

## CAPÍTULO IV SOLICITAÇÃO AXIAL DE PEÇAS LINEARES

### 4.1. RESUMO DA TEORIA

#### 4.1.1. Introdução

O caso mais simples de solicitação axial é o de uma barra linear de secção constante, em tracção por duas forças iguais e opostas ( $N$ ), conforme ilustrado na Fig.4.1.

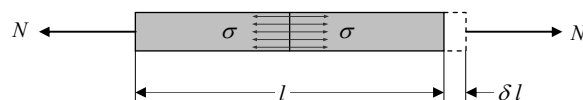


Fig. 4.1 – Peça linear em tracção

As expressões para a tensão, deformações e lei de Hooke são óbvias, e podem escrever-se da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{N}{A} \\ \varepsilon_l &= \frac{\sigma}{E} \\ \varepsilon_t &= -\nu\varepsilon_l = -\frac{\nu\sigma}{E} \\ \delta &= \frac{Nl}{EA}\end{aligned}\tag{4.1}$$

Onde  $l$  é o comprimento inicial da barra,  $A$  é a área da respectiva secção recta,  $\sigma$  é a tensão normal sobre a secção recta,  $\varepsilon_l$  e  $\varepsilon_t$  são a deformação linear longitudinal e a deformação linear transversal, respectivamente,  $\delta$  é o alongamento total entre as duas extremidades,  $E$  é o módulo de elasticidade do material e  $\nu$  o coeficiente de Poisson.

As expressões anteriores são igualmente válidas para uma barra curta em compressão, desde que não se verifiquem condições de instabilidade à encurvadura, conforme será discutido mais à frente, no capítulo VIII.

#### 4.1.2. Energia Elástica de Deformação

A energia elástica de deformação numa barra à tracção ou à compressão calcula-se através da equação geral (3.43). Neste caso particular, em que a única componente não nula da tensa é  $\sigma_{xx} = N/A$ , obtém-se:

$$U = \int_V U_0 dV = \frac{N^2 l}{2EA} = \frac{EA \delta^2}{2l} \quad (4.2)$$

No caso mais geral duma barra de secção variável  $A(x)$  sujeita a uma carga também variável  $N(x)$ , a energia elástica de deformação obtém-se de forma idêntica:

$$U = \int_0^l \frac{[N(x)]^2}{2EA(x)} dx \quad (4.3)$$

#### 4.1.3. Estruturas Articuladas Isostáticas

Os sistemas articulados sob a acção de forças concentradas exclusivamente aplicadas nos nós são exemplos típicos de estruturas constituídas por peças lineares solicitadas axialmente. Uma estrutura deste tipo diz-se *isostática*, se todos os esforços se puderem determinar recorrendo unicamente às equações da estática (equações de equilíbrio estático). É, por exemplo, o caso da estrutura articulada representada na Fig. 4.2, em que as três incógnitas  $R_A$ ,  $R_B$  e  $H_A$  podem ser determinadas utilizando as três equações de equilíbrio estático global relativas ao vector principal das forças externas (reações incluídas).

Tais equações de equilíbrio global traduzem que os somatórios das forças verticais e das forças horizontais são nulos e que o somatório dos momentos de todas as forças externas num ponto qualquer é também nulo. Sistemas deste tipo dizem-se *estruturas externamente isostáticas*.

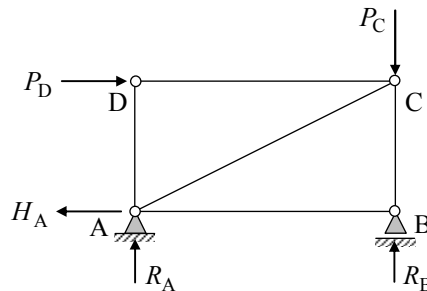


Fig. 4.2 – Estrutura estaticamente determinada ou isostática

No caso duma estrutura articulada como a representada na Fig. 4.2, para determinar os *esforços axiais* nas diferentes barras utilizam-se as equações de equilíbrio em cada um dos *nós*. Como a cada *nó* correspondem duas equações de equilíbrio ( $\sum F_x = 0$  e  $\sum F_y = 0$ ), e como três dessas equações foram já utilizadas no cálculo das reacções externas, o número total de equações disponíveis para calcular os esforços nas barras é igual ao dobro do número de nós ( $2n$ ) menos três, isto é,  $(2n-3)$ . Para se poder determinar univocamente os esforços nas barras deverá observar-se, então, a seguinte relação:

$$b = 2n - 3$$

onde  $b$  é o número total de barras do sistema; neste caso está-se em presença dum sistema articulado *internamente isostático*.

Quando se consideram globalmente todas as incógnitas, externas (*reacções nos apoios e momentos*) e internas (*esforços nas barras*), a condição de *isostaticidade* do sistema é traduzida pela seguinte equação algébrica:

$$a + b = 2n$$

onde  $a$  é o número das incógnitas externas,  $b$  é o número de barras e  $n$  é o número de *nós* da estrutura articulada.

No caso de ser  $(a + b < 2n)$ , o sistema é globalmente *hipostático* e cinematicamente instável ou indeterminado.

#### 4.1.4. Estruturas Articuladas Hiperstáticas

Numa situação em que  $(a + b > 2n)$ , as equações da estática são insuficientes para calcular todos os esforços na estrutura, e diz-se que o sistema é *globalmente hiperstático*. O *grau de hiperstaticidade* ( $h$ ) do sistema é então dado pela expressão seguinte:

$$h = a + b - 2n$$

É o caso, por exemplo, da estrutura articulada representada na Fig. 4.3, em que  $a = 6$ ,  $b = 3$  e  $n = 4$ , donde tratar-se duma estrutura hiperstática de grau 1 ( $h = 6+3-2 \times 4 = 1$ ), o que quer dizer que uma das ligações ao exterior é redundante.

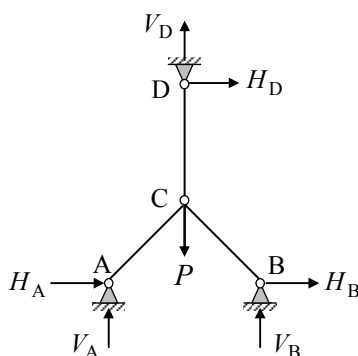
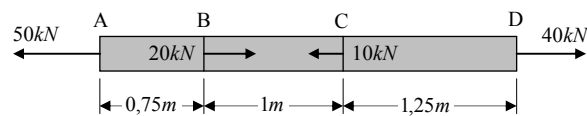


Fig. 4.3 – Estrutura estaticamente indeterminada ou hiperstática

A metodologia para a resolução dos sistemas articulados hiperstáticos geralmente consiste em escolher primeiro as ligações a considerar como redundantes, suprimi-las e substituí-las pelas forças correspondentes, transformando, assim, o sistema numa estrutura isostática (*estrutura primária*). Resolve-se, então, a estrutura primária em função das incógnitas redundantes, que podem depois ser calculadas impondo as condições de compatibilidade dos deslocamentos reais nas ligações redundantes que foram suprimidas. Para o caso da estrutura representada na Fig.4.3, por exemplo, ver o problema resolvido 4.2.11.

**4.2. PROBLEMAS RESOLVIDOS****PROBLEMA – 4.2.1.**

Uma barra de secção circular em aço ( $E = 200GPa$ ), com  $25mm$  de diâmetro, está sujeita à acção de quatro forças axiais, conforme indicado na figura.

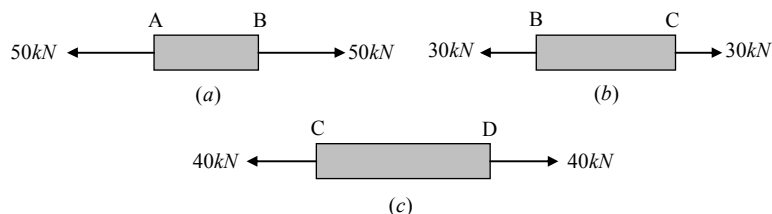


Determine:

- O valor máximo da tensão axial na barra.
- O valor do alongamento total da barra.
- A energia total de deformação na barra

**RESOLUÇÃO:**

As forças externas satisfazem as condições de equilíbrio estático, pelo que a barra está globalmente em equilíbrio, assim estando, também em equilíbrio, cada um dos troços AB, BC e CD. Considerando, por exemplo, o troço AB, o respectivo diagrama de corpo livre está representado na figura (a) a seguir:



Para assegurar o equilíbrio do troço AB, a força normal na secção B deve ser igual e de sentido contrário à força aplicada na secção A, isto é:

$$N_{AB} = 50kN \text{ (em tracção).}$$

Igualmente para o troço BC, cujo diagrama de corpo livre está representado na figura (b). O esforço normal neste segmento deve equilibrar a resultante das forças externas à esquerda, isto é:

$$N_{BC} = 50 - 20 = 30kN \text{ (em tracção)}$$

## 6 Mecânica dos Materiais e Estruturas Lineares. Teoria e Aplicações

Finalmente, o troço CD, cujo diagrama de corpo livre está representado na figura (c). O esforço normal neste segmento deve equilibrar a resultante da força externa aplicada na secção D, isto é:

$$N_{CD} = 45kN \text{ (em tracção)}$$

### **a)- Tensão axial máxima**

A tensão em cada um dos segmentos da barra é dada pelo quociente entre o esforço normal nesse segmento e a área da secção recta. A secção é uniforme, com a área dum círculo de 25mm de diâmetro:

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = 490,88mm^2$$

Donde as tensões para os diversos segmentos:

$$\sigma_{AB} = \frac{N_{AB}}{A} = \frac{5 \times 10^4 N}{4,91 \times 10^{-4} m^2} = 101,86MPa$$

$$\sigma_{BC} = \frac{N_{BC}}{A} = \frac{3 \times 10^4 N}{4,91 \times 10^{-4} m^2} = 61,11MPa$$

$$\sigma_{CD} = \frac{N_{CD}}{A} = \frac{4,5 \times 10^4 N}{4,91 \times 10^{-4} m^2} = 91,67MPa$$

A tensão máxima ocorre no segmento AB e é, portanto, igual a:

$$\sigma_{max} = 101,86MPa$$

### **b)- Alongamento total da barra**

O alongamento total da barra (d) é igual à soma dos alongamentos de cada um dos segmentos. Ora, para cada um desses segmentos, tem-se:

$$\delta_{AB} = \frac{\sigma_{AB}}{E} l_{AB} = \frac{101,86 \times 10^6 Nm^{-2}}{200 \times 10^9 Nm^{-2}} \times 0,75m = 3,82 \times 10^{-4} m$$

$$\delta_{BC} = \frac{\sigma_{BC}}{E} l_{BC} = \frac{61,11 \times 10^6 Nm^{-2}}{200 \times 10^9 Nm^{-2}} \times 1m = 3,06 \times 10^{-4} m$$

$$\delta_{CD} = \frac{\sigma_{CD}}{E} l_{CD} = \frac{91,67 \times 10^6 Nm^{-2}}{200 \times 10^9 Nm^{-2}} \times 1,25m = 5,73 \times 10^{-4} m$$

Finalmente, o alongamento total obtém por adição dos alongamentos sofridos por cada um dos segmentos da barra:

$$\delta = \delta_{AB} + \delta_{BC} + \delta_{CD} = (3,82 + 3,06 + 5,73) \times 10^{-4} m = 1,26 mm$$

**c)- Energia elástica de deformação**

A energia elástica de deformação na barra calcula-se através da equação geral (4.3). Uma vez que a barra é toda dum mesmo material e mantém uma secção recta constante ao longo de todo o comprimento:

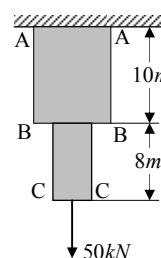
$$U = \int_0^l \frac{[N(x)]^2}{2EA(x)} dx = \frac{1}{2 \times 200 \times 10^9 \times 4,91 \times 10^{-4}} \left[ \int_0^{0,75} (5 \times 10^4)^2 dx + \int_{0,75}^{1,75} (3 \times 10^4)^2 dx + \int_{1,75}^3 (4,5 \times 10^4)^2 dx \right] = 27 \text{ Joule}$$

**PROBLEMA – 4.2.2.**

Duas barras prismáticas, rigidamente ligadas entre si, suportam uma carga axial  $P=50kN$ , conforme ilustrado na figura. A barra superior, em aço ( $\gamma_a=78kN/m^3$ ,  $E_a=200GPa$ ), tem comprimento  $l_a=10m$  e área de secção recta  $A_a=60cm^2$ . A barra inferior, em cobre ( $\gamma_c=89kN/m^3$ ,  $E_c=120GPa$ ), tem comprimento  $l_c=8m$  e área de secção recta  $A_c=50cm^2$ .

Determine:

- a)- O valor da tensão máxima em cada um dos elementos.
- b)- O alongamento total do conjunto.
- c)- A energia total de deformação do conjunto.
- d)- Compare os valores obtidos com o resultado a que se chegaria se fosse desprezado o peso do material.



**RESOLUÇÃO:**

**a)- Tensões máximas**

A tensão máxima no elemento inferior (*cobre*) ocorre na secção B-B, onde a tensão resulta do efeito combinado da força  $P$  e do peso próprio da barra de cobre.

8 *Mecânica dos Materiais e Estruturas Lineares. Teoria e Aplicações*

O peso do elemento em *cobre* é:

$$W_c = A_c \times l_c \times \gamma_c = 50 \times 10^{-4} \times 8 \times 8,9 \times 10^4 = 3,56 \text{ kN}$$

donde a tensão na secção B-B:

$$\sigma_B = \frac{P + W_c}{A_c} = \frac{50 \times 10^3 + 3,56 \times 10^3}{50 \times 10^{-4}} = 10,71 \text{ MPa}$$

A tensão máxima no elemento superior (*aço*) ocorre na secção A-A, onde a tensão resulta do efeito combinado da força  $P$  e do peso total do conjunto ( $W_c + W_a$ ).

