Reg. S09471
Cota Tese N.º 370

Diana Valquíria Teixeira Costa Leite

Estudo de Curvas de 3.º e 4.º grau segundo Gomes Teixeira

Faculdade de Ciências do Porto
MATEMÁTICA

Departamento de Matemática Pura

Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

2007

Biblioteca
Faculdade de Ciências
Universidade do Porto
D000100333

Diana Valquíria Teixeira Costa Leite

Estudo de Curvas de 3.º e 4.º grau segundo Gomes Teixeira

Tese submetida à Faculdade de Ciências da
Universidade do Porto para obtenção do grau de Mestre
em Ensino da Matemática

Departamento de Matemática Pura
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
2007

8/9/2008

A presidente do júri,

Ana Maria Oliveira

Os que se ocupam da Matemática começam a estudá-la pelo que tem de útil, principiam a amá-la quando compreendem o que tem de belo, e apaixonam-se por ela quando subiram assaz alto para abranger o que tem de sublime.

in Panegíricos e Conferências, de Francisco Gomes Teixeira

À memória do meu avô Basílio da Costa Leite.

Conteúdo

Índice de Figuras **13**

1 Introdução **17**

2 Ferramentas Utilizadas **23**

I Processamento de Texto 23

II Desenho e Simulação Geométrica 29

III Cálculo Simbólico 53

IV Suporte Digital Interactivo 58

3 Cúbicas Notáveis **67**

I A Cisóide 67

II A Concóide de Sluse 83

III A Estrofóide 89

IV A Trissectriz de Maclaurin 105

V As Cúbicas Circulares 110

4 Cúbicas Notáveis - Continuação **131**

I O Folium de Descartes 131

II A Anguinea de Newton 139

III A Tridente de Newton 146

IV A Concóide Parabólica de Descartes 151

V A Cúbica de Agnesi 154

VI A Curva de Rolle 164

VII A Curva Mista 168

VIII O Folium Parabólico 173

IX As Parábolas Divergentes 176

X As Cúbicas de Chasles 192

XI Conclusão - Notícia bibliográfica sobre as cúbicas em geral 196

5 Quárticas Notáveis **199**

I As Espíricas de Perseo 199

II As Cassínicas 211

III As Lemniscatas 221

IV A Lemniscata de Bernoulli 236

6 Quárticas Notáveis - Continuação **251**

I O Caracol de Pascal 251

II A Cardióide 267

III Os Ovais de Descartes 271

IV As Quárticas Bicirculares 289

7 Alterações efectuadas ao documento original **305**

8 Conclusão **313**

Referências **315**

Lista de Figuras

1 Fotografia de Francisco Gomes Teixeira 18

2 Capa do livro *Tratado de las curvas especiales notables* escrito por Gomes Teixeira em 1905 20

3 Exemplo de numeração de equações 22

1 Macro: Raiz Quadrada do ponto P_1 34

2 Macro: Soma do ponto P_1 com o ponto Q_1 36

3 Macro: Raiz Cúbica do ponto P_1 37

4 Macro: Quociente entre P_1 e Q_1 39

5 Macro: Diferença de P_1 e Q_1 40

6 Construção de um selector 41

7 Construção inicial das raízes da equação cúbica $x^3 + a'x^2 + b'x + c' = 0$, com a', b' e c' reais 42

8 Janela da ferramenta *Criar função* no software geométrico C.a.R. 44

9 Função $f(x) = x^3 + a'x^2 + b'x + c'$, com a', b' e c' reais e os seus zeros reais x_1, x_2 e x_3. 45

10 Função $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, com $a \neq 0$ e b, c e d reais, e os seus zeros reais x_1, x_2 e x_3. 46

11 Gráfico da função com a equação cartesiana $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$, com $a \neq 0$ e b, c e d reais. 49

12 Cálculo dos coeficientes b, c e d reais da função $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d = 0$, quando os seus zeros são $x_1 = 1$ $x_2 = 2$ e $x_3 = 3$ 50

13 Gráfico da função com a equação cartesiana $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$, com $a \neq 0$ e b, c e d reais. 51

14 Parábolas Divergentes quando $x_3 > x_2 > x_1$ 52

15 Ecrã principal do programa Maxima 54

16 Menu *sombra* do TiddlyWiki 59

17 Página Inicial do documento do TiddlyWiki 61

18 Página Inicial do documento do TiddlyWiki para a web 62

19 *Tiddler* Cap 1 - Índice 63

20 *Tiddler* 003. 64

21 Subsecções existentes na secção *A Cardióide* do Capítulo 4 65

22 Exemplo de Nota de Rodapé 65

1 *Cisóide de* DIOCLES 68

2 *Cisóide Oblíqua* 75

3 *Concóide* de Sluse 84

4 *Concóide* de Sluse, quando $OB^2 > k^2$ 87

5 *Concóide* de Sluse, quando $OB^2 < k^2$ 88

6 *Estrofóide* Oblíqua 90

7 *Estrofóide* Recta 92

8 Procedimento para a construção da Estrofóide 101

9 Estrofóide 104

10 *Trissectriz de Maclaurin* 107

11 Cúbicas Circulares unicursais 127

12 Folium de Descartes 133

13 A Anguinea de Newton, quando a e b possuem o mesmo sinal 139

14 A Anguinea de Newton, quando a e b têm sinais contrários 142

15 A Anguinea de Newton 144

16 Tridente de Newton, quando B e C são valores positivos 147

17 Tridente de Newton, quando B e C são valores negativos 148

18 Procedimento efectuado por Longchamps 150

19 Concóide Parabólica de Descartes 152

20 Cúbica de Agnesi 155

21 Cúbica de Agnesi 156

22 Pseudoversiera 160

23 Pseudoversiera 161

24 A Curva da Rolle 165

25 A Curva Mista, quando $a > 0$ e $b > 0$ 169

26 A Curva Mista, quando $a < 0$ e $b > 0$ 170

27 Procedimento efectuado por Longchamps 171

28 Folium Parabólico 174

29 Procedimento efectuado por Longchamps 176

30 Parábolas Divergentes, quando $\alpha > \beta > \gamma$ 181

31 Parábolas Divergentes, quando $\alpha = \beta$ 182

32 Parábolas Divergentes, quando $\beta = \gamma$ 183

33 Parábolas Divergentes, quando $\alpha = \beta = \gamma$ 184

34 Cúbicas de Chasles, quando α, β e γ são raizes reais e distintas 195

35 Cúbicas de Chasles, quando $\alpha = \beta$ e $\alpha > \gamma$ 196

36 *Espíricas* de Perseo, quando $l > R$ e $l \leq c < l + R$ 203

37 *Espíricas* de Perseo, quando $l > R$ e $l - R < c < l$ 205

38 *Espíricas* de Perseo, quando $l > R$ e $c < l - R$ 206

39 Procedimento para a construção das Cassínicas 212

40 *Lemniscata Elíptica* 223

41 *Lemniscata Hiperbólica* 232

42 Lemniscata de Bernoulli 237

43 Propriedade que serve de base a um procedimento simples para a construção da curva 249

44 Procedimento para a construção do Caracol de Pascal 252

45 Caracol de Pascal quando $h < a$ 254

46 Caracol de Pascal quando $h > a$ 256

47 Caracol de Pascal quando $h = a$ 257

48 Procedimento para a construção dos Ovais de Descartes 271

49 Procedimento para a construção das normais aos Ovais de Descartes 281

50 Procedimento para a construção dos Ovais de Descartes efectuado pelo geómetra Chasles 287

Agradecimentos

Este espaço é dedicado a todos aqueles que tornaram este sonho realizável, contribuindo de diferentes maneiras, mas sempre com o intuito de me apoiarem e incentivarem em mais uma fase da minha vida académica e pessoal. A todos um **Bem Haja!** por existirem e fazerem parte da minha vida.

Primeiro, quero agradecer ao Professor Doutor Fernando Jorge Moreira, que me apoiou e ajudou de uma forma incansável, estando sempre disponível para me receber, esclarecendo todas as dúvidas que foram surgindo no decorrer deste trabalho. Obrigada por todo o tempo dispensado, toda a paciência demonstrada e todas ajudas na consecução desta dissertação. Acredito que foi este auxílio permanente que me motivou para finalmente chegar a este momento.

Quero agradecer também aos meus pais, por tudo o que fizeram e fazem por mim todos os dias. Obrigada por todos os valores e virtudes que me transmitiram, de modo a que eu seja hoje uma pessoa humilde, lutadora e persistente. Tudo o que alcancei até hoje é por vocês e para vocês. Obrigada por nunca terem desistido de mim!!

À minha irmãzinha rebelde q.b., que me *atura* e apoia de uma forma fantástica.

A toda a minha família, agradeço todo o apoio e dedicação que me manifestam, bem como todo o orgulho que sentem por mim.

Finalmente, mas não menos importante, agradeço ao Mário. Por mais palavras que escreva neste momento todas serão insuficientes para agradecer a alguém que esteve sempre

presente e que me deu o seu apoio incondicional. Agradeço-te toda a dedicação, carinho e amizade que demonstraste sentir por mim. Mais, obrigada por toda a paciência e compreensão que tiveste em todos os momentos em que revelei menos tranquilidade e serenidade. Obrigada por continuares a fazer parte da minha vida!

A todos o meu mais profundo e reconhecido agradecimento!

Capítulo 1

Introdução

Este trabalho tem por base o livro *Tratado de Las Curvas Especiales Notables*, publicado por Francisco Gomes Teixeira, em 1897.

Francisco Gomes Teixeira nasceu a 28 de Janeiro de 1851 na aldeia de S. Cosmado, freguesia de Armamar, no distrito de Viseu e faleceu no Porto, a 8 de Fevereiro de 1933. Em 1869, Gomes Teixeira, que até então estaria indeciso sobre que área a *abraçar*, a Teologia ou a Matemática, matricula-se na Faculdade de Matemática da Universidade de Coimbra.

Demonstrando-se sempre um aluno brilhante e verdadeiramente notável, concluiu o curso em 1874, com a classificação final máxima de 20 valores. Iniciou de imediato o doutoramento, concluindo-o no ano seguinte com uma dissertação intitulada *Integração das equações às derivadas parciais de* 2^a *ordem*, também com elevada superioridade e classificação máxima.

O seu primeiro trabalho foi escrito em 1871, precisamente durante o seu curso e foi publicado na imprensa da Universidade.

Sendo a sua grande inteligência reconhecida e elogiada por todos os que o conheciam, em 1875 é convidado para docente na Universidade de Coimbra.

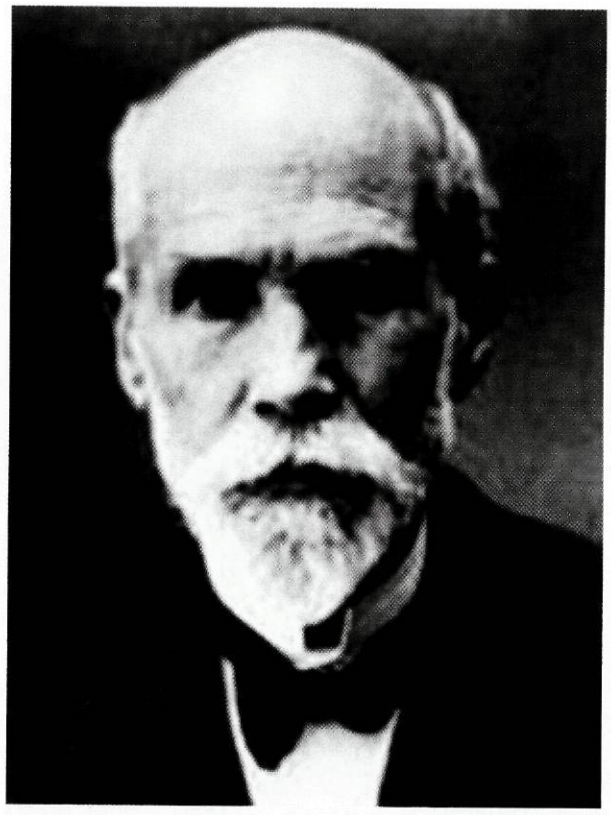


Figura 1: Fotografia de Francisco Gomes Teixeira

Em 1877, Gomes Teixeira fundou *O Jornal de Ciências Matemáticas e Astronómicas*, que foi publicado durante 28 anos, momento em que é integrado nos *Anais Científicos da Academia Politécnica do Porto*. Este jornal teve por objectivo divulgar os progressos das ciências matemáticas e astronómicas, assim como, trabalhos de investigadores portugueses.

Gomes Teixeira sempre foi um homem de grandes paixões e com vastas áreas de interesse, tais como a astronomia, daí que, em 1878 foi nomeado terceiro astrónomo no Observatório Astronómico de Lisboa. No entanto, exerceu este cargo somente durante quatro meses, uma vez que a sua verdadeira fonte de predilecção era a Matemática, o ensino e a investigação. Voltou então, para a Universidade de Coimbra, onde em 1880 obtém o grau de professor catedrático de Cálculo Infinitesimal e Integral.

Em 1879, Gomes Teixeira foi eleito deputado pelo Partido Regenerador. Por este motivo, participou em sessões do Parlamento nesse mesmo ano, assim como em 1883 e 1884.

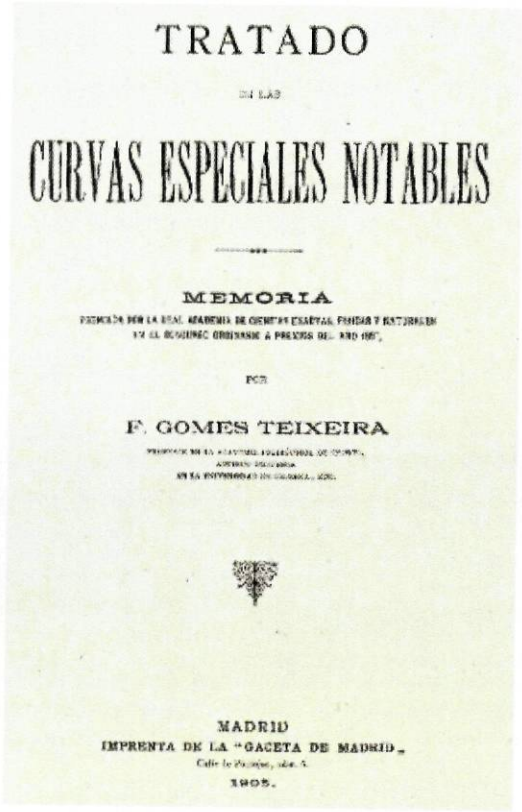
Foi professor em Coimbra até 1883, sendo transferido, a seu pedido, para Academia Politécnica do Porto, nesse mesmo ano. Foi nomeado director desta Academia pouco tempo depois de chegar ao Porto, tendo desempenhado este cargo com bastante dedicação e empenho até 1911. Em Agosto de 1911, foi nomeado reitor da recém formada Universidade do Porto, passando depois a reitor honorário em 1919. Gomes Teixeira exerceu, durante 45 anos, a sua função de docente, de uma forma espantosa e admirável, tendo sido forçado a abandonar esta carreira com 78 anos.

A sua grandiosa obra deu um enorme contributo para a divulgação e elevação de Portugal na área da Matemática, uma vez que muitos dos seus trabalhos foram publicados e reconhecidos internacionalmente. Por esta razão, o governo decidiu manter Gomes Teixeira como director do Instituto de Investigação Científica da História das Matemáticas Portuguesas.

Gomes Teixeira travou conhecimento com muitos matemáticos seus contemporâneos, nas diversas viagem que efectou, bem como, em congressos em que participou. Foi também membro de várias sociedades científicas e academias de ciências, quer nacionais quer estrangeiras.

Em 1897, Gomes Teixeira ganhou o prémio atribuído pela Academia Real das Ciências de Madrid, com o seu trabalho *Tratado de las Curvas Especiales Notables, tanto planas como alabeadas*. Esta obra é considerada de bastante qualidade científica e histórica, sendo reconhecida internacionalmente. Devido ao seu imensurável valor, foi reeditada em dois países: Nova Iorque, em 1971, e Paris, em 1995.

Ora, é incontestável o valor e importância do *Tratado de las Curvas Especiales Notables*, daí que este trabalho tenha por base o que nele foi escrito.


TRATADO

DE LAS

CURVAS ESPECIALES NOTABLES

MEMORIA

POR

F. GOMES TEIXEIRA

MADRID

IMPRENTA DE LA "GACETA DE MADRID"

1905.

Figura 2: Capa do livro *Tratado de las curvas especiales notables* escrito por Gomes Teixeira em 1905

Esta dissertação faz parte de um projecto coordenado pelo Professor Fernando Jorge Moreira. Este projecto tem como objectivo trabalhar todo o *Tratado de las Curvas Especiales Notables* com o intuito de ser elaborado um livro digital e interactivo, onde constarão todos os capítulos desta tão extensa obra. Nesta dissertação vão ser trabalhados os quatro primeiros capítulos, os quais são:

⋆ Capítulo I - Cúbicas Notáveis;

⋆ Capítulo II - Cúbicas Notáveis - Continuação;

⋆ Capítulo III - Quárticas Notáveis;

⋆ Capítulo IV - Quárticas Notáveis - Continuação.

O objectivo desta dissertação é, sem modificar o conteúdo original da obra, dar-lhe um novo formato de maneira a que esta possa ser difundida recorrendo às novas tecnologias da informação. O seu conteúdo foi reescrito, verificando-se, com a ajuda de software de cálculo simbólico, todas as expressões matemáticas nela existentes. A notação utilizada na obra foi mantida, apesar de por vezes se verificar abuso de linguagem. Às imagens originais foi acrescentada a possibilidade de o leitor poder manipular e alterar vários parâmetros nelas existentes, recorrendo ao programa de Geometria Dinâmica C.a.R..

Todos os programas utilizados para a consecução desta dissertação são programas gratuitos e de livre utilização, nomeadamente:

⋆ LaTeX [8] e TeXnicCenter [8], para o Processamento de Texto;

⋆ C.a.R.[14], para permitir Desenho e Simulação Geométrica;

⋆ Maxima e o wxMaxima [16], para auxiliar na Análise e Cálculo Funcional;

⋆ Tiddlywiki [18], para a produção de um Suporte Digital Interactivo, baseado nas tecnologias da internet.

Durante a execução do trabalho tentou-se sempre manter a estrutura inicial, assim como, a numeração. No entanto, alterou-se a forma de numeração das equações, de maneira a incluir a numeração do capítulo a que pertencem. Na versão original a numeração era reiniciada a cada nova secção, o que constrangia a criação de *hiperreferências*. Esta numeração das equações por capítulo, permitiu assim, uma melhor percepção nas referências a equações, facilitando também a manipulação dos elementos digitais. Através do exemplo ilustrado na figura (3), que mostra a sexta equação que aparece no capítulo três, é possível visualizar este novo tipo de numeração.

O presente trabalho contém também um capítulo, onde estão enunciadas todas as alterações efectuadas ao documento original *Tratado de Las Curvas Especiales Notables.*

$$y' = \frac{a^{\frac{1}{2}}(\pm x^{\frac{1}{2}} - 2a^{\frac{1}{2}})}{2(\pm x^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}})^2} \quad e \quad y'' = \frac{a^{\frac{1}{2}}(-1 \pm 3a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{-1}{2}})}{4(\pm x^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}})^3} \tag{3.6}$$

(3.6)
número da equação dentro do capítulo
número do capítulo

Figura 3: Exemplo de numeração de equações

De modo a permitir uma melhor visualização, assim como, rápida verificação, foram criadas *hiperligações* para as *subsecções*, assim como para as páginas correspondentes. É de salientar que estas alterações foram efectuadas imediatamente no corpo do texto e que todas estão registadas em nota de rodapé ao longo da dissertação.

Como complemento ao trabalho escrito foi criada uma plataforma digital, em HTML[1] / Javascript[2]. Para tal, utilizou-se a ferramenta TiddlyWiki, que será explicada na Secção IV *Suporte Digital Interactivo* do Capítulo 2 *Ferramentas Utilizadas.* Através desta plataforma digital é possível visualizar e interagir digitalmente com os capítulos referentes ao livro de Gomes Teixeira. Estando também disponível o acesso à versão digital desta dissertação.

[1] É um acrónimo para a expressão inglesa **H**yper**T**ext **M**arkup **L**anguage, que é a linguagem utilizada nas páginas da internet.

[2] É uma linguagem de programação que permite introduzir elementos dinâmicos num ficheiro HTML.

Capítulo 2

Ferramentas Utilizadas

I Processamento de Texto

Esta dissertação foi elaborada utilizando o sistema de escrita TEX/ LATEX [8] proporcionado pela distribuição MiKTEX [7] em conjunto com o programa TEXnicCenter [8]. Esta configuração propicia um processador de texto que é muito mais fiável, rápido e com um resultado final mais apelativo do que qualquer processador de texto clássico, como por exemplo, Microsoft® Word [10] ou OpenOffice Writer[11].

O uso do LATEX é bastante comum nos meios académicos e científicos, nomeadamente para textos matemáticos, uma vez que facilita bastante a criação de fórmulas matemáticas e permite ao utilizador não ter que se preocupar com a formatação nem com a numeração de fórmulas, capítulos, secções, definições, exemplos, figuras e teoremas, dirigindo toda a sua atenção para o conteúdo e para a estruturação lógica das ideias.

Umas das desvantagens da utilização do LATEX reside no facto da sua aprendizagem requerer mais atenção e ser, por vezes, mais difícil que a de outro processador de texto. Isto justifica-se pelo facto deste programa utilizar bastantes comandos (macros), que muitas vezes se revelam complicados e pouco evidentes. Todos estes comandos iniciam-se com uma

barra invertida (\). Tudo isto faz com que número de utilizadores deste programa seja algo limitado, apesar de ser um programa de livre utilização.

Todo o documento produzido em LaTeX tem um preâmbulo e um corpo. No preâmbulo estão todos os comandos que especificam as características do documento, tais como: o tipo de documento, formato do papel, altura e largura do texto, tamanho da letra utilizada, o espaçamento entre linhas, etc. Este preâmbulo terá que conter necessariamente o comando `\documentclass`. Sendo assim, o primeiro comando a surgir num documento de LaTeX é o seguinte:

```
\documentclass[opções]{estilo}.
```

Onde está escrito *opções*, deve ser designado:

- o tamanho base das letras usadas no texto, por exemplo, **10pt**, ou **12pt**;
- o tamanho do papel a utilizar, por exemplo, **a4paper** se o papel for A_4;
- a disposição do texto, por exemplo, **twocolumn** quando se pretende uma impressão em duas colunas;
- etc.

Relativamente ao *estilo*, deve ser indicado o estilo de trabalho a elaborar, por exemplo, **article**, **report**, **book**, **letter**, etc.

Após o comando anteriormente citado introduzem-se ferramentas auxiliares, mediante o comando `\usepackage{}`, os quais permitem designar todas as características do documento. Por exemplo, no presente trabalho utilizou-se:

- `\usepackage{amsmath,amsfonts,amssymb}` - para estender a notação matemática (ferramentas provenientes da American Mathematical Society);

- `\usepackage[portuges]{babel}` - para a opção de língua portuguesa, permitindo que a gestão de datas e nomes como Capítulo ou Bibliografia apareçam em português;
- `\usepackage[center,small]{caption}` - que permite que todas as legendas que apareçam no texto sejam centradas e com tamanho de letra pequeno;
- `\usepackage[latin1]{inputenc}` - a qual define a codificação dos caracteres, permitindo introduzir directamente caracteres acentuados.

O corpo do documento inicia com o comando `\begin{document}` e finaliza com `\end{document}`. No corpo do documento podem também ser utilizados comandos de formatação adicionais apenas com efeito local, como por exemplo:

- `\textit{Colocar o texto em itálico}`;
- `\begin{center} Colocar o texto centrado \end{center}`;
- `\textbf{Colocar o texto a negrito}`;
- etc.

De seguida, mostra-se o exemplo de um documento em LaTeX:

```
\documentclass[a4paper,12pt]{book}
\usepackage{amsmath,amsfonts,amssymb}
\usepackage[portuges]{babel}
\usepackage[latin1]{inputenc}
\title{Citações Interessantes}
\author{Diana Leite}
\begin{document}
\maketitle          % gera o Título
\tableofcontents    % gera o índice
```

```
\pagebreak          % muda de página
\chapter{Citações sobre Matemática}    % Inicia um capítulo
Os números governam o mundo.
\begin{center} % centra o nome Platão
Platão
\end{center}
\chapter{Frases Soltas}    % Inicia um novo capítulo
Nem todos os dias o sol brilha, mas nasce.
\begin{center} % centra o nome Anónimo
Anónimo
\end{center}
\end{document}
```

Relativamente às fórmulas matemáticas, o LaTeX permite escrevê-las de uma forma fácil e simples, como já foi referido anteriormente. No entanto, existe uma maneira de indicar quando inicia uma fórmula e quando esta termina. As fórmulas podem aparecer inseridas numa linha do texto dentro de um parágrafo ou num novo parágrafo, modificando-se apenas o número de \$[1] que aparecem no início e no fim de cada fórmula. Ora, se se pretender que a fórmula apareça em linha com o texto coloca-se no início e no fim da mesma um único \$, como se pode verificar no exemplo a seguir:

```
Dá-se o nome de \textit{Folium}, ou \textit{folha de Descartes},à curva
cuja equação, em coordenadas cartesianas, é $x^{3}-3axy+y^{3}=0$.
```

Esta instrução tem como output a seguinte afirmação:

Dá-se o nome de *Folium*, ou *folha de Descartes*, à curva cuja equação, em coordenadas cartesianas, é $x^3 - 3axy + y^3 = 0$.

Mas, se o objectivo é que a fórmula se posicione numa linha independente da do texto

[1] As fórmulas também podem ser delimitadas por \(...\) ou \[...\].

tem que se escrever $$ no início e no fim da mesma, tal como se apresenta a seguir.

```
Dá-se o nome de \textit{Folium}, ou \textit{folha de Descartes},à curva
cuja equação, em coordenadas cartesianas, é $$x^{3}-3axy+y^{3}=0 \ \ .$$
```

Esta instrução cria a seguinte afirmação:

Dá-se o nome de *Folium*, ou *folha de Descartes*, à curva cuja equação, em coordenadas cartesianas, é

$$x^3 - 3axy + y^3 = 0 \ .$$

No entanto, as fórmulas também podem aparecer numeradas, tal como acontece por diversas vezes no decorrer deste trabalho. Para tal, é necessário utilizar o comando `\begin{equation}` no início da fórmula e `\end{equation}` no final, como se mostra no exemplo seguinte:

```
Dá-se o nome de \textit{Folium}, ou \textit{folha de Descartes},à curva
cuja equação, em coordenadas cartesianas, é

\begin{equation}
x^{3}-3axy+y^{3}=0
\end{equation}
```

Esta instrução gera o texto seguinte:

Dá-se o nome de *Folium*, ou *folha de Descartes*, à curva cuja equação, em coordenadas cartesianas, é

$$x^3 - 3axy + y^3 = 0 \tag{2.1}$$

Para a instalação deste ambiente de desenvolvimento pode-se descarregar, instalar e configurar os programas MiK TEX e TEXnicCenter, disponíveis, respectivamente a partir dos sites: `http://miktex.org/` [7] e `http://www.toolscenter.org/` [9]. Para obter um

texto em português sobre as funcionalidades do LaTeX o leitor deverá consultar o site `http://www.ctan.org/tex-archive/info/lshort/portuguese/ptlshort.pdf`[13].

II Desenho e Simulação Geométrica

O software geométrico escolhido para auxiliar todo este trabalho foi o programa C.a.R.[2] [14], ou em português, R.e.C., desenvolvido pelo professor René Grothmann da Universidade Católica de Berlim, na Alemanha. A escolha deste software de geometria dinâmica plana justificou-se principalmente pelo facto de este ser gratuito, sendo acessível a qualquer pessoa - professor, aluno, assim como porque está escrito em linguagem Java [15] e funcionar em qualquer plataforma - Microsoft® Windows[10], Linux[12], sistemas de Apple. As noções básicas deste programa foram introduzidas durante a disciplina de *Computadores no ensino da Matemática*, que faz parte do plano curricular do *Mestrado em Ensino da Matemática.*

A maioria das construções feitas neste trabalho são dinâmicas e interactivas, o que significa que é possível testar muitas conjecturas. Para tal, é possível controlar os diversos parâmetros utilizando selectores que fazem variar o valor dos mesmos, tornando-se assim mais fácil e intuitivo verificar as diversas situações.

Em meu entender, este software revela-se bastante pertinente e adequado à didáctica matemática. Nomeadamente, pode ser pedra basilar na leccionação de conteúdos programáticos alusivos à geometria plana de uma forma mais atractiva, inovadora e potenciadora de um ensino centrado no aluno.

Convém evidenciar que não se pretende que este trabalho seja um texto introdutório a este programa, mas que sirva simplesmente para mostrar ao leitor algumas das vantagens e possibilidades na construção de figuras e lugares geométricos. Nestes tipos de programas é possível movimentar pontos e rectas, mantendo as suas relações geométricas iniciais. Isto significa que, se se construir uma recta perpendicular (ou paralela) a outra, esta propriedade mantém-se sempre, mesmo quando se move a primeira recta. O mesmo acontece quando

[2] A expressão C.a.R. surgiu da tradução do alemão Z.u.L, que significa ***Zirkel und Lineal*** para o inglês ***Compass and Ruler*** (Compasso e Régua). Em português este programa é denominado por R.e.C, isto é, *Régua e Compasso.*

um ponto pertence a uma recta, se o utilizador mover a recta, este ponto irá pertencer sempre à recta.

É de referir que se assume que o leitor tem alguma familiaridade com este tipo de programas geométricos, pretendendo-se que a presente dissertação lhe desperte mais ainda curiosidade e interesse pelo tema.

Para o leitor proceder à instalação deste programa basta aceder à página: `http://mathsrv.ku-eichstaett.de/MGF/homes/grothmann/java/zirkel/` [14] e transferir o ficheiro executável `car.exe`. Dado que este programa foi desenvolvido em linguagem Java, é necessário ter instalado no computador o ambiente de execução de Java (JRE), disponível gratuitamente no site `http://www.java.com` [15].

Uma construção com o programa C.a.R.

Em seguida, vamos apresentar como se chegou à construção da figura (30) feita com o software C.a.R., a qual é designada, no trabalho, por *Parábolas Divergentes, quando* $\alpha > \beta > \gamma$, que se encontra no capítulo 2 - *Cúbicas Notáveis - Continuação* deste trabalho.

Para a construção da figura foi necessário determinar geometricamente as soluções da equação cúbica $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, com $a \neq 0$ e b, c e d reais. Para isso, utilizou-se o método de Cardano[3], como se pode confirmar em seguida.

De modo a simplificar a construção, assim como os cálculos algébricos, dividiu-se todos os termos da equação $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, com $a \neq 0$ e b, c e d reais, por a, obtendo-se

$$x^3 + a'x^2 + b'x + c' = 0, \quad \text{onde} \quad a' = \frac{b}{a}, \quad b' = \frac{c}{a} \quad \text{e} \quad c' = \frac{d}{a}. \tag{2.2}$$

De modo a eliminar o termo quadrático, substituiu-se na equação (2.2) x por $t - \frac{a'}{3}$,

[3]Este método foi desenvolvido por Scipione del Ferro e Tartaglia e foi publicado por Gerolamo Cardano em 1545.

obtendo-se assim

$$t^3 + pt + q = 0, \quad \text{com} \quad p = b' - \frac{a'^2}{3} \quad \text{e} \quad q = c + \frac{2a'^3 - 9a'b'}{27}. \tag{2.3}$$

De seguida, supôs-se a possibilidade de determinar u e v, tais que:

$$u^3 - v^3 = q \quad \text{e} \quad uv = \frac{p}{3}. \tag{2.4}$$

Portanto, a solução da equação inicial passou a ser $v - u$. Isto é possível confirmar-se, substituindo-se t por $v - u$, q por $u^3 - v^3$ e p por $3uv$ na equação (2.3), donde vem

$$(v - u)^3 + 3uv(v - u) - (u^3 - v^3) = 0 \quad .$$

Resolvendo a equação $uv = \frac{p}{3}$ em ordem a v e substituindo este valor na equação $u^3 - v^3 = q$, chegou-se à equação

$$u^3 - \frac{p^3}{27u^3} = q \quad ,$$

que é equivalente a

$$27(u^3)^2 - 27qu^3 - p^3 = 0 \quad .$$

Aplicando a fórmula resolvente a esta última equação, obteve-se

$$u^3 = \frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}^{4},$$

ou seja,

$$u = \sqrt[3]{\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}^{5}. \tag{2.5}$$

Ora, como $t = v - u$ e $x = t - \frac{a'}{3}$, vem que $x = v - u - \frac{a'}{3}$.

[4]Para $y > 0$ real, $\sqrt{y}$ representa, como normalmente, o número positivo y_1, tal que $y_1^2 = y$.

[5]Sendo z um número complexo, escreveu-se $u = \sqrt[3]{z}$ para representar u_1, u_2 e u_3 tais que $u_i^3 = z$, com $i = 1, 2, 3$.

Convém advertir que são seis os valores obtidos pela equação (2.5), uma vez que da raiz quadrada são obtidas duas soluções e da raiz cúbica três soluções.

Mais, é importante dar atenção a dois casos em particular, de modo a evitar divisões em que o denominador se anula.

1.º Caso: Quando $p = 0$ e substituindo este valor na equação (2.5), obtém-se:

$$u = \sqrt[3]{\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4}}} \ .$$

Neste caso, deve ser escolhido o sinal da raiz quadrada que faça com o valor de u seja diferente de zero, isto é, $u = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4}}}$, ou seja, $u = \sqrt[3]{q}$.

2.º Caso: Quando $p = q = 0$ e, de modo análogo ao anterior, se se substituir estes valores na equação (2.5), vem:

$$u = \sqrt[3]{0} \ .$$

Neste caso, calculando através das equações (2.4) o valor de v, obtém-se $x = -\frac{a'}{3}$, como sendo a raiz real de multiplicidade três.

Podemos agora recorrer ao software C.a.R. para obter de uma *maneira interactiva e dinâmica* as soluções da equação cúbica (2.2).

Antes de se passar à construção propriamente dita, serão expostas detalhadamente ferramentas elaboradas no C.a.R., designadas por macros e as quais permitem dividir a construção que pretendemos em módulos mais simples.

Macros

Raiz Quadrada

Para definir esta macro, marcam-se a origem das coordenadas, O, e os pontos U_1 de coordenadas $(1, 0)$ e I_1 de coordenadas $(0, 1)$. É de salientar que estes pontos são pontos

fixos.

De seguida, desenha-se um ponto P_1 móvel.

Constrói-se, de imediato, o ângulo a_1 formado pelas semirectas $\dot{O}U_1$ e $\dot{O}P_1$.

No entanto, quando o ponto P_1 coincide com a origem das coordenadas, o ângulo a_1 não está definido. Assim, de maneira a evitar esta situação, tem que se gerar uma expressão T com $if(a_1, a_1, 0)$[6].

Então, constrói-se o ponto R_1, que representa uma raiz quadrada de P_1 de abcissa

$$\sqrt{d(O,P_1)} \times \cos\left(\frac{T}{2}\right)$$

e ordenada

$$\sqrt{d(O,P_1)} \times \text{sen}\left(\frac{T}{2}\right) \quad .$$

Por último, é construído o ponto R_2 que é a outra raiz quadrada de P_1 de abcissa

$$\sqrt{d(O,P_1)} \times \cos\left(\frac{T}{2} + 180\,^\circ\right)$$

e ordenada

$$\sqrt{d(O,P_1)} \times \text{sen}\left(\frac{T}{2} + 180\,^\circ\right) \quad .$$

Para finalizar e depois de efectuar todas estas instruções, para definir esta macro tem que se ir à *barra de ferramentas* escolher a opção *Macros*. De seguida, selecciona-se *Definir Parâmetros de Macro*, e clica-se nos pontos U_1, O e P_1, respectivamente. Depois, volta-se à *barra de ferramentas* e à opção *Macros*, mas selecciona-se a opção *Definir Alvos de Macro* e clica-se nos pontos R_1 e R_2. Finalmente, define-se a macro como sendo *Raiz quadrada*, na opção *Definir Macro*. Na figura (1), pode-se observar todos os pontos necessários à

[6] A expressão geral $if(a, b, c)$ significa que, se se verifica a condição a, então $if(a, b, c)$ toma o valor da expressão b, caso contrário toma o valor da expressão c. Neste caso específico, a expressão $if(a_1, a_1, 0)$ significa que se a_1 não está definida ou é zero, então toma o valor zero.

construção desta macro, assim como os pontos resultantes da mesma. É ainda possível visualizar na *barra de ferramentas* o menu da opção *Macros*.

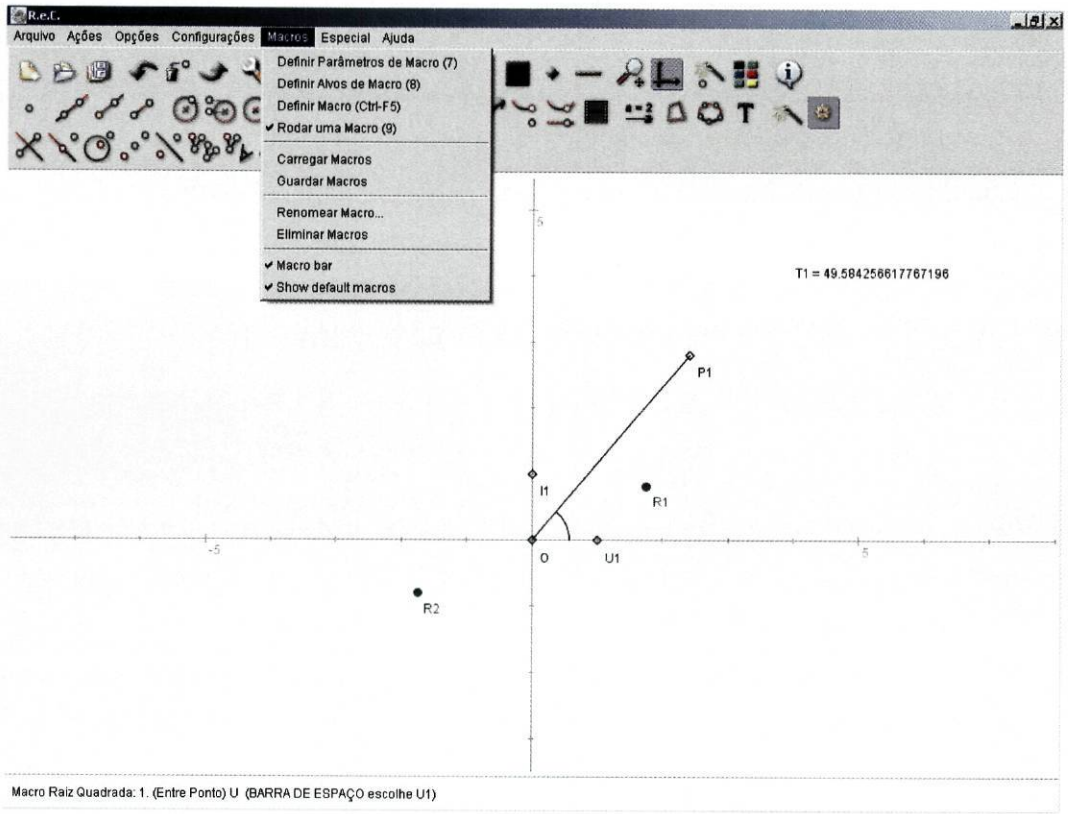


Figura 1: Macro: Raiz Quadrada do ponto P_1

Convém nunca esquecer de guardar as macros, através da *barra de ferramentas* opção *Macros*, *Guardar Macros*, de maneira a puder carregar esta mesma macro para ser utilizada noutra qualquer construção.

Soma

Para definir esta macro Soma, utiliza-se um processo semelhante à macro explicada anteriormente. Marcam-se a origem das coordenadas, O, e os pontos U_1 de coordenadas $(1, 0)$ e I_1 de coordenadas $(0, 1)$, sendo estes três pontos fixos.

Imediatamente a seguir, são marcados dois pontos móveis que se designam por P_1 e Q_1.

Constróem-se os ângulos:

⋆ a_1, formado pelas semirectas $\dot{O}U_1$ e $\dot{O}P_1$;

⋆ a_2, formado pelas semirectas $\dot{O}U_1$ e $\dot{O}Q_1$.

Neste caso, surge o mesmo problema quando P_1 ou Q_1 coincidem com O, o que faz com que a_1 ou a_2 não estejam definidos, respectivamente. Para contornar esta situação, têm que ser criadas duas expressões T_1 como sendo $if(a_1, a_1, 0)$ e T_2 como sendo $if(a_2, a_2, 0)$, respectivamente para P_1 e Q_1.

Em seguida, constrói-se o ponto $P1 + Q1$, o qual representa a soma do ponto P_1 com o ponto Q_1, de abcissa

$$d(O, P_1) \times \cos(T_1) + d(O, Q_1) \times \cos(T_2)$$

e ordenada

$$d(O, P_1) \times \text{sen}(T_1) + d(O, Q_1) \times \text{sen}(T_2) \quad .$$

Para definir a macro utiliza-se um processo análogo ao efectuado para a macro da raiz quadrada. Na figura (2) pode-se visualizar todos os pontos necessários à construção desta macro, assim como o ponto resultante $P_1 + Q_1$.

Faculdade de Ciências do Porto
MATEMÁTICA

Raiz Cúbica

Relativamente à macro da raiz cúbica, pode-se afirmar que a sua construção é análoga à da raiz quadrada, excepto nos três pontos que representam as raízes cúbicas do ponto P_1.

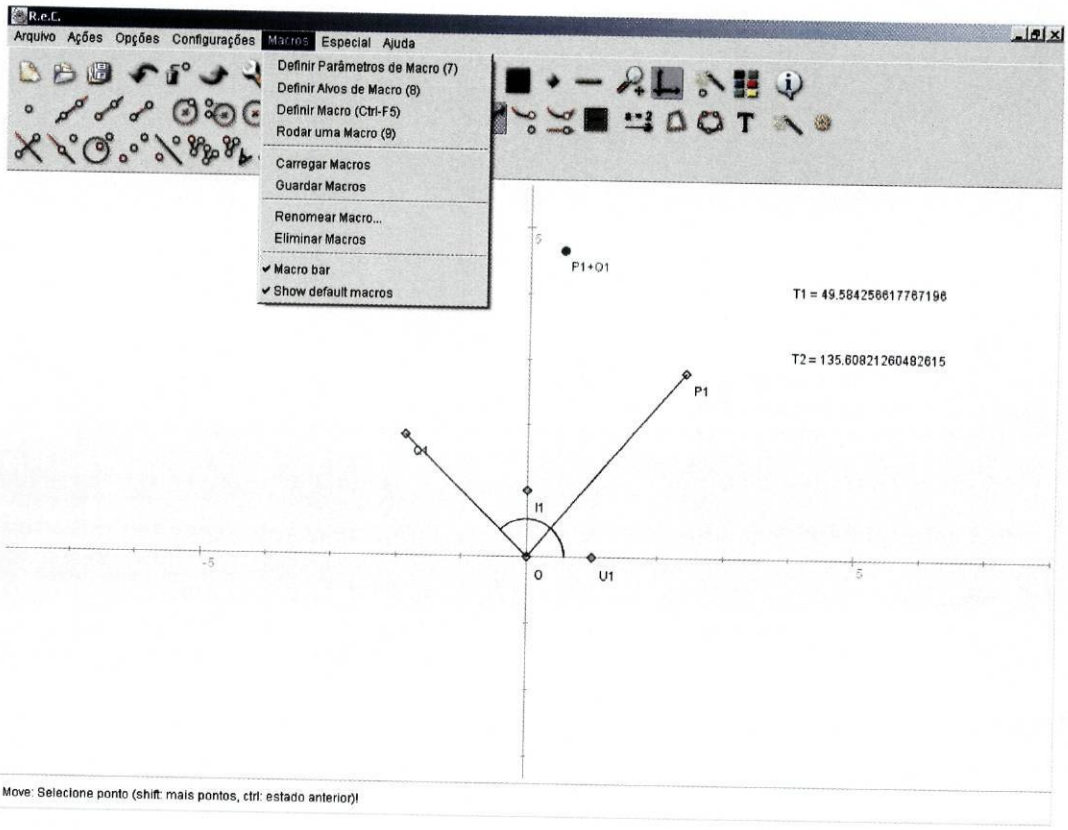


Figura 2: Macro: Soma do ponto P_1 com o ponto Q_1

Desta maneira, marcam-se a origem das coordenadas, O, e os pontos U_1 de coordenadas $(1,0)$ e I_1 de coordenadas $(0,1)$, fixos e um ponto P_1 móvel.

Constrói-se, então, o ângulo a_1 formado pelas semirectas $\dot{O}U_1$ e $\dot{O}P_1$.

O facto de P_1 poder coincidir com o ponto O, continua a ser um problema que é superado, utilizando-se uma expressão T com $if(a_1, a_1, 0)$.

Finalmente, constróem-se os pontos:

- C_1, que representa uma raiz cúbica de P_1 de abcissa $\sqrt[3]{d(O,P_1)} \times \cos\left(\frac{T}{3}\right)$ e ordenada $\sqrt[3]{d(O,P_1)} \times \text{sen}\left(\frac{T}{3}\right)$;

⋆ C_2, que representa uma raiz cúbica de P_1 de abcissa $\sqrt[3]{d(O,P_1)} \times \cos\left(\frac{T}{3} + 120\,^\circ\right)$ e ordenada $\sqrt[3]{d(O,P_1)} \times \text{sen}\left(\frac{T}{3} + 120\,^\circ\right)$;

⋆ C_3, que representa uma raiz cúbica de P_1 de abcissa $\sqrt[3]{d(O,P_1)} \times \cos\left(\frac{T}{3} + 240\,^\circ\right)$ e ordenada $\sqrt[3]{d(O,P_1)} \times \text{sen}\left(\frac{T}{3} + 240\,^\circ\right)$.

Na figura (3), pode-se observar todos os pontos necessários à construção no C.a.R desta macro, assim como os pontos resultantes C_1, C_2 e C_3.

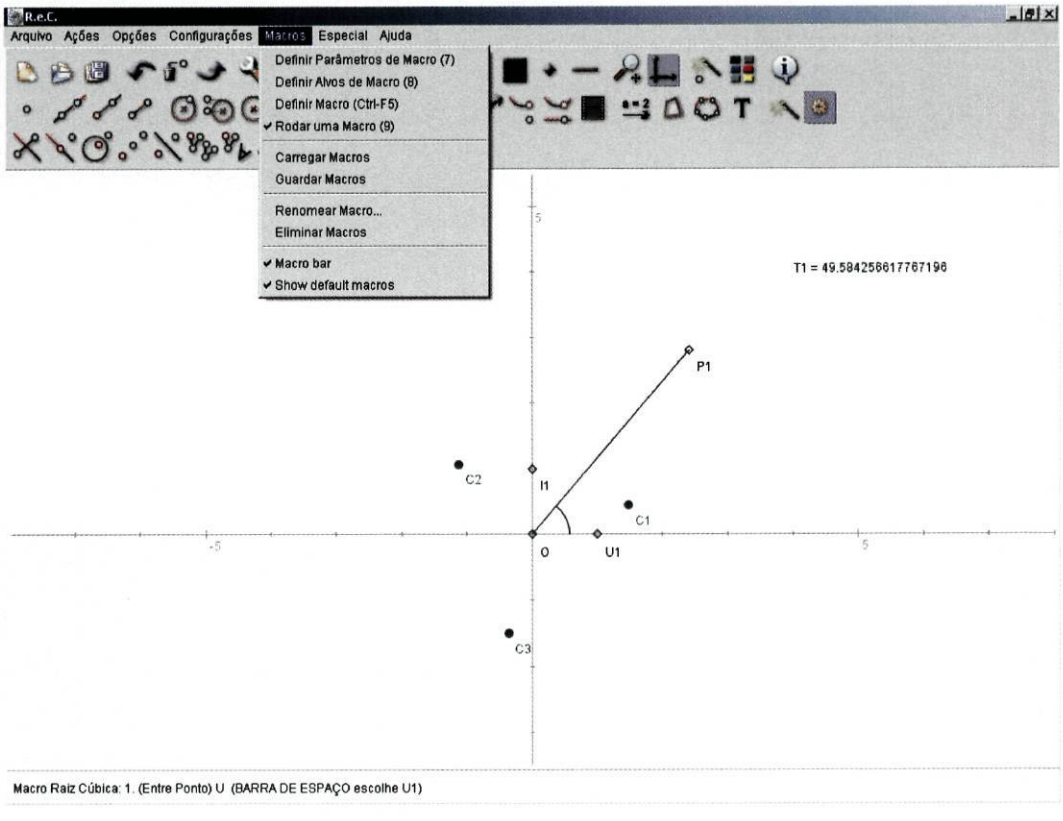


Figura 3: Macro: Raiz Cúbica do ponto P_1

Quociente

Para a construção da macro: Quociente entre P_1 e Q_1, têm que se marcar a origem das coordenadas O, e os pontos U_1 de coordenadas $(1,0)$ e I_1 de coordenadas $(0,1)$, fixos e dois pontos P_1 e Q_1 móveis.

Constróem-se, também, os ângulos: a_1, formado pelas semirectas $\dot{O}U_1$ e $\dot{O}P_1$ e a_2, formado pelas semirectas $\dot{O}U_1$ e $\dot{O}Q_1$.

De seguida, são criadas as expressões T_1 como sendo $if(a_1, a_1, 0)$ e T_2 como sendo $if(a_2, a_2, 0)$, devido ao facto de que quando P_1 ou Q_1 coincidem com O, a_1 ou a_2 não estão definidos, respectivamente.

Finalmente, é construído o ponto $\frac{P_1}{Q_1}$ de abcissa

$$if\left(d(O,Q_1)=0,0,\frac{d(O,P_1)}{d(O,Q_1)}\times\cos(T_1-T_2)\right)$$

e ordenada

$$if\left(d(O,Q_1)=0,0,\frac{d(O,P_1)}{d(O,Q_1)}\times\mathrm{sen}(T_1-T_2)\right) \quad .$$

Convém elucidar que a expressão *if* é aqui utilizada, pelo facto de que se o ponto Q_1 coincide com o ponto O, a distância de Q_1 a O é igual a zero, logo $\frac{P_1}{Q_1}$ torna-se impossível de calcular. Assim, neste caso na construção das raízes cúbicas da equação cúbica, tem-se que $p = q = 0$, logo obtém-se uma raiz real de multiplicidade três. Ora, como $u = 0$ e $x = v - u - \frac{a'}{3}$, quer-se que $v = \frac{p}{3}$, tome também o valor zero. Daí que para contornar este problema, assume-se que $v = 0$.

A figura (4) mostra todos os pontos necessários à construção desta macro, assim como o ponto resultante da mesma $\frac{P_1}{Q_1}$.

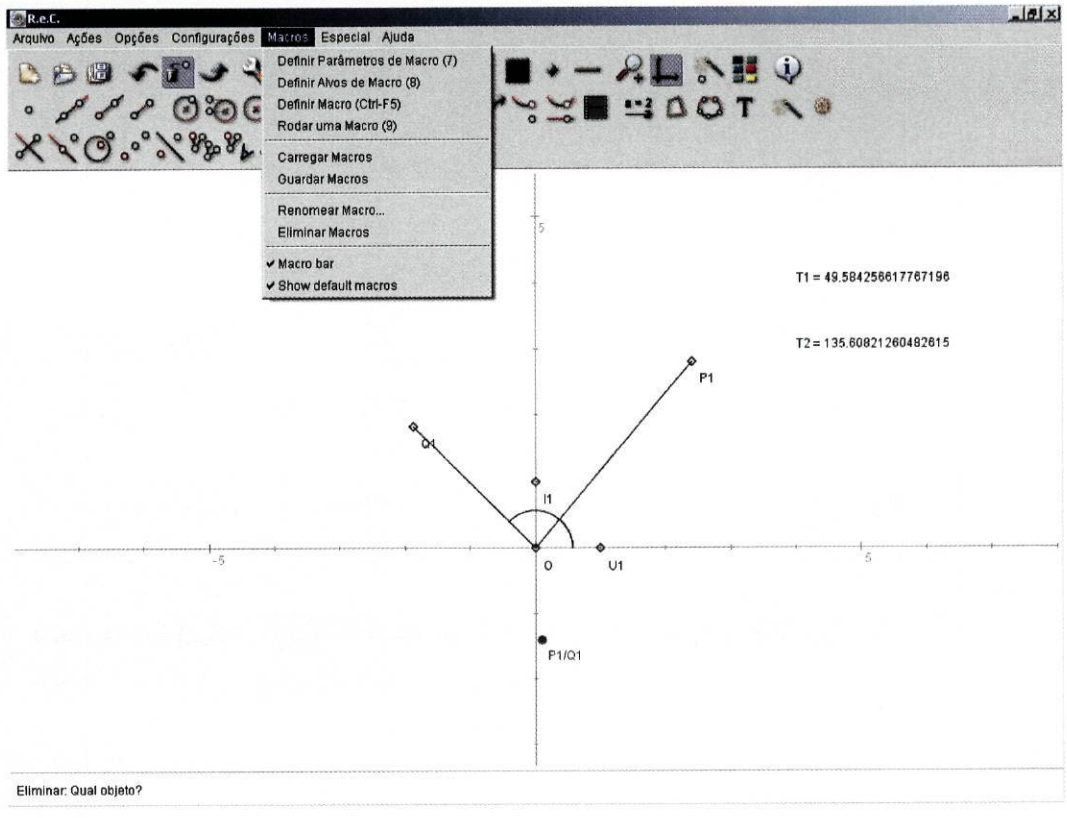


Figura 4: Macro: Quociente entre P_1 e Q_1

Diferença

Finalmente a última macro a ser utilizada é a que permite efectuar a diferença entre o ponto P_1 e o ponto Q_1.

Começa-se, então, por marcar a origem das coordenadas O, e os pontos U_1 de coordenadas $(1,0)$ e I_1 de coordenadas $(0,1)$, como pontos fixos e dois pontos P_1 e Q_1 móveis.

Constroem-se, ainda, os ângulos: a_1, formado pelas semirectas $\dot{O}U_1$ e $\dot{O}P_1$ e a_2, formado pelas semirectas $\dot{O}U_1$ e $\dot{O}Q_1$.

De modo a superar o problema de P_1 ou Q_1 coincidirem com O, o que faz com que a_1 ou a_2 não estejam definidos, respectivamente, são criadas as expressões T_1 como sendo

$if(a_1, a_1, 0)$ e T_2 como sendo $if(a_2, a_2, 0)$.

Finalmente, é construído o ponto $P - Q$ que representa a diferença entre P_1 e Q_1, de abcissa

$$d(O, P_1) \times \cos(T_1) - d(O, Q_1) \times \cos(T_2)$$

e ordenada

$$d(O, P_1) \times \text{sen}(T_1) - d(O, Q_1) \times \text{sen}(T_2) \quad .$$

Através da figura (5) é possível observar todos os pontos necessários à construção desta macro, assim como o ponto resultante da mesma $P_1 - Q_1$.

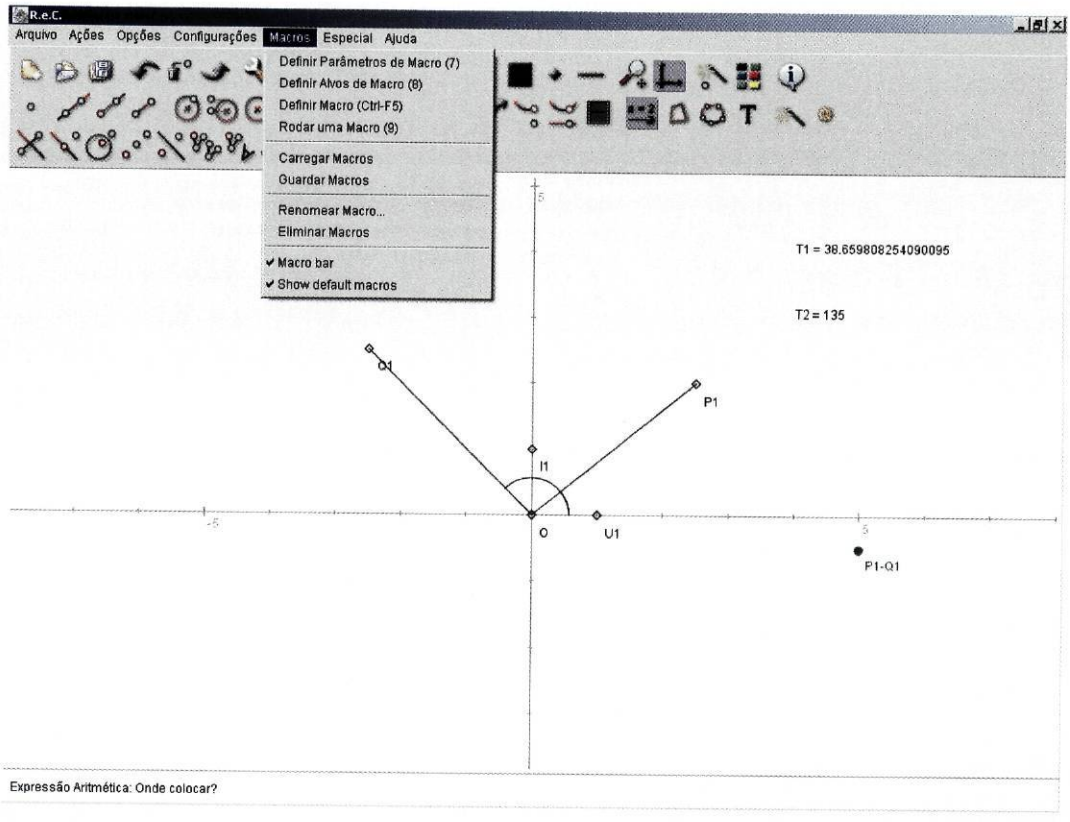


Figura 5: Macro: Diferença de P_1 e Q_1

Construção no C.a.R. para o cálculo das raízes da equação cúbica $x^3 + a'x^2 + b'x + c' = 0$, com a', b' e c' reais

Inicialmente, marca-se a origem e as unidades do referencial como sendo O, U_1 e I_1, respectivamente. Estes pontos são fixos. Definem-se também os eixos coordenados horizontal e vertical, respectivamente x e y.

Em seguida, são criados três selectores (*sliders*), um para cada um dos coeficientes a', b' e c', que variam entre -5 e 5. Para tal, utiliza-se o cursor direito do rato, aparecendo a figura (6).

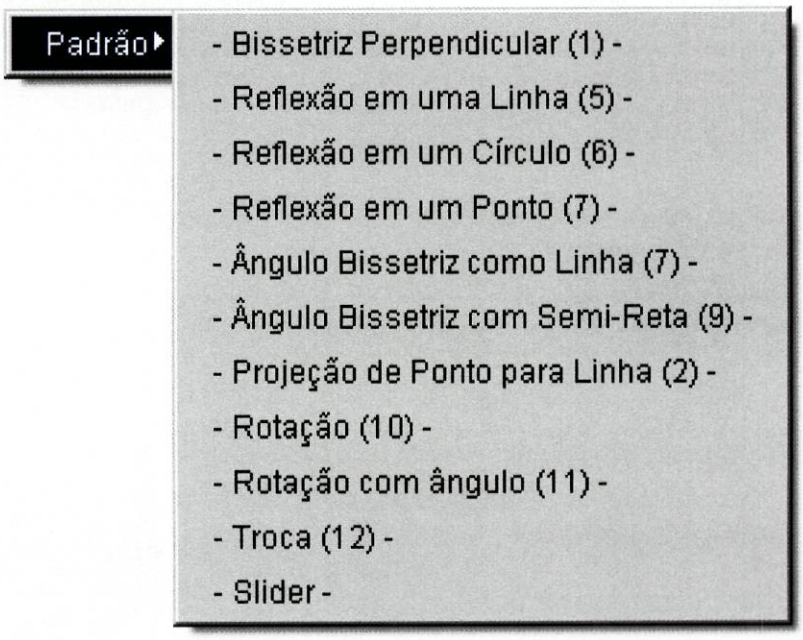


Figura 6: Construção de um selector

Selecciona-se, então, a opção *slider* e clica-se marcando dois pontos, em que o primeiro é o extremo mínimo do selector e o segundo é o extremo máximo do selector.

Em seguida, designa-se a expressão do primeiro selector por a', a expressão do segundo selector por b' e a expressão do terceiro selector por c'.

De imediato, criam-se três expressões designadas por p, q e r, as quais são:

$$p = b' - \frac{a'}{3} \quad , \quad q = c' + \frac{2a'^3 - 9a'b'}{27} \quad \text{e} \quad r = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \quad .$$

Marcam-se, agora, os pontos P_1, Q_1 e R, com as coordenadas $(p, 0)$, $(q, 0)$, $(r, 0)$, respectivamente. Toda esta construção pode ser visualizada na figura (7).

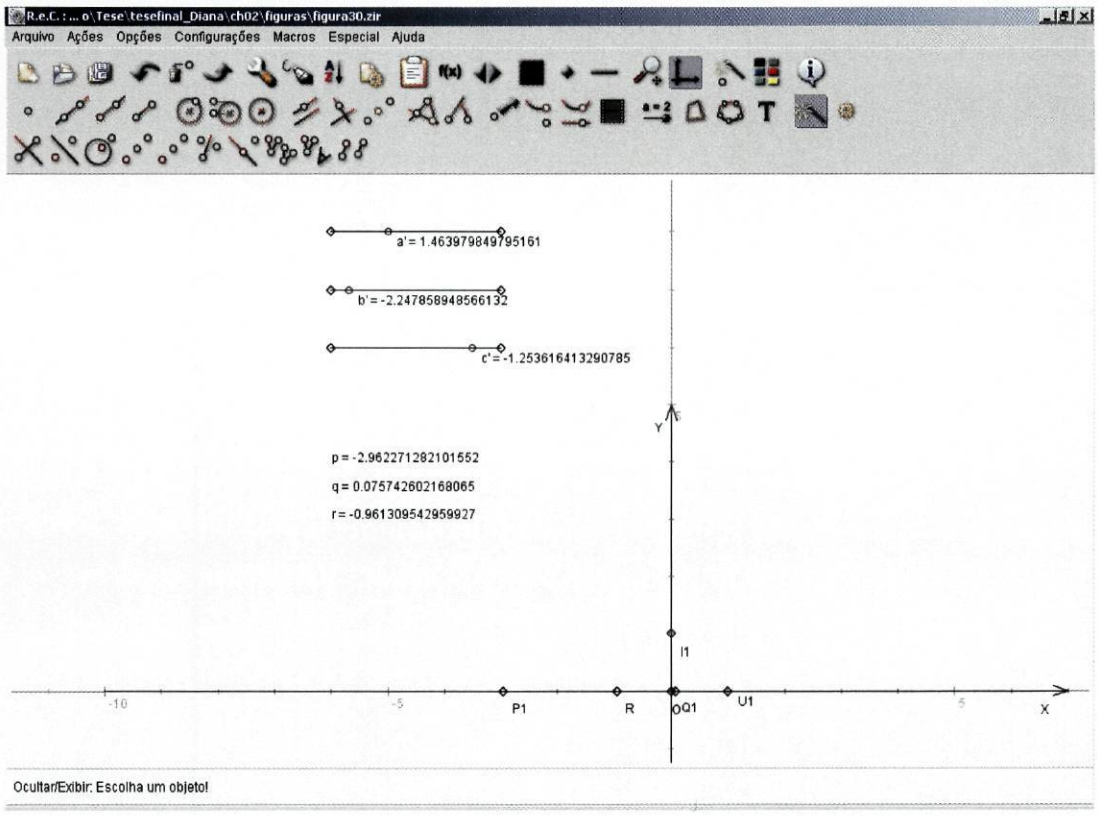


Figura 7: Construção inicial das raízes da equação cúbica $x^3 + a'x^2 + b'x + c' = 0$, com a', b' e c' reais

Em seguida, vão-se construir as raízes quadradas de R, as quais serão designadas por S_1 e S_2. Para isso, utiliza-se a macro *Raiz quadrada*, que se construiu para o cálculo das raízes quadradas de um ponto.

Continuando a construção, marca-se o ponto $\frac{q}{2}$ que tem de coordenadas $\left(\frac{q}{2}, 0\right)$.

Depois, utilizando a macro *Soma*, que se construiu para o cálculo da soma de dois pontos, constrói-se o ponto $\frac{q}{2} + S_1$.

Recorrendo à macro *Raiz cúbica*, que se construiu para o cálculo das raízes cúbicas de um ponto, constroem-se as raízes cúbicas do ponto $\frac{q}{2} + S_1$, as quais serão designadas por u_1, u_2 e u_3.

Pelo mesmo processo, constrói-se o ponto $\frac{q}{2}+S_2$ e imediatamente a seguir constroem-se as suas raízes cúbicas, designando-as por u_4, u_5 e u_6.

Marca-se o ponto $\frac{a'}{3}$ de coordenadas $\left(\frac{a'}{3}, 0\right)$.

Agora, para calcular $3u_1$ que corresponde ao denominador da segunda equação de (2.4) quando resolvida em ordem a v, tem que se aplicar a macro *Soma* duas vezes. Este ponto vai-se definir por $u_1 * 3$.

De seguida, já se pode construir o ponto v_1, utilizando a macro *Quociente* aplicada aos pontos P_1 e $u_1 * 3$, respectivamente.

Constrói-se, então o ponto $v_1 - u_1$, utilizando a macro *Diferença* aplicada aos pontos v_1 e a u_1, respectivamente.

Finalmente, constrói-se o ponto x_1, utilizando a macro *Diferença* aplicada aos pontos $v_1 - u_1$ e a $\frac{a'}{3}$, respectivamente.

De modo análogo, constrói-se os pontos x_2 e x_3, aplicando todos os passos anteriores aos pontos u_2 e u_3, respectivamente.

Convém salientar que não é necessário calcular x_4, x_5 e x_6, uma vez que este coincidem com os outros três já encontrados.

Para complementar esta construção, esboçou-se o gráfico da função cúbica $f(x) = x^3+a'x^2+b'x+c'$, com a', b' e c' reais, e verificou-se que os zeros reais desta função coincidem com as raízes reais da equação cúbica obtidas pela construção anterior. Para tal, tem que se seleccionar na *barra de ferramentas* a opção *Ações* e de seguida a opção *Criar função*,

surgindo no ecrã uma janela como a que se encontra na figura (8). Relativamente a esta figura, convém advertir que a opção *passo* funciona como um incremento que quanto menor for o seu valor, maior será a qualidade do gráfico, dado que mais pontos serão calculados. Depois de se preencher o nome da função, indicar o domínio e o passo, e finalmente a expressão designatória da função, é apresentada a função $f(x) = x^3 + a'x^2 + b'x + c'$, com a', b' e c' reais, como se pode ver na figura (9).

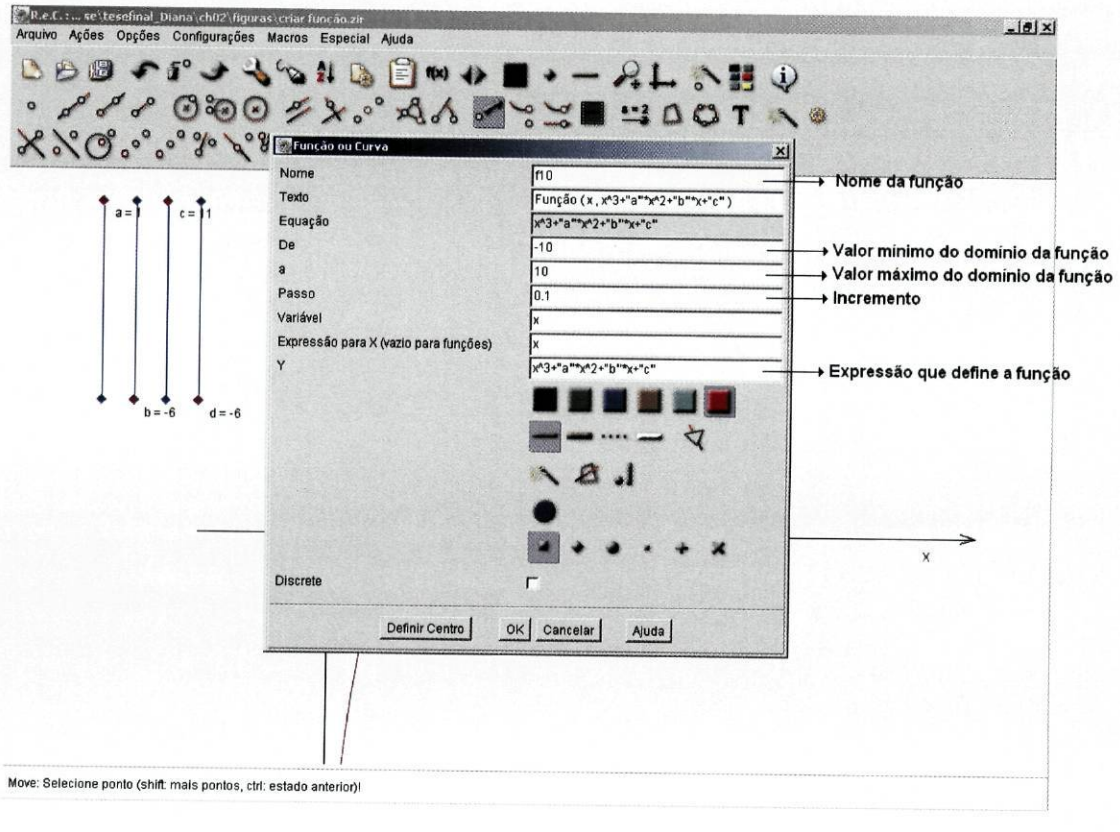


Figura 8: Janela da ferramenta *Criar função* no software geométrico C.a.R.

Neste momento, facilmente se consegue calcular as raízes da equação cúbica geral $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, com $a \neq 0$, b, c e d reais. Para isso, tem que se construir quatro selectores, um para cada um dos coeficientes a, b, c e d, que variem respectivamente entre: $amin$ e $amax$, $bmin$ e $bmax$, $cmin$ e $cmax$ e $dmin$ e $dmax$, como se pode ver pela figura 10

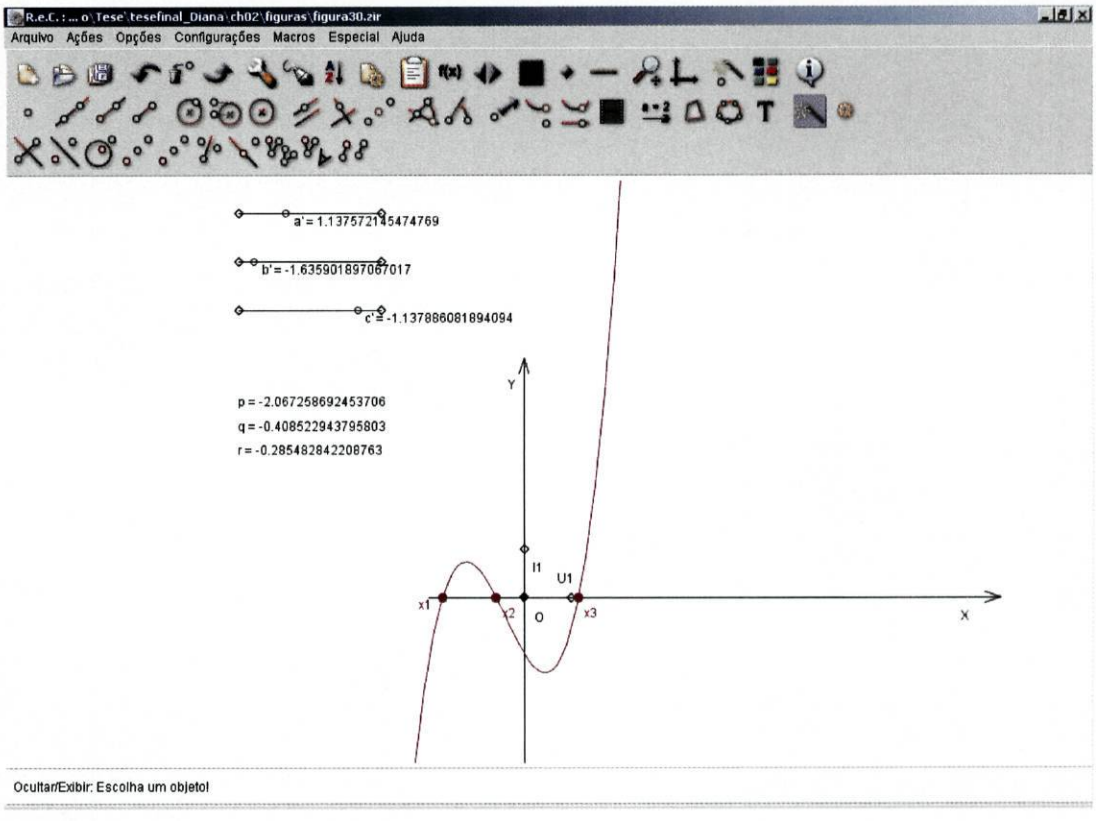


Figura 9: Função $f(x) = x^3 + a'x^2 + b'x + c'$, com a', b' e c' reais e os seus zeros reais x_1, x_2 e x_3.

Depois, substitui-se a expressão aritmética do selector a' por $\frac{b}{a}$, a expressão aritmética do selector b' por $\frac{c}{a}$ e a expressão aritmética do selector c' por $\frac{d}{a}$. E assim, poderá calcular-se todas as raízes da função $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, para quaisquer $a \neq 0$, b, c e d reais.

Para a construção da figura (30), propriamente dita, tem que se marcar dois pontos x_0 e x_4, com as coordenadas $(x(x_1) - 5, 0)$ e $(x(x_3) + 5, 0)$ respectivamente, de forma a que o domínio da função seja entre estes dois valores.

Voltando à curva que se pretende construir na figura (30), esta tem por equação cartesiana $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$ quando $a \neq 0$, ou seja,

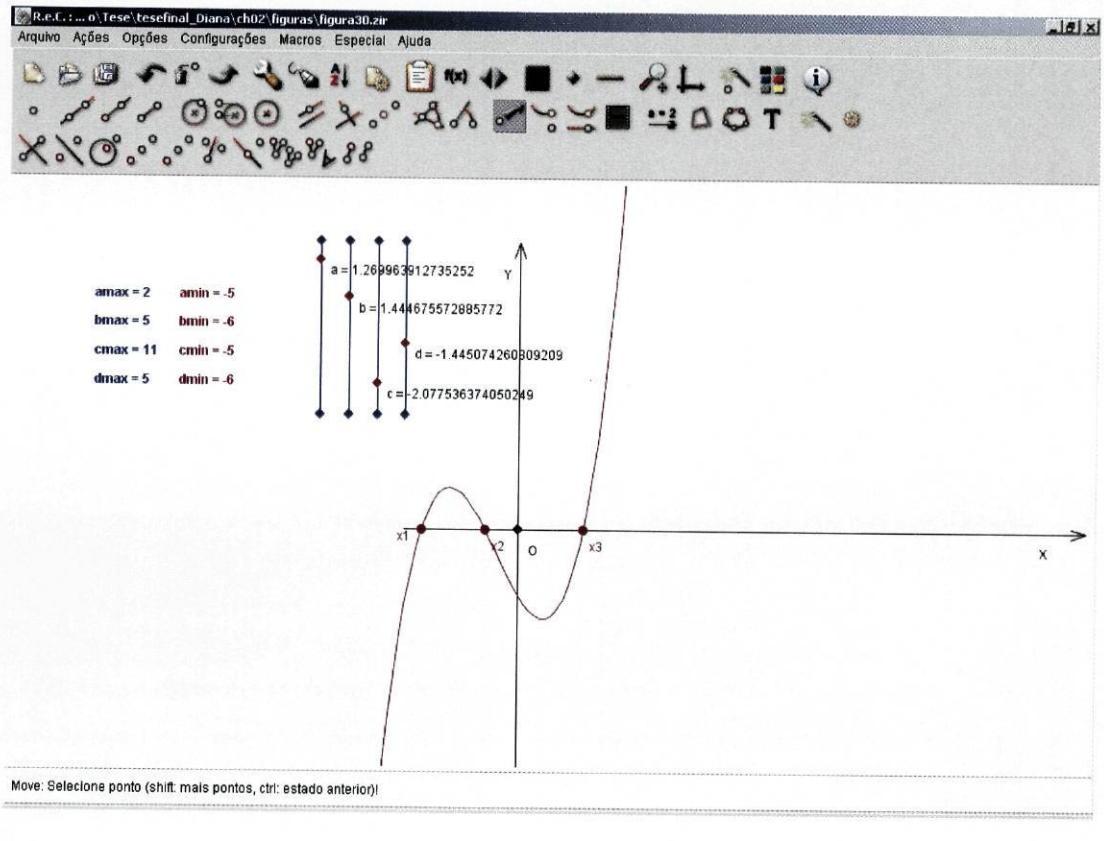


Figura 10: Função $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, com $a \neq 0$ e b, c e d reais, e os seus zeros reais x_1, x_2 e x_3.

$$y = \pm\sqrt{ax^3 + bx^2 + cx + d} \ ,$$

quando $a \neq 0$, para os pontos $x \in$ IR onde a raiz anterior esteja definida.

