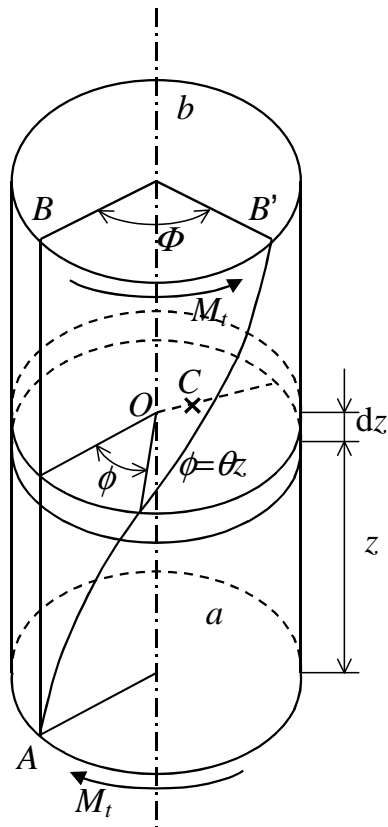


CAPÍTULO IV – TORÇÃO DE PEÇAS LINEARES

4.1. Introdução.

- Absorção ou transmissão de esforços de torção:
 - Veios ou árvores de transmissão
 - Barras de torção; Molas; Estruturas tubulares (veículos de transporte e aeronaves).

4.2. Veio Cilíndrico de Secção Circular

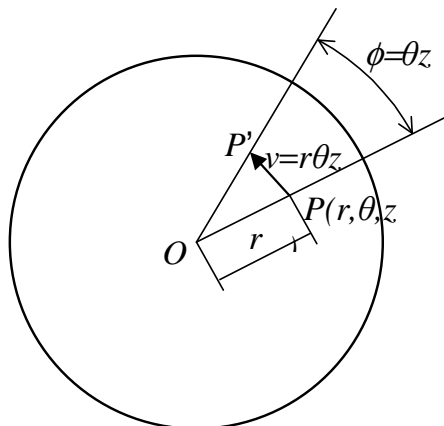


- Secções rectas do cilindro permanecem circulares e planas, após a deformação, rodando em torno do respectivo centro;
- Um raio qualquer traçado sobre uma secção recta permanece rectilíneo durante a deformação do veio;
- O ângulo entre dois quaisquer raios no plano duma secção recta permanece constante durante a deformação do veio;
- Portanto, e em consequência das condições da simetria geométrica e da solitação, cada secção recta do veio roda em torno do respectivo centro como um disco absolutamente rígido. O ângulo de rotação θ é proporcional à distância z , isto é:

$$\phi = \theta z$$

onde θ é o ângulo de rotação por unidade de comprimento.

- estas condições, para um determinado ponto P , na secção à distância z da base, a componente do deslocamento segundo o eixo de simetria do cilindro é nula ($w=0$). Quanto às componentes u e v (em coordenadas polares, no plano da secção recta):



$$u = 0$$

$$v = r\theta z$$

- As componentes do estado de deformação em coordenadas cilíndricas obtêm-se por derivação:

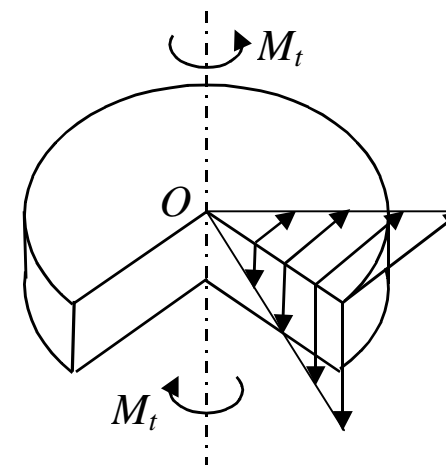
$$\epsilon_{rr} = \epsilon_{\theta\theta} = \epsilon_{zz} = \gamma_{r\theta} = \gamma_{rz} = 0$$

$$\gamma_{z\theta} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} = r\theta$$

- O estado de tensão correspondente obtém-se por aplicação das equações da lei de Hooke:

