

CAPÍTULO VII DEFLEXÃO DE VIGAS ISOSTÁTICAS

7.1. RESUMO DA TEORIA

7.1.1. Introdução

Na nomenclatura habitualmente utilizada no estudo das vigas à flexão, chama-se *linha elástica* à deformada do eixo da viga. Assim, considere-se a viga ilustrada na Fig.7.1(a), solicitada por um conjunto de forças concentradas (P_i) e forças distribuídas $q(x)$. Após a deformação, o eixo da viga, que era inicialmente uma linha recta, assume a forma representada na Fig.7.1(b).

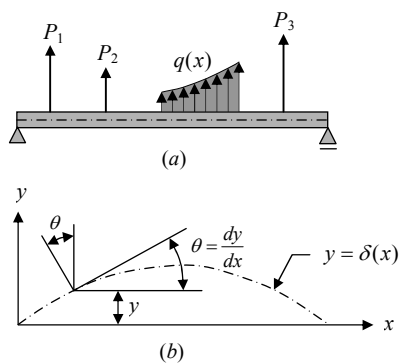


Fig.7.1 - Linha elástica duma viga à flexão

Para um ponto qualquer ao longo do eixo, o *deslocamento vertical ou deflexão* (δ) e a *rotação* (θ) da secção recta da viga são numericamente iguais, respectivamente, à ordenada (y) da *linha elástica* e ao declive (dy/dx) da tangente à curva no ponto considerado. Há vários métodos para a análise do problema, dos quais serão apresentados aqui o método da *integração da elástica*, o método da *viga conjugada* e um terceiro método que recorre à aplicação dos *teoremas energéticos*.

7.1.2. Método da Integração da Elástica

No caso duma flexão plana, a relação entre a curvatura ($1/R$), o momento flector (M), o módulo de Young do material (E) e o momento de inércia (I_z) da secção recta em relação ao eixo neutro é dada pela equação seguinte:

$$\frac{1}{R} = \frac{M}{E I_z} \quad (7.1)$$

Por outro lado, de acordo com as fórmulas gerais da geometria analítica, e para pequenas inclinações da tangente à deformada (dy/dx), pode escrever-se, com uma aproximação razoável:

$$\frac{1}{R} = \frac{d^2y}{dx^2} \quad (7.2)$$

Das equações (7.85) e (7.87) conclui-se então que:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{E I_z} \quad (7.3)$$

Esta é a chamada "*equação da elástica*" que, fazendo duas integrações sucessivas, conduz à rotação em cada secção ($\theta = dy/dx$), e à deformada do eixo da viga ($y = \delta(x)$).

Convém aqui recordar as convenções de sinal a serem utilizadas na manipulação das equações precedentes:

- (i)-os eixos x e y são orientados positivamente para a direita e para cima, respectivamente;
- (ii)-a deflexão y (ou δ) é positiva para cima;
- (iii)-a inclinação ou rotação $\theta = dy/dx$ é medida positivamente no sentido directo (contrário ao do movimento dos ponteiros do relógio);
- (iv)-a curvatura ($1/R$) é positiva quando a viga é deformada de modo a ficar com a concavidade voltada para cima; e
- (v)-o momento flector M é positivo quando produz compressão na parte superior da viga.

Uma primeira integração da equação da elástica (7.3), permite obter:

$$EI \frac{dy}{dx} = \int M(x)dx + C_1 \quad (7.4)$$

onde C_1 é uma constante de integração. Designando por $\theta(x)$ o ângulo, medido em radianos, que a tangente à linha elástica faz com o eixo da viga, e tendo em conta que, por hipótese, esse ângulo é muito pequeno, pode escrever-se:

$$\frac{dy}{dx} = \text{tg}(\theta) \cong \theta(x)$$

de tal forma que a equação (7.4) pode assumir a forma alternativa seguinte:

$$\theta(x) = \frac{1}{EI} \int M(x)dx + C_1$$

Por outro lado, uma segunda integração da equação (7.4) permite obter a deformada do eixo da viga:

$$y(x) = \frac{1}{EI} \int dx \int M(x)dx + C_1x + C_2$$

onde C_2 é uma segunda constante de integração. As duas constantes de integração C_1 e C_2 deverão ser determinadas a partir das condições fronteira do problema, em particular das condições impostas nos apoios da estrutura.

Em resumo, a metodologia geral para a resolução do problema da deflexão de uma viga pelo método clássico de integração da elástica consiste na implementação duma sequência apropriada, que se traduz nos seguintes passos:

1)-Começar por escrever a equação (ou as equações...) para os momentos flectores ao longo do eixo da viga (diagrama dos momentos flectores). Em alguns casos, uma expressão de momento flector simples é válida para todo o comprimento da viga. Noutros casos, o perfil dos momentos flectores sofre modificações abruptas em um ou mais pontos ao longo do eixo da viga, sendo então necessário escrever expressões separadas para cada uma das regiões da viga entre os pontos em que as mudanças ocorrem.

2)-Para cada uma dessas regiões substitui-se a expressão para o momento $M(x)$ na equação diferencial (7.3) e integra-se uma vez para obter a inclinação $\theta = y' = dy/dx$. Cada uma destas integrações produz uma constante de integração.

3)-Separadamente em cada uma das regiões, integra-se a respectiva equação da inclinação, para obter a deflexão ($\delta = y$) correspondente. Novamente aqui, cada uma destas integrações produz uma nova constante de integração.

4)-Há assim duas constantes de integração para cada região da viga a que correspondam expressões diferentes para o momento flector. Estas constantes de integração são avaliadas a partir de condições conhecidas relativas às inclinações e às deflexões:

- (i)- *Condições fronteira nos apoios*: Cada uma das condições de fronteira fornece uma equação algébrica, que pode ser usada para avaliar as constantes de integração.
- (ii)- *Condições de continuidade*: Em cada secção de transição entre as diversas regiões, há que respeitar as condições de continuidade, quer em termos de deflexão (sempre), quer em termos de rotação (com excepção das rótulas, em que pode haver descontinuidade das rotações).
- (iii)- *Condições de simetria*: Em determinadas situações particulares, eventuais condições de simetria podem ser consideradas, em alternativa a uma ou outra das condições (i) e (ii). É o caso, por exemplo, duma viga simplesmente apoiada que suporta uma carga uniforme ao longo de todo o seu comprimento. Neste caso, sabe-se antecipadamente que a inclinação da elástica é nula no ponto médio.

7.1.3. Método da Viga Conjugada

No parágrafo §5.1.5 ficou estabelecido que entre o *esforço transversal* (V) e o *momento flector* (M) há a seguinte relação diferencial:

$$\frac{dM}{dx} + V = 0 \quad (7.4)$$

Existe uma relação semelhante entre o *diagrama de cargas* $q(x)$ e o *esforço transverso* (V). Com efeito, considere-se um elemento de viga de comprimento dx e estabeleça-se a condição de equilíbrio segundo a direcção do eixo dos yy . De acordo com o esquema da Fig.7.2, tem-se:

$$V + dV - V + q dx = 0 \quad (7.5)$$

Donde:

$$dV = -q dx \quad (7.6)$$

ou seja:

$$\frac{dV}{dx} + q(x) = 0 \quad (7.7)$$

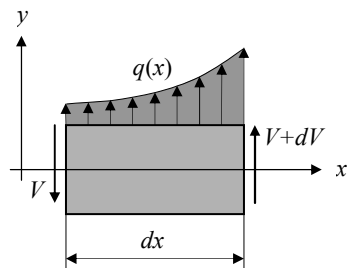


Fig.7.2-Viga com carregamento contínuo $q(x)$

Eliminando V entre as equações (7.5) e (7.7), obtém-se:

$$\frac{d^2M}{dx^2} - q = 0 \quad (7.8)$$

Considere-se agora uma viga sujeita a forças concentradas (P_i) e uma carga distribuída $q(x)$, Fig.7.3(a). Seja $M(x)$ o respectivo diagrama de momentos flectores, conforme representado na Fig.7.3(b).

Imagine-se ainda uma segunda viga, Fig.7.3(c), de igual comprimento e sujeita a um diagrama de carga $q_c(x) = M(x)/EI_z$. Esta segunda viga é designada por *viga conjugada* (ou *fictícia*) e todas as grandezas que lhe dizem respeito serão assinaladas com o índice "c". O momento flector M_c da viga conjugada e o esforço transversal satisfazem as seguintes equações:

$$\frac{d^2M_c}{dx^2} = q_c(x) \quad (7.9)$$

$$\frac{\partial M_c}{\partial x} = -V_c \quad (7.10)$$

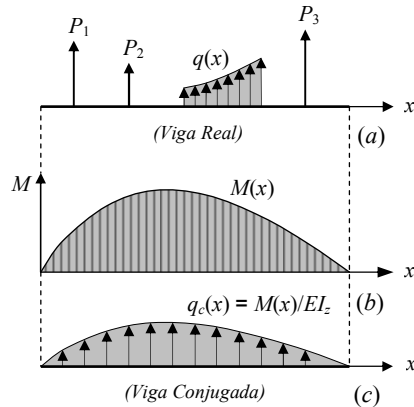


Fig.7.3 - Carregamento da viga real e da viga conjugada

Comparando (7.9) com a equação da elástica (7.3), e tendo o cuidado de ajustar as condições fronteira, inicialmente em y , aos momentos flectores M , pode concluir-se que:

(a)-A flecha y de uma secção arbitrária da viga *real* é igual ao momento flector M_c para a mesma secção da viga *conjugada* ($y = M_c$);

(b)-A rotação $\theta = dy/dx$ de uma secção da viga *real* é igual ao simétrico do esforço cortante V_c para a mesma secção da viga *conjugada* ($\theta = dy/dx = -V_c$).

A correspondência entre as constantes de integração das equações (7.3) e (7.9) consegue-se impondo as seguintes condições nos apoios (e secções intermédias) da viga conjugada:

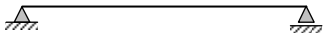

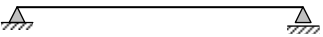

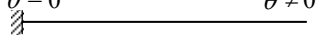

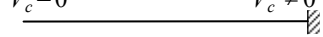

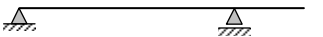

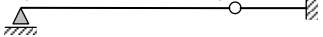





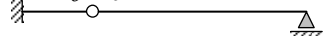

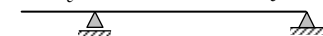

(i)-Se no ponto considerado a flecha y da viga *real* é nula, então o momento flector da viga *conjugada* deve ser nulo;

(ii)-Se o ângulo de rotação θ da viga *real* é nulo, então o esforço transversal V_c da viga *conjugada* deve ser nulo;

(iii)-Se $y \neq 0$ e $\theta \neq 0$ na viga *real*, então também $M_c \neq 0$ e $V_c \neq 0$ na viga *conjugada*.

Na Tabela 7.1 é apresentada uma compilação das condições fronteira possíveis para a viga *real* e as correspondentes condições fronteira para a viga *conjugada*.

Tabela 7.1 - Correspondência das condições fronteira

VIGA REAL		VIGA CONJUGADA	
Apoio Simples	$y = 0$ $\theta \neq 0$	$M_c = 0$ $V_c \neq 0$	Apoio Simples
Encastramento	$y = 0$ $\theta = 0$	$M_c \neq 0$ $V_c \neq 0$	Extremo Livre
Extremo Livre	$y \neq 0$ $\theta \neq 0$	$M_c \neq 0$ $V_c = 0$	Encastramento
Apoio Intermédio	$y = 0$ $\theta \neq 0$	$M_c = 0$ $V_c \neq 0$	Rótula Intermédia
Rótula Intermédia	$y \neq 0$ $\theta \neq 0$	$M_c \neq 0$ $V_c = 0$	Apoio Intermédio
$y = 0$ $\theta \neq 0$ 	$y = 0$ $\theta \neq 0$ 	$M_c = 0$ $V_c \neq 0$ 	$M_c = 0$ $V_c \neq 0$ 
$y = 0$ $\theta = 0$ 	$y \neq 0$ $\theta \neq 0$ 	$M_c \neq 0$ $V_c = 0$ 	$M_c \neq 0$ $V_c \neq 0$ 
$y = 0$ $\theta \neq 0$ 	$y = 0$ $\theta \neq 0$ 	$M_c = 0$ $V_c \neq 0$ 	$M_c = 0$ $V_c \neq 0$ 
$y = 0$ $\theta \neq 0$ 	$y \neq 0$ $\theta \neq 0$ 	$M_c = 0$ $V_c \neq 0$ 	$M_c \neq 0$ $V_c \neq 0$ 
$y \neq 0$ $\theta \neq 0$ 	$y = 0$ $\theta \neq 0$ 	$M_c \neq 0$ $V_c \neq 0$ 	$M_c = 0$ $V_c \neq 0$ 

Em resumo, para a determinação da flecha (y) e da rotação ($\theta = dy/dx$) numa secção qualquer pelo método da viga conjugada deve proceder-se do seguinte modo:

- a)-Representar o diagrama de carga da viga real.
- b)-Construir o diagrama de momentos $M(x)/EI_z$.

c)-Considerar a viga conjugada com o mesmo comprimento da viga real e tomar os momentos $M(x)/EI_z$ como sendo a *carga conjugada*, q_c .

d)-Representar os apoios da viga conjugada, de acordo com o esquema apropriado da tabela 7.1, e calcular para a viga conjugada:

e)-As reacções nos apoios.

f)-O esforço cortante V_c para a secção considerada.

g)-O momento flector M_c na mesma secção.

h)-Por último, a flecha y e a rotação θ para uma secção qualquer da viga real serão dados por:

$$y = M_c \quad \text{e} \quad \theta = -V_c \quad (7.11)$$

O método da *viga conjugada* permite assim o cálculo de deslocamentos sem necessidade de determinar as constantes de integração requeridas pelo método da integração da equação diferencial da elástica. O método é aplicável a vigas de apoios múltiplos, como se indica na Fig.7.4.

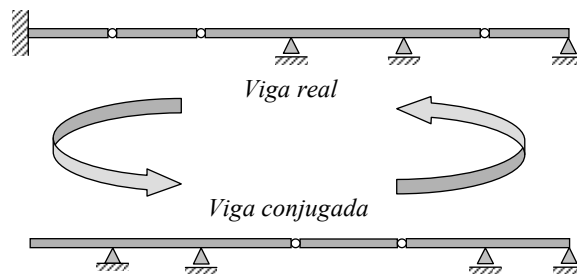


Fig.7.4 - Reciprocidade das condições de fronteira

7.1.4. Aplicação dos Teoremas Energéticos

De acordo com o que ficou estabelecido no parágrafo §3.1.9, para o caso geral, a energia elástica de deformação num corpo elástico é dada pela expressão seguinte:

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V (\sigma_{xx}\epsilon_{xx} + \sigma_{yy}\epsilon_{yy} + \sigma_{zz}\epsilon_{zz} + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{xz}\gamma_{xz}) dV$$

No caso particular duma viga de comprimento L , em flexão não uniforme, isto é, em que há também a considerar o esforço transversal, a energia elástica de deformação é dada pela expressão seguinte:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L dx \iint_A \left[\frac{\sigma_{xx}^2}{E} + \frac{\tau_{xy}^2}{G} \right] dA = \frac{1}{2} \int_0^L dx \iint_A \left[\frac{1}{E} \left(\frac{My}{I} \right)^2 + \frac{1}{G} \left(\frac{VS}{bI} \right)^2 \right] dA$$

ou seja:

$$U = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx + \frac{1}{2G} \int_0^L \left(\frac{V}{I} \right)^2 dx \iint_A \left(\frac{S}{b} \right)^2 dA \quad (7.12)$$

A expressão anterior para a energia de deformação contém duas parcelas distintas, de tal modo que se pode escrever:

$$U = U_\sigma + U_\tau$$

onde $U_\sigma = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx$ representa a contribuição do momento flector, e

$U_\tau = \frac{1}{2G} \int_0^L \left(\frac{V}{I} \right)^2 dx \iint_A \left(\frac{S}{b} \right)^2 dA$ representa a parcela associada ao esforço

transverso. Contudo, na maior parte das aplicações práticas (ver a resolução do problema 7.2.1, mais à frente...), a ordem de grandeza da parcela U_τ é muito menor do que a da parcela U_σ , pelo que é habitual usar-se a seguinte expressão simplificada para a energia elástica de deformação numa viga em flexão:

$$U = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx \quad (7.13)$$

A aplicação do *Teorema de Castigliano* é muito conveniente na determinação de deslocamentos em corpos elásticos sujeitos a esforços axiais, torção, flexão ou qualquer combinação destes. Este teorema estabelece que a derivada parcial da expressão da energia elástica total

de deformação em relação a uma qualquer solicitação externa generalizada (força ou momento...) aplicada sobre um corpo elástico é numericamente igual ao deslocamento generalizado (deslocamento linear ou rotação) do ponto de aplicação da força ou secção onde é aplicado o momento.

De acordo com o *Teorema de Castigliano*, o deslocamento no ponto de aplicação da carga generalizada P_n é dado pela expressão seguinte:

$$\delta_n = \frac{\partial U}{\partial P_n} = \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial P_n} \quad (7.14)$$

onde o deslocamento associado à carga generalizada P_n é um deslocamento linear, se se trata de uma força ordinária, ou é uma rotação, se se trata de um momento de flexão ou de torção.

No caso particular de haver apenas uma única força (ou momento) a actuar sobre a viga, pode aplicar-se o *Teorema de Clapeyron*, como foi visto no parágrafo §3.1.12 do capítulo III, pode traduzir-se por uma das equação seguintes:

$$\delta = \frac{2U}{P} \quad (7.13)$$

ou

$$\theta = \frac{2U}{M} \quad (7.14)$$

conforme se trate de uma carga aplicada sob a forma duma força ordinária ou dum momento, respectivamente

Quando se quiser avaliar um *deslocamento generalizado* num ponto particular (deslocamento linear ou rotação), onde não haja qualquer força ou momento aí aplicados, então é necessário introduzir uma força ou um momento *fictícios*, aplicados no ponto em questão e, tratando essa força ou momento como uma carga *real*, aplica-se o *Teorema de Castigliano*. No final do problema, na expressão que for obtida para o deslocamento (ou rotação), essa força ou momento *fictícios* são iguados a zero.

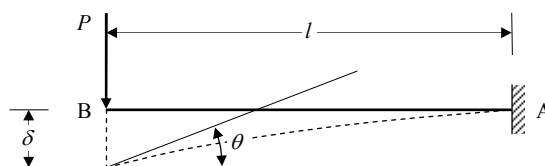
7.2. PROBLEMAS RESOLVIDOS**PROBLEMA – 7.2.1.**

Considere uma viga (E, I) de comprimento l , encastrada numa extremidade e sujeita a uma carga vertical P na extremidade livre, conforme ilustrado na figura ao lado. Calcule a flecha δ_B e a rotação θ_B na extremidade livre da viga:

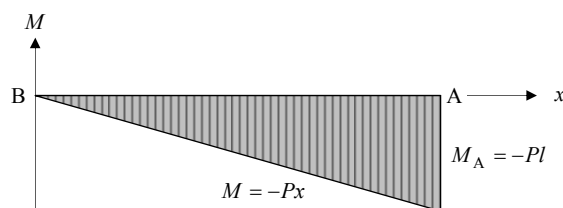
- a)- Usando o método de integração da elástica.
 b)- Usando o método da viga conjugada.
 c)- Usando o teorema de Castigliano.

**RESOLUÇÃO:**

A deformação da viga processa-se de acordo com o esquema apresentado na figura a seguir:

**a)-Método da Integração da Elástica**

O diagrama dos momentos flectores é linear ao longo de todo o comprimento da viga, conforme o esboço que se apresenta na figura a seguir:



Para uma posição genérica x ao longo do eixo da viga, o momento flector é definido pela expressão seguinte:

$$M(x) = -Px$$

Donde, substituindo na equação diferencial da elástica:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

obtém-se:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{P}{EI}x$$

E agora, efectuando duas integrações sucessivas, resulta:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P}{2EI}x^2 + C_1 \quad (a)$$

$$y = -\frac{P}{6EI}x^3 + C_1x + C_2 \quad (b)$$

onde C_1 e C_2 são as duas constantes de integração, que podem ser calculadas a partir das condições fronteira na secção de encastramento A, isto é:

$$\text{para } x = l, \text{ tem-se: } y = 0 \text{ e } \frac{dy}{dx} = 0$$

ou seja, substituindo directamente em (a):

$$C_1 = \frac{Pl^2}{2EI}$$

Depois, por substituição em (b), obtém-se:

$$-\frac{Pl^3}{6EI} + \frac{Pl^3}{2EI} + C_2 = 0$$

donde:

$$C_2 = -\frac{Pl^3}{3EI}$$

Substituindo agora C_1 e C_2 em (a) e (b), obtém-se:

$$\theta = \frac{dy}{dx} = -\frac{P}{2EI}(x^2 - l^2)$$

$$y = -\frac{P}{6EI}(x^3 - 3xl^2 + 2l^3)$$

Na extremidade livre B ($x = 0$) tem-se:

$$\theta_B = \frac{Pl^2}{2EI}$$

$$\delta_B = y_B = -\frac{Pl^3}{3EI}$$

b)-Método da Viga Conjugada

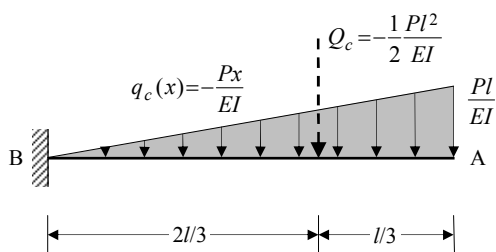
Considera-se a solitação da viga conjugada por uma distribuição de carga proporcional ao momento flector na viga real:

$$q_c(x) = \frac{M(x)}{EI}$$

isto é:

$$q_c(x) = -\frac{Px}{EI}$$

e, alterando os apoios em conformidade:



onde a força Q_c é a resultante da distribuição contínua $q_c(x)$ indicada.

