

**CAPÍTULO II**  
**ANÁLISE DAS DEFORMAÇÕES**

**4ª AULA**

**1.1. RESUMO DA TEORIA**

**2.1.1. Deslocamento e Deformação Linear**

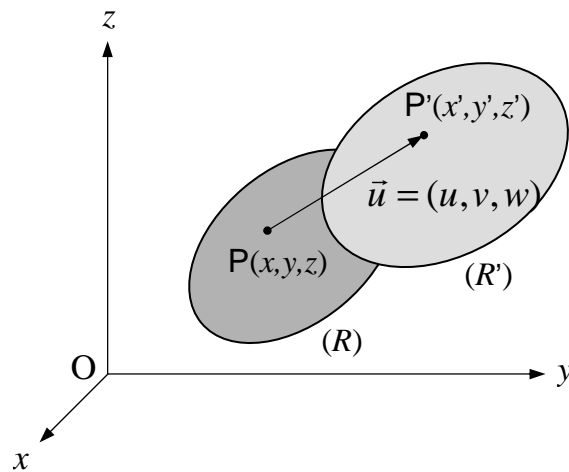


Fig. 2.1 – Vector Deslocamento

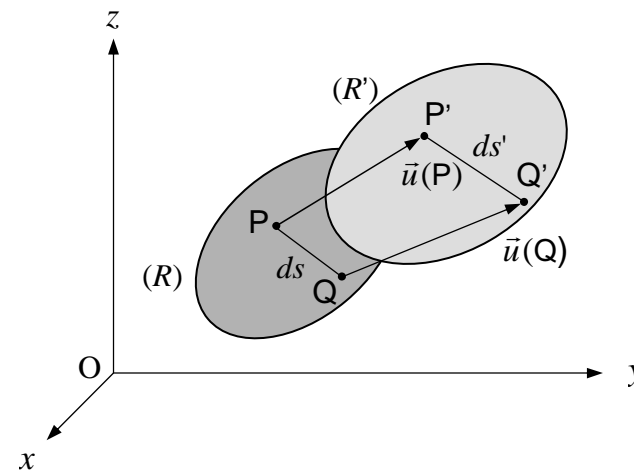


Fig. 2.2 - Deformação linear ou extensão

Deformação linear do segmento PQ:

$$\epsilon_{PQ} = \frac{ds' - ds}{ds} \tag{2.1}$$

Deformação linear ou extensão linear no ponto P, segundo a direcção  $\vec{n} = (l, m, n)$ :

$$\varepsilon(P, \vec{n}) = \lim_{ds \rightarrow 0} \frac{ds' - ds}{ds} \quad (2.2)$$

Componentes cartesianas lineares da deformação no ponto P:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \varepsilon(P, \vec{i}) \\ \varepsilon_{yy} &= \varepsilon(P, \vec{j}) \\ \varepsilon_{zz} &= \varepsilon(P, \vec{k}) \end{aligned} \quad (2.3)$$

### 2.1.2. Distorção ou Deformação de Corte

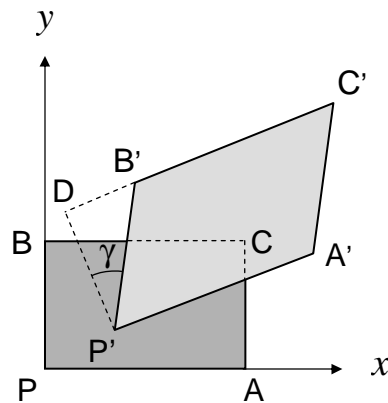


Fig. 2.3 – Distorção dum rectângulo

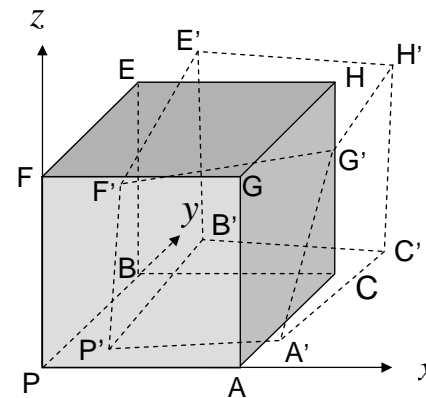


Fig. 2.4 – Distorção dum paralelepípedo

$$\text{Deformação de corte ou distorção} = \frac{DB'}{DP} = \text{tg}(\gamma) \cong \gamma \quad (\gamma_{xy} = \gamma_{yx})$$

No caso dum elemento tridimensional, Fig.2.4, obtêm-se assim as três *componentes cartesianas da distorção ou deformação de corte* no ponto P:

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} ; \quad \gamma_{yz} = \gamma_{zy} ; \quad \gamma_{xz} = \gamma_{zx} \quad (2.4)$$

### 2.1.3. Matriz e Vector das Deformações

As seis *componentes cartesianas da deformação* podem obter-se por derivação do campo dos deslocamentos:

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} & \epsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} & \epsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} & \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \quad (2.5)$$

As seis componentes cartesianas da deformação podem agrupar-se sob a forma da *matriz das deformações* ou do *vector deformação* no ponto P:

**Matriz das Deformações:**

$$[\epsilon] = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \epsilon_{yy} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

**Vector Deformação:**

$$\epsilon = \{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

### 2.1.4. Deformação Segundo Direcções Arbitrárias

A deformação linear segundo uma direcção arbitrária  $\vec{n} = (l, m, n)$ , e a distorção do diedro  $(\vec{n}, \vec{t})$  podem exprimir-se em termos das componentes cartesianas da deformação no ponto considerado:

$$\varepsilon(P, \vec{n}) = \varepsilon_{xx}l^2 + \varepsilon_{yy}m^2 + \varepsilon_{zz}n^2 + \gamma_{xy}lm + \gamma_{yz}mn + \gamma_{xz}nl \quad (2.7a)$$

e

$$\begin{aligned} \gamma_{n,t} = & 2(\varepsilon_{xx}ll' + \varepsilon_{yy}mm' + \varepsilon_{zz}nn') \\ & + \gamma_{yz}(mn' + m'n) + \gamma_{xz}(ln' + l'n) + \gamma_{xy}(lm' + l'm) \end{aligned} \quad (2.7b)$$

