

**CAPÍTULO I**  
**ANÁLISE DAS TENSÕES**

**1.1. RESUMO DA TEORIA**

**1.1.1. Introdução. O Conceito de Tensão**

Há, fundamentalmente, dois tipos distintos de forças exteriores que podem actuar sobre um corpo material: (i)-forças de superfície e (ii)-forças de volume. Considere-se o corpo (C) em equilíbrio sob a acção destes dois tipos de forças, Fig. 1.1:

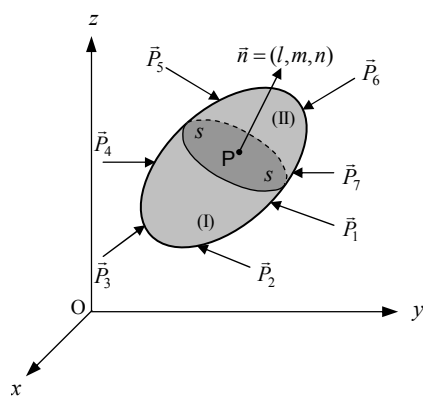


Fig. 1.1 – Corpo em equilíbrio

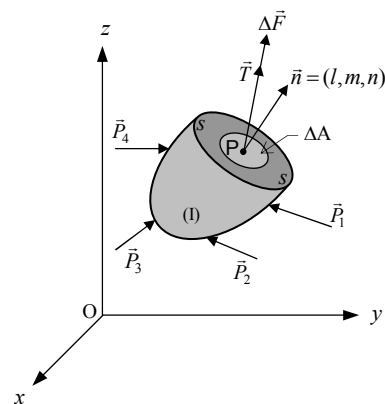


Fig. 1.2 – Tensão resultante no ponto P

A Tensão Resultante  $\vec{T}(P, \vec{n})$ , no ponto P, para uma superfície de corte perpendicular a  $\vec{n} = (l, m, n)$ , define-se pela expressão (Fig. 1.2):

$$\vec{T} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta A} \quad (1.1)$$

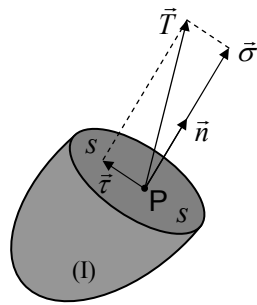


Fig. 1.3 - Decomposição do vector tensão resultante

Em geral, o vector tensão resultante  $\vec{T}(P, \vec{n})$  tem uma direcção distinta da normal  $\vec{n}$  e poderá decompor-se segundo duas direcções ortogonais, conforme ilustrado na Fig.1.3:

Uma componente perpendicular ao plano de corte, designada por *tensão normal* e representada por  $\sigma$ , e uma segunda componente no plano de corte, designada por *tensão tangencial* ou *tensão de corte*, representada por  $\tau$ .

### 1.1.2. Componentes Cartesianas da Tensão

Em cada ponto  $P(x,y,z)$ , é possível definir um conjunto de nove componentes cartesianas do estado de tensão nesse ponto, Fig.1.4 e Fig.1.5, que podem ser agrupadas numa matriz quadrada sob a forma seguinte:

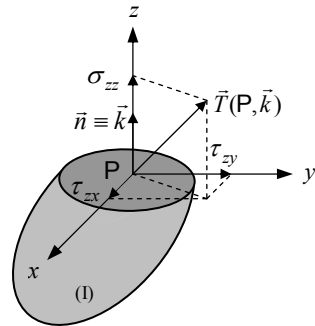


Fig. 1.4 - Componentes cartesianas da tensão resultante  $\vec{T}(P, \vec{k})$

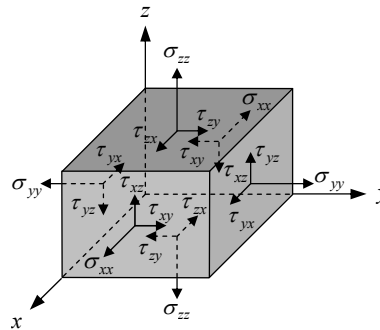


Fig. 1.5 - Representação gráfica das seis componentes cartesianas da tensão

$$[\tau] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

A matriz das tensões  $[\tau]$  é simétrica relativamente à diagonal principal, isto é,  $\tau_{yx} = \tau_{xy}$ ,  $\tau_{zy} = \tau_{yz}$  e  $\tau_{zx} = \tau_{xz}$ . Em alternativa, é possível representar as seis componentes independentes da tensão pelo chamado *vector das tensões*  $\{\sigma\}$ , definido pela seguinte expressão:

$$\sigma = \{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1.3)$$

### 1.1.3. Tensão para uma Orientação Arbitrária

Em cada ponto  $P(x,y,z)$  dum corpo material, a intensidade e a direcção do vector tensão resultante  $\vec{T}$  dependem da orientação do plano de corte ( $\pi$ ) que se considera, Fig. 1.6(a):

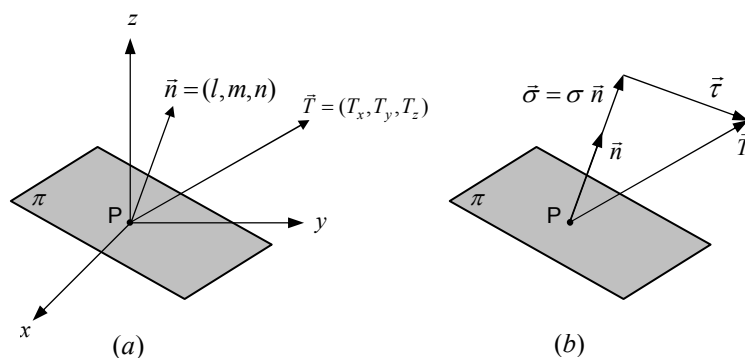


Fig. 1.6 – Tensão resultante para um plano de orientação arbitrária

$$\begin{aligned} T_x &= l\sigma_{xx} + m\tau_{xy} + n\tau_{xz} \\ T_y &= l\tau_{yx} + m\sigma_{yy} + n\tau_{yz} \\ T_z &= l\tau_{zx} + m\tau_{zy} + n\sigma_{zz} \end{aligned} \quad (1.4a)$$

ou, sob a forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix} \quad (1.4b)$$

As componentes normal ( $\sigma$ ) e tangencial ( $\tau$ ) da tensão em P são dadas, respectivamente, pelas expressões seguintes:

$$\sigma = \sigma_{xx}l^2 + \sigma_{yy}m^2 + \sigma_{zz}n^2 + 2\tau_{xy}lm + 2\tau_{yz}mn + 2\tau_{zx}nl \quad (1.5)$$

e

$$\tau^2 = T_x^2 + T_y^2 + T_z^2 - \sigma^2 \quad (1.6)$$

A direcção da tensão de corte  $\tau$  no plano  $\pi$ ,  $\vec{n}_c = (l_c, m_c, n_c)$ , fica definida pelos respectivos co-senos directores:

$$\begin{aligned} l_c &= (T_x - l\sigma)/\tau \\ m_c &= (T_y - m\sigma)/\tau \\ n_c &= (T_z - n\sigma)/\tau \end{aligned} \quad (1.7)$$

#### 1.1.4. Equações de Equilíbrio

As seis funções que definem o campo das tensões estão ligadas entre si por três equações diferenciais:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + F_x = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} + F_y = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + F_z = 0 \end{cases} \quad (1.8)$$

Estas são as chamadas *equações de equilíbrio* da teoria da elasticidade ou equações de equilíbrio das tensões em coordenadas cartesianas.

Além das equações de equilíbrio, verifica-se também que as componentes de corte em cada ponto são iguais duas a duas, isto é:

$$\begin{aligned}\tau_{yx} &= \tau_{xy} \\ \tau_{zy} &= \tau_{yz} \\ \tau_{zx} &= \tau_{xz}\end{aligned}\quad (1.9)$$

A simetria das tensões tangenciais expressa pelas equações (1.9) implica uma *lei de reciprocidade* mais geral, que se pode exprimir através da seguinte equação vectorial:

$$\vec{T}(P, \vec{n}) | \vec{n}' = \vec{T}(P, \vec{n}') | \vec{n} \quad (1.10)$$

Este resultado traduz a denominada *lei da reciprocidade das tensões ou Teorema de Cauchy*.

### 1.1.5. Leis de Transformação das Tensões

Por aplicação das equações (1.4), podem calcular-se as componentes cartesianas da tensão referidas a um referencial particular  $Ox'y'z'$ , Fig.1.7, em função das componentes cartesianas da tensão no referencial global  $Oxyz$  e dos co-senos directores que definem a posição relativa dos dois referenciais:

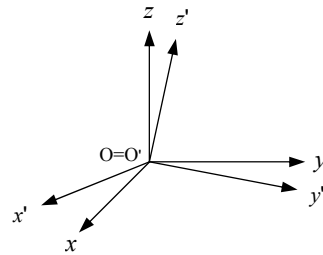


Fig. 1.7– Referenciais  $Oxyz$  e  $Ox'y'z'$

$$\begin{aligned}\sigma_{x'x'} &= \sigma_{xx}l_x^2 + \sigma_{yy}m_x^2 + \sigma_{zz}n_x^2 + 2\tau_{yz}m_xn_x + 2\tau_{xz}n_xl_x + 2\tau_{xy}l_xm_x \\ \sigma_{y'y'} &= \sigma_{xx}l_y^2 + \sigma_{yy}m_y^2 + \sigma_{zz}n_y^2 + 2\tau_{yz}m_y n_y + 2\tau_{xz}n_y l_y + 2\tau_{xy}l_y m_y \\ \sigma_{z'z'} &= \sigma_{xx}l_z^2 + \sigma_{yy}m_z^2 + \sigma_{zz}n_z^2 + 2\tau_{yz}m_z n_z + 2\tau_{xz}n_z l_z + 2\tau_{xy}l_z m_z \\ \tau_{y'z'} &= \sigma_{xx}l_y l_z + \sigma_{yy}m_y m_z + \sigma_{zz}n_y n_z + \tau_{yz}(m_y n_z + n_y m_z) \\ &\quad + \tau_{xz}(n_y l_z + l_y n_z) + \tau_{xy}(l_y m_z + m_y l_z) \quad (1.11) \\ \tau_{x'z'} &= \sigma_{xx}l_z l_x + \sigma_{yy}m_z m_x + \sigma_{zz}n_z n_x + \tau_{yz}(m_z n_x + n_z m_x) \\ &\quad + \tau_{xz}(n_z l_x + l_z n_x) + \tau_{xy}(l_z m_x + m_z l_x) \\ \tau_{x'y'} &= \sigma_{xx}l_x l_y + \sigma_{yy}m_x m_y + \sigma_{zz}n_x n_y + \tau_{yz}(m_x n_y + n_x m_y) \\ &\quad + \tau_{xz}(n_x l_y + l_x n_y) + \tau_{xy}(l_x m_y + m_x l_y)\end{aligned}$$

ou, inversamente:

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= \sigma_{x'x'}l_{x'}^2 + \sigma_{y'y'}l_{y'}^2 + \sigma_{z'z'}l_{z'}^2 + 2\tau_{y'z'}l_{y'}l_{z'} + 2\tau_{x'z'}l_{z'}l_{x'} + 2\tau_{x'y'}l_{x'}l_{y'} \\
\sigma_{yy} &= \sigma_{x'x'}m_{x'}^2 + \sigma_{y'y'}m_{y'}^2 + \sigma_{z'z'}m_{z'}^2 + 2\tau_{y'z'}m_{y'}m_{z'} + 2\tau_{x'z'}m_{z'}m_{x'} + 2\tau_{x'y'}m_{x'}m_{y'} \\
\sigma_{zz} &= \sigma_{x'x'}n_{x'}^2 + \sigma_{y'y'}n_{y'}^2 + \sigma_{z'z'}n_{z'}^2 + 2\tau_{y'z'}n_{y'}n_{z'} + 2\tau_{x'z'}n_{z'}n_{x'} + 2\tau_{x'y'}n_{x'}n_{y'} \\
\tau_{yz} &= \sigma_{x'x'}m_{x'}n_{x'} + \sigma_{y'y'}m_{y'}n_{y'} + \sigma_{z'z'}l_{z'}n_{z'} + \tau_{y'z'}(m_{y'}n_{z'} + m_{z'}n_{y'}) \\
&\quad + \tau_{x'z'}(m_{z'}n_{x'} + m_{x'}n_{z'}) + \tau_{x'y'}(m_{x'}n_{y'} + m_{y'}n_{x'}) \quad (1.12) \\
\tau_{xz} &= \sigma_{x'x'}n_{x'}l_{x'} + \sigma_{y'y'}n_{y'}l_{y'} + \sigma_{z'z'}n_{z'}l_{z'} + \tau_{y'z'}(n_{y'}l_{z'} + n_{z'}l_{y'}) \\
&\quad + \tau_{x'z'}(n_{z'}l_{x'} + n_{x'}l_{z'}) + \tau_{x'y'}(n_{x'}l_{y'} + n_{y'}l_{x'}) \\
\tau_{xy} &= \sigma_{x'x'}l_{x'}m_{x'} + \sigma_{y'y'}l_{y'}m_{y'} + \sigma_{z'z'}l_{z'}m_{z'} + \tau_{y'z'}(l_{y'}m_{z'} + l_{z'}m_{y'}) \\
&\quad + \tau_{x'z'}(l_{z'}m_{x'} + l_{x'}m_{z'}) + \tau_{x'y'}(l_{x'}m_{y'} + l_{y'}m_{x'})
\end{aligned}$$

Estas equações de transformação podem escrever-se de uma maneira concentrada, sob a forma matricial seguinte:

$$[\boldsymbol{\tau}'] = [\mathbf{L}] [\boldsymbol{\tau}] [\mathbf{L}]^T \quad (1.13)$$

onde  $[\mathbf{L}]$  é a matriz de transformação de coordenadas e  $[\mathbf{L}]^T$  é a respectiva matriz transposta.

Inversamente, pode escrever-se:

$$[\boldsymbol{\tau}] = [\mathbf{L}]^T [\boldsymbol{\tau}'] [\mathbf{L}] \quad (1.14)$$

Em alternativa, quando se utiliza a notação vectorial da tensão, as equações de transformação das tensões escrevem-se:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [\mathbf{T}] \begin{Bmatrix} \sigma_{x'x'} \\ \sigma_{y'y'} \\ \sigma_{z'z'} \\ \tau_{y'z'} \\ \tau_{x'z'} \\ \tau_{x'y'} \end{Bmatrix} \quad (1.15a)$$

ou, simplesmente :

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbf{T}] \{\boldsymbol{\sigma}'\} \quad (1.15b)$$

onde:

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} & T_{15} & T_{16} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{24} & T_{25} & T_{26} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & T_{34} & T_{35} & T_{36} \\ T_{41} & T_{42} & T_{43} & T_{44} & T_{45} & T_{46} \\ T_{51} & T_{52} & T_{53} & T_{54} & T_{55} & T_{56} \\ T_{61} & T_{62} & T_{63} & T_{64} & T_{65} & T_{66} \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

com:

$$\begin{aligned} T_{11} &= l_x'^2; T_{12} = l_y'^2; T_{13} = l_z'^2; T_{14} = 2l_y'l_z'; T_{15} = 2l_z'l_x'; T_{16} = 2l_x'l_y'; T_{21} = m_x'^2; \\ T_{22} &= m_y'^2; T_{23} = m_z'^2; T_{24} = 2m_y'm_z'; T_{25} = 2m_z'm_x'; T_{26} = 2m_x'm_y'; T_{31} = n_x'^2; \\ T_{32} &= n_y'^2; T_{33} = n_z'^2; T_{34} = 2n_y'n_z'; T_{35} = 2n_z'n_x'; T_{36} = 2n_x'n_y'; T_{41} = m_x'n_x'; \\ T_{42} &= m_y'n_y'; T_{43} = l_z'n_z'; T_{44} = m_y'n_z' + m_z'n_y'; T_{45} = m_z'n_x' + m_x'n_z'; \\ T_{46} &= m_x'n_y' + m_y'n_x'; T_{51} = l_x'n_x'; T_{52} = l_y'n_y'; T_{53} = l_z'n_z'; T_{54} = n_y'l_z' + n_z'l_y'; \\ T_{55} &= n_z'l_x' + n_x'l_z'; T_{56} = n_x'l_y' + n_y'l_x'; T_{61} = l_x'm_x'; T_{62} = l_y'm_y'; T_{63} = l_z'm_z'; \\ T_{64} &= l_y'm_z' + l_z'm_y'; T_{65} = l_z'm_x' + l_x'm_z'; T_{66} = l_x'm_y' + l_y'm_x' \end{aligned}$$

A matriz  $[\mathbf{T}]$  definida pelos coeficientes (1.24d) é designada por *matriz de transformação das tensões*.

Inversamente, pode escrever-se:

$$\{\boldsymbol{\sigma}'\} = [\mathbf{T}]^{-1} \{\boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbf{R}] \{\boldsymbol{\sigma}\} \quad (1.17)$$

onde:

$$[\mathbf{R}] = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & R_{14} & R_{15} & R_{16} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & R_{24} & R_{25} & R_{26} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & R_{34} & R_{35} & R_{36} \\ R_{41} & R_{42} & R_{43} & R_{44} & R_{45} & R_{46} \\ R_{51} & R_{52} & R_{53} & R_{54} & R_{55} & R_{56} \\ R_{61} & R_{62} & R_{63} & R_{64} & R_{65} & R_{66} \end{bmatrix} \quad (1.18)$$

com:

$$\begin{aligned}
R_{11} &= l_{x'}^2; R_{12} = m_{x'}^2; R_{13} = n_{x'}^2; R_{14} = 2m_{x'}n_{x'}; R_{15} = 2n_{x'}l_{x'}; R_{16} = 2l_{x'}m_{x'}; \\
R_{21} &= l_{y'}^2; R_{22} = m_{y'}^2; R_{23} = n_{y'}^2; R_{24} = 2m_{y'}n_{y'}; R_{25} = 2n_{y'}l_{y'}; R_{26} = 2l_{y'}m_{y'}; \\
R_{31} &= l_{z'}^2; R_{32} = m_{z'}^2; R_{33} = n_{z'}^2; R_{34} = 2m_{z'}n_{z'}; R_{35} = 2n_{z'}l_{z'}; R_{36} = 2l_{z'}m_{z'}; \\
R_{41} &= l_{y'}l_{z'}; R_{42} = m_{y'}m_{z'}; R_{43} = n_{y'}n_{z'}; R_{44} = m_{y'}n_{z'} + n_{y'}m_{z'}; \\
R_{45} &= n_{y'}l_{z'} + l_{y'}n_{z'}; R_{46} = l_{y'}m_{z'} + m_{y'}l_{z'}; R_{51} = l_{x'}l_{z'}; R_{52} = m_{x'}m_{z'}; \\
R_{53} &= n_{x'}n_{z'}; R_{54} = m_{z'}n_{x'} + n_{z'}m_{x'}; R_{55} = n_{z'}l_{x'} + l_{z'}n_{x'}; R_{56} = l_{z'}m_{x'} + m_{z'}l_{x'}; \\
R_{61} &= l_{x'}l_{y'}; R_{62} = m_{x'}m_{y'}; R_{63} = n_{x'}n_{y'}; R_{64} = m_{x'}n_{y'} + n_{x'}m_{y'}; \\
R_{65} &= n_{x'}l_{y'} + l_{x'}n_{y'}; T_{66} = l_{x'}m_{y'} + m_{x'}l_{y'}
\end{aligned}$$

Independentemente do referencial que se utilize, são sempre constantes as seguintes grandezas:

### 1º Invariante das Tensões

$$\sigma_{x'x'} + \sigma_{y'y'} + \sigma_{z'z'} = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = I_1 \quad (1.19)$$

### 2º Invariante das Tensões

$$\begin{aligned}
&\sigma_{x'x'}\sigma_{y'y'} + \sigma_{y'y'}\sigma_{z'z'} + \sigma_{z'z'}\sigma_{x'x'} - \tau_{x'y'}^2 - \tau_{y'z'}^2 - \tau_{z'x'}^2 = \\
&= \sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} + \sigma_{zz}\sigma_{xx} - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = I_2 \quad (1.20)
\end{aligned}$$

### 3º Invariante das Tensões

$$\begin{aligned}
&\sigma_{x'x'}\sigma_{y'y'}\sigma_{z'z'} - \sigma_{x'x'}\tau_{y'z'}^2 - \sigma_{y'y'}\tau_{z'x'}^2 - \sigma_{z'z'}\tau_{x'y'}^2 + 2\tau_{x'y'}\tau_{y'z'}\tau_{z'x'} = \\
&= \sigma_{xx}\sigma_{yy}\sigma_{zz} - \sigma_{xx}\tau_{yz}^2 - \sigma_{yy}\tau_{zx}^2 - \sigma_{zz}\tau_{xy}^2 + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} = I_3 \quad (1.21)
\end{aligned}$$

## 1.1.6. Tensões Principais

Para determinadas orientações do plano de corte, o vector tensão resultante  $\vec{T}$  é paralelo ao versor normal  $\vec{n}$ , Fig.1.8, sendo nula a respectiva componente de corte ( $\tau = 0$ ). Tal plano diz-se um *plano principal de tensão* e a direcção  $\vec{n}$  perpendicular a esse plano principal é uma *direcção principal de tensão*. A tensão normal que lhe corresponde,  $\sigma = T$ , diz-se uma *tensão principal* no ponto considerado.



