

Mayra Alejandra Nogueira Ribeiro

**Programas de vacinação com
diferentes tipos de imunidade no
modelo SIS**



Departamento de Matemática Pura
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
Junho de 2007

Aprovada.
Maria Carvalho

Reg. 50 9300
Cota Tezo N° 226

Mayra Alejandra Nogueira Ribeiro

Programas de vacinação com diferentes tipos de imunidade no modelo SIS



Departamento de Matemática Pura
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
Junho de 2007

Mayra Alejandra Nogueira Ribeiro

Programas de vacinação com diferentes tipos de imunidade no modelo SIS



Faculdade de Ciências do Porto
MATEMÁTICA

*Tese submetida à Faculdade de Ciências da Universidade do
Porto para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Matemática
orientada pela Doutora Ana Rita Gaio*

Departamento de Matemática Pura
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
Junho de 2007

Aos meus pais e irmão...

Agradecimentos

O meu mais profundo agradecimento é dirigido à **Doutora Ana Rita Gaio**, não só pela orientação deste trabalho, como pela confiança em mim depositada para a sua concretização e pelo entusiasmo, disponibilidade e amizade que sempre me dispensou.

De maneira especial, quero também agradecer aos **meus Professores da Licenciatura e do Mestrado** por me terem ajudado a crescer academicamente e de quem sempre recebi simpatia.

Agradeço a todos os **meus Colegas da Licenciatura e do Mestrado** pela troca de conhecimentos, pelo encorajamento e parceria recebidos durante a minha vida académica.

Aos **meus Amigos e Familiares** agradeço todo o apoio e incentivo que me permitiu abraçar uma carreira que, sendo exigente, os torna ainda mais queridos.

Resumo

O objectivo desta dissertação consiste em estudar a dinâmica de transmissão de uma doença infecciosa do tipo SIS e o impacto de diferentes planos de vacinação conferindo diferentes tipos de imunidade na evolução da doença. São considerados programas de vacinação proporcional e de recém-nascidos conferindo imunidade total, temporária, e parcial e temporária, em 3 modelos distintos frequentemente encontrados na literatura: população de tamanho constante, população de tamanho variável e taxa de contactos adequados independente do tamanho da população, e população de tamanho variável e taxa de contactos adequados dependente do tamanho da população. Nas situações de tamanho variável, estudamos ainda de que forma é que a doença afecta a evolução do tamanho da população.

Os modelos em que a vacinação confere imunidade total ou temporária seguem a dinâmica tradicional dos modelos epidemiológicos simples: sempre que o número de reprodução básico é inferior a 1, qualquer condição inicial conduz ao desaparecimento da doença; sempre que esse número é maior do que 1, qualquer estado da população evolui para uma situação de endemia. O modelo que considera a imunidade parcial e temporária apresenta uma dinâmica mais complexa, de acordo com os valores do número de reprodução básico e do parâmetro associado ao grau da imunidade parcial. Em particular, na situação em que o número de reprodução básico é menor do que 1, podem-se obter até dois pontos de equilíbrio endémicos.

Esta dissertação apresenta um estudo sistemático do modelo SIS sujeito a diferentes processos de vacinação. Para cada modelo calcula-se o número de reprodução básico, estuda-se a estabilidade global dos pontos de equilíbrio e determina-se o número (ou proporção) de indivíduos infectados no(s) ponto(s) de equilíbrio endémico(s). Com estas informações estabelecem-se comparações entre os vários modelos e obtemos expressões para a proporção de indivíduos a vacinar de forma a controlar a doença.

Conteúdo

1	Introdução	9
2	Fundamentos Teóricos	14
3	O número de reprodução básico	39
3.1	Pressupostos e Notação	39
3.2	O número de reprodução básico	43
4	Modelo SIS sem vacinação	52
4.1	População de tamanho constante [7]	52
4.2	População de tamanho variável	57
4.2.1	Com termo de contágio βSI [12]	57
4.2.2	Com termo de contágio $\beta \frac{S}{N} I$	65
4.2.2.1	Dinâmica do tamanho da população	69
4.3	Discussão dos resultados	72
5	Modelo SIS com vacinação proporcional e de recém-nascidos conferindo imunidade total	74
5.1	População de tamanho constante	75
5.2	População de tamanho variável	80

5.2.1	Com termo de contágio βSI	80
5.2.2	Com termo de contágio $\beta \frac{S}{N} I$	92
5.3	Modelo SIS com vacinação proporcional conferindo imunidade total . .	106
5.3.1	População de tamanho constante [15]	106
5.3.2	População de tamanho variável	108
5.3.2.1	Com termo de contágio βSI	108
5.3.2.2	Com termo de contágio $\beta \frac{S}{N} I$	109
5.4	Modelo SIS com vacinação de recém-nascidos conferindo imunidade total	111
5.4.1	População de tamanho constante	111
5.4.2	População de tamanho variável	113
5.4.2.1	Com termo de contágio βSI	113
5.4.2.2	Com termo de contágio $\beta \frac{S}{N} I$	114
5.5	Discussão dos resultados	117
6	Modelo SIS com vacinação proporcional e de recém-nascidos conferindo imunidade temporária	123
6.1	População de tamanho constante	124
6.2	População de tamanho variável	128
6.2.1	Com termo de contágio βSI [12]	128
6.2.2	Com termo de contágio $\beta \frac{S}{N} I$ [11]	138
6.3	Modelo SIS com vacinação proporcional conferindo imunidade temporária	148
6.3.1	População de tamanho constante	149
6.3.2	População de tamanho variável	150
6.3.2.1	Com termo de contágio βSI	150
6.3.2.2	Com termo de contágio $\beta \frac{S}{N} I$	152

6.4	Modelo SIS com vacinação de recém-nascidos conferindo imunidade temporária	153
6.4.1	População de tamanho constante	153
6.4.2	População de tamanho variável	155
6.4.2.1	Com termo de contágio βSI	155
6.4.2.2	Com termo de contágio $\beta \frac{S}{N} I$	156
6.5	Discussão dos resultados	159
7	Modelo SIS com vacinação proporcional e de recém-nascidos conferindo imunidade parcial e temporária	163
7.1	População de tamanho variável e com termo de contágio $\beta \frac{S}{N} I$ [10]	164
7.2	Discussão dos resultados	199
	Referências Bibliográficas	201

Capítulo 1

Introdução

Os modelos matemáticos têm-se tornado ferramentas importantes na análise da dinâmica de transmissão e no controlo de doenças infecciosas. O modelo serve para clarificar hipóteses, variáveis e parâmetros associados à infecção, bem como para dar resposta a perguntas específicas sobre a evolução da situação epidemiológica, planos de detecção, prevenção e/ou controlo da doença.

Nesta dissertação vamos estudar modelos matemáticos aplicados unicamente a doenças infecciosas que não conferem qualquer tipo de imunidade isto é, depois de um indivíduo susceptível à doença ter ficado infectado e ter recuperado, torna-se novamente susceptível a novas infecções. Sempre que o período de latência é desprezável (e esta será sempre a nossa situação), o modelo anterior segue o trajecto

$$\text{Susceptível} \longrightarrow \text{Infectado} \longrightarrow \text{Susceptível}$$

e é usualmente designado por **modelo SIS**. Exemplos destas doenças são a *meningite*, a *cólera* e a *gonorreia*.

Matematicamente, os modelos consistem de sistemas de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem não lineares (a não linearidade aparece unicamente associada ao termo relacionado com a transmissão da doença).

Os resultados teóricos de sistemas dinâmicos necessários à análise matemática dos modelos epidemiológicos são apresentados no Capítulo 2. Nem todos os teoremas enunciados são demonstrados, alguns por serem resultados básicos conhecidos, outros porque a sua demonstração não foi considerada essencial para a análise dos modelos

estudados nos capítulos seguintes. Contudo existe um resultado (teorema 2.0.34) cuja demonstração foi estudada detalhadamente. Este teorema classifica a estabilidade do ponto de equilíbrio de um sistema linear que tem um valor próprio zero quando são adicionados termos não lineares.

Nos modelos matemáticos epidemiológicos existe uma quantidade - o **número de reprodução básico**, $\mathcal{R}_0$ - que traduz a "velocidade inicial" de expansão da doença na população, funcionando como um valor de transição para a dinâmica do modelo. Na maior parte dos casos, $\mathcal{R}_0$ menor do que um corresponde à extinção da doença e $\mathcal{R}_0$ superior a um corresponde ao desenvolvimento da infecção na população. Este número representa o número médio de novas infecções produzidas por um indivíduo infectado numa população que se encontra no ponto de equilíbrio de não doença, assumindo que o indivíduo infectado permanece nessa população durante a totalidade do seu período de infecção.

Para a determinação do número de reprodução básico seguimos o método desenvolvido por Diekmann, na versão mais simples apresentada por Van den Driessche e Watmough, resumida no Capítulo 3.

No Capítulo 4 estudamos pormenorizadamente o modelo SIS em vários contextos: quando a taxa de mortalidade induzida pela doença (μ_D) é muito baixa (≈ 0) e o tamanho da população (N) é constante, e quando o valor μ_D é significativo e o tamanho da população é variável. Nesta última situação consideramos ainda dois casos de acordo com a taxa de contactos adequados (dependente ou não de N). Para simplificação da escrita, adoptamos a seguinte notação:

- **modelo do tipo I:** população de tamanho constante (e taxa de contactos adequados independente de N);
- **modelo do tipo IIA:** população de tamanho variável e taxa de contactos adequados dependente de N ;
- **modelo do tipo IIB:** população de tamanho variável e taxa de contactos adequados independente de N .