Para esboçar a curva dada pela equação acima seguiu-se a seguinte estratégia:

Considerou-se x_1, x_2 e x_3 as raízes da equação $ax^3+bx^2+cx+d = 0$, quando $a \neq 0$ e b, c e d reais, ordenadas por ordem crescente da sua parte real, designando-as respectivamente por t_1, t_2 e t_3. Considerou-se ainda t_0 (respectivamente t_4) o mínimo (respectivamente o máximo) para o valor das abcissas.

Para cada $i = 1, 2, 3, 4$, seja $f_i(x)$ a função definida em $[t_{i-1}, t_i]$ com a expressão $\sqrt{ax^3 + bx^2 + cx + d}$, com $a \neq 0$ e b, c e d reais (quando esta faça sentido). Do mesmo modo definiu-se $g_i(x)$, com $i = 1, 2, 3, 4$ como sendo a função definida em $[t_{i-1}, t_i]$ com a expressão $-\sqrt{ax^3 + bx^2 + cx + d}$, com $a \neq 0$ e b, c e d reais (quando esta faça sentido).

As funções $f_i(x)$ e $g_i(x)$ podem formalmente ter como domínio apenas um ponto, caso em que x_i, x_{i+1} têm a mesma parte real (são duas raízes conjugadas da equação cúbica). Mesmo quando a expressão de $f_i(x)$ ou $g_i(x)$ não faça matematicamente sentido, podemos formalmente instruir o C.a.R para exibir o gráfico. O que acontece é que quando os parâmetros a, b, c e d conduzem a uma expressão não válida, o C.a.R. não produz nenhum erro e ignora a função. Isto permite o esboço da curva através de 8 funções, quatro com o sinal $(+)$, as quais vão ser designadas por $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ e $f_4(x)$ e outras quatro com o sinal $(-)$, designadas por $g_1(x)$, $g_2(x)$, $g_3(x)$ e $g_4(x)$. Para tal, tem que se criar três expressões aritméticas, que se vão denominar por t_1, t_2, t_3, as quais vão permitir colocar as partes reais dos zeros da função $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, com $a \neq 0$ e b, c e d reais, por ordem crescente. Para isso, a expressão aritmética de t_1 vai ser

$$if(x(x_1) < x(x_2)) \wedge x(x_1) > x(x_3), x(x_3), if(x(x_1) < x(x_2), x(x_1),$$

$$if(x(x_2) > x(x_3), x(x_3), x(x_2)))) \ ,$$

a expressão aritmética de t_2 vai ser

$$if(x(x_1) < x(x_2) \wedge x(x_2) < x(x_3), x(x_2), if(x(x_1) < x(x_2) \wedge x(x_1) < x(x_3), x(x_3),$$

$$if(x(x_1) < x(x_3), x(x_1), x(x_3)))) \ ,$$

e finalmente, a expressão aritmética de t_3 será

$$if(x(x_1) > x(x_2) \wedge x(x_1) < x(x_3), x(x_3), if(x(x_1) > x(x_2), x(x_1),$$

$$if(x(x_2) > x(x_3), x(x_2), x(x_3)))) \ .$$

A função $f_1(x) = \sqrt{ax^3 + bx^2 + cx + d}$, com $a \neq 0$, é definida entre $x(x_0)$ e t_1, com um incremento igual a $\frac{t_1 - x(x_0)}{1000}$[7].

A função $f_2(x) = \sqrt{ax^3 + bx^2 + cx + d}$, com $a \neq 0$, é definida entre t_1 e t_2, com um incremento igual a $\frac{t_2 - t_1}{1000}$.

A função $f_3(x) = \sqrt{ax^3 + bx^2 + cx + d}$, com $a \neq 0$, é definida entre t_2 e t_3, com um incremento igual a $\frac{t_3 - t_2}{1000}$.

E para terminar, a função $f_4(x) = \sqrt{ax^3 + bx^2 + cx + d}$, com $a \neq 0$, é definida entre t_3 e $x(x_4)$, com um incremento igual a $\frac{x(x_4) - t_3}{1000}$.

Para a construção das funções $g_1(x)$, $g_2(x)$, $g_3(x)$ e $g_4(x)$ usa-se um processo análogo ao exposto anteriormente modificando-se apenas o sinal das funções. Todo este processo está exposto na figura (11).

Convém recordar que este caso que aqui está a ser exposto é o caso das *Parábolas Divergentes* quando as raízes reais da equação cúbica $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, com $a \neq 0$ e b, c e d reais, são todas diferentes umas das outras. Mais, para que a notação na construção com o C.a.R não fosse de difícil compreensão e mais morosa, em vez de designar estas raízes por α, β e γ, conforme está mais adiante neste trabalho, decidiu-se utilizar a designação de x_1, x_2 e x_3 para as mesmas.

Ora, de forma a que o aspecto da figura (30) seja mantido, conforme a obra, tem que se considerar que estas mesmas raízes são todas positivas. Sendo assim, como mero exemplo, vai-se supor que $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ e $x_3 = 3$. Para isto, tem que se recorrer ao programa Maxima de modo a determinar os valores para os coeficientes de b, c e d, atribuindo ao coeficiente de x^3 o valor um. O cálculo destes coeficientes pode ser visualizado através da figura (12).

A partir da figura (12), pode-se concluir que neste caso $b = -6$, $c = 11$ e $d = -6$.

[7]Na prática, este incremento faz com que no ecrã seja representado no máximo por um pixel em resoluções de ecrã inferiores a 1000 píxeis na horizontal.

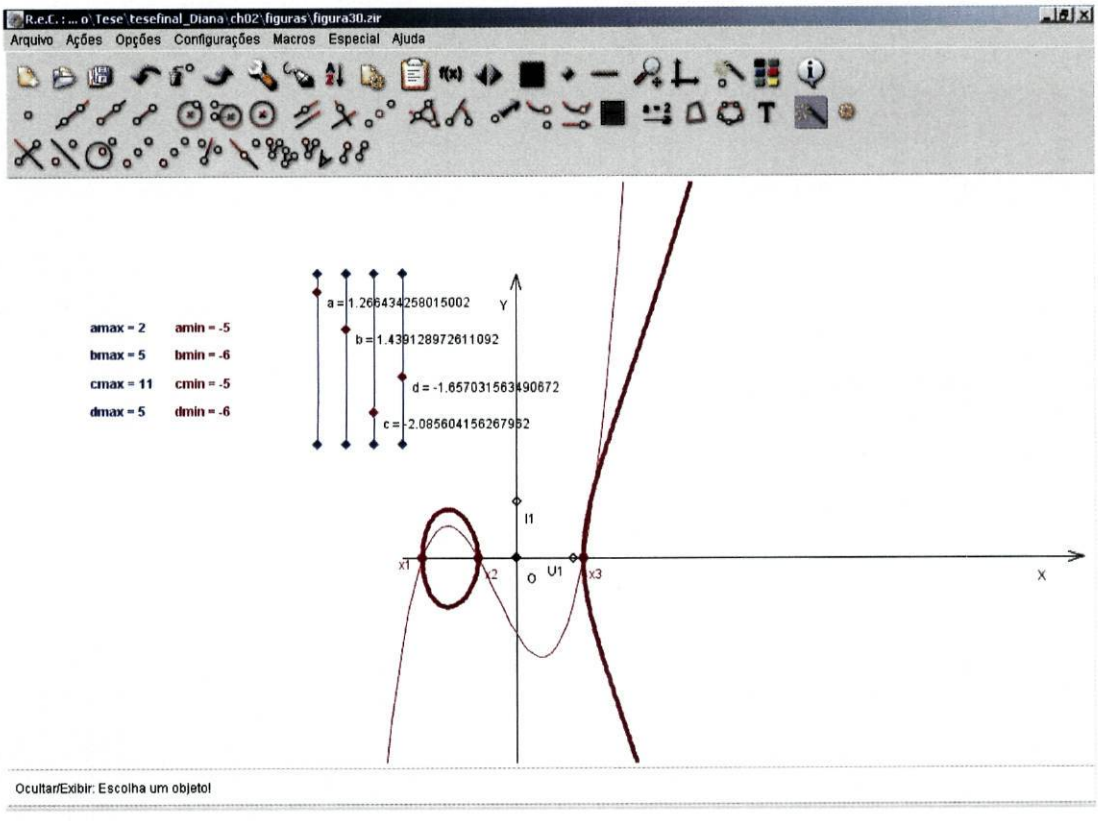


Figura 11: Gráfico da função com a equação cartesiana $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$, com $a \neq 0$ e b, c e d reais.

Sendo assim, e como se pode confirmar pela figura (13), tem que se alterar o valor das seguintes expressões aritméticas:

- ⋆ *bmin* para -6;
- ⋆ *cmax* para 11;
- ⋆ *dmin* para -6.

Para finalmente se obter a imagem da figura 30, tem que se introduzir os seguintes pontos:

- ⋆ A, de coordenadas $(t_3, 0)$;

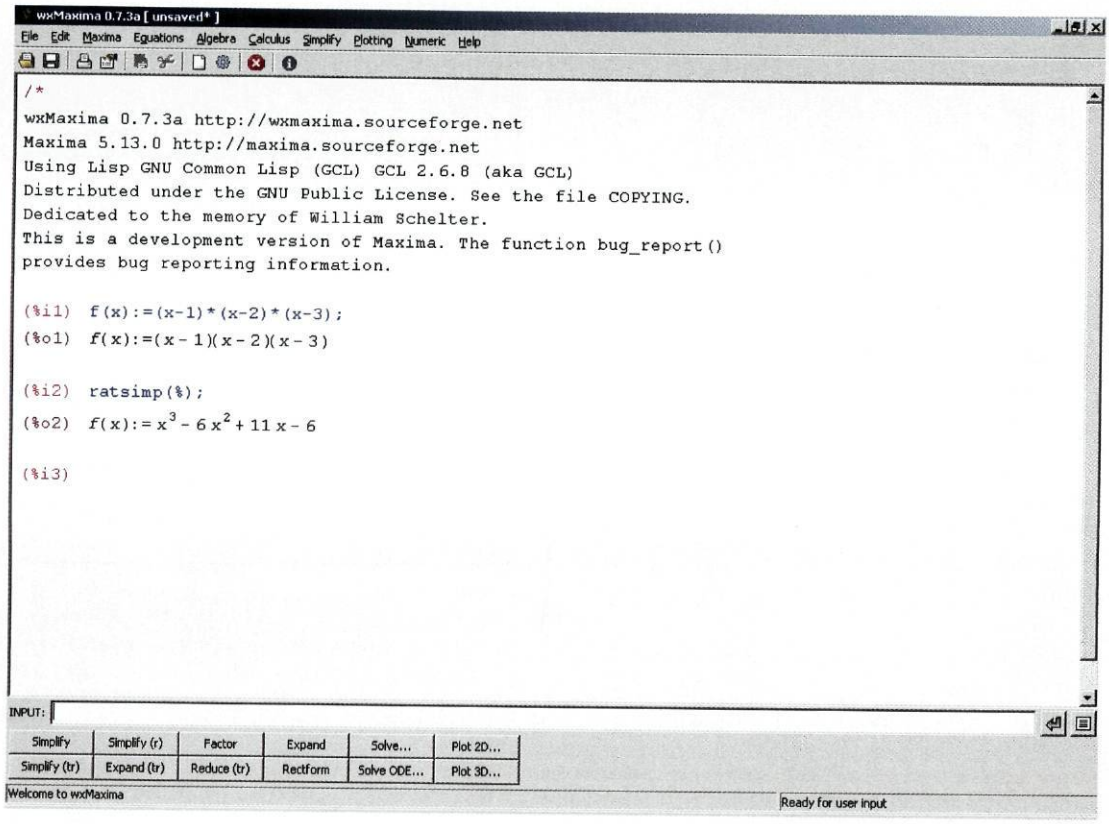


Figura 12: Cálculo dos coeficientes b, c e d reais da função $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d = 0$, quando os seus zeros são $x_1 = 1$ $x_2 = 2$ e $x_3 = 3$

- B, de coordenadas $(t_2, 0)$;

- C, de coordenadas $(t_1, 0)$;

- L, de abcissa $\dfrac{2(t_3+t_2+t_1) - \sqrt{(2(t_3+t_2+t_1))^2 - 12(t_3t_2+t_3t_1+t_2t_1)}}{6}$ e ordenada obtida substituindo o valor anterior de x na equação $y = \sqrt{ax^3+bx^2+cx+d}$, com $a \neq 0$ e b, c e d reais;

- M, de abcissa $\dfrac{2(t_3+t_2+t_1) - \sqrt{(2(t_3+t_2+t_1))^2 - 12(t_3t_2+t_3t_1+t_2t_1)}}{6}$ e ordenada obtida substituindo o valor anterior de x na equação $y = -\sqrt{ax^3+bx^2+cx+d}$, com $a \neq 0$ e b, c e d reais;

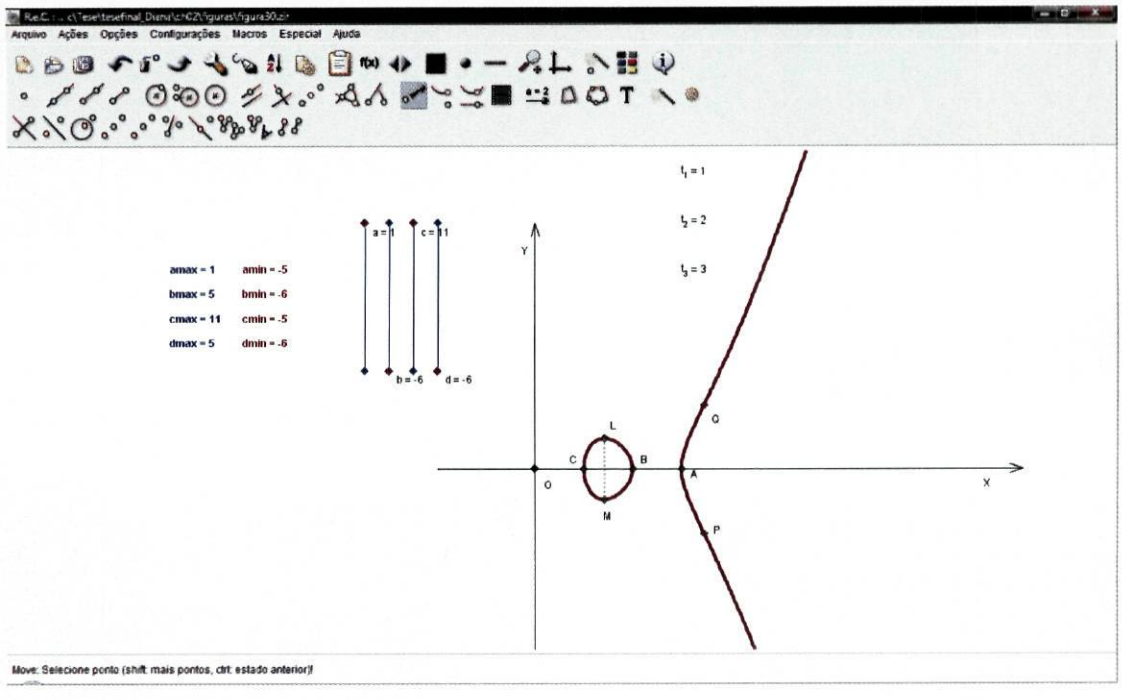


Figura 13: Gráfico da função com a equação cartesiana $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$, com $a \neq 0$ e b, c e d reais.

⋆ U, que é o ponto médio entre o ponto B e o ponto C.[8]

Convém advertir-se que L e M são os pontos máximo e mínimo respectivamente, entre x_1 e x_2.

Por último, os pontos P e Q são dois pontos de inflexão da função de equação cartesiana $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$, quando $a \neq 0$ e b, c e d reais. Assim, fica terminada a construção da figura pretendida.

Neste momento, o utilizador poderá deslocar os selectores, alterando os seus valores,

[8]Este ponto pode ser marcado com a ajuda das ferramentas do programa C.a.R. da seguinte maneira: na *barra de ferramentas* escolher a opção *Ações*, de seguida, selecciona-se *Ferramentas Avançadas*, e a opção *Ponto Médio* e por último, clica-se nos pontos B e C.

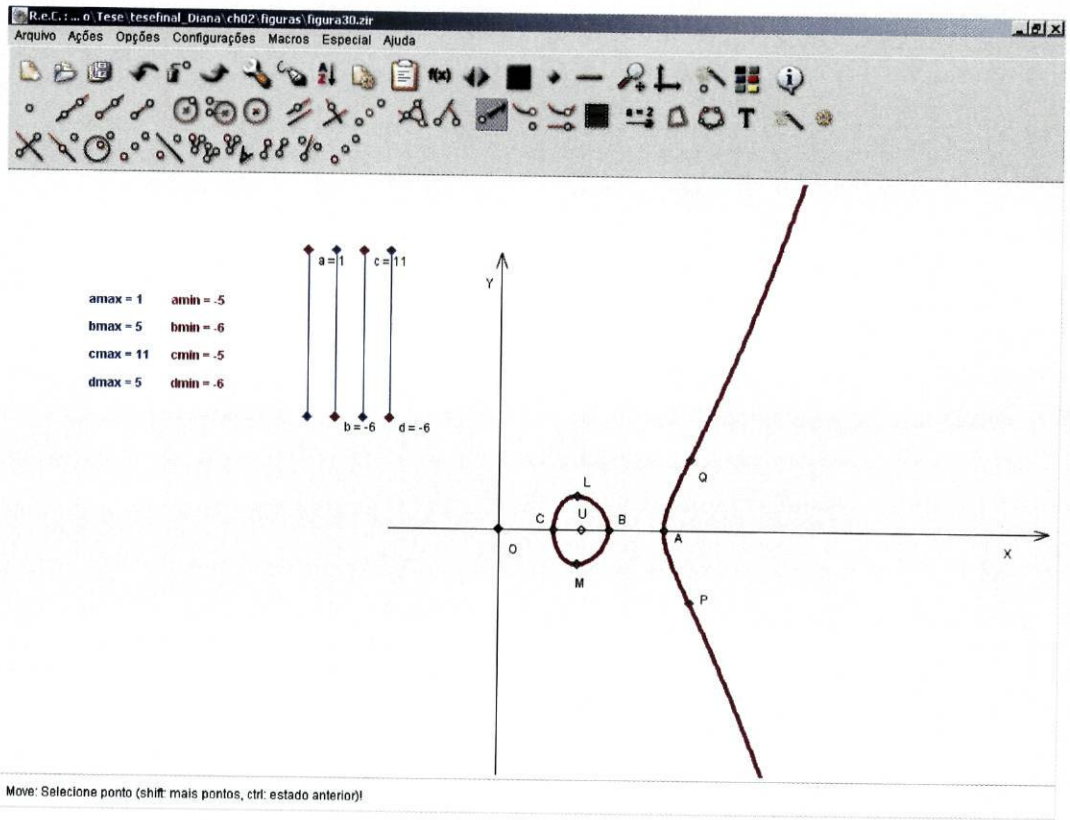


Figura 14: Parábolas Divergentes quando $x_3 > x_2 > x_1$

e de imediato visualizar as alterações ocorridas.

III Cálculo Simbólico

O Maxima e o wxMaxima [16] são programas que em conjunto auxiliam em cálculos simbólicos e numéricos que manualmente seriam muito extensos e morosos. Neste trabalho, verificou-se a sua utilização essencialmente na verificação de fórmulas, de modo a que o tempo gasto nesta actividade fosse o menor possível.

Sendo assim, vai ser apresentado um dos muitos casos onde a utilização do Maxima foi crucial. Na página 20, no número 24 do livro *Tratado de Las Curvas Especiales Notables*, de Francisco Gomes Teixeira pode ler-se:

Partindo da equação da Estrofóide recta, em coordenadas polares

$$\rho = a\frac{\cos 2\theta}{\cos\theta} \quad ,$$

podemos determinar a expressão do raio da curvatura R, que é a seguinte:

$$R = \frac{a(1+\operatorname{sen}^2 2\theta)^{\frac{3}{2}}}{4\cos^4\theta(1+2\operatorname{sen}^2\theta)} \quad .$$

Ora, de modo a verificar se esta expressão para o raio da curvatura da Estrofóide Recta estava correcta recorreu-se ao programa Maxima. Antes de mais, convém relembrar que a expressão geral para o cálculo, em coordenadas polares, do raio de curvatura é a seguinte:

$$R = \frac{\left(\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\left|\rho^2 + 2\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 - \rho^2\frac{d^2\rho}{d^2\theta}\right|} \quad .$$

Ao abrir o programa Maxima é mostrada de imediato toda a área de trabalho a utilizar. Neste mesmo ecrã é possível visualizar na parte inferior uma caixa de texto, onde consta

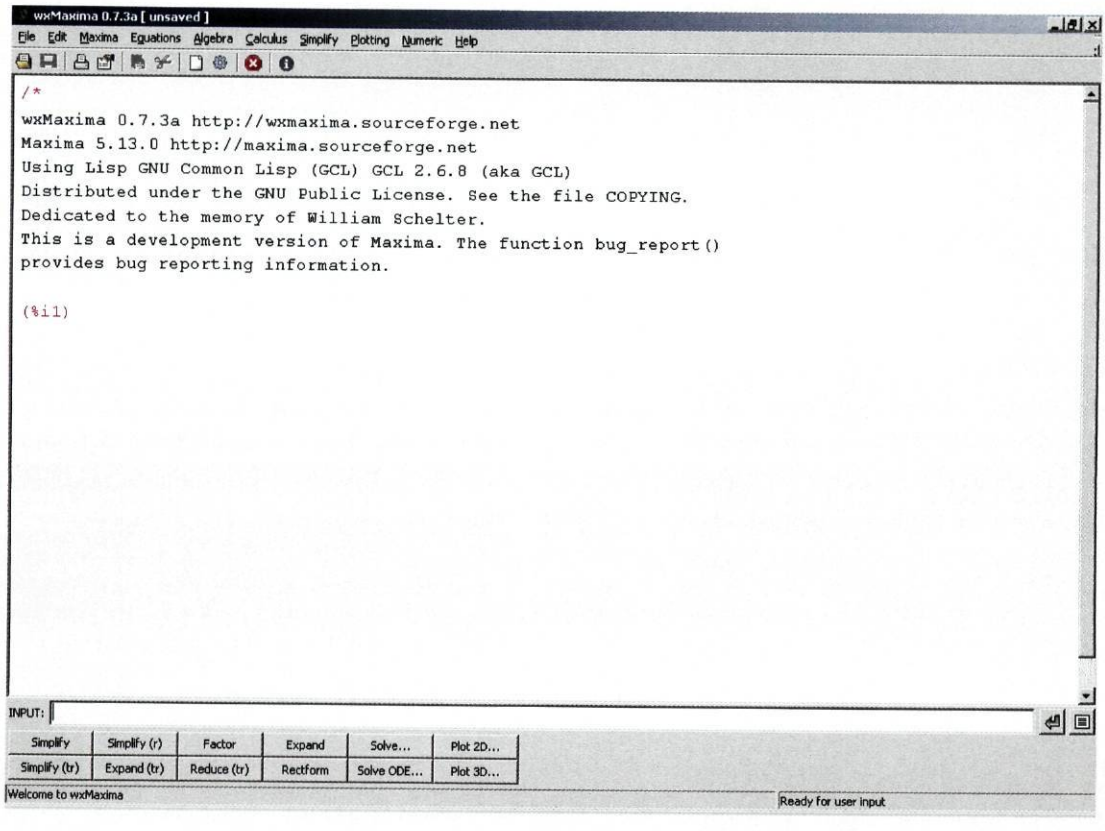


Figura 15: Ecrã principal do programa Maxima

o *input*, assim como botões de atalho para alguns comandos e também funções. Tudo isto pode ser visto na figura (15).

De forma a facilitar a notação, considerou-se $\rho = f(x)$, $\frac{d\rho}{d\theta} = f_1(x)$ e ainda $\frac{d^2\rho}{d^2\theta} = f_2(x)$. Assim, deu-se início ao processo inserindo-se a equação da função através da instrução:

```
(\%i1) f(x):=(a*cos(2*x))/cos(x);
```

De seguida, na barra de Menu escolheu-se a opção *Calculus*, seleccionando a opção *Differentiate*, para calcular a primeira derivada de $f(x)$ em relação a x. Usando para isso o comando

```
(\%i2) diff(f(x), x);
```

A expressão que se obteve foi a seguinte:

$$\frac{a\,\mathrm{sen}(x)\cos(2x)}{\cos^2(x)} - \frac{2a\,\mathrm{sen}(2x)}{\cos(x)}$$

De maneira a simplificar a expressão, na barra de atalhos escolheu-se a opção *Factor*, designando-a por $f_1(x)$. Logo,

```
(\%i4) f1(x):=-(a*(2*cos(x)*sin(2*x)-sin(x)*cos(2*x)))/cos(x)^2;
```

Por um processo análogo, foi calculada a segunda derivada de $f(x)$ em relação a x, utilizando para tal o comando seguinte:

```
(\%i5) diff(f(x), x, 2);
```

A expressão obtida para a segunda derivada de $f(x)$ foi:

$$-\frac{4a\,\mathrm{sen}(x)\,\mathrm{sen}(2x)}{\cos^2(x)} + \frac{2a\,\mathrm{sen}^2(x)\cos(2x)}{cos^3(x)} - \frac{3a\cos(2x)}{\cos(x)} \quad .$$

De seguida, foi escolhida a opção *Factor*, com o intuito de simplificar a expressão anterior, e designou-se por $f_2(x)$. De facto,

```
(\%i7)f2(x):=-(a*(4*cos(x)*sin(x)*sin(2*x)-2*sin(x)^2*cos(2*x)+3*cos(x)^2*cos(2*x)))
/cos(x)^3;
```

Portanto, para calcular a expressão do raio de curvatura, com a notação simplificada, introduziu-se a seguinte instrução:

```
(\%i8) R:((f(x))^2+(f1(x))^2)^(3/2)/((f(x))^2+2*(f1(x))^2-f(x)*f2(x));
```

Escolhendo a opção *Factor* para simplificar a expressão obtida, vem:

$$R = \frac{|a|^3 \left(4\cos^2(x)\,\mathrm{sen}^2(2x) - 4\cos(x)\,\mathrm{sen}(x)\cos(2x)\,\mathrm{sen}(2x) + (\mathrm{sen}^2(x) + \cos^2(x))\cos^2(2x)\right)^{\frac{3}{2}}}{a^2\cos^2(x)\,|8\cos^2(x)\,\mathrm{sen}^2(2x) - 4\cos(x)\,\mathrm{sen}(x)\cos(2x)\,\mathrm{sen}(2x) + (-3\,\mathrm{sen}^2(x) + \cos^2(x) + 3)\cos^2(2x)|}$$

Como facilmente se verifica a expressão anterior não é exactamente igual à expressão pretendida, no entanto através das manipulações que se encontram a seguir, específicas de trigonometria, obtém-se o pretendido.

$$R = \frac{|a|^3 \left(4\cos^2(x)\,\mathrm{sen}^2(2x) - 2\cos(2x)\,\mathrm{sen}^2(2x) + \cos^2(2x)\right)^{\frac{3}{2}}}{a^2\cos^2(x)\,|8\cos^2(x)\,\mathrm{sen}^2(2x) - 2\cos(2x)\,\mathrm{sen}^2(2x) + (3(1 - \mathrm{sen}^2(x)) + \cos^2(x))\cos^2(2x)|}$$

$$\Leftrightarrow R = \frac{|a|^3 \left(\mathrm{sen}^2(2x)(4\cos^2(x) - 2\cos^2(x) + 2\,\mathrm{sen}^2(x)) + \cos^2(2x)\right)^{\frac{3}{2}}}{a^2\cos^2(x)\,|\mathrm{sen}^2(2x)(8\cos^2(x) - 2\cos(2x)) + 4\cos^2(x)(1 - \mathrm{sen}^2(2x))|}$$

$$\Leftrightarrow R = \frac{|a|^3 \left(2\,\mathrm{sen}^2(2x) + \cos^2(2x)\right)^{\frac{3}{2}}}{a^2\cos^2(x)\,|\mathrm{sen}^2(2x)(6 - 4\,\mathrm{sen}^2(x) - 4\cos^2(x)) + 4\cos^2(x)|}$$

$$\Leftrightarrow R = \frac{|a|^3 \left(1 + \mathrm{sen}^2(2x)\right)^{\frac{3}{2}}}{a^2\cos^2(x)\,|2\,\mathrm{sen}^2(2x) + 4\cos^2(x)|}$$

$$\Leftrightarrow R = \frac{|a|^3 \left(1 + \mathrm{sen}^2(2x)\right)^{\frac{3}{2}}}{a^2\cos^2(x)\,|8\,\mathrm{sen}^2(x)\cos^2(x) + 4\cos^2(x)|}$$

$$\Leftrightarrow R = \frac{|a|^3 \left(1 + \mathrm{sen}^2(2x)\right)^{\frac{3}{2}}}{4a^2\cos^4(x)\,|2\,\mathrm{sen}^2(x) + 1|}$$

$$\Leftrightarrow R = \frac{|a| \left(1 + \mathrm{sen}^2(2x)\right)^{\frac{3}{2}}}{4\cos^4(x)\,|2\,\mathrm{sen}^2(x) + 1|}$$

$$\Leftrightarrow R = \frac{a(1 + \mathrm{sen}^2(2x))^{\frac{3}{2}}}{4\cos^4(x)\,|2\,\mathrm{sen}^2(x) + 1|}, \text{ uma vez que } a > 0.$$

Em relação à instalação do programa Maxima e da interface gráfica wxMaxima, pode-se recorrer ao site: `http://maxima.sourceforge.net` [16], e aí fazer o download de ambos.

IV Suporte Digital Interactivo

Para a produção da tese num suporte digital interactivo optou-se pela ferramenta TiddlyWiki [18]. Esta ferramenta baseia-se na filosofia proporcionada pelos websites, que são designados por *wikis*. Estes *wikis* caracterizam-se pela facilidade com que uma comunidade de utilizadores pode produzir e partilhar conteúdos digitais. Um dos exemplos mais populares e conhecidos é a enciclopédia online Wikipedia. É sob este pressuposto que a ferramenta TiddlyWiki opera, ou seja, cria uma interface muito intuitiva para o trabalho colaborativo, obtendo-se um resultado também muito apelativo. É um projecto *opensource* que tem uma forma inovadora de guardar e organizar notas, artigos, textos e neste caso particular os quatro capítulos iniciais da obra de Gomes Teixeira, intitulada por *Tratado de las Curvas Especiales Notables*. Na realidade pode afirmar-se que o TiddlyWiki é um meio de armazenamento de informação tecnológico, podendo funcionar como um bloco de notas pessoal.

Este programa pode ser facilmente expandido recorrendo-se a ferramentas adicionais, designadas por *plugins*, entre as quais, pode-se referir o LaTeXMathMLPlugin [19], que permite converter as fórmulas matemáticas escritas em LaTeX de maneira a serem mostradas na sua forma tradicional. O LaTeXMathMLPlugin é compatível tanto com o Internet Explorer [25] como com o Mozzila Firefox [26].

O TiddlyWiki foi parametrizado com um editor de texto que facilita a introdução de comandos para a linguagem HTML. Uma das suas vantagens mais evidentes é o facto de poder ser utilizado em qualquer computador com um *browser* instalado, como por exemplo, Internet Explorer, Mozzila Firefox, Opera, etc. Mais, toda a informação registada num documento produzido com o TiddlyWiki fica num único ficheiro HTML que pode ser editado dentro do navegador, sem ter de se recorrer à utilização de outros programas.

O leitor pode aceder ao ficheiro que deu origem ao suporte HTML deste trabalho no CD em anexo na pasta *dissertacao*. Tem também acesso quando inicia o CD ao ficheiro

index.html, que é uma versão em que as funções de edição não estão acessíveis.

Como forma de organizar toda a informação existente na página, o TiddlyWiki serve-se dos chamados *tiddlers*, que podem ser vistos como pequenos textos cronologicamente organizados. Existem *tiddlers* que são parte integrante em todos os documentos produzidos com o TiddlyWiki, tais como: DefaultTiddlers, MainMenu, SideBarOptions, SideBarTabs, SiteSubtitle, SiteTitle, StyleSheet, StyleSheetColors, etc, etc. Estes *tiddlers* permitem modificar as características da página criada e encontram-se no menu vertical *Mais Sombra*, como facilmente se confirma na figura (16).

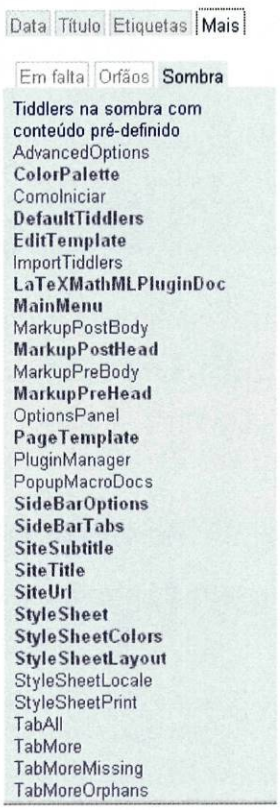


Figura 16: Menu *sombra* do TiddlyWiki

Relativamente aos *tiddlers* SiteTitle e SiteSubtitle, neste caso concreto foram criados com as expressões *Estudo de Curvas do 3.º e 4.º grau* e *segundo Gomes Teixeira*,

respectivamente, o que permitiu adequar o aspecto visual do TiddlyWiki a esta obra.

Para criar um *tiddler* é necessário clicar na opção *novo tiddler* que se encontra no menu vertical. No entanto neste caso, o utilizador não terá acesso ao editor de texto que permite ver código-fonte, formatar, criar hiperligações, criar âncoras, etc.

Sendo assim, será preferível aceder à opção *Novo Tiddler - HTML*, a qual permite de imediato visualizar o editor de texto, assim como todo o menu de ferramentas. Depois disto é possível desde logo introduzir toda a informação pretendida no *tiddler* e por último carregar na opção *guardar*. Convém nunca esquecer que esta informação está guardada apenas na memória do computador, ou seja, para se guardar todas as alterações efectuadas tem que se aceder à opção *guardar alterações* e só nesse momento toda a informação ficará guardada no ficheiro original. A figura (17) é o *tiddler* que contém a página inicial do documento digital. Nesta figura é possível visualizar o menu de gestão do sistema (barra vertical à direita), que permite criar, editar e gerir toda página produzida pelo TiddlyWiki.

Para apresentar para a web foi criado um atalho que permite guardar um documento para expôr na web, o qual se designa por *Guardar para a Web*. A figura (18) é o *tiddler* que contém a página inicial do documento digital que vai ser exposto na web. Facilmente se identificam as diferenças entre as figuras (17) e (18). Na figura (18), o utilizador tem acesso no menu vertical apenas às opções *Ver em pdf*, *procurar* e aos quatro primeiros capítulos da obra de Gomes Teixeira, trabalhados nesta dissertação. Isto significa que, o utilizador pode ler todo o documento digital, no entanto não lhe é permitida qualquer forma de edição/alteração do documento exposto.

Foi gerado também um *tiddler* Índice, onde se registaram os quatro capítulos que se pretendia expôr, com a seguinte informação:

```
<<tabs indiceTab 'Cap 1' 'Índice do Capítulo 1' [[Cap 1 - Índice]]
'Cap 2' 'Índice do Capítulo 2' [[Cap 2 - Índice]] 'Cap 3' 'Índice do Capítulo 3'
[[Cap 3 - Índice]] 'Cap 4' 'Índice do Capítulo 4' [[Cap 4 - Índice]] >>
```

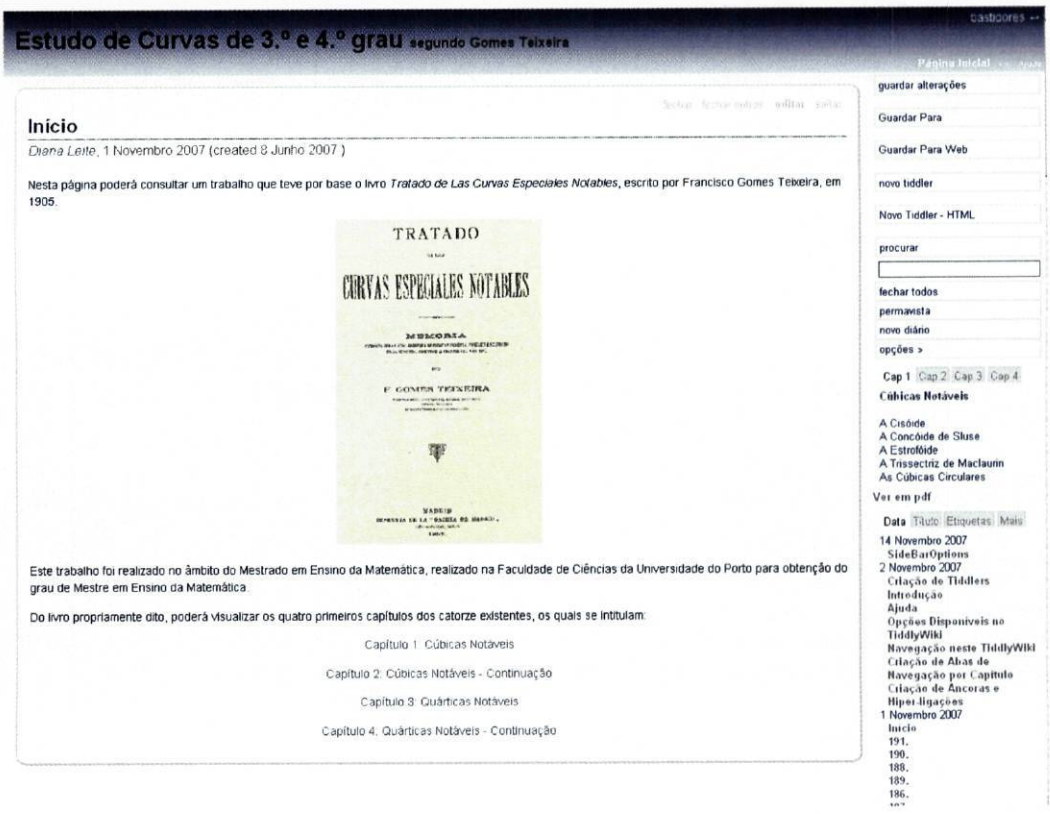


Figura 17: Página Inicial do documento do TiddlyWiki

A sintaxe acima cria um elemento *tiddler* composto por 4 abas com as seguintes inscrições: *Cap i*, com $i = 1, 2, 3, 4$. Sempre que o utilizador posiciona o rato sobre a aba *Cap i*, com $i = 1, 2, 3, 4$, aparece uma indicação do *Índice do Capítulo i*, com $i = 1, 2, 3, 4$. Por outro lado, quando o utilizador pressiona uma das abas *Cap i*, com $i = 1, 2, 3, 4$, é mostrado o *tiddler Cap i - Índice*, com $i = 1, 2, 3, 4$. No seguimento desta instrução, foram criados os *tiddlers* Cap i - Índice, com $i = 1, 2, 3, 4$, onde se incluiram todas as secções existentes em cada um dos capítulos. Como exemplo pode ser observado na figura (19) o *tiddler* Cap 1 - Índice.

A sintaxe que aparece na figura (19) cria o *tiddler* Cap 1 - Índice com cinco *hiper-ligações* para os *tiddlers*: *A Cisóide*, *A Concóide de Sluse*, *A Estrofóide*, *A Trissectriz de*

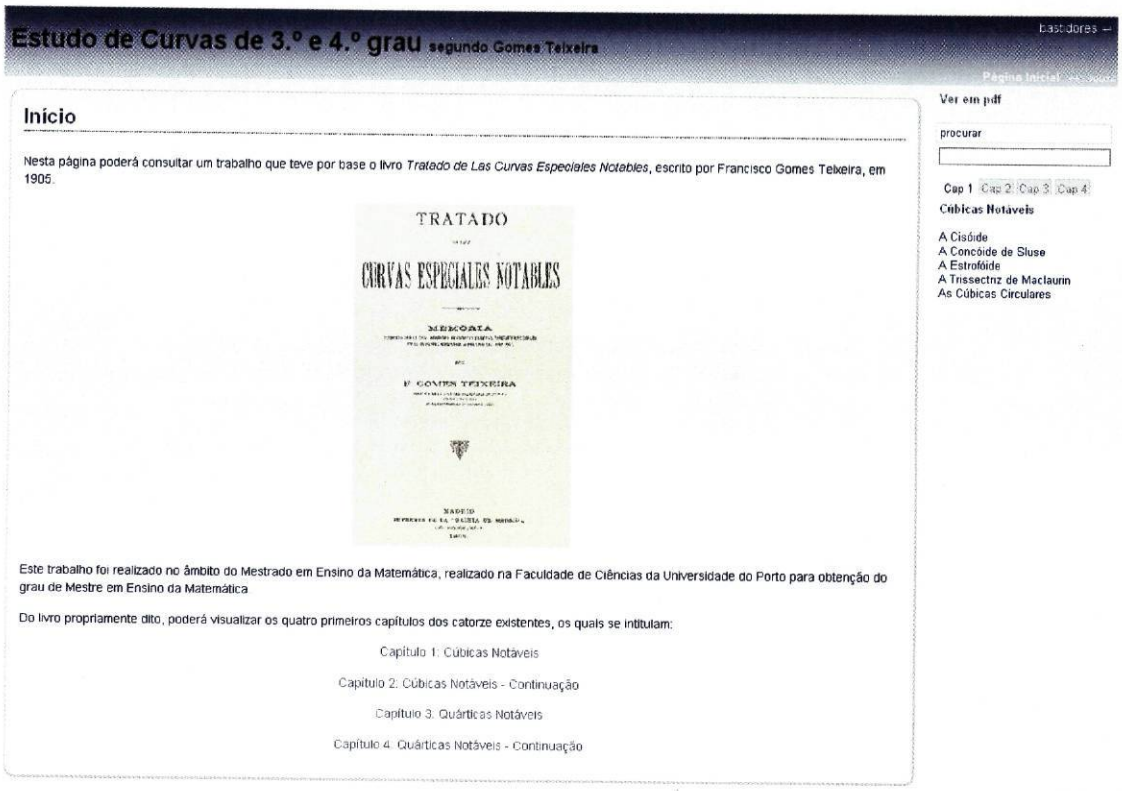


Figura 18: Página Inicial do documento do TiddlyWiki para a web

Maclaurin, As Cúbicas Circulares.

Por último, foram criados todos os *tiddlers* correspondentes às 191 subsecções existentes nos quatro capítulos trabalhados nesta dissertação. Convém evidenciar todo o rigor na criação destes *tiddlers*, bem como a atenção nessa mesma construção. Quando se edita um *tiddler* ou se cria um novo aparece uma janela tipo a da figura (20), dividido em três partes: título, texto do *tiddler* e etiquetas separadas por espaços. Nesta figura é possível visualizar o *tiddler* 003., onde se pode observar a minuciosa inscrição da secção *A Cisóide* e do Capítulo *Cúbicas Notáveis.*

Relativamente à numeração dos *tiddlers* que correspodem às subsecções, optou-se por utilizar três dígitos, uma vez que utilizando apenas um as subsecções não apareciam

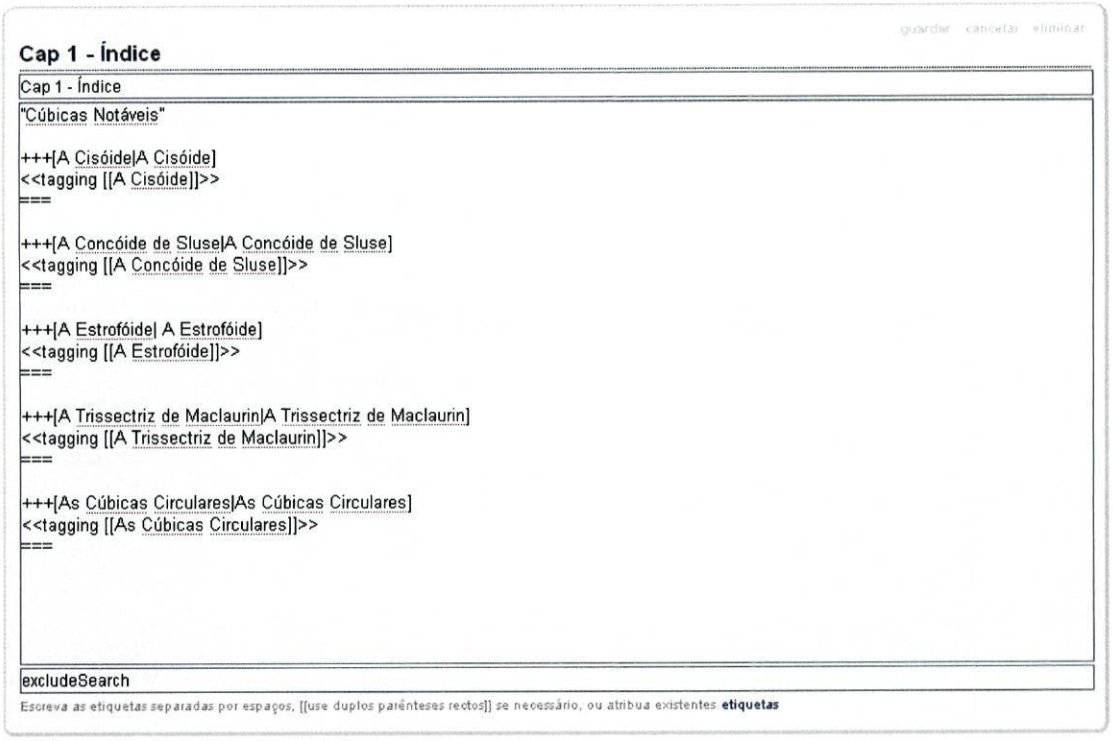


Figura 19: *Tiddler* Cap 1 - Índice

correctamente ordenadas, ou seja, em vez de os *tiddlers* aparecerem ordenados quanto ao seu valor numérico apareciam ordenados como texto, surgindo por exemplo, o número 10 antes do número 2.

Para verificar o conteúdo de cada uma das secções, basta clicar com o rato sobre a mesma, que imediatamente serão exibidas todas as suas subsecções. De seguida, através de um clique do rato sobre a subsecção pretendida abre-se um *tiddler* que revela toda a informação aí contida. Observando a figura (21) é possível identificar as quatro subsecções existentes na secção *A Cardióide* do Capítulo 4 *Quárticas Notáveis - Continuação.*

É de salientar a possibilidade da criação de *âncoras* e de *hiperligações* entre *tiddlers.* Este facto facilitou e auxiliou na consecução desta plataforma digital interactiva, uma vez que o número de equações numeradas é extremamente grande, assim como o número de

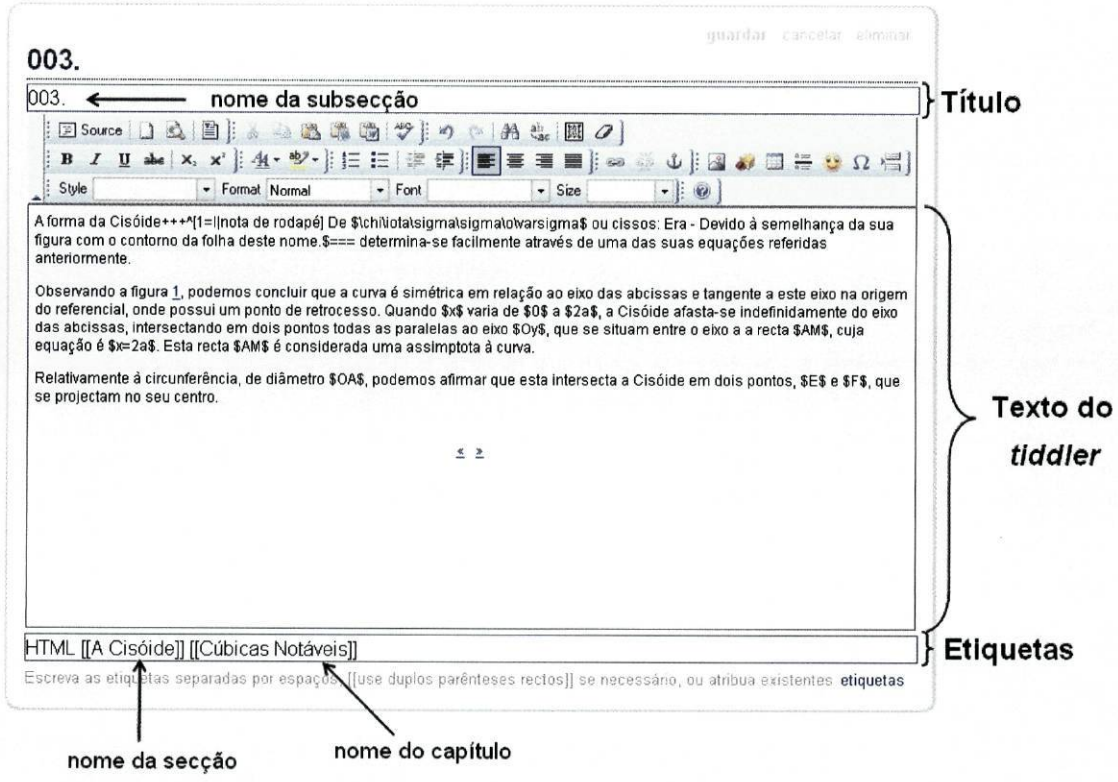


Figura 20: *Tiddler* 003.

referências entre *tiddlers*.

Todas as alterações ao documento original foram registadas em nota de rodapé, as quais aparecem imediatamente a seguir à alteração efectuada. Para visualizar qualquer nota de ropadé, basta clicar com o rato em cima do número, aparecendo dentro de um rectângulo a informação que a mesma contém. Na figura (22), pode observar-se o exemplo de uma nota de rodapé que faz parte desta dissertação.

Nesta plataforma digital interactiva existem 50 figuras, criadas com o software geométrico C.a.R., que qualquer utilizador pode visualizar e interagir dinamicamente, alterando as variáveis previstas por Gomes Teixeira. Para isso, terá primeiro que clicar com o rato sobre as mesmas e só depois poderá proceder à sua alteração. A opção por esta situação

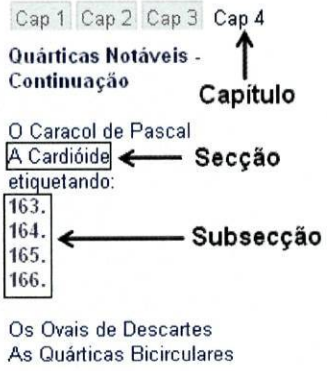


Figura 21: Subsecções existentes na secção *A Cardióide* do Capítulo 4

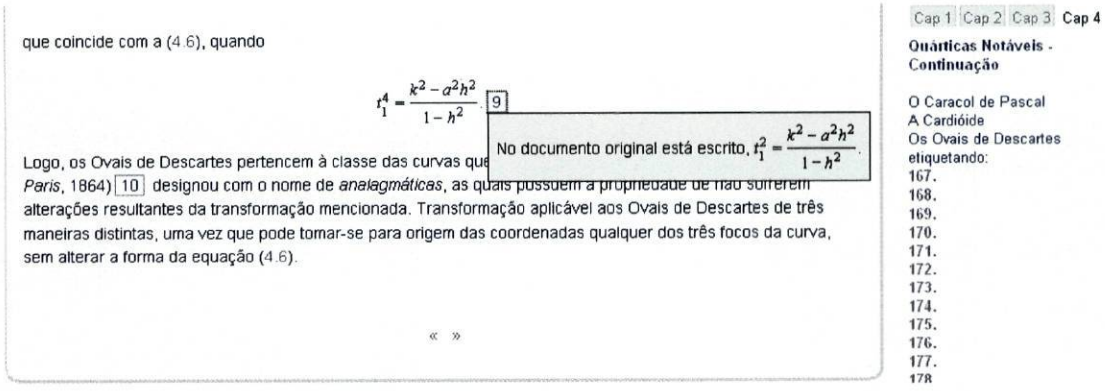


Figura 22: Exemplo de Nota de Rodapé

justificou-se pelo facto de a página ficar mais rápida a carregar, tendo o utilizador apenas que esperar no caso de pretender interagir com a figura.

Para mais informação sobre esta nova ferramenta tão útil e fácil de utilizar, convém recorrer ao tutorial que se encontra no site : `http://www.tiddlywiki.com/` [18]. Também neste site poderá ser feito o seu download, clicando em *Download Software*, e transferindo o ficheiro `empty.html` para o computador.

Apesar desta ferramenta ainda não ser muito conhecida nem divulgada, já existem sites de divulgação sobre o TiddlyWiki, designadamente:

http://tiddlythemes.com [20]– para aprofundar os conhecimentos sobre os *temas* utilizados na interface;

http://www.tiddlytools.com [21]– para mais informações sobre os *plugins* a utilizar no TiddlyWiki;

http://tiddlywikiguides.org [22]– para compreender melhor e para se tornar mais simples a sua utilização existem *guias de utilização*;

http://groups.google.com/group/TiddlyWikiDev [23]– para divulgação e troca de opiniões existem *grupos de discussão*.

Capítulo 3

Cúbicas Notáveis

I A Cisóide

1.

Consideremos uma circunferência de raio igual a a (figura 1) e um ponto fixo O sobre ela. Consideremos ainda um ponto A que é o extremo do diâmetro AO. Por este ponto A, tracemos uma *tangente* à cirunferência, a qual vamos designar por AM. Tracemos outra recta qualquer, OM, que passa pelos pontos O e M. Sobre esta última recta, vamos considerar o segmento de recta OP, o qual tem o mesmo comprimento que MN. Ao lugar geométrico das posições do ponto P, quando OM varia, dá-se o nome de *Cisóide de* DIOCLES.

Dado que $OP = OM - ON$, representando por ρ o comprimento de OP e por θ o ângulo POC , a equação polar da Cisóide é dada por

$$\rho = \frac{2a}{\cos\theta} - 2a\cos\theta = \frac{2a\,\mathrm{sen}^2\,\theta}{\cos\theta} \quad ,$$

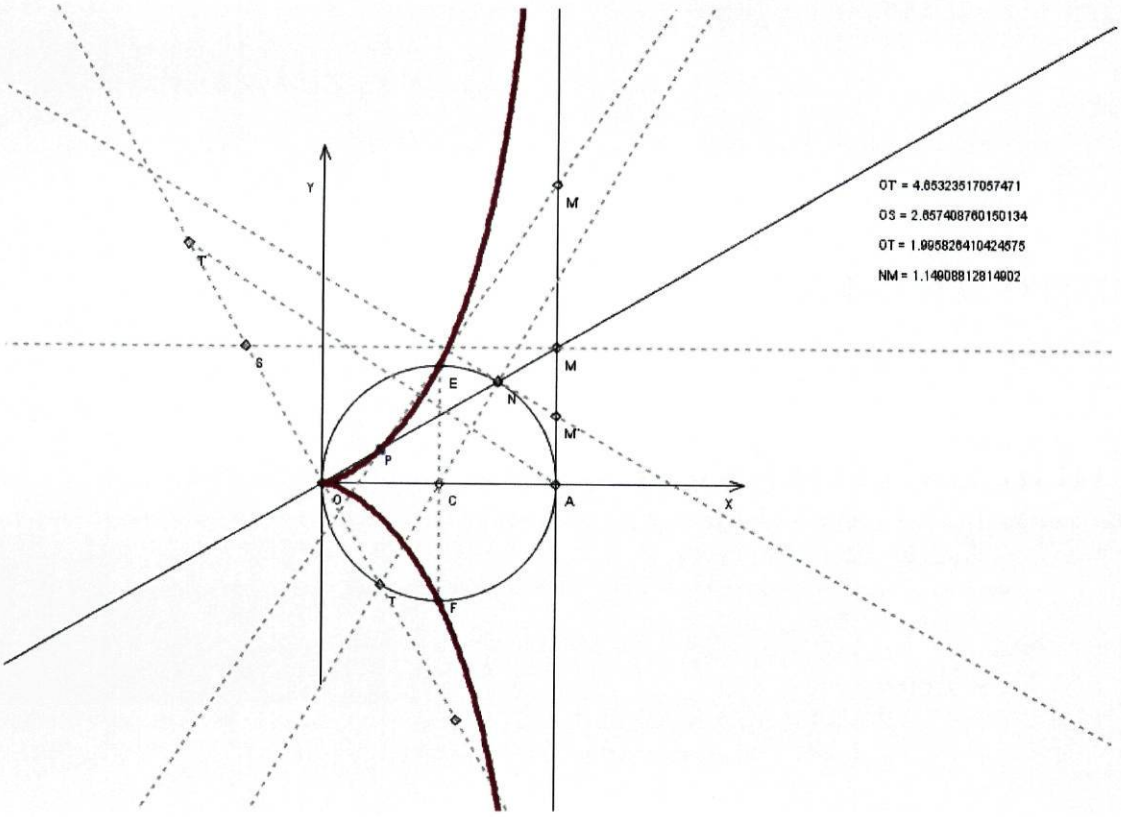


Figura 1: *Cisóide de* DIOCLES

da qual se obtém, em *coordenadas cartesianas*, a seguinte equação

$$y^2 = \frac{x^3}{2a - x} \quad .$$

2.

Um problema muito célebre na história da Geometria e sobre o qual se ocuparam os antigos geómetras, foi o de achar duas medidas proporcionais entre dois segmentos de recta dados. Este problema também ficou conhecido como o *Problema de Delos*, onde pode ser aplicado o famoso problema da duplicação do cubo.

De entre os vários procedimentos inventados pelos geómetras da Grécia Antiga para

resolver este problema, existe um atribuído a Diocles por EUTOCIO (*Archimedis Opera omnia cum commentariis Eutocii, ed. Heiberg, Lipsiae*, 1880-1881, t. III, págs. 78 e 152), comentador de Arquimedes, no qual se emprega a curva que acabamos de definir, se bem que ainda não lhe tinha sido dado o nome de *Cisóide*.

Nas obras de PAPPO e de PROCLO aparece uma curva designada por este mesmo nome. No entanto, estes geómetras não a caracterizaram suficientemente bem para podermos afirmar, com segurança, que se trata da mesma curva de DIOCLES. Sabe-se, porém, que não existe qualquer alusão à *Cisóide de* DIOCLES nas obras referidas anteriormente.

Depois do Renascimento das Ciências Matemáticas, muitos foram os geómetras célebres que se dedicaram à curva de Diocles, nomeadamente SLUSE, que determinou o volume do seu sólido de revolução em redor da assimptota, e HUYGENS, que determinou as suas áreas, em 1658. WALLIS também se debruçou sobre este tema, resolvendo os mesmos problemas, num trabalho especial que dedicou a esta curva, mas utilizando os seus métodos analítico-geométricos (*Opera*, t. I, p.542). FERMAT também resolveu o problema das suas áreas e das suas tangentes (*Oeuvres*, t. III, p. 141). Finalmente, NEWTON determinou, na sua obra *Methodus fluxionum*, o comprimento dos seus arcos e propôs um procedimento mecânico para a traçar (*Arithmetica universalis*, t. II, p. 83 da tradução de Beaudeux, Paris, 1802), etc.

3.

A forma da Cisóide[1] determina-se facilmente através de uma das suas equações referidas anteriormente. Observando a figura 1, podemos concluir que a curva é simétrica em relação ao eixo das abcissas e tangente a este eixo na origem do referencial, onde possui um ponto de retrocesso. Quando x varia de 0 a $2a$, a Cisóide afasta-se indefinidamente do eixo das abcissas, intersectando em dois pontos todas as paralelas ao eixo Oy, que se situam entre o eixo a a recta AM, cuja equação é $x = 2a$. Esta recta AM é considerada

[1] De $\chi\iota\sigma\sigma\acute{o}\varsigma$, ou *cissos: Era* - Devido à semelhança da sua figura com o contorno da folha deste nome.

uma assimptota à curva.

Relativamente à circunferência, de diâmetro OA, podemos afirmar que esta intersecta a Cisóide em dois pontos, E e F, que se projectam no seu centro.

4.

Uma vez que $\rho = OM - ON$, temos que $\frac{d\rho}{d\theta} = \frac{dOM}{d\theta} - \frac{dON}{d\theta}$.

O primeiro membro desta igualdade representa a subnormal polar da Cisóide no ponto P e os termos do segundo membro representam, respectivamente, a subnormal polar da recta AM no ponto M e a subnormal polar do círculo ONA no ponto N. Logo, para construir a subnormal da Cisóide no ponto P, basta traçar uma recta MS, perpendicular a AM que passa por M e traçar a recta NC, que passa pelo ponto N e pelo centro do círculo. Esta recta NC intersecta a OS no ponto T. O segmento de recta OS é a subnormal da recta no ponto M e OT é a subnormal da circunferência no ponto N. Tomando $OT' = OS + OT$, OT' será , desta maneira, a subnormal da Cisóide no ponto P.

5.

A tangente à Cisóide no ponto P intersecta a recta AM noutro ponto, designado por M', cuja a ordenada y_1 é dada pela fórmula

$$y_1 = y + \frac{dy}{dx}(2a - x) \quad .$$

Ou, sabendo que $x = \rho\cos\theta = 2a\,\mathrm{sen}^2\,\theta$, temos que $y = 2a\frac{\mathrm{sen}^3\,\theta}{\cos\theta}$ e

$$y_1 = 3a\,\mathrm{tg}\,\theta \quad .$$

Através desta igualdade obtem-se um método muito simples para traçar a tangente à

Cisóide no ponto P, tendo somente em conta que,

$$CK = a \operatorname{tg} \theta \ .$$

Como a equação do círculo ONA é dada por $\rho = 2a \cos \theta$, representando por y_2 a ordenada do ponto M'', em que a sua tangente em N, intersecta a recta AM,

$$y_2 = a \operatorname{tg} \theta \ .$$

O raio vector OP intersecta a recta AM noutro ponto M, cuja ordenada y_3 é dada pela expressão

$$y_3 = 2a \operatorname{tg} \theta \ .$$

Logo, o ponto no qual o raio vector do ponto P da Cisóide intersecta a assimptota é equidistante de outros dois pontos que intersectam com a mesma recta as tangentes à Cisóide e ao círculo, traçadas pelos pontos de intersecção de OP com ambas as curvas.(LONGCHAMPS: *Association française, Congrés de Grenobles*, 1885.)

Através desta propriedade da Cisóide deparamo-nos com outro método para determinar as suas tangentes.

6.

Partindo da equação polar da curva obtém-se facilmente a seguinte expressão que representa o raio da curvatura,

$$R = \frac{a \operatorname{sen} \theta (1 + 3 \cos^2 \theta)^{\frac{3}{2}}}{3 \cos^4 \theta} = \frac{N^3}{24a^2} \cot^2 \theta \ ,$$

na qual N representa o comprimento da normal.

A primeira expressão de R mostra que a Cisóide não tem pontos de inflexão à distância finita.

7.

A área limitada pela Cisóide, pelo eixo das abcissas e por uma recta paralela ao eixo das ordenadas é determinada pela seguinte fórmula,

$$A = \int_0^x x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}dx$$

$$= a^2\left[-\frac{(x+3a)\sqrt{x(2a-x)}}{2a^2} + 3\,\text{arctg}\sqrt{\frac{x}{2a-x}}\right] .$$

Considerando $x = 2a$ e duplicando o resultado, podemos escrever que,

$$2A = 3a^2\pi \ .$$

Portanto, podemos afirmar que a *área limitada pela Cisóide e pela sua assimptota é igual ao triplo da área do círculo de raio a.* (WALLIS: l. c.; HUYGENS: l. c.; FERMAT: l. c.)

8.

A rectificação da Cisóide pode obter-se através de funções elementares. Deste modo, partindo da equação polar da curva, resulta que,

$$ds = \frac{2\sqrt{3}a\,\text{sen}\,\theta}{\cos^2\theta}\sqrt{\cos^2\theta + \frac{1}{3}}d\theta \ ;$$

e, por conseguinte,

$$s = 2a\left[\frac{\sqrt{1+3\cos^2\theta_1}}{\cos\theta_1} - \frac{\sqrt{1+3\cos^2\theta_0}}{\cos\theta_0} - \sqrt{3}\log\frac{\cos\theta_1 + \sqrt{\frac{1}{3}+\cos^2\theta_1}}{\cos\theta_0 + \sqrt{\frac{1}{3}+\cos^2\theta_0}}\right] \ ;$$

representando por θ_0 e por θ_1 os valores de θ nas extremidades do arco que se quer rectificar.

9.

O volume do sólido engendrado pela Cisóide, ao girar em torno da sua assimptota, determina-se facilmente recorrendo ao Cálculo Integral, e tem a seguinte expressão,

$$V = 2\pi^2 a^3 \ .$$

Esta expressão é igual ao volume do *toro*, engendrado pelo círculo no qual se baseia a construção da Cisóide, fazendo-se girar à volta da mesma assimptota.

Esta interessante relação entre os volumes dos dois sólidos considerados foi descoberta por SLUSE (*Carta a Huygens no dia 10 de Fevereiro de 1658*). Na revista *Mathesis* (1886, p.241 e 273) pode ver-se uma generalização do teorema de Sluse feita por MASSAU.

10.

Vejamos agora como a *Cisóide de Diocles* ajudou na resolução do *problema da duplicação do cubo*. Este problema consiste em que dado um segmento a de uma recta se determine outro segmento α, o qual se relaciona com a através da seguinte expressão

$$\alpha^3 = 2a^3 \ .$$

Descreva-se para isso o círculo de raio CO, igual a a e a Cisóide correspondente (figura 1). Traça-se depois uma recta AP que intersecta a recta CE, que é paralela ao eixo das ordenadas, num ponto D, tal que seja $CD = a$ e traça-se pelo ponto P, o qual é a intersecção entre AD e a curva, a recta OP.

Fazendo

$$KC = \beta,\ FK = 2a + \beta \text{ e } KE = 2a - \beta,$$

vem que,

$$OK.KN = FK.KE = 4a^2 - \beta^2 \ .$$

Assim, aplicando o teorema de Menelao à transversal PDA do triângulo OKC, obtemos

$$\frac{PK.DC.OA}{OP.DK.AC} = 1 \ .$$

Dado que $AO = 4a$, $DC = a$ e, pela definição da curva $PK = KN$, podemos escrever que

$$\frac{2aKN}{(OK - KN)(\beta - a)} = 1 \ .$$

Ou, simplesmente,

$$KN(\beta + a) = OK(\beta - a) \ .$$

Eliminando nesta equação KN e OK, através das equações

$$OK.KN = 4a^2 - \beta^2 \text{ e } OK^2 = 4a^2 + \beta^2,$$

vem que,

$$\beta^3 = 4a^3 \ ,$$

E, supondo que α é a medida proporcional entre β e a, ou que $\alpha^2 = a\beta$, chegamos finalmente à conclusão que α satisfaz a condição indicada, $\alpha^3 = 2a^3$. Desta maneira, α resolve o problema da *duplicação do cubo.*

11.

Consideremos, como no número 1, uma circunferência (figura 2), cujo centro é C. Seja também, O um ponto da circunferência e AM uma tangente à circunferência, no ponto A, que intersecta OA obliquamente. Se traçarmos uma recta ON, de posição variável, e considerarmos nela, a partir de O um segmento OP igual a NM, o lugar geométrico descrito pelo ponto P, quando ON gira em torno de O, é uma curva que se designa por *Cisóide Oblíqua.* Quando O coincide com A_0 resulta a *Cisóide de Diocles*, também denominada por *Cisóide Recta.*

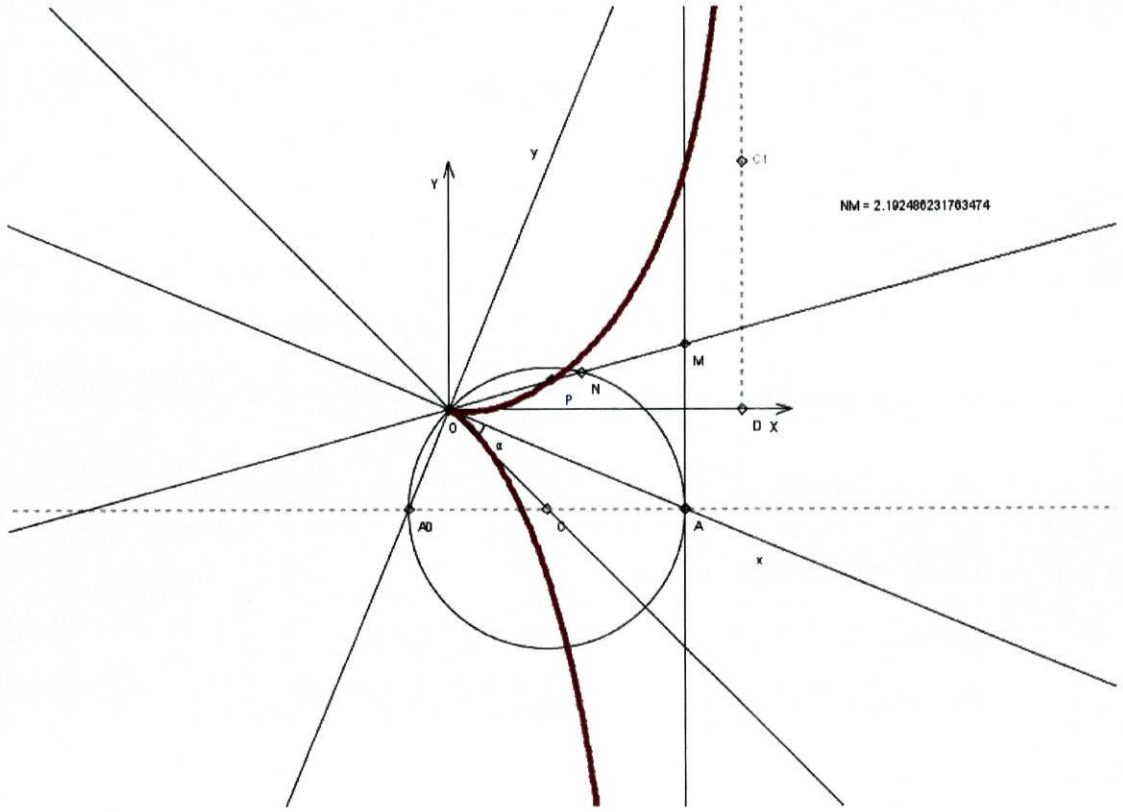


Figura 2: *Cisóide Oblíqua*

Uma vez que $OP = OM - ON$ e representando por α o ângulo constante AOC, por θ o ângulo MOA, por ρ a recta OP e por $2a$ o diâmetro da circunferência, vem que

$$ON = 2a\cos(\alpha+\beta),\ \frac{OM}{OA} = \frac{\cos\alpha}{\cos(\theta-\alpha)} \text{ e } OA = 2a\cos\alpha.$$

De onde se deduz a *equação polar da Cisóide Oblíqua*:

$$\rho = \frac{2a\cos^2\alpha}{\cos(\theta-\alpha)} - 2a\cos(\theta+\alpha)\ .$$

A qual também pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\rho = 2a\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos(\theta-\alpha)}\ .$$

Ou ainda em coordenadas cartesianas,

$$(x^2 + y^2)(x\cos\alpha + y\,\mathrm{sen}\,\alpha) = 2ay^2 \quad .$$

tomando a recta OA por eixo das abcissas e uma perpendicular a esta recta, que passe em O, por eixo das ordenadas.

12.

Para determinar facilmente a figura da curva, convém adoptar como novo eixo das abcissas a recta OX, que forma com OA um ângulo igual a α. Assim, temos que,

$$x = X\cos\alpha - Y\,\mathrm{sen}\,\alpha,\; y = X\,\mathrm{sen}\,\alpha + Y\cos\alpha,$$

donde vem que,

$$X(X^2 + Y^2) = 2a(X\,\mathrm{sen}\,\alpha + Y\cos\alpha)^2 \quad ,$$

ou ainda,

$$Y = \frac{2aX\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha \pm X\sqrt{2aX - X^2}}{X - 2a\cos^2\alpha} \tag{3.1}$$

De facto, $Y = 0$ quando $X = 0$, e Y torna-se um imaginário quando X é negativo e quando $X > 2a$. Logo, a curva passa pelo ponto O (figura 2) e encontra-se confinada entre o eixo das ordenadas e uma paralela a este que passa pelo ponto $(2a, 0)$. As rectas, paralelas ao eixo das ordenadas, que passam pelos pontos compreendidos entre a origem das coordenadas e este ponto $(2a, 0)$, intersectam a curva em dois pontos.

A recta BM, definida pela equação $X = 2a\cos^2\alpha$, é *assimptota* de um dos ramos da curva e intersecta o outro ramo no ponto B, cuja ordenada, é expressa pela seguinte fórmula,

$$y_B = \frac{a\cos\alpha\cos 2\alpha}{\mathrm{sen}\,\alpha} \quad .$$

A curva intersecta a recta DC_1, a qual limita a zona em que está compreendida, no ponto C_1, cuja ordenada é igual a $2a \cot \alpha$.

Fazendo $Y = 0$, observa-se que os pontos O e F, onde a curva intersecta o eixo das abcissas, tem por abcissas $X = 0$ e $X = OF = 2a \operatorname{sen}^2 \alpha$. Também é fácil de ver que o ponto O é $Y' = -\operatorname{tg} \alpha$. Logo, a origem das coordenadas é um ponto de retrocesso, e a tangente à curva nesse ponto forma um ângulo igual a $-\alpha$ com o eixo das abcissas. Como $OF + OE = 2a$, podemos concluir que $OF = ED$.

A fórmula (3.1) mostra que a hipérbole, cuja equação

$$Y = \frac{a \operatorname{sen} 2\alpha}{X - 2a \cos^2 \alpha} X \quad ,$$

a qual tem a mesma assimptota que a curva considerada, intersecta no ponto médio todas as cordas paralelas à mesma assimptota.

13.

A *subnormal polar* da Cisóide Oblíqua tem a seguinte expressão (figura 2)

$$S_n = \frac{d\rho}{d\theta} = \frac{dOM}{d\theta} - \frac{dON}{d\theta} \quad ,$$

sendo igual à diferença entre a subnormal da recta AM e a da circunferência, nos pontos M e N correspondentes. Logo, o método utilizado no número 4 para traçar a normal à *Cisóide Recta* pode ser aplicado para traçar a normal à *Cisóide Oblíqua.*

Da mesma maneira, o método de *Longschamps* para traçar as tangentes à *Cisóide Recta*, expresso no ponto 5, também é aplicável no caso da *Cisóide Oblíqua.* Isto deduz-se facilmente recorrendo à Geometria Analítica ou a um método geométrico mais fácil utilizado por aquele ilustre geómetra.(*Geometrie Analytique à deux dimensions*, Paris, 1884, p. 19-22)

14.

