

Nelson Daniel Ferreira Gonçalves

**Método dos Volumes Finitos
em Malhas Não-Estruturadas**



FC

Departamento de Matemática Aplicada / Departamento de Matemática Pura

Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

TESE Nº 243

2007



FC

Biblioteca
Faculdade de Ciências
Universidade do Porto



0000100573

Reg. S09378
Cota TESE N°243

Nelson Daniel Ferreira Gonçalves

Método dos Volumes Finitos em Malhas Não-Estruturadas



FC

FACULDADE DE CIÊNCIAS DO PORTO
MATEMÁTICA

Tese submetida à Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Matemática

Dissertação realizada sob a supervisão do
Dr. João Miguel de Amorim Novais da Costa Nóbrega
do Departamento de Engenharia de Polímeros
da Escola de Engenharia da Universidade do Minho

Departamento de Matemática Aplicada / Departamento de Matemática Pura
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

2007

Nelson Daniel Faria Gonçalves

Método dos Volumes Finitos em Malhas Não-Estruturadas

F



Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Física da Universidade Federal de Pernambuco em cumprimento das exigências para obtenção do título de Bacharel em Física.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Física da Universidade Federal de Pernambuco em cumprimento das exigências para obtenção do título de Bacharel em Física.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Física da Universidade Federal de Pernambuco em cumprimento das exigências para obtenção do título de Bacharel em Física.

2013

Resumo

Este trabalho tem como objectivo principal o desenvolvimento de um código computacional baseado no Método dos Volumes Finitos capaz de resolver uma equação genérica de conservação de uma quantidade escalar, em 3D e utilizando malhas não estruturadas, o qual permitirá resolver problemas em que a difusão é o fenómeno de transporte predominante, como é o caso da condução de calor em corpos sólidos. Este trabalho insere-se num projecto mais abrangente, onde se pretende aumentar o grau de generalidade de um código numérico de apoio ao projecto de cabeças de extrusão para a produção de perfis. Este código está a ser desenvolvido por uma equipa de investigadores, que integra elementos do Departamento de Engenharia de Polímeros da Universidade do Minho, e permite trabalhar somente com malhas estruturadas, facto que resulta em limitações ao nível das geometrias que podem ser estudadas.

O trabalho efectuado desenvolveu-se a partir da equação diferencial geral do transporte, com termo convectivo nulo em regime estacionário, cuja discretização foi efectuada de acordo com Método dos Volumes Finitos, em malhas não estruturadas constituídas por tetraedros.

A validação do código implementado foi efectuada através da comparação dos resultados obtidos com as soluções analíticas, para problemas simples, e com resultados obtidos com códigos comerciais, em casos mais complexos.

The first part of the document discusses the importance of maintaining accurate records of all transactions. It is essential for the company to have a clear and concise system in place to ensure that all data is properly documented and accessible. This will help in the identification of trends and anomalies, allowing for more informed decision-making.

Furthermore, it is crucial to establish a strong internal control system. This involves implementing strict policies and procedures that govern the handling of financial information. Regular audits and reviews should be conducted to ensure compliance with these standards and to identify any potential weaknesses or areas for improvement.

In addition, the company should invest in high-quality accounting software and training for its staff. This will not only streamline the accounting process but also reduce the risk of human error. By staying up-to-date with the latest industry practices and technologies, the company can maintain a competitive edge in the market.

Finally, it is important to foster a culture of transparency and accountability. All employees should be encouraged to report any discrepancies or concerns immediately. This open communication is vital for the early detection and resolution of issues, ensuring the integrity of the company's financial statements.

Abstract

The main objective of the present work is the development of a computational code based on the Finite Volume Method able to solve the general equation of conservation of a scalar quantity, in 3D and using unstructured meshes, that will allow to solve problems where the diffusion is the predominant transport phenomenon, for example the heat conduction in solid bodies. This work is part of a project that aims the increase of the degree of generality of a numerical code developed to aid the design of extrusion dies. This code is being developed by a research team that comprises elements of the Polymers Engineering Department of University of Minho and it only works with structured meshes, fact that restricts the range of geometries that can be studied. The work done deals with the transport general differential equation for fluids with null convective term in steady state, whose discretization was done by the Finite Volume Method, on unstructured meshes comprised by tetrahedrons.

The assessment of the developed code was done through the comparison of the predicted results with the analytical solutions, for simple problems, and results obtained with commercial codes, in more complex case studies.

The first part of the document discusses the importance of maintaining accurate records of all transactions. It emphasizes that every entry should be supported by a valid receipt or invoice. This not only helps in tracking expenses but also ensures compliance with tax regulations. The document further outlines the process of reconciling bank statements with the company's ledger to identify any discrepancies. It stresses the need for regular reviews and audits to prevent errors and fraud. The second part of the document provides a detailed breakdown of the company's financial performance over the past quarter. It includes a comparison of actual results against budgeted figures and identifies key areas of variance. The analysis highlights the company's strong performance in sales and marketing, while also noting challenges in the production and distribution departments. The document concludes with a summary of the overall financial health and a set of recommendations for future improvement.

Résumé

Ce travail a pour objet principal le développement d'un code informatique basé sur la méthode des volumes finis capable de développer une équation générique de conservation d'une quantité escalader, dans 3D et en utilisant des mailles non structurées, qui permettra de décider des problèmes dans lesquels la diffusion est le phénomène de transport prédominant, comme c'est le cas de la conduction de la chaleur dans des corps solides.

Ce travail s'insère dans un projet plus englobant où se prétend augmenter le degré de généralité d'un code numérique qui appui le projet de têtes d'extrusion pour la production de profils. Ce code est en train d'être développé par une équipe d'investigateurs, qui intègre des éléments du département d'ingénierie de polymères de l'université do Minho, et permet de travailler seulement avec des mailles structurées, fait qui résulte dans des limitations au niveau des géométrie qui peuvent être étudiées.

Le travail effectué s'est développé à partir de l'équation différentielle générale du transport pour fluides stationnaires et avec terme convecteur nul, dont la discrétisation a été effectuée conformément avec des méthode des volumes finis, dans des mailles structurées non constituées par des tétraèdre.

La validation du code mis en œuvre a été effectuée à travers la comparaison des résultats obtenus avec les solutions analytiques, pour des problèmes simples, et avec résultats obtenus avec autres codes commerciaux, dans des problèmes plus complexes.

The first part of the document discusses the importance of maintaining accurate records of all transactions and activities. It emphasizes that proper record-keeping is essential for ensuring transparency and accountability in the organization's operations. This section also outlines the various methods and tools used to collect and analyze data, highlighting the need for consistency and reliability in the information gathered.

The second part of the document focuses on the implementation of these practices across different departments and projects. It provides detailed instructions on how to set up systems for data collection and analysis, ensuring that all staff members are trained and equipped to handle the information effectively. This section also addresses potential challenges and offers solutions to ensure a smooth transition to the new procedures.

The final part of the document concludes with a summary of the key points discussed and a call to action for all employees to adhere to the established guidelines. It stresses the ongoing nature of this process and the importance of continuous improvement and communication to maintain the highest standards of performance and integrity.

Índice

1 – Introdução	13
1.1 – Métodos de Discretização	14
1.1.1 – Método das Diferenças Finitas	15
1.1.2 – Método dos Volumes Finitos	16
1.1.3 – Método dos Elementos Finitos	16
1.2 – Malhas Numéricas	17
1.2.1 – Malhas Ortogonais e Malhas Não Ortogonais	18
1.2.2 – Malhas Estruturadas e Malhas Não Estruturadas	21
1.3 – Organização da Tese	26
2 – Método dos Volumes Finitos	27
2.1 – Diagrama de Voronoi e Triangulação de Delaunay	29
3 – Código Desenvolvido	33
3.1 – Fluxograma do código	33
3.2 – Descrição detalhada de cada ponto	35
4 – Exemplos	47
4.1 – Exemplos 1	47
4.1.1 – Exemplo 1.1	47
4.1.2 – Exemplo 1.2	49
4.1.3 – Exemplo 1.3	52
4.2 – Exemplo 2	53
4.3 – Exemplos 3	57
4.3.1 – Exemplo 3.1	57
4.3.2 – Exemplo 3.2	59
4.3.3 – Exemplo 3.3	61
4.4 – Conclusão	65
5 – Conclusões	67
Bibliografia	69

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7
 8
 9
 10
 11
 12
 13
 14
 15
 16
 17
 18
 19
 20
 21
 22
 23
 24
 25
 26
 27
 28
 29
 30
 31
 32
 33
 34
 35
 36
 37
 38
 39
 40
 41
 42
 43
 44
 45
 46
 47
 48
 49
 50
 51
 52
 53
 54
 55
 56
 57
 58
 59
 60
 61
 62
 63
 64
 65
 66
 67
 68
 69
 70
 71
 72
 73
 74
 75
 76
 77
 78
 79
 80
 81
 82
 83
 84
 85
 86
 87
 88
 89
 90
 91
 92
 93
 94
 95
 96
 97
 98
 99
 100

1 - Introdução

A Mecânica de Fluidos Computacional (Computational Fluid Dynamic – CFD) consiste na análise de sistemas envolvendo fluxo de fluidos, transferências de calor e fenómenos associados a reacções químicas através de modelação numérica, ou seja, recorrendo a meios computacionais [1].

As técnicas existentes são muito poderosas e abrangem uma vasta gama de aplicações, tais como: aerodinâmica, hidrodinâmica, combustão, processos químicos e engenharia biomédica, entre outras [2-10].

O uso de técnicas numéricas para a resolução de problemas complexos de engenharia e de física, é hoje, uma realidade, graças ao desenvolvimento de computadores de alto desempenho e de grande capacidade de armazenamento. Em função dessa disponibilidade computacional, que tem vindo a crescer exponencialmente, o desenvolvimento de algoritmos para a resolução dos mais diversos problemas tem recebido enorme atenção dos analistas numéricos.

Hoje em dia, o engenheiro ou projectista incumbido de resolver um determinado problema tem à sua disposição, fundamentalmente, três elementos de análise [11]:

- métodos analíticos;
- métodos numéricos (experimentação numérica) e
- experimentação em laboratório.

Os métodos analíticos apresentam muitas limitações, pois só podem ser aplicados em problemas cujas hipóteses simplificativas os desviam demasiadamente do fenómeno físico real e em geometrias simples. No entanto têm um papel importante no que respeita à validação dos métodos numéricos.

A experimentação em laboratório recorre à configuração real de problemas mas por vezes torna-se muito dispendiosa, perigosa ou até impossível de implementar, como é o caso das questões relacionadas com transferências de calor no núcleo de reactores nucleares.

A experimentação numérica (utilização de métodos numéricos) praticamente não apresenta restrições, podendo resolver problemas complicados, com contornos definidos em geometrias arbitrarias e apresentando resultados de uma maneira rápida e económica relativamente a outros métodos.

A tendência que se observa é a realização de experiências em laboratório cada vez mais sofisticadas, com o intuito de usar os resultados na corroboração de modelos

matemáticos e numéricos, na investigação e compreensão de novos fenómenos, que ainda necessitam de ser matematicamente modelados, e na avaliação final de um determinado projecto. Caso esta tarefa seja bem sucedida, o experimentalista deixará de realizar a tarefa repetitiva que ficará a cargo do computador.

A tarefa de um método numérico é resolver uma ou mais equações diferenciais, substituindo as derivadas existentes na equação por expressões algébricas que envolvem a função incógnita. Um método analítico que tivesse a habilidade de resolver tais equações permitiria obter a solução de forma fechada e calcular os valores das variáveis dependentes num nível infinitesimal, isto é, para um número infinito de pontos. Por outro lado, quando decidimos fazer uma aproximação numérica da equação diferencial, aceitamos ter a solução num número discreto de pontos (vértices da malha), esperando que, quanto maior for este número de pontos, mais próxima da solução exacta será a nossa solução aproximada (ou numérica).

Para geometrias complexas, como é o caso de uma geometria cilíndrica, as malhas estruturadas são difíceis, ou até impossíveis, de construir. Esta restrição motivou o estudo e posterior utilização de malhas não estruturadas, que permitem grande flexibilidade na adaptação da malha ao domínio em estudo. Por outro lado, os volumes de controle têm varias formas possíveis assim como número de vizinhos variável, o que leva a uma maior complexidade no modo como os dados são organizados.

Este trabalho tem como objectivo a aplicação do Método dos Volumes Finitos em malhas não estruturadas na resolução de uma equação genérica de conservação de uma quantidade escalar em 3D.

1.1 – Métodos de Discretização

O ponto de partida de qualquer método numérico é o modelo matemático, por exemplo, um conjunto de equações diferenciais parciais e condições de fronteira que regem o processo. A escolha de um modelo apropriado para a aplicação alvo pode conter simplificações das regras de conservação exactas. Contudo a selecção das simplificações a efectuar e a relaxação de determinadas restrições, requer um conhecimento aprofundado do problema em causa, de forma a evitar cometer erros graves. Um método numérico normalmente é desenvolvido para encontrar uma solução aproximada de um conjunto

particular de equações, uma vez que é impraticável criar um método de resolução que seja aplicável em todas as situações.

Depois de seleccionado o modelo matemático, tem de se escolher um método de discretização apropriado, isto é, um método de aproximar as equações diferenciais por um sistema de equações algébricas para as variáveis do problema que serão obtidas em localizações discretas no espaço e no tempo [12, 13]. Existem vários métodos sendo os mais conhecidos: Método das Diferenças Finitas (MDF), Método dos Volumes Finitos (MVF) e Método dos Elementos Finitos (MEF) [14-20].

Todos os tipos de métodos produzem o mesmo resultado se a malha utilizada for suficientemente boa, contudo, alguns métodos são mais apropriados para determinadas classes de problemas do que outros.

1.1.1 - Método das Diferenças Finitas

Este é o método de resolução de EDP (Equações Diferenciais Parciais) mais antigo, que se acredita que tenha sido introduzido por Euler no século XVIII. É também o método mais expedito para usar em geometrias simples.

O ponto de partida é a conservação da equação na forma diferencial. O domínio de solução é coberto por uma malha. Em cada ponto da malha, a equação é aproximada, substituindo as derivadas parciais por aproximações em termos de valores das funções nos nós da malha. O resultado é uma equação algébrica por nó da malha, na qual o valor da variável num certo número de nós vizinhos aparece como incógnita.

Em princípio, o MDF pode ser aplicado a qualquer tipo de malha, contudo, o MDF tem sido aplicado a malhas estruturadas em que as linhas da malha servem como coordenadas locais.

Para obter aproximações para a primeira e segunda derivadas da variável em função das coordenadas são usadas expansões em séries de Taylor ou regressões polinomiais. Quando necessário, estes métodos são também aplicados para obter os valores das variáveis em locais que não os nós da malha (por interpolação).

Em malhas estruturadas, o MDF é muito simples e eficaz. São especialmente fáceis de obter os métodos de elevada ordem em malhas regulares. As desvantagens do MDF são o facto de a conservação não ser inerente ao método, a não ser que sejam tomadas medidas

especiais. Também as restrições às geometrias simples são uma desvantagem significativa em problemas complexos.

1.2.2 - Método dos Volumes Finitos

O MVF utiliza como ponto de partida a forma integral da equação da conservação. O domínio de solução é dividido num número finito de volumes de controle (VC) contíguos, e a equação da conservação é aplicada a cada VC. No centroide de cada VC localiza-se um nó computacional, no qual são calculados os valores das variáveis, sendo os valores das variáveis nas superfícies dos VC obtidos por interpolação em função dos valores nodais (centro do VC). Os integrais de volume e de superfície são aproximados usando fórmulas de quadratura apropriadas. Como resultado, obtém-se uma equação algébrica para cada VC, na qual aparecem os valores das variáveis no nó em causa e nos nós vizinhos.

O MVF pode ser aplicado a qualquer tipo de malha, por isso adapta-se a geometrias complexas. A malha define apenas as fronteiras do volume de controle e não necessita estar relacionada com um sistema de coordenadas. O método é inerentemente conservativo, contando que os integrais de superfície (que representam fluxos convectivos e difusivos) sejam os mesmos em faces partilhadas por VC.

A aproximação com o MVF é talvez a de compreensão mais simples, pois todos os termos que precisam de ser aproximados têm significado físico, razão pela qual é popular entre engenheiros.

A desvantagem do MVF em relação ao MDF é o facto de métodos de ordem superior à segunda serem mais difíceis de desenvolver em 3D, com malhas não estruturadas. Isto é devido ao facto da aproximação por VF requerer três níveis de aproximação: interpolação, diferenciabilidade e integração.

1.1.3 - Método dos Elementos Finitos

O MEF é similar ao MVF em vários aspectos. O domínio é dividido num conjunto discreto de elementos ou elementos finitos que usualmente são não estruturados; em 2D, são usualmente triângulos ou quadriláteros, enquanto que em 3D são os tetraedros ou hexaedros que normalmente se usam. O aspecto que diferencia o MEF é o facto de as equações serem

multiplicadas por uma *função peso* antes de serem integradas sobre todo o domínio. Na forma mais simples do MEF, a solução é aproximada por uma função linear com os elementos de uma maneira a garantirem continuidade da solução através das fronteiras dos elementos. Tal função pode ser construída através dos seus valores nos cantos dos elementos. Usualmente a função peso tem o mesmo formato.

Esta aproximação é então substituída no integral pesado da lei da conservação e as equações a serem resolvidas são derivadas requerendo que a derivada do integral relativo ao valor de cada nó seja zero; isto corresponde a seleccionar a melhor solução dentro do conjunto de funções permitidas (aquela que tiver resíduo mínimo). O resultado é um conjunto de equações algébricas não lineares.

Uma vantagem importante do MEF é a capacidade para lidar com geometrias arbitrárias; existe uma literatura extensiva dedicada à construção de malhas de métodos de EF. As malhas são facilmente refinadas em regiões de interesse, pois cada elemento pode ser simplesmente dividido em vários. Os MEF são relativamente fáceis de analisar matematicamente e pode ser mostrado que são os mais adequados para certos tipos de equações. O principal inconveniente, que é partilhado com todos os métodos que usam malhas não estruturadas, é o facto de as matrizes das equações linearizadas não serem tão bem estruturadas como as das malhas estruturadas fazendo com que seja mais difícil encontrar métodos de resolução eficientes.

1.2 - Malhas numéricas

Os pontos em que as variáveis são calculadas, são definidos pelas malhas numéricas [21,22] as quais são, essencialmente, uma representação discretizada do domínio geométrico no qual o problema irá ser resolvido. A malha divide o domínio da solução num número finito de sub-domínios (elementos, volumes de controle, etc.). Os tipos de malhas podem ser agrupados do seguinte modo:

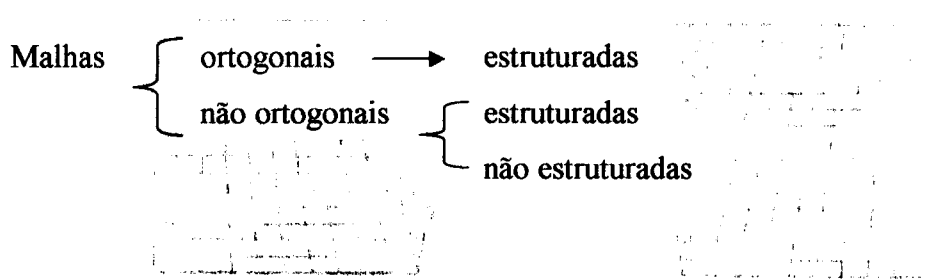


Fig. 1.5 - Exemplos de malhas numéricas ortogonais e não ortogonais.

1.2.1 - Malhas ortogonais e malhas não ortogonais

Os métodos de reologia computacional baseados em sistemas de coordenadas ortogonais (ou Cartesianos) ou cilíndricos apresentam diversas limitações em geometrias irregulares. Dado que a geometria de problemas reais pode ser complexa e frequentemente é irregular, caso se utilizem malhas ortogonais, só podem ser mapeados de acordo com o ilustrado na Figura 1.1.