Sempre que a taxa de contactos adequados é independente do tamanho da população, consideramos que a taxa de mortalidade é uma função de N , positiva, derivável,

monótona crescente e satisfazendo a condição

$$f(0) < \text{taxa de natalidade} < f(\infty).$$

O estudo efectuado mostra-nos que esta função não interfere na dinâmica de transmissão da infecção mas apenas na dinâmica do tamanho da população.

Observamos que: se $\mu_D = 0$ no modelo do tipo IIB, as expressões obtidas para o número de reprodução básico e para o número de infectados no ponto de equilíbrio endémico (i^*) são iguais às obtidas no modelo do tipo I; se $\mu_D > 0$, o número de reprodução básico (resp. número de infectados no ponto de equilíbrio endémico) do modelo do tipo IIB é inferior (resp. superior) ao do modelo do tipo I.

Em qualquer um dos modelos abordados obtemos uma dinâmica simples condicionada pelo valor do número de reprodução básico correspondente (comumente designada por *bifurcação degenerada*: se $\mathcal{R}_0 < 1$ então o sistema admite apenas um ponto de equilíbrio (o de não doença) que é globalmente assintoticamente estável; se $\mathcal{R}_0 > 1$ então esse ponto de equilíbrio torna-se instável e surge um ponto de equilíbrio endémico que é globalmente assintoticamente estável. Nesta última situação, para controlar a infecção e evitar uma epidemia, pode-se recorrer a um plano de vacinação. A escolha do plano a implementar depende das características imunológicas das vacinas existentes no mercado, das características epidemiológicas da infecção, e da população em causa.

O objectivo fulcral deste trabalho é estudar, matematicamente, a eficácia de diferentes planos de vacinação aplicados a um modelo de doença do tipo SIS. Para abranger uma situação mais geral consideramos a vacinação simultânea de uma proporção p de indivíduos susceptíveis (**vacinação proporcional** - VP) e uma proporção ν de indivíduos recém-nascidos (**vacinação de recém-nascidos** - VRN) - o efeito isolado de cada um destes programas obtém-se igualando a zero o parâmetro em que não estamos interessados. Dependendo do grau de imunidade conferido pela vacina (imunidade total, temporária ou parcial e temporária) estudamos detalhadamente três subtipos do processo VP+VRN. Em cada um deles (à excepção da imunidade parcial e temporária - Capítulo 7) continuamos a fazer um estudo separado de acordo com o tamanho da população e o termo de contágio. Tal como previsível, sempre que a vacinação está presente (independentemente do programa implementado), o número de reprodução básico do modelo e o número de infectados no ponto de equilíbrio endémico são inferiores aos do modelo SIS sem vacinação correspondentes. O nosso

estudo precisa exactamente essas relações de ordem. Em particular, permite estimar as proporções p e ν de indivíduos a vacinar, bem como o número/proporção de indivíduos infectados no ponto de equilíbrio endémico.

No Capítulo 5 analisamos modelos SIS sujeitos a um plano de vacinação VP+VRN conferindo imunidade total. Relativamente à dinâmica de transmissão da doença obtemos o seguinte: se $\mathcal{R}_0 > 1$ então qualquer estado da população evolui para uma situação de endemia; se $\mathcal{R}_0 < 1$ então qualquer condição inicial conduz ao desaparecimento da doença. Neste último caso o comportamento inicial da função que representa o número/proporção de indivíduos infectados depende da relação de ordem entre o número de reprodução básico do modelo correspondente sem vacinação e 1.

No Capítulo 6 estudamos modelos SIS com vacinação proporcional e de recém-nascidos conferindo imunidade temporária, isto é, um tipo de imunidade que se vai desvanecendo ao longo do tempo. Apesar do tipo de imunidade em causa ser diferente, os resultados sobre a estabilidade global dos pontos de equilíbrio são análogos aos obtidos no Capítulo 5 (embora os números de reprodução básicos calculados no Capítulo 6 tomem valores superiores).

Nos Capítulos 5 e 6 continuamos a observar o resultado do Capítulo 4 que afirma que o número de reprodução básico do modelo do tipo I é maior do que o do modelo do tipo IIB (porque neste último modelo a duração média do período de infecciosidade é menor).

No Capítulo 7 estudamos o modelo SIS com um programa de vacinação VP+VRN que confere imunidade parcial e temporária, **apenas** para o modelo IIB. A imunidade parcial é um tipo de imunidade que confere um grau de imunidade que se mantém constante ao longo do tempo mas que é inferior ao da imunidade total. A dinâmica deste modelo é diferente da dos anteriores e isso deve-se ao parâmetro $0 < \sigma_V < 1$ associado à imunidade parcial. Os resultados afirmam que:

- Quando $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} > 1$ então a doença invade a população de uma forma endémica;
- Quando $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} < 1$ há a referir várias situações. Introduzindo um valor $\mathcal{R}_C$ e as constantes σ_{V_C} e σ_{V_I} temos:

- Quando $0 < \sigma_{V_C} < \sigma_V < \sigma_{V_1} < 1$ (ou equivalentemente $\mathcal{R}_C < \mathcal{R}_0^{VP+VRN} < 1$) então existem dois pontos de equilíbrio endêmicos (U_2^* e U_3^*) e a dinâmica do modelo depende das condições iniciais. Se as condições iniciais pertencerem a uma dada região (D_1) então a doença tende a desaparecer, se pertencerem a outra região (D_2) então a doença invade a população;
- Quando $0 < \sigma_{V_C} = \sigma_V < \sigma_{V_1} < 1$ (ou equivalentemente $\mathcal{R}_C = \mathcal{R}_0^{VP+VRN} < 1$) então existe um ponto de equilíbrio endêmico (U_4^*) e as condições iniciais influenciam a dinâmica do modelo. A extinção da doença só acontece se as condições iniciais pertencerem a uma dada região (D'_1);
- Quando $0 < \sigma_{V_C} < \sigma_V = \sigma_{V_1} < 1$ (ou equivalentemente $\mathcal{R}_C < \mathcal{R}_0^{VP+VRN} = 1$) então a infecção invade a população, resultando numa endemia;
- Quando $\sigma_V < \sigma_{V_C} < \sigma_{V_1} < 1$ (isto é, $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} < \mathcal{R}_C$ e $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} < 1$) então não existem pontos de equilíbrio endêmicos e a doença progride para a sua eliminação.

Se $\sigma_V = 0$ estes resultados coincidem com os obtidos no Capítulo 6 para o modelo IIB, apesar de estes terem sido abordados de forma diferente.

De entre todos os modelos analisados nesta dissertação, alguns foram estudados com base em artigos científicos e outros foram estudados de forma independente. A indicação da abordagem seguida é apresentada à frente de cada modelo presente na lista de conteúdos.

Capítulo 2

Fundamentos Teóricos

Neste capítulo apresentamos resultados standard da Teoria de Sistemas Dinâmicos que são necessários à continuação do trabalho. Muitas demonstrações, por serem de resultados conhecidos da teoria, serão omitidas. Contudo, tais demonstrações, bem como exemplos elucidativos, podem ser encontradas em [9], [14], [16], [3] e [6].

Sejam $\mathcal{U}$ um aberto de $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{J}$ um intervalo aberto de $\mathbb{R}$.

Teorema 2.0.1 (Existência e Unicidade) *Seja $\mathbf{A} \in \mathcal{C}^{0,r}(\mathcal{J} \times \mathcal{U}, \mathbb{R}^n)$ para algum $r \geq 1$. Então, para qualquer $(t_0, \mathbf{x}_0) \in \mathcal{J} \times \mathcal{U}$, existe uma única solução maximal*

$$\mathbf{x}(\cdot; (t_0, \mathbf{x}_0)) : \mathcal{J}(t_0, \mathbf{x}_0) \rightarrow \mathcal{U}$$

do problema de valor inicial descrito por

$$\begin{aligned}\mathbf{x}'(t) &= \mathbf{A}(t, \mathbf{x}(t)) \\ \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0.\end{aligned}$$

O intervalo $\mathcal{J}(t_0, \mathbf{x}_0)$ diz-se o intervalo maximal de existência.

Definição 2.0.2 *Dado $\mathbf{A} \in \mathcal{C}^{0,r}(\mathcal{J} \times \mathcal{U}, \mathbb{R}^n)$ para algum $r \geq 1$, um sistema de equações diferenciais $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}(t, \mathbf{x}(t))$ e $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^n$:*

- (1) *a órbita de $\mathbf{P}$ é o conjunto $\mathcal{O}_{\mathbf{P}} = \{\mathbf{x}(t; (0, \mathbf{P})) : t \in \mathcal{J}(0, \mathbf{P})\}$;*

- (2) a **semi-órbita positiva de $\mathbf{P}$** é o conjunto $\mathcal{O}_P^+ = \{\mathbf{x}(t; (0, \mathbf{P})) : t \in \mathcal{J}(0, \mathbf{P}), t \geq 0\}$;
- (3) a **semi-órbita negativa de $\mathbf{P}$** é o conjunto $\mathcal{O}_P^- = \{\mathbf{x}(t; (0, \mathbf{P})) : t \in \mathcal{J}(0, \mathbf{P}), t \leq 0\}$;
- (4) uma **órbita periódica** é uma solução do sistema que é uma curva fechada e não é um ponto de equilíbrio.

Os resultados que se seguem dizem respeito apenas a **campos de vectores autónomos**, isto é, que não dependem explicitamente do tempo.