A Cisóide é uma curva *unicursal*. De facto, substituindo $x = ty$ na equação da curva, determinada no número 11, vem que

$$x = \frac{2at}{(\operatorname{sen}\alpha + t\cos\alpha)(1+t^2)} \text{ e } y = \frac{2a}{(\operatorname{sen}\alpha + t\cos\alpha)(1+t^2)},$$

Assim, através destas equações pode-se concluir que a recta cuja equação é

$$ux + vy = 1 \ ,$$

intersecta a curva em três pontos, nos quais t adquire os valores determinados pela seguinte equação

(A)

$$t^3\cos\alpha + t^2\operatorname{sen}\alpha - (2au - \cos\alpha)t + \operatorname{sen}\alpha - 2av = 0 \ ,$$

Os valores t_1, t_2 e t_3 estão relacionados pela condição

$$t_1 + t_2 + t_3 = -\operatorname{tg}\alpha, \tag{3.2}$$

Da mesma maneira, observa-se que a circunferência, cuja equação é

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + l = 0 \ ,$$

intersecta a Cisóide em quatro pontos, determinados por valores de t que satisfazem outra condição

$$t_1' + t_2' + t_3' + t_4' = -2\operatorname{tg}\alpha. \tag{3.3}$$

As relações (3.2) e (3.3) foram determinadas por BALITRAND (*Nouvelles Annales des Mathématiques*, 1893, p.448), que também foi responsável pela dedução de algumas

propriedades da Cisóide e das soluções de algumas questões relativas a esta curva. Neste trabalho, vão ser mencionadas quatro dessas questões:

1.º Fazendo em (3.2), $t_1 = t_2 = t_3$, pode observar-se que a *curva possui um ponto de inflexão* e que o valor de t nesse ponto resulta da igualdade,

$$t = -\frac{1}{3}\operatorname{tg}\alpha \ .$$

Assim, as coordenadas do ponto de inflexão são,

$$x = -\frac{9a}{\cos\alpha(9+\operatorname{tg}^2\alpha)} \text{ e } y = -\frac{27a}{\operatorname{sen}\alpha(9+\operatorname{tg}^2\alpha)}.$$

2.º Fazendo em (3.3), $t'_1 = t'_2 = t'_3 = t'_4$, pode-se concluir que existe um ponto da Cisóide em que a circunferência *osculatriz*, tendo um *contacto de terceira ordem* com a curva, donde se verifica que

$$t = -\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha \ ,$$

sendo as coordenadas deste ponto,

$$x = -\frac{8a}{\cos\alpha(4+\operatorname{tg}^2\alpha)} \text{ e } y = -\frac{16a}{\operatorname{sen}\alpha(4+\operatorname{tg}^2\alpha)}.$$

3.º Fazendo em (3.2), $t_1 = t_2$, chegamos à seguinte equação:

$$2t_1 + t_3 = -\operatorname{tg}\alpha \ .$$

Esta equação permite-nos determinar um dos pontos em que a tangente intersecta a Cisóide, sabendo anteriormente o outro ponto.

4.º Fazendo em (3.3), $t'_1 = t'_2 = t'_3$, surge a seguinte equação:

$$3t'_2 + t'_4 = -2\operatorname{tg}\alpha \ .$$

Esta equação permite-nos determinar um dos pontos em que a circunferência osculatriz da Cisóide a intersecta, sabendo anteriormente o outro ponto.

15.

A equação das tangentes à Cisóide é da forma

$$(\cos\alpha + 2t\,\mathrm{sen}\,\alpha + 3t^2\cos\alpha)X + (\mathrm{sen}\,\alpha - t^2\,\mathrm{sen}\,\alpha - 2t^3\cos\alpha)Y = 2a \ .$$

Logo, se pelo ponto (x_1, y_1) se traçam tangentes à curva, podemos determinar os valores de t nos três pontos de contacto através da equação

$$2t^3 y_1\cos\alpha + (y_1\,\mathrm{sen}\,\alpha - 3x_1\cos\alpha)t^2 - 2x_1 t\,\mathrm{sen}\,\alpha + 2a - x_1\cos\alpha - y_1\,\mathrm{sen}\,\alpha = 0 \ .$$

A condição para que os três pontos de contacto estejam sobre a mesma recta exige que esta equação seja igual à definida em (A), ou que

$$2y_1 = y_1 - 3\cot\alpha.x_1 = \frac{2x_1\,\mathrm{sen}\,\alpha}{2au - \cos\alpha} = \frac{y_1\,\mathrm{sen}\,\alpha + x_1\cos\alpha - 2a}{2av - \mathrm{sen}\,\alpha} \ ,$$

ou, ainda que $y_1 = -3x_1\cot\alpha$.

Portanto, *os pontos pelos quais se podem traçar tangentes à Cisóide, de maneira a que os pontos de tangência estejem sobre a mesma recta, pertencem à recta que tem por equação* $y = -3x\cot\alpha$. (BALITRAND, l. c.)

Das mesmas equações condicionais deduz-se os coeficientes u e v da recta $ux + vy = 1$, que passa pelos pontos de contacto considerados. Esta recta tem a seguinte equação

$$\frac{3\cos^2\alpha - \mathrm{sen}^2\,\alpha}{6a\cos\alpha}X + \frac{4x_1\cos\alpha + a}{6ax_1\cot\alpha}Y = 1 \ .$$

Daqui, podemos concluir que *intersecta o eixo das abcissas no ponto que não varia com* (x_1, y_1).(BALITRAND, l. c.)

16.

Já vimos anteriormente que a Cisóide intersecta a sua assimptota num ponto cujas coordenadas são

$$x = 2a\cos^2\alpha \text{ e } y = \frac{a\cos\alpha\cos 2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}.$$

Assim, eliminando α destas equações, obtemos a equação da curva descrita pelo ponto de intersecção, quando α varia,

$$y^2 = \frac{x(x-a)^2}{2a-x} \ .$$

Esta equação corresponde à curva denominada por *Estrofóide*, a qual vai ser estudada mais adiante.

17.

A *Cisóide de Diocles* e a *Oblíqua* são casos particulares de uma classe de cúbicas denominada por *Cisóides*. As cúbicas obtêm-se substituindo, na construção exposta no número 11, a circunferência e a recta AM por uma cónica qualquer e por uma recta arbitrária, que não seja paralela às assimptotas da cónica, cujas equações são

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey = 0 \text{ e } ux + vy = 1.$$

Para determinar a equação geral das *Cisóides*, representamos por ρ_1 e ρ_2 os raios vectores correspondentes ao mesmo valor do ângulo θ, referentes, respectivamente, à cónica e à recta. Assim, as equações cartesianas anteriores podem ser escritas da seguinte forma

$$(A\cos^2\theta + B\operatorname{sen}\theta\cos\theta + C\operatorname{sen}^2\theta)\rho_1 + D\cos\theta + E\operatorname{sen}\theta = 0 \text{ e } (u\cos\theta + v\operatorname{sen}\theta)\rho_2 = 1.$$

Considerando, agora a expressão fundamental, $\rho = \rho_2 - \rho_1$, podemos eliminar os valores de ρ_1 e ρ_2, donde vamos obter a *equação polar* destas curvas, a qual pode ser escrita em coordenadas cartesianas, como sendo,

$$(Ax^2 + Bxy + Cy^2)(ux + vy) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + (Dx + Ey)(ux + vy) \ .$$

Aplicando a esta equação o método das assimptotas, facilmente se conclui que a recta $ux + vy = 1$ é assimptota destas curvas. No entanto, estas ainda possuem outras duas assimptotas, reais ou imaginárias, simétricas às da cónica, relativamente à origem das coordenadas.

E assim pode-se concluir facilmente, através de métodos geométricos, que qualquer uma destas curvas apresenta na origem: um *nó* quando a recta considerada a intersecta, um *ponto de retrocesso* quando a recta considerada a toca e um *ponto isolado* quando a recta considerada não a intersecta. Convém advertir que nos dois primeiros casos as tangentes à Cisóide na origem passam pelas intersecções da recta com a curva.

As Cisóides são em todos os casos, cúbicas *unicursais*. *Zahradnik* demonstrou que é condição suficiente, para que uma cúbica unicursal seja uma Cisóide, o facto de possuir três assimptotas reais distintas ou uma única assimptota real à distância finita. (*Archiv der Mathematik und Physik*, t. LVI, p. 8)

II A Concóide de Sluse

18.

A *Concóide de Sluse* é uma curva cuja equação em coordenadas polares é

$$a(\rho\cos\theta - a) = k^2\cos^2\theta \ ,$$

e em coordenadas cartesianas,

$$a(x-a)(x^2+y^2) = k^2x^2. \tag{3.4}$$

O primeiro a dedicar-se ao estudo desta curva notável foi Sluse numa interessante correspondência matemática com Huygens. (*Oeuvres de Huygens*, t. IV, p. 246) Estando desde então esquecida, só mais tarde Gino Loria publicou um artigo sobre a mesma no *Mathesis* (1897, p. 5).

Vamos agora descrever a maneira como Sluse obteve a curva cujo nome em latim é $\chi\varnothing\gamma\chi\eta$ e em português é *concha*.

Seja O um ponto dado e AB uma recta conhecida. Tracemos pelo ponto O uma recta variável OC, que intersecta a recta AB no ponto C. Consideremos sobre a recta OC, a partir de C, um segmento CD tal que,

$$OC.CD = k^2 \ ,$$

sendo k^2 uma constante conhecida.

O lugar geométrico (figura 3) descrito pelo ponto D, quando OC varia, é a *Concóide* pretendida.

Para provarmos o que foi dito anteriormente, basta admitir que,

$$CD = OD - OC = OD - \frac{OB}{\cos COB} \text{ e } CD = \frac{k^2}{OC} = \frac{k^2\cos COB}{OB},$$

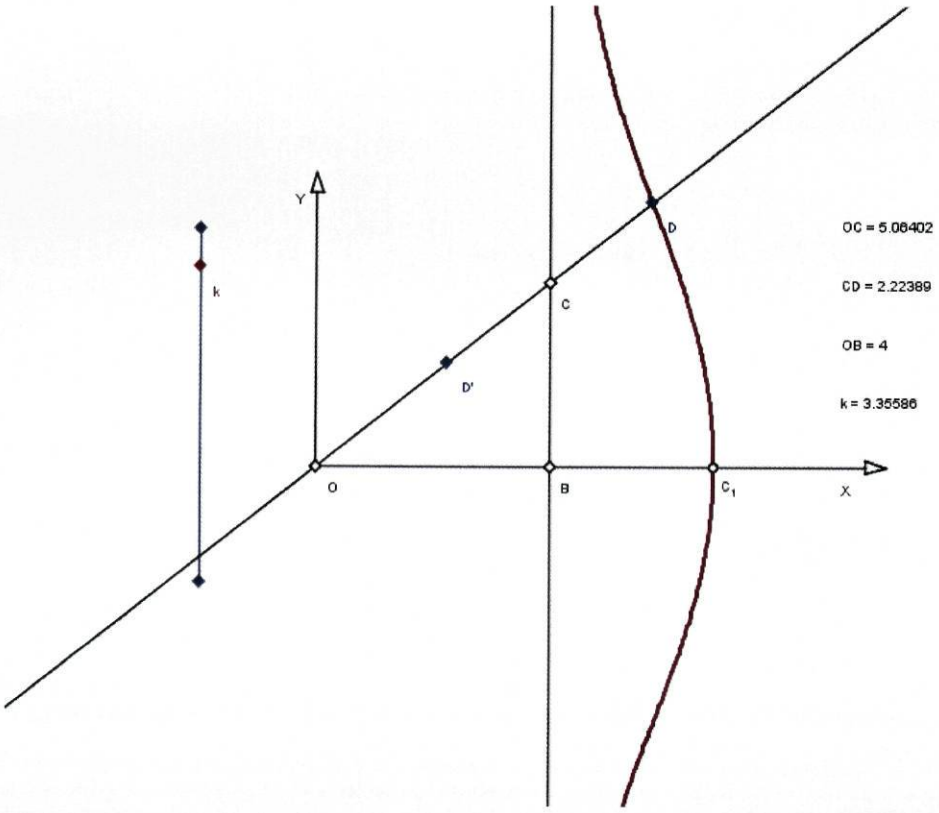


Figura 3: *Concóide* de Sluse

Ou, supondo que $OB = a$ e tomando o ponto O como *pólo* e a recta Ox, perpendicular à recta AB, como *eixo polar*, vem que,

$$CD = \rho - \frac{a}{\cos\theta} \text{ e } CD = \frac{k^2 \cos\theta}{a}.$$

A partir destas expressões, determina-se imediatamente a equação polar da curva e consequentemente a equação cartesiana.

19.

A partir da equação (3.4), pode-se deduzir facilmente que a *Concóide* de Sluse possui as seguintes características:

- ⋆ a sua forma é a indicada na figura 3;
- ⋆ simétrica em relação ao eixo das abcissas;
- ⋆ tem uma assimptota AB, cuja equação é $x = a$;
- ⋆ a abcissa do vértice C_1 é igual a $\dfrac{a^2 + k^2}{a}$;
- ⋆ o ponto O é um *ponto isolado.*

A *Concóide* de SLUSE tem ainda dois pontos de inflexão à distância finita. Para os determinarmos, façamos na equação da curva $y = tx$, sendo t um parâmetro variável. Assim, obtemos

$$x = a + \frac{k^2}{a(1+t^2)} \quad \text{e} \quad y = at + \frac{k^2 t}{a(1+t^2)} \quad .$$

Os valores de t correspondentes aos pontos de inflexão podem ser determinados pela equação,

$$\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{2k^2}{a^2}.\frac{k^2 + a^2 - 3a^2t^2}{(1+t^2)^3} = 0 \quad ,$$

ou,

$$t^2 = \frac{k^2 + a^2}{3a^2} \quad .$$

Sendo as coordenadas destes pontos de inflexão determinadas pelas seguintes equações,

$$x = \frac{4a(a^2+k^2)}{4a^2+k^2} \quad \text{e} \quad y = \pm\frac{4(a^2+k^2)^{\frac{3}{2}}}{4(a^2+k^2)\sqrt{3}} \quad .$$

SLUSE atribui a HUYGENS a primeira determinação deste pontos de inflexão. (*Oeuvres de Huygens*, t. IV, 1891, p. 292)

Eliminando k nas equações anteriores chegamos à equação de uma *Cisóide*. Logo, *o lugar geométrico dos pontos de inflexão das Concóides* de Sluse, *que possuem a mesma assimptota e o mesmo ponto singular, é uma Cisóide.*

20.

Se considerarmos sobre a recta OD (figura 3) um segmento CD', igual a CD, o lugar geométrico descrito por D', quando OC varia, é outra curva denominada também por *Concóide* de SLUSE e cuja equação é a seguinte:

$$a(x-a)(x^2+y^2) = -k^2x^2 \quad .$$

Através das fórmulas da primeira *Concóide*, obtém-se esta segunda, substituindo k^2 por $-k^2$. Podemos ainda dizer que a forma desta nova curva quando $a^2 > k^2$ é a representada na figura 4 e, quando $a^2 < k^2$ é a representada na figura 5. Em ambos os casos $OB = a$, no entanto no segundo caso a curva carece de pontos de inflexão reais à distância finita, tendo dois imaginários. Quando $k^2 = a^2$ a curva reduz-se a uma *Cisóide.*

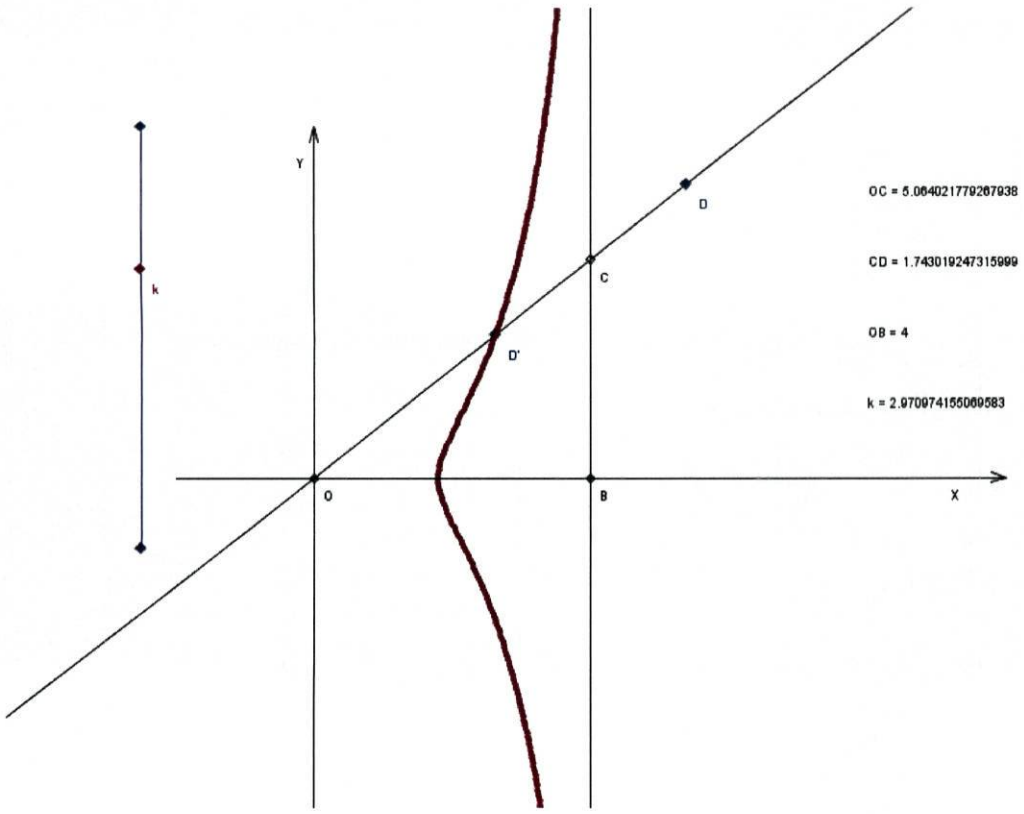


Figura 4: *Concóide* de Sluse, quando $OB^2 > k^2$

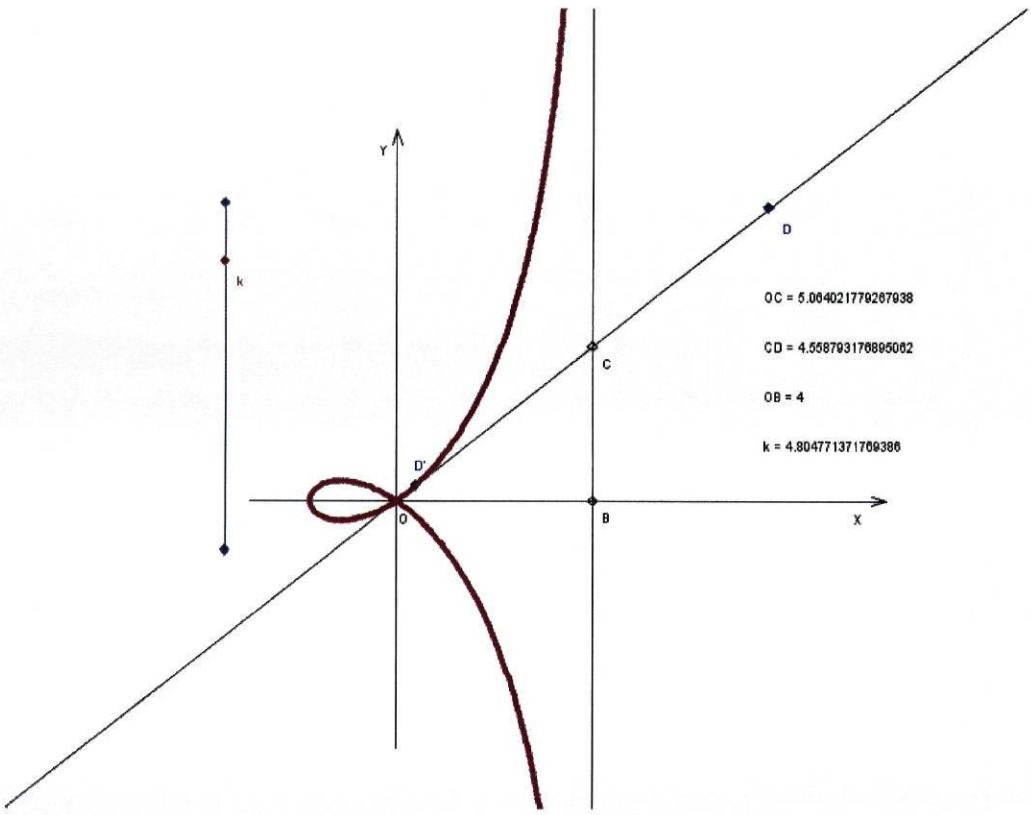


Figura 5: *Concóide* de Sluse, quando $OB^2 < k^2$

III A Estrofóide

21.

Consideremos uma circunferência de centro C e raio CA (figura 6). Tracemos uma recta KL que passe pelo centro, formando com CA o ângulo α. Tracemos, ainda, a recta OD de posição variável, que passa pelo ponto fixo O, e consideremos sobre esta recta um segmento OM igual a ED.

O lugar geométrico das posições do ponto M, quando OD varia, é a curva denominada por *Estrofóide*[2]. Se $\alpha = 90\,^\circ$ a Estrofóide diz-se *recta*, sendo *oblíqua* sempre que $\alpha < 90\,^\circ$ ou $\alpha > 90\,^\circ$.

Uma vez que $OM = OD - OE$ e representando por ρ o segmento OM, a o raio OC e por θ o ângulo DOA, vem que

$$OD = 2a\cos(\theta) \quad \text{e} \quad OE = \frac{a\,\mathrm{sen}\,\alpha}{\mathrm{sen}(\alpha - \theta)} \quad .$$

Desta maneira, a *equação polar da Estrofóide* é dada pela expressão:

$$\rho = 2a\cos\theta - \frac{a\,\mathrm{sen}\,\alpha}{\mathrm{sen}(\alpha - \theta)} \quad ,$$

ou ainda,

$$\rho = a\frac{\mathrm{sen}(\alpha - 2\theta)}{\mathrm{sen}(\alpha - \theta)} \quad .$$

Para determinar a equação cartesiana da curva, consideremos o eixo das abcissas como sendo Ox, que é perpendicular à recta KL dada, e para eixo das ordenadas a recta Oy, paralela a KL. O ângulo AOx é igual a $\frac{\pi}{2} - \alpha$ e as coordenadas, x e y, do ponto M são as seguintes:

[2]De $\sigma\tau\rho\delta\varphi\iota\phi\nu$ ou *strophium*, que quer dizer, coroa ou grinalda de flores, ou $\sigma\tau\rho\phi\varphi\iota\varsigma$, que significa espira ou revolta.

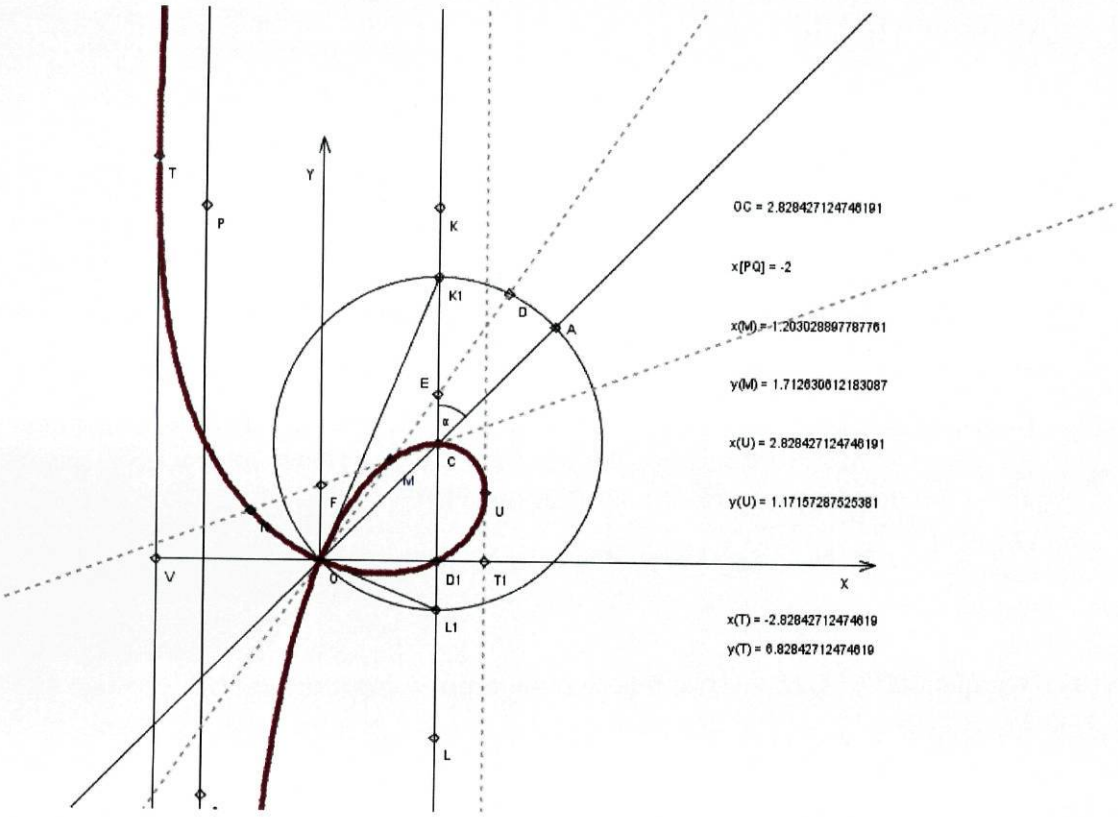


Figura 6: *Estrofóide* Oblíqua

$$x = \rho\cos(\theta + \frac{\pi}{2} - \alpha) = \rho[\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\alpha - \mathrm{sen}\,\theta\cos\alpha],$$
$$y = \rho\,\mathrm{sen}(\theta + \frac{\pi}{2} - \alpha) = \rho[\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\alpha + \cos\theta\cos\alpha].$$

A partir destas expressões é possível determinar os valores de $\mathrm{sen}\,\theta$ e de $\cos\theta$, os quais ao serem substituídos na equação polar da Estrofóide se obtem a equação cartesiana desta mesma curva, como sendo,

$$(x^2 + y^2)x = a[(x^2 - y^2)\,\mathrm{sen}\,\alpha + 2xy\cos\alpha]. \tag{3.5}$$

22.

As mais antigas referências à *Estrofóide recta*, segundo G. Loria (*Bolletino di Bibliografia*, etc., 1898, p. 3) em cartas escritas, em 1645, por Verdus a Torricelli foram feitas por ROBERVAL. Nessa altura, este geómetra dedicou-se ao estudo desta curva então designada por *Ptéroide*[3]. As cartas referidas anteriormente foram publicadas no *Bolletino de Boncompagni* (t. VIII, 1875).

Mais tarde, Möivre (*Philosophical Transactions*, 1715)[4] e AGNESI, no seu *Instituzioni Analitiche*, (Milano, 1748, p. 378-391) dedicaram-se também ao estudo desta curva, etc.

Consta-se que MONTUCCI foi o primeiro a dar à curva o nome de *Estrofóide*, num artigo publicado em 1846 nos *Nouvelles Annales des Mathématiques* (t. V, p. 470). LEHMUS, nos *Aufgaben aus der höheren Mathematik* (Berlin, 1842, p. 120) chamou-a de *cucumeide*[5] e BOOTH de *logocíclica*, num artigo publicado no *Quarterly Journal of Mathematics* (1858-1859) e, mais tarde, no *Treatise on some New Geometrical Methods* (1873, t. I, p. 292).

Relativamente à *Estrofóide Oblíqua*, os mais antigos trabalhos conhecidos são as *Lectiones geometricæ* de BARROW (1669, p.69), segundo afirmou AUBRY, e duas memórias de CASALI, publicadas nos *Instituti Bononiensis Commentarii* (t. IV, 1757), nas quais se atribui a TORRICELLI a invenção destas curvas (Loria, l. c.). Posteriormente, também QUETELET se dedicou a este assunto numa memória intitulada por *De quibusdam locis geometricis necnon de curva focali*, publicada em Gand, nos anos 1819. Neste trabalho, é atribuído à curva o nome de *focal com nó*. Por este motivo, pode também designar-se por *focal de Quetelet*, como se poderá ver mais adiante.

As Estrofóides *recta* e *oblíqua* têm sido objecto de estudo de muitos geómetras, existindo assim muitos trabalhos notáveis dedicados a estas curvas. Podemos ver todos os títulos desses trabalhos, anteriores a 1860, numa lista publicada por *Tortolini* nos *Annali*

[3]De $\pi\tau\epsilon\rho\varnothing\nu$ ou *pteron* que significa ala, a *curva alada*.

[4]No documento original está escrito *Phylosophical Transactions*, 1715.

[5]De $\alpha\epsilon\chi\nu\mu\alpha$, *cucuma*, ou *cucumis*, cohombro, ou espécie de pepino.

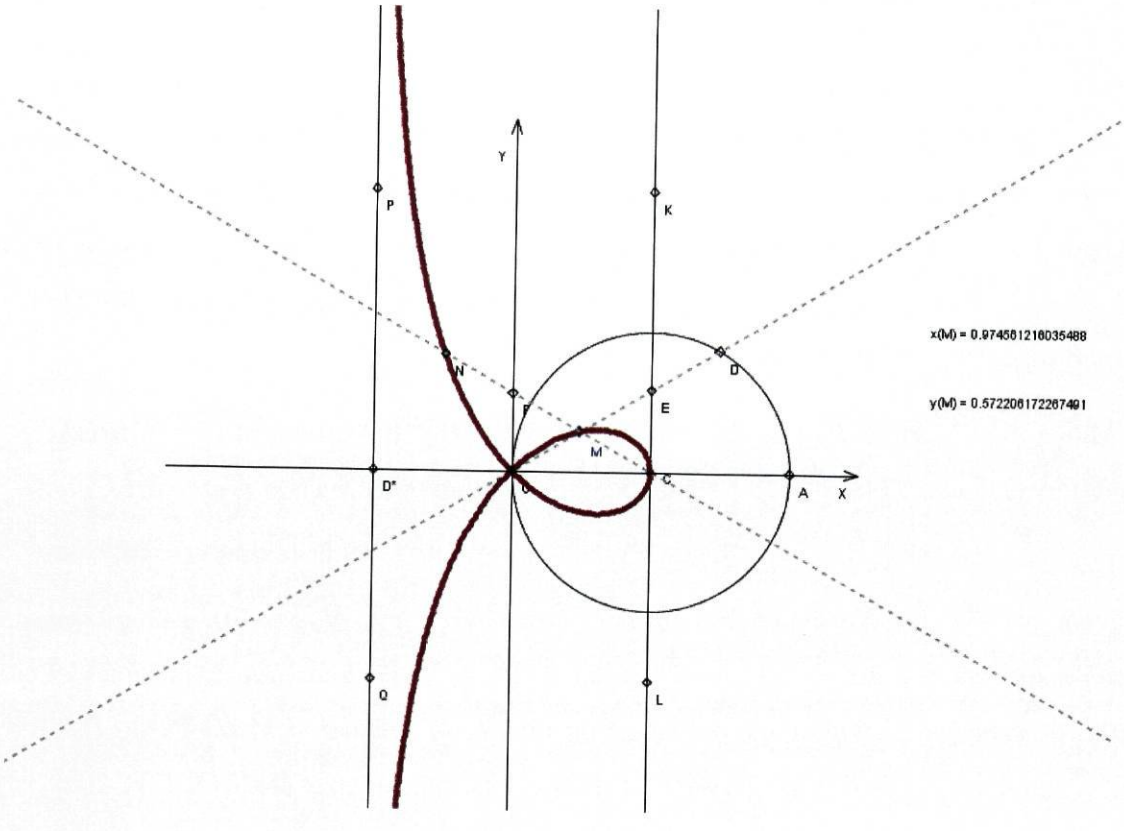


Figura 7: *Estrofóide* Recta

di Matematica, t. III e transcrita nos *Nouvelles Annales des Mathématiques* (1861, p. 82). Mais recentemente GUNTHER publicou outra lista mais extensa no seu *Paraboliches Logaritmen und paraboliche Trigonometrie* (Leipzig, 1882).

23.

Passemos agora ao estudo da *Estrofóide recta.* A equação desta curva é

$$y^2 = \frac{x^2(a-x)}{x+a} \quad ,$$

da qual se deduz que a sua forma será a indicada na figura 7.

De facto, a curva intersecta o eixo das abcissas nos pontos O e C, quando $x = 0$ e $x = a$. A cada valor de x, entre $-a$ e a, correspondem dois pontos reais da curva, simetricamente dispostos em relação ao eixo das abcissas. A recta PQ, cuja equação é $x = -a$, é assimptota da curva. Podemos ainda referir que, os pontos cuja abcissa é igual a $\frac{1}{2}a(\sqrt{5}-1)$, atingem o valor máximo de y. Mais, a origem das coordenadas é um ponto *duplo* da curva, onde as tangentes formam ângulos de $45\,^\circ$ e de $-45\,^\circ$ com o eixo das abcissas.

24.

Partindo da equação da Estrofóide recta, em coordenadas polares

$$\rho = a\frac{\cos 2\theta}{\cos\theta} \quad ,$$

podemos determinar a expressão do raio da curvatura R, que é a seguinte:

$$R = \frac{a(1+\operatorname{sen}^2 2\theta)^{\frac{3}{2}}}{4\cos^4\theta(1+2\operatorname{sen}^2\theta)} \quad .$$

Através desta fórmula, podemos concluir que a curva não admite pontos de inflexão reais à distância finita e, ainda que, no ponto C $R = \frac{1}{4}a$ e no ponto O $R = a\sqrt{2}$

25.

Tracemos agora a recta CMN que passe pelo ponto C e representemos por ω o ângulo NCO. As coordenadas dos pontos M e N são determinadas pela equação da curva e pela correspondente à recta

$$y = -(x-a)\operatorname{tg}\omega \quad .$$

Eliminado y em ambas as equações, vem que,

$$x = \pm\frac{a\operatorname{tg}\omega}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\omega}} = \pm a\operatorname{sen}\omega \quad .$$

Esta expressão mostra que as projecções de M e N no eixo das abcissas são equidistantes do ponto O, e portanto, *os pontos M e N, em que as secantes traçadas por C intersectam a curva, são também equidistantes dos pontos F, em que as mesmas secantes intersectam a recta OF.*

Dado que

$$FO = a\,\mathrm{tg}\,\omega \text{ e } FM = a\,\mathrm{tg}\,\omega,$$

resulta que,

$$FO = FM = FN \ ,$$

ou ainda, que o ponto F não é somente equidistante de M e N, mas também é equidistante do ponto O. Desta maneira, vem que,

$$CN = CF + FO \text{ e } CM = CF - FO,$$

E, em consequência, dado o parâmetro a, que se encontra na equação cartesiana da *Estrofóide recta*, nada é mais fácil do que a construção desta curva, utilizando pares de pontos.

26.

Partindo das seguintes expressões,

$$CM = CF - MF = \frac{a}{\cos\omega} - a\,\mathrm{tg}\,\omega \text{ e } CN = CF + FN = \frac{a}{\cos\omega} + a\,\mathrm{tg}\,\omega,$$

podemos concluir que,

$$CM \times CN = a^2 \ .$$

Portanto, *o produto das distâncias do ponto C a dois pontos da curva, os quais pertencem a uma recta que passa por C, é constante, qualquer que seja esta recta.* (BOOTH, l. c.)

27.

A área limitada pela Estrofóide, pelo eixo das abcissas e por uma paralela ao eixo das ordenadas, em relação a um ponto (x, y), tem a seguinte expressão,

$$A = \int_0^x x\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}dx = a^2\left[\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a-x}{a+x}} - \frac{(2a-x)\sqrt{a^2-x^2}}{2a^2} - \frac{\pi}{4} + 1\right] \quad .$$

Fazendo $x = a$, e multiplicando por 2 a expressão anterior, obtemos a fórmula seguinte para a área da parte fechada da curva,

$$A_1 = 2a^2 - \frac{\pi}{2}a^2 \quad ,$$

sendo, analogamente, determinada a fórmula da área compreendida entre a curva e a assimptota,

$$A_2 = 2a^2 + \frac{\pi}{2}a^2 \quad .$$

Daqui resulta que, a soma das duas áreas é igual a $4a^2$.

28.

Para determinar o comprimento dos arcos da Estrofóide recta teremos que recorrer a integrais elípticos de 1ª e 2ª ordens, tal como BOOTH (l. c., p. 304) que teve em consideração a curva *inversa* à Estrofóide. No entanto, aqui vai-se resolver o problema directamente, sem o recurso a esta curva.

Aplicando à equação polar da Estrofóide a fórmula

$$ds = \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2}d\theta \quad ,$$

deduz-se que

$$ds = \frac{a}{\cos^2\theta}\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 2\theta}\,d\theta = \frac{2a\sqrt{2}\sqrt{1-\frac{1}{2}\cos^2 2\theta}}{1+\cos 2\theta}d\theta \ ,$$

considerando $2\theta = \frac{\pi}{2} - \omega$, temos que,

$$ds = \frac{a\sqrt{2}}{2}\left[\frac{\operatorname{sen}\omega d\omega}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\omega}} - \frac{d\omega}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\omega}} - \frac{d\omega}{(1+\operatorname{sen}\omega)\sqrt{1-\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\omega}}\right] \ ,$$

Fazendo, agora, $\operatorname{sen}\omega = t$ e integrando, vem que,

$$s = \frac{a\sqrt{2}}{2}\left[\int \frac{tdt}{\sqrt{F(t)}} - \int \frac{dt}{\sqrt{F(t)}} - \int \frac{dt}{(t+1)\sqrt{F(t)}}\right] \ ,$$

sempre que,

$$F(t) = (1-t^2)\left(1-\frac{1}{2}t^2\right) \ .$$

Mas, utilizando uma fórmula, já demonstrada na teoria dos integrais eliptícos, determina-se a seguinte igualdade, a qual também se pode verificar utilizando integrais simples,

$$\frac{2\sqrt{F(t)}}{t+1} = -\int \frac{dt}{(t+1)\sqrt{F(t)}} - \int \frac{dt}{\sqrt{F(t)}} + \int \frac{t^2dt}{\sqrt{F(t)}} \ .$$

Fazendo, agora, $t^2 = z$, vem que,

$$\int \frac{tdt}{\sqrt{F(t)}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z)(2-z)}} \ .$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\log(2z-3+2\sqrt{(1-z)(2-z)})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\log(2t^2-3+2\sqrt{2}\sqrt{F(t)})$$

Eliminando na expressão de s as integrais

$$\int \frac{tdt}{\sqrt{F(t)}} \text{ e } \int \frac{dt}{(t+1)\sqrt{F(t)}},$$

e escrevendo $\operatorname{sen}\omega$ em vez de t, e $\Delta\omega$ em vez de $\sqrt{1-\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\omega}$, obtemos

$$s = \frac{a}{2}\log(2\operatorname{sen}^2\omega - 3 + 2\sqrt{2}\cos\omega\Delta\omega) + \frac{a\sqrt{2}\cos\omega\Delta\omega}{\operatorname{sen}\omega+1} - \frac{a\sqrt{2}}{2}\int\frac{\operatorname{sen}^2\omega d\omega}{\Delta\omega} \quad .$$

Recorrendo à fórmula conhecida,

$$\int\frac{\operatorname{sen}^2\omega d\omega}{\Delta\omega} = 2\left[\int\frac{d\omega}{\Delta\omega} - \int\Delta\omega d\omega\right] \quad ,$$

determinamos, finalmente, a expressão pretendida para s

$$s = \frac{a}{2}\log(2\operatorname{sen}^2\omega - 3 + 2\sqrt{2}\cos\omega\Delta\omega) + \frac{a\sqrt{2}\cos\omega\Delta\omega}{\operatorname{sen}\omega+1} - a\sqrt{2}\left(\int\frac{d\omega}{\Delta\omega} - \int\Delta\omega d\omega\right) \quad ,$$

a qual depende dos integrais de 1ª e 2ª ordens de Legendre.

29.

Consideremos agora a *Estrofóide oblíqua.* Resolvendo em ordem a y a equação cartesiana da curva, temos que,

$$y = \frac{ax\cos\alpha \pm x\sqrt{a^2-x^2}}{x + a\operatorname{sen}\alpha} \quad .$$

Daqui podemos concluir que a recta (figura 6) PQ, cuja equação é $x = -a\operatorname{sen}\alpha$, é assimptota da curva e secante à mesma no ponto H, cuja ordenada toma o valor $\frac{a\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos\alpha}$.

Quando $x = \pm a$, os valores correspondentes de y têm por expressão,

$$y = \frac{\pm a\cos\alpha}{\pm 1 + \operatorname{sen}\alpha} \quad ,$$

e nos pontos correspondentes U e T as tangentes são paralelas ao eixos das ordenadas.

Quando x varia entre a e $-a$, y é real, sendo imaginário para todos os outros valores de x. Logo, a curva encontra-se compreendida entre as paralelas ao eixo das ordenadas que passam por U e V.

Os valores de y são zero quando $x = 0$. Logo, a origem das coordenadas é um *ponto duplo*, no qual os valores de y' têm a seguinte expressão,

$$y'_0 = \frac{\cos\alpha - 1}{\operatorname{sen}\alpha} = -\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha \text{ e } y'_1 = \frac{\cos\alpha + 1}{\operatorname{sen}\alpha} = \cot\frac{1}{2}\alpha.$$

Logo, representando por ω_0 e ω_1 os ângulos formados pelas tangentes com o eixo das abcissas, no ponto duplo, podemos escrever que

$$\omega_0 = -\frac{\alpha}{2} \text{ e } \omega_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}.$$

Portanto, *as tangentes no ponto duplo são perpendiculares uma à outra.*

Pode-se também determinar geometricamente estas tangentes. De facto, M tende para O, quando a recta variável OD tende a confundir-se com a recta OK_1 ou com a OL_1. Donde pode-se concluir que as rectas OK_1 e OL_1 são as tangentes à curva no ponto duplo O.

A curva intersecta o eixo das abcissas no ponto O e no ponto D_1, onde $x = a\operatorname{sen}\alpha$. Esta é também a abcissa do ponto C, que é o centro da circunferência, considerada no número 21, o qual possui a ordenada $y = a\cos\alpha$.

A expressão de y mostra que a hipérbole, cuja equação é

$$y = \frac{ax\cos\alpha}{x + a\operatorname{sen}\alpha},$$

e que possui a mesma assimptota da curva e passa pelos pontos O, U e T, intersecta todas as cordas paralelas à assimptota no respectivo ponto médio.

30.

Uma vez que $\rho = OD - OE$, pode-se afirmar que a *subnormal polar* da curva no ponto M é igual à diferença entre a subnormal polar da circunferência (figura 6) ADO no ponto D, e a subnormal polar da recta CK no ponto E. Logo, o método utilizado no número 4 para traçar as normais à Cisóide também é aplicável à Estrofóide.

31.

A propriedade da Estrofóide Recta, demonstrada no número 25, é também uma propriedade da Estrofóide oblíqua. De facto, traçando pelo ponto C (figura 6) a recta CM, a qual passa pelo ponto M da curva e intersecta a paralela à assimptota, relativa ao ponto O, no ponto F, chega-se à conclusão que $FM = OF$. Para provar esta afirmação, basta ter em conta que os triângulos MCO e CED são iguais, uma vez que $CD = CO$, $OM = ED$ e $EDC = COM$. Logo,

$$MC = EC \text{ e } MEC = EMC = FMO,$$

e, portanto,

$$FOM = MEC = FMO \text{ e } MF = OF.$$

32.

Considerando as rectas OL_1 e OK_1 (figura 6), isto é, as tangentes à curva no *ponto duplo*, como eixos das coordenadas, a equação da Estrofóide transforma-se na seguinte expressão:

$$(x^2 + y^2)\left[x\cos\frac{\alpha}{2} + y\,\mathrm{sen}\,\frac{\alpha}{2}\right] = 2axy \quad .$$

Assim, supondo que $y = tx$, vem que,

$$x = \frac{2at}{(t^2+1)\left[\cos\frac{\alpha}{2} + t\,\mathrm{sen}\,\frac{\alpha}{2}\right]}$$

e

$$y = \frac{2at^2}{(t^2+1)\left[\cos\frac{\alpha}{2} + t\,\mathrm{sen}\,\frac{\alpha}{2}\right]} \quad .$$

Consideremos, agora, que a recta de equação

$$ux + vy = 1 \quad ,$$

intersecta a curva em três pontos, os quais correspondem aos três valores de t, dados pela equação,

$$t^3\,\mathrm{sen}\,\frac{\alpha}{2} + \left[\cos\frac{\alpha}{2} - 2av\right]t^2 + \left[\mathrm{sen}\,\frac{\alpha}{2} - 2au\right]t + \cos\frac{\alpha}{2} = 0 \quad .$$

Logo, representando por t_1, t_2 e t_3 estes três valores de t, resulta que,

$$t_1t_2t_3 = -\cot\frac{\alpha}{2} \quad .$$

Do mesmo modo, conclui-se que uma circunferência qualquer intersecta a Estrofóide em quatro pontos, determinados pelos valores t'_1, t'_2, t'_3 e t'_4, os quais satisfazem a seguinte condição

$$t'_1t'_2t'_3t'_4 = \cot^2\frac{\alpha}{2} \quad .$$

Através destas relações, BALITRAND e E. VALDÉS determinaram muitas propriedades interessantes da Estrofóide, as quais foram publicadas em artigos escritos nas *Nouvelles Annales des Mathématiques* (1893, p. 430 e 1894, p. 243). Também com o auxílio a estas relações foram resolvidas as mesmas questões que surgiram também no caso da Cisóide, que se encontram no número 14. Como exemplo podemos referir que a Estrofóide admite um ponto de inflexão onde $t = -\sqrt[3]{\cot\frac{\alpha}{2}}$ e outro quando $t = \sqrt{\cot\frac{\alpha}{2}}$, onde a circunferência osculatriz e a curva têm um contacto de terceira ordem, etc.

33.

Como já foi referido anteriormente, a *Estrofóide* intervém na resolução ou análise de muitas, variadas e interessantes questões geométricas. CASALI primeiro, e mais tarde QUETELET, obtiveram a mesma curva quando tentavam resolver o problema exposto em seguida.

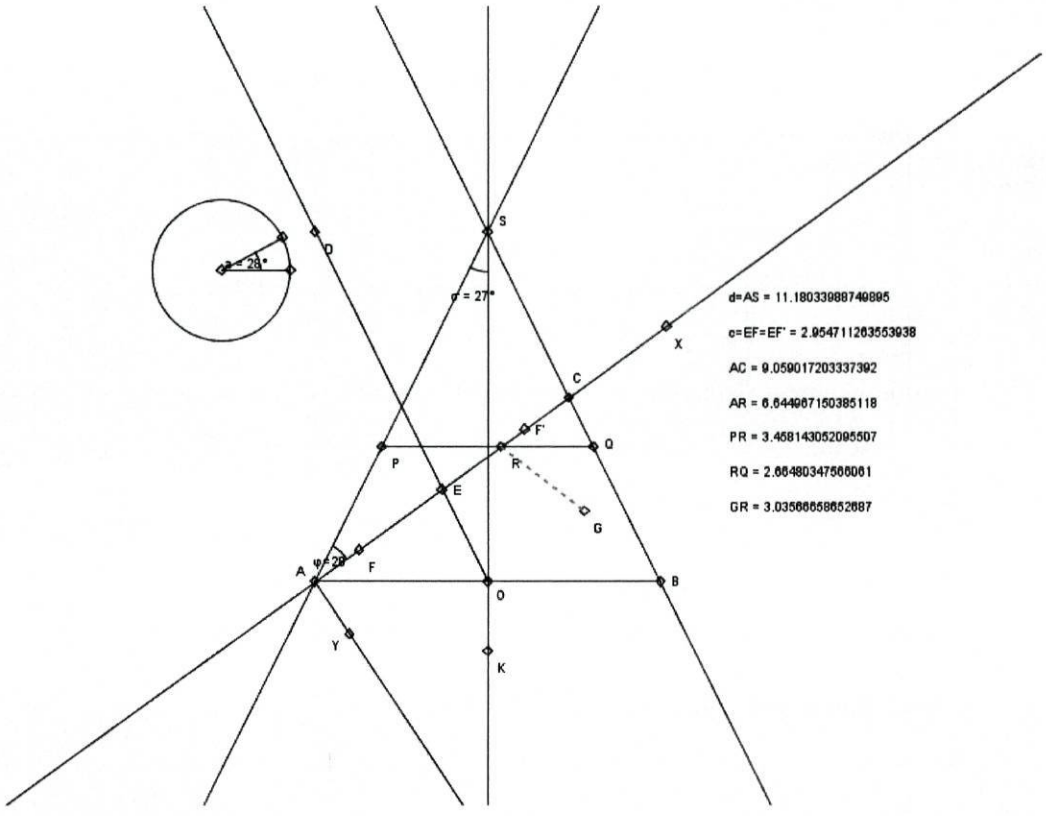


Figura 8: Procedimento para a construção da Estrofóide

Seja (figura 8) ASB a secção produzida num cone de revolução por um plano direccionado pelo eixo SK. Outro dos planos que passam pelo ponto A e pela tangente Ay ao círculo, de diâmetro AB e perpendicular ao eixo SK, é também perpendicular ao plano ASB, e determina, pela sua intersecção com o cone, uma cónica AGC, cujo eixo AC forma com AS um ângulo em A, o qual designaremos por φ. Consideremos, ainda, F e F' os

focos da cónica considerada.

Se suposermos, ainda, que o plano secante, que tem a direcção da tangente invariável Ay, gira em torno desta recta, a cada nova posição sua corresponderam outra cónica e outros focos, situados sempre no plano ASB, sobre a recta móvel AC. Assim, o lugar geométrico produzido por todos estes focos constitui uma nova curva, designada por *focal de Quetelet*. Vamos agora encontrar a equação desta curva, assim como a sua forma.

Recordemos então que, representando por σ o ângulo ASK, e por d a distância AS, a curva resultante da intersecção entre a superfície cónica e o plano secante que passa por Ay, tem por equação,

$$y^2 \cos^2 \sigma = x \operatorname{sen} \varphi [d \operatorname{sen} 2\sigma - x \operatorname{sen}(\varphi + 2\sigma)].^6$$

Uma consequência do que foi referido anteriormente, é que o semi-eixo maior, m, da cónica e a distância, c, de qualquer um dos focos ao centro da mesma podem ser determinados através das seguintes fórmulas:

$$m = \frac{d \operatorname{sen} 2\sigma}{2 \operatorname{sen}(\varphi + 2\sigma)} \text{ e } c = \frac{d \operatorname{sen} \sigma \cos(\varphi + \sigma)}{\operatorname{sen}(\varphi + 2\sigma)}.$$

Logo, designado por r o raio vector do ponto F ao F', em coordenadas polares, que tem por origem o ponto A, por eixo fixo a recta AS, e por ângulo variável φ, a equação da focal será a seguinte:

$$r = \frac{d \operatorname{sen} 2\sigma}{2 \operatorname{sen}(\varphi + 2\sigma)} \mp \frac{d \operatorname{sen} \sigma \cos(\varphi + \sigma)}{\operatorname{sen}(\varphi + 2\sigma)} \quad .$$

A prova puramente analítica que esta equação corresponde a uma Estrofóide oblíqua é

---

6 Para provar esta afirmação, basta considerar na figura 8, $y = GR$, ou $y^2 = PR \times RQ$ e $x = AR$. Como dos triângulos APR, QCR e ASC resulta que,

$$PR = \frac{x \operatorname{sen} \varphi}{\cos \sigma}, \; RQ = (AC - x) \frac{\operatorname{sen}(\varphi + 2\sigma)}{\cos \sigma} \text{ e } AC = \frac{d \operatorname{sen} 2\sigma}{\operatorname{sen}(\varphi + 2\sigma)},$$

imediatamente se conclui que a equação é válida.

um procedimento muito extenso e moroso. Assim, aqui vai ser provado o que se pretende, com base em considerações geométricas.

Tracemos, então, pelo ponto A a recta AOB, perpendicular a SK, e pelo ponto O a recta OED, paralela a SB. Desta maneira, tendo em conta o triângulo AEO, pode-se concluir que,

$$\frac{AE}{AO} = \frac{\operatorname{sen} AOE}{\operatorname{sen} AEO} = \frac{\cos\sigma}{\operatorname{sen}(\varphi + 2\sigma)} \text{ e } \frac{EO}{AO} = \frac{\operatorname{sen} EAO}{\operatorname{sen} AEO} = \frac{\cos(\varphi + \sigma)}{\operatorname{sen}(\varphi + 2\sigma)}.$$

Fazendo $AO = d \operatorname{sen}\sigma$, vem

$$r = AE \mp EO \ .$$

Através desta propriedade característica de *Estrofóide* (números 25 e 31), deduz-se imediatamente que o *focal* é uma curva com aquele nome e com um *nó* em O. Esta curva é ainda tangente à geratriz do cone em A, secante a esta mesma geratriz em S e que admite como assimptota SB. Estas características podem ser observadas na figura 9, construída com base na expressão anterior de r, onde é fácil constatar a construção dos pontos N' e N'', M' e M'', L' e L'', etc, advertindo-se somente que

$$LO = LL' = LL'', \ MO = MM' = MM'' \text{ e } NO = NN' = NN''.$$

Designando por $2a$ o comprimento do diâmetro AB, a equação da *focal cónica* pode ser escrita como,

$$r = \frac{a\cos\sigma}{\operatorname{sen}(\varphi + 2\sigma)} \mp \frac{a\cos(\varphi + \sigma)}{\operatorname{sen}(\varphi + 2\sigma)} \ .$$

Quando $\sigma = 0$, ou quando o *cone* se transforma num *cilindro*, a equação anterior pode ser transformada noutra, correspondente à *Estrofóide recta*:

$$r = \frac{a}{\operatorname{sen}(\varphi)}(1 \mp \cos\varphi) \ .$$

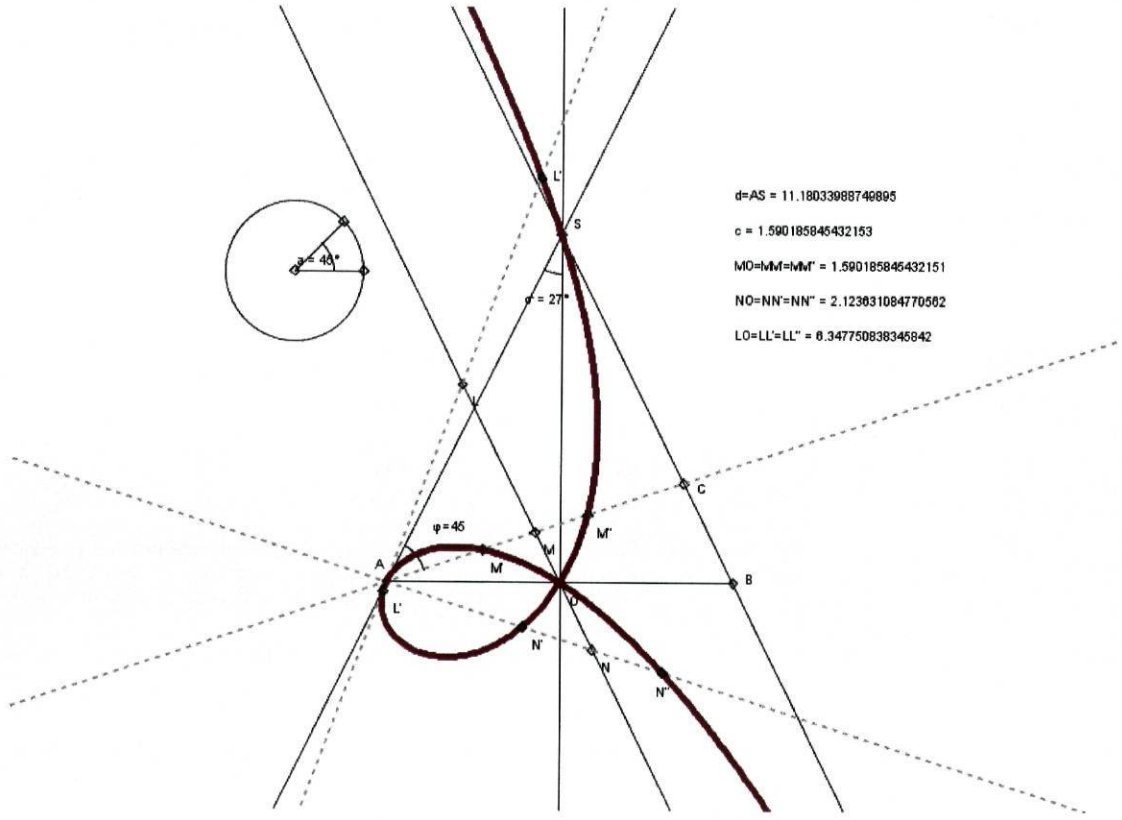


Figura 9: Estrofóide

Esta equação é discrepante em relação à primeira, a qual está escrita no número 24, apesar de ambas corresponderem à mesma curva. Isto justifica-se pelo facto de não se utilizar o mesmo sistema de coordenadas polares.

IV A Trissectriz de Maclaurin

34.

Dá-se o nome de *Trissectriz de Maclaurin* à curva cuja equação polar é

$$\rho = \frac{a}{\cos\theta} - 4a\cos\theta \ ,$$

e a cartesiana é

$$x(x^2 + y^2) = a(y^2 - 3x^2) \ .$$

Esta curva é assim denominada por ser uma das curva que se podem utilizar para resolver o famoso problema da trissecção do ângulo, e por ter sido considerada pela primeira vez pelo MACLAURIN no seu *Treatise of Fluxions* (p. 198 del t. I da tradução francesa de P. Pesenas). Posteriormente, tem sido objecto de vários trabalhos, do qual detacamos os seguintes:

- ⋆ SCHOUTE, *Sur la construction des courbes unicursales par points et par tangentes*, (*Archives Néerlandaises*, t. XX, 1885);
- ⋆ A. LIMA, *Sobre uma curva do terceiro grao*, (*Jornal de Sciencias Mathematicas*, t. V, p. 13);
- ⋆ LONGCHAMPS, *Essai sur la Géométrie de la Règle et de l'Equerre*, Paris, 1890, p. 102[7].

35.

Escrevendo a equação cartesiana do modo seguinte

$$y = \pm x\sqrt{\frac{3a + x}{a - x}} \ ,$$

[7]No documento original está escrito *Essai de la Géométrie de la Rêgle*, etc., Paris, 1890, p. 102.

vê-se facilmente que esta curva tem as seguintes caracaterísticas:

- ⋆ a sua forma é a indicada na figura 10;
- ⋆ simétrica em relação ao eixo das abcissas;
- ⋆ tem uma assimptota AB, cuja equação é $x = a$;
- ⋆ tem um *ponto duplo*, O, na origem das coordenadas, na qual as tangentes formam ângulos de $\pm 60^\circ$ com o eixo mencionado;
- ⋆ tem um vértice V, cuja distância à origem O, é determinada pela igualdade $x = -3a$;
- ⋆ tem dois pontos N e N_1, cujas coordenadas são

$$x = -a\sqrt{3} \text{ e } y = \pm a\sqrt{6\sqrt{3} - 9},$$

onde o valor absoluto de y é máximo.

36.

Da equação polar da Trissectriz deduz-se um procedimento fácil para cosntruir esta curva. De facto, o primeiro termo da expressão de ρ representa os raios vectores ρ_1 dos pontos da recta AB, tendo o ponto O como origem. O segundo membro representa os raios vectores ρ_2 da circunferência de raio $2a$, com centro no ponto C, cujas coordenadas são $(2a, 0)$. Logo, a curva proposta pode ser construída tomando, a partir do ponto O, sobre a recta variável MOM_2, um segmento OM igual a $OM_1 - OM_2$, ou $\rho_1 - \rho_2$. Isto, determina o ponto M, gerador da curva, conforma $OM_1 - OM_2$ varia de posição.

37.

Uma vez que $\rho = OM_1 - OM_2$, temos que

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \frac{dOM_1}{d\theta} - \frac{dOM_2}{d\theta} \quad .$$

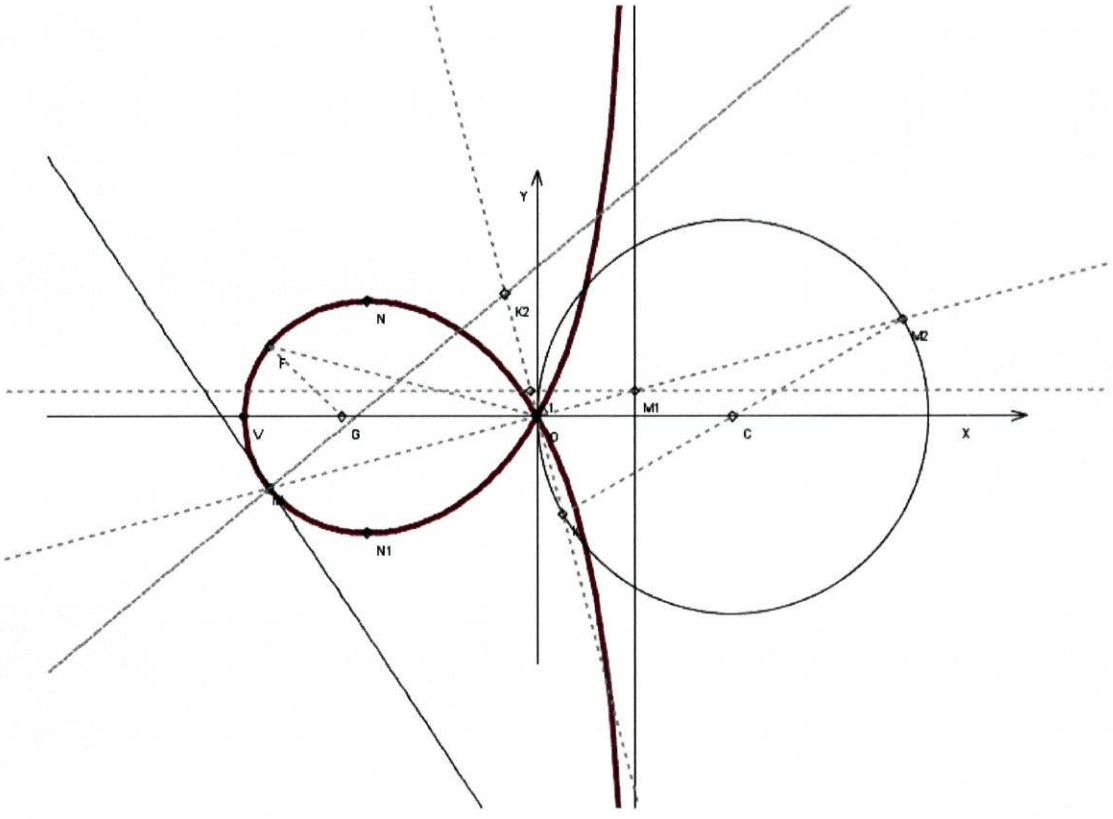


Figura 10: *Trissectriz de Maclaurin*

Desta maneira, a subnormal da curva no ponto $M(OK_2)$, é igual à diferença entre a subnormal polar da recta AB, no ponto $M_1(OK_1)$, e a da circunferência no ponto $M_2(-OK)$. Esta igualdade sugere um procedimento muito simples para traçar a normal à curva no ponto M, que é análogo ao exposto no número 4, relativamente à Cisóide.

38.

Na Trissectriz de Maclaurin, o raio da curvatura em qualquer ponto deduz-se a partir da seguinte fórmula:

$$R = \frac{a(1 + 8\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}}}{24\cos^4\theta} \quad ,$$

segundo a qual, a curva carece de pontos de inflexão à distância finita.

39.

Dado que

$$ds = \frac{a}{\cos^2\theta}\sqrt{1+8\cos^2\theta}d\theta = \frac{ad\theta}{\cos^2\theta\sqrt{1+8\cos^2\theta}} + \frac{8ad\theta}{\sqrt{1+8\cos^2\theta}} \ ,$$

para determinar o comprimento dos arcos da curva considerada, podemos utilizar a seguinte fórmula,

$$s = \frac{a}{3}\int_0^\theta \frac{d\theta}{\cos^2\theta\sqrt{1-\frac{8}{9}\operatorname{sen}^2\theta}} + \frac{8a}{3}\int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{1-\frac{8}{9}\operatorname{sen}^2\theta}} \ .$$

A primeira parcela desta soma representa o comprimento de um arco da hipérbole. Assim, aplicando a fórmula de Legendre, segundo a qual a rectificação da hipérbole depende dos integrais elípticos de 1ª e 2ª ordens, vem

$$\int_0^\theta \frac{d\theta}{\cos^2\theta\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\theta}} =$$

$$= \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\theta}} - \frac{1}{1-k^2}\int_0^\theta \sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\theta}d\theta + \frac{\operatorname{tg}\theta\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\theta}}{1-k^2} \ .$$

Fazendo $k^2 = \frac{8}{9}$, temos que

$$s = 3a\left[\int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{1-\frac{8}{9}\operatorname{sen}^2\theta}} - \int_0^\theta \sqrt{1-\frac{8}{9}\operatorname{sen}^2\theta}d\theta + \operatorname{tg}\theta\sqrt{1-\frac{8}{9}\operatorname{sen}^2\theta}\right]$$

Portanto, *o comprimento dos arcos da Trissectriz de Maclaurin depende de um integral elíptico de 1ª espécie e outro de 2ª espécie.*

40.

A área recorrida pelo raio vector da Trissectriz, quando θ varia entre θ_0 e θ_1, é determinada pela fórmula seguinte:

$$A = \frac{a^2}{3}[\operatorname{tg}\theta_1 + 4\operatorname{sen} 2\theta_1 - \operatorname{tg}\theta_0 - 4\operatorname{sen} 2\theta_0] \ .$$

Nesta fórmula é fácil constatar que cada um dos termos do segundo membro representa a área de um certo triângulo rectângulo.

Fazendo $\theta_0 = 0$ e $\theta_1 = \frac{\pi}{3}$, e multiplicando por 2, pode-se concluir que a área limitada pela parte fechada da curva é igual a $3a^2\sqrt{3}$. (MACLAURIN, l. c.)

41.

Já foi referido anteriormente que a Trissectriz tem este nome dada a sua importância na resolução do problema da trissecção de um ângulo. Vejamos como tal se sucede.

Seja $VG = a$ (figura 10). Fazendo $FOV = \alpha$ e $FGV = \omega$, obtemos

$$\frac{OF}{OG} = \frac{\operatorname{sen} FGO}{\operatorname{sen} GFO} \text{ ou } \frac{\rho}{2a} = \frac{\operatorname{sen}\omega}{\operatorname{sen}(\omega - \alpha)}.$$

Mas, como $\theta = \pi - \alpha$, a equação polar da curva pode escrever-se como sendo,

$$\rho = -\frac{a}{\cos\alpha} + 4a\cos\alpha \ .$$

Eliminando ρ nas duas últimas equações, resulta a seguinte igualdade,

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{a\operatorname{sen}^3\alpha - 3\operatorname{sen}\alpha}{3\cos\alpha - 4\cos^3\alpha} = \operatorname{tg} 3\alpha \ .$$

Através desta igualdade pode-se concluir que o ângulo FOV é a terça parte do ângulo FGV.

V As Cúbicas Circulares

Ampliação e resumo do que foi exposto até este momento.

42.

A *Cisóide* de Diocles e a Oblíqua, a *Estrofóide*, a *Concóide* de Sluse e a *Trissectriz* de Maclaurin, pertencem a uma classe de curvas, denominada por *Cúbicas Circulares*, que têm por equação comum a seguinte:

$$(ax+by)(x^2+y^2) = Px^2 + Qxy + Ry^2 + Tx + Uy + V, \tag{3.6}$$

as quais apresentam uma assimptota real, determinada pela equação

$$ax + by = \frac{Pb^2 - Qab + Ra^2}{a^2+b^2} \ ,$$

e duas assimptotas imaginárias com coeficientes iguais a $+i$ e $-i$, representando-se por i o radical $\sqrt{-1}$.

Pela equação anterior, observa-se facilmente que, trocando a direcção dos eixos coordenados, adoptando para novo eixo das ordenadas uma paralela à assimptota real, desaparecerá o termo que contém o produto by da equação (3.6), ficando esta equação reduzida à seguinte forma,

$$(x^2+y^2)x = P_1x^2 + Q_1xy + R_1y^2 + T_1x + U_1y + V_1. \tag{3.7}$$

Agora, considerando a origem das coordenadas no ponto $\left(0, \frac{1}{2}Q_1\right)$, a equação geral das Cúbicas Circulares poderá representar-se da seguinte forma:

$$(x^2+y^2)x = Ax^2 + A'y^2 + 2Cx + 2C'y + F. \tag{3.8}$$

Esta equação vai servir de auxílio ao estudo das curvas a que se refere.

43.

Comecemos por demonstrar que as Cúbicas Circulares são envolventes de círculos, cujos centros se situam, mediante os casos, sobre distintas parábolas.

Para isso fixemos a atenção no círculo cuja equação é a seguinte:

$$x^2 + y^2 = 2(\alpha x + \beta y + \gamma), \tag{3.9}$$

e encontremos as condições que este círculo deve satisfazer, para que seja bitangente a uma qualquer curva compreendida na equação (3.8).

Para resolver este problema adverte-se, em primiero lugar, que os pontos de intersecção do círculo com a curva, em particular agora considerada, são os mesmos, também de intersecção, do círculo com a cónica, a que corresponde a equação

$$2(\alpha x + \beta y + \gamma)x - (Ax^2 + A'y^2 + 2Cx + 2C'y + F) = 0. \tag{3.10}$$

Mas, para que o círculo resulte bitangente à cúbica (3.8), devem reunir-se em cada ponto de contacto dois pontos de intersecção do mesmo círculo com a cónica, e portanto, devem ser também bitangentes o círculo e a cónica de que se trata. Investiguemos, então, as condições necessárias para que tal se verifique.

Para isso, designemos por h um parâmetro arbitrário e tomemos a equação

(A)

$$2(\alpha x+\beta y+\gamma)x-(Ax^2+A'y^2+2Cx+2C'y+F)-h(x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y-2\gamma)=0\ ,$$

a qual representa todas as cónicas que passam pelos pontos de intersecção do círculo (3.9) com a cónica (3.10).

Para que as duas curvas, (3.9) e (3.10), sejam bitangentes é necessário que a equação (A) represente duas rectas coincidentes uma com a outra, ou que o primeiro membro da

equação se resolva num quadrado perfeito da forma $(Kx+Ly+M)^2$. Para que isto aconteça, necessita-se, também, que se verifique as seguintes condições:

$$(B)\begin{cases} K^2 = 2\alpha - A - h; \\ L^2 = -(A' + h); \\ M^2 = 2h\gamma - F; \\ KL = \beta; \\ KM = \gamma + h\alpha - C; \\ LM = h\beta - C'. \end{cases}$$

Em relação às expressões anteriores, as três primeiras servem para determinar os valores de K, L, e M. Da quarta e sexta expressões, por eliminação de K, L, e M, com o auxílio das três primeiras, e , da quinta, por eliminação das mesmas quantidades, valendo-se para isso da quarta e sexta expressões, em união com a segunda, obtêm-se as seguintes relações:

$$\begin{cases} \beta^2 = -(2\alpha - A - h)(A' + h), \\ (h\beta - C')^2 = -(A' + h)(2h\gamma - F), \\ \beta(h\beta - C') = -(A' + h)(\gamma + h\alpha - C), \end{cases} \tag{3.11}$$

como expressão das condições de bitangência do círculo e da cúbica considerada.

Da primeira e da segunda destas três equações, deduz-se imediatamente que,

$$\alpha = \frac{1}{2}(A + h) - \frac{\beta^2}{2(A' + h)} \tag{3.12}$$

e

$$\gamma = \frac{1}{2h}\left[F - \frac{(h\beta - C')^2}{A' + h}\right]. \tag{3.13}$$

Substituindo na última equação, os valores de α e γ agora encontrados, vem

$$-\frac{C'^2}{2h(A' + h)} + \frac{F}{2h} - C + \frac{h}{2}(A + h) = 0, \tag{3.14}$$

que é equivalente a,

$$h^2(A + h)(A' + h) + F(A' + h) - 2Ch(A' + h) - C'^2 = 0. \tag{3.15}$$

Desta equação, deduz-se em geral, quatro valores para h, os quais quando substituídos sucessivamente em (3.12) e (3.13), determinarão os valores de α e γ, que figuram na equação do círculo (3.9), para que este seja bitangente à cúbica considerada, permanecendo arbitrária a constante β.

Daqui, podemos concluir que, *existem, em geral, quatro séries de círculos, bitangentes à cúbica circular considerada, cada uma das quais é envolvente à mesma cúbica.*

Mais, como α e β representam as coordenadas do centro do círculo (3.9), a partir da equação (3.12) pode-se concluir que *os centros dos círculos de cada série estão situados sobre uma mesma parábola.*

A análise anterior pede modificação quando *zero* é raiz da equação (3.15), ou quando $FA' = C'^2$. Das equações (3.11) deduz então as seguintes:

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{1}{2}A - \dfrac{\beta^2}{2A'}; \\ \beta C' = A'(\gamma - C); \\ FA' = C'^2. \end{cases}$$

A primeira das quais determina o lugar geométrico dos centros de uma série de círculos, bitangentes à cúbica, a que estes mesmos círculos se referem, sendo a segunda o valor de γ.

Quando $-A'$ é raiz da equação (3.15), ou quando $C' = 0$, a análise precedente também pede modificação, deduzindo-se então das equações (B), os seguintes resultados:

$$\beta = 0 \text{ e } (2\alpha - A + A')(2A'\gamma + F) = -(\gamma - C - A'\alpha)^2.$$

O primeiro resultado expressa que, neste caso, os círculos bitangentes da série têm os seus centros sobre o eixo das abcissas, reduzindo-se a parábola a duas rectas, ambas coincidentes com o mesmo eixo. O segundo resultado determina o valor de γ, o qual depende dos raios dos círculos.

44.

Substituindo na equação (3.9), γ pelo seu valor, determinado na equação (3.13), a equação dos cículos bitangentes à cúbica considerada será a seguinte:

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y - \frac{1}{h}\left[F - \frac{(h\beta - C')^2}{A' + h}\right] = 0 \ ,$$

ou, tendo em conta a equação (3.12), vem

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y - \frac{2C'\beta}{A' + h} - \frac{F}{h} + \frac{C'^2}{h(A' + h)} - h[2\alpha - (A + h)] = 0, \qquad (3.16)$$

com a condição de h não ser igual a *zero*, nem igual a $-A'$.

Se nalgum caso h tomar o valor *zero*, a equação dos círculos bitangentes, deduz-se da equação (3.9),

$$x^2 + y^2 = 2(\alpha x + \beta y + \gamma) \ .$$

e da condição que se encontra na página anterior, $\beta C' = A'(\gamma - C)$, por eliminação de γ, sendo:

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y = 2C + \beta\frac{2C'}{A'}. \qquad (3.17)$$

Convém não esquecer que em todos os casos, nestas equações α e β representam quantidades, positivas ou negativas, que satisfazem a equação (3.12), e que h é uma raiz da equação (3.15).

45.