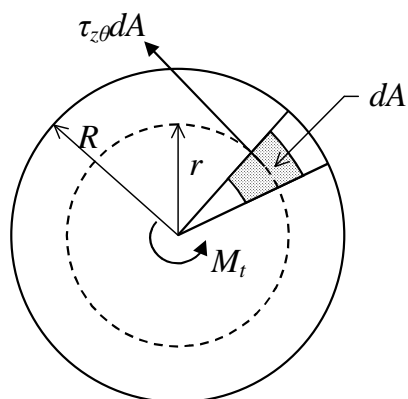
$$\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{zz} = \tau_{r\theta} = \tau_{rz} = 0 \tag{1}$$

$$\tau_{z\theta} = G\gamma_{z\theta} = Gr\theta$$



- A tensão τ pode exprimir-se em função do momento torsor M_t :

$$\int_A r(\tau_{z\theta} dA) = M_t$$



ou seja,

$$M_t = G\theta \int_A r^2 dA = G\theta I_z \quad (2)$$

onde $I_z = \int_A r^2 dA$ é o momento de inércia polar da área da secção recta do veio ($I_z = \frac{\pi R^4}{2}$).

Por eliminação de θ entre (1) e (2) obtém-se, finalmente:

$$\tau_{z\theta} = \frac{M_t r}{I_z}$$

- **NOTAS:**

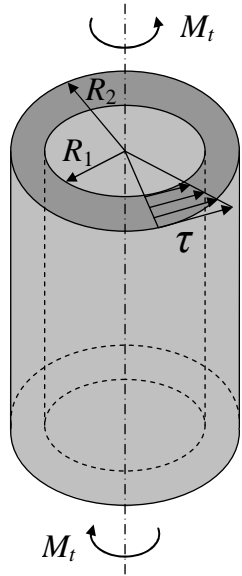
(i)-A tensão de corte máxima ocorre na periferia do veio, para $r = R$, isto é,

$$\tau_{max} = \frac{M_t R}{I_z} = \frac{2M_t}{\pi R^3}$$

(ii)-O valor $C = M_t / \theta = GI_z$ é a chamada *rigidez torsional do veio* e a quantidade $K = I_z / R = \pi R^3 / 2$ é o *módulo de torção*.

4.3. Veio Circular Oco

- Os argumentos e os resultados que foram obtidos para o veio maciço mantêm-se válidos, com excepção da expressão para o momento de inércia polar da secção, I_z , que neste caso toma a forma seguinte:



$$I_z = \frac{\pi(R_2^4 - R_1^4)}{2} = \frac{\pi R_2^4}{2} (1 - m^4) \quad (\text{onde } m = R_1/R_2)$$

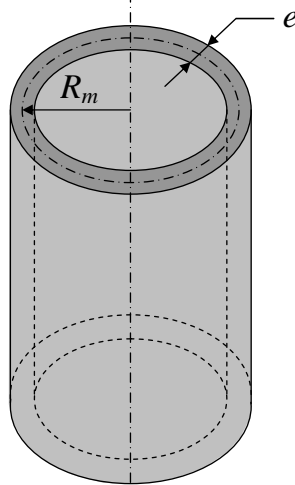
- O módulo de torção, K , vale, neste caso:

$$K = \frac{I_z}{R_2} = \frac{\pi R_2^3}{2} (1 - m^4)$$

- No caso particular dum tubo de parede fina, de espessura e , (em que $e = R_2 - R_1 \ll R_2$):

$$R_2^4 - R_1^4 = (R_2^2 + R_1^2)(R_2 + R_1)(R_2 - R_1) \cong R_m^3 e$$

onde $R_m = (R_1 + R_2)/2$ é o raio médio da secção.