Definição 2.0.3 Seja $\mathbf{A} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo de vectores de classe C^1 . Um **ponto de equilíbrio** de $\mathbf{A}$ é um ponto $\mathbf{x}_* \in \mathcal{U}$ tal que $\mathbf{A}(\mathbf{x}_*) = 0$.

Definição 2.0.4 Seja $\mathbf{A} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo de vectores e

$$\mathbf{x}(\cdot; (0, \mathbf{x}_0)) : \mathcal{J}(0, \mathbf{x}_0) \rightarrow \mathcal{U}$$

a solução do problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \mathbf{A}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0. \end{aligned}$$

Um ponto de equilíbrio $\mathbf{x}_*$ de $\mathbf{A}$ diz-se

- (a) **estável** se para qualquer vizinhança $\mathcal{V}$ de $\mathbf{x}_*$ contida em $\mathcal{U}$, existe uma vizinhança $\mathcal{W}$ de $\mathbf{x}_*$ contida em $\mathcal{V}$ tal que, para qualquer $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{W}$

- (1) $\mathcal{J}(0, \mathbf{x}_0) \cap \mathbb{R}_+ = \mathbb{R}_+$;
- (2) $\mathbf{x}(t; (0, \mathbf{x}_0)) \in \mathcal{V}$, para todo $t \geq 0$.

- (b) **instável** se não for estável;

- (c) **assimptoticamente estável** se $\mathbf{x}_*$ é estável e $\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{x}(t; (0, \mathbf{x}_0)) = \mathbf{x}_*$ para qualquer $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{W}$.

Definição 2.0.5 Seja $\mathbf{A} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo de vectores e $\mathbf{x}_*$ um ponto de equilíbrio de $\mathbf{A}$.

(1) O sistema linear associado a

$$\begin{aligned}\mathbf{x}' &= \mathbf{A}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_*\end{aligned}$$

é

$$\begin{aligned}\mathbf{y}' &= d\mathbf{A}(\mathbf{x}_*) \mathbf{y} \\ \mathbf{y}(0) &= 0\end{aligned}$$

onde $d\mathbf{A}(\mathbf{x}_*) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é a função (linear) derivada de $\mathbf{A}$ em $\mathbf{x}_*$.

(2) O ponto de equilíbrio $\mathbf{x}_*$ é **hiperbólico** se todos os valores próprios de $d\mathbf{A}(\mathbf{x}_*)$ têm parte real não nula.

(3) Se $\mathbf{x}_*$ é um ponto de equilíbrio hiperbólico diz-se que

- (a) $\mathbf{x}_*$ é **atractor** se todos os valores próprios de $d\mathbf{A}(\mathbf{x}_*)$ têm parte real negativa;
- (b) $\mathbf{x}_*$ é **repulsor** se todos os valores próprios de $d\mathbf{A}(\mathbf{x}_*)$ têm parte real positiva;
- (c) $\mathbf{x}_*$ é **ponto sela** se existem valores próprios de $d\mathbf{A}(\mathbf{x}_*)$ com partes reais de sinais opostos;
- (d) $\mathbf{x}_*$ é um **nó** se $\mathbf{x}_*$ é atractor ou repulsor.

Hartman e Grobman formularam um teorema que permite estudar a estabilidade local dos pontos de equilíbrio de um sistema não linear através do seu sistema linear associado.

Teorema 2.0.6 (Hartman-Grobman) *Seja $\mathbf{A} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo de vectores de classe $\mathcal{C}^1$ e $\mathbf{x}_* \in \mathcal{U}$ um ponto de equilíbrio hiperbólico. Então existe uma vizinhança $\mathcal{W}$ de $\mathbf{x}_*$ com aderência compacta em $\mathcal{U}$, uma vizinhança $\mathcal{V}$ de 0 em $\mathbb{R}^n$, um intervalo aberto I centrado em 0 e um homeomorfismo $h : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{V}$ com $h(\mathbf{x}_*) = 0$, tal que o campo de vectores $\mathbf{A}$ é, numa vizinhança de $\mathbf{x}_*$, topologicamente conjugado à sua parte linear, isto é,*

$$\varphi(t, \mathbf{x}) = h^{-1} \left(e^{t d\mathbf{A}(\mathbf{x}_*)} h(\mathbf{x}) \right), \text{ para todo } \mathbf{x} \in \mathcal{W}, t \in I.$$

Corolário 2.0.7 *Seja $\mathbf{x}_*$ um ponto de equilíbrio de um campo de vectores.*

(a) *Se $\mathbf{x}_*$ é repulsor então $\mathbf{x}_*$ é instável.*

(b) *Se $\mathbf{x}_*$ é atractor então $\mathbf{x}_*$ é localmente assintoticamente estável.*

Os resultados anteriores mostram que a parte imaginária e o sinal da parte real dos valores próprios de $d\mathbf{A}(\mathbf{x}_*)$ desempenham um papel fundamental na determinação da estabilidade local de um ponto de equilíbrio $\mathbf{x}_*$. O critério que apresentamos em seguida fornece condições necessárias e suficientes para que os valores próprios obtidos através de uma equação cúbica tenham parte real negativa.

Teorema 2.0.8 (Critério de Routh-Hurwitz) *Consideremos a equação cúbica dada por*

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0$$

onde a_1, a_2 e a_3 são parâmetros reais. As condições necessárias e suficientes para que as soluções da equação tenham parte real negativa são

$$a_1 > 0, \quad a_3 > 0 \quad \text{e} \quad a_1a_2 - a_3 > 0.$$

A estabilidade global dos pontos de equilíbrio de um sistema não linear é na maior parte dos casos difícil de determinar. O critério de Liapunov seguinte vai ser aplicado em alguns dos modelos apresentados nesta dissertação para garantir ($\mathcal{U} = \mathbb{R}^n$) esse tipo de estabilidade.

Definição 2.0.9 *Sejam $\mathbf{A} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo de vectores, $\mathbf{x}_*$ um ponto de equilíbrio de $\mathbf{A}$ e $L : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 definida num conjunto aberto $U \subset \mathcal{U}$ que contém $\mathbf{x}_*$.*

Diz-se que L é uma função de Liapunov para $\mathbf{x}_*$ se

(a) *$L(\mathbf{x}_*) = 0$ e $L(\mathbf{x}) > 0$ para $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_*$;*

(b) *$L' := \frac{d}{dt}[L(\mathbf{x}(t))] \leq 0$ em $U - \mathbf{x}_*$.*

Se, além disso, L satisfaz a condição

(c) $L' < 0$ em $U - \mathbf{x}_*$

a função L diz-se uma **função de Liapunov estrita** para $\mathbf{x}_*$.

Teorema 2.0.10 (Estabilidade de Liapunov) *Sejam $\mathbf{A} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo de vectores e $\mathbf{x}_*$ um ponto de equilíbrio de $\mathbf{A}$, e considere-se o sistema $\mathbf{x}' = \mathbf{A}(\mathbf{x})$.*

(a) *Se $L : U \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de Liapunov para $\mathbf{x}_*$ então $\mathbf{x}_*$ é estável.*

(b) *Se L é uma função de Liapunov estrita para $\mathbf{x}_*$ então $\mathbf{x}_*$ é assintoticamente estável.*

Ainda dentro do problema da determinação da estabilidade global, um teorema fundamental para a explicação do comportamento assintótico das órbitas de um sistema de equações diferenciais autónomo e não linear de dimensão 2 é o teorema de Poincaré-Bendixson, que descreve os conjuntos limite do sistema.

Definição 2.0.11 *Seja $\mathcal{O} = \{\mathbf{x}(t; (t_0, \mathbf{x}_0)) : t \in \mathcal{J}(t_0, \mathbf{x}_0), t \geq t_0\}$ uma semi-órbita positiva de um sistema de equações diferenciais. O conjunto ω - limite de $\mathcal{O}$, representado por $\omega(\mathcal{O})$, é o conjunto dos pontos $\mathbf{y} \in \mathcal{U}$ para os quais existe uma sucessão $(t_n)_n$ tal que*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = +\infty \quad e \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{x}(t_n; (t_0, \mathbf{x}_0)) = \mathbf{y}.$$

Teorema 2.0.12 (Poincaré-Bendixson) *Sejam $\mathcal{U}$ um aberto de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbf{A} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo de vectores de classe $\mathcal{C}^1$. Suponhamos que $\mathbf{x}' = \mathbf{A}(\mathbf{x})$ possui uma semi-órbita positiva $\mathcal{O}^+$ limitada. Se $\omega(\mathcal{O}^+)$ não contém pontos de equilíbrio então uma das seguintes situações acontece*

- $\mathcal{O}^+$ é uma órbita periódica e $\omega(\mathcal{O}^+) = \mathcal{O}^+$, ou
- $\omega(\mathcal{O}^+)$ é uma órbita periódica (designada por ciclo limite) que $\mathcal{O}^+$ aproxima espiralmente.

Para a eliminação da possibilidade de existência de órbitas periódicas em sistemas planares, faremos uso do teorema de Dulac.

Teorema 2.0.13 (Dulac) *Sejam γ uma função derivável num aberto $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbf{A}$ um campo de vectores em $\mathcal{U}$, digamos*

$$\mathbf{A}(x, y) = (F(x, y), G(x, y)). \quad (2.1)$$

Se

$$\frac{\partial}{\partial x} (\gamma(x, y)F(x, y)) + \frac{\partial}{\partial y} (\gamma(x, y)G(x, y))$$

é estritamente positivo ou estritamente negativo numa região D contida em $\mathcal{U}$ e simplesmente conexa então não existem órbitas periódicas de (2.1) em D .