Todos os círculos (3.16) correspondentes a uma mesma raiz da equação (3.15), diferente de 0 e de $-A'$, intersectam ortogonalmente o círculo, determinado pela seguinte expressão:

$$X^2 + Y^2 + \frac{2C'Y}{A' + h} + 2hX + \frac{F}{h} - \frac{C'^2}{h(A' + h)} - h(A + h) = 0, \qquad (3.18)$$

sempre que não seja nulo o raio deste último círculo. Facilmente se comprova o que foi referido anteriormente, recorrendo às derivadas y' de y e Y' de Y e substituindo-as na expressão condicional $y'Y' + 1 = 0$, tendo em conta as equações (3.16) e (3.18).

Como a equação (3.18) não depende de α nem de β, conclui-se que o círculo a que se refere e representa é constante em relação a todos os círculos (3.16), cujos centros correspondem a uma das parábolas compreendidas na equação (3.12). Deduz-se do mesmo modo e com igual facilidade que os círculos (3.17) intersectam também ortogonalmente o círculo representado pela equação:

$$X^2 + Y^2 + \frac{2C'}{A'}Y + 2C = 0. \tag{3.19}$$

Logo, *todos os círculos bitangentes à cúbica circular (3.8), que têm os seus centros sobre a mesma parábola (3.12), intersectam ortogonalmente um círculo fixo.*

46.

Substituindo na equação

$$Kx + Ly + M = 0 \ ,$$

K, L, e M pelos seus valores, dados pelas segunda, quarta e sexta equações de (B), deduz a seguinte:

$$\beta x - (A' + h)y + h\beta - C' = 0 \ ,$$

a qual representa a recta, definida pelos dois pontos de contacto do círculo bitangente com a cúbica e correspondentes valores determinados de h e β.

A partir desta equação, vem ainda a seguinte proposição: *todas as rectas que passam pelos dois pontos de contacto dos círculos bitangentes à cúbica, e pertencentes à mesma série, intersectam-se num ponto fixo, que tem por coordenadas* $-h$ *e* $-\dfrac{C'}{A' + h}$.

47.

Transferindo a origem das coordenadas para o centro do círculo (3.18), para o qual é necessário que seja

$$x = x' - 2h \text{ e } y = y' - \frac{2C'}{A' + h},$$

assim, a equação (3.16) transforma-se na seguinte:

$$x'^2 + y'^2 - 4hx' - 2\alpha x - \frac{4C'}{A' + h}y' - 2\beta y' - \frac{F}{h} + \frac{C'}{h(A' + h)} + h\alpha + h(A + h) = 0 \ .$$

Aplicando ao círculo representado por esta equação a tranformação por *raios recíprocos*, vem que

$$x' = \frac{kx_1}{x_1^2 + y_1^2},\ y' = \frac{ky_1}{x_1^2 + y_1^2},\ k = -\frac{F}{h} + \frac{C'}{h(A' + h)} + h\alpha + h(A + h),$$

portanto,

$$x_1^2 + y_1^2 - 4hx_1 - 2\alpha x_1 - \frac{4C'}{A' + h}y_1 - 2\beta y_1 - \frac{F}{h} + \frac{C'}{h(A' + h)} + h\alpha + h(A + h) = 0 \ .$$

Esta equação coincide com aquela que se pretendia transformar.

Utilizando um cálculo análogo, aplicado às equações (3.17) e (3.19), chegaremos à mesma conclusão.

Logo, os círculos de que é envolvente a cúbica circular (3.8) não experimentam alteração alguma, nem tão pouco, em consequência, a mesma cúbica, quando esta se transforma por *raios recíprocos*, tomando por centros de transformação os centros *dos círculos representados pela equação (3.18), ou pelas equações (3.18) e (3.19), quado zero é raiz da equação (3.15).* Daqui resulta que as *Cúbicas Circulares* são *analagmáticas*, nome que se dá a todas as curvas que coincidem com alguma das suas transformadas por raios recíprocos.

48.

PLÜCKER designou por focos de uma curva, os pontos pelos quais se podem traçar tangentes a ela, cujos coeficientes angulares sejam i e $-i$. Quando uma dessas tangentes, ou as duas, tocam a curva no infinito, designa-se por *singular* o foco correspondente, aplicando-se o qualificativo de *ordinários* aos focos de onde partem tangentes, cujos pontos de contacto com a curva se encontram situados a distâncias finitas dos mesmos.

Na Geometria Analítica estabelecem-se regras gerais para determinar o número de focos de cada espécie. Este número depende da *classe* da curva, que, tratando-se das Cúbicas Circulares, é igual a *seis*, quando não possuem nenhum *ponto duplo*, *quatro* quando têm um ponto duplo e *três* quando têm um *ponto de retrocesso*. No primeiro caso, o número de focos ordinários é igual a dezasseis, quatro dos quais são reais. No segundo caso, o número de focos ordinários é igual a quatro, sendo dois reais. No último caso, existe um foco ordinário real.

Para demonstrar do modo menos complicado possível esta tão interessante proposição, recordemos (SALMON, *Higher Curves planes*, 3ª ed., número 67) que, em termos gerais, a *classe* n, de uma curva plana algébrica, se encontra determinada pela seguinte fórmula de PLÜCKER, cujo fundamento vai ser exposto como nota complementar desta obra:

$$n = m(m-1) - 2\delta - 3\nu \ ,$$

sendo, m o grau ou *ordem* da curva, δ é o número dos seus *nós* e ν é o número dos seus pontos de *retrocesso*. Em particular, nas cúbicas, m será igual a 3 e, portanto, $n = 6$, se a cúbica não possuir nenhum *ponto duplo* ($\delta = 0$ e $\nu = 0$), ou $n = 4$, se a cúbica possuir um ponto duplo ($\delta = 1$ e $\nu = 0$), ou ainda $n = 3$, se a cúbica possuir um *ponto de retrocesso* ($\delta = 0$ e $\nu = 1$).

Pode ainda verificar-se que, se se substituir na equação de uma curva C,

$$(\alpha)\ y = \frac{y_1}{x_1} \text{ e } x = \frac{1}{x_1},$$

esta curva transforma-se noutra, C', cujos *nós* e *pontos de retrocesso* são os pontos em que se transformam os de igual nome da primeira, e que será, portanto, da mesma *classe*.

Das equações (α), deduz-se que:

$$(\beta)\ \frac{dy}{dx} = y_1 - \frac{dy_1}{dx_1}x_1.$$

Segundo esta última equação, $\frac{dy_1}{dx_1}$ terá tantos valores no ponto (x_1, y_1), como tem $\frac{dy}{dx}$ no ponto (x, y), com a particularidade, ainda, de que se neste ponto a derivada $\frac{dy}{dx}$ admitir valores iguais, também $\frac{dy_1}{dx_1}$ admitirá no ponto (x_1, y_1).

De modo análogo, se na equação das rectas

$$Y = iX + A\ ,$$

fizermos,

$$(\gamma)\ Y = \frac{Y_1}{X_1} \text{ e } X = \frac{1}{X_1},$$

aquelas rectas vão transformar-se noutras, determinadas pela equação $Y_1 = i + AX_1$, e que passam pelo ponto $(0, i)$. Tendo em conta as relações (α), (β) e (γ), a equação da tangente à curva C, no ponto (x, y), que é a seguinte

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x)\ ,$$

transforma-se na equação

$$Y_1 - y_1 = \frac{dy_1}{dx_1}(X_1 - x_1)\ ,$$

da tangente à curva C' no ponto (x_1, y_1). Daqui podemos concluir que, as tangentes à primeira curva, cujo coeficiente angular é igual a i, transformam-se nas tangentes da segunda curva, dirigidas pelo mencionado ponto $(0, i)$. No entanto, o número de tangentes à curva C', que passam pelo ponto $(0, i)$ é igual a:

⋆ n quando o ponto $(0, i)$ não pertence à curva;

⋆ $n-1$ quando o ponto $(0, i)$ coincide com um ponto ordinário da curva;

⋆ $n-2$ quando o ponto $(0, i)$ coincide com um ponto duplo da curva;

⋆ etc.

Portanto, o número de tangentes a C, de coeficiente angular i, será também igual a n no primeiro caso, $n-1$ no segundo , $n-2$ no terceiro, etc.

Aplicando depois disto, a transformação (α) à equação das Cúbicas Circulares, vem

$$Fx_1^3 + A'y_1^2x_1 + 2C'y_1x_1^2 + 2Cx_1^2 + Ax_1 = 1 + y_1^2 \ .$$

Através desta equação, é possível observar-se que o ponto $(0, i)$ é um ponto ordinário da curva que representa.

Logo, o número de tangentes à cúbica circular, com coeficiente angular igual a i é $n-1$, sendo n, como no caso geral, a classe da cúbica considerada. No entanto, como uma destas tangentes deve coincidir com a assimptota, de coeficiente angular i, que, segundo já se viu no número 42, possui a curva, o número das mesmas, com coeficiente angular i, e pontos de contacto à distância finita, se reduz a $n-2$.

Da mesma maneira, conclui-se que $n-2$ é o número de tangentes à cúbica circular, com os pontos de contacto à distância finita, quando o coeficiente angular é $-i$.

As tangentes do primeiro grupo intersectam as tangentes do segundo grupo em $(n-2)^2$ pontos, os quais são precisamente os *focos ordinários* da *cúbica circular* a que n refere, sendo 16, 4 ou 1, conforme seja n igual a 6, 4 ou 3.

Dos focos a que nos referimos serão *reais* os que resultarem da intersecção de cada tangente do primeiro grupo com a sua *conjugada* do segundo grupo, sendo:

⋆ *quatro* quando a curva carece de *pontos duplos*;

⋆ *dois* quando a curva possui um *nó*;

⋆ *um* quando a curva apresenta um *ponto de retrocesso.*

Os focos *singulares* reais resultam da intersecção das *assimptotas conjugadas*, ou susceptíveis de permutação pela troca de i por $-i$. Mantendo referência à equação (3.8), estas assimptotas têm por equação,

$$y = \pm i \left[x - \frac{1}{2}(A - A') \right] \ ,$$

sendo definido o *foco singular real* pelas coordenadas,

$$\left[\frac{1}{2}(A - A'), 0 \right] \ .$$

49.

49Depois de tudo o que foi referido anteriormente, vamos determinar os *focos ordinários* das Cúbicas Circulares.

Se x_1 e y_1 representam as coordenadas de um desses focos, as rectas de equações,

$$y - y_1 = i(x - x_1) \text{ e } y - y_1 = -i(x - x_1),$$

serão tangentes à curva. Logo, o círculo imaginário

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = 0 \ ,$$

que compreende as duas, deve ser bitangente à mesma curva, em consequência, estará compreendido também entre os círculos representados pela equação (3.16), quando zero não é raiz da equação (3.15), ou pelas equações (3.16) e (3.17), quando zero é raiz.

No primeiro caso, e de modo análogo pode tratar-se o segundo caso, da identidade

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y - \frac{2C'\beta}{A' + h} - 2h\alpha - \frac{F}{h} + \frac{C'^2}{h(A' + h)} + h(A + h) = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 \ ,$$

deduz-se que

$$x_1 = \alpha \text{ e } y_1 = \beta,$$

e também,

$$x_1^2 + y_1^2 + \frac{2C'y_1}{A'+h} + 2hx_1 + \frac{F}{h} - \frac{C'^2}{h(A'+h)} - h(A+h) = 0 \ .$$

Comparando esta equação com a equação (3.18), conclui-se que os focos estão situados sobre as circunferências dos círculos representados pela última equação. Logo, *os pontos de intersecção de cada uma das parábolas representadas pela equação (3.12), com o círculo correspondente por (3.18), são os focos ordinários da curva.* Este teorema foi descoberto por HART, o qual pode ser visto em SALMON (*Higher planes curves*, 3ª ed., nº168 e 271).

50.

Anteriormente vimos que, quando $h = -A'$ é raiz da equação (3.15), uma das parábolas (3.12) reduz-se a duas rectas, ambas coincidentes com o eixo das abcissas, sobre a qual podem existir *focos* que passamos a determinar.

Adverte-se para isso que, se o ponto $(x_1, 0)$ fosse um foco da curva circular (3.8), cada recta determinada pela equação

$$y = \pm i(x - x_1) \ ,$$

devia representar uma tangente a esta curva, a qual intersectaria, em consequência, em dois pontos coincidentes. Como os valores de x nos pontos de intersecção destas rectas com a cúbica se encontram definidos pela equação

$$(2x_1 - A + A')x^2 - (x_1^2 + 2A'x_1 + C)x + A'x_1^2 - F = 0 \ ,$$

cujas raízes hão-de ser iguais, resulta a seguinte equação

$$x_1^4 - 4A'x_1^3 + (2C + 4AA')x_1^2 + (8F + 4CA')x_1 + C^2 + 4F(A' - A) = 0. \qquad (3.20)$$

Esta equação serve para determinar o valor de x_1 e mostra que sobre o eixo das abcissas existem neste caso, em regra geral, *quatro focos.*

51.

Tratemos agora especialmente das *Cúbicas Circulares unicursais.* Estas curvas, como já é sabido, possuem um *ponto duplo* que, tomado como a origem das coordenadas, permite reduzir sempre a equação (3.7) à forma

$$x(x^2 + y^2) = P_2x^2 + Q_2xy + R_2y^2. \tag{3.21}$$

Se depois considerarmos a origem das coordenadas como sendo o ponto $\left(0, \frac{1}{2}Q_2\right)$, a última equação reduz-se à forma (3.8), na qual

$$A = P_2;\ A' = R_2;\ 2C = \frac{1}{4}Q_2^2;\ 2C' = R_2Q_2 \text{ e } F = \frac{1}{4}R_2Q_2^2.$$

Aplicando isto à equação (3.15), na determinação de h, obtém-se a seguinte:

$$h^4 + h^3(P_2 + R_2) + h^2\left(P_2R_2 - \frac{1}{4}Q_2^2\right) = 0\ .$$

Daqui pode-se inferir que, neste caso, pelo menos duas das séries de círculos, consideradas no número 43, e de que a curva é envolvente, coincidem.

Adverte-se ainda que os círculos que passam pelo *ponto duplo* da curva e que são tangentes à mesma curva noutros pontos, têm *quatro* pontos comuns com a cúbica, reunidos em *dois.* Desta maneira, a análise do número 43 determina, não só os círculos bitangentes, mas também os tangentes, que passam pelo *ponto duplo.* Logo, a curva é, no caso de que se trata, envolvente de *três séries* de círculos, em geral, bitangentes quando não passam pelo *ponto duplo*, e nada mais do que tangentes quando passam por esse ponto.

Se a cúbica considerada tem um ponto de retrocesso, as *séries de círculos*, a que vimos a referir-nos, reduzem-se a *duas.* Pois derivando duas vezes, em relação a x, a

equação (3.21) e fazendo $x = 0$ e $y = 0$, os valores de y' na origem das coordenadas, são representados pela expressão,

$$y'_0 = \frac{-Q_2 \pm \sqrt{Q_2^2 - 4P_2R_2}}{2R_2} \quad .$$

Logo, as duas tangentes à curva neste ponto coincidem uma com a outra, e o ponto será de retrocesso, se

$$Q_2^2 = 4P_2R_2 \quad .$$

Neste caso, a equação que determina os valores de h terá três raízes iguais a *zero*.

52.

O método exposto no número 49 para determinar os focos das *Cúbicas Circulares*, é sempre aplicável às curva com este nome, sendo ou não *unicursais*. Mas, no caso de o serem, deduzem-se da sua aplicação soluções estranhas, ou *pseudofocos*, que é necessário excluir. Sendo assim, pode afirmar-se que o método citado, serve não só para determinar os focos propriamente ditos, como também os pontos pelos quais se pode traçar uma tangente à curva, cujo coeficiente seja igual a i ou $-i$ e, ainda outra recta que passe pelo *ponto duplo*, cujo coeficiente angular está respectivamente representado por $-i$ ou por i. De facto, esta últimas rectas têm dois pontos comuns com a curva, reunidos num, como os tangentes, cujos coeficientes angulares sejam $-i$ e i. Isto constitui o fundamento do método referido. Logo, se x' e y' representam as coordenadas do *ponto duplo*, o ponto (x_1, y_1), determinado pelo método referido, não será *foco* quando, sendo diferente de (x', y'), resulte situado sobre qualquer das rectas de equações

$$y - y' = \pm i(x - x') \quad .$$

que passam pelo *ponto duplo*, e têm por coeficientes angulares i e $-i$, mas que não podem ser tangentes à curva, porque se fossem teriam quatro pontos em comum com ela. O que é um absurdo!

Como pelo *ponto duplo* não se pode traçar rectas que sejam tangentes à curva num ponto diferentes deste, já que tais rectas teriam mais de três pontos comuns com a curva. conclui-se também que, aquele ponto só terá o nome de foco quando as tangentes, neste ponto, tenham por coeficientes i e $-i$.

53.

Para aplicar as doutrinas acabadas de expôr, consideremos, em primeiro lugar, a *Estrofóide recta*, que tem por equação (Número 23)

$$(x^2 + y^2)x = a(x^2 - y^2) \ .$$

A partir desta equação e tendo em conta a equação (3.8), deduz-se que,

$$A = a,\ A' = -a,\ C = 0,\ C' = 0 \text{ e } F = 0.$$

Substituindo estes valores na equação (3.15), vem que

$$h = 0,\ h = a \text{ e } h = -a.$$

À primeira solução corresponde a parábola

$$\alpha = \frac{1}{2}a + \frac{\beta^2}{2a} \ ,$$

e os círculos, dados pelas fórmulas (3.17) e (3.19),

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 \text{ e } X^2 + Y^2 = 0.$$

A curva, neste caso, é envolvente aos círculos, cujos centros coincidem com a parábola, representados pela primeira destas equações. Nenhum foco corresponde à intersecção da

parábola com o círculo $X^2 + Y^2 = 0$, porque este círculo equivale a duas rectas $Y = \pm iX$, que passam pelo ponto duplo da curva.

À solução $h = -a$ corresponde a parábola

$$\alpha = \frac{\beta^2}{4a} \quad ,$$

e, os círculos

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + 2a\alpha = 0 \text{ e } X^2 + Y^2 - 2aX = 0.$$

A curva, como acontece no caso anterior, é envolvente aos círculos representados pela primeira destas duas equações, cujos centros descrevem a parábola. Verifica-se, ainda, que esta parábola e o círculo a que corresponde a última equação intersectam-se nos pontos $(0,0)$ e $(-2a, \pm 2ai\sqrt{2})$. O primeiro destes dois pontos é *duplo* e não pode ser *foco*, sendo os outros dois focos imaginários da curva.

À solução $h = a$ corresponde a recta $\beta = 0$, o que faz com que os focos se situem sobre a linha de equação

$$x_1^4 + 4ax_1^3 - 4a^2x_1^2 = 0 \quad .$$

Da qual se deduz que as coordenadas dos focos reais da Estrofóide são

$$(-2a(1 \pm \sqrt{2}), 0) \quad .$$

Como segunda aplicação, consideremos a *Cisóide de Diocles*,

$$(x^2 + y^2)x = 2ay^2 \quad .$$

A partir da equação (3.15), pode-se dizer que os valores de h são:

$$h = 0 \text{ e } h = -2a.$$

Ao primeiro corresponde a parábola

$$\alpha = -\frac{\beta^2}{4a} \ ,$$

e os círculos

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 \text{ e } X^2 + Y^2 = 0$$

sendo a cúbica, agora considerada, envolvente do sistema de círculos pela primeira destas duas equações representadas.

Da intersecção da parábola com o círculo $X^2 + Y^2 = 0$, não resultam *focos*, porque o círculo equivale a duas rectas $Y = \pm iX$, que passam pela origem.

Por outro lado, se $h = -2a$, temos que $\beta = 0$ e os focos resultam determinados pela equação,

$$x_1^4 - 8ax_1^3 = 0 \ ,$$

segundo a qual, a curva possui um foco no ponto $(8a, 0)$.

54.

Continuando o estudo das *Cúbicas Circulares unicursais*, demonstremos agora que estas curvas pertencem à classe das *Cisóides* (número 17), e que, portanto, podem obter-se por intermédio da construção indicada no mesmo número, para obter as cisóides em geral, substituindo a cónica por um simples círculo.

Representemos por C (figura 11) o centro da circunferência que tem por equação

$$x^2 + y^2 + (R_2 - P_2)x - Q_2 y = 0 \ ,$$

e seja, KL uma recta fixa, definida pela equação $x = -R_2$, e OD outra recta, móvel, que passa pelo ponto O, origem das coordenadas. Se considerarmos ainda o ponto M, de modo

que OM seja igual a ED, então o lugar geométrico das diferentes posições de M, quando a recta OD varia, girando em redor de O, será a cúbica representada pela equação (3.21).

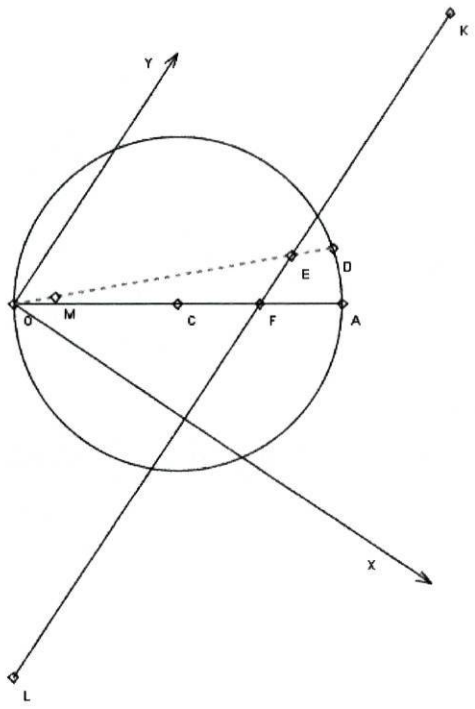


Figura 11: Cúbicas Circulares unicursais

De facto, se $\rho_1 = OD$, $\rho_2 = OE$ e $\rho = OM$ e representando por θ o ângulo de MO com o eixo das abcissas, vem

$$\rho = \rho_1 - \rho_2,\ \rho_1 + (R_2 - P_2)\cos\theta - Q_2 \operatorname{sen}\theta = 0 \text{ e } \rho_2 \cos\theta = -R_2.$$

Eliminando ρ_1 e ρ_2 nestas equações e tendo em conta que, $x = \rho\cos\theta$ e $y = \rho\operatorname{sen}\theta$, obtém-se a equação (3.21) das Cúbicas Circulares unicursais.

A forma da curva resultante depende da posição da recta fixa KL. Repetindo, a título de exemplo, o já exposto nos termos gerais a tratar das Cisóides no número 17, advertimos

qu se aquela recta intersecta a circunferência ODA, a curva possuirá um ponto duplo em O, e as tangentes à curva neste ponto passaram pelos pontos de intersecção de KL com a circunferência. A qual será uma *Estrofóide*, se KL passar pelo centro C da circunferência, ou semelhante à Estrofóide, na forma, em qualquer outro caso. Se a recta KL é tangente à circunferência, as intersecções de KL coincidem, e a curva possui um *ponto de retrocesso* em O, que é o caso da Cisóide. Mas se a recta KL não intersectar a circunferência nem for tangente, O será, certamente, um ponto da curva, sendo imaginária em redor deste ponto. Assim, o ponto O será então um *ponto isolado* da curva resultante.

Adverte-se ainda que, dado que

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \frac{dOD}{d\theta} - \frac{dOE}{d\theta} \quad ,$$

o método explicado anteriormente para traçar as tangentes à Cisóide, à Estrofóide e à Trissectriz de Maclaurin é aplicável a todas as *Cúbicas Circulares unicursais.*

55.

A rectificação das curvas que estamos a considerar, depende geralmente de integrais elípticos, como veremos em seguida.

Fazendo $y = tx$, na equação (3.21) da curva, vem

$$x = \frac{F(t)}{t^2+1} \text{ e } y = \frac{tF(t)}{t^2+1},$$

sendo $F(t) = P_2 + Q_2 t + R_2 t^2$.

Daqui deduz-se que,

$$\frac{ds^2}{dt^2} = \frac{dx^2+dy^2}{dt^2} = \frac{[F(t)]^2 - 2tF(t)F'(t) + (1+t^2)[F'(t)]^2}{(t^2+1)^2} \quad .$$

Na expressão de ds entra a raiz de um polinómio de *quarto grau* relativamente a t e,

portanto, o valor de s depende dos integrais elípticos, que no caso da Estrofóide recta e no caso da Trissectriz de Maclaurin foram já reduzidos a integrais normais de Legendre.

No caso particular do numerador de $\frac{ds^2}{dt^2}$ admitir como factor um polinómio de grau dois, relativamente a t, que seja quadrado perfeito, obtém-se s através de funções elementares, conforme foi visto no caso da Cisóide.

56.

Terminaremos assim, mencionando dois trabalhos interessantes relativamente às cúbicas unicursais circulares. No trabalho de LONGCHAMPS, apresentado à *Association Française pour l'Avancement des Sciences*, nos Congressos de Grenoble (1885), demonstra-se que *as tangentes à circunferência DAO, no ponto D, e à cúbica no ponto M, intersectam a recta KL, em dois pontos equidistantes de E.* No trabalho de Nancy (1886) é proposto um método para construir os pontos de inflexão das cúbicas unicursais circulares rectas. No número 5 foi considerado o caso particular do teorema anterior correspondente à Cisóide.

Capítulo 4

Cúbicas Notáveis - Continuação

I O Folium de Descartes

57.

Dá-se o nome de *Folium*, ou *folha de Descartes*, à curva cuja equação, em coordenadas cartesianas, é

$$x^3 - 3axy + y^3 = 0. \tag{4.1}$$

Descarte foi o primeiro geómetra a falar nesta curva, em duas cartas enviadas ao Padre Mersenne, a 18 de Janeiro e a 23 de Agosto de 1638 (*Oeuvres, ed. V. Cousin*, 1824, t. VII, p.11). Na primeira carta, Descartes desafiava Fermat a encontrar as tangentes a esta curva, utilizando o seu método, a segunda carta continha a exposição da solução do problema proposto.

Outros geómetras dedicaram-se ao estudo desta curva, tais como:

⋆ ROBERVAL, que lhe deu o nome de *galand* (antigo vocábulo francês, sinónimo de *nó*

de fita[1]) ou *flor de jasmim*;

⋆ FERMAT, numa carta também dirigida ao Padre Mersenne, a qual foi publicada no *Journal de Mathématiques Spéciales*, 1883, p.16, determinou as tangentes por dois métodos distintos;

⋆ JUAN BERNOULLI (*Opera omnia*, t. III, p. 403), determinou a posição da sua assimptota e os valores das áreas;

⋆ Marqués de L'HÔPITAL, numa carta a Huygens, em 1693, a propósito do último destes problemas;

⋆ MACLAURIN, no seu *Treatise of Fluxions* (p. 198 do volume I da tradução francesa de P. Pesenas), comparou-a com a trissectriz, considerada no número 34;

⋆ etc.

58.

Como a equação do *Folium* não se altera quando se troca x por y e y por x, resulta que a bissectriz do ângulo dos eixos coordenados é um eixo de simetria da curva. Convém, pois, efectuar a troca daqueles eixos, tomando a bissectriz como novo eixo das abcissas. Para o qual servem as fórmulas,

$$x = \frac{X}{\sqrt{2}} - \frac{Y}{\sqrt{2}}$$

e

$$y = \frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{2}}$$

que transformam a primeira equação da curva na seguinte:

$$Y^2 = \frac{X^2(3a - \sqrt{2}X)}{3(a + \sqrt{2}X)} \quad .$$

[1]No documento original está escrito *noeud* de *ruband*.

Considerando esta equação, facilmente se conclui que a curva apresenta as seguintes características:

- ⋆ tem a forma indicada na figura 12;
- ⋆ um *ponto duplo* em O;
- ⋆ uma assimptota que é a recta DL de equação $X = OD = -\frac{a}{\sqrt{2}}$;
- ⋆ a distância do vértice A à origem é igual a $\frac{3a}{\sqrt{2}}$.

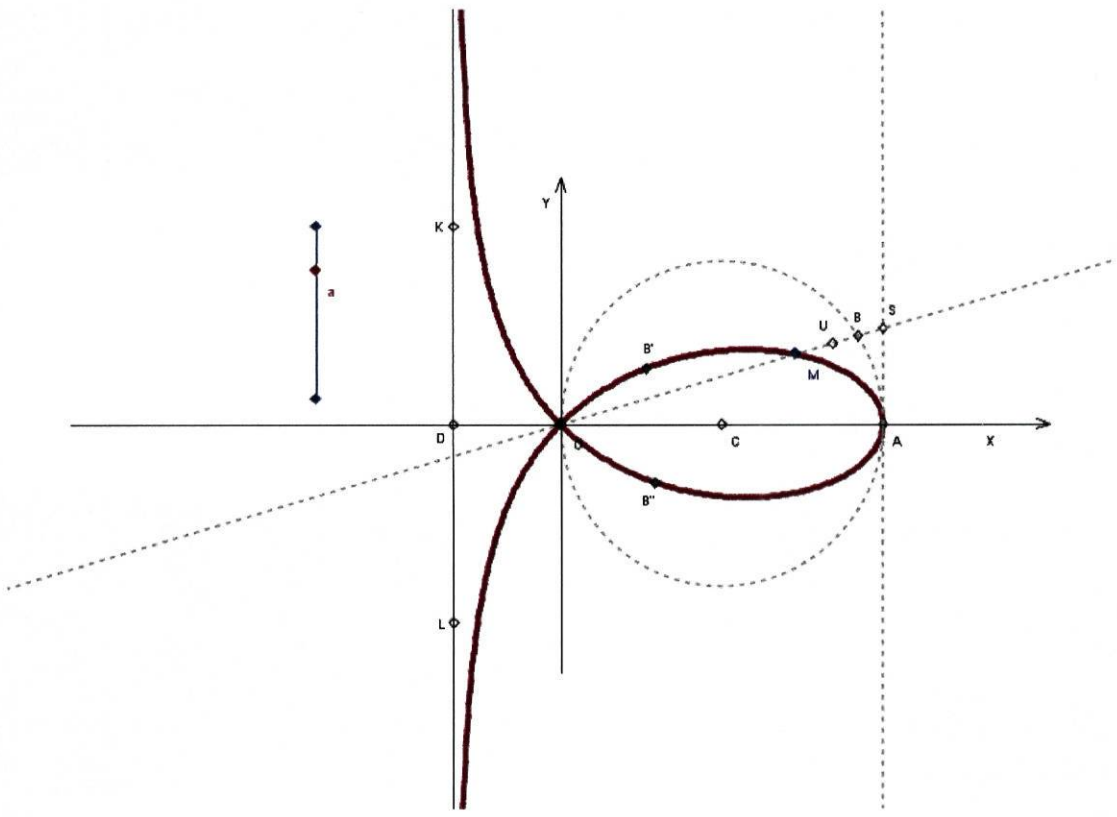


Figura 12: Folium de Descartes

Fazendo, agora, $Y' = 0$ na equação

$$2YY'(a + \sqrt{2}X) + \sqrt{2}Y^2 = X(2a - \sqrt{2}X) \ ,$$

e seguidamente, eliminando Y através da equação da curva, resulta

$$X = \pm a\sqrt{\frac{3}{2}} \ .$$

Ao primeiro destes valores de X correspondem os pontos B' e B'', cuja ordenada Y é um máximo absoluto. Ao segundo valor de X correspodem valores imaginários de Y.

Se na equação anterior substituirmos Y pelo seu valor em X e fazendo depois $X = 0$, resultará $Y' = \pm 1$. Isto prova que as tangentes à curva, no ponto duplo O, formam ângulos de 45° e -45° com o eixo da mesma curva, coincidindo, portanto, com os eixos das coordenadas referidos no número 57.

Roverbal foi o primeiro geómetra que procurou definir a forma do Folium de Descartes. Mas, conforme adverte P. TANNERY (*Intermédiare des Mathématiciens*, t. IV, p. 126), nem ele nem Descartes deixaram de ver que a curva se estende até ao infinito. Esta circunstância foi notada também por JUAN BERNOULLI, não sabemos se antes dos outros geómetras, o qual determinou ainda a sua assimptota real.

59.

A equação do *Folium*, em coordenadas polares, é a seguinte:

$$\rho = \frac{3a(2\cos^2\theta - 1)}{\sqrt{2}(3\cos\theta - 2\cos^3\theta)} \ .$$

De maneira a obter-se um procedimento simples para construir a curva, podemos escrever a equação anterior do modo seguinte:

$$\rho = \frac{\dfrac{b}{\cos\theta}\left(2b\cos\theta - \dfrac{b}{\cos\theta}\right)}{\dfrac{3b}{\cos\theta} - 2b\cos\theta} \ ,$$

donde vem que $b = \dfrac{3a}{\sqrt{2}}$.

Tracemos uma circunferência de centro C (figura 12) e raio igual a $\frac{1}{2}b$. De seguida, tracemos uma tangente a esta circunferência no ponto A e uma recta variável OS. Assim, tomando sobre esta recta o segmento BU, igual a BS, e representando por θ o ângulo SOA, pode-se concluir que,

$$OS = \frac{b}{\cos\theta} \text{ e } OB = b\cos\theta.$$

Em consequência,

$$OU = OB - (OS - OB) = 2b\cos\theta - \frac{b}{\cos\theta} \ ,$$

$$OS + US = OS + 2(OS - OB) = \frac{3b}{\cos\theta} - 2b\cos\theta \ .$$

Logo,

$$\rho = \frac{OS \cdot OU}{OS + US} \ .$$

Para construir o ponto M da curva, contido na recta OS, basta construir uma quarta proporcional às três rectas OS, OU e $OS + US$.

60.

A cada *Folium de Descartes* corresponde uma *Trissectriz de Maclaurin*, cujas ordenadas possuem com as do Folium a relação constante de $\sqrt{3}$ para 1. (MACLAURIN, l. c.)

De facto, se na equação (número 35) da *Trissectriz*,

$$y^2 = X^2\frac{3a_1 + X}{a_1 - X} \ ,$$

fizermos

$$a_1 = -\frac{a}{\sqrt{2}} \ ,$$

deduz-se que

$$y^2 = \frac{X^2(3a - \sqrt{2}X)}{a + \sqrt{2}X} \quad .$$

Mais, comparando esta equação com a da *Folium*, anteriormente considerada, conclui-se também que

$$\frac{Y^2}{y^2} = \frac{1}{3} \text{ ou } y = \sqrt{3}Y.$$

O Folium e a Trissectriz, que acabamos de considerar, possuem a mesma assimptota e o mesmo eixo, sendo ainda a subnormal da segunda o triplo da subnormal da primeira.

61.

O Folium de Descartes é uma curva *unicursal*. Fazendo na equação (4.1) $y = tx$, obtêm-se as fórmulas que dão os valores de x e y em função do parâmetro t:

$$x = \frac{3at}{1 + t^3} \text{ e } y = \frac{3at^2}{1 + t^3}.$$

A partir destas fórmulas vê-se, como no número 32, que os valores de t, nos pontos em que a recta, cuja equação é

$$ux + vy = 1 \quad ,$$

intersecta o Folium, satisfazem a condição

$$t_1 t_2 t_3 = -1 \quad .$$

Se a recta passa por um ponto de inflexão da curva, neste ponto teremos $t_1 = t_2 = t_3$. Em consequência, $t_1^3 + 1 = 0$. Através desta equação determina-se três valores distintos para t_1, aos quais correspondem três pontos de inflexão: um real e dois imaginários, todos situados no infinito.

62.

Para determinar a área limitada por um arco do Folium, pelo eixo da curva e pelas paralelas ao eixo das ordenadas que passam pelos pontos cujas abcissas são X_0 e X_1, utilizaremos a expressão

$$A = \int_{X_0}^{X_1} X \sqrt{\frac{3a - \sqrt{2}X}{a + \sqrt{2}X}} dX \quad .$$

A partir desta expressão, fazendo

$$\frac{3a - \sqrt{2}X}{a + \sqrt{2}X} = z \quad ,$$

e integrando, resulta que

$$A = -\frac{4a^2}{\sqrt{3}} \left[\frac{z_1^3}{(1 + z_1^2)^2} - \frac{z_0^3}{(1 + z_0^2)^2} \right] \quad ,$$

representando por z_0 e z_1 os valores de z nos pontos cujas abcissas são X_0 e X_1.

Se $X_0 = 0$ e $X_1 = \dfrac{3a}{\sqrt{2}}$ e, portanto, $z_0 = \sqrt{3}$ e $z_1 = 0$, multiplicando o resultado obtido por 2, determinar-se-á o valor da área A_1, limitada pela parte fechada da curva,

$$A_1 = \frac{3a^2}{2} \quad .$$

Ainda, fazendo $X_0 = 0$ e $X_1 = -\dfrac{a}{\sqrt{2}}$, logo $z_0 = \sqrt{3}$ e $z_1 = \infty$ e multiplicando o resultado obtido por 2, observar-se-á que o valor da área compreendida entre a curva e a sua assimptota é também igual a $\dfrac{3a^2}{2}$.

63.

Partindo da equação (4.1), obtém-se também facilmente a área B, limitada por um arco do Folium, por uma das tangentes à curva, no ponto duplo O e por duas paralelas à outra.

Fazendo para isso, $y = \dfrac{x^2}{u^2}$ na equação (4.1), vem que

$$x^3 + u^6 = 3au^4 \text{ e } 2u^5du + x^2dx = 4au^3du.$$

pelo que,

$$\int ydx = \int \frac{x^2}{u^2}dx = \int (4audu - 2u^3du) = 2au^2 - \frac{1}{2}u^4 = 2\frac{ax^2}{y} - \frac{1}{2}\frac{x^4}{y^2} = \frac{1}{2}xy + \frac{1}{2}a\frac{x^2}{y} \quad .$$

Assim, representando por x_0 e y_0 e x_1 e y_1 as coordenadas das extremidades do arco considerado, resulta que

$$B = \frac{1}{2}(x_1y_1 - x_0y_0) + \frac{1}{2}a\left(\frac{x_1^2}{y_1} - \frac{x_0^2}{y_0}\right) \quad .$$

Este resultado foi obtido por JUAN BERNOULLI (l. c.) e por Marqués de L'HÔPITAL (l. c.).

II A Anguinea de Newton

64.

Newton, na sua *Enumeratio linearum tertii ordinis*, publicada em 1701, deu o nome de *Anguinea*, ou *serpentina*, à curva que tem por equação

$$x^2y + aby - a^2x = 0 \ ,$$

curva que constitui uma das setenta e duas espécies de cúbicas que o grande geómetra enumera neste seu célebre trabalho.

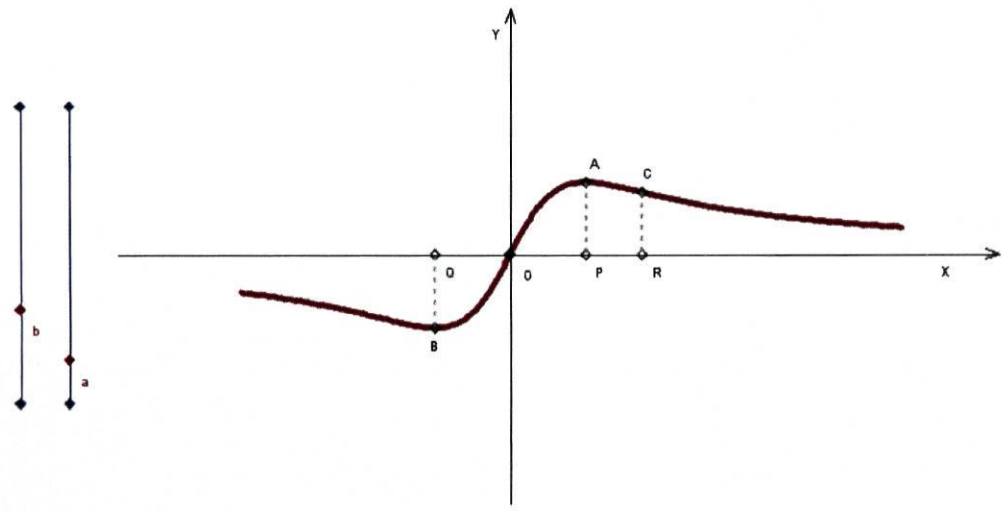


Figura 13: A Anguinea de Newton, quando a e b possuem o mesmo sinal

Para a estudarmos, vamos supôr primeiramente que a e b possuem o mesmo sinal.

Escrevendo então a equação da seguinte maneira,

$$y = \frac{a^2 x}{x^2 + ab} \ ,$$

e tendo, também, em conta a igualdade

$$y' = \frac{a^2(ab - x^2)}{(x^2 + ab)^2} \ ,$$

facilmente se conclui que a curva (figura 13) apresenta as seguintes características:

- ⋆ passa pela origem das coordenadas;
- ⋆ existe indefinidamente no sentido das abcissas positivas e negativas;
- ⋆ O é um centro;
- ⋆ as suas ordenadas adquirem um valor *máximo* e outro *mínimo* nos pontos A e B, correspondentes às abcissas $x = \sqrt{ab}$ e $x = -\sqrt{ab}$;
- ⋆ o eixo das abcissas é uma sua assimptota.

A igualdade

$$y'' = \frac{2a^2(x^2 - 3ab)x}{(x^2 + ab)^3}$$

mostra que são pontos de inflexão da curva a origem O das coordenadas e aqueles outros cujas abcissas são iguais a $+\sqrt{3ab}$ e $-\sqrt{3ab}$. No primeiro $y' = \frac{-a}{8b}$, e a tangente à curva é paralela à hipotenusa do triângulo rectângulo que tem por vértices a origem das coordenadas e os pontos $(0, a)$ e $(8b, 0)$.

65.

Da equação da tangente à curva no ponto (x, y),

$$Y - y = \frac{a^2(ab - x^2)}{(x^2 + ab)^2}(X - x) \ ,$$

resulta, fazendo $X = 0$,

$$Y = \frac{2y^2x}{a^2} \quad .$$

A partir desta fórmula pode-se construir o ponto em que a tangente intersecta o eixo das ordenadas, e consequentemente a tangente.

66.

A expressão do raio da curvatura é

$$R = \frac{N^3a^4x^2}{2(x^2 - 3ab)y^6} \quad ,$$

representando por N o comprimento da normal à curva no ponto (x, y).

67.

A área A, limitada pela curva, pelo eixo das abcissas e por uma recta paralela ao eixo das ordenadas, tem por expressão

$$A = \int_0^x y dx = \frac{a^2}{2} \log \frac{x^2 + ab}{ab} \quad .$$

Em particular, a área A_1, limitada pela curva, pelo eixo das abcissas e por uma paralela ao eixo das ordenadas, traçada pelo ponto onde y é máximo, ou $x = \sqrt{ab}$ é representada pela seguinte fórmula,

$$A_1 = \frac{a^2}{2} \log 2 \quad .$$

Mais, a área A_2 limitada pela curva, pelo eixo das abcissas e por uma paralela ao eixo das ordenadas que passa pelo ponto de inflexão, é definida pela expressão,

$$A_2 = a^2 \log 2 \quad .$$

Daqui pode-se concluir que, a área de OAP é igual à área de $ACRP$.

68.

No caso em que a e b tenham sinais contrários, a curva terá uma forma diferente da considerada, porque y tende para ∞, quando x tende para $\sqrt{-ab}$ ou para $-\sqrt{-ab}$, e as rectas dadas pelas equações $x = \sqrt{-ab}$ e $x = -\sqrt{-ab}$ são assimptotas da curva. Mais, como y é negativo no intervalo quando x varia entre 0 e $\sqrt{-ab}$ e entre $-\sqrt{-ab}$ a ∞, e positivo em todos os outros intervalos, conclui-se sem dificuldade que a curva possui a forma indicada na figura 14, na qual $OP = \sqrt{-ab}$ e $OQ = -\sqrt{-ab}$, com dois pontos de inflexão imaginários e um real em O.

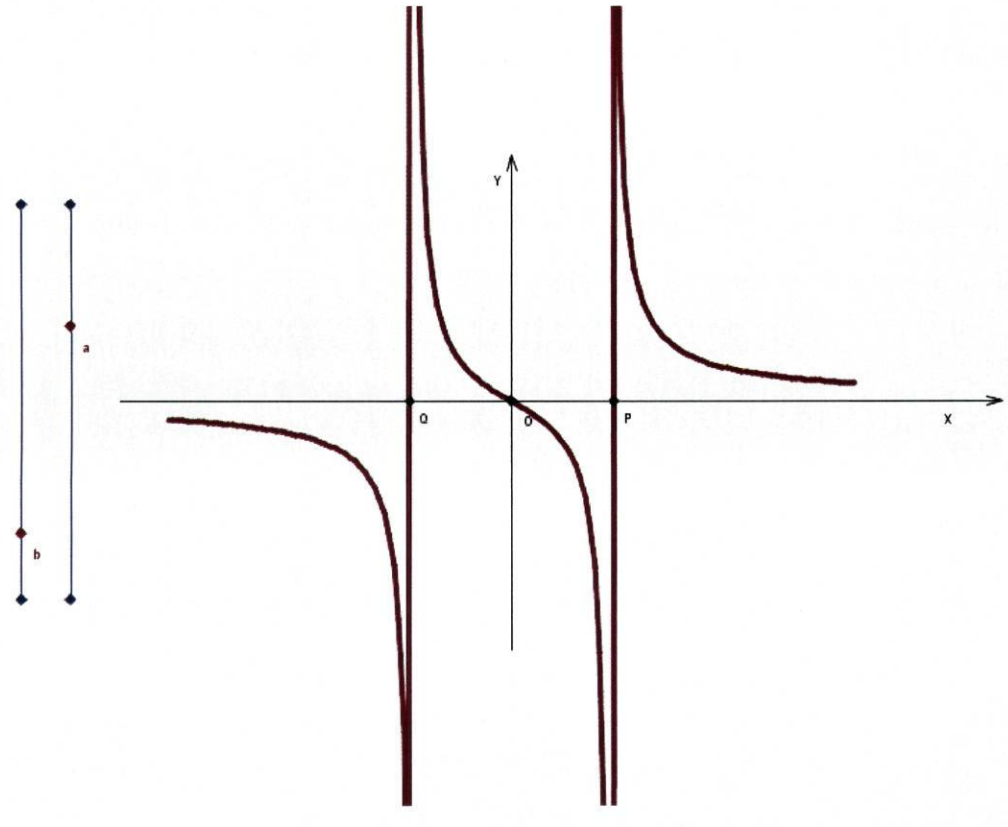


Figura 14: A Anguinea de Newton, quando a e b têm sinais contrários

69.

Quando a e b têm o mesmo sinal, a Anguinea encontra-se relacionada com o círculo cuja equação é

$$X^2 + Y^2 - \beta X = 0 \ ,$$

ou

$$\left(X - \frac{\beta}{2}\right)^2 + Y^2 = \frac{\beta^2}{4} \ ,$$

mediante uma relação algébrica muito simples.

Supondo que $\alpha^2 = ab$ e $a^2 = \alpha\beta$, a equação da Anguinea terá a seguinte expressão:

$$y = \frac{\alpha\beta x}{x^2 + \alpha^2} \ .$$

Na qual se transforma a equação do círculo, quando substituirmos os valores de X e Y pelas seguintes expressões:

$$X = \frac{xy}{\alpha} \quad \text{e} \quad Y = y \tag{4.2}$$

Logo, a cada ponto (X, Y) da circunferência considerada corresponde outro ponto (x, y) da Anguinea, ligado com o primeiro por intermédio das relações anteriores.

Mais, representando por KL (figura 15) uma recta, dada pela equação $y = OL = \alpha$, por M um ponto qualquer da circunferência considerada, e por mP e mB outras duas rectas, paralelas aos eixos das coordenadas, dos triângulos POM e LOB, deduz-se que

$$\frac{OP}{OL} = \frac{PM}{LB} = \frac{PM}{Pm} \text{ ou } \frac{Y}{\alpha} = \frac{X}{Pm}$$

Logo, as coordenadas $x = Pm$ e $y = OP = Y$, do ponto m satisfazem as relações (4.2), e, consequentemente, m será o ponto da Anguinea correspondente ao ponto M

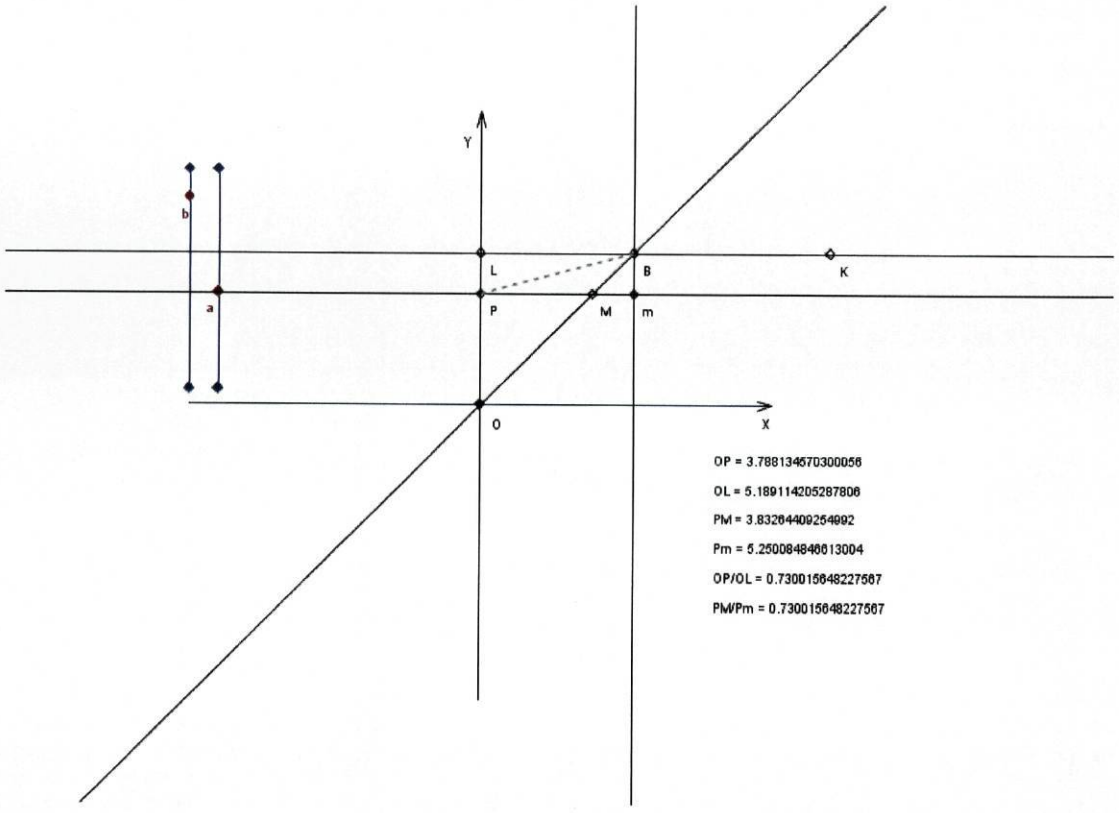


Figura 15: A Anguinea de Newton

da circunferência. Daqui depreende-se um procedimento muito simples para construir a primeira destas duas curvas.

Mais, todavia, a equação da tangente à circunferência no ponto M tem a seguinte expressão

$$X_1 - X = \frac{dX}{dy}(Y_1 - y) \text{ ou } \frac{dX}{dy} = \frac{X_1 - X}{Y_1 - y},$$

e a equação da tangente à Anguinea no ponto m tem esta outra expressão

$$X_1 - x = \frac{dx}{dy}(Y_1 - y) \text{ ou } \frac{dx}{dy} = \frac{X_1 - x}{Y_1 - y}.$$

Como da relação $X = \frac{xy}{\alpha}$ se deduz que

$$\alpha \frac{dX}{dy} = x + y \frac{dx}{dy} \ ,$$

por eliminação de X e dos coeficientes diferenciais $\frac{dX}{dy}$ e $\frac{dx}{dy}$ entre estas várias equações, resulta no que se segue,

$$\frac{y - \alpha}{xy} X_1 + \frac{Y_1}{y} = 1 \ .$$

Esta equação deve satisfazer as coordenadas de X_1 e Y_1 do ponto de intersecção das duas tangentes consideradas, a tangente à circunferência no ponto M e a tangente à Anguinea no ponto m. Como a equação da recta que passa por $P(0, y)$ e por $B(x, \alpha)$ tem por equação precisamente a que se acaba de determinar, conclui-se que as duas tangentes se intersectam sobre esta recta. Portanto, unindo o ponto m de intersecção da tangente à circunferência com a recta PB, obtém-se a tangente à Anguinea.

III A Tridente de Newton

70.

NEWTON fez também referência a esta curva na sua já mencionada *Enumeratio linearum tertii ordinis*, a qual tem a seguinte equação:

$$y = \frac{x^3 + Bx^2 + Cx + D}{mx} \quad .$$

Para determinar a forma da *Tridente*, suponhamos primeiramente que m e D são positivas. Neste caso, y tende para ∞, quando x tende para 0, passando por valores positivos e, y tende para $-\infty$, quando x tende para 0, passando por valores negativos. Logo, a curva tem por assimptota o eixo das ordenadas, e em relação a esta assimptota, a disposição indicada nas figuras 16 e 17.

Quando x tende para $\pm\infty$, y tende para $+\infty$. Logo, os dois ramos da curva extendem-se indefinidamente, no sentido das ordenadas positivas e das abcissas *positivas*, no ramo da direita e, no sentido das ordenadas positivas e das abcissas *negativas*, no ramo da esquerda.

As rectas paralelas ao eixo das abcissas, que têm por equação $y = k$, intersectam a curva *num ponto* ou em *três pontos*. Um desses pontos encontra-se sempre situado no ramo esquerdo da *Tridente*, e os outros dois, simultaneamente, no mesmo ramo, ou no posto da direita. A equação que determina as abcissas destes pontos,

$$x^3 + Bx^2 + (C - mk)x + D = 0 \quad ,$$

tem, de facto, $-D$ como um produto *negativo* das suas três raízes, ou duas dessas imaginárias e uma real negativa, ou as três negativas, ou duas positivas e uma negativa.

De modo análogo, as abcissas dos pontos da curva, onde y é *máximo* ou *mínimo*, dependem da equação

$$y' = \frac{2x^3 + Bx^2 - D}{mx^2} = 0 \text{ ou } 2x^3 + Bx^2 - D = 0.$$

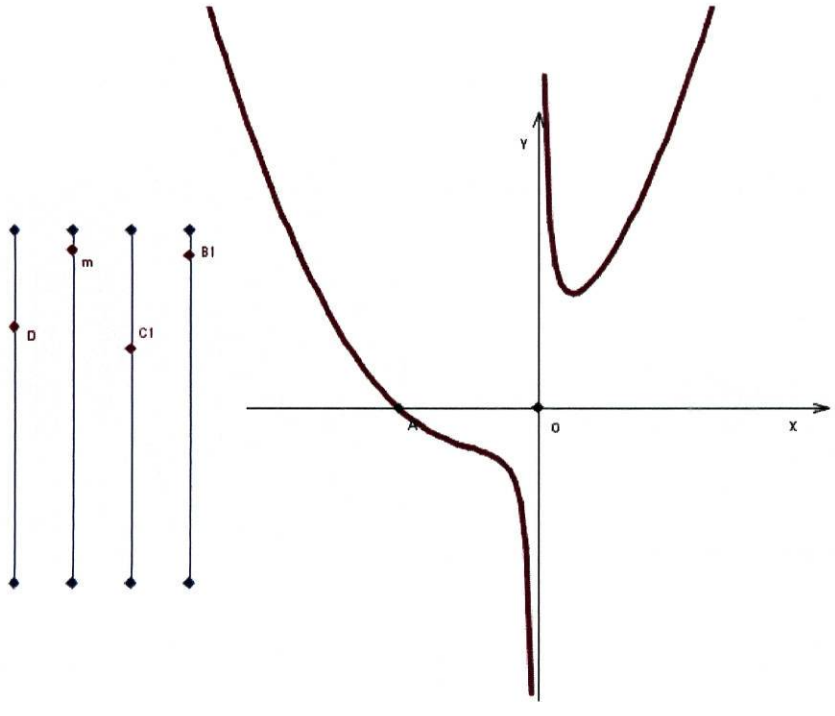


Figura 16: Tridente de Newton, quando B e C são valores positivos

A qual, por ser *positivo* o produto das suas três raízes, e nula a soma dos produtos das mesmas, tomadas duas a duas, ou tem duas raízes imaginárias e uma positiva, ou duas negativas e positiva a restante. Logo, um daqueles pontos pertence sempre ao ramo colocada à direita do eixo das ordenadas e, os outros, quando existem, pertencem ambos ao ramo situado à esquerda do eixo.

Uma vez que,

$$y'' = \frac{2(x^3 + D)}{mx^3} \quad ,$$

a curva tem um ponto de inflexão real, cujas ordenadas são

$$x = -\sqrt[3]{D} \text{ e } y = \frac{C - B\sqrt[3]{D}}{m}.$$

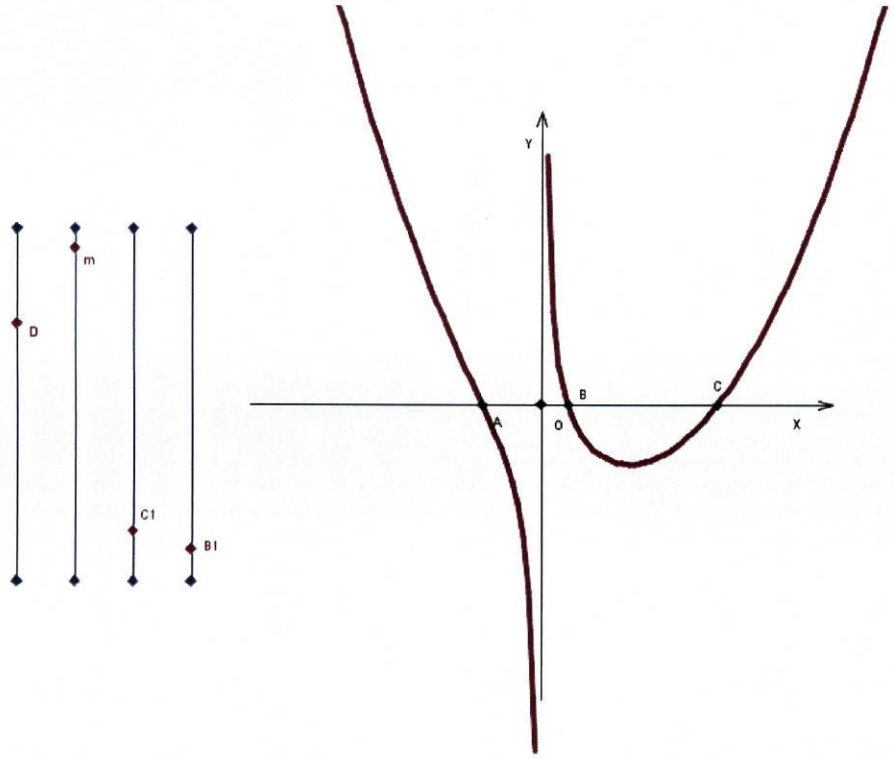


Figura 17: Tridente de Newton, quando B e C são valores negativos

Até agora, suposemos que m e D eram ambas quantidades positivas. Mas, se uma ou ambas as quantidades são negativas, é fácil de ver que a curva mantem a forma variando somente a sua posição em relação aos eixos coordenados.

71.

Para concluir, vai ser exposto o procedimento efectuado por LONGCHAMPS (*Essai sur la Géométrie de la Règle et de l'Equerre*, Paris, 1890, página 110[2]) para construir facilmente a curva de que se trata.

Em primeiro lugar, adverte-se que a equação da Tridente pode ser escrita como sendo,

$$y - \frac{C}{m} = \frac{x^3 + Bx^2 + D}{mx} \quad .$$

A qual, mediante uma simples troca da origem das coordenadas, se reduz à seguinte,

$$y = \frac{x^3 + Bx^2 + D}{mx} \quad .$$

Feito isto, tracemos a parábola (figura 18), cuja equação é

$$X^2 = mY \quad ,$$

e, no plano da curva assinalemos um ponto B, que tenha por coordenadas a e b, sendo

$$a = -B \text{ e } b = \frac{D}{ma}.$$

Tracemos depois a recta AB, paralela ao eixo das abcissas, a recta AC, de posição variável, a paralela ao eixo das ordenadas CM e a recta BM, paralela à recta AC. O lugar geométrico descrito pelo ponto M, quando AC varia de posição, será a curva pretendida.

De facto, representando por x' e y' as coordenadas do ponto C, e por x e y as coordenadas do ponto M e, expressando, ainda, que este ponto M corresponde à recta BM, e C à parábola, vem que

[2]No documento original está escrito *Essai sur la Géométrie de la Règle*, etc., Paris, 1890, página 110.

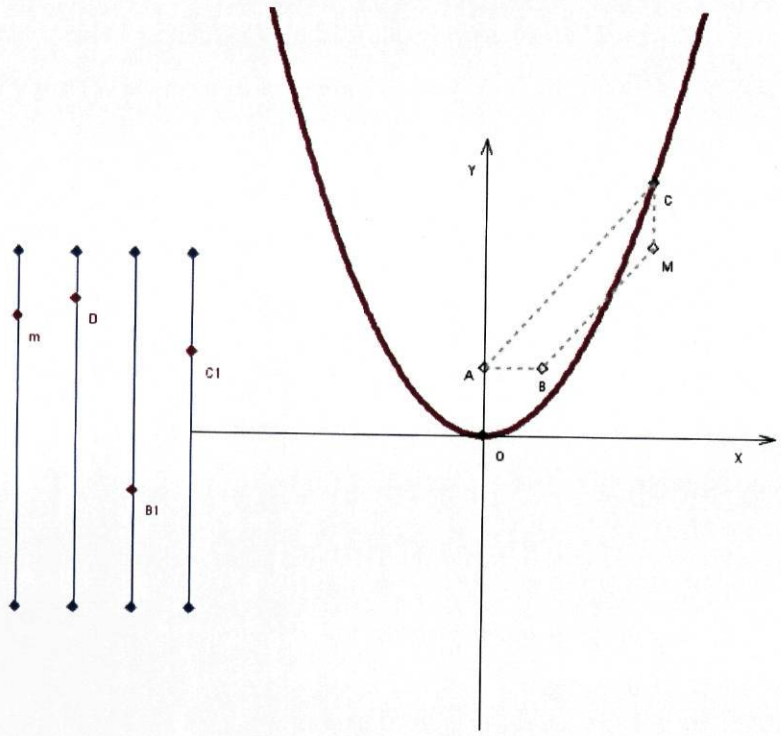


Figura 18: Procedimento efectuado por Longchamps

$$x = x',\ x'^2 = my' \text{ e } y - b = \frac{y' - b}{x'}(x - a).$$

Donde, por eliminação de x' e y', se determina a equação da *Tridente*

$$y = \frac{x^3 - ax^2 + abm}{mx} = \frac{x^3 + Bx^2 + Cx + D}{mx}\ .$$

IV A Concóide Parabólica de Descartes

72.

Consideremos uma parábola (figura 19) BAC, cujo vértice A se movimenta sobre uma recta fixa (o mesmo eixo da parábola) que tomaremos por eixo das abcissas. Consideremos ainda um ponto fixo D, situado no eixo das ordenadas e outro ponto E, móvel com a parábola, de tal maneira que a distância AE se conserve constante. A recta DE, qualquer que seja a sua posição variável, intersectará a parábola em dois pontos M e N, geradores de uma curva a que DESCARTES, no seu trabalho *Geometria*, publicado em 1637, onde considerou e mostrou o papel que representa na construção das curvas do 5.º e 6.º grau, deu o nome de *Concóide Parabólica*, por analogia da sua generalização com um dos modos de generalização da *Concóide de Nicomedes*.

73.

Para determinar a equação da Concóide Parabólica, façamos

$$OA = b,\ AE = h \text{ e } OD = -c.$$

e sejam ainda

$$y^2 = a(x - b) \text{ e } Y = \frac{c}{b+h}X - c.$$

as equações da parábola e da recta DE.

A condição para que a parábola e a recta se intersectem é a seguinte

$$y = \frac{c}{b+h}x - c \ ,$$

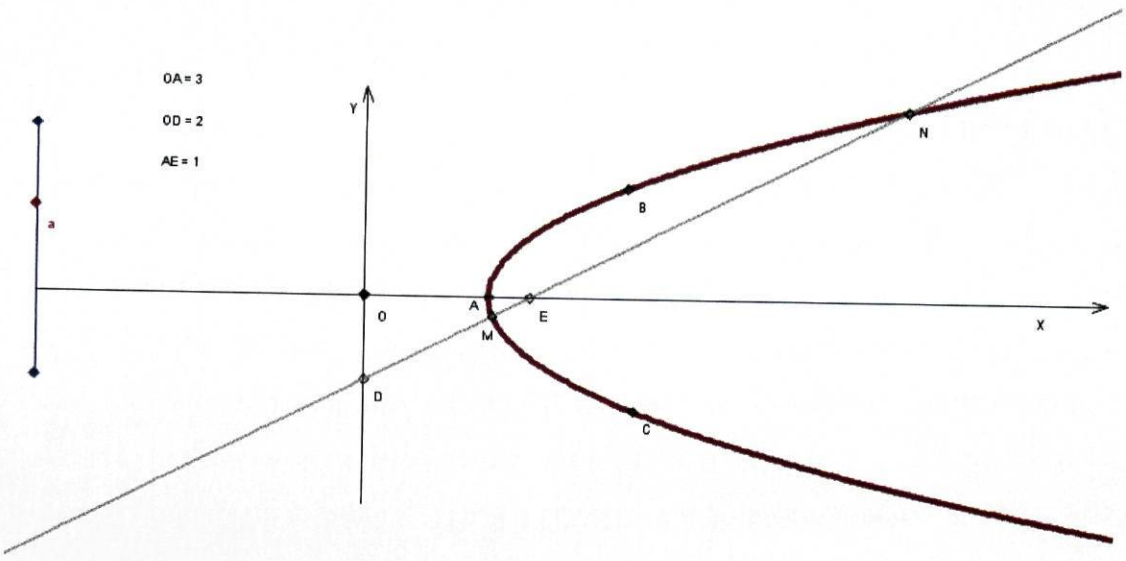


Figura 19: Concóide Parabólica de Descartes

e a equação da curva considerada se obterá por eliminação do parâmetro variável, b, nesta equação e na da parábola. Donde se obtém,

$$x = \frac{(y+c)(y^2 - ah)}{ay} \quad .$$

A partir desta expressão facilmente se deduz que a *Concóide Parabólica*:

- ⋆ é uma *Tridente*, como os representados nas figuras 16 e 17, ainda que numa situação diferente, em relação aos eixos coordenados;
- ⋆ intersecta o eixo das ordenadas nos pontos $(0, -c)$, $(0, \sqrt{ah})$ e $(0, -\sqrt{ah})$;
- ⋆ tem uma assimptota que é o eixo das abcissas;

⋆ possui uma *inflexão* no ponto real, correspondente à ordenada $\sqrt[3]{ach}$.

74.

Alguns autores, como, por exemplo, A. CONTE (V. *Nouvelles Annales de Math.* 1894, página 414), designam também com o nome da curva que se está a tratar, aquela que se obtém traçando um conjunto de rectas divergentes, que passam pelo *foco* de uma parábola qualquer, assinalando sobre todas elas, a partir das suas intersecções com a mesma parábola, segmentos de comprimento constante.

Mas a curva assim formada, cuja equação *polar* é

$$\rho = \frac{a}{2(1-\cos\theta)} + k \ ,$$

e a *cartesiana*

$$4(x^2+y^2+kx)^2 = (a+2k+2x)^2(x^2+y^2) \ ,$$

não coincide com a estudada pelo célebre fundador da *Geometria Analítica*, e a qual aplicou MONTUCLA o nome de *Concóide Parabólica* de DESCARTES, no seu *Histoire des Mathématiques* (t. II, p. 340) e CHASLES simplesmente a de parábola de DESCARTES, no seu *Aperçu Historique* (2ª ed., p. 60).

V A Cúbica de Agnesi

75.

Tracemos uma recta fixa OA (figura 20), uma circunferência de raio igual a $\frac{1}{2}a$, com centro C sobre esta recta e uma perpendicular AK à mesma recta. De seguida, tracemos a recta variável ON e as paralelas aos eixos coordenados, Nm e Mm. Quando, passando sempre por O, a recta ON varia, o ponto m descreve uma curva, cuja equação é a seguinte:

$$\frac{mP}{MP} = \frac{a}{OP} \text{ ou } \frac{y}{\sqrt{x(a-x)}} = \frac{a}{x}$$

ou

$$xy^2 = a^2(a-x) \tag{4.3}$$

representando por x e y as coordenadas OP e mP.

Esta curva denomina-se por *Cúbica de Agnesi*, por ter sido estudada por esta ilustre mulher, com o nome de *versiera*[3] no seu trabalho intitulado por *Instituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana*, Milano, 1748 (t. I, páginas 380-381 e 391-393). Todavia, segundo advertiu AUBRY (*Journal des Mathématiques spéciales*, 1896, p. 180), a mesma curva já tinha sido considerada anteriormente por FERMAT (*Oeuvres*, t. I, Paris, 1891, p. 279; t. III, 1896, p. 233), o qual determinou a sua área, por JAMES GREGORY (*Geometriæpars universalis.* Padua, 1668), por BARROW (*Lectiones geometricæ.* Londres, 1669), etc.

[3]De *vertere*, ou *versura*, em latim segundo CANTOR. PEIRCE, denomina em inglês a mesma curva por *The Witch of Agnesi.*

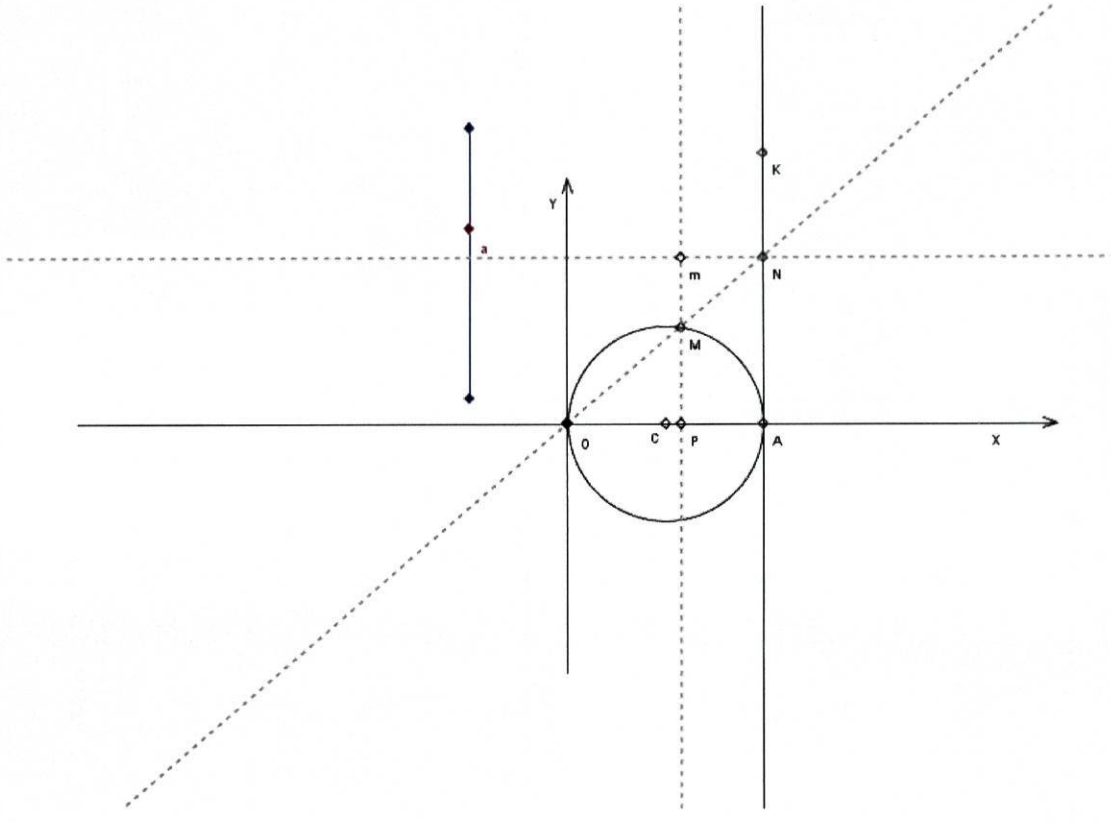


Figura 20: Cúbica de Agnesi

76.

Por intermédio da equação da curva, resulta

$$y' = -\frac{a^2 + y^2}{2xy} = -\frac{a^3}{2x^2 y} \ ,$$

o que permite verificar que a curva tem a forma indicada na figura 21, a linha $A_1 A A_1$. De facto, o eixo das ordenadas é assimptota da curva e o eixo das abcissas é um eixo de simetria. No ponto A, cuja distância a O é igual a a, a tangente à curva é perpendicular ao eixo das abcissas. Da equação $y'' = 0$, pode concluir-se que a curva tem dois pontos de inflexão, determinados pela abcissa comum $\frac{3}{4}a$, e pelas ordenadas correspondentes a cada uma destas abcissas, $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}a$.

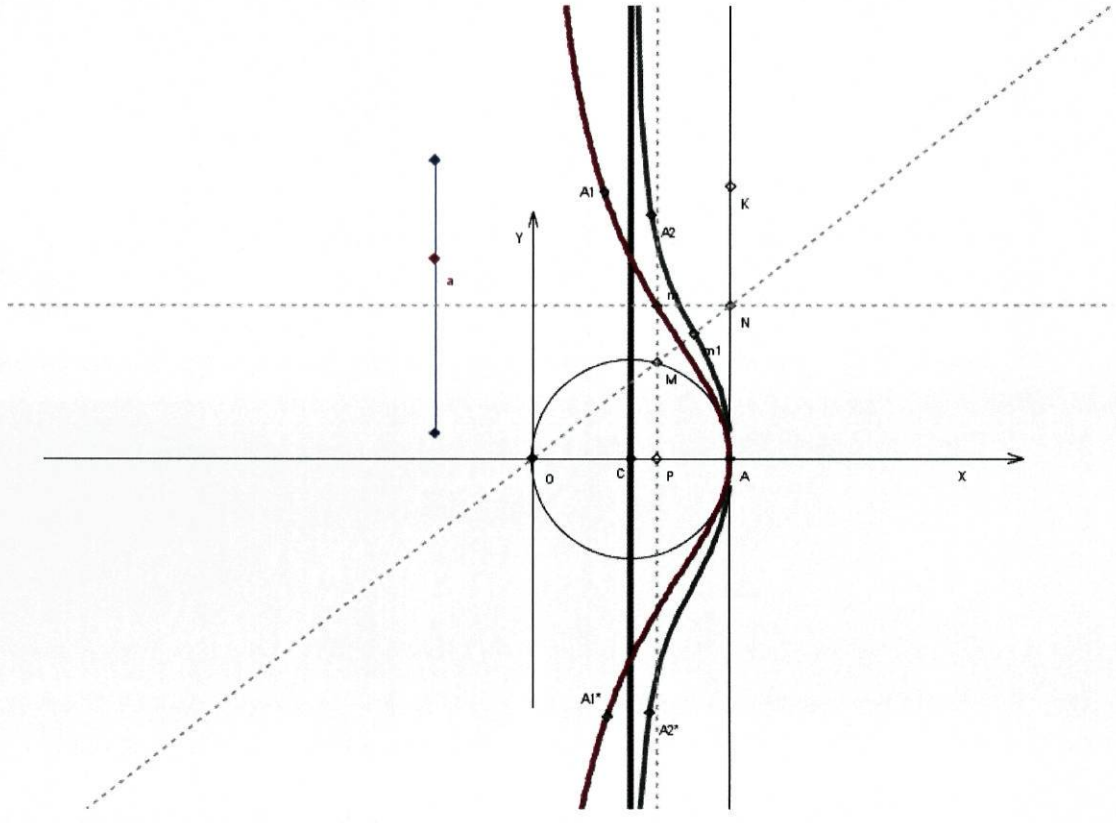


Figura 21: Cúbica de Agnesi

77.