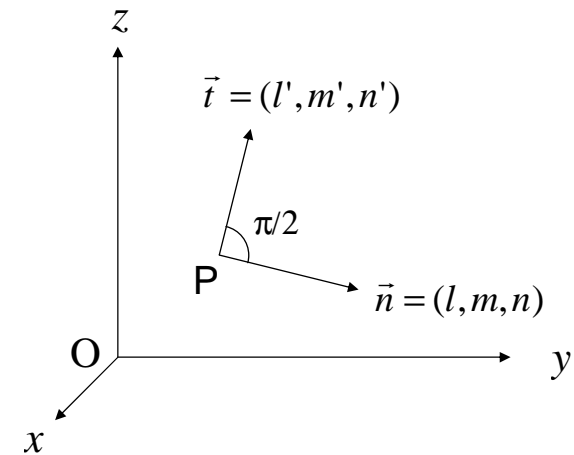


Fig. 2.6 – Distorção  $\gamma_{nt}$

### 2.1.5. Leis de Transformação das Deformações

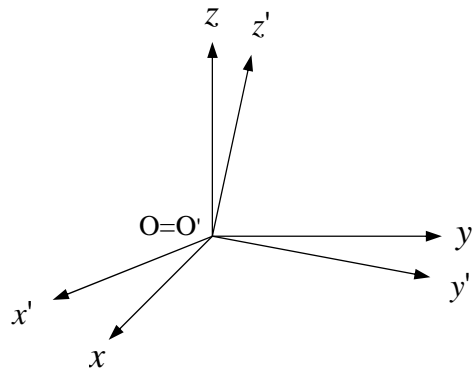


Fig. 2.7– Referenciais  $Oxyz$  e  $Ox'y'z'$

$$[\mathbf{L}] = \begin{bmatrix} l_{x'} & m_{x'} & n_{x'} \\ l_{y'} & m_{y'} & n_{y'} \\ l_{z'} & m_{z'} & n_{z'} \end{bmatrix}$$

Aplicando, as equações (27), obtém-se:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{x'x'} &= \varepsilon_{xx}l_x'^2 + \varepsilon_{yy}m_x'^2 + \varepsilon_{zz}n_x'^2 + \gamma_{yz}m_x'n_x' + \gamma_{xz}n_x'l_x' + \gamma_{xy}l_x'm_x' \\
 \varepsilon_{y'y'} &= \varepsilon_{xx}l_y'^2 + \varepsilon_{yy}m_y'^2 + \varepsilon_{zz}n_y'^2 + \gamma_{yz}m_y'n_y' + \gamma_{xz}n_y'l_y' + \gamma_{xy}l_y'm_y' \\
 \varepsilon_{z'z'} &= \varepsilon_{xx}l_z'^2 + \varepsilon_{yy}m_z'^2 + \varepsilon_{zz}n_z'^2 + \gamma_{yz}m_z'n_z' + \gamma_{xz}n_z'l_z' + \gamma_{xy}l_z'm_z' \\
 \gamma_{y'z'} &= 2\varepsilon_{xx}l_y'l_z' + 2\varepsilon_{yy}m_y'm_z' + 2\varepsilon_{zz}n_y'n_z' + \gamma_{yz}(m_y'n_z' + n_y'm_z') \\
 &\quad + \gamma_{xz}(n_y'l_z' + l_y'n_z') + \gamma_{xy}(l_y'm_z' + m_y'l_z') \\
 \gamma_{x'z'} &= 2\varepsilon_{xx}l_z'l_x' + 2\varepsilon_{yy}m_z'm_x' + 2\varepsilon_{zz}n_z'n_x' + \gamma_{yz}(m_z'n_x' + n_z'm_x') \\
 &\quad + \gamma_{xz}(n_z'l_x' + l_z'n_x') + \gamma_{xy}(l_z'm_x' + m_z'l_x') \\
 \gamma_{x'y'} &= 2\varepsilon_{xx}l_x'l_y' + 2\varepsilon_{yy}m_x'm_y' + 2\varepsilon_{zz}n_x'n_y' + \gamma_{yz}(m_x'n_y' + n_x'm_y') \\
 &\quad + \gamma_{xz}(n_x'l_y' + l_x'n_y') + \gamma_{xy}(l_x'm_y' + m_x'l_y')
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

ou seja, sob a forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{x'x'} & \frac{1}{2}\gamma_{x'y'} & \frac{1}{2}\gamma_{x'z'} \\ \frac{1}{2}\gamma_{x'y'} & \varepsilon_{y'y'} & \frac{1}{2}\gamma_{y'z'} \\ \frac{1}{2}\gamma_{x'z'} & \frac{1}{2}\gamma_{y'z'} & \varepsilon_{z'z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_x' & m_x' & n_x' \\ l_y' & m_y' & n_y' \\ l_z' & m_z' & n_z' \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_{yy} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_x' & m_x' & n_x' \\ l_y' & m_y' & n_y' \\ l_z' & m_z' & n_z' \end{bmatrix}^T \tag{2.9}$$

ou ainda, simbolicamente:

$$[\varepsilon'] = [L] [\varepsilon] [L]^T \tag{2.10}$$

Inversamente, pode escrever-se:

$$[\varepsilon] = [L]^T [\varepsilon'] [L] \tag{2.11}$$

Utilizando a notação vectorial, as equações de transformação das deformações no referencial global (Oxyz) para o referencial particular (Ox'y'z') podem ainda escrever-se sob a forma seguinte:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'x'} \\ \varepsilon_{y'y'} \\ \varepsilon_{z'z'} \\ \gamma_{y'z'} \\ \gamma_{x'z'} \\ \gamma_{x'y'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} & T_{15} & T_{16} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{24} & T_{25} & T_{26} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & T_{34} & T_{35} & T_{36} \\ T_{41} & T_{42} & T_{43} & T_{44} & T_{45} & T_{46} \\ T_{51} & T_{52} & T_{53} & T_{54} & T_{55} & T_{56} \\ T_{61} & T_{62} & T_{63} & T_{64} & T_{65} & T_{66} \end{bmatrix}^T \times \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.12)$$

Isto é:

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}'\} = [\mathbf{T}]^T \{\boldsymbol{\varepsilon}\} \quad (2.13)$$

onde  $[\mathbf{T}]$  é a matriz de transformação das tensões definida no parágrafo §1.5. do capítulo anterior.