O peso do elemento em *aço* é:

$$W_a = A_a \times l_a \times \gamma_a = 60 \times 10^{-4} \times 10 \times 7,8 \times 10^4 = 4,68 \text{ kN}$$

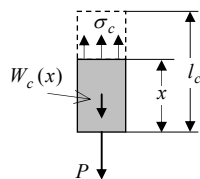
donde a tensão na secção A-A:

$$\sigma_A = \frac{P + W_c + W_a}{A_a} = \frac{50 \times 10^3 + 3,56 \times 10^3 + 4,68 \times 10^3}{60 \times 10^{-4}} = 9,71 \text{ MPa}$$

**b)- Alongamento total**

O alongamento total do conjunto obtém-se por adição dos alongamentos de cada um dos dois elementos:

$$\delta = \delta_c + \delta_a = \int_0^{l_c} \frac{\sigma_c}{E_c} dx + \int_0^{l_a} \frac{\sigma_a}{E_a} dx$$



No segmento de cobre, a tensão  $\sigma_c$  é dada pela expressão seguinte:

$$\sigma_c(x) = \frac{P + W_c(x)}{A_c}$$

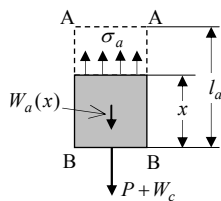
ou seja:

$$\begin{aligned} \sigma_c(x) &= \frac{P + W_c(x)}{A_c} = \frac{50 \times 10^3 + 89 \times 10^3 \times 50 \times 10^{-4} x}{50 \times 10^{-4}} \\ &= 8,9 \times 10^4 x + 10^7 \end{aligned}$$



donde:

$$\delta_c = \int_0^{l_c} \frac{\sigma_c}{E_c} dx = \frac{1}{120 \times 10^9} \left[ \frac{8,9 \times 10^4}{2} x^2 + 10^7 x \right]_0^8 = 6,9 \times 10^{-4} m$$



Por outro lado, no segmento de aço, a tensão  $\sigma_a$  é dada pela expressão seguinte:

$$\sigma_a(x) = \frac{P + W_c + W_a(x)}{A_a}$$

ou seja:

$$\begin{aligned} \sigma_a(x) &= \frac{50 \times 10^3 + 3,56 \times 10^3 + 78 \times 10^3 \times 60 \times 10^{-4} x}{60 \times 10^{-4}} \\ &= 7,8 \times 10^4 x + 8,9 \times 10^6 \end{aligned}$$

donde:

$$\delta_a = \int_0^{l_a} \frac{\sigma_a}{E_a} dx = \frac{1}{200 \times 10^9} \left[ \frac{7,8 \times 10^4}{2} x^2 + 8,9 \times 10^6 x \right]_0^{10} = 4,6 \times 10^{-4} m$$

O alongamento total do conjunto é, portanto:

$$\delta = \delta_c + \delta_a = 6,9 \times 10^{-4} + 4,6 \times 10^{-4} = 1,15 \times 10^{-3} m = 1,15 mm$$

### **c)- Energia elástica de deformação**

A energia elástica de deformação calcula-se através da equação geral (4.3), isto é:

$$U = \int_0^l \frac{[N(x)]^2}{2EA(x)} dx$$

Substituindo os valores de  $N$ ,  $E$  e  $A$  para o caso vertente, obtém-se:

$$U = \frac{1}{2E_c A_c} \int_0^{l_c} [P + W_c(x)]^2 dx + \frac{1}{2E_a A_a} \int_0^{l_a} [P + W_c + W_a(x)]^2 dx$$

isto é:

10 *Mecânica dos Materiais e Estruturas Lineares. Teoria e Aplicações*

$$U = \frac{10^6}{1,2 \times 10^9} \int_0^8 [0,445x + 50]^2 dx + \frac{10^6}{2,4 \times 10^9} \int_0^{10} [0,468x + 53,56]^2 dx$$

Ou seja, calculando os integrais:

$$U = 30,9 \text{ Joule}$$

**d)- Não considerando o peso**

No caso em que se despreza o efeito do peso do material, basta fazer  $W_c=0$  e  $W_a=0$  nas expressões anteriores para as tensões. Nesta abordagem simplificada, obtém-se, para as tensões:

$$\sigma_B = \frac{P}{A_c} = \frac{50 \times 10^3}{50 \times 10^{-4}} = 10,0 \text{ MPa}$$

$$\sigma_A = \frac{P}{A_a} = \frac{50 \times 10^3}{60 \times 10^{-4}} = 8,33 \text{ MPa}$$

e, para a energia elástica de deformação:

$$U = \frac{P^2 l_c}{2E_c A_c} + \frac{P^2 l_a}{2E_a A_a} = \frac{2,5 \times 10^9 \times 8}{2 \times 120 \times 10^9 \times 50 \times 10^{-4}} + \frac{2,5 \times 10^9 \times 10}{2 \times 200 \times 10^9 \times 60 \times 10^{-4}} = 27,1 \text{ Joule}$$

Finalmente, o alongamento total do conjunto:

$$\delta = \delta_c + \delta_a = \frac{Pl_c}{E_c A_c} + \frac{Pl_a}{E_a A_a} = 50 \times 10^3 \left( \frac{8}{120 \times 10^9 \times 50 \times 10^{-4}} + \frac{10}{200 \times 10^9 \times 60 \times 10^{-4}} \right) = 1,08 \times 10^{-3} \text{ m} = 1,08 \text{ mm}$$

**Nota Importante:** Neste caso particular, em que  $P$  é a única força que actua sobre o sistema, o *Teorema de Clapeyron* permitiria obter directamente o deslocamento  $\delta$ , a partir da energia elástica de deformação:

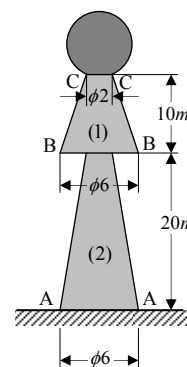
$$\delta = \frac{2U}{P} = \frac{2 \times 27,1}{50 \times 10^3} = 1,08 \times 10^{-3} \text{ m} = 1,08 \text{ mm}$$

**PROBLEMA – 4.2.3.**

Uma escultura em betão é constituída por duas colunas tronco-cónicas, conforme representado na figura a seguir (as dimensões indicadas são em metros). No topo da coluna (1) assenta um corpo rígido com um peso  $P = 1000\text{ton}$ .

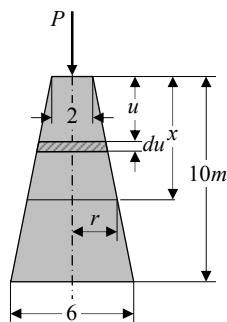
Admitindo que o módulo de elasticidade do betão é  $E = 20\text{GPa}$  e que o respectivo peso específico é  $\gamma = 25\text{kN/m}^3$ , determine:

- a)- A tensão em cada um dos elementos da coluna de betão.
- b)- O encurtamento da altura total do conjunto, devido ao peso do corpo rígido e do peso próprio do material.



**RESOLUÇÃO:**

**a)- Distribuição das tensões**



Analisando em separado cada um dos elementos, comece-se pelo elemento (1), referindo a posição da cada secção recta pela distância  $x$  à secção superior C-C.

Com base na semelhança de triângulos, pode determinar-se o raio dessa secção corrente:

$$r_1(x) = \frac{d}{2} + \frac{x}{l_1} \left( \frac{D-d}{2} \right)$$

ou seja:

$$r_1(x) = \frac{2}{2} + \frac{x}{10} \left( \frac{6-2}{2} \right) = 0,2x + 1$$

e a respectiva área da secção recta  $A_1(x)$  é:

$$A_1(x) = \pi r^2 = 0,126x^2 + 1,26x + 3,142$$

O peso de betão acima da secção ( $x$ ) é dado pela expressão seguinte:

$$\begin{aligned}
 W_1(x) &= \int_0^x \pi r^2 du = \int_0^x \pi \times 25 \times 10^3 (0,2u + 1)^2 du \\
 &= 7,85 \times 10^4 \left[ \frac{0,04u^3}{3} + 0,2u^2 + u \right]_0^x \\
 &= (1,05x^3 + 15,71x^2 + 78,54x) \times 10^3
 \end{aligned}$$

O peso total do elemento (1) obtém-se fazendo  $x = l_1 = 10m$ :

$$W_1 = W_1(10) = (1,05 \times 10^3 + 15,71 \times 10^2 + 78,54 \times 10) \times 10^3$$

ou seja:

$$W_1 = 3,4 \times 10^6 N = 340 \text{ ton}$$

Admitindo um estado de tensão uniaxial ao longo de todo o comprimento (o que está, naturalmente, longe da verdade, pelo menos junto da secção inferior B-B, onde o campo de tensões é muito mais complexo!...), a tensão em cada secção do elemento (1) obtém-se dividindo a carga total nessa secção pela área respectiva:

$$\sigma_1(x) = \frac{P + W_1(x)}{A_1(x)}$$

ou seja:

$$\sigma_1(x) = \left( \frac{1,05 \times 10^{-3} x^3 + 1,57 \times 10^{-2} x^2 + 7,85 \times 10^{-2} x + 10}{0,126x^2 + 1,26x + 3,142} \right) \times 10^6$$

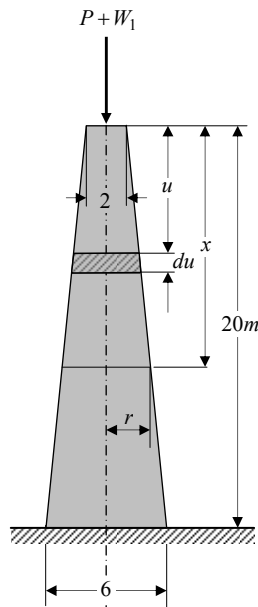
Passando agora para o elemento (2), tem-se a situação representada na figura a seguir. Utilizando o mesmo raciocínio que foi seguido para o elemento (1), pode escrever-se, sucessivamente:

$$r_2(x) = \frac{d}{2} + \frac{x}{l_2} \left( \frac{D-d}{2} \right)$$

$$r_2(x) = \frac{2}{2} + \frac{x}{20} \left( \frac{6-2}{2} \right) = 0,1x + 1$$

e a respectiva área da secção recta  $A_2(x)$  é:

$$A_2(x) = \pi r^2 = 0,0314x^2 + 0,628x + 3,142$$



O peso de betão acima da secção (x) é dado pela expressão seguinte:

$$\begin{aligned}
 W_2(x) &= \int_0^x \pi r^2 du = \int_0^x 25\pi \times 10^3 (0,1u + 1)^2 du \\
 &= 7,85 \times 10^4 \left[ \frac{0,01u^3}{3} + 0,1u^2 + u \right]_0^x \\
 &= (0,261x^3 + 7,85x^2 + 78,54x) \times 10^3
 \end{aligned}$$

O peso total do elemento (2) obtém-se fazendo  $x = l_2 = 20m$ :

$$W_2 = W_2(20) = (0,261 \times 20^3 + 7,85 \times 20^2 + 78,54 \times 20) \times 10^3$$

ou seja:

$$W_2 = 6,8 \times 10^6 N = 680ton$$

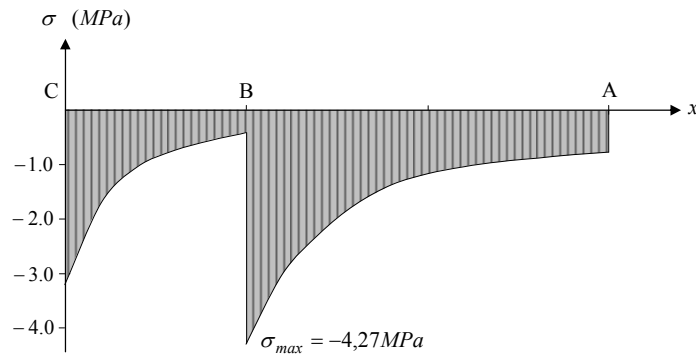
A tensão em cada secção do elemento (2) obtém-se dividindo a carga total nessa secção pela área respectiva:

$$\sigma_2(x) = \frac{P + W_1 + W_2(x)}{A_2(x)}$$

ou seja:

$$\sigma_2(x) = \left( \frac{0,261 \times 10^{-3} x^3 + 0,785 \times 10^{-2} x^2 + 7,85 \times 10^{-2} x + 10 + 3,4}{0,0314x^2 + 0,628x + 3,142} \right) \times 10^6$$

A distribuição das tensões ao longo do eixo da peça está representada na figura a seguir:



A tensão máxima ocorre na secção B-B:

$$\sigma_{max} = \frac{P + W_1}{A_2(0)} = \frac{13,4 \times 10^6}{\pi} = 4,27 \text{ MPa (compressão)}$$

**b)- Encurtamento do conjunto**

Partindo da expressão deduzida na alínea anterior para a tensão no elemento (1):

$$\sigma_1(x) = \frac{P + W_1(x)}{A_1(x)}$$

obtém-se, pela lei de Hooke:

$$\varepsilon_1(x) = \frac{\sigma_1(x)}{E} = \frac{1}{E} \frac{P + W_1(x)}{A_1(x)}$$

e o alongamento  $\delta_1$  do elemento (1):

$$\delta_1 = \int_0^{l_1} \varepsilon_1(x) dx = \frac{1}{E} \int_0^{l_1} \frac{P + W_1(x)}{A_1(x)} dx$$

A integração em  $x$  não é nada fácil, pelo que será mais conveniente fazer uma mudança de variável para  $r$  (raio corrente da secção), tendo em conta a equação de ligação:

$$r_1(x) = \frac{d}{2} + \frac{x}{l_1} \left( \frac{D-d}{2} \right)$$

e, portanto:

$$dx = \frac{2l_1}{D-d} dr$$

Além disso, pode escrever-se:

$$A_1(x) = \pi r^2$$

e

$$W_1(x) = \int_0^x \gamma \pi r^2 du = \int_{d/2}^r \gamma \pi r^2 \frac{2l_1}{D-d} dr = \frac{2\gamma \pi l_1}{3(D-d)} \left( r^3 - \frac{d^3}{8} \right)$$

Substituindo, agora, na expressão acima para  $\delta_1$ , resulta:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \frac{2l_1}{E\pi(D-d)} \int_{d/2}^{D/2} \frac{P + \frac{2\gamma \pi l_1}{3(D-d)} \left( r^3 - \frac{d^3}{8} \right)}{r^2} dr \\ &= \frac{2Pl_1}{E\pi(D-d)} \int_{d/2}^{D/2} \frac{1}{r^2} dr + \frac{4\gamma l_1^2}{3E(D-d)^2} \int_{d/2}^{D/2} \left( r - \frac{d^3}{8r^2} \right) dr \end{aligned}$$