Em cada ponto P, existem pelo menos três planos principais mutuamente ortogonais, aos quais estão associadas, no máximo, três tensões principais distintas. As tensões principais  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$  são as três raízes da seguinte equação algébrica do 3º grau em  $\sigma$ :

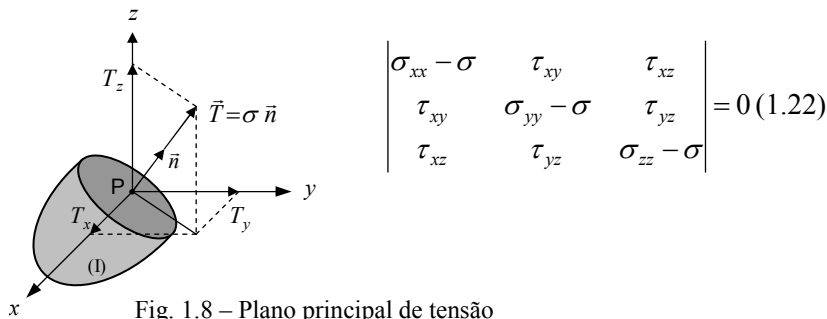


Fig. 1.8 – Plano principal de tensão

ou seja, desenvolvendo a expressão para o determinante acima:

$$\begin{aligned} \sigma^3 - (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})\sigma^2 + (\sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} + \sigma_{zz}\sigma_{xx} - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{xz}^2)\sigma \\ - (\sigma_{xx}\sigma_{yy}\sigma_{zz} - \sigma_{xx}\tau_{yz}^2 - \sigma_{yy}\tau_{xz}^2 - \sigma_{zz}\tau_{xy}^2 + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{xz}) = 0 \end{aligned} \quad (1.23)$$

Para cada uma dessas tensões principais, a respectiva direcção é dada pelo sistema de equações lineares seguinte:

$$\begin{cases} (\sigma_{xx} - \sigma)l + \tau_{xy}m + \tau_{xz}n = 0 \\ \tau_{xy}l + (\sigma_{yy} - \sigma)m + \tau_{yz}n = 0 \\ \tau_{xz}l + \tau_{yz}m + (\sigma_{zz} - \sigma)n = 0 \end{cases} \quad (1.24)$$

onde  $\sigma$  assume os valores  $\sigma_1, \sigma_2$  ou  $\sigma_3$ , respectivamente.

Relativamente ao triedro principal  $\{\bar{n}_1, \bar{n}_2, \bar{n}_3\}$ , as expressões das componentes da tensão normal e de corte para a um plano qualquer, definido pelos respectivos co-senos directores  $(l, m, n)$ , são as seguintes:

$$\sigma = l^2\sigma_1 + m^2\sigma_2 + n^2\sigma_3 \quad (1.25)$$

e

$$\begin{aligned}\tau^2 &= l^2\sigma_1^2 + m^2\sigma_2^2 + n^2\sigma_3^2 - (l^2\sigma_1 + m^2\sigma_2 + n^2\sigma_3)^2 \\ &= (\sigma_1 - \sigma_2)^2 l^2 m^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 m^2 n^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 n^2 l^2\end{aligned}\quad (1.26)$$

### 1.1.7. Valores Máximos das Tensões Normais e de Corte

Os valores estacionários das *tensões normais* num ponto ocorrem para planos de corte coincidentes com os planos principais de tensão nesse ponto. Considerando a convenção habitual em tomar  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ , o valor máximo da tensão normal é igual à maior das tensões principais  $\sigma_1$  e o valor mínimo é igual a  $\sigma_3$ .

Quanto à tensão de corte, o valor máximo em cada ponto é dado pela expressão seguinte:

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad (1.27)$$

e ocorre para um plano de corte definido por um versor normal  $\vec{n}_c$ , cujos co-senos directores no triedro principal são os seguintes:

$$\vec{n}_c = (\pm\sqrt{2}/2, 0, \pm\sqrt{2}/2) \quad (1.28)$$

### 1.1.8. Tensões Octaédricas

As direcções e planos cujos co-senos directores, no referencial principal no ponto P, satisfazem a condição:

$$l^2 = m^2 = n^2 = \frac{1}{3} \quad (1.29)$$

são designadas *direcções e planos octaédricos* no ponto considerado, respectivamente. Tais direcções estão orientadas segundo as diagonais de um cubo de aresta unitária centrado no ponto considerado, Fig.1.9.

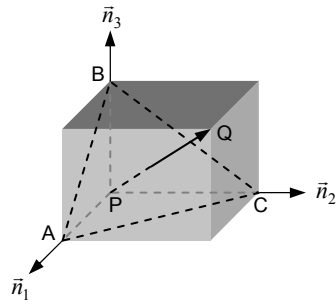


Fig. 1.9 - Direcção octaédrica PQ

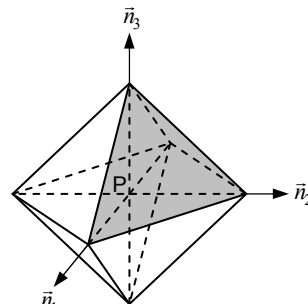


Fig. 1.10- Planos octaédricos

A área triangular ABC na Fig. 1.9 representa o plano octaédrico correspondente ao primeiro quadrante, perpendicular à diagonal PQ. Considerando todos os planos octaédricos à volta do ponto, obtém-se um octaedro regular, conforme ilustrado na Fig.1.10.

A tensão normal em qualquer um dos planos octaédricos obtém-se através da expressão habitual definida pela equação (1.25):

$$\begin{aligned} \sigma_{oct} &= l^2 \sigma_1 + m^2 \sigma_2 + n^2 \sigma_3 = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \\ &= \frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) = \sigma_m \end{aligned} \quad (1.30)$$

A tensão de corte octaédrica  $\tau_{oct}$  é a tensão num plano octaédrico e obtém-se a partir da equação (1.26), fazendo  $l^2=m^2=n^2=1/3$ , isto é:

$$\begin{aligned} \tau_{oct}^2 &= (\sigma_1 - \sigma_2)^2 l^2 m^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 m^2 n^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 n^2 l^2 \\ &= \frac{1}{9} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \\ &= \frac{1}{9} [(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6\tau_{xy}^2 + 6\tau_{yz}^2 + 6\tau_{zx}^2] \end{aligned} \quad (1.31)$$

### 1.1.9. Construção de Mohr

(i)-Num diagrama rectangular plano, em que se toma a tensão normal ( $\sigma$ ) como abcissa e a tensão de corte ( $\tau$ ) como ordenada, Fig. 1.11, marque-se sobre o eixo das abcissas os pontos  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$  de tal modo que:

$$OP_1 = \sigma_1, \quad OP_2 = \sigma_2, \quad OP_3 = \sigma_3$$

(ii)-Tomando os segmentos  $P_2P_3$ ,  $P_1P_3$  e  $P_1P_2$  como diâmetros, desenhar os três *círculos de Mohr* (1), (2) e (3) com centros nos pontos médios  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$ , respectivamente.

(iii)-A partir da vertical  $t_1$  em  $P_1$  marcar o ângulo  $\alpha = \arcsin(l)$  que define a recta  $P_1Q_3Q_2$ , que intersecta os *círculos de Mohr* (2) e (3) nos pontos  $Q_2$  e  $Q_3$ , os quais estão sobre uma mesma circunferência com centro em  $C_1$ .

(iv)-Com centro nesse ponto  $C_1$ , desenhar o arco de circunferência  $Q_2QQ_3$ ;

(v)-Seguindo um procedimento análogo a (iii), a partir da vertical  $t_3$  em  $P_3$ , marcar o ângulo  $\gamma = \arcsin(n)$  e desenhar a recta  $P_3S_1S_2$  que intersecta os *círculos de Mohr* (1) e (2) nos pontos  $S_1$  e  $S_2$ , respectivamente.

(vi)- Com centro no ponto  $C_3$ , desenhar o arco de circunferência  $S_1QS_2$ ;

(vii)-A intersecção dos dois arcos de circunferência (iv) e (vi) define o ponto  $Q$ , cujas coordenadas no plano  $(\sigma, \tau)$  são:

$$Q \equiv \left[ (l^2\sigma_1 + m^2\sigma_2 + n^2\sigma_3), \sqrt{l^2\sigma_1^2 + m^2\sigma_2^2 + n^2\sigma_3^2 - (l^2\sigma_1 + m^2\sigma_2 + n^2\sigma_3)^2} \right]$$

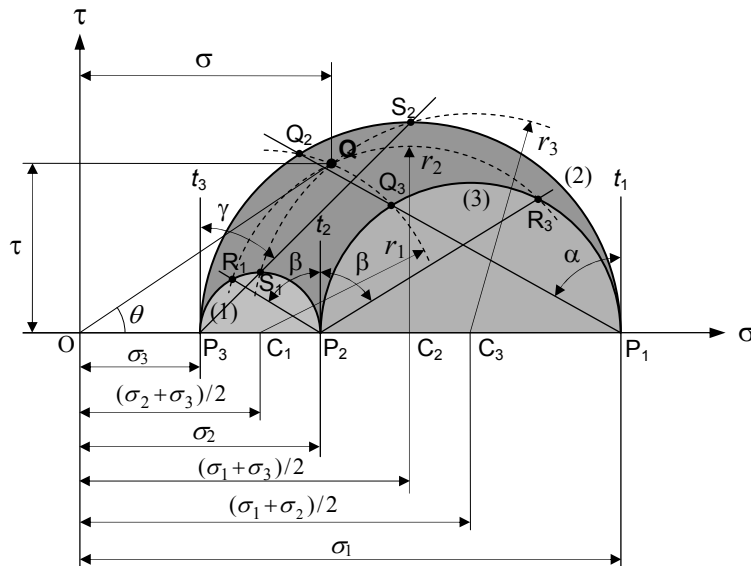


Fig. 1.11- Diagrama de Mohr para as tensões

O ponto Q representativo da tensão para o plano considerado tem coordenadas tais que a sua abcissa é igual à componente normal da tensão e a ordenada é igual à respectiva componente tangencial.

O raio vector  $\overrightarrow{OQ}$  materializa o vector tensão resultante  $\vec{T}(P, \vec{n})$  e ângulo  $\theta = \text{arctg}(\tau/\sigma)$ , que o raio vector  $\overrightarrow{OQ}$  faz com o eixo das abcissas, representa a inclinação da tensão resultante  $\vec{T}(P, \vec{n})$  em relação à semi-normal positiva  $\vec{n}$  do plano sobre o qual actua.

A terceira circunferência a tracejado na Fig. 1.11, com centro no ponto  $C_2$ , pode também obter-se por um processo idêntico e permite confirmar o rigor da construção anterior para a determinação do ponto Q:

(a)-Marcar o ângulo  $\beta = \text{arcos}(m)$ , para um e outro lado da vertical  $t_2$  em  $P_2$ , e determinar os pontos de intersecção  $R_1$  e  $R_3$  com os círculos de Mohr (1) e (3), respectivamente;

(b)-Com centro no ponto  $C_2$ , desenhar o arco de circunferência  $R_1QR_3$ .

Se o diagrama anteriormente construído estiver correcto, a circunferência agora desenhada intersecta as outras duas no mesmo ponto Q.

#### 1.1.10. Estado Plano de Tensão

Um estado plano de tensão corresponde ao caso em que as forças de volume e as forças de superfície definem um plano único - o plano  $(x,y)$ , por exemplo - que contém as tensões em cada ponto. É o caso de uma placa de espessura reduzida solicitada por um sistema de forças paralelas ao plano da própria placa, Fig.1.12(a).

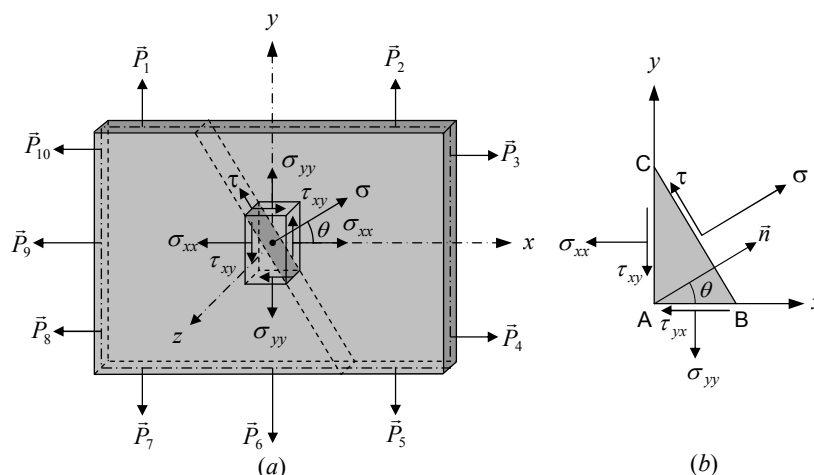


Fig. 1.12 - Solicitação correspondente a um estado plano de tensão

Um estado plano de tensão fica caracterizado pelas três componentes  $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}$ , sendo nulas as restantes componentes, isto é,  $\sigma_{zz} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ .

Qualquer plano de corte perpendicular ao plano da placa ficará identificado pelo ângulo  $\theta$  que a respectiva normal faz com a direcção do eixo  $Ox$ . Considerando o equilíbrio do elemento triangular ABC, Fig. 1.12(b), obtém-se:

$$\sigma = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos(2\theta) + \tau_{xy} \sin(2\theta) \quad (1.32)$$

$$\tau = -\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \sin(2\theta) + \tau_{xy} \cos(2\theta) \quad (1.33)$$

A tensão de corte  $\tau$  anula-se para um ângulo  $\theta_p$  tal que:

$$\operatorname{tg}(2\theta_p) = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} \quad (1.34)$$

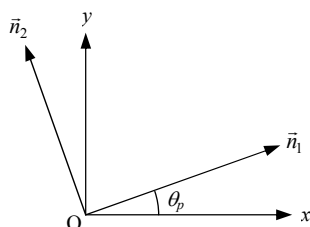


Fig. 1.13 - Direcções principais no plano  $xy$

Atendendo a que  $\operatorname{tg}(2\theta_p) = \operatorname{tg}(2\theta_p + \pi)$ , existem duas direcções mutuamente perpendiculares que satisfazem a condição (1.34). Estas

são as duas direcções principais de tensão  $\bar{n}_1$  e  $\bar{n}_2$  no plano  $(x,y)$ , Fig.1.13.

Ao utilizar a equação (1.34) é habitual recorrer-se à seguinte regra prática para identificar os ângulos  $\theta_1$  e  $\theta_2$ :

- (i) - Se  $\tau_{xy} > 0$ , o ângulo  $\theta_1$  está no intervalo  $0 < \theta_1 < \pi/2$
- (ii) - Se  $\tau_{xy} < 0$ , o ângulo  $\theta_1$  está no intervalo  $-\pi/2 < \theta_1 < 0$

As tensões principais correspondentes são:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \\ \sigma_2 &= \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}\end{aligned}\quad (1.35)$$

As tensões  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  dadas pelas expressões (1.35) correspondem ao valor máximo e ao valor mínimo, respectivamente, da componente normal da tensão no ponto considerado.

### 1.1.11. Tensões Principais Secundárias

Na situação mais geral duma solicitação tridimensional, as equações (1.32)-(1.35) continuam válidas para as tensões no plano  $(x, y)$ , embora possam ser diferentes de zero as componentes  $\sigma_{zz}$ ,  $\tau_{xz}$  e  $\tau_{yz}$ . Neste caso as tensões dadas pelas equações (1.35) dizem-se as *tensões principais secundárias* no plano  $(x, y)$  e representam-se pelos símbolos  $\sigma'_1$  e  $\sigma'_2$ , respectivamente:

$$\begin{aligned}\sigma'_1 &= \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \\ \sigma'_2 &= \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}\end{aligned}\quad (1.36)$$

As direcções definidas pela equação (1.34) são as *direcções principais secundárias*  $\bar{n}'_1$  e  $\bar{n}'_2$  da tensão em P, no plano  $(x, y)$ .

### 1.1.12. Círculo de Mohr para as Tensões num Plano

Adoptando para referência as duas direcções principais de tensão  $\bar{n}_1$  e  $\bar{n}_2$ , no caso dum estado plano de tensão, ou  $\bar{n}'_1$  e  $\bar{n}'_2$ , no caso mais geral, de acordo com as equações (1.32) e (1.33), a tensão normal  $\sigma$  e a tensão de corte  $\tau$  para um plano oblíquo qualquer definido pelo ângulo  $\theta$ , relativamente a  $\bar{n}_1$ , Fig. 1.14, são dadas pelas seguintes expressões:

$$\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos(2\theta) \quad (1.37)$$

$$\tau = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin(2\theta) \quad (1.38)$$

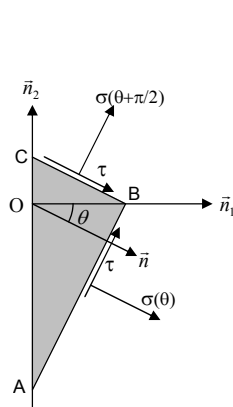


Fig. 1.14 - Plano oblíquo

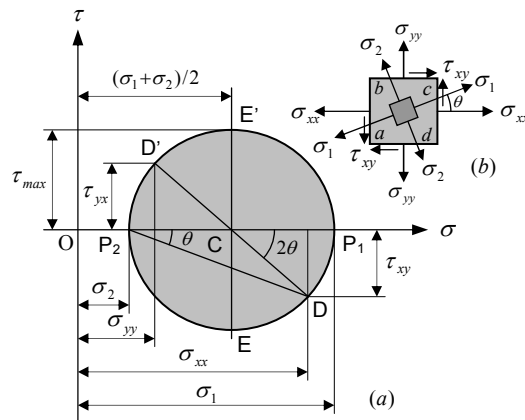


Fig. 1.15 - Círculo de Mohr no plano  $xy$

Aquelas duas componentes da tensão em P são as coordenadas do ponto D sobre o círculo de Mohr desenhado num diagrama  $(\sigma, \tau)$ , conforme ilustrado na Fig.1.15(a). O centro do círculo de Mohr é o ponto C sobre o eixo das abcissas, à distância  $(\sigma_1 + \sigma_2)/2$  da origem do diagrama, sendo



o respectivo raio igual à semi-diferença das duas tensões principais  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  no plano  $xy$ , isto é, igual a  $(\sigma_1 - \sigma_2)/2$ .

Na construção do círculo de Mohr, o eixo  $\tau$  é orientado positivamente no sentido ascendente e o eixo  $\sigma$  no sentido da esquerda para a direita. As tensões normais positivas indicam tracção e as tensões de corte são consideradas positivas quando definem um binário que tende a fazer rodar o elemento sobre que actuam no sentido do movimento dos ponteiros do relógio. É o caso das tensões de corte que actuam nas faces  $bc$  e  $ad$  do elemento  $abcd$  representado na Fig.1.15(b). À medida que o ângulo  $\theta$  varia, desde o valor  $\theta = 0$  até  $\theta = \pi/2$ , o ponto D sobre a Fig.1.15(a), desloca-se de  $P_1$  para  $P_2$ , de tal forma que a parte superior do círculo de Mohr representa as tensões para todos os valores de  $\theta$  compreendidos entre aqueles dois limites. A metade inferior do círculo de Mohr representa as tensões para valores do ângulo  $\theta$  compreendidos entre  $\theta = -\pi/2$  e  $\theta = 0$ .

Prolongando o raio CD até ao ponto D', Fig.1.15(a), isto é, se se considerar o ângulo  $\pi + 2\theta$  em vez de  $2\theta$ , obtêm-se as tensões que actuam no plano BC perpendicular a AB, conforme representado na Fig.1.14.

A construção representada na Fig.1.15(a) pode também ser utilizada para determinar as direcções principais de tensão no ponto considerado. Com efeito, se forem conhecidas as componentes  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  e  $\tau_{xy}$  da tensão relativamente a um sistema de eixos arbitrário  $Oxy$ , ficam perfeitamente identificados os pontos D e D', que definem um diâmetro do círculo de Mohr. Traçando depois a respectiva circunferência com centro no ponto C, obtêm-se os pontos  $P_1$  e  $P_2$  sobre o eixo das abcissas, cujas distâncias à origem definem as amplitudes das duas tensões principais. O ângulo  $2\theta$ , que define a orientação dos eixos principais de tensão, é dado pela inclinação do diâmetro DD' em relação ao eixo das abcissas.

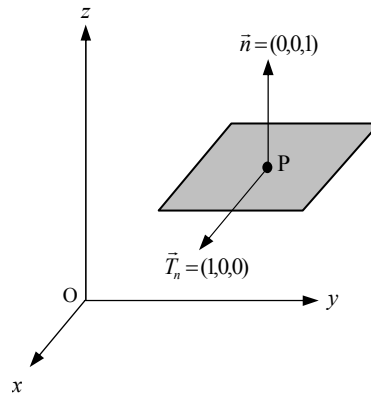
## 1.2. PROBLEMAS RESOLVIDOS

### PROBLEMA – 1.2.1.

Num determinado ponto P de um corpo material, a tensão resultante  $\vec{T}$  para um plano de corte perpendicular ao eixo dos  $zz$  é  $\vec{T} = (1,0,0)$ . Determine as componentes cartesianas  $\sigma_{zz}$ ,  $\tau_{zx}$  e  $\tau_{zy}$ .