O momento flector conjugado M_c em B é:

$$(M_c)_B = -\frac{2l}{3} \frac{Pl^2}{2EI} = -\frac{Pl^3}{3EI}$$

donde:

$$\delta_B = (M_c)_B = -\frac{Pl^3}{3EI}$$

e o esforço transversal conjugado V_c em B é:

$$(V_c)_B = Q_c = -\frac{Pl^2}{2EI}$$

donde:

$$\theta_B = -(V_c)_B = \frac{Pl^2}{2EI}$$

c)-Aplicação do Teorema de Castigliano

A expressão simplificada para a energia total de deformação na viga, considerando apenas os efeitos do momento flector, é a seguinte:

$$U = \int_0^l \frac{M^2}{2EI} dx = \frac{1}{2EI} \int_0^l (-Px)^2 dx$$

donde:

$$U = \frac{Pl^3}{6EI}$$

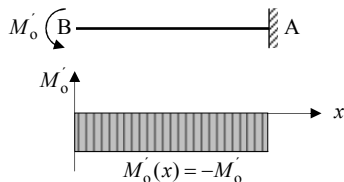
De acordo com o *Teorema de Castigliano*, o deslocamento vertical do ponto de aplicação da força P (ponto A), medido positivamente no sentido da força, é dado pela derivada de U em ordem a P :

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{Pl^3}{3EI}$$

Quando avaliado no referencial (x, y) , o deslocamento vertical do ponto B tem o valor simétrico de δ , isto é:

$$\delta_B = -\delta = -\frac{Pl^3}{3EI}$$

Para calcular a rotação da secção B, imagina-se um momento fictício M'_0 aplicado no sentido duma rotação contrária ao movimento dos ponteiros do relógio (ver figura...).



A expressão do momento flector para este tipo de carregamento fictício é constante ao longo de todo o comprimento da barra, isto é:

$$M'_0(x) = -M'_0$$

A distribuição de momentos flectores M' , correspondente à sobreposição dos dois carregamentos (real e fictício...), é dada pela soma dos momentos associados, isto é:

$$M'(x) = M(x) - M'_0(x) = -Px - M'_0$$

Donde a energia elástica de deformação associada:

$$U'_0 = \int_0^l \frac{M'^2}{2EI} dx = \frac{1}{2EI} \int_0^l (P^2x^2 + 2PM'_0x + M'^2_0) dx$$

ou seja:

$$U'_0 = \frac{1}{2EI} \left(\frac{P^2 l^3}{3} + PM'_0 l^2 + M'^2_0 l \right)$$

Derivando, agora, em ordem à carga fictícia M'_0 , obtém-se:

$$\frac{\partial U'_0}{\partial M'_0} = \frac{Pl^2 + 2M'_0 l}{2EI}$$

Finalmente, o valor da rotação em B obtém-se fazendo $M'_0 = 0$, isto é:

$$\theta_B = \frac{Pl^2}{2EI}$$

Nota Importante:

Uma análise mais rigorosa do problema deveria incluir a parcela da energia de deformação associada às tensões de corte. Para o caso duma secção rectangular (bh), por exemplo, ter-se-ia:

$$U_\tau = \frac{1}{2G} \int_0^l dx \int_{-h/2}^{+h/2} \left\{ \frac{Pb \left(\frac{h}{2} - y \right) \left[\frac{h}{2} - \left(\frac{h}{2} - y \right) / 2 \right]}{bI} \right\}^2 bdy$$

ou seja:

$$U_\tau = \frac{P^2 b}{128GI^2} \int_0^l dx \int_{-h/2}^{+h/2} (h^4 - 8h^2 y^2 + 16y^4) dy = \frac{3P^2 l}{10Gbh}$$

Comparando com a parcela correspondente à energia associada ao momento flector:

$$U_\sigma = \frac{P^2 l^3}{6EI} = \frac{2P^2 l^3}{Eb h^3}$$

obtém-se:

$$\frac{U_\tau}{U_\sigma} = \frac{3}{20} \left(\frac{E}{G} \right) \left(\frac{h}{l} \right)^2 = \frac{3(1+\nu)}{40} \left(\frac{h}{l} \right)^2$$

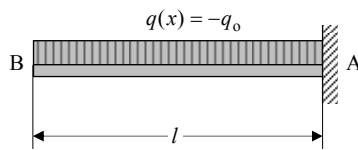
No caso duma viga esbelta (tipicamente, $h/l < 1/10$), e no caso limite de $\nu = 0.5$, obtém-se:

$$\frac{U_\tau}{U_\sigma} < 0,0011$$

isto é, a parcela da energia associada à deformação de corte é inferior a 0,1% da parcela correspondente ao momento flector.

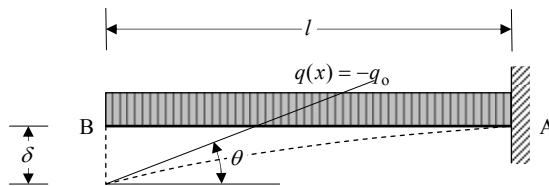
PROBLEMA – 7.2.2.

Reconsidere o problema anterior, agora supondo que a viga está uniformemente carregada ao longo de todo o comprimento, com uma distribuição de carga intensidade q_0 , no sentido de cima para baixo (em que q_0 é uma quantidade positiva):



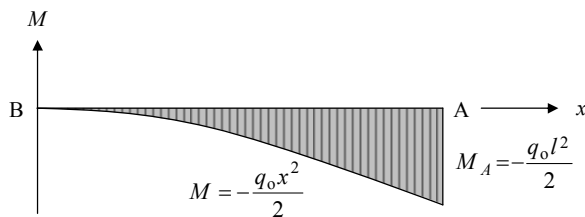
RESOLUÇÃO:

A deformação da viga processa-se de acordo com o esquema esboçado na figura a seguir:



a) - Método de Integração da Elástica

Neste caso, o diagrama dos momentos flectores é o seguinte:



Para uma posição genérica x , ao longo do eixo da viga, a expressão do momento flector é:

$$M(x) = -\frac{q_0 x^2}{2}$$

Substituindo na equação geral da elástica:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

obtém-se:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{q_0 x^2}{2EI}$$

Donde, integrando sucessivamente:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{q_0}{6EI} x^3 + C_1 \quad (a)$$

$$y = -\frac{q_0}{24EI} x^4 + C_1 x + C_2 \quad (b)$$

Impondo agora as condições fronteira correspondentes ao encastramento em A, isto é:

$$\text{Para } x = l, \quad y = 0 \quad \text{e} \quad \frac{dy}{dx} = 0$$

Obtém-se, directamente por substituição em (a):

$$C_1 = \frac{q_0 l^3}{6EI}$$

Depois, por substituição em (b):

$$0 = -\frac{q_0 l^4}{24EI} + \frac{q_0 l^4}{6EI} + C_2$$

Donde:

$$C_2 = -\frac{q_0 l^4}{8EI}$$

Então, de (a) e (b) resulta, finalmente:

$$\theta = \frac{dy}{dx} = -\frac{q_0}{6EI} (x^3 - l^3)$$

$$y = -\frac{q_0}{24EI} (x^4 - 4l^3 x + 3l^4)$$

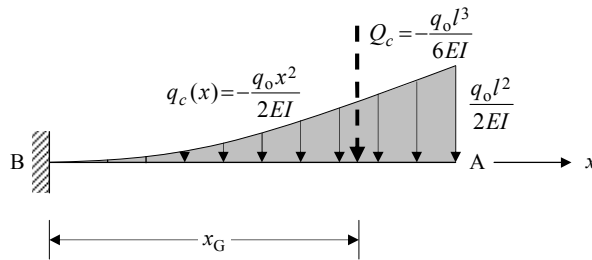
Donde se obtém, para a secção B:

$$\theta_B = \frac{q_0 l^3}{6EI}$$

$$\delta_B = y_B = -\frac{q_0 l^4}{8EI}$$

b)- Método da Viga Conjugada

Considera-se a solitação da viga conjugada por uma distribuição de carga proporcional ao momento flector na viga real:



A força resultante Q_c equivalente à distribuição contínua q_c é numericamente igual à área Ω do diagrama acima, isto é:

$$\Omega = \int_0^l q_c dx = \int_0^l -\frac{q_0 x^2}{2EI} dx = -\frac{q_0 l^3}{6EI}$$

Donde:

$$Q_c = -\frac{q_0 l^3}{6EI}$$

A posição x_G do centro de gravidade da área Ω obtém-se a partir da equação:

$$\Omega x_G = \int_0^l x q_c dx$$

Donde:

$$x_G = \frac{\int_0^l -\frac{q_0 x^2}{2EI} x dx}{\Omega} = \frac{3l}{4}$$

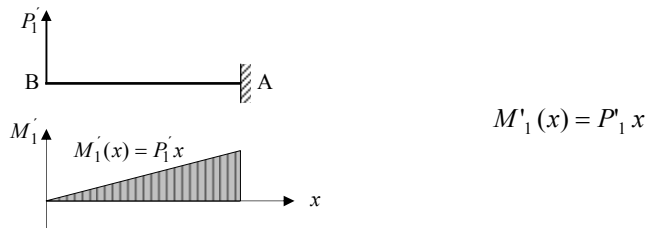
A rotação θ_B e o deslocamento δ_B podem calcular-se agora directamente:

$$\theta_B = -(V_c)_B = -Q_c = \frac{q_0 l^3}{6EI}$$

$$\delta_B = (M_c)_B = -\frac{3l}{4} \frac{q_0 l^3}{6EI} = -\frac{q_0 l^4}{8EI}$$

c)-Aplicação do Teorema de Castigliano

Para obter o deslocamento vertical no ponto B, segue-se a metodologia habitual: Ao carregamento real da viga, adiciona-se uma carga virtual P'_1 aplicada no ponto P (no sentido de baixo para cima), calcula-se a energia elástica associada a esse carregamento combinado, deriva-se a expressão resultante em relação a P'_1 e, finalmente, calcula-se o valor dessa expressão para $P'_1 = 0$.



Quando se sobrepõe este carregamento fictício P'_1 ao carregamento real, a distribuição global dos momentos flectores é dada pela soma das distribuições associadas a cada um desses carregamentos, isto é:

$$M'(x) = M(x) + M'_1(x) = -\frac{q_0 x^2}{2} + P'_1 x$$

Donde a energia elástica de deformação associada:

$$U'_1 = \int_0^l \frac{M'^2}{2EI} dx = \frac{1}{2EI} \int_0^l \left(\frac{q_0^2 x^4}{4} - q_0 P'_1 x^3 + P_1'^2 x^2 \right) dx$$

ou seja:

$$U'_1 = \frac{1}{2EI} \left(\frac{q_0^2 l^5}{20} - \frac{q_0 P'_1 l^4}{4} + \frac{P_1'^2 l^3}{3} \right)$$

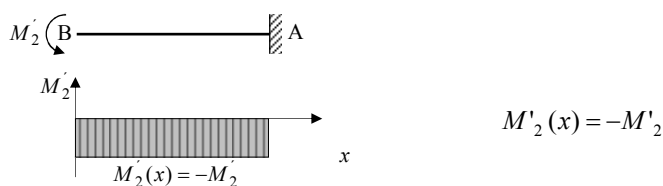
Agora, derivando em ordem à carga fictícia P'_1 , obtém-se:

$$\frac{\partial U'_1}{\partial P'_1} = \frac{1}{2EI} \left(-\frac{q_0 l^4}{4} + \frac{2P'_1 l^3}{3} \right)$$

Finalmente, o valor do deslocamento em A obtém-se fazendo $P'_1 = 0$:

$$\delta_B = -\frac{q_0 l^4}{8EI}$$

Para calcular a rotação da secção B, tal como no problema anterior, imagina-se um momento fictício M'_2 aplicado nessa secção, no sentido duma rotação positiva, isto é contrária à do movimento dos ponteiros do relógio (ver figura). A expressão do momento flector para este tipo de carregamento fictício é constante ao longo de todo o comprimento a barra, isto é:



A distribuição de momentos flectores, M' , correspondente à sobreposição dos dois carregamentos (real e fictício) é dada pela soma dos momentos associados, isto é:

$$M'(x) = M(x) - M'_2(x) = -\frac{q_0 x^2}{2} - M'_2$$

Donde a energia elástica de deformação associada:

$$U'_2 = \int_0^l \frac{M'^2}{2EI} dx = \frac{1}{2EI} \int_0^l \left(\frac{q_0^2 x^4}{4} + q_0 M'_2 x^2 + M'^2_2 \right) dx$$

ou seja:

$$U'_2 = \frac{1}{2EI} \left(\frac{q_0^2 l^5}{20} + \frac{q_0 M'^2_2 l^3}{3} + M'^2_2 l \right)$$

Agora, derivando em ordem à carga fictícia M'_2 , obtém-se:

$$\frac{\partial U'_2}{\partial M'_2} = \frac{1}{2EI} \left(\frac{q_0 l^3}{3} + 2M'_2 l \right)$$

Finalmente, o valor da rotação em B obtém-se fazendo $M'_2 = 0$, isto é:

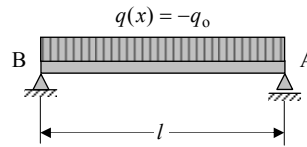
$$\theta_B = \frac{q_0 l^3}{6EI}$$

PROBLEMA – 7.2.3.

Considere uma viga (E, I) de comprimento l , simplesmente apoiada nas extremidades e sujeita a uma carga q_0 uniforme ao longo de todo o seu comprimento, no sentido de cima para baixo (em que q_0 é uma quantidade positiva)

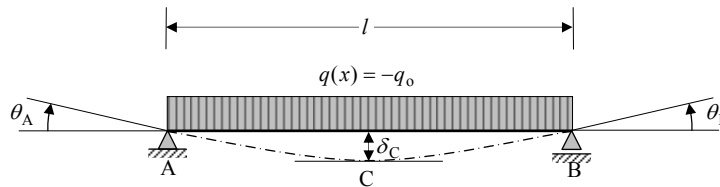
Calcule a flecha δ a meio vão (C) e as rotações das secções extremas (A) e (B):

- a)- Utilizando o método de integração da elástica.
- b)- Utilizando o método da viga conjugada.
- c)- Recorrendo à aplicação do Teorema de Castigliano.



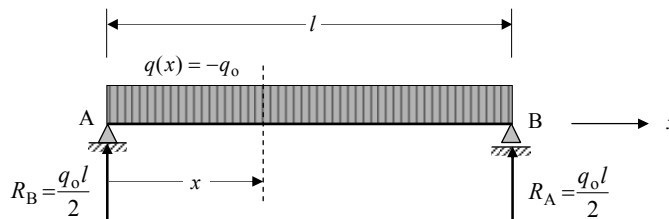
RESOLUÇÃO:

A deformação da viga processa-se de acordo com o esquema esboçado na figura a seguir:



a)- Método de Integração da Elástica

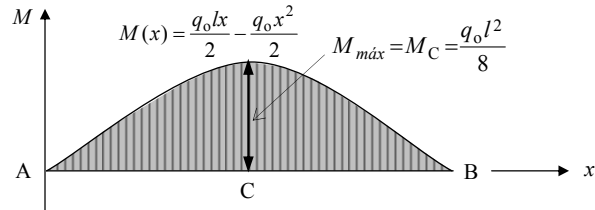
Calcule-se, em primeiro lugar, as reacções nos apoios A e B. É óbvio que são iguais a metade da força resultante equivalente à distribuição contínua uniforme q_0 , isto é:



Para uma secção genérica à distância x da extremidade A, o correspondente momento flector é:

$$M(x) = \frac{q_0 l x}{2} - \frac{q_0 x^2}{2}$$

Donde o diagrama dos momentos flectores:



Substituindo a expressão para $M(x)$ na equação geral da elástica:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI}$$

obtém-se, neste caso:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{q_0 l x}{2EI} - \frac{q_0 x^2}{2EI}$$

ou seja:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{q_0}{2EI} (x^2 - lx)$$

Donde, por integrações sucessivas:

$$\theta = \frac{dy}{dx} = -\frac{q_0}{2EI} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{lx^2}{2} \right) + C_1 \quad (a)$$

$$y = -\frac{q_0}{2EI} \left(\frac{x^4}{12} - \frac{lx^3}{6} \right) + C_1 x + C_2 \quad (b)$$

onde C_1 e C_2 são duas constantes de integração, que podem ser calculadas a partir das condições fronteira em A e B, isto é:

$$(i) - \text{Para } x = 0 \text{ (secção A) é } y = 0$$

donde:

$$C_2 = 0$$

e

$$(ii) - \text{Para } x = l \text{ (secção B) é também } y = 0$$

donde:

$$C_1 = -\frac{q_0 l^3}{24EI}$$

Substituindo agora em (a) e (b) obtém-se:

$$\theta = \frac{dy}{dx} = -\frac{q_0}{24EI} (4x^3 - 6lx^2 + l^3)$$

$$y = -\frac{q_0}{24EI} (x^4 - 2lx^3 + l^3x)$$

Donde:

$$\theta_A = -\frac{q_0 l^3}{24EI} ; \quad \theta_B = +\frac{q_0 l^3}{24EI}$$

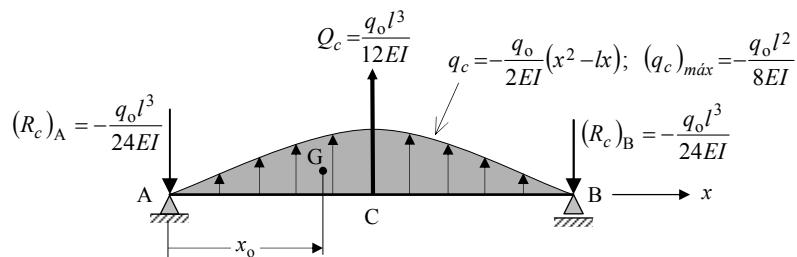
$$\delta_C = (y)_{x=l/2} = -\frac{5q_0 l^4}{384EI}$$

b)- Método da Viga Conjugada

Considera-se a solicitação da viga conjugada por uma distribuição de carga proporcional ao momento flector na viga real:

$$q_c(x) = \frac{M(x)}{EI}$$

Nestas condições, tem-se a situação representada na figura a seguir (reparar que as extremidades da viga conjugada mantêm-se simplesmente apoiadas...):



A resultante Q_c equivalente à distribuição contínua $q_c(x)$ é igual à área do diagrama supra, isto é:

$$Q_c = \Omega = \frac{2}{3} l \frac{q_0 l^2}{8EI}$$

(Nota: A área duma parábola é igual a 2/3 da área do rectângulo circunscrito!...)

Donde, as reacções em A e B na viga conjugada:

$$(R_c)_A = (R_c)_B = -\frac{Q_c}{2} = -\frac{q_0 l^3}{24EI}$$

Para obter o valor da flecha a meio vão ($x = l/2$), há apenas que calcular o momento flector conjugado nessa secção. Para tal terá de calcular-se a posição do centro de gravidade G da metade esquerda da área parabólica na figura anterior:

$$x_0 = \frac{\int_0^{l/2} x q_c dx}{\Omega/2} = \frac{5l}{16}$$

Donde:

$$\delta_C = (M_c)_C = -\frac{q_0 l^3}{24EI} \frac{l}{2} + \frac{q_0 l^3}{24EI} \left(\frac{l}{2} - x_0 \right)$$

isto é:

$$\delta_C = (y)_{x=l/2} = -\frac{5q_0 l^4}{384EI}$$

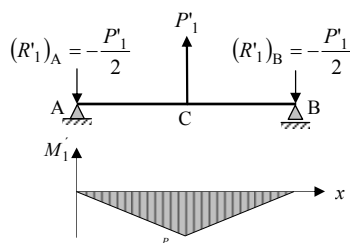
Quanto às rotações em A e B, tem-se:

$$\theta_A = -(V_c)_A = -(-R_c)_A = -\frac{q_0 l^3}{24EI}$$

$$\theta_B = -(V_c)_B = -(+R_c)_B = +\frac{q_0 l^3}{24EI}$$

c) - Aplicação do Teorema de Castigliano

Para obter o deslocamento vertical no ponto C, segue-se a metodologia habitual: Ao carregamento real da viga, adiciona-se uma carga virtual P'_1 aplicada no ponto C (no sentido ascendente), calcula-se a energia elástica associada a esse carregamento combinado (real mais fictício), deriva-se a expressão resultante em relação a P'_1 e, finalmente, calcula-se o valor dessa expressão para $P'_1 = 0$.