Após o cálculo dos integrais, obtém-se:

$$\delta_1 = \frac{4Pl_1}{\pi DdE} + \frac{\gamma l_1^2}{6(D-d)^2 E} \left( D^2 - 3d^2 + 2\frac{d^3}{D} \right)$$

A expressão para o encurtamento  $\delta_2$  do elemento (2) é semelhante, apenas deverá ser usado a carga total  $(P+W_1)$ , em vez de  $P$  e, naturalmente,  $l_2$  em vez de  $l_1$ :

$$\delta_2 = \frac{4(P+W_1)l_2}{\pi DdE} + \frac{\gamma l_2^2}{6(D-d)^2 E} \left( D^2 - 3d^2 + 2\frac{d^3}{D} \right)$$

Finalmente, o encurtamento total do conjunto:

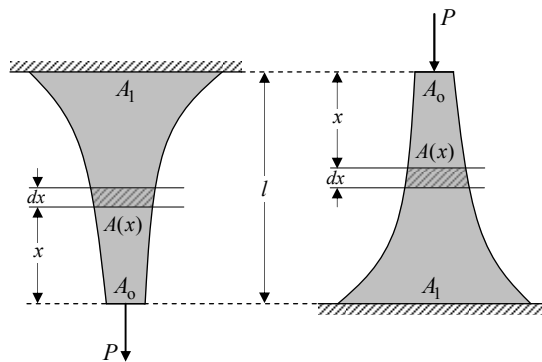
$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = \frac{4P(l_1+l_2) + 4W_1l_2}{\pi DdE} + \frac{\gamma(l_1^2+l_2^2)}{6(D-d)^2 E} \left( D^2 - 3d^2 + 2\frac{d^3}{D} \right)$$

Ou ainda, substituindo as diferentes grandezas pelos respectivos valores numéricos:

$$\delta = 2,01 \times 10^{-3} m$$

**PROBLEMA – 4.2.4.**

O perfil da peça linear representada na figura é tal que, sob a acção duma carga axial  $P$  e do seu próprio peso (peso específico  $\gamma$ ), a tensão é constante ao longo de todo o seu comprimento. Uma peça deste tipo diz-se de *igual resistência*, e o problema põe-se, por exemplo, no dimensionamento de cabos de extracção em minas profundas ou de pilares de viadutos muito elevados.

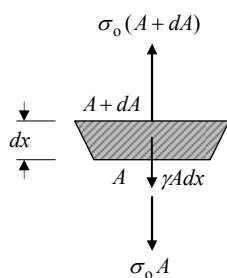


- a)- Determine o perfil da peça linear,  $A(x)$ .
- b)- Determine o alongamento total da peça,  $\delta$ .

**RESOLUÇÃO:**

**a)- Determinação do perfil da peça**

Considere-se o elemento de volume assinalado na figura em cima, de altura elementar  $dx$ , e escreva-se a equação que traduz o equilíbrio das forças que sobre ele actuaem (seja  $\sigma_0$  o valor constante da tensão):



$$\sigma_0(A + dA) - \sigma_0 A - \gamma A dx = 0$$

ou seja:

$$\sigma_0 dA = \gamma A dx$$

ou ainda:



$$\frac{dA}{A} = \frac{\gamma}{\sigma_0} dx$$

donde, integrando:

$$\ln(A) = \frac{\gamma}{\sigma_0} x + C$$

Onde  $C$  é uma constante de integração. Como, para  $x=0$  deverá ser  $A=A_0$ , aquela constante de integração terá de ser:

$$C = \ln(A_0)$$

e, portanto:

$$\ln\left(\frac{A}{A_0}\right) = \frac{\gamma}{\sigma_0} x$$

donde:

$$A(x) = A_0 e^{\left(\frac{\gamma}{\sigma_0} x\right)}$$

Por outro lado, uma vez fixada a tensão  $\sigma_0$ , deverá ser:

$$P = A_0 \sigma_0$$

e, portanto:

$$A(x) = \frac{P}{\sigma_0} e^{\left(\frac{\gamma}{\sigma_0} x\right)}$$

#### **b)- Alongamento total da peça**

A variação do comprimento da peça obtém-se a partir da equação habitual:

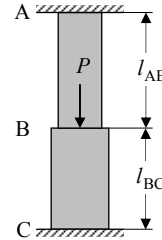
$$\delta = \int_0^l \frac{N dx}{EA} = \frac{\sigma_0}{E} \int_0^l dx = \frac{\sigma_0 l}{E}$$

#### **PROBLEMA – 4.2.5.**

Considere uma barra ABC constituída por dois segmentos de características mecânicas e geométricas diferentes ( $E_{AB}, l_{AB}, A_{AB}$  e  $E_{BC}, l_{BC}, A_{BC}$ ). A barra está fixada em suportes fixos nas extremidades e sujeita a uma força axial de intensidade  $P$  na secção de transição, conforme ilustrado na figura.

Determine:

- a)- O deslocamento vertical da secção de transição B.
- b)- As tensões em cada um dos segmentos da barra.



**RESOLUÇÃO:**

As reacções  $R_A$  e  $R_C$  nas ligações aos apoios fixos não podem ser encontradas recorrendo exclusivamente às condições da estática, uma vez que há apenas uma equação de equilíbrio das forças verticais (ver figura a seguir):

$$R_A + R_C = P \quad (a)$$

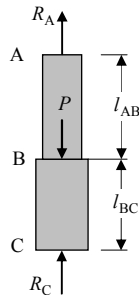
Uma equação adicional é então necessária, recorrendo aos deslocamentos, isto é, impondo a condição de que o alongamento total da peça é nulo:

$$\delta = \delta_{AB} + \delta_{BC} = 0 \quad (b)$$

Utilizando as equações habituais para o carregamento axial de barras, pode escrever-se:

$$\delta_{AB} = \frac{N_{AB} l_{AB}}{E_{AB} A_{AB}} = \frac{l_{AB}}{E_{AB} A_{AB}} R_A \quad (c)$$

$$\delta_{BC} = \frac{N_{BC} l_{BC}}{E_{BC} A_{BC}} = -\frac{l_{BC}}{E_{BC} A_{BC}} R_C$$



Substituindo em (b), obtém-se:

$$\frac{l_{AB}}{E_{AB} A_{AB}} R_A - \frac{l_{BC}}{E_{BC} A_{BC}} R_C = 0 \quad (d)$$

Resolvendo o sistema de equações (a) e (d), obtém-se:

$$R_A = N_{AB} = \frac{E_{AB} A_{AB} l_{BC}}{E_{AB} A_{AB} l_{BC} + E_{BC} A_{BC} l_{AB}} P$$

$$R_C = -N_{BC} = \frac{E_{BC} A_{BC} l_{AB}}{E_{AB} A_{AB} l_{BC} + E_{BC} A_{BC} l_{AB}} P$$

**a)-Deslocamento da secção de transição B**

O deslocamento vertical da secção de transição B (no sentido de cima para baixo) é igual ao alongamento do segmento AB. Este pode obter-se directamente da primeira das equações (c) acima:

$$\delta = \delta_{AB} = \frac{l_{AB}}{E_{AB}A_{AB}} R_A = \frac{l_{AB}l_{BC}}{E_{AB}A_{AB}l_{BC} + E_{BC}A_{BC}l_{AB}} P$$

No caso particular duma barra única dum mesmo material e secção recta constante ( $E, A$ ), a expressão anterior simplifica-se e assume a forma:

$$\delta = \frac{l_{AB}l_{BC}}{LEA} P$$

onde  $L=l_{AB}+l_{BC}$  é o comprimento total da barra.

**b)-Tensões nos segmentos**

As tensões em cada um dos segmentos da barra obtêm-se dividindo o esforço normal em cada uma delas pela respectiva área da secção recta, isto é:

$$\sigma_{AB} = \frac{N_{AB}}{A_{AB}} = \frac{E_{AB}l_{BC}}{E_{AB}A_{AB}l_{BC} + E_{BC}A_{BC}l_{AB}} P$$

$$\sigma_{BC} = \frac{N_{BC}}{A_{BC}} = -\frac{E_{BC}l_{AB}}{E_{AB}A_{AB}l_{BC} + E_{BC}A_{BC}l_{AB}} P$$

Igualmente, no caso particular duma barra única dum mesmo material e com secção recta constante ( $E, A$ ), as expressões anteriores reduzem-se às formas simplificadas seguintes:

$$\sigma_{AB} = \frac{Pl_{BC}}{AL}$$

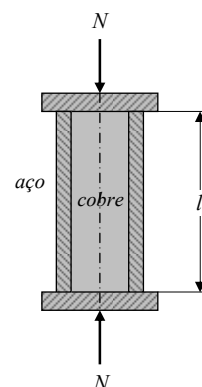
$$\sigma_{BC} = \frac{Pl_{AB}}{AL}$$

onde  $L=l_{AB}+l_{BC}$  é o comprimento total da barra.

**PROBLEMA – 4.2.6.**

Uma peça linear composta é construída a partir dum cilindro circular sólido de cobre (c) encerrado num tubo circular em aço (a). O conjunto é comprimido

*J. F. Silva Gomes, FEUP - Porto, 2009*



entre duas falanges rígidas por forças iguais e opostas de  $300kN$ , conforme representado na figura.

A peça tem um comprimento  $l=1,5m$ , cilindro de cobre tem  $100mm$  de diâmetro e o tubo de aço tem  $120mm$  de diâmetro exterior. O módulo de elasticidade do aço é  $E_a=210GPA$  e o do cobre é  $E_c=120GPA$ .

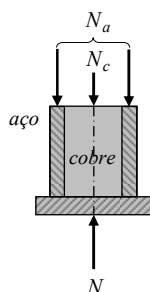
Determine:

- As forças de compressão no cilindro de cobre e no tubo de aço.
- As tensões de compressão correspondentes.
- O encurtamento total do conjunto

### **RESOLUÇÃO:**

Trata-se dum problema hiperstático, na medida em que há apenas uma equação de equilíbrio da estática para determinar as duas forças de compressão nos dois elementos que constituem o conjunto.

#### **a)- Cálculo das forças de compressão**



Considere-se o diagrama de corpo livre da parte inferior do conjunto, resultante da secção por um plano qualquer intermédio entre as duas falanges. A equação de equilíbrio das forças permite escrever:

$$N_a + N_c = N = 300kN \quad (a)$$

onde  $N_a$  e  $N_c$  são as forças de compressão no aço e no cobre, respectivamente.

Por outro lado, como as falanges nas extremidades são rígidas, o tubo exterior de aço e o cilindro interior de cobre devem encurtar duma mesma quantidade:

$$\delta_a = \delta_c \quad (b)$$

Os encurtamentos em cada um dos elementos são dados pelas expressões habituais:

$$\delta_a = \frac{N_a l}{E_a A_a} \quad \text{e} \quad \delta_c = \frac{N_c l}{E_c A_c} \quad (c)$$

Onde  $E$  e  $A$  são o *módulo de Young* e a *área* do elemento a que dizem respeito. Substituindo em (b), resulta:

$$\frac{N_a l}{E_a A_a} = \frac{N_c l}{E_c A_c}$$

Tomando os valores numéricos correspondentes, obtém-se:

$$\frac{N_a}{210 \times 10^9 \times \pi(0,06^2 - 0,05^2)} = \frac{N_c}{120 \times 10^9 \times \pi \times 0,05^2}$$

ou seja:

$$N_a = 0,77 N_c \quad (d)$$

Resolvendo as equações (a) e (d) obtém-se, finalmente:

$$N_a = 130,5 \text{ kN}$$

$$N_c = 169,5 \text{ kN}$$

#### **b)- Tensões de compressão**

Conhecidas as forças axiais  $N_a$  e  $N_c$ , podem facilmente obter-se as tensões em cada um dos materiais:

$$\sigma_a = \frac{N_a}{A_a} = \frac{1,305 \times 10^5}{\pi(0,06^2 - 0,05^2)} = 37,8 \text{ MPa}$$

$$\sigma_c = \frac{N_c}{A_c} = \frac{1,695 \times 10^5}{\pi 0,05^2} = 21,6 \text{ MPa}$$

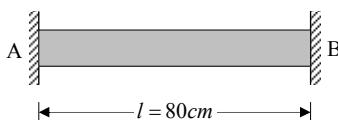
#### **c)- Encurtamento total do conjunto**

O encurtamento  $\delta$  de todo o conjunto pode obter-se utilizando qualquer uma das equações (c). Tomando a segunda equação, por exemplo:

$$\delta_c = \frac{N_c l}{E_c A_c} = \frac{1,695 \times 10^5 \times 1,5}{120 \times 10^9 \times \pi \times 0,05^2} = 2,7 \times 10^{-4} \text{ m}$$

#### **PROBLEMA – 4.2.7.**

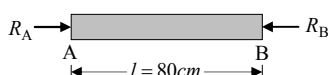
Uma barra prismática em aço, de comprimento  $l=80\text{cm}$ , está ligada a dois apoios rígidos A e B, conforme ilustrado na figura a seguir. Supondo que a temperatura da barra aumenta uniformemente em  $\Delta T=50^\circ\text{C}$ , determine o valor da tensão térmica desenvolvida no material.



O módulo de elasticidade do aço é  $E = 210\text{GPa}$  e o respectivo coeficiente de expansão térmica é  $\alpha = 11,7 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$ .

### **RESOLUÇÃO:**

Quando a temperatura aumenta, a barra tem tendência a aumentar de comprimento, mas é restringida pelos apoios fixos em A e B. Em consequência dessa restrição, vão surgir reacções  $R_A$  e  $R_B$  nas extremidades A e B, respectivamente, conforme sugerido no esquema da figura a seguir:



A condição de equilíbrio das forças exigem que seja  $R_A = R_B = N$ , ficando a barra sujeita a uma compressão axial uniforme de intensidade  $N$ , cujo valor é, por enquanto desconhecido.