**RESOLUÇÃO:**

Geometricamente, tem-se uma situação conforme a representada na figura:



Aplicando, agora, a definição de cada uma das componentes cartesianas da tensão no ponto P, obtém-se:

$$\sigma_{zz} = \vec{T}_n | \vec{k} = (1,0,0) | (0,0,1) = 0$$

$$\tau_{zx} = \vec{T}_n | \vec{i} = (1,0,0) | (1,0,0) = 1$$

$$\tau_{zy} = \vec{T}_n | \vec{j} = (1,0,0) | (0,1,0) = 0$$

**PROBLEMA 1.2.2.**

Para o caso considerado no problema anterior, determine a componente normal  $\sigma$  e a componente de corte ( $\tau$ ) da tensão no ponto mesmo ponto P e para o plano de corte indicado.

**RESOLUÇÃO:**

A componente normal ( $\sigma$ ) é a projecção da tensão resultante ( $\vec{T}_n$ ) sobre a direcção ( $\vec{n}$ ) da normal ao plano de corte, isto é:

$$\sigma = \vec{T}_n | \vec{n} = (1,0,0) | (0,0,1) = 0$$

A tensão de corte ( $\tau$ ) é a projecção da tensão resultante ( $\vec{T}_n$ ) sobre o plano de corte. Neste caso particular, em que  $\sigma = 0$ , tem-se:

$$\tau = |T_n| = 1$$

Ou, aplicando a expressão geral:

$$\tau^2 = T^2 - \sigma^2 = 1 - 0 = 1$$

### PROBLEMA 1.2.3.

No ponto  $P \equiv (1, 1, 1)$  de um corpo material, para um plano de corte ( $\alpha$ ) definido pela equação  $x+y-z-1=0$ , a tensão resultante correspondente é

Determine, no ponto P e para o plano de corte considerado:

- As componentes normal e tangencial da tensão.
- A direcção da tensão de corte no plano  $\alpha$ .

### RESOLUÇÃO:

#### a) Componentes normal e tangencial da tensão em P

O versor ( $\vec{n}$ ) da normal ao plano ( $\alpha$ ) é:

$$\vec{n} = \frac{(A, B, C)}{\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)}}$$

Onde  $A$ ,  $B$  e  $C$  são os coeficientes de  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente, na equação do plano de corte ( $\alpha$ ). Isto é, para o caso em questão:

$$\vec{n} = \frac{(1, 1, -1)}{\sqrt{3}} = \left( \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3} \right)$$

donde a tensão normal:

$$\begin{aligned} \sigma &= \vec{T}_n | \vec{n} = (3, 2, -1) | \left( \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3} \right) \\ &= (\sqrt{3} + 2\sqrt{3}/3 + \sqrt{3}/3) = 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

e a tensão de corte:

$$\tau^2 = T^2 - \sigma^2 = (9 + 4 + 1) - 12 = 2$$

ou seja:  $\tau = \sqrt{2}$

**b) Direcção da tensão de corte no plano  $\alpha$**

Partindo da relação vectorial entre o vector tensão resultante e as suas componentes normal e de corte:

$$\vec{\sigma} + \vec{\tau} = \vec{T}$$

Pode escrever-se:

$$\begin{cases} \sigma l + \tau l_c = T_x \\ \sigma m + \tau m_c = T_y \\ \sigma n + \tau n_c = T_z \end{cases}$$

Donde:

$$\begin{aligned} l_c &= \frac{T_x - \sigma l}{\tau} = \frac{3 - 2\sqrt{3} \times \sqrt{3}/3}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ m_c &= \frac{T_y - \sigma m}{\tau} = \frac{2 - 2\sqrt{3} \times \sqrt{3}/3}{\sqrt{2}} = 0 \\ n_c &= \frac{T_z - \sigma n}{\tau} = \frac{-1 + 2\sqrt{3} \times \sqrt{3}/3}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

**PROBLEMA 1.2.4.**

O campo das tensões num corpo material é definido pelas seguintes componentes cartesianas:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 0; & \sigma_{yy} &= 2y - 2; & \sigma_{zz} &= 1 - z; \\ \tau_{xy} = \tau_{yx} &= 2y - 5x; & \tau_{yz} = \tau_{zy} &= 2y + 4z - 1; & \tau_{xz} = \tau_{zx} &= 2 - 2z \end{aligned}$$

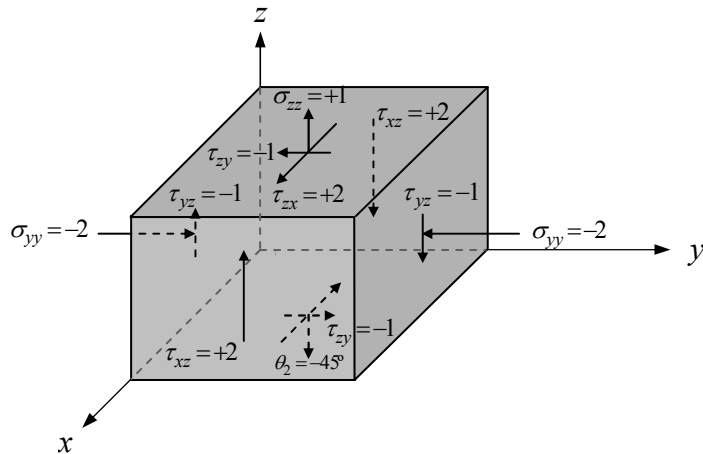
Desenhe um paralelepípedo rectangular elementar centrado na origem das coordenadas (O) e, sobre cada uma das faces, represente as componentes das tensões que sobre ela actuam.

**RESOLUÇÃO:**

Na origem das coordenadas  $\mathbf{O} \equiv (0, 0, 0)$  tem-se:

$$\sigma_{xx} = 0; \quad \sigma_{yy} = -2; \quad \sigma_{zz} = 1; \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = 0; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} = -1; \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} = 2$$

Ou seja, gráficamente:



**PROBLEMA 1.2.5**

O estado de tensão num ponto de um corpo material é definido pelas seguintes componentes:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 80MPa & \sigma_{yy} &= 160MPa & \sigma_{zz} &= 100MPa \\ \tau_{xy} &= 50MPa & \tau_{yz} &= -75MPa & \tau_{zx} &= 60MPa \end{aligned}$$

- a) - Determine a componente normal e a componente de corte para um plano cuja normal está inclinada de  $\alpha = 68^\circ$  e  $\beta = 35^\circ$  em relação aos eixos  $x$  e  $y$ , respectivamente.
- b) - Determine os cossenos directores da tensão de corte no plano considerado.

**RESOLUÇÃO:**

**a)-Cálculo das componentes normal ( $\sigma$ ) e de corte ( $\tau$ ) da tensão**

As componentes do vetor ( $\vec{n}$ ) da normal ao plano de corte são:

$$\begin{aligned} \vec{n} &= (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) \\ &= (\cos 68^\circ, \cos 35^\circ, \cos \gamma) \\ &= \left( 0.37, 0.82, \sqrt{1 - (0.37^2 + 0.82^2)} \right) \\ &= (0.37, 0.82, 0.43) \end{aligned}$$

Isto é,

$$l = 0.3746 ; \quad m = 0.8192 ; \quad n = 0.4344$$

O vector tensão resultante ( $\vec{T}_n$ ) obtém, então, a partir da equação geral:

$$\begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix}$$

Donde, substituindo os valores para as componentes cartesianas da tensão e para os co-senos directores  $l$ ,  $m$  e  $n$ , obtém-se, sucessivamente:

$$\begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 80 & 50 & 60 \\ 50 & 160 & -75 \\ 60 & -75 & 100 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0.3746 \\ 0.8192 \\ 0.4344 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 80 \times 0.37 + 50 \times 0.82 + 60 \times 0.43 \\ 50 \times 0.37 + 160 \times 0.82 - 75 \times 0.43 \\ 60 \times 0.37 - 75 \times 0.82 + 100 \times 0.43 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 97.0 \\ 117.2 \\ 4.5 \end{Bmatrix}$$

Agora, as componentes normal ( $\sigma$ ) e de corte ( $\tau$ ) calculam-se da forma habitual:

$$\sigma = \vec{T}_n | \vec{n} = \begin{Bmatrix} 97.0 \\ 117.2 \\ 4.5 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0.37 \\ 0.82 \\ 0.43 \end{Bmatrix} = 134.3 \text{ (MPa)}$$

$$\begin{aligned} \tau^2 &= T^2 - \sigma^2 = T_x^2 + T_y^2 + T_z^2 - \sigma^2 \\ &= 97.0^2 + 117.2^2 + 4.5^2 - 134.2^2 = 5131.5 \end{aligned}$$

$$\tau = \sqrt{5131.5} = 71.6 \text{ (MPa)}$$

### **b)-Direcção da Tensão de Corte**

Partindo da relação vectorial

$$\vec{\sigma} + \vec{\tau} = \vec{T}$$

Pode escrever-se:

$$\begin{cases} \sigma l + \tau l_c = T_x \\ \sigma m + \tau m_c = T_y \\ \sigma n + \tau n_c = T_z \end{cases}$$

Donde:

$$l_c = \frac{T_x - \sigma l}{\tau} = \frac{97.0 - 134.2 \times 0.37}{71.7} = 0.65$$

$$m_c = \frac{T_y - \sigma m}{\tau} = \frac{117.2 - 134.2 \times 0.82}{71.7} = 0.10$$

$$n_c = \frac{T_z - \sigma n}{\tau} = \frac{4.5 - 134.2 \times 0.43}{71.7} = -0.75$$

#### PROBLEMA 1.2.6.

Num ponto  $P$  de um corpo material considere um plano de corte  $\pi$  cuja normal tem cossenos directores  $l = 0.651$ ,  $m = 0.520$  e  $n = 0.553$ . A tensão resultante nesse ponto, para o plano considerado, é de  $140 \text{ MPa}$  e actua segundo uma direcção inclinada de  $35^\circ$  e  $80^\circ$  em relação aos eixos coordenados  $x$  e  $z$ , respectivamente.

- Determine a tensão normal e a tensão de corte no ponto  $P$ , para o plano considerado.
- Determine os cossenos directores da tensão de corte nesse plano.
- Se for  $\tau_{xy} = 20 \text{ MPa}$ ,  $\tau_{yz} = -15 \text{ MPa}$  e  $\tau_{zx} = 12 \text{ MPa}$ , determine as componentes  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  e  $\sigma_{zz}$ .

#### RESOLUÇÃO:

##### a)-Cálculo da tensão normal e da tensão de corte

Sejam  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  os ângulos de inclinação do vector tensão resultante relativamente aos eixos cartesianos  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente. Conhecidos os ângulos  $\alpha = 35^\circ$  e  $\gamma = 80^\circ$ , o 3º ângulo  $\beta$  obtém-se a partir da equação seguinte:

$$\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) = 1$$

Donde:

$$\cos(\beta) = \sqrt{1 - \cos^2(\alpha) - \cos^2(\gamma)} = 0.55$$

As componentes do vector tensão resultante são, então:

24 *Mecânica dos Materiais e Estruturas Lineares. Teoria e Aplicações*

$$T_x = T \times \cos(\alpha) = 140 \times \cos(35^\circ) = 114.68 \text{ (MPa)}$$

$$T_y = T \times \cos(\beta) = 140 \times 0.55 = 76.53 \text{ (MPa)}$$

$$T_z = T \times \cos(\gamma) = 140 \times \cos(80^\circ) = 24.31 \text{ (MPa)}$$

Agora, as componentes normal ( $\sigma$ ) e de corte ( $\tau$ ) calculam-se da forma habitual:

$$\sigma = \vec{T}_n | \vec{n} = \begin{Bmatrix} 114.68 \\ 76.53 \\ 24.31 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0.651 \\ 0.520 \\ 0.553 \end{Bmatrix} = 127.90 \text{ (MPa)}$$

$$\begin{aligned} \tau^2 &= T^2 - \sigma^2 = T_x^2 + T_y^2 + T_z^2 - \sigma^2 \\ &= 19600 - 16358 = 3242 \end{aligned}$$

$$\tau = \sqrt{3242} = 56.94 \text{ (MPa)}$$

**b)-Direcção da Tensão de Corte**

Tal como no problema anterior, partindo da relação vectorial

$$\vec{\sigma} + \vec{\tau} = \vec{T}$$

Pode escrever-se:

$$\begin{cases} \sigma l + \tau l_c = T_x \\ \sigma m + \tau m_c = T_y \\ \sigma n + \tau n_c = T_z \end{cases}$$

Donde, os cossenos directores da direcção segundo a qual actua a tensão de corte:

$$l_c = \frac{T_x - \sigma l}{\tau} = \frac{114.68 - 127.90 \times 0.651}{56.94} = 0.55$$

$$m_c = \frac{T_y - \sigma m}{\tau} = \frac{76.53 - 127.90 \times 0.52}{56.94} = 0.18$$

$$n_c = \frac{T_z - \sigma n}{\tau} = \frac{24.31 - 127.90 \times 0.553}{56.94} = -0.82$$

**c)- Cálculo das componentes  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  e  $\sigma_{zz}$**

Partindo da equação geral seguinte:



$$\begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix}$$

obtém-se, por substituição dos valores conhecidos para as três componentes de corte da tensão, para os cossenos directores  $l$ ,  $m$  e  $n$ , e para as componentes  $T_x$ ,  $T_y$  e  $T_z$ :

$$\begin{Bmatrix} 114.68 \\ 76.53 \\ 24.31 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 20 & 12 \\ 20 & \sigma_{yy} & -15 \\ 12 & -15 & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0.651 \\ 0.520 \\ 0.553 \end{Bmatrix}$$

Donde, desenvolvendo a multiplicação matricial:

$$\sigma_{xx} \times 0.651 + 20 \times 0.520 + 12 \times 0.553 = 114.68$$

$$20 \times 0.651 + \sigma_{yy} \times 0.520 - 15 \times 0.553 = 76.53$$

$$12 \times 0.651 - 15 \times 0.520 + \sigma_{zz} \times 0.553 = 24.31$$

Finalmente, resolvendo em ordem às componentes normais  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  e  $\sigma_{zz}$ :

$$\sigma_{xx} = 150 \text{ (MPa)}$$

$$\sigma_{yy} = 138 \text{ (MPa)}$$

$$\sigma_{zz} = 44 \text{ (MPa)}$$

### PROBLEMA 1.2.7.

Num determinado referencial global  $Oxyz$ , as componentes cartesianas da tensão num ponto P são as seguintes:

$$\sigma_{xx} = 1\text{MPa} \quad \sigma_{yy} = 2\text{MPa} \quad \sigma_{zz} = -1\text{MPa}$$

$$\tau_{xy} = 2\text{MPa} \quad \tau_{yz} = 1\text{MPa} \quad \tau_{zx} = -3\text{MPa}$$

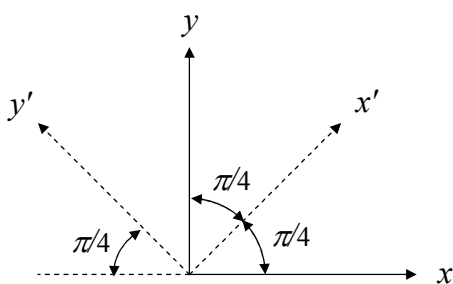
Determine as componentes da tensão num referencial  $Ox'y'z'$ , onde as orientações dos eixos  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  são definidas pelos seguintes ângulos:

- a)-  $(x, x') = \pi/4$  ;                       $(y, y') = \pi/4$ ;                       $(z, z') = 0$ .
- b)-  $(x, x') = \pi/2$  ;                       $(y, y') = \pi/2$ ;                       $(z, z') = 0$ .
- c)-  $(x, x') = 0$  ;                           $(y, y') = \pi/2$ ;                       $(z, z') = \pi/2$ .
- d)-  $(x, x') = \pi/2$  ;                       $(y, y') = 0$ ;                           $(z, z') = \pi/2$ .

**RESOLUÇÃO:**

$$\underline{a)- (x, x') = \pi/4 ; (y, y') = \pi/4 ; (z, z') = 0}$$

Os eixos  $z$  e  $z'$  são coincidentes, pelo que temos a situação representada geometricamente na figura seguinte:



Os co-senos directores dos eixos particulares  $x'$ ,  $y'$  e  $z'$  no referencial global  $Oxyz$  são, respectivamente:

$$\begin{cases} l_{x'} = \cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2 \\ m_{x'} = \cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2 \\ n_{x'} = \cos(\pi/2) = 0 \end{cases}, \begin{cases} l_{y'} = -\cos(\pi/4) = -\sqrt{2}/2 \\ m_{y'} = +\cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2 \\ n_{y'} = \cos(\pi/2) = 0 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} l_{z'} = \cos(\pi/2) = 0 \\ m_{z'} = \cos(\pi/2) = 0 \\ n_{z'} = \cos(0) = 1 \end{cases}$$

Donde a matriz de transformação de coordenadas:

$$[l] = \begin{bmatrix} l_{x'} & m_{x'} & n_{x'} \\ l_{y'} & m_{y'} & n_{y'} \\ l_{z'} & m_{z'} & n_{z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

As componentes cartesianas da tensão no referencial particular  $Ox'y'z'$  calculam-se, agora, a partir das expressões habituais:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{x'x'} = \bar{T}_{x'} | \bar{i}' &= [\tau] \times \left\{ \bar{i}' \right\} | \left\{ \bar{i}' \right\} = \sigma_{xx} l_{x'}^2 + \sigma_{yy} m_{x'}^2 + \sigma_{zz} n_{x'}^2 \\
 &\quad + 2\tau_{xy} l_{x'} m_{x'} + 2\tau_{yz} m_{x'} n_{x'} + 2\tau_{zx} n_{x'} l_{x'} \\
 &= 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2} - 1 \times 0 \\
 &\quad + 2 \times 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 \times 1 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times 0 + 2 \times (-3) \times 0 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\
 &= \frac{1}{2} + 1 + 2 = 7/2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{y'y'} = \bar{T}_{y'} | \bar{j}' &= [\tau] \times \left\{ \bar{j}' \right\} | \left\{ \bar{j}' \right\} = \sigma_{yy} m_{y'}^2 + \sigma_{zz} n_{y'}^2 + \sigma_{xx} l_{y'}^2 \\
 &\quad + 2\tau_{yz} m_{y'} n_{y'} + 2\tau_{zx} n_{y'} l_{y'} + 2\tau_{xy} l_{y'} m_{y'} \\
 &= 2 \times \frac{1}{2} + (-1) \times 0 + 1 \times \frac{1}{2} \\
 &\quad + 2 \times 1 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times 0 + 2 \times (-3) \times 0 \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2 \times 2 \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\
 &= 1 + \frac{1}{2} - 2 = -1/2
 \end{aligned}$$

$$\sigma_{z'z'} = \bar{T}_{z'} | \bar{k}' = \sigma_{zz} = -1$$

$$\begin{aligned}
 \tau_{x'y'} = \bar{T}_{x'} | \bar{j}' &= [\tau] \times \left\{ \bar{j}' \right\} | \left\{ \bar{i}' \right\} \\
 &= \sigma_{xx} l_{x'} l_{y'} + \sigma_{yy} m_{x'} m_{y'} + \sigma_{zz} n_{x'} n_{y'} + \\
 &\quad + \tau_{xy} (l_{x'} m_{y'} + m_{x'} l_{y'}) + \tau_{yz} (m_{x'} n_{y'} + n_{x'} m_{y'}) \\
 &\quad + \tau_{zx} (n_{x'} l_{y'} + l_{x'} n_{y'}) \\
 &= 1 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + (-1) \times 0 \times 0 + \\
 &\quad + 2 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) + 1 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \times 0 + 0 \times \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \\
 &\quad + (-3) \times \left(0 \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \times 0\right) = -\frac{1}{2} + 1 + 2 \times \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) \\
 &= 1/2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tau_{y'z'} = \bar{T}_{y'} | \bar{k}' &= [\tau] \times \left\{ \bar{j}' \right\} | \left\{ \bar{k}' \right\} = \tau_{xz} l_{y'} + \tau_{yz} m_{y'} + \sigma_{zz} n_{y'} \\
 &= (-3) \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 1 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + (-1) \times 0 = 2\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

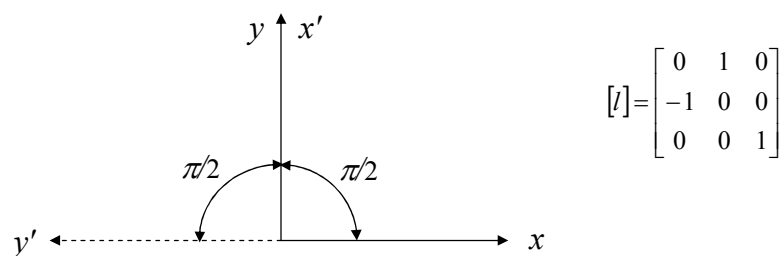
$$\begin{aligned}
 \tau_{z'x'} = \tau_{x'z'} = \bar{T}_{x'} | \bar{k}' &= [\tau] \times \left\{ \bar{i}' \right\} | \left\{ \bar{k}' \right\} = \tau_{xz} l_{x'} + \tau_{yz} m_{x'} + \sigma_{zz} n_{x'} \\
 &= (-3) \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + (-1) \times 0 = -\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

E a matriz das tensões no referencial particular  $Ox'y'z'$  é, portanto:

$$[\tau'] = \begin{bmatrix} 7/2 & 1/2 & -\sqrt{2} \\ 1/2 & -1/2 & 2\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & -1 \end{bmatrix}$$

**b)-  $(x, x') = \pi/2$  ;  $(y, y') = \pi/2$  ;  $(z, z') = 0$**

Neste caso, tem-se a situação representada geometricamente na figura seguinte:



Aqui, nem sequer é necessário usar as fórmulas de transformação de tensões. Basta recorrer à definição das componentes cartesianas. Assim, pode escrever-se directamente:

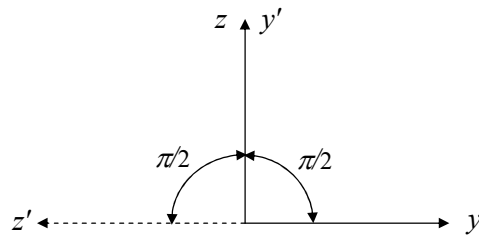
$$\begin{aligned} \sigma_{x'x'} &= \sigma_{yy} = 2 \\ \sigma_{y'y'} &= \sigma_{xx} = 1 \\ \sigma_{z'z'} &= \sigma_{zz} = -1 \\ \tau_{x'y'} &= \tau_{y'x'} = -\tau_{yx} = -2 \\ \tau_{y'z'} &= \tau_{z'y'} = -\tau_{xz} = +3 \\ \tau_{z'x'} &= \tau_{x'z'} = \tau_{yz} = +1 \end{aligned}$$

Donde a matriz das tensões no novo referencial  $Ox'y'z'$ :

$$[\tau'] = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

**c)-  $(x, x') = 0$  ;  $(y, y') = \pi/2$  ;  $(z, z') = \pi/2$**

Neste caso os eixos  $x$  e  $x'$  estão coincidentes, sendo a situação conforme representada geometricamente na figura seguinte:



$$[l] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Invocando a definição de cada uma das componentes cartesianas da tensão, pode escrever-se directamente:

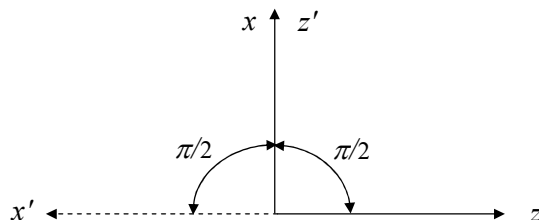
$$\begin{aligned} \sigma_{x'x'} &= \sigma_{xx} = 1 \\ \sigma_{y'y'} &= \sigma_{zz} = -1 \\ \sigma_{z'z'} &= \sigma_{yy} = 2 \\ \tau_{x'y'} &= \tau_{y'x'} = \tau_{xz} = -3 \\ \tau_{y'z'} &= \tau_{z'y'} = -\tau_{zy} = -1 \\ \tau_{z'x'} &= \tau_{x'z'} = -\tau_{yx} = -2 \end{aligned}$$

Donde a matriz das tensões no referencial particular  $Ox'y'z'$ :

$$[\tau'] = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -3 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

**d)-  $(x, x') = \pi/2$  ;  $(y, y') = 0$  ;  $(z, z') = \pi/2$**

Os eixos  $y$  e  $y'$  são coincidentes e a situação aqui é conforme representada geometricamente na figura seguinte:



$$[l] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Invocando a definição de cada uma das componentes cartesianas da tensão, pode escrever-se directamente:

$$\begin{aligned}\sigma_{x'x'} &= \sigma_{zz} = -1 \\ \sigma_{y'y'} &= \sigma_{yy} = 2 \\ \sigma_{z'z'} &= \sigma_{xx} = 1 \\ \tau_{x'y'} &= \tau_{y'x'} = -\tau_{zy} = -1 \\ \tau_{y'z'} &= \tau_{z'y'} = \tau_{xy} = 2 \\ \tau_{z'x'} &= \tau_{x'z'} = -\tau_{zx} = 3\end{aligned}$$

Donde a matriz das tensões no referencial particular  $Ox'y'z'$ :

$$[\tau] = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

### PROBLEMA 1.2.8.

O estado de tensão num ponto P é definido pelas seguintes componentes cartesianas:

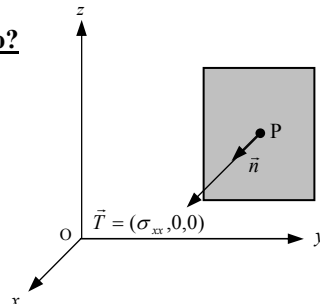
$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= 6MPa & \sigma_{yy} &= 3MPa & \sigma_{zz} &= 3MPa \\ \tau_{xy} &= 0 & \tau_{yz} &= 1MPa & \tau_{zx} &= 0\end{aligned}$$

- a)- Poderá afirmar-se, à partida, que o plano  $yz$  é um plano principal de tensão? Justifique.
- b)- Determine as tensões principais no ponto considerado, bem como as respectivas direcções.

### RESOLUÇÃO:

#### a)- O plano $yz$ é um plano principal de tensão?

O plano  $yz$  é, de facto, um plano principal de tensão. Com efeito, a tensão de corte nesse plano  $\vec{n} = (1,0,0)$  é nula, conforme decorre directamente do facto de serem nulas as duas componentes cartesianas  $\tau_{xy} = 0$  e  $\tau_{xz} = 0$  (ver figura ao lado).



**b)- Tensões Principais em P**

Da alínea anterior decorre que Ox é uma direcção principal de tensão no ponto P, sendo portanto  $\sigma_{xx}=6$  uma das tensões principais nesse ponto. De qualquer forma, as três tensões principais são calculadas a partir da equação característica:

$$\begin{vmatrix} \sigma_{xx} - \sigma & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

Ou seja, para o caso vertente:

$$\begin{vmatrix} 6 - \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 3 - \sigma & 1 \\ 0 & 1 & 3 - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

Desenvolvendo o determinante, obtém-se:

$$(6 - \sigma)[(3 - \sigma)^2 - 1] = 0$$

Ou seja:

$$(6 - \sigma)(2 - \sigma)(4 - \sigma) = 0$$

Cujas soluções são as três tensões principais no ponto considerado, já ordenadas de acordo com a convenção habitual ( $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ ):

$$\sigma_1 = 6 ; \quad \sigma_2 = 4 ; \quad \sigma_3 = 2$$

Quanto às direcções principais de tensão:

(i)-Já se viu que a tensão principal  $\sigma_1 = 6$  corresponde à tensão  $\sigma_{xx}$ , pelo que deverá ser:

$$\vec{n}_1 = (1,0,0).$$

(ii)-Para obter a direcção  $\vec{n}_2$  recorre-se à equação vectorial:

$$[\tau] \times \{\vec{n}_2\} = \sigma_2 \vec{n}_2$$

Ou seja:

$$\begin{cases} (6 - 4)l & = & 0 \\ (3 - 4)m + n & = & 0 \\ m + (3 - 4)n & = & 0 \end{cases}$$

cuja solução é:

$$\begin{cases} l = 0 \\ n = m \end{cases}$$

Isto é, normalizando para um vector de amplitude unitária (versor):

$$\vec{n}_2 = (l_2, m_2, n_2) = \frac{(0, m, m)}{\pm \sqrt{2m^2}} = \pm \left( 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

(iii)-Para obter a direcção  $\vec{n}_3$  procede-se de igual modo, isto é:

$$[\tau] \times \{\vec{n}_3\} = \sigma_3 \vec{n}_3$$

ou seja:

$$\begin{cases} (6-2)l & = & 0 \\ (3-2)m + n & = & 0 \\ m + (3-2)n & = & 0 \end{cases}$$

Cuja solução é:

$$\begin{cases} l = 0 \\ n = -m \end{cases}$$

Donde, normalizando para um vector de amplitude unitária (versor):

$$\vec{n}_3 = (l_3, m_3, n_3) = \frac{(0, m, -m)}{\pm \sqrt{2m^2}} = \pm \left( 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

### PROBLEMA 1.2.9.

O campo das tensões num corpo de material elástico é definido, na ausência de forças de volume, pelas seguintes componentes cartesianas em cada ponto:

$$\begin{array}{lll} \sigma_{xx} = ax & ; & \sigma_{yy} = 2 - cy & ; & \sigma_{zz} = 0 \\ \tau_{xy} = \tau_{yx} = ax + 2by + c & ; & \tau_{yz} = \tau_{zy} = -(by - 2) & ; & \tau_{xz} = \tau_{zx} = 2ax - 5z \end{array}$$

onde  $a, b, c$  são parâmetros reais.

- Determine  $a, b, c$  de modo que o campo das tensões acima definido seja compatível com as equações da teoria da elasticidade;
- Determine as tensões principais na origem das coordenadas e as respectivas direcções;



- c)- Nesse mesmo ponto (origem das coordenadas), determine o valor da tensão de corte máxima, e o plano e a direcção segundo os quais actua;
- d)- Identifique os planos octaédricos na origem e calcule as respectivas tensões octaédricas (normal e de corte).

**RESOLUÇÃO:****a)-Valores dos parâmetros  $a, b, c$** 

As componentes do campo das tensões deverão satisfazer as equações de equilíbrio, isto é:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + F_x = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + F_y = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + F_z = 0 \end{cases}$$

Donde, substituindo para o caso vertente:

$$\begin{cases} a + 2b - 5 = 0 \\ a - c = 0 \\ 2a - b = 0 \end{cases}$$

E resolvendo em ordem aos parâmetros  $a, b$  e  $c$ , obtém-se a solução:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 1 \end{cases}$$

**b)-Tensões Principais**

Na origem das coordenadas (0, 0, 0), a matriz das tensões é a seguinte:

$$[\tau] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

As tensões principais são dadas pela equação característica habitual:

$$\begin{vmatrix} \sigma_{xx} - \sigma & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

Ou seja, para o caso vertente:

$$\begin{vmatrix} -\sigma & 1 & 0 \\ 1 & 2 - \sigma & 2 \\ 0 & 2 & -\sigma \end{vmatrix} = 0$$

Donde, desenvolvendo o determinante, se obtém:

$$(-\sigma)[(-2\sigma + \sigma^2) - 4] - 1 \times (-\sigma) = 0$$

Isto é:

$$\sigma(\sigma^2 - 2\sigma - 5) = 0$$

Cujas soluções são as três tensões principais na origem das coordenadas, já ordenadas de acordo com a convenção habitual ( $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ ):

$$\sigma_1 = 3.45 ; \quad \sigma_2 = 0 ; \quad \sigma_3 = -1.45$$

As direcções principais de tensão são dadas por equações do tipo:

$$\begin{cases} (\sigma_{xx} - \sigma)l + \tau_{yx}m + \tau_{zx}n = 0 \\ \tau_{xy}l + (\sigma_{yy} - \sigma)m + \tau_{zy}n = 0 \\ \tau_{xz}l + \tau_{yz}m + (\sigma_{zz} - \sigma)n = 0 \end{cases} \quad (a)$$

onde  $\sigma$  representa o valor da tensão principal cuja direcção se pretende calcular.

**(i)-Determinação da direcção principal  $\vec{n}_1$ :**

Substituindo nas equações anteriores  $\sigma$  por  $\sigma_1=3.45$ , obtém-se:

$$\begin{cases} -3.45 \times l + m = 0 \\ l + (2 - 3.45)m + 2n = 0 \\ + 2m - 3.45n = 0 \end{cases}$$

Resolvendo, por exemplo, em ordem a  $l$ :

$$\begin{cases} m = 3.45 \times l \\ n = 2 \times l \end{cases}$$

Podem obter-se um vector paralelo a  $\vec{n}_1$  tomando, por exemplo,  $l=1$ :

$$\vec{V}_1 = (1, 3.45, 2)$$

Donde, o versor  $\vec{n}_1$ :

$$\vec{n}_1 = \pm \frac{\vec{V}_1}{|\vec{V}_1|} = \pm \frac{(1, 3.45, 2)}{4.11} = \pm(0.24, 0.84, 0.49)$$

**(ii)-Determinação da direcção principal  $\vec{n}_2$ :**

Substituindo nas equações (a)  $\sigma$  por  $\sigma_2=0$ , obtém-se:

$$\begin{cases} +m & = 0 \\ l + 2m + 2n & = 0 \\ +2m & = 0 \end{cases}$$

Resolvendo, por exemplo, em ordem a  $l$ :

$$\begin{cases} m = 0 \\ n = -0.5 \times l \end{cases}$$

Pode obter-se um vector paralelo a  $\vec{n}_2$  tomando, por exemplo,  $l=2$ :

$$\vec{V}_2 = (2, 0, -1)$$

Donde, o versor correspondente ( $\vec{n}_2$ ):

$$\vec{n}_2 = \pm \frac{\vec{V}_2}{|\vec{V}_2|} = \pm \frac{(2, 0, -1)}{\sqrt{5}} = \pm(0.89, 0, -0.45)$$

**(iii)-Determinação da direcção principal  $\vec{n}_3$ :**

Substituindo nas equações (a)  $\sigma$  por  $\sigma_3 = -1.45$ , obtém-se:

$$\begin{cases} 1.45 \times l + m & = 0 \\ l + 3.45 \times m + 2n & = 0 \\ +2m + 1.45 \times n & = 0 \end{cases}$$

Resolvendo, por exemplo, em ordem a  $l$ :

$$\begin{cases} m = -1.45 \times l \\ n = -2 \times l \end{cases}$$

Pode obter-se um vector paralelo a  $\vec{n}_3$  tomando, por exemplo,  $l=1$ :

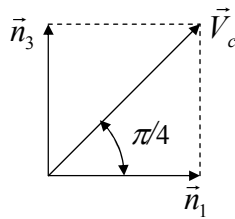
$$\vec{V}_3 = (1, -1.45, 2)$$

Donde, o versor correspondente ( $\vec{n}_3$ ):

$$\vec{n}_3 = \pm \frac{\vec{V}_3}{|\vec{V}_3|} = \pm \frac{(1, -1.45, 2)}{2.67} = \pm(0.38, -0.54, 0.75)$$

### c)-Tensão de corte máxima

A tensão de corte máxima tem um valor que decorre directamente dos valores das tensões principais, isto é:



$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{3.45 + 1.45}{2} = 2.45$$

O plano sobre o qual actua esta tensão de corte máxima é definido pela respectiva normal ( $\vec{n}_c$ ), que é paralela ao vector ( $\vec{V}_c = \vec{n}_1 + \vec{n}_3$ ) que bissecta o diedro ( $\vec{n}_1, \vec{n}_3$ ):

Isto é:

$$\vec{V}_c = (0.62, 0.30, 1.24)$$

donde:

$$\vec{n}_3 = \frac{\vec{V}_c}{|\vec{V}_c|} = (0.44, 0.21, 0.87)$$

A equação do plano de corte máximo pode escrever-se, agora, a partir dum qualquer vector normal a esse plano. Tomando, por exemplo, as componentes do vector  $\vec{V}_c$  como os coeficientes das variáveis  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente, obtém-se a seguinte equação:

$$0.62x + 0.30y + 1.24z = 0$$

Neste plano, a direcção da tensão de corte é dada pelos respectivos cossenos directores ( $l_c, m_c, n_c$ ), que se calculam a partir das expressões habituais:

$$l_c = \frac{T_x - \sigma l}{\tau} ; m_c = \frac{T_y - \sigma m}{\tau} ; n_c = \frac{T_z - \sigma n}{\tau}$$

Sendo que,

$$l = 0.44 ; m = 0.21 ; n = 0.87$$

e

$$T_x = \sigma_{xx}l + \tau_{yx}m + \tau_{zx}n = 0 \times 0.44 + 1 \times 0.21 + 0 \times 0.87 = 0.21$$

$$T_y = \tau_{xy}l + \sigma_{yy}m + \tau_{zy}n = 1 \times 0.44 + 2 \times 0.21 + 2 \times 0.87 = 2.60$$

$$T_z = \tau_{xz}l + \tau_{yz}m + \sigma_{zz}n = 0 \times 0.44 + 2 \times 0.21 + 0 \times 0.87 = 0.42$$

Por outro lado, a tensão  $\sigma$  que actua sobre o plano de corte máximo é:

$$\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} = \frac{3.45 - 1.45}{2} = 1$$

Então:

$$l_c = \frac{T_x - \sigma l}{\tau} = \frac{0.21 - 1 \times 0.44}{2.45} = 0.09$$

$$m_c = \frac{T_y - \sigma m}{\tau} = \frac{2.60 - 1 \times 0.21}{2.45} = 0.98$$

$$n_c = \frac{T_z - \sigma n}{\tau} = \frac{0.42 - 1 \times 0.87}{2.45} = -0.18$$

#### **d)-Tensões Octaédricas**

Os planos octaédricos são identificados pelas respectivas normais, que estão igualmente inclinadas relativamente às três direcções principais, isto é, os respectivos co-senos directores no triedro principal  $(\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3)$  são tais que  $l^2 = m^2 = n^2 = 1/3$ .

Em qualquer um dos planos octaédricos, os valores das tensões normal e tangencial são obtidos a partir das expressões habituais:

$$\sigma_{oct} = \sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = 0.67$$

$$\begin{aligned} \tau_{oct}^2 &= \frac{1}{9} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \\ &= \frac{1}{9} (3.45^2 + 1.45^2 + (-4.9)^2) = 4.2 \end{aligned}$$

Donde:

$$\tau_{oct} = \sqrt{4.2}$$

**PROBLEMA 1.2.10.**

O campo das tensões num corpo sólido elástico, homogéneo e isotrópico é definido pelas seguintes componentes:

$$\sigma_{yy} = 120\sqrt{2}(z-y), \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = -100\sqrt{2}z \quad \text{e} \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} = 100\sqrt{2}y$$

As restantes componentes do campo das tensões são nulas.

- a)- Mostre que tal campo de tensões está necessariamente associado a um campo de forças de volume uniforme e paralelo ao eixo dos  $yy$ .
- b)- Determine as tensões principais nos pontos  $A \equiv (0, \sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$  e  $B \equiv (0, -\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ , e as respectivas direcções.
- c)- Desenhe os círculos de Mohr correspondentes ao estado de tensão no ponto  $C \equiv (0, \sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ .
- d)- À volta do ponto B, desenhe um paralelepípedo elementar de faces paralelas aos planos cartesianos e, sobre cada uma dessas faces, represente as tensões correspondentes.

**RESOLUÇÃO:****a)-Campo das forças de volume**

Para satisfazer as equações de equilíbrio (1.8), deverá ser:

$$\begin{cases} 0 + 0 + 0 + F_x = 0 \\ 0 - 120\sqrt{2} + 0 + F_y = 0 \\ 0 + 0 + 0 + F_z = 0 \end{cases}$$

Donde:

$$F_x = 0, \quad F_y = 120\sqrt{2}, \quad F_z = 0$$

Isto é, o campo das forças de volume que actua sobre o corpo é uniforme e paralelo ao eixo dos  $yy$ .