E inversamente, a equação de transformação do vector deformação no referencial particular (Ox'y'z') para o referencial global (Oxyz) é:

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [\mathbf{R}]^T \{\boldsymbol{\varepsilon}'\} \quad (2.14)$$

Comparando as equações (2.10)-(2.14) com as equações homólogas (1.13) e (1.15) do cap. anterior:

$$\begin{array}{ll} \sigma_{xx} \leftrightarrow \varepsilon_{xx} & \tau_{yz} \leftrightarrow \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \sigma_{yy} \leftrightarrow \varepsilon_{yy} & \text{e} \quad \tau_{xz} \leftrightarrow \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \sigma_{zz} \leftrightarrow \varepsilon_{zz} & \tau_{xy} \leftrightarrow \frac{1}{2} \gamma_{xy} \end{array}$$

as equações de transformação em cada uma das situações são idênticas duas a duas, pelo que podem extrapolar-se directamente os conceitos de *deformações principais*, de *direcções principais de deformação* e de *invariantes das deformações* em cada ponto do corpo.

Independentemente do referencial que se utilize, são sempre constantes as seguintes grandezas:

1º Invariante das Deformações:  $\epsilon_{xx'} + \epsilon_{y'y'} + \epsilon_{z'z'} = \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz} = J_1$  (2.15)

2º Invariante das Deformações:

$$\begin{aligned} \epsilon_{x'x'}\epsilon_{y'y'} + \epsilon_{y'y'}\epsilon_{z'z'} + \epsilon_{z'z'}\epsilon_{x'x'} - \frac{\gamma_{x'y'}^2}{4} - \frac{\gamma_{y'z'}^2}{4} - \frac{\gamma_{z'x'}^2}{4} = \\ = \epsilon_{xx}\epsilon_{yy} + \epsilon_{yy}\epsilon_{zz} + \epsilon_{zz}\epsilon_{xx} - \frac{\gamma_{xy}^2}{4} - \frac{\gamma_{yz}^2}{4} - \frac{\gamma_{zx}^2}{4} = J_2 \end{aligned} \quad (2.16)$$

3º Invariante das Deformações:

$$\begin{aligned} \epsilon_{x'x'}\epsilon_{y'y'}\epsilon_{z'z'} - \epsilon_{x'x'}\frac{\gamma_{y'z'}^2}{4} - \epsilon_{y'y'}\frac{\gamma_{z'x'}^2}{4} - \epsilon_{z'z'}\frac{\gamma_{x'y'}^2}{4} + \frac{\gamma_{x'y'}\gamma_{y'z'}\gamma_{z'x'}}{4} = \\ = \epsilon_{xx}\epsilon_{yy}\epsilon_{zz} - \epsilon_{xx}\frac{\gamma_{yz}^2}{4} - \epsilon_{yy}\frac{\gamma_{zx}^2}{4} - \epsilon_{zz}\frac{\gamma_{xy}^2}{4} + \frac{\gamma_{xy}\gamma_{yz}\gamma_{zx}}{4} = J_3 \end{aligned} \quad (2.17)$$

O primeiro invariante das deformações em particular,  $J_1 = \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}$ , tem um significado físico importante: é numericamente igual à variação relativa de volume no ponto considerado, isto é:

$$J_1 = \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz} = \theta = \frac{\Delta V}{V} \quad (2.18)$$

### 2.1.6. Deformações Principais

Em cada ponto existem pelo menos três direcções mutuamente ortogonais  $(\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3)$ , para as quais são nulas as deformações de corte, sendo estacionários (*máximos ou mínimos*) os valores das respectivas deformações lineares. Essas direcções são as *direcções principais de deformação*, definidas por um sistema de três equações do tipo:

$$\begin{cases} (\varepsilon_{xx} - \varepsilon)l + \frac{1}{2}\gamma_{xy}m + \frac{1}{2}\gamma_{xz}n = 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy}l + (\varepsilon_{yy} - \varepsilon)m + \frac{1}{2}\gamma_{yz}n = 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz}l + \frac{1}{2}\gamma_{yz}m + (\varepsilon_{zz} - \varepsilon)n = 0 \end{cases} \quad (2.19)$$

onde  $\varepsilon$  é uma das *deformações principais* ( $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$ ) no ponto considerado:

$$\begin{aligned} \varepsilon^3 - (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})\varepsilon^2 + (\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{zz}\varepsilon_{xx} - \frac{1}{4}\gamma_{xy}^2 - \frac{1}{4}\gamma_{yz}^2 - \frac{1}{4}\gamma_{zx}^2)\varepsilon \\ - [\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{xx}(\frac{1}{4}\gamma_{yz}^2) - \varepsilon_{yy}(\frac{1}{4}\gamma_{zx}^2) - \varepsilon_{zz}(\frac{1}{4}\gamma_{xy}^2) + \frac{1}{4}\gamma_{xy}\gamma_{yz}\gamma_{zx}] = 0 \end{aligned} \quad (2.20)$$

Relativamente ao triedro ortonormal das três direcções principais de deformação  $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$ , as equações que exprimem a *extensão linear* segundo uma direcção arbitrária  $(l, m, n)$  e a *deformação de corte* segundo duas direcções ortogonais  $\vec{n} = (l, m, n)$  e  $\vec{t} = (l', m', n')$  são dadas pelas expressões seguintes, conforme decorre directamente das equações (2.7):

$$\varepsilon_n = l^2\varepsilon_1 + m^2\varepsilon_2 + n^2\varepsilon_3 \quad (2.21)$$

$$\gamma_{nt} = 2(ll'\varepsilon_1 + mm'\varepsilon_2 + nn'\varepsilon_3) \quad (2.22)$$



