CAPÍTULO VI – DEFLEXÃO DE VIGAS

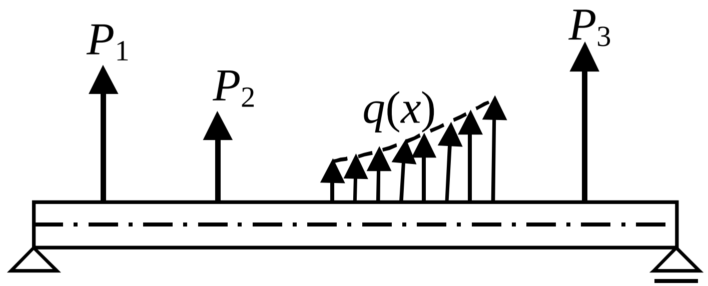
15ª AULA

Deformação Devido à Flexão

- Acontece frequentemente uma peça ficar sobredimensionada em relação às tensões de segurança, mas a sua integração num conjunto estrutural ou máquina obriga a um determinado grau de rigidez que deverá ser assegurado, sob pena de prejudicar ou mesmo inviabilizar o funcionamento do sistema.

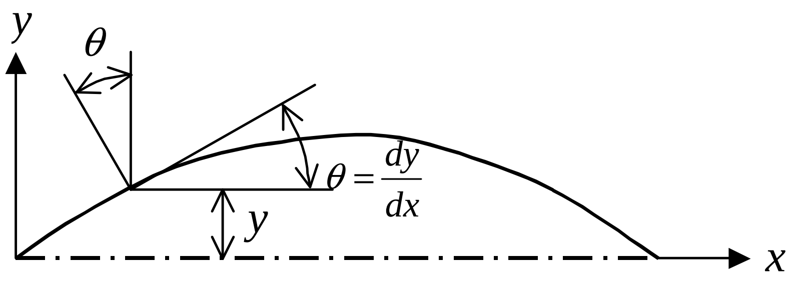
6.1. Método de Integração da Equação da Elástica

- Chama-se *linha elástica* à deformada do eixo da viga, definida por uma equação do tipo $y = f(x)$.



- No caso da flexão plana, a relação entre a curvatura $1/R$, o momento flector M, o módulo de Young do material E e o momento de inércia I_z da secção recta em relação ao eixo neutro é dada pela equação seguinte:

$$\frac{1}{R} = \frac{M}{EI_z}$$



- Por outro lado, recorrendo às equações da geometria analítica, pode escrever-se:

$$\frac{1}{R} = \frac{d^2y/dx^2}{\left[1+(dx/dy)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

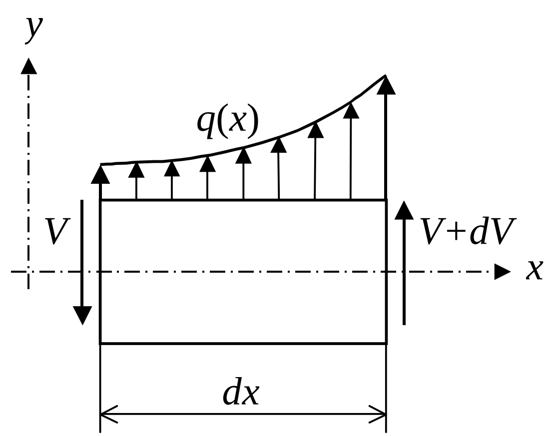
Em geral, $\frac{dy}{dx} \lll 1$ $\Longrightarrow$ $\frac{1}{R} = \frac{d^2y}{dx^2}$ $\Longrightarrow$ $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI_z}$ *Equação da Elástica!*

6.2. Método da Viga Conjugada

16ª AULA

- Ficou estabelecido atrás que existe a relação seguinte entre o esforço cortante *V* e o momento flector *M*:

$$\frac{dM}{dx} + V = 0 \qquad (1)$$



- É possível estabelecer uma relação semelhante entre o diagrama de cargas *q*(*x*) e o e o esforço transverso *V*. De facto, considerando a aquação de equilíbrio vertical das forças que actuam sobre o elemento de viga de comprimento *dx* (*figura*):