**b)-Tensões principais em A e B****No ponto A:**

No ponto  $A \equiv (0, \sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$  o estado de tensão é caracterizado pela seguinte matriz das tensões:

$$[z_A] = \begin{bmatrix} 0 & 100 & 100 \\ 100 & -240 & 0 \\ 100 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

As tensões principais no ponto em questão obtêm-se resolvendo a equação característica:

$$\begin{vmatrix} -\sigma & 100 & 100 \\ 100 & -240 - \sigma & 0 \\ 100 & 0 & -\sigma \end{vmatrix} = 0$$

Desenvolvendo o determinante segundo a última coluna, por exemplo, obtêm-se:

$$100 \times 100(240 + \sigma) + \sigma[100^2 - \sigma(240 + \sigma)] = 0$$

Ou seja:

$$\sigma^3 + 2,4 \times 10^2 \sigma^2 - 2 \times 10^4 \sigma - 2,4 \times 10^6 = 0$$

As raízes desta equação são todas reais:

$$\sigma_1 = 115,07, \quad \sigma_2 = -74,28, \quad \sigma_3 = -280,79$$

As direcções principais calculam-se da forma habitual, substituindo sucessivamente cada um dos valores das tensões principais nas equações (1.24), isto é:

**(i)-Direcção principal de tensão  $\bar{n}_1$  no ponto A:**

$$\begin{cases} -115,07l + 100m + 100n = 0 \\ 100l + (-240 - 115,07)m = 0 \\ 100l - 115,07n = 0 \end{cases}$$

Este sistema de equações é, como se sabe, indeterminado. Exprimindo a solução em termos de  $l$ , por exemplo, obtêm-se:

$$m = \frac{100}{355,07}l = 0,28l \quad \text{e} \quad n = \frac{100}{115,07}l = 0,87l$$

Agora, normalizando, obtêm-se os co-senos directores da direcção principal  $\bar{n}_1$ :

$$\bar{n}_1 = \left( \frac{1}{\sqrt{1^2 + 0,28^2 + 0,87^2}}, \frac{0,28}{\sqrt{1^2 + 0,28^2 + 0,87^2}}, \frac{0,87}{\sqrt{1^2 + 0,28^2 + 0,87^2}} \right)$$

ou seja:

$$\bar{n}_1 = (0.738, 0.207, 0.642)$$

**(ii)-Direcção principal de tensão  $\bar{n}_2$  no ponto A:**

$$\begin{cases} 74,28l + 100m + 100n = 0 \\ 100l + (-240 + 74,28)m = 0 \\ 100l + 74,28n = 0 \end{cases}$$

Exprimindo a solução em termos de  $l$ , por exemplo, obtém-se:

$$m = \frac{100}{165,72}l = 0,60l \quad \text{e} \quad n = -\frac{100}{74,28}l = -1,35l$$

Normalizando, obtém-se os co-senos directores da direcção principal  $\bar{n}_2$ :

$$\bar{n}_2 = \left( \frac{1}{\sqrt{1^2 + 0,60^2 + 1,35^2}}, \frac{0,60}{\sqrt{1^2 + 0,60^2 + 1,35^2}}, \frac{-1,35}{\sqrt{1^2 + 0,60^2 + 1,35^2}} \right)$$

ou seja:

$$\bar{n}_2 = (0.561, 0.336, -0.757)$$

**(iii)-Direcção principal de tensão  $\bar{n}_3$  no ponto A:**

$$\begin{cases} 280,79l + 100m + 100n = 0 \\ 100l + (-240 + 280,79)m = 0 \\ 100l + 280,79n = 0 \end{cases}$$

Exprimindo a solução em termos de  $l$ , por exemplo, obtém-se:

$$m = -\frac{100}{40,79}l = -2,45l \quad \text{e} \quad n = -\frac{100}{280,79}l = -0,36l$$

Normalizando, obtém-se os co-senos directores da direcção principal  $\bar{n}_3$ :

$$\bar{n}_3 = \left( \frac{1}{\sqrt{1^2 + 2,45^2 + 0,36^2}}, \frac{-2,45}{\sqrt{1^2 + 2,45^2 + 0,36^2}}, \frac{-0,36}{\sqrt{1^2 + 2,45^2 + 0,36^2}} \right)$$

ou seja:



$$\vec{n}_3 = (0.374, -0.917, -0.135)$$

**No ponto B:**

No ponto B  $\equiv (0, -\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$  o estado de tensão é caracterizado pela seguinte matriz das tensões:

$$[\tau_B] = \begin{bmatrix} 0 & -100 & -100 \\ -100 & 240 & 0 \\ -100 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Esta matriz é a simétrica da matriz das tensões no ponto A, pelo que as tensões principais no ponto B são iguais e de sinal contrário às tensões principais já calculadas para o ponto A, isto é:

$$\sigma_1 = 280,79, \quad \sigma_2 = 74,28, \quad \sigma_3 = -115,07$$

As direcções principais em B são as mesmas que as já calculadas para o ponto B, a menos, naturalmente, da diferença de nomenclatura correspondente à convenção habitualmente adoptada de ordenar as tensões principais por  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ , isto é:

$$\vec{n}_1 = (0.374, -0.917, -0.135)$$

$$\vec{n}_2 = (0.561, 0.336, -0.757)$$

$$\vec{n}_3 = (0.738, 0.207, 0.642)$$

**c)-Círculos de Mohr no ponto C**

No ponto C  $\equiv (0, \sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$  o estado de tensão é caracterizado pela seguinte matriz das tensões:

$$[\tau_C] = \begin{bmatrix} 0 & -100 & 100 \\ -100 & 0 & 0 \\ 100 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A equação característica é, neste caso:

$$\begin{vmatrix} -\sigma & -100 & 100 \\ -100 & -\sigma & 0 \\ 100 & 0 & -\sigma \end{vmatrix} = 0$$

Desenvolvendo o determinante anterior segundo a última coluna, por exemplo, obtém-se:

$$10^4 \sigma - \sigma(\sigma^2 - 10^4) = 0$$

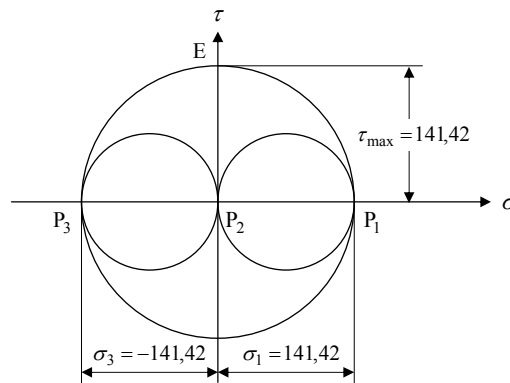
ou seja:

$$\sigma(2 \times 10^4 - \sigma^2) = 0$$

As raízes desta equação do terceiro grau são triviais:

$$\sigma_1 = \sqrt{2} \times 10^2 = 141,42, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -141,42$$

Os círculos de Mohr desenham-se utilizando a metodologia habitual, a partir dos valores das tensões principais (ver parágrafo §1.9):

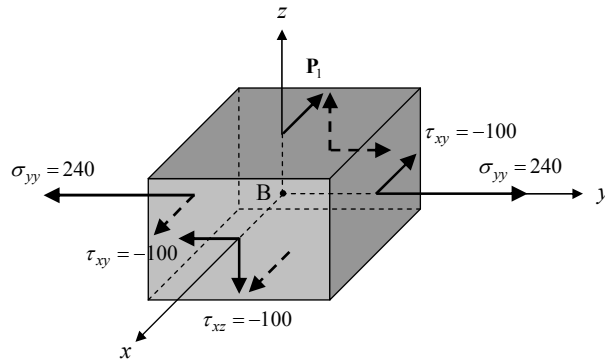


**d)-Elemento de volume em B**

Basta ter em conta as componentes cartesianas da tensão no ponto B, conforme os valores na matriz correspondente:

$$[\tau_B] = \begin{bmatrix} 0 & -100 & -100 \\ -100 & 240 & 0 \\ -100 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e representá-los graficamente sobre o elemento de volume à volta do ponto B:



**PROBLEMA 1.2.11.**

O estado de tensões num ponto P de um corpo material é definido pelas seguintes componentes cartesianas:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 3 & ; & & \sigma_{yy} &= 3 & ; & & \sigma_{zz} &= 6 \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} &= -1 & ; & \tau_{yz} &= \tau_{zy} &= 0 & ; & \tau_{xz} &= \tau_{zx} &= 0 \end{aligned}$$

- a)- Determine as tensões principais no ponto P e as respectivas direcções.
- b)- Determine as tensões principais secundárias no plano yz e as respectivas direcções.
- c)- Idem para o plano  $\alpha$  de equação  $x + y + z + k = 0$ .
- d)- Determine, recorrendo directamente à utilização da construção de Mohr, as tensões octaédricas ( $\sigma_{oct}$  e  $\tau_{oct}$ ) no ponto considerado.

**RESOLUÇÃO:**

**a)-Tensões Principais**

O plano xy é um plano principal de tensão, pois são nulas as duas componentes de corte  $\tau_{zx}$  e  $\tau_{zy}$ . Isso quer dizer que a direcção Oz é uma das tensões principais de tensão no ponto considerado e, por conseguinte,  $\sigma_{zz} = 6$  é uma das tensões principais em P.

De qualquer forma, as tensões principais no ponto P obtêm-se resolvendo a equação característica habitual:

$$\begin{vmatrix} \sigma_{xx} - \sigma & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

Ou seja, para o caso em análise:

$$\begin{vmatrix} 3-\sigma & -1 & 0 \\ -1 & 3-\sigma & 0 \\ 0 & 0 & 6-\sigma \end{vmatrix} = 0$$

Donde, desenvolvendo o determinante, se obtém:

$$(6-\sigma)[(3-\sigma^2)-1]=0$$

Isto é:

$$(6-\sigma)(2-\sigma)(4-\sigma) = 0$$

Cujas soluções são as três tensões principais no ponto P, já ordenadas de acordo com a convenção habitual ( $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ ):

$$\sigma_1 = 6 ; \quad \sigma_2 = 4 ; \quad \sigma_3 = 2$$

Quanto às direcções principais, já vimos que a tensão  $\sigma_1$  não é mais do que a tensão  $\sigma_{zz}$ , pelo que:

$$\vec{n}_1 = (0, 0, 1)$$

As outras duas direcções principais de tensão são dadas por equações do tipo:

$$\begin{cases} (\sigma_{xx} - \sigma)l + \tau_{yx}m + \tau_{zx}n = 0 \\ \tau_{xy}l + (\sigma_{yy} - \sigma)m + \tau_{zy}n = 0 \\ \tau_{xz}l + \tau_{yz}m + (\sigma_{zz} - \sigma)n = 0 \end{cases} \quad (a)$$

onde  $\sigma$  representa o valor da tensão principal cuja direcção se pretende calcular.

Assim, substituindo para  $\sigma_2 = 4$ , obtém-se:

$$\begin{cases} (3-4)l - m = 0 \\ -l + (3-4)m = 0 \\ (6-4)n = 0 \end{cases}$$

Resolvendo, por exemplo, em ordem a  $l$ :

$$\begin{cases} m = -l \\ n = 0 \end{cases}$$

Pode obter-se um vector paralelo a  $\vec{n}_2$  tomando, por exemplo,  $l=1$ :

$$\vec{V}_2 = (1, -1, 0)$$

Donde, o versor correspondente à segunda direcção principal ( $\vec{n}_2$ ):

$$\vec{n}_2 = \frac{\vec{V}_2}{|\vec{V}_2|} = \frac{(1, -1, 0)}{\sqrt{2}} = \left( \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right)$$

E, substituindo para  $\sigma_3 = 2$ , obtém-se:

$$\begin{cases} (3-2)l - m & = 0 \\ -l + (3-2)m & = 0 \\ (6-2)n & = 0 \end{cases}$$

Resolvendo, por exemplo, em ordem a  $l$ :

$$\begin{cases} m = l \\ n = 0 \end{cases}$$

Pode obter-se um vector paralelo a  $\vec{n}_3$  tomando, por exemplo,  $l=1$ :

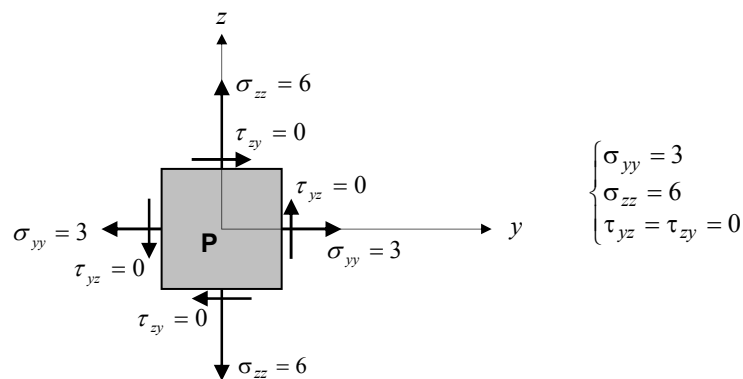
$$\vec{V}_3 = (1, 1, 0)$$

Donde, o versor correspondente à terceira direcção principal ( $\vec{n}_3$ ):

$$\vec{n}_3 = \frac{\vec{V}_3}{|\vec{V}_3|} = \frac{(1, 1, 0)}{\sqrt{2}} = \left( \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right)$$

**b)-Tensões Principais Secundárias no Plano yz**

No plano yz tem-se a situação esquematicamente representada na figura a seguir:



Sendo  $\tau_{yz} = \tau_{zy} = 0$ , isso significa que  $P_y$  e  $P_z$  são as direcções principais secundárias no plano  $yz$ . Daí que as respectivas tensões principais secundárias nesse plano sejam, respectivamente:

$$\sigma_1' = 6 \quad \text{e} \quad \sigma_2' = 3$$

com

$$\vec{n}_1' = (0, 0, 1) \quad \text{e} \quad \vec{n}_2' = (0, 1, 0)$$

**c)- Tensões Principais Secundárias no plano  $x + y + z + k = 0$**

Um dos versores da normal ao plano  $\alpha$  é:

$$\vec{k}' = \left( \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right)$$

Por outro lado, um versor ( $\vec{i}'$ ) paralelo ao plano  $\alpha$  é, por exemplo:

$$\vec{i}' = \left( 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \quad (\text{com efeito tem-se que } \vec{i}' \cdot \vec{k}' = 0 \text{ !...})$$

Donde se pode obter um terceiro versor  $\vec{j}' = \vec{k}' \wedge \vec{i}'$ , este também no plano  $\alpha$ :

$$\vec{j}' = \begin{vmatrix} \vec{i}' & \vec{j}' & \vec{k}' \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} = \left( \frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6} \right)$$

Temos então um triedro ortogonal ( $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ ) onde os versores  $\vec{i}'$  e  $\vec{j}'$  estão ambos no plano  $\alpha$ . A matriz de transformação de coordenadas para este novo triedro é:

$$[l] = \begin{bmatrix} l_{x'} & m_{x'} & n_{x'} \\ l_{y'} & m_{y'} & n_{y'} \\ l_{z'} & m_{z'} & n_{z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{6}/3 & -\sqrt{6}/6 & -\sqrt{6}/6 \\ \sqrt{3}/3 & \sqrt{3}/3 & \sqrt{3}/3 \end{bmatrix}$$

Aplicando agora as equações de transformação de tensões, obtém-se:

$$\begin{aligned}\sigma_{x'x'} &= \sigma_{xx}l_x'^2 + \sigma_{yy}m_x'^2 + \sigma_{zz}n_x'^2 + 2\tau_{xy}l_x'm_x' + 2\tau_{yz}m_x'n_x' + 2\tau_{zx}n_x'l_x' \\ &= 3 \times 0 + 3 \times \frac{1}{2} + 6 \times \frac{1}{2} + 2 \times (-1) \times 0 \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 9/2\end{aligned}$$

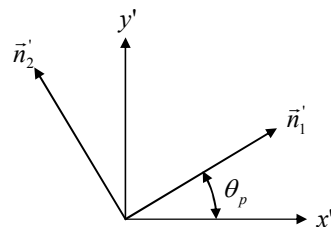
$$\begin{aligned}\sigma_{y'y'} &= \sigma_{yy}m_y'^2 + \sigma_{zz}n_y'^2 + \sigma_{xx}l_y'^2 + 2\tau_{yz}m_y'n_y' + 2\tau_{zx}n_y'l_y' + 2\tau_{xy}l_y'm_y' \\ &= 3 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{6}{9} + 2 \times (-1) \times \frac{\sqrt{6}}{3} \times \left(-\frac{\sqrt{6}}{6}\right) = 25/6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_{x'y'} &= \sigma_{xx}l_x'l_y' + \sigma_{yy}m_x'm_y' + \sigma_{zz}n_x'n_y' + \\ &\quad + \tau_{xy}(l_x'm_y' + m_x'l_y') + \tau_{yz}(m_x'n_y' + n_x'm_y') \\ &\quad + \tau_{zx}(n_x'l_y' + l_x'n_y') \\ &= 3 \times 0 \times \frac{\sqrt{6}}{3} + 3 \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \times \left(-\frac{\sqrt{6}}{6}\right) + 6 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \left(-\frac{\sqrt{6}}{6}\right) \\ &\quad - 1 \times \left(0 \times \left(-\frac{\sqrt{6}}{6}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{6}}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{6}\end{aligned}$$

Uma vez obtidas as tensões  $\sigma_{x'x'}$ ,  $\sigma_{y'y'}$ ,  $\tau_{x'y'}$ , em relação a dois eixos  $x'$  e  $y'$  sobre o plano  $\alpha$ , as tensões principais secundárias  $\sigma'_1$  e  $\sigma'_2$  nesse plano obtêm-se utilizando as expressões habituais:

$$\begin{aligned}\sigma'_1 &= \frac{\sigma_{x'x'} + \sigma_{y'y'}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{x'x'} - \sigma_{y'y'}}{2}\right)^2 + \tau_{x'y'}^2} = \frac{14}{3} \\ \sigma'_2 &= \frac{\sigma_{x'x'} + \sigma_{y'y'}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_{x'x'} - \sigma_{y'y'}}{2}\right)^2 + \tau_{x'y'}^2} = 4\end{aligned}$$

Quanto à orientação das direcções principais secundárias no plano  $\alpha$ , ela fica definida pelo ângulo  $\theta_p$ , dado por:



$$\operatorname{tg} 2\theta_p = \frac{2\tau_{x'y'}}{(\sigma_{x'x'} - \sigma_{y'y'})} = \frac{2 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)}{\frac{9}{2} - \frac{25}{6}} = -\sqrt{3}$$

ou seja:

$$\theta_p = \begin{cases} \theta_1 = -0.52 \text{ rad} = -30^\circ \\ \theta_2 = +1.505 \text{ rad} = 60^\circ \end{cases}$$

Donde, no referencial  $Px'y'z'$  se tem:

$$\vec{n}_1' = (\cos \theta_1, \text{sen} \theta_1, 0) = (0.86, -0.5, 0)$$

$$\vec{n}_2' = (\cos \theta_2, \text{sen} \theta_2, 0) = (0.5, 0.86, 0)$$

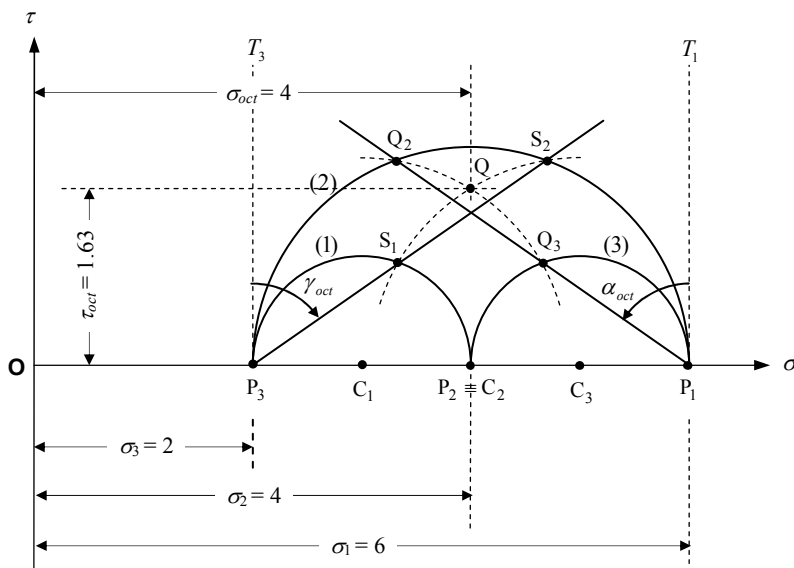
Ou, em alternativa, no referencial  $Pxyz$ :

$$\vec{n}_1' = 0.86 \times (l_{x'}, m_{x'}, n_{x'}) - 0.5 \times (l_{y'}, m_{y'}, n_{y'}) = (-0.41, -0.41, 0.81)$$

$$\vec{n}_2' = 0.5 \times (l_{x'}, m_{x'}, n_{x'}) - 0.86 \times (l_{y'}, m_{y'}, n_{y'}) = (+0.71, -0.71, 0)$$

#### **d)-Construção do Círculo de Mohr**

1)- Na alínea *a)* foram já calculadas as tensões principais  $\sigma_1 = 6$ ,  $\sigma_2 = 4$  e  $\sigma_3 = 2$ . A partir destes valores, podem desenhar-se os três círculos de Mohr (1), (2) e (3) representativos do estado de tensão no ponto considerado



2)-Por definição, os planos octaédricos estão igualmente inclinados relativamente aos eixos do triedro principal. Tomando, por exemplo, o plano octaédrico no primeiro quadrante, as componentes do respectivo versor são



todas iguais a  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ , isto é  $\vec{n}_{oct} = (\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ . A inclinação comum relativamente a cada um dos eixos principais é, então:

$$\alpha_{oct} = \beta_{oct} = \gamma_{oct} = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 54.7^\circ$$

3)- Marcar o ângulo  $\alpha = \alpha_{oct} = 54.7^\circ$  a partir da vertical  $P_1T_1$  e desenhar a recta  $P_1Q_3Q_2$ , que intersecta os círculos de Mohr (2) e (3) nos pontos  $Q_2$  e  $Q_3$ , respectivamente. Com centro no ponto  $C_1$ , desenhar o arco de circunferência  $Q_2Q_3$ , com raio  $C_1Q_2$ ;

4)-A partir da vertical  $P_3T_3$ , marcar igualmente o ângulo  $\gamma = \gamma_{oct} = 54.7^\circ$  e desenhar a recta  $P_3S_1S_2$  que intersecta os círculos de Mohr (1) e (2) nos pontos  $S_1$  e  $S_2$ , respectivamente. Com centro no ponto  $C_3$ , desenhar o arco de circunferência  $S_1S_2$ , com um raio igual a  $C_3S_1$ ;

5)-A intersecção dos dois arcos de circunferência desenhados em 3) e 4) define o ponto **Q** representativo da tensão para o plano octaédrico considerado. Medindo à escala, obtém-se:

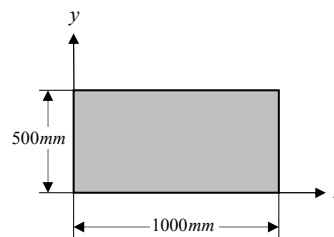
$$\begin{aligned} \sigma_{oct} &= 4 \\ \tau_{oct} &= 1.63 \end{aligned}$$

**PROBLEMA 1.2.12**

Uma placa rectangular com as dimensões de  $1000\text{mm} \times 500\text{mm}$  está sujeita a um estado plano de tensão, do qual são conhecidas as seguintes componentes normais (em MPa, para coordenadas expressas em mm):

$$\sigma_{xx} = 2y ; \quad \sigma_{yy} = x$$

- a)- Determine a expressão mais geral para a componente de corte  $\tau_{xy}$ , compatível com a componentes  $\sigma_{xx}$  e  $\sigma_{yy}$ .
- b)- Calcule as tensões principais no centro da placa.
- c)- Esboce a construção do círculo de Mohr para as tensões no centro da placa.