- O momento de inércia polar I_z é, aproximadamente,

$$I_z \cong 2\pi R_m^3 e \cong R_m^2 \Omega$$

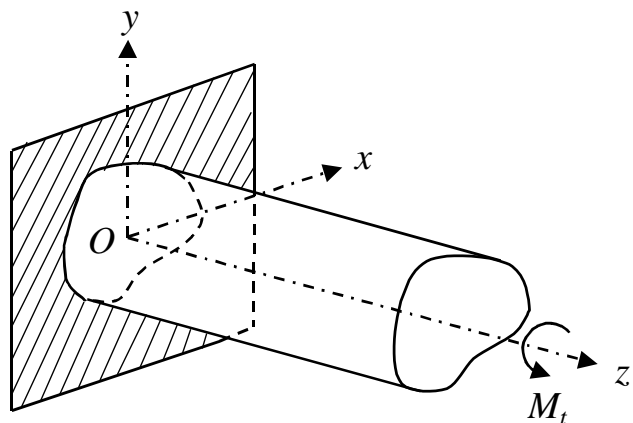
onde $\Omega = 2\pi R_m e$ é a área da secção recta do tubo

- Pode também escrever-se:

$$\tau \cong \frac{M_t R_m}{I_z} \cong \frac{M_t}{R_m \Omega} \quad \text{e} \quad \theta = \frac{M_t}{GI_z} \cong \frac{M_t}{GR_m^2 \Omega} \cong \frac{\tau}{GR_m}$$

4.4. Veio Prismático de Secção Arbitrária. 4

4.4.1. Teoria de Saint-Venant



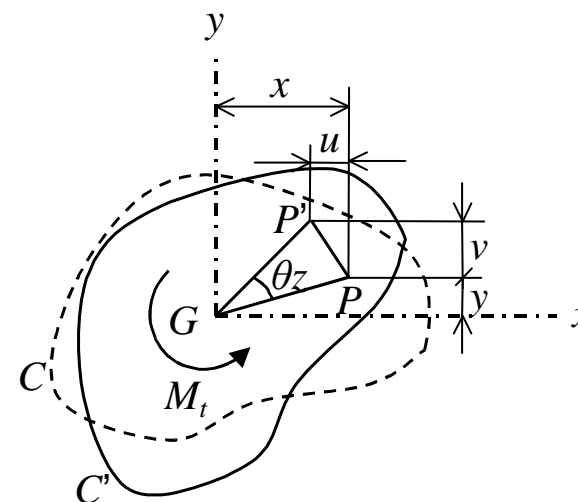
- Na ausência de simetria circular, deixa de ser válida a condição de que as secções rectas se mantêm planas havendo, neste caso, um deslocamento axial dos pontos de cada secção.
- Hipóteses de Saint-Venant:
 - $w = w(x, y)$ (w é uma função contínua)
 - $\phi = \theta z$ (θ é o ângulo de torção por unidade de comprimento)

- Nestas condições, o campo dos deslocamentos fica definido pelas três componentes seguintes:

$$u = -\theta z y$$

$$v = \theta z x$$

$$w = w(x, y)$$



- O campo das deformações obtém-se por derivação. E, depois, as tensões:

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \gamma_{xy} = 0$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -\theta y + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (1)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \theta x + \frac{\partial w}{\partial y}$$



$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \tau_{xy} = 0$$

$$\tau_{xz} = G\left(-\theta y + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \quad (2)$$

$$\tau_{yz} = G\left(\theta x + \frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

- Equações de Equilíbrio (*ausência de forças de volume*):

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0 \quad (\checkmark)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0 \quad (\checkmark)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0$$

- As duas primeiras são incondicionalmente satisfeitas, ficando reduzidos a uma única equação de equilíbrio:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

- Equações de Compatibilidade:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} \quad (\checkmark)$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2} \quad (\checkmark)$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2} \quad (\checkmark)$$

Quatro das equações são incondicionalmente satisfeitas, restando a apenas duas equações de compatibilidade :

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right)$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{yx}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right)$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{zy}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \quad (\checkmark)$$



$$\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} = f(y)$$

$$\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} = g(x)$$

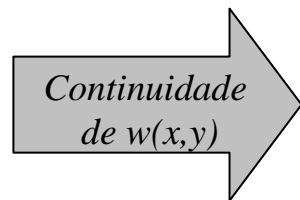
que, por sua vez, representam uma única equação:

$$\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} = C^{te}$$

- O valor da C^{te} que figura no 2º membro da equação anterior pode obter-se directamente a partir de (1):

$$\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} = -\theta + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} = \theta + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}$$



$$\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} = 2\theta$$



$$\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} = 2G\theta \quad (4)$$

- O problema da torção fica então reduzido à resolução dum sistema de duas equações de derivadas parciais nas funções τ_{xz} e τ_{yz} [a equação de equilíbrio (3) e a equação de compatibilidade (4)]:

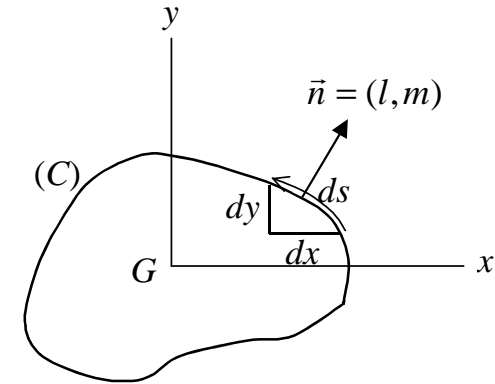
$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} = 2G\theta$$

(5)

Além disso, há que ter em consideração a ausência de forças ao longo da superfície lateral, o que se traduz pela seguinte condição fronteira:

$$\tau_{xz}l + \tau_{yz}m = 0 \quad (\text{em } C) \quad (6)$$



- Para resolver este sistema de equações, considere-se uma função auxiliar $\Phi(x,y)$, contínua, de tal forma que:

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

$$\tau_{yz} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

[$\Phi(x,y)$ é a chamada *Função de Saint-Venant*]

As tensões τ_{xz} e τ_{yz} assim obtidas satisfazem incondicionalmente a equação de equilíbrio correspondente à primeira equação em (5). Substituindo as expressões para τ_{xz} e τ_{yz} na segunda equação, obtém-se:

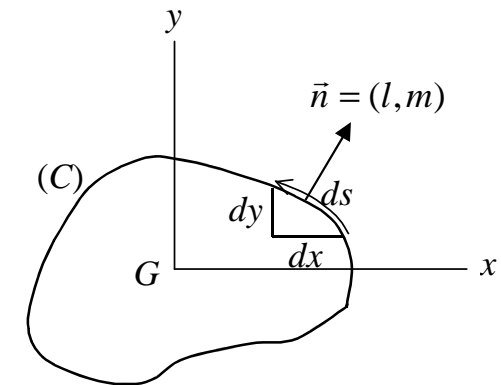
$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -2G\theta$$

- O problema de torção consiste, assim, na resolução da equação anterior em $\Phi(x,y)$. As condições fronteira a ter em conta na resolução daquela equação deduzem-se directamente a partir de (6), isto é:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} l - \frac{\partial \Phi}{\partial x} m = 0 \quad (\text{em } C)$$

Ou seja, tendo em conta que, $\frac{dx}{ds} = -m$ e $\frac{dy}{ds} = l$:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{dy}{ds} = \frac{d\Phi}{ds} = 0 \quad (\text{em } C)$$



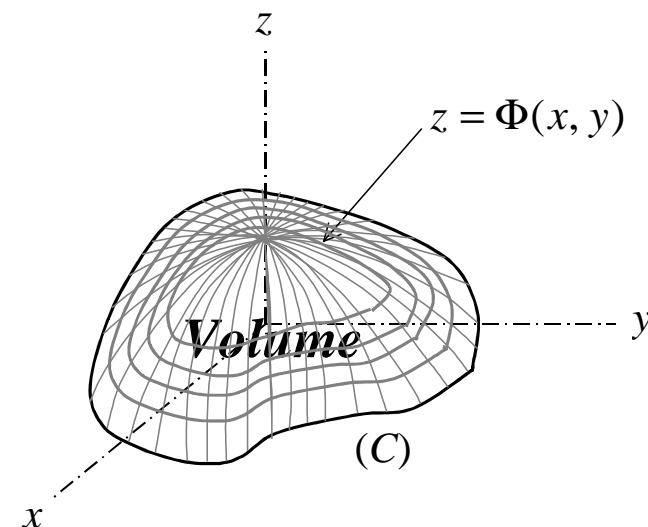
Esta equação traduz que o valor da função Φ se mantém constante ao longo da linha de contorno da secção recta do veio. Por outro lado, uma vez que no cálculo das tensões de torção apenas intervêm as derivadas da função Φ , o valor constante dessa função na periferia do veio pode ser tomado igual a zero. Donde a condição fronteira em termos de Φ :