Entrando agora em consideração com a condição de que o alongamento da barra é nulo, pode escrever-se:

$$\delta = \delta_T + \delta_N = 0 \quad (a)$$

onde  $\delta_T$  representa o alongamento (positivo) provocado pelo aumento de temperatura  $\Delta T$ :

$$\delta_T = \alpha(\Delta T) \times l = 11,7 \times 10^{-6} \times 50 \times 0,8 = 4,68 \times 10^{-4} \text{ m} \quad (b)$$

e  $\delta_N$  representa o alongamento (negativo) provocado pelo esforço axial uniforme  $N$ :

$$\delta_N = \frac{Nl}{EA} = 3,81 \times 10^{-12} \frac{N}{A} = 3,81 \times 10^{-12} \sigma_T \quad (c)$$

O símbolo  $\sigma_T$ , refere-se à tensão térmica  $\sigma_T = N/A$ . Substituindo (b) e (c) na equação do deslocamento global (a), resulta:

$$4,68 \times 10^{-4} + 3,81 \times 10^{-12} \sigma_T = 0$$

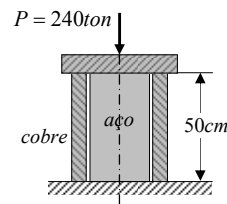
donde se obtém, finalmente, a tensão térmica instalada no material:

$$\sigma_T = -\frac{4,68 \times 10^{-4}}{3,81 \times 10^{-12}} = -122,83 \text{ MPa}$$

**PROBLEMA – 4.2.8.**

Uma estrutura é constituída por um cilindro em cobre, montado no interior dum tubo de aço, conforme ilustrado no esquema da figura a seguir. O conjunto assenta sobre uma base rígida e, na outra extremidade é aplicada uma força  $P=240\text{ton}$ , conforme é também sugerido na figura.

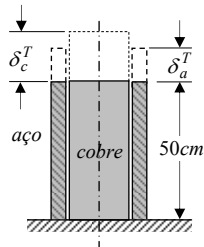
Simultaneamente à aplicação da carga  $P$ , o sistema é também sujeito a uma variação de temperatura  $\Delta T$ . Determine o valor mínimo do aumento de temperatura da estrutura para que seja o elemento de cobre a absorver a totalidade da carga  $P$ .



Para efeitos de cálculo considere o comprimento  $l=50\text{cm}$  e tome, para o aço,  $E_a=210\text{GPa}$ ,  $A_a=20\text{cm}^2$ ,  $\alpha_a=11,7 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$  e, para o cilindro de cobre,  $E_c=120\text{GPa}$ ,  $A_c=60\text{cm}^2$ ,  $\alpha_c=16,7 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$ .

**RESOLUÇÃO:**

Começa-se por considerar a estrutura livre na secção superior, e sujeita a uma variação de temperatura  $\Delta T$  (ver figura a seguir).



Nestas circunstâncias, o conjunto expande-se para a configuração indicada a tracejado. As variações de comprimento sofridas pelos dois elementos são diferentes entre si, em virtude da diferença entre os coeficientes de expansão térmica dos respectivos materiais. O tubo de aço sofre um alongamento

$$\delta_a^T = 11,7 \times 10^{-6} \times 50 \times \Delta T$$

enquanto que o cilindro de cobre sofre um alongamento

$$\delta_c^T = 16,7 \times 10^{-6} \times 50 \times \Delta T \tag{a}$$

Considerando, agora que é o cilindro de cobre que absorve a totalidade da carga  $P$ , o esforço axial neste elemento será:

$$N_c = P = 240\text{kN}$$

e o encurtamento provocado pela acção mecânica do esforço  $N_c$  não poderá exceder a diferença entre as deformações térmicas para o cobre e o aço. Caso contrário, uma parte da carga passaria para o tubo de aço.

O esforço axial no cilindro de cobre está relacionado com o encurtamento da barra provocado pela carga axial  $N_c$  através da equação habitual:

$$\delta_c^N = \delta_c^T - \delta_a^T = \frac{N_c l}{E_c A_c}$$

ou seja:

$$16,7 \times 10^{-6} \times 0,5 \times \Delta T - 11,7 \times 10^{-6} \times 0,5 \times \Delta T = \frac{240 \times 10^3 \times 0,50}{120 \times 10^9 \times 60 \times 10^{-4}}$$

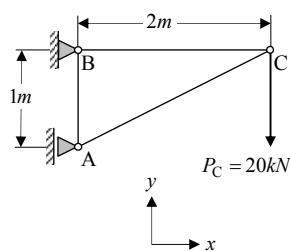
donde:

$$\Delta T = 66,7^\circ \text{C}$$

### PROBLEMA – 4.2.9.

Considere a estrutura articulada representada na figura ao lado, constituída por três barras de aço ( $E=200\text{GPa}$ ), tendo as barras AB e BC uma mesma secção recta, com uma área de  $150\text{mm}^2$ , e a barra AC tem uma área de  $450\text{mm}^2$ .

A estrutura está sujeita a uma carga vertical  $P_C=20\text{kN}$  aplicada no nó C. Ignorando qualquer eventual efeito de encurvadura nas barras, determine:



- O esforço axial em cada uma das barra e as correspondentes tensões.
- Os deslocamentos verticais dos nós A e C.

### RESOLUÇÃO:

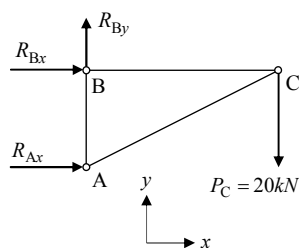
Trata-se duma estrutura globalmente isostática, conforme se pode verificar através da equação habitual:

$$h = a + b - 2n$$

onde  $a$  é o número de incógnitas associadas às reacções,  $b$  é o número de barras e  $n$  é o número de nós. No caso vertente, tem-se  $a=3$ , correspondente a duas forças de reacção em B e uma em A,  $b=3$  e  $n=3$ . Substituindo estes valores na equação anterior, obtém-se:

$$h = 3 + 3 - 2 \times 3 = 0$$

As reacções nos apoios A e B calculam-se da forma habitual, a partir das condições de equilíbrio estático das forças externas. Assim, tomando momentos em B, por exemplo, obtém-se a seguinte equação de equilíbrio dos momentos:



$$\sum M_B = -20 \times 2 + R_{Ax} \times 1 = 0$$

donde:

*J. F. Silva Gomes, FEUP - Porto, 2009*



$$R_{Ax} = 40kN$$

Por outro lado, da condição de equilíbrio das forças na direcção horizontal (eixo dos  $xx$ ), resulta:

$$\sum F_x = R_{Ax} + R_{Bx} = 40 + R_{Bx} = 0$$

donde:

$$R_{Bx} = -40kN$$

Finalmente, da condição de equilíbrio das forças na direcção vertical (eixo dos  $yy$ ), resulta:

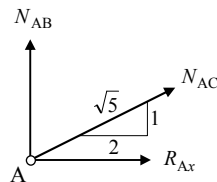
$$\sum F_y = R_{By} - 20 = 0$$

donde:

$$R_{By} = 20kN$$

**a)- Esforços axiais e tensões**

Para obter os esforços axiais nas barras consideram-se sucessivamente os diagramas de corpo livre de cada nó e estabelecem-se as condições de equilíbrio estático para cada um deles. Começando pelo nó A, por exemplo:



$$\sum F_x = 40 + \frac{2\sqrt{5}}{5} N_{AC} = 0$$

donde:

$$N_{AC} = -44,72kN$$

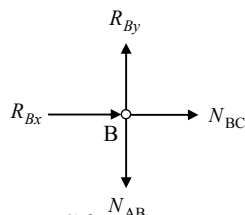
e, também:

$$\sum F_y = N_{AB} - 44,72 \times \frac{\sqrt{5}}{5} = 0$$

donde:

$$N_{AB} = +20kN$$

Considerando agora o diagrama de corpo livre da rótula B, as condições de equilíbrio estático das forças que sobre ela actuam escrevem-se:



$$\sum F_x = -40 + N_{BC} = 0$$

donde:

$$N_{BC} = +40kN$$

e, também:

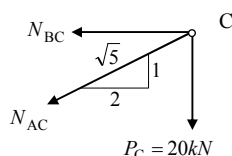
$$\sum F_y = 20 - N_{AB} = 0$$

donde:

$$N_{AB} = +20kN$$

Confirmando-se, assim, o resultado obtido anteriormente para o esforço axial na barra AB.

Embora estejam já calculados os esforços em todas as barras do sistema, pode ainda considerar-se o diagrama de equilíbrio do nó (C), o que permite obter uma confirmação adicional dos resultados obtidos:



$$\sum F_x = -40 - (-44,72) \frac{2\sqrt{5}}{5} = 0$$

Verifica-se, portanto o equilíbrio das forças segundo a direcção x.

Por outro lado:

$$\sum F_y = -20 - (-44,72) \frac{\sqrt{5}}{5} = 0,$$

o que confirma, também, o equilíbrio das forças verticais sobre o nó C.

Uma vez obtidos os esforços axiais nas diversas barras que constituem o sistema articulado, as respectivas tensões calculam-se dividindo esses valores pelas áreas das respectivas secções rectas. No caso vertente as áreas das barras são todas iguais ( $A = 150mm^2$ ), pelo que:

$$\sigma_{AB} = \frac{N_{AB}}{A} = \frac{+20 \times 10^3}{1,5 \times 10^{-4}} = +133,3MPa$$

$$\sigma_{BC} = \frac{N_{BC}}{A} = \frac{40 \times 10^3}{1,5 \times 10^{-4}} = +266,6MPa$$

$$\sigma_{AC} = \frac{N_{AC}}{A} = \frac{-44,72 \times 10^3}{4,5 \times 10^{-4}} = -9,9MPa$$

#### **b)- Deslocamentos verticais dos nós A e C**

Tendo em vista a utilização dos métodos energéticos para calcular os deslocamentos em pontos específicos, será conveniente calcular, primeiro, a energia elástica de deformação do sistema. Recorrendo à fórmula geral para a energia dum sistema de barras articuladas em tracção/compressão, pode escrever-se:

$$U = \sum \frac{N^2 l}{2EA} = \frac{1}{2E} \left( N_{AB}^2 \frac{l_{AB}}{A_{AB}} + N_{BC}^2 \frac{l_{BC}}{A_{BC}} + N_{AC}^2 \frac{l_{AC}}{A_{AC}} \right)$$

ou seja, substituindo pelos valores numéricos correspondentes:

$$U = \frac{1}{2 \times 200 \times 10^9} \left( 4 \times 10^8 \frac{1}{1,5 \times 10^{-4}} + 16 \times 10^8 \frac{2}{1,5 \times 10^{-4}} + 20 \times 10^8 \frac{\sqrt{5}}{4,5 \times 10^{-4}} \right) = 84,85 \text{ Joule}$$

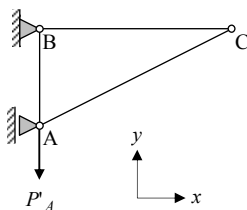
Neste caso particular, em que  $P_C$  é a única força que actua sobre o sistema, o *Teorema de Clapeyron* permite obter directamente o deslocamento vertical  $\delta_C$  do nó C (ponto de aplicação da força  $P_C$ ), a partir da energia elástica de deformação:

$$\delta_C = \frac{2U}{P_C} = \frac{2 \times 84,85}{20 \times 10^3} = 8,5 \times 10^{-3} \text{ m} = 8,5 \text{ mm}$$

Para obter o deslocamento do nó A, neste caso particular trata-se dum problema trivial, na medida em que esse deslocamento é igual ao alongamento da barra AB, isto é:

$$\delta_A = \delta_{AB} = \frac{N_{AB} l_{AB}}{EA_{AB}} = \frac{20 \times 10^3 \times 1}{200 \times 10^9 \times 1,5 \times 10^{-4}} = 6,67 \times 10^{-4} \text{ m} = 0,67 \text{ mm}$$

No entanto, para exemplificar a aplicação do *Teorema de Castigliano*, considera-se de seguida a resolução do problema também por esta via. O método consiste em, adicionalmente ao carregamento real, carregar a estrutura com uma carga vertical concentrada  $P'_A$  aplicada no nó A, conforme ilustrado na figura a seguir.



Depois, deduz-se a expressão da energia elástica de deformação do sistema assim carregado, deriva-se em ordem à carga virtual  $P'_A$  e calcula-se o valor dessa derivada para  $P'_A=0$ .

Neste caso é trivial reconhecer que a carga  $P'_A$  é directa e integralmente transmitida à barra AB, até ser absorvida no apoio B. O esforço normal nesta barra é, então:

$$N'_{AB} = P'_A$$

sendo nulos os esforços axiais nas duas restantes barras do sistema.

Combinando este carregamento virtual com o carregamento real, por aplicação do princípio da sobreposição, obtém-se:

$$N''_{AB} = N_{AB} + N'_{AB} = +20 \times 10^3 + P'_A$$

$$N''_{BC} = N_{BC} + N'_{BC} = +40 \times 10^3$$

$$N''_{AC} = N_{AC} + N'_{AC} = -44,72 \times 10^3$$

Donde a energia elástica de deformação associada:

$$\begin{aligned} U' &= \sum \frac{N''^2 l}{2EA} = \frac{1}{2E} \left( N''^2_{AB} \frac{l_{AB}}{A_{AB}} + N''^2_{BC} \frac{l_{BC}}{A_{BC}} + N''^2_{AC} \frac{l_{AC}}{A_{AC}} \right) \\ &= \frac{1}{2 \times 200 \times 10^9} \left( (20 \times 10^3 + P'_A)^2 \frac{1}{1,5 \times 10^{-4}} + 16 \times 10^8 \frac{1}{1,5 \times 10^{-4}} \right. \\ &\quad \left. + 20 \times 10^8 \frac{2}{4,5 \times 10^{-4}} \right) \end{aligned}$$

ou seja:

$$U' = 84,85 + 6,67 \times 10^{-4} \times P'_A + 1,67 \times 10^{-8} \times P'^2_A$$

**Nota Importante:** Repare-se que a energia elástica do sistema sob a acção combinada do carregamento real mais o carregamento fictício não é igual à soma simples das energias associadas a cada um desses carregamentos em separado, ao contrário do que acontece para os esforços nas barras. Isso deve-se ao facto da expressão para a energia elástica de um sistema qualquer não ser uma função linear das forças exteriores aplicadas, enquanto que os esforços internos e as tensões são.