**RESOLUÇÃO:**

**a)-Componente da tensão de corte  $\tau_{xy}$**

O campo das tensões deve satisfazer as equações de equilíbrio indefinido. No caso dum estado plano de tensão, estas reduzem-se às duas equações seguintes:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + F_x = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + F_y = 0 \end{cases}$$

Substituindo as expressões para  $\sigma_{xx}$  e  $\sigma_{yy}$ , e assumindo que é nula a densidade das forças de volume, obtém-se:

$$\begin{cases} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

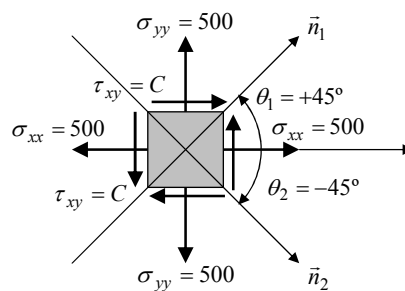
Isto traduz que deverão ser nulas as derivadas da tensão de corte  $\tau_{xy}$  em relação a  $x$  e a  $y$ , ou seja, a tensão de corte deve ser constante em qualquer ponto da placa. Donde, a expressão mais geral para essa componente da tensão:

$$\tau_{xy} = C \text{ (constante)}$$

**b)-Tensões principais no centro da placa**

No centro da placa, ponto de coordenadas (500mm, 250mm), as componentes cartesianas do estado de tensão têm os seguintes valores, (expressos em MPa):

$$\sigma_{xx} = 500 ; \quad \sigma_{yy} = 500 ; \quad \tau_{xy} = C$$



As tensões principais  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  no centro da placa obtém-se a partir das equações (1.35), isto é:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 500 + \sqrt{C^2} = 500 + C$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 500 - \sqrt{C^2} = 500 - C$$

As respectivas direcções principais ficam definidas pelos ângulos  $\theta_p$  calculados a partir da equação (1.34). Supondo que é  $C \neq 0$  e de sinal positivo, tem-se:

$$\operatorname{tg}(2\theta_p) = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} = \frac{2C}{500 - 500} = +\infty$$

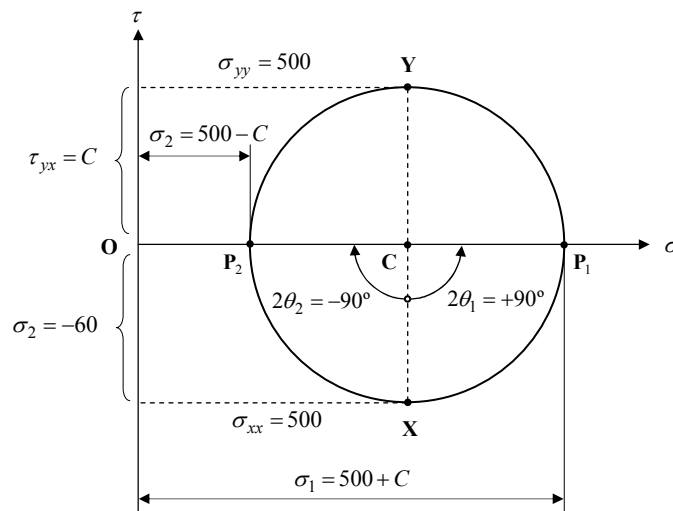
Porque a tensão de corte  $\tau_{xy}$  é positiva, o ângulo  $\theta_1$  está no intervalo  $0 < \theta_1 < \pi/2$ , donde as direcções principais:

$$\theta_1 = +45^\circ \text{ e } \theta_2 = -45^\circ$$

**c)-Construção do círculo de Mohr**

Seguindo os passos indicados no parágrafo §1.12 do Resumo da Teoria, no início do presente capítulo:

1)-No diagrama de Mohr ( $\sigma, \tau$ ) marquem-se as posições dos pontos X e Y representativos dos pares  $(\sigma_{xx}, -\tau_{xy})$  e  $(\sigma_{yy}, \tau_{yx})$ , respectivamente, isto é,  $X \equiv (500, -C)$  e  $Y \equiv (500, +C)$ . Aqui é utilizada a convenção habitual de que



as tensões normais positivas indicam tracção e as tensões de corte são consideradas positivas quando definem um binário que tende a fazer rodar o elemento sobre que actuam no sentido do movimento dos ponteiros do relógio (admita-se aqui que a constante  $C$  é positiva);

2)-O segmento  $DD'$  é um diâmetro do círculo de Mohr e a sua intersecção com o eixo das abcissas define a posição do centro  $C$  do círculo de Mohr;

3)-Com centro em  $C$  desenha-se o círculo de Mohr a passar pelos pontos  $D$  e  $D'$ ;

4)-A circunferência de Mohr intersecta o eixo  $\sigma$  nos pontos  $P_1$  e  $P_2$ , cujas abcissas são os valores das tensões principais  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ , respectivamente:

$$\sigma_1 = 500 + C \text{ (MPa)} \text{ e } \sigma_2 = 500 - C \text{ (MPa)};$$

5)-As orientações das direcções principais (1) e (2) ficam definidas pelos ângulos  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , relativamente ao eixo dos  $xx$ , medindo no diagrama os ângulos  $2\theta_1$  e  $2\theta_2$ , a partir do raio  $CD$  para os pontos  $P_1$  e  $P_2$ , respectivamente. Do diagrama, tira-se:  $2\theta_1 = +90^\circ$  (no sentido contrário ao do movimento dos ponteiros do relógio) e  $2\theta_2 = -90^\circ$  (no sentido do movimento dos ponteiros do relógio). Donde:  $\theta_1 = +45^\circ$  e  $\theta_2 = -45^\circ$  (ver figura).

### PROBLEMA 1.2.13

Num sistema plano, o estado de tensão num ponto  $P$  é definido pelas seguintes componentes:

$$\sigma_{xx} = 35 \text{ MPa}; \quad \sigma_{yy} = 65 \text{ MPa}; \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = -25 \text{ MPa}$$

- Determine, analiticamente, os valores das tensões principais no ponto  $P$  e as respectivas direcções principais.
- Resolva o problema, recorrendo à construção do círculo de Mohr.
- Calcule a tensão de corte máxima em no plano  $xy$  e identifique o respectivo plano.

### RESOLUÇÃO:

#### a)-Tensões Principais

As tensões principais  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  são dadas pelas expressões seguintes:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Donde, substituindo os valores de  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  e  $\tau_{xy}$  para o caso vertente, obtém-se:

$$\sigma_1 = \frac{35+65}{2} + \sqrt{\left(\frac{35-65}{2}\right)^2 + (-25)^2} = 79,16 \text{ (MPa)}$$

$$\sigma_2 = \frac{35+65}{2} - \sqrt{\left(\frac{35-65}{2}\right)^2 + (-25)^2} = 20,84 \text{ (MPa)}$$

As direcções principais  $\vec{n}_1$  e  $\vec{n}_2$  ficam definidas pelos ângulos de inclinação  $\theta_1$  e  $\theta_2$  em relação ao eixo dos  $xx$ , respectivamente:

$$\operatorname{tg}(2\theta_{1,2}) = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} = \frac{2 \times (-25)}{35 - 65} = 1.67$$

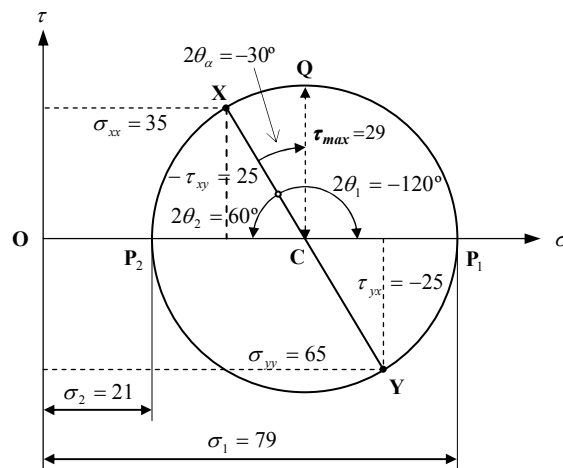
Donde, e atendendo a que a tensão de corte  $\tau_{xy}$  é negativa:

$$\begin{cases} \theta_1 = -60,48^\circ \\ \theta_2 = +29,52^\circ \end{cases}$$

**b)-Construção do Círculo de Mohr**

Procede-se à construção do círculo de Mohr da seguinte forma:

1)-No diagrama de Mohr ( $\sigma$ ,  $\tau$ ) marquem-se as posições dos pontos X e Y representativos dos pares ( $\sigma_{xx}$ ,  $-\tau_{xy}$ ) e ( $\sigma_{yy}$ ,  $\tau_{yx}$ ), respectivamente, isto é, no caso em questão,  $X \equiv (35, 25)$  e  $Y \equiv (65, -25)$ . Aqui é utilizada a convenção habitual de que As tensões normais positivas indicam tracção e as tensões de corte são positivas quando definem um binário que tende a fazer rodar o elemento sobre que actuam no sentido do movimento dos ponteiros do relógio;

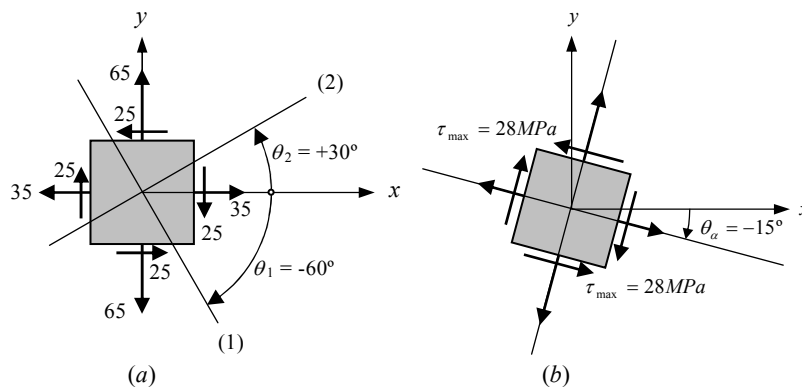


2)-O segmento  $DD'$  é um diâmetro do círculo de Mohr e a sua intersecção com o eixo das abcissas define a posição do centro  $C$  do círculo de Mohr;

3)-Com centro em  $C$  desenha-se o círculo de Mohr a passar pelos pontos  $X$  e  $Y$ ;

4)-A circunferência de Mohr intersecta o eixo  $\sigma$  nos pontos  $P_1$  e  $P_2$ , cujas abcissas são os valores das tensões principais  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ , respectivamente. Medindo à escala, obtém-se:  $\sigma_1 = 79 \text{ MPa}$  e  $\sigma_2 = 21 \text{ MPa}$ ;

5)-As orientações das direcções principais (1) e (2) ficam definidas pelos ângulos  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , relativamente ao eixo dos  $xx$ , medindo no diagrama os ângulos  $2\theta_1$  e  $2\theta_2$ , a partir do raio  $CD$  para os pontos  $P_1$  e  $P_2$ , respectivamente. Por medição directa sobre o diagrama, tira-se:  $2\theta_1 = -120^\circ$  (no sentido do movimento dos ponteiros do relógio) e  $2\theta_2 = 60^\circ$  (no sentido contrário). Donde:  $\theta_1 = -60^\circ$  e  $\theta_2 = +30^\circ$ , conforme ilustrado na figura (a) a seguir.



### **c)-Tensão de Corte Máxima**

O valor da tensão de corte máxima é numericamente igual ao raio do círculo de Mohr (ver construção de Mohr na alínea anterior). Isto é, medindo directamente sobre o diagrama de Mohr:  $\tau_{max} = 29 \text{ MPa}$ .

O plano sobre o qual actua fica identificado pela respectiva normal, cuja posição no plano  $xy$  é definida pelo  $2\theta_\alpha = 30^\circ$  entre os raios  $CX$  e  $CQ$  do círculo de Mohr, medido no sentido do movimento dos ponteiros do relógio. Então será  $\theta_\alpha = -15^\circ$ , ou  $\theta_\alpha = +75^\circ$  conforme representado na figura (b) em cima.

### **PROBLEMA 1.2.14.**

Reconsidere o problema anterior, agora para um estado de tensão definido pelas seguintes componentes:

$$\sigma_{xx} = -50 \text{ MPa}; \quad \sigma_{yy} = 10 \text{ MPa}; \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = 51 \text{ MPa}$$

**RESOLUÇÃO:****a)-Tensões Principais**

Tal como no problema anterior, as tensões principais  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  são dadas pelas expressões gerais seguintes:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Substituindo os valores de  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  e  $\tau_{xy}$  para este caso, obtém-se:

$$\sigma_1 = \frac{-50+10}{2} + \sqrt{\left(\frac{-50-10}{2}\right)^2 + (51)^2} = 40 \text{ (MPa)}$$

$$\sigma_2 = \frac{-50+10}{2} - \sqrt{\left(\frac{-50-10}{2}\right)^2 + (51)^2} = -80 \text{ (MPa)}$$

As direcções principais  $\bar{n}_1$  e  $\bar{n}_2$  ficam definidas pelos ângulos de inclinação  $\theta_1$  e  $\theta_2$  em relação ao eixo dos  $xx$ , respectivamente:

$$\operatorname{tg}(2\theta_{1,2}) = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} = \frac{2 \times 51}{-50 - 10} = -1.7$$

Donde, e porque agora a tensão de corte  $\tau_{xy}$  é positiva, o ângulo  $\theta_1$  deve estar no primeiro quadrante:

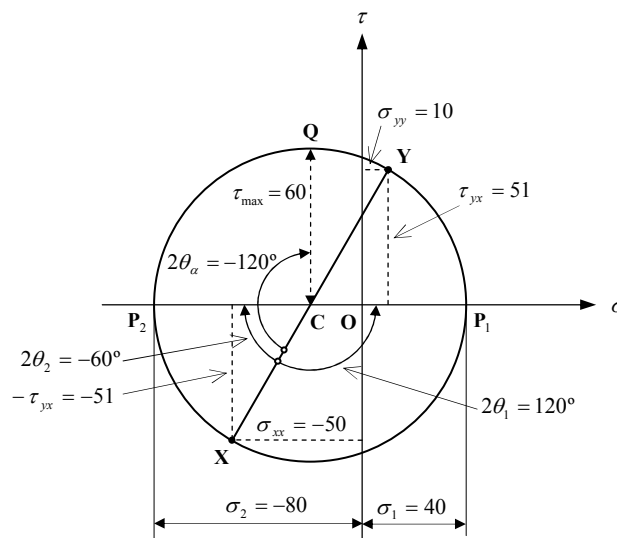
$$\begin{cases} \theta_1 = +60^\circ \\ \theta_2 = -30^\circ (= +240^\circ) \end{cases}$$

**b)-Construção do Círculo de Mohr**

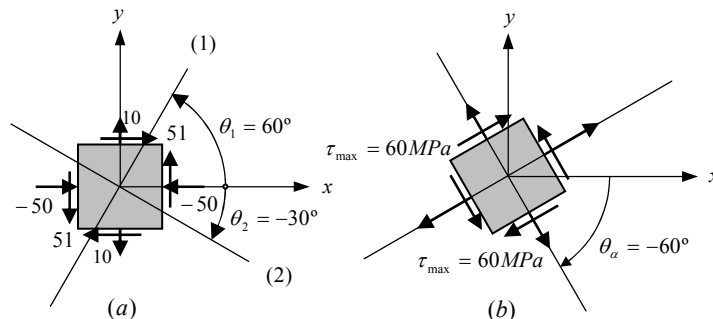
Procede-se à construção do círculo de Mohr seguindo exactamente a mesma metodologia que foi utilizada na resolução do problema anterior:

1)-No diagrama de Mohr ( $\sigma$ ,  $\tau$ ) marquem-se as posições dos pontos X e Y representativos dos pares  $(\sigma_{xx}, -\tau_{xy})$  e  $(\sigma_{yy}, \tau_{yx})$ , respectivamente, isto é, no caso em questão,  $X \equiv (35, 25)$  e  $Y \equiv (65, -25)$ . Aqui é utilizada a convenção habitual de que As tensões normais positivas indicam tracção e as tensões de corte são consideradas positivas quando definem um binário que tende a fazer rodar o elemento sobre que actuam no sentido do movimento dos ponteiros do relógio;

- 2)-O segmento XY é um diâmetro do círculo de Mohr e a sua intersecção com o eixo das abcissas define a posição do centro C do círculo de Mohr;
- 3)-Com centro em C desenha-se o círculo de Mohr a passar pelos pontos X e Y;
- 4)-A circunferência de Mohr intersecta o eixo  $\sigma$  nos pontos  $P_1$  e  $P_2$ , cujas abcissas definem precisamente os valores das tensões principais  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ , respectivamente. Medindo à escala, obtém-se:  $\sigma_1 = 40 \text{ MPa}$  e  $\sigma_2 = -80 \text{ MPa}$ ;



- 5)-As orientações das direcções principais (1) e (2) ficam definidas pelos ângulos  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , relativamente ao eixo dos  $xx$ , medindo no diagrama os ângulos  $2\theta_1$  e  $2\theta_2$ , a partir do raio CX para os pontos  $P_1$  e  $P_2$ , respectivamente. Por medição directa sobre o diagrama, tira-se:  $2\theta_1 = 120^\circ$  (no sentido contrário ao movimento dos ponteiros do relógio) e  $2\theta_2 = -60^\circ$  (no sentido do movimento dos ponteiros do relógio). Donde:  $\theta_1 = 60^\circ$  e  $\theta_2 = -30^\circ$ , figura (a) a seguir:





**c)-Tensão de Corte Máxima**

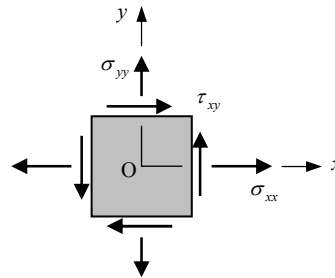
O valor da tensão de corte máxima é numericamente igual ao raio do círculo de Mohr (ver construção de Mohr na alínea anterior). Isto é, medindo directamente sobre o diagrama de Mohr:  $\tau_{max}=60 \text{ MPa}$ .

O plano sobre o qual actua fica identificado pela respectiva normal, cuja posição no plano  $xy$  é definida pelo  $2\theta_\alpha = -120^\circ$  entre os raios CD e CQ do círculo de Mohr, medido no sentido do movimento dos ponteiros do relógio. Então será  $\theta_\alpha = -60^\circ$ , conforme representado na figura (b) atrás.

**PROBLEMA 1.2.15.**

Um elemento bidimensional está sob a acção dum estado plano de tensão (ver figura a seguir). Considere o caso particular em que as componentes cartesianas normais da tensão são  $\sigma_{xx}=80 \text{ MPa}$  e  $\sigma_{yy}= 40 \text{ MPa}$ . Sabe-se, também, que uma das tensões principais é igual a  $180 \text{ MPa}$  em tracção.

- Determine a tensão de corte  $\tau_{xy}$ .
- Determine a outra tensão principal.
- Determine a orientação das duas direcções principais de tensão.
- Represente as duas tensões principais sobre um elemento convenientemente orientado no plano  $xy$ .

**RESOLUÇÃO:****a)-Tensão de corte  $\tau_{xy}$** 

As tensões principais são dadas pelas equações (1.35):

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Substituindo os valores conhecidos para  $\sigma_{xx}$  e  $\sigma_{yy}$ , obtém-se:

$$\sigma_1 = 60 + \sqrt{400 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_2 = 60 - \sqrt{400 + \tau_{xy}^2}$$

donde:

$$\tau_{xy} = \pm \sqrt{(\sigma_{1ou2} - 60)^2 - 400}$$

Sabendo-se que uma das tensões principais é igual a  $180MPa$ , obtém-se:

$$\tau_{xy} = \pm 118,32MPa$$

### **b)-Tensões principais**

Substituindo o valor calculado para  $\tau_{xy}$  nas expressões acima para  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ , obtém-se:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= 60 + \sqrt{400 + 14000} = 180MPa \\ \sigma_2 &= 60 - \sqrt{400 + 14000} = -60MPa\end{aligned}$$

Ficando, assim, identificado o valor numérico da outra tensão principal.

### **c)-Direcções principais de tensão**

As direcções principais são definidas pela equação (1.34):

$$tg(2\theta_p) = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}$$

Substituindo os valores para  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  e  $\tau_{xy}$ , obtém-se:

$$tg(2\theta_p) = \frac{\pm 236,64}{80 - 40} = \pm 5,92$$

donde:

$$\theta_{1,2} = \begin{cases} +40,21^\circ \\ -49,79^\circ \end{cases} \quad \text{ou} \quad \theta_{1,2} = \begin{cases} -40,21^\circ \\ +40,79^\circ \end{cases}$$

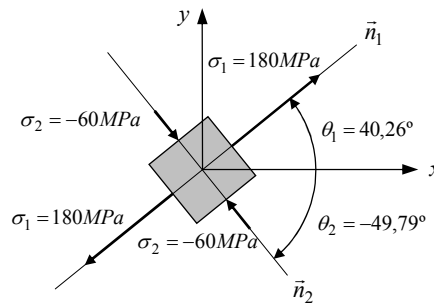
conforme se tome o sinal (+) ou o sinal (-) para o valor da tensão de corte  $\tau_{xy}$ , respectivamente.