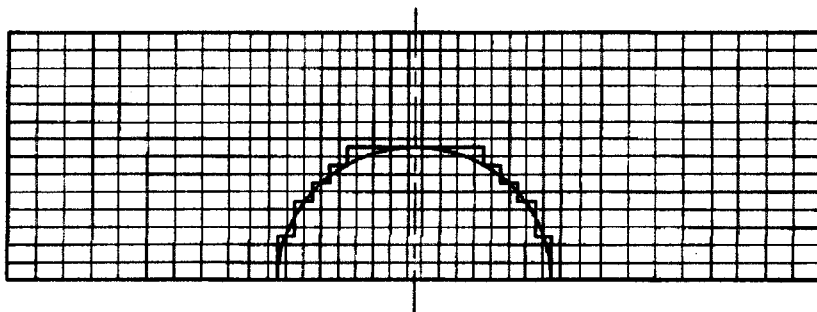


Fig. 1.1 – Exemplo de malha ortogonal [1]

Para calcular o fluxo que passa em torno do cilindro da Figura 1.1, utilizando malhas ortogonais, a fronteira poderá ser representada por uma aproximação e as células localizadas no interior da parte sólida do cilindro não são consideradas no cálculo. Este facto apresenta desvantagens consideráveis desde as dificuldades associadas à descrição da aproximação da fronteira até à existência de erros inerentes a esta aproximação, como será o cálculo da força exercida pela parede com elevada precisão. Outra desvantagem da utilização de sistemas de coordenadas ortogonais é o desperdício de recursos de armazenamento pois a introdução de uma malha ortogonal fina numa região de interesse particular implica o desnecessário refinamento de outra região de interesse mínimo.

Os métodos de adaptação das malhas aos sólidos ou sistemas de malhas não ortogonais têm vindo a ser desenvolvidos para superar as limitações referidas anteriormente e são cada vez mais utilizadas nos códigos actuais de reologia computacional. A Figura 1.2 mostra uma malha não ortogonal adaptada a um cilindro.

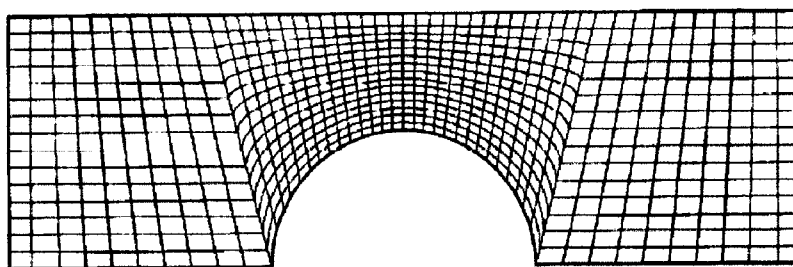


Fig. 1.2 – Exemplo de malha não ortogonal [1]

A flexibilidade geométrica oferecida por técnicas de adaptação de malhas a sólidos é útil na modelação de problemas práticos, envolvendo geometrias irregulares, porque (i) todos os detalhes geométricos podem ser incorporados de uma forma precisa e (ii) as propriedades da malha podem ser controladas para captar características úteis em regiões de interesse. As equações governantes com malhas não ortogonais são, contudo, muito mais complexas do que as suas malhas ortogonais equivalentes. Deste modo, nos códigos de reologia computacional o recurso a malhas não ortogonais é cada vez mais preferível, dados os requisitos de armazenamento adicionais associados às malhas ortogonais. Contudo, as malhas não ortogonais requerem procedimentos especiais para assegurarem o cálculo correcto da cinemática de escorregamento e acoplamento pressão-velocidade para evitar campos de pressão irrealistas.

Para ilustrar as diferentes abordagens em termos de malhas, vamos recorrer ao problema representado na Figura 1.3 com um permutador de calor.

A Figura 1.3 mostra parte de um permutador de calor onde a CFD pode ser usada para prever características do fluido.

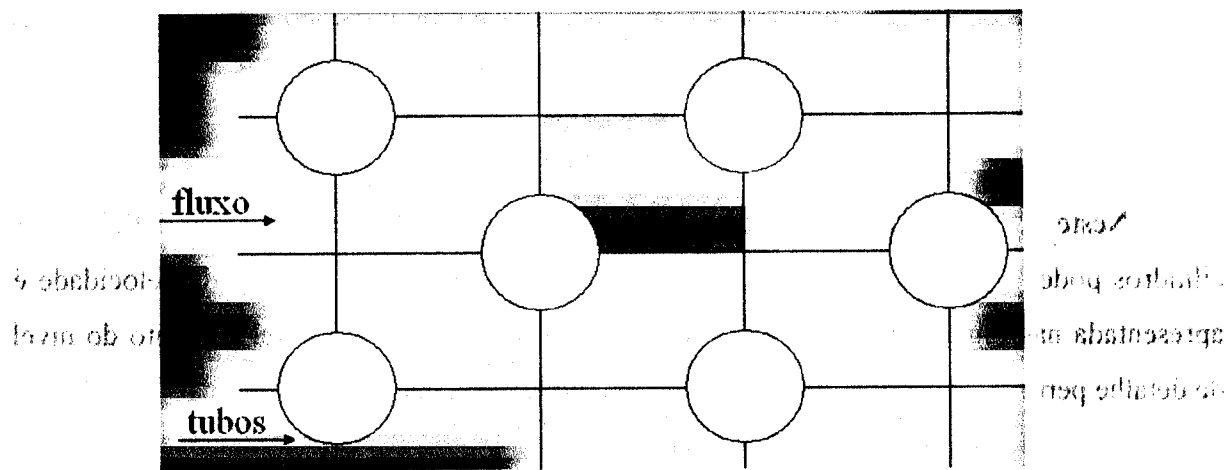


Fig. 1.3 – Permutador de calor (adaptado de [1])

Considerando simetria, apenas a parte sombreada da geometria (Figura 1.3) precisa ser considerada. A Figura 1.4 ilustra a construção de uma malha não ortogonal para mapear a geometria, a malha utilizada tem uma dimensão de 40 x 15 elementos.

[1] Inorgano e dlm n rno at nro abal ol z de a no. 3 - 1 - 1990

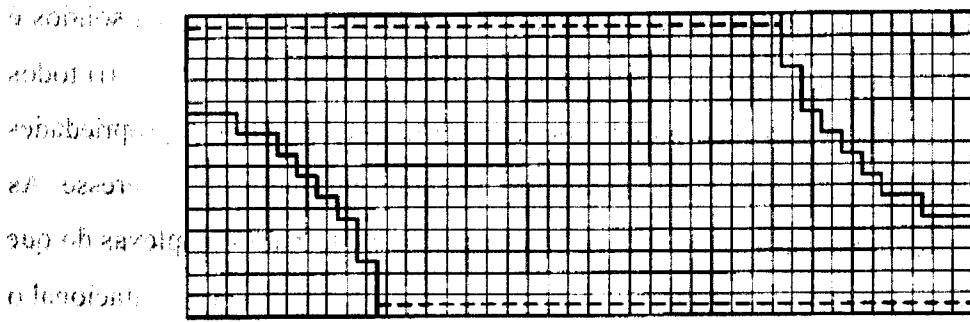


Fig. 1.4 – Malha ortogonal com 40x15 células [1]

Nesta malha 25% do espaço não é útil, uma vez que corresponde a zonas onde não passa o fluido. A Figura 1.5 representa uma malha não ortogonal adaptada à geometria do problema com o mesmo número de células (isto é, 40 x 15) para o mesmo problema.

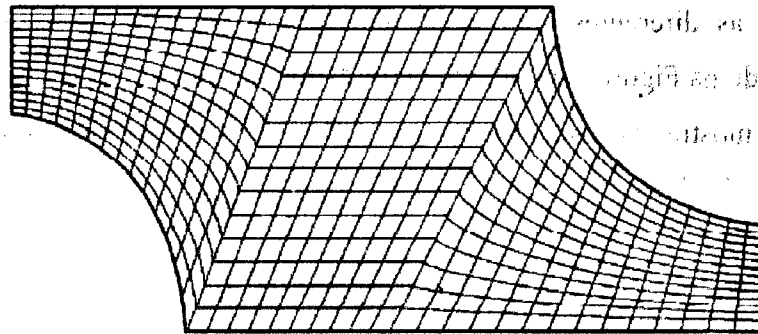


Fig. 1.5 – Malha não ortogonal com 40x15 vértices [1]

Neste caso toda a malha ocupa a zona ocupada pelo fluido e as superfícies dos cilindros podem ser representadas com precisão. A previsão da distribuição da velocidade é apresentada nas Figuras 1.6 e 1.7 onde se pode constatar um considerável aumento do nível de detalhe perto das regiões de entrada e de saída no caso da malha não ortogonal.

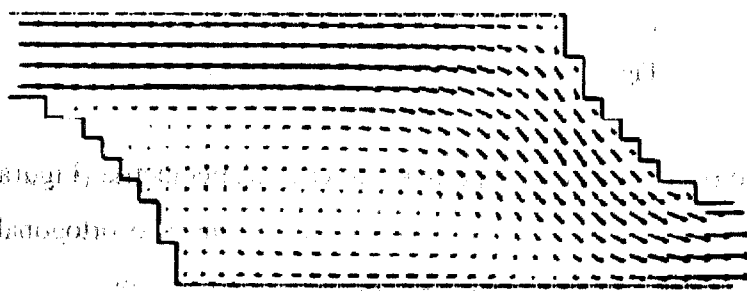


Fig. 1.6 – Campo de velocidades obtido com a malha ortogonal [1]

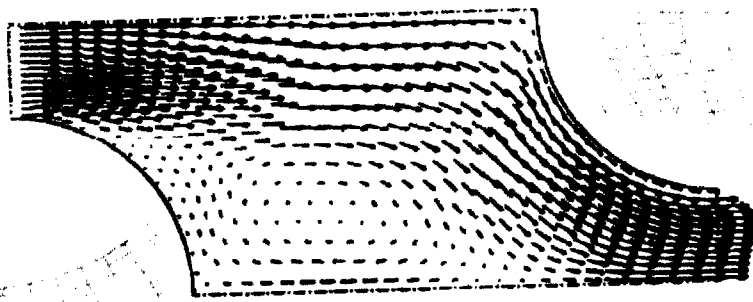


Fig. 1.7 – Campo de velocidades obtido com a malha não ortogonal [1]

Este exemplo demonstra claramente a vantagem do uso de malhas não-ortogonais, pois os recursos informáticos são bem utilizados e são obtidos melhores resultados com malhas mais grosseiras comparando com os métodos baseados em malhas ortogonais.

1.2.2 – Malhas estruturadas e malhas não estruturadas

As malhas não-ortogonais podem dividir-se em dois grupos: malhas estruturadas e malhas não-estruturadas. Esta classificação está relacionada com a disposição relativa dos diferentes elementos. Nas malhas estruturadas ou regulares [23,24] os elementos são dispostos em famílias de linhas, em que membros de uma determinada família não se cruzam uns com os outros e atravessam cada membro de outras famílias apenas uma vez. Isto permite que as linhas de um determinado conjunto sejam numeradas consecutivamente. A posição de qualquer ponto (ou volume de controle) da malha é numerado dentro do domínio sendo identificado de maneira única por um conjunto de dois (em 2D) ou três (em 3D) índices, por exemplo (i,j,k) . Esta é a estrutura de malha mais simples, uma vez que é logicamente equivalente a uma malha ortogonal (Cartesiana). Cada ponto tem quatro vizinhos mais próximos em 2D e seis no caso 3D; um dos índices de cada um dos vizinhos do ponto P (com índices i,j,k) difere ± 1 do índice correspondente de P . Um exemplo de uma malha estruturada é apresentado na Figura 1.8.

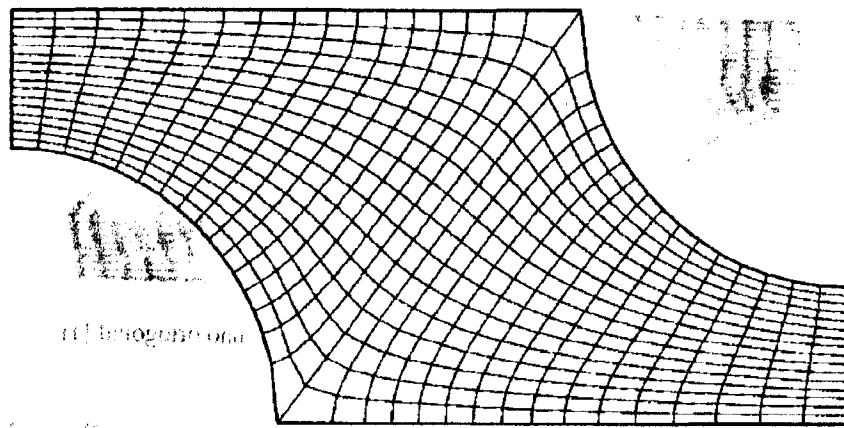


Fig. 1.8 - Exemplo de uma malha 2D, estruturada, não ortogonal [13].

Esta conectividade entre células vizinhas simplifica a programação e a matriz do sistema de equações algébricas apresenta uma estrutura regular, que pode ser explorada desenvolvendo técnicas de resolução adequadas. De facto, existem várias metodologias eficientes para resolver apenas malhas estruturadas [1]. A desvantagem das malhas estruturadas é que estas apenas podem ser aplicadas em domínios com geometrias de complexidade média. Outra desvantagem é que pode ser difícil a distribuição dos pontos da malha: uma concentração de células numa região da malha, por razões de precisão de cálculo implica necessariamente menor espaçamento em outras regiões do domínio e o consequente desperdício de recursos. Esta questão é ainda mais grave em problemas 3D.

As malhas estruturadas podem ser do tipo-H, tipo-O ou do tipo-C.

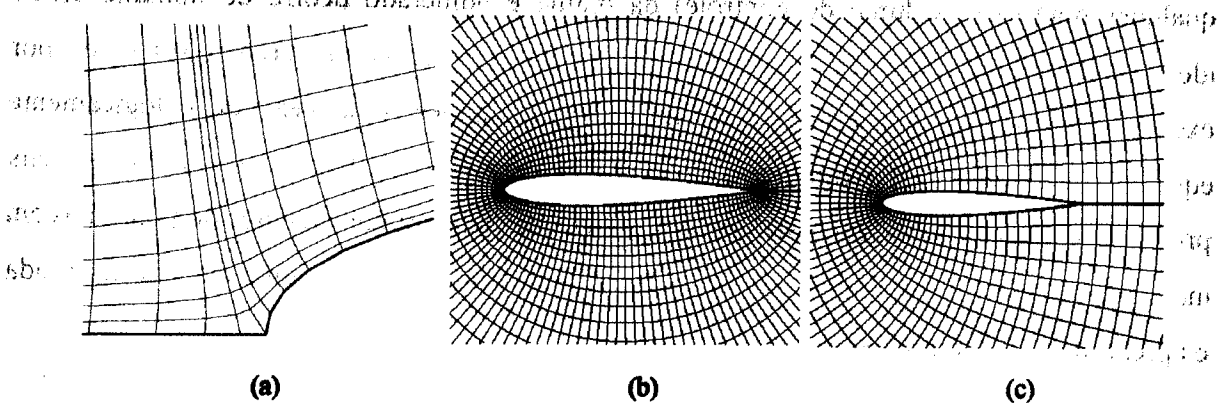


Fig. 1.9 - Malhas estruturadas (a) Tipo-H, (b) Tipo-O e (c) Tipo-C

Estas designações derivam da geometria das linhas da malha. A Figura 1.9(a) representa uma malha tipo-H, que quando projectada num rectângulo tem diferentes fronteiras lógicas: este, oeste, norte e sul. Na malha com estrutura tipo-O, um conjunto de linhas da malha é "ilimitado", se as linhas da malha forem tratadas como linhas de coordenadas e se

seguirmos as coordenadas em torno do cilindro, estas irão crescer indefinidamente. Para se contornar este problema, tem de se introduzir um "corte" artificial no qual as coordenadas do ponto saltam de um valor finito para zero. Neste corte, a malha pode ser de fronteira mas os pontos da vizinhança têm de ser tratados como sendo pontos do interior da malha, em contraste ao tratamento aplicado às fronteiras de uma malha do tipo-H. Em malhas do tipo-C, pontos em porções de uma das linhas da malha coincidem, requerendo a introdução de um corte similar ao encontrado nas malhas do tipo-O. Este tipo de malhas é muitas vezes encontrado em sólidos com arestas pontiagudas nos quais este tipo de malhas é capaz de promover uma boa precisão de cálculo.

Malhas estruturadas por blocos

Com o objectivo de contornar algumas limitações associadas à utilização de malhas estruturadas convencionais, foi desenvolvido o conceito de malhas estruturadas por blocos. Neste tipo de malhas existem dois (ou mais) níveis de subdivisão do domínio de solução [25]. Num nível mais grosseiro existem blocos lógicos com regiões relativamente largas do domínio; a sua estrutura pode ser irregular ou podem sobrepor-se. Em níveis mais finos (dentro de cada bloco) é criada uma malha estruturada. Neste tipo de malhas é necessário um tratamento especial nas interfaces dos blocos. Na Figura 1.10 é apresentada uma malha estruturada por blocos com continuidade nas interfaces que mapeia uma geometria 2D em torno de um cilindro, e cuja geometria contém três blocos.

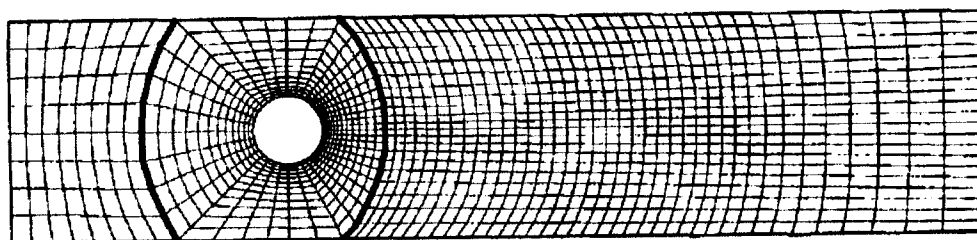


Fig.1.10 – Malha estruturada por blocos, com 3 blocos [13]

Na Figura 1.11 está ilustrada uma malha estruturada por blocos sem continuidade nas interfaces que foi usada para mapear o domínio em torno de uma asa.

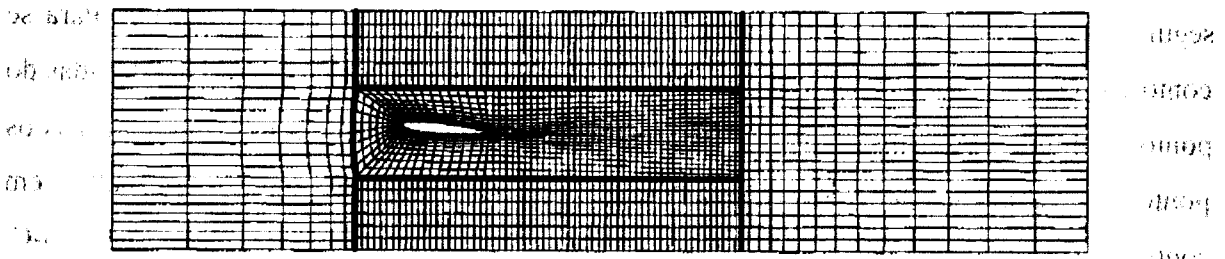


Fig.1.11 – Malha estruturada por blocos, com 5 blocos [13]

Neste caso foram utilizados cinco blocos. Este exemplo ilustra a flexibilidade destas malhas quando comparando com às malhas estruturadas simples, pois permite o uso de malhas mais finas em regiões limites onde é necessária maior precisão de cálculo. A interface sem continuidade pode ser tratada de uma maneira totalmente conservativa. A programação deste tipo de malhas é mais complexa do que a dos casos anteriores. Programas desenvolvidos para malhas estruturadas podem ser aplicados por blocos e domínios de fluxo complexos podem ser tratados com essas malhas. É possível refinar as malhas localmente, isto é, dentro de algum bloco.

Existem ainda malhas estruturadas por blocos com sobreposição, conforme ilustrado na Figura 1.12.