2.1.7. Deformações sobre um Plano

5ª AULA

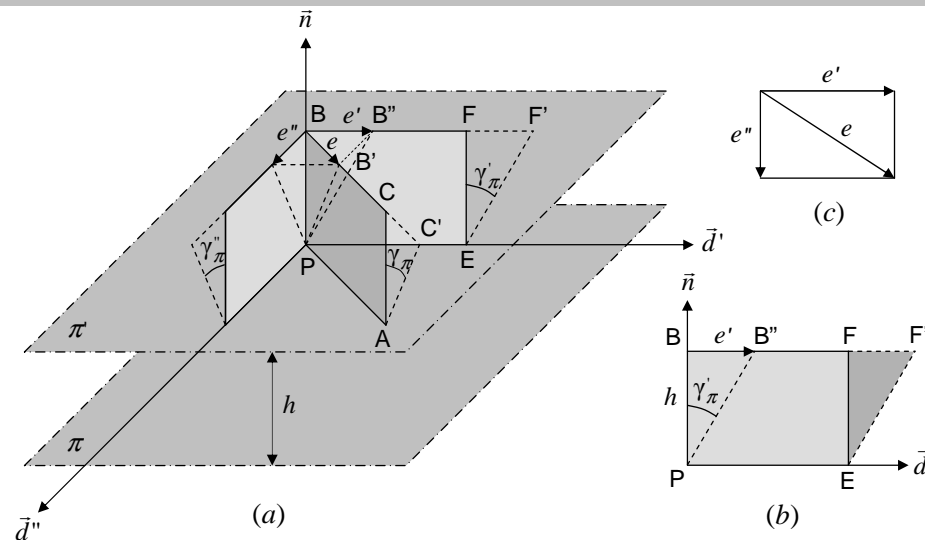


Fig. 2.8 – Deformações sobre um plano  $\pi$

Deformação ou extensão linear sobre um plano  $\pi$  é a deformação linear  $\epsilon_\pi$  segundo a direcção da respectiva normal  $\vec{n} = (l, m, n)$ , isto é:

$$\epsilon_\pi = \epsilon_{xx}l^2 + \epsilon_{yy}m^2 + \epsilon_{zz}n^2 + \gamma_{yz}mn + \gamma_{xz}ln + \gamma_{xy}lm \quad (2.23)$$

Deformação angular, deformação de corte ou distorção sobre o plano  $\pi$ :

$$\begin{aligned} \gamma_\pi = \gamma_{nd'} = & 2\epsilon_{xx}ll' + 2\epsilon_{yy}mm' + 2\epsilon_{zz}nn' + \gamma_{yz}(mn' + nm') \\ & + \gamma_{xz}(ln' + nl') + \gamma_{xy}(lm' + ml') \end{aligned} \quad (2.24)$$

Tomando um plano paralelo  $\pi'$ , a uma distância infinitesimal  $h$  do plano  $\pi$ , o escorregamento relativo ( $e'$ ) de  $\pi'$  sobre  $\pi$ , segundo a direcção de  $\bar{d}'$ , está relacionado com a deformação de corte  $\gamma'_{\pi}$  através da equação seguinte, Fig. 2.8(b):

$$e' = h \gamma'_{\pi} \quad (2.25)$$

Igualmente, para uma outra direcção  $\bar{d}'' = (l'', m'', n'')$ , também sobre o plano  $\pi$  e perpendicular a  $\bar{d}'$ , tem-se:

$$\begin{aligned} \gamma''_{\pi} = & 2\varepsilon_{xx}ll'' + 2\varepsilon_{yy}mm'' + 2\varepsilon_{zz}nn'' + \gamma_{yz}(mn'' + nm'') \\ & + \gamma_{xz}(ln'' + nl'' + \gamma_{xy}(lm'' + ml'')) \end{aligned} \quad (2.26)$$

e o escorregamento ( $e''$ ) de  $\pi'$  sobre  $\pi$  segundo a direcção  $\bar{d}''$ :

$$e'' = h \gamma''_{\pi} \quad (2.27)$$

O escorregamento relativo total ( $e$ ) entre  $\pi$  e  $\pi'$  obtém-se pela composição vectorial, Fig.2.8(c):

$$e^2 = e'^2 + e''^2 \quad (2.28)$$

A este escorregamento total corresponde a *deformação de corte* ou *distorção resultante*  $\gamma_{\pi}$  sobre o plano  $\pi$ , isto é:

$$\gamma_{\pi} = \frac{e}{h} \quad (2.29)$$

Esta é a deformação angular responsável pela transformação do rectângulo PACB no paralelogramo PAC'B', Fig.2.8(a).

Combinando as equações (2.25)-(2.29) pode então escrever-se:

$$\gamma_{\pi}^2 = \gamma'^2_{\pi} + \gamma''^2_{\pi} \quad (2.30)$$

Tomando para referência o *triedro principal* em P, as componentes *normal* e *tangencial* da deformação sobre um plano qualquer ( $\pi$ ) definido pela respectiva normal  $\vec{n}=(l,m,n)$  são dadas, respectivamente, pelas expressões seguintes:

$$\varepsilon_{\pi} = \varepsilon_1 l^2 + \varepsilon_2 m^2 + \varepsilon_3 n^2 \quad (2.36)$$

$$\left(\frac{1}{2} \gamma_{\pi}\right)^2 = \varepsilon_1^2 l^2 + \varepsilon_2^2 m^2 + \varepsilon_3^2 n^2 - \varepsilon_{\pi}^2 \quad (2.37)$$

conforme decorre directamente das equações (2.23) e (2.32).