A subnormal num ponto (x, y) da Cúbica de Agnesi é expressa pela fórmula,

$$S_n = yy' = -\frac{a^3}{2x^2} \ ,$$

da qual se deduz, por um procedimento muito simples, a construção da normal nesse mesmo ponto.

78.

Represente-se por y_1 a ordenada do ponto M e por y a ordenada do ponto m (figura 20), correspondente a M. A equação da tangente à circunferência no ponto M é

$$Y - y_1 = \frac{dy_1}{dx}(X - x) \ ,$$

e a equação da tangente à cúbica no ponto m é a seguinte,

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x) \ .$$

Temos ainda que $ay_1 = xy$, e portanto,

$$ady_1 = xdy + ydx \ .$$

Assim, eliminando y_1, dy_1 e dy na última equação, com auxílio das três anteriores, obtém-se a seguinte equação:

$$\frac{x-a}{xy}Y + \frac{X}{x} = 1 \ .$$

Esta equação deve satisfazer as coordenadas dos pontos de intersecção das duas tangentes consideradas. Como esta equação representa, quando se consideram X e Y como variáveis, uma recta que passa pelos pontos N e P, cujas coordenadas são (a, y) e $(x, 0)$, o ponto de intersecção das duas tangentes encontrar-se-á sobre a recta PN. Para construir a tangente à Cúbica de Agnesi no ponto m, basta, traçar a tangente à circunferência no ponto M e unir o ponto em que esta tangente intersecta a recta PN com o ponto m. (GODEFROY)

79.

A área limitada pelo arco da *Cúbica de Agnesi*, pelo eixo das ordenadas e por duas paralelas ao eixo das abcissas, que passam pelos pontos cujas ordenadas sejam y_0 e y_1, está

determinada pela fórmula

$$A = a^3 \int_{y_0}^{y_1} \frac{dy}{y^2 + a^2} = a^2 \left[\operatorname{arctg} \frac{y_1}{a} - \operatorname{arctg} \frac{y_0}{a} \right] \ .$$

Para determinar a área A_1, compreendida entre a curva e a sua assimptota, basta supôr que $y_1 = +\infty$ e $y_0 = -\infty$. Sendo assim, da fórmula geral anterior deduz-se que

$$A_1 = \pi a^2 \ ,$$

que é *igual a quatro vezes a área do círculo director da mesma curva.*

80.

O volume do sólido engendrado pela *Cúbica de Agnesi*, quando a curva gira em redor da assimptota, ou do eixo das ordenadas, determina-se pela fórmula:

$$V = \pi \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 dx = \frac{\pi^2 a^3}{2} \ .$$

81.

Como inseparáveis da curva que acabamos de examinar, são outras duas.

Uma destas curvas, denominada também por *Cúbica de Agnesi*, apesar desta Geómetra não lhe ter dado importância, tem por equação

$$xy^2 = a^2(2a - x) \ ,$$

no entanto, foi mais tarde considerada por LONGCHAMPS no seu trabalho *Essai sur la Géométrie de la Règle et de l'Equerre* (Paris, 1890).

A outra é definida pela equação

$$(2x - a)(x^2 + y^2) = ax^2 \ ,$$

e está representada na figura 21 pela linha A_2AA_2, e foi descoberta por PEANO, que a denominou por *visiera*, no seu trabalho intitulado por *Applicazioni Geometriche del Calcolo Infinitesimale* (Torino, 1887)[4].

GINO LORIA, que chamou a atenções dos geómetras sobre as relações de ambas as curvas com a Cúbica de AGNESI, aplicou à primeira o nome de *pseudoversiera*, sendo de advertir que esta já tinha sido mencionada por LEIBNITZ nas suas cartas a HUYGENS, no ano de 1673, conforme é referido por AUBRY (*Journal de Mathématiques spéciales*, 1896, p.180). GINO LORIA refere ainda que a *visiera* de PEANO é, simplesmente, uma *Concóide de* SLUSE (número 18), que tem um *ponto isolado* na origem das coordenadas, tem por assimptota a recta que passa pelo centro C do círculo director, e é perpendicular ao eixo Ox das abcissas. Por outro lado, esta curva resulta engendrada pelo ponto médio do segmento MN (figura 20), conforme m engendra a *versiera*, assim como a *pseudoversiera* de LONGCHAMPS resulta também da mesma versiera, dobrando somente as abcissas dos pontos, sem alterar o valor das ordenadas.

82.

A *pseudoversiera* encontra-se bastante relacionada com a *Cisóide de* DIOCLES.

Sejam (figura 22), m um ponto da pseudoversiera, KL uma recta fixa, cuja distância à origem das coordenadas e ao ponto fixo C, vamos supôr que é igual a a, MC uma recta variável que gira em torno de C e mM e mB duas rectas paralelas aos eixos. Supondo que $mP = y$, $MP = Y$, $OP = x$, vem

$$\frac{y}{Y} = \frac{a}{2a - x} \quad .$$

Tendo em conta esta igualdade, a equação da pseudoversiera transforma-se na seguinte:

$$Y^2 = \frac{(2a - x)^3}{x} \quad ,$$

[4]No documento original está escrito *Applicazioni del Calcolo Infinitesimale* (Torino, 1897, p. 7).

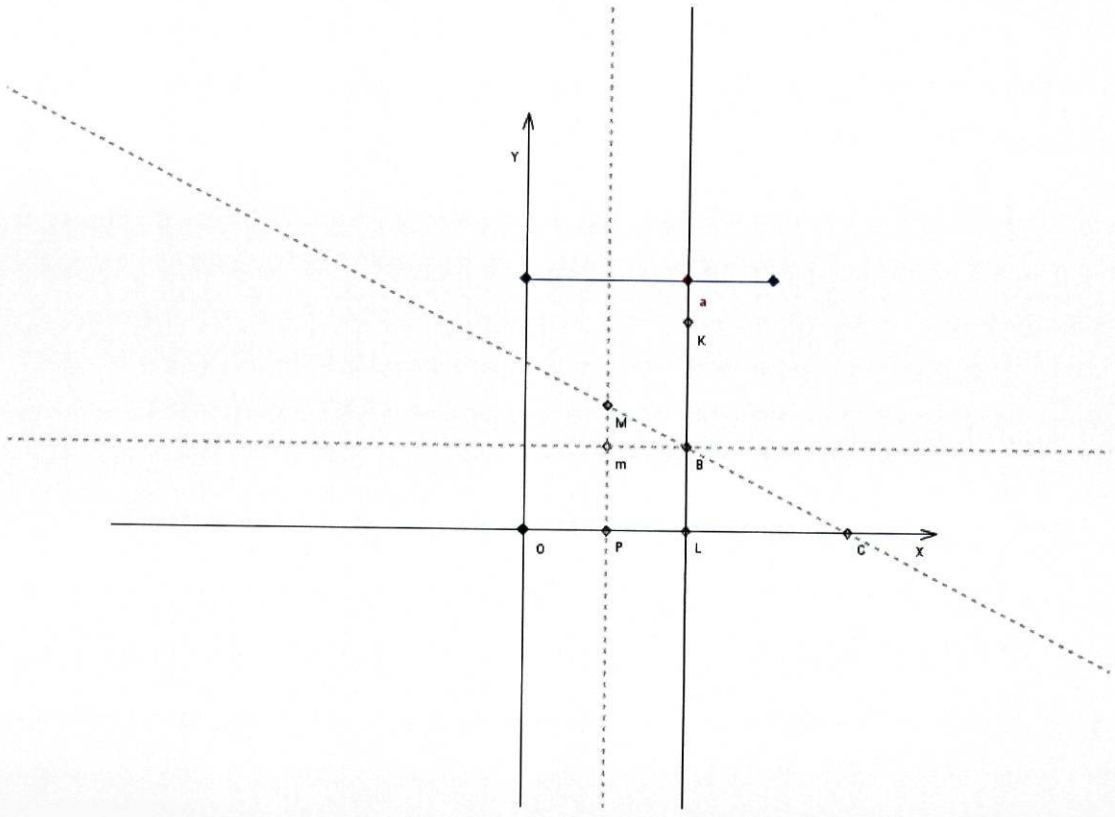


Figura 22: Pseudoversiera

que corresponde também a uma *Cisóide de Diocles.*

Para provar esta última afirmação, vamos considerar a origem das coordenadas no ponto C, de maneira que $x + X = 2a$, e então teremos

$$Y^2 = \frac{X^3}{2a - X} \quad .$$

Desta forma, a coincidência entre as duas curvas é evidente.

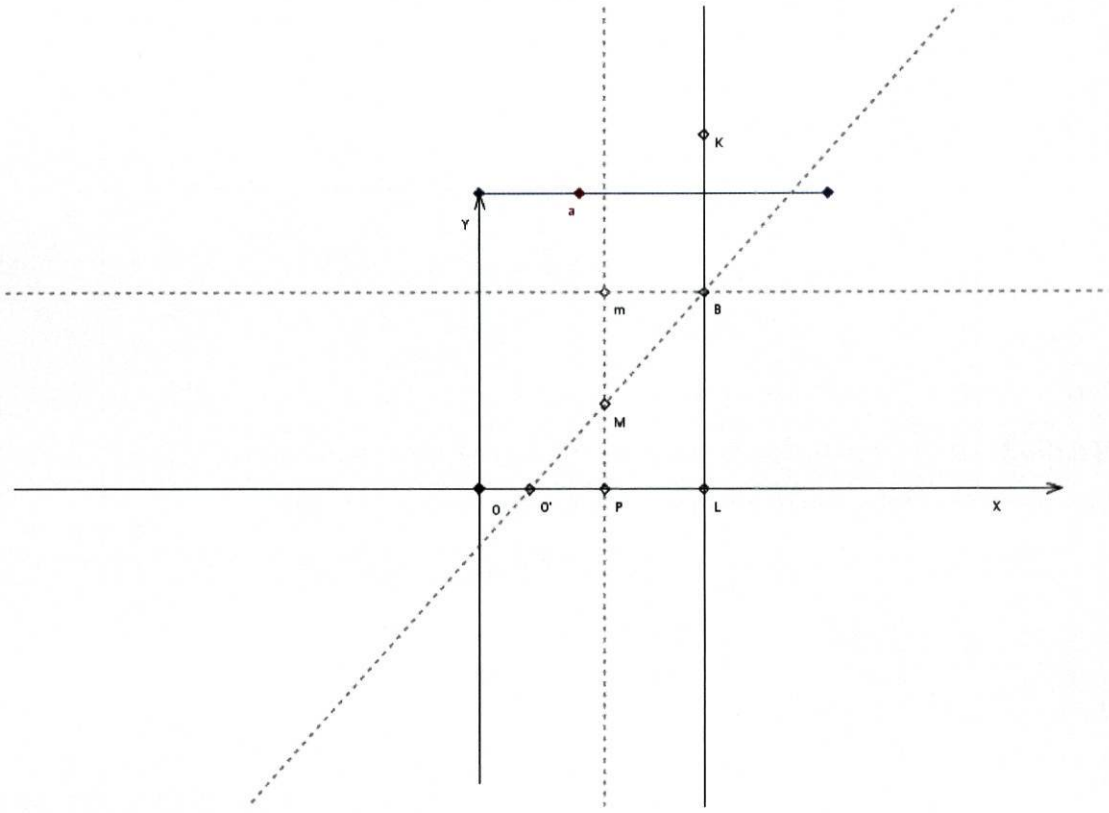


Figura 23: Pseudoversiera

83.

O método de transformação acabado de ser aplicado deve-se a MACLAURIN. Este método pode também ser utilizado para derivar da pseudoversiera o Folium de Descartes.

Designemos por m um ponto da pseudoversiera, por KL (figura 23) uma recta paralela ao eixo das ordenadas, cuja distância, OL, a este eixo seja igual a $\frac{1}{2}a + \sqrt{3}a$, e por O' um ponto cuja distância a O seja igual a $\frac{1}{2}a$. Traçando a recta mB, paralela a Ox, a recta $O'B$ e, por último, a recta mM, paralela ao eixo das ordenadas, obtém-se um ponto M, que pertence ao *Folium* de Descartes. De facto, fazendo $mP = y$, $MP = Y$ e $OP = x$,

resulta que

$$\frac{Y}{y} = \frac{x - \frac{1}{2}a}{a\sqrt{3}} \quad .$$

Desta maneira, tendo em conta a equação da pseudoversiera, vem

$$Y = \frac{2x - a}{2\sqrt{3}}\sqrt{\frac{2a - x}{x}} \quad .$$

Esta equação representa o Folium de Descartes, conforme pode verificar-se basta alterar a origem das coordenadas para o ponto O' e, para isso, temos que fazer $x = X + \frac{1}{2}a$. Assim, a equação anterior pode ser escrita na forma,

$$Y = \frac{X}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{3a - 2X}{2X + a}} = \frac{X}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{3b - \sqrt{2}X}{b + \sqrt{2}X}} \quad ,$$

onde $b = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

84.

Da *pseudoversiera* pode-se também derivar uma *Anguinea de Newton* por intermédio da *transformação de Maclaurin.*

A equação da pseudoversiera

$$x = \frac{2a^3}{y^2 + a^2} \quad ,$$

e esta

$$X = \frac{2\alpha^2 Y}{Y^2 + a^2} \quad ,$$

que representa uma Anguinea, dão origem, fazendo $Y = y$, e dividindo-as membro a membro, à seguinte relação antre as abcissas, correspondente à mesma ordenada,

$$\frac{x}{X} = \frac{a^3}{\alpha^2 Y} \quad .$$

Por conseguinte, se KL é a recta (figura 15), que corresponde à equação

$$Y = LA = \frac{a^3}{\alpha^2} \ ,$$

m um ponto da pseudoversiera e mB e mM rectas paralelas ao eixo das coordenadas, então M é um ponto da anginea considerada.

Esta interessante correspondência aqui estabelecida entre a *pseudoversiera*, a *Cisóide*, o *Folium* de Descartes e a *Anguinea*, ainda não tinha sido referenciada por ninguém.

VI A Curva de Rolle

85.

Dá-se o nome de *Curva de Rolle* à cúbica que tem por equação

$$xy^2 = a(y+x)^2, a > 0. \tag{4.4}$$

A qual resolvida em ordem a y, resulta na seguinte

$$y = \frac{ax \pm x\sqrt{ax}}{x-a} = \frac{a^{\frac{1}{2}}x}{\pm x^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}}} \tag{4.5}$$

Tendo em conta esta equação, assim como, as expressões das suas derivadas,

$$y' = \frac{a^{\frac{1}{2}}(\pm x^{\frac{1}{2}} - 2a^{\frac{1}{2}})}{2(\pm x^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}})^2} \quad \text{e} \quad y'' = \frac{a^{\frac{1}{2}}(-1 \pm 3a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{-1}{2}})}{4(\pm x^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}})^3} \tag{4.6}$$

vamos determinar a forma desta curva.

Em primeiro lugar, advirtamos que, segundo a equação (4.5), a curva deve encontrar-se situada por completo do lado das abcissas positivas (figura 24).

Fazendo $x = 0$, nas equações (4.5) e (4.6), pode-se concluir que a origem das coordenadas constitui um *ponto de retrocesso* de primeira ordem, formando a tangente neste ponto um ângulo de $-45°$ com o eixo das abcissas.

Ao sinal superior da expressão de y corresponde um ramo infinito OC, cujas ordenadas são negativas e crescentes, constante e indefinidamente, o valor absoluto, quando x varia de 0 até a; e um ramo infinito, EGM, cujas coordenadas são positivas e crescentes até ao infinito, o mesmo acontece quando x se aproxima do valor de a. A recta AB, que tem por equação $x = a$, é uma assimptota destes ramos.

A expressão de y', correspondente ao sinal superior, é nula quando $x = 4a$. Logo, a curva possui um ponto G, cujas ordenadas OD e DG, são $x = 4a$ e $y = 4a$, onde y adquire um valor mínimo.

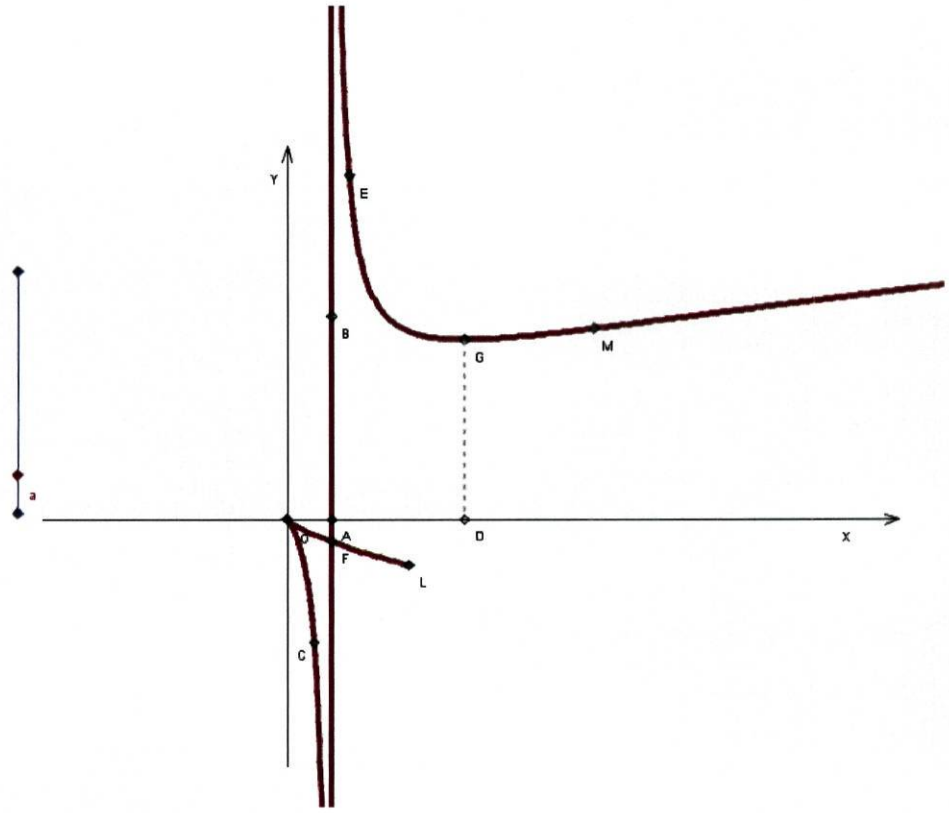


Figura 24: A Curva da Rolle

Consideremos agora o ramo da curva correspondente ao sinal inferior da expressão de y.

Como neste caso y é negativo, qualquer que seja x, este ramo encontra-se completamente abaixo do eixo das abcissas, e como $y = -\frac{1}{2}a$, quando $x = a$, o ramo da curva intersecta a assimptota no ponto cujas coordenadas são $x = a$ e $y = -\frac{1}{2}a$. O coeficiente angular da tangente neste ponto é igual a $-\frac{3}{8}$, e portanto, é independente de a.

No ramo da curva que estamos a considerar não existe ponto algum em que a ordenada seja máxima ou mínima. Como y tende para $-\infty$, quando x tende para $+\infty$, conclui-se que este ramo se extende indefinidamente no sentido positivo das abcissas, afastando-se cada vez mais do eixo das abcissas.

A expressão de y'' mostra que nos ramos que correspondem ao sinal inferior da expressão de y não existe ponto algum de inflexão à distância finita, existindo um no ramo EGM, correspondente ao sinal superior da mesma expressão. As coordenadas deste ponto são $x = 9a$ e $y = \frac{9}{2}a$.

86.

A equação da tangente à Curva de Rolle tem a seguinte expressão

$$Y - y = \frac{a^{\frac{1}{2}}(\pm\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}})}{(\pm x^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}})^2}(X - x) \ .$$

A ordenada do ponto, em que esta recta intersecta o eixo das ordenadas, tem por expressão

$$Y = \frac{\pm x^{\frac{1}{2}}y}{\pm x^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}}} = \pm\frac{y^2}{2\sqrt{ax}} \ .$$

87.

A quadratura da superfície, limitada por um arco da Curva de Rolle, pelo eixo das abcissas e por duas paralelas ao eixo das ordenadas, que passam pelos pontos cujas abcissas são x_0 e x_1, obtém-se através da fórmula,

$$A = 2\sqrt{a}\left[\pm\frac{x_1\sqrt{x_1} - x_0\sqrt{x_0}}{3} + \frac{(x_1 - x_0)\sqrt{a}}{2} \pm a(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_0}) + a^{\frac{3}{2}}\log\frac{\sqrt{x_1} \mp \sqrt{a}}{\sqrt{x_0} \mp \sqrt{a}}\right] \ .$$

88.

A equação (4.4), que acabamos de considerar, está compreendida na equação mais geral

$$xy^2 = a(y - mx)^2 \ ,$$

estudada por ELGÉ no artigo *Sur la courbe de Rolle*, publicado no *Journal de Mathématiques Spéciales* (1896, p.32), no qual é exposto um método para construir a Curva de Rolle por intermédio de uma parábola.

VII A Curva Mista

89.

Foi dado por LONGCHAMPS (*Essai sur la Géométrie de la Règle et de l'Equerre*, Paris, 1890, p. 116[5]) o nome de Cúbica mista à curva que tem por equação

$$y^2x = ax^2 + by^2 \ ,$$

e cuja forma determina-se fixando a consideração nas seguintes expressões:

$$y = x\sqrt{\frac{a}{x-b}} \ , \ y' = \sqrt{\frac{a}{x-b}} \cdot \frac{x-2b}{2(x-b)} \ , \ y'' = \sqrt{\frac{a}{x-b}} \cdot \frac{4b-x}{4(x-b)^2} \ .$$

Sejam, primeiramente, $a > 0$ e $b > 0$. A forma da curva será neste caso a indicada na figura 25, composta por dois ramos, simetricamente disposta em relação ao eixo das abcissas.

A recta AB, definida pela equação $x = b$, é assimptota da curva, e dado que $y' = 0$ quando $x = \infty$, esta curva tem ainda uma assimptota paralela ao eixo das abcissas, à distância infinita. Logo, cada ramo da curva apresenta a forma hiperbólica numa das suas extremidades e a forma Parabólica na outra. Esta característica deu origem ao nome pelo qual a curva é conhecida.

As ordenadas adquirem ainda dois valores, máximo e mínimo, nos pontos B e D, onde $x = 2b$ e $y = \pm 2\sqrt{ab}$. Sendo assim, os pontos E e F, cujas coordenadas são $\left(4b, \pm\frac{4}{3}\sqrt{3}\sqrt{ab}\right)$[6], são *pontos de inflexão*, e o ponto O é um *ponto isolado* da mesma curva.

[5]No documento original está escrito *Essai de la Géométrie de la Règle et de l'Equerre*, etc., Paris, 1890, p. 116.

[6]No documento original está escrito $\left(4b, \frac{4}{3}\sqrt{3}\sqrt{ab}\right)$.

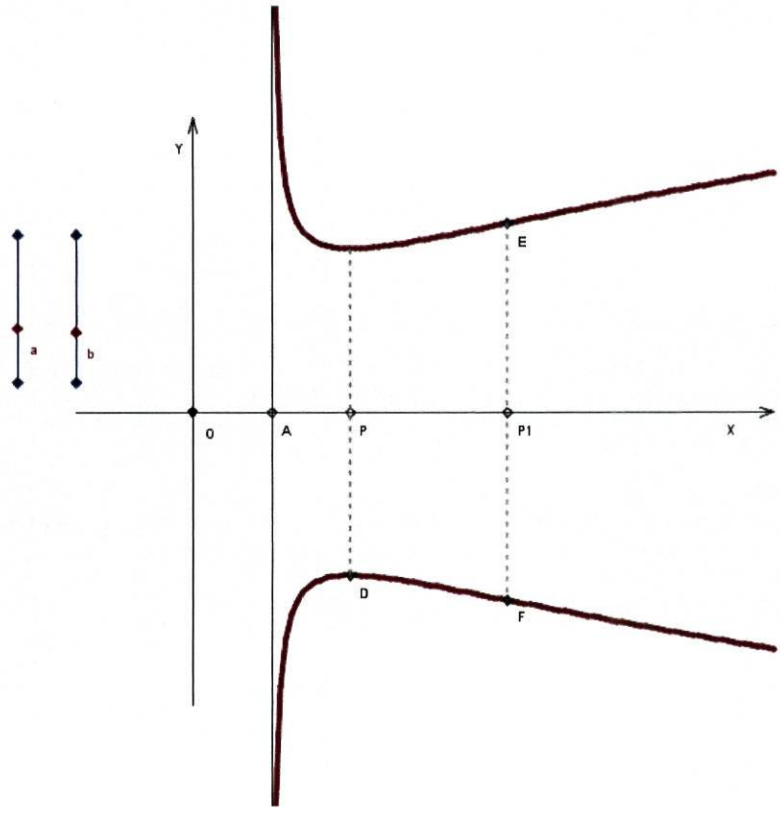


Figura 25: A Curva Mista, quando $a > 0$ e $b > 0$

No caso de $a < 0$ e $b > 0$, a curva tem a forma indicada na figura 26, convertendo-se os pontos de inflexão e os máximo e mínimo em *pontos imaginários*, e o ponto isolado O passa a ser um *nó*.

Quando $a < 0$ e $b < 0$ ou $a > 0$ e $b < 0$, as curvas têm as mesmas formas que os casos anteriormente considerados.

90.

A Cúbica mista pode construir-se através de uma parábola (LONGCHAMPS, l. c.), conforme vamos poder confirmar a seguir.

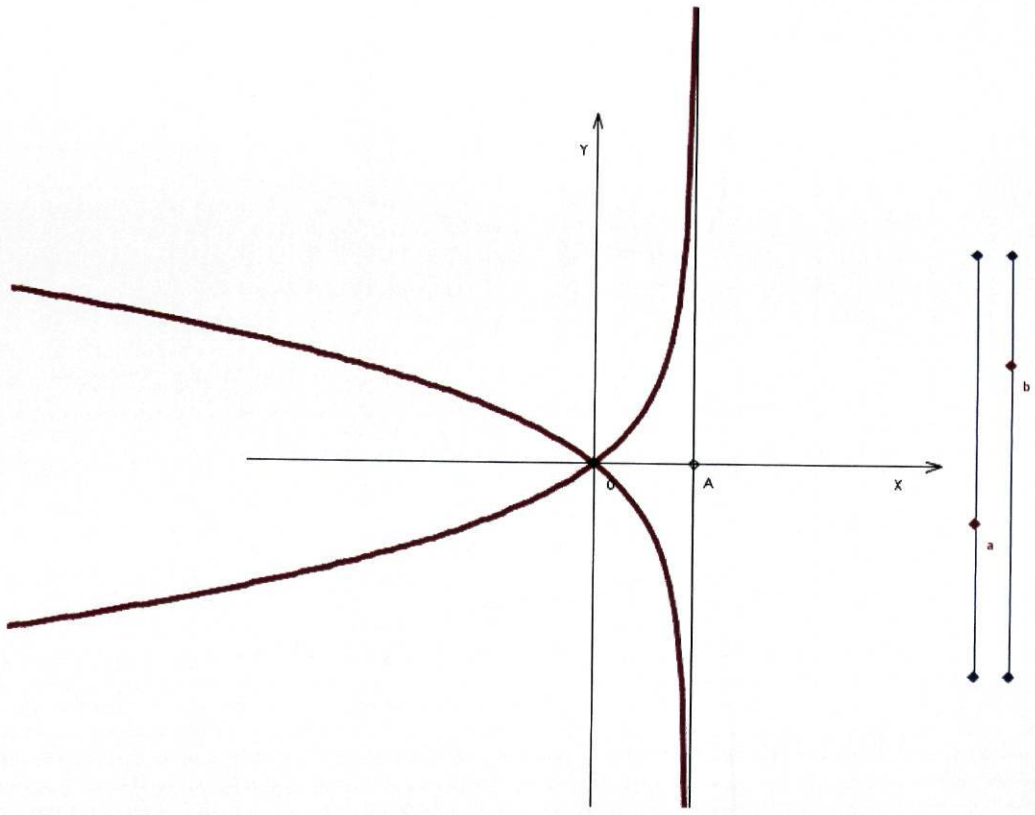


Figura 26: A Curva Mista, quando $a < 0$ e $b > 0$

Seja AB (figura 27) uma recta que tem por equação $x = b$ e M um ponto da parábola, cuja equação é $y^2 = ax$. Considerando sobre a recta OM, a partir do ponto M, um comprimento MN igual a OC, N será um ponto da Cúbica mista a que nos referimos. De facto, supondo que $COB = \theta$ e $ON = \rho$, vem que

$$OC = \frac{b}{\cos\theta} \quad , \quad OM = \frac{a\cos\theta}{\text{sen}^2\,\theta} \quad ,$$

e, portanto,

$$\rho = \frac{b}{\cos\theta} + \frac{a\cos\theta}{\text{sen}^2\,\theta} \quad .$$

Esta é a equação polar da curva descrita por N, quando OM varia de posição, girando em redor de O, que expressa em coordenadas cartesianas coincide com a da cúbica que

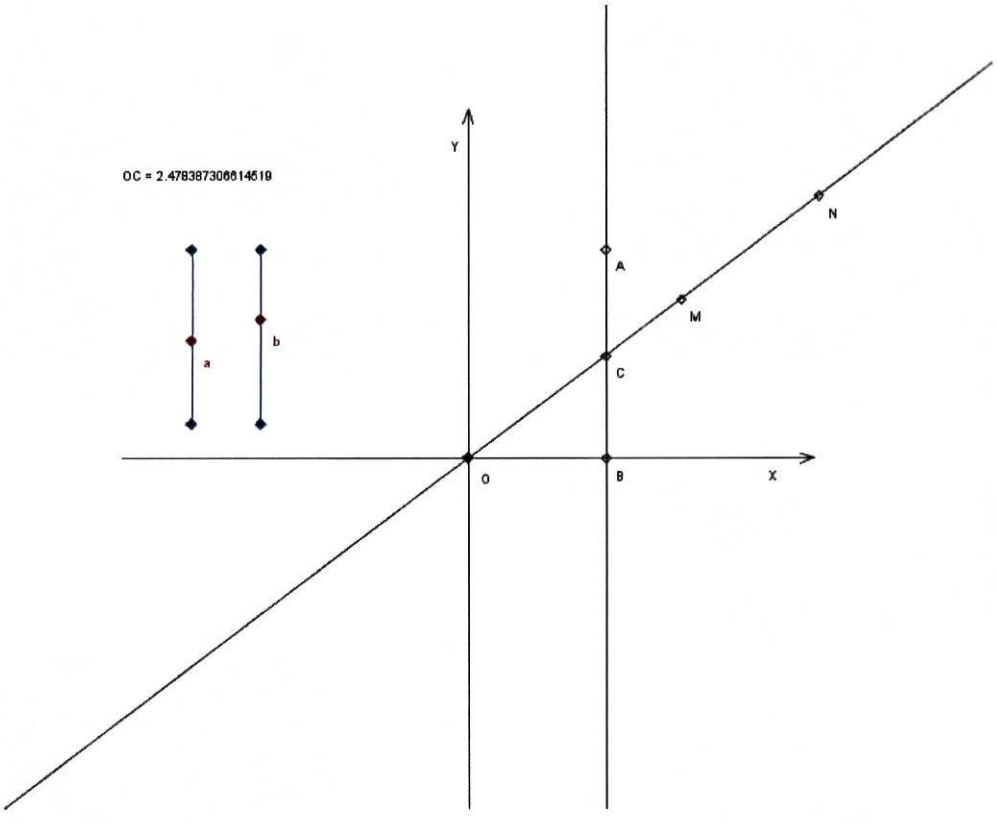


Figura 27: Procedimento efectuado por Longchamps

estamos a tratar.

91.

A rectificação das Cúbicas mistas depende dos integrais elípticos. De facto, supondo que $y = tx$, a curva pode ser representada pelas equações

$$x = \frac{a + bt^2}{t^2} \quad \text{e} \quad y = \frac{a + bt^2}{t} \quad .$$

De maneira que,

$$ds = \sqrt{\frac{b^2t^6 - 2abt^4 + a^2t^2 + 4a^2}{t^6}}dt \quad ,$$

Fazendo $t^2 = z$, vem

$$ds = \frac{1}{2} \cdot \frac{b^2 z - 2ab + \frac{a^2}{z} + \frac{4a^2}{z^2}}{\sqrt{b^2 z^3 - 2abz^2 + a^2 z + 4a^2}} dz \quad .$$

É também sabido, e fácil de verificar ou comprovar por diferenciação, que

$$\frac{4a^2 dz}{z^2 \sqrt{F(z)}} = -d\left[\frac{F(z)}{z}\right] - \frac{a^2}{2} \cdot \frac{dz}{z\sqrt{F(z)}} + \frac{b^2}{2} \cdot \frac{dz}{\sqrt{F(z)}} \quad ,$$

donde

$$F(z) = b^2 z^3 - 2abz^2 + a^2 z + 4a^2 \quad .$$

Logo,

$$ds = \frac{1}{2} - \frac{b^2 z - \left(2ab - \frac{b^2}{2}\right) + \frac{a^2}{2z}}{\sqrt{F(z)}} - \frac{1}{2} \cdot d\left[\frac{F(z)}{z}\right] \quad .$$

Fazendo agora,

$$z = u + h \quad \text{e} \quad h = \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{b} \quad ,$$

da expressão anterior se deduz a seguinte,

$$ds = b \cdot \frac{udu}{\sqrt{4u^3 - g_1 u - g_2}} - \left(\frac{4}{3}a - \frac{1}{2}b\right) \frac{du}{\sqrt{4u^3 - g_1 u - g_2}}$$

$$+\frac{a^2}{2b} \cdot \frac{du}{(u+h)\sqrt{4u^3 - g_1 u - g_2}} - \frac{b}{4} \cdot d\left[\frac{\sqrt{4u^3 - g_1 u - g_2}}{u+h}\right] \quad ,$$

designando por $g_1 = \frac{4}{3} \cdot \frac{a^2}{b^2}$ e $g_2 = -8\left(\frac{a^3}{27b^3} + 2\frac{a^2}{b^2}\right)$.

Logo, *a rectificação das Cúbicas mistas depende dos integrais elípticos de 1ª, 2ª e 3ª ordens*

$$\int \frac{du}{\sqrt{4u^3 - g_1 u - g_2}} \quad , \quad \int \frac{udu}{\sqrt{4u^3 - g_1 u - g_2}} \quad \text{e} \quad \int \frac{du}{(u+h)\sqrt{4u^3 - g_1 u - g_2}} \quad .$$

reduzidas à forma normal adoptada por WEIERSTRASS.

VIII O Folium Parabólico

92.

A curva dada pela equação seguinte designa-se por *Folium Parabólico* LONGCHAMPS: *Essai sur la Géométrie de la Règle et de l'Equerre*, Paris, 1890, p. 120[7])

$$x^3 - a(x^2 - y^2) - bxy = 0 \ .$$

Quando $b = 0$, a curva resulta simétrica em relação ao eixo das abcissas, e o *Folium* denomina-se de *recto*, quando b é diferente de 0, o *Folium* designa-se de *oblíquo*.

É fácil de ver, através do método das assimptotas, que o Folium Parabólico carece de assimptotas à distância finita, e que, como a parábola, tem uma direcção assimptótica única, que coincide com a direcção do eixo das ordenadas.

93.

Escrevendo a equação do Folium Parabólico da seguinte forma

$$y = x\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4a(x-a)}}{2a} \ ,$$

e atendendo à igualdade abaixo representada

$$y' = \frac{b}{2a} \pm \frac{b^2 - 6ax + 4a^2}{2a\sqrt{b^2 - 4a(x-a)}} \ ,$$

facilmente se verifica que a curva tem a forma indicada na figura 28, com um *ponto duplo*, O, na origem das coordenadas, onde as tangentes aos dois ramos da curva que ali se cruzam são perpendiculares, segundo demonstra a fórmula

$$y' = \frac{b \pm \sqrt{b^2 + 4a^2}}{2a} \ .$$

[7]No documento original está escrito *Géométre de la Règle et de l'Équerre*, Paris, 1890, p. 120.

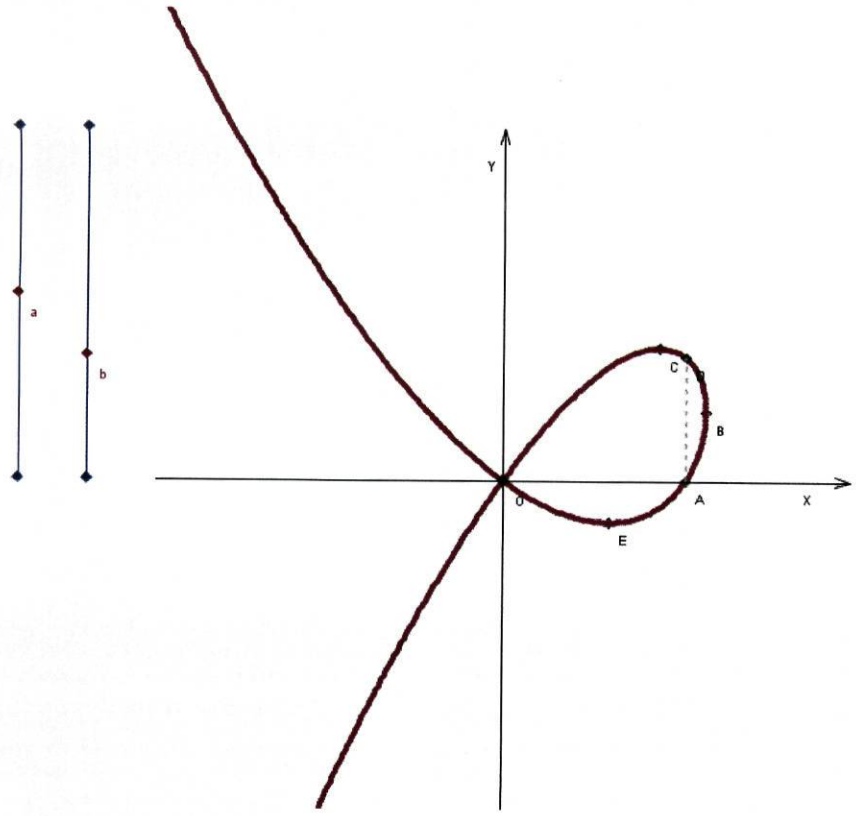


Figura 28: Folium Parabólico

No ponto A onde a curva intersecta o eixo das abcissas, é $x = a$, e no ponto D, correspondente à mesma abcissa, $y = b$.

94.

O *Folium Parabólico* é uma curva *unicursal*. Fazendo $y = tx$ na sua equação, vem

$$x = a(1 - t^2) + bt \quad \text{e} \quad y = a(1 - t^2)t + bt^2 \quad .$$

Das expressões anteriores deduz-se que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3at^2 - 2bt - a}{2at - b} \quad .$$

Logo, os valores de t nos pontos C e E, onde as ordenadas adquirem um valor máximo e outro mínimo, serão os seguintes:

$$t = \frac{b \pm \sqrt{b^2 + 3a^2}}{3a} \quad .$$

O valor de t no ponto B, onde x passa por um valor máximo, e a tangente à curva é paralela ao eixo das ordenadas, é igual a $t = \frac{b}{2a}$.

95.

Por último, é de advertir que esta curva pode ser construída através do método simples que se segue (LONGCHAMPS, l. c.).

Seja $OABC$ (figura 29) um rectângulo, cujos lados OA e AB sejam iguais a a e b. Pelo ponto O trace-se a recta arbitrária OD, e por D a perpendicular DE a esta recta. Trace-se ainda por E a perpendicular EF a DE e por F a perpendicular FM a OD. O lugar descrito por M, quando OD varia, será o Folium Parabólico pretendido.

De facto, representando por θ e ρ as coordenadas polares MOA e OM do ponto M, vem

$$OD = \frac{a}{\cos\theta} \quad , \quad DB = DA - BA = a\,\mathrm{tg}\,\theta - b$$

e

$$MD = FE = DE\,\mathrm{tg}\,\theta = \frac{DB}{\cos\theta}\,\mathrm{tg}\,\theta = \frac{a\,\mathrm{tg}\,\theta - b}{\cos\theta}\,\mathrm{tg}\,\theta \quad .$$

A partir destas igualdades e da seguinte

$$\rho = OM = OD - MD \quad ,$$

resulta a equação da curva em coordenadas polares,

$$\rho = \frac{a}{\cos\theta} - \frac{a\,\mathrm{tg}\,\theta - b}{\cos\theta}\,\mathrm{tg}\,\theta \quad .$$

Desta equação deduz-se a equação do *Folium* expressa em coordenadas cartesianas.

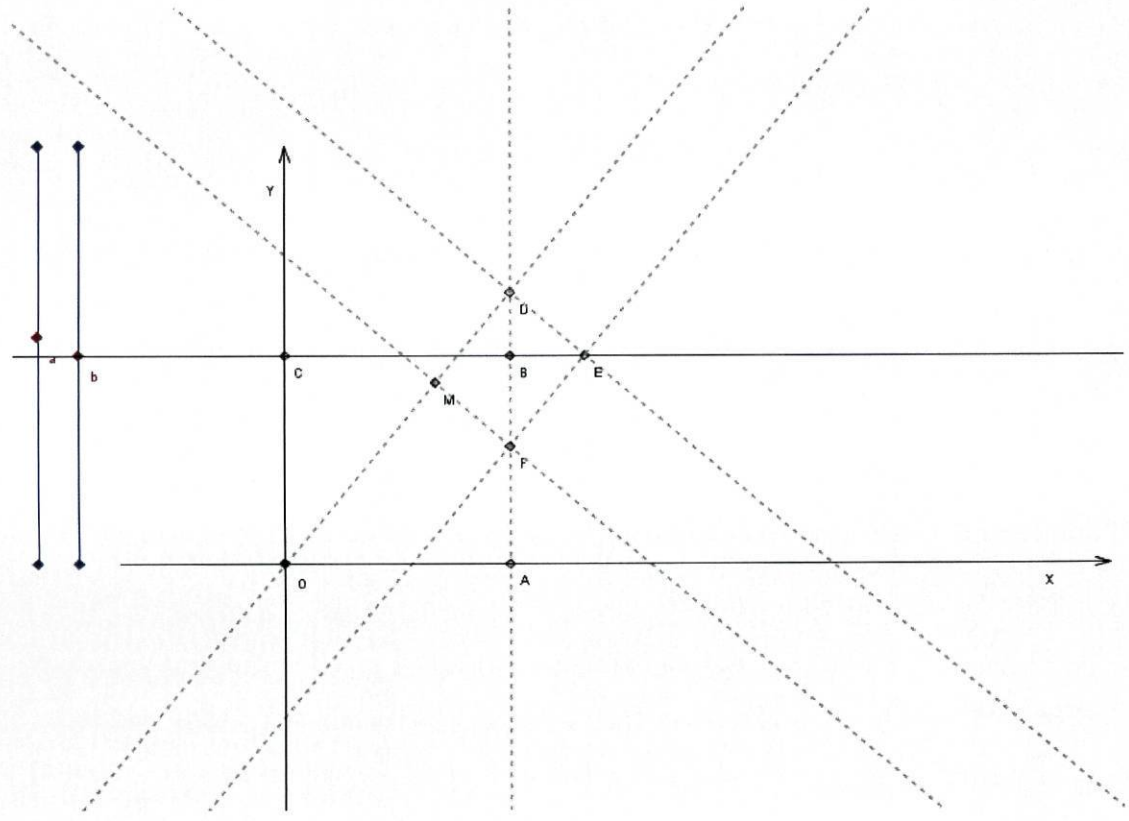


Figura 29: Procedimento efectuado por Longchamps

IX As Parábolas Divergentes

96.

NEWTON, denominou por *Parábolas Divergentes*, no seu trabalho intitulado *Enumeratio linearum tertii ordinis*, as curvas cuja equação é

$$y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d \tag{4.7}$$

as quais segundo este grande geómetra, desempenham um papel importante na teoria geral das *Cúbicas. A mesma equação (4.7) pode representar a perspectiva de todas as curvas deste último nome.*

O caminho que NEWTON seguiu para descobrir tão interessante propriedade, ninguém sabe nem é fácil adivinhá-lo. Na obra citada encontra-se enunciada a proposição bem explicitamente, mas não é formulada a sua demonstração. No entanto, os geómetras CLAIRAUT e NICOLE, reflectiram sobre este assunto e publicaram em separado, no ano de 1731, no volume das *Memórias da Academia de Ciências de Paris.*

O belo teorema de NEWTON referido é equivalente ao que agora pretendemos demonstrar, que refere:

A qualquer Cúbica corresponde uma parábola divergente, deduzida da mesma Cúbica por transformação homográfica.

Designemos por $f(X,Y) = 0$ a equação de uma Cúbica qualquer. Aplicando a nesta equação a fórmula de Plücker (SALMON, *Higher plane curves*, 3ª ed., n.º 82),

$$\tau = 3m(m-2) - 6\delta - 8\nu \ ,$$

na qual m representa a *ordem* ou o grau da curva, δ o número de *nós*, e ν o número de pontos de *retrocesso*. Assim, desde logo se conclui que, por referência à Cúbicas, o número de *pontos*, τ, de *inflexão* é sempre *ímpar*, sendo pelo menos um deles *real*.

Agora, vamos conceber no plano da Cúbica um triângulo, cujos lados Δ, Δ' e Δ'' sejam respectivamente segmentos de recta, tangente o primeiro à cúbica no ponto de inflexão real, de direcção arbitrária o outro, mas tendo de passar pelo mesmo ponto, e o terceiro de posição que nos reservamos determinar ou definir mais adiante. Designemos ainda por (X,Y) o ponto da cúbica em particular considerada e, por z_1, x_1 e y_1 as distâncias respectivas deste ponto aos três lados do triângulo, ou as coordenadas *trilineares* do ponto (X,Y), em relação ao triângulo referido. Sendo assim, podemos escrever que

$$x_1 = a_1X + b_1Y + c_1 \ , \ y_1 = a_2X + b_2Y + c_2 \ , \ z_1 = a_3X + b_3Y + c_3 \ ,$$

designando pelas letras a_1, b_1 e c_1, a_2, b_2 e c_2, a_3, b_3 e c_3, quantidades independentes de X e Y, e dependentes das equações das rectas Δ', Δ'' e Δ, conforme se explica nos tratados

correntes de Geometria Analítica, e nos consideramos dispensados de reproduzir agora.

Substituindo os valores de X e Y, deduzidos através destas equações, na equação da cúbica considerada, obtém-se a outra equação homogénea em *coordenadas trilineares*, também de terceiro grau, e de fácil verificação. Para isso, basta advertir que a recta Δ intersecta a cúbica em três pontos, reunidos na intersecção das rectas Δ e Δ', e cujas distâncias a Δ' são, consequentemente, nulas. Adverte-se ainda que, a equação da cúbica assim deduzida, deve ser de tal forma que a partir dela sejam determinados três valores de x_1, iguais a zero, sempre que se suponha que $z_1 = 0$. Em suma,

$$ax_1^3 = z_1(y_1^2 + Ax_1^2 + Cz_1^2 + Dx_1y_1 + Ex_1z_1 + Fy_1z_1)$$

ou

$$ax_1^3 = z_1(Ax_1^2 + Ex_1z_1 + Cz_1^2) + y_1z_1(y_1 + Dx_1 + Fz_1) \ .$$

Advirtamos agora que, aplicando a esta curva a equação

$$x_0f'_{x_1} + y_0f'_{y_1} + z_0f'_{z_1} = 0 \ ,$$

representativa da *polar* do ponto (x_0, y_0, z_0) relativamente à curva $f(x_1, y_1, z_1) = 0$,e tomando para ponto (x_0, y_0, z_0) a intersecção das rectas Δ e Δ', no qual se verifica que $x_0 = 0$ e $z_0 = 0$, deduz-se que

$$z_1y_0(2y_1 + Dx_1 + Fz_1) = 0 \ .$$

Logo, a recta $z_1 = 0$ e a $2y_1 + Dx_1 + Fz_1$, constituem a *polar* do ponto considerado. Assim, para completar a definição do sistema adoptado de *coordenadas trilineares* convém-nos que o segmento Δ'' corresponda à recta representada pela última equação, a qual deve reduzir-se a $y_1 = 0$, e finalmente determinaremos que $D = 0$ e $F = 0$.

Logo, relativamente aos eixos assim estabelecidos, a equação anterior da cúbica poderá ser escrita do modo seguinte:

$$ax_1^3 + bx_1^2z_1 + cx_1z_1^2 + dz_1^3 = y_1^2z_1. \tag{4.8}$$

Da qual se deduzirá outra em coordenadas cartesianas, x e y, ligadas com as X e Y, pelas relações,

$$x = \frac{x_1}{z_1} = \frac{a_1X + b_1Y + c_1}{a_3X + b_3Y + c_3} \quad \text{e} \quad y = \frac{y_1}{z_1} = \frac{a_2X + b_2Y + c_2}{a_3X + b_3Y + c_3}. \tag{4.9}$$

Substituindo nesta equação xz_1 por x_1 e yz_1 por y_1, encontra-se precisamente a equação de partida (4.7).

Logo, a cada ponto (X, Y) de uma cúbica qualquer corresponde outro ponto (x, y) de alguma das cúbicas compreendidas na equação (4.7), encontrando-se ligadas as coordenadas de ambas as curvas pelas relações (4.9), que definem a *transformação homográfica* de uma curva na outra, conforme nos proposemos a demonstrar.

Deste género de transformação tratou profundamente CHASLES na sua importante produção matemática, intitulada de *Mémoire de Géométrie sur deux principes généraux de la science: la dualité et l'homographie.* Nesta obra, este ilustre geómetra mostra que a transformada homográfica de qualquer curva representa uma perspectiva da mesma curva. Proposição que no final deste livro demonstraremos, para completar assim, com o exposto neste parágrafo, a demonstração do teorema de NEWTON.

97.

A equação (4.7) pode simplificar-se desde logo, ou reduzir-se à forma

$$y^2 = ax^3 + cx + d, \tag{4.10}$$

transferindo, somente, a origem das coordenadas para o ponto $\left(-\frac{b}{3a}, 0\right)$.

Para ver qual a forma das curvas contidas nesta equação, vamos considerar diferentes casos, começando por advertir que o eixo das abcissas é sempre um eixo de simetria da curva de que se trata. Para fixar as ideias , vamos supôr sempre que $a > 0$.

Caso 1.° - Admitamos que as três raízes α, β e γ da equação

$$ax^3 + cx + d = 0 \ ,$$

são reais e diferentes, e que $\alpha > \beta > \gamma$.

A curva intersecta neste caso o eixo das abcissas nos pontos A, B e C, cujas abcissas são iguais a α, β e γ. Então, as ordenadas serão:

- ⋆ reais e crescerão indefinidamente com x, quando $x > \alpha$;
- ⋆ imaginárias, quando x está compreendido entre α e β;
- ⋆ reais e finitas, quando x está compreendido entre β e γ;
- ⋆ imaginárias, quando $x < \gamma$.

Logo, a curva é composta por um ramo fechado (figura 30) $CLBM$ e por um ramo infinito NAP.

Com base na derivada

$$y' = \frac{3ax^2 + c}{2y}, \tag{4.11}$$

vê-se que as tangentes nos pontos A, B e C são perpendiculares ao eixo das abcissas. E tendo em conta a equação

$$3ax^2 + c = 0 \ ,$$

que, em virtude do teorema de Rolle, deve ter uma raiz, compreendida entre β e α, a que corresponde um valor imaginário de y, e outra, compreendida entre β e γ, a que corresponde um valor real de y, determinaremos a abcissa dos pontos L e M, onde o valor absoluto das ordenadas é máximo.

Advirtamos, antes de abandonar este assunto, que, escrevendo a equação da curva do seguinte modo,

$$y^2 = a(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) \ ,$$

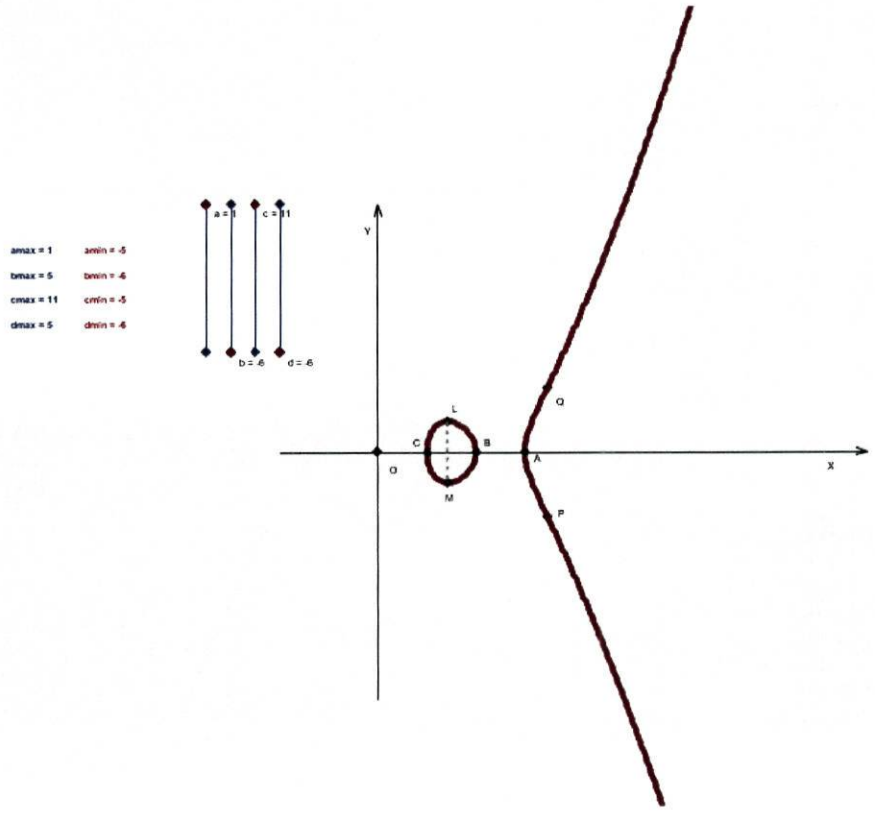


Figura 30: Parábolas Divergentes, quando $\alpha > \beta > \gamma$

se obtém, para determinar y', a igualdade

$$y' = \frac{a[3x^2 - 2(\alpha + \beta + \gamma)x + \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma]}{2y} \quad ,$$

e, para determinar a abcissa dos pontos L e M, a equação

$$3x^2 - 2(\alpha + \beta + \gamma)x + \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = 0 \quad .$$

Substituindo no primeiro membro desta equação x por γ, e logo por $\frac{1}{2}(\beta+\gamma)$, chega-se a resultados de sinais contrários, o que prova que os pontos L e M projectam-se sobre o eixo das abcissas, entre o meio, U, de AB e o vértice C.

Caso 2.º - Se $\alpha = \beta$ ou

$$y^2 = a(x - \alpha)^2(x - \gamma) \quad ,$$

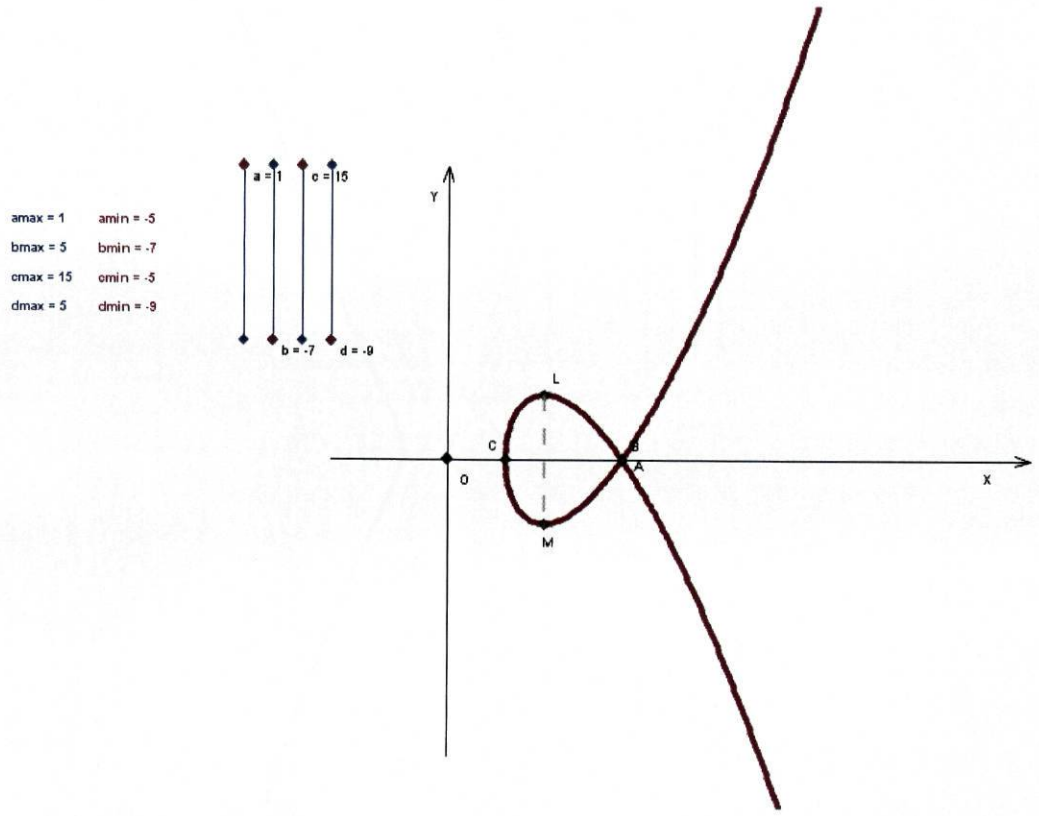


Figura 31: Parábolas Divergentes, quando $\alpha = \beta$

então y será:

- ⋆ real e crescerá indefinidamente com x, quando $x > \alpha$;
- ⋆ real e finito no intervalo de $x = \alpha$ a $x = \gamma$;
- ⋆ imaginária, quando $x < \gamma$.

Neste caso, curva é unicursal e tem a forma indicada na figura 31. Aos pontos C e B ou A correspondem os valores de $x = \gamma$ e $x = \alpha$. Nos pontos L e M, cuja abcissa é igual a $\dfrac{2\gamma + \alpha}{3}$, o valor absoluto de y é máximo. O ponto B ou A será um *ponto duplo*, no qual as tangentes formam, com o eixo das abcissas, ângulos cujas tangentes trigonométricas são iguais a $\pm\sqrt{a(\alpha - \gamma)}$.

Caso 3.º - Se $\beta = \gamma$ ou

$$y^2 = a(x-\alpha)(x-\beta)^2 \ ,$$

então y será:

⋆ real, quando $x > \alpha$;

⋆ imaginária, quando $x < \alpha$.

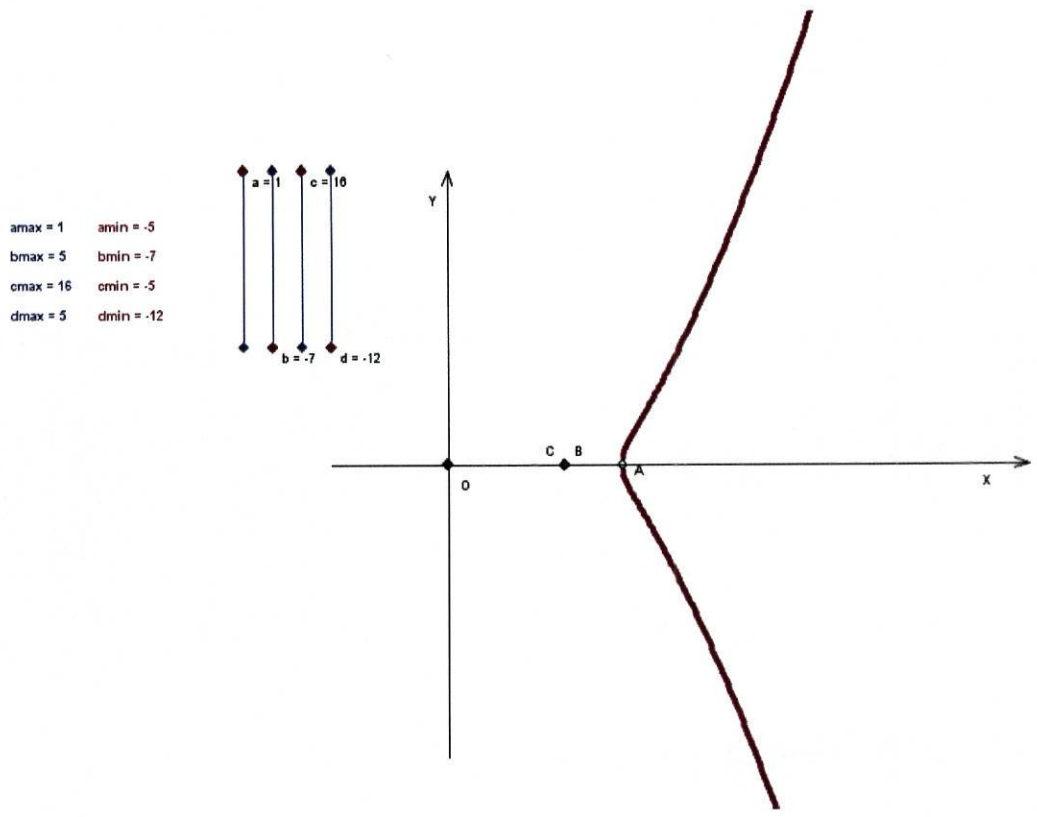


Figura 32: Parábolas Divergentes, quando $\beta = \gamma$

Neste caso, a curva também é unicursal, e tem um ponto isolado C ou B, cujas coordenadas são $(\beta, 0)$ e um ramo infinito que parte do ponto $(\alpha, 0)$ (figura 32).

Caso 4.° - Se as raízes α e β são imaginárias, temos que $\alpha = p + iq$ e $\beta = p - iq$, logo

$$y^2 = a[(x-p)^2 + q^2](x-\gamma) \quad .$$

Neste caso, a curva possuirá somente um ramo infinito, que passa pelo ponto $(\gamma, 0)$, parecido com o ramo infinito da figura 30, e carecerá de pontos singulares.

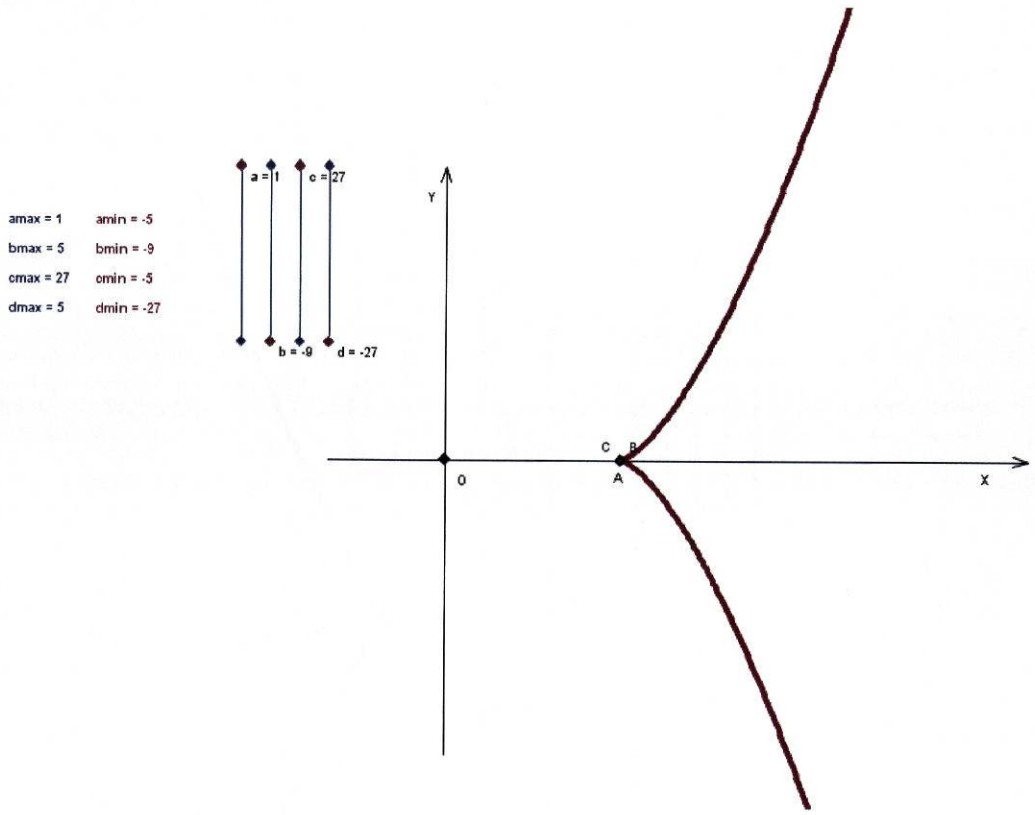


Figura 33: Parábolas Divergentes, quando $\alpha = \beta = \gamma$

Caso 5.° - Se $\alpha = \beta = \gamma$, a curva reduz-se a uma *parábola semicúbica*, a qual vai ser estudada mais adiante, quando se tratar das *parábolas*, em geral. Neste momento, basta advertir que a parábola de terceira ordem, segundo se deduz das expressões

$$y = a\frac{1}{2}(x-\alpha)^{\frac{3}{2}}$$

e

$$y' = \frac{3}{2}a^{\frac{1}{2}}(x-\alpha)^{\frac{1}{2}} \quad ,$$

é da forma indicada na figura 33, com um *ponto de retrocesso* $(\alpha, 0)$ em A e uma *assimptota* no infinito, paralela ao eixo das ordenadas.

98.

Analisaremos agora os *pontos de inflexão* das Parábolas Divergentes, começando por considerar as curvas que têm este nome e *que não são unicursais.*

Derivando a equação (4.11), adverte-se sem dificuldade que $y'' = 0$, quando x é igual a ∞, e ainda, quando

$$(3ax^2 + c)^2 - 12ax(ax^3 + cx + d) = 0. \tag{4.12}$$

A $x = \infty$ corresponde um ponto de inflexão, situado no infinito. Como a equação (4.11) mostra também que $y' = \infty$, quando é este mesmo a expressão de x, conclui-se que a tangente à curva nesse ponto é paralela ao eixo das ordenadas.

Da equação (4.12), determinam-se *quatro* valores de x, a cada um dos quais correspondem *dois* valores de y, deduzidos da equação (4.10). Logo, a curva admite outros *oito* pontos de inflexão, reais ou imaginários, situados à distância finita.

Fazendo sucessivamente na equação (4.12), $x = \alpha$ e $x = \infty$, obtêm-se resultados de sinais contrários. Logo, entre α e ∞ existe um valor real de x, que satisfaz esta equação, e ao qual correspondem, consequentemente (figura 30), dois pontos de inflexão da curva, N e P.

Através da mesma equação (4.12), poderia-se demonstrar que a curva não tem outros pontos de inflexão reais, fora dos indicados. Mas, parece preferível neste caso, deduzir a exactidão da proposição, como consequência do seguinte importante teorema publicado por

DE GUA em 1740 (*Usage de l'Analyse de Descartes, etc.*) e de novo por MACLAURIN (*De Linearum Geometricarum Proprietatibus Generalibus*), em 1748, que demonstraremos, por referência exclusiva à classe de curvas que estudamos agora:

Qualquer recta que passe por dois pontos de inflexão de uma cúbica, intersectará esta curva num terceiro ponto do mesmo nome.

Para isto, comecemos por escrever a equação (4.12) do seguinte modo:

$$x^4 + 2\frac{c}{a}x^2 + 4\frac{d}{a}x - \frac{c^2}{3a^2} = 0, \tag{4.13}$$

e designemos por α_1, α_2, α_3 e α_4 suas raízes.

Pois para que a recta que tem por equação

$$y = Ax + B \ ,$$

passe pelos pontos da cúbica, cujas abcissas são α_2, α_3 e α_4 é necessário, e basta, que estas raízes satisfaçam a equação

$$x^3 - \frac{A^2}{a}x^2 + \frac{c - 2AB}{a}x + \frac{d - B^2}{a} = 0, \tag{4.14}$$

e, portanto, que os primeiros membros das equações (4.13) e (4.14) satisfaçam a seguinte identidade,

$$x^4 + 2\frac{c}{a}x^2 + 4\frac{d}{a}x - \frac{c^2}{3a^2} = (x - \alpha_1)\left(x^3 - \frac{A^2}{a}x^2 + \frac{c - 2AB}{a}x + \frac{d - B^2}{a}\right) \ ,$$

da qual, igualando os coeficientes das mesmas potências de x em ambos os membros, deduz-se as seguintes equações condicionais para que os três pontos de inflexão correspondam à linha recta considerada,

$$A^2 = -a\alpha_1 \ , \ c = -2AB - a\alpha_1^2 \ , \ 3d = -B^2 - \alpha_1 c + 2\alpha_1 AB \ \text{ e } \ c^2 = 3a\alpha_1(d - B^2) \ .$$

Duas destas equações servirão para determinar os valores, A e B, dos parâmetros da linha recta, e as outras duas para decidir se os *três pontos de inflexão* se encontram

ou não sobre esta recta, conforme aqueles valores concordem ou não com os dos mesmos parâmetros que dela se deduzem.

Pois bem, se da *primeira* equação se toma o valor de A e de B da *quarta*, e ambos se substituirem na *segunda*, chega-se ao seguinte resultado:

$$\alpha_1^4 + 2\frac{c}{a}\alpha_1^2 + 4\frac{d}{a}\alpha_1 - \frac{c^2}{3a^2} = 0 \quad ,$$

que se obteria igualmente substituindo na *terceira* os valores de AB e de B^2, obtidos da *segunda* e da *quarta*. Basta advertir que este resultado coincide com o que se deduz da equação (4.13), fazendo $x = \alpha_1$, para concluir que os três pontos de inflexão, determinados por α_2, α_3 e α_4, encontram situados sobre a mesma linha recta.

A demonstração precedente não é aplicável a rectas paralelas ao eixo das ordenadas. Mas basta advertir que qualquer uma destas rectas, sobre a qual existam dois pontos de inflexão, intersecta a curva num ponto situado no infinito, e que este ponto é também de inflexão, para concluir que assim mesmo se acha compreendida dentro do enunciado e condições do teorema, a que a demonstração exposta se refere.

Deste teorema deduz-se ainda que a *cúbica considerada possui somente dois pontos de inflexão reais à distância finita.*

De facto, se possui-se quatro pontos com este nome, poderia-se traçar por eles quatro rectas distintas , não paralelas ao eixo das ordenadas, que intersectariam a curva em quatro pontos reais, de inflexão, com base no teorema anterior. Logo, todos os pontos de inflexão da curva seriam reais, o que é um absurdo!! Para justificar o absurdo desta conclusão, basta fazer na equação (4.13), $x = \gamma$ e $x = \infty$, sucessivamente, donde se obtém resultados de sinais contrários, daqui conclui-se que a equação possui, pelo menos, uma raiz real compreendida entre γ e ∞. Logo, precisamente a estas raízes ou valores reais de x correspondem, conforme já se viu anteriormente, valores imaginários de y.

99.

A doutrina referente aos pontos de inflexão, que acabamos de expôr, deve modificar-se quando se trata de a aplicar a uma curva *unicursal.*

De facto, como as coordenadas de um ponto duplo devem satisfazer as equações

$$y = 0 \text{ e } 3ax^2 + c = 0 \ .$$

à equação (4.12) obedecerão neste caso, não somente as abcissas dos pontos de inflexão, mas também as dos pontos do primeiro nome. Mas, todavia, é fácil obter uma equação apropriada somente à resolução exclusiva do problema de que agora se trata, conforme passamos a indicar.

1.° Seja $\alpha = \beta$ ou

$$y^2 = a(x-\alpha)^2(x-\gamma) \ .$$

Dado que

$$y'' = \sqrt{a}\frac{3x - 4\gamma + \alpha}{4(x-\gamma)^{\frac{3}{2}}} \ ,$$

dispomos, para determinar os pontos de inflexão da curva, das igualdades $x = \infty$, e também

$$x = \frac{1}{3}(4\gamma - \alpha) \text{ e } y^2 = \frac{16}{27}a(\gamma - \alpha)^3 \ ,$$

as quais, como $\alpha > \gamma$, mostram que a *curva possui dois pontos de inflexão imaginários e um real no infinito.*

2.° Se $\beta = \gamma$, como no caso anterior, dispomos, para determinar os pontos de inflexão, das equações $x = \infty$, e das duas seguintes:

$$x = \frac{1}{3}(4\alpha - \beta) \text{ e } y^2 = \frac{16}{27}a(\alpha - \beta)^3 \ ,$$

das quais se deduz que *a curva tem dois pontos de inflexão reais, à distância finita e outro, real, no infinito.*

3.° Se $\alpha = \beta = \gamma$, resulta que

$$y'' = \frac{3}{4} \cdot \frac{\sqrt{a}}{(x-\alpha)^{\frac{1}{2}}} \quad .$$

Segundo a qual, a curva possui um único ponto de inflexão, correspondente a $x = \infty$.

100.

A quadratura das áreas limitadas por um arco da curva, pelo eixo das abcissas, e por duas paralelas ao eixo das ordenadas[8], depende, nos casos 2.° e 3.°, dos integrais

$$\int (x-\alpha)(x-\gamma)^{\frac{1}{2}} dx \quad \text{e} \quad \int (x-\alpha)^{\frac{1}{2}}(x-\beta) dx \quad ,$$

iguais a

$$2\left[\frac{(x-\gamma)^{\frac{5}{2}}}{5} + (\gamma-\alpha)\frac{(x-\gamma)^{\frac{3}{2}}}{3}\right] \quad \text{e} \quad 2\left[\frac{(x-\alpha)^{\frac{5}{2}}}{5} + (\alpha-\beta)\frac{(x-\alpha)^{\frac{3}{2}}}{3}\right] \quad .$$

No 2.° caso, a área A da parte fechada da curva determina-se pela fórmula

$$A = \frac{8}{15}(\alpha-\gamma)^{\frac{5}{2}} \quad .$$

Mas, no caso de não ser uma curva unicursal, a quadratura da área considerada depende dos integrais elípticos, como vamos indicar agora.

Efectivamente, naquele caso

$$A = \int y dx = \int \sqrt{ax^3 + cx + d} dx \quad ,$$

ou, fazendo

$$g_1 = -4\frac{c}{a} \quad \text{e} \quad g_2 = -4\frac{d}{a} \quad ,$$

[8]No documento original está escrito coordenadas.

$$A = \frac{\sqrt{a}}{2} \int \sqrt{4x^3 - g_1 x - g_2} dx \ .$$

Mas,

$$\int \sqrt{4x^3 - g_1 x - g_2} dx = \frac{1}{3} \int \frac{12x^3 - 3g_1 x - 3g_2}{\sqrt{4x^3 - g_1 x - g_2}} dx \ ,$$

ou, fazendo também

$$\sqrt{4x^3 - g_1 x - g_2} = F(x) \ ,$$

$$\int \sqrt{F(x)} dx = \frac{1}{3} \int \frac{xF'(x) - 2g_1 x - 3g_2}{\sqrt{F(x)}} dx \ .$$

Agora, fazendo a integração por partes de

$$\int x \frac{F'(x)}{F(x)} dx = 2x\sqrt{F(x)} - 2 \int \sqrt{F(x)} dx \ ,$$

resultará

$$\int \sqrt{F(x)} dx = \frac{2}{3} x \sqrt{F(x)} - \frac{2}{3} \int \sqrt{F(x)} dx - \frac{2}{3} g_1 \int \frac{x dx}{\sqrt{F(x)}} - g_2 \int \frac{dx}{\sqrt{F(x)}} \ .$$

Logo,

$$\int \sqrt{F(x)} dx = \frac{2}{5} x \sqrt{F(x)} - \frac{2}{5} g_1 \int \frac{x dx}{\sqrt{F(x)}} - \frac{3}{5} g_2 \int \frac{dx}{\sqrt{F(x)}} \ .$$

Desta forma, conclui-se que *A depende de dois integrais elípticos, um de 1ª espécie e outro de 2ª espécie, que está reduzido à forma normal, adoptada por* WEIERSTRASS.