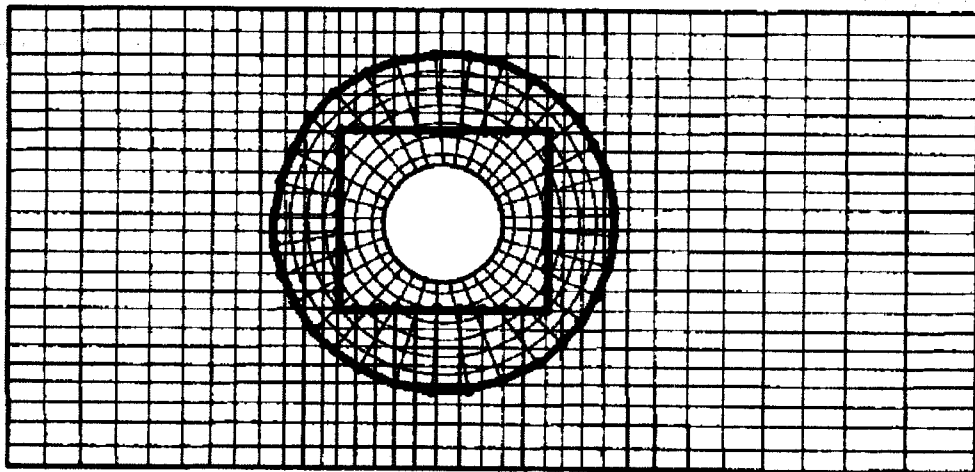


Fig.1.12 – Malha estruturada por blocos com sobreposição [13]

Na região de sobreposição, as condições fronteira para um bloco são obtidas fazendo a interpolação com o outro bloco. A desvantagem destas malhas é que a conservação não é garantida nas fronteiras do bloco. As vantagens desta aproximação são a forma mais simples com que os domínios mais complexos são tratados e pode ser utilizada para seguir corpos em movimento: um bloco é anexado a um corpo e move-se com este, enquanto que uma malha estática cobre a região fixa.

Para geometrias muito complexas, o tipo mais flexível de malhas é o que consegue adaptar-se sem quaisquer limitações à fronteira do domínio de solução, designadas por malhas não estruturadas, conforme ilustrado na Figura 1.13.

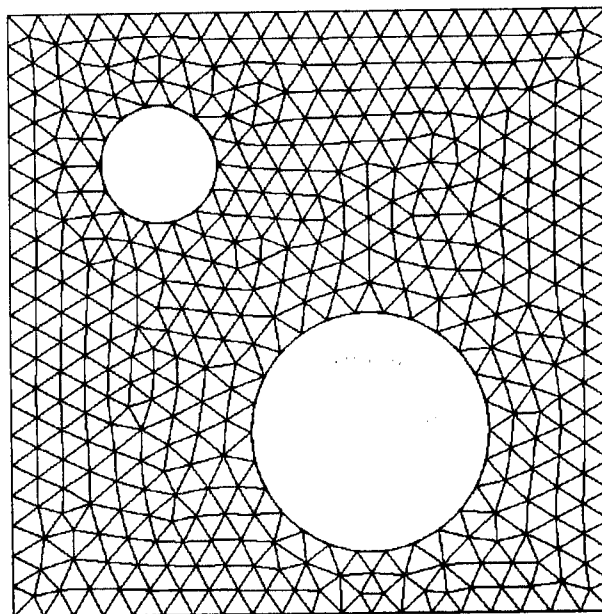


Fig.1.13 – Exemplo de malha não estruturada

Teoricamente, estas malhas podem ser usadas com qualquer método de discretização, mas adaptam-se melhor às aproximações por volumes finitos ou por elementos finitos. Os elementos ou volumes de controle podem ter qualquer forma e não há qualquer restrição ao número de elementos vizinhos ou vértices. Na prática, malhas feitas de triângulos ou quadriláteros em 2D e tetraedros ou hexaedros em 3D são as mais frequentemente usadas. A vantagem da flexibilidade é compensada pela desvantagem da irregularidade da estrutura dos dados e aumento de complexidade e formulação. A matriz do sistema de equações algébricas já não tem estrutura diagonal regular; a largura da banda necessita ser reduzida por reordenação dos elementos. Os algoritmos que resolvem os sistemas de equações algébricas são necessariamente mais lentos que os algoritmos para malhas estruturadas.

As malhas não estruturadas, usualmente, são usadas com elementos finitos e, crescentemente, com volumes finitos. Os códigos computacionais para malhas não estruturadas são mais flexíveis, não necessitam ser alterados quando a malha é localmente refinada, ou quando elementos ou volumes de controle de diferentes formas são usados, contudo, a geração de malhas e o pré-processamento são habitualmente mais complexos.

1.3 – Organização da Tese

Este trabalho está dividido em cinco partes. No Capítulo 2 são referidos os conceitos matemáticos e físicos subjacentes às equações governantes do escoamento dos fluidos, referindo-se as equações de conservação da massa, quantidade de movimento e energia. Estas são apresentadas na forma de uma equação geral do transporte, sendo efectuada a sua discretização para o caso particular em estudo, isto é, para problemas estacionários e com termo convectivo nulo.

No Capítulo 3 é feita a descrição do código computacional desenvolvido, evidenciando as funcionalidades implementadas nas subrotinas e funções utilizadas, o qual permite calcular a distribuição de uma quantidade escalar no espaço 3D e utilizando malhas não estruturadas, permitindo deste modo resolver problemas estacionários e sem termo convectivo.

No Capítulo 4 é efectuada a validação do código desenvolvido, tanto através da comparação dos resultados previstos pelo programa com resultados obtidos analiticamente, como com resultados obtidos por códigos comerciais.

Finalmente, no Capítulo 5 são apresentadas as conclusões deste trabalho e identificados desenvolvimentos possíveis para o futuro.

2 - O Método dos Volumes Finitos

O conceito chave usado durante toda a formulação de Volumes Finitos é o princípio de conservação de uma determinada quantidade física expressa pelas equações governativas sobre qualquer volume finito, também denominado volume de controle.

O domínio é discretizado num conjunto de volumes de controle não sobrepostos, que podem ser irregulares no tamanho e na forma.

Os valores de uma variável ϕ são armazenados no centroide dos volumes de controle, ou seja, nos vértices dos triângulos da malha. As equações discretizadas da variável dependente ϕ são obtidas integrando a equação governativa sobre cada um dos volumes de controle no domínio.

O processo de discretização torna-se mais conveniente reconhecendo-se o facto que todas as equações governativas relevantes possuem uma forma comum, isto é, a forma da equação geral do transporte.

As equações que governam o escoamento de fluidos são as equações de conservação da massa, quantidade de movimento e de energia [2], escritas no sistema cartesiano de coordenadas, seguintes:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j) = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j u_i) = - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + S^u_i \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho T) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j T) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{k}{C_p} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + S^T \quad (2.3)$$

As equações anteriores podem ser escritas de uma forma geral para um campo escalar ϕ como uma equação geral de transporte na forma tensorial

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \phi) + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_k \phi) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(T \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \right) + S_\phi \quad (2.4)$$

ou na forma divergente

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \phi) + \nabla (\rho u \phi) = \nabla (T \nabla \phi) + S_\phi \quad (2.5)$$

Termo Não Estacionário	Termo Convectivo	Termo Difusivo	Termo Fonte
------------------------------	---------------------	-------------------	----------------

que no caso particular de problemas estacionários, em que $\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) = 0$, e onde o termo convectivo é nulo, $\nabla(\rho u\phi) = 0$, fica reduzida a

$$\nabla(T\nabla\phi) + S_\phi = 0 \quad (2.6)$$

Assume-se que o domínio do problema está dividido num conjunto de volumes de controle e que cada volume de controle p é limitado pelos planos mediadores de cada um dos segmentos de recta $[pi]$, que une p a cada vértice i vizinho, conforme ilustrado na Figura 2.1.

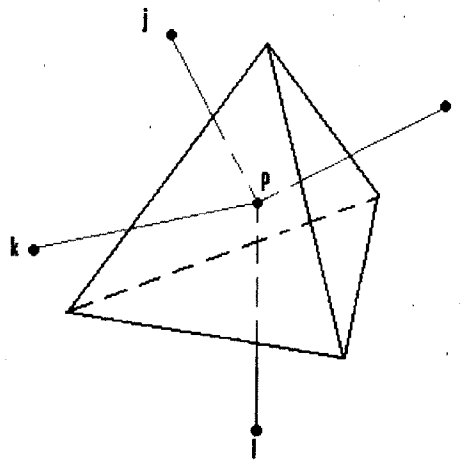


Fig. 2.1 – Volume de controle associado ao vértice p da malha

As equações discretizadas da variável dependente ϕ são obtidas integrando a equação governativa sobre cada um dos volumes de controle do domínio. Portanto a equação $\nabla(T\nabla\phi) + S_\phi = 0$ dá origem a uma nova equação por cada vértice p da malha, ou seja, tendo como ponto de partida a equação (2.6) integrando no volume de controle ΔV

$$\Leftrightarrow \int_{\Delta V} \nabla(T\nabla\phi) dV + \int_{\Delta V} S_\phi dV = 0 \quad (2.7)$$

pelo Teorema da Divergência

$$\Leftrightarrow \int_A T\nabla\phi \cdot \vec{n} dA + S\Delta V = 0 \quad (2.8)$$

onde o primeiro termo pode ser substituído por um somatório do integral em cada uma das faces do volume de controle.

$$\Leftrightarrow \sum_i \left(\int_{A_i} T \frac{\partial\phi}{\partial n} dA_i \right) + S\Delta V = 0 \quad (2.9)$$

O primeiro termo da equação (2.9) pode ser discretizado da seguinte forma:

- para faces internas $\int_{A_i} T \frac{\phi_i - \phi_p}{\|p_i\|} dA_i$ (2.10)

- para faces de fronteira onde o fluxo é conhecido $\int_{A_i} T \frac{\partial \phi_i}{\partial n} dA_i$ (2.11)

Linearizando S, isto é, $S = S_c + S_\phi \phi_p$, obtém-se

$$\sum_i \left(\int_{A_i} T \frac{\partial \phi}{\partial n} dA_i \right) + (S_c + S_\phi \phi_p) \Delta V = 0 \quad (2.12)$$

Como temos n equações (uma por cada volume de controle) e n incógnitas ϕ_1, \dots, ϕ_n o sistema é resolúvel se as n linhas do sistema forem linearmente independentes.

A construção deste sistema requer a definição dos volumes de controle. Os volumes de controle são definidos no espaço tendo como base o método de Voronoi no plano.

2.1 – Diagrama de Voronoi e Triangulação de Delaunay

É um facto notável que conceitos aparentemente simples possam muitas vezes levar a novos campos de investigação e encontrar extensas aplicações em muitas e diversas áreas. Este fenómeno é bem ilustrado pelo Diagrama de Voronoi e o seu dual, a triangulação de Delaunay. Embora tenham sido formulados no início do século XX, muito antes da ascensão da computação científica, estas ideias geométricas fundamentais encontraram recentemente um vasto leque de aplicações como é o caso da interpolação de dados, da análise de imagens em medicina, da animação computacional e da geração de malhas [26-34].

A triangulação de Delaunay de um conjunto de pontos e o seu dual geométrico, o diagrama de Voronoi, são conceitos extremamente férteis que têm sido assunto de investigações teóricas consideráveis e têm encontrado numerosas aplicações práticas. O diagrama de Voronoi marca a região do espaço que fica mais próximo de cada ponto do que de qualquer outro ponto, isto é ilustrado no espaço 2D pela Fig. 2.2.

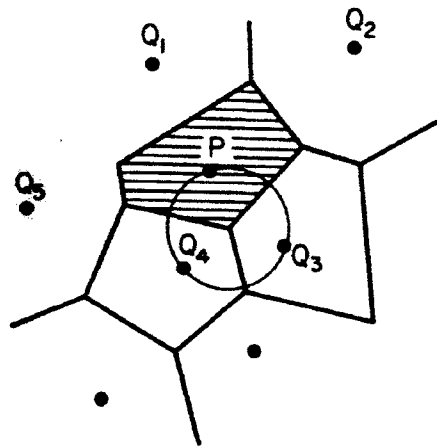


Fig. 2.2 – Diagrama de Voronoi

Os polígonos formam o diagrama de Voronoi, formando uma partição do espaço à volta dos pontos. Cada polígono (isto é, a área em torno de cada ponto P) consiste na região do plano que é mais próxima daquele ponto do que de qualquer outro. As arestas do diagrama de Voronoi são formadas pelas bissetrizes perpendiculares às linhas que ligam pontos vizinhos, e, por isso, cada vértice é o circuncentro do triângulo formado por três pontos. Isto determina uma única triangulação conhecida como triangulação de Delaunay e é tal que o círculo que circunscreve cada triângulo não contém outros pontos que não os que formam o próprio triângulo.

Estes conceitos podem ser generalizados para ordem superiores. Em particular, a triangulação de Delaunay em 3D é a única triangulação tal que a esfera que passa pelos quatro vértices de cada tetraedro não contém outros pontos para além dos quatro vértices do tetraedro. Em duas dimensões, pode ser mostrado que este critério é equivalente à propriedade que selecciona a triangulação que maximiza o mínimo dos seis ângulos em qualquer par de dois triângulos que formem um quadrilátero convexo. Parece não ser conhecida caracterização equivalente em três dimensões, mas o critério do círculo pode continuar a ser considerado como seleccionando uma boa triangulação para um conjunto de pontos dado.

Na Figuras 2.3 é apresentada (a azul) a triangulação de Delaunay para o mesmo conjunto de pontos da Figura 2.2.

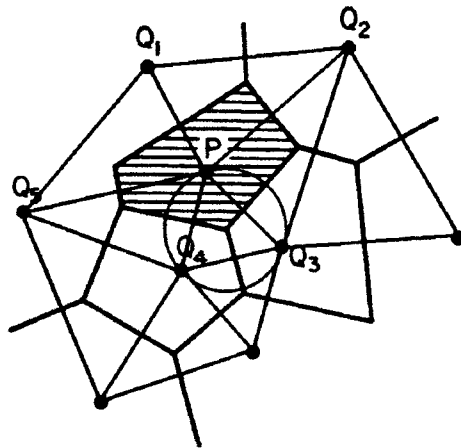


Fig. 2.3 – Triangulação de Delaunay

O procedimento implementado neste trabalho para a criação do diagrama de Voronoi é descrito no capítulo seguinte.

Fig. 1. - Diagram of the system

The system is composed of a set of components that are interconnected in a specific way.

The components are:

3 – Código Desenvolvido

Para a resolução do tipo de problema propostos por este trabalho foi desenvolvido um programa que é descrito em seguida, que tem como dados de entrada um ficheiro “*input.txt*” com informações relativas ao número de nós, faces e tetraedros da malha, assim como informações tais como uma determinada propriedade ou o seu fluxo, nos vértices ou faces fronteira da malha em que estas informações são conhecidas. O programa tem como resultado um ficheiro “*output.txt*” de dados com a solução do problema.

3.1 – Fluxograma do código

O algoritmo do código desenvolvido está ilustrado no fluxograma representado na Figura 3.1.

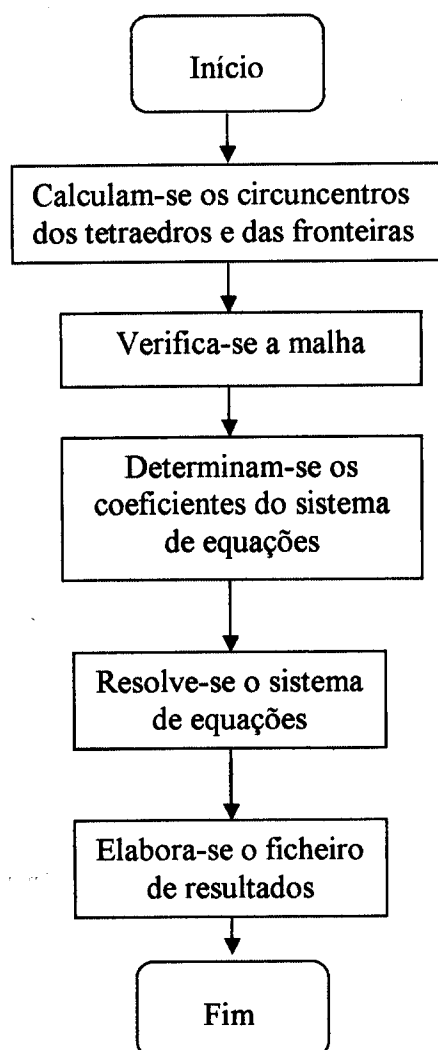


Fig. 3.1 – Fluxograma do código desenvolvido

Na determinação dos coeficientes do sistema ainda se podem detalhar os procedimentos de acordo com o fluxograma da Figura 3.2.

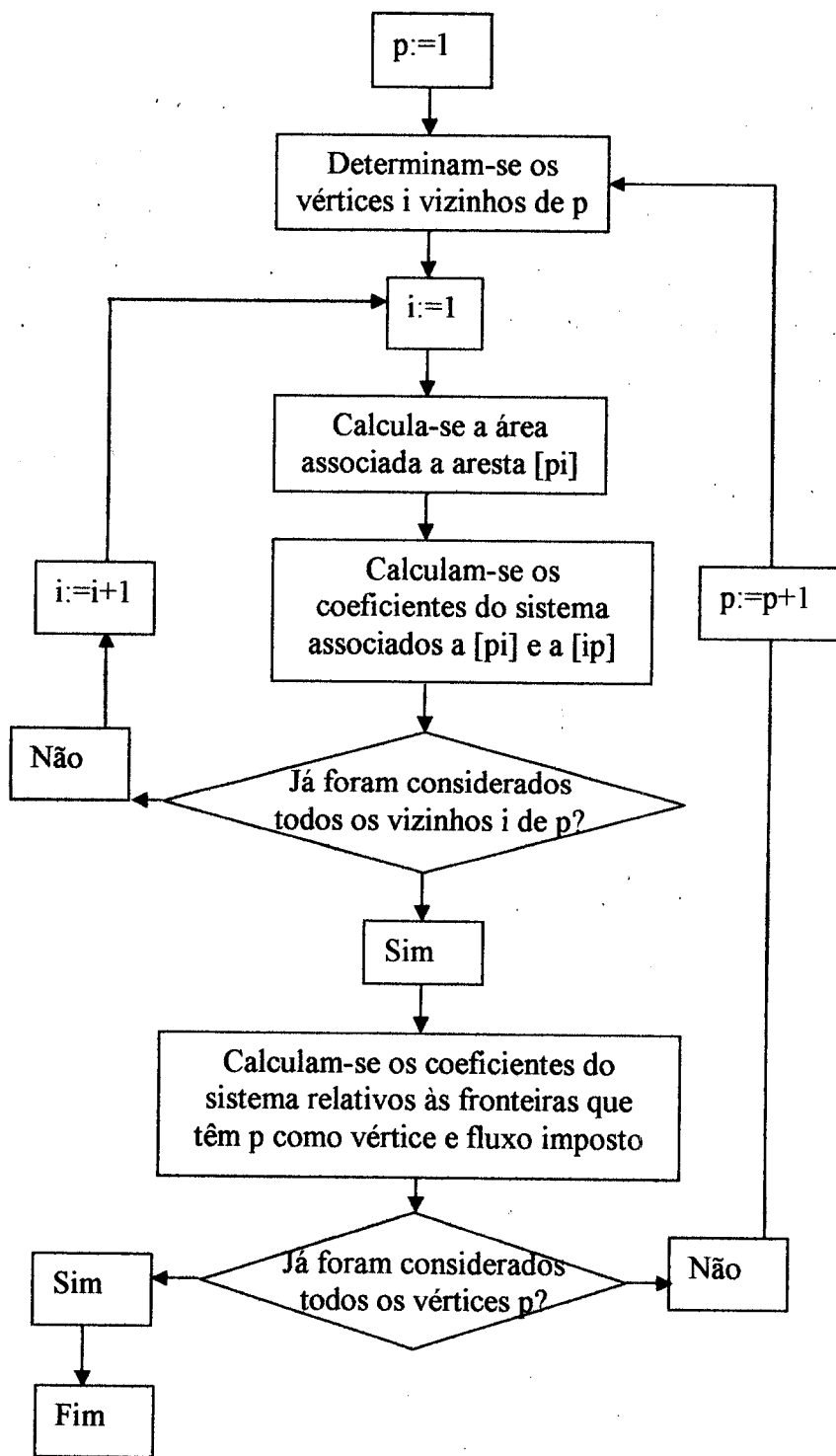


Fig. 3.2 – Fluxograma da determinação dos coeficientes do sistema de equações

3.2 - Descrição detalhada de cada ponto

No início do programa é executada uma “subrotina *inputdat()*” que lê os dados de entrada do ficheiro “*input.txt*” e grava-os em variáveis para consulta ao longo do programa.