### 2.1.8. Valores Máximos das Tensões Normais e de Corte

Tal como acontece para as tensões:

$$\varepsilon_{max} = \varepsilon_1$$

$$\gamma_{max} = \varepsilon_1 - \varepsilon_3$$

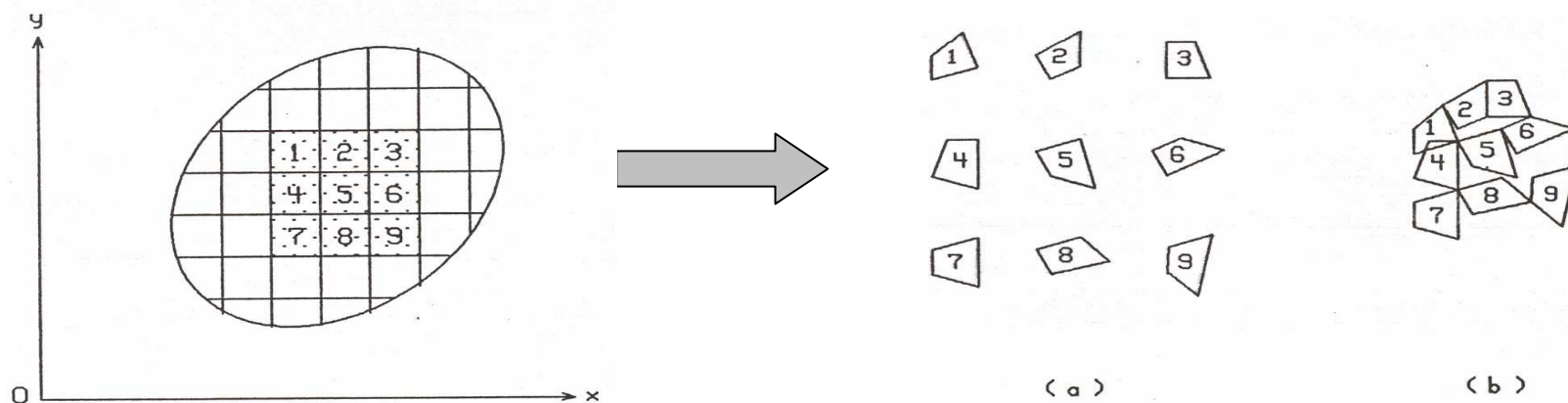
A deformação de corte máxima e ocorre sobre o plano cuja normal ( $\vec{n}$ ) tem, relativamente ao triedro principal, os seguintes co-senos directores:

$$\vec{n}_c = (\pm\sqrt{2}/2, 0, \pm\sqrt{2}/2)$$

### 2.1.9. Equações de Compatibilidade

As seis componentes da deformação não podem ser fixadas arbitrariamente, devendo ter de satisfazer determinadas condições que garantam a existência das três funções contínuas  $u(x,y,z)$ ,  $v(x,y,z)$  e  $w(x,y,z)$ , capazes de definirem uma deformação coerente de todo o corpo. Essas condições são traduzidas por seis equações, denominadas *Equações de Compatibilidade* das deformações:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial x^2} & 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) \\
 \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{zz}}{\partial y^2} & 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{yx}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) \\
 \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial^2 \epsilon_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial z^2} & 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{zz}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{zy}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right)
 \end{aligned}
 \tag{2.38}$$



### 2.1.10. Construção de Mohr para as Deformações

Existe uma construção de Mohr para as deformações  $(\epsilon_\pi, \gamma_\pi)$ , em tudo semelhante à construção homóloga para as tensões, com a única diferença de que as tensões normais  $(\sigma)$  são substituídas por  $(\epsilon_\pi)$  e as tensões de corte  $(\tau)$  por metade das deformações  $(\gamma_\pi/2)$ :