$$\Phi = 0 \quad (\text{em } C)$$

- Momento Torsor M_t em termos de Φ :

$$\begin{aligned} M_t &= \int_A (x\tau_{yz} - y\tau_{xz}) dx dy = \int_A \left(x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + y \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) dx dy = \\ &= \int_A \left[\frac{\partial}{\partial x} (x\Phi) + \frac{\partial}{\partial y} (y\Phi) \right] dx dy + 2 \int_A \Phi dx dy = \\ &= \int_C (x\Phi dy - y\Phi dx) + 2 \int_A \Phi dx dy = 2 \int_A \Phi dx dy \end{aligned}$$

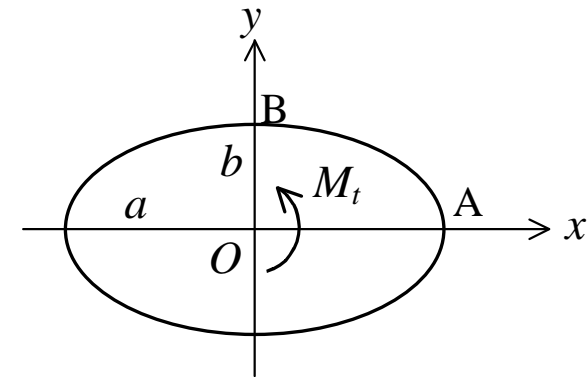
Isto é: **$M_t = 2 \times \text{Volume}$**



4.4.2. Veio de Secção Elíptica

- Considere-se uma secção elíptica com os semi-eixos maior e menor iguais a a e b , respectivamente. O contorno elíptico da secção é definido pela seguinte equação:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



- Qualquer função de tensão do tipo

$$\Phi = m \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right), \quad (\text{onde } m \text{ é uma constante})$$

satisfaz a condição fronteira $\Phi = 0$ (em C). Substituindo na equação de compatibilidade

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -2G\theta \text{ obtém-se:}$$

$$\nabla^2 \Phi = 2m \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) = -2G\theta \quad \Rightarrow \quad m = -\frac{G\theta a^2 b^2}{a^2 + b^2}$$

E então:

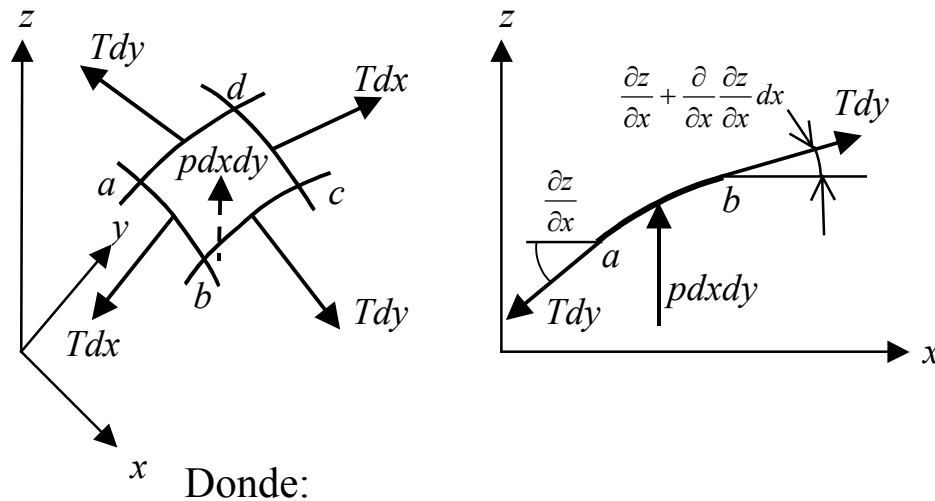
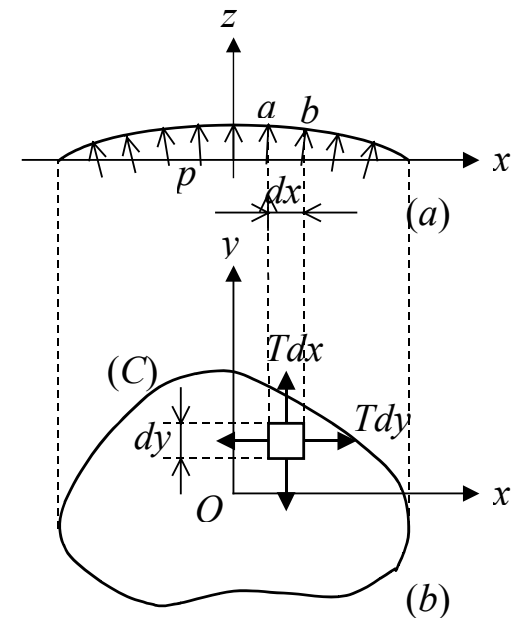
$$\Phi = \frac{G\theta a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) \quad \Rightarrow \quad M_t = 2 \frac{G\theta a^2 b^2}{a^2 + b^2} \int_A \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) dx dy = \frac{\pi G\theta a^3 b^3}{a^2 + b^2}$$