Relembramos agora três teoremas fundamentais de Análise (o teorema da Função Implícita, o teorema da Divergência e o teorema de Stokes) que serão necessários ainda neste capítulo para a demonstração de resultados que se seguem bem como para a análise da estabilidade de pontos de equilíbrio em modelos epidemiológicos de capítulos seguintes.

Teorema 2.0.14 (Função Implícita) *Sejam $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida num aberto U de $\mathbb{R}^2$ e (x_0, y_0) um ponto de U .*

Suponhamos que F admite derivadas parciais contínuas F_x e F_y numa vizinhança de (x_0, y_0) e

$$F(x_0, y_0) = 0, \quad F_y(x_0, y_0) \neq 0.$$

Então existem $\alpha, \beta > 0$ tais que, para todo o x pertencente ao intervalo

$$I = [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha],$$

a equação

$$F(x, y) = 0$$

tem exactamente uma solução $y = f(x)$ que pertence ao intervalo $[y_0 - \beta, y_0 + \beta]$.

Esta função f satisfaz a condição inicial $y_0 = f(x_0)$ e, para todo o x de I , tem-se

$$F(x, f(x)) = 0,$$

$$y_0 - \beta \leq f(x) \leq y_0 + \beta,$$

$$F_y(x, f(x)) \neq 0.$$

Além disso, f é contínua e tem derivada contínua em I , dada pela equação

$$y' = f'(x) = -\frac{F_x}{F_y}.$$

Definição 2.0.15 *Seja $\mathbf{A}$ um campo de vectores definido num aberto $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^2$, digamos*

$$\mathbf{A}(x, y) = (F(x, y), G(x, y)).$$

A divergência de $\mathbf{A}$, $\text{div } \mathbf{A}$, é dada por

$$\text{div } \mathbf{A} = F_x(x, y) + G_y(x, y).$$

Definição 2.0.16 *Seja $\mathbf{A}$ um campo de vectores definido num aberto $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^3$, digamos*

$$\mathbf{A}(x, y, z) = (F(x, y, z), G(x, y, z), H(x, y, z)).$$

Denotando por ∇ o operador gradiente $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$, o rotacional de $\mathbf{A}$, $\text{rot } \mathbf{A}$, é dado por

$$\text{rot } \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A},$$

ou seja,

$$\text{rot } \mathbf{A} = \left(\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}, \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} \right),$$

em coordenadas cartesianas.

Teorema 2.0.17 (Divergência) *Seja $\mathbf{A}$ um campo de vectores definido num aberto $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^2$. O integral (duplo) da divergência de $\mathbf{A}$ sobre um subconjunto Ω de $\mathbb{R}^2$ é igual ao integral linha ao longo do bordo de Ω da componente $\mathbf{A}_n$ de $\mathbf{A}$ normal a essa curva que "aponta para fora". Isto é,*

$$\int \int_{\Omega} \text{div } \mathbf{A} \, dx \, dy = \int_{\partial\Omega} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, ds = \int_{\partial\Omega} \mathbf{A}_n \, ds.$$

Teorema 2.0.18 (Stokes) *Sejam S uma superfície orientada, ∂S o bordo de S positivamente orientado, e $\mathbf{A}$ um campo de vectores em S de classe C^1 . Então*

$$\int \int_S \text{rot } \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial S} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s},$$

isto é, o integral $\int \int_S \text{rot } \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, dS$ da componente normal do rotacional do campo de vectores $\mathbf{A}$ sobre a superfície S é igual ao integral $\int_{\partial S} \mathbf{A}_t \, ds$ da componente tangencial do campo de vectores $\mathbf{A}$ ao longo do bordo da superfície.

Em seguida, e até ao final deste capítulo, vamos apresentar vários resultados e definições correspondentes a sistemas diferenciais planares

$$\begin{aligned}x' &= X(x, y) \\ y' &= Y(x, y)\end{aligned}\tag{2.2}$$

que têm $O = (0, 0)$ como ponto de equilíbrio. Supomos que, em torno de O , as funções X e Y admitem derivadas parciais contínuas até uma determinada ordem de tal forma que esses sistemas se podem escrever na forma

$$\begin{aligned}x' &= X(x, y) = X_m(x, y) + \Phi(x, y) \\ y' &= Y(x, y) = Y_n(x, y) + \Psi(x, y)\end{aligned}\tag{2.3}$$

para alguns $m, n \in \mathbb{N}$, onde X_m e Y_n são polinómios homogêneos em (x, y) de ordens m e n , respectivamente, e $\Phi = o(r^m)$ e $\Psi = o(r^n)$ são funções de ordem superior.

Nota: Dados $m \in \mathbb{N}$ e uma função $\Gamma : U \rightarrow \mathbb{R}$ definida numa vizinhança U de $(0, 0)$, diz-se que $\Gamma = o(r^m)$ se $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\Gamma(x, y)}{\|(x, y)\|^m} = 0$.

O nosso estudo vai incidir sobre o comportamento das órbitas numa vizinhança do ponto de equilíbrio sempre que m ou n é maior do que 1.

Definição 2.0.19 *Sejam $\mathcal{O}$ uma órbita de (2.2) e $A = (r, \theta)$ um ponto que se move em $\mathcal{O}$. Diz-se que a órbita $\mathcal{O}$ tende para o ponto de equilíbrio O ao longo da direcção $\theta = \theta_0$ se $\theta \rightarrow \theta_0$ à medida que $r \rightarrow 0$.*

Observação 2.0.20 *Uma órbita pode tender para O ao longo de uma direcção $\theta = \theta_0$ quando $t \rightarrow +\infty$ ou quando $t \rightarrow -\infty$.*

Definição 2.0.21 *Dado o sistema (2.3), se existir uma sucessão $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} = (r_n, \theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que*

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = 0$,
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \theta_n = \theta_0$,
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 0$, onde α_n é a tangente do ângulo formado pelo vector posição de A_n e pela direcção do campo de vectores avaliado em A_n no sentido retrógrado,

então $\theta = \theta_0$ diz-se uma **direcção característica** de (2.3).

Observação 2.0.22

- Se existir uma órbita que tende para o ponto de equilíbrio O ao longo de uma direcção (fixa) $\theta = \theta_0$, então $\theta = \theta_0$ é uma direcção característica.
- Podem não existir órbitas que tendam para o ponto de equilíbrio O ao longo de uma direcção característica.

Definição 2.0.23 Uma equação $G(\theta) = 0$ diz-se uma **equação característica** de um sistema de equações diferenciais se $G(\theta_0) = 0$ é uma condição necessária para que $\theta = \theta_0$ seja uma direcção característica do sistema.

Considerando coordenadas polares, pode-se mostrar que a função $G(\theta)$ da equação característica do sistema (2.2) é dada por

$$G(\theta) = \begin{cases} \cos(\theta)Y_n(\cos(\theta), \sin(\theta)) & m > n \\ -\sin(\theta)X_m(\cos(\theta), \sin(\theta)) & m < n \\ \cos(\theta)Y_n(\cos(\theta), \sin(\theta)) - \sin(\theta)X_m(\cos(\theta), \sin(\theta)) & m = n \end{cases}$$

Para resultados posteriores, precisaremos ainda de uma função auxiliar $H(\theta)$ definida por

$$H(\theta) = \begin{cases} \sin(\theta)Y_n(\cos(\theta), \sin(\theta)) & m > n \\ \cos(\theta)X_m(\cos(\theta), \sin(\theta)) & m < n \\ \sin(\theta)Y_n(\cos(\theta), \sin(\theta)) + \cos(\theta)X_m(\cos(\theta), \sin(\theta)) & m = n \end{cases}$$

A relação entre as funções G e H e o sistema (2.3) reside no facto de, em coordenadas polares (r, θ) , o sistema (2.3) se escrever na forma

$$r \frac{d\theta}{dr} = \frac{G(\theta) + o(1)}{H(\theta) + o(1)} \quad \text{quando } r \rightarrow +\infty.$$

Notação: Representamos por:

- $S_\lambda(O)$ o interior do círculo centrado em O e com raio igual a λ ,

$$S_\lambda(O) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y)\| < \lambda\};$$

- $\triangle \widehat{OAB}$ o sector limitado pelos segmentos de recta $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ e pelo arco circular $\widehat{AB}$ (supondo que os pontos A e B se situam sobre uma mesma circunferência centrada em O);
- $\triangle \widetilde{OAB}$ o sector **curvilíneo** limitado pelos **arcos de órbita** $\widehat{OA}$, $\widehat{OB}$ e pelo arco circular $\widehat{AB}$.

Teorema 2.0.24 *Se $G(\theta) \neq 0$ ¹ num sector circular limitado por segmentos de recta de direcções $\theta = \theta_0$ e $\theta = \theta_1$,*

$$\triangle \widehat{OAB}: \theta_0 < \theta < \theta_1, \quad 0 \leq r \leq \bar{r},$$

para alguns θ_0 , θ_1 e $\bar{r}$, então não existe nenhuma órbita do sistema que tende para O nesse sector. Para além disso, todas as órbitas do sistema com início sobre o segmento de recta $\theta = \theta_0$ (resp. $\theta = \theta_1$) dirigem-se para o segmento de recta $\theta = \theta_1$ (resp. $\theta = \theta_0$), desde que $r(\theta_0)$ seja suficientemente pequeno.