### **c)-Representação gráfica das tensões principais**

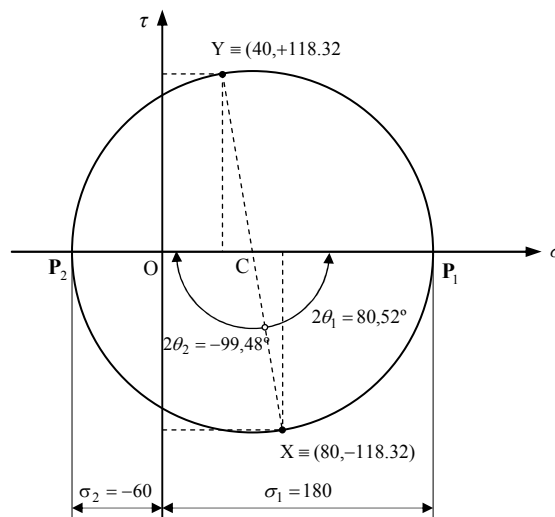
Considerando, por exemplo o caso em que se considera um valor positivo da tensão de corte, isto é:

$$\theta_{1,2} = \begin{cases} +40,21^\circ \\ -49,79^\circ \end{cases}$$

tem-se a situação representada na figura a seguir:

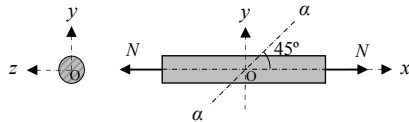


Pode obter-se uma confirmação deste resultado utilizando a construção do círculo de Mohr. Assim, procedendo de acordo com a metodologia habitual, começa-se por identificar os pontos X e Y correspondentes às direcções x e y, de coordenadas  $(\sigma_{xx}, -\tau_{xy})$  e  $(\sigma_{yy}, +\tau_{xy})$ , respectivamente. Depois, tomando por diâmetro o segmento DD', desenha-se o círculo de Mohr para as tensões no ponto considerado. O círculo de Mohr intersecta o eixo das abcissas nos pontos  $P_1$  e  $P_2$ , que identificam os valores das tensões principais  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ , respectivamente. Os ângulos  $XCP_1$  e  $XCP_2$  identificam as inclinações das direcções principais  $\vec{n}_1$  e  $\vec{n}_2$ , respectivamente.



## 1.3. PROBLEMAS PROPOSTOS

**1.3.1.** Uma barra de secção circular de diâmetro  $d$  é solicitada axialmente em tracção por duas forças iguais e opostas de intensidades  $N$ , aplicadas nas extremidades da barra, conforme representado na figura a seguir.



Admitindo que o campo das tensões na barra é uniforme, determine:

- A tensão resultante no ponto O, para o plano de corte (yz).
- A tensão resultante no ponto O, para o plano de corte ( $\alpha$ - $\alpha$ ), inclinado a  $45^\circ$  relativamente ao eixo da barra.
- As componentes normal e de corte da tensão no ponto O, sobre o plano de corte ( $\alpha$ - $\alpha$ ).

*Solução:* a)  $\vec{T} = \left(\frac{4N}{\pi d^2}, 0, 0\right)$ .

b)  $\vec{T} = \left(\frac{2\sqrt{2}N}{\pi d^2}, 0, 0\right)$ . c)  $\sigma = \tau = \frac{2N}{\pi d^2}$ .

**1.3.2.** Relativamente à barra a que se refere o problema anterior, determine as componentes cartesianas da tensão no ponto O.

*Solução:*  
 $\sigma_{xx} = \frac{4N}{\pi d^2}$ ;  $\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$ .

**1.3.3.** Resolva o problema 1.3.1, considerando os seguintes valores numéricos:  $N = 10kN$ ,  $d = 10mm$ .

*Solução:* a)  $\vec{T} = (127MPa, 0, 0)$ .

b)  $\vec{T} = (90MPa, 0, 0)$ . c)  $\sigma = \tau = 64MPa$ .

**1.3.4.** Num ponto P, a tensão resultante  $\vec{T}$  para um plano de corte perpendicular

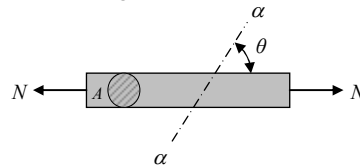
ao eixo dos xx é  $\vec{T} = (0, 1, 0)$ . Determine as componentes cartesianas  $\sigma_{xx}$ ,  $\tau_{xy}$  e  $\tau_{xz}$ .

*Solução:*  $\sigma_{xx} = 0$ ,  $\tau_{xy} = 1$ ,  $\tau_{xz} = 0$

**1.3.5.** Ainda relativamente ao problema anterior, determine as componentes normal ( $\sigma$ ) e de corte ( $\tau$ ) da tensão, para um plano de corte paralelo a yz.

*Solução:*  $\sigma = 0$ ,  $\tau = 1$

**1.3.6.** Uma barra de secção transversal uniforme de área  $A$  está sujeita a uma força axial de tracção  $N$ , conforme indicado na figura.



Determine:

- As tensões normal e tangencial no plano de corte  $\alpha$ , inclinado de um ângulo  $\theta$  relativamente ao eixo da barra.
- O valor e a direcção da tensão de corte máxima na barra.

*Solução:*

a)-  $\sigma = \frac{N}{2A} [1 - \cos(2\theta)]$ ;  $\tau = \frac{N}{2A} \sin(2\theta)$

b)-  $\tau_{max} = \frac{N}{2A}$ ;  $\theta_c = 45^\circ$

**1.3.7.** Tendo por referência a figura do problema anterior, considere a área da secção transversal  $A = 8,5cm^2$  e uma força de tracção  $N = 12ton$ . Para o plano  $\alpha$ , inclinado de um ângulo  $\theta = 30^\circ$  relativamente ao eixo da barra, determine:

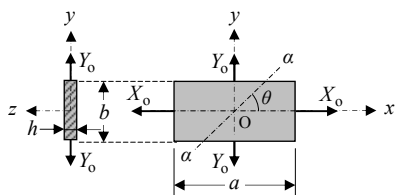
- O valor e a direcção da tensão de corte máxima na barra.
- O valor da tensão normal sobre o plano de corte máximo.
- As tensões normal e tangencial sobre o plano  $\alpha$ .

- Solução: a)  $\tau_{max} = 70,60MPa$ ;  $\theta_c = 45^\circ$   
 b)-  $\sigma = 70,60MPa$   
 c)-  $\sigma = 35,30MPa$ ;  $\tau = 61,20MPa$

**1.3.8.** Uma barra de secção quadrada com 20mm de lado está sujeita a uma carga axial de compressão de 32kN. Desprezando qualquer eventual efeito de encurvadura, determine as tensões normal e tangencial que actuam sobre um plano inclinado de 30° relativamente ao eixo da barra.

Solução:  $\sigma = -20,0MPa$ ;  $\tau = -34,60MPa$

**1.3.9.** Uma placa rectangular de lados  $a$  e  $b$  e espessura  $h$  está sujeita a forças de tracção de resultantes  $X_o$  e  $Y_o$ , uniformemente distribuídas ao longo dos lados  $a$  e  $b$ , respectivamente, conforme representado na figura a seguir.



Admitindo que o campo das tensões em todo o volume da placa é uniforme, determine:

- a)- A tensão resultante no ponto O, sobre o plano de corte ( $xz$ ).  
 b)- A tensão resultante no ponto O, sobre o plano de corte ( $\alpha-\alpha$ ).  
 c)- As componentes normal e tangencial da tensão no ponto O, sobre o plano de corte ( $\alpha-\alpha$ ).

Solução: a)  $\vec{T} = (0, \frac{Y_o}{ah}, 0)$ .

b)  $\vec{T} = \left( \frac{X_o \text{sen}(\theta)}{bh}, -\frac{Y_o \text{cos}(\theta)}{ah}, 0 \right)$ .

c)  $\sigma = \frac{X_o \text{sen}^2(\theta)}{bh} + \frac{Y_o \text{cos}^2(\theta)}{ah}$ ;  
 $\tau = \left( \frac{X_o}{b} - \frac{Y_o}{a} \right) \frac{\text{sen}(2\theta)}{2h}$ .

**1.3.10.** Relativamente à barra a que se refere o problema anterior, determine as componentes cartesianas da tensão no centro da placa.

Solução:  $\sigma_{xx} = \frac{X_o}{bh}$ ;  $\sigma_{yy} = \frac{Y_o}{ah}$ ;  
 $\sigma_{zz} = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$ .

**1.3.11.** Resolva o problema 1.3.9. considerando os seguintes valores numéricos:  $X_o = 300ton$ ,  $Y_o = 200ton$ ,  $a = 2m$ ,  $b = 1m$ ,  $h = 20mm$  e  $\theta = 60^\circ$ .

Solução: a)  $\vec{T} = (50MPa, 0, 0)$ .

b)  $\vec{T} = (130MPa, -25MPa, 0)$ .

c)  $\sigma = 125MPa$ ;  $\tau = 43MPa$ .

**1.3.12.** No ponto  $P \equiv (2, 2, 2)$  de um corpo material, para um plano de corte ( $\alpha$ ) definido pela equação  $x-y-z+2=0$ , a tensão resultante correspondente é  $\vec{T}_n = (-2, 6, 4)$ .

Determine as componentes normal  $\sigma$  e tangencial  $\tau$  da tensão no ponto P, para o plano de corte  $\alpha$ .

Solução:  $\sigma = 4\sqrt{3}$ ,  $\tau = 2\sqrt{2}$ .

**1.3.13.** Um campo de tensões é definido pelas seguintes componentes cartesianas:

$\sigma_{xx} = 2x - 2$ ;  $\sigma_{yy} = 0$ ;  $\sigma_{zz} = -4z + 4$   
 $\tau_{xy} = \tau_{yx} = 4x - 4$   
 $\tau_{yz} = \tau_{zy} = 10y - 4z$   
 $\tau_{xz} = \tau_{zx} = 8x + 4z - 2$

Desenhe um paralelepípedo rectangular elementar centrado na origem das coordenadas (O) e, sobre cada uma das faces, represente as componentes das tensões que sobre ela actuam.

Solução:  $\sigma_{xx} = -2$ ;  $\sigma_{yy} = 0$ ;  $\sigma_{zz} = 4$   
 $\tau_{xy} = -4$ ;  $\tau_{yz} = 0$ ;  $\tau_{xz} = -2$

**1.3.14.** O estado de tensão num ponto é definido pelas seguintes componentes cartesianas:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= 50 \text{ MPa} & \tau_{xy} &= 30 \text{ MPa} \\ \sigma_{yy} &= 40 \text{ MPa} & \tau_{yz} &= 25 \text{ MPa} \\ \sigma_{zz} &= 80 \text{ MPa} & \tau_{xz} &= -37,5 \text{ MPa}\end{aligned}$$

Determine:

a)- As componentes normal e de corte da tensão para um plano  $\pi$  cuja normal está inclinada de  $\alpha = 64^\circ$  e  $\beta = 68^\circ$  em relação aos eixos  $x$  e  $y$ , respectivamente.

b)- Os cossenos directores da tensão de corte no plano considerado.

*Solução:*  $\sigma = 67,1$  ;  $\tau = 35,8$  (MPa).

**1.3.15.** Relativamente ao estado de tensão a que se refere o problema anterior, determine os cossenos directores da tensão de corte no plano  $\pi$ .

*Solução:*  $l_c = -0,37$   $m_c = 0,32$   $n_c = 0,05$ .

**1.3.16.** A tensão em P, para um plano de corte  $\pi$  cuja normal tem cossenos directores  $l = 0,553$ ,  $m = 0,651$  e  $n = 0,520$ , é  $T = 280 \text{ MPa}$  e actua segundo uma direcção inclinada de ângulos de  $80^\circ$  e  $35^\circ$  em relação aos eixos coordenados  $x$  e  $y$ , respectivamente. Determine a tensão normal e a tensão de corte no ponto P, para o plano considerado.

*Solução:*  $\sigma = 155,8 \text{ MPa}$  ;  $\tau = 113,9 \text{ MPa}$

**1.3.17.** Relativamente ao estado de tensão a que se refere o problema anterior, determine os cossenos directores da tensão de corte no plano  $\pi$ .

*Solução:*  $l_c = -0,82$   $m_c = 0,55$   $n_c = 0,18$

**1.3.18.** Ainda em relação ao estado de tensão a que se refere o problema 1.3.16, determine as componentes  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  e  $\sigma_{zz}$ .

*Solução:*  $\sigma_{xx} = 88$ ,  $\sigma_{yy} = 300$ ,  $\sigma_{zz} = 276$  (MPa)

**1.3.19.** Num referencial global  $Oxyz$ , as componentes cartesianas da tensão num ponto P são as seguintes:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= -10 & \sigma_{yy} &= 10 & \sigma_{zz} &= 20 \text{ (MPa)} \\ \tau_{xy} &= -30 & \tau_{yz} &= 20 & \tau_{xz} &= 10 \text{ (MPa)}\end{aligned}$$

Determine as componentes da tensão num referencial particular  $Ox'y'z'$ , onde as

orientações dos eixos  $x',y',z'$  são definidas pelos seguintes ângulos:

$$(x,x') = 0 ; (y,y') = \pi/4 ; (z,z') = \pi/4.$$

*Solução:*  $\sigma_{x'x'} = 30$ ;  $\sigma_{y'y'} = -5$ ;  $\sigma_{z'z'} = 35$ ;  
 $\tau_{x'y'} = -20\sqrt{2}$ ;  $\tau_{y'z'} = -5$ ;  $\tau_{x'z'} = 10\sqrt{2}$  (MPa)

**1.3.20.** Para o estado de tensão a que se refere o problema 1.3.19, determine as componentes da tensão num referencial particular  $Ox'y'z'$ , onde as orientações dos eixos  $x',y',z'$  são definidas pelos seguintes ângulos:

$$(x,x') = 0 ; (y,y') = \pi/2 ; (z,z') = \pi/2$$

*Solução:*  $\sigma_{x'x'} = -10$ ;  $\sigma_{y'y'} = 20$ ;  $\sigma_{z'z'} = 10$ ;  
 $\tau_{x'y'} = -10$ ;  $\tau_{y'z'} = -20$ ;  $\tau_{x'z'} = -30$  (MPa)

**1.3.21.** Para o estado de tensão a que se refere o problema 1.3.19, determine as componentes da tensão num referencial particular  $Ox'y'z'$ , onde as orientações dos eixos  $x',y',z'$  são definidas pelos seguintes ângulos:

$$(x,x') = \pi/2 ; (y,y') = 0 ; (z,z') = \pi/2.$$

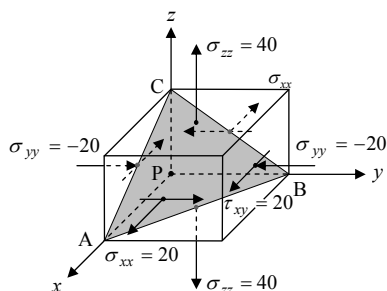
*Solução:*  $\sigma_{x'x'} = 20$ ;  $\sigma_{y'y'} = 10$ ;  $\sigma_{z'z'} = -10$ ;  
 $\tau_{x'y'} = 20$ ;  $\tau_{y'z'} = 30$ ;  $\tau_{x'z'} = -10$  (MPa)

**1.3.22.** Para o estado de tensão a que se refere o problema 1.3.19, determine as componentes da tensão num referencial particular  $Ox'y'z'$ , onde as orientações dos eixos  $x',y',z'$  são definidas pelos seguintes ângulos:

$$(x,x') = \pi/2 ; (y,y') = \pi/2 ; (z,z') = 0.$$

*Solução:*  $\sigma_{x'x'} = 10$ ;  $\sigma_{y'y'} = -10$ ;  $\sigma_{z'z'} = 20$ ;  
 $\tau_{x'y'} = 30$ ;  $\tau_{y'z'} = 10$ ;  $\tau_{x'z'} = -20$  (MPa)

**1.3.23.** Considere o cubo elementar representado na figura a seguir, sujeito às tensões indicadas.



Determine as tensões normal e tangencial que actuam sobre o plano ABC.

Solução:  $\sigma = 26,67 \text{ MPa}$  ;  $\tau = 18,86 \text{ MPa}$

**1.3.24.** Para o estado de tensão a que se refere o problema anterior, determine as respectivas tensões principais e direcções principais de tensão.

Solução:  $\sigma_1 = 40 \text{ MPa}$ ,  $\vec{n}_1 = \pm(0,0,1)$

$\sigma_2 = 20\sqrt{2} \text{ MPa}$ ,  $\vec{n}_2 = \pm(0,92, 0,38, 0)$

$\sigma_3 = -20\sqrt{2} \text{ MPa}$ ,  $\vec{n}_3 = \pm(0,38, -0,92, 0)$

**1.3.25.** Ainda relativamente ao estado de tensão a que se refere o problema 1.3.23, determine as tensões principais secundárias no plano xy e as respectivas direcções.

Solução:

$\sigma_1' = 20\sqrt{2} \text{ MPa}$ ,  $\vec{n}_1' = \pm(0,92, 0,38, 0)$

$\sigma_2' = -20\sqrt{2} \text{ MPa}$ ,  $\vec{n}_2' = \pm(0,38, -0,92, 0)$

**1.3.26.** Ainda em relação ao estado de tensão a que se refere o problema 1.3.23, determine as tensões principais secundárias no plano ABC e as respectivas direcções.

Solução:

$\sigma_1' = 35,73 \text{ MPa}$ ,  $\vec{n}_1' = \pm(0,54, 0,26, -0,80)$

$\sigma_2' = -22,39 \text{ MPa}$ ,  $\vec{n}_2' = \pm(0,61, -0,78, 0,17)$

**1.3.20.** O estado de tensão num ponto P é definido pelas seguintes componentes cartesianas:

$\sigma_{xx} = 30$  ;  $\sigma_{yy} = 60$  ;  $\sigma_{zz} = 30 \text{ (MPa)}$

$\tau_{xy} = 0$  ;  $\tau_{yz} = 0$  ;  $\tau_{xz} = 10 \text{ (MPa)}$

a)–Poderá afirmar-se que o plano yz é um plano principal de tensão? Justifique.

b)–Determine as tensões principais no ponto considerado, bem como as respectivas direcções.

Solução: a) sim

b)  $\sigma_1 = 60 \text{ MPa}$ ,  $\vec{n}_1 = \pm(0,1,0)$

$\sigma_2 = 40 \text{ MPa}$ ,  $\vec{n}_2 = \pm(\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2)$

$\sigma_3 = 20 \text{ MPa}$ ,  $\vec{n}_3 = \pm(-\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2)$

**1.3.28.** Relativamente ao estado de tensão a que se refere o problema anterior, determine:

a)- O valor máximo da tensão normal no ponto P.

b)- O valor máximo da tensão tangencial no ponto P.

Solução:

a)  $\sigma_{max} = 60 \text{ MPa}$ . b)  $\tau_{max} = 20 \text{ MPa}$ .

**1.3.29.** O campo das tensões num corpo de material elástico sem forças de volume, é definido pelas seguintes componentes cartesianas ( em MPa):

$\sigma_{xx} = 0$ ,  $\sigma_{yy} = \beta y$ ,  $\sigma_{zz} = 200 - \alpha z$

$\tau_{yz} = \beta y + 2\gamma z + \alpha$  ;

$\tau_{xz} = 200 - \gamma z$  ;  $\tau_{xy} = 2\beta y - 500x$

onde  $\alpha, \beta, \gamma$  são três parâmetros reais.

a)- Determine  $\alpha, \beta, \gamma$  de modo que o campo das tensões seja compatível com as equações da teoria da elasticidade.

b)- Determine as tensões principais na origem das coordenadas e as respectivas direcções.

Solução: a)  $\alpha = 100$ ,  $\beta = 100$ ,  $\gamma = 200$

b)  $\sigma_1 = 345$ ;  $\vec{n}_1 = \pm(0,49, 0,24, 0,84)$

$\sigma_2 = 0$ ;  $\vec{n}_2 = \pm(-0,45, 0,89, 0)$

$\sigma_3 = -145$ ;  $\vec{n}_3 = \pm(0,75, 0,38, -0,54)$

**1.3.30.** Ainda relativamente ao campo de tensões a que se refere o problema 1.3.29, determine:

a)- O valor da tensão de corte máxima na origem das coordenadas e o plano e a direcção segundo os quais actua.

b)- Identifique os planos octaédricos na origem das coordenadas e calcule as respectivas tensões octaédricas.

*Solução:*

$$a) \tau_{max} = 245; \quad \vec{n} = \pm(0.87, 0.44, 0.21)$$

$$\vec{n}_c = \pm(-0.18, 0.09, 0.98)$$

$$b) \sigma_{oct} = 67MPa; \quad \tau_{oct} = 141MPa$$

**1.3.31.** O campo das tensões num corpo sólido elástico, homogéneo e isotrópico é definido pelas seguintes componentes:

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} &= 60\sqrt{2}(x-z), \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy} = -50\sqrt{2}x \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} = 50\sqrt{2}z \end{aligned}$$

As restantes componentes do campo das tensões são nulas.

a)- Mostre que tal campo de tensões está necessariamente associado a um campo de forças de volume uniforme e paralelo ao eixo dos  $zz$ .

b)- Determine as tensões principais em  $A \equiv (-\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2)$  e  $B \equiv (\sqrt{2}/2, 0, -\sqrt{2}/2)$ , e as respectivas direcções.

*Solução:* a)  $F_{xx} = 0$ ,  $F_{yy} = 0$ ,  $F_{zz} = 60\sqrt{2}$

b) *Ponto A:*

$$\sigma_1 = 57.5; \quad \vec{n}_1 = \pm(0.64, 0.74, 0.21)$$

$$\sigma_2 = \square 37.1; \quad \vec{n}_2 = \pm(-0.76, 0.56, 0.34)$$

$$\sigma_3 = \square 140.4, \quad \vec{n}_3 = \pm(-0.14, 0.37, -0.92)$$

*Ponto B:*

$$\sigma_1 = 140.4; \quad \vec{n}_1 = \pm(-0.14, 0.37, -0.92)$$

$$\sigma_2 = 37.1; \quad \vec{n}_2 = \pm(-0.76, 0.56, 0.34)$$

$$\sigma_3 = \square 57.5, \quad \vec{n}_1 = \pm(0.64, 0.74, 0.21)$$

**1.3.32.** Relativamente ao campo de tensões a que se refere o problema 1.3.31, responda às seguintes questões:

a)- Desenhe os círculos de Mohr correspondentes ao estado de tensão no ponto  $C \equiv (\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2)$ .

b)- À volta do ponto  $B \equiv (\sqrt{2}/2, 0, -\sqrt{2}/2)$ , desenhe um paralelepípedo elementar de faces paralelas aos planos cartesianos e,

sobre cada uma dessas faces, represente as tensões correspondentes.