Considere-se, então o carregamento virtual P'_1 na secção central da viga.

A distribuição dos momentos flectores é triangular e simétrica em relação à secção média:

$$M'_1(x) = -\frac{P'_1}{2}x \quad (0 \leq x \leq \frac{l}{2})$$

$$M'_1(x) = -\frac{P'_1}{2}(l-x) \quad (\frac{l}{2} \leq x \leq l)$$

Quando se sobrepõe este carregamento fictício P'_1 ao carregamento real, a distribuição global dos momentos flectores é dada pela soma das distribuições associadas a cada um desses carregamentos, isto é:

$$\begin{aligned} M'(x) = M(x) + M'_1(x) &= \left(\frac{q_0 l x}{2} - \frac{q_0 x^2}{2} \right) - \frac{P'_1 x}{2} \\ &= \frac{(q_0 l - P'_1)x}{2} - \frac{q_0 x^2}{2}, \quad \text{para } 0 \leq x \leq l/2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M'(x) = M(x) + M'_1(x) &= \left(\frac{q_0 l x}{2} - \frac{q_0 x^2}{2} \right) + \frac{P'_1 x}{2} - \frac{P'_1 l}{2} \\ &= \frac{(q_0 l + P'_1)x}{2} - \frac{q_0 x^2}{2} - \frac{P'_1 l}{2}, \quad \text{para } l/2 \leq x \leq l \end{aligned}$$

Neste caso particular, porque existe simetria da sollicitação combinada relativamente à secção média, pode escrever-se:

$$U'_1 = \int_0^l \frac{M'^2}{2EI} dx = 2 \int_0^{l/2} \frac{M'^2}{2EI} dx$$

Donde, substituindo a expressão a expressão supra do momento flector $M'(x)$, para $0 \leq x \leq l/2$:

$$\begin{aligned} U'_1 &= \frac{1}{4EI} \int_0^{l/2} [(q_0 l - P'_1)x - q_0 x^2]^2 dx \\ &= \frac{1}{4EI} \left(\frac{l^3}{24} P'^2_1 - \frac{5q_0 l^4}{96} P'_1 + \frac{q_0^2 l^5}{60} \right) \end{aligned}$$

Agora, derivando em ordem à carga fictícia P'_1 , obtém-se:

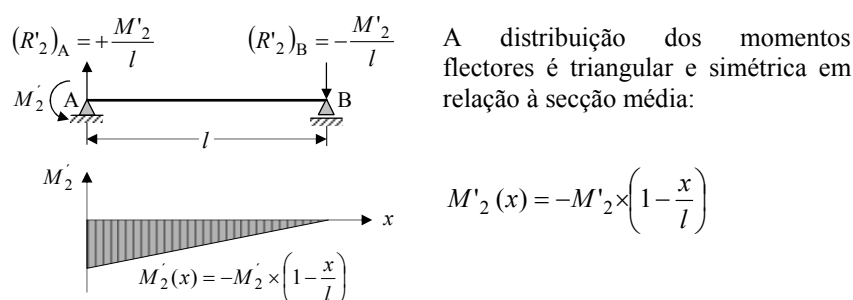
$$\frac{\partial U'_1}{\partial P'_1} = \frac{1}{4EI} \left(\frac{l^3 P'_1}{12} - \frac{5q_0 l^4}{96} \right)$$

Finalmente, o valor do deslocamento em A obtém-se fazendo $P'_1 = 0$:

$$\delta_C = -\frac{5q_0 l^4}{384EI}$$

Para calcular as rotações das secções extremas A e B, imagina-se que aí são aplicadas, em separado, momentos fictícios M'_2 e M'_3 . Atendendo a que há

simetria relativamente à secção central, basta determinar a rotação em numa das secções extremas, que a rotação da outra será igual e de sinal contrário. Tomando a secção A, por exemplo, considere-se um momento fictício M'_2 no sentido directo, conforme ilustrado no esquema representado na figura abaixo.



Quando se sobre põe este carregamento fictício M'_2 ao carregamento real, a distribuição global dos momentos flectores é dada pela soma das distribuições associadas a cada um desses carregamentos, isto é:

$$M'(x) = M(x) + M'_2(x) = \left(\frac{q_0 l x}{2} - \frac{q_0 x^2}{2}\right) - \left(M'_2 - \frac{M'_2 x}{l}\right)$$

Donde a energia elástica de deformação associada:

$$U'_2 = \int_0^l \frac{M'^2}{2EI} dx = \frac{1}{2EI} \int_0^l \left[\frac{q_0^2}{4} x^4 - \left(\frac{q_0^2 l}{2} + \frac{q_0 M'_2}{l} \right) x^3 + \left(\frac{q_0^2 l^2}{4} + 2q_0 M'_2 - \frac{M'^2}{l^2} \right) x^2 - \left(q_0 M'_2 l - \frac{2M'^2_2}{l} \right) x - M'^2_2 \right] dx$$

ou seja:

$$U'_2 = \frac{1}{2EI} \left(\frac{q_0^2 l^5}{120} + \frac{5q_0 M'_2 l^3}{12} - \frac{M'^2_2 l}{3} \right)$$

Agora, derivando em ordem à carga fictícia M'_2 , obtém-se:

$$\frac{\partial U'_2}{\partial M'_2} = \frac{1}{2EI} \left(-\frac{2M'_2 l}{3} - \frac{5q_0 l^3}{12} \right)$$

Finalmente, o valor da rotação em A obtém-se fazendo $M'_2 = 0$, isto é:

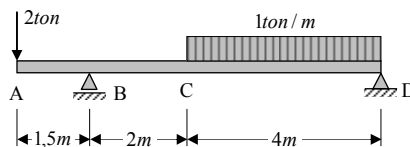
$$\theta_A = -\frac{5q_0 l^3}{24EI}$$

E, por razões de simetria, a rotação da secção B é igual e de sinal contrário à da secção A, isto é:

$$\theta_B = + \frac{5q_0 l^3}{24EI}$$

PROBLEMA – 7.2.4.

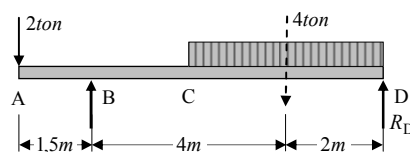
Considere uma viga (E, I) com $7,5m$ de comprimento, simplesmente apoiada em dois pontos e solicitada da forma indicada na figura a seguir:



- a)- Calcule as reacções nos apoios.
- b)- Determine os diagramas dos momentos flectores e dos esforços transversos ao longo do eixo da viga.
- c)- Determine, usando o método de integração da elástica, os valores da *flecha* na extremidade A e da *rotação* no apoio D.
- d)- Reconsidere o cálculo do deslocamento em A, aplicando agora o *Teorema de Castigliano*.

RESOLUÇÃO:

a)-Cálculo das Reacções nos Apoio



A condição de equilíbrio relativa ao vector principal escreve-se:

$$\sum F = 0$$

ou seja:

$$R_B + R_D - 2 - 4 = 0 \tag{a}$$

e a condição de equilíbrio relativa aos momentos (em B, por exemplo):

$$\sum M_B = 0$$

ou seja:

$$2 \times 1,5 - 4 \times 4 + 6 \times R_D = 0 \quad (b)$$

donde, resolvendo as equações (a) e (b):

$$R_B = 3,83 \text{ ton} \quad \text{e} \quad R_D = 2,17 \text{ ton}$$

b)- Diagramas dos Esforços Transversos e dos Momentos

(i)-Entre as secções A e B, isto é para $0 \leq x \leq 1,5m$, tem-se:

$$V_{(i)} = +2 \text{ (ton)} \quad (c)$$

$$M_{(i)} = -2x \text{ (ton} \times m) \quad (d)$$

(ii)-Entre as secções B e C, isto é para $1,5m < x \leq 3,5m$, tem-se:

$$V_{(ii)} = 2 - 3,83$$

isto é:

$$V_{(ii)} = -1,83 \text{ ton} \quad (e)$$

e

$$M_{(ii)} = -2x + 3,83(x - 1,5)$$

isto é:

$$M_{(ii)} = 1,83x - 5,745 \text{ (ton} \times m) \quad (f)$$

(iii)-Entre as secções C e D, isto é para $3,5m < x \leq 7,5m$, tem-se:

$$V_{(iii)} = -1,83 + 1 \times (x - 3,5)$$

isto é:

$$V_{(iii)} = x - 5,33 \text{ (ton)} \quad (g)$$

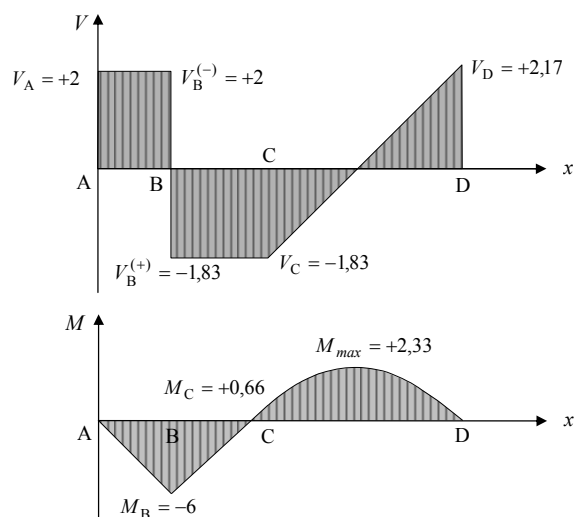
e

$$M_{(iii)} = 1,83x - 5,745 - 1 \times \frac{(x - 3,5)^2}{2}$$

isto é:

$$M_{(iii)} = -0,5x^2 + 5,33x - 11,87 \text{ (ton} \times m) \quad (h)$$

Então, os correspondentes diagramas V e M são conforme representados nas figuras a seguir:



c)-Cálculo da flecha em A e da rotação em D

Utilizando o método da integração da elástica, considere-se a viga dividida em três segmentos distintos (i)-AB, (ii)-BC e (iii)-CD.

Integrando a equação diferencial da elástica no segmento (i)-AB, obtém-se, sucessivamente:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M_{(i)}(x)}{EI} = -\frac{2x}{EI}$$

$$\theta_{(i)} = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{EI}(-x^2 + C_1)$$

$$y_{(i)} = \frac{1}{EI}\left(-\frac{x^3}{3} + C_1x + C_2\right) \tag{a}$$

No segmento (ii)-BC:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M_{(ii)}(x)}{EI} = \frac{1,83x - 5,745}{EI}$$

$$\theta_{(ii)} = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{EI}\left(\frac{1,83}{2}x^2 - 5,745x + C_3\right)$$

$$y_{(ii)} = \frac{1}{EI}\left(\frac{1,83}{6}x^3 - \frac{5,745}{2}x^2 + C_3x + C_4\right)$$

E, finalmente, no segmento (iii)-CD:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{M_{(iii)}(x)}{EI} = \frac{-0,5x^2 + 5,33x - 11,875}{EI} \\ \theta_{(iii)} &= \frac{dy}{dx} = \frac{1}{EI} \left(-\frac{0,5}{3}x^3 + \frac{5,33}{2}x^2 - 11,875x + C_5 \right) \\ y_{(iii)} &= \frac{1}{EI} \left(-\frac{0,5}{12}x^4 + \frac{5,33}{2 \times 3}x^3 - \frac{11,875}{2}x^2 + C_5x + C_6 \right)\end{aligned}\quad (b)$$

Impondo agora as condições fronteira nos apoios e as condições de continuidade entre segmentos adjacentes:

$$(y_{(i)})_B = 0 :$$

$$-\frac{1,5^3}{3} + C_1 \times 1,5 + C_2 = 0$$

$$(y_{(ii)})_B = 0 :$$

$$\frac{1,83}{6} \times 1,5^3 - \frac{5,745}{2} \times 1,5^2 + C_3 \times 1,5 + C_4 = 0$$

$$(\theta_{(i)})_B = (\theta_{(ii)})_B :$$

$$-1,5^2 + C_1 = \frac{1,83}{2} \times 1,5^2 - 5,745 \times 1,5 + C_3$$

$$(y_{(ii)})_C = (y_{(iii)})_C :$$

$$\begin{aligned}\frac{1,83}{6} \times 3,5^3 - \frac{5,745}{2} \times 3,5^2 + C_3 \times 3,5 + C_4 \\ = -\frac{0,5}{12} \times 3,5^4 + \frac{5,33}{2 \times 3} \times 3,5^3 - \frac{11,875}{2} \times 3,5^2 + C_5 \times 3,5 + C_6\end{aligned}$$

$$(\theta_{(ii)})_C = (\theta_{(iii)})_C :$$

$$\begin{aligned}\frac{1,83}{2} \times 3,5^2 - 5,745 \times 3,5 + C_3 \\ = -\frac{0,5}{3} \times 3,5^3 + \frac{5,33}{2} \times 3,5^2 - 11,875 \times 3,5 + C_5\end{aligned}$$

$$(y_{(iii)})_D = 0 :$$

$$-\frac{0,5}{12} \times 7,5^4 + \frac{5,33}{2 \times 3} \times 7,5^3 - \frac{11,875}{2} \times 7,5^2 + C_5 \times 7,5 + C_6 = 0$$

Isto é, obtém-se o seguinte sistema de equações lineares nas constantes C_1 , C_2 , C_3 , C_4 , C_5 e C_6 :

$$\begin{cases} 1,5C_1 + C_2 & = +1,125 \\ + 1,5C_3 + C_4 & = +5,434 \\ C_1 - C_3 & = -4,309 \\ + 3,5C_3 + C_4 - 3,5C_5 - C_6 & = -18,788 \\ C_3 - C_5 & = -7,163 \\ 7,5C_5 + C_6 & = +91,055 \end{cases}$$

cuja solução é:

$$\begin{aligned} C_1 &= +2,055 \\ C_2 &= -1,957 \\ C_3 &= +6,364 \\ C_4 &= -4,111 \\ C_5 &= +13,527 \\ C_6 &= -10,394 \end{aligned}$$

e a deflexão em A e a rotação em D obtêm-se agora por substituição nas expressões (a) e (b) supra:

$$y_A = \frac{1}{EI} \left(-\frac{0^3}{3} + 2,055 \times 0 - 1,957 \right) = -\frac{1,96}{EI}$$

e

$$\theta_D = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{EI} \left(-\frac{0,5}{3} \times 7,5^3 + \frac{5,33}{2} \times 7,5^2 - 11,875 \times 7,5 + 13,527 \right) = \frac{4,058}{EI} \text{ (rad)}$$

c)- Aplicação do Teorema de Castigliano

A energia elástica de deformação na viga é dada pela expressão geral seguinte:

$$U = \int_0^l \frac{M^2}{2EI} dx$$

De acordo com o Teorema de Castigliano, o deslocamento do ponto A, na direcção e sentido da força P aí aplicada, é dado pela derivada da energia elástica de deformação relativamente a P , isto é:

$$\delta_A = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{\partial U}{\partial M} \frac{\partial M}{\partial P} = \frac{1}{EI} \int_0^l M \frac{\partial M}{\partial P} dx$$

Desdobrando para os diferentes segmentos da viga e explicitando em termos da força P , obtém-se:

$$R_B = 1,25P + 1,333 \quad \text{e} \quad R_D = 2,667 - 0,25P$$

donde:

$$\begin{aligned} \delta_A &= \frac{1}{EI} \left\{ \int_0^{1,5} -2x(-x) dx + \int_{1,5}^{3,5} (1,83x - 5,745)(-x + 1,25(x - 1,5)) dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{3,5}^{7,5} (-0,5x^2 + 5,33x - 11,87)(-x + 1,25(x - 1,5)) dx \right\} \\ &= \frac{1}{EI} \left\{ \int_0^{1,5} 2x^2 dx + \int_{1,5}^{3,5} (0,4575x^2 - 4,8675x + 10,772) dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{3,5}^{7,5} (-0,125x^3 + 2,27x^2 - 12,9613x + 22,25625) dx \right\} \end{aligned}$$

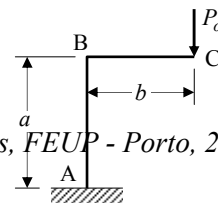
ou seja:

$$\begin{aligned} \delta_A &= \frac{1}{EI} \left[\left[\frac{2x^3}{3} \right]_0^{1,5} + \left[\frac{0,4575x^3}{3} - \frac{4,8675x^2}{2} + 10,772x \right]_{1,5}^{3,5} \right. \\ &\quad \left. + \left[-\frac{0,125x^4}{4} + \frac{2,27x^3}{3} - \frac{12,961x^2}{2} + 22,256x \right]_{3,5}^{7,5} \right] = \frac{1,96}{EI} \end{aligned}$$

O sinal aqui é positivo, uma vez que o *Teorema de Castigliano* dá o deslocamento no sentido da força, que, no caso vertente, é de cima para baixo.

PROBLEMA – 7.2.5.

Considere o pórtico rectangular plano ABC representado na figura a seguir, encastrado na secção A e sujeito a uma força vertical $P = -P_o$ aplicada na extremidade livre C. Os dois elementos AB e BC do pórtico estão rigidamente



J. F. Silva Gomes, FEUP - Porto, 2009

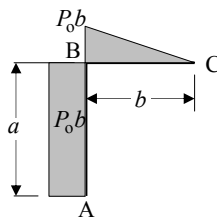
ligados em B e ambos têm a mesma rigidez à flexão (EI). Determine, recorrendo à aplicação do *Teorema de Castigliano*:

- a)- O deslocamento vertical δ_v do ponto C;
- b)- O deslocamento horizontal δ_h do ponto C;
- c)- A rotação θ_C da secção em C.

RESOLUÇÃO:

a)-Cálculo do deslocamento vertical em C

O diagrama dos momentos flectores ao longo dos dois elementos do pórtico obtém-se facilmente e é conforme representado na figura a seguir:



A expressão simplificada para a energia total de deformação na estrutura, considerando apenas os efeitos do momento flector, é a seguinte:

$$U = \int_0^a \frac{M_{AB}^2}{2EI} ds + \int_0^b \frac{M_{BC}^2}{2EI} ds = \frac{P_0^2}{2EI} \left[\int_0^a b^2 ds + \int_0^b (b-s)^2 ds \right]$$

donde:

$$U = \frac{P_0^2 b^2}{6EI} (3a + b)$$

De acordo com o *Teorema de Castigliano*, o deslocamento vertical do ponto de aplicação da força P (ponto C), medido positivamente no sentido da força, é dado pela derivada de U em ordem a P , isto é:

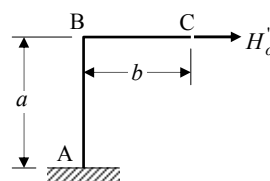
$$\delta = \frac{\partial U}{\partial P_0} = \frac{Pb^2(3a + b)}{3EI}$$

Quando avaliado no referencial habitual (x, y), o deslocamento vertical do ponto C tem o valor simétrico de δ , isto é: v

$$(\delta_v)_C = -\delta = -\frac{Pb^2(3a + b)}{3EI}$$

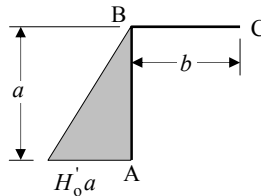
b)-Cálculo do deslocamento horizontal em C

J. F. Silva Gomes, FEUP - Porto, 2009



Para calcular o deslocamento horizontal em C, imagina-se uma força fictícia horizontal H'_o aplicada no sentido positivo do eixo dos xx (da esquerda para a direita), conforme indicado na figura ao lado.