Teorema 2.0.25 *Seja $\theta = \theta_k$ uma raiz múltipla da equação $G(\theta) = 0$ com multiplicidade l ímpar. Suponhamos que, para r suficientemente próximo de 0 e θ_1, θ_2 suficientemente próximos de θ_k ,*

$$(a) \quad G^{(l)}(\theta_k)H(\theta_k) < 0.$$

$$(b) \quad \frac{1}{r^m} |\Phi(r, \theta_2) - \Phi(r, \theta_1)| \leq C(r) |\theta_2 - \theta_1|,$$

$$(c) \quad \frac{1}{r^m} |\Psi(r, \theta_2) - \Psi(r, \theta_1)| \leq C(r) |\theta_2 - \theta_1|,$$

onde, para $l = 1$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\Phi(r, \theta)}{r^m} = 0, \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\Psi(r, \theta)}{r^n} = 0, \quad \lim_{r \rightarrow 0} C(r) = 0,$$

e para $l > 1$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\Phi(r, \theta)}{r^{m+1}} = 0, \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\Psi(r, \theta)}{r^{n+1}} = 0.$$

Então o sistema (2.3) tem uma única órbita que tende para o ponto de equilíbrio O ao longo de $\theta = \theta_k$.

¹Não existem direcções características

Teorema 2.0.26 *Se O é um ponto de equilíbrio isolado do sistema*

$$\begin{aligned}x' &= X(x, y) \\ y' &= Y(x, y),\end{aligned}\tag{2.4}$$

onde $X(x, y)$ e $Y(x, y)$ são funções analíticas numa vizinhança de O , então qualquer órbita de (2.4) que tende para O , terá de o fazer espiralmente ou ao longo de uma direcção fixa.

Definição 2.0.27 *Diz-se que um ponto de equilíbrio isolado é do tipo **centro** se todas as suas vizinhanças contêm uma órbita fechada que possui o ponto de equilíbrio no seu interior.*

Teorema 2.0.28 *Se O é um ponto de equilíbrio isolado que não é do tipo centro então existe uma vizinhança $S_\lambda(O)$ de O tal que, para todo o ponto Q de $S_\lambda(O)$, qualquer uma das semi-órbitas O_Q^+ ou O_Q^- tende para O ou abandona $S_\lambda(O)$.*

Definição 2.0.29 *Dados um sistema de equações diferenciais que tem O como ponto de equilíbrio isolado que não é do tipo centro, $\lambda > 0$ e um ponto Q de $S_\lambda(O) - \{O\}$, diz-se que:*

- (1) a órbita O_Q é uma **órbita parabólica** se uma das semi-órbitas, O_Q^- ou O_Q^+ , tende para o ponto de equilíbrio O e a outra abandona $S_\lambda(O)$ em tempo finito;
- (2) a órbita O_Q é uma **órbita hiperbólica** se ambas as semi-órbitas, O_Q^- e O_Q^+ , abandonam $S_\lambda(O)$ em tempo finito;
- (3) a órbita O_Q é uma **órbita elíptica** se ambas as semi-órbitas, O_Q^- e O_Q^+ , tendem para o ponto de equilíbrio O .

(Esta classificação não depende do raio λ da vizinhança $S_\lambda(O)$).

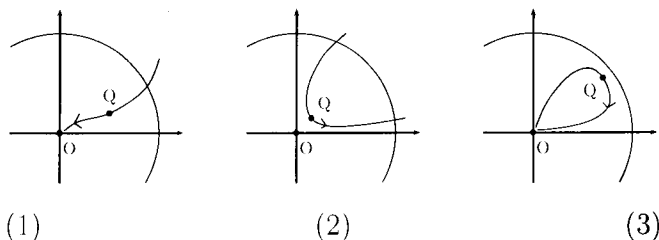


Figura 1: (1) Órbita parabólica; (2) Órbita hiperbólica; (3) Órbita elíptica.

Definição 2.0.30 *Sejam*

- O um ponto de equilíbrio isolado que não é do tipo centro;
- $S_\lambda(O)$ a vizinhança de O fornecida pelo teorema 2.0.28;
- $F = \left\{ P \in \overline{S_\lambda(O)} - S_\lambda(O) \mid \mathcal{O}_P^+ \subset \overline{S_\lambda(O)} \text{ ou } \mathcal{O}_P^- \subset \overline{S_\lambda(O)} \right\}$;
- $P_1, P_2 \in F$ tais que $P_1 \widehat{P}_2 \subset \left(\overline{S_\lambda(O)} - S_\lambda(O) \right) - F$;
- $P_3, P_4 \in F$ e $P_3 \widehat{P}_4 \subset F$;
- $\widetilde{\Delta \widehat{OP_1 P_2}}$ o sector curvilíneo limitado pelos arcos de órbita $\widehat{OP_1}$, $\widehat{OP_2}$ e pelo arco circular $P_1 \widehat{P}_2$;
- $\widetilde{\Delta \widehat{OP_3 P_4}}$ o sector curvilíneo limitado pelos arcos de órbita $\widehat{OP_3}$, $\widehat{OP_4}$ e pelo arco circular $P_3 \widehat{P}_4$.

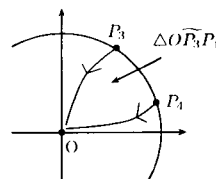
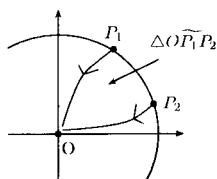


Figura 2: Sectores curvilíneos.

Resumo de Vocabulário do Curso
MATEMÁTICA

Diz-se que

- (1) $\widetilde{\Delta \widehat{OP_1 P_2}}$ é um **sector hiperbólico** se todas as órbitas do sector o abandonam em ambas as direcções (quando $t \rightarrow +\infty$ e quando $t \rightarrow -\infty$) em tempo finito;
- (2) $\widetilde{\Delta \widehat{OP_1 P_2}}$ é um **sector elíptico** se P_1 e P_2 pertencem à mesma órbita e $\mathcal{O}_{P_1}$ está contida em $\overline{S_\lambda(O)}$;
- (3) $\widetilde{\Delta \widehat{OP_1 P_2}}$ é um **sector hiperbólico-elíptico** se existem algumas órbitas elípticas que estão inteiramente contidas no sector e as restantes abandonam o sector em tempo finito;
- (4) $\widetilde{\Delta \widehat{OP_3 P_4}}$ é um **sector parabólico** se as suas órbitas tendem para O quando $t \rightarrow +\infty$ (resp. quando $t \rightarrow -\infty$) e deixam o sector quando $t \rightarrow -\infty$ (resp. quando $t \rightarrow +\infty$) em tempo finito;

- (5) $\triangle OP_3P_4$ é um **sector parabólico-elíptico** se é um sector parabólico com órbitas elípticas inteiramente contidas no sector.

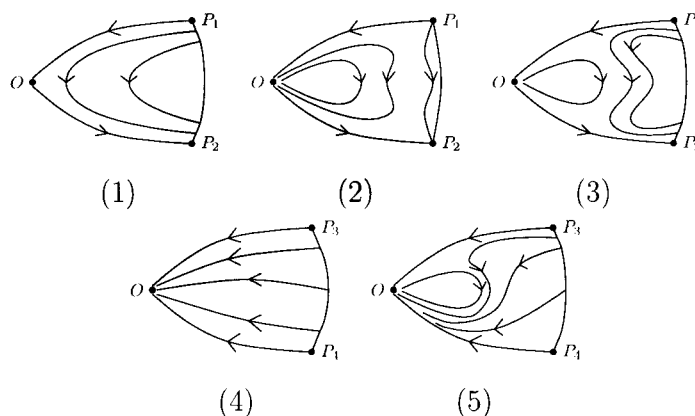


Figura 3: (1) Sector hiperbólico; (2) Sector elíptico; (3) Sector hiperbólico-elíptico; (4) Sector parabólico; (5) Sector parabólico-elíptico.

Definição 2.0.31 Uma **separatriz** de um sistema de equações diferenciais é uma solução do sistema que sai de, ou se dirige para, um ponto sela (caso este exista).

A designação atribuída resulta do facto de tais soluções separarem regiões de comportamento genérico umas das outras.

Definição 2.0.32 Seja $O = (0,0)$ um ponto de equilíbrio isolado de um sistema de equações diferenciais. Diz-se que O é um ponto **sela-nó** se existe $\lambda \in \mathbb{R}$ positivo e duas separatrizes tal que a região $S_\lambda(O)$ é dividida em duas partes com as seguintes características: uma é um sector parabólico e a outra consiste de dois sectores hiperbólicos.

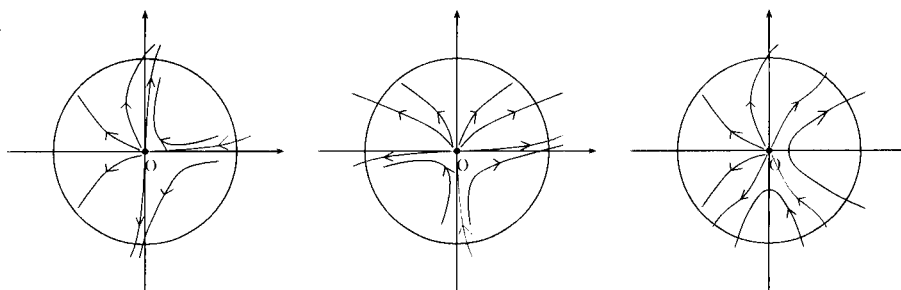


Figura 4: Três exemplos de pontos sela-nó.

No caso de um ponto sela-nó, tomamos como separatrizes as órbitas do sistema que saem de, ou se dirigem para, o ponto e que fazem parte do bordo dos sectores parabólico

e/ou hiperbólicos existentes na vizinhança do ponto.