*Solução:*

$$a) \sigma_1 = 70.7; \quad \sigma_2 = 0; \quad \sigma_3 = \square 70.7$$

**1.3.33.** O estado de tensão num ponto P é definido pelas seguintes componentes cartesianas (MPa):

$$\sigma_{xx} = 120; \quad \sigma_{yy} = 60; \quad \sigma_{zz} = 60$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = 0; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} = -20; \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} = 0$$

a)- Determine as tensões principais no ponto P e as respectivas direcções.

b)- Determine as tensões principais secundárias no plano  $xz$  e as respectivas direcções.

*Solução:*

$$a) \sigma_1 = 120; \quad \vec{n}_1 = \pm(0, 0, 1)$$

$$\sigma_2 = 80; \quad \vec{n}_2 = \pm(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, 0)$$

$$\sigma_3 = 40; \quad \vec{n}_2 = \pm(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0)$$

$$b) \sigma_1' = 120; \quad \vec{n}_1' = \pm(1, 0, 0)$$

$$\sigma_2' = 60; \quad \vec{n}_2' = \pm(0, 0, 1)$$

**1.3.34.** Para o estado de tensão a que se refere o problema 1.3.33, determine ainda:

a)- As tensões principais secundárias e respectivas direcções no plano  $\alpha$  definido pela equação

$$x + y + z + 2 = 0.$$

b)- As tensões octaédricas ( $\sigma_{oct}$  e  $\tau_{oct}$ ) no ponto considerado, recorrendo directamente à utilização da construção do círculo de Mohr.

*Solução:*

$$a) \sigma_1' = 93; \quad \vec{n}_1' = \pm(0.81, -0.41, -0.41)$$

$$\sigma_2' = 80; \quad \vec{n}_2' = \pm(0, 0.71, -0.71)$$

$$b) \sigma_{oct} = 80MPa; \quad \tau_{oct} = 32,6MPa$$

**1.3.35.** Um elemento plano à volta dum ponto P está sujeito às tensões seguintes:

$$\sigma_{xx} = 30MPa, \quad \sigma_{yy} = 0 \quad \text{e} \quad \tau_{xy} = -45MPa$$



Determine, analiticamente, as tensões normal e tangencial no ponto P, para um plano de corte inclinado a  $45^\circ$  relativamente ao eixo dos xx:

*Solução:*  $\sigma = 60MPa$  ;  $\tau = 15MPa$ .

**1.3.36.** Ainda relativamente à situação a que se refere o problema anterior, determine, analiticamente:

- a)- As tensões principais no ponto P.
- b)- As direcções principais de tensão no ponto P.

*Solução:*

a)  $\sigma_1 = 62,43MPa$ ;  $\sigma_2 = -32,43MPa$ .

b)  $\theta_1 = -71,56^\circ$ ;  $\theta_2 = 18,44^\circ$ .

**1.3.37.** Resolva o problema 1.3.35, agora recorrendo à utilização da construção do círculo de Mohr.

*Solução:*  $\sigma = 60MPa$  ;  $\tau = 15MPa$ .

**1.3.38.** Resolva o problema 1.3.36, agora recorrendo à utilização da construção do círculo de Mohr.

*Solução:*

a)  $\sigma_1 = 62,43MPa$ ;  $\sigma_2 = -32,43MPa$ .

b)  $\theta_1 = -71,56^\circ$ ;  $\theta_2 = 18,44^\circ$ .

**1.3.39.** Um elemento plano à volta dum ponto P está sujeito às tensões seguintes:

$$\sigma_{xx} = 100, \sigma_{yy} = 60 \text{ e } \tau_{xy} = 40 \text{ (MPa)}$$

Determine analiticamente as tensões que actuam sobre um segundo elemento inclinado de um ângulo  $\theta = 50^\circ$  em relação ao eixo dos xx:

*Solução:*  $\sigma'_{xx} = 116MPa$  ;  $\sigma'_{yy} = 44MPa$  ;

$$\tau'_{xy} = -26,6MPa.$$

**1.3.40.** Ainda relativamente à situação a que se refere o problema anterior, determine, analiticamente:

- a)- As tensões principais no ponto P.
- a)- As direcções principais de tensão no ponto P.

*Solução:*

a)  $\sigma_1 = 124,72MPa$ ;  $\sigma_2 = 35,28MPa$ .

b)  $\theta_1 = 26,56^\circ$ ;  $\theta_2 = -63,44^\circ$ .

**1.3.41.** Resolva o problema 1.3.39, agora recorrendo à utilização da construção do círculo de Mohr.

*Solução:*  $\sigma'_{xx} = 116MPa$  ;  $\sigma'_{yy} = 44MPa$  ;

$$\tau'_{xy} = -26,6MPa.$$

**1.3.42.** Resolva o problema 1.3.40, agora recorrendo à utilização da construção do círculo de Mohr.

*Solução:*

a)  $\sigma_1 = 124,72MPa$ ;  $\sigma_2 = 35,28MPa$ .

b)  $\theta_1 = 26,56^\circ$ ;  $\theta_2 = -63,44^\circ$ .

**1.3.43.** Um elemento plano está sujeito às tensões seguintes:

$$\sigma_{xx} = 40MPa, \sigma_{yy} = 40MPa \text{ e } \tau_{xy} = 0$$

Determine analiticamente a tensão tangencial máxima:

*Solução:*  $\tau_{max} = 0$

**1.3.44.** Resolva o problema anterior, agora recorrendo à utilização da construção do círculo de Mohr.

*Solução:*  $\tau_{max} = 0$

**1.3.45.** Um elemento plano está sujeito às tensões seguintes:

$$\sigma_{xx} = 60MPa, \sigma_{yy} = -60MPa \text{ e } \tau_{xy} = 0$$

Determine a tensão tangencial máxima e a direcção dos planos onde ocorre:

*Solução:*  $\tau_{max} = -60MPa$ ;  $\theta_c = \pm 45^\circ$

**1.3.46.** Resolva o problema anterior, agora recorrendo à utilização da construção do círculo de Mohr.

*Solução:*  $\tau_{max} = -60MPa$ ;  $\theta_c = \pm 45^\circ$

**1.3.47.** Para elemento a que se refere o problema 1.3.45, determine as tensões normal e tangencial que actuam num plano inclinado de  $30^\circ$  relativamente ao eixo dos xx:

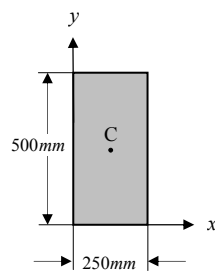
a)- Analiticamente.

b)- Recorrendo à utilização do círculo de Mohr.

*Solução:*  $\sigma = -30MPa$  ;  $\tau = -52MPa$

**1.3.48.** Uma placa rectangular com as dimensões de  $500\text{mm} \times 250\text{mm}$  está sujeita a um campo plano de tensões, definido pelas seguintes componentes cartesianas (em  $\text{MPa}$ , para as coordenadas expressas em  $\text{mm}$  e em que  $K$  é uma constante):

$$\sigma_{xx} = 2y; \quad \sigma_{yy} = 4x; \quad \tau_{xy} = -Kx$$



- a)- Determine o campo das forças de volume compatível com aquele campo de tensões.  
 b)- Calcule as tensões principais no centro  $C$  da placa, no caso de  $K=2,4$ .  
 c)- Esboce a construção do círculo de Mohr para as tensões a que se refere a alínea (b).

*Solução:* a)  $F_x = 0$ ,  $F_y = K$

- b)  $\sigma_1 = 800\text{MPa}$ ;  $\sigma_2 = 200\text{MPa}$   
 $\theta_1 = -45^\circ$ ;  $\theta_2 = +45^\circ$

**1.3.49.** Relativamente à situação a que se refere o problema anterior calcule, no centro da placa:

- a)- A tensão de corte máxima no plano da placa.  
 b)- A tensão de corte máxima absoluta.

*Solução:* a)  $(\tau_{max})_{xy} = 200\text{MPa}$ .

b)  $(\tau_{max})_{abs} = 400\text{MPa}$ .

**1.3.50.** Num sistema plano, o estado de tensão num ponto  $P$  é definido pelas seguintes componentes:

$$\sigma_{xx} = -70\text{MPa}; \quad \sigma_{yy} = -130\text{MPa};$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = 50\text{MPa}$$

- a)- Determine, analiticamente, os valores das tensões principais no ponto  $P$  e as respectivas direcções principais.

b)- Calcule a tensão de corte máxima no plano  $xy$  e identifique o plano sobre a qual actua.

*Solução:*

- a)  $\sigma_1 = -41,69$   $\sigma_2 = -158,31$  ( $\text{MPa}$ )  
 $\theta_1 = 29,52^\circ$ ;  $\theta_2 = -60,48^\circ$   
 b)  $\tau_{max} = 58,31\text{MPa}$   
 $\theta_\alpha = +74,52^\circ$  ou  $\theta_\alpha = -15,48^\circ$ .

**1.3.51.** Relativamente à situação a que se refere o problema anterior calcule, no ponto  $P$ , a tensão de corte máxima absoluta.

*Solução:*  $(\tau_{max})_{abs} = 79,15\text{MPa}$ .

**1.3.52.** Resolva o problema 1,3,50, agora recorrendo à utilização da construção do círculo de Mohr.

*Solução:*

- a)  $\sigma_1 = -41,69$   $\sigma_2 = -158,31$  ( $\text{MPa}$ )  
 $\theta_1 = 29,52^\circ$ ;  $\theta_2 = -60,48^\circ$   
 b)  $\tau_{max} = 58,31\text{MPa}$   
 $\theta_\alpha = -15,48^\circ$  ou  $\theta_\alpha = +74,52^\circ$

**1.3.53.** Reconsidere o problema 1.3.50 supondo, agora, um estado de tensão no ponto  $P$  definido pelas seguintes componentes:

$$\sigma_{xx} = 100\text{MPa}; \quad \sigma_{yy} = -20\text{MPa};$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -102\text{MPa}$$

*Solução:*

- a)  $\sigma_1 = +158,34$   $\sigma_2 = -78,34$  ( $\text{MPa}$ )  
 $\theta_1 = -29,77^\circ$ ;  $\theta_2 = +60,23^\circ$   
 b)  $\tau_{max} = 118,34\text{MPa}$   
 $\theta_\alpha = +15,23^\circ$  ou  $\theta_\alpha = -74,77^\circ$ .

**1.3.54.** Relativamente à situação a que se refere o problema anterior calcule, no ponto  $P$ , a tensão de corte máxima absoluta.

*Solução:*  $(\tau_{max})_{abs} = 118,34\text{MPa}$ .

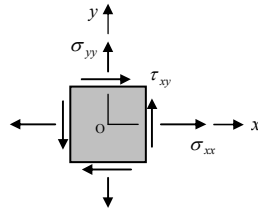
**1.3.55.** Resolva o problema 1,3,53, agora recorrendo à utilização da construção do círculo de Mohr.

*Solução:*

- a)  $\sigma_1 = +158,34$   $\sigma_2 = -78,34$  ( $\text{MPa}$ )

- $\theta_1 = -29,77^\circ$ ;  $\theta_2 = +60,23^\circ$   
 b)  $\tau_{max} = 118,34MPa$   
 $\theta_\alpha = +15,23^\circ$  ou  $\theta_\alpha = -74,77^\circ$ .

**1.3.56.** Um elemento bidimensional está sob a acção dum estado plano de tensão (ver figura a seguir).



Considere o caso particular em que as duas componentes cartesianas normais da tensão são  $\sigma_{xx} = -120MPa$  e  $\sigma_{yy} = -60MPa$ . Sabe-se, também, que uma das tensões principais  $\sigma_p = -270MPa$ .

- a)- Determine a tensão de corte  $\tau_{xy}$ .  
 b)- Determine a outra tensão principal.

*Solução:* a)  $\tau_{xy} = \pm 177,48MPa$   
 b)-  $\sigma_1 = +90MPa$ ;  $\sigma_2 = -270MPa$

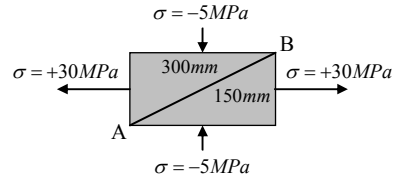
**1.3.57.** Ainda relativamente ao estado de tensão a que se refere o problema 1.3.56:

- a)- Determine a orientação das duas direcções principais de tensão.  
 b)- Represente as duas tensões principais sobre um elemento convenientemente orientado no plano  $xy$ .

*Solução:*

- a)-  $\theta_1 = +40,20^\circ$ ;  $\theta_2 = -49,80^\circ$   
 ou  $\theta_1 = -40,20^\circ$ ;  $\theta_2 = +49,80^\circ$

**1.3.58.** Uma placa rectangular em chapa de aço, com dimensões  $300mm \times 150mm$ , é construída a partir de dois triângulos rectângulos iguais soldados ao longo da hipotenusa AB, conforme ilustrado na figura a seguir. A placa está sujeita a uma tensão de  $30MPa$  em tracção na direcção da maior dimensão e a uma tensão de  $5MPa$  em compressão na direcção da dimensão menor.



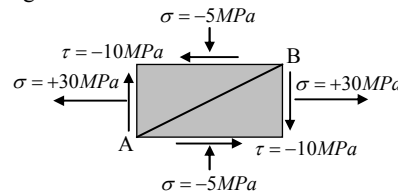
Determine a tensão normal  $\sigma$  que actua perpendicularmente à linha de soldadura e a tensão tangencial  $\tau$  que actua paralelamente ao cordão de soldadura.

*Solução:*  $\sigma = 2MPa$ ;  $\tau = 14MPa$

**1.3.59.** Reconsidere o problema anterior, agora para uma tensão de  $6MPa$  em compressão na direcção da dimensão maior e uma tensão de  $20MPa$  em tracção na direcção perpendicular.

*Solução:*  $\sigma = 14,8MPa$ ;  $\tau = -10,4MPa$

**1.3.60.** Considere a placa a que se refere o problema 1.3.58, agora também sujeita a uma tensão de corte adicional de  $-10MPa$ , conforme indicado na figura a seguir:



Determine a tensão normal  $\sigma$  que actua perpendicularmente à linha de soldadura e a tensão tangencial  $\tau$  que actua paralelamente ao cordão de soldadura.

*Solução:*  $\sigma = 10MPa$ ;  $\tau = 20MPa$

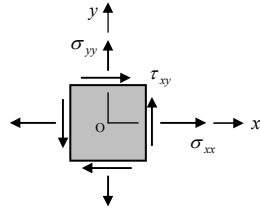
**1.3.61.** Reconsidere o problema anterior, agora para uma tensão de  $6MPa$  em compressão na direcção da dimensão maior, uma tensão de  $20MPa$  em tracção na direcção perpendicular e uma tensão de corte de  $+10MPa$ .

*Solução:*  $\sigma = 6,8MPa$ ;  $\tau = -16,4MPa$

**1.3.62.** Um elemento plano está sujeito a tensões seguintes:

$$\sigma_{xx} = 30, \sigma_{yy} = 10, \tau_{xy} = -12 \text{ (MPa)}$$

de acordo com o esquema representado na figura a seguir:



a)- Determine as tensões principais e respectivas direcções. Faça o esboço correspondente, sobre um elemento convenientemente orientado.

b)- Determine a tensão de corte máxima no plano em questão e a tensão normal associada, e represente ambas as tensões sobre um elemento convenientemente orientado.

*Solução:*

- a)  $\sigma_1 = +35,62 \text{ MPa}$   $\sigma_2 = 4,38 \text{ MPa}$   
 $\theta_1 = -25,10^\circ$ ;  $\theta_2 = +64,90^\circ$
- b)  $\tau_{max} = 15,62 \text{ MPa}$ ;  $\sigma = +31,49 \text{ MPa}$   
 $\theta_\alpha = +19,90^\circ$  ou  $\theta_\alpha = -70,10^\circ$

**1.3.63.** Reconsidere o problema 1.3.62. acima, agora para o seguinte estado plano de tensões:

$$\sigma_{xx} = 210, \quad \sigma_{yy} = 30, \quad \tau_{xy} = -56 \text{ (MPa)}$$

*Solução:*

- a)  $\sigma_1 = +226 \text{ MPa}$   $\sigma_2 = 14 \text{ MPa}$   
 $\theta_1 = -15,95^\circ$ ;  $\theta_2 = +74,05^\circ$
- b)  $\tau_{max} = 106 \text{ MPa}$ ;  $\sigma = +211,80 \text{ MPa}$

$$\theta_\alpha = +29,05^\circ \text{ ou } \theta_\alpha = -60,95^\circ$$

**1.3.64.** Reconsidere o problema 1.3.62. acima, agora para o seguinte estado plano de tensões:

$$\sigma_{xx} = +160, \quad \sigma_{yy} = +20, \quad \tau_{xy} = +18 \text{ (MPa)}$$

*Solução:*

- a)  $\sigma_1 = +162,28 \text{ MPa}$   $\sigma_2 = 17,72 \text{ MPa}$   
 $\theta_1 = +7,21^\circ$ ;  $\theta_2 = -82,79^\circ$
- b)  $\tau_{max} = 72,28 \text{ MPa}$ ;  $\sigma = +160,05 \text{ MPa}$   
 $\theta_\alpha = +52,21^\circ$  ou  $\theta_\alpha = -37,79^\circ$

**1.3.65.** Reconsidere o problema 1.3.62. acima, agora para o seguinte estado plano de tensões:

$$\sigma_{xx} = -30, \quad \sigma_{yy} = -120, \quad \tau_{xy} = +60 \text{ (MPa)}$$

*Solução:*

- a)  $\sigma_1 = 0$   $\sigma_2 = -150 \text{ MPa}$   
 $\theta_1 = +26,57^\circ$ ;  $\theta_2 = -63,43^\circ$
- b)  $\tau_{max} = 75 \text{ MPa}$ ;  $\sigma = -21,17 \text{ MPa}$   
 $\theta_\alpha = +71,57^\circ$  ou  $\theta_\alpha = -18,43^\circ$

**1.3.66.** Reconsidere o problema 1.3.62. acima, agora para o seguinte estado plano de tensões:

$$\sigma_{xx} = -200, \quad \sigma_{yy} = 100, \quad \tau_{xy} = -100 \text{ (MPa)}$$

*Solução:*

- a)  $\sigma_1 = +130,28$   $\sigma_2 = -230,28 \text{ MPa}$   
 $\theta_1 = -73,16^\circ$ ;  $\theta_2 = +16,84^\circ$
- b)  $\tau_{max} = 180,28 \text{ MPa}$ ;  $\sigma = -203,79 \text{ MPa}$   
 $\theta_\alpha = +61,85^\circ$  ou  $\theta_\alpha = -28,15^\circ$

#### 1.4. BIBLIOGRAFIA

[1.1]-Araújo, F.C., "Elasticidade e Plasticidade", Ed. Imprensa Portuguesa, Porto (1961).

[1.2]-Beer, Ferdinand P.; Johnston, E. Russell Jr., and DeWolf, John T., "Resistência dos Materiais", Ed. McGraw-Hill Book Company, São Paulo, Brasil (2006).

- [1.3]-Boresi, A.P., "Elasticity in Engineering Mechanics", Ed. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J. (1965).
- [1.4]-Branco, C.A.M., "Mecânica dos Materiais", Ed. Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa (1985).
- [1.5]-Dally, J.W. and Riley, E.W., "Experimental Stress Analysis", Ed. McGraw-Hill Book Company, New York (1965).
- [1.6]-Fenner R.T., "Engineering Elasticity", Ed. John Wiley & Sons, New York (1986).
- [1.7]-Ford, H. and Alexander, J.M., "Advanced Mechanics of Materials, Ed. Longmans, Green and Co. Ltd., London (1963).
- [1.8]-Gere, James M., "Mecânica dos Materiais", Ed. Thomson, São Paulo, Brasil (2003).
- [1.9]-Gere, James M. and Timoshenko, S.P., "Mechanics of Materials", Ed. Chapman & Hall, New York (1995).
- [1.10]-Massonnet, Charles, "Résistance des Matériaux, Ed. Dunod, Paris (1968).
- [1.10]-Nash, William A., "Resistência de Materiais", Ed. McGraw-Hill, Lisboa (2001).
- [1.11]-Silva Gomes, J.F., "Mecânica dos Sólidos e Resistência dos Materiais", Edições INEGI, Porto (2004).
- [1.12]-Silva Gomes, J.F., "Análise de Tensões em Placas, Cascas e Reservatórios", Edições INEGI, Porto (2006).
- [1.13]-Sokolnikoff, I.S., "Mathematical Theory of Elasticity", Ed. McGraw-Hill Book Company, New York (1956).
- [1.14]-Southwell, R.V., "An Introduction to The Theory of Elasticity", Ed. Dover Publications, Inc., New York (1969).
- [1.15]-Timoshenko, S.P. and D. Young, "Elements of Strength of Materials", Ed. Van Nostrans Reinhold Company, New York (1968).
- [1.16]-Timoshenko, S.P. and Goodier, J.N., "Theory of Elasticity", Ed. McGraw-Hill Book Company, New York (1970).
- [1.17]-Ugural, A.C. and Fenster, S.K., "Advanced Strength and Applied Elasticity", Ed. Elsevier North-Holland Publishing Company, Inc., New York (1975).

[1.18]-Wang, C.T., "Applied Elasticity", Ed. McGraw-Hill Book Company, New York (1953).