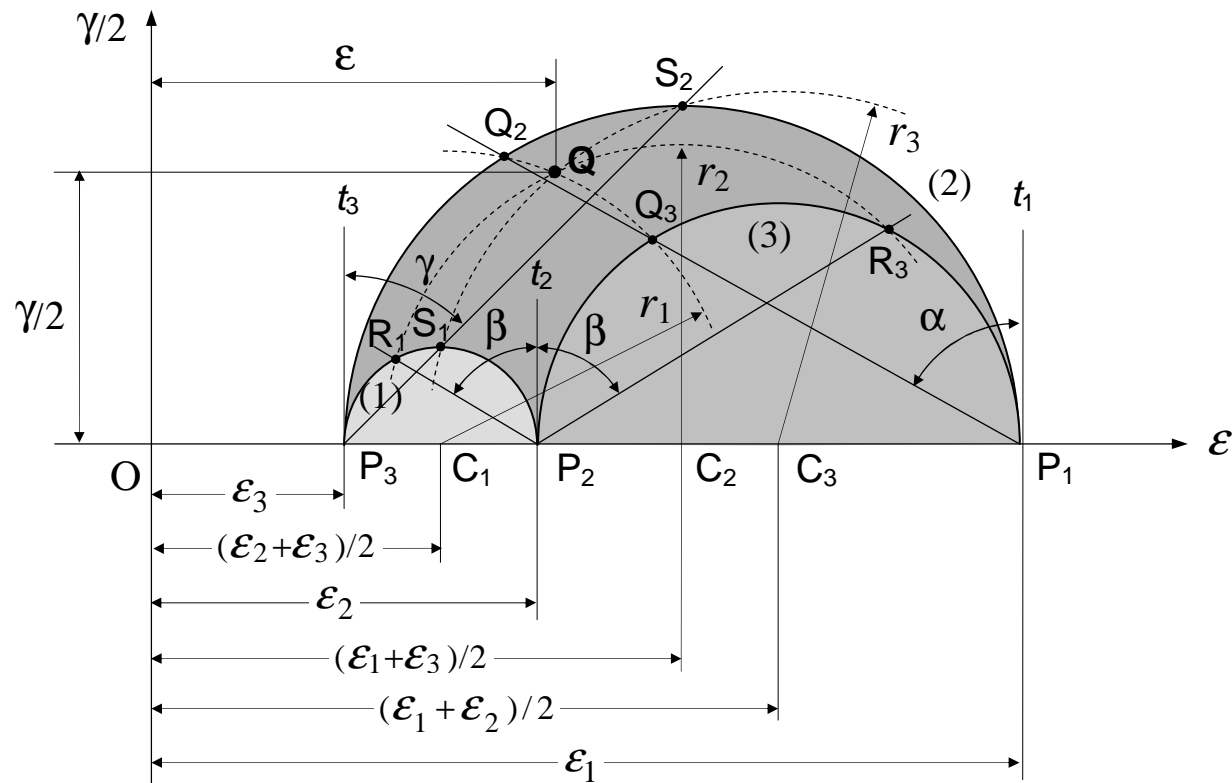


Fig. 2.10 - Construção de Mohr para as deformações

### 2.1.11. Estado Plano de Deformação

Verificam-se as condições:

$$\varepsilon_{zz} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

e:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \varepsilon_{xx}(x, y) & u &= u(x, y) \\ \varepsilon_{yy} &= \varepsilon_{yy}(x, y) & e \quad v &= v(x, y) \\ \gamma_{xy} &= \gamma_{xy}(x, y) & w &= 0 \end{aligned}$$

Num estado plano de deformação, a expressão (2.23) para a extensão linear ( $\varepsilon$ ) segundo uma direcção paralela ao plano Oxy e inclinada de um ângulo  $\theta$  relativamente ao eixo dos xx, reduz-se à forma seguinte:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) + \frac{1}{2}(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}) \cos(2\theta) + \frac{1}{2} \gamma_{xy} \sin(2\theta) \quad (2.39)$$

e a deformação de corte, sobre o plano perpendicular a essa mesma direcção, é dada por:

$$\frac{1}{2} \gamma = -\frac{1}{2}(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}) \sin(2\theta) + \frac{1}{2} \gamma_{xy} \cos(2\theta) \quad (2.40)$$

A deformação de corte anula-se para um ângulo  $\theta_p$ , definido pela equação seguinte:

$$\operatorname{tg}(2\theta_p) = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}} \quad (2.41)$$

Existem duas direcções mutuamente perpendiculares que satisfazem a condição (2.42), isto é  $\theta_1$  e  $\theta_2 = \theta_1 + \pi/2$ . São as *direcções principais de deformação*  $\vec{n}_1$  e  $\vec{n}_2$ , que correspondem às extensões principais  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$ , dadas pelas expressões seguintes:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \\ \varepsilon_2 &= \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}\end{aligned}\quad (2.42)$$

### 2.1.12. Deformações Principais Secundárias

Na situação mais geral dum estado de deformação tridimensional, as equações (2.39)-(2.42) continuam válidas para as deformações no plano  $(x, y)$ , embora possam ser diferentes de zero as componentes  $\varepsilon_{zz}$ ,  $\gamma_{xz}$  e  $\gamma_{yz}$ . Neste caso as deformações dadas pelas equações (2.42) dizem-se as *deformações principais secundárias* no plano  $(x, y)$  e representam-se pelos símbolos  $\varepsilon'_1$  e  $\varepsilon'_2$ , respectivamente:

$$\begin{aligned}\varepsilon'_1 &= \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + \gamma_{xy}^2} \\ \varepsilon'_2 &= \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + \gamma_{xy}^2}\end{aligned}\quad (2.43)$$

As direcções definidas pela equação (2.41) são as *direcções principais secundárias*  $\vec{n}'_1$  e  $\vec{n}'_2$  da deformação em P, no plano  $(x, y)$ .

**2.1.13. Círculo de Mohr para o Estado Plano de Deformação**

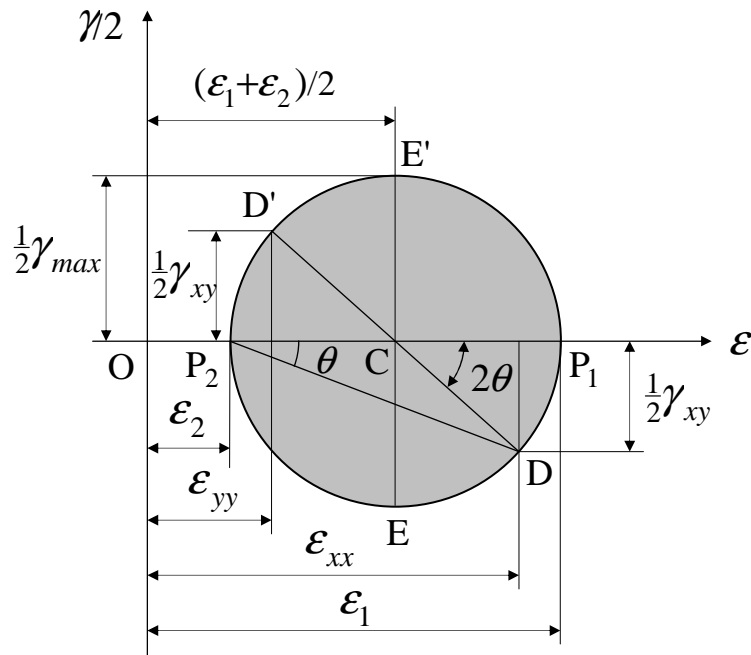


Fig. 2.11-Construção de Mohr para o estado plano de deformação

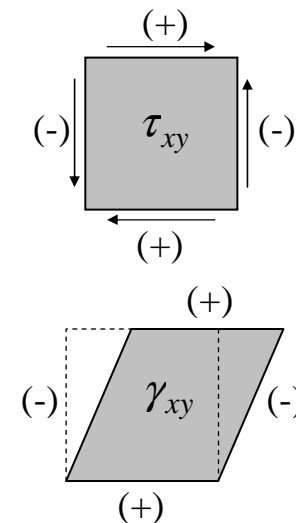


Fig. 2.12-Convenção de sinais para  $\tau$  e  $\gamma$

Quando a deformação angular  $\gamma$  é positiva, ( $\gamma_{xy} > 0$ ), o ponto D representativo da direcção Ox é marcado a uma distância  $\frac{1}{2}\gamma_{xy}$  para baixo do eixo horizontal, e o ponto D' representativo da direcção Oy, a uma distância  $\frac{1}{2}\gamma_{xy}$  para cima; e vice-versa, quando a deformação angular  $\gamma_{xy}$  é negativa.