O diagrama dos momentos flectores para este tipo de carregamento fictício é linear ao longo do elemento vertical AB e nulo ao longo de todo o elemento BC, conforme representado na figura a seguir:



A distribuição de momentos flectores M' , correspondente à sobreposição dos dois carregamentos (real e fictício...), é dada pela soma dos momentos associados, isto é:

$$M'_{AB}(s) = -P_0b - H'_o(a - s) \quad \text{e} \quad M'_{BC}(s) = -P_0(b - s)$$

Donde a energia elástica de deformação associada:

$$U'_o = \frac{1}{2EI} \left[\int_0^a M'^2_{AB} ds + \int_0^b M'^2_{BC} ds \right] = \frac{1}{2EI} \left[\int_0^a (P_0b + H'_o(a - s))^2 ds + \int_0^b P_0^2 (b - s)^2 ds \right]$$

ou seja:

$$U'_o = \frac{1}{6EI} (3ab^2P_0^2 + 3a^2bP_0H'_o + a^3H_0'^2 + b^3P_0^2)$$

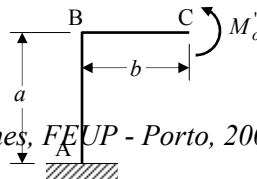
Derivando, agora, em ordem à carga fictícia H'_o , obtém-se:

$$\frac{\partial U'_o}{\partial H'_o} = \frac{Pl^2 + 2M'_o l}{2EI} (3a^2bP_0 + 2a^3H'_o)$$

Finalmente, o valor do deslocamento horizontal em C obtém-se fazendo $H'_o = 0$, isto é:

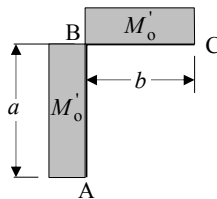
$$(\delta_h)_C = \frac{P_0 a^2 b}{2EI}$$

b)-Cálculo da rotação em C



Para calcular a rotação da secção B, imagina-se um momento fictício M'_0 aplicado no sentido duma rotação contrária ao movimento dos ponteiros do relógio (ver figura ao lado).

O diagrama dos momentos flectores para este tipo de carregamento fictício é constante ao longo de todo o comprimento dos dois elementos do pórtico:



A distribuição de momentos flectores M' , correspondente à sobreposição dos dois carregamentos (real P_0 e fictício M'_0), é dada pela soma dos momentos associados, isto é:

$$M'_{AB}(s) = -P_0 b + M'_0 \quad \text{e} \quad M'_{BC}(s) = -P_0(b-s) + M'_0$$

Donde a energia elástica de deformação associada:

$$U'_0 = \frac{1}{2EI} \left[\int_0^a M'^2_{AB} ds + \int_0^b M'^2_{BC} ds \right] = \frac{1}{2EI} \left[\int_0^a (P_0 b - M'_0)^2 ds + \int_0^b (P_0(b-s) - M'_0)^2 ds \right]$$

ou seja:

$$U'_0 = \frac{1}{6P_0 EI} \left[M'^3_0 + (3aP_0 + bP_0 - M'_0)(bP_0 - M'_0)^2 \right]$$

Derivando, agora, em ordem à carga fictícia M'_0 , obtém-se:

$$\frac{\partial U'_0}{\partial M'_0} = \frac{1}{6P_0 EI} \left[3M'^2_0 - (bP_0 - M'_0)^2 - 2(bP_0 - M'_0)(3aP_0 + bP_0 - M'_0) \right]$$

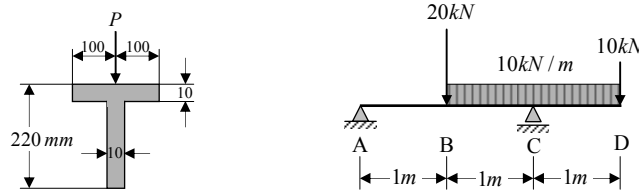
Finalmente, o valor da rotação em B obtém-se fazendo $M'_0 = 0$, isto é:

$$\theta_B = \frac{Pb(b+2a)}{2EI}$$

do uma viga ($E=200 \text{ GPa}$, $\nu=0.3$) de secção em T, com as dimensões

PROBLEMA – 7.2.7.

Considere uma viga ($E=200 \text{ GPa}$, $\nu=0.3$) de secção em T, com as dimensões indicadas na figura a seguir, carregada de acordo com o esquema apresentado na figura a seguir.

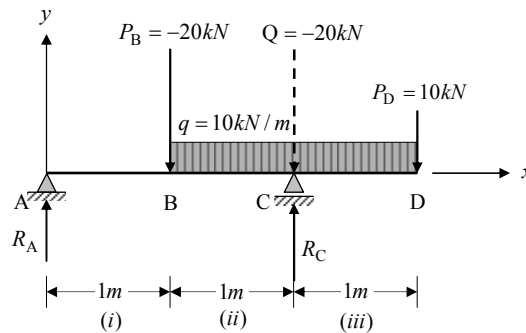


- Calcule as reacções nos apoios.
- Determine os diagramas dos momentos flectores e dos esforços transversos ao longo do eixo da viga.
- Identifique as posições onde ocorrem as tensões máximas de flexão e de corte (devido ao esforço transversal), e determine os respectivos valores.
- Determine os valores da *flecha* na extremidade D e da *rotação* no apoio C.

RESOLUÇÃO:

a)-Cálculo das Reacções nos Apoios

As reacções nos apoios obtêm-se através do processo habitual, considerando o diagrama de corpo livre e estabelecendo as condições de equilíbrio estático do sistema de todas as forças externas, incluindo as reacções nos apoios A e C:



Tomando momentos em A, por exemplo, a condição de equilíbrio das forças exteriores implica que seja $\sum M_A = 0$, isto é:

$$2R_C - 1 \times 20 - 2 \times 20 - 3 \times 10 = 0$$

onde $Q = -20 \text{ kN}$ é a resultante equivalente à distribuição uniforme $q(x) = -10 \text{ kN/m}$. Donde:

$$R_C = 45 \text{ kN}$$

Por outro lado, a mesma condição de equilíbrio exige que seja também $\sum F = 0$, isto é:

$$R_A + R_C - 20 - 20 - 10 = 0$$

donde:

$$R_A = 5 \text{ kN}$$

b)- Diagramas dos Esforços Transversos e dos Momentos

(i)-Entre as secções A e B, isto é para $0 \leq x \leq 1$, tem-se:

$$V_{(i)} = -5 \quad (a)$$

$$M_{(i)} = 5x \quad (b)$$

(ii)-Entre as secções B e C, isto é para $1 < x \leq 2$, tem-se:

$$V_{(ii)} = -5 + 20 + 10(x - 1)$$

isto é:

$$V_{(ii)} = 10x + 5 \quad (c)$$

e

$$M_{(ii)} = 5x - 20(x - 1) - \frac{10(x - 1)^2}{2}$$

isto é:

$$M_{(ii)} = -5x^2 - 5x + 15 \quad (d)$$

(iii)-Entre as secções C e D, isto é para $2 < x \leq 3$, tem-se:

$$V_{(iii)} = -5 + 20 + 10(x - 1) - 45$$

isto é:

$$V_{(iii)} = 10x - 40 \quad (e)$$

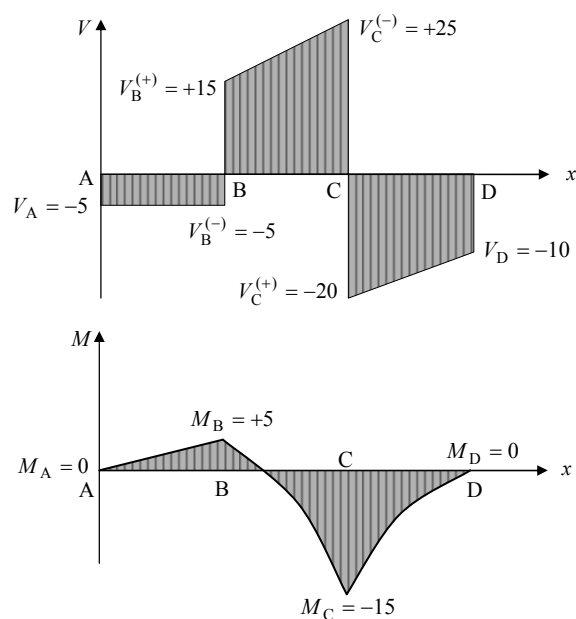
e

$$M_{(iii)} = 5x - 20(x-1) - \frac{10(x-1)^2}{2} + 45(x-2)$$

isto é:

$$M_{(iii)} = -5x^2 + 40x - 75 \quad (f)$$

Os correspondentes diagramas V e M são, portanto, conforme representado nas figuras a seguir:



e)-Cálculo das Tensões Máximas de Flexão e de Corte

O momento flector máximo ocorre na secção C, isto é:

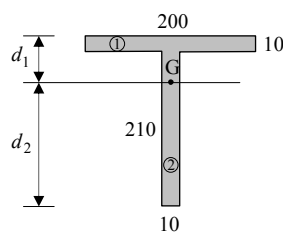
$$M = -15 \text{ kNxm}$$

O esforço transversal máximo ocorre também nessa mesma secção C, do lado esquerdo, isto é:

$$V = +25 \text{ kN}$$

A tensão de flexão correspondente é dada por:

$$\sigma = \frac{My}{I}$$



No caso vertente, tem-se uma secção em forma de T, cujo centro de gravidade se pode obter tomando os momentos estáticos em relação ao lado extremo superior, isto é:

$$(210 \times 10 + 200 \times 10)d_1 = 200 \times 10 \times 5 + 210 \times 10 \times 115$$

Donde:

$$d_1 = 61 \text{ mm} \text{ e } d_2 = 159 \text{ mm}$$

Calcule-se, agora, o momento de Inércia I da secção:

$$I = I_1 + I_2$$

$$I_1 = \frac{(0.2 \times 0.01^3)}{12} + (0.2 \times 0.01) \times (0.061 - 0.005)^2 = 6.3 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$I_2 = \frac{(0.01 \times 0.21^3)}{12} + (0.21 \times 0.01) \times (0.115 - 0.061)^2 = 12.8 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

Donde:

$$I = 19.1 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

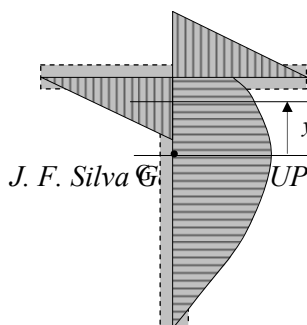
E então, tendo em conta que $y_{max} = 0.159 \text{ m}$:

$$|\sigma_{max}| = \frac{15 \times 10^3 \times 0.159}{19.1 \times 10^{-6}} = 124.9 \text{ MPa}$$

Quanto à tensão de corte, tem-se:

$$\tau = \frac{VS}{eI}$$

Ora, na alma da secção, tem-se:



$$S = (0.01 \times 0.2) \times (0.061 - 0.005) + (0.051 - y) \times 0.01 \times (0.051 + y) / 2$$

Isto é:

$$S = 125 \times 10^{-6} - 5 \times 10^{-3} y^2$$

$$\frac{dS}{dy} = 0 \Rightarrow y = 0$$

E, portanto:

$$S_{max} = 125 \times 10^{-6} m^3$$

Donde:

$$\tau_{max} = \frac{25 \times 10^3 \times 125 \times 10^{-6}}{0.010 \times 19.1 \times 10^{-6}} \quad (V_{max} = 25 kN)$$

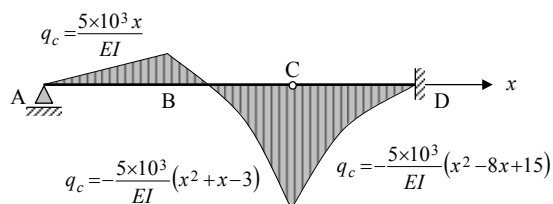
ou seja:

$$\tau_{max} = 16,4 MPa$$

d)-Cálculo da flecha em D e da rotação em C

Utilizando o método da viga conjugada, por exemplo, considere-se a viga conjugada solicitada por uma distribuição de carga proporcional ao momento flector na viga real:

$$q_c(x) = \frac{M(x)}{EI}$$



Para determinar as reacções nos apoios da viga conjugada, são previamente calculadas as resultantes das distribuições contínuas em cada um dos troços AB (i), BC (ii) e CD (iii):

$$(Q_c)_i = \int_0^1 \frac{5 \times 10^3 x}{EI} dx = \frac{5 \times 10^3}{2EI}$$

$$(x_G)_i = \frac{\int_0^1 \frac{5x}{EI} x dx}{\frac{5}{2EI}} = 0.67$$

$$(Q_c)_{ii} = -\frac{5 \times 10^3}{EI} \int_1^2 (x^2 + x - 3) dx = -\frac{25 \times 10^3}{6EI}$$

$$(x_G)_{ii} = \frac{\frac{5}{EI} \int_1^2 (x^2 + x - 3) x dx}{\frac{25}{6EI}} = 1.9$$

$$(Q_c)_{iii} = -\frac{5 \times 10^3}{EI} \int_2^3 (x^2 - 8x + 15) dx = -\frac{20 \times 10^3}{3EI}$$

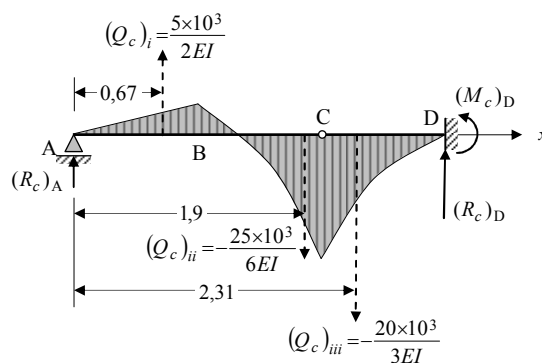
$$(x_G)_{iii} = \frac{\frac{5}{EI} \int_2^3 (x^2 - 8x + 15) x dx}{\frac{20}{3EI}} = 2.31$$

Agora, da condição de que o momento flector na rótula C deve ser nulo, resulta a seguinte equação:

$$(R_c)_A \times 2 + (Q_c)_i \times (2 - (x_G)_i) + (Q_c)_{ii} \times (2 - (x_G)_{ii}) = 0$$

ou seja:

$$(R_c)_A \times 2 + \frac{5 \times 10^3}{2EI} \times 1.33 - \frac{25 \times 10^3}{6EI} \times 0.1 = 0$$



Donde:

$$(R_c)_A = -\frac{1,45 \times 10^3}{EI}$$

Por outro lado, da condição de equilíbrio vertical das forças exteriores (incluindo as reacções em A e D), resulta a seguinte equação:

$$(R_c)_A + (Q_c)_i + (Q_c)_{ii} + (Q_c)_{iii} + (R_c)_D = 0$$

ou seja:

$$-\frac{1,45 \times 10^3}{EI} + \frac{5 \times 10^3}{2EI} - \frac{25 \times 10^3}{6EI} - \frac{20 \times 10^3}{3EI} + (R_c)_D = 0$$

Donde:

$$(R_c)_D = \frac{9,79 \times 10^3}{EI}$$

Finalmente, da condição de equilíbrio dos momentos das forças exteriores (incluindo as reacções em A e D), no ponto D, por exemplo, resulta a seguinte equação:

$$(R_c)_A \times 3 + (Q_c)_i \times (3 - (x_G)_i) + (Q_c)_{ii} \times (3 - (x_G)_{ii}) + (Q_c)_{iii} \times (3 - (x_G)_{iii}) - (M_c)_D = 0$$

ou seja:

$$-\frac{1,45 \times 10^3}{EI} \times 3 + \frac{5 \times 10^3}{2EI} \times 2,33 - \frac{25 \times 10^3}{6EI} \times 1,1 - \frac{20 \times 10^3}{3EI} \times 0,69 - (M_c)_D = 0$$

Donde:

$$(M_c)_D = -\frac{7,71 \times 10^3}{EI}$$

Agora, tem-se:

$$\delta_D = (M_c)_D = -\frac{7,71 \times 10^3}{EI}$$

ou, atendendo a que, para a viga em questão se tem $EI = 200 \times 109 \times 19,1 \times 10^{-6} = 3,8 \times 10^9 \text{ (Nm}^2\text{)}$:

$$\delta_D = -2,03 \times 10^{-6} \text{ m}$$

Quanto à rotação da secção em C, tem-se:

$$\theta_C = -(V_c)_C = -[(R_c)_D + (Q_c)_{iii}]$$

ou seja:

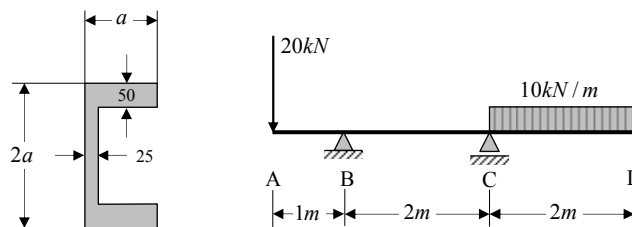
$$\theta_C = -\left[\frac{9,79 \times 10^3}{EI} - \frac{20 \times 10^3}{3EI} \right]$$

isto é:

$$\theta_C = -0,82 \times 10^{-6} \text{ rad}$$

PROBLEMA – 7.2.7.

Pretende-se construir uma viga de secção em U, de abas iguais, conforme indicado na figura, a partir de chapa de aço ($E=200 \text{ GPa}$, $\nu=0.3$) com espessura de 50 mm para as abas e 25 mm para a alma. A viga está apoiada e é carregada de acordo com o esquema apresentado na figura . Considere $\sigma_{adm}=140 \text{ MPa}$.

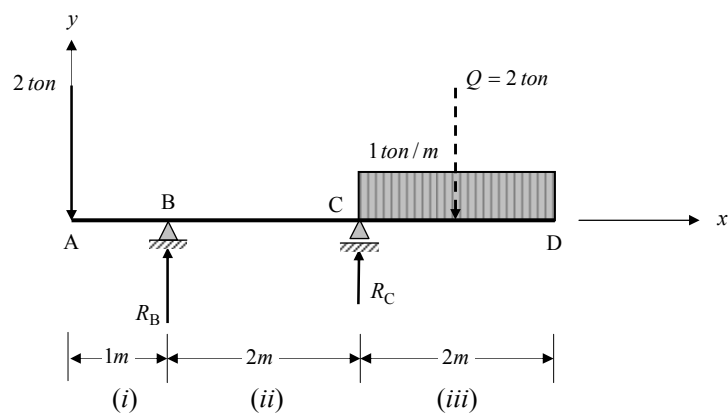


- a)- Determine os diagramas dos momentos flectores e dos esforços transversos ao longo do eixo da viga.
- b)- Determine a largura mínima (a) das abas da secção.
- c)- Determine o *centro de torção* da secção.
- d)- Determine os valores da *flecha* na extremidade D, bem assim como das *rotações* nos apoios B e C.

RESOLUÇÃO:

Cálculo das Reacções nos Apoios:

Antes de mais, há que determinar as reacções nos apoios. Considere-se, então, a situação representada na figura a seguir:



Tomando momentos em B, por exemplo, a condição de equilíbrio das forças exteriores implica que seja $\sum M_B = 0$, isto é:

$$2 \times 1 + R_C \times 2 - 2 \times 3 = 0$$

onde $Q = 2 \text{ ton}$ é a resultante equivalente à distribuição uniforme $q_0 = 1 \text{ ton/m}$.

Donde:

$$R_C = 2 \text{ ton}$$

Por outro lado, a mesma condição de equilíbrio exige que seja também $\sum F = 0$, isto é:

$$R_B + R_C - 2 - 2 = 0$$

Donde:

$$R_B = 2 \text{ ton}$$

a)-Cálculo dos Diagramas dos V e M

(i)-Entre as secções A e B, isto é para $0 \leq x \leq 1$, tem-se:

$$V_{(i)} = +2 \quad (a)$$

$$M_{(i)} = -2x \quad (b)$$

(ii)-Entre as secções B e C, isto é para $1 < x \leq 3$, tem-se:

$$V_{(ii)} = 2 - 2$$

isto é:

$$V_{(ii)} = 0 \quad (c)$$

e

$$M_{(ii)} = -2x + 2 \times (x - 1)$$

isto é:

$$M_{(ii)} = -2 \quad (d)$$

(iii)-Entre as secções C e D, isto é para $3 < x \leq 5$, tem-se:

$$V_{(iii)} = 2 - 2 - 2 + 1 \times (x - 3)$$

isto é:

$$V_{(iii)} = x - 5 \quad (e)$$

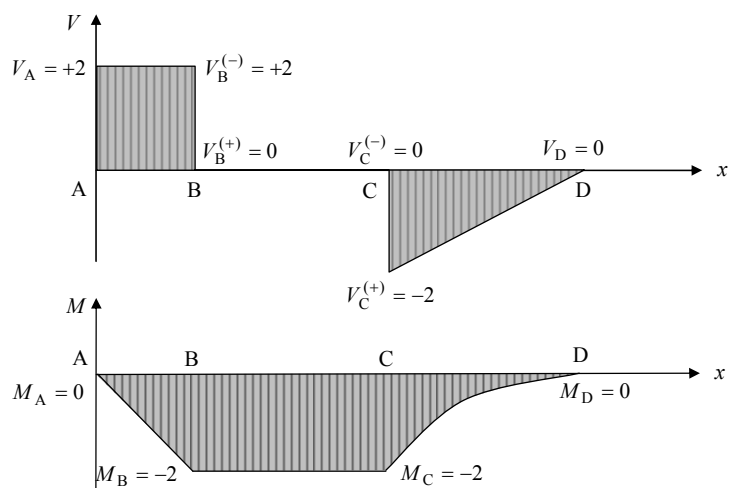
e

$$M_{(iii)} = -2x + 2 \times (x - 1) + 2 \times (x - 3) - 1 \times (x - 3)^2 / 2$$

isto é

$$M_{(iii)} = -\frac{x^2 - 10x + 25}{2} \quad (f)$$

Os correspondentes diagramas V e M são, portanto, conforme representado nas figuras seguintes:



b)-Cálculo das dimensões da Secção

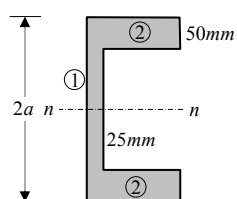
O momento flector máximo ocorre entre as secções B e C, onde é:

$$M = -20 \text{ tonxm}$$

A tensão de flexão correspondente é dada por:

$$\sigma = \frac{My}{I}$$

No caso vertente, tem-se uma secção em forma de U, cujo eixo neutro n-n coincide com o eixo de simetria horizontal.