Agora, derivando a expressão da energia elástica de deformação  $U'$  em ordem à carga fictícia  $P'_A$ , obtém-se:

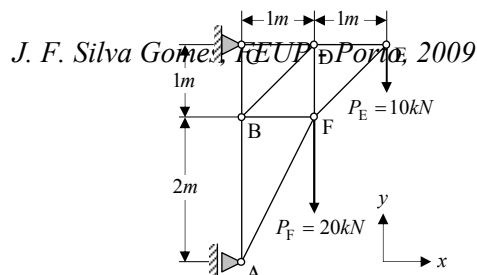
$$\frac{\partial U'}{\partial P'_A} = 6,67 \times 10^{-4} + 3,33 \times 10^{-8} P'_A$$

Finalmente, o valor do deslocamento vertical do nó A, no sentido da força  $P'_A$ , isto é, no sentido descendente, obtém-se fazendo  $P'_A = 0$ :

$$\delta_A = 6,67 \times 10^{-4} m = 0,67 mm$$

#### PROBLEMA – 4.2.10.

A estrutura articulada representada na figura a seguir é construída em barras de aço ( $E=200GPa$ ), tendo todas a mesma secção recta, com uma área de  $200mm^2$ .



A estrutura está sujeita a duas cargas de intensidades  $P_E=10kN$  e  $P_F=20kN$  nos nós E e F. Ignorando qualquer eventual efeito de encurvadura nas barras, determine:

- a)- A tensão normal em cada uma das barras da estrutura.
- b)- O deslocamento vertical do nó A.

**RESOLUÇÃO:**

Trata-se duma estrutura globalmente isostática, conforme se pode verificar através da equação para determinar o grau de hiperstaticidade:

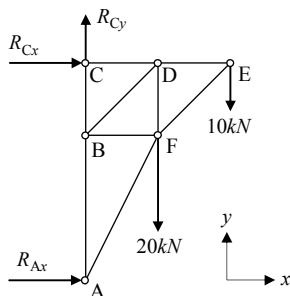
$$h = a + b - 2n = 3 + 9 - 2 \times 6 = 0$$

As reacções nos apoios A e C calculam-se da forma habitual, a partir das condições de equilíbrio estático das forças externas. Assim, tomando momentos em C, por exemplo, obtém-se a seguinte equação de equilíbrio dos momentos:

$$\sum M_C = -10 \times 2 - 20 \times 1 + R_{Ax} \times 3 = 0$$

donde:

$$R_{Ax} = 13,33kN$$



Por outro lado, da condição de equilíbrio das forças na direcção horizontal (eixo dos  $xx$ ), resulta:

$$\sum F_x = R_{Ax} + R_{Cx} = 13,33 + R_{Cx} = 0$$

donde:

$$R_{Cx} = -13,33kN$$

E, da condição de equilíbrio das forças na direcção vertical (eixo dos  $yy$ ), resulta:

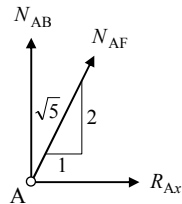
$$\sum F_y = R_{Cy} - 10 - 20 = 0$$

donde:

$$R_{Cy} = 30kN$$

**a)- Tensão normal em cada uma das barras**

Considerando o diagrama de corpo livre da rótula A, as condições de equilíbrio estático das forças que sobre ela actuam implicam que deverão ser nulas as duas componentes segundo x e segundo y.



Assim, tem-se:

$$\sum F_x = 13,33 + \frac{N_{AF}}{\sqrt{5}} = 0$$

donde:

$$N_{AF} = -29,81 \text{ kN}$$

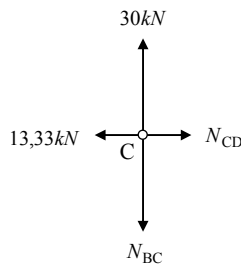
e, também:

$$\sum F_y = N_{AB} + \frac{2N_{AF}}{\sqrt{5}} = 0$$

donde:

$$N_{AB} = +26,67 \text{ kN}$$

Considerando agora o diagrama de corpo livre da rótula C, as condições de equilíbrio estático das forças que sobre ela actuam escrevem-se:



$$\sum F_x = -13,33 + N_{CD} = 0$$

donde:

$$N_{CD} = +13,33 \text{ kN}$$

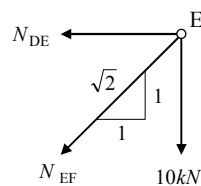
e, também:

$$\sum F_y = 30 - N_{BC} = 0$$

donde:

$$N_{BC} = +30 \text{ kN}$$

No que diz respeito ao equilíbrio das forças na rótula E, tem-se:



$$\sum F_y = -10 - \frac{\sqrt{2}}{2} N_{EF} = 0$$

donde:

$$N_{EF} = -14,14 \text{ kN}$$

e, também:

$$\sum F_x = -N_{DE} + 14,14 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

donde:

$$N_{DE} = +10 \text{ kN}$$

Quanto ao equilíbrio da rótula D, pode escrever-se:

$$\sum F_x = -13,33 + 10 - \frac{\sqrt{2}}{2} N_{BD} = 0$$

donde:

$$N_{BD} = -4,71 \text{ kN}$$

e, também:

$$\sum F_y = -N_{DF} + 4,71 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

donde:

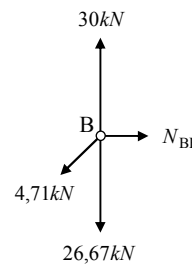
$$N_{DF} = +3,33 \text{ kN}$$

Considerando o equilíbrio da rótula B:

$$\sum F_x = -4,71 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + N_{BF} = 0$$

donde:

$$N_{BF} = +3,33 \text{ kN}$$



Finalmente, considerando o equilíbrio da rótula F, podem confirmar-se os resultados acima calculados:

$$\sum F_x = -3,33 + 29,81 \times \frac{\sqrt{5}}{5} - 14,14 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

e, também:

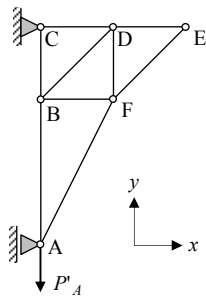
$$\sum F_y = 3,33 + 29,81 \times \frac{2\sqrt{5}}{5} - 14,14 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 20 = 0$$

Uma vez obtidos os esforços normais nas diversas barras que constituem o sistema articulado, as respectivas tensões calculam-se dividindo esses valores pelas áreas das respectivas secções rectas. No caso vertente as áreas das barras são todas iguais ( $A = 200 \text{ mm}^2$ ), pelo que:

$$\begin{aligned}\sigma_{AB} &= \frac{N_{AB}}{A} = \frac{+26,67 \times 10^3}{2 \times 10^{-4}} = +133,4 \text{ MPa} \\ \sigma_{AF} &= \frac{N_{AF}}{A} = \frac{-29,81 \times 10^3}{2 \times 10^{-4}} = -149,1 \text{ MPa} \\ \sigma_{BF} &= \frac{N_{BF}}{A} = \frac{+3,33 \times 10^3}{2 \times 10^{-4}} = +16,7 \text{ MPa} \\ \sigma_{BD} &= \frac{N_{BD}}{A} = \frac{-4,71 \times 10^3}{2 \times 10^{-4}} = -23,6 \text{ MPa} \\ \sigma_{BC} &= \frac{N_{BC}}{A} = \frac{+30 \times 10^3}{2 \times 10^{-4}} = +150,0 \text{ MPa} \\ \sigma_{CD} &= \frac{N_{CD}}{A} = \frac{+13,33 \times 10^3}{2 \times 10^{-4}} = +66,7 \text{ MPa} \\ \sigma_{DE} &= \frac{N_{DE}}{A} = \frac{+10,00 \times 10^3}{2 \times 10^{-4}} = +50,0 \text{ MPa} \\ \sigma_{DF} &= \frac{N_{DF}}{A} = \frac{+3,33 \times 10^3}{2 \times 10^{-4}} = +16,7 \text{ MPa} \\ \sigma_{EF} &= \frac{N_{EF}}{A} = \frac{-14,14 \times 10^3}{2 \times 10^{-4}} = -70,7 \text{ MPa}\end{aligned}$$

**b)- Deslocamento vertical do nó A**

Utilizando o *Teorema de Castigliano*, carrega-se a estrutura com uma carga vertical concentrada  $P'_A$  aplicada no nó A, conforme ilustrado na figura a seguir.



Neste caso é trivial reconhecer que a carga  $P'_A$  é directa e integralmente transmitida à barras AB e BC, até ser absorvida no apoio C. Os esforços normais correspondentes nas barras são, então:

$$N'_{AB} = N'_{BC} = P'_A$$

Sendo nulos os esforços normais em todas as restantes barras do sistema.

Combinando este carregamento virtual com o carregamento real, por aplicação do princípio da sobreposição, obtém-se:



$$\begin{aligned}
 N''_{AB} &= N_{AB} + N'_{AB} = +26,67 \times 10^3 + P'_A \\
 N''_{AF} &= N_{AF} + N'_{AF} = -29,81 \times 10^3 \\
 N''_{BF} &= N_{BF} + N'_{BF} = +3,33 \times 10^3 \\
 N''_{BD} &= N_{BD} + N'_{BD} = -4,71 \times 10^3 \\
 N''_{BC} &= N_{BC} + N'_{BC} = +30 \times 10^3 + P'_A \\
 N''_{CD} &= N_{CD} + N'_{CD} = +13,33 \times 10^3 \\
 N''_{DE} &= N_{DE} + N'_{DE} = +10,00 \times 10^3 \\
 N''_{DF} &= N_{DF} + N'_{DF} = +3,33 \times 10^3 \\
 N''_{EF} &= N_{EF} + N'_{EF} = -14,14 \times 10^3
 \end{aligned}$$

Donde a energia elástica de deformação associada:

$$U' = \sum \frac{N''^2 l}{2EA} = \frac{1}{2EA} \left( N''^2_{AB} l_{AB} + N''^2_{AF} l_{AF} + N''^2_{BF} l_{BF} + N''^2_{BD} l_{BD} + N''^2_{BC} l_{BC} + N''^2_{CD} l_{CD} + N''^2_{DE} l_{DE} + N''^2_{DF} l_{DF} + N''^2_{EF} l_{EF} \right)$$

ou seja:

$$U' = \frac{1}{2EA} \left( 9,65 \times 10^9 + 1,13 \times 10^5 \times P'_A + 2 \times P'^2_A \right)$$

Agora, derivando em ordem à carga fictícia  $P'_A$ , obtém-se:

$$\frac{\partial U'}{\partial P'_A} = \frac{1}{2EA} \left( 1,13 \times 10^5 + 4P'_A \right)$$

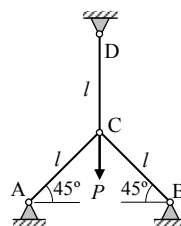
Finalmente, o valor do deslocamento vertical do nó A, no sentido da força  $P'_A$ , isto é, no sentido descendente, obtém-se fazendo  $P'_A = 0$ :

$$\delta_A = \frac{1,13 \times 10^5}{2 \times 200 \times 10^9 \times 2 \times 10^{-4}} = 1,4 \times 10^{-3} m = 1,4 mm$$

**PROBLEMA – 4.2.11.**

Considere a montagem representada esquematicamente na figura a seguir, relativa a uma estrutura articulada constituída por três barras de um mesmo material ( $E$ ), todas do mesmo comprimentos  $l$ ,

*J. F. Silva Gomes, FEUP - Porto, 2009*



solicitadas por uma força  $P$  conforme indicado. A barra vertical tem uma secção de área  $A_1$  e as outras duas barras têm secções iguais com área  $A_2$ .

Determine:

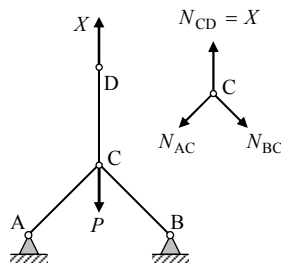
- As forças axiais em cada uma das barras.
- O deslocamento (vertical) do ponto C.

### RESOLUÇÃO:

#### a)- Esforços axiais nas barras

Trata-se dum sistema hiperstático do primeiro grau. Com efeito, designando por  $a$  o número de incógnitas externas (duas por cada amarração), por  $b$  o número de barras e por  $n$  o número de nós, pode escrever-se:

$$h = a + b - 2n = 6 + 3 - 2 \times 4 = 1$$



Selecione-se como força redundante a força de tracção  $X$  na barra vertical, por exemplo. A estrutura primária correspondente está representada na Fig.(a). Considerando o equilíbrio do nó C (ver figura), pode escrever-se:

$$N_{AC} = N_{BC} = N$$

$$2N \frac{\sqrt{2}}{2} + P = X$$

donde:

$$N = \frac{\sqrt{2}}{2}(X - P)$$

A energia elástica de deformação do sistema é, então:

$$U = \frac{X^2 l}{2A_1 E} + \frac{(P - X)^2 l}{2A_2 E}$$

A extremidade D da barra vertical deve ter um deslocamento nulo. Então, por aplicação do *Teorema de Castigliano*, pode escrever-se:

$$\frac{dU}{dX} = \frac{Xl}{A_1E} - \frac{(P-X)l}{A_2E} = 0$$

donde:

$$X = \frac{PA_2}{A_1 + A_2}$$

e, portanto:

$$N_{CD} = X = \frac{PA_2}{A_1 + A_2}$$

$$N_{AB} = N_{BC} = N = -\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{PA_1}{A_1 + A_2}$$

**b)- Deslocamento vertical do ponto C**

A força  $P$  no nó  $C$  é a única força exterior directamente aplicada sobre o sistema. Então, de acordo com o *Teorema de Clapeyron*, o deslocamento vertical do ponto  $C$  é dado pela expressão seguinte:

$$\delta_C = \frac{2U}{P}$$

ou seja:

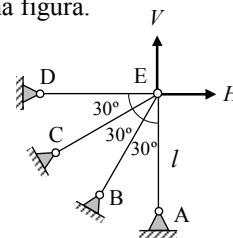
$$\delta_C = \frac{1}{P} \left( \frac{X^2l}{A_1E} + \frac{(P-X)^2l}{A_2E} \right) = \frac{Pl}{EA_1A_2} \frac{A_1^3 + A_2^3}{(A_1 + A_2)^2}$$

**PROBLEMA – 4.2.12.**

Considere a estrutura articulada de quatro barras iguais ( $l, E, A$ ) convergentes num nó  $E$ , conforme representado na figura a seguir. Directamente sobre o nó  $E$  actuam duas forças  $H$  e  $V$ , conforme é também indicado na figura.