Para a aplicação do Método dos Volumes Finitos é necessária a definição dos Volumes de Controle (VC) a partir da malha fornecida como dado de entrada para o programa. Para a definição dos Volumes de Controle é construído um diagrama de Voronoi no espaço, isto é, é associado a cada vértice p da malha o conjunto de pontos do volume em estudo que estão mais próximos de p do que de qualquer outro vértice da malha. Tal conjunto de pontos, associado ao vértice p da malha, é um poliedro pois é limitado por faces que estão a igual distância de p e de outro vértice i da malha, sendo i cada um dos vértice que estão ligados a p por uma aresta da malha. Na definição deste poliedro associado a p é feita uma restrição, que é o facto de as faces do poliedro associado a p estarem associados a arestas da malha, o que nem sempre é verdade, o poliedro também pode ter uma face que não está associada a nenhuma aresta da malha. Na Figura 3.3 está ilustrado um caso, em duas dimensões, que se teria de considerar mais um lado do volume de controle para além dos lados associados a cada uma das arestas $[p_i]$ da malha.

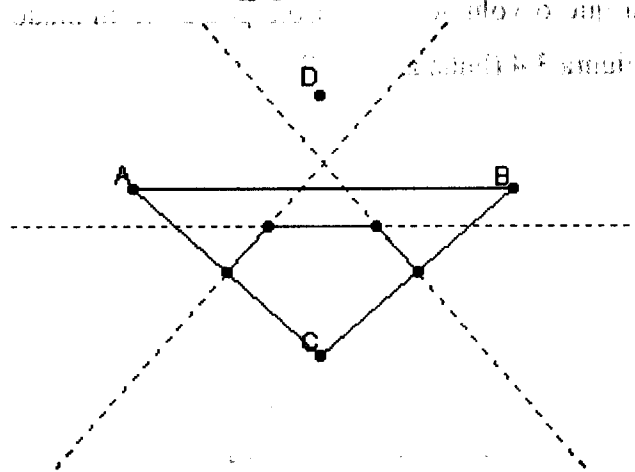


Fig. 3.3 – Volume de controle em 2D.

Neste caso, o volume de controle associado ao vértice C da malha, para além de estar limitado pelas mediatrizes de $[AC]$ e $[BC]$ também é limitado pela mediatriz de $[DC]$ não estando D ligado a C por uma aresta da malha. Portanto, uma limitação que é imposta pelo algoritmo desenvolvido é, cada tetraedro da malha ter o seu circuncentro no seu fecho (interior ou fronteira), excluindo assim este tipo de limitação do poliedro associado ao vértice p . Para verificar que a malha de entrada para o programa tem esta propriedade, é verificado para cada

tetraedro se o seu circuncentro pertence ao seu fecho através da função “vermalha” pormenorizada a seguir.

• **função vermalha()**

Esta função verifica se a malha tem uma propriedade essencial para prosseguir o programa, que é o circuncentro de cada tetraedro pertencer ao interior ou à fronteira do próprio tetraedro, que é equivalente a verificar se as faces de cada tetraedro são triângulos rectângulos ou acutângulos, utilizando o Teorema de Tales que afirma que se o circuncentro de um triângulo estiver localizado num lado do triângulo, o ângulo oposto a este lado será recto. Determina também que se o circuncentro estiver localizado dentro do triângulo, este será acutângulo; se o circuncentro estiver localizado fora do triângulo, este será obtusângulo.

Portanto, para cada uma das faces dos tetraedros se se verificar

$$h^2 \leq c_1^2 + c_2^2 \quad (3.1)$$

sendo h o lado maior do triângulo e c_1 e c_2 os outro dois lados, significa que se pode prosseguir com o programa.

Se o circuncentro de um determinado tetraedro pertencesse ao exterior do próprio tetraedro, isto significava que o volume de controle podia ser limitado por mais uma face como esquematizado na Figura 3.4 (linha a vermelho).

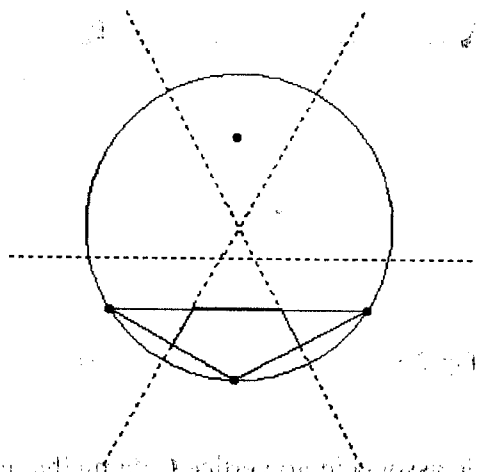


Fig. 3.4 – Circuncentro de um triângulo no exterior do triângulo

Se a malha não verificar a propriedade indicada anteriormente, o programa pára e aparece uma mensagem indicando que a malha não é própria.

Para a determinação dos circuncentros dos tetraedros e das faces fronteira que são necessários ao longo do programa são utilizadas as subrotinas “circun3”, “circun4” e “esfera”.

- **subrotina circun3(A,C)**

Esta subrotina calcula o centro C da circunferência que contém os pontos $A=[X_1, X_2, X_3]$, ou seja, calcula o circuncentro dos pontos $A=[X_1, X_2, X_3]$.

Para o cálculo do circuncentro de um triângulo são considerados os seus três vértices $A=[X_1, X_2, X_3]$. O circuncentro do triângulo é a intersecção dos planos mediadores de $[X_1, X_2]$, $[X_1, X_3]$ e do plano definido pelos três pontos $A=[X_1, X_2, X_3]$.

O plano mediador de $[X_1, X_2]$ é $\overline{X_1 X_2} \cdot (x, y, z) + d = 0$ e contém o ponto médio de $[X_1, X_2]$, ou seja, $\frac{X_1 + X_2}{2}$. Daqui resulta que

$$\overline{X_1 X_2} \cdot \left(\frac{X_1 + X_2}{2} \right) = -d \quad (3.2)$$

O mesmo raciocínio é seguido para $[X_1, X_3]$. O plano que contém os pontos $A=[X_1, X_2, X_3]$ tem vector normal $\overline{X_1 X_2} \times \overline{X_1 X_3}$ e contém o ponto X_1 (por exemplo) por isso

$$\left(\overline{X_1 X_2} \times \overline{X_1 X_3} \right) \cdot X_1 = -d \quad (3.3)$$

Por isto, o circuncentro do triângulo $A=[X_1, X_2, X_3]$ é a solução do sistema

$$\begin{bmatrix} \overline{X_1 X_2} \\ \overline{X_1 X_3} \\ \overline{X_1 X_2} \times \overline{X_1 X_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{X_1 X_2} \cdot \left(\frac{X_1 + X_2}{2} \right) \\ \overline{X_1 X_3} \cdot \left(\frac{X_1 + X_3}{2} \right) \\ \left(\overline{X_1 X_2} \times \overline{X_1 X_3} \right) \cdot X_1 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

uma vez que é a intersecção dos três planos definidos antes.

- **função circun4()**

Esta função determina os circuncentros de todos os tetraedros e das fronteiras, utilizando a subrotina “esfera” e grava-os.

- **subrotina esfera(A,C,r)**

Os dados de entrada desta subrotina são uma matriz $A=[X_1, X_2, X_3, X_4]$ sendo X_1, X_2, X_3 e X_4 pontos do espaço, e os dados de saída são o vector C , com as coordenadas do centro da esfera que contém os pontos de A na sua superfície (circuncentro do tetraedro que tem como vértices os pontos de A), e r , o raio de tal esfera.

Para o cálculo do circuncentro de um tetraedro são considerados os seus quatro vértices $[X_1, X_2, X_3, X_4]$. O circuncentro do tetraedro é a intersecção dos planos medidores de $[X_1, X_2]$, $[X_1, X_3]$ e $[X_1, X_4]$.

O plano mediador de $[X_1, X_2]$ é

$$\overrightarrow{X_1 X_2} \cdot (x, y, z) + d = 0 \quad (3.5)$$

e contém o ponto médio de $[X_1, X_2]$, ou seja, $\frac{X_1 + X_2}{2}$. Daqui resulta que

$$\overrightarrow{X_1 X_2} \cdot \left(\frac{X_1 + X_2}{2} \right) = -d \quad (3.6)$$

Seguindo o mesmo raciocínio para $[X_1, X_3]$ e $[X_1, X_4]$ obtém-se o seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} \overrightarrow{X_1 X_2} \\ \overrightarrow{X_1 X_3} \\ \overrightarrow{X_1 X_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overrightarrow{X_1 X_2} \cdot \left(\frac{X_1 + X_2}{2} \right) \\ \overrightarrow{X_1 X_3} \cdot \left(\frac{X_1 + X_3}{2} \right) \\ \overrightarrow{X_1 X_4} \cdot \left(\frac{X_1 + X_4}{2} \right) \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

A solução deste sistema é a intersecção dos três planos medidores, isto é, o centro da esfera que tem na sua superfície $[X_1, X_2, X_3, X_4]$, ou seja, o circuncentro do tetraedro.

Para a determinação do raio basta calcular a distância entre o circuncentro do tetraedro já calculado e um dos vértices, por exemplo X_1 .

Ao longo do programa, nomeadamente para a resolução de sistemas, é utilizada a função "det".

- **função det(A)**

Esta função calcula o determinante da matriz $A \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$

Para a determinação do sistema de equações associadas a cada um dos vértices da malha, cuja solução é o vector da propriedade em estudo nos vértices da malha, é utilizada a subrotina "sistema" que por sua vez necessita de outras funções e subrotinas referidas em seguida.

- **função area3(A)**
Esta função calcula a área do triângulo que tem os vértices $A=[X1, X2, X3]$ usando o facto de a área de um paralelogramo ter o dobro da área de um triângulo se estes partilharem três vértices como os da Figura 3.5.

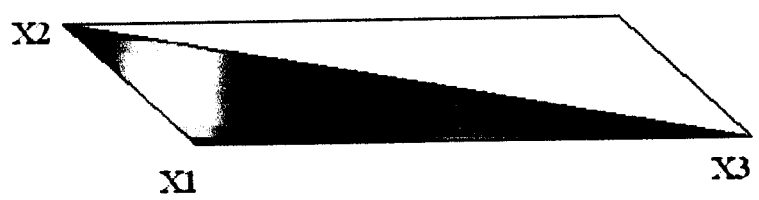


Fig. 3.5 – Triângulo e paralelogramo com 3 vértices comuns

Assim sendo

$$A_{\text{triangulo}} = \frac{A_{\text{paralelogramo}}}{2} \quad (3.8)$$

$$= \frac{\|X_1X_2 \times X_1X_3\|}{2}$$

uma vez que a área do paralelogramo pode ser calculada através do produto externo

$$A_{\text{paralelogramo}} = \|X_1X_2 \times X_1X_3\| \quad (3.9)$$

- **subrotina tetcontp(p)**
Esta subrotina identifica os tetraedros que contêm p como vértice.
- **função tetviz(i1,i2)**
Esta função verifica se dois tetraedros têm uma face em comum.
- **função vertviz(i1,i2)**
Esta função verifica se existe alguma face que contenha dois vértices específicos.
- **subrotina vertvizp(p)**
Esta subrotina determina quais os vértices que partilham uma face com o vértice p.

- **subrotina tetconpi(p,i)**

Esta subrotina determina quais os tetraedros que têm p e i como vértices.

- **função areapi(p,i)**

Esta função calcula a área associada à aresta [pi], isto é, a área da face do volume de controle definido à volta de p que pertence ao plano mediador de [pi].

Considere-se a aresta [pi] e os circuncentros dos tetraedros que contêm [pi] como aresta, este conjunto de pontos define um polígono que é a face que limita o volume de controle associado ao vértice p na direcção da aresta [pi].

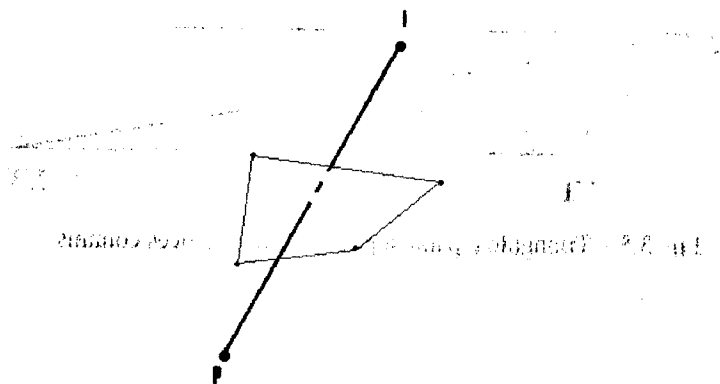


Fig. 3.6 – Face do VC associado à aresta [pi]

Qualquer um destes circuncentros está à mesma distância de p e de i (por definição de circuncentro) por isso estes circuncentros definem o plano mediador (associado a [pi]) que irá limitar o volume de controle, isto é, uma face do volume de controle será um subconjunto deste plano.

O volume de controle associado ao vértice p da malha é constituído pelo conjunto de pontos do espaço que estão mais próximos de p do que de qualquer outro vértice da malha, ou seja, é o subconjunto do espaço limitado pelos planos mediadores de [pi] com i a pertencer ao conjunto de vértices da malha que estão ligados a p por uma aresta. Como os circuncentros são intersecções dos planos mediadores, cada face do volume de controle tem como vértices circuncentros.

A área da face associada a [pi] é calculada dividindo-a em triângulos conforme ilustrado na Figura 3.7.

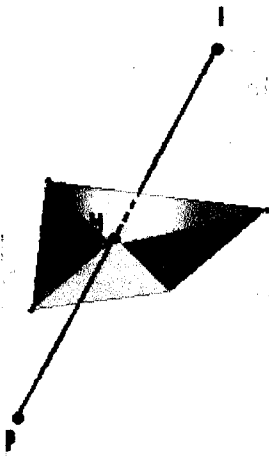


Fig. 3.7 – Divisão da face do VC associado à aresta $[pi]$ em triângulos

em que M é o ponto médio de $[pi]$.

Além de circuncentros dos tetraedros que contêm $[pi]$, este sector de plano também pode estar limitado por faces do sólido, por isso, para além de circuncentros de tetraedros o sector de plano também pode ter como vértices os circuncentros dessas faces (necessariamente zero ou duas). Portanto a face que limita o volume de controle tem uma das seguintes formas:

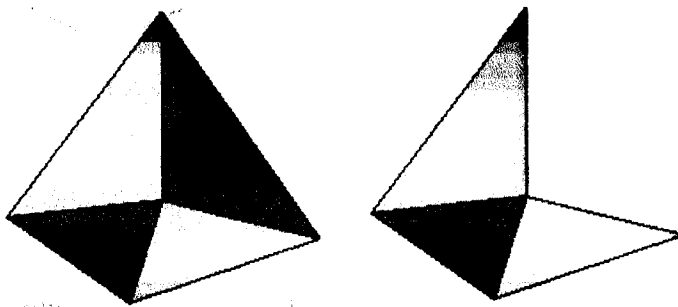


Fig. 3.8 – Possíveis tipos de faces do CV associado à aresta $[pi]$

Para o cálculo desta área os circuncentros (de faces e de tetraedros) são ordenados de modo a que (caso existam) os circuncentros das faces fiquem na 1ª e na última posição. Para esta ordenação processa-se de acordo com o fluxograma da Figura 3.9.

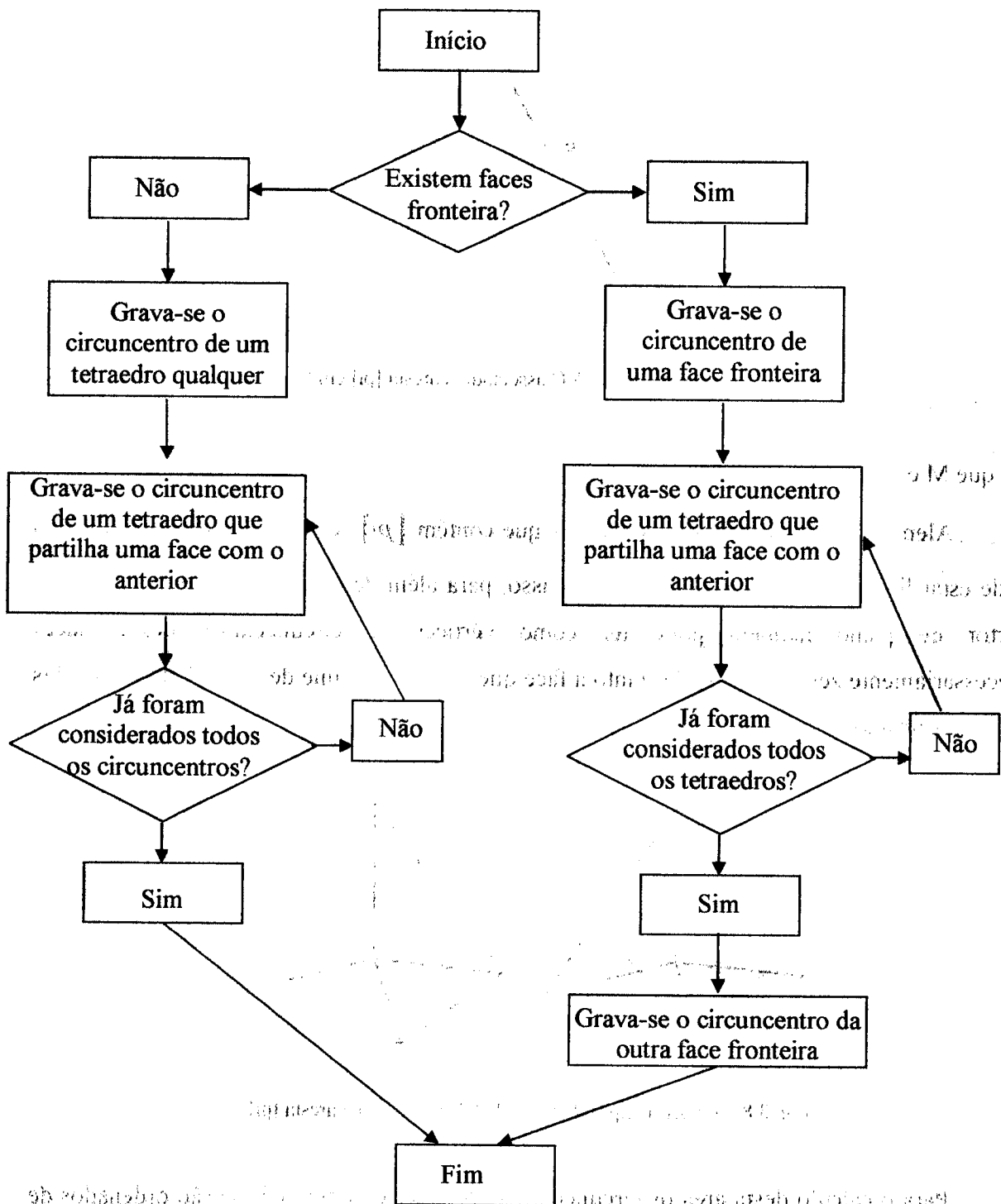


Fig. 3.9 – Fluxograma da ordenação de circuncentros.

Uma vez ordenados os circuncentros, a área da face associada a $[p_i]$ é a soma das áreas dos triângulos em que a face associada a $[p_i]$ pode ser dividida.

- **função $\text{dist}(i1,i2)$**

Esta função determina a distância entre dois vértices.