O momento de inércia I da secção relativamente ao eixo neutro obtém-se da seguinte forma:

$$I = I_1 + 2 \times I_2$$

$$I_1 = \frac{0.025 \times (2a - 0.1)^3}{12} = 1.67 \times 10^{-2} a^3 - 0.25 \times 10^{-2} a^2 + 12.5 \times 10^{-5} a - 2 \times 10^{-6}$$

$$I_2 = \frac{a \times 0.05^3}{12} + a \times 0.05 \times (a - 0.025)^2 = 5 \times 10^{-2} a^3 - 2.5 \times 10^{-3} a^2 + 4.17 \times 10^{-5} a$$

$$I = 11.67 \times 10^{-2} a^3 - 0.75 \times 10^{-2} a^2 + 20.84 \times 10^{-5} a - 2 \times 10^{-6}$$

Então, tendo em conta que $y_{max} = a$:

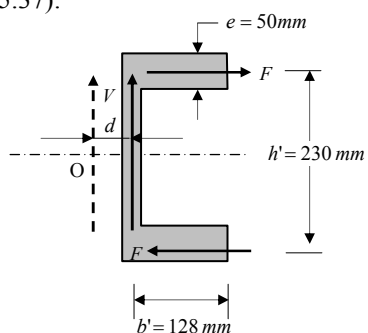
$$|\sigma_{max}| = \frac{20 \times 10^4 a}{11.67 \times 10^{-2} a^3 - 0.75 \times 10^{-2} a^2 + 20.84 \times 10^{-5} a - 2 \times 10^{-6}} \leq 140 \times 10^6$$

Donde:

$$a \geq 0.140m = 140mm$$

c)-Determinação do Centro de Torção

Considerando o esquema da figura a seguir, tira-se, de acordo com a equação (5.37):



$$d = \frac{F \times h'}{V} = \frac{b'^2 h'^2 e}{4I}$$

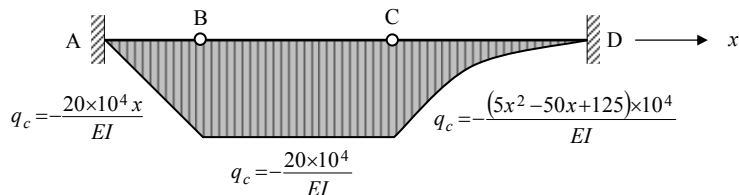
Donde, para $I = 2 \times 10^8 mm^4$:

$$d = \frac{128^2 \times 230^2 \times 50}{4 \times 2 \times 10^8} = 54mm$$

d)-Cálculo da flecha em D e das rotações em B e C

Utilizando o método da viga conjugada, considere-se a viga conjugada solicitada por uma distribuição de carga proporcional ao momento flector na viga real:

$$q_c(x) = \frac{M(x)}{EI}$$



Para determinar as reacções nos apoios da viga conjugada, são previamente calculadas as resultantes das distribuições contínuas em cada um dos troços AB (i), BC (ii) e CD (iii):

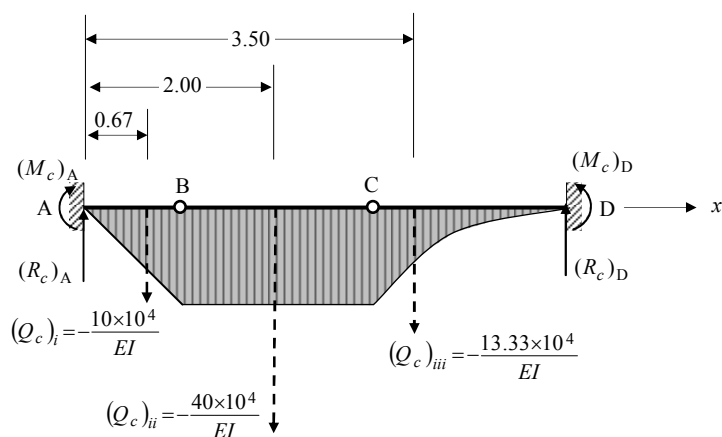
$$(Q_c)_i = -\frac{10 \times 10^4}{EI} \quad ; \quad (x_G)_i = 0.67$$

$$(Q_c)_{ii} = -\frac{40 \times 10^4}{EI} \quad ; \quad (x_G)_{ii} = 2$$

$$(Q_c)_{iii} = -\frac{5 \times 10^4}{EI} \int_3^5 (x^2 - 10x + 25) dx = -\frac{13.33 \times 10^4}{EI}$$

$$(x_G)_{iii} = \frac{\frac{5}{EI} \int_3^5 (x^2 - 10x + 25) x dx}{\frac{13.33}{EI}} = 3.5$$

Considere-se, então o esquema representado na figura a seguir:



Agora, da condição de que os momentos flectores nas rótula B e C devem ser nulos, resultam as seguintes equações, respectivamente:

$$(R_c)_A \times 1 + (Q_c)_i \times (1 - (x_G)_i) + (M_c)_A = 0$$

$$(R_c)_D \times 2 + (Q_c)_{iii} \times ((x_G)_{iii} - 3) + (M_c)_D = 0$$

ou seja:

$$(R_c)_A \times 1 - \frac{10 \times 10^4}{EI} \times 0.33 + (M_c)_A = 0 \quad (g)$$

$$(R_c)_D \times 2 - \frac{13.33 \times 10^4}{EI} \times 0.5 + (M_c)_D = 0 \quad (h)$$

Por outro lado, da condição de equilíbrio vertical das forças exteriores (incluindo as reacções em A e D), resulta a seguinte equação:

$$(R_c)_A + (Q_c)_i + (Q_c)_{ii} + (Q_c)_{iii} + (R_c)_D = 0$$

ou seja:

$$(R_c)_A - \frac{10 \times 10^4}{EI} - \frac{40 \times 10^4}{EI} - \frac{13.33 \times 10^4}{EI} + (R_c)_D = 0 \quad (i)$$

Finalmente, da condição de equilíbrio dos momentos das forças exteriores (incluindo as reacções em A e D), no ponto D, por exemplo, resulta a seguinte equação:

$$(M_c)_A + (R_c)_A \times 5 + (Q_c)_i \times (5 - (x_G)_i) + (Q_c)_{ii} \times (5 - (x_G)_{ii}) + (Q_c)_{iii} \times (5 - (x_G)_{iii}) - (M_c)_D = 0$$

ou seja:

$$(M_c)_A + (R_c)_A \times 5 - \frac{10 \times 10^4}{EI} \times 4.33 - \frac{40 \times 10^4}{EI} \times 3 - \frac{13.33 \times 10^4}{EI} \times 1.5 - (M_c)_D = 0 \quad (j)$$

Resolvendo o sistema de quatro equações (g)-(j), obtém-se:

$$\begin{aligned} (R_c)_A &= \frac{30 \times 10^4}{EI} & (M_c)_A &= -\frac{26.7 \times 10^4}{EI} \\ (R_c)_D &= \frac{33.3 \times 10^4}{EI} & (M_c)_D &= -\frac{60 \times 10^4}{EI} \end{aligned}$$

Agora, tem-se:

$$\delta_D = (M_c)_D = -\frac{60 \times 10^4}{EI}$$

ou, atendendo a que, para a viga em questão se tem $EI = 200 \times 10^9 \times 2 \times 10^{-4} = 4 \times 10^7$ ($N \times m^2$):

$$\delta_D = -15 \times 10^{-3} m$$

Quanto às rotações das secções em B e C, tem-se:

$$\theta_B = -(V_c)_B = -[(R_c)_A - (Q_c)_i]$$

$$\theta_C = -(V_c)_C = -[(R_c)_D + (Q_c)_{iii}]$$

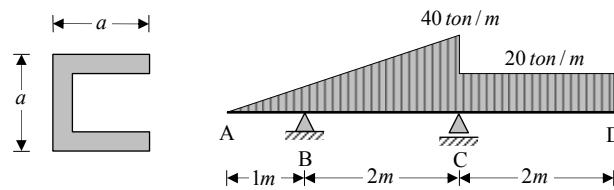
ou seja:

$$\theta_B = -\left[-\frac{30 \times 10^4}{4 \times 10^7} + \frac{10 \times 10^4}{4 \times 10^7} \right] = 5 \times 10^{-3} rad$$

$$\theta_C = -\left[\frac{33.3 \times 10^4}{4 \times 10^7} - \frac{13.33 \times 10^4}{4 \times 10^7} \right] = -5 \times 10^{-3} rad$$

PROBLEMA – 7.2.8.

Pretende-se construir uma viga de secção em U, conforme representado na figura, com a altura igual à largura, a partir de chapa de aço ($E=200$ GPa, $\nu=0.3$), e espessura uniforme de 40 mm. A viga está apoiada e é solicitada de acordo com o esquema representado na figura. Considere o valor de 200 MPa para a tensão de flexão admissível do material. Determine



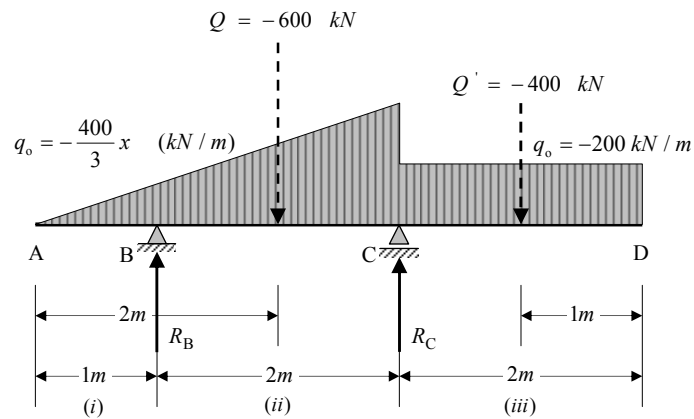
- A dimensão mínima a da secção.
- O centro de torção da secção.
- O esforço rasante máximo que ocorre entre cada um dos elementos horizontais e o elemento vertical da secção.
- A flecha nas extremidade A e D, e as rotações nos apoios B e C

RESOLUÇÃO:

a)-Cálculo da tensão máxima de flexão

Reacções nos Apoios:

As reacções nos apoios calculam-se da maneira habitual, a partir do esquema representado na figura a seguir:



Tomando momentos em B, por exemplo, a condição de equilíbrio das forças exteriores implica que seja $\sum M_B = 0$, isto é:

$$Q \times 1 + R_C \times 2 + Q' \times 3 = 0$$

onde $Q = -600$ kN e $Q' = -400$ kN são as resultante equivalente às duas distribuições linear e uniforme, respectivamente. Donde:

$$R_C = 900$$
 kN

Por outro lado, a mesma condição de equilíbrio exige que seja também

$\sum F = 0$, isto é:

$$R_B + R_C - 600 - 400 = 0$$

Donde:

$$R_B = 100$$
 kN

Diagramas dos Esforços Transversos e dos Momentos Flectores:

(i)-Entre as secções A e B, isto é para $0 \leq x \leq 1$, tem-se:

$$V_{(i)} = +\frac{200}{3}x^2 \tag{a}$$

$$M_{(i)} = -\frac{200}{9}x^3 \quad (b)$$

(ii)-Entre B e C, isto é para $1 < x \leq 3$, tem-se:

$$V_{(ii)} = \frac{200}{3}x^2 - R_B$$

ou seja:

$$V_{(ii)} = \frac{200}{3}x^2 - 100 \quad (c)$$

e

$$M_{(ii)} = -\frac{200}{9}x^3 + R_B \times (x-1)$$

ou seja:

$$M_{(ii)} = -\frac{200}{9}x^3 + 100x - 100 \quad (d)$$

(iii)-Entre C e D, isto é para $3 < x \leq 5$, tem-se:

$$V_{(iii)} = -R_B - Q - R_C - q_0 \times (x-3)$$

ou seja:

$$V_{(iii)} = 200x - 1000 \quad (e)$$

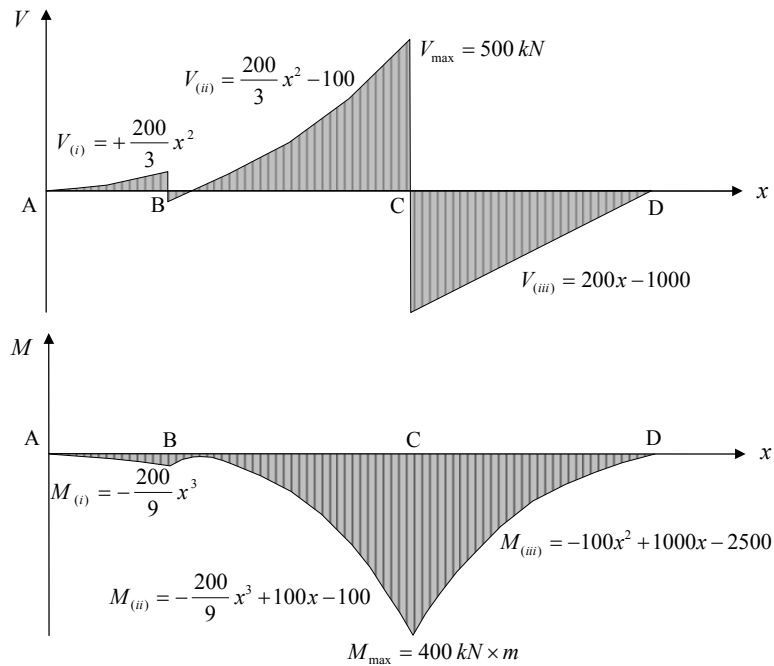
e

$$M_{(iii)} = R_B \times (x-1) + Q \times (x-2) + R_C \times (x-3) + q_0 \times (x-3)^2 / 2$$

Isto é:

$$M_{(iii)} = -100x^2 + 1000x - 2500 \quad (f)$$

Os correspondentes diagramas V e M são, portanto, conforme representado nas figuras a seguir:



O momento flector máximo e o esforço transversal máximo ocorrem ambos na secção C, onde é:

$$M = 400 \text{ kN} \times \text{m}$$

e

$$V = 500 \text{ kN}$$

A tensão de flexão correspondente é dada por:

$$\sigma = \frac{My}{I}$$

O momento de inércia I da secção relativamente ao eixo neutro (eixo médio horizontal) obtém-se da seguinte forma:

Diagram of an L-shaped cross-section with dimensions a , n , and 40mm .

Moment of inertia equations:

$$I = I_1 + 2I_2$$

$$I_1 = \frac{0.04 \times (a - 0.08)^3}{12}$$

$$I_2 = \frac{a \times 0.04^3}{12} + (a \times 0.04) \times \left(\frac{a}{2} - 0.02\right)^2$$

Ou seja:

$$I = \frac{0.04 \times (a - 0.08)^3}{12} + 2 \times \left[\frac{a \times 0.04^3}{12} + (a \times 0.04) \times \left(\frac{a}{2} - 0.02 \right)^2 \right]$$

Então, tendo em conta que $y_{max} = a/2$:

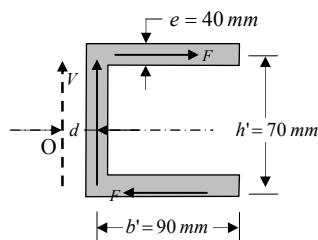
$$|\sigma_{max}| = \frac{400 \times 10^3 \times \left(\frac{a}{2} \right)}{\frac{0.04 \times (a - 0.08)^3}{12} + 2 \times \left[\frac{a \times 0.04^3}{12} + (a \times 0.04) \times \left(\frac{a}{2} - 0.02 \right)^2 \right]} \leq 200 \times 10^6$$

Donde:

$$a \geq 0,255 \text{ m} = 255 \text{ mm}$$

b)- Determinação do Centro de Torção

Considerando o esquema da figura a seguir, tira-se:



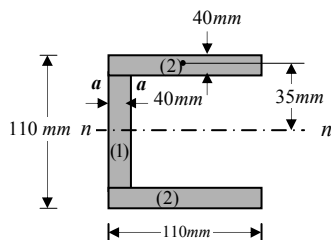
$$d = \frac{F \times h'}{V} = \frac{b'^2 h'^2 e}{4I}$$

Donde, para $I = 2,56 \times 10^8 \text{ mm}^4$:

$$d = \frac{235^2 \times 215^2 \times 40}{4 \times 2,56 \times 10^8} = 100 \text{ mm}$$

c)- Esforço rasante máximo entre a aba e a alma do perfil

O esforço rasante máximo ocorre na secção C, onde:



$$V_{max} = 500 \text{ kN}$$

Aplicando a fórmula de Jouravski na secção a-a, obtém-se:

$$R = \frac{VS}{I_z}$$

onde:

$$S = (255 \times 40) \times 107,5 = 1,1 \times 10^6 \text{ mm}^3 = 1,1 \times 10^{-3} \text{ m}^3$$

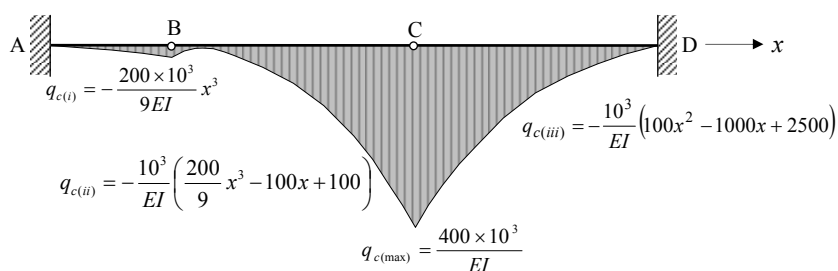
Então, substituindo os valores para V , S e I_z , obtém-se:

$$R = \frac{500 \times 10^3 \times 1,1 \times 10^{-3}}{2,56 \times 10^{-4}} = 2,148 \times 10^6 \text{ N/m}$$

d)- Cálculo da flechas em A e D e das rotações em B e C

Utilizando o método da viga conjugada, considere-se a viga conjugada solicitada por uma distribuição de carga proporcional ao momento flector na viga real:

$$q_c(x) = \frac{M(x)}{EI}$$



Para determinar as reacções nos apoios da viga conjugada, são previamente calculadas as resultantes das distribuições contínuas em cada um dos troços AB (i), BC (ii) e CD (iii):

$$(Q_c)_i = \frac{1}{EI} \int_0^1 -\frac{2 \times 10^5}{9} x^3 dx = -\frac{2 \times 10^5}{9EI} \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1 = -\frac{5,56 \times 10^3}{EI},$$

com

$$(x_G)_i = \frac{\int_0^1 \frac{2 \times 10^5}{9} x^4 dx}{5,56 \times 10^3} = \frac{\frac{2 \times 10^5}{9} \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^1}{5,56 \times 10^3} = 0,8 \text{ m};$$

$$(Q_c)_{ii} = \frac{1}{EI} \int_1^3 \left(-\frac{2 \times 10^5}{9} x^3 + 10^5 x - 10^5 \right) dx$$

$$= -\frac{1}{EI} \left[\frac{10^5}{18} x^4 - 0,5 \times 10^5 x^2 + 10^5 x \right]_1^3 = -\frac{2,44 \times 10^5}{EI}$$

com

$$(x_G)_{ii} = \frac{\int_1^3 \left(\frac{2 \times 10^5}{9} x^4 - 10^5 x^2 + 10^5 x \right) dx}{2,44 \times 10^5}$$

$$= \frac{\left[\frac{2 \times 10^5}{45} x^5 - \frac{10^5}{3} x^3 + 0,5 \times 10^5 x^2 \right]_1^3}{2,44 \times 10^5} = 2,5 \text{ m}$$

e

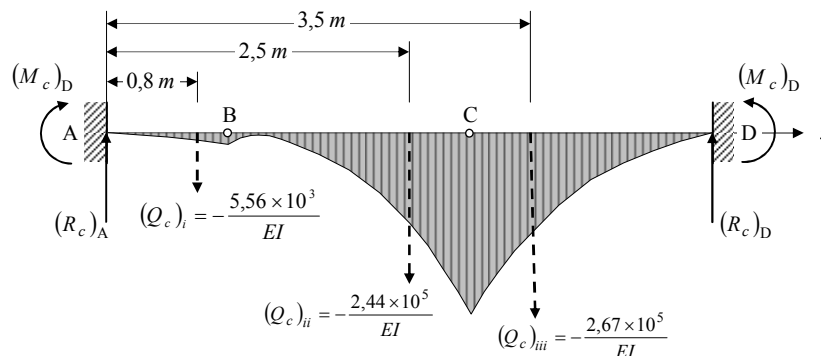
$$(Q_c)_{iii} = \frac{1}{EI} \int_3^5 \left(-10^5 x^2 + 10 \times 10^5 x - 25 \times 10^5 \right) dx$$

$$= -\frac{1}{EI} \left[\frac{10^5}{3} x^3 - 5 \times 10^5 x^2 + 25x \right]_3^5 = -\frac{2,67 \times 10^5}{EI}$$

com

$$(x_G)_{iii} = \frac{\int_3^5 \left(10^5 x^3 - 10 \times 10^5 x^2 + 25 \times 10^5 x \right) dx}{2,67 \times 10^5}$$

$$= \frac{\left[\frac{10^5}{4} x^4 - \frac{10 \times 10^5}{3} x^3 + \frac{25 \times 10^5}{2} x^2 \right]_3^5}{2,67 \times 10^5} = 3,5 \text{ m}$$



