tau_{xz}=\tau_{yz} = 0$.

Qualquer plano de corte perpendicular ao plano da placa ficará identificado pelo ângulo θ que a respectiva normal faz com a direcção do eixo Ox . Considerando o equilíbrio do elemento triangular ABC, Fig. (b), obtém-se:

$$\sigma = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos(2\theta) + \tau_{xy} \sin(2\theta) \quad (3)$$

$$\tau = -\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \sin(2\theta) + \tau_{xy} \cos(2\theta) \quad (4)$$

A tensão de corte \square anula-se para um ângulo θ_p tal que:



$$\operatorname{tg}(2\theta_p) = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} \quad (5)$$

Atendendo a que $\operatorname{tg}(2\theta_p) = \operatorname{tg}(2\theta_p + \pi)$, existem duas direcções mutuamente perpendiculares que satisfazem a equação anterior. Estas são as duas direcções principais de tensão \vec{n}_1 e \vec{n}_2 no plano (x, y) .

Ao utilizar-se a equação anterior é habitual recorrer à seguinte regra prática para identificar os ângulos θ_1 e θ_2 :

- (i) - Se $\tau_{xy} > 0$, o ângulo θ_1 está no intervalo $0 < \theta_1 < \pi/2$
- (ii) - Se $\tau_{xy} < 0$, o ângulo θ_1 está no intervalo $-\pi/2 < \theta_1 < 0$

As tensões principais correspondentes são:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} && (\sigma_{\text{máx}}) \\ \sigma_2 &= \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} && (\sigma_{\text{mín}}) \end{aligned} \quad (6)$$

1.1.11. Tensões Principais Secundárias

Na situação mais geral duma solitação tridimensional, as equações (3)-(6) continuam válidas para as tensões no plano (x, y) , embora possam ser diferentes de zero as componentes σ_{zz} , τ_{xz} e τ_{yz} . Neste caso as tensões dadas pelas equações (6) dizem-se as *tensões principais secundárias* no plano (x, y) e representam-se pelos símbolos σ'_1 e σ'_2 , respectivamente:

$$\sigma'_1 = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma'_2 = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

As direcções definidas pela equação (1.34) são as *direcções principais secundárias* \bar{n}'_1 e \bar{n}'_2 em P, no plano (x, y) .

1.1.12. Círculo de Mohr para Tensões num Plano

Considerem-se as equações atrás:

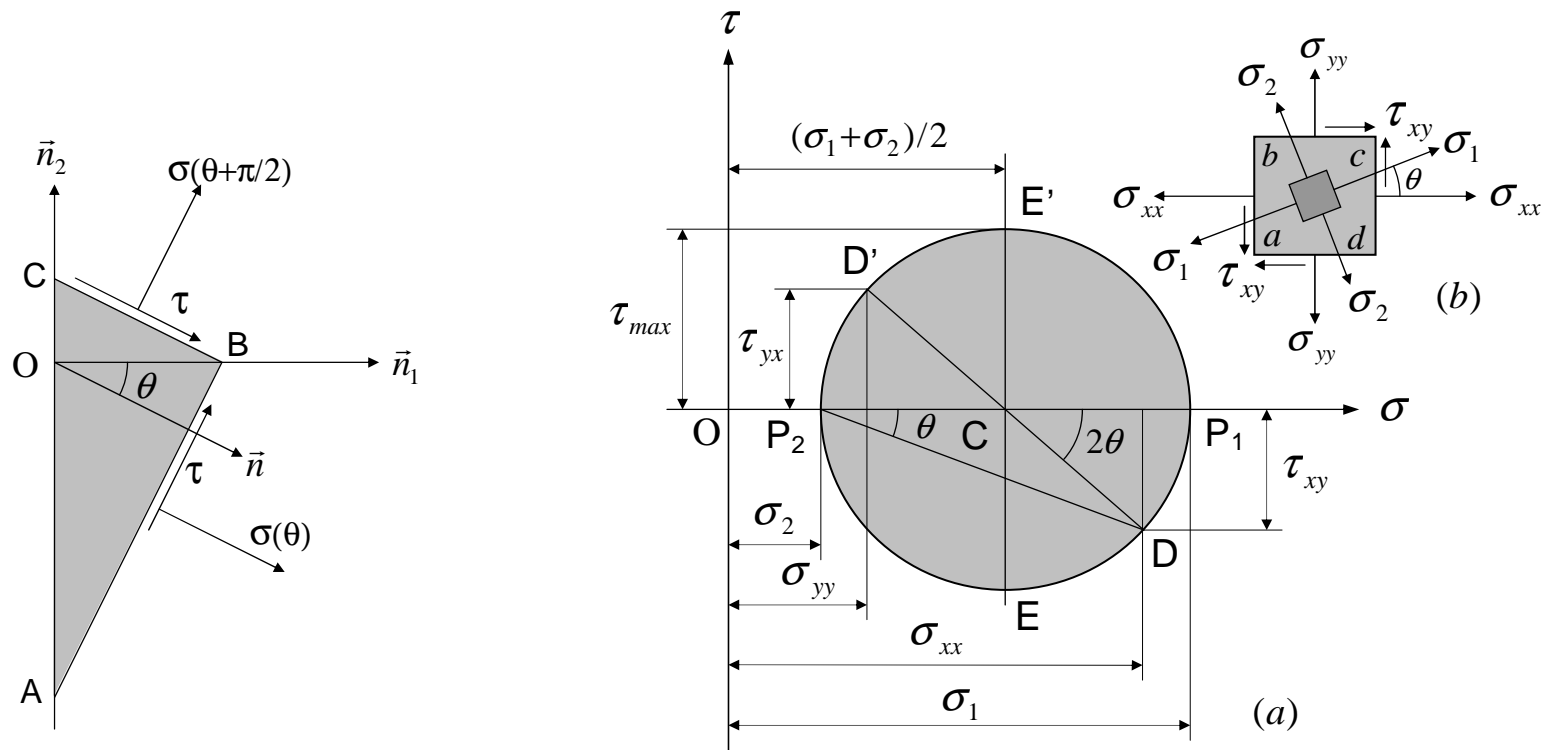
$$\sigma = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos(2\theta) + \tau_{xy} \sin(2\theta)$$