- **subrotina sistema(n,A,T,S_c,S_p)**

Nesta subrotina, para cada vértice p da malha, à volta do qual foi definido um volume de controle, é definida uma equação idêntica à equação (2.12) o que permite criar um sistema de equações com a seguinte estrutura

$$a_p \phi_p = \sum_{nb} a_{nb} \phi_{nb} + S_U \quad (3.10)$$

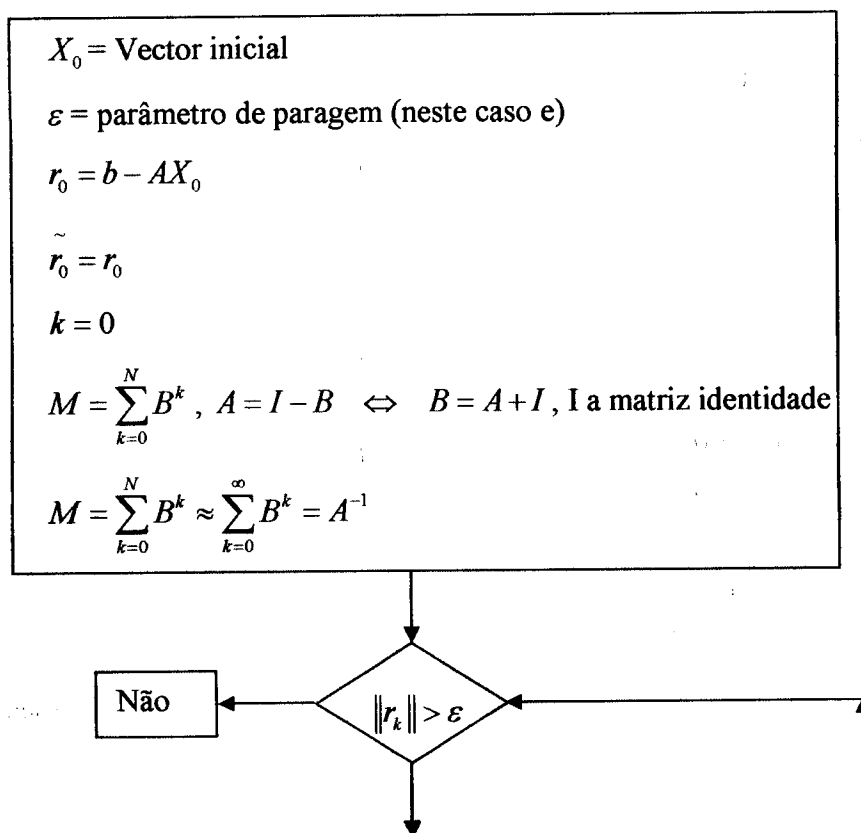
onde a_p é o coeficiente do termo central, a_{nb} são os coeficientes das células vizinhas e S_U o termo independente.

Uma vez determinados todos os coeficientes do sistema, este é resolvido recorrendo à subrotina "solvsist".

- **subrotina solvsist(n,A,e,x)**

Esta subrotina resolve o sistema de equações $Cx=B$, sendo C a matriz n x n constituída pelas n primeiras colunas de A e B a matriz igual à (n+1)-ésima coluna de A, pelo Método dos Gradientes Biconjugados com Pré-condicionamento [35-39]. O processo de cálculo implementado está apresentado na Figura 3.10.

Método dos Gradientes Biconjugados com Pré-condicionamento para o sistema $AX=b$



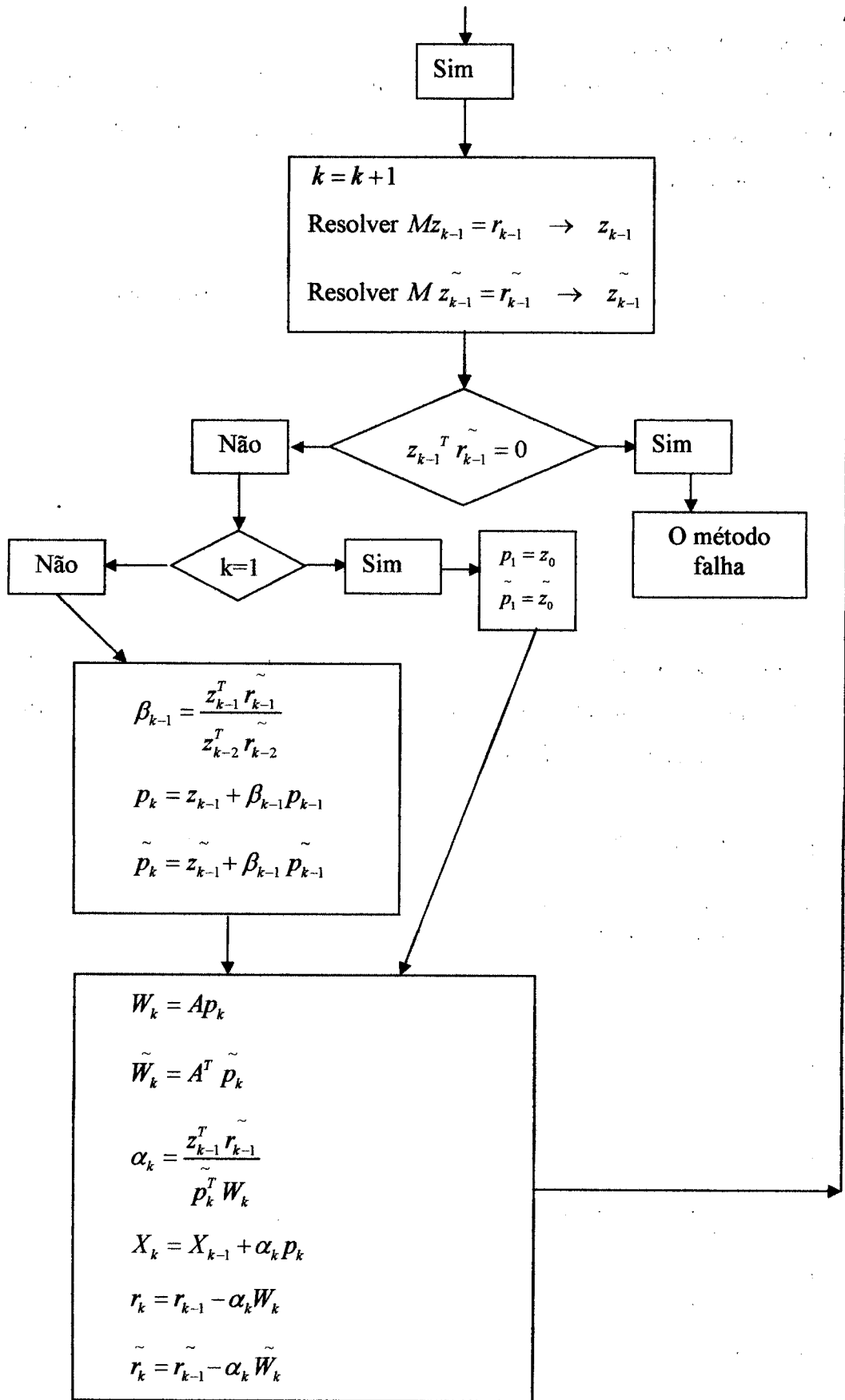


Fig. 3.10 – Fluxograma Método dos Gradientes Biconjugados com Pré-Condicionamento.

No final do programa é gerado um ficheiro de saída através da subrotina “output”.

- **subrotina output(n,x)**

Esta subrotina produz o ficheiro “output.dat” que permite visualizar a solução do problema no programa “*teplot 360*” [40].

4 - Exemplos

Nesta secção será apresentada a validação efectuada ao código implementado, com este objectivo são apresentados três grupos de exemplos da aplicação do programa desenvolvido e respectivas comparações tanto com soluções obtidas teoricamente, quando possível, como com resultados obtidos com outros programas.

4.1 - Exemplos 1

4.1.1 - Exemplo 1.1:

Considere-se o problema sem geração de calor interno numa barra isolada cujas extremidades são mantidas a temperaturas ϕ constantes de 100°C e 500°C respectivamente e conductividade térmica $\Gamma=1000\text{w/mK}$ [1]. Este problema unidimensional [41-43] está representado na Figura 4.1.

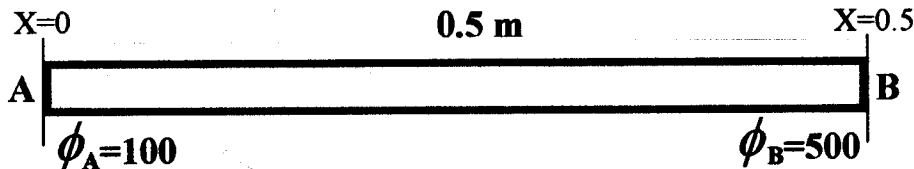


Fig. 4.1 - Barra isolada com temperatura imposta nas extremidades

A equação governante deste problema é

$$\nabla(\Gamma\nabla\phi) = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dx}\left(\Gamma\frac{d\phi}{dx}\right) = 0, \text{ pela definição de gradiente} \quad (4.1)$$

$$\Leftrightarrow \Gamma\frac{d\phi}{dx} = C_1, C_1 \in \mathbb{R}, \text{ integrando} \quad (4.2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d\phi}{dx} = \frac{C_1}{\Gamma}, C_1 \in \mathbb{R} \quad (4.3)$$

$$\Leftrightarrow \phi(x) = \frac{C_1}{\Gamma}x + C_0, C_0, C_1 \in \mathbb{R}, \text{ integrando} \quad (4.4)$$

Através das condições fronteira $\phi(0) = 100$ e $\phi(0.5) = 500$ obtém-se

$$\phi(x) = 800x + 100 \quad (4.5)$$

Para a resolução deste problema foram geradas duas malhas: M1 (com 24 vértices) e M2 (com 176 vértices), respectivamente, representadas nas Figura 4.2, juntamente com as respectivas soluções obtidas pelo programa.

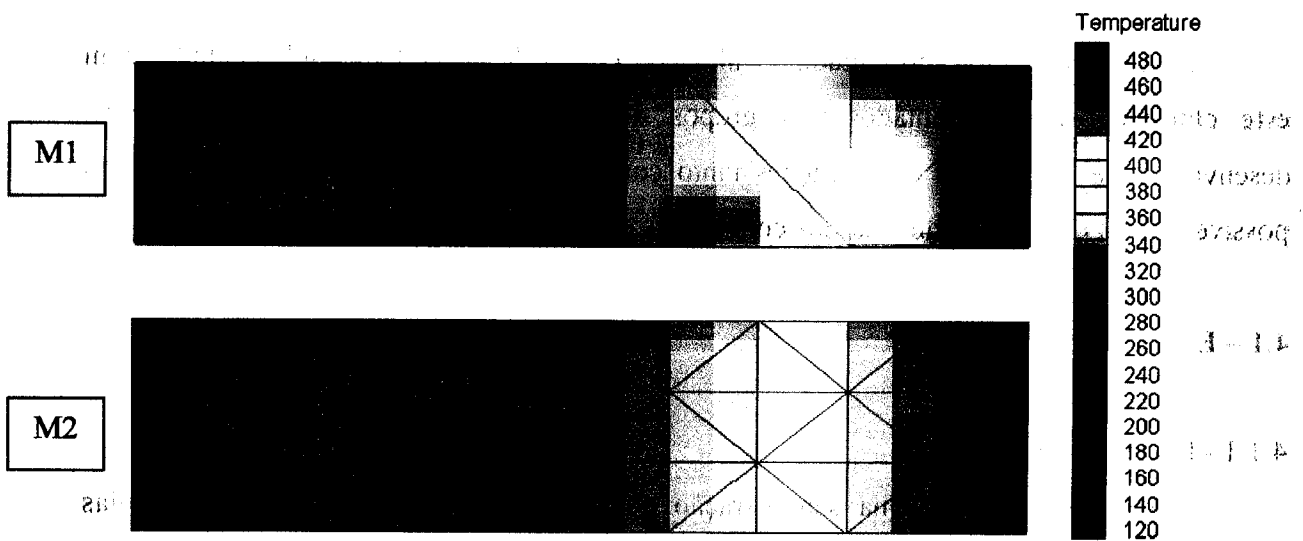


Fig. 4.2 – Distribuição da temperatura na barra com temperatura imposta nos extremos

A comparação dos resultados obtidos pelo programa com a solução analítica é feita no gráfico da Figura 4.3.

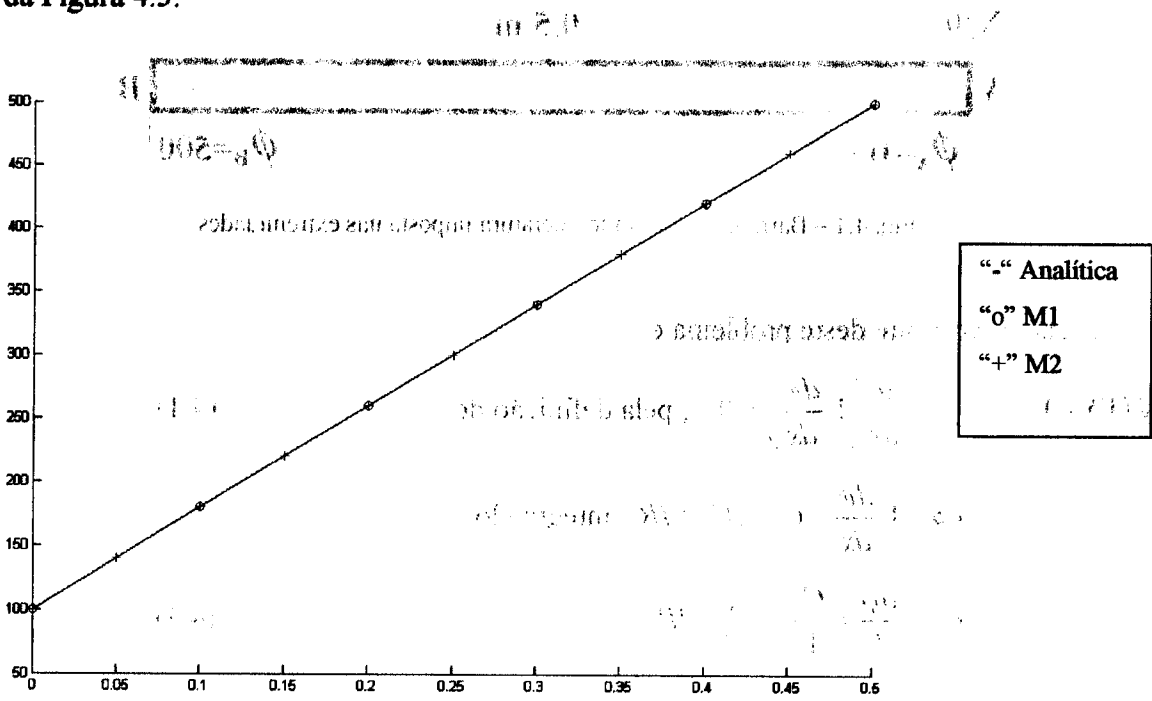


Fig. 4.3 – Gráfico da temperatura em função da abscissa na barra

Como se pode ver pelo gráfico da Figura 4.3, é obtida uma solução muito próxima da analítica com uma malha grosseira não havendo vantagens em resolver o problema com

malhas mais finas, excepto para a obtenção de resultados em mais pontos da barra. Isto acontece pois a solução analítica é linear, e essa foi a aproximação considerada no processo de discretização.

4.1.2 - Exemplo 1.2:

A condução de calor numa placa de grande dimensão, com espessura $L=2$ cm, condutividade térmica $\Gamma = 0.5$ W/mK, geração interna de calor $S_c=10^6$ W/m³ onde as faces A e B são mantidas a temperatura ϕ constante de 100°C e 200°C respectivamente [1], conforme ilustrado na Figura 4.4.

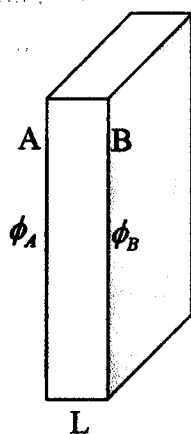


Fig. 4.4 – Placa com geração interna de calor e temperatura imposta em 2 faces

Este problema tem equação governante

$$\frac{d}{dx} \left(\Gamma \frac{d\phi}{dx} \right) + S_c = 0 \quad (4.6)$$

cuja solução analítica pode ser definida por

$$\frac{d}{dx} \left(\Gamma \frac{d\phi}{dx} \right) + S_c = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dx} \left(\Gamma \frac{d\phi}{dx} \right) = -S_c \quad (4.7)$$

$$\Leftrightarrow \Gamma \frac{d\phi}{dx} = -S_c x + C_0 \quad (4.8)$$

$$\Leftrightarrow \Gamma \frac{d\phi}{dx} = -S_c x + C_0, C_0 \in \mathbb{R}, \text{ integrando} \quad (4.9)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d\phi}{dx} = -\frac{S_c}{\Gamma} x + \frac{C_0}{\Gamma}, C_0 \in \mathbb{R} \quad (4.10)$$

$$\Leftrightarrow d\phi = -\frac{S_c}{\Gamma} x + \frac{C_0}{\Gamma} dx, C_0 \in \mathbb{R} \quad (4.11)$$

$\Leftrightarrow \phi = -\frac{S_c}{2\Gamma}x^2 + \frac{C_0}{\Gamma}x + C_1, C_0, C_1 \in \mathbb{R}$, integrando (4.12)

Das condições iniciais $\phi(0)=100$ e $\phi(0.02)=200$ e substituindo Γ e S_c pelos respectivos valores obtém-se a expressão da solução analítica do problema

$$\phi(x) = -10^6 x^2 + 25000x + 100 \quad (4.12)$$

Para a resolução deste problema utilizaram-se 4 malhas: uma malha M1 com 12 vértices, uma malha M2 com 16 vértices, uma malha M3 com 24 vértices distribuídos homogeneamente e uma malha M3a com 24 vértices com os vértices mais concentrados onde há maior variação da temperatura na placa, ou seja, nos seus extremos, uma vez que a distribuição da temperatura na placa tem a forma de parábola. Os resultados obtidos estão representados na Figura 4.5 e com representação gráfica na Figura 4.6.

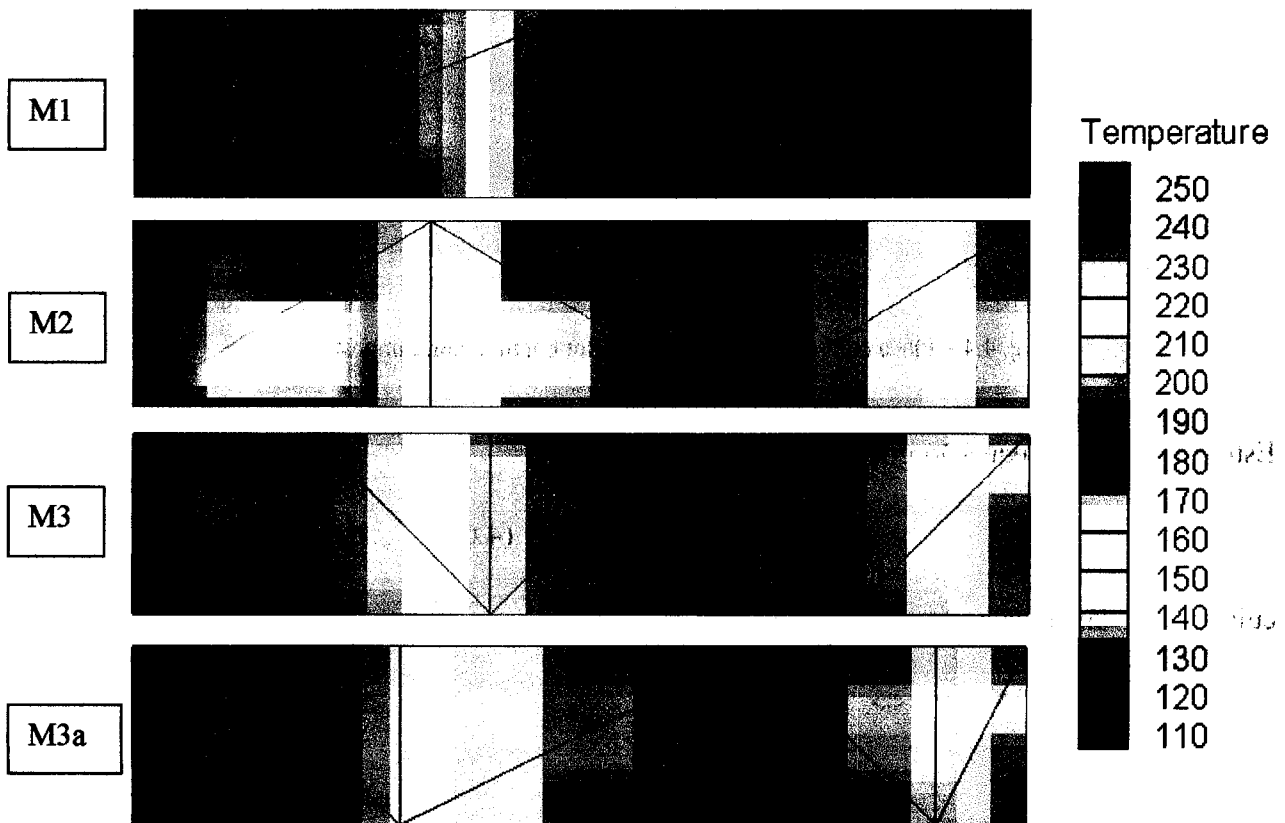


Fig. 4.5 – Distribuição da temperatura na placa

A comparação dos resultados obtidos pelo programa com a solução analítica está representada no gráfico da Figura 4.6.