Agora, da condição de que os momentos flectores nas rótula B e C devem ser nulos, resultam as seguintes equações, respectivamente:

$$(R_c)_A \times 1 + (Q_c)_i \times (1 - (x_G)_i) + (M_c)_A = 0$$

$$(R_c)_D \times 2 + (Q_c)_{iii} \times ((x_G)_{iii} - 3) + (M_c)_D = 0$$

ou seja:

$$(R_c)_A \times 1 - \frac{5,56 \times 10^3}{EI} \times 0,2 + (M_c)_A = 0 \quad (g)$$

$$(R_c)_D \times 2 - \frac{2,67 \times 10^5}{EI} \times 0,5 + (M_c)_D = 0 \quad (h)$$

Por outro lado, da condição de equilíbrio vertical das forças exteriores (incluindo as reacções em A e D), resulta a seguinte equação:

$$(R_c)_A + (Q_c)_i + (Q_c)_{ii} + (Q_c)_{iii} + (R_c)_D = 0$$

ou seja:

$$(R_c)_A - \frac{5,56 \times 10^3}{EI} - \frac{2,44 \times 10^5}{EI} - \frac{2,67 \times 10^5}{EI} + (R_c)_D = 0 \quad (i)$$

Finalmente, da condição de equilíbrio dos momentos das forças exteriores (incluindo as reacções em A e D), no ponto D, por exemplo, resulta a seguinte equação:

$$(M_c)_A + (R_c)_A \times 5 + (Q_c)_i \times (5 - (x_G)_i) + (Q_c)_{ii} \times (5 - (x_G)_{ii}) + (Q_c)_{iii} \times (5 - (x_G)_{iii}) - (M_c)_D = 0$$

ou seja:

$$(M_c)_A + (R_c)_A \times 5 - \frac{5,56 \times 10^3}{EI} \times 4,2 - \frac{2,44 \times 10^5}{EI} \times 2,5 - \frac{2,67 \times 10^5}{EI} \times 1,5 - (M_c)_D = 0 \quad (j)$$

Resolvendo o sistema de quatro equações (g)-(j), obtém-se:

$$(R_c)_A = \frac{1,71 \times 10^4}{EI} \quad (M_c)_A = -\frac{1,6 \times 10^4}{EI}$$

$$(R_c)_D = \frac{50 \times 10^4}{EI} \quad (M_c)_D = -\frac{87 \times 10^4}{EI}$$

Agora, tem-se:

$$\delta_A = (M_c)_A = -\frac{1,6 \times 10^4}{EI}$$

$$\delta_D = (M_c)_D = -\frac{87 \times 10^4}{EI}$$

ou, atendendo a que, para a viga em questão se tem $EI=200 \times 10^9 \times 2,56 \times 10^{-4} = 5,12 \times 10^7 \text{ (N}\times\text{m}^2\text{)}$:

$$\delta_A = -0,31 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$\delta_D = -17 \times 10^{-3} \text{ m}$$

Quanto às rotações das secções em B e C, tem-se:

$$\theta_B = -(V_c)_B = -\{(R_c)_A - (Q_c)_i\}$$

$$\theta_C = -(V_c)_C = -\{(R_c)_D + (Q_c)_{iii}\}$$

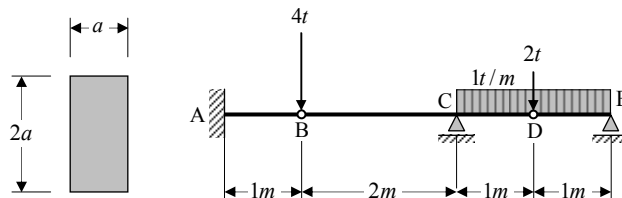
ou seja:

$$\theta_B = -\left[-\frac{1,71 \times 10^4}{5,12 \times 10^7} + \frac{0,556 \times 10^4}{5,12 \times 10^7} \right] = 0,23 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

$$\theta_C = -\left[\frac{5 \times 10^5}{5,12 \times 10^7} - \frac{2,67 \times 10^5}{5,12 \times 10^7} \right] = -4,6 \times 10^{-4} \text{ rad}$$

PROBLEMA – 7.2.9.

Pretende-se construir uma viga de secção rectangular ($2axa$), conforme indicado na figura a seguir apresentada, em aço ($E = 200 \text{ GPa}$, $\nu = 0.3$). A viga está apoiada e é solicitada conforme o esquema também representado na figura. Considere o valor de 140 MPa para a tensão de flexão admissível do material.



- a)- Determine as reacções nos apoios
- b)- Determine os diagramas dos esforços transversos e dos momentos flectores ao longo do eixo da viga.
- c)- Determine o valor mínimo da dimensão a da secção recta da viga, de tal modo que a tensão de flexão não ultrapasse o valor limite de 140 MPa .
- d)- Determine as flechas nas rótula B e D e as rotações nos apoios C e E.

RESOLUÇÃO:

a)- Cálculo das Reacções nos Apoios

São quatro as reacções a calcular (M_A , R_A , R_C e R_E), conforme ilustrado na figura a seguir. As equações necessárias são quatro: Duas relativas ao equilíbrio das forças externas e outras duas correspondente ao anulamento dos momentos flectores nas rótulas B e D. Começando pela última destas condições, pode escrever-se, considerando as forças à direita da rótula E:

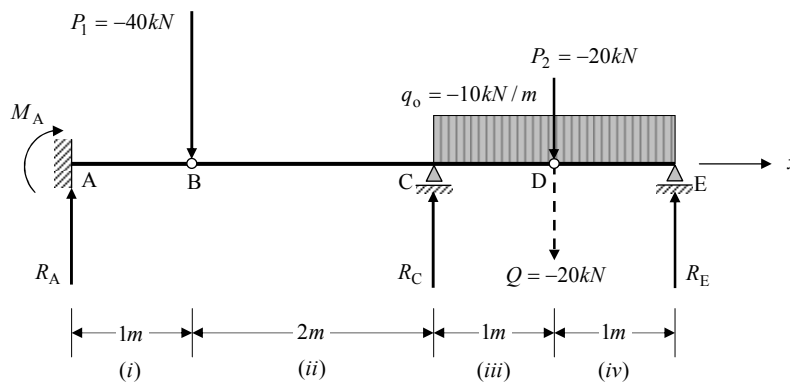
$$R_E \times 1 + \frac{Q}{2} \times 0.5 = 0$$

ou seja:

$$R_E \times 1 - 10 \times 0.5 = 0$$

Donde:

$$R_E = 5 \text{ kN}$$



Igualmente para a rótula B, considerando também as forças à direita, pode escrever-se:

$$R_E \times 4 + P_2 \times 3 + Q \times 3 + R_C \times 2 = 0$$

ou seja:

$$5 \times 4 - 20 \times 3 - 20 \times 3 + R_C \times 2 = 0$$

Donde:

$$R_C = 50 \text{ kN}$$

Exprimindo agora a condição de que o momento de todas as forças exteriores (incluindo as reacções nos apoios...) no ponto A, por exemplo, é nulo, tem-se:

$$R_E \times 5 + P_2 \times 4 + Q \times 4 + R_C \times 3 + P_1 \times 1 - M_A = 0$$

ou seja:

$$5 \times 5 - 20 \times 4 - 20 \times 4 + 50 \times 3 - 40 \times 1 - M_A = 0$$

donde:

$$M_A = -25 \text{ kN} \times \text{m}$$

Finalmente, exprimindo a condição de que a soma de todas as forças verticais (incluindo as reacções) é nula, obtém-se:

$$R_A + P_1 + R_C + P_2 + Q + R_E = 0$$

ou seja:

$$R_A - 40 + 50 - 20 - 20 + 5 = 0$$

donde:

$$R_A = 25 \text{ kN}$$

b)- Diagramas dos Esforços Transversos e dos Momentos Flectores

(i)-Entre as secções A e B, isto é para $0 \leq x \leq 1$, tem-se:

$$V_{(i)} = -R_A$$

ou seja:

$$V_{(i)} = -25 \text{ kN} \quad (a)$$

e

$$M_{(i)} = M_A + R_A x$$

ou seja:

$$M_{(i)} = 25x - 25 \quad (b)$$

(ii)-Entre B e C, isto é para $1 < x \leq 3$, tem-se:

$$V_{(ii)} = -R_A + 40 \text{ kN}$$

ou seja:

$$V_{(ii)} = +15 \text{ kN} \quad (c)$$

e

$$M_{(ii)} = M_A + R_A x + P_1(x-1)$$

ou seja:

$$M_{(ii)} = -15x + 15 \quad (d)$$

(iii)-Entre C e D, isto é para $3 < x \leq 4$, tem-se:

$$V_{(iii)} = -R_A + 40 - R_C + 10 \times (x-3)$$

ou seja:

$$V_{(iii)} = 10x - 65 \quad (e)$$

e

$$M_{(iii)} = M_A + R_A x - 40 \times (x-1) + R_C(x-3) - \frac{10}{2}(x-3)^2$$

ou seja:

$$M_{(iii)} = -5x^2 + 65x - 180 \quad (f)$$

(iv)-Entre D e E, isto é para $4 < x \leq 5$, tem-se:

$$V_{(iv)} = -R_A + 40 - R_C + 10 \times (x-3) + 20$$

ou seja:

$$V_{(iv)} = 10x - 45 \quad (g)$$

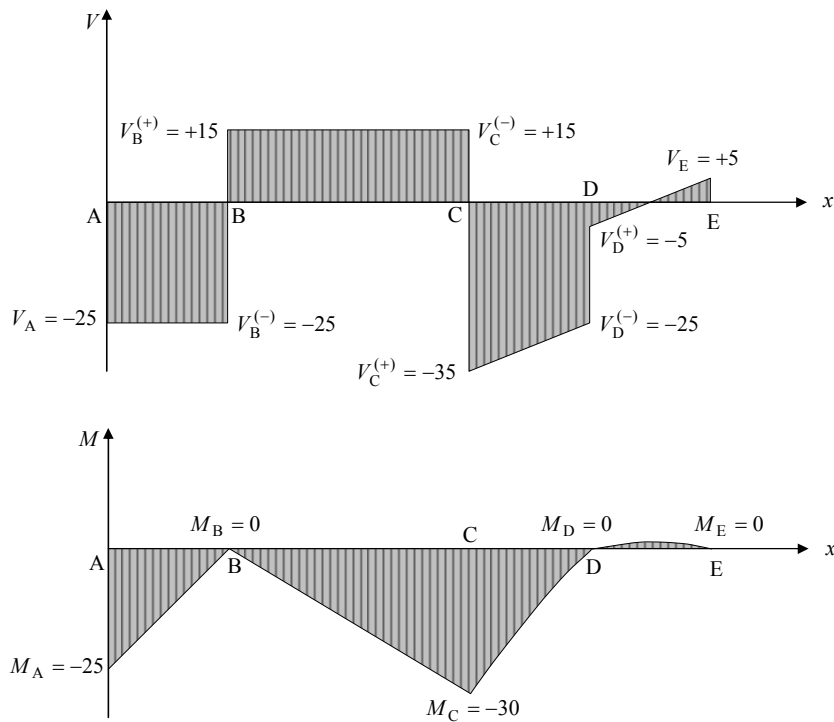
e

$$M_{(iii)} = M_A + R_A x - 40 \times (x-1) + R_C(x-3) - \frac{10}{2}(x-3)^2 - 20(x-4)$$

ou seja:

$$M_{(iv)} = -5x^2 + 45x - 100 \quad (h)$$

Os correspondentes diagramas V e M são, portanto, conforme representado nas duas figuras seguintes:



c)-Cálculo das dimensões da secção

A secção crítica do ponto de vista das tensões de flexão é a secção C, onde o momento flector atinge o valor máximo de 30 kNm . A tensão de flexão correspondente é dada por:

$$\sigma = \frac{My}{I}$$

O momento de inércia (I) da secção, relativamente ao eixo neutro (linha média horizontal), é dado pela expressão:

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{a(2a)^3}{12} = \frac{2a^4}{3}$$

E a tensão máxima na secção ocorre nos pontos da periferia, isto é à distância $y = a$ do eixo neutro:

$$\sigma_{max} = \frac{30 \times 10^3 \times a}{\left(\frac{2a^4}{3}\right)} = 4,5 \times 10^4 a^{-3}$$

Impondo agora a condição:

$$\sigma_{max} = 4,5 \times 10^4 a^{-3} \leq 140 \times 10^6$$

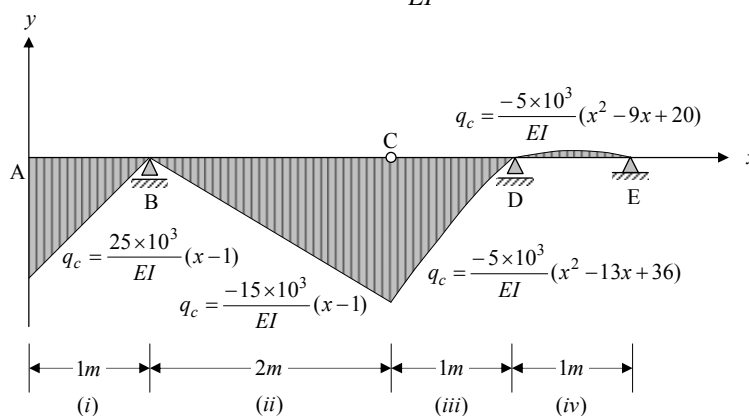
Obtém-se:

$$a \geq 68.5 \text{ mm}$$

d)- Cálculo das flechas em B e D e das rotações em C e E

Utilizando o método da viga conjugada, considere-se a viga conjugada solicitada por uma distribuição de carga proporcional ao momento flector na viga real:

$$q_c(x) = \frac{M(x)}{EI}$$



Para determinar as reacções nos apoios da viga conjugada, são previamente calculadas as resultantes das distribuições contínuas em cada um dos troços AB (i), BC (ii), CD (iii) e DE (iv):

$$(Q_c)_i = -\frac{25 \times 10^3}{2EI} = -\frac{12,5 \times 10^3}{EI},$$

com $(x_G)_i = 0,33;$

$$(Q_c)_{ii} = -\frac{2 \times 30 \times 10^3}{2EI} = -\frac{30 \times 10^3}{EI},$$

com

$$(x_G)_{ii} = 2,33;$$

$$(Q_c)_{iii} = -\frac{5 \times 10^3}{EI} \int_3^4 (x^2 - 13x + 36) dx = -\frac{14,17}{EI} \times 10^3,$$

com

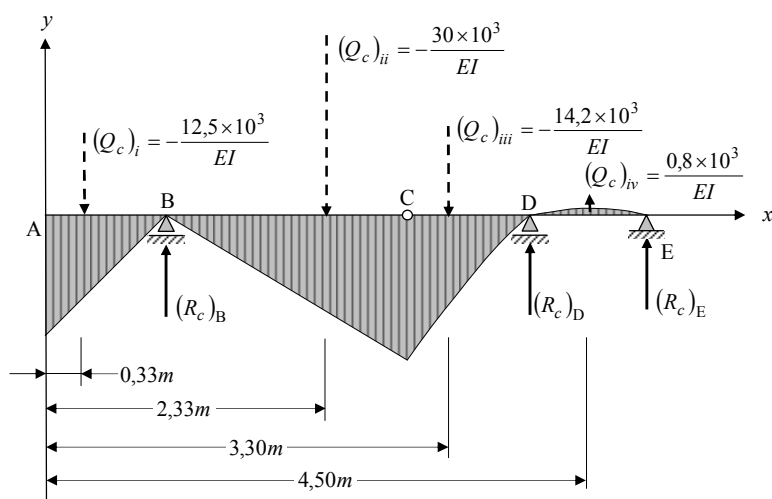
$$(x_G)_{iii} = \frac{-\frac{5 \times 10^3}{EI} \int_3^4 (x^2 - 13x + 36) x dx}{-\frac{14,17 \times 10^3}{EI}} = 3,30;$$

e

$$(Q_c)_{iv} = -\frac{5 \times 10^3}{EI} \int_4^5 (x^2 - 9x + 20) dx = \frac{0,83}{EI} \times 10^3,$$

com

$$(x_G)_{iv} = \frac{\frac{5 \times 10^3}{EI} \int_4^5 (x^2 - 9x + 20) x dx}{\frac{0,83 \times 10^3}{EI}} = 4,50$$



Agora, da condição de que o momento flector na rótula C deve ser nulo, resulta a seguinte equação:

$$(Q_c)_i \times (3 - (x_G)_i) + (R_c)_B \times 2 + (Q_c)_{ii} \times (3 - (x_G)_{ii}) = 0$$

ou seja:

$$-\frac{12,5 \times 10^3}{EI} \times 2,67 + (R_c)_B \times 2 - \frac{30 \times 10^3}{EI} \times 0,67 = 0$$

donde:

$$(R_c)_B = \frac{26,7 \times 10^3}{EI}$$

Por outro lado, da condição de equilíbrio dos momentos das forças exteriores (incluindo as reacções nos apoios), no ponto D, por exemplo, resulta a seguinte equação:

$$(Q_c)_i \times (4 - (x_G)_i) + (R_c)_B \times 3 + (Q_c)_{ii} \times (4 - (x_G)_{ii}) \\ + (Q_c)_{iii} \times (4 - (x_G)_{iii}) - (Q_c)_{iv} \times ((x_G)_{iii} - 4) - (R_c)_E \times 1 = 0$$

ou seja:

$$-\frac{12,5 \times 10^3}{EI} \times 3,67 + \frac{26,7 \times 10^3}{EI} \times 3 - \frac{30 \times 10^3}{EI} \times 1,67 \\ - \frac{14,2 \times 10^3}{EI} \times 0,7 - \frac{0,8 \times 10^3}{EI} \times 0,5 - (R_c)_E = 0$$

donde:

$$(R_c)_E = -\frac{26,2 \times 10^3}{EI}$$

Finalmente, da condição de equilíbrio vertical das forças exteriores (incluindo as reacções nos apoios), resulta a seguinte equação:

$$(Q_c)_i + (R_c)_B + (Q_c)_{ii} + (Q_c)_{iii} + (R_c)_D + (Q_c)_{iv} + (R_c)_E = 0$$

ou seja:

$$-\frac{12,5 \times 10^3}{EI} + \frac{26,7 \times 10^3}{EI} - \frac{30 \times 10^3}{EI} - \frac{14,2 \times 10^3}{EI} + (R_c)_D \\ + \frac{0,8 \times 10^3}{EI} - \frac{26,2 \times 10^3}{EI} = 0$$

donde:

$$(R_c)_D = \frac{55,4 \times 10^3}{EI}$$

Agora, tem-se:

$$\delta_B = (Q_c)_i \times 0,67 = -\frac{8,38 \times 10^3}{EI}$$

$$\delta_D = (R_c)_E \times 1 + (Q_c)_{iv} \times 0,5 = -\frac{25,8 \times 10^3}{EI}$$

ou, atendendo a que, para a viga em questão se tem $EI = 200 \times 10^9 \times 1,47 \times 10^{-5} = 2,94 \times 10^6 \text{ (Nm}^2\text{)}$:

$$\delta_B = -2,85 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$\delta_D = -8,78 \times 10^{-3} \text{ m}$$

Quanto às rotações das secções em C e E, tem-se:

$$\theta_C = -(V_c)_C = -[(Q_c)_i - (R_c)_B - (Q_c)_{ii}]$$

$$\theta_E = -(V_c)_E = -[(R_c)_E]$$

ou seja:

$$\theta_C = -\left[\frac{12,5 \times 10^{-3}}{EI} - \frac{26,7 \times 10^{-3}}{EI} + \frac{30 \times 10^{-3}}{EI} \right] = -\frac{15,8 \times 10^{-3}}{EI}$$

$$\theta_E = \frac{26,2 \times 10^{-3}}{EI}$$

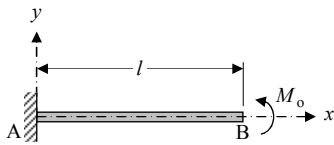
isto é:

$$\theta_C = -5,37 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

$$\theta_E = +8,91 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

7.3. PROBLEMAS PROPOSTOS

7.3.1. Considere uma viga em consola, de comprimento l e rigidez à flexão (EI), solicitada por um momento flector na extremidade livre, conforme indicado na figura.