Determine:

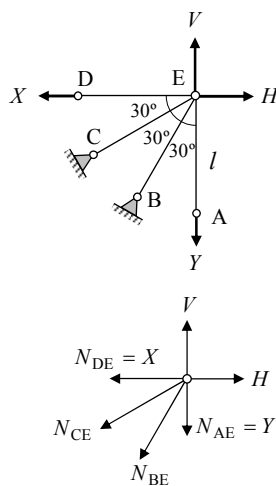
- a)- As forças axiais em cada uma das barras.
- b)- As componentes horizontal e vertical do deslocamento do ponto  $E$ .



**RESOLUÇÃO:**

**a)- Esforços axiais nas barras**

Trata-se dum sistema hiperstático do segundo grau. Com efeito, designando por  $a$  o número de incógnitas externas (duas por cada amarração), por  $b$  o número de barras e por  $n$  o número de nós, pode escrever-se:



$$h = a + b - 2n = 8 + 4 - 2 \times 5 = 2$$

Seleccione-se como forças redundantes as forças de tracção  $X$  e  $Y$  nas barras DE e AE, respectivamente. A estrutura primária correspondente está representada na figura ao lado. Considerando o equilíbrio do nó E, pode escrever-se:

$$X + \frac{\sqrt{3}}{2} N_{CE} + \frac{1}{2} N_{BE} = H$$

e

$$Y + \frac{1}{2} N_{CE} + \frac{\sqrt{3}}{2} N_{BE} = V$$

Resolvendo em ordem a  $N_{BE}$  e  $N_{CE}$ , obtém-se:

$$N_{BE} = X - \sqrt{3}Y - H + \sqrt{3}V \quad (a)$$

$$N_{CE} = Y - \sqrt{3}X - V + \sqrt{3}H$$

A energia elástica de deformação do sistema é, então:

$$U = \frac{l}{2AE} (N_{AE}^2 + N_{BE}^2 + N_{CE}^2 + N_{DE}^2) = \frac{l}{2AE} [Y^2 + (X - \sqrt{3}Y - H + \sqrt{3}V)^2 + (Y - \sqrt{3}X - V + \sqrt{3}H)^2 + X^2] \quad (b)$$

Os nós A e D têm deslocamentos reais nulos, porque são fixos. Então, por aplicação do *Teorema de Castigliano*, pode escrever-se:

$$\frac{dU}{dX} = 0$$

$$\frac{dU}{dY} = 0$$

ou seja:

$$\begin{aligned} 5X - 2\sqrt{3}Y &= 4H - 2\sqrt{3}V \\ -2\sqrt{3}Y + 5Y &= 4V - 2\sqrt{3}H \end{aligned}$$

Donde, resolvendo em ordem a  $X$  e  $Y$ , se obtém:

$$X = \frac{8H}{13} - \frac{2\sqrt{3}V}{13} = N_{DE}$$

$$Y = -\frac{2\sqrt{3}H}{13} + \frac{8V}{13} = N_{AE}$$

e, substituindo em (a):

$$N_{BE} = \frac{H}{13} + \frac{3\sqrt{3}V}{13}$$

$$N_{CE} = \frac{3\sqrt{3}H}{13} + \frac{V}{13}$$

**b)- Deslocamento do ponto E**

De acordo com o *Teorema de Castigliano*, as componentes horizontal e vertical do deslocamento do ponto E são dadas pelas derivadas da expressão da energia ( $U$ ) relativamente a  $H$  e  $V$ , respectivamente:

$$(\delta_E)_h = \frac{dU}{dH}$$

$$(\delta_E)_v = \frac{dU}{dV}$$

ou seja, tendo em conta a expressão para a energia  $U$  dada por (b):

$$(\delta_E)_h = \frac{2l}{13EA} (4H - \sqrt{3}V)$$

$$(\delta_E)_v = \frac{2l}{13EA} (-\sqrt{3}H + 4V)$$

## 4.3. PROBLEMAS PROPOSTOS

**4.3.1.** Pretende-se escolher um cabo cilíndrico em aço ( $E=200GPa$ ), com  $30m$  de comprimento, para suspender uma carga de  $6kN$ , estando o alongamento total limitado a um valor máximo de  $24mm$ .

Determine:

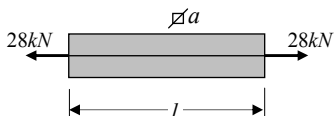
a) O menor diâmetro que deve ser seleccionado para o cabo.

b) A tensão de tracção correspondente a que o cabo fica sujeito.

*Solução:* a)  $d = 6,91mm$ .

b)  $\sigma = 160,0MPa$

**4.3.2.** Uma barra de secção quadrada em alumínio ( $E=70GPa$ ) é solicitada em tracção por uma força de  $28kN$ , conforme representado na figura a seguir.



Considerando que o alongamento total da barra está limitado a um valor máximo  $\Delta=1,4mm$  e que a resistência à tracção do alumínio da barra é  $\sigma_{adm}=120MPa$ , determine:

a) O valor máximo admissível para o comprimento ( $l$ ) da barra.

b) O valor ( $a$ ) que deverá ter lado da secção da barra.

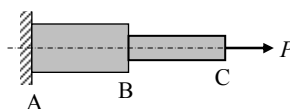
*Solução:* a)  $l = 817mm$ .

b)  $a = 15,28mm$

**4.3.3.** Pretende-se dimensionar um cabo de secção circular em aço ( $E=200GPa$ ) de  $50m$  de comprimento, para suspender uma carga de  $9kN$ . Determine o diâmetro que deverá ter a secção transversal do cabo, sabendo que o alongamento total máximo permitido é  $\Delta_{max}=25mm$  e que a tensão admissível do material em tracção é  $\sigma_{adm}=150MPa$ .

*Solução:*  $d = 10,70mm$ .

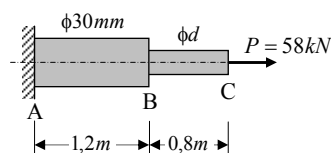
**4.3.4.** Uma barra ABC, constituída por dois segmentos de secção circular com diâmetros iguais a  $50mm$  e  $38mm$ , respectivamente, é solicitada por uma força axial  $P$  aplicada na extremidade C, conforme indicado na figura a seguir.



Para uma tensão axial em AB igual a  $40,00MPa$ , determine o correspondente valor da tensão axial em BC.

*Solução:*  $\sigma = 69,25MPa$ .

**4.3.5.** Uma barra ABC, constituída por dois segmentos de secção circular, sendo de  $30mm$  o diâmetro do segmento AB. A barra é construída num material com módulo de elasticidade  $E=105GPa$  e é solicitada por uma força axial  $P=58kN$  aplicada na extremidade C, conforme indicado na figura a seguir.

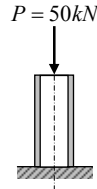


Determine o diâmetro  $d$  do segmento BC de tal modo que o alongamento total do conjunto seja de  $3mm$ .

*Solução:*  $d = 16,52mm$ .

**4.3.6.** Considere um tubo de secção circular em ferro fundido ( $E=100GPa$ ), com  $320mm$  de comprimento, diâmetro externo de  $75mm$  e diâmetro interno de  $60mm$ , sujeito a uma força axial de compressão  $P=50kN$ , conforme representado na figura a seguir.

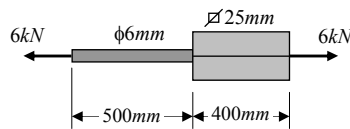
Desprezando a possibilidade de ocorrer encurvadura, determine:



- a) O encurtamento do tubo.  
b) A tensão normal correspondente.

Solução: a)  $\Delta = 0,100\text{mm}$ .  
b)  $\sigma = -31,45\text{MPa}$

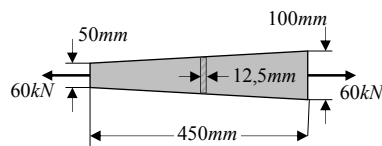
4.3.7. Uma barra de aço com 500mm de comprimento e secção circular de 6mm de diâmetro está ligada a uma barra de latão com 400mm de comprimento e secção transversal quadrada com 25mm de lado, conforme representado na figura a seguir. O conjunto das duas barras é sujeito a uma tracção de 6kN.



Determine o alongamento total do conjunto, considerando  $E=200\text{GPa}$  para o aço e  $E=90\text{GPa}$  para o latão.

Solução:  $\Delta = 0,572\text{mm}$ .

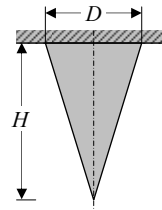
4.3.8. A barra representada na figura a seguir, com 450mm de comprimento, espessura constante de 12,5mm e altura variável linearmente entre 50mm e 100mm, está sujeita a duas forças iguais e opostas de 60kN aplicadas nas secções extremas.



Determine o alongamento da barra, considerando o módulo de elasticidade  $E=240\text{GPa}$ .

Solução:  $\Delta = 0,125\text{mm}$ .

4.3.9. Uma barra cônica está suspensa verticalmente pela base, conforme representado na figura a seguir.



Determine o alongamento da barra devido ao seu peso próprio, em função das dimensões  $D$  e  $H$ , do módulo de Young  $E$  e do peso específico  $\gamma$  do material.

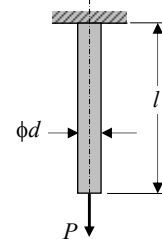
Solução:  $\Delta = \gamma H^2 / 6E$ .

4.3.10. Resolva o problema anterior para os seguintes valores numéricos:

$D = 2\text{m}$ ,  $H = 5\text{m}$ ,  $E = 210\text{GPa}$  e  $\gamma = 78\text{kNm}^{-3}$ .

Solução:  $\Delta = 1,55 \times 10^{-3}\text{mm}$ .

4.3.11. Determine a energia elástica de deformação numa barra prismática em material elástico ( $E$ ), de secção circular, com comprimento  $l$  e diâmetro  $d$ , suspensa verticalmente por uma das bases e sujeita à acção de uma força axial ( $P$ ) aplicada na extremidade livre.



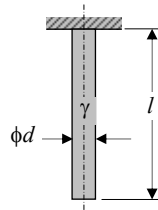
Solução:  $U = \frac{2P^2 l}{\pi d^2 E}$ .

4.3.12. Resolva o problema anterior para os seguintes valores numéricos:

$l = 3\text{m}$ ,  $d = 200\text{mm}$ ,  $E = 210\text{GPa}$  e  $P = 300\text{ton}$ .

Solução:  $U = 2,046\text{kJoule}$ .

**4.3.13.** Reconsidere a barra a que se refere o problema 4.3.11, agora sujeita à acção exclusiva do peso próprio (peso específico  $\gamma$ ).



Determine a energia elástica de deformação na barra.

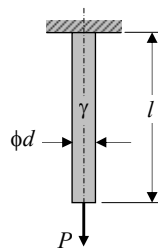
*Solução:*  $U = \frac{\gamma^2 \pi d^2 l^3}{24E}$ .

**4.3.14.** Resolva o problema anterior para os seguintes valores numéricos:

$l = 3m, d = 200mm, E = 210GPa$  e  $\gamma = 78kNm^{-3}$ .

*Solução:*  $U = 4,096mJoule$ .

**4.3.15.** Ainda relativamente à barra a que se referem os quatro problemas anteriores, determine a energia elástica de deformação, considerando, agora, a acção simultânea do peso próprio e da força  $P$ .



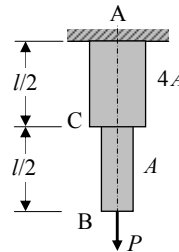
*Solução:*  $U = \frac{\gamma^2 \pi d^2 l^3}{24E} + \frac{\gamma Pl^2}{2E} + \frac{2P^2 l}{\pi d^2 E}$ .

**4.3.16.** Resolva o problema anterior para os seguintes valores numéricos:

$l = 3m, d = 200mm, E = 210GPa,$   
 $P = 300ton$  e  $\gamma = 78kNm^{-3}$ .

*Solução:*  $U = 2,051kJoule$ .

**4.3.17.** Considere uma barra em material elástico ( $E$ ), constituída por dois segmentos AC e BC, de comprimentos iguais ( $l/2$ ), e secções transversais com áreas de  $4A$  e  $A$ , respectivamente. O conjunto está suspenso de um suporte rígido em A e é solicitado por uma força  $F$  na extremidade B, conforme ilustrado na figura a seguir:



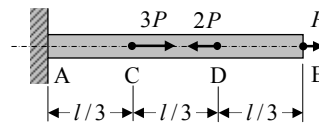
a) Deduza a expressão da energia elástica de deformação ( $U$ ), em termos dos parâmetros  $P, E, l$  e  $A$ .

b) Calcule a quantidade de energia armazenada na barra, considerando os seguintes valores numéricos dos parâmetros:  $P=30kN, l=6m, E=200GPa$  e  $A=10cm^2$ .

*Solução:*

a)  $U = 5P^2 l / (16EA)$ ; b)  $U = 7,8Joule$ .

**4.3.18.** Uma barra prismática de comprimento  $l$ , secção transversal de área  $A$ , e módulo de elasticidade  $E$ , está sujeita a forças  $P, 2P$  e  $3P$ , conforme ilustrado na figura a seguir.



a) Deduza a expressão da energia elástica de deformação ( $U$ ), em termos dos parâmetros  $P, E, l$  e  $A$ .

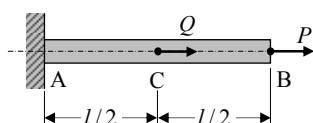
b) Calcule a quantidade de energia armazenada na barra, considerando os seguintes valores numéricos:  $P=20kN, l=1,5m, E=200GPa$  e  $A=10cm^2$ .



Solução:

a)  $U = P^2 l / (EA)$ ; b)  $U = 3,0 \text{ Joule}$ .

**4.3.19.** Uma barra prismática de comprimento  $l$ , secção transversal de área  $A$ , e módulo de elasticidade  $E$ , está sujeita a duas forças  $P$  e  $Q$  conforme ilustrado na figura a seguir.



Deduz a expressão da energia elástica de deformação ( $U$ ), em termos dos parâmetros  $P$ ,  $Q$ ,  $E$ ,  $l$  e  $A$ , em cada uma das seguintes situações:

- a) A força  $P$  actua sozinha ( $Q=0$ ).
- b) A força  $Q$  actua sozinha ( $P=0$ ).
- c) A força  $P$  e  $Q$  actuam em conjunto.