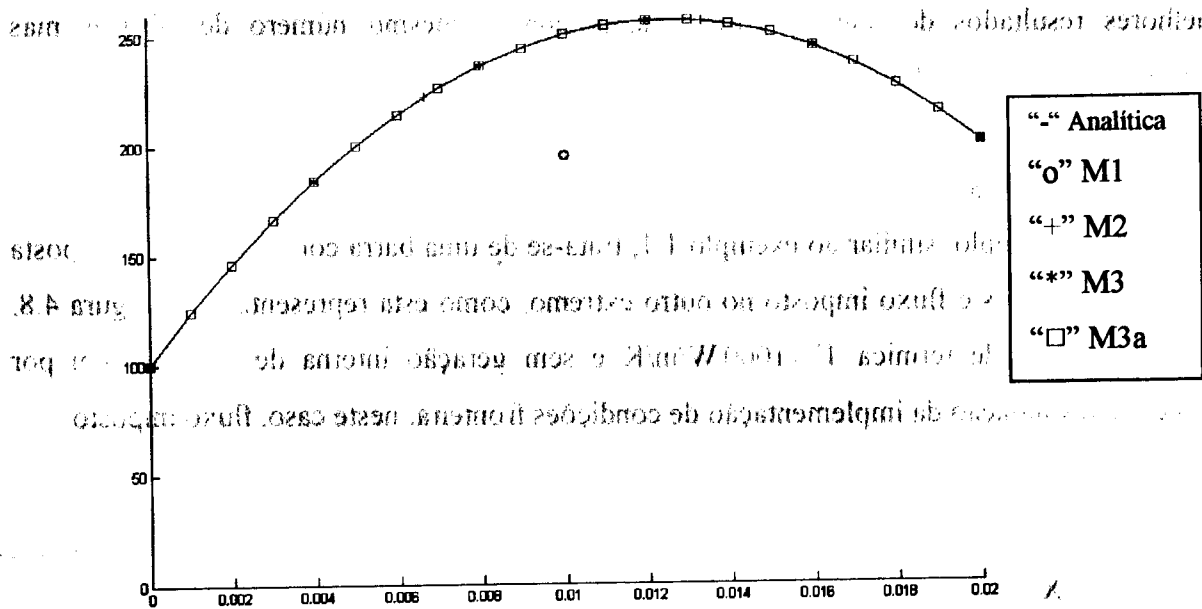


Fig. 4.6 - Distribuição da temperatura em função da abscissa na placa

No gráfico da Figura 4.7 estão representados os erros médios absolutos obtidos com as quatro malhas.

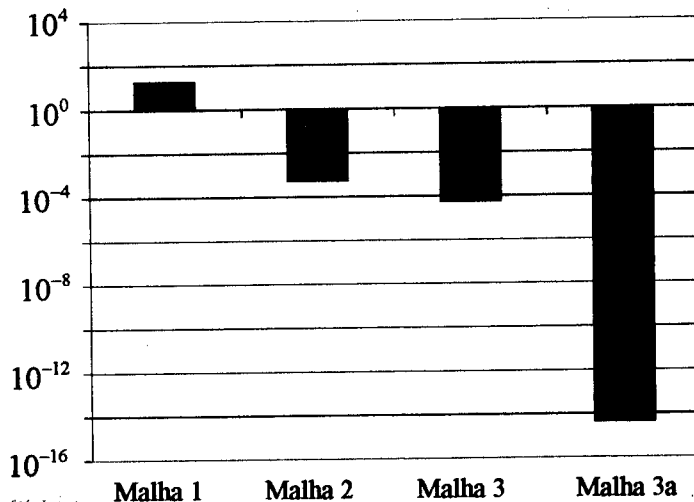


Fig. 4.7 - Erro médio absoluto

Analisando o gráfico da Figura 4.7 é possível observar que quanto mais refinada é a malha que se utiliza para prever a distribuição da temperatura na placa, melhores são os resultados obtidos, e para além disso, uma melhor distribuição dos vértices da malha, de acordo com a variação esperada da temperatura, permite obter resultados melhores.

Com este exemplo mostrou-se um caso onde uma malha com mais vértices em zonas do fluido onde foi detectada maior variação da propriedade em estudo, permitiu obter

melhores resultados do que com uma malha com o mesmo número de vértices mas homogeneamente distribuídos.

4.1.3 - Exemplo 1.3:

Este exemplo, similar ao exemplo 1.1, trata-se de uma barra com temperatura imposta num dos extremos e fluxo imposto no outro extremo, como está representado na Figura 4.8, com condutividade térmica $\Gamma = 1000 \text{ W/m/K}$ e sem geração interna de calor, e tem por objectivo a validação da implementação de condições fronteira, neste caso, fluxo imposto.

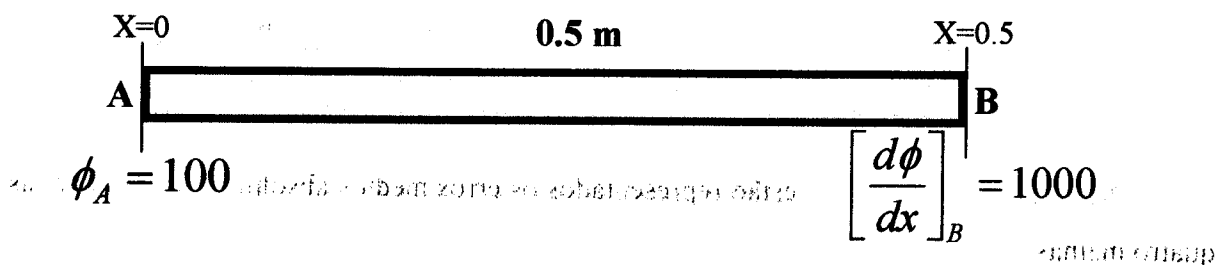


Fig. 4.8 – Barra isolada com temperatura imposta numa extremidade e fluxo imposto na outra extremidade

Este problema unidimensional tem a seguinte solução analítica

$$\frac{d}{dx} \left(\Gamma \frac{d\phi}{dx} \right) = 0 \Leftrightarrow \Gamma \frac{d\phi}{dx} = C_0, C_0 \in \mathbb{R}, \text{ integrando} \quad (4.13)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d\phi}{dx} = \frac{C_0}{\Gamma}, C_0 \in \mathbb{R} \quad (4.14)$$

$$\Leftrightarrow \phi = \frac{C_0}{\Gamma} x + C_1, C_0, C_1 \in \mathbb{R}, \text{ integrando} \quad (4.15)$$

Das condições $\phi(0) = 100$ e $\frac{d\phi}{dx}(0.5) = 1000$, e de $\Gamma = 1000$ obtém-se a expressão analítica da solução

$$\phi(x) = 1000x + 100 \quad (4.16)$$

Para a resolução deste problema utilizando o programa desenvolvido, foi utilizada a mesma malha com 24 vértices utilizada no exemplo 1.1. A solução obtida através do programa desenvolvido está representada na Figura 4.9.

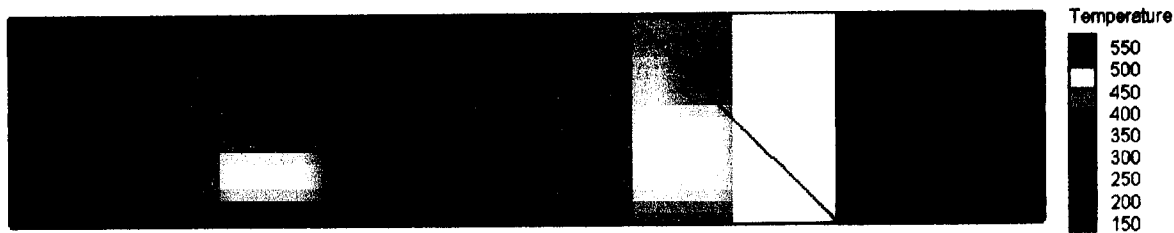


Fig. 4.9 - Distribuição da temperatura na barra

A comparação da solução obtida numericamente com a solução analítica pode ser vista no gráfico da Figura 4.10.

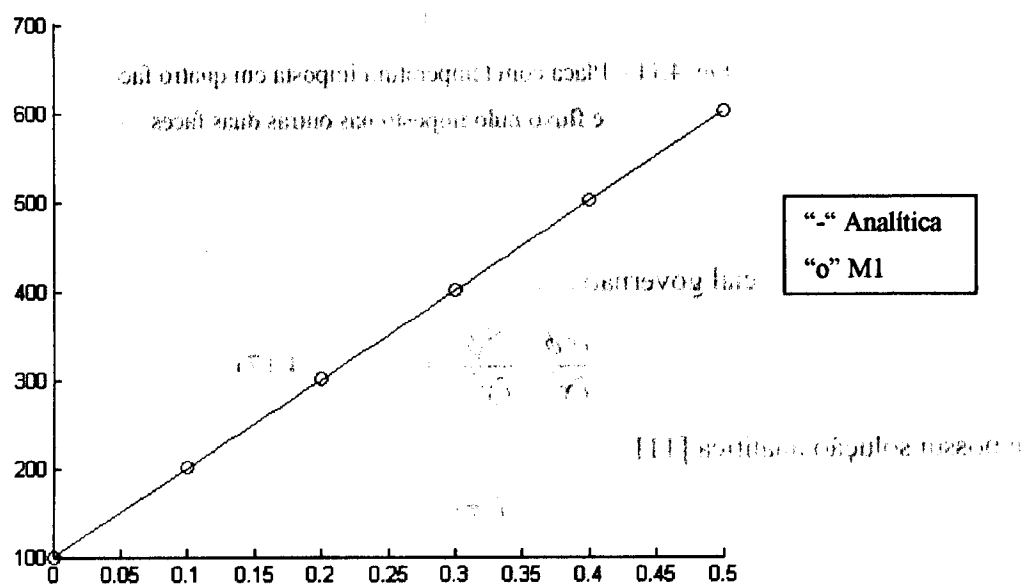


Fig. 4.10 - Distribuição da temperatura em função da abscissa na barra

Como se pode constatar as previsões sobrepõe-se à solução analítica, pois como no caso do exemplo 1.1, a solução é linear.

4.2 - Exemplo 2

O segundo exemplo trata-se do problema da condução bidimensional em regime permanente numa placa com temperatura imposta nos extremos, com condutividade térmica $\Gamma = 1000 \text{ W/m/K}$ e sem geração interna de calor, conforme ilustrado na Figura 4.11,

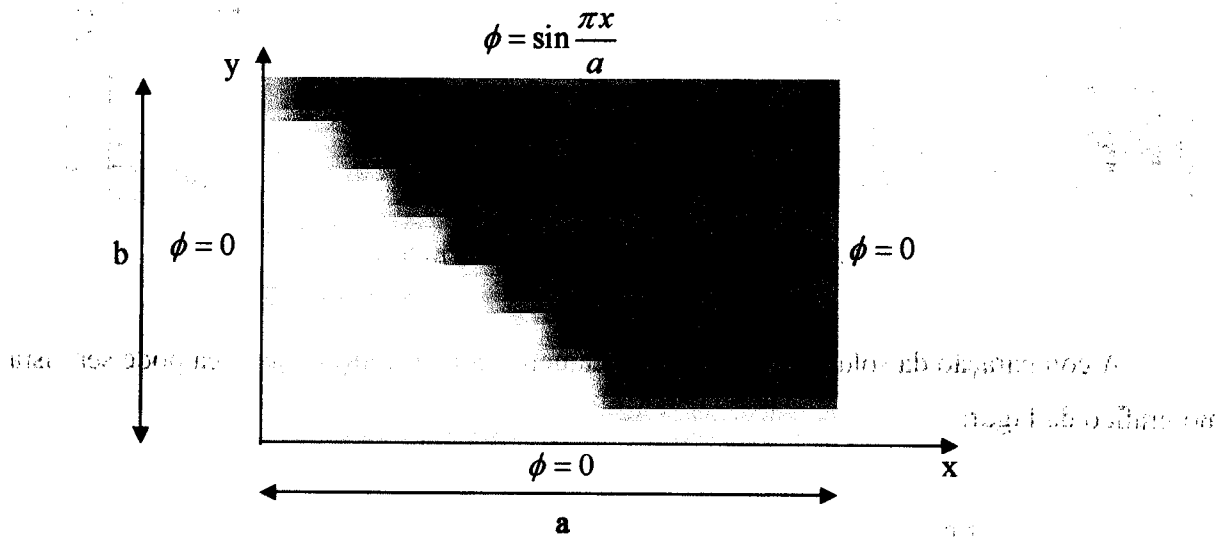


Fig. 4.11 – Placa com temperatura imposta em quatro faces e fluxo nulo imposto nas outras duas faces

cuja equação diferencial governativa é

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (4.17)$$

e possui solução analítica [11]

$$\phi(x, y) = \frac{\sinh\left(\frac{\pi y}{a}\right)}{\sinh\left(\frac{\pi b}{a}\right)} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \quad (4.18)$$

Para este problema foi considerado $a = b = 1$, e para a sua resolução foram geradas quatro malhas: M1 com 3x3x2 vértices, M2 com 5x5x2 vértices, M3 com 9x9x2 vértices e M4 com 17x17x2 vértices, que estão representadas na Figura 4.12 com as respectivas soluções obtidas.

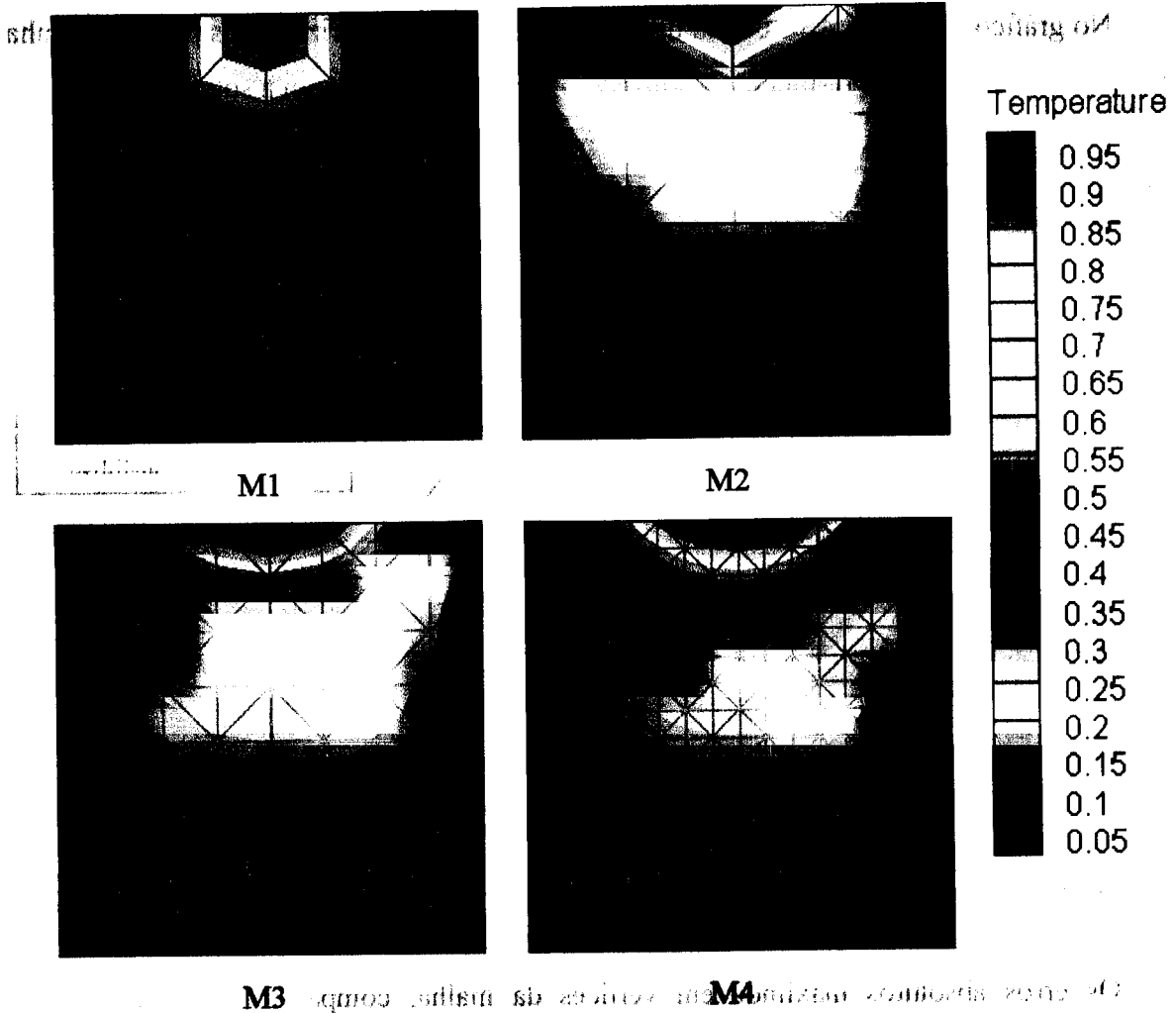


Fig. 4.12 – Distribuição da temperatura na placa obtida pelo programa

Estas soluções podem ser comparadas graficamente com a solução analítica calculada nos vértices de M4 representada na Figura 4.13.

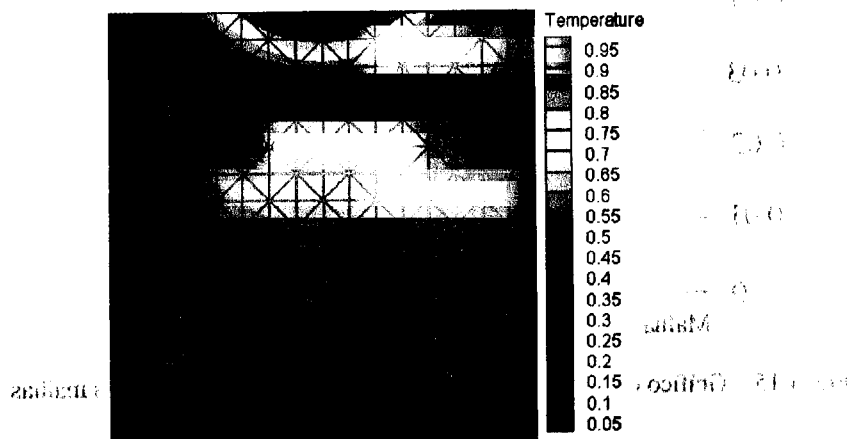


Fig. 4.13 – Distribuição da temperatura na placa obtida analiticamente em M4

No gráfico da Figura 4.14 é feita uma análise mais pormenorizada aos pontos da linha com $y=0.5$, comparando os resultados obtidos com as várias malhas com a solução analítica.