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{2G\theta a^2 y}{a^2 + b^2} = -\frac{2M_t y}{\pi a b^3}; \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{2G\theta b^2 x}{a^2 + b^2} = \frac{2M_t x}{\pi a^3 b}; \quad \tau_{\max} = \frac{2M_t}{\pi a b^2} \quad (\text{em B})$$

4.5. A Analogia de Membrana.

4.5.1. Teoria de Prandtl

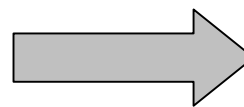
Membrana elástica fina, sem peso, plana e inicialmente sujeita a uma tracção uniforme, T , no plano (x,y) . Fixando a membrana ao longo dum contorno (C) , aplique-se uma sobre-pressão, p , também uniforme, na direcção perpendicular à superfície da membrana. Esta deforma-se, assumindo a forma duma superfície curva, que pode ser descrita por uma função apropriada, $z=f(x,y)$.



- Equação de Equilíbrio vertical da Membrana:

$$p dxdy + Tdy \left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial x} dx \right) - Tdy \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) + Tdx \left(\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial y} dy \right) - Tdx \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = 0$$

$$p dxdy + T \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dxdy + T \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dxdy = 0$$



$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{p}{T}$$

● Equação da Membrana:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{p}{T}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{p}{T} \Leftrightarrow 2G\theta \\ \tau \Leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial n} \\ M_t \Leftrightarrow 2 \times Vol \end{array} \right\}$$

● Função de Torção (Saint-Venant):

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -2G\theta$$

4.5.2. Secção Circular

● Equilíbrio das forças sobre a membrana:

$$-T \frac{dz}{dr} 2\pi r = p \pi r^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dr} = -\frac{p}{2T} r \quad \xrightarrow{\text{ANALOGIA}} \quad \tau = G\theta r$$

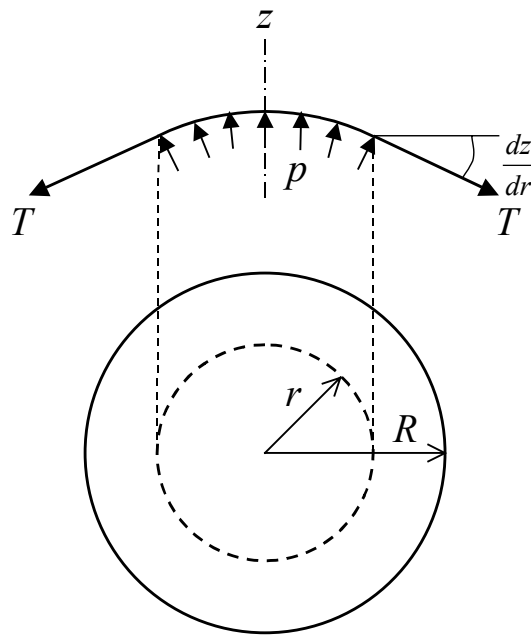
● Por integração, obtém-se:

$$z = -\int \frac{pr}{2T} dr = -\frac{pr^2}{4T} + C^{te} \quad \left[C^{te} = \frac{pR^2}{4T} \right] \quad \Rightarrow \quad z = \frac{p}{4T} (R^2 - r^2)$$