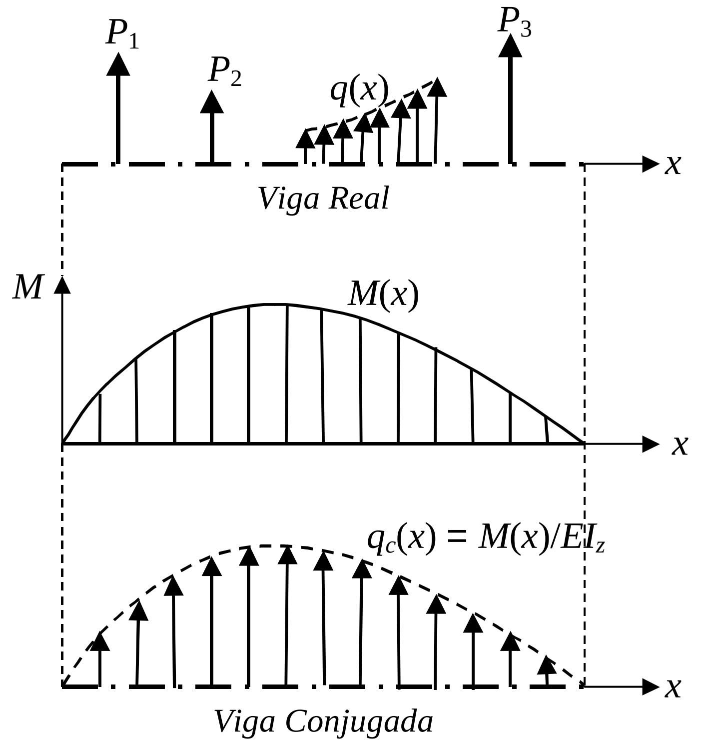
$$V + dV - V + q(x)\,dx = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{dV}{dx} + q(x) = 0 \qquad (2)$$

- Eliminando o esforço cortante *V* entre as equações (1) e (2), obtém-se:

$$\frac{d^2M}{dx^2} - q(x) = 0 \qquad (3)$$

- Associada a uma viga real, considere-se agora uma viga fictícia (*a viga conjugada*...) com o mesmo comprimento e carregada com uma distribuição de cargas semelhante à dos momentos flectores sobre a viga real:

$$q_c(x) = \frac{M(x)}{EI_z}$$



- O momento flector M_c sobre a viga conjugada pode obter-se, de acordo com o resultado obtido em (3), por integração da seguinte equação:

$$\frac{d^2 M_c}{dx^2} = q_c(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI_z}$$

- Donde se pode concluir:
  - A flecha y de uma secção arbitrária da *viga real* é igual ao momento flector M_C para a mesma secção da *viga conjugada*;
  - A a rotação $\theta = dy/dx$ de uma secção arbitrária da *viga real* é igual ao esforço cortante V_C para a mesma secção da *viga conjugada*.

- A correspondência entre as constantes de integração da *equação da elástica* e da *equação equivalente dos momentos da viga conjugada* consegue-se impondo as seguintes condições nos apoios (e secções intermédias) da *viga conjugada*:
  - Se no ponto considerado a flecha y da *viga real* é nula, então o momento flector da *viga conjugada* deve ser nulo;
  - Se o ângulo de rotação θ da *viga real* é nulo, então o esforço transverso V_C da *viga conjugada* deve ser nulo;
  - Se $y \neq 0$ e $\theta \neq 0$ na *viga real*, então também $M_c \neq 0$ e $V_c \neq 0$ na *viga conjugada*.

CORRESPONDÊNCIA DAS CONDIÇÕES FRONTEIRA

VIGA REAL		*VIGA CONJUGADA*	
Apoio Simples	$y = 0$ $\theta \neq 0$	$M_c = 0$ $V_c \neq 0$	*Apoio Simples*
Encastramento	$y = 0$ $\theta = 0$	$M_c = 0$ $V_c = 0$	*Extremo Livre*
Extremo Livre	$y \neq 0$ $\theta \neq 0$	$M_c \neq 0$ $V_c \neq 0$	*Encastramento*
Apoio Intermédio	$y = 0$ $\theta \neq 0$	$M_c = 0$ $V_c \neq 0$	*Rótula Intermédia*
Rótula Intermédia	$y \neq 0$ $\theta \neq 0$	$M_c \neq 0$ $V_c \neq 0$	*Apoio Intermédio*

CORRESPONDÊNCIA DAS CONDIÇÕES FRONTEIRA

VIGA REAL	*VIGA CONJUGADA*
$y = 0$, $\theta \neq 0$ — $y = 0$, $\theta \neq 0$ 	$M_c = 0$, $V_c \neq 0$ — $M_c = 0$, $V_c \neq 0$ 
$y = 0$, $\theta = 0$ — $y \neq 0$, $\theta \neq 0$ 	$M_c = 0$, $V_c = 0$ — $M_c \neq 0$, $V_c \neq 0$ 
$y = 0$, $\theta \neq 0$ — $y = 0$, $\theta \neq 0$ 	$M_c \neq 0$, $V_c \neq 0$ — $M_c = 0$, $V_c \neq 0$ 
$y = 0$, $\theta \neq 0$ — $y \neq 0$, $\theta \neq 0$ 	$M_c \neq 0$, $V_c \neq 0$ 
$y = 0$, $\theta = 0$ — $y \neq 0$, $\theta \neq 0$ 	$M_c = 0$, $V_c = 0$ — $M_c \neq 0$, $V_c \neq 0$