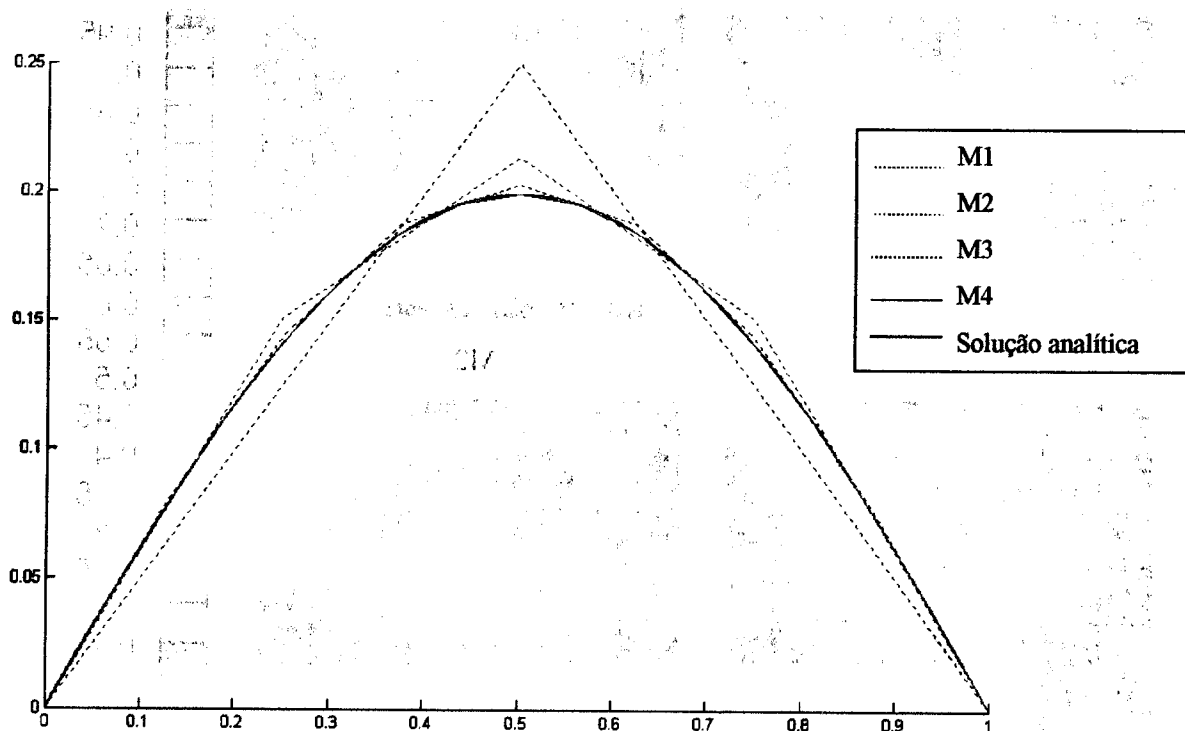


Fig. 4.14 – Distribuições da temperatura em função da abscissa na barra obtidas com o programa

Os erros absolutos máximos em vértices da malha, comparando com a solução analítica, obtidos para cada uma destas malhas estão representados no gráfico da Figura 4.15.

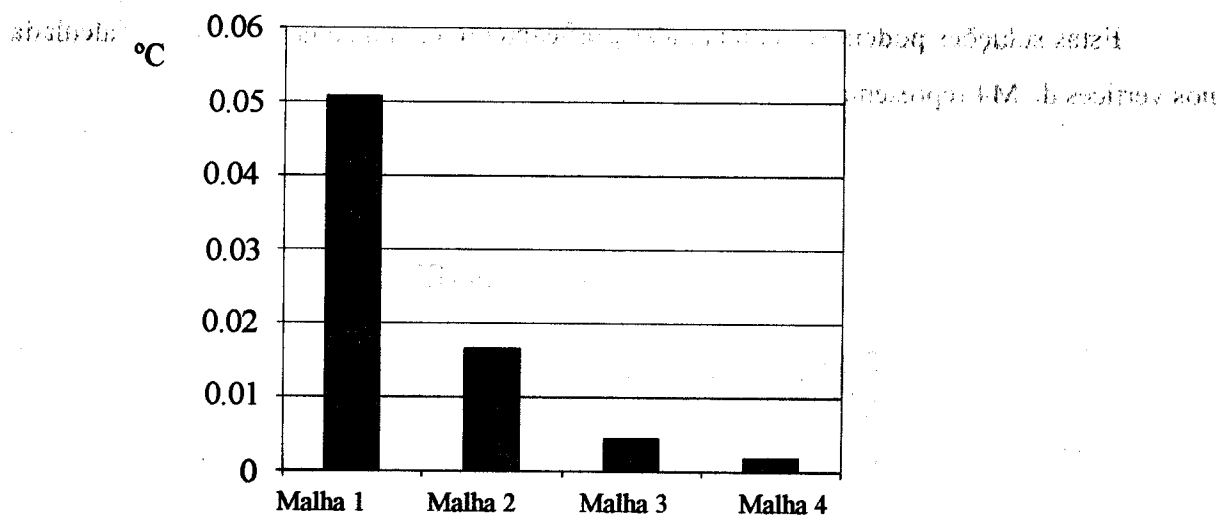


Fig. 4.15 – Gráfico do erro absoluto máximo obtido com cada uma das malhas

Como no caso anterior, à medida que se aumenta o refinamento, a solução prevista melhora.

4.3 – Exemplos 3

4.3.1 - Exemplo 3.1:

Neste caso estuda-se a transferência de calor numa placa quadrada com 100 m de lado, 30 m de espessura e com dois orifícios circulares, com raios de 10 m e 20 m, como indicado na Figura 4.16.

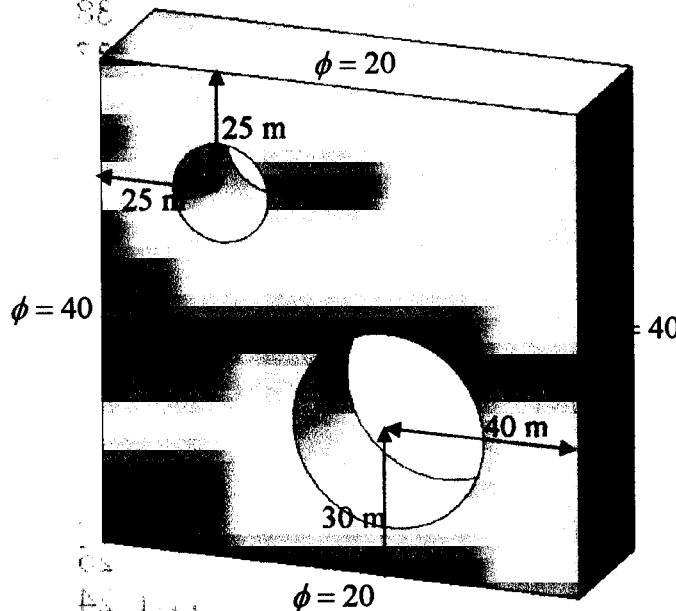
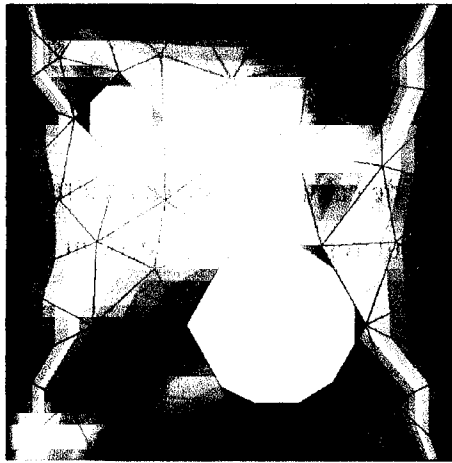


Fig. 4.16 – Placa com dois orifícios com temperatura imposta em quatro faces e fluxo nulo imposto nas outras duas faces

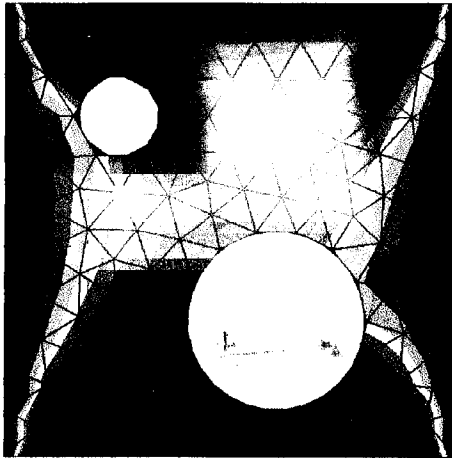
O topo e a base da placa têm temperatura imposta de 20°C , os lados da placa têm temperatura imposta de 40°C e as outras duas faces da placa têm fluxo imposto nulo, as faces que limitam os orifícios têm fluxo imposto nulo. A condutividade térmica $\Gamma = 1000 \text{ W/m/K}$ e não há geração interna de calor.

Para a determinação da distribuição da temperatura na placa foram utilizadas três malhas: uma malha M1 com 134 vértices, uma malha M2 com 620 vértices e uma malha M3 com 3335 vértices. Estas malhas permitiram obter os resultados representados na Figura 4.17.

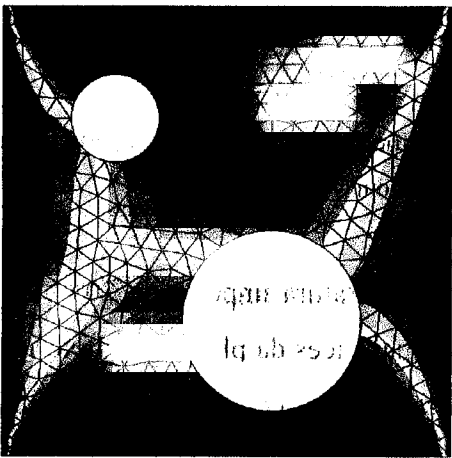
M1



M2



M3



Temperature



39
38
37
36
35
34
33
32
31
30
29
28
27
26
25
24
23
22
21

Fig. 4.17 – Distribuição da temperatura na placa

Estes resultados obtidos com o programa podem ser comparados com a solução obtida pelo programa "Cosmos" [44] numa malha M4 com 36 694 vértices representada na Figura 4.18.

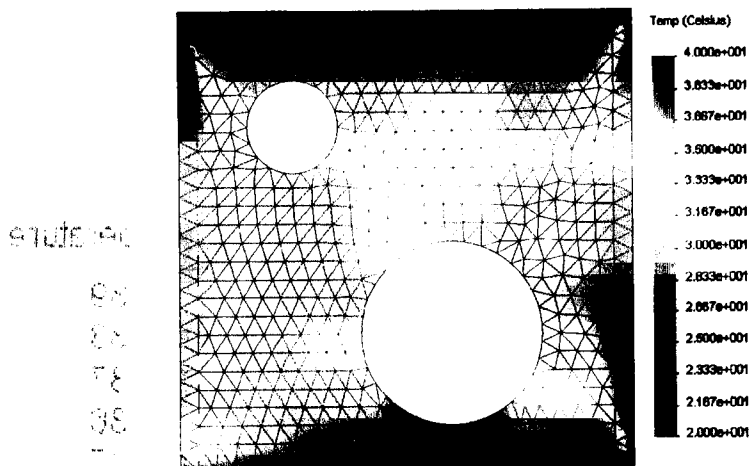


Fig. 4.18 – Distribuição da temperatura na placa obtida pelo programa Cosmos

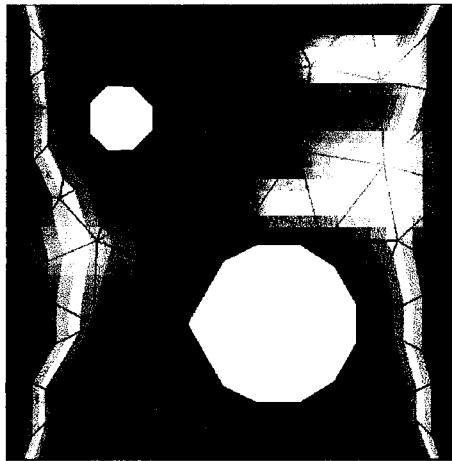
Como se pode confirmar, à medida que aumenta o grau de refinamento da malha, aumenta a precisão da solução.

4.3.2 - Exemplo 3.2:

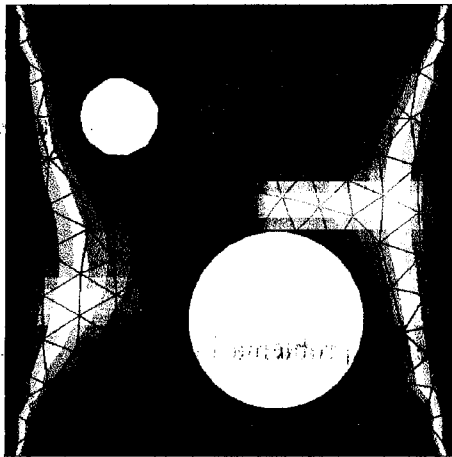
Para este caso considera-se um problema idêntico ao 3.1 excepto nas faces voltadas para os orifícios onde foi imposta temperatura com valor igual a 30°C.

Para a resolução deste problema foram utilizadas as mesmas malhas que no exemplo 3.1 e as soluções obtidas estão representadas na Figuras 4.19 que podem ser comparadas com a solução obtida pelo “Cosmos” representada na Figura 4.20.

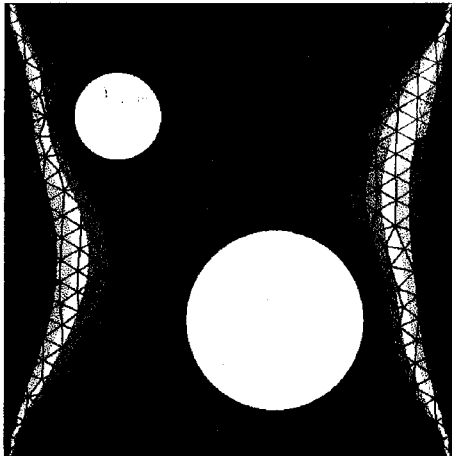
M1



M2



M3



Temperature

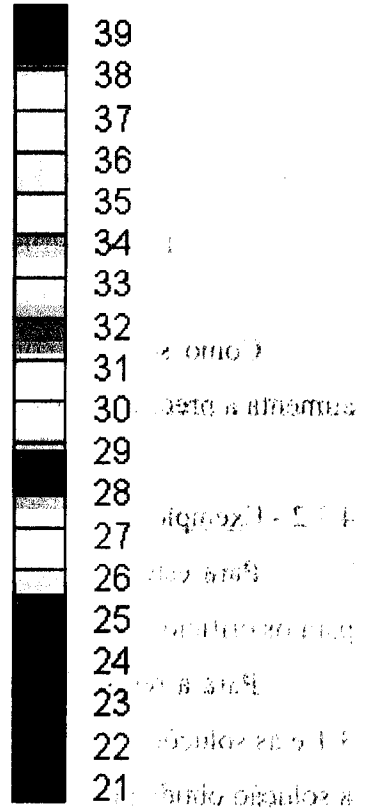


Fig. 4.19 – Distribuição da temperatura na placa

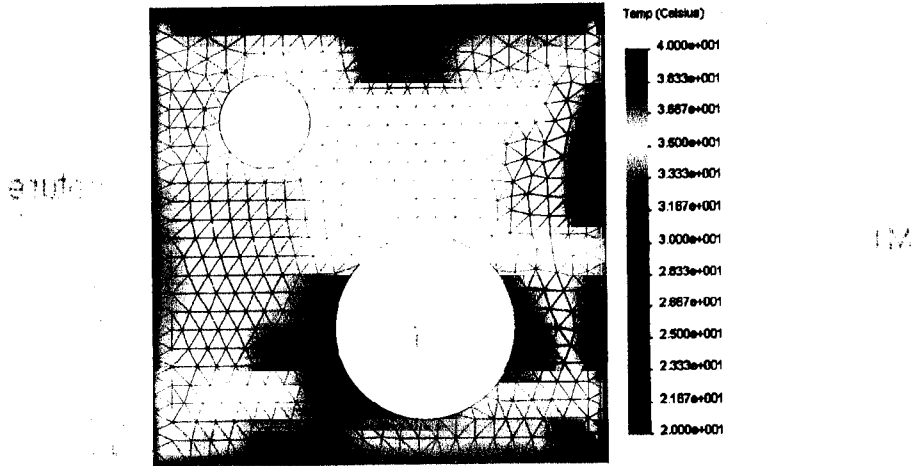


Fig. 4.20 – Distribuição da temperatura na placa obtida com o “Cosmos”

Nos exemplos referidos até a este ponto os problemas foram resolvidos em 3D mas os resultados tiveram formato 2D, o que era de esperar pelas condições de fronteira que foram impostas.

4.3.3 - Exemplo 3.3:

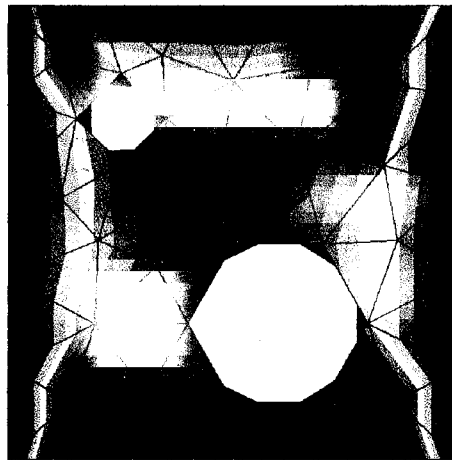
Neste caso considerou-se uma placa com dimensões iguais às da placa do exemplo 3.1 e condições fronteiras também iguais, com exceção da face de trás da placa onde a temperatura passa a ser imposta e com valor igual a 30°C.

Para a resolução deste problema foram usadas as mesmas malhas que no exemplo 3.1 e as soluções obtidas estão representadas na Figura 4.21.

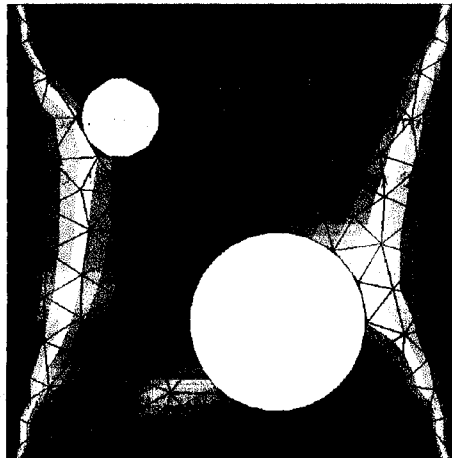
Fig. 4.21 – Distribuição da temperatura na placa obtida com o “Cosmos”

Este exemplo trata-se de uma placa com dimensões iguais às da placa do exemplo 3.1 e condições fronteiras também iguais, com exceção da face de trás da placa onde a temperatura passa a ser imposta e com valor igual a 30°C. Para a resolução deste problema foram usadas as mesmas malhas que no exemplo 3.1 e as soluções obtidas estão representadas na Figura 4.21.