Consideremos o sistema de equações diferenciais lineares (2.2) e suponhamos agora que a matriz jacobiana correspondente avaliada no ponto de equilíbrio O tem um valor próprio nulo e outro não nulo. Vamos estudar a distribuição das órbitas perto desse ponto de equilíbrio quando são adicionados termos não lineares ao sistema.

Sem perda de generalidade (caso contrário efectuando uma mudança de coordenadas) escrevemos o sistema na forma:

$$\begin{aligned}x' &= P_2(x, y) \\ y' &= y + Q_2(x, y).\end{aligned}\tag{2.5}$$

Assumimos agora que:

- $O = (0, 0)$ é um ponto de equilíbrio **isolado** de (2.5);
- P_2 e Q_2 são funções analíticas de ordem ≥ 2 numa vizinhança de O .

Tem-se

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}(y + Q_2(x, y))|_{(0,0)} &= \frac{\partial}{\partial y}(y + q_{11}x^2 + q_{22}y^2 + q_{12}xy + \dots)|_{(0,0)} \\ &= 1 + (2q_{11}x + 2q_{22}y + xq_{12})|_{(0,0)} \\ &= 1 \\ &\neq 0.\end{aligned}$$

Pelo Teorema da Função Implícita (teorema 2.0.14) existe um λ positivo tal que para todos os pontos (x, y) em $S_\lambda(O)$ a equação $y + Q_2(x, y) = 0$ tem exactamente uma solução $y = \phi(x)$, isto é, existem $\lambda > 0$ e $\phi : \{x : |x| < \lambda\} \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$\phi(x) + Q_2(x, \phi(x)) = 0,$$

para qualquer x tal que $|x| < \lambda$.

A função ϕ é analítica em $\{x : (x, 0) \in S_\lambda(O)\}$ e satisfaz $\phi(0) = \phi'(0) = 0$.

Considere-se agora a função Ψ definida por

$$\Psi(x) = P_2(x, \phi(x)) = a_m x^m + [x]_{m+1},$$

onde $a_m \neq 0$ para algum $m \geq 2$ e onde $[x]_{m+1}$ representa a soma dos termos de ordem não inferior a $m + 1$.

Tem-se

$$\begin{aligned} x' &= \Psi(x) + P_2(x, y) - P_2(x, \phi(x)) \\ &= \Psi(x) + \left[\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\partial^{(j)} P_2}{\partial y^j} \Big|_{\phi(x)} \frac{(y - \phi(x))^j}{j!} \right] - P_2(x, \phi(x)) \\ &= \Psi(x) + (y - \phi(x)) \left[\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\partial^{(j)} P_2}{\partial y^j} \Big|_{\phi(x)} \frac{(y - \phi(x))^{j-1}}{j!} \right]. \end{aligned}$$

Portanto,

$$x' = \Psi(x) + (y - \phi(x))\bar{P}(x, y),$$

onde $\bar{P}$ é uma função analítica em $S_\lambda(O)$ e $\bar{P}(0, 0) = 0$.

Além disso, tem-se

$$\begin{aligned} y' &= y - \phi(x) + Q_2(x, y) - Q_2(x, \phi(x)) \\ &= (y - \phi(x)) + (y - \phi(x)) \left[\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\partial^{(j)} Q_2}{\partial y^j} \Big|_{\phi(x)} \frac{(y - \phi(x))^{j-1}}{j!} \right] \\ &= (y - \phi(x))[1 + \bar{Q}(x, y)], \end{aligned}$$

onde $\bar{Q}$ é uma função analítica em $S_\lambda(O)$ e $\bar{Q}(0, 0) = 0$. Assim, o sistema (2.5) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} x' &= \Psi(x) + (y - \phi(x))\bar{P}(x, y) \\ y' &= (y - \phi(x))[1 + \bar{Q}(x, y)]. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Observação 2.0.33 Uma vez que O é um ponto de equilíbrio isolado de (2.5) segue-se que $\Psi(x) \not\equiv 0$, isto é, $a_m \neq 0$ para algum $m \geq 2$.

Demonstração: Suponhamos por redução ao absurdo que $\Psi \equiv 0$. Então

$$\begin{aligned} x' &= (y - \phi(x))\bar{P}(x, y) \\ y' &= (y - \phi(x))[1 + \bar{Q}(x, y)] \end{aligned}$$

e todos os pontos da curva $y = \phi(x)$ seriam pontos de equilíbrio de (2.5), contradizendo o facto de O ser um ponto de equilíbrio isolado do modelo (2.5).

O seguinte teorema mostra que a estrutura topológica das órbitas de (2.5) perto do ponto de equilíbrio O depende da paridade de m e do sinal de a_m .

Teorema 2.0.34 *Considere-se um sistema diferencial do tipo*

$$\begin{aligned}x' &= P_2(x, y) \\ y' &= y + Q_2(x, y),\end{aligned}$$

em que P_2 e Q_2 são funções analíticas numa vizinhança de O de ordem não inferior a 2 e O é um ponto de equilíbrio isolado. Então:

(a) *existem $\lambda > 0$ suficientemente pequeno e uma função analítica ϕ definida em $S_\lambda(O)$ tal que*

$$\phi(x) + Q_2(x, \phi(x)) = 0, \quad \text{para qualquer } x \in S_\lambda(O).$$

(b) *escrevendo*

$$P_2(x, \phi(x)) = a_m x^m + [x]_{m+1},$$

onde $a_m \neq 0$ para algum $m \geq 2$, temos as seguintes afirmações:

- (b.1) *se m é ímpar e $a_m > 0$ então O é um nó instável;*
- (b.2) *se m é ímpar e $a_m < 0$ então O é um ponto sela e as quatro separatrizes tendem para O ao longo das direcções $\theta = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\theta = \pi$ e $\theta = \frac{3\pi}{2}$;*
- (b.3) *se m é par então O é um ponto sela-nó. Mais precisamente, a região $S_\lambda(O)$ é dividida em duas partes por duas separatrizes que tendem para O ao longo dos semi - eixos positivo e negativo de y . Uma das partes é um sector parabólico e a outra parte consiste de dois sectores hiperbólicos. Se $a_m > 0$ (resp. $a_m < 0$) então o sector parabólico situa-se do lado direito (resp. esquerdo).*

Demonstração: A alínea (a) já foi demonstrada.

Para provar a alínea (b), fixemos $\lambda > 0$ dado por (a). Pela definição das funções G e H , e escrevendo o sistema (2.5) na forma

$$\begin{aligned}x' &= a_m x^m + [x]_{m+1} \\ y' &= y + Q_2(x, y)\end{aligned}$$

para algum $m \geq 2$, resulta que a equação característica de (2.5) (ou equivalentemente (2.6)) é ($m > n = 1$)

$$G(\theta) = \cos(\theta) \sin(\theta) = 0$$

e

$$H(\theta) = \sin^2(\theta).$$

Pelo teorema 2.0.24, os candidatos a direcções características de (2.6) são $\theta = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\theta = \pi$ e $\theta = \frac{3\pi}{2}$. Dado que

$$H\left(\frac{\pi}{2}\right) G'\left(\frac{\pi}{2}\right) = H\left(\frac{3\pi}{2}\right) G'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1 < 0,$$

o teorema 2.0.25 garante a existência de uma única órbita que tende para O ao longo de cada uma das direcções $\theta = \frac{\pi}{2}$ e $\theta = \frac{3\pi}{2}$. Designemos essas órbitas por $\mathcal{O}_1$ e $\mathcal{O}_2$, respectivamente.

Existe ainda uma informação adicional, fornecida pelo teorema 2.0.26, que refere que qualquer órbita que tende para O terá de o fazer a espiralar ou ao longo de uma direcção fixa.

(b.1) Vamos mostrar que não existe nenhuma órbita que tende para O quando $t \rightarrow +\infty$.

Caso 1: Suponhamos que $\phi(x) = 0$ para qualquer $(x, 0) \in S_\lambda(O)$.

(i) Sobre o eixo $y = 0$ tem-se

$$\begin{aligned} y' &= 0 \\ x' &= \Psi(x) = P_2(x, 0) = a_m x^m + [x]_{m+1} \end{aligned} \tag{2.7}$$

pelo que, em particular, esse eixo em $S_\lambda(O)$ consiste de soluções do sistema.

Afirmação: A função $g(x) = a_m x^m + [x]_{m+1}$ tem o mesmo sinal que x , para qualquer x tal que $|x| < \lambda$.

Demonstração: Escrevemos $g(x) = x^m(a_m + [x]_1)$. Por hipótese $a_m > 0$ logo é possível escolher $\lambda_1 > 0$ tal que $|[x]_1| < a_m$ para $-\lambda_1 < x < \lambda_1$ (se $\lambda_1 > \lambda$, actualize-se λ para $\lambda = \lambda_1$) e teremos então

$$g(x) < 2a_m x^m.$$

O resultado segue do facto de m ser ímpar e a_m ser positivo.

Sendo o sentido das órbitas que se situam sobre o eixo dos xx determinado pelo sinal de x , concluímos que qualquer órbita com início sobre esse eixo se afasta de O quando $t \rightarrow +\infty$.

(ii) $(x, y) \in S_\lambda(O)$ e $y \neq 0$.

Dado que $\phi \equiv 0$ em $S_\lambda(O)$ tem-se

$$yy' = y^2[1 + \overline{Q}(x, y)].$$

Como $\overline{Q}(0, 0) = 0$, por um argumento de continuidade podemos escolher $0 < \lambda_1 < \lambda$ tal que para todo (x, y) de $S_{\lambda_1}(O)$ se tem $|\overline{Q}(x, y)| < 1$ e portanto $1 + \overline{Q}(x, y) > 0$. Fazendo agora $\lambda = \lambda_1$ resulta que

$$yy' > 0,$$

para todo o par (x, y) de $S_\lambda(O)$ com $y \neq 0$. Ou seja, se $y < 0$ então a função $y(t)$ é monótona decrescente, e se $y > 0$ a função $y(t)$ é monótona crescente.