101.

Reduzindo a equação (4.10) da cúbica considerada à forma

$$y^2 = \frac{a}{4}(4x^3 - g_1 x - g_2) \ ,$$

x e y poderão também ser representados por funções elípticas. Utilizando a função $p(u)$ de Weierstrass, resulta que

$$x = p(u) \text{ e } y = \frac{1}{2}\sqrt{a}p'(u) \ .$$

Partindo desta representação das coordenadas, consegue-se construir a teoria das *Cúbicas Parabólicas* por um método engenhoso, idealizado por CLEBSCH (*Vorlesungen über Geometrie*, II), e generalizar logo os teoremas obtidos neste caso para as cúbicas de qualquer outro nome, fundindo-se na propriedade que possui a primeira curva de poder representar a perspectiva de todas as restantes.

Relativamente a esta tão interessante matéria, cuja detalhada exposição não pode ser efectuada neste momento, devem ser consultadas a obra citada de CLEBSCH e o volume II do *Traité des Functions Elliptiques de Halphen.* Na primeira destas obras, utilizam-se as notações de Jacobi, e na segunda, como em muitas outras, as de Weierstrass. Também se pode consultar o volume III do nosso *Curso de Analyse Infinitesimal*, 1892, p.ª 245 e 254.

X As Cúbicas de Chasles

102.

As *Parábolas Divergentes* não constituem o único grupo de cúbicas, que podem representar as perspectivas de todas as curvas deste nome. A mesma interessante propriedade possui outro grupo de cúbicas, indicado por CHASLES no seu *Aperçu historique* (2.ª ed., p.ª 146 e 348), cuja equação geral é determinada a partir daquela que é deduzida no número 96,

$$ax_1^3 + bx_1^2 z_1 + cx_1 z_1^2 + dz_1^3 = y_1^2 z \ ,$$

fazendo,

$$x = \frac{x_1}{y_1} = \frac{a_1 X + b_1 Y + c_1}{a_2 X + b_2 Y + c_2} \quad \text{e} \quad y = \frac{z_1}{y_1} = \frac{a_3 X + b_3 Y + c_3}{a_2 X + b_2 Y + c_2} \ ,$$

com o qual se obtém esta outra, que é a pretendida:

$$y = ax^3 + bx^2 y + cxy^2 + dy^3. \tag{4.15}$$

Entre as *Parábolas Divergentes* de NEWTON e as *cúbicas com centro* de CHASLES, ainda que com muitas distintas aparências, existe uma relação analítica bastante simples. Façamos na equação (4.15), em vez de x e y, estes outros valores

$$x = \frac{X_1}{Y_1} \quad \text{e} \quad y = \frac{1}{Y_1}, \tag{4.16}$$

e imediatamente aquela equação, do segundo grupo de curvas, se transforma na que corresponde ao primeiro mencionado,

$$Y_1^2 = aX_1^3 + bX_1^2 + cX_1 + d. \tag{4.17}$$

As equações (4.16) definem uma transformação homográfica, designada pelo nome de *transformação de Newton*, já utilizada, e em parte também estudada, no número

48. Tanto que, aplicando agora o que já se referiu, podemos concluir que qualquer das curvas, representadas pela equação (4.15), não terá nenhum *ponto múltiplo*, se a curva correspondente, compreendida na equação (4.17) também não tiver. Mais, se a curva definida em (4.17) possui um *nó*, ou um *ponto de retrocesso*, a curva definida pela equação (4.15) possuirá também um ponto de igual nome. Ao qual podemos ainda agregar que os pontos de inflexão da curva representada por (4.15), correspondem aos pontos de inflexão, também da curva, na equação (4.17) contida. Esta última proposição demonstra-se tomando a equação, definida em (β) do número 48,

$$\frac{dx}{dy} = X_1 - Y_1 \frac{dX_1}{dY_1} \ ,$$

e combinando-a com a segunda das equações (4.16), do qual resulta

$$\frac{d^2x}{dy^2} = Y_1^3 \frac{d^2X_1}{dY_1^2} \ .$$

Assim, vê-se que os pontos de inflexão da curva cuja equação é a (4.15), se deduzirão dos da equação (4.17), fazendo nas equação (4.16) os valores encontrados de X_1 e Y_1, de onde se deduz os de x e y.

103.

Representando por α, β e γ as raízes da equação

$$at^3 + bt^2 + ct + d = 0 \ ,$$

a equação (4.15) pode escrever-se do seguinte modo:

$$y = a(x - \alpha y)(x - \beta y)(x - \gamma y). \tag{4.18}$$

Através da qual se determina facilmente a forma das Cúbicas de CHASLES, considerando os mesmos casos que no estudo análogo das várias figuras Parabólicas, antes

consideradas. Convém advertir que todas as Cúbicas de CHASLES possuem um *centro*, coincidente com a origem das coordenadas, e um *ponto de inflexão* no mesmo centro, e que a tangente à curva neste ponto se confunde com o eixo das abcissas.

Caso 1.º - Se as raízes α, β e γ são reais e distintas, a curva constante de três ramos distintos, como os representados na figura 34. As rectas KL, K_1L_1 e K_2L_2 que têm respectivamente por equações

$$x - \alpha y = 0 \ , \quad x - \beta y = 0 \ \text{ e } \ x - \gamma y = 0 \ ,$$

serão assimptotas da curva. O ramo AOB terá três pontos de inflexão, em A, O e B, situados em linha recta. Mas os outros dois ramos carecerão de pontos deste nome.

Caso 2.º - Se $\alpha = \beta$ e $\alpha > \gamma$, também a curva possuirá três assimptotas reais, duas das quais serão paralelas uma à outra, e estarão determinadas as três pelas equações:

$$x = \gamma y \ \text{ e } \ x = \alpha y \pm \sqrt{\frac{1}{a(\alpha - \gamma)}} \ .$$

Este caso corresponde ao segundo dos considerados no estudo das formas das Parábolas Divergentes, no qual a curva possui *um ponto de inflexão real* na origem das coordenadas, *dois imaginários*, e um *nó* no infinito, sendo a sua forma a indicada na figura 35.

Caso 3.º - Se $\alpha = \beta$ e $\alpha < \gamma$, a curva tem uma *assimptota real* e duas *imaginárias*, um *nó* também no infinito, e três *pontos de inflexão reais*, conforme indica o ramo único AOB da primeira figura antecedente, à que substancialmente se reduz a cúbica no caso de que se trata.

Caso 4.º - Se $\alpha = \beta = \gamma$, a curva carece de assimptota à distância finita, e possui um *ponto de inflexão* em O, e outro de *retrocesso* no infinito, assemelhando-se a sua forma à do ramo AOB da segunda figura.

Caso 5.º - Se α e β fossem raízes imaginárias, a curva correspondente teria *duas*

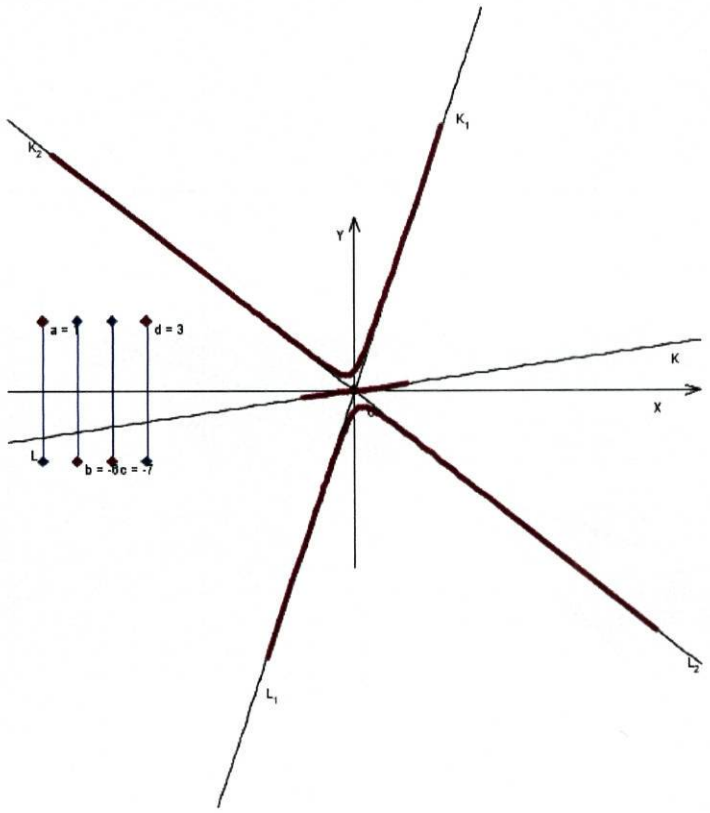


Figura 34: Cúbicas de Chasles, quando α, β e γ são raizes reais e distintas

assimptotas deste nome, *uma real* ainda determinada pela equação $x = \gamma y$, e constaria de um só ramo, sem *pontos duplos*, e com *três pontos de inflexão* em linha recta, como o ramo AOB da figura 34.

Às cinco formas Cúbicas de CHASLES, que acabamos de considerar, e às outras cinco Parábolas Divergentes, à pouco também consideradas, correspondem cinco distintos cones, sobre os quais, em virtude dos teoremas de NEWTON e do mesmo CHASLES, podem adaptar-se todas as cúbicas. As propriedades destes cones foram expostas e analisadas por MÖBIUS no volume correspondente ao ano 1853, das *Abhand. der Sächs Ges. zu Leipzig*, e por CAYLEY no correspondente ao ano 1866, das *Transactions of the Cambridge Philosophical Society.*

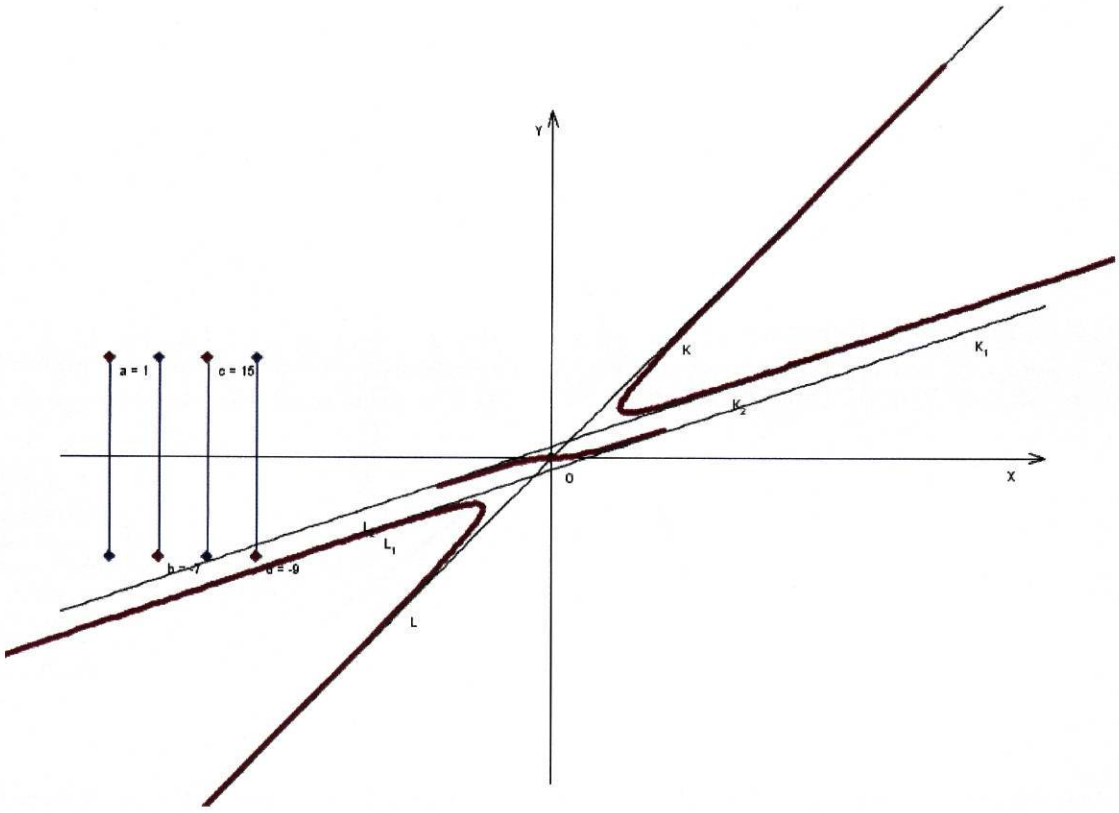


Figura 35: Cúbicas de Chasles, quando $\alpha = \beta$ e $\alpha > \gamma$

XI Conclusão - Notícia bibliográfica sobre as cúbicas em geral

104.

Com o exposto nos dois últimos parágrafos, a propósito das *Parábolas Divergentes* e das *Cúbicas de Chasles*, damos por terminada a parte deste livro, referente ao estudo das curvas de 3ª ordem, individualmente consideradas, mais notáveis.

A exposição da *Teoria* geral das *cúbicas* abrem caminho, e podem servir como introdução, às propriedades apontadas de ambos os grupos especiais de curvas, apoiando-

se para tal no teorema de NEWTON, ampliado por CHASLES, que permite passar do particular ao geral, ou estender a todas as cúbicas, no seu importante e fecundo conceito de *perspectivas* das Parábolas Divergentes, ou das cúbicas do mesmo CHASLES, os resultados mais salientes do estudo daqueles dois tão interessantes grupos.

Com o plano do nosso modesto trabalho é incompatível o intento de expôr a *Teoria geral* das cúbicas, nem mesmo um superficial esboço. Limitamo-nos, para concluir, à consignação de alguns nomes e datas, de bastante interesse na história do assunto.

NEWTON, em primeiro lugar, estabeleceu as bases da *Teoria* na sua obra fundamental, já nas anteriores páginas várias vezes mencionada, que tem por título *Enumeratio linearum tertii ordinis*, 1706, na qual se encontram consignadas as diversas formas que podem apresentar as *cúbicas*. Livro este, pouco depois, continuado e completado por STIRLING com outro título *Lineætertii ordinis newtonianæ*, 1717; por MACLAURIN, no seu *Geometria orgânica*, etc., 1720; por NICOLE, no seu *Traité des Lignes du troisième degré*, 1729 e 1731; por EULER, no seu *Introductio in analysin infinitorum*, 1748; por CRAMER, no seu *Introduction a l'Analyse de Lignes Courbes Algébriques*, 1750[9] etc., etc.

Estes geómetras foram sucessivamente completando e demonstrando os resultados descobertos por NEWTON, e enriqueceram a doutrina matemática destas curvas com novas e muito interessantes proposições. Na magistral *História de las Matemáticas*, por M. CANTOR (*Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Leipzig*, t. III, 1898), pode ver-se a parte que cada um dos matemáticos mencionados corresponde no desenvolvimento de tão belo e fecundo capítulo da *Geometria de las Curvas planas.*

Muito mais tarde, PLÜCKER, no seu *System der analytischen Geometrie*, 1835, propôs uma nova e mais completa enumeração das curvas de terceira ordem, estudada de novo por CAYLEY no livro já mencionado, onde está consignada a sua *Classification of cubic Curves.* Na subtil e minuciosa consideração destas curvas ocupar-se-ão SALMON, no seu já clássico livro intitulado *Higher plane curves*; DUREGE, na sua obra intitulada *Die ebenen*

[9]No documento original está escrito *Introduction à l'Analyse des Lignes courbes*, 1750.

Curven dritter Ordnung, Leipzig, 1871; e CLEBSCH, nos seus *Vorlesungen über Geometrie*, traduzidos para francês, e distribuídos em três volumes com o título de *Léçons de Géométrie* (1879-80-83), no segundo dos qual se trata abundantemente da matéria a que agora nos referimos.

Destes e de outros muitos trabalhos, de empenho e transcendência, sobre a *Teoria da Curvas*, encontrará o curioso leitor muitas numerosas e bem dirigidas notícias na obra do ilustre professor italiano G. LORIA, *Il Passato ed il Presente delle Principali Teorie Geometriche* (Torino, 1896, p. 61)[10].

[10]No documento original está escrito *Il Passato ed il Presente delle Principale Teorie Geometriche* (Torino, 1896, p. 61).

Capítulo 5

Quárticas Notáveis

I As Espíricas de Perseo

105.

Designam-se por *Espíricas de Perseo*[1] as curvas resultantes da intersecção de um *toro*[2] por planos paralelos ao eixo da superfície. Segundo o testemunho de PROCLO, estas curvas fixaram a atenção de PERSEO, geómetra que se supõe ter vivido cerca de 130 anos antes de Cristo. No *Vocabulario de términos geométricos*, mais antigo que a obra de PROCLO, atribuído a HERÓN DE ALEXANDRIA, advertiu CHASLES, no seu *Aperçu historique* (1875, p. 271), que se citam também estas curvas, mas sem expressar quem foi

[1]Raiz comum dos vocábulos *Espíricas* e *espirais* parece ser a palavra grega $\sigma\pi\epsilon\iota\rho\alpha$: espira, em português, cada uma das voltas da espiral, configuração da espiral, rosca do parafuso, conjunto das circunvoluções ou voltas que apresentam algumas conchas univalves. Mas ainda que as palavras tenham a mesma origem os conceitos geométricos correspondentes são muito diferentes. Existiram autores que confundiram os dois conceitos, tais como, Chasles e Montucla, que atribuiram sem qualquer fundamento a invenção das espirais a Perseo.

[2]Do grego, $\tau o\rho o\varsigma$, em latim *torus*, que, entre muitas e variadas acepções, tem as de *corda delgada* e de *moldura circular na base das colunas.*

o primeiro matemático que as inventou ou afirmou conhecer aos seus sucessores.

A equação do *toro*, do sólido engendrado por um círculo, quando gira e dá uma volta completa em redor de uma linha recta (eixo do toro), situada no seu mesmo plano, é a seguinte:

$$(l \pm \sqrt{x^2 + z^2})^2 = R^2 - y^2 \ ,$$

supondo que por eixo de revolução se toma o eixo das ordenadas, e que R representa o raio do círculo gerador, e l a distância do centro deste círculo ao eixo da superfície.

A secção produzida nesta superfície por um plano paralelo ao seu eixo conserva sempre, por definição, a mesma forma, qualquer que seja a posição do plano, desde que a sua distância ao eixo permaneça constante.

Supondo, pois, o plano secante paralelo a xOy, ou $z = c$, para equação da secção, referida a um sistema de coordenadas, traçadas naquele plano, paralelamente aos eixos das abcissas e ao eixo das ordenadas, e cuja origem seja o ponto de intersecção do mesmo plano com o eixo das cotas, teremos

$$(l \pm \sqrt{x^2 + c^2})^2 = R^2 - y^2, \tag{5.1}$$

ou

$$(x^2 + y^2 + l^2 + c^2 - R^2)^2 = 4l^2(x^2 + c^2). \tag{5.2}$$

As *Espíricas* de Perseo são, pois, curvas de *quarta* ordem, cuja forma é fácil determinar.

106.

Da sua equação, ou da sua definição geométrica, resulta, em primeiro lugar, que as curvas consideradas não têm ramos infinitos.

E as equações

$$(x^2 + y^2 - l^2 + c^2 - R^2)x = 0$$

$$(x^2 + y^2 + l^2 + c^2 - R^2)y = 0 \ ,$$

obtidas por derivação da equação anterior, em relação a x e a y, mostram ainda que a origem das coordenadas é um ponto duplo quando se verifica a condição

$$l \pm c = \pm R, \tag{5.3}$$

e que este caso é o único em que as Espíricas admitem pontos daquele nome à distância finita. Em qualquer destas suposições, os planos secantes, geradores das Espíricas, são tangentes ao toro, e, não considerando o caso de ser $c = -l - R$, porque c deve ser positiva, nem o caso de ser $c = l + R$, porque então não existe curva, a equação (5.2) adquire a forma

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2y^2 + b^2x^2 \ ,$$

na qual

$$a^2 = 4lc \ \text{ e } \ b^2 = 4l(l + c) \ ,$$

quando $l + c = R$;

e a forma

$$(x^2 + y^2)^2 = b^2x^2 - a^2y^2 \ ,$$

donde

$$a^2 = 4lc \ \text{ e } \ b^2 = 4l(l - c) \ ,$$

quando $l - c = R$.

Nestes casos, que mais adiante estudaremos mais a fundo, as *Espíricas* recebem o nome de *Lemniscatas*[3].

[3]De $\lambda\eta\mu\nu\iota\sigma\chi o\varsigma$, ou *lemniscus*: faixa ou banda, ou cinta estreita, anudada na figura de *ocho*, etc.

107.

Quando não se verifica a condição (5.3), as Espíricas compõem-se de um ou de dois ramos fechadas, completamente separadas uma da outra, e simétricas relativamente aos eixos coordenadas. Para determinar a forma e a posição destes ramos procuremos, antes de mais, determinar os pontos em que as abcissas ou as ordenadas adquirem valores máximos ou mínimos.

A equação, *derivada* da equação (5.2),

$$(x^2+y^2+l^2+c^2-R^2)ydy+(x^2+y^2-l^2+c^2-R^2)xdx=0$$

mostra que o valor de y será máximo ou mínimo, quando $x=0$, e também quando $x^2+y^2-l^2+c^2-R^2=0$. Ou, noutros termos, quando se verifica algumas das igualdades

$$x=0 \text{ ou } x=\pm\sqrt{l^2-c^2} \ ,$$

aos quais correspondem os seguintes valores de y, determinados a partir da equação (5.1), por substituição nesta equação dos valores de x,

$$y=\pm\sqrt{R^2-(l\pm c)^2} \text{ e } y=\pm R \ ,$$

excluindo os de $y=\pm\sqrt{R^2-4l^2}$, que não satisfazem a equação $y'=0$.

A mesma equação mostra que x adquirirá valores máximos ou mínimos, quando $y=0$ ou $x^2+y^2+l^2+c^2-R^2=0$. Esta equação combinada com a equação (5.1), produz para x valores imaginários. Logo, as Espíricas só admitem abcissas máximas ou mínimas nos pontos determinados pelas coordenadas

$$x=\pm\sqrt{(\pm R-l)^2-c^2} \text{ e } y=0 \ .$$

Consideremos diferentes casos, correspondentes à diferentes distâncias do plano secante ao eixo do toro. Nos três primeiros casos é suposto que o toro seja *aberto*, ou $l>R$, os outros supõe-se que o toro é *fechado* ou $l<R$.

Caso 1.º - Seja $l > R$ (*toro aberto* e $l \leq c < l + R$). Dos pontos em que as ordenadas são máximas ou mínimas, somente resultam reais os seguintes:

$$[x = 0, y = \pm\sqrt{R^2 - (l - c)^2}] \ ,$$

e daqueles em que as abcissas são máximas ou mínimas, estes outros

$$[x = \pm\sqrt{(R + l)^2 - c^2}, y = 0] \ .$$

A curva apresenta então a forma de um oval (figura 36), cujos eixos, EC e DB, são iguais a

$$2\sqrt{R^2 - (l - c)^2} \ \text{ e } \ 2\sqrt{(R + l)^2 - c^2} \ .$$

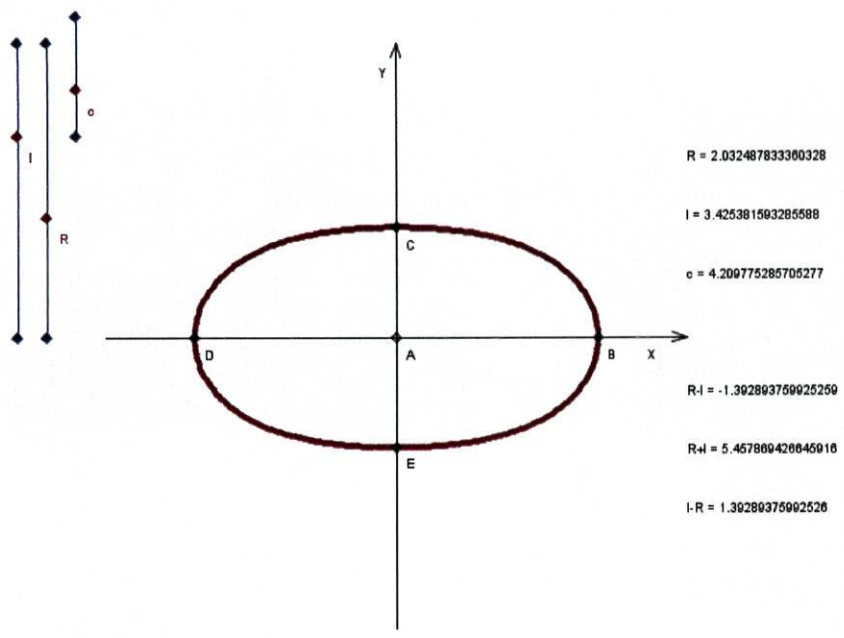


Figura 36: *Espíricas* de Perseo, quando $l > R$ e $l \leq c < l + R$

Caso 2.º - Quando $l > R$ e $l - R < c < l$, dos pontos em que y é máxima ou mínima resultam reais os determinados pelas expressões:

$$[x = 0, y = \pm\sqrt{R^2 - (l-c)^2}] \ , \ [x = \pm\sqrt{l^2 - c^2}, y = \pm R] \ .$$

E dos pontos em que x é máxima ou mínima, são reais os seguintes:

$$[x = \pm\sqrt{(R+l)^2 - c^2}, y = 0] \ .$$

A curva tem então a forma indicada na figura 37, na qual

$$FB = 2\sqrt{(R+l)^2 - c^2} \ ,$$

$$HD = 2\sqrt{R^2 - (l-c)^2} \ ,$$

$$PQ = 2\sqrt{l^2 - c^2} \ \text{ e}$$

$$AC = 2R \ .$$

Caso 3.º - Se $l > R$ e $c < l - R$, resultará máxima ou mínima nos pontos

$$[x = \pm\sqrt{l^2 - c^2}, y = \pm R] \ ,$$

e x, analogamente, máxima ou mínima, nos pontos que têm por coordenadas

$$[x = \pm\sqrt{(\pm R - l)^2 - c^2}, y = 0] \ .$$

Logo, a curva será da forma indicada na figura 38, na qual

$$OA = \sqrt{(R-l)^2 - c^2} \ ,$$

$$OC = 2\sqrt{(R+l)^2 - c^2} \ ,$$

$$DB = 2R \ \text{ e}$$

$$OL = \sqrt{l^2 - c^2} \ .$$

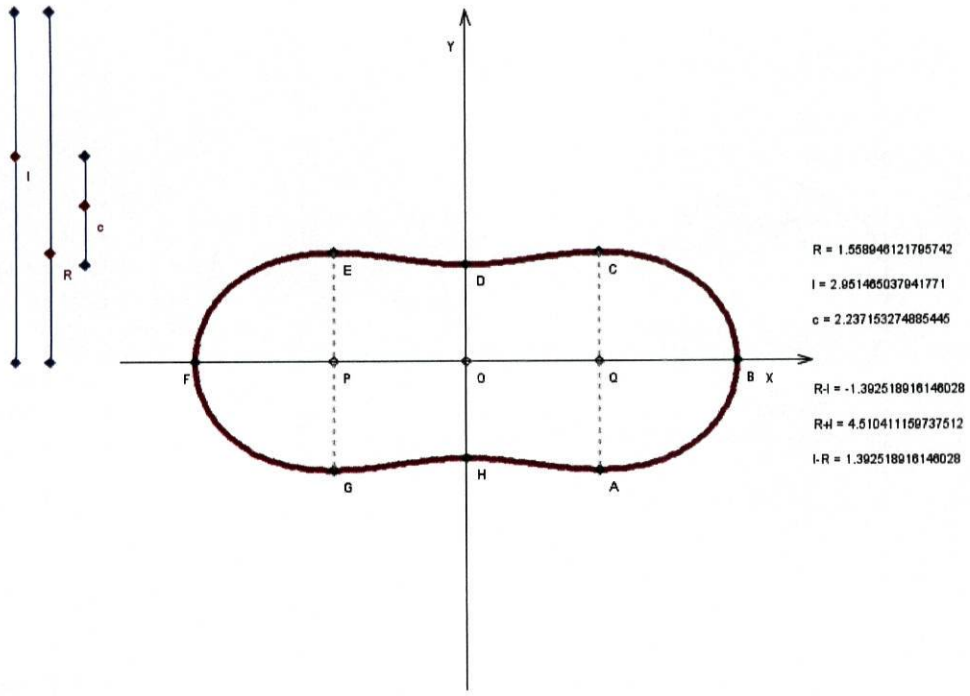


Figura 37: *Espíricas* de Perseo, quando $l > R$ e $l - R < c < l$

Caso 4.° - Suponhamos agora que $l < R$ (*toro fechado*) e $l < c < R + l$. Neste caso, y é máximo ou mínimo nos pontos quando é $c > R - l$, e também nos mesmos pontos, e nestes outros ainda:

$$[x = 0, y = \pm\sqrt{R^2 - (l + c)^2}] \ ,$$

quando $c < R - l$.

De modo análogo, x será máximo ou mínimo nos pontos

$$[x = \pm\sqrt{(R + l)^2 - c^2}, y = 0] \ ,$$

quando $c > R - l$, e máxima e mínima também nesses mesmos pontos, e ainda nos seguintes:

$$[x = \pm\sqrt{(R - l)^2 - c^2}, y = 0] \ ,$$

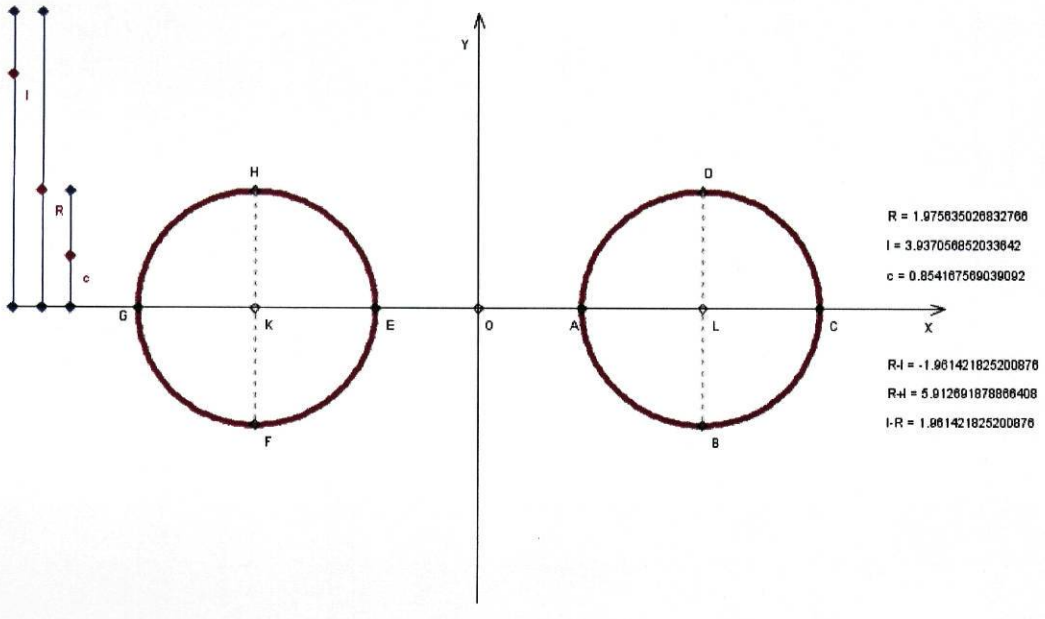


Figura 38: *Espíricas* de Perseo, quando $l > R$ e $c < l - R$

quando $c < R - l$.

No primeiro destes casos, a curva é composta por um oval único, cujos eixos são iguais a

$$2\sqrt{R^2 - (l-c)^2} \text{ e } 2\sqrt{(R+l)^2 - c^2} \ ,$$

no segundo, a curva é composta por dois ovais, um dentro do outro, cujos eixos são respectivamente iguais a

$$2\sqrt{R^2 - (l-c)^2} \ , \ 2\sqrt{(R+l)^2 - c^2}$$

e

$$2\sqrt{R^2 - (l+c)^2} \ , \ 2\sqrt{(R-l)^2 - c^2} \ .$$

Caso 5.º - Se $l < R$ e $R - l < c < l$, as ordenadas serão máximas ou mínimas nos pontos

$$[x = \pm\sqrt{l^2 - c^2}, y = \pm R] \ , \ [x = 0, y = \pm\sqrt{R^2 - (l - c)^2}] \ ,$$

e máximas ou mínimas as abcissas nos pontos,

$$[x = \pm\sqrt{(R + l)^2 - c^2}, y = 0] \ .$$

A curva terá, pois, uma forma parecida com a forma da curva do segundo caso.

Caso 6.º - E, por último, se $l < R$, $c < R - l$ e $c < l$, a ordenada y será máxima ou mínima nos pontos

$$[x = 0, y = \pm\sqrt{R^2 - (l \pm c)^2}] \ , \ [x = \pm\sqrt{l^2 - c^2}, y = \pm R] \ ,$$

e, a abcissa x, máxima ou mínima, também nos pontos

$$[x = \pm\sqrt{(\pm R - l)^2 - c^2}, y = 0] \ .$$

A curva compõe-se, assim, de um ramo, semelhante à curva considerada no segundo caso, e de um oval, colocado no interior daquele ramo, cujos eixos têm por expressão

$$2\sqrt{R^2 - (l + c)^2} \ , \ 2\sqrt{(R - l)^2 - c^2} \ .$$

108.

Investigando as assimptotas das Espíricas pelo método conhecido, determina-se que estas assimptotas são imaginárias, e estão definidas pelas equações

$$y = ix \pm il \ \text{ e } \ y = -ix \pm il \ .$$

Através destas assimptotas, chega-se à conclusão que *as Espíricas possuem dois pontos no infinito.*

109.

Para determinar os *focos* das Espíricas, comecemos, por advertir que as assimptotas, cujas equações acabamos de determinar, intersectam-se em quatro pontos, que são (Número 48) *focos singulares* da curva à qual as assimptotas se referem. Dois destes focos serão *reais*, e têm por expressão analítica a seguinte: $(x = \pm l, y = 0)$, e os outros dois *imaginários*, determinados pelas coordenadas $(x = 0, y = \pm il)$.

Os *focos ordinários* (Número 48), também podem determinar-se facilmente. Para o qual propusemos recentemente um procedimento elementar e simples no volume correspondente ao ano 1900 de *El Progreso Matemático*, que publicou em Zaragoza o professor Sr. Galdeano. Mas o método que vamos expôr, de carácter elementar, nos parece todavia mais simples.

Consideremos a recta representada pela equação

$$y = ix + k \quad ,$$

que deve ter com a curva definida pela equação (5.2) dois pontos de intersecção, cujas abcissas se determinam com o auxílio desta outra:

$$4(k^2 + l^2)x^2 - 4ki(k^2 + l^2 + c^2 - R^2)x + 4l^2c^2 - (k^2 + l^2 + c^2 - R^2)^2 = 0 \quad .$$

Para que a recta em questão seja tangente à curva, os pontos de intersecção de ambas as linhas devem coincidir um com o outro, ou ser iguais, em consequência, as duas raízes da equação anterior. Logo, deverá verificar-se que

$$k^2(k^2 + l^2 + c^2 - R^2)^2 + (k^2 + l^2)[4l^2c^2 - (k^2 + l^2 + c^2 - R^2)^2] = 0 \quad ,$$

ou

$$(k^2 + l^2)^2 - 2(k^2 + l^2)(c^2 + R^2) + (c^2 - R^2)^2 = 0 \quad ,$$

ou, como facilmente se conclui daqui,

$$k^2 = (c \pm R)^2 - l^2 \quad .$$

A equação das tangentes à curva considerada, de coeficiente angular i, terá, segundo isto, por expressão

$$y = +ix \pm \sqrt{(c \pm R)^2 - l^2} \ .$$

E se o coeficiente angular fosse $-i$, determinava-se, para equação das tangentes, esta outra expressão:

$$y = -ix \pm \sqrt{(c \pm R)^2 - l^2} \ .$$

Todas estas tangentes constituem, pois, dois grupos de quatro rectas cada um, e as intersecções das rectas de um grupo com as do outro determinam *dezasseis* pontos, que são precisamente os focos *ordinários* da espírica considerada.

Dos *dezasseis* focos existirá quatro que são reais, correspondentes às intersecções das rectas de um grupo com as suas respectivas conjugadas do outro. Sendo necessário, para determinar as suas coordenadas, distinguir na discussão diversos casos.

1.° Se $l^2 < (R - c)^2$, os radicais que figuram nas equações dos dois grupos de rectas serão reais, e os quatros focos deste nome terão por coordenadas

$$[x = 0, y = \pm\sqrt{(c \pm R)^2 - l^2}] \ .$$

2.° Se $l^2 > (R + c)^2$, os mencionados radicais serão imaginários, e escrevendo as equações das rectas a que corresponde da seguinte forma,

$$y = i[x \pm \sqrt{l^2 - (c \pm R)^2} \quad \text{e} \quad y = -i[x \pm \sqrt{l^2 - (c \pm R)^2} \ ,$$

adverte-se imediatamente que as coordenadas dos focos reais serão as seguintes:

$$[x = \pm\sqrt{l^2 - (c \pm R)^2}, y = 0] \ .$$

3.° Se $(R - c)^2 < l^2 < (R + c)^2$, de modo análogo se conclui que as coordenadas dos focos reais serão

$$[x = \pm\sqrt{l^2 - (R - c)^2}, y = 0] \quad \text{e} \quad [x = 0, y = \pm\sqrt{(R + c)^2 - l^2}] \ .$$

110.

As conclusões precedentes devem modificar-se quando $l = R \pm c$, ou quando (número 106) a origem das coordenadas constitua um *ponto duplo* da curva.

De facto, se $l = R - c$ as equações das rectas, secantes à curva em dois pontos coincidentes um com o outro, e que têm por coeficientes angulares i ou $-i$, reduzem-se às seguintes:

$$y = ix, y = ix \pm 2\sqrt{Rc} \text{ ou } y = -ix, y = -ix \pm 2\sqrt{Rc} \ .$$

Das quais as $y = ix$ e $y = -ix$ passam pelo ponto duplo, onde têm dois pontos comuns com a curva, sem ser tangentes a esta, pelo qual não determinam nenhum foco. Enquanto que as outras rectas se intersectam em quatro distintos pontos e determinam quatro focos *ordinários*, dos quais são reais dois, definidos pelas coordenadas,

$$[x = 0, y = \pm 2\sqrt{Rc}] \ .$$

Do mesmo modo concluir-se-á que, quando $l = R + c$, a curva possui também quatro focos, entre os quais dois são reais, cujas coordenadas têm por expressão

$$[x = \pm 2\sqrt{Rc}, y = 0] \ .$$

111.

As *Espíricas de Perseo* são um caso particular de uma muita extensa classe de curvas, denominadas também *Espíricas*, que compreendem todas as secções planas do toro. Estas curvas foram estudadas por PAGANI numa Memória premiada em 1824 pela Academia de Bruxelas, e depois por DARBOUX (*Nouvelles Annales*, 1864, p.156), por LA GOURNERIE (*Journal de Liouville*, 1869, p.9), etc. Sendo de advertir que as Espíricas, em geral, se acham contidas noutra classe mais ampla de curvas, a qual trataremos mais adiante.

II As Cassínicas

112.

Pertencem à classe das *Espíricas* de Perseo as curvas planas, engendradas por um ponto móvel, de tal modo que o produto das suas distâncias a dois pontos fixos, situados no mesmo plano da curva, seja constante. Distingue-se em particular estas curvas com o nome de *ovais de Cassini*, ou simplesmente de *Cassínicas*, por terem sido consideradas pelo célebre astrónomo Dominico CASSINI, que pretendeu substitui-las pelas elipses de KEPLER no estudo do movimento dos astros.

Sejam $2l$ a distância dos pontos fixos considerados, F e F' (figura 39), e m a constante dada. Designado por M o ponto gerador da curva, por definição resulta que

$$MF \times MF' = m \ .$$

Tomando a recta FF' para eixo das abcissas, e seu ponto médio como origem das coordenadas,

$$\sqrt{(x-l)^2+y^2} \times \sqrt{(x+l)^2+y^2} = m \ \text{ ou } \ (x^2+y^2+l^2)^2 = m^2 + 4l^2x^2 \ ,$$

ou, fazendo, $m^2 = 4l^2c^2$,

$$(x^2+y^2+l^2)^2 = 4l^2(x^2+c^2) \ .$$

113.

Comparando esta equação com a equação (5.2) do número 105, vê-se que as *Cassínicas* coincidem com as *Espíricas* resultantes de intersectar o toro por um plano paralelo ao eixo, e cuja distância a este eixo seja igual ao raio do círculo gerador da superfície.

Fazendo, pois, $R = c$, nos resultados obtido no número 107, por referência às Espíricas,

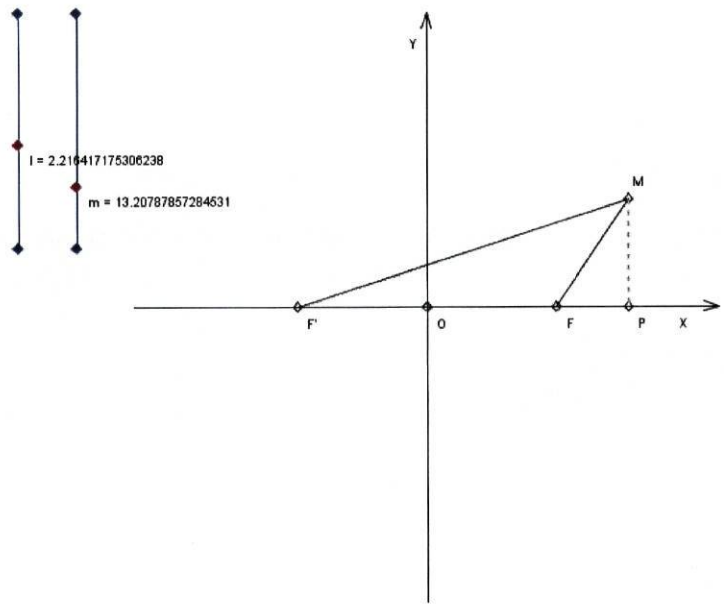


Figura 39: Procedimento para a construção das Cassínicas

conclui-se sem dificuldade que as curvas de CASSINI, desprovidas dos pontos *duplos*, à distância finita, admitem três formas distintas.

Caso 1.º - Se $l > 2c$ (caso 3.º das Espíricas), a curva será composta por dois ovais, como na figura 33.

Caso 2.º - Se $2c > l > c$ (caso 2.º das Espíricas), a curva terá a forma indicada na figura 32.

Caso 3.º - Se $l \leq c$ (caso 4.º das Espíricas), a curva terá a forma de uma elipse. Tanto que alguns autores aplicam à curva o nome de *elipse de Cassini* (figura 36).

No caso de acontecer $l = 2c$, a curva reduz-se à chamada *Lemniscata de Bernoulli*, a

qual vamos estudar mais adiante, e que tem por equação

$$(x^2 + y^2)^2 = 8c^2(x^2 - y^2) \ .$$

114.

A equação das *Cassínicas*, em coordenadas polares, é

$$\rho^4 - 2l^2\rho^2 \cos 2\theta + l^4 = 4l^2c^2 \ .$$

Partindo desta equação e com o auxílio das fórmulas conhecidas

$$\operatorname{sen} V = \rho\frac{d\theta}{ds} \ , \quad \cos V = \frac{d\rho}{ds} \ ,$$

nas quais s representa o comprimento dos arcos da curva, e V o ângulo da tangente com o raio vector do ponto de contacto, se obterá facilmente a expressão do *raio de curvatura* das curvas consideradas pelo método seguinte (CESÃRO: *Lezioni di Geometria intrinseca*, Napoli, 1896, p. 42).

Derivando a equação da curva relativamente a s, e tendo em conta as igualdades anteriores, deduz-se que

(A)

$$\rho^2 \cos V = l^2 \cos(2\theta - V) \ .$$

Eliminando ρ entre esta equação e a da curva, vem a seguinte

(B)

$$l \operatorname{sen} 2\theta = 2c \cos V \ .$$

Derivando de novo esta equação, relativamente a s, obtem-se

$$l \cos 2\theta \frac{d\theta}{ds} = -c \operatorname{sen} V \frac{dV}{ds} \ ,$$

e, portanto,

$$\frac{dV}{ds} = -\frac{l}{c} \cdot \frac{\cos 2\theta}{\operatorname{sen} V} \cdot \frac{d\theta}{ds} = -\frac{l}{c} \cdot \frac{\cos 2\theta}{\rho} \quad .$$

Advirtamos agora que, representando por φ o ângulo formado pela tangente à curva com o eixo das abcissas,

$$\theta = \varphi + V \quad .$$

Em consequência, recordando a igualdade conhecida $\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{R}$, na qual R representa o raio de curvatura,

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{R} - \frac{l}{c\rho} \cos 2\theta \quad .$$

Notemos que das expressões (A) e (B) vem esta outra,

$$\rho^2 = \frac{l^2(\cos 2\theta \cos V + \operatorname{sen} 2\theta \operatorname{sen} V)}{\cos V} = l^2 \cos 2\theta + 2cl \operatorname{sen} V \quad .$$

A qual combinada com a equação da curva, produz os seguintes resultados:

$$\cos 2\theta = \frac{\rho^4 + l^4 - 4l^2c^2}{2l^2\rho^2} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen} V = \frac{\rho^4 - l^4 + 4l^2c^2}{4cl\rho^2} \quad .$$

Portanto,

$$\frac{1}{R} = \frac{\operatorname{sen} V}{\rho} + \frac{l}{c\rho} \cos 2\theta = \frac{3\rho^4 + l^4 - 4l^2c^2}{4cl\rho^3} \quad .$$

Esta igualdade determina o raio de curvatura das Cassínicas, em função do raio vector, ρ, do ponto a que se refere.

115.

Aplicando às *Cassínicas* o procedimento de investigação dos focos, explicado no número 109, ao tratar das *Espíricas*, em cuja classe estão compreendidas, encontram-se os mesmos resultados de então, com a simplificação conseguinte ao supôr agora que $R = c$.

Assim, imediatamente se infere que as Cassínicas têm dois focos singulares reais, definidos pelas coordenadas $(\pm l, 0)$, e *quatro* mais ordinários, reais também, cujas coordenadas são

$$(x = \pm l, y = 0) \text{ e } (x = \pm\sqrt{l^2 - 4c^2}, y = 0) \ ,$$

quando $l > 2c$, e

$$(x = \pm l, y = 0) \text{ e } (x = 0, y = \pm\sqrt{4c^2 - l^2}) \ ,$$

quando $l < 2c$.

Donde se conclui que os pontos F e F' (figura 39), que têm por coordenadas $x = \pm l$ e $y = 0$, podem considerar-se à vez como *focos singulares e ordinários da mesma curva.*

116.

Por intermédio da expressão de R, obtida no número 114, determina-se facilmente a condição para que a curva tenha *pontos de inflexão reais*, assim como se determinam também as coordenadas destes pontos. De facto, procurando os valores de ρ que correspondem aos valores de $R = \infty$, determina-se que os pontos reais de inflexão da curva são os de intersecção desta com a circunferência definida pela equação

$$x^2 + y^2 = \rho^2 = \sqrt{\frac{1}{3}(4l^2c^2 - l^4)} \ ,$$

sempre que se verifique a condição $l \leq 2c$, e que ao mesmo tempo a curva intersecte a circunferência. Esta última condição determina-se eliminando y^2 entre as equações de ambas as curvas consideradas (número 112 e 116), e expressando logo que o valor de x^2, que satisfaz a *resultante*, é positivo. Daqui podemos escrever que

$$\sqrt{\frac{1}{3}(4l^2c^2 - l^4)} + l^2 > 2lc \text{ ou } (l - 2c)(l - c) < 0 \ ,$$

ou simultaneamente, $l \leq 2c$ e $l > c$, como no segundo caso dos considerados no número 113, e também no da *Lemniscata.*

117.

A rectificação das curvas de Cassini obtém-se por intermédio dos integrais elípticos de primeira espécie, conforme mostrou *Serret* no *Journal de Liouville*, t. VIII, p. 145 e no seu *Cours de Calcul Dif. et Intégral*, t. II, 1880, p. 260 , onde procede a análise à continuação emplementada para determinar as fórmulas de resolução de tão interessante problema.

Seja, em primeiro lugar, $l > 2c$, neste caso a curva compõe-se de dois ovais iguais. Considerando um destes oval, tracemos pela origem das coordenadas duas rectas que a intersectem. Sejam θ_0 e θ_1 os ângulos que estas rectas formam com o eixo das abcissas. Entre ambas as rectas estão compreendidos dois arcos do oval considerado, cujos comprimentos, s e s_1, vamos determinar.

Fazendo na equação polar da curva $2c = l \operatorname{sen} 2\alpha$, vem que

$$\rho^2 = l^2[\cos 2\theta \pm \sqrt{\cos^2 2\theta - \cos^2 2\alpha}] \ .$$

Donde se deduz que,

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \mp \frac{\rho \operatorname{sen} 2\theta}{\sqrt{\cos^2 2\theta - \cos^2 2\alpha}} \ ,$$

e

$$\rho^2 + \frac{d\rho^2}{d\theta^2} = \rho^2 \frac{1 - \cos^2 2\alpha}{\cos^2 2\theta - \cos^2 2\alpha} = \frac{4c^2\rho^2}{l^2(\cos^2 2\theta - \cos^2 2\alpha)} \ .$$

Os comprimentos dos arcos considerados determinam-se, pois, pelas expressões seguintes:

$$s = 2c \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{\sqrt{\cos 2\theta + \sqrt{\cos^2 2\theta - \cos^2 2\alpha}}}{\sqrt{\cos^2 2\theta - \cos^2 2\alpha}} d\theta \ ,$$

e

$$s_1 = 2c \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{\sqrt{\cos 2\theta - \sqrt{\cos^2 2\theta - \cos^2 2\alpha}}}{\sqrt{\cos^2 2\theta - \cos^2 2\alpha}} d\theta \ ,$$

Das quais, por adição e subtracção ordenadas de ambos os membros e levando em

conta a identidade

$$\left[\sqrt{\cos 2\theta + \sqrt{\cos^2 2\theta - \cos^2 2\alpha}} \pm \sqrt{\cos 2\theta - \sqrt{\cos^2 2\theta - \cos^2 2\alpha}}\right]^2 = 2(\cos 2\theta \pm \cos 2\alpha) \ ,$$

vêm de imediato os seguintes resultados,

$$s + s_1 = 2c\sqrt{2} \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos 2\theta - \cos 2\alpha}} \ ,$$

e

$$s - s_1 = 2c\sqrt{2} \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos 2\theta + \cos 2\alpha}} \ ,$$

que facilmente se transformam nos seguintes, fazendo no primeiro $\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\varphi$, e no segundo $\operatorname{sen}\theta = \cos\alpha \operatorname{sen}\psi$, e representando por φ_0 e φ_1, e por ψ_0 e ψ_1, os valores de φ e de ψ, quando sejam $\theta = \theta_0$ e $\theta = \theta_1$:

$$s + s_1 = 2c \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\alpha \operatorname{sen}^2\varphi}},^4$$

e

$$s - s_1 = 2c \int_{\psi_0}^{\psi_1} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \cos^2\alpha \operatorname{sen}^2\psi}}^5$$

Donde se deduzirão os valores de s e s_1, mediante o cálculo de dois *integrais elípticos de primeira espécie.*

Na suposição $l < 2c$, façamos $l = 2c \operatorname{sen} 2\alpha$, e representando por s e s_1 os comprimentos dos dois arcos, tais que os raios vectores das extremidades de um sejam perpendiculares aos raios vectores das extremidades do outro, vem

$$s = 2c \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{\sqrt{\cos 2\theta + \sqrt{\cos^2 2\theta + \cot^2 2\alpha}}}{\sqrt{\cos^2 2\theta + \cot^2 2\alpha}} d\theta \ ,$$

[4]No documento original está escrito $s + s_1 = 2c \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{l - \operatorname{sen}^2\alpha \operatorname{sen}^2\varphi}}$.

[5]No documento original está escrito $s - s_1 = 2c \int_{\psi_0}^{\psi_1} \frac{d\psi}{\sqrt{l - \cos^2\alpha \operatorname{sen}^2\psi}}$.

e

$$s_1 = 2c \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{\sqrt{-\cos 2\theta + \sqrt{\cos^2 2\theta + \cot^2 2\alpha}}}{\sqrt{\cos^2 2\theta + \cot^2 2\alpha}} d\theta \ ,$$

e, portanto, estando θ_0 e θ_1, compreendidos entre 0 e $\frac{\pi}{4}$,

$$s + s_1 = 2c\sqrt{2} \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{\sqrt{\cot 2\alpha + \sqrt{\cos^2 2\theta + \cot^2 2\alpha}}}{\sqrt{\cos^2 2\theta + \cot^2 2\alpha}} d\theta \ ,$$

e

$$s - s_1 = 2c\sqrt{2} \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{\sqrt{-\cot 2\alpha + \sqrt{\cos^2 2\theta + \cot^2 2\alpha}}}{\sqrt{\cos^2 2\theta + \cot^2 2\alpha}} d\theta \ .$$

Fazendo agora,

$$\sqrt{\cos^2 2\theta + \cot^2 2\alpha} = \frac{1 - 2\operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \varphi}{\operatorname{sen} 2\alpha} \ ,$$

no primeiro destes integrais, e

$$\sqrt{\cos^2 2\theta + \cot^2 2\alpha} = \frac{1 - 2\cos^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \psi}{\operatorname{sen} 2\alpha} \ ,$$

no segundo, conclui-se, finalmente, que

$$s + s_1 = \sqrt{2cl} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{l - \operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \varphi}} \ ,$$

e

$$s - s_1 = \sqrt{2cl} \int_{\psi_0}^{\psi_1} \frac{d\psi}{\sqrt{l - \cos^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \psi}} \ .$$

Desta maneira, neste caso s e s_1 *dependem de integrais elípticos de primeira espécie.*

118.

Para determinar a área A, limitada por um arco das curvas de Cassini e pelos raios vectores correspondentes aos pontos extremos do arco, partiremos da fórmula

$$A = \frac{1}{2} \int_{\theta_0}^{\theta_1} \rho^2 d\theta = \frac{l^2}{4} (\operatorname{sen} 2\theta_1 - \operatorname{sen} 2\theta_0) \pm \frac{l^2}{2} \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{\frac{4c^2}{l^2} - \operatorname{sen}^2 2\theta} d\theta \ .$$

Quando $l < 2c$ (figura 36 e figura 37), vai-se utilizar nesta fórmula o sinal +. Mas quando $l > 2c$ (figura 38), adverte-se que entre as rectas que formam com o eixo das abcissas os ângulos θ_0 e θ_1 estão compreendidos dois arcos de cada oval. Devendo, assim, utilizar-se o sinal -, quando se considerem os arcos mais próximos da origem, e o sinal +, quando se considerem os arcos mais afastados.

Em qualquer dos casos, o integral que figura na expressão de A depende dos integrais elípticos, como podemos verificar a seguir.

Suponhamos inicialmente que, $l < 2c$ ou $\dfrac{l}{2c} < 1$. Pois neste caso,

$$\int \sqrt{\frac{4c^2}{l^2} - \operatorname{sen}^2 2\theta}\, d\theta = \frac{2c}{l} \int \sqrt{l - \frac{l^2}{4c^2} \operatorname{sen}^2 2\theta}\, d\theta \quad .$$

E assim, *a área depende de um integral elíptico de segunda espécie.*

Mas, se $l > 2c$, fazendo

$$\tan 2\theta = \frac{2c}{\sqrt{l^2 - 4c^2}} \sec\varphi \quad \text{e} \quad \frac{l^2 - 4c^2}{l^2} = k^2 \quad ,$$

resultará a igualdade seguinte

$$\int \sqrt{\frac{4c^2}{l^2} - \operatorname{sen}^2 2\theta}\, d\theta = \int \sqrt{\frac{4c^2}{l^2} \cos^2 2\theta - k^2 \operatorname{sen}^2 2\theta}\, d\theta$$

$$= -\frac{2c^2k^2}{l^2} \int \frac{\operatorname{sen}^2 \varphi d\varphi}{[1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi]^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{2c^2}{l^2} \left[\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} - \int \frac{d\varphi}{[1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi]^{\frac{3}{2}}} \right] \quad .$$

Pela teoria dos integrais elípticos sabe-se ainda que

$$\int \frac{d\varphi}{[1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi]^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{1 - k^2} \left[\int \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}\, d\varphi - \frac{k^2 \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} \right] \quad ,$$

expressão que pode ser provada por diferenciação.

Logo,

$$\int \sqrt{\frac{4c^2}{l^2} - \operatorname{sen}^2 2\theta}\, d\theta = \frac{2c^2}{l^2} \int \sqrt{\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}} - \frac{1}{2} \int \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}\, d\varphi + \frac{k^2 \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi}{2\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} .$$

E, neste caso, vê-se claramente que o valor de A depende *dos integrais elípticos de primeira e segunda espécie.*

119.

Os ovais de Cassini desempenham um papel importante na teoria das funções analíticas, porque limitam as áreas de representação dos pontos em que aquelas funções podem ser desenvolvidas em série, ordenada segundo as potências inteiras e positivas de um produto $(x - a)(x - b)$, no qual a e b são dois números completos, figurados por focos da curva, e x a variável. (Veja-se, por exemplo, HOÜEL: *Cours de Calcul Infinitésimal*, t. IV, 1881, p. 42.)

120.

Os ovais de Cassini foram estudados por vários geómetras. Primeiramente, Malfatti estudou-os em 1781, por intermédio da Geometria pura, num trabalho intitulado *Della curva casseniana.* Mais tarde, muitos mais se dedicaram ao seu estudo, como GARLIN (*Nouvelles Annales des Mathématiques*, 1855, p. 305), LAGUERRE (*Bulletin de la Société Philomatique de Paris*, 1868, p. 40)[6], DARBOUX (*Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques, et sur la théorie des imaginaires*, Paris, 1873, p. 78[7]), SERRET (l. c.), etc.

[6]No documento original está escrito *Bulletin de la Société Phylomatique de Paris*, 1868, p. 40.

[7]No documento original está escrito *Sur une Classe remarquable de Courbs*, etc, Paris, 1873, p. 78.

III As Lemniscatas

121.

Foi referido anteriormente que o nome de *Lemniscatas* se aplicam às *Espíricas*, representadas por uma ou outra destas equações:

$$(x^2+y^2)^2 = a^2y^2 + b^2x^2 \ ,$$

$$(x^2+y^2)^2 = b^2x^2 - a^2y^2 \ .$$

A primeira das quais, segundo se demonstrará mais adiante, representa as curvas *inversas* e as *podarias* centrais da elipse, e a segunda são também as inversas e as *podarias* centrais da hipérbole. Por esta razão, J. BOOTH (*A Treatise on some New Geometrical Methods*, London, t. II, 1877, p. 163) deu às primeiras o nome de *Lemniscatas elípticas* e às segundas *Lemniscatas hiperbólicas.*

Na primeira das duas equações precedentes pode-se sempre supôr que $b > a$ e por intermédio das fórmulas (número 106)

$$R = l + c \ , \quad l = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - a^2} \ \text{ e } \ c = \frac{a^2}{4l} \ ,$$

determinam-se o toro e a posição do plano paralelo ao seu eixo, que produz, pela sua intersecção com aquele sólido, uma Lemniscata elíptica dada. Mais, por intermédio destas outras,

$$R = l - c \ , \quad l = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2} \ \text{ e } \ c = \frac{a^2}{4l} \ ,$$

resolve-se a mesma questão, quando se trata da Lemniscata hipérbólica.

No primeiro destes casos, o toro será *fechado*, e no segundo *aberto*, sendo em ambos os casos o plano secante tangente ao toro.

122.

As Lemniscatas podem-se obter também procurando as curvas que satisfazem a condição (BOOTH, l. c.)

$$\rho^2\rho_1^2 = e^4 \pm f^2r^2, \tag{5.4}$$

na qual ρ, ρ_1 e r representam as distâncias de quaisquer dos seus pontos a outros três pontos fixos F, F' e O, colocados na mesma recta, à igual distância e de O a F, assim como a F', e f uma constante dada (figura 39).

Tomando o ponto O como origem as coordenadas, e a recta FF' como eixo das abcissas,

$$\rho^2 = y^2 + (x-e)^2 \ , \ \rho_1^2 = y^2 + (x+e)^2 \ \text{ e } \ r^2 = x^2 + y^2 \ ,$$

a equação cartesiana das curvas consideradas será a seguinte:

$$(x^2+y^2)^2 = (f^2+2e^2)x^2 + (f^2-2e^2)y^2 \ .$$

Esta equação representa uma Lemniscata *elíptica*, cujos parâmetros são

$$a^2 = f^2 - 2e^2 \ \text{ e } \ b^2 = f^2 + 2e^2 \ ,$$

quando $f^2 > 2e^2$. E ainda, se $f^2 < 2e^2$ a equação representa uma Lemniscata *hiperbólica*, com estes outros parâmetros,

$$b^2 = f^2 + 2e^2 \ \text{ e } \ a^2 = 2e^2 - f^2 \ .$$

Com base nestas noções gerais, estudaremos agora separadamente cada uma das Lemniscatas mencionadas.

123.

Lemniscata Elíptica - A equação

$$(x^2+y^2)^2 = a^2y^2 + b^2x^2 \ ,$$

da Lemniscata elíptica mostra imediatamente que:

- ⋆ a curva é simétrica relativamente aos eixos das coordenadas;
- ⋆ a curva intersecta o eixo das abcissas nos pontos $(\pm b, 0)$ e o eixo das ordenadas nos pontos $(0, \pm a)$;
- ⋆ a origem das coordenadas é um ponto isolado da mesma curva;
- ⋆ a curva não possui ramos infinitos reais;
- ⋆ qualquer recta, traçada pela origem das coordenadas, intersecta a curva em dois pontos reais, diferentes do *ponto isolado* O (figura 40).

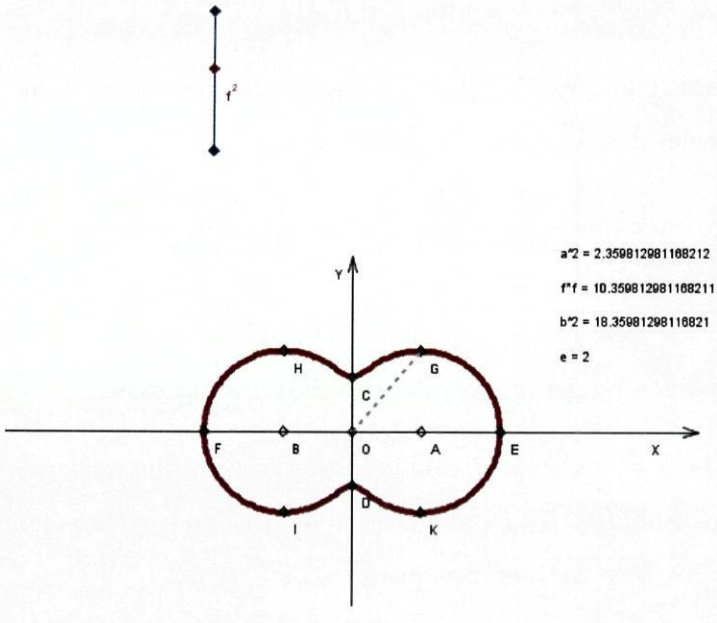


Figura 40: *Lemniscata Elíptica*

A equação

$$y' = \frac{[b^2 - 2(x^2 + y^2)]x}{[2(x^2 + y^2) - a^2]y}$$

mostra ainda que as tangentes nos pontos C e D são paralelas ao eixo das abcissas e que as correspondentes aos pontos E e F são paralelas ao eixo das ordenadas.

124.

A determinação de x e y por intermédio da equação

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{2}a^2 \quad ,$$

combinada com a equação da curva, produz resultados imaginários. Logo, não existem mais pontos em que a tangente seja paralela ao eixo das ordenadas do que aqueles já encontrados: $(y = 0, x = \pm b)$, ou os pontos E e F.

A circunferência de equação $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}b^2$ intersecta a curva em quatro pontos, cujas coordenadas se deduzem das seguintes equações:

$$x^2 = \frac{b^2(b^2 - 2a^2)}{4(b^2 - a^2)} \quad \text{e} \quad y^2 = \frac{b^4}{4(b^2 - a^2)} \quad .$$

Logo, quando $b^2 > 2a^2$, existem quatro pontos G, H, I, K, colocados sobre esta circunferência, nos quais a tangente é paralela ao eixo das abcissas.

Dado que $x = 0$ e $x = \pm\sqrt{b^2 - 2a^2}$, quando $y = a$, vem que as paralelas ao eixo das abcissas, traçadas pelos pontos C e D, intersectam a curva noutros dois pontos reais, cujas abcissas são iguais a $\pm\sqrt{b^2 - 2a^2}$, sempre que $b^2 > 2a^2$.

No caso $b^2 < 2a^2$, não existem aqueles quatro pontos em que a tangente é paralela ao eixo das abcissas, nem tão pouco as paralelas ao eixo das abcissas, traçadas pelos pontos C e D, intersectam a curva em pontos reais. A Lemniscata assemelha-se então à forma de uma elipse.

125.

Nos números 106 e 108 foi advertido que a curva de que tratamos possui um ponto duplo na origem das coordenadas, e outros dois deste tipo no infinito. Desta maneira, esta curva de quarta ordem, com três pontos singulares, pertence à categoria das *unicursais.* Efectivamente, substituindo na sua equação y por tx, vem

$$\sqrt{a^2t^2 + b^2} = at + z \ ,$$

logo, as expressões

$$x = \frac{2a^2z(z^2 + b^2)}{z^4 + 2(2a^2 - b^2)z^2 + b^4} \quad \text{e} \quad y = \frac{a(z^2 + b^2)(b^2 - z^2)}{z^4 + 2(2a^2 - b^2)z^2 + b^4} \ ,$$

determinam os valores de x e y, em função racional de z.

126.

A equação polar da *Lemniscata elíptica* é

$$\rho = \pm\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2\theta + b^2 \cos^2\theta} \ .$$

Da qual se deduz, para expressão do raio de curvatura R, a seguinte:

$$R = \frac{[(a^2 + b^2)\rho^2 - a^2b^2]^{\frac{3}{2}}}{[2(a^2 + b^2)\rho^2 - 3a^2b^2]\rho} \ .$$

A partir daqui conclui-se que a curva tem um ponto de inflexão duplo isolado na origem das coordenadas, e outros quatros, também de inflexão, sobre a circunferência de raio igual a

$$\rho = \sqrt{\frac{3a^2b^2}{2(a^2 + b^2)}} \ .$$

Procurando os valores de θ, correspondentes a este valor de ρ, obtém-se a igualdade

$$\operatorname{sen}^2\theta = \frac{b^2(2b^2 - a^2)}{2(b^4 - a^4)} \ ,$$

a qual combinada com as desigualdades $0 < sen^2\theta < 1$, mostra que os valores procurados de θ serão reais somente quando $b^2 > 2a^2$. Neste caso, a curva terá os quatro pontos de inflexão reais que acabamos de determinar (figura 40), mas, quando $b^2 < 2a^2$ não possui qualquer ponto de inflexão.

127.

Os *focos ordinários* da Lemniscata elíptica determinam-se imediatamente pelas fórmulas do número 110, substituindo nelas R e c pelos valores

$$R = \frac{b^2}{2\sqrt{b^2 - a^2}} \quad \text{e} \quad c = \frac{a^2}{2\sqrt{b^2 - a^2}} \ ,$$

que resultam das igualdades anteriormente estabelecidas:

$$R = l + c \ , \quad l = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - a^2} \quad \text{e} \quad c = \frac{a^2}{4l} \ .$$

De onde se conclui que a curva possui *quatro focos ordinários*, determinados pelas intersecções das rectas

$$\pm\sqrt{b^2 - a^2}(Y + iX) + ab = 0 \quad \text{e} \quad \pm\sqrt{b^2 - a^2}(Y - iX) + ab = 0 \ ,$$

dois *imaginários*, e *reais* os outros dois, definidos estes pelas coordenadas

$$x = 0 \quad \text{e} \quad y = \pm\frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2}} \ .$$

Mais, outros dois focos *singulares reais*, cujas coordenadas são (número 109)

$$x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{b^2 - a^2} \quad \text{e} \quad y = 0 \ ,$$

em coincidência com os pontos F e F' da figura 39.

128.

A Lemniscata elíptica é a podariæ da elipse,

$$a^2x^2 + b^2y^2 = a^2b^2 \ ,$$

relativamente ao centro. (SERRET: *Journal de Lionville*, 1843, p. 497.)

De facto, as equações da tangente à elipse no ponto (x, y) da curva, e da perpendicular traçada desde o centro a esta tangente, representando por X e Y as coordenadas de um ponto qualquer, em geral, são

$$b^2yY + a^2xX = a^2b^2 \ \text{ e } \ a^2xY = b^2yX \ ,$$

as quais satisfazem os seguintes valores de x e y:

$$x = \frac{b^2X}{X^2 + y^2} \ \text{ e } \ y = \frac{a^2Y}{X^2 + y^2} \ ,$$

que substituidos na equação da elipse, a transformam na equação da Lemniscata agora considerada, primeira do número 121, sem mais diferenças que a troca dos valores de x e y pelos de X e Y.

129.

Entre a elipse e a Lemniscata elíptica existe outra relação, não menos importante que a anterior, que passamos de seguida a demonstrar.

De facto, aplicando à equação da elipse,

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2 \ ,$$

a transformação por *raios vectores recíprocos*, definida pelas expressões conhecidas

$$x = \frac{abX}{X^2 + y^2} \ \text{ e } \ y = \frac{abY}{X^2 + y^2} \ ,$$

determina-se precisamente a equação das Lemniscatas elípticas. Logo, a *Lemniscata deste nome é a curva inversa da elipse, relativamente ao seu centro*, conforme a definida no número 121.

130.

Ao exposto sobre as Lemniscatas elípticas, consideramos procedente agregar a este livro a dedução, em coordenadas tangenciais, da equação destas curvas.

Para isso advertamos antes de mais, que

$$y' = \frac{[b^2 - 2(x^2 + y^2)]x}{[2(x^2 + y^2) - a^2]y} \ ,$$

a equação da tangente à Lemniscata no ponto (x, y),

$$Y = y'X + y - y'x \ ,$$

poderá escrever-se do seguinte modo

$$Y = \frac{[b^2 - 2(x^2 + y^2)]xX + (x^2 + y^2)^2}{[2(x^2 + y^2) - a^2]y} \ ,$$

ou

$$uY + vX + 1 = 0 \ ,$$

na qual

$$u = -\frac{[2(x^2 + y^2) - a^2]y}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{e} \quad v = \frac{[b^2 - 2(x^2 + y^2)]x}{(x^2 + y^2)^2} \ .$$

Mas, fazendo $x^2 + y^2 = r^2$, desta equação e da correspondente à curva deduz-se que

$$x^2 = \frac{r^2(r^2 - a^2)}{b^2 - a^2} \quad \text{e} \quad y^2 = \frac{r^2(b^2 - r^2)}{b^2 - a^2} \ .$$

Logo,

$$u^2 = \frac{(2r^2 - a^2)^2(b^2 - r^2)}{(b^2 - a^2)r^6} \quad \text{e} \quad v^2 = \frac{(b^2 - 2r^2)^2(r^2 - a^2)}{(b^2 - a^2)r^6} \ .$$

e, portanto,

$$(a^2v^2 + b^2u^2 + 4)r^4 = 4(a^2 + b^2)r^2 - 3a^2b^2 \text{ e } (u^2 + v^2)r^6 = (a^2 + b^2)r^2 - a^2b^2 \ .$$

Eliminando r nestas equações, determinar-se-á, para equação em coordenadas tangenciais da Lemniscata elíptica (BOOTH, l. c., t. I, p. 145),

$$a^2b^2(a^2v^2 + b^2u^2 + 4)^3 - (a^2 + b^2)^2(a^2v^2 + b^2u^2 + 4)^2 - 18a^2b^2(u^2 + v^2)(a^2v^2 + b^2u^2 + 4)$$
$$+16(a^2 + b^2)(u^2 + v^2) + 27a^4b^4(u^2 + v^2)^2 = 0 \ .$$

131.

Com o auxílio desta equação pode-se também determinar de novo os focos da curva, conforme se indica a seguir.

A recta, em geral, à que corresponde a equação

$$uY + vX + 1 = 0 \ ,$$

será tangente à curva e terá por coeficiente angular $\pm i$, se u e v satisfazem a equação tangencial da mesma curva, e se ainda se estabelece entre elas a relação $v = \pm iu$.

Mas, pondo na equação da curva, anteriormente deduzida, $\pm iu$ em vez de v, obtém-se outra, que imediatamente se decompõe nas duas seguintes:

$$(b^2 - a^2)u^2 + 4 = 0 \text{ e } a^2b^2(4 - a^2u^2 + b^2u^2) - (a^2 + b^2)^2 = 0 \ .$$

Aos valores de u que se determinam da primeira, e aos valores de v, deduzidos da condição $v = \pm iu$, correspondem as rectas

$$2Y \pm i(2X \pm \sqrt{b^2 - a^2}) = 0 \ ,$$

que coincidem com as assimptotas da curva, e determinam através das suas intersecções os focos singulares da mesma.

Aos valores de u, determinados da segunda, e de v, submetidos à mesma condição $v = \pm iu$, correspondem as rectas

$$\pm\sqrt{b^2 - a^2}(Y \pm iX) + ab = 0 \ ,$$

que pelas suas intersecções, determinam os focos *ordinários.*

132.

Para rectificar a Lemniscata elíptica, temos a fórmula

$$\frac{ds^2}{d\theta^2} = \frac{a^4 \operatorname{sen}^2\theta + b^4 \cos^2\theta}{a^2 \operatorname{sen}^2\theta + b^2 \cos^2\theta} \ ,$$

ou, fazendo $\theta = \frac{\pi}{2} - \omega$,

$$\frac{ds^2}{d\omega^2} = \frac{a^4 \cos^2\omega + b^4 \operatorname{sen}^2\omega}{a^2 \cos^2\omega + b^2 \operatorname{sen}^2\omega} \ .$$

Se ainda suposermos que

$$\tan\omega = \frac{a^2}{b^2}\tan\lambda \ ,$$

donde vem esta outra igualdade,

$$d\omega = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{b^4 d\lambda}{a^4 \operatorname{sen}^2\lambda + b^4 \cos^2\lambda} \ ,$$

resultará que

$$ds = \frac{a^3}{b^2} \cdot \frac{d\lambda}{\left[1 - \frac{b^4 - a^4}{b^4}\operatorname{sen}^2\lambda\right]\sqrt{1 - \frac{b^2 - a^2}{b^2}\operatorname{sen}^2\lambda}} \ ,$$

Desta maneira, o valor de s depende de um *integral elíptico de terceira espécie.* (Booth, l. c., t. I, p. 196)

133.

A área limitada pela Lemniscata elíptica obtém-se por intermédio da fórmula

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (a^2 \operatorname{sen}^2\theta + b^2 \cos^2\theta)d\theta = \frac{a^2+b^2}{2}\pi \ .$$

Portanto, a área, como se pode ver, *é igual a metade da soma das rectas dos círculos cujos raios são iguais aos semi-eixos da curva.*

134.

Lemniscata hiperbólica - Consideremos agora a curva cuja equação é

$$(x^2+y^2)^2 = b^2x^2 - a^2y^2 \ .$$

Comparando esta equação com a da Lemniscata elíptica, imediatamente se conclui que as fórmulas referentes a esta curva serão aplicáveis à Lemniscata hiperbólica, substituindo $+a^2$ por $-a^2$.