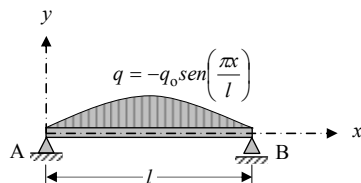
Determine, recorrendo ao método de integração da elástica, a equação da linha elástica da viga.

Solução: a) $y = M_0 x^2 / (2EI)$.

7.3.2. Para a viga a que se refere o problema anterior, e recorrendo agora à aplicação do teorema de Castigliano, determine:

- a)- A flecha em B.
 - b)- A rotação da secção em B
- Solução: a) $y_B = -M_0 l^2 / (2EI)$.
 b) $\theta_B = M_0 l / (EI)$.

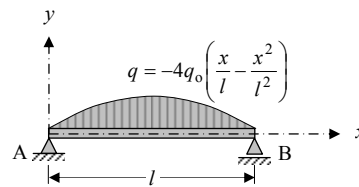
7.3.3. Considere a viga biapoiada representada na figura a seguir, de secção (EI), sujeita a uma distribuição contínua de carga $q = -q_0 \text{sen}(\pi x / l)$, em que q_0 é uma quantidade positiva.



- Determine:
- a)- A equação da linha elástica.
 - b)- A flecha máxima.
 - c)- As rotações nas extremidades A e B.

Solução: a) $y = -\frac{q_0 l^4}{\pi^4 EI} \text{sen}\left(\frac{\pi x}{l}\right)$
 b) $y_{\text{max}} = -q_0 l^4 / (\pi^4 EI)$, a meio vão.
 c) $\theta_A = -q_0 l^3 / (\pi^3 EI)$; $\theta_B = +q_0 l^3 / (\pi^3 EI)$.

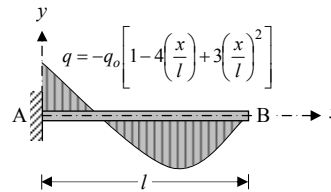
7.3.4. Considere a viga biapoiada representada na figura a seguir, de secção (EI), sujeita a uma distribuição contínua de carga $q = -4q_0(x/l - x^2/l^2)$, em que q_0 é uma quantidade positiva.



- Determine:
- a)- A equação da linha elástica.
 - b)- A flecha máxima.
 - c)- As rotações nas extremidades A e B.
- Solução:

a) $y = -\frac{q_0}{90l^2 EI} (x^6 - 3lx^5 + 5l^3x^3 - 3l^5x)$
 b) $y_{\text{max}} = -61q_0 l^4 / (8460EI)$, a meio vão.
 c) $\theta_A = -q_0 l^3 / (30EI)$; $\theta_B = +q_0 l^3 / (30EI)$.

7.3.5. Uma viga em consola de comprimento l e rigidez à flexão (EI), está solicitada por uma distribuição contínua de carga $q = -q_0[1 - 4(x/l) + 3(x/l)^2]$, conforme indicado na figura.

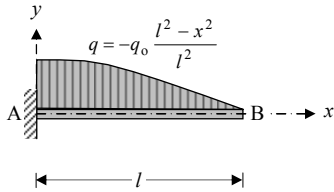


- Determine:
- a)- A equação da linha elástica.
 - b)- A flecha na extremidade B da viga.
 - c)- A rotação da secção em B

Solução:
 a) $y = -\frac{q_0}{120l^2 EI} (x^6 - 4lx^5 + 5l^2x^4 - 5l^4x^2)$
 b) $y_B = -q_0 l^4 / (40EI)$. c) $\theta_B = +q_0 l^3 / (30EI)$.

7.3.7. Relativamente à viga a que se refere o problema anterior, considere

agora um carregamento parabólico, conforme indicado na figura a seguir.



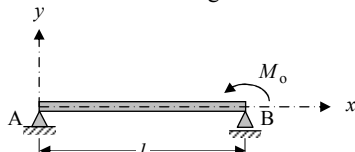
Determine:

- a)- O deslocamento vertical na extremidade livre B.
- b)- A rotação na extremidade livre B.

Solução: a) $y_B = -19q_0 l^4 / (360EI)$.

b) $\theta_B = -q_0 l^3 / (15EI)$.

7.3.7. Uma viga de comprimento l e rigidez à flexão (EI), está simplesmente apoiada nas extremidades e é solicitada por um momento M_0 na extremidade B, conforme indicado na figura.



Determine, recorrendo ao método de integração da elástica:

- a)- A equação da linha elástica.
- b)- A flecha máxima na viga.
- c)- As rotações nas secções A e B

Solução: a) $y = M_0(x^3 - l^2x) / (6EI)$.

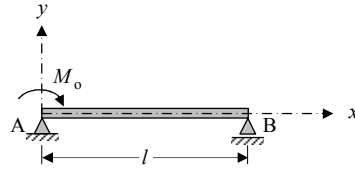
b) $y_{max} = -\sqrt{3} M_0 l^2 / (27EI)$, para $x = \sqrt{3} l / 3$.

c) $\theta_A = -M_0 l / (6EI)$; $\theta_B = +M_0 l / (3EI)$.

7.3.8. Resolva as alíneas b) e c) do problema anterior, recorrendo agora ao método da viga conjugada.

7.3.9. Resolva a alínea c) do problema 7.3.7., recorrendo à aplicação do teorema de Castigliano.

7.3.10. Relativamente à viga a que se referem os três problema anteriores, considere agora o momento M_0 aplicado na extremidade A, conforme indicado na figura a seguir.



Directamente a partir da solução do problema 7.3.7., determine:

- a)- A equação da linha elástica.
- b)- A flecha máxima na viga.

b)- As rotações nas secções A e B

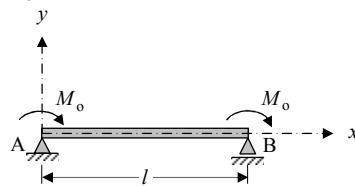
Solução: a) $y = M_0[(l-x)^3 - l^2(l-x)] / (6EI)$.

b) $y_{max} = -\sqrt{3} M_0 l^2 / (27EI)$, para

$x = (1 - \sqrt{3} / 3)l$.

c) $\theta_A = -M_0 l / (3EI)$; $\theta_B = +M_0 l / (6EI)$.

7.3.11. Ainda relativamente à viga a que se referem os quatro problemas anteriores, considere agora uma solicitação por dois momentos iguais (M_0), conforme indicado na figura.



Utilizando o princípio da sobreposição, determine:

- a)- A equação da linha elástica.
- b)- A flecha máxima na viga.

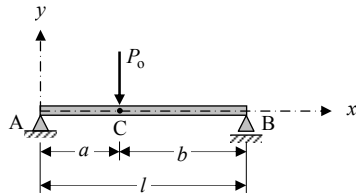
Solução: a) $y = -M_0(2x^3 - 3lx^2 + l^2x) / (6EI)$.

b) $y_{max} = \pm 0,096 M_0 l^2 / (6EI)$, para $x = 0,789l$ e $x = 0,211l$, respectivamente.

7.3.12. Relativamente à viga a que se refere o problema anterior, e recorrendo à aplicação do teorema de Castigliano, determine as rotações nas secções A e B

Solução: $\theta_A = \theta_B = -M_0 l / (6EI)$.

7.3.13. Uma viga AB de comprimento l e rigidez à flexão (EI), está simplesmente apoiada nas extremidades e é solicitada por uma força concentrada $P = -P_0$ numa secção intermédia C, conforme indicado na figura.



Determine:

- a)- A equação da linha elástica.
- b)- A flecha no ponto C.
- c)- As rotações nas secções A e B

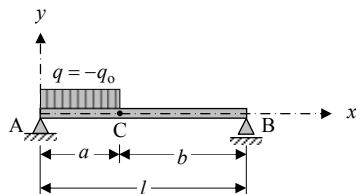
Solução: a) $y = -P_0bx(l^2 - b^2 - x^2)/(6EI)$, para $0 \leq x \leq a$; $y = -P_0a(l-x)[l^2 - a^2 - (l-x)^2]$, para $a \leq x \leq l$.

b) $y_C = -P_0a^2b^2/(6EI)$.

c) $\theta_A = -P_0ab(l+b)/(3EI)$;

$\theta_B = +P_0ab(l+a)/(6EI)$.

7.3.14. Relativamente à viga a que se refere o problema anterior, considere agora o carregamento por uma distribuição contínua $q = -q_0$, sobre o comprimento a , conforme indicado na figura.



Determine:

- a)- A equação da linha elástica.
- b)- A flecha no ponto C.
- c)- A rotações na secção B

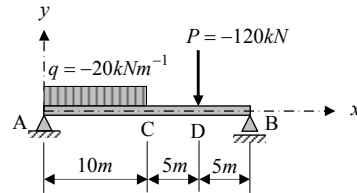
Solução: a) $y = -q_0x[a^2(2l-a)^2 - 2a(2l-a)x^2 + lx^3]/(24EI)$, para $0 \leq x \leq a$ e

$y = -q_0x[a^2(2l-a)^2 - 2a(2l-a)x^2 + lx^3 + l(x-a)^4/x]/(24EI)$, para $a \leq x \leq l$.

b) $y_C = -q_0a^3(4l^2 - 7al + 3a^2)/(24EI)$.

c) $\theta_B = -q_0a^2(2l^2 - a^2)/(24EI)$.

7.3.15. Uma viga simplesmente apoiada nas extremidades, com 20m de comprimento, módulo de Young $E=200\text{GPa}$ e momento de inércia $I=2,6 \times 10^9\text{mm}^4$, está solicitada conforme indicado na figura.



Determine:

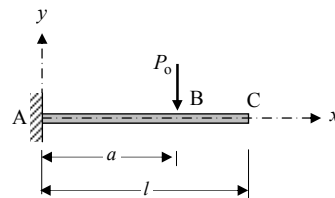
- a)- A equação da linha elástica.
- b)- A rotação na extremidade B da viga.
- c)- A flecha na secção D.

Solução:

a) $y = -(5625x - 30x^3 + 5x^4)/(6EI)$, para $x \leq a$ e $y = -[5625x - 30x^3 + 5x^4 + 5(x-10)^4 - 120(x-15)^3]/(6EI)$, para $a \leq x \leq l$, com x e y em m, E em kPa e I em m^4 .

b) $\theta_B = -0,0107\text{rad}$. c) $y_D = -47,7\text{mm}$.

7.3.17. Considere a viga em consola de comprimento l e rigidez à flexão (EI) solicitada por uma força concentrada ($-P_0$), conforme indicado na figura a seguir.



Determine:

- a)- A equação da linha elástica.
- b)- A rotação da extremidade livre.
- c)- O deslocamento vertical da extremidade livre.

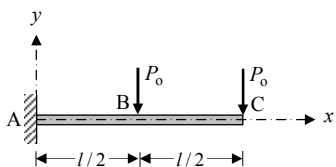
Solução:

a) $y = P_0x^2(x-3a)/(6EI)$, para $x \leq a$ e $y = P_0[x^2(x-3a) - (x-a)^3]/(6EI)$, para $a \leq x \leq l$.

b) $\theta_C = -P_0a^2/(2EI)$.

c) $y_C = -P_0a^2(3l-a)/(6EI)$.

7.3.17. Considere a viga em consola de comprimento l e rigidez à flexão (EI), solicitada por duas forças concentradas ($-P_0$), conforme indicado na figura.



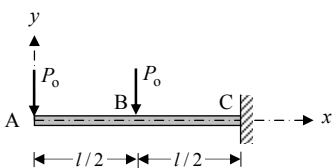
- Determine, recorrendo ao método de integração da elástica:
- a)- A equação da linha elástica da viga.
 - b)- A rotação da extremidade livre.
 - c)- O deslocamento vertical da extremidade livre.

Solução:

a) $y = P_0 (x^3/3 - 3lx^2/4)/(EI)$, para $x \leq l/2$ e $y = P_0 [x^3/3 - (2x-l)^3/48 - 3lx^2/4]/(EI)$, para $x \geq l/2$.

b) $\theta_C = 5Pl^2/(8EI)$. c) $y_C = -7Pl^3/(16EI)$.

7.3.18. Reconsidere o problema anterior, agora para a situação representada na figura a seguir:



Solução:

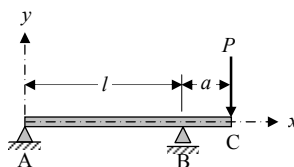
a) $y = P_0 (-x^3/3 + 5l^2x/4 - 7l^3/8)/(2EI)$, para $x \leq l/2$ e $y = -P_0 \{ [x^3/3 + (x-l/2)^3]/3 - 5l^2x/4 + 7l^3/8 \}/(2EI)$, para $x \geq l/2$.

b) $\theta_A = 5Pl^2/(8EI)$. c) $y_A = -7Pl^3/(16EI)$.

7.3.19. Resolva as alíneas b) e c) do problema anterior, recorrendo à utilização do método da viga conjugada.

7.3.20. Resolva o problema 7.3.17 utilizando o método da sobreposição, a partir da solução do problema 7.3.17.

7.3.21. Considere a viga biapoiada representada na figura a seguir, de secção (EI), sujeita a uma força concentrada P na extremidade C.



Determine:

- a)- A equação da linha elástica entre os apoios A e B.
- b)- A flecha máxima em AB.

Solução: a) $y = \frac{Pal^2}{6EI} \left[\frac{x}{l} - \left(\frac{x}{l} \right)^3 \right]$

b) $y_{max} = 0,0642Pal^2/EI$, para $x = 0,577l$.

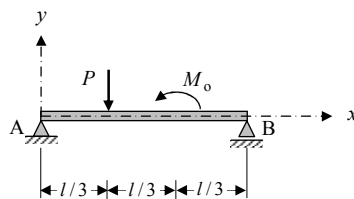
7.3.22. Relativamente à viga a que se refere o problema anterior, e recorrendo à utilização do método da viga conjugada, determine:

- a)- As rotações das secções nos apoios A e B da viga.
- b)- O deslocamento vertical da secção C.

Solução: a) $\theta_A = Pal/(EI)$; $\theta_B = -2Pal/(EI)$.

b) $y_C = -Pa^2(l+a)/(3EI)$.

7.3.23. Para a viga representada na figura a seguir, simplesmente apoiada nas extremidades e sujeita a uma força concentrada P e um momento Mo, determine:



- a)- A equação da linha elástica.
- b)- A rotação no apoio A.
- c)- O deslocamento vertical no centro.

Solução:

a) $y = \left(\frac{2P}{3} + \frac{M_0}{l} \right) \frac{x^3}{6} - \left(\frac{5Pl^2}{81} + \frac{M_0l}{9} \right) x$,

para $x \leq \frac{l}{3}$; $y = \left(\frac{2P}{3} + \frac{M_0}{l} \right) \frac{x^3}{6} -$

$$-\left(\frac{5Pl^2}{81} + \frac{M_0 l}{9}\right)x - \frac{P}{6}\left(x - \frac{l}{3}\right)^3,$$

para $\frac{l}{3} \leq x \leq \frac{2l}{3}$ e $y = \left(\frac{2P}{3} + \frac{M_0}{l}\right)\frac{x^3}{6} -$

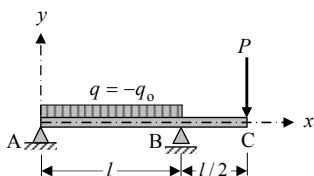
$$-\left(\frac{5Pl^2}{81} + \frac{M_0 l}{9}\right)x - \frac{P}{6}\left(x - \frac{l}{3}\right)^3 -$$

$$-\frac{M_0}{2}\left(x - \frac{2l}{3}\right)^2, \text{ para } x \geq \frac{2l}{3}.$$

b) $\theta_A = -\frac{5Pl^2}{81EI} - \frac{M_0 l}{9EI}$

c) $y_C = -\frac{23Pl^3}{1296EI} - \frac{5M_0 l^2}{144EI}.$

7.3.24. Considere a viga biapoiada representada na figura a seguir, de secção (EI), sujeita a uma distribuição de carga uniforme q_0 entre A e B e a uma força concentrada P na extremidade C.



Determine:

a)- A flecha a meio vão do segmento entre os dois apoios A e B.

b)- A flecha em C.

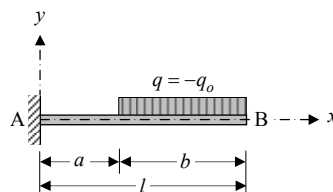
c)- A rotação da secção em C.

Solução: a) $y = \frac{l^3}{24EI} \left(\frac{3P}{4} - \frac{13q_0 l}{16} \right)$

b) $y_C = \frac{l^3}{8EI} \left(P - \frac{q_0 l}{6} \right)$

c) $\theta_C = \frac{l^2}{24EI} (q_0 l - 7P).$

7.3.25. Uma viga em consola de comprimento l e rigidez à flexão (EI), está solicitada por uma distribuição de carga uniforme ($-q_0$), entre $x = a$ e $x = l$, conforme indicado na figura.



Determine:

a)- A equação da linha elástica.

b)- A flecha na extremidade B da viga.

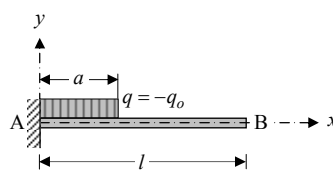
c)- A rotação da secção em B.

Solução: a) $y = -q_0 b x^2 (3l + 3a - 2x) / (12EI)$, para $x \leq a$ e $y = -q_0 [2bx^2 (3l + 3a - 2x) + (x - a)^4] / (24EI)$, para $a \leq x \leq l$.

b) $y_B = -q_0 (3l^4 - 4a^3 l + a^4) / (24EI)$.

c) $\theta_B = -q_0 (l^3 - a^3) / (6EI)$.

7.3.27. Para a viga a que se refere o problema anterior, considere agora o carregamento representado na figura a seguir.



Determine:

a)- A equação da linha elástica.

b)- A rotação e a flecha na secção $x = a$.

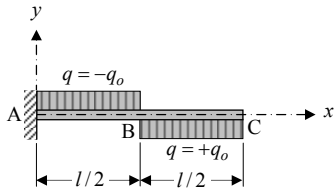
c)- A rotação e a flecha na extremidade livre da viga.

Solução: a) $y = -q_0 (6a^2 - 4ax + x^2) / (24EI)$, para $x \leq a$ e $y = -q_0 [6a^2 - 4ax + x^2 - (x - a)^4] / (24EI)$, para $x \geq a$

b) $\theta(a) = -q_0 a^3 / (6EI)$; $y(a) = -q_0 a^4 / (8EI)$.

c) $\theta_B = -q_0 a^3 / (6EI)$; $y_B = -q_0 a^3 (4l - a) / (24EI)$.

7.3.27. Considere uma viga em consola de comprimento l e rigidez à flexão (EI), solicitada por uma distribuição de carga conforme indicado na figura.



Determine:

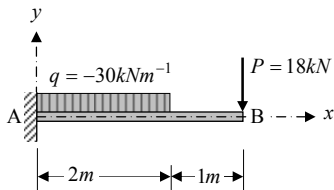
- a)- A equação da linha elástica para o segmento AB.
- b)- A flecha em B.
- c)- A rotação da secção em B

Solução: a) $y = q_0 (3l^2 x^2 - x^4) / (24EI)$.

b) $y_B = 11q_0 l^4 / (384EI)$.

c) $\theta_B = 5q_0 l^3 / (48EI)$.