Solução:

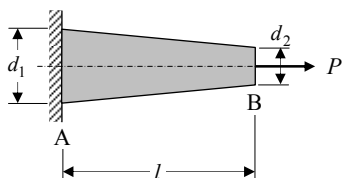
a)  $U = P^2 l / (2EA)$ ; b)  $U = Q^2 l / (4EA)$ .  
 c)  $U = l(2P^2 + 2PQ + Q^2) / (4EA)$ .

**4.3.20.** Resolva o problema anterior para os seguintes valores numéricos:  $l = 3\text{m}$ ,  $A = 300\text{cm}^2$ ,  $E = 70\text{GPa}$ ,  $P = 150\text{ton}$  e  $Q = 100\text{ton}$ .

Solução: a)  $U = 1,607\text{kJoule}$ .

b)  $U = 0,357\text{kJoule}$ . c)  $U = 3,036\text{kJoule}$ .

**4.3.21.** Uma barra tronco-cónica AB em material elástico, homogéneo e isotrópico ( $E$ ), de comprimento  $l$  e diâmetros  $d_1$  e  $d_2$  em A e B, respectivamente, é encastrada em A e solicitada por uma força axial  $P$  aplicada na outra extremidade B, conforme indicado na figura a seguir.



a) Deduz a expressão da energia elástica de deformação ( $U$ ), em termos dos parâmetros  $P$ ,  $E$ ,  $l$ ,  $d_1$  e  $d_2$ .

b) Deduza a expressão para o alongamento da barra, em termos dos parâmetros  $P$ ,  $E$ ,  $l$ ,  $d_1$  e  $d_2$ .

Solução:

a)  $U = 2P^2 l / (\pi E d_1 d_2)$ .

b)  $\Delta = 4Pl / (\pi E d_1 d_2)$ .

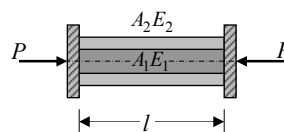
**4.3.22.** Resolva o problema anterior para os seguintes valores numéricos:

$l = 2\text{m}$ ,  $d_1 = 400\text{mm}$ ,  $d_2 = 200\text{mm}$ ,  $E = 80\text{GPa}$  e  $P = 250\text{ton}$ .

Solução:

a)  $U = 1,243\text{kJoule}$ . b)  $\Delta = 0,995\text{mm}$ .

**4.3.23.** Uma barra de comprimento  $l$ , secção transversal de área  $A_1$ , e módulo de elasticidade  $E_1$ , está inserida dentro dum tubo com o mesmo comprimento  $l$ , secção transversal de área  $A_2$ , e módulo de elasticidade  $E_2$ , conforme ilustrado na figura a seguir.



O conjunto é montado entre duas flanges rígidas e sujeito a uma compressão axial por duas forças iguais e opostas  $P$ . Determine:

a) As forças de compressão  $P_1$  e  $P_2$  a que ficam sujeitos cada um dos elementos do conjunto.

b) A variação de comprimento ( $\Delta l$ ) do conjunto.

Solução:

a)  $P_1 = \frac{A_1 E_1 P}{A_1 E_1 + A_2 E_2}$ ,  $P_2 = \frac{A_2 E_2 P}{A_1 E_1 + A_2 E_2}$

b)  $\Delta l = \frac{Pl}{A_1 E_1 + A_2 E_2}$

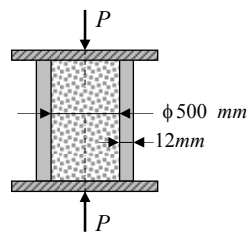
**4.3.24.** Resolva o problema anterior para os seguintes valores numéricos:

$l = 2\text{m}$ ,  $A_1 = 300\text{cm}^2$ ,  $A_2 = 400\text{cm}^2$ ,  $E_1 = 200\text{GPa}$ ,  $E_2 = 80\text{GPa}$  e  $P = 400\text{ton}$ .

Solução: a)  $P_1 = 260,87\text{ton}$ ,  $P_2 = 139,13\text{ton}$ .

b)  $\Delta l = -0,87\text{mm}$ .

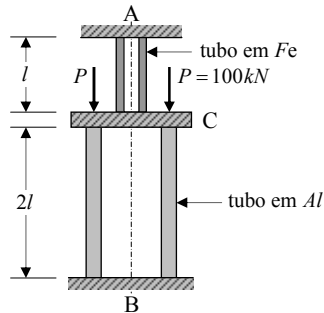
4.3.25. Um tubo em aço ( $E_a=200\text{GPa}$ ), de secção circular, com diâmetro interno de  $500\text{mm}$  e parede de  $12\text{mm}$ , é cheio de betão ( $E_b=14\text{GPa}$ ) e comprimido entre duas placas rígidas, conforme indicado na figura a seguir:



Considerando as tensões admissíveis para o aço e para o betão,  $(\sigma_{adm})_a=120\text{MPa}$  e  $(\sigma_{adm})_b=8\text{MPa}$ , respectivamente, determine o valor máximo da carga  $P$  que o conjunto pode suportar.

Solução:  $P_{max} = 3776\text{kN}$ .

4.3.26. Dois tubos em alumínio e aço ( $E_a=70\text{GPa}$ ,  $A_{al}=6000\text{mm}^2$  e  $E_{aço}=200\text{GPa}$ ,  $A_{aço}=600\text{mm}^2$ ) estão ligados através de uma placa rígida em C e montadas entre duas amarrações rígidas. O conjunto é então solicitado por uma distribuição linear de forças ao longo do perímetro da placa de ligação, com uma resultante  $P=100\text{kN}$ , conforme representado na figura a seguir.

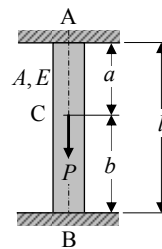


Determine as tensões axiais  $\sigma_{al}$  e  $\sigma_{aço}$  nos tubos de alumínio e de aço, respectivamente.

Solução:

$\sigma_{al} = -10,6\text{MPa}$ ;  $\sigma_{aço} = 60,6\text{MPa}$ .

4.3.27. Uma coluna de comprimento  $l$ , secção transversal de área  $A$ , e módulo de elasticidade  $E$ , está ligada a suportes rígidos em A e B, conforme ilustrado na figura a seguir.



Determine as tensões  $\sigma_{AC}$  e  $\sigma_{BC}$  nos segmentos AC e BC, respectivamente, em resultado da força  $P$  aplicada na secção intermédia C.

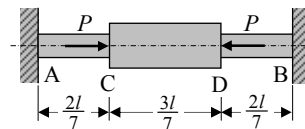
Solução:  $\sigma_{AC} = \frac{Pb}{Al}$ ,  $\sigma_{BC} = -\frac{Pa}{Al}$ .

4.3.28. Resolva o problema anterior para os seguintes valores numéricos:  $l = 4\text{m}$ ,  $A = 1200\text{cm}^2$ ,  $E = 20\text{GPa}$ ,  $a = 2,5\text{m}$ ,  $b = 1,5\text{m}$  e  $P = 500\text{ton}$ .

Solução:

a)  $\sigma_{AC} = 15,63\text{MPa}$ ,  $\sigma_{BC} = 26,42\text{MPa}$ .

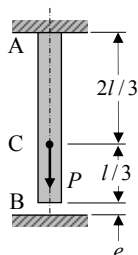
4.3.29. Uma barra AB de comprimento  $l$  é constituída por três segmentos, com duas secções rectas distintas  $A_1=400\text{mm}^2$  e  $A_2=600\text{mm}^2$ , conforme indicado na figura a seguir. A barra está rigidamente limitada nas secções extremas e sujeita a duas forças iguais e opostas de intensidade  $P=24\text{kN}$ , como é também indicado na figura.



Determine a tensão axial no segmento central da barra.

Solução:  $\sigma = -26,7MPa$ .

**4.3.30.** Uma barra AB de comprimento ( $l$ ) e rigidez axial ( $EA$ ) está suspensa de um suporte rígido pela extremidade A e solicitada por uma força  $P$  aplicada numa secção C a  $1/3$  do comprimento, a partir do extremo B, conforme representado na figura a seguir.



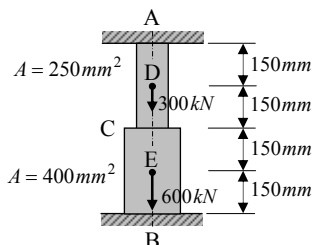
Entre a extremidade B da barra e a base fixa inferior existe uma folga inicial ( $e$ ), conforme está também indicado na figura. Determine a expressão para a folga ( $e$ ), de tal modo que sejam iguais as reacções em A e B.

Solução:  $e = Pl/(6EA)$ .

**4.3.31.** Resolva o problema anterior para os seguintes valores numéricos:  $l = 3,5m$ ,  $A = 400cm^2$ ,  $E = 70GPa$  e  $P = 300ton$ .

Solução:  $e = 26,42mm$ .

**4.3.32.** Considere uma barra em aço ( $E=200GPa$ ), constituída por dois segmentos AC e BC, cada um deles com  $300mm$  de comprimento, e secções transversais com áreas de  $250mm^2$  e  $400mm^2$ , respectivamente, conforme ilustrado na figura a seguir:

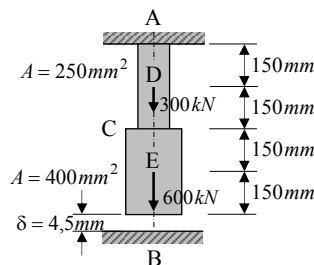


O conjunto está ligado a dois suportes rígidos em A e B e é solicitada por duas forças de  $300kN$  e  $600kN$

Determine as reacções  $R_A$  e  $R_B$  nos apoios A e B, respectivamente.

Solução:  $R_A = 323kN$ ;  $R_B = 577kN$ .

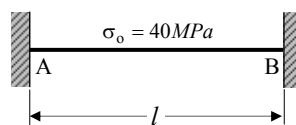
**4.3.33.** Reconsidere o problema anterior, admitindo agora que existe uma folga inicial de  $4,5mm$  entre a barra e o apoio inferior, conforme ilustrado na figura a seguir:



Determine as reacções  $R_A$  e  $R_B$  nos apoios A e B, respectivamente.

Solução:  $R_A = 784,6kN$ ;  $R_B = 115,4kN$ .

**4.3.34.** Um arame de aço AB ( $E=210GPa$ ,  $\alpha=14 \times 10^{-6}/^{\circ}C$ ) é esticado entre dois suportes rígidos a uma tensão de  $\sigma_0 = 40MPa$ , à temperatura ambiente de  $20^{\circ}C$ , conforme indicado na figura a seguir.



Determine:

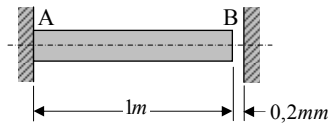
a) A tensão  $\sigma$  no arame quando a temperatura desce para  $0^{\circ}C$ .

a) A temperatura  $T$  para a qual se torna nula a tensão no arame.

Solução: a)  $\sigma = 98,8MPa$ . b)  $T = 33,6^{\circ}C$ .

**4.3.35.** Uma barra de cobre AB ( $E=110GPa$ ,  $\alpha=17 \times 10^{-6}/^{\circ}C$ ), com  $1m$  de comprimento, é posicionada entre duas paredes rígidas, havendo uma folga inicial de  $0,2mm$ , à temperatura ambiente de

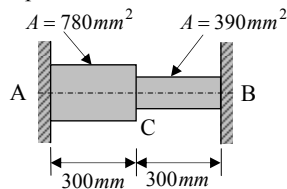
20°C, conforme representado na figura a seguir.



Determine a tensão a que a barra fica submetida quando a temperatura sobe para os 70°C.

Solução: a)  $\sigma = -71,5MPa$ .

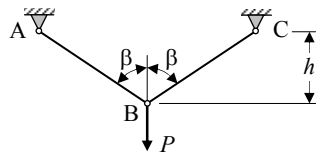
4.3.36. A barra representada na figura a seguir é montada (sem qualquer folga ou aperto...) entre os dois apoios rígidos A e B, à temperatura ambiente de 20°C.



Tomando para o módulo de Young do material o valor  $E=200GPa$  e para o coeficiente de dilatação térmica o valor  $\alpha=12 \times 10^{-6}/^\circ C$ , determine as tensões nos segmentos AC e BC quando a temperatura da barra passa para -45°C.

Solução:  $\sigma_{AC} = -104MPa$ ,  $\sigma_{BC} = -208MPa$ .

4.3.37. Considere a estrutura articulada plana representada na figura a seguir, constituída por duas barras iguais, de rigidez axial (EA), sujeitas à acção duma força vertical (P) aplicada no nó de ligação entre os dois elementos.



Determine o deslocamento vertical do ponto B.

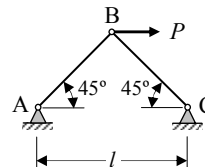
Solução:  $(\delta_B)_v = \frac{Ph}{2EA \cos^3(\beta)}$ .

4.3.38. Resolva o problema anterior para os seguintes valores numéricos:

$h = 3,5m$ ,  $A = 300mm^2$ ,  $\beta = 45^\circ$ ,  $E = 210GPa$  e  $P = 50kN$ .

Solução:  $(\delta_B)_v = 3,93mm$

4.3.39. Considere a estrutura articulada plana representada na figura a seguir, constituída por duas barras iguais, de rigidez axial (EA), sujeita à acção duma força horizontal (P) aplicada no nó de ligação entre os dois elementos.



Determine:

a) A energia elástica de deformação na estrutura.

b) O deslocamento horizontal do ponto de aplicação da carga.

Solução: a)  $U = P^2 l / (2\sqrt{2} EA)$ .

b)  $(\delta_B)_h = Pl / (\sqrt{2} EA)$ .

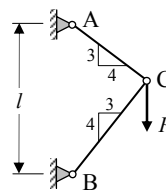
4.3.40. Resolva o problema anterior para os seguintes valores numéricos:

$l = 3m$ ,  $A = 10cm^2$ ,  $E = 70GPa$  e  $P = 20ton$ .

Solução: a)  $U = 606,09Joule$ .

b)  $(\delta_B)_h = 3,03mm$ .

4.3.41. Considere a estrutura articulada plana representada na figura a seguir, constituída por duas barras de igual rigidez axial (EA), sujeita à acção duma força vertical (P) aplicada no nó C.



Determine:

a) A energia elástica de deformação.

b) O deslocamento vertical do ponto C.

Solução: a)  $U = 0,364P^2l/(EA)$ .

b)  $(\delta_C)_v = -0,728Pl/(EA)$ .