A Lemniscata hiperbólica tem a forma indicada na figura 41, que tem as seguintes características:

- ⋆ a curva é simétrica relativamente aos eixos das coordenadas;
- ⋆ a curva não possui ramos infinitos, nem a possibilidade de ser intersectada em mais de dois pontos, diferentes de O, por rectas que passam pela origem O, pertencente também à curva;
- ⋆ a curva é secante ao eixo das abcissas nos pontos E e E', cujas distâncias ao ponto O é de $\pm b$;
- ⋆ o *ponto duplo* da curva, no qual se reúnem dois pontos de inflexão e se cruzam duas tangentes, cujos ângulos, ω e $180° - \omega$ determinam-se pela expressão $\tan\omega = \pm\frac{b}{a}$.

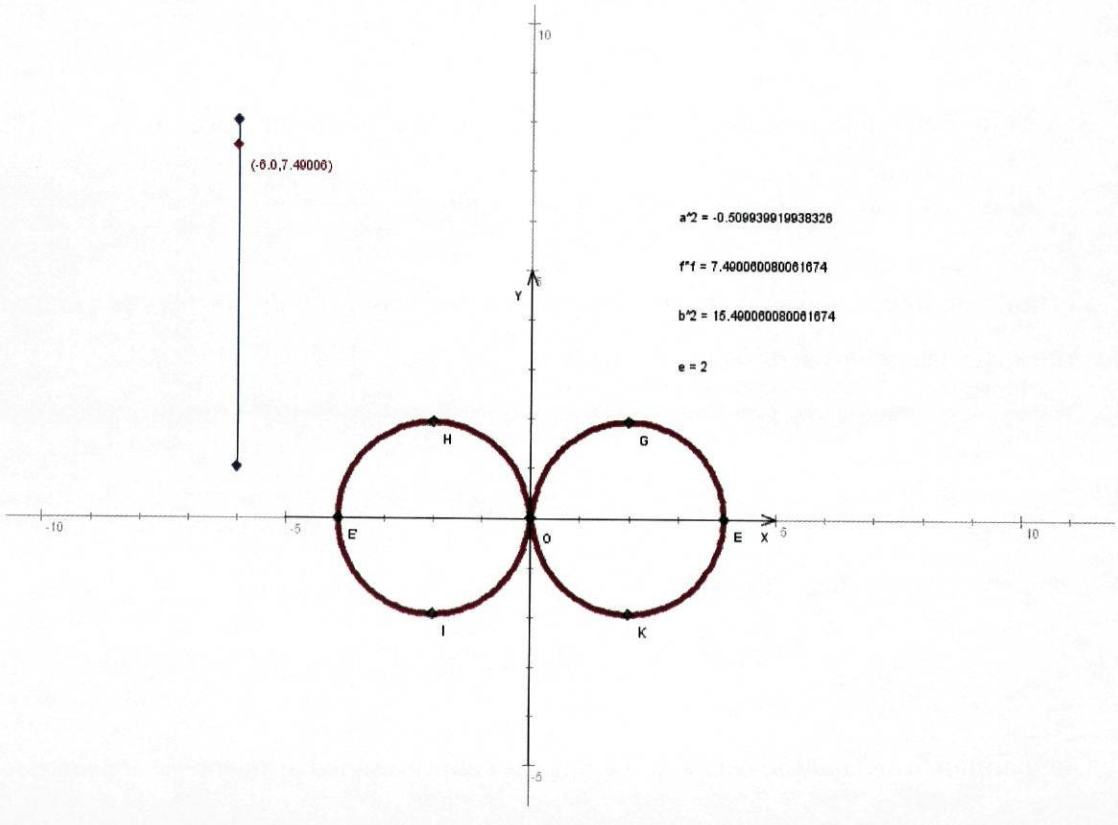


Figura 41: *Lemniscata Hiperbólica*

Dado que

$$y' = \frac{[b^2 - 2(x^2 + y^2)]x}{[2(x^2 + y^2) + a^2]y} \quad ,$$

vê-se que as tangentes à curva são paralelas ao eixo das ordenadas nos pontos E e E', e ao eixo das abcissas nos pontos G, H, J, K de intersecção da curva com a circunferência $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}b^2$. As coordenadas destes pontos são determinadas pelas equações

$$x^2 = \frac{b^2(b^2 + 2a^2)}{4(b^2 + a^2)} \quad \text{e} \quad y^2 = \frac{b^4}{4(b^2 + a^2)} \quad .$$

O raio de curvatura, em coordenadas polares, tem por expressão

$$R = \frac{[(b^2 - a^2)\rho^2 + a^2b^2]^{\frac{3}{2}}}{[2(b^2 - a^2)\rho^2 + 3a^2b^2]\rho} \quad .$$

Da qual, tendo em conta a equação polar da mesma curva, determina-se que as Lemniscatas hiperbólicas não possuem pontos de inflexão reais, fora dos dois que estão reunidos na origem das coordenadas. Esta curva possui quatro pontos de inflexão *imaginários*, que tendem para o infinito, conforme o valor de 0 tende para o valor de a.

Mas, para além do ponto duplo na mesma origem, as *Lemniscatas hiperbólicas* possuem outros *dois pontos* duplos no infinito, e são, portanto, *unicursais*. Sendo assim, pode-se obter a expressão das suas coordenadas, x e y, em função racional da variável x, trocando somente nas fórmulas do número 125, a^2 por $-a^2$. Mas, as fórmulas assim obtidas contêm coeficientes imaginários, sendo preferível deduzir outras, fazendo na equação da curva $y = tx$, logo $\sqrt{b^2 - a^2t^2} = (b + at)z$[8], e daqui resulta

$$x = \frac{2ba^2z(1 + z^2)}{(a^2 + b^2)z^4 + 2(a^2 - b^2)z^2 + a^2 + b^2} ,$$

e

$$y = \frac{2b^2az(1 - z^2)}{(a^2 + b^2)z^4 + 2(a^2 - b^2)z^2 + a^2 + b^2} .$$

135.

Para rectificar as Lemniscatas hiperbólicas, partiremos da equação da curva, referida em coordenadas polares,

$$\rho^2 = b^2 \cos^2\theta - a^2 \operatorname{sen}^2\theta,$$[9]

da qual se deduz esta outra,

$$\frac{ds^2}{d\theta^2} = \frac{a^4 \operatorname{sen}^2\theta + b^4 \cos^2\theta}{b^2 \cos^2\theta - a^2 \operatorname{sen}^2\theta} .$$

[8] No documento original está escrito $\sqrt{b^2 - a^2t^2} = (b + \alpha t)z$.

[9] No documento original está escrito: $\rho = b^2 \cos^2\theta - a^2 \operatorname{sen}^2\theta$.

Substituindo nesta equação (BOOTH, l. c., t. II, p. 164), θ por uma nova variável, ω, ligada com θ pela relação

$$\operatorname{sen}^2\theta = \frac{b^4 \operatorname{sen}^2\omega}{a^2b^2 + b^4\operatorname{sen}^2\omega + a^4\cos^2\omega} \ ,$$

obtém-se, em primeiro lugar,

$$\frac{ds}{d\theta} = \frac{b}{\cos\omega} \quad \text{e} \quad \frac{d\theta}{d\omega} = \frac{b^2a(a^2+b^2)\cos\omega}{(a^2b^2 + b^4\operatorname{sen}^2\omega + a^4\cos^2\omega)\sqrt{b^2 + a^2\cos^2\omega}} \ ,$$

e depois,

$$ds = \frac{b^3}{a\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \frac{d\omega}{\left[1 + \dfrac{b^2-a^2}{a^2}\operatorname{sen}^2\omega\right]\sqrt{1 - \dfrac{a^2}{a^2+b^2}\operatorname{sen}^2\omega}} \ .$$

O comprimento dos arcos das Lemniscatas hiperbólicas depende, segundo isto, de um integral elíptico de terceira espécie, quando $b < a$ ou $b > a$, sendo de primeira espécie quando $b = a$. (BOOTH, l. c.)

136.

Para obter a área limitada pela metade $OKEGO$ da curva, utiliza-se a fórmula

$$A = \frac{1}{2}\int_{-\theta_1}^{\theta_1}(b^2\cos^2\theta - a^2\operatorname{sen}^2\theta)d\theta = \frac{b^2-a^2}{2}\theta_1 + \frac{a^2+b^2}{4}\operatorname{sen}2\theta_1 \ ,$$

na qual $\theta_1 = \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}$.

Ou, podemos escrever ainda,

$$A = \frac{b^2-a^2}{2}\operatorname{arctg}\frac{b}{a} + \frac{1}{2}ab \ .$$

137.

A Lemniscata hiperbólica considerada é a *podaria central*, e a *curva inversa* também, com relação ao seu centro, da hipérbole

$$b^2y^2 - a^2x^2 = -a^2b^2 \ ,$$

cujas assimptotas formam um ângulo igual ao das tangentes à mesma Lemniscata no mencionado centro.

138.

Trocando a^2 por $-a^2$, nas equações dos números 127 e 130, obtém-se a equação *tangencial* da Lemniscata hiperbólica e quanto ao número e posição dos seus focos refere-se que se pode deduzir, em particular, que as coordenadas dos *focos ordinários reais* da curva são

$$x = \pm\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{e} \quad y = 0 \ .$$

E que as coordenadas dos focos singulares reais,

$$x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2} \quad \text{e} \quad y = 0 \ ,$$

correspondem aos pontos F e F' da figura 39.

IV A Lemniscata de Bernoulli

139.

Entre as Lemniscatas hiperbólicas existe uma que recebeu um nome especial - a correspondente ao caso $a = b$ - denominada *Lemniscata* de BERNOULLI, por ter sido encontrada por um dos geómetras com este nome (*Jacobo*), ao resolver o problema de Leibnitz, que tem por objectivo determinar a curva descrita por um ponto grave, que se aproxima uniformemente de um ponto fixo dado. (*Acta eruditorum*, 1694, p. 336, *Opera*, t. I, p. 609). As principais propriedades desta curva foram depois descobertas por FAGNANO em 1750 (*Produzione matematica*, t. II, p. 317), por métodos geométricos, e em seguida, por EULER, que expôs a sua teoria analítica. (*Mem. Acad. Petrop.*, t. V, p. 351).

140.

A equação da Lemniscata de Bernoulli, em coordenadas cartesianas, é

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2) \ .$$

E em coordenadas polares, a equação da mesma curva tem por expressão,

$$\rho^2 = a^2 \cos 2\theta \ .$$

Directamente, por intermédio destas equações, ou fazendo $b = a$, nos resultados anteriormente obtidos, por referência às Lemniscatas hiperbólicas, em geral, deduzem-se as seguintes propriedades da Lemniscata de Bernoulli.

A curva tem, como todas as Lemniscatas hiperbólicas, a forma representada na figura 42, na qual o valor de a se encontra representado por OE. As tangentes no *ponto duplo* O formam ângulos de 45° com o eixo das abcissas, segundo da fórmula $tan\omega = \pm\frac{b}{a}$ se deduz, por ser agora $b = a$.

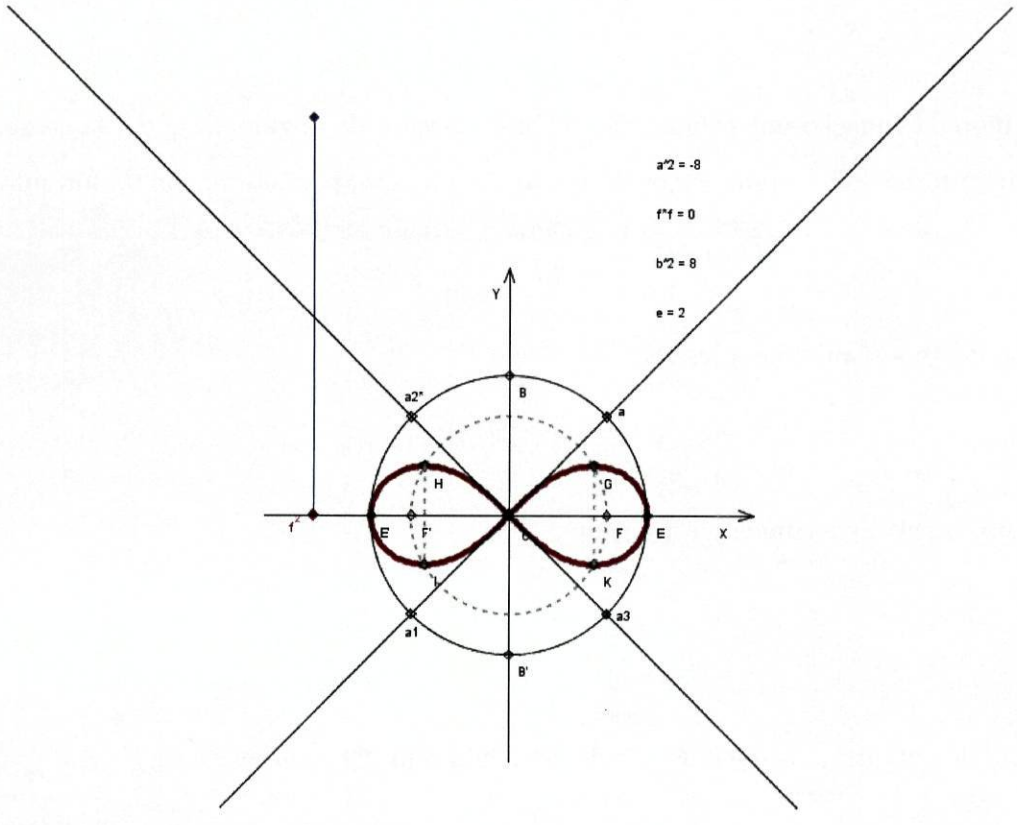


Figura 42: Lemniscata de Bernoulli

Fazendo na igualdade (5.4) do número 122, $f = 0$ e $a^2 = 2e^2$, vem que $\rho\rho_1 = \frac{1}{2}a^2$. Logo, a Lemniscata de Bernoulli pertence à classe das *Cassínicas*, existindo no seu plano dois pontos fixos F e F', tais que o produto das distâncias a estes pontos de quaisquer dos pontos da curva permanece constante. As coordenadas dos pontos fixos considerados, ou focos da curva, ao mesmo tempo *ordinários* e *singulares*, são $\pm\frac{a}{\sqrt{2}}$ e 0.

Os pontos G, H, I, K, onde a ordenada y é máxima (em valor absoluto), correspondem à circunferência de raio igual a $\frac{a}{\sqrt{2}}$, com centro no ponto O. Logo, *os pontos de ordenada máxima e os focos encontram-se sobre a mesma circunferência.* Aqueles *quatro* primeiros pontos têm por coordenadas

$$\pm\frac{a\sqrt{6}}{4} \text{ e } \pm\frac{a\sqrt{2}}{4} .$$

141.

Partindo da equação polar da curva, obtém-se o valor do ângulo V, que a tangente à mesma curva forma com o raio vector do ponto de contacto, por intermédio da fórmula

$$\tan V = -\frac{\rho d\theta}{d\rho} = \cot 2\theta \ ,$$

da qual se infere a seguinte expressão

$$V = \frac{\pi}{2} - 2\theta \ ,$$

que permite construir facilmente a tangente.

142.

O raio de curvatura da Lemniscata de Bernoulli tem por expressão

$$R = \frac{a^2}{3\rho} \ .$$

E como $\operatorname{sen} V = \cos 2\theta = \dfrac{\rho^2}{a^2}$, resulta que,

$$\rho = 3R \operatorname{sen} V \ .$$

Logo, *a projecção do raio de curvatura sobre a direcção do raio vector correspondente é igual à terceira parte do segundo raio.* Isto permite determinar facilmente o centro da curvatura da curva que agora tratamos.

143.

A Lemniscata de Bernoulli é *unicursal*, e sendo assim x e y podem expressar-se em função racional de uma terceira variável. Expressão da qual deduziram Em. Weyr e Schoute algumas propriedades importantes, relativas às suas tangentes.

De facto, se fizermos na equação da curva $y = tx$, e depois $\sqrt{1-t^2} = (1+t)z$, vem

$$x = a\frac{z^3+z}{z^4+1} \quad \text{e} \quad y = a\frac{z-z^3}{z^4+1} \ .$$

Substituindo estes valores na equação da tangente,

$$Y - y = y'(X - x) \ ,$$

determina-se, em função de z, o seguinte resultado,

$$Y = \frac{(z^4-4z^2+1)(z^2+1)}{(z^4+4z^2+1)(1-z^2)}X + \frac{4az^3}{(1-z^2)(z^4+4z^2+1)} \ .$$

Logo, se pelo ponto (α, β) traçarmos tangentes à Lemniscata considerada, os valores de z nos pontos de contacto devem satisfazer a equação

$$(\beta+\alpha)z^6 + 3(\beta-\alpha)z^4 + 4az^3 - 3(\beta+\alpha)z^2 - (\beta-\alpha) = 0, \tag{5.5}$$

e as seis raízes desta equação, ou os seis valores de x, provam que, pelo ponto dado, podem tracar-se seis tangentes à curva, *reais* ou *imaginárias*.

Agora vamos determinar a condição que quatro destes pontos de contacto se encontrem em linha recta.

A recta definida pela equação seguinte

$$ux + vy + 1 = 0$$

intersecta a curva em quatro pontos, os quais correspondem os valores de z dados por esta outra,

$$z^4 + a(u-v)z^3 + a(u+v)z + 1 = 0. \tag{5.6}$$

Expressando, pois, que o resto da divisão do polinómio (5.5) pelo polinómio (5.6) é identicamente nulo, determinaremos as condições para que as equações (5.5) e (5.6)tenham

quatro raízes comuns e, portanto, para que quatro dos pontos de contacto estejam em linha recta.

Mas, o resto de que se trata, tem por expressão

$$\left[\frac{4a}{\beta+\alpha} - a(u+v) - 3\frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha}a(u-v) - a^3(u-v)^3\right] z^3(\beta+\alpha)$$

$$+ \left[a^2(u^2-v^2) - 4\right] z^2(\beta+\alpha) + \left[a(u-v) - 3\frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha}a(u+v) - a^3(u-v)^2(u+v)\right] z(\beta+\alpha)$$

$$- \left[4\frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha} + a^2(u-v)^2\right](\beta+\alpha).^{10}$$

Logo, para que as raízes da equação (5.6) sejam também raízes da equação (5.5), será necessário que se verifiquem estas condições:

$$\frac{4}{\beta+\alpha} - (u+v) - 3\frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha}(u-v) - a^2(u-v)^3 = 0 \ ;$$

$$a^2(u^2-v^2) - 4 = 0 \ ;$$

$$(u-v) - 3\frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha}(u+v) - a^2(u-v)^2(u+v) = 0 \ ;$$

e

$$4\frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha} + a^2(u-v)^2 = 0 \ .$$

[10] No documento original está escrito

$$\left[\frac{4a}{\beta+\alpha} - a(u+v) - 3\frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha}a(u-v) - a^3(u-v)^3\right] z^3(\beta+\alpha)$$

$$+ \left[a^2(u^2-v^2) - 4\right] z^2(\beta+\alpha) + \left[a(u-v) - 3\frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha}a(u+v) - a^3(u-v)^2(u+v)\right] z(\beta+\alpha)$$

$$+ \left[4\frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha} + a^2(u-v)^2\right](\beta+\alpha)$$

Ou, eliminando da primeira e da terceira $(u-v)^2$ por intermédio da última, vem

$$\frac{4}{\beta+\alpha} - (u+v) + \frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha}(u-v) = 0 \ ;$$

$$a^2(u^2-v^2) = 4 \ ;$$

$$u - v + \frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha}(u+v) = 0 \ ;$$

e

$$4\frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha} + a^2(u-v)^2 = 0 \ .$$

Da primeira e terceira deduz-se que

$$u+v = \frac{2(\beta+\alpha)}{\beta^2+\alpha^2} \quad \text{e} \quad u-v = -\frac{2(\beta-\alpha)}{\beta^2+\alpha^2}. \tag{5.7}$$

E, substituindo estes valores na segunda e na quarta, obtém-se por resultado, idêntico em ambos os casos, o que se segue

$$(\beta^2+\alpha^2)^2 = a^2(\alpha^2-\beta^2) \ .$$

Esta expressão permite saber que o ponto (α, β) deve corresponder à Lemniscata considerada.

Logo, *os pontos pelos quais se podem traçar quatro tangentes à Lemniscata, de maneira que os pontos de contacto estejam todos em linha recta, são pontos da mesma Lemniscata considerada.*

Este teorema foi encontrado e demonstrado por EM. WEYR, num trabalho intitulado *Die Lemniscate in rationaler Behandlung.* (*Abhandl. der K. bohm. Gesellschaft der Wissenschaften*, Prag, 1873). A SCHOUTE pertence a demonstração geométrica do mesmo,

inserida nos *Verslagen da Academia de Ciências de Amesterdão* (série 2.ª, t. XIX, 1883, p. 220).

A equação condicional

$$a^2(u^2 - v^2) = 4$$

representa a envolvente da tangente à Lemniscata, traçadas por todos os pontos da curva, em coordenadas tangenciais, u e v. Para determinar a mesma equação, em coordenadas cartesianas, tem que se procurar a equação da envolvente de todas as posições que pode tomar num plano a recta

$$ux + vy + 1 = 0 \ ,$$

tendo em conta a condicional anterior. Eliminado v, u e $\frac{dv}{du}$, em ambas as equações e as

$$x + y\frac{dv}{du} = 0 \ \text{ e } \ u - v\frac{dv}{du} = 0 \ ,$$

determinar-se-á a que se segue:

$$x^2 - y^2 = \frac{1}{4}a^2 \ .$$

Esta expressão é abreviada deste outro teorema, também de EM. WEYR:

A envolvente das tangentes à Lemniscata, traçada por todos os pontos da curva, e que ainda intersectam esta noutros pontos distintos dos primeiros, ou da origem, é uma hipérbole equilátera.

144.

As condições para que os pontos de contacto das tangentes à Lemniscata considerada, traçadas pelo ponto (α, β), correspondam a uma cónica, determinam-se por um procedimento análogo ao utilizado no caso anterior, começando por substituir a equação da linha recta pela seguinte, de uma cónica qualquer:

$$ux^2 + vy^2 + wxy + hx + ky + 1 = 0 \ .$$

E pelos mesmos passos, já dados no parágrafo precedente, se determinará que os valores de x, nos pontos em que esta cónica intersecta a Lemniscata, devem satisfazer esta outra equação:

$$z^8 + Az^7 + Bz^6 + Cz^5 + Dz^4 + Az^3 + Ez^2 + Cz + 1 = 0 \ ,$$

na qual

$$A = a(h-k),\ B = (u+v-w)a^2,\ C = (h+k)a,\ D = 2(a^2u - a^2v + 1) \text{ e}$$
$$E = a^2(u+v+w)^{11}$$

As condições, pois, para que os pontos de contacto das tangentes à curva, traçadas pelo ponto arbitrário (α, β), correspondam à cónica, obtêm-se expressando que é identicamente nulo o resto da divisão do primeiro membro da última equação, pelo primeiro da equação (5.5), e assim, vem

$$C - L - 3AK = 0 \ , \quad D + 3 - AL - 3K(B - 3K) = 0 \ , \quad 4A - L(B - 3K) = 0 \ ,$$

$$E + K + 3(B - 3K) = 0 \ , \quad C + AK = 0 \ , \quad 1 + (B - 3K)K = 0 \ ,$$

supondo que

$$K = \frac{\beta - \alpha}{\beta + \alpha} \quad \text{e} \quad L = \frac{4a}{\beta + \alpha} \ .$$

Eliminando C da primeira equação por intermédio da quinta, e $B - 3K$ da terceira, por intermédio da última, obtem-se o mesmo resultado. Logo, uma destas equações não é realmente distinta das outras.

As equações primeira e quinta, das seis condições anteriores, determinam os valores de C e A. Conhecidos estes valores, das expressões $A = a(h-k)$ e $C = a(h+k)$, se determinam os valores de h e k. Mais, das equações segunda, quarta e sexta deduzem-se os valores de B, D e E, escritos por intermédio de outras três de primeiro grau em função de

[11] No documento original está escrito: $E = a(u+v+w)$.

u, v e w. Logo, estes três coeficientes da cónica podem considerar-se também conhecidos, e como determinada por completo, em consequência, a equação da cónica.

Deduz-se, pois, de tudo o exposto o teorema seguinte, devido a SCHOUTE, quem o deu a conhecer no seu trabalho intitulado *Notiz über die Lemniscata*, publicado nos *Sitzungsber. der K. Akad. der Wissenschaften von Wien*, 1883, p. 1252:

Os seis pontos de contacto das tangentes à Lemniscata de Bernoulli, traçadas por um ponto exterior à curva, estão situados sobre uma cónica, susceptível de fácil determinação.

145.

Tomando $a = b$ na equação, em coordenadas tangenciais, das Lemniscatas hiperbólicas, obtém-se a correspondente à de Bernoulli:

$$27a^4(u^2 + v^2)^2 = [4 + a^2(u^2 - v^2)]^3 \ .$$

146.

O comprimento dos arcos desta curva determina-se também sem dificuldade mediante a fórmula

$$s = a\int_0^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}} = \frac{a}{\sqrt{2}}\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 2\varphi}} \ ,$$

depois de estabelecer entre φ e θ a relação

$$\operatorname{sen}^2\theta = \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 2\varphi \ .$$

Desta maneira, por referência à *Lemniscata de Bernoulli*, *s depende de um integral elíptico de primeira espécie.* (FAGNANO.)

Todavia com mais simplicidade se demonstra que a área limitada por metade da curva é igual a $\frac{1}{2}a^2$.

147.

Esta mesma Lemniscata é a *podaria* da hipérbole equilátera

$$x^2 - y^2 = a^2 \ ,$$

relativamente ao centro. Existindo ainda entre ambas as curvas algumas relações notáveis, enunciadas por CHARPENTIER nos *Nouvelles Annales de Mathématiques* (t. IV, 1845, p. 142), das quais vamos, em seguida, reproduzir três:

1.ª Entre as coordenadas da Lemniscata X e Y, e da hipérbole x e y, existem as relações

$$x = \frac{a^2 X}{X^2 + Y^2} \ , \quad y = -\frac{a^2 Y}{X^2 + Y^2} \ ,$$

que se determinam das encontradas no número 128, trocando para isso a^2 por $-a^2$, e fazendo depois $b = a$. E das quais se deduz a equação

$$(x^2 + y^2)(X^2 + Y^2) = a^4, \tag{5.8}$$

Logo, *o produto das distâncias do centro da Lemniscata a qualquer ponto da hipérbole e ao ponto correspondente da mesma Lemniscata é constante.*

2.ª Representando por ρ e ρ_1 os raios vectores da Lemniscata e da hipérbole, sabe-se que

$$\rho = a\sqrt{\cos 2\theta} \ \text{ e } \ \rho_1 = \frac{a}{\sqrt{\cos 2\theta}} \ ,$$

de donde se deduz esta outra relação:

$$\rho\rho_1 = a^2. \tag{5.9}$$

Logo, *o produto dos raios vectores da Lemniscata e da hipérbole, que formam o mesmo ângulo com o eixo polar é constante.*

3.ª Das duas equações (5.8) e (5.9) deduz-se também esta outra:

$$\rho_1^2 = X^2 + Y^2 \ .$$

Segundo a qual *um ponto qualquer da hipérbole e o correspondente da Lemniscata estão sobre duas rectas simétricas em relação ao eixo real da hipérbole.*

148.

Da expressão obtida à pouco para os arcos da Lemniscata de Bernoulli, por intermédio de integrais elípticos, deduzem-se, com o auxílio dos teoremas referentes à teoria deste integrais, consequências importantes sobre as propriedades dos mesmos arcos, algumas das quais passamos a indicar sucintamente.

Tendo em conta o *teorema da adição* dos integrais elípticos de 1.ª espécie, é fácil deduzir que se s_1, s_2 e s_3 representam os comprimentos de três arcos, pertencentes ao primeiro quadrante da curva, compreendidos entre o seu vértice e aqueles pontos da mesma curva, onde a amplitude φ tem por valores φ_1, φ_2 e β, se verificará que

$$s_3 = s_1 \pm s_2$$

quando

$$\cos\beta = \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \mp \operatorname{sen}\varphi_1 \operatorname{sen}\varphi_2 \sqrt{1 - \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\beta} \ .$$

Fórmulas que determinam a amplitude β de um arco de Lemniscata, igual à soma ou à diferença de outros dois arcos previamente dados.

Do mesmo teorema mencionado, supondo que $y = \varphi_2$, concluem-se estas seguintes igualdades:

$$s_3 = 2s_1 \quad \text{e} \quad \cos\beta = \cos^2\varphi_1 - \operatorname{sen}^2\varphi_1 \sqrt{1 - \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\beta} \ ,$$

que determinam a amplitude, φ_1, do arco da Lemniscata, de comprimento igual à metade do comprimento de outro arco dado, cuja amplitude seja β.

Caso particular interessante do problema que acabamos de considerar é aquele em que se pretende dividir um quadrante de Lemniscata em duas partes iguais. Supondo para isso que $\beta = \frac{\pi}{2}$, a amplitude do arco pedido é determinada através da igualdade $\tan \varphi_1 = \sqrt[4]{2}$. Se representarmos por θ_1 e ρ_1 as coordenadas polares do ponto que divide por metade o quadrante de que se trata, tendo em conta a igualdade $\operatorname{sen}^2 \theta_1 = \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 \varphi_1$, deduz-se que

$$\operatorname{sen}^2 \theta_1 = \frac{\sqrt{2}}{2(1+\sqrt{2})} \quad \text{e} \quad \cos^2 \theta_1 = \frac{2+\sqrt{2}}{2(1+\sqrt{2})} \ ,$$

e, portanto,

$$\rho_1^2 = a^2 \cos 2\theta_1 = \frac{a^2}{(1+\sqrt{2})} \ .$$

De onde, representando por x_1 a abcissa do ponto procurado, imediatamente se conclui que

$$x_1 = \rho_1 \cos \theta_1 = a\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}} \ .$$

Este resultado final foi encontrado pela primeira vez pelo iminente geómetra Fagnano, o qual também ensinou a dividir um quadrante de Lemniscata em 2^m, $3 \cdot 2^m$ e $5 \cdot 2^m$ partes iguais, quando m é um número inteiro, simplesmente com o auxílio de uma régua e compasso.

Os estudos de Fagnano sobre as propriedades dos arcos de Lemniscata exerceram grande influência no progresso das Ciências matemáticas e serviram de base para a fundação da Teoria dos Integrais elípticos. Continuou-os mais tarde, ampliando-os consideravelmente, quando esta teoria já se encontrava substancialmente constituída, o grando geómetra ABEL (Œuvres, t. I, p. 361, 1881), o qual demonstrou que os quadrantes da Lemniscata podem dividir-se em n arcos de igual comprimento, com auxílio de régua e compasso, quando n é um número da forma 2^m (supondo inteiro o expoente m), ou um número primo da forma $2^m + 1$, ou o produto de números destas formas. Ocupando-se mais tarde

na questão LIOUVILLE (*Journal des Mathématiques*, 1843, p. 507), KIEPERT (*Journal de Crelle*, t. CXXV, p. 255), etc, etc.

149.

A Lemniscata de Bernoulli possui muitas outras propriedades, cuja detalhada exposição seria interminável, entre as quais nos limitaremos a mencionar a que serve de base a um procedimento muito simples para construir a curva, também a continuação exposto e demonstrado.

Considerando um ponto O e uma circunferência tal que as tangentes a ela traçadas desde o mesmo ponto formam um ângulo recto, traçado, depois, por O uma qualquer secante, OP, à circunferência e tomando logo sobre esta secante, de cada lado do ponto O, um segmento $OM = OM'$, igual à corda QP da circunferência, que a mesma secante determina, obtêm-se dois pontos, equidistantes de O, que pertencem à Lemniscata definida pela equação

$$\rho^2 = a^2 \cos 2\theta \ ,$$

na qual a representa o diâmetro da circunferência.

De facto, tomemos como origem das coordenadas o ponto O (figura 43), e como eixo das abcissas a recta OX que passa pelo centro C da circunferência. Designando por a o diâmetro desta, vem $OC = \frac{a}{\sqrt{2}}$, e a equação cartesiana da mesma

$$\left(x - \frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4} \ ,$$

ou, em coordenadas polares, a seguinte:

$$\rho_1^2 - a\sqrt{2}\rho_1 \cos\theta + \frac{a^2}{4} = 0 \ .$$

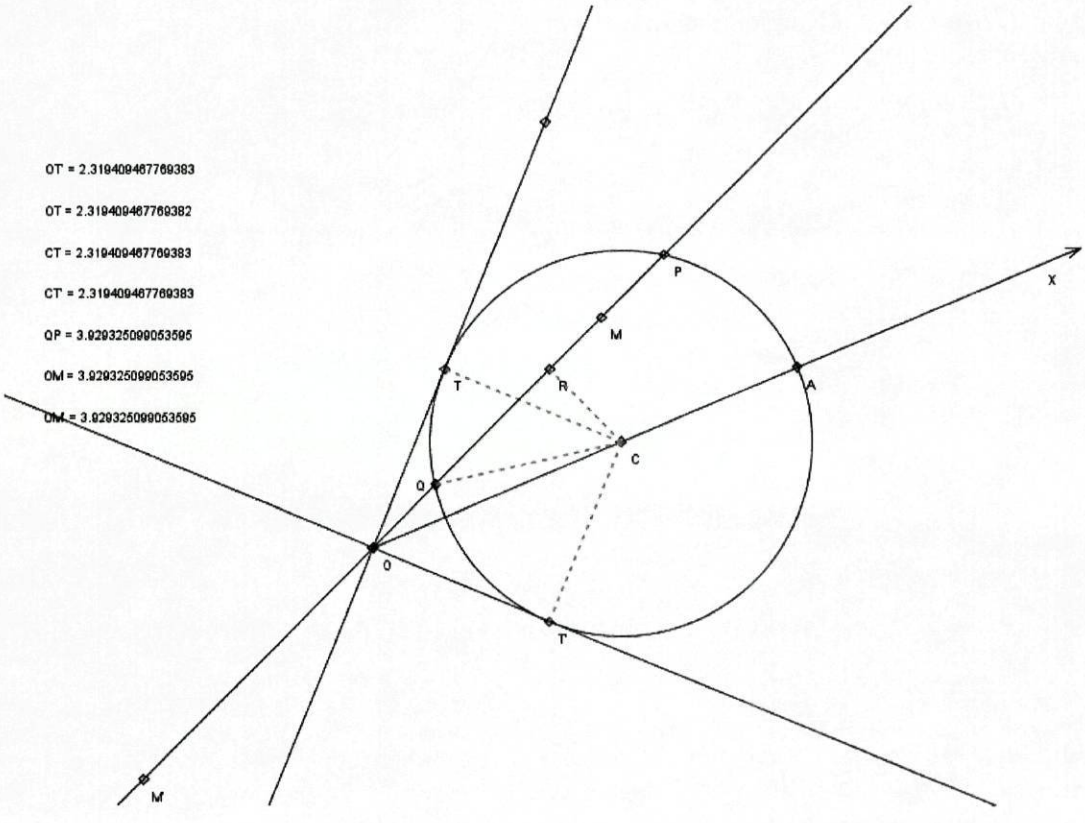


Figura 43: Propriedade que serve de base a um procedimento simples para a construção da curva

Da qual se deduzem dois valores de ρ_1, representados na figura por OP e OQ:

$$OP = \frac{a}{\sqrt{2}}\cos\theta + \frac{a}{2}\sqrt{2\cos^2\theta - 1} \quad \text{e} \quad OQ = \frac{a}{\sqrt{2}}\cos\theta - \frac{a}{2}\sqrt{2\cos^2\theta - 1} \ .$$

Cuja diferença, $OP - OQ = QP$, é, por definição, igual a $OM = OM' = \rho$, representando por ρ o raio vector do ponto M ou do ponto M', correspondente à curva procurada, e o ângulo θ.

Resulta assim que,

$$\rho = a\sqrt{\cos 2\theta} \quad \text{ou} \quad \rho^2 = a^2\cos 2\theta \ .$$

Consequência à qual se pode chegar também com alguma facilidade traçando a per-

pendicular CR à OP, e advertindo-se que

$$QR^2 = QC^2 - CR^2 \quad , \quad QR = \frac{1}{2}\rho \quad , \quad QC = \frac{1}{2}a \quad \text{e} \quad CR = \frac{a}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\theta \quad .$$

Capítulo 6

Quárticas Notáveis - Continuação

I O Caracol de Pascal

150.

Consideremos uma circunferência, e nela um ponto fixo O (figura 44). Se por este ponto traçarmos a recta OM, e a partir do ponto M tomarmos os segmentos de recta MA e MB, com comprimento igual a h, o lugar geométrico descrito pelos pontos A e B, quando OM varia de posição, girando em redor do ponto O, é uma *Concóide do círculo*, à qual ROBERVAL deu o nome de *Caracol (limaçon) de Pascal*, na memória intitulada por *Observations sur la Composition des Mouvements et sur le Moyen de trouver les touchantes des Lignes courbes*, inserida no volume correspondente ao ano 1730 das *Memórias da Academia de Ciências de Paris*, p. 42. Naquela notável dissertação, o mesmo Roberval estudou o modo de criação e algumas propriedades da curva, entre as quais se encontra uma, cuja descoberta atruibui-se a Pascal, e ainda estabeleceu o procedimento para traçar as suas tangentes. Assim como, posteriormente, no seu *Traité des Indivisibles*, expôs um procedimento para determinar as áreas limitadas pelos arcos da mesma curva.

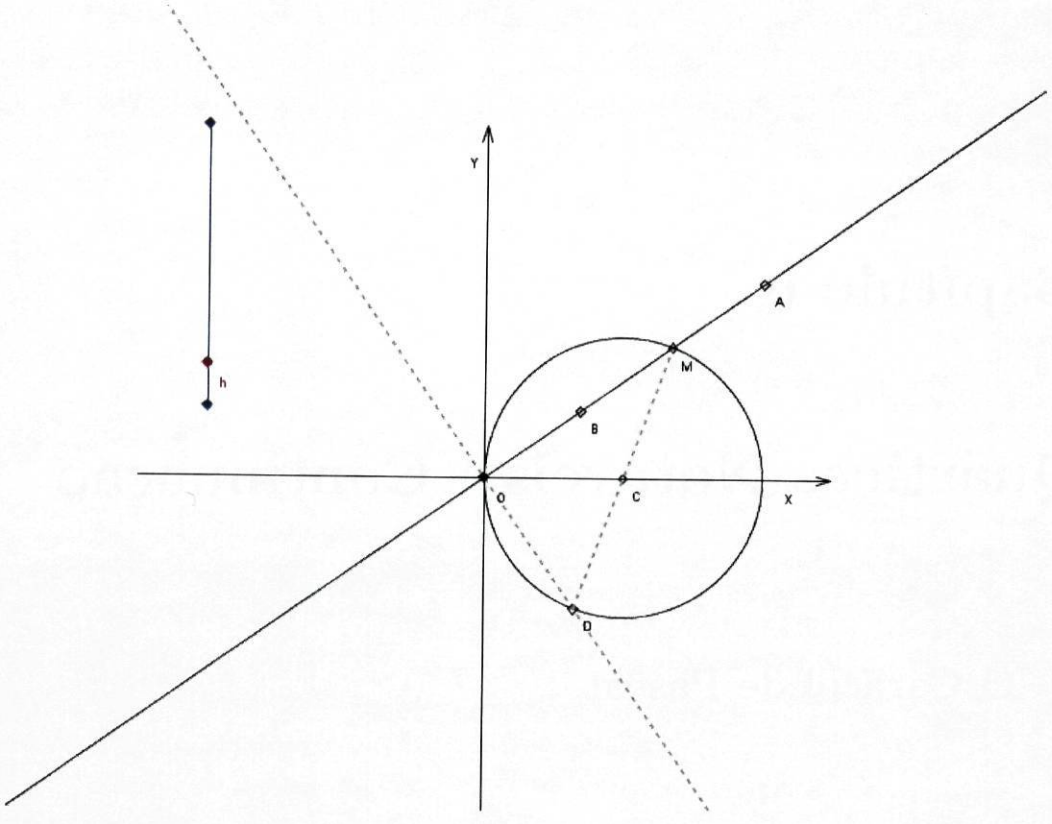


Figura 44: Procedimento para a construção do Caracol de Pascal

Ao que precede deve acrescentar-se que, estudando cuidadosamente P. TANNERY a história da descoberta do *caracol*, advertiu que a doutrina desta curva, não só consta na primeira das duas memórias citadas, mas também foi exposta pelo mesmo ROBERVAL, antes do ano de 1644, nas suas lições orais de *Geometria*, apontadas por um dos seus discípulos, e que deram origem à memória mencionada, com a particularidade de que o apelido PASCAL, que ali se lê, não se refere ao célebre geómetra e filósofo *Blaise*, mas sim ao padre *Étienne*.

151.

Fixando de novo a atenção na figura 44, designemos por C o centro do círculo considerado, por a o comprimento do diâmetro do mesmo círculo, e por θ o ângulo AOC.

Como $OM = a\cos\theta$, a equação polar do Caracol de Pascal será

$$\rho = a\cos\theta \pm h, \tag{6.1}$$

com a condição de $-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$.

Ou esta outra, em coordenadas cartesianas, tomando o ponto O para origem das coordenadas, e o raio OC, prolongado, para eixo das abcissas:

$$(x^2 + y^2 - ax)^2 = h^2(x^2 + y^2) \ .$$

152.

Para determinar a forma da curva, consideremos três casos distintos, começando por observar que em todos eles a curva é simétrica em relação ao eixo das abcissas.

Caso 1.º: Seja $h < a$.

Da expressão

$$\rho = a\cos\theta + h$$

resulta que, quando θ varia desde 0 até $\frac{\pi}{2}$, ρ decresce, desde $OA = a + h$ (figura 45) até $OD = h$, e o ponto gerador da curva descreve o arco AMD.

Considerando depois a equação

$$\rho = a\cos\theta - h \ ,$$

deduz-se que, quando θ varia desde 0 até $\arccos\frac{h}{a}$, ρ decresce desde $OB = a - h$ até 0, e o ponto gerador da curva descreve o arco BRO. E depois, quando θ varia desde $\arccos\frac{h}{a}$ até

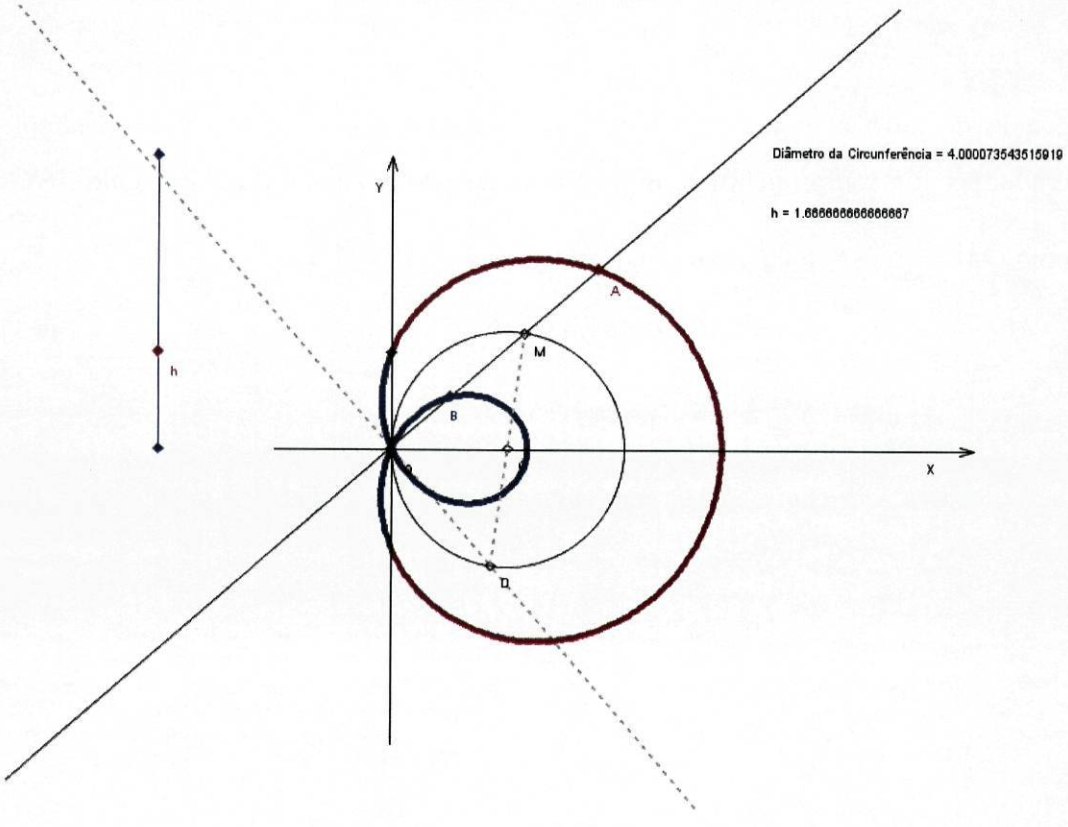


Figura 45: Caracol de Pascal quando $h < a$

$\frac{\pi}{2}$, o raio vector ρ resulta negativo e variável desde 0 até $-h$, com o qual o ponto gerador da curva descreve o arco OQE.

Como aos valores de θ, compreendidos entre 0 e $\frac{\pi}{2}$, correspondem arcos da curva simétricos aos precedentes, em relação ao eixo das abcissas, conclui-se que a curva tem a forma indicada na figura 45.

Sendo

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{a\cos 2\theta \pm h\cos\theta}{a\,\mathrm{sen}\,2\theta \pm h\,\mathrm{sen}\,\theta} \quad ,$$

será $\frac{dy}{dx} = 0$ nos pontos que satisfazem a equação

$$a\cos 2\theta \pm h\cos\theta = 0 \quad ,$$

da qual, contando somente com as soluções às quais correspondem os valores de θ, compreendidos entre $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$, deduz-se o seguintes resultados,

$$\cos\theta = \frac{\mp h + \sqrt{h^2 + 8a^2}}{4a} \quad \text{e} \quad \rho = \frac{1}{4}(\pm 3h + \sqrt{h^2 + 8a^2}) \ .$$

Logo, existem na curva dois pontos M e N, determinados por estas equações, onde as ordenadas são máximas.

E por ser $\frac{dy}{dx} = \infty$, quando

$$a \operatorname{sen} 2\theta \pm h \operatorname{sen}\theta = 0 \ ,$$

escrevendo somente as soluções às quais correspondem os valores de θ, compreendidos entre $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$, chegaremos às equações

$$\operatorname{sen}\theta = 0 \quad \text{e} \quad \cos\theta = \frac{h}{a} \ ,$$

de maneira que nos pontos A, B, P, Q, cujas coordenadas são

$$(\theta = 0, \rho = a \pm h) \quad \text{e} \quad (\theta = \pm \arccos\frac{h}{a}, \rho = -\frac{1}{2}h) \ ,$$

as tangentes são paralelas ao eixo das ordenadas.

O ponto O é um *ponto duplo* da curva, e os ângulos das tangentes neste ponto com o eixo das abcissas são iguais a $\pm \arccos\frac{h}{a}$

Caso 2.º: Suponhamos agora que $h > a$.

Como resultado de uma discussão, análoga à que a precede, conclui-se que a curva é neste caso da forma indicada na figura 46, na qual $OD = h$, $OA = a + h$, $OB = h - a$, existindo nela dois pontos M e N, cujas coordenadas polares se deduzem das seguintes expressões

$$\cos\theta = \frac{-h + \sqrt{h^2 + 8a^2}}{4a} \quad \text{e} \quad \rho = \frac{1}{4}(3h + \sqrt{h^2 + 8a^2}) \ ,$$

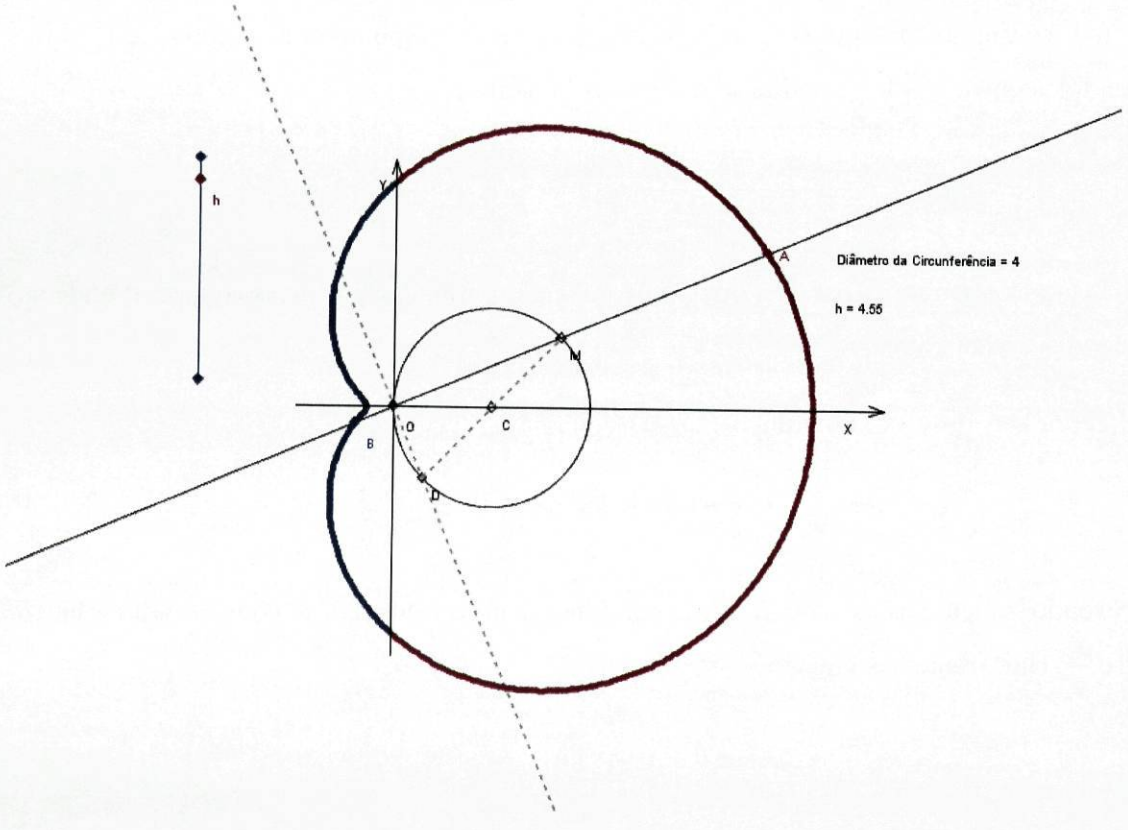


Figura 46: Caracol de Pascal quando $h > a$

e onde a ordenada cartesiana adquire valor máximo, em absoluto.

Nos pontos A e B, as tangentes são paralelas ao eixo das ordenadas. E, quando $h < 2a$, existem, para além destes pontos, outros dois, P e Q, onde a tangente é também paralela ao mesmo eixo, sendo as suas coordenadas determinadas do seguinte modo:

$$\cos\theta = \frac{h}{2a} \quad \text{e} \quad \rho = -\frac{1}{2}h \quad .$$

A curva tem ainda um *ponto isolado* em O.

Caso 3.º: Seja, finalmente, $h = a$.

A forma da curva é então a representada na figura 47, com um ponto de retrocesso em O, à distância $2a$ de A. Os pontos M e N, onde as tangentes são paralelas ao eixo das

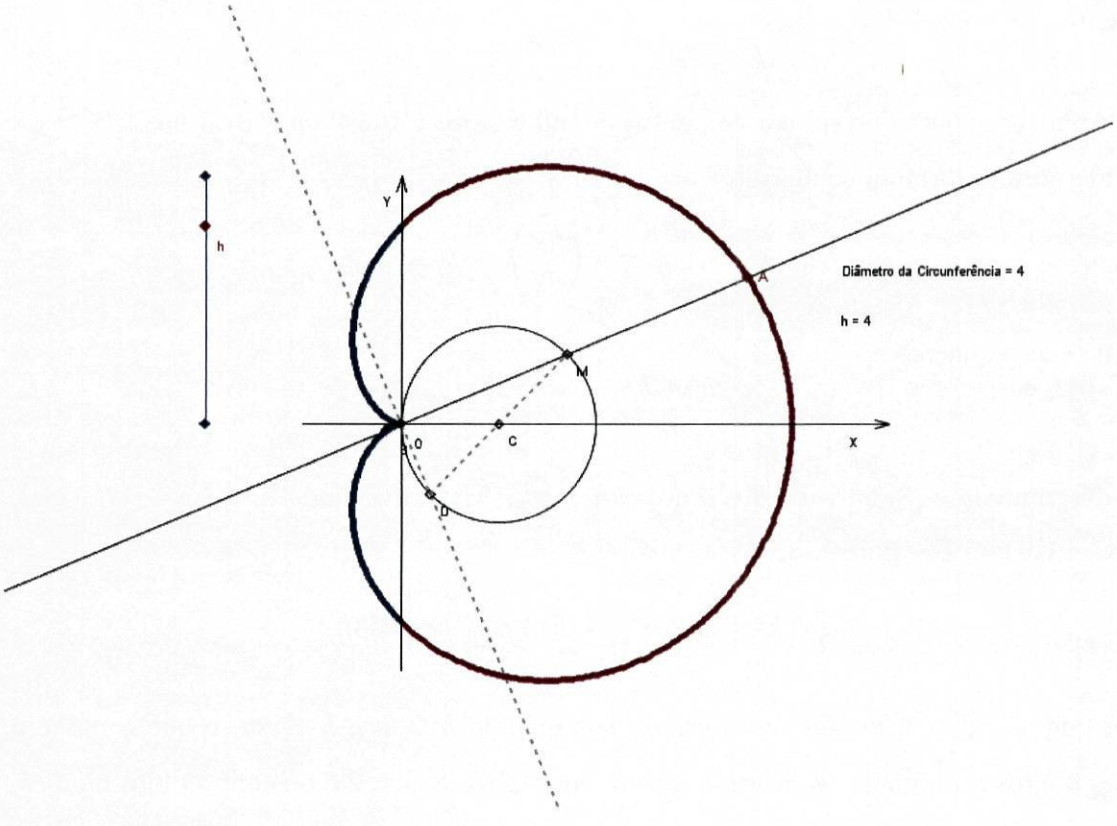


Figura 47: Caracol de Pascal quando $h = a$

abcissas, acham-se definidos pelas fórmulas $\theta = \pm\frac{1}{3}\pi$[1] e $\rho = \frac{3}{2}h$, e os pontos P e Q, onde as tangentes são paralelas ao eixo das ordenadas, por estas outras:

$$\theta = \pm\frac{1}{3}\pi \text{ e } \rho = -\frac{1}{2}a^2$$

as quais, juntamente com as anteriores, permitem-nos concluir que os pontos P, O e N encontram-se em linha recta, assim como, os pontos Q, O e M.

Neste caso especial, a curva recebe o nome de *Cardióide*[3].

[1]No documento original está escrito $\theta = \pm\frac{1}{6}\pi$.

[2]No documento original está escrito $\theta = \pm\frac{1}{6}\pi$.

[3]Significa em forma de coração, por analogia da figura.

153.

Aplicando, para determinar os pontos de inflexão do *Caracol de Pascal* nos três casos considerados, a fórmula conhecida

$$\rho^2 - \rho\frac{d^2\rho}{d\theta^2} + 2\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 = 0 \ ,$$

obtém-se as equações

$$\cos\theta = \frac{2a^2 + h^2}{3ah} \quad \text{e} \quad \rho = \frac{2(a^2 - h^2)}{3h} \ .$$

que determinam os valores de θ e ρ nesses pontos. Mas advertindo que, para ser θ real, deve ser $\cos\theta \leqq 1$ e, portanto,

$$2a^2 + h^2 - 3ah = (a - h)\left(a - \frac{1}{2}h\right) \leqq 0 \ ,$$

vê-se que só existem pontos de inflexão reais quando $h > a$ e $h \leqq 2a$, e que o número destes pontos será igual a *dois*, separados um do outro, se $h < 2a$, ou confundidos num só, de *dupla inflexão* quando $h = 2a$.

154.

Por ser (figura 44) $\rho = OM \pm h$, teremos $\dfrac{d\rho}{d\theta} = \dfrac{dOM}{d\theta}$. Logo, a subnormal polar do caracol, correspondente aos pontos A e B, é igual à subnormal polar da circunferência, correspondente ao ponto M. Para construir as normais ao caracol nos pontos A e B, basta, pois, traçar a recta OD, perpendicular a OM, e a recta MC, que intersecta a recta anterior no ponto D. O ponto D pertence às normais pedidas.

155.

O *caracol* pode considerar-se desde muito diverso ponto de vista, conforme o seguinte interessante teorema de ROVERBAL expressa:

A podaria da circunferência, em relação a um ponto qualquer do seu plano, é um Caracol de Pascal.

Para determiná-lo, designemos por h o raio da circunferência e por a a distância do seu centro ao ponto de referência de que se trata. Pois se por origem das coordenadas se toma este mesmo ponto, e por eixo das abcissas a recta que o une ao centro, a circunferência terá por equação

$$(x_1 - a)^2 + y_1^2 = h^2 \ ,$$

a tangente em qualquer dos seus pontos (x_1, y_1) tem por equação esta outra

$$y_1 y + (x_1 - a)x = y_1^2 + x_1^2 - ax_1 = ax_1 + h^2 - a^2 \ ,$$

e a perpendicular a esta tangente, traçada pela origem das coordenadas, tem a equação que se segue:

$$(x_1 - a)y - y_1 x = 0 \ .$$

Eliminando nestas três equações os valores de x_1 e y_1, determina-se a equação da *podaria* e verifica-se que esta coincide com a do *caracol*, à pouco determinada. (número 151)

156.

Demonstrou-se anteriormente (número 152) que o *caracol* de PASCAL, qualquer que seja a sua forma particular, possui em todos os casos um *ponto duplo à distância finita.* Ao qual pode agregar-se que também possui outros dois no infinito.

Provaremos isto começando por determinar as assimptotas da curva, pondo para isso na sua equação $y = ux$, e procurando o limite que se aproxima indefinidamente de u, quando x tende para ∞. Da análise necessária para isto, depreende-se facilmente que, no seu limite, u admite dois valores iguais a $+i$, e outros dois iguais a $-i$.

Pois pondo depois disto $y = \pm ix + v$ e procurando analogamente o limite de v, quando x tende para ∞, determina-se a equação

$$(\pm 2i \lim v - a)^2 = 0 \ .$$

De onde se deduzem para $\lim v$ dois valores iguais a $\frac{1}{2}ai$, e outros dois iguais a $-\frac{1}{2}ai$.

Logo, a curva possui duas assimptotas, que coincidem com a recta representada pela equação $y = i(x - \frac{1}{2}a)$, e outras duas representadas pela equação $y = -i(x - \frac{1}{2}a)$. E, tendo em conta que cada uma destas rectas é tangente no infinito a dois ramos distintos da curva, conclui-se que esta tem, mesmo assim, no infinito dois *pontos de retrocesso.*

157.

Por ter *três pontos duplos*, o *Caracol de Pascal* é curva *unicursal.* De maneira que, as suas coordenadas podem expressar-se em função racional de um parâmetro variável. Para obter estas expressões advirtamos de imediato que a equação (6.1), onde θ varia entre $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$, pode substituir-se pela seguinte:

$$\rho = a \cos\theta + h \ ,$$

na qual h possui um único sinal, admitindo que θ pode variar entre 0 e 2π.

Assim, fazendo $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\theta = t$ obtemos

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{e} \quad \cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2} \ ,$$

valores que, substituídos nas equações $x = \rho\cos\theta$ e $y = \rho \operatorname{sen}\theta$ resultará

$$x = \frac{h + a + (h-a)t^2}{(1+t^2)^2}(1-t^2) \quad \text{e} \quad y = 2\frac{h + a + (h-a)t^2}{(1+t^2)^2}t \ .$$

As últimas fórmulas serviram de ponto de partida a G. PITTARELLI para o estudo, bastante minucioso, que fez do caracol, na sua memória sobre *Le lumache di Pascal*[4],

[4]No documento original está escrito *Li lumache di Pascal.*

publicada no *Giornale di Matematiche* (Napoli, t. XXI, 1883, p. 145 e p. 173). Mas aqui limitaremo-nos a obter, por intermédio das mesmas, a equação tangencial da curva.

Partindo da expressão

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{h\cos\theta + a\cos 2\theta}{h\,\mathrm{sen}\,\theta + a\,\mathrm{sen}\,2\theta} \ ,$$

a equação da tangente ao caracol será

$$(h\cos\theta + a\cos 2\theta)X + (h\,\mathrm{sen}\,\theta + a\,\mathrm{sen}\,2\theta)Y = (h + a\cos\theta)^2 \ ,$$

ou substituindo $\mathrm{sen}\,\theta$ e $\cos\theta$ pelos seus valores em função de t, esta outra

$$[h + a - 6at^2 - (h-a)t^4]X + 2[h + 2a + (h-2a)t^2]tY = [h + a + (h-a)t^2]^2 \ .$$

Por intermédio da qual se pode obter a equação tangencial da curva considerada. Comparando, de facto, com a equação

$$uX + vY + 1 = 0 \ ,$$

resulta

$$u = -\frac{h + a - 6at^2 - (h-a)t^4}{(h + a + (h-a)t^2)^2} \quad \text{e} \quad v = -2\frac{h + 2a + (h-2a)t^2}{(h + a + (h-a)t^2)^2}t \ .$$

Bastando agora eliminar t entre estas equações para obter a equação procurada, que, segundo Pittarelli (l. c., p. 155), é como se segue

$$(a^2 - h^2)^3(u^2 + v^2)^2 + K(u^2 + v^2) + L = 0^5$$

na qual se designam abreviadamente K e L como sendo

$$K = 2(h^2 - a^2)^2h^2u^2 - 2(h^2 - a^2)a(4a^2 + 5h^2)u + 8(h^2 - a^2)^2 - 36h^2 - 36h^2(h^2 - a^2) + 27h^4{}^6$$

[5] No documento original está escrito $(a^2 - b^2)^3(u^2 + v^2)^2 + K(u^2 + v^2) + L = 0$.

[6] No documento original está escrito $K = 2(h^2 - a^2)^2b^2u^2 - 2(h^2 - a^2)a(4a^2 + 5h^2)u + 8(h^2 - a^2)^2 - 36h^2 - 36h^2(h^2 - a^2) + 27h^4$.

e

$$L = (au + 2)^3[a(h^2 - a^2)u - 2a^2] \ .$$

Mediante esta equação podem determinar-se os focos do Caracol de Pascal pelo método geral conhecido, já utilizado anteriormente para determinar os focos da lemniscatas. Mas, no caso que agora tratamos é preferível utilizar-se outro mais elementar e simples, que passamos a expôr.

Consideremos a recta

$$y = ix + k \ ,$$

e busquemos os valores que deve ter k para que a recta seja tangente ao caracol, ou para que intersecte a curva em dois pontos, coincidentes um com o outro.

Eliminando para isso y entre as equações da recta e da curva, obtém-se esta outra,

$$(2ki - a)^2x^2 + 2[(2ki - a)k^2 - h^2ik]x + k^4 - h^2k^2 = 0 \ ,$$

que determina as abcissas dos pontos de intersecção de ambas as linhas. E, expressando agora que os dois valores destas abcissas são iguais, obtém-se a condição seguinte:

$$[(2ki - a)k^2 - h^2ik]^2 - (2ki - a)^2(k^4 - h^2k^2) = 0$$

ou

$$k^2h^2(a^2 - h^2 - 2aki) = 0.^7$$

De onde se deduz

$$k = 0 \ \text{ e } \ k = \frac{h^2 - a^2}{2a}i \ .$$

À primeira destas soluções corresponde uma recta, que passa pelo ponto duplo da curva, mas que não é tangente a esta, e que assim não determina foco nenhum.

[7] No documento original está escrito: $k^2(a^2 - h^2 - 2aki) = 0$.

E à segunda solução corresponde a tangente à curva

$$y = i\left[x + \frac{h^2 - a^2}{2a}\right] \quad .$$

Do mesmo modo se veria que existe outra tangente à curva com coeficiente angular igual a $-i$, cuja equação difere da anterior unicamente no sinal de i.

Procurando a intersecção de ambas as rectas, conclui-se que a curva possui um *foco ordinário*, cujas coordenadas são

$$x = \frac{a^2 - h^2}{2a} \quad , \quad \text{e} \quad y = 0 \quad .$$

Devendo acrescentar-se a isto que as assimptotas, cujas equações foram obtidas anteriormente, determinam também pela sua intersecção um *foco singular* da curva, definido pelas coordenadas

$$x = \frac{1}{2}a \quad , \quad \text{e} \quad y = 0 \quad .$$

158.

Entre as distâncias r e r' dos pontos do caracol à origem das coordenadas e ao seu *foco ordinário*, existe a seguinte relação notável

$$2hr + 2ar' = h^2 - a^2 \quad ,$$

de fácil comprovação, substituindo nela r e r' pelos seus respectivos valores

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{e} \quad r' = \sqrt{\left(x - \frac{a^2 - h^2}{2a}\right)^2 + y^2} \quad ,$$

e advertindo que com isto resulta uma equção que coincide com a equação cartesiana da curva.

Da relação anterior, e da que se segue

$$x^2 + y^2 - ax = hr \quad ,$$

obtida da equação cartesiana da curva, infere-se também sem dificuldade que as distâncias r e r' *da origem e do foco ordinário aos pontos* (x, y) *da curva são funções racionais das coordenadas destes pontos.*

159.

O *Caracol de Pascal*, pode ser engendrado por um ponto situado no plano de uma circunferência, a qual se supõe invariavelmente unido, quando esta roda sobre outra fixa, de raio igual à primeira.

Se o ponto gerador da curva é exterior à circunferência móvel, obtém-se o caracol de ponto duplo (figura 45), se é interior à circunferência móvel, obtém-se o caracol de ponto isolado (figura 46), e a *Cardióide* (figura 47), quando corresponde à mesma circunferência. O caracol pertence, pois, ao grupo das curvas denominadas por *epicicloides*, das quais trataremos mais adiante, e então se demonstrará a exactidão da interessante proposição que acaba de enunciar-se.

160.

O comprimento dos arcos do caracol depende, quando $h \gtrless a$, de um integral elíptico de segunda espécie. De facto,

$$s = \int_0^\theta \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2}\, d\theta = (a+h)\int_0^\theta \sqrt{1 - \frac{4ha}{(a+h)^2}\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}\theta}\, d\theta \ ,$$

Ou tomando, $\frac{1}{2}\theta = \varphi$,

$$s = 2(a+h)\int_0^{2\varphi} \sqrt{1 - \frac{4ha}{(a+h)^2}\operatorname{sen}^2\varphi}\, d\varphi.^{8}$$

[8] No documento original está escrito $s = 2(a+h)\int_0^{\varphi} \sqrt{1 - \frac{4ha}{(a+h)^2}\operatorname{sen}^2\varphi}\, d\varphi$.

161.

Da fórmula precedente podem deduzir-se, por referência aos arcos do caracol, teoremas análogos aos demonstrados na teoria dos integrais elípticos, por referência aos da elipse. Como exemplo, fixemos a atenção no *teorema* chamado de *Fagnano*.

No suposto

$$k^2 = \frac{4ha}{(a+h)^2} \quad \text{e} \quad \int_0^{2\varphi} \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} d\varphi = E(k, \varphi) \quad ,$$

pela teoria dos integrais elípticos

$$E(k,\varphi) + E(k,\psi) - E\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{k^2 \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} = \frac{k^2 \operatorname{sen}\theta}{2\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}\theta}} \quad ,$$

quando entre φ e ψ existe ainda a relação seguinte

$$\cos\varphi \cos\psi = \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\psi \sqrt{1 - k^2} \quad .$$

Na figura 46 assinalemos dois pontos do caracol, m e m', cujas amplitudes satisfaçam a igualdade anterior, e teremos

$$arcAm = 2(a+h)E(k,\varphi) \quad , \quad arcAm' = 2(a+h)E(k,\psi)$$

e

$$arcAB = 2(a+h)E\left(k, \frac{\pi}{2}\right) \quad .$$

Por outro lado, representando por V o ângulo que forma o raio vector do ponto m com a tangente à curva no mesmo ponto, resulta que

$$\operatorname{tg} V = \rho \frac{d\theta}{d\rho} = -\frac{a\cos\theta + h}{a \operatorname{sen}\theta} \quad ,$$

e, portanto,

$$\cos V = \frac{a \operatorname{sen}\theta}{(a+h)\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}\theta}} \quad .$$

Com o qual uma das igualdades anteriores se transforma imediatamente na que se segue

$$E(k,\varphi)+E(k,\psi)-E\left(k,\frac{\pi}{2}\right)=\frac{k^2(a+h)}{2a}\cos V \quad .$$

Ou, finalmente

$$arcAm+arcAm'-arcAB=arcAm-arcBm'=\frac{k^2(a+h)^2}{a}\cos V=4h\cos V \quad .$$

Para construir, pois, a diferença de comprimentos dos arcos Am e Bm', basta tomar sobre o raio vector do ponto m um comprimento igual a $4h$, e projectaria sobre a tangente à curva o mesmo ponto.

162.

A área A, obtida pelo raio vector do caracol, quando θ varia entre 0 e θ, é expressa pela fórmula

$$A=\frac{1}{2}\left(h^2+\frac{1}{2}a^2\right)\theta+\frac{1}{8}a^2\operatorname{sen}2\theta+ah\operatorname{sen}\theta \quad .$$

II A Cardióide

163.

Já verificamos no número 152 que recebe o nome de Cardióide, proposto por CASTILLON (*Philosophical Transactions of London Royal Society*, 1741[9]), o Caracol de Pascal que tem por equação

$$\rho = a + a\cos\theta \quad , (0 \leqq \theta \leqq 2\pi) \quad ,$$

e vimos também qual é a forma desta curva, representada na figura 47. Limitaremo-nos agora a dar conta de algumas propriedades da mesma curva.

Tomando, nas fórmulas do número 157, $h = a$, obtém-se, para determinar as coordenadas x e y da Cardióide, em função do parâmetro arbitrário t, as fórmulas

$$x = \frac{2a(1-t^2)}{(1+t^2)^2} \quad \text{e} \quad y = \frac{4at}{(1+t^2)^2} \quad ,$$

das quais, se obtém, como equação da tangente a que se segue

$$(1-3t^2)X + t(3-t^2)Y = 2a \quad .$$

Como se deduz, para equação tangencial da curva, esta outra

$$27a^4(u^2+v^2) - 2a^2(au+2)^3 = 0 \quad .$$

Conclui-se também do exposto no número 157, que a curva possui um *foco singular* $\left(\frac{1}{2}a, 0\right)$, e que não possui *focos ordinários.*

[9]No documento original está escrito *Phylosophical Transactions of London Royal Society*, 1741.

164.

Os quatros pontos de intersecção da recta

$$ux + vy + 1 = 0$$

com a Cardióide, determinam-se por intermédio da equação

$$t^4 + 2(1 - au)t^2 + 4avt + 2au + 1 = 0 \ ,$$

resultante de substituir, na equação da recta, x e y pelos valores expressos em função de t.

Por outra parte, os valores de t nos três pontos de contacto das tangentes à curva, traçadas por um ponto (α, β) resultam da equação

$$t^3 + \frac{3\alpha}{\beta}t^2 - 3t + \frac{2a - \alpha}{\beta} = 0, \tag{6.2}$$

que se obtém substituindo, na equação da tangente à curva X e Y por α e β.

Dividindo um pelo outro, os polinómios que formam os primeiros membros das duas equações anteriores, resulta, representando por Q o quociente e por R o resto da divisão,

$$Q = t - 3\frac{\alpha}{\beta} \ ,$$

e

$$R = \left(5 - 2au + 9\frac{\alpha^2}{\beta^2}\right)t^2 + \left(4av - 8\frac{\alpha}{\beta} - \frac{2a}{\beta}\right) + 2au + 1 + 3\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{2a - \alpha}{\beta} \ .$$

As condições para que os três pontos de contacto com a curva das tangentes que passam pelo ponto (α, β), correspodam à recta considerada serão as seguintes

$$5 - 2au + 9\frac{\alpha^2}{\beta^2} = 0 \ , \quad 4av - 8\frac{\alpha}{\beta} - \frac{2a}{\beta} = 0 \ \text{ e } \ 2au + 1 + 3\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{2a - \alpha}{\beta} = 0 \ .$$

As duas primeiras determinam os parâmetros u e v da recta. E a terceira eliminando $u$por intermédio da primeira, transforma-se na seguinte

$$\beta^2 + \alpha^2 + a\alpha = 0 \ ,$$

que, consideradas α e β como variáveis, representa uma circunferência, que tem por centro o ponto $\left(-\frac{1}{2}a, 0\right)$ e cujo raio é igual a $\frac{1}{2}a$. De tudo isto resulta demonstrado o teorema seguinte:

As três tangentes à Cardióide, traçadas por qualquer ponto da circunferência, de centro $\left(-\frac{1}{2}a, 0\right)$ *e raio igual a* $\frac{1}{2}a$, *tocam a curva em três pontos, reais ou imaginários, situados em linha recta.*

O quarto ponto de intersecção da recta que passa pelos pontos de contacto das três tangentes que acabamos de considerar, se acha definido pela equação $Q = 0$ ou $t = 3\frac{\alpha}{\beta}$.

165.

Representando por t_1, t_2 e t_3 os valores de t nos três pontos de contacto das tangentes à Cardióide, traçadas pelo ponto (α, β), da equação (6.2) se deduz que

$$t_1 + t_2 + t_3 = -3\frac{\alpha}{\beta} \ , \quad t_1t_2 + t_1t_3 + t_2t_3 = -3 \ \text{ e } \ t_1t_2t_3 = -\frac{2a - \alpha}{\beta} \tag{6.3}$$

Por ser $t = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta$, a condição para que as bissectrizes dos ângulos formados com o eixo polar pelos vectores dos pontos de contacto, correspondentes a dois destas tangentes, sejam perpendiculares uma à outra, é $t_1t_2 = -1$. E, neste caso

$$t_3 = \frac{2a - \alpha}{\beta} \ \text{ e } \ t_1 + t_2 = -2\frac{a + \alpha}{\beta} \ .$$

Substituindo agora na segunda das equações (6.3) t_1t_2, $t_1 + t_2$ e t_3 por estes valores, resulta

$$\beta^2 + \alpha^2 - a\alpha = 2a^2 \ .$$

Logo, *os pontos do plano da Cardióide, tais que duas das tangentes à curva, traçadas por cada um deles, a toquem noutros pontos, correspondentes a uma recta que passa pela origem, se acharão também situados sobre uma circunferência, de centro definido pelas coordenadas* $\frac{1}{2}a$ *e* 0, *e de raio igual a* $\frac{3}{2}a$.

166.

Para rectificar a Cardióide não é necessário, como nos demais caracóis, utilizar os integrais elípticos. Assim, resulta da expressão integral seguinte

$$s = 2a \int_0^\theta \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}\theta} d\theta = 4a \operatorname{sen} \frac{1}{2}\theta \ .$$

Da qual se deduz que o comprimento total da curva é igual a $8a$.

A rectificação da Cardióide foi pela primeira vez obtida por LA HIRE, conforme consta nas *Mémoires de l'Académie de Paris*, 1708.

III Os Ovais de Descartes

167.