Este resultado implica também que nenhuma órbita possa tender para O quando $t \rightarrow +\infty$.

Caso 2: Suponhamos que existe $(x, 0) \in S_\lambda(O)$ tal que $\phi(x) \neq 0$.

Como ϕ é uma função analítica e $\phi(0) = 0$, se necessário reduzindo λ , podemos assumir que $x = 0$ é um zero isolado de ϕ em $S_\lambda(O)|_{y=0}$.

Começemos por supor que a curva $y = \phi(x)$ está localizada no semiplano $y > 0$.

(i) Nos pontos $(x, \phi(x))$ tem-se $y' = 0$ e $x' = P_2(x, \phi(x)) = a_m x^m + [x]_{m+1}$, e portanto x' tem o mesmo sinal que x (isto é, o campo de vectores afasta as órbitas dos pontos $(x, \phi(x))$ de O).

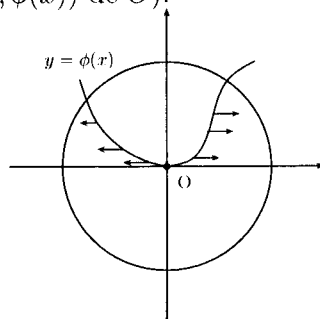


Figura 5: Campo de vectores sobre a curva $y = \phi(x)$.

(ii) Sobre os pontos $(x, y) \in S_\lambda(O)$ com $y - \phi(x) \neq 0$ tem-se

$$(y - \phi(x))y' = (y - \phi(x))^2[1 + \overline{Q}(x, y)] > 0.$$

Assim, se $y < \phi(x)$ então a função $y(t)$ é monótona decrescente e se $y > \phi(x)$ a função $y(t)$ é monótona crescente.

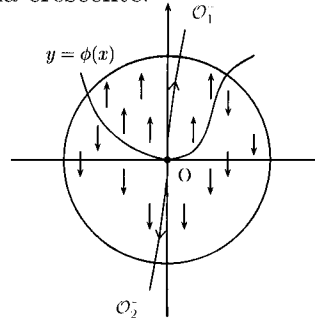


Figura 6: Segunda coordenada do campo de vectores nas regiões acima e abaixo da curva $y = \phi(x)$.

Isto implica desde já que: O_1^- e O_2^- tendem para O quando $t \rightarrow -\infty$; se existir uma órbita que tende para O quando $t \rightarrow +\infty$, digamos O_3^+ , essa órbita não pode estar situada na região do plano acima da curva $y = \phi(x)$ nem no semiplano $y < 0$. Denotando por A_1, A_2 os pontos de intersecção de $S_\lambda(O)$ com o eixo dos xx , e por Q_1 e Q_2 os pontos de intersecção de $y = \phi(x)$ com o bordo de $S_\lambda(O)$, a órbita O_3^+ só pode estar situada num dos sectores curvilíneos $\triangle \widehat{OA_1Q_1}$ ou $\triangle \widehat{OA_2Q_2}$.

Suponhamos que $O_3^+ \subset \triangle \widehat{OA_1Q_1}$ e seja Q_3 o ponto de intersecção de O_3^+ com o bordo de $S_\lambda(O)$.

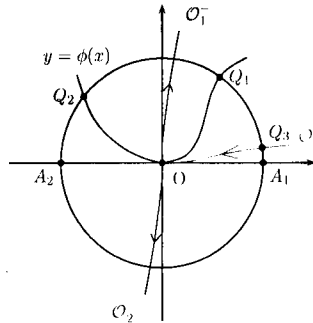


Figura 7: A semi-órbita O_3^+ .

Escolha-se um ponto $Q \neq O$ sobre a curva $\widehat{OQ_1}$. Pelas direcções do campo de vectores sobre a curva $y = \phi(x)$ e das regiões acima e abaixo dessa curva, a órbita O_Q^- tem de tender para O , quando $t \rightarrow -\infty$, no interior de $S_\lambda(O)$. Por

outro lado, $\mathcal{O}_Q^+$ tem de estar em $\widetilde{\Delta O A_1 Q_1}$ e a existência de $\mathcal{O}_3^+$ que tende para O implica a convergência (quando $t \rightarrow +\infty$) de $\mathcal{O}_Q^+$ para O em $\widetilde{\Delta O Q_3 Q_1}$. Em particular, $\mathcal{O}_Q \subset S_\lambda(O)$.

Seja Ω a região limitada pela curva simples fechada $\mathcal{O}_Q \cup O$.

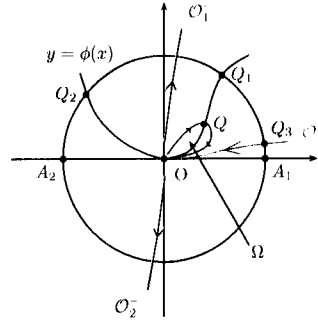


Figura 8: Região Ω limitada pela curva simples fechada $\mathcal{O}_Q \cup O$.

A divergência do campo de vectores $(x, y) \xrightarrow{A} (P_2(x, y), y + Q_2(x, y))$ é

$$\operatorname{div} A = 1 + \frac{\partial P_2}{\partial x} + \frac{\partial Q_2}{\partial y}$$

e, para cada (x, y) , um vector normal a $A(x, y)$ é

$$(-y - Q_2(x, y), P_2(x, y)).$$

Pelo Teorema da Divergência tem-se

$$0 = \int_{\mathcal{O}_Q \cup O} P_2(x, y) dy - (y + Q_2(x, y)) dx = \int \int_{\Omega} \left(1 + \frac{\partial P_2}{\partial x} + \frac{\partial Q_2}{\partial y} \right) dx dy > 0,$$

o que é uma contradição.

De facto, se $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma parametrização da curva fechada $\mathcal{O}_Q \cup O$ definida por $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, então obtemos

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{O}_Q \cup O} P_2(x, y) dy - (y + Q_2(x, y)) dx \\ &= \int_a^b \left[P_2(x(t), y(t)) \frac{dy}{dt} - (y(t) + Q_2(x(t), y(t))) \frac{dx}{dt} \right] dt \\ &= \int_a^b (-y(t) - Q_2(x(t), y(t)), P_2(x(t), y(t))) \cdot \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right) dt \\ &= \int_a^b 0 dt \\ &= 0. \end{aligned}$$

Concluimos então que $\mathcal{O}_3^+$ não existe no sector curvilíneo $\widetilde{\Delta O A_1 Q_1}$. De forma análoga pode-se mostrar que uma tal órbita também não existe em $\widetilde{\Delta O A_2 Q_2}$.

No caso em que a curva $y = \phi(x)$, ou parte dela, está localizada no semiplano

$y < 0$, a prova de que não existe nenhuma órbita que tende para O quando $t \rightarrow +\infty$ é semelhante.

Dado que em $S_\lambda(O)$ existem órbitas, $\mathcal{O}_1^-$ e $\mathcal{O}_2^-$, que tendem para O à medida que $t \rightarrow -\infty$ e não podem existir órbitas que tendem para O quando $t \rightarrow +\infty$, a região $S_\lambda(O)$ não pode conter sectores elípticos nem hiperbólicos. Terá portanto de conter um sector parabólico cujas órbitas tendem para O à medida que $t \rightarrow -\infty$. Além disso, a dedução anterior mostra que todas as órbitas excepto $\mathcal{O}_1^-$ e $\mathcal{O}_2^-$ terão de tender para O (à medida que $t \rightarrow -\infty$) ao longo das direcções $\theta = 0$ e $\theta = \pi$. O ponto O é portanto um nó instável.

(b.2) **Caso 1:** Suponhamos que $\phi(x) = 0$ para qualquer $(x, 0) \in S_\lambda(O)$.

(i) Sobre a recta $y = 0$ tem-se o sistema (2.7) com m ímpar e $a_m < 0$, portanto o eixo dos xx (em $S_\lambda(O)$) consiste de soluções do sistema e qualquer órbita com condição inicial $(x, 0) \in S_\lambda(O)$ terá de tender para O quando $t \rightarrow +\infty$ (ao longo de $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$).

(ii) $(x, y) \in S_\lambda(O)$ e $y \neq 0$.

O argumento usado na prova de (b.1), Caso 1 (ii) mostra que $y(t)$ é uma função monótona decrescente se $y < 0$ e monótona crescente se $y > 0$. Isto implica que a órbita de qualquer $(x, y) \in S_\lambda(O)$ com $y \neq 0$ não pode tender para O quando $t \rightarrow +\infty$.

Caso 2: Suponhamos que existe $(x, 0) \in S_\lambda(O)$ tal que $\phi(x) \neq 0$.

Pelo facto de ϕ ser uma função analítica, podemos assumir mais uma vez que $x = 0$ é um zero isolado de ϕ em $S_\lambda(O)|_{y=0}$.

Comecemos por supor que a curva $y = \phi(x)$ está localizada no semiplano $y > 0$ quando $x > 0$.

(i) Sobre os pontos $(x, \phi(x))$ tem-se (2.7) com m ímpar e $a_m < 0$ portanto o campo de vectores nesses pontos é horizontal e aponta para a esquerda.