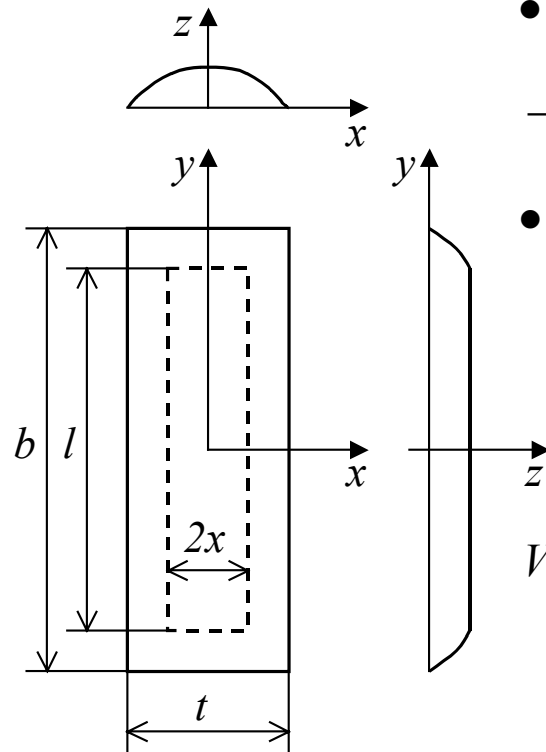
$$Vol = \int_0^R 2\pi r dr z = \frac{p\pi}{2T} \int_0^R (R^2 - r^2) r dr = \frac{\pi}{8} \frac{p}{T} R^4$$

● E da Analogia de membrana resulta:

$$M_t = 2Vol = \frac{\pi}{2} R^4 G\theta = GI_z \theta \quad \Rightarrow \quad \frac{M_t}{\theta} = GI_z$$



4.5.3. Secção Rectangular Fina



- Equilíbrio das forças sobre a *membrana*:

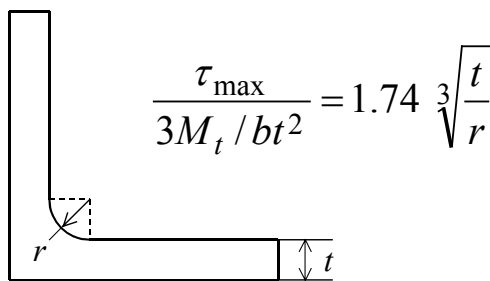
$$-2T l \frac{dz}{dx} = p 2x l \quad \longrightarrow \quad \frac{dz}{dx} = -\frac{p}{T} x \quad \xrightarrow{\text{ANALOGIA}} \quad \tau_{\max} = G \theta t$$

- Por integração, obtém-se:

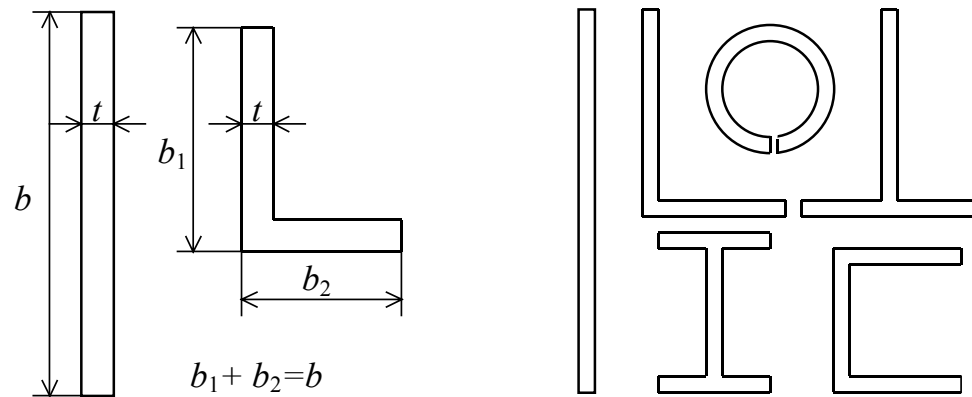
$$z = -\frac{p}{T} \int x dx = -\frac{p x^2}{2T} + C^{te} ; \quad \left[C^{te} = \frac{p t^2}{8T} \right] \quad \longrightarrow \quad z = \frac{p}{2T} \left(\frac{t^2}{4} - x^2 \right)$$