Sejam r e r' as distâncias de um ponto variável, M, a dois pontos fixos, O e O', chamados *focos* (figura 48), e representando por h e k duas quantidades constantes, suponhamos que

$$r \pm hr' = \pm k. \tag{6.4}$$

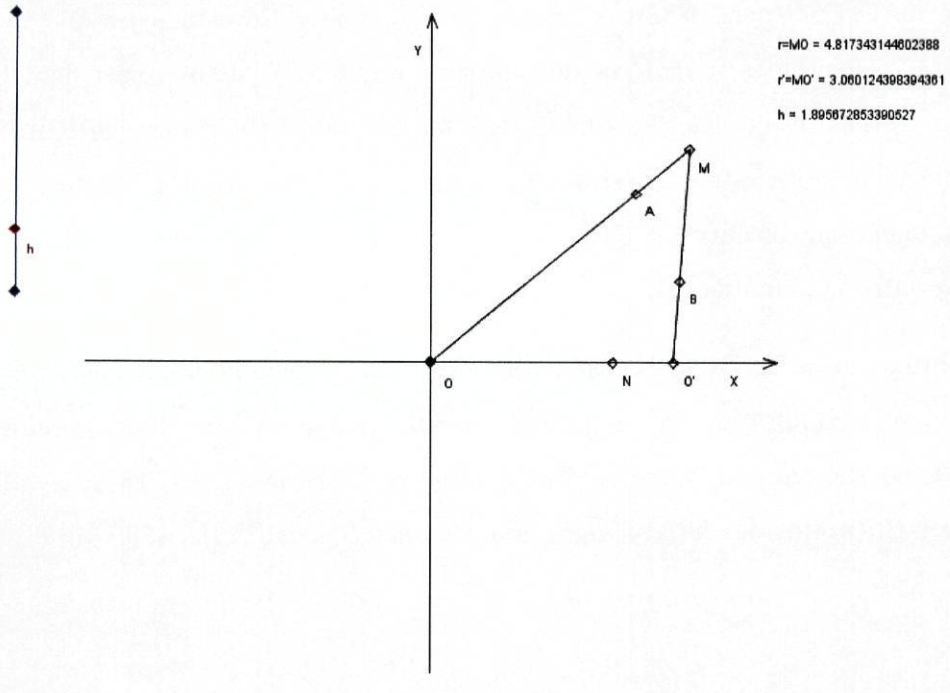


Figura 48: Procedimento para a construção dos Ovais de Descartes

O lugar geométrico descrito por M, conforme r e r' variam de magnitude, constitui

uma das curvas denominadas Ovais de Descartes, em memória do ilustre geómetra deste nome, que as descobriu e as definiu a tratar de resolver o problema de óptica que tem por objectivo determinar a forma da superfície de separação de dois meios transparentes, distintos em densidade, necessária para que os raios emitidos por um ponto luminoso no primeiro sejam transmitidos, por refracção, a outro ponto fixo no segundo. Problema resolvido no seu *Dióptrica* por DESCARTES, e mais tarde, no conceito geométrico, minuciosamente estudado pelo mesmo autor no livro II da sua célebre *Geometria*, publicada em 1637.

No mesmo assunto que DESCARTES, e a propósito do mencionado problema de Óptica, ocupou-se também ROBERVAL, numa memória intitulada de *De geometrica planarum et cubicarum æquationum resolutione*[10], pela primeira vez publicada em 1693, muito depois de falecido o autor, e de novo, em 1730, inserida no volume VI, página 157, das *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris*. Sendo de crer que as investigações de tão eminente geómetra, respeitantes à matéria de que se trata, fossem feitas antes de DESCARTES publicar os seus resultados. Pois não existe outro modo de explicar que ROBERVAL não tenha mencionado a este propósito o nome do grande filósofo, e ainda tenha advertido explicitamente que as curvas a que o seu trabalho se referia não haviam sido tratadas por nenhum outro matemático.

Sobre os *ovais* de DESCARTES, conhecidos também pelo nome de *curvas aplanéticas*, proposto por HERSCHEL, foram posteriormente numerosos trabalhos, catalogados por LIGUINE no *Bulletin des Sciences Mathématiques* (2ª serie, t. VI, 1882, e 40). E mais tarde por BROCARD, no *Intermédiaire des Mathématiciens* (t. III, 1896, p. 23).

168.

Para determinar a equação destes ovais, expressa em coordenadas cartesianas, tomemos o ponto O como origem das mesmas, e a recta OO' para eixo das abcissas. Designando

[10]No documento original está escrito *resolutione æquationum*.

por a a distância OO', vem que

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{e} \quad r' = \sqrt{y^2 + (x - a)^2} \quad .$$

Equações das quais se deduz que

$$r'^2 = r^2 - 2ax + a^2 \quad ,$$

e, contando ainda com a equação (6.4), este outro resultado

$$(1 - h^2)r^2 + 2h^2ax + k^2 - a^2h^2 = \pm 2kr. \tag{6.5}$$

ou o seguinte, se na expressão anterior se põe o valor de r

$$[(1 - h^2)(x^2 + y^2) + 2ah^2x + k^2 - a^2h^2]^2 = 4k^2(x^2 + y^2). \tag{6.6}$$

Da equação (6.5) conclui-se imediatamente que os pontos dos Ovais de Descartes são as intersecções da circunferência de raio variável r, e centro O, com as rectas correspondentes, paralelas ao eixo das ordenadas, representadas por aquela mesma equação, disposta, para maior claridade, nesta forma:

$$x = \frac{a^2h^2 - k^2 \pm 2kr - (1 - h^2)r^2}{2h^2a} = \frac{a^2h^2 + r^2k^2 - (r \mp k)^2}{2h^2a}. \tag{6.7}$$

E, sendo o valor absoluto do segundo membro maior, igual ou menor que r, assim esta equação representará rectas exteriores à circunferência, ou tangentes a ela, ou secantes da mesma em dois distintos pontos (pontos dos ovais), simétricos em relação ao eixo das abcissas.

Notemos ainda que, em relação ao duplo sinal de k, a cada valor de r correspondem dois valores distintos de x, ou dois pares de pontos dos ovais, situados cada qual numa distinta recta. Mas, se a r atribuirmos um novo valor, r_1, pode suceder que algum dos dois valores de x assim obtidos coincida com algum dos que antes se obtiveram, como se sucede quando se verifica que

$$r^2h^2 - (r - k)^2 = r_1^2h^2 - (r_1 + k)^2 \quad .$$

Em cujo caso, pelo ponto cuja abcissa é x passará uma recta, paralela ao eixo das ordenadas e secante aos ovais em quatro distintos pontos, número máximo de intersecções de uma recta com uma curva de quarto grau. Sendo necessário, para isto que

$$r - r_1 = \frac{2k}{1 - h^2} \ .$$

De maneira que, *os raios das duas circunferências que produzem quatro pontos da curva, situados na mesma recta, paralela ao eixo das ordenadas, hão-de ter uma diferença constante.*

169.

Antes de passar mais adiante, convém advertir que o *Caracol de Pascal*, se acha compreendido, como caso particular, entre os *Ovais de Descartes*. Se, de facto, na equação (6.6) destes *ovais* se supõe que $k^2 = a^2h^2$, obtém-se a equação do *caracol*. E não é somente neste caso que o *caracol* coincide com aqueles *ovais*. Porque se a equação (6.4) se escrever na seguinte forma

$$r' \pm \frac{1}{h}r = \pm\frac{k}{h} \quad \text{ou} \quad r' \pm h_1 r = \pm k_1 \ ,$$

supondo para isso que $h_1 = \dfrac{1}{h}$ e $k_1 = \dfrac{k}{h}$, facilmente se vê que aquela equação (6.4), representará um caracol quando seja $k_1^2 = a^2h_1^2$ ou $k = a$.

170.

Vejamos agora se a curva representada pela equação (6.6) admite outro foco, O'', colocado, como os O e O', sobre o eixo das abcissas. Para isto é necessário, e basta, que exista um sistema de valores de k_1, $a_1 = OO''$ e h_1, tal que a equação

$$(1 - h_1^2)r^2 + 2a_1h_1^2x + k_1^2 - a_1^2h_1^2 = \pm 2k_1 r \ ,$$

coincida com a equação (6.5), ou que k_1, a_1 e h_1 satisfaçam as equações condicionais seguintes:

$$\frac{ah^2}{1-h^2} = \frac{a_1 h_1^2}{1-h_1^2} \quad , \quad \frac{k^2 - a^2h^2}{1-h^2} = \frac{k_1^2 - a_1^2 h_1^2}{1-h_1^2} \quad \text{e} \quad \frac{k}{1-h^2} = \frac{k_1}{1-h_1^2} \quad .$$

Eliminando na segunda destas equações k_1 e a_1, por intermédio da primeira e da terceira, obtém-se esta outra

$$k^2 h_1^4 - (a^2 + k^2) h^2 h_1^2 + a^2 h^4 = 0 \quad ,$$

da qual se deduz para h_1 os valores

$$h_1 = \pm h \quad \text{e} \quad h_1 = \pm \frac{ah}{k} \quad .$$

Os primeiros valores de h, assim obtidos produzem estes outros: $k = k_1$ e $a = a_1$, e não conduzem a nenhum resultado novo. Mas dos segundos conclui-se que

$$a_1 = \frac{k^2 - a^2h^2}{(1-h^2)a} \quad \text{e} \quad k_1 = \pm \frac{k^2 - a^2h^2}{k(1-h^2)} \quad .$$

E, em consequência, representando por r'' a distância MO', os Ovais de Descartes, que tem por equação

$$r \pm \frac{ah}{k} r'' = \pm \frac{k^2 - a^2h^2}{(1-h^2)k}, \tag{6.8}$$

e por focos a origem das coordenadas, O, e O'', separados um do outro pela distância

$$OO' = \frac{k^2 - a^2h^2}{(1-h^2)a} \quad ,$$

coincidem com os representados pela equação (6.4).

Advirtamos ainda que as equações (6.4) e (6.8), por eliminação de r, resulta uma nova relação linear entre r' e r''. E, portanto, *qualquer oval de Descartes pode ser definido de três modos distintos, como lugar geométrico dos pontos cujas distâncias a outros dois fixos*

estão ligadas por uma relação linear. Importante resultado devido a CHASLES. (*Aperçu historique*, 1837, note 21)

Mas é de advertir que o foco O'', a que acabamos de nos referir, não existe no caso de se converter o oval no *caracol* de Pascal.

171.

Para determinar a forma da curva, representada pela equação (6.6), resolveremos várias questões previamente.

1.º Determine-se em primeiro lugar os pontos em que a curva intersecta o eixo das abcissas.

Tomando para isso $y = 0$ na equação (6.6), resulta

$$(1 - h^2)x^2 + 2ah^2x + k^2 - a^2h^2 = \pm 2kx \ .$$

Da primeira destas equações, ou adoptando como sinal do segundo membro o sinal $+$, se depreende que

$$x = \frac{(k \pm ah)(1 \mp h)}{1 - h^2} = \frac{k \pm ah}{1 \pm h} \ .$$

E da segunda

$$x = \frac{(k \mp ah)(\pm h - 1)}{1 - h^2} = -\frac{k \mp ah}{1 \pm h} \ .$$

A curva intersecta, pois, o eixo das abcissas em quatro pontos reais, dados pelas equações

$$x = \frac{k \pm ah}{1 \pm h} \quad \text{e} \quad x = \frac{-k \pm ah}{1 \pm h} \ ,$$

pontos distintos, bem entendido, excepto no caso de ser $k^2 = 1$, ou $k^2 = a^2$, ou $k^2 = a^2h^2$, das quais deve agora prescindir-se, porque aquela curva é então uma cónica, ou um *Caracol de Pascal*, já estudado anteriormente.

2.º Procuremos, em segundo lugar, os pontos múltiplos da curva considerada.

E para isso, determinemos os valores de x e de y, que satisfazem a equação (6.6), e as seguintes, derivadas suas em relação às mesmas coordenadas x e y,

$$[(1-h^2)(x^2+y^2)+2ah^2x+k^2-a^2h^2][(1-h^2)x+ah^2]=2k^2x$$

e

$$[(1-h^2)(x^2+y^2)+2ah^2x+k^2-a^2h^2](1-h^2)y=2k^2y \quad .$$

A última equação admite duas soluções:

$$y=0$$

e

$$(1-h^2)(x^2+y^2)+2ah^2x+k^2-a^2h^2=\frac{2k^2}{1-h^2} \quad .$$

Mas esta segunda solução não é compatível com a primeira das anteriores, e não conduz, por conseguinte, a ponto singular algum. E à solução $y=0$ correspondem pontos colocados sobre o eixo das abcissas, distintos todos uns dos outros, como já se advertiu, quando a equação (6.6) corresponde ao Caracol de Pascal.

A curva de que agora tratamos não possui, segundo isto, pontos *múltiplos* à distância finita. Mas admite dois pontos de retrocesso imaginários no infinito.

Para ver isto basta estudar as suas assimptotas. Se com este objectivo suposermos primeiramente que $y=zx$, e na continuação, $x=\infty$, determina-se que $\lim z=\pm i$. E se depois escrevermos $y=\pm ix+u$ e $x=\infty$, deduziremos a equação

$$[\pm 2i(1-h^2)\lim u+2ah^2]^2=0 \quad ,$$

que determina $\lim u$. E por ser *duplas as suas raízes* infere-se, em conclusão, que cada uma das equações

$$y=\pm i\left[x+\frac{ah^2}{1-h^2}\right]$$

representa duas assimptotas, coincidentes uma com a outra.

3.º Por serem *imaginárias* as assimptotas procuradas, assim mesmo se infere que a curva a que correspondem não tem ramos infinitos reais. Concluindo-se desta propriedade e da anteriormente advertida, da curva carecer de pontos *múltiplos* à distância finita, que os Ovais de Descartes se compõem de dois ramos fechados, completamente separados um do outro.

4.º Para determinar os pontos em que y adquire valores máximos ou *mínimos*, partiremos das equações

$$(1-h^2)r^2+2ah^2x+k^2-a^2h^2=2kr \quad \text{e} \quad x^2+y^2=r^2. \tag{6.9}$$

nas quais estão expressas x e y em função da quantidade positiva ou negativa r, que tomaremos como variável independente. E assim, se determinará que

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dr}}{\frac{dx}{dr}}=\frac{r-x\frac{dx}{dr}}{y\frac{dx}{dr}} \quad .$$

Por conseguinte, os valores de r a que correspondem valores máximos ou mínimos de y, se deduzirão da equação

$$r-x\frac{dx}{dr}=0 \quad ,$$

ou, em virtude da equação (6.9), desta outra

$$(1-h^2)^2r^3-3(1-h^2)kr^2-(a^2h^2+k^2h^2-3k^2+a^2h^4)r-k(k^2-a^2h^2)=0 \quad .$$

A qual será necessário que resolvamos para determinar logo, por intermédio das equações (6.9) e $x^2+y^2=r^2$, os valores procurados de x e y.

Como da primeira equação se depreendem três valores de r, a cada um dos quais correspondem um valor de x e outros dois, iguais e de sinais contrários, de y, dados pelas últimas, conclui-se que o número de pontos que satisfazem a questão são seis, distribuídos por metade para um e outro lado do eixo das abcissas. Mas cada um destes grupos de três

pontos, dois devem ser imaginários, porque se não o fossem, um ramo da curva teria dois pontos de ordenada máxima ou mínima em cada lado daquele eixo, e não mais que um na outra. O que é de todo um absurdo.

Os pontos em que x é máximo ou mínimo irão obter-se por um procedimento análogo. Sendo fácil ver que as equações

$$y = 0 \quad \text{e} \quad \frac{dx}{dr} = 0 \quad ,$$

ou

$$y = 0 \quad \text{e} \quad k - (1 - h^2)r = 0 \quad ,$$

determinam os valores de r, a que correspondem valores máximos ou mínimos de x.

À segunda equação correspodem estes valores de x e y

$$x = \frac{a^2 + k^2 - a^2h^2}{2a(1 - h^2)} \quad ,$$

e

$$y = \frac{1}{2a(1 - h^2)} \sqrt{4a^2k^2 - (a^2 + k^2 - a^2h^2)^2} \quad ,$$

Aos quais correspondem dois pontos, reais ou imaginários.

E à solução $y = 0$, os quatro pontos em que a curva intersecta o eixo das abcissas, anteriormente determinados.

5.º Para determinar os pontos em que a curva intersecta o eixo das ordenadas, toma-se $x = 0$ e resultará

$$y = \frac{\pm k \pm h\sqrt{a^2 + k^2 - a^2h^2}}{1 - h^2}. \tag{6.10}$$

Vê-se, pois, que o eixo das ordenadas, ou não intersecta a curva, como sucederá quando $a^2 + k^2 - h^2a^2 < 0$, ou intersecta a curva em quatro pontos.

Tomando para origem das coordenadas o foco O', a equação da curva transforma-se nesta

$$[(h^2 - 1)(x_1^2 + y_1^2) - 2ax_1 + k^2 - a^2]^2 = 4k^2h^2(x_1^2 + y_1^2) \quad .$$

E tomando nela $x_1 = 0$, obtém-se os valores das ordenadas daqueles pontos em que a curva intersecta novamente o eixo das ordenadas, dados pela expressão

$$y_1 = \frac{\pm kh \pm \sqrt{a^2h^2 + k^2 - a^2}}{h^2 - 1} \quad ,$$

Da última fórmula deduz-se que quando $h^2 > 1$, y_1 é real, e da equação (6.10) que y será real quando $h^2 < 1$. Logo, uma, pelo menos, das perpendiculares ao eixo dos ovais, que passam pelos focos O e O', intersecta a curva em quatro pontos reais.

172.

Disto tudo se conclui que a Curva a que nos referimos consta de dois ramos distintos, que, em vez de se intersectarem - salvo o caso do *Caracol de Pascal*, de que agora prescindimos - se encontram uma dentro da outra. A interior, fechada e convexa, ou sem nenhum ponto de inflexão, possui um eixo de simetria AB, que pode supôr-se coincidente com o eixo das abcissas, e em cujos extremos, A e B, são as tangentes à curva perpendiculares ao mesmo eixo, e outros dois pontos, M e N, de ordenada *máxima* em absoluto. A exterior, da mesma forma geral, ou da indicada na figura 46, possuirá, neste caso quatro pontos: os A e B, nos extremos do eixo horizontal, e os P e Q, simetricamente colocados em relação a este eixo, onde as tangentes à curva são perpendiculares ao mesmo eixo, e outros dois pontos também, M e N, de ordenada *máxima* como no primeiro caso.

173.

As normais aos Ovais de Descartes podem obter-se por um método geral conhecido, aplicável a todas as curvas referidas a coordenadas *bipolares*.

No caso dos ovais a que correspondem os sinais superiores da equação (6.4), tomando os segmentos de recta $MA = 1$ e $MB = h$, figura 49, a normal à curva no ponto M será, a diagonal do paralelogramo construído sobre aqueles segmentos.

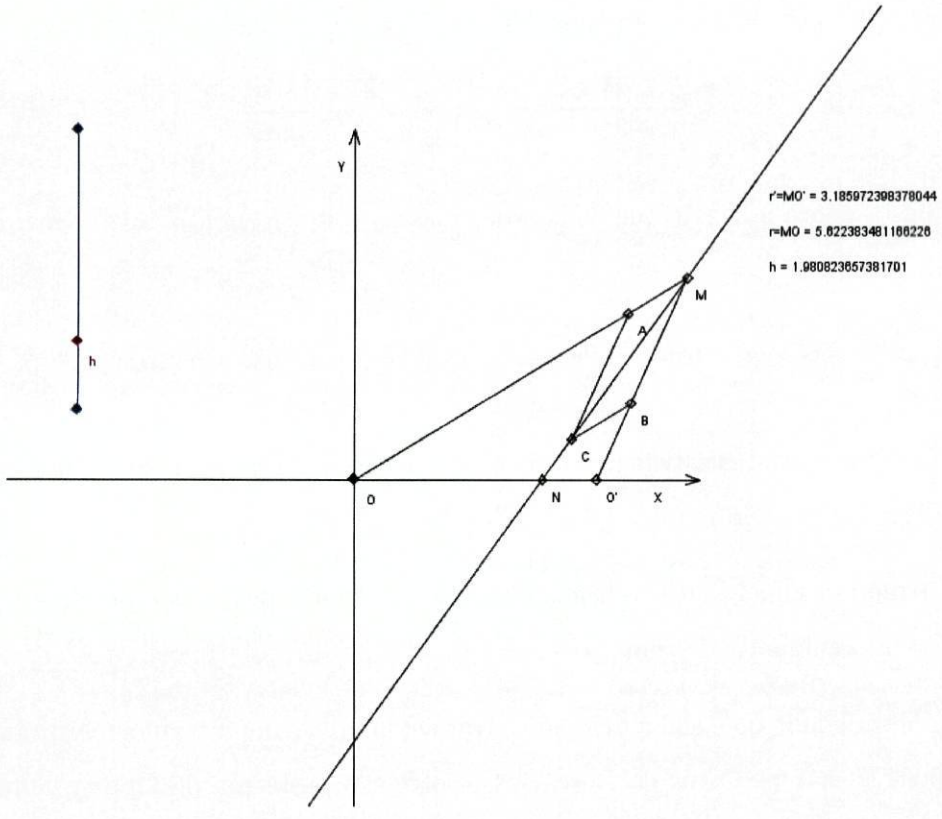


Figura 49: Procedimento para a construção das normais aos Ovais de Descartes

Para o demonstrar basta advertir que a equação da normal a um qualquer daqueles ovais, no ponto (x, y), é

$$\frac{X-x}{\frac{dr}{dx}+h\frac{dr'}{dx}} = \frac{Y-y}{\frac{dr}{dy}+h\frac{dr'}{dy}} \quad ,$$

ou, por ser

$$\frac{dr}{dx} = \frac{x}{r} = \cos\omega \quad , \quad \frac{dr'}{dx} = \frac{x-a}{r'} = \cos\omega' \quad ,$$

$$\frac{dr}{dy} = \frac{y}{r} = \operatorname{sen}\omega \quad \text{e} \quad \frac{dr'}{dy} = \frac{y}{r'} = \operatorname{sen}\omega' \quad .$$

representando por ω e ω', os ângulos MOx e $MO'x$,

$$\frac{X-x}{\cos\omega + h\cos\omega'} = \frac{Y-y}{\operatorname{sen}\omega + h\operatorname{sen}\omega'} \ .$$

E basta agora advertir que as coordenadas x_1 e y_1, do ponto C, se acham expressas pelas fórmulas

$$x_1 = x - (\cos\omega + h\cos\omega') \ \text{ e } \ y_1 = y - (\operatorname{sen}\omega + h\operatorname{sen}\omega') \ ,$$

e que estas coordenadas satisfazem a última equação, para concluir que a normal coincide com a diagonal MC do paralelogramo referido.

E à mesma conclusão se chega, tratando-se de um oval correspondente à equação $r - hr' = \pm k$, cuidando de tomar o segmento MB na direcção oposta a MO'.

Da propriedade que acaba de demonstrar-se, infere-se imediatamente esta interessante consequência: que os Ovais de Descartes resolvem o problema de Óptica, anteriormente mencionado, porque os raios luminosos OM, que partem do foco O de um oval de Descartes, interposto entre os dois *meios* transparentes de diferente densidade, e cujo *índice de refracção* é h, se refractam, quando chegam à curva, segundo rectas MO', que se intersectam noutro foco O'. Para persuadir-se do qual basta advertir que a igualdade

$$\frac{\operatorname{sen} OMN}{\operatorname{sen} O'MN} = \frac{\operatorname{sen} OMN}{\operatorname{sen} ACM} = h \ ,$$

resultante de considerar o paralelogramo $AMBC$, coincide com a que expressa a *lei da refracção*.

174.

Fazendo na equação (6.6)

$$V = (1-h^2)(x^2+y^2) + 2ah^2x + k^2 - a^2h^2 \ \text{ e } \ U = x^2 + y^2 \ ,$$

resulta

$$V^2 = 4k^2U \ .$$

E com estes antecedentes, escrevamos a equação

$$4k^2t^2 + 2tV + U = 0, \tag{6.11}$$

a qual, supondo que t é um parâmetro variável, representa um sistema, ou conjunto, de círculos, cujos centros coincidem com o eixo das abcissas.

Pois bem, se nos proposermos a determinar a equação da *envolvente* destes círculos, daremos, sem variante, com a equação (6.6), correspondente aos Ovais de Descartes. O que constitui uma interessante propriedade dos mesmos ovais.

175.

Efectuando a transformação, por *raios vectores recíprocos*, da curva representada pela equação (6.6), tomando a origem das coordenadas para centro da transformação, para o qual deve pôr-se nesta equação

$$x = \frac{t_1^2 x_1}{x_1^2 + y_1^2} \quad \text{e} \quad y = \frac{t_1^2 y_1}{x_1^2 + y_1^2} \ ,$$

encontra-se a que se segue

$$[(1-h^2)t_1^4 + 2ah^2t_1^2x_1 + (k^2 - a^2h^2)(x_1^2 + y_1^2)]^2 = 4k^2t_1^4(x_1^2 + y_1^2) \ ,$$

que coincide com a (6.6), quando

$$t_1^4 = \frac{k^2 - a^2h^2}{1-h^2}.$$[11]

[11] No documento original está escrito $t_1^2 = \frac{k^2 - a^2h^2}{1-h^2}$.

Logo, os Ovais de Descartes pertencem à classe das curvas que MOUTARD (*Bulletin de la Société Philomatique de Paris*, 1864[12]) designou com o nome de *analagmáticas*, as quais possuem a propriedade de não sofrerem alterações resultantes da transformação mencionada. Transformação aplicável aos Ovais de Descartes de três maneiras distintas, uma vez que pode tomar-se para origem das coordenadas qualquer dos três focos da curva, sem alterar a forma da equação (6.6).

176.

Cada uma das rectas definidas pela equação $y = \pm ix$ intersecta a curva a que corresponde a equação (6.6) em dois pontos situados no infinito, e noutros dois coincidentes um com o outro, cuja abcissa se deduz da equação

$$(2ah^2x + k^2 - a^2h^2)^2 = 0 \ .$$

Logo, as rectas consideradas são tangentes à referida curva, e esta possui, em consequência, um *foco ordinário* na origem das coordenadas. E como se podem tomar os pontos O' e O'' para origem das coordenadas sem alterar a forma da equação (6.6), assim mesmo resulta que estes pontos são também *focos ordinários* da curva. De maneira que a designação aplicada aos pontos O, O' e O'', nos números 167 e 170, concorda com a noção geral de foco proposta por Plücker.

Ao que precede pode agregar-se que a curva não possui mais que estes três focos *ordinários reais*.

Veremos, de facto, um pouco mais adiante, ao tratar da determinação do número de focos da classe de curvas denominadas *Quárticas Bicirculares*, entre as quais, como caso particular, se acham compreendidos os Ovais de Descartes, que o número dos *focos ordinários* destes é igual a *nove*, três *reais* e seis *imaginários*. Bastando, para determinar

[12]No documento original está escrito *Bulletin de la Société Phylomatique de Paris*, 1864.

estes últimos, advertir que as rectas, de coeficiente angular igual a $\pm i$, que passam pelos focos O, O' e O'',

$$y = ix \ , \ y = i(x-a) \ , \ y = i(x-a_1) \ ,$$

e

$$y = -ix \ , \ y = -i(x-a) \ , \ y = -i(x-a_1) \ ,$$

são tangentes à curva. Pelos quais os nove pontos em que as três primeiras intersectam as três últimas representam os *nove* focos da curva, três *reais*, os O, O' e O'', e os outros seis imaginários.

Mas, para além dos *ordinários*, a curva possui *focos singulares*, entre os quais existe um *real*, coincidente com a intersecção das suas assimptotas. Das equações destas linhas, pouco antes encontradas, se infere que este foco tem por coordenadas

$$x = -\frac{ah^2}{1-h^2} \ \text{ e } \ y = 0 \ .$$

177.

Pondo na equação (6.6) $x = r\cos\theta$ e $y = r\,\text{sen}\,\theta$, determina-se a equação da curva, referida em coordenadas polares,

$$(1-h^2)r^2 + 2(ah^2\cos\theta - k)r + k^2 - a^2h^2 = 0 \ .$$

Da eliminação de $\cos\theta$ entre esta equação e a polar de uma recta qualquer $\rho(A\cos\theta + B\,\text{sen}\,\theta) + C = 0$ se depreende outra equaçãode *quarto grau*, na qual o coeficiente do segundo termo é igual a $-\frac{4k}{1-h^2}$. Logo, *qualquer linha recta intersecta a curva em quatro pontos, tais que a soma das suas distâncias, positivas e negativas, a um foco, é constante.* (SALMON: *Higher planes curves*, ed. 3ª, 280).

A equação polar dos Ovais de Descartes, ultimamente considerada, foi utilizada por GENOCCHI (*Comptes rendus de l'Académie de Paris*, 1875) para obter o comprimento dos

arcos destas curvas, demonstrando assim aquele ilustre geómetra que a rectificação dos ovais cartesianos depende da rectificação de três arcos de três elipses diferentes.

178.

Os Ovais de Descartes podem ser definidos e traçados por muitos e diversos procedimentos, dos quais mencionamos tão somente os dois seguintes:

1.° O lugar geométrico dos pontos tais que a razão das suas distâncias a duas circunferências fixas seja constante, é um oval de Descartes. (NEWTON)

Representando, para demonstrá-lo, por R e R' os raios daquelas circunferências, por r e r' as distâncias de um ponto qualquer da curva aos centros da mesma, e por h uma constante, considerando as diversas posições daquele ponto em relação às circunferências, deduz-se que

$$\pm\frac{r-R}{r'-R'}=h \quad \text{ou} \quad r\mp hr'=R\mp hR' \ .$$

2.° Consideremos duas circunferências e um ponto fixo, situado na recta que passa pelos seus centros. Se traçarmos por este ponto uma secante às duas circunferências e unimos os pontos de intersecção com ambos os centros, os raios prolongados intersectar-se-ão noutros pontos de posição variável, conforme a secante varie, que descreverão Ovais de Descartes, com focos coincidentes naqueles centros. Esta construção elegante deve-se ao geómetra CHASLES (*Aperçu historique*, note XXI), que a deduziu, como consequência engenhosa do *teorema de Menelao*.

Aplicando, de facto, o mencionado teorema ao triângulo CMC' (figura 50), determinado pelos centros C e C' das duas circunferências e pelo ponto M da curva, e a transversal KA, obtém-se desde logo a igualdade seguinte:

$$\frac{CA}{AM}\cdot\frac{MA'}{A'C'}\cdot\frac{C'K}{CK}=1 \ .$$

Da qual, representando por R e R' os raios CA e $C'A'$, por r e r' as distâncias de M

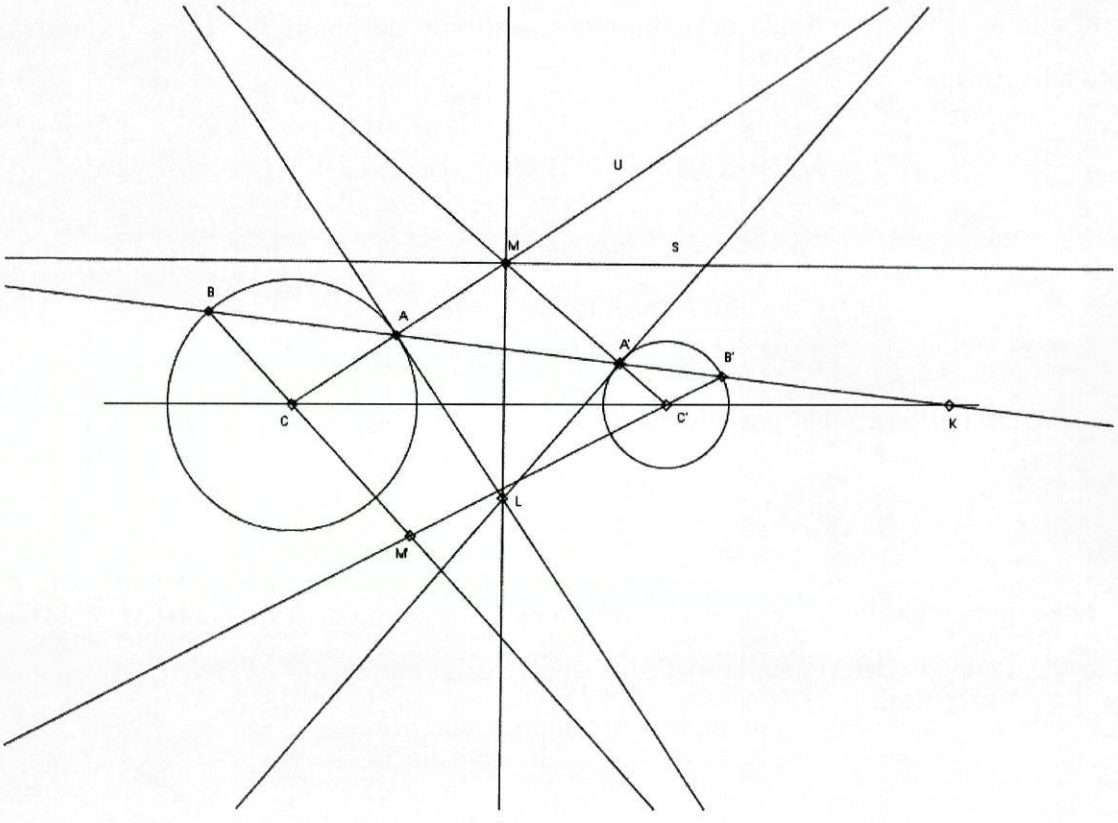


Figura 50: Procedimento para a construção dos Ovais de Descartes efectuado pelo geómetra Chasles

a C e C', e por h a constante $\frac{R}{R'} \cdot \frac{KC'}{KC}$, se depreende esta equação bipolar de um oval de Descartes:

$$-hr' = R - hR' \ .$$

E do mesmo modo se encontra, aplicando o mencionado teorema ao triângulo $CM'C'$ e à secante KA, esta outra equação:

$$r - hr' = -(R - hR') \ .$$

A todo o qual agregou Chasles, como interessante complemento, que a recta LM que passa pelo ponto de intersecção L das tangentes às circunferências, nos pontos A e A',

é tangente à curva engendrada pela construção exposta, no ponto M. Para demonstrar basta advertir que

$$AM = ML \times \cos AML \text{ e } A'M = ML \times \cos A'ML \ ,$$

ou

$$\frac{\cos AML}{\cos A'ML} = \frac{AM}{A'M} = \frac{r - R}{r' - R'} = h \ .$$

De onde, representando por MS uma recta, perpendicular a ML, se infere que

$$\frac{\operatorname{sen} UMS}{\operatorname{sen} SMA'} = h \ .$$

Logo, pelo referido no número 173, MS será a normal à curva no ponto M, e ML a tangente. Podendo determinar-se pelos mesmos passos a tangente ao oval noutro ponto M', obtido por igual construção ao mesmo tempo, que o primeiro.

179.

Os *Ovais de Descartes* desempenham um papel importante na Óptica, como o demonstra o facto de ter motivado a sua descoberta, conforme já atrás foi advertido, a resolução de um interessante problema desta ciência. Ao qual acrescentaremos que QUETELET (*Nouveaux Mémoires de l'Académie de Bruxelles*, t. III), e STURM (*Annales de Gergonne*, t. XV), encontraram estas mesmas curvas como solução do problema que tem por objectivo determinar as *cáusticas secundárias*, por reflexão e por refracção, do círculo. Isto é, as curvas que intersectam, ortogonalmente os raios reflectidos ou refringidos num arco deste nome.

IV As Quárticas Bicirculares

180.

Os *Ovais de Descartes* satisfazem uma equação da forma

$$r \pm hr' \pm kr'' = 0, \tag{6.12}$$

resultantes das equações dos mesmo ovais

$$r \pm h_1 r' = \pm k_1 \quad \text{e} \quad r \pm h_2 r'' = \pm k_2 \quad .$$

Circunstância que nos impulsa a estudar as curvas definidas pela equação (6.12), na qual r, r' e r'' representam as distâncias dos pontos de uma qualquer daquelas curvas a três pontos fixos situados, um na origem das coordenadas $(0,0)$, outro no eixo das abcissas, à distância a da origem $(a,0)$, e o terceiro com as coordenadas (α,β).

Por ser

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad , \quad r'^2 = x^2 + y^2 - 2ax + a^2 \quad , \quad r''^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 \quad ,$$

a equação cartesiana das curvas, definidas por (6.12), será

$$[(1+h^2-k^2)(x^2+y^2)-2(ah^2-\alpha k^2)x+2\beta k^2 y+h^2a^2-(\alpha^2+\beta^2)k^2]^2 = 4h^2(x^2+y^2)[y^2+x^2+a^2-2ax]. \tag{6.13}$$

ou

$$(x^2+y^2+px+qy+l)^2 = A^2(x^2+y^2)(x^2+y^2-2ax+a^2) \quad ,$$

supondo que

$$p = \frac{2(\alpha k^2 - ah^2)}{1+h^2-k^2} \quad , \quad q = \frac{2\beta k^2}{1+h^2-k^2} \quad ,$$

$$l = \frac{h^2a^2 - (\alpha^2+\beta^2)k^2}{1+h^2-k^2} \quad \text{e} \quad A = \frac{2h}{1+h^2-k^2} \quad .$$

A equação que acabamos de obter é de *quarto grau*, excepto quando $(1+h^2-k^2)^2 = 4h^2$ ou $1 \pm h \pm k = 0$, em cujo caso se reduz ao *terceiro*, e representa uma *cúbica circular* (número 42).

181.

Vejamos agora se existe outra equação da forma (6.13):

$$[(1+h_1^2-k_1^2)(x^2+y^2) - 2(ah_1^2 - \alpha_1 k_1^2)x + 2\beta_1 k_1^2 y + h_1^2 a^2 - (\alpha_1^2+\beta_1^2)k_1^2]^2 =$$

$$= 4h_1^2(x^2+y^2)(y^2+x^2+a^2-2ax) \ ,$$

que represente a mesma curva a que a anterior se refere.

Para isso devem verificar-se as expressões seguintes:

$$p = \frac{2(\alpha_1 k_1^2 - ah_1^2)}{1+h_1^2-k_1^2} \ , \quad q = \frac{2\beta_1 k_1^2}{1+h_1^2-k_1^2} \ ,$$

$$l = \frac{h_1^2 a^2 - (\alpha_1^2+\beta_1^2)k_1^2}{1+h_1^2-k_1^2} \quad \text{e} \quad A = \frac{2h_1}{1+h_1^2-k_1^2} \ .$$

ou

$$\begin{cases} \alpha_1 k_1^2 - ah_1^2 = \dfrac{h_1 p}{A}, \\ k_1^2 \beta_1 = \dfrac{h_1 q}{A}, \\ h_1^2 a^2 - k_1^2(\alpha_1^2+\beta_1^2) = \dfrac{2h_1 l}{A}, \\ k_1^2 = 1 + h_1^2 - \dfrac{2h_1}{A}. \end{cases} \tag{6.14}$$

das quais, eliminando primeiramente α_1 e β_1 entre as três primeiras e depois h_1^2, por intermédio da última resulta esta outra:

$$\frac{2}{A}(a^2+ap+l)h_1^2 + \left(\frac{p^2+q^2-4l}{A^2} - a^2\right)h_1 + \frac{2l}{A} = 0 \ .$$

Equação da qual se depreendem dois valores para h, um, o mesmo h, que nada de novo nos diz, e outro que, substituído nas equações anteriores, produzirá um sistema de

valores reais para k_1, α_1 e β_1, aos quais corresponde uma nova equação da forma (6.13), representante da mesma curva.

Logo, se uma curva satisfaz a uma equação da forma (6.12), existe um quarto ponto, tal que a mesma curva satisfaz também esta outra equação de igual forma, mas com distintos coeficientes:

$$r \pm h_1 r' \pm k_1 r'' = 0 \ ,$$

representando agora r'' a distância dos pontos da curva ao novo ponto considerado. De maneira que, *a curva pode ser analiticamente representada ou definida de quatro modos distintos, como lugar geométrico dos pontos cujas distâncias a outros três fixos estão ligadas por uma relação linear homogénea.*

Procedendo como no número 176, ao tratar dos *Ovais de Descartes*, facilmente se conclui que os pontos fixos $(0,0)$, $(0,a)$, (α,β) e (α_1,β_1) a que acabamos de nos referir, são *focos ordinários* da curva, únicos deste nome, e ainda *reais*, que a curva possui, conforme mostraremos mais adiante.

E também convém advertir desde logo que o teorema acabado de enunciar deixa de verificar-se quando, na equação que serve para determinar h_1, o coeficiente de h_1^2 é igual a zero, e também quando as duas raízes da mesma equação são iguais. A estes casos excepcionais pretencem os *Ovais de Descartes*, que, segundo já estabelecido, somente possui *três focos ordinários reais.*

182.

Deduzindo o valor de h_1 da segunda das equações (6.14), e substituindo nas primeira e terceira, resulta

$$\alpha_1 - a\frac{A^2\beta_1^2}{q^2}k_1^2 = \frac{p\beta_1}{q}$$[13]

e

$$\frac{A^2\beta_1^2a^2}{q^2}k_1^2 - (\alpha_1^2 + \beta_1^2) = \frac{2l\beta_1}{q},$$[14]

das quais, por eliminação de k^2, se obtém esta outra equação:

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 - a\alpha_1 + \frac{ap + 2l}{q}\beta_1 = 0 \ .$$

Portanto, o ponto (α_1, β_1) corresponde à circunferência de raio igual a

$$R = \frac{1}{2}\left[a^2 + \frac{(ap + 2l)^2}{q^2}\right]^{\frac{1}{2}} \ ,$$

cujo centro tem por coordenadas

$$\frac{1}{2}a \text{ e } -\frac{ap + 2l}{2q}.$$[15]

E como à equação desta circunferência satisfazem também as coordenadas dos pontos $(0,0)$, (α, β) e $(0, a)$ conclui-se que os *quatro* focos da curva correspondem à *mesma* circunferência *que se* acada de definir.

183.

As quárticas que acabamos de considerar estão compreendidas na extensa e importante classe das representadas pela equação

$$(x^2 + y^2)^2 + 2(mx + ny)(x^2 + y^2) + A_1x^2 + B_1xy + C_1y^2 + D_1x + E_1y + F_1 = 0, \quad (6.15)$$

[13]No documento original está escrito $\alpha_1 - a\frac{A^2\beta_1^2}{q^2}k^2 = \frac{p\beta_1}{q}$.

[14]No documento original está escrito $\frac{A^2\beta_1^2a^2}{q^2}k^2 - (\alpha_1^2 + \beta_1^2) = \frac{2l\beta_1}{q}$.

[15]No documento original está escrito $\frac{ap + 2l}{2q}$.

às quais se dá o nome de *Quárticas Bicirculares.* Sobre esta teoria e propriedades destas quárticas já muitos eminentes geómetras se debruçaram com muito engenho. Como MOUTARD (*Bulletin de la Société Philomatique de Paris*, 1860[16]), que as encontrou ao estudar as curvas *analagmáticas* de quarta ordem.

DARBOUX, que tratou delas, ao mesmo tempo que das curvas resultantes da intersecção da esfera com as superfícies de segunda ordem, em várias dissertações notáveis publicadas posteriormente ao ano 1864, numa das quais, intitulada *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques*[17], estão reunidos os resultados importantes das suas indagações sobre este assunto; LA GOURNERIE (*Journal de Liouville*, 1869), que extensamente analisou a equação procedente da geral, na suposição de ser $n = 0$, $B_1 = 0$, $E_1 = 0$, na qual se encontram compreendidas todas as *espíricas*; CASEY (*Transactions of Royal Irish Academy*, 1869); etc.

184.

Iniciaremos o estudo das Quárticas Bicirculares procurando averiguar qual é a natureza dos seus pontos situados no infinito, podendo para isso recorrer-se a qualquer um dos vários métodos conhecidos, como o das assimptotas, por exemplo. Mediante o qual se deduz, fazendo primeiramente $y = zx$, que $\lim_{x=\infty} \frac{y}{x} = \pm i$, e depois, se $y = \pm ix + u$ e $x = \infty$, que

$$u^2 + (n \mp mi)u - \frac{1}{4}(A_1 - C_1 \pm B_1 i) = 0 \ .$$

Se as raízes desta equação são desiguais, a curva terá dois pontos no infinito e quatro assimptotas, logo estes pontos serão *duplos.* E se as raízes são iguais, duas das quatro assimptotas coincidirão com as outras duas, e os pontos serão de *retrocesso.* Condição que se verifica quando

$$(n \mp mi)^2 + A_1 - C_1 \pm B_1 i = 0 \ ,$$

[16]No documento original está escrito *Bulletin de la Société Phylomatique de Paris*, 1860.

[17]No documento original está escrito *Sur une Classe remarquable de curves et de surfaces algébriques.*

ou

$$n^2 - m^2 + A_1 - C_1 = 0 \text{ e } 2mn = -B_1 \ .$$

Fácil é ver que estas equações continuam a ser satisfeitas quando a equação (6.15) se reduz à dos *Ovais de Descartes*, e por conseguinte, que as curvas com este nome têm dois pontos de retrocesso no infinito, como já vimos anteriormente.

Às *Quárticas Bicirculares* com dois pontos de retrocesso no infinito, aplica-se o qualificativo especial de *cartesianas*, estando, em consequência, compreendidos, como caso particular, neste grupo de curvas os mencionados ovais do mesmo nome.

185.

Para continuar o estudo iniciado no parágrafo anterior, vamos determinar as condições, para que o círculo que tem por equação

$$x^2 + y^2 = 2(\alpha x + \beta y + \gamma) = 2P$$

seja bitangente às curvas de que tratamos. Assunto interessante que se resolve pelo seguinte método, proposto por DARBOUX (l. c., p. 114 da edição de 1873).

Reduza-se primeiramente a equação (6.15), por alteração da origem das coordenadas para o ponto $\left(-\frac{m}{2}, -\frac{n}{2}\right)$[18], e por troca de direcção dos eixos, em virtude de fazer desaparecer o termo que contém o produto xy, à forma

$$(x^2 + y^2)^2 - 4(Ax^2 + A'y^2 + 2Cx + 2C'y + D) = 0. \tag{6.16}$$

Para expressar que a curva correspondente a esta equação e a do círculo se intersectam, temos que considerar estas outras duas equações:

$$P^2 - (Ax^2 + A'y^2 + 2Cx + 2C'y + D) = 0 \text{ e } x^2 + y^2 - 2P = 0, \tag{6.17}$$

[18]No documento original está escrito $\left(-\frac{m}{2}, -\frac{m}{2}\right)$.

a primeira das quais representa uma cónica.

Mas para que o círculo seja bitangente à curva de equação (6.16), devem reunir-se por pares os quatro pontos de intersecção do círculo com a curva, e portanto, devem ser também bitangentes as curvas (6.17).

Reduz-se, pois, a dificuldade a encontrar as condições para que estas duas últimas curvas sejam bitangentes. O qual se consegue subtraindo uma de outra ordenadamente aquelas equações (6.17), depois de multiplicada a segunda por um factor h, encontrando-se deste modo a seguinte:

$$f = P^2 - (Ax^2 + A'y^2 + 2Cx + 2C'y + D) - h(x^2 + y^2 - 2P) = 0 \ ,$$

que representa todas as cónicas que passam pela intersecção das equações (6.17). Pois para que estas curvas sejam bitangentes, será necessário, e basta, que a última equação deduzida represente duas rectas coincidentes, ou que f seja um quadrado perfeito.

Para determinar as condições em que isto se verifica, pode utilizar-se o seguinte procedimento.

Suponhamos que o coeficiente $A'+h-\beta^2$ de y^2 na equação precedente não seja igual a zero, e da mesma equação se deduzirão então dois valores para y, que somente serão iguais um ao outro quando tenha lugar, como identidade, a expressão seguinte:

$$(C'-\beta h-\beta\gamma-\alpha\beta x)^2 = (\beta^2-A'-h)\times[(\alpha^2-A-h)x^2+2(\alpha\gamma+\alpha h-C)x-D+2\gamma h+\gamma^2] \ ,$$

que se resume para isso nestas três equações de condição:

$$(A)\begin{cases} (A'+h)\alpha^2 + (A+h)(\beta^2 - A' - h) = 0; \\ \alpha\beta(C' - \beta h - \beta\gamma) + (\beta^2 - A' - h)(\alpha\gamma - C + \alpha h) = 0; \\ (C' - \beta h - \beta\gamma)^2 - (\beta^2 - A' - h)(\gamma^2 - D + 2\gamma h) = 0. \end{cases}$$

Da segunda destas equações, eliminando β^2 por intermédio da primeira, se deduz que

$$\gamma = -h + \frac{C\alpha}{A+h} + \frac{C'\beta}{A'+h} \quad ,$$

e da terceira, eliminando de seguida γ e com auxílio da que acaba de obter-se, e depois, ao resultado assim obtido, α^2 por intermédio da primeira, que

$$\left[h^2 + D - \frac{C^2}{A+h} - \frac{C'^2}{A'+h}\right](A'+h-\beta^2) = 0$$

ou por ser o segundo dos factores componentes diferentes de zero,

$$h^2 + D - \frac{C^2}{A+h} - \frac{C'^2}{A'+h} = 0 \quad .$$

Suponhamos, pelo contrário, que $A'+h-\beta^2$ seja *igual a zero*. Resolvendo então a equação $f = 0$ em relação a x, o que é possível, por que os coeficientes de x^2 e y^2, não podem ser simultaneamente nulos, chega-se aos mesmos resultados, anteriormente obtidos. De maneira que as equações adequadas à resolução do problema proposto, são, em qualquer suposição, as seguintes:

$$\frac{\alpha^2}{h+A} + \frac{\beta^2}{h+A'} = 1, \tag{6.18}$$

$$\gamma - \frac{C\alpha}{A+h} - \frac{C'\beta}{A'+h} + h = 0, \tag{6.19}$$

$$h^2 + D - \frac{C^2}{A+h} + \frac{C'^2}{A'+h} = 0. \tag{6.20}$$

Da última destas equações determinam-se quatro valores para h, e das outras duas dois, depois, os valores correspondentes de dois dos parâmetros, α, β e γ, do círculo pedido, ficando o terceiro arbitrário.

Vê-se, pois, que *existem geralmente quatro séries de círculos bitangentes à quártica considerada*, a qual resulta, por sua vez, *envolvente de cada uma daquelas quatro séries.*

A equação (6.18) revela ainda que *os centros dos círculos de cada série estão colocados sobre uma cónica, e que as quatro cónicas assim obtidas são homofocais.*

A equação geral dos círculos bitangentes à quártica considerada obtém-se substituindo, na segunda das equações (6.17), γ pelo seu valor, obtido da equação (6.19), e assim resulta esta nova equação:

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\frac{C\alpha}{A+h} - 2\frac{C'\beta}{A'+h} + 2h = 0. \tag{6.21}$$

Na qual α designa uma função de β, determinada por (6.18), e β uma quantidade arbitrária.

Nos casos de ser $C = 0$, ou $C' = 0$ ou $A = A'$, da equação (6.20) somente podem deduzir-se três valores de h. Mas, advertindo que as equações de (A)são satisfeitas pelos valores $h = A$ e $\alpha = 0$, no primeiro daqueles casos; $h = -A'$ e $\beta = 0$, no segundo; $h = -A$ e $C'\alpha = C\beta$, no terceiro; e pelos valores correspondentes de γ, que da terceira daquelas equações (A) se determinam, conclui-se que *nos três casos existe uma série de círculos bitangentes à quártica considerada, com os centros respectivamente colocados nas rectas* $x = 0$, *ou* $y = 0$, *ou* $C'x = Cy$.

186.

Adverte-se também que todos os círculos representados pela equação (6.21), e correspondentes ao mesmo valor de h, intersectam ortogonalmente o círculo fixo, que tem por equação

$$X^2 + Y^2 + \frac{2CX}{h+A} + \frac{2C'Y}{h+A'} - 2h = 0. \tag{6.22}$$

desta equação e da equação (6.21) é fácil deduzir-se os valores das derivadas y' e Y', substituindo-os na expressão $y'Y' + 1 = 0$ e fixando a atenção naquelas equações.

187.

Passando agora a determinar os focos das *Quárticas Bicirculares*, começaremos por advertir que o seu número pode ser previamente obtido pelo método utilizado no número 48, ao tratar dos focos das *cúbicas circulares*, conforme a continuação indica.

Pondo na equação das quárticas de que agora se trata $x = \frac{1}{x_1}$ e $y = \frac{y_1}{x_1}$, transforma-se aquela equação noutra, que representa uma curva da mesma *classe* que qualquer das primeiras, com *dois pontos duplos* $(0, \pm i)$, correspondentes aos que a curva, em particular considerada, possui no infinito. E como em virtude de um teorema geral, mencionado naquele número 48, se podem logo traçar à nova curva, representando por n a sua *classe*, $n-2$ tangentes por cada um dos pontos $(0, \pm i)$, resulta que a curva proposta possuirá $n-2$ tangentes de coeficiente angular i, e outras tantas de coeficiente $-i$.

Posto isto, se a *quártica* (6.16) tem dois *nós* no infinito, pela fórmula de Plücker, consignada no número 48, será de 8ª *classe*, e o número das suas tangentes, de coeficiente angular i, ascenderá, em consequência, a seis; ou somente a quatro, se os pontos de contacto com a curva estão à distância finita, em razão de que *dois* daquelas *seis* tangentes coincidem com as assimptotas.

Do próprio modo, ou pelos mesmos passos, se concluirá que o número de tangentes, de coeficiente angular $-i$, é também igual a quatro. E como os dois grupos de tangentes consideradas se intersectam em dezasseis pontos, outros tantos serão, por definição, os *focos ordinários* da curva a que se refere o resultado.

Se a *quártica* de que se trata possui *dois pontos de retrocesso* no infinito, será de 6ª classe, e as suas tangentes, de coeficiente angular i ou $-i$, ascenderão a quatro em cada caso, ou seomente a três, prescindindo da que também é assimptota à curva. De maneira que os pontos de intersecção de ambos os grupos de tangentes, ou *focos ordinários*, se reduzem então a nove.

Com tudo isto fica demonstrado o seguinte teorema:

As Quárticas Bicirculares possuem *dezasseis focos ordinários, e entre eles quatro reais, quando os pontos no infinito sejam duplos; e nove focos ordinários, dos quais são reais três, no caso das cartesianas.* (LAGUERRE, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, 1865, p. 70)

Todos estes focos devem estar nas cónicas, representadas pela equação (6.18), como centros de círculos bitangentes de raio nulo.

De modo análogo, se (a, b) representa um foco, deve existir um valor de α, e outro de β, tais que

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\frac{C\alpha}{A+h} - 2\frac{C'\beta}{A'+h} + 2h = (x-a)^2 + (y-b)^2.^{19}$$

E, por conseguinte,

$$\alpha = a \;\; ; \;\; \beta = b \;\; \text{e} \;\; a^2 + b^2 = 2h - \frac{2C\alpha}{A+h} - \frac{2C'\beta}{A'+h} \;\; .$$

De onde se infere esta outra equação:

$$a^2 + b^2 + \frac{2Ca}{A+h} + \frac{2C'b}{A'+h} = 2h \;\; .$$

A qual nos ensina que *os focos correspondentes a cada valor de h devem encontrar-se na intersecção da cónica, correspondente ao valor de h considerado, com a circunferência do círculo (6.22). Resultando por este motivo quatro focos em cada cónica.* Teorema descoberto por HART (SALMON: *Higher planes curves*, 3ª edição, n.º 271)

A doutrina precedente deve modificar-se quando a *quártica* considerada seja *unicursal*, ou possua *três pontos duplos.* Porque então facilmente se conclui que a curva terá *quatro focos ordinários, se possui três nós; um só foco ordinário, se possui um nó e dois pontos de retrocesso, ou dois nós e um ponto com este nome*; e que carecerá de focos ordinários, quando *sejam três os seus pontos de retrocesso.*

---

[19] No documento original está escrito $x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\frac{C'\alpha}{A+h} - 2\frac{C'\beta}{A'+h} + 2h = (x-a)^2 + (y-b)^2$.

Para determinar estes focos devem ter-se presentes as observações feitas no número 52, ao tratar das *cúbicas circulares unicursais.*

188.

As Quárticas Bicirculares têm ainda dois focos reais singulares nos pontos de intersecção das suas assimptotas, as quais podem determinar-se aplicando as fórmulas do número 184 à equação (6.16). Para equações destas assimptotas, obtém-se então:

$$y = \pm ix \pm \sqrt{A - A'} \ .$$

E, em consequência, as coordenadas dos focos serão

$$x = 0 \ \text{ e } \ y = \pm\sqrt{A - A'} \ ,$$

se $A > A'$; e

$$y = 0 \ \text{ e } \ x = \pm\sqrt{A' - A} \ ,$$

se $A' > A$.

Logo, *estes focos coincidem*, como já notou pela primeira vez CASEY, com os focos da cónica (6.18).

189.

Mudando a origem das coordenadas para o centro do círculo (6.22), para o qual basta fazer

$$x = x' - \frac{2C}{h + A} \ \text{ e } \ y = y' - \frac{2C'}{h + A'} \ ,$$

a equação (6.21) transforma-se na seguinte:

$$x'^2 + y'^2 - \frac{4C}{h + A}x' - 2\alpha x' - \frac{4C'}{h + A'}y' - 2\beta y' + 2h + \frac{4C^2}{(h + A)^2} + \frac{4C'^2}{(h + A')^2} = 0 \ .$$

E, aplicando ao círculo, representado por esta equação, a transformação por raios vectores recíprocos, mediante as relações

$$x' = \frac{k^2 x_1}{x_1^2 + y_1^2} \quad , \quad y' = \frac{k^2 y_1}{x_1^2 + y_1^2} \quad ,$$

e

$$k^2 = 2h + \frac{4C^2}{(h+A)^2} + \frac{4C'^2}{(h+A')^2} \quad ,$$

obtém-se a seguinte:

$$x_1^2 + y_1^2 - \frac{4Cx_1}{h+A} - 2\alpha x_1 - \frac{4C'y_1}{h+A'}y' - 2\beta y_1 + 2h + \frac{4C^2}{(h+A)^2} + \frac{4C'^2}{(h+A')^2} = 0 \quad ,$$

que coincide com aquela primeira de onde procede.

Os círculos de que a quártica bicircular é envolvente não variam, pois, por resultado da transformação considerada, não varia tão pouco a sua envolvente, que, por sua razão, deve olhar-se como uma *analagmática*, relativamente aos quatro centros dos círculos representados pela equação (6.22).

190.

Terminaremos o que nos parece substancial advertir a propósito das Quárticas Bicirculares, determinando os focos das *cartesianas*, e demonstrando que *três destes focos se encontram em linha recta.*

Tomando $A = A'$ a equação (6.16) poderá escrever-se do seguinte modo:

$$(x^2 + y^2 - 2A)^2 = 4(2Cx + 2C'y + A^2 + D) \quad .$$

Equação da forma

$$V^2 = 4U \quad ,$$

segundo a qual, a curva a que se refere é a envolvente das circunferências representadas por esta outra:

$$4t^2 - 2Vt + U = 0 \ ,$$

cujos centros estão sobre a recta definida pela equação $C'x = Cy$, conforme pode ver-se determinando as coordenadas dos seus centros, e eliminando logo t entre as equações que a determinam.

Tomando agora $4t^2 - 2Vt + U = B^2[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]$, para determinar x_0, y_0, B^2 e t, dispomos destas equações:

$$B^2 = -2t \ , \quad C = -B^2 x_0 \ , \quad C' = -B^2 y_0 \ ,$$

e

$$4(t^2 + At) + A^2 + D = B^2(x_0^2 + y_0^2) \ ,$$

das quais se conclui que há-de ser

$$8(t^3 + At^2) + 2(A^2 + D)t + (C^2 + C'^2) = 0 \ .$$

Por intermédio desta equação determina-se os valores de t, e os de x_0, y_0, B^2 com o auxílio das três anteriores. Com o qual fica provado que existem três valores de t que reduzem a simples pontos da circunferências consideradas, e portanto, que existem três focos sobre a recta que acaba de se mencionar.

Para concluir, acrescente-se que neste caso a equação (6.20) se reduz à seguinte:

$$(h^2 + D)(h + A) - C^2 - C'^2 = 0 \ .$$

Para os valores de h que satisfazem a esta equação, a equação (6.18) representa círculos, logo a curva tem os seis focos restantes nas intersecções destes círculos com aqueles outros a que a equação (6.22) se refere.

Tratando-se dos *Ovais de Descartes*, $C' = 0$, e então os três *focos* coincidem com o eixo das abcissas.

191.

CASEY demonstrou que o comprimento dos arcos das Quárticas Bicirculares pode expressar-se por integrais elípticos, cujos módulos são, em alguns casos, imaginários (*Philosophical Transactions of the Royal Society*, London, t. 167[20]). Sendo de advertir que, quando isto sucede, o comprimento de aqueles arcos pode também representar-se por integrais hiperelípticos de primeira espécie, conforme ensinou R. A. ROBERTS. (*Proceedings of the London mathematical Society*, 1886, p. 99)

[20]No documento original está escrito *Phylosophical Transactions of Royal Society*, London, t. 167.

Capítulo 7

Alterações efectuadas ao documento original

No estudo e execução deste trabalho foram efectuadas algumas alterações ao documento original, as quais serão enunciadas em seguida:

1. Capítulo 3: Cúbicas Notáveis, secção III - A Estrofóide, número 22, página 91
   No documento original está escrito *Phylosophical Transactions*, em vez de

   Philosophical Transactions.

2. Capítulo 3: Cúbicas Notáveis, secção IV - A Trissectriz de Maclaurin, número 34, página 105
   No documento original está escrito *Essai de la Géométrie de la Rêgle*, etc., Paris, 1890, p. 102, em vez de

   Essai sur la Géométrie de la Règle et de l'Equerre, Paris, 1890, p. 102.

3. Capítulo 3: Cúbicas Notáveis, secção IV - A Tridente de Newton, número 71, página 149

No documento original está escrito *Essai sur la Géométrie de la Règle*, etc., Paris, 1890, página 110, em vez de

Essai sur la Géométrie de la Règle et de l'Equerre, Paris, 1890, página 110.

4. Capítulo 4: Cúbicas Notáveis - Continuação, secção V - A Cúbica de Agnesi, número 81, página 159
   No documento original está escrito *Applicazioni del Calcolo Infinitesimale* (Torino, 1897, p. 7) em vez de

   Applicazioni Geometriche del Calcolo Infinitesimale (Torino, 1887).

5. Capítulo 4: Cúbicas Notáveis - Continuação, secção VII - A Curva Mista, número 89, página 168
   No documento original está escrito *Essai de la Géométrie de la Règle et de l'Equerre*, etc., Paris, 1890, p. 116, em vez de

   Essai sur la Géométrie de la Règle et de l'Equerre, Paris, 1890, p. 116.

6. Capítulo 4: Cúbicas Notáveis - Continuação, secção VII - A Curva Mista, número 89, página 168
   No documento original está escrito $\left(4b, \frac{4}{3}\sqrt{3}\sqrt{ab}\right)$, em vez de

   $$\left(4b, \pm\frac{4}{3}\sqrt{3}\sqrt{ab}\right) .$$

7. Capítulo 4: Cúbicas Notáveis - Continuação, secção VIII - O Folium Parabólico, número 92, página 173
   No documento original está escrito *Géométre de la Règle et de l'Équerre*, Paris, 1890, p. 120, em vez de

   Essai sur la Géométrie de la Règle et de l'Equerre, Paris, 1890, p. 120.

8. Capítulo 4: Cúbicas Notáveis - Continuação, secção IX - As Parábolas Divergentes, número 100, página 189
   No documento original está escrito coordenadas, em vez de

   ordenadas.

9. Capítulo 4: Cúbicas Notáveis - Continuação, secção XI - Conclusão - Notícia bibliográfica sobre as cúbicas em geral, número 104, página 197
   No documento original está escrito *Introduction à l'Analyse des Lignes courbes*, 1750, em vez de

   Introduction a l'Analyse de Lignes Courbes Algébriques, 1750.

10. Capítulo 4: Cúbicas Notáveis - Continuação, secção XI - Conclusão - Notícia bibliográfica sobre as cúbicas em geral, número 104, página 198
    No documento original está escrito *Il Passato ed il Presente delle Principale Teorie Geometriche* (Torino, 1896, p. 61), em vez de

    Il Passato ed il Presente delle Principali Teorie Geometriche (Torino, 1896, p. 61).

11. Capítulo 5: Quárticas Notáveis, secção II - As Cassínicas, número 117, página 217
    No documento original está escrito $s + s_1 = 2c \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{l - \operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \varphi}}$, em vez de

    $$s + s_1 = 2c \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \varphi}} \ .$$

12. Capítulo 5: Quárticas Notáveis, secção II - As Cassínicas, número 117, página 217
    No documento original está escrito $s - s_1 = 2c \int_{\psi_0}^{\psi_1} \frac{d\psi}{\sqrt{l - \cos^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \psi}}$, em vez de

    $$s - s_1 = 2c \int_{\psi_0}^{\psi_1} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \psi}} \ .$$

13. Capítulo 5: Quárticas Notáveis, secção II - As Cassínicas, número 120, página 220
    No documento original está escrito *Bulletin de la Société Phylomatique de Paris*, 1868, p. 40, em vez de

Bulletin de la Société Philomatique de Paris, 1868, p. 40.

14. Capítulo 5: Quárticas Notáveis, secção II - As Cassínicas, número 120, página 220
No documento original está escrito *Sur une Classe remarquable de Courbs*, etc, Paris, 1873, p. 78, em vez de

Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques, et sur la théorie des imaginaires, Paris, 1873, p. 78.

15. Capítulo 5: Quárticas Notáveis, secção III - As Lemniscatas, número 134, página 233
No documento original está escrito $\sqrt{b^2 - a^2t^2} = (b + \alpha t)z$, em vez de

$$\sqrt{b^2 - a^2t^2} = (b + at)z \quad .$$

16. Capítulo 5: Quárticas Notáveis, secção III - As Lemniscatas, número 135, página 233
No documento original está escrito $\rho = b^2 \cos^2\theta - a^2 \operatorname{sen}^2\theta$, em vez de

$$\rho^2 = b^2 \cos^2\theta - a^2 \operatorname{sen}^2\theta \quad .$$

17. Capítulo 5: Quárticas Notáveis, secção IV - A Lemniscata de Bernoulli, número 143, página 240
No documento original está escrito

$$\left[\frac{4a}{\beta+\alpha} - a(u+v) - 3\frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha}a(u-v) - a^3(u-v)^3\right]z^3(\beta+\alpha)$$

$$+\left[a^2(u^2-v^2)-4\right]z^2(\beta+\alpha)+\left[a(u-v)-3\frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha}a(u+v)-a^3(u-v)^2(u+v)\right]z(\beta+\alpha)$$

$$+\left[4\frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha}+a^2(u-v)^2\right](\beta+\alpha) \quad ,$$

em vez de

$$\left[\frac{4a}{\beta+\alpha} - a(u+v) - 3\frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha}a(u-v) - a^3(u-v)^3\right]z^3(\beta+\alpha)$$

$$+\left[a^2(u^2-v^2)-4\right]z^2(\beta+\alpha)+\left[a(u-v)-3\frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha}a(u+v)-a^3(u-v)^2(u+v)\right]z(\beta+\alpha)$$

$$-\left[4\frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha}+a^2(u-v)^2\right](\beta+\alpha) \quad .$$

18. Capítulo 5: Quárticas Notáveis, secção IV - A Lemniscata de Bernoulli, número 144, página 243

    No documento original está escrito $E = a(u+v+w)$, em vez de

    $$E = a^2(u+v+w) \quad .$$

19. Capítulo 6: Quárticas Notáveis - Continuação, secção I - O Caracol de Pascal, número 152, página 257

    No documento original está escrito $\theta = \pm\frac{1}{6}\pi$, em vez de

    $$\theta = \pm\frac{1}{3}\pi \quad .$$

20. Capítulo 6: Quárticas Notáveis - Continuação, secção I - O Caracol de Pascal, número 152, página 257

    No documento original está escrito $\theta = \pm\frac{1}{6}\pi$, em vez de

    $$\theta = \pm\frac{1}{3}\pi \quad .$$

21. Capítulo 6: Quárticas Notáveis - Continuação, secção I - O Caracol de Pascal, número 157, página 261

    No documento original está escrito *Li lumache di Pascal*, em vez de

    Le lumache di Pascal.

22. Capítulo 6: Quárticas Notáveis - Continuação, secção I - O Caracol de Pascal, número 157, página 261

No documento original está escrito $(a^2-b^2)^3(u^2+v^2)^2+K(u^2+v^2)+L=0$, em vez de

$$(a^2-h^2)^3(u^2+v^2)^2+K(u^2+v^2)+L=0 \ .$$

23. Capítulo 6: Quárticas Notáveis - Continuação, secção I - O Caracol de Pascal, número 157, página 261

No documento original está escrito $K=2(h^2-a^2)^2b^2u^2-2(h^2-a^2)a(4a^2+5h^2)u+8(h^2-a^2)^2-36h^2-36h^2(h^2-a^2)+27h^4$, em vez de

$$K=2(h^2-a^2)^2h^2u^2-2(h^2-a^2)a(4a^2+5h^2)u+8(h^2-a^2)^2-36h^2-36h^2(h^2-a^2)+27h^4 \ .$$

24. Capítulo 6: Quárticas Notáveis - Continuação, secção I - O Caracol de Pascal, número 157, página 262

No documento original está escrito $k^2(a^2-h^2-2aki)=0$, em vez de

$$k^2h^2(a^2-h^2-2aki)=0 \ .$$

25. Capítulo 6: Quárticas Notáveis - Continuação, secção I - O Caracol de Pascal, número 160, página 264

No documento original está escrito $s=2(a+h)\int_0^{\varphi}\sqrt{1-\frac{4ha}{(a+h)^2}\operatorname{sen}^2\varphi}d\varphi$, em vez de

$$s=2(a+h)\int_0^{2\varphi}\sqrt{1-\frac{4ha}{(a+h)^2}\operatorname{sen}^2\varphi}d\varphi \ .$$

26. Capítulo 6: Quárticas Notáveis - Continuação, secção II - A Cardióide, número 163, página 267

No documento original está escrito *Phylosophical Transactions of London Royal Society*, 1741, em vez de

Philosophical Transactions of London Royal Society, 1741.

27. Capítulo 6: Quárticas Notáveis - Continuação, secção III - Os Ovais de Descartes, número 167, página 272

No documento original está escrito *resolutione æquationum*, em vez de

De geometrica planarum et cubicarum æquationum resolutione.

28. Capítulo 6: Quárticas Notáveis - Continuação, secção III - Os Ovais de Descartes, número 175, página 284
No documento original está escrito $t_1^2 = \dfrac{k^2 - a^2h^2}{1 - h^2}$, em vez de
$$t_1^4 = \frac{k^2 - a^2h^2}{1 - h^2} \quad .$$

29. Capítulo 6: Quárticas Notáveis - Continuação, secção III - Os Ovais de Descartes, número 175, página 284
No documento original está escrito *Bulletin de la Société Phylomatique de Paris*, 1864, em vez de

Bulletin de la Société Philomatique de Paris, 1864.

30. Capítulo 6: Quárticas Notáveis - Continuação, secção IV - As Quárticas Bicirculares, número 182, página 292
No documento original está escrito $\alpha_1 - a\dfrac{A^2\beta_1^2}{q^2}k^2 = \dfrac{p\beta_1}{q}$, em vez de
$$\alpha_1 - a\frac{A^2\beta_1^2}{q^2}k_1^2 = \frac{p\beta_1}{q} \quad .$$

31. Capítulo 6: Quárticas Notáveis - Continuação, secção IV - As Quárticas Bicirculares, número 182, página 292
No documento original está escrito $\dfrac{A^2\beta_1^2a^2}{q^2}k^2 - (\alpha_1^2 + \beta_1^2) = \dfrac{2l\beta_1}{q}$, em vez de
$$\frac{A^2\beta_1^2a^2}{q^2}k_1^2 - (\alpha_1^2 + \beta_1^2) = \frac{2l\beta_1}{q} \quad .$$

32. Capítulo 6: Quárticas Notáveis - Continuação, secção IV - As Quárticas Bicirculares, número 182, página 292
No documento original está escrito $\dfrac{ap + 2l}{2q}$, em vez de
$$-\frac{ap + 2l}{2q} \quad .$$

33. Capítulo 6: Quárticas Notáveis - Continuação, secção IV - As Quárticas Bicirculares, número 183, página 293

No documento original está escrito *Bulletin de la Société Phylomatique de Paris*, 1860, em vez de

Bulletin de la Société Philomatique de Paris, 1860.

34. Capítulo 6: Quárticas Notáveis - Continuação, secção IV - As Quárticas Bicirculares, número 183, página 293

No documento original está escrito *Sur une Classe remarquable de curves et de surfaces algébriques*, em vez de

Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques.

35. Capítulo 6: Quárticas Notáveis - Continuação, secção IV - As Quárticas Bicirculares, número 185, página 294

No documento original está escrito $\left(-\frac{m}{2}, -\frac{m}{2}\right)$, em vez de

$$\left(-\frac{m}{2}, -\frac{n}{2}\right) \ .$$

36. Capítulo 6: Quárticas Notáveis - Continuação, secção IV - As Quárticas Bicirculares, número 187, página 299

No documento original está escrito $x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\frac{C'\alpha}{A+h} - 2\frac{C'\beta}{A'+h} + 2h = (x-a)^2 + (y-b)^2$, em vez de

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\frac{C\alpha}{A+h} - 2\frac{C'\beta}{A'+h} + 2h = (x-a)^2 + (y-b)^2 \ .$$

37. Capítulo 6: Quárticas Notáveis - Continuação, secção IV - As Quárticas Bicirculares, número 191, página 303

No documento original está escrito *Phylosophical Transactions of Royal Society*, London, t. 167, em vez de

Philosophical Transactions of the Royal Society, London, t. 167.

Capítulo 8

Conclusão

No término deste trabalho impõe-se fazer uma reflexão que incida não só em alguns aspectos positivos, mas também nas dificuldades encontradas.

Como já foi referido anteriormente, este trabalho foi desenvolvido através de programas de livre utilização. É possível constatar que a capacidade de resposta destes programas é basicamente igual à dos outros em que é necessário pagar uma licença. Considero que o facto de se ter recorrido a este tipo de programas é uma mais valia e torna esta dissertação deveras importante, no sentido da divulgação deste software e no sentido de poder estar acessível a qualquer leitor, independentemente das capacidades financeiras para a aquisição de software proprietário.

Relativamente ao software geométrico C.a.R. e ao programa Maxima reconheço que já tinha adquirido as noções básicas necessárias para a sua utilização. O mesmo não acontecia com o suporte digital TiddlyWiki, que me predispus a aprender e ao qual reconheço grande utilidade no auxílio à elaboração e divulgação de trabalhos.

Reconheço que este trabalho permitiu uma profícua e enriquecedora absorção de toda a matéria constituinte, contribuindo não só para aprofundar conhecimentos sobre domínios da Matemática que sempre despertaram o meu interesse, mas também para a importância

da utilização de diversas ferramentas informáticas.

Referências

[1] **Gomes Teixeira, F.**, *Tratado de Las Curvas Especiales Notables*, 1905, Madrid, Gaceta de Madrid, Obra publicada en el tomo XXII de las Memorias de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid.

[2] **Gomes Teixeira, F.**, *Traité des Courbes Spéciales Remarquables Planes et Gauches*, 1995, Éditions Jacques Gabay.

[3] **Adams, Robert A.**, *Calculus: a Complete Course*, 1995, Third Edition, Addison-Wesley Publishers Limited.

[4] http://www.instituto-camoes.pt/cvc/ciencia/p27.html

[5] http://www.mat.uc.pt/ jfqueiro/GomesTeixeira.html

[6] http://www.maths.nottingham.ac.uk/personal/drw/lm.html/

[7] http://miktex.org/

[8] http://www.tug.org/

[9] http://www.toolscenter.org/

[10] http://www.microsoft.com/

[11] http://www.openoffice.org/

[12] http://pt.wikipedia.org/wiki/Linux