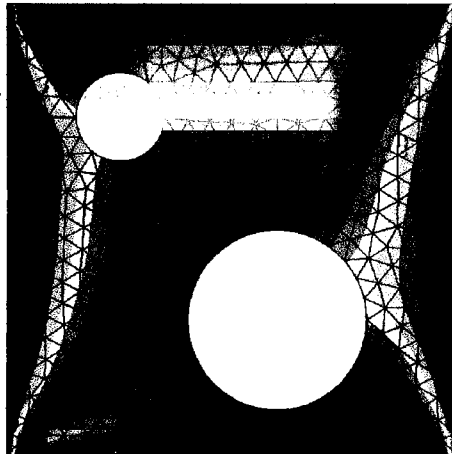
M1



M2



M3



Temperature

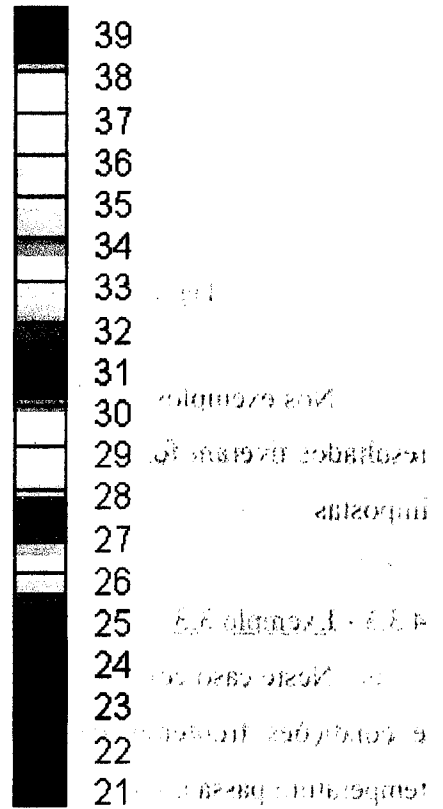


Fig. 4.21 – Distribuição da temperatura na placa

Estes resultados obtidos com o programa podem ser comparados com a solução obtida pelo programa “Cosmos” numa malha M4 com 36 694 vértices representada na Figura 4.22, e pode-se concluir que os resultados previstos pelo código convergem para a solução prevista pelo Cosmos à medida que aumenta o grau de refinamento da malha.

sa moa sobido zoba
 (cosmos)

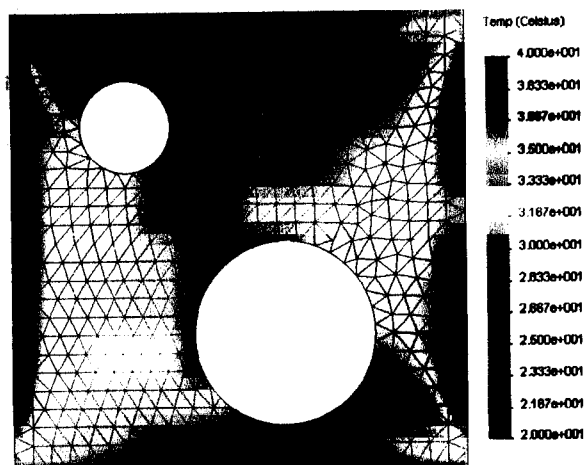


Fig. 4.22 – Distribuição da temperatura na placa obtida pelo programa Cosmos

Como este é um problema tridimensional faz sentido comparar os resultados em mais pontos do que os do plano frontal, e para tal são representados os resultados obtidos em três “fatias” do sólido com três diferentes cotas: $z=30$, isto é, contendo o centro do orifício maior; $z=50$ e $z=75$, isto é, contendo o centro do orifício menor.

Para o plano $z=30$, estão representados na Figura 4.23 os resultados obtidos com as várias malhas e na Figura 4.24 está representado o resultado obtido com o “Cosmos”.

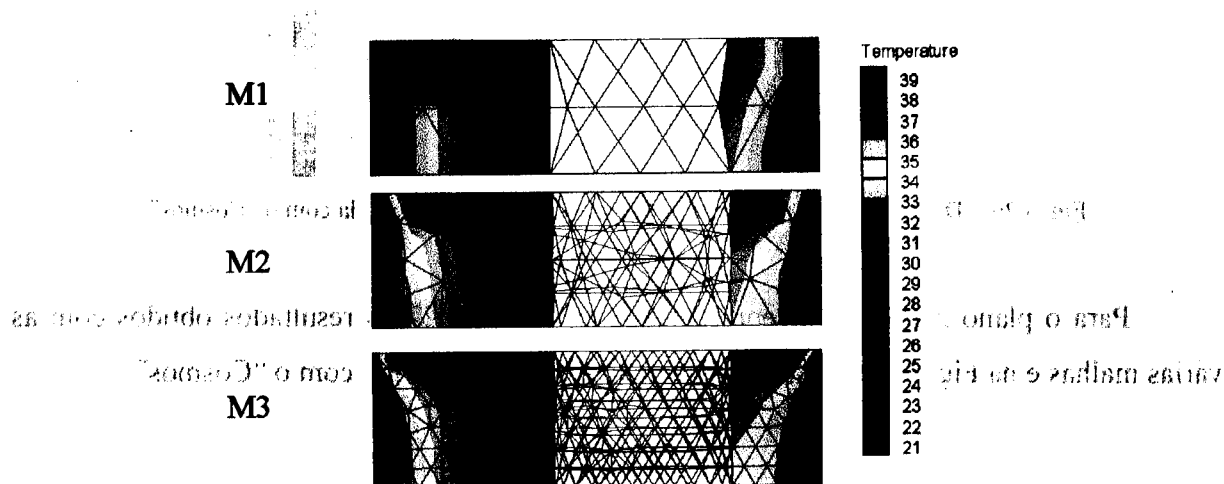


Fig. 4.23 – Distribuição da temperatura no plano $z=30$ da placa

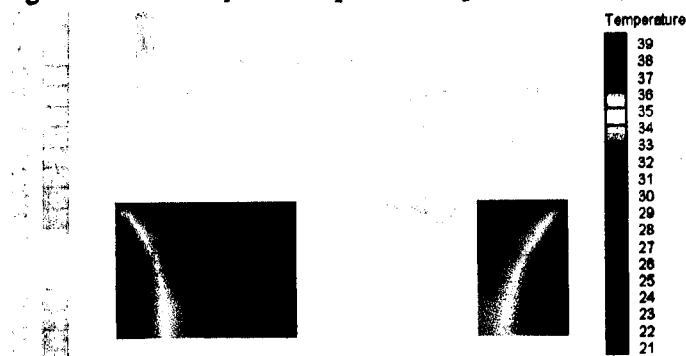


Fig. 4.24 – Distribuição da temperatura no plano $z=30$ da placa obtida com o “Cosmos”

Para o plano $z=50$, estão representados na Figura 4.25 os resultados obtidos com as várias malhas e na Figura 4.26 está representado o resultado obtido com o “Cosmos”.

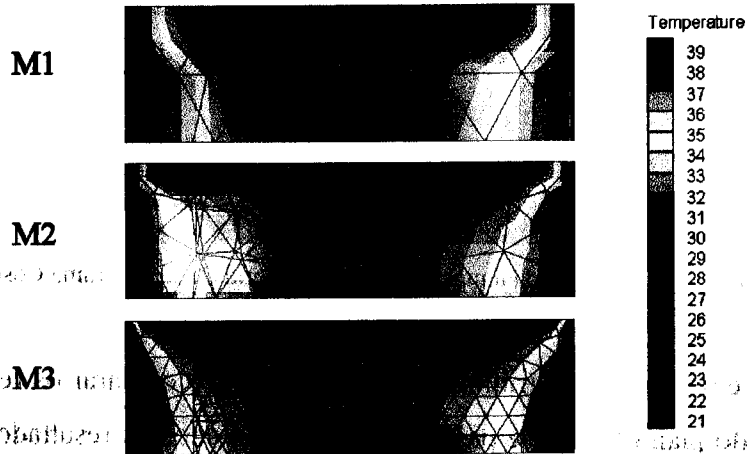


Fig. 4.25 – Distribuição da temperatura no plano $z=50$ da placa

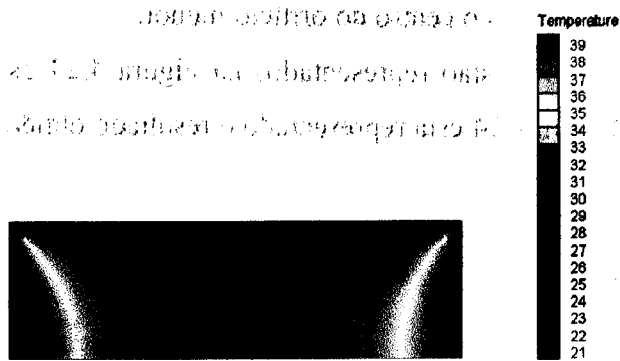


Fig. 4.26 – Distribuição da temperatura no plano $z=50$ da placa obtida com o “Cosmos”

Para o plano $z=75$, estão representados na Figura 4.27 os resultados obtidos com as várias malhas e na Figura 4.28 está representado o resultado obtido com o “Cosmos”.

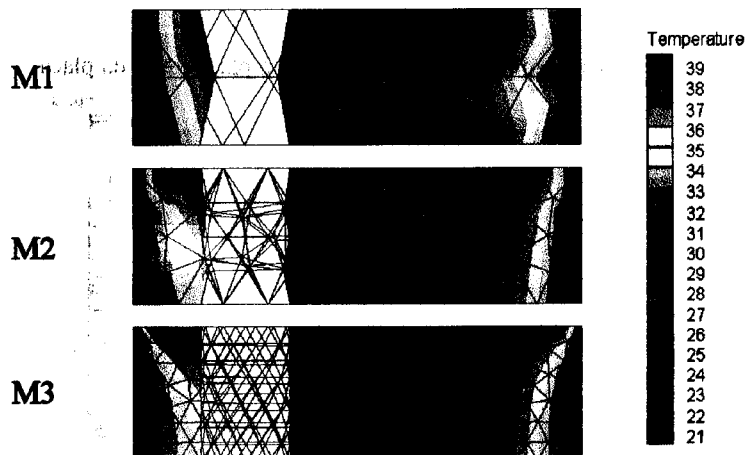


Fig. 4.27 – Distribuição da temperatura no plano $z=75$ da placa

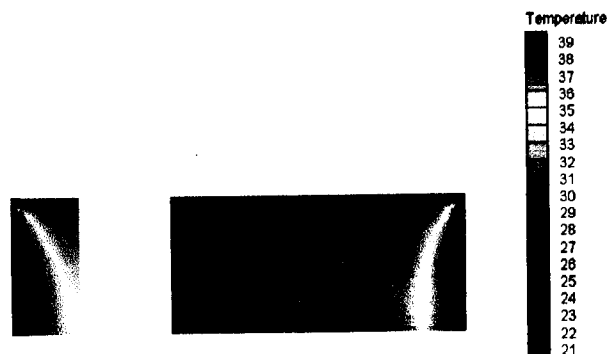


Fig. 4.28 – Distribuição da temperatura no plano $z=75$ da placa obtida com o “Cosmos”

Como nos exemplos anteriores, os resultados obtidos pelo código desenvolvido aproximaram-se da solução dada pelo Cosmos à medida que o grau de refinamento das malhas foi aumentando.

4.4. – Conclusão:

Os exemplos analisados permitem concluir que o código desenvolvido apresenta soluções que se vão aproximando das soluções reais conforme o grau de refinamento das malhas vai aumentando, em 1D, 2D e em 3D, facto que permitiu validar o código desenvolvido.



Fig. 12 - Diagrama de um sistema de controle de temperatura de um forno.

Como nos exemplos anteriores, os resultados obtidos pelo controle automático são muito melhores do que os obtidos pelo controle manual. Isso se deve ao fato de que o sistema automático de controle é capaz de manter a temperatura do forno em um nível desejado com uma precisão muito maior do que um operador humano.

4.4. Conclusões

Os exemplos analisados permitem concluir que o controle automático de temperatura é uma técnica muito eficaz para a manutenção da temperatura de um forno. Isso se deve ao fato de que o sistema automático de controle é capaz de manter a temperatura do forno em um nível desejado com uma precisão muito maior do que um operador humano.

5 – Conclusões

Os objectivos deste trabalho foram alcançados uma vez que foi elaborado um programa que permite resolver uma equação genérica de conservação de quantidade escalar em 3D, em regime estacionário e com termo convectivo nulo, utilizando o Método dos Volumes Finitos, em malhas não estruturadas. O código computacional desenvolvido foi testado, comparando os resultados obtidos por este com resultados conhecidos teoricamente e também por comparação com resultados obtidos com outro software.

O desenvolvimento deste código vai permitir um melhor aproveitamento de meios, uma vez que, para vários problemas com geometrias complexas, as malhas não estruturadas, suportadas por este programa, permitem que com um número de volumes de controle menor, (1) seja feita uma melhor aproximação à geometria em estudo, (2) possa haver refinamento da malha apenas nas áreas de maior interesse, (3) pode ser feito um refinamento posterior em determinadas áreas sem alterar a restante malha e assim obter melhores resultados do que os que se obteriam de outro modo. Este código permite ainda, devido a uma melhor utilização de meios, obter melhores resultados em menos tempo.

Como continuação deste trabalho, seria importante desenvolver o código computacional elaborado de modo a poder trabalhar com termo convectivo e com problemas não estacionários. Atendendo ao facto de que o termo convectivo possui uma nova variável que é a velocidade, a solução desta equação torna-se mais complexa.

The first part of the document discusses the importance of maintaining accurate records of all transactions and activities. It emphasizes that proper record-keeping is essential for transparency and accountability, particularly in the context of public administration. The text outlines various methods for collecting and organizing data, including the use of standardized forms and digital databases. It also highlights the need for regular audits and reviews to ensure the integrity and reliability of the information.

The second part of the document focuses on the implementation of these practices. It provides detailed instructions on how to set up a record-keeping system, including the selection of appropriate software and the training of staff. The text also addresses the challenges of data management, such as ensuring data security and preventing unauthorized access. It offers practical solutions and best practices to overcome these challenges and ensure the successful implementation of the record-keeping system.

The final part of the document discusses the ongoing maintenance and improvement of the record-keeping system. It emphasizes that record-keeping is not a one-time task but a continuous process that requires regular updates and improvements. The text provides guidance on how to monitor the system's performance, identify areas for improvement, and implement changes as needed. It also discusses the importance of staying up-to-date with the latest technologies and standards in the field of record-keeping.

Bibliografia

- [1] Maliska, Clovis R.; *Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional*; Editora Afiliada; 1995.
- [2] Versteeg, H. K.; Malalasekera, W.; *An Introduction to Computational Fluid Dynamics – The Finite Volume Method*; Longman Scientific & Technical; 1995.
- [3] Patankar, Suhas V.; *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*; Hemisphere Publishing Corporation, 1980.
- [4] Ferziger, J. H.; Peric, M.; *Computational Fluid Dynamics*; Springer; 2002
- [5] Muzafherija, Samir; Gosman, David; *Finite-Volume CFD Procedure and Adaptive Error Control Strategy for Grids of Arbitrary Topology*; *Journal of Computational Physics* 138, 766-787; 1997.
- [6] Oliveira, Paulo Jorge dos Santos Pimentel; *Mecânica Computacional*; Departamento de Engenharia Electromecânica – Universidade da Beira Interior; 2001.
- [7] Anderson, John D., Jr.; *Computational Fluid Dynamics*; McGraw-Hill, Inc.; 1995.
- [8] Wesselling, Pieter; *Principles of Computational Fluid Dynamics*; Springer; 2001.
- [9] Bhaskaran, Rajesh; Collins, Lance; *Introduction to CFD Basics*.
- [10] Lomax, Harvard; Pulliam, Thomas H.; Zingg, David W.; *Fundamentals of Computational Fluid Dynamics*; 1999.
- [11] Chung, T. J.; *Computational Fluid Dynamics*; Cambridge University Press; 2002.
- [12] Blasek, J.; *Computational Fluid Dynamics: Principles and Applications*; Elsevier; 2001.
- [13] Batchelor, G.K.; *An Introduction to Fluid Dynamics*; Cambridge University Press; 1967.
- [14] Demirzic; Muzafherija, S.; Peric, M.; *Benchmark Solutions of Some Structural Analysis Problems Using Finite-Volume Method and Multigrid Acceleration*; *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 40, 1893-1908; 1997.
- [15] Gois, João Paulo; Estácio, Kémelli Companharo; Oishi, Cassio Machiavelli; Berttoni, Vanessa; Botta, Vanessa Avansini; Nagamine, Andre; Kurokawa, Fernando Akira; Federson, Fernando; *Aplicação de Volumes Finitos na Simulação Numérica de Contaminação em Lençóis Freáticos*; ICMC/USP – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Departamento de Computação e Estatística, SP, Brasil.

- [16] Jasak, Hrovoje; *Error Analysis and Estimation for the Finite Volume Method with Applications to Fluid Flows*; Department of Mechanical Engineering – Imperial College of Science, Technology and Medicine; 1996.
- [17] Li, Ronghua; Chen, Zhongying; Wu, Wei; *Generalized Difference Methods for Differential Equations – Numerical Analysis of Finite Volume Methods*; Marcel Dekker; 2000.
- [18] Barth, Timothy; Ohlberger; *Finite volume methods: foundation and analysis*; *Encyclopedia of Computational Mechanics*; John Wiley & Sons; 2004.
- [19] Vinokur, Marcel; *Na Analysis of Finite-Difference and Finite-Volume Formulations of Conservation Laws*; *Journal of Computational Physics* 81, 1-52 (1989); 1988.
- [20] Kundu, K. Pijush; Cohen, Ira M.; *Fluid Mechanics*; Academic Press; 2002.
- [21] Thompson, Joe F.; Soni, Bharat K.; Weatherill; *Handbook of Grid Generation*; CRC Press; 1998.
- [22] Miranda, António C. de O.; Martha, Luís F.; *Uma Biblioteca Computacional para Geração de Malhas Bidimensionais e Tridimensionais de Elementos Finitos*; Departamento de Engenharia Civil e Grupo de Tecnologia em Computação Gráfica – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.
- [23] Demirdzic, I.; Muzafarjia, S.; *Numerical method for coupled fluid flow, heat transfer and stress analysis using unstructured moving meshes with cells of arbitrary topology*; *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 125, 235-255; 1995.
- [24] Anderson, W. Kyle; *A Grid Generation and Flow Solution Method for the Euler Equations on Unstructured Grids*; *Journal of Computational Physics* 110, 23-38; 1994.
- [25] Wesseling, P.; *An Introduction to Multigrid Methods*; John Wiley & Sons; 1991.
- [26] Maloo, R. Sumit; *A Rule-Based Approach To Quadrilateral Mesh Generation*; University of Toledo; 2001.
- [27] Shewchuk, Jonathan Richard; *Delaunay Refinement Algorithms for Triangular Mesh Generation*; Department of Electrical Engineering and Computer Science – University of California at Berkeley; 2001.
- [28] George, Paul-Lois; Borouchaki, Houman; *Delaunay Triangulation and Meshing – Application to Finite Elements*; Hermes; 1998.
- [29] Bern, Marchal; Eppstein, David; *Mesh Generation and Optimal Triangulation*; Dept. of Information and Computer Science, University of California.
- [30] Shah, Viral; *Randomized Algorithms in Computational Geometry for Delaunay and Voronoi Diagrams*; 2001.

- [31] Bern, Marshall; Eppstein, David; Mesh Generation and Optimal Triangulation.
- [32] Shewchuk, Jonathan Richard; Delaunay Refinement Algorithms for Triangular Mesh Generations; Department of Electrical Engineering and Computer Science, University of California at Berkeley; 2001.
- [33] Shah, Viral; Randomized Algorithms in Computational Geometry for Delaunay and Voronoi Diagrams; 2001.
- [34] Silva, João M.S.; Sousa, Leonel Augusto; Implementação Paralela de um Algoritmo de Triangulação de Delaunay; 2001.
- [35] Stoer, J.; Bulirsch; Introduction to Numerical Analyses, second edition; Springer-Verlag; 1993.
- [36] Kelley, C. T.; Iterative Methods for Linear and Nonlinear Equations; North Carolina State University; Society for Industrial and Applied Mathematics; 1995.
- [37] Barrett, Richard; Berry, Michael; Chan, Tony F.; Demmel, James; Donato, June M.; Dongarra, Jack; Eijkhout, Victor; Pozo, Roldan; Romine, Charles; Vorst, Henk Van der; Templates for the Solution of Linear Systems: Building Blocks for Iterative Methods; SIAM; 1994.
- [38] Conte, S. D.; Boor, Carl de; Elementary Numerical Analysis – Na Algorithmic Approach; McGraw-Hill Book Company; 1980.
- [39] Aparecido, João Batista; Solução de Grandes Sistemas Lineares Esparsos; 2004.
- [40] “Tecplot 360” - <http://www.tecplot.com>
- [41] Oliveira, P. J.; Problema de Convecção/Difusão Unidimensional; Departamento de Engenharia Electromecânica, Universidade da Beira Interior; 2002.
- [42] Oliveira, Paulo Jorge Pimentel; Notas Sobre Fenómenos de Transferência; Departamento de Engenharia Electromecânica, Universidade da Beira Interior; 1998.
- [43] Oliveira, P. J.; Programa de Computador para Resolver a Equação do Calor Unidimensional; Departamento de Engenharia Electromecânica, Universidade da Beira Interior; 2002.
- [44] “Cosmos” - <http://www.solidworks.com>