$$Vol = \frac{2}{3} t \left(\frac{p}{2T} \frac{t^2}{4} \right) b \quad \xrightarrow{\text{ANALOGIA}} \quad C = \frac{M_t}{\theta} = G \frac{b t^3}{3} ; \quad \tau_{\max} = \frac{3 M_t}{b t^2}$$

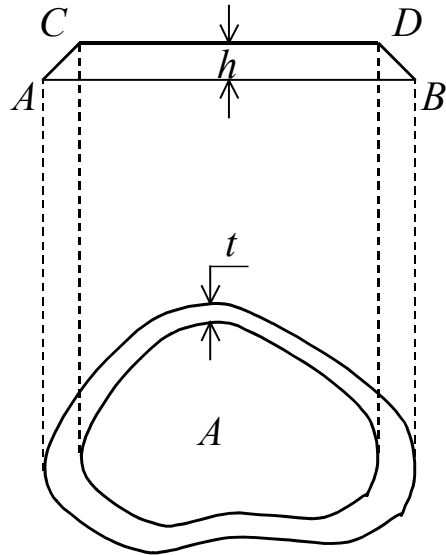
- Concentração de tensões:



- Secções abertas e *rectângulo equivalente*:



4.5.4. Secção Tubular de Parede Fina



MEMBRANA:

$$\begin{cases} \text{Declive} = \frac{h}{t} \\ \text{Vol} = A \times h = A \frac{h}{t} t \end{cases}$$



TORÇÃO:

a tensão de torção é inversamente proporcional à espessura local da parede

$$M_t = 2 A t \tau ; \quad \tau = \frac{M_t}{2 A t}$$

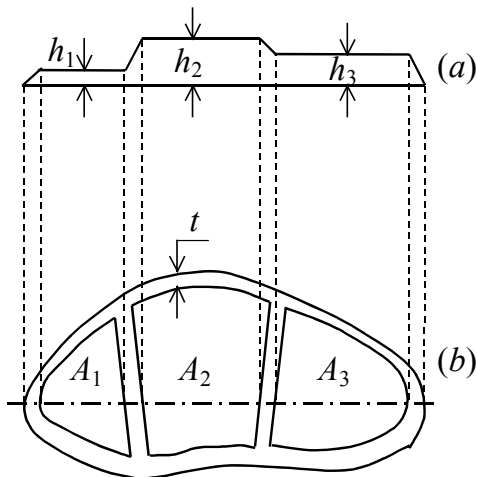


• Equilíbrio das forças sobre a membrana:

$$p A = \int_C T \frac{h}{t} ds \xrightarrow{\text{ANALOGIA}} 2G\theta = \frac{1}{A} \int_C \tau ds \xrightarrow{\quad} \theta = \frac{M_t}{4GA^2} \int_C \frac{ds}{t}$$

$$C = \frac{M_t}{\theta} = \frac{4GA^2}{\int_C \frac{ds}{t}} \xrightarrow{\text{Espessura Constante}} C = \frac{M_t}{\theta} = \frac{4GA^2 t}{L}$$

4.5.5. Secção Multicelular



• Equilíbrio da célula (i):

$$p A_i = T \int_{C_i} \frac{\Delta h_i}{t} ds \quad (n \text{ equações nas alturas } h_i)$$

$$\tau = \frac{\Delta h}{t} \quad (\text{atenção: } p/t = 2G \theta! \dots) ; \quad \text{Vol} = \sum_{i=1}^n A_i h_i ; \quad M_t = 2 \sum_{i=1}^n A_i h_i$$