$$\tau = -\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \sin(2\theta) + \tau_{xy} \cos(2\theta)$$

Adoptando para referência as duas direcções principais de tensão \vec{n}_1 e \vec{n}_2 , no caso dum estado plano de tensão, ou \vec{n}'_1 e \vec{n}'_2 , no caso mais geral, a tensão normal σ e a tensão de corte τ para um plano oblíquo qualquer definido pelo ângulo θ , relativamente a \vec{n}_1 , figura da esquerda, são dadas pelas seguintes expressões seguintes:

$$\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos(2\theta)$$

$$\tau = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin(2\theta)$$



Aquelas duas componentes da tensão em P são as coordenadas do ponto D sobre o círculo de Mohr desenhado num diagrama (σ, τ) , conforme ilustrado na Figura (a). O centro do círculo de Mohr é o ponto C sobre o eixo das abcissas, à distância $(\sigma_1 + \sigma_2)/2$ da origem do diagrama, sendo o respectivo raio igual à semi-diferença das duas tensões principais σ_1 e σ_2 no plano xy , isto é, igual a $(\sigma_1 - \sigma_2)/2$.

Na construção do círculo de Mohr, o eixo τ é orientado positivamente no sentido ascendente e o eixo σ no sentido da esquerda para a direita. As tensões normais positivas indicam tracção e as tensões de corte são consideradas positivas quando definem um binário que tende a fazer rodar o elemento sobre que actuam no sentido do movimento dos ponteiros do relógio. É o caso das tensões de corte que actuam nas faces bc e ad do elemento $abcd$ representado na Fig. (b). À medida que o ângulo θ varia, desde o valor $\theta = 0$ até $\theta = \pi/2$, o ponto D sobre a Fig. (a), desloca-se de P_1 para P_2 , de tal forma que a parte superior do círculo de Mohr representa as tensões para todos os valores de θ compreendidos entre aqueles dois limites. A metade inferior do círculo de Mohr representa as tensões para valores do ângulo θ compreendidos entre $\theta = -\pi/2$ e $\theta = 0$.

Prolongando o raio CD até ao ponto D', Fig. (a), isto é, se se considerar o ângulo $\pi + 2\theta$ em vez de 2θ , obtêm-se as tensões que actuam no plano BC perpendicular a AB, conforme representado na figura da esquerda.

A construção representada na Fig.(a) pode também ser utilizada para determinar as direcções principais de tensão no ponto considerado. Com efeito, se forem conhecidas as componentes σ_{xx} , σ_{yy} e τ_{xy} da tensão relativamente a um sistema de eixos arbitrário Oxy, ficam perfeitamente identificados os pontos D e D', que definem um diâmetro do círculo de Mohr. Traçando depois a respectiva circunferência com centro no ponto C, obtêm-se os pontos P_1 e P_2 sobre o eixo das abcissas, cujas distâncias à origem definem as amplitudes das duas tensões principais. O ângulo 2θ , que define a orientação dos eixos principais de tensão, é dado pela inclinação do diâmetro DD' em relação ao eixo das abcissas.