7.3.28. Uma viga em consola com 3m de comprimento, módulo de Young $E=70GPa$ e momento de inércia $I=0,2 \times 10^9 mm^4$, está solicitada conforme indicado na figura.



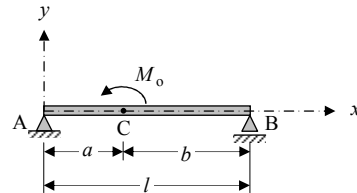
Determine:

- a)- A equação da linha elástica.
- b)- A flecha na extremidade B da viga.
- c)- A rotação da secção em B.

Solução: a) $y = -(5x^4 - 52x^3 + 228x^2) / (4EI)$, para $x \leq a$ e $y = -[5x^4 - 52x^3 + 228x^2 - 5(x-2)^4] / (4EI)$, para $a \leq x \leq l$, com x e y em m, E em kPa e I em m^4 .

b) $y_B = -18,71m$. c) $\theta_B = -0,00864rad$.

7.3.29. Uma viga AB de comprimento l e rigidez à flexão (EI) , está simplesmente apoiada nas extremidades e é solicitada por um momento M_0 numa secção intermédia C, conforme indicado na figura.



Determine:

- a)- A equação da linha elástica.
- b)- A flecha máxima no ponto C.
- c)- As rotações nas secções A e B

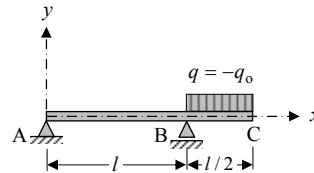
Solução: a) $y = M_0 x(x^2 + 3b^2 - l^2) / (6EI)$, para $0 \leq x \leq a$; $y = -M_0(l-x)[(l-x)^2 + 3a^2 - l^2] / (6EI)$, para $a \leq x \leq l$.

b) $y_C = -M_0 ab(a-b) / (3EI)$.

c) $\theta_A = +M_0(3b^2 - l^2) / (6EI)$;

$\theta_B = +M_0(3a^2 - l^2) / (6EI)$.

7.3.30. Considere a viga biapoiada representada na figura a seguir, de secção (EI) , sujeita a uma distribuição de carga uniforme $q = -q_0$ entre as secções B e C.



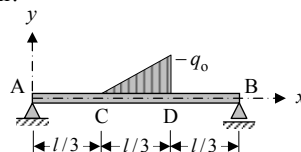
Determine:

- a)- A flecha na secção extrema C.
- b)- A rotação na mesma secção C.

Solução: a) $y_C = -11q_0 l^4 / (384EI)$.

b) $\theta_C = -q_0 l^3 / (16EI)$.

7.3.31. Considere uma viga biapoiada, de rigidez à flexão (EI) , sujeita a uma distribuição de carga triangular no terço central, conforme representada na figura a seguir.



Determine:

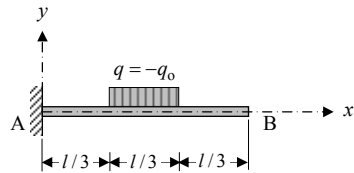
- a)- A equação da linha elástica.
- b)- A flecha na secção C.

c)- A rotação na extremidade B.

Solução:

a) $y = -q_0(47l^3x/4860 - lx^3/81)/(EI)$, para $x \leq l/3$; $y = -q_0[47l^3x/4860 - lx^3/81 + (x-2l/3)^5/(40l)]/(EI)$, para $l/3 \leq x \leq 2l/3$; e $y = -q_0[47l^3x/4860 - lx^3/81 + (x-l/3)^5/(40l) - (x-2l/3)^5/(40l) - (x-2l/3)^4/24]/(EI)$, para $2l/3 \leq x \leq l$. b) $y_C = -121q_0l^4/(43,74EI)$. c) $\theta_B = 101q_0l^3/(9720EI)$.

7.3.32. Uma viga em consola de comprimento l e rigidez à flexão (EI), está solicitada por uma distribuição de carga uniforme ($-q_0$), no terço médio do seu comprimento, conforme indicado na figura.

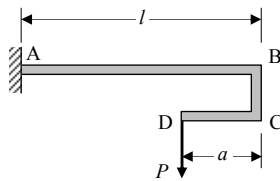


Determine:

- a)- A flecha na extremidade B da viga.
b)- A rotação da secção em B.

Solução: a) $y_B = -23q_0 l^4/(648EI)$.
b) $\theta_B = -7q_0 l^3/(162EI)$.

7.3.33. Considere o elemento linear representado na figura a seguir.



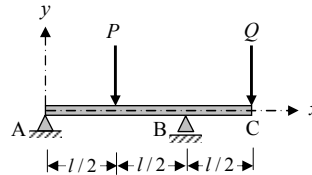
Determine:

- a) O valor da relação a/l de forma a que o deslocamento vertical do ponto B seja igual a zero.
b) O valor da relação a/l de forma a que a rotação na secção B seja igual a zero.

Solução: a) $a/l = 2/3$. b) $a/l = 1/2$.

7.3.34. Considere a viga biapoiada, de secção (EI), sujeita a duas forças

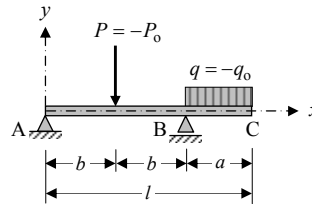
concentradas de intensidades P e Q , conforme representado na figura a seguir.



Determine a relação entre as intensidades das duas forças (P/Q) para que seja nula a flecha na extremidade livre C.

Solução: $P/Q=4$.

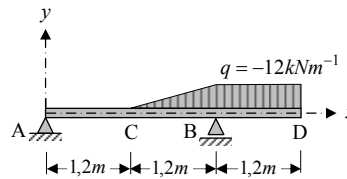
7.3.35. Considere a viga biapoiada, de secção (EI), sujeita a uma solicitação conforme representado na figura a seguir.



Determine a flecha no ponto médio da viga.

Solução: $\delta = -q_0 a^2 (l-2a)^2 / (16EI)$

7.3.37. Considere a viga representada na figura a seguir e sujeita a uma solicitação conforme indicado. Para efeitos de cálculo, tome $E=200\text{GPa}$ e $I=15 \times 10^6 \text{mm}^4$.



Determine:

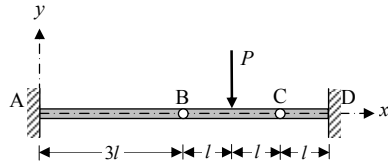
- a) A equação da linha elástica.
b) O deslocamento vertical do ponto C.
c) O deslocamento vertical do ponto D.

Solução:

a) $y = -1,33 \times 10^{-4} x^3 + 7,97 \times 10^{-4} x$, para $x \leq 1,2\text{m}$;
 $y = -1,33 \times 10^{-4} x^3 + 7,97 \times 10^{-4} x - 2,78 \times 10^{-5} (x-1,2)^5$, para $1,2\text{m} \leq x \leq 3,6\text{m}$ e

$y = -1,33 \times 10^{-4} x^3 + 7,97 \times 10^{-4} x - 2,78 \times 10^{-5} (x-1,2)^5 + 2,78 \times 10^{-5} (x-2,4)^5 + 1,33 \times 10^{-3} (x-2,4)^3$,
 para $2,4m \leq x \leq 3,6m$. b) $y_C = 0,726mm$.
 b) $y_D = -3,19mm$.

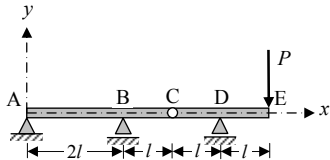
7.3.37. Considere uma viga bi-encastada, de comprimento $6l$ e rigidez à flexão (EI), com duas rótulas intermédias em B e C e solicitada por uma força concentrada P , conforme representado na figura a seguir.



Determine o deslocamento vertical do ponto de aplicação da força P .

Solução: $\delta_P = -5P^3/(2EI)$.

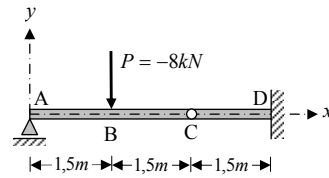
7.3.38. Considere uma viga de comprimento $5l$ e rigidez à flexão (EI), apoiada em três secções A, B e D, com uma rótula intermédias em C e solicitada por uma força concentrada P na extremidade E, conforme representado na figura a seguir.



Determine o deslocamento vertical do ponto de aplicação da força P .

Solução: $\delta_P = -5P^3/(3EI)$.

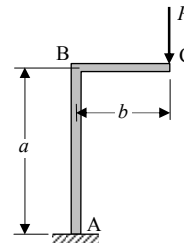
7.3.39. Considere uma viga de $4,5m$ de comprimento e rigidez à flexão (EI), simplesmente apoiada na extremidade A e encastada na extremidade D, com uma rótula intermédias em C e solicitada por uma força concentrada $P = -8kN$ na secção B, conforme representado na figura a seguir. Para efeitos de cálculo, tome $E=200GPa$ e $I=15 \times 10^6 mm^4$.



Determine o deslocamento vertical do ponto de aplicação da força P .

Solução: $y_B = -2,25mm$.

7.3.40. Considere o elemento linear representado na figura a seguir.



Admitindo, apenas, a deformação devido à flexão, determine:

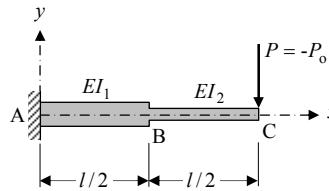
a) O deslocamento horizontal (δ_h) do ponto do ponto C.

b) O deslocamento vertical (δ_v) do ponto do ponto C.

Solução: a) $\delta_h = Pa^2b/(2EI)$.

b) $\delta_v = Pb^2(3a+b)/(3EI)$.

7.3.41. Considere uma viga em consola constituída por dois troços de comprimento igual e rigidez à flexão (EI_1) e (EI_2), respectivamente, solicitada por uma carga concentrada na extremidade livre, conforme indicado na figura.



Determine:

a) O deslocamento vertical do ponto C.

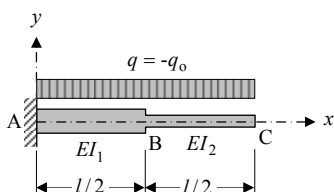
b) A relação (r) entre o deslocamento que calculou na alínea anterior e o

deslocamento no mesmo ponto, se a viga tivesse uma rigidez uniforme (EI_2).

Solução: a) $y_C = -P_0 l^3(7/I_1 + 1/I_2)/(24E)$.

b) $r = (1 + 7I_2/I_1)/8$.

7.3.42. Para a viga a que se refere o problema anterior, considere agora uma solicitação uniformemente distribuída, conforme indicado na figura.



Determine:

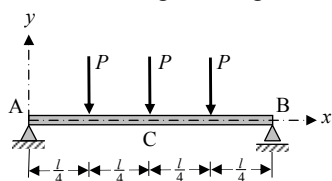
a) O deslocamento vertical do ponto C.

b) A relação (r) entre o deslocamento que calculou na alínea anterior e o deslocamento no mesmo ponto, se a viga tivesse uma rigidez uniforme (EI_2).

Solução: a) $y_C = -q_0 l^4(15/I_1 + 1/I_2)/(128E)$.

b) $r = (1 + 15I_2/I_1)/17$.

7.3.43. Considere uma viga de comprimento l e rigidez à flexão uniforme (EI) ao longo de todo o comprimento l , simplesmente apoiada nas extremidades e sujeita à acção de três forças iguais $P = -P_0$, conforme representado na figura a seguir:

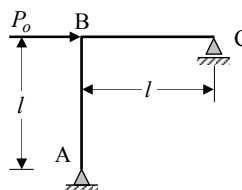


Determine o deslocamento vertical do ponto médio da viga.

Solução: $y_C = -16P^3/(384EI)$.

7.3.44. Considere o pórtico rectangular plano ABC representado na figura a seguir, simplesmente apoiado nas secções extremas A e C e sujeito

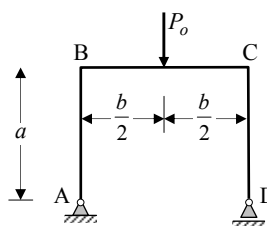
a uma força horizontal $P = P_0$, aplicada na secção intermédia em B.



Os dois elementos AB e BC do pórtico estão rigidamente ligados em B e ambos têm o mesmo comprimento (l) e a mesma rigidez à flexão (EI). Determine, recorrendo à aplicação do Teorema de Castigliano, o deslocamento horizontal δ_B da secção em B.

Solução: $\delta_B = 2Pl^3/(3EI)$.

7.3.45. Considere o pórtico plano ABCD representado na figura a seguir, simplesmente apoiado nas secções extremas A e D e sujeito a uma força vertical $P = -P_0$ aplicada na secção média do elemento horizontal BC.

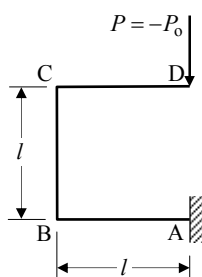


O elemento horizontal, de rigidez à flexão (EI_2) e comprimento b está rigidamente ligado aos dois elementos verticais, ambos de comprimento a e rigidez à flexão (EI_1). Determine, recorrendo à aplicação do Teorema de Castigliano: a) O deslocamento horizontal δ_D do patim na extremidade D.

b) O ângulo de rotação θ_D da secção em D.

Solução: a) $\delta_D = P_0 ab^2 / (8EI_2)$.
 b) $\theta_D = P_0 b^2 / (16EI_2)$.

7.3.47. Considere o pórtico plano ABCD representado na figura a seguir, encastrado na secção extrema A e sujeito a uma força vertical $P = -P_0$ aplicada na outra extremidade D.

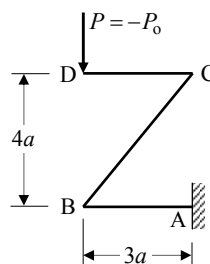


Os três elementos do pórtico são todos iguais, de comprimento l e rigidez à flexão (EI) . Determine, recorrendo à aplicação do Teorema de Castigliano:

- a) O deslocamento vertical $(\delta_v)_D$ do ponto D;
- b) O deslocamento horizontal $(\delta_h)_D$ do ponto D;
- c) A rotação θ_D da secção em D.

Solução: a) $(\delta_v)_D = -5P_0 l^3 / (3EI)$.
 b) $(\delta_h)_D = P_0 l^3 / (EI)$.
 c) $\theta_D = -2P_0 l^2 / (EI)$.

7.3.47. Considere a estrutura linear plana ABCD, em forma de Z, representado na figura a seguir, encastrada na extremidade D e sujeita a uma força vertical $P = -P_0$ aplicada na outra extremidade A.

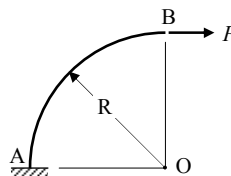


Os três elementos do pórtico têm a mesma rigidez à flexão (EI) . Determine, recorrendo à aplicação do Teorema de Castigliano:

- a) O deslocamento vertical $(\delta_v)_D$ do ponto D;
- b) A rotação θ_D da secção em D.

Solução: a) $(\delta_v)_D = -33P_0 a^3 / (EI)$.
 b) $\theta_D = 33P_0 a^2 / (2EI)$.

7.3.48. A barra curva representada na figura a seguir tem a linha média AB em forma de um quarto de circunferência de raio R , centro em O e uma rigidez à flexão (EI) constante ao longo de todo o comprimento do arco.

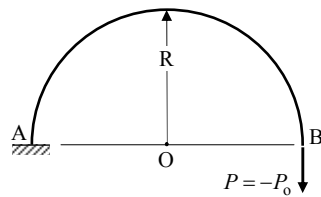


Na extremidade B está aplicada uma força horizontal de intensidade $P = P_0$. Determine, recorrendo à aplicação do Teorema de Castigliano:

- a) O deslocamento horizontal $(\delta_h)_B$ do ponto B;
- b) O deslocamento vertical $(\delta_v)_B$ do ponto B;
- c) A rotação θ_B da secção em B.

Solução: a) $(\delta_h)_B = 5P_0 R^3 (3\pi - 8) / (4EI)$.
 b) $(\delta_v)_B = -P_0 R^3 / (2EI)$.
 c) $\theta_B = -P_0 R^2 (\pi - 2) / (2EI)$.

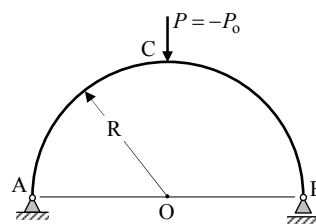
7.3.49. A barra curva representada na figura a seguir tem a linha média AB em forma de uma semi-circunferência de raio R, centro em O e uma rigidez à flexão (EI) constante ao longo de toda a circunferência.



A barra está encastrada em A e em B está aplicada uma força vertical de intensidade $P = -P_0$. Determine, recorrendo à aplicação do Teorema de Castigliano:

- a) O deslocamento horizontal $(\delta_h)_B$ do ponto B;
 - b) O deslocamento vertical $(\delta_v)_B$ do ponto B;
 - c) A rotação θ_B da secção em B.
- Solução: a) $(\delta_h)_B = -2P_0R^3/(EI)$.
 b) $(\delta_v)_B = -3\pi P_0R^3/(2EI)$.
 c) $\theta_B = -\pi P_0R^2/(EI)$.

7.3.50. A barra curva representada na figura a seguir tem a linha média AB em forma de uma semi-circunferência de raio R, centro em O e uma rigidez à flexão (EI) constante ao longo de toda a circunferência.



A barra está simplesmente apoiada nas extremidades A e B. No ponto médio C está aplicada uma força vertical de intensidade $P = -P_0$. Determine, recorrendo à aplicação do Teorema de Castigliano:

- a) O deslocamento vertical $(\delta_v)_C$ do ponto C;
 - b) O deslocamento horizontal $(\delta_h)_B$ do ponto B;
- Solução: a) $(\delta_v)_C = -P_0R^3(3\pi-8)/(8EI)$.
 b) $(\delta_h)_B = P_0R^3/(2EI)$.

3.4. BIBLIOGRAFIA

[5.4.1]-Beer, F.P., and Johnston, E.E., "Mechanics of Materials", McGraw-Hill Book Co., London (1992).
 [5.4.2]-Beer, Ferdinand P.; Johnston, E. Russell Jr., and DeWolf, John T., "Resistência dos Materiais", Ed. McGraw-Hill Book Company, São Paulo, Brasil (2006).
 [5.4.3]-Benham, P.P. and Warnock, F.V., "Mechanics of Solids and Structures", Ed. Pitman Publishing, London, (1976).
 [5.4.4]-Boresi, A.P., "Elasticity in Engineering Mechanics", Ed. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J. (1965).

- [5.4.5]-Branco, C.A.M., "Mecânica dos Materiais", Ed. Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa (1985).
- [5.4.6]-Fenner R.T., "Engineering Elasticity", Ed. John Wiley & Sons, New York (1986).
- [5.4.7]-Ford, H. and Alexander, J.M., "Advanced Mechanics of Materials", Ed. Longmans, Green and Co. Ltd., London (1963).
- [5.4.8]-Gere, James M., "Mecânica dos Materiais", Ed. Thomson, São Paulo, Brasil (2003).
- [5.4.9]-Gere, James M. and Timoshenko, S.P., "Mechanics of Materials", Ed. Chapman & Hall, New York (1995).
- [4.4.10]- Hearn, E.J., "Mechanics of Materials", Ed. Pergamon Press, Oxford, (1981).
- [5.4.11]-Massonnet, C., "Résistance des Matériaux", Dunod, Paris (1968).
- [5.4.12]-Nash, William A., "Resistência de Materiais", Ed. McGraw-Hill, Lisboa (2001).
- [5.4.13]-Portela, A., e Silva, A., "Mecânica dos Materiais", Plátano Edições Técnicas, Lisboa (1996).
- [5.4.14]-Silva Gomes, J.F., "Mecânica dos Sólidos e Resistência dos Materiais", Edições INEGI, Porto (2004).
- [5.4.15]-Silva Gomes, J.F., "Análise de Tensões em Placas, Cascas e Reservatórios", Edições INEGI, Porto (2006).
- [5.4.16]-Southwell, R.V., "An Introduction to The Theory of Elasticity", Ed. Dover Publications, Inc., New York (1969).
- [5.4.17]-Timoshenko, S.P. and D. Young, "Elements of Strength of Materials", Ed. Van Nostrans Reinhold Company, New York (1968).
- [5.4.18]-Timoshenko, S.P. and Goodier, J.N., "Theory of Elasticity", Ed. McGraw-Hill Book Company, New York (1970).
- [5.4.19]-Ugural, A.C. and Fenster, S.K., "Advanced Strength and Applied Elasticity", Ed. Elsevier North-Holland Publishing Company, Inc., New York (1975).
- [5.4.20]-Wang, C.T., "Applied Elasticity", Ed. McGraw-Hill Book Company, New York (1953).