A convenção para o sinal da deformação de corte coincide com a que foi adoptada na construção do círculo de Mohr para as tensões.



### 2.1.14. Análise de Rosetas

Experimentalmente, é mais fácil medir directamente as extensões lineares do que as distorções. Por isso, é frequente pôr-se o problema de determinar as extensões principais num ponto, a partir da medição das extensões lineares  $\epsilon_a$ ,  $\epsilon_b$ ,  $\epsilon_c$ , segundo três direcções distintas sobre o plano de deformação, Fig. 2.13.

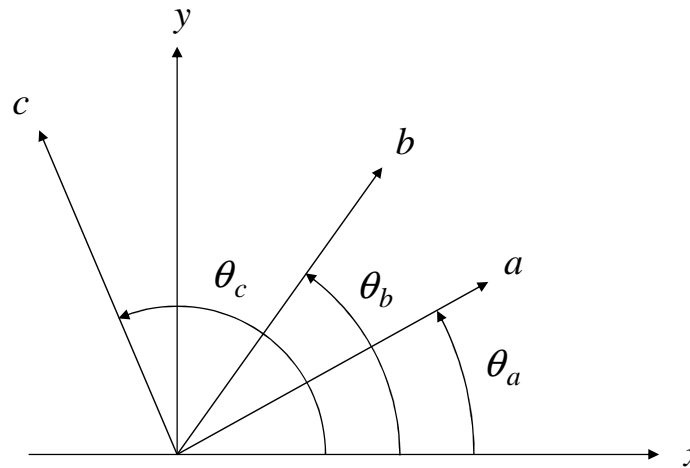


Fig.2.13-Roseta de três elementos arbitrariamente orientados em relação aos eixos coordenados  $x$  e  $y$ .

Suponha-se que aquelas três direcções fazem ângulos  $\theta_a$ ,  $\theta_b$  e  $\theta_c$ , respectivamente, com a direcção do eixo dos  $xx$ . De acordo com a equação (2.39), pode escrever-se:

$$\begin{cases} \epsilon_a = \epsilon_{xx} \cos^2(\theta_a) + \epsilon_{yy} \sin^2(\theta_a) + \gamma_{xy} \sin(\theta_a) \cos(\theta_a) \\ \epsilon_b = \epsilon_{xx} \cos^2(\theta_b) + \epsilon_{yy} \sin^2(\theta_b) + \gamma_{xy} \sin(\theta_b) \cos(\theta_b) \\ \epsilon_c = \epsilon_{xx} \cos^2(\theta_c) + \epsilon_{yy} \sin^2(\theta_c) + \gamma_{xy} \sin(\theta_c) \cos(\theta_c) \end{cases} \quad (2.44)$$

**A)- Roseta Rectangular de três elementos**

Corresponde à situação em que as três direcções estão espaçadas de 45°. Nas aplicações práticas esta situação é materializado através das rosetas rectangulares de três extensómetros, que têm um aspecto conforme representado na Fig.2.13.

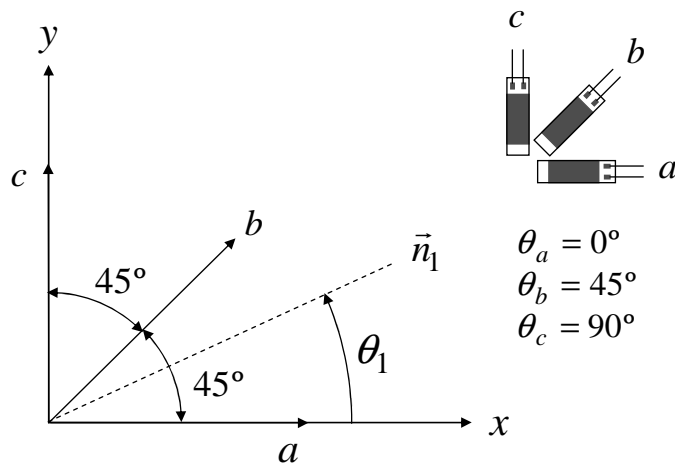


Fig.2.13-Roseta rectangular de três elementos.

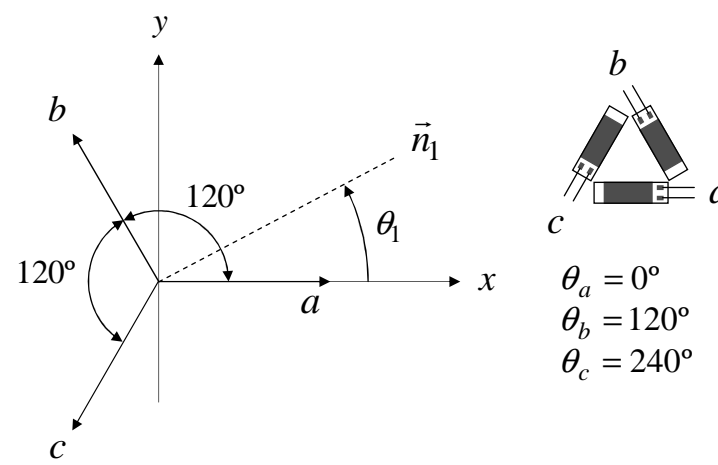


Fig.2.14-Roseta delta ( $\Delta$ ) de três elementos.