4.3.42. Resolva o problema anterior para os seguintes valores numéricos:

$l = 5m$ ,  $A = 800mm^2$ ,  $E = 210GPa$  e  $P = 15ton$ .

Solução: a)  $U = 202,03Joule$ .

b)  $(\delta_B)_h = -2,30mm$ .

4.3.43. Ainda relativamente à situação a que se refere o problema 4.3.41, determine o deslocamento horizontal do ponto C.

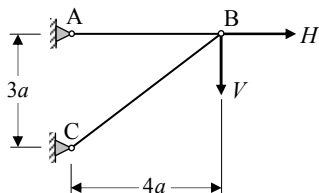
Solução:  $(\delta_C)_h = -0,096Pl/(EA)$ .

4.3.44. Resolva o problema anterior para os seguintes valores numéricos:

$l = 4m$ ,  $A = 12cm^2$ ,  $E = 80GPa$  e  $P = 150kN$ .

Solução:  $(\delta_B)_h = -0,42mm$ .

4.3.45. Considere a estrutura articulada plana representada na figura a seguir, constituída por duas barras com a mesma rigidez axial ( $EA$ ), sujeita à acção de duas forças  $H$  e  $V$ , aplicadas no nó de ligação entre os dois elementos.



Determine a energia elástica de deformação na estrutura, em cada uma das situações seguintes:

a) Actua apenas a força  $H$  (i.e.  $V=0$ ).

b) Actua apenas a força  $V$  (i.e.  $H=0$ ).

c) Actuam as duas forças ( $H \neq 0$ ,  $V \neq 0$ ).

Solução: a)  $U_H = 2H^2a/(EA)$ .

b)  $U_V = 21V^2a/(2EA)$ .

c)  $U_{HV} = a(12H^2 + 32HV + 63V^2)/(6EA)$ .

4.3.46. Resolva o problema anterior para os seguintes valores numéricos:

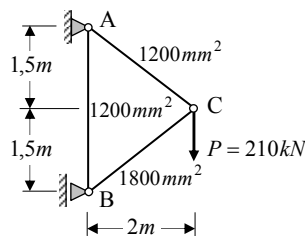
$a = 3m$ ,  $A = 500mm^2$ ,  $E = 70GPa$ ,  $H = 20kN$ , e  $V = 30kN$ .

Solução: a)  $U_H = 68,57Joule$ .

b)  $U_V = 810,00Joule$ .

c)  $U_{HV} = 1152,86Joule$ .

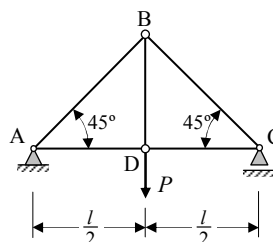
4.3.47. Considere a estrutura articulada plana representada na figura a seguir, constituída por três barras em aço ( $E=200GPa$ ), com as áreas indicadas na figura, e sujeita à acção de uma força vertical ( $P=210kN$ ) aplicada no nó C.



Determine o deslocamento vertical do ponto de aplicação da força  $P$ .

Solução:  $(\delta_C)_v = -3,19mm$ .

4.3.48. Considere a estrutura articulada plana representada na figura a seguir, constituída por cinco barras com a mesma rigidez axial ( $EA$ ), sujeita à acção de uma força vertical ( $P$ ) aplicada no nó D.



Determine:

a) A energia elástica de deformação na estrutura.

b) O deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga (D).

Solução: a)  $U = 1,457P^2l/(EA)$ .

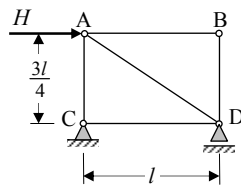
b)  $(\delta_D)_v = -2,914Pl/(EA)$ .

**4.3.49.** Resolva o problema anterior para os seguintes valores numéricos:  
 $l = 2m$ ,  $P = 120kN$ ,  $A = 20cm^2$ ,  
 $E = 200GPa$ .

Solução: Solução: a)  $U=104,9Joule$ .

b)  $(\delta_B)_v = -1,748mm$ .

**4.3.50.** Considere a estrutura articulada plana representada na figura a seguir, constituída por cinco barras com a mesma rigidez axial ( $EA$ ), sujeita à acção duma força horizontal ( $H$ ) aplicada no nó A.



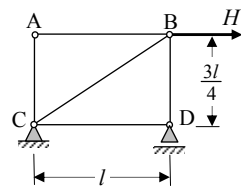
Determine o deslocamento horizontal do ponto de aplicação da força  $H$ .

Solução:  $(\delta_A)_h = 3,375Hl/(EA)$ .

**4.3.51.** Resolva o problema anterior para os seguintes valores numéricos:  $l = 3,5m$ ,  
 $A = 25cm^2$ ,  $E = 70GPa$  e  $H = 3ton$ .

Solução:  $(\delta_A)_h = 2,03mm$ .

**4.3.52.** Considere a estrutura articulada plana representada na figura a seguir, constituída por cinco barras com a mesma rigidez axial ( $EA$ ), sujeita à acção duma força horizontal ( $H$ ) aplicada no nó B.



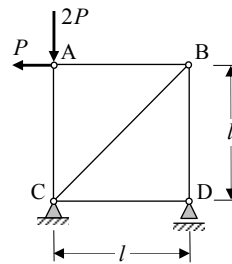
Determine o deslocamento horizontal do ponto de aplicação da força  $H$ .

Solução:  $(\delta_B)_h = 2,375Hl/(EA)$ .

**4.3.53.** Resolva o problema anterior para os seguintes valores numéricos:  $l = 3,5m$ ,  
 $A = 25cm^2$ ,  $E = 70GPa$  e  $H = 3ton$ .

Solução:  $(\delta_A)_h = 1,43mm$ .

**4.3.54.** Considere a estrutura articulada plana representada na figura a seguir, constituída por cinco barras com a mesma rigidez axial ( $EA$ ), sujeita à acção de duas forças ( $P$  e  $2P$ ) aplicadas no nó A.



Determine:

a) O deslocamento horizontal do ponto B.

a) O deslocamento vertical do B.

Solução: a)  $(\delta_B)_h = -3,828Pl/(EA)$ .

b)  $(\delta_B)_v = -Pl/(EA)$ .

**4.3.55.** Resolva o problema anterior para os seguintes valores numéricos:  $l = 3,2m$ ,  
 $A = 15cm^2$ ,  $E = 210GPa$  e  $P = 6ton$ .

Solução: a)  $(\delta_B)_h = -2,33mm$ .

b)  $(\delta_B)_v = -0,61mm$ .

**4.3.56.** Relativamente à estrutura a que se refere o problema 4.3.52, determine:

a) O ângulo de rotação do elemento AB.

b) A variação da distância entre os nós A e D.

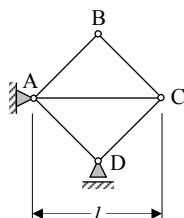
Solução: a)  $\theta_{AB} = 3P/(EA)$ .

b)  $\Delta_{AD} = -2Pl/(EA)$

**4.3.57.** Ainda relativamente à estrutura a que se refere o problema 4.3.52, e considerando o coeficiente de expansão térmica ( $\alpha$ ) do material, determine o deslocamento horizontal do ponto B produzido por uma variação de temperatura ( $\Delta T$ ) da barra BD.

Solução:  $(\delta_B)_h = -\alpha l(\Delta T)$ .

**4.3.58.** Considere a estrutura articulada plana quadrangular representada na figura a seguir.



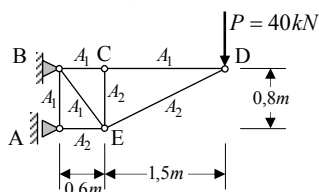
Supondo que o coeficiente de expansão térmica do material é  $\alpha$ , determine a variação da distância entre os nós B e D quando há um aumento  $\Delta T$  da temperatura do conjunto.

Solução:  $\Delta_{BD} = -2\alpha l(\Delta T)$ .

**4.3.59.** Resolva o problema anterior para os seguintes valores numéricos:  $l = 3m$ ,  $\alpha = 23,6 \times 10^{-6} / ^\circ C$  e  $\Delta T = 20^\circ C$ .

Solução:  $\Delta_{BD} = -2,83mm$ .

**4.3.60.** As barras da estrutura reticulada representada na figura a seguir são em tubo de alumínio ( $E=73GPa$ ) com as áreas de secção transversal indicadas ( $A_1=5cm^2$ ,  $A_2=10cm^2$ ).



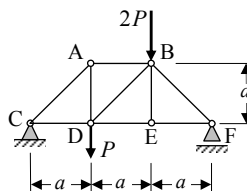
Determine o deslocamento vertical do ponto de aplicação da força  $P$ .

Solução:  $(\delta_D)_v = -16,27mm$ .

**4.3.61.** Ainda relativamente à situação a que se refere o problema anterior, determine o deslocamento vertical do nó C.

Solução:  $(\delta_C)_v = -2,36mm$ .

**4.3.62.** Considere a estrutura articulada plana representada na figura a seguir, constituída por nove barras com a mesma rigidez axial ( $EA$ ), sujeita à acção duas forças verticais ( $P$  e  $2P$ ) aplicadas nos nós D e B, respectivamente.



Determine:

- a) O deslocamento vertical do nó E.
- b) A variação da distância entre os nós A e E.

Solução: a)  $(\delta_E)_v = -8,27Pa/(EA)$ .

b)  $\Delta_{AE} = 1,85Pa/(EA)$

**4.3.63.** Resolva o problema anterior para os seguintes valores numéricos:  $a = 2,5m$ ,  $P = 3ton$ ,  $E = 210GPa$  e  $A = 800mm^2$ .

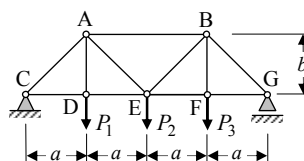
Solução: a)  $(\delta_E)_v = -3,69mm$ .

b)  $\Delta_{AE} = 0,83mm$ .

**4.3.64.** Considere a estrutura articulada plana representada na figura a seguir, construída a partir de barras de aço ( $E$ ) com as seguintes áreas transversais:

- Elementos AB e CD: Área  $A_1$
- Elementos AE, EF, FG e GD: Área  $A_2$
- Elemento BC: Área  $A_3$
- Elementos BE, BF, CF e CG: Área  $A_4$

A estrutura está sujeita à acção de três forças  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$ , conforme indicado na figura.



Considerando os valores numéricos  $P_1=P_2=40kN$ ,  $P_3=20kN$ ,  $A_1=40cm^2$ ,  $A_2=20cm^2$ ,  $A_3=28cm^2$ ,  $A_4=14cm^2$ ,  $a=3m$ ,  $b=4m$  e  $E=200GPa$ , calcule:

- a) O deslocamento vertical do nó E.
- b) O deslocamento horizontal do mesmo nó.

Solução: a)  $(\delta_E)_v = -1,89mm$ .

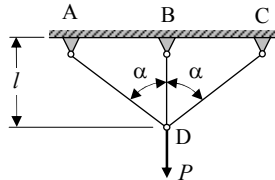
b)  $(\delta_E)_h = 0,62mm$ .

4.3.65. Ainda relativamente à estrutura a que se refere o problema anterior, calcule:

- a) O ângulo de rotação do elemento AB.
- b) A variação da distância entre os nós A e F.

Solução: a)  $\theta_{AB}=38,3 \times 10^{-6} \text{ rad}$ .  
 b)  $\Delta_{AF} = -0,019 \text{ mm}$ .

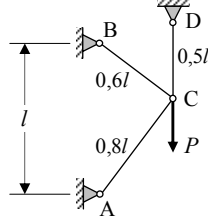
4.3.66. Uma força  $P$  é suportada por um sistema de três barras articuladas, todas de igual rigidez axial ( $EA$ ), conforme representado na figura a seguir.



Determine o esforço axial na barra BD

Solução:  $N_{BD} = P/(1+2\cos^3 a)$ .

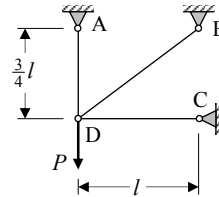
4.3.67. Uma força  $P$  é suportada por um sistema de três barras articuladas, todas de igual rigidez axial ( $EA$ ), conforme representado na figura a seguir.



Determine o esforço axial em cada uma das barras.

Solução:  $N_{AC} = -0,326P$ ;  $N_{BC} = 0,244P$ ;  
 $N_{CD} = 0,593P$ .

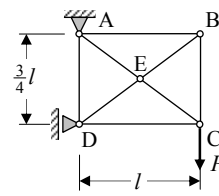
4.3.68. Uma força  $P$  é suportada por um sistema de três barras articuladas, todas de igual rigidez axial ( $EA$ ), conforme representado na figura a seguir.



Determine o esforço axial na barra AD.

Solução:  $N_{AD} = 7P/8$ .

4.3.69. Uma força  $P$  é suportada por um sistema de oito barras articuladas, todas de igual rigidez axial ( $EA$ ), conforme representado na figura a seguir.



Determine o esforço axial na barra AB.

Solução:  $N_{AB} = 0,583P$ .

**4.12. BIBLIOGRAFIA**

[6.1]-Timoshenko, S.P. and Young D.H., "Elements of Strength of Materials", Ed. Van Nostrand, New York, (1962).  
 [6.2]-Branco, C.A.M., "Mecânica dos Materiais", Ed. Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, (1985).  
 [6.3]-Massonnet, C., "Résistance des Matériaux", Ed. Dunod, Paris, (1968).



[6.4]-Benham, P.P. and Warnock, F.V., "Mechanics of Solids and Structures", Ed. Pitman Publishing, London, (1976).

[6.5]-Hearn, E.J., "Mechanics of Materials", Ed. Pergamon Press, Oxford, (1981).

[6.6]-Ugural, A.C. and Fenster, S.K., "Advanced Strength and Applied Elasticity", Ed. Elsevier North-Holland Publishing Company, Inc., New York (1981).

[6.7]-Gere, J.M., and Timoshenko, S.P., "Mechanics of Materials", Ed. Chapman & Hall, London (1992).

[6.8]-Beer, F.P., and Johnston, E.E., "Mechanics of Materials", McGraw-Hill Book Co., London (1992).

[6.9]-Portela, A., e Silva, A., "Mecânica dos Materiais", Plátano Edições Técnicas, Lisboa (1996).