$$\begin{cases} \epsilon_1 = \frac{\epsilon_a + \epsilon_c}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\epsilon_a - \epsilon_c)^2 + (2\epsilon_b - \epsilon_a - \epsilon_c)^2} \\ \epsilon_2 = \frac{\epsilon_a + \epsilon_c}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\epsilon_a - \epsilon_c)^2 + (2\epsilon_b - \epsilon_a - \epsilon_c)^2} \end{cases} \quad (2.45)$$

$$\text{tg}(2\theta_{1,2}) = \frac{2\epsilon_b - \epsilon_a - \epsilon_c}{\epsilon_a - \epsilon_c} \quad (2.46)$$

onde o valor do ângulo  $\theta_1$  dado pela equação (2.46) é identificado de acordo com as seguintes regras:

- (i)  $0 < \theta_1 < \pi/2$ , quando  $\varepsilon_b > (\varepsilon_a + \varepsilon_c)/2$
- (ii)  $-\pi/2 < \theta_1 < 0$ , quando  $\varepsilon_b < (\varepsilon_a + \varepsilon_c)/2$
- (iii)  $\theta_1 = 0$ , quando  $\varepsilon_a > \varepsilon_c$  e  $\varepsilon_a = \varepsilon_1$
- (iv)  $\theta_1 = \pm\pi/2$ , quando  $\varepsilon_a < \varepsilon_c$  e  $\varepsilon_a = \varepsilon_2$

### **B)- Roseta Delta ( $\Delta$ ) de três elementos**

Corresponde à situação em que as três direcções estão espaçadas de  $45^\circ$ . Nas aplicações práticas esta situação é materializado através das rosetas rectangulares de três extensómetros, que têm um aspecto conforme representado na Fig.2.14.

Neste caso particular, as deformações principais e as respectivas direcções são dadas pelas equações seguintes (ver problema 2.2.7b):

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_b + \varepsilon_c}{3} + \sqrt{\left[ \varepsilon_a - \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_b + \varepsilon_c}{3} \right]^2 + \frac{(\varepsilon_c - \varepsilon_b)^2}{3}} \\ \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_b + \varepsilon_c}{3} - \sqrt{\left[ \varepsilon_a - \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_b + \varepsilon_c}{3} \right]^2 + \frac{(\varepsilon_c - \varepsilon_b)^2}{3}} \end{cases} \quad (2.47)$$

$$\operatorname{tg}(2\theta_{1,2}) = \frac{\sqrt{3}(\varepsilon_c - \varepsilon_b)}{2\varepsilon_a - (\varepsilon_b + \varepsilon_c)} \quad (2.48)$$

onde o valor do ângulo  $\theta_1$  dado pela equação (2.48) é identificado de acordo com as seguintes regras:

- (i)  $0 < \theta_1 < \pi/2$ , quando  $\varepsilon_c > \varepsilon_b$
- (ii)  $-\pi/2 < \theta_1 < 0$ , quando  $\varepsilon_c < \varepsilon_b$
- (iii)  $\theta_1 = 0$ , quando  $\varepsilon_b = \varepsilon_c$  e  $\varepsilon_a > \varepsilon_b$
- (iv)  $\theta_1 = \pm\pi/2$ , quando  $\varepsilon_b = \varepsilon_c$  e  $\varepsilon_a < \varepsilon_b$

Construção gráfica alternativa:

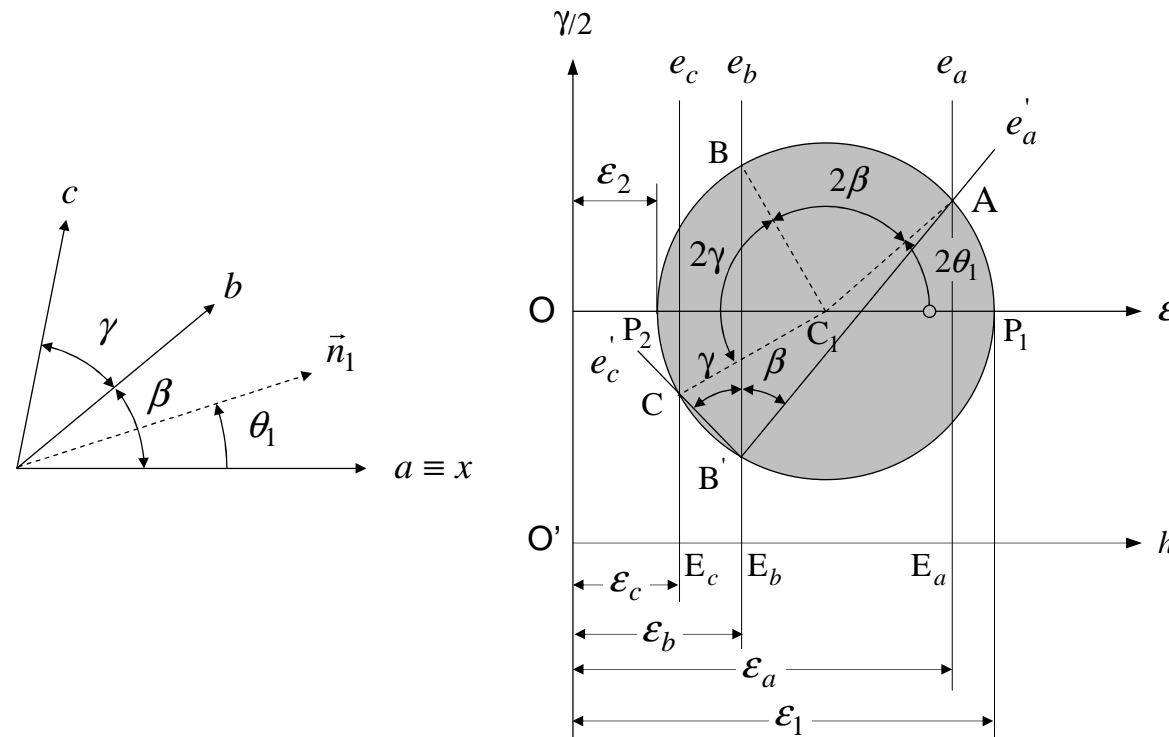


Fig. 2.15-Construção do círculo de Mohr a partir de três deformações lineares