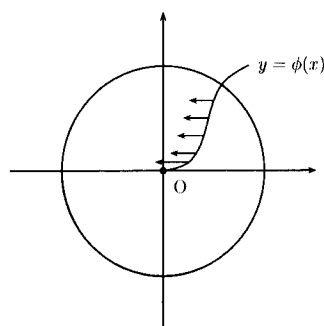


Figura 9: Campo de vectores sobre os pontos $(x, \phi(x))$.

- (ii) Sobre os pontos $(x, y) \in S_\lambda(O)$ com $y - \phi(x) \neq 0$, podemos repetir o argumento usado na prova de (b.1), Caso 2 (ii) para concluir que $y(t)$ é uma função monótona decrescente se $y < \phi(x)$ e monótona crescente se $y > \phi(x)$.

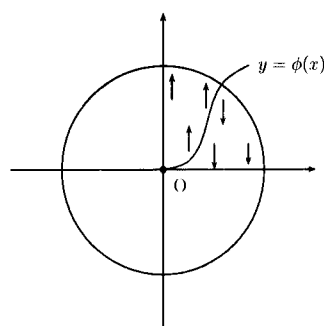


Figura 10: Segunda coordenada do campo de vectores nas regiões acima e abaixo da curva $y = \phi(x)$.

Seja Q_1 o ponto de intersecção da curva $y = \phi(x)$ com o bordo de $S_\lambda(O)$ no primeiro quadrante. Escolhemos um ponto $B \neq O$ sobre a curva $\widehat{OQ_1}$.

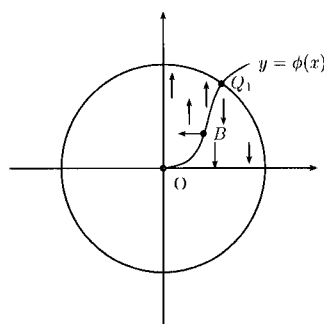


Figura 11: Ponto B , diferente da origem, situado sobre a curva $\widehat{OQ_1}$.

As direcções do campo de vectores de (2.7) no primeiro quadrante obrigam a que $\mathcal{O}_B^-$ intersecte o bordo de $S_\lambda(O)$. Seja Q_B o primeiro ponto dessa intersecção e

Por outro lado, o Teorema da Divergência (teorema 2.0.17) afirma que

$$0 = \int_L \mathbf{A}_n ds = \int \int_{\Delta \widetilde{OGH}} \operatorname{div} \mathbf{A} dx dy > 0,$$

o que é uma contradição. Portanto $\mathcal{O}_Q^+$ é a única órbita que tende para O ao longo da direcção $\theta = 0$ à medida que $t \rightarrow +\infty$.

De forma análoga mostra-se que existe uma única órbita que tende para O ao longo da direcção $\theta = \pi$ à medida que $t \rightarrow +\infty$.

No caso em que a curva $y = \phi(x)$, ou parte dela, está localizada no semiplano $y < 0$, a prova de que existe uma única órbita que tende para O ao longo das direcções $\theta = 0$ e $\theta = \pi$ à medida que $t \rightarrow +\infty$ é semelhante.

Dado que em $S_\lambda(O)$ existem órbitas, $\mathcal{O}_1^-$ e $\mathcal{O}_2^-$, que tendem para O à medida que $t \rightarrow -\infty$ e existe uma única órbita que tende para O ao longo das direcções $\theta = 0$ e $\theta = \pi$ à medida que $t \rightarrow +\infty$, a região $S_\lambda(O)$ não pode conter sectores elípticos. Isto implica que $S_\lambda(O)$ consiste de quatro sectores hiperbólicos. O ponto O é portanto um ponto sela.

- (b.3) Se m é par e $a_m < 0$ a estrutura topológica das órbitas no lado direito de $O(0,0) \cup \mathcal{O}_1^- \cup \mathcal{O}_2^-$ comporta-se como na situação (b.2) e no lado esquerdo comporta-se como em (b.1).

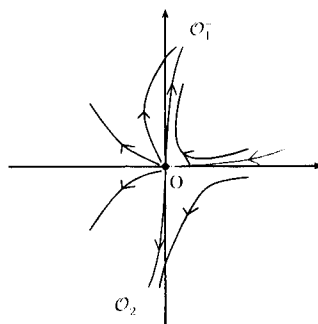


Figura 14: Estrutura topológica das órbitas numa vizinhança da origem.

Se m é par e $a_m > 0$ as configurações trocam-se.

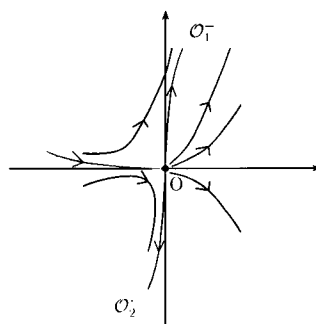


Figura 15: Estrutura topológica das órbitas numa vizinhança da origem.

Em qualquer das situações o ponto de equilíbrio O é um ponto sela-nó.

Capítulo 3

O número de reprodução básico

Um dos aspectos mais importantes a ter em consideração nas doenças infecciosas é o contágio e a consequente possibilidade da infecção vir a invadir toda a população. Os modelos matemáticos têm sido instrumentos importantes, e cada vez mais usados na análise de tal fenómeno pois permitem fazer previsões gerais sobre a evolução da doença. Não são, de facto, um espelho da realidade mas evidenciam dinâmicas importantes e explicam fenómenos observados.

O **número de reprodução básico** é um parâmetro que tem sido sistematicamente usado para estimar a possibilidade de eliminação ou erradicação de uma infecção na população, e a eficácia de planos de vacinação.

3.1 Pressupostos e Notação

Matematicamente, os modelos epidemiológicos considerados nesta dissertação são descritos através de sistemas não lineares de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem. Para a formulação desses modelos epidemiológicos supomos que:

- a população é **heterogénea** e os parâmetros vitais e epidemiológicos de um indivíduo podem depender do seu estado relativamente à doença;
- a população é dividida em **compartimentos** de forma a que todos os indivíduos de um dado compartimento tenham propriedades epidemiológicas intrínsecas

semelhantes e, nesse sentido, sejam indistinguíveis uns dos outros. Isto significa que os parâmetros do modelo podem variar de compartimento para compartimento mas são iguais para todos os indivíduos dentro do mesmo compartimento;

- os parâmetros do modelo são constantes ou dependem do tamanho da população, e tomam sempre valores positivos;
- os indivíduos da população misturam-se entre si de forma homogénea e a transmissão da doença é feita de acordo com a lei de acção de massas da cinética das reacções químicas;
- os **tempos de permanência** (temporária) em cada um dos compartimentos seguem **distribuições exponenciais negativas**. Por exemplo, se τ representa a taxa de recuperação por indivíduo infectado, a quantidade $P(t) = e^{-\tau t}$ representa a fracção de indivíduos que ainda está na classe dos infectados t unidades de tempo depois de para lá ter entrado e $\frac{1}{\tau}$ representa o tempo médio de espera (isto é, a duração média do período de infecção);
- os períodos de latência têm durações tão curtas que são desprezáveis.

Para uma determinada população, seja $N(t)$ o número de indivíduos da população no instante t . Os **compartimentos** a considerar serão os seguintes:

- $S(t)$: número de indivíduos susceptíveis na população no instante t . Um indivíduo diz-se **susceptível** se puder ficar infectado por entrar em contacto com um indivíduo infectado;
- $I(t)$: número de indivíduos infectados no instante t . Para os modelos SIS a estudar nesta dissertação, um indivíduo dir-se-á **infectado** se for capaz de transmitir a doença;
- $R(t)$: número de indivíduos recuperados no instante t . Para os modelos SIS a estudar nesta dissertação, um indivíduo dir-se-á **recuperado** se tiver sido vacinado;

que, em termos de **proporções** de indivíduos, denotamos por:

- $s(t)$: proporção de indivíduos susceptíveis na população no instante t ;

- $i(t)$: proporção de indivíduos infectados na população no instante t ;
- $r(t)$: proporção de indivíduos recuperados na população no instante t .

Os **parâmetros vitais e epidemiológicos** presentes nos modelos epidemiológicos desta dissertação são os seguintes:

- τ : taxa de recuperação por indivíduo infectado. A fracção $\frac{1}{\tau}$ representa a duração média do período de infecção;
- θ : taxa de natalidade per capita;
- Λ : taxa de recrutamento, reflectindo o número médio de entradas (por nascimentos ou imigrações) de novos membros para a população por unidade de tempo;
- μ : taxa de mortalidade per capita. A fracção $\frac{1}{\mu}$ representa a esperança média de vida;
- μ_D : taxa de mortalidade induzida pela doença por indivíduo infectado.

Em cada um dos modelos analisados consideramos duas situações conforme o tamanho da população (constante ou variável). Sempre que a população é de tamanho constante assumimos que as taxas de natalidade e mortalidade são iguais (representadas por μ) e que não existe morte pela doença. Sempre que a população é de tamanho variável, abandonamos a hipótese de igualdade das taxas de natalidade e mortalidade e introduzimos uma taxa de mortalidade μ_D induzida pela doença. Em particular, isto abrange (fazendo $\mu_D = 0$) o caso em que as oscilações no tamanho da população não são devidas à doença mas apenas a efeitos demográficos.

Existe ainda um outro parâmetro, β , designado por **coeficiente de transmissão**, que está presente em todos os modelos. Antes de enunciarmos o seu significado, vamos introduzir a definição de **contacto adequado**.

Um contacto entre dois indivíduos da população diz-se adequado se ocorrer entre um indivíduo infectado e um outro qualquer indivíduo da população e é suficiente (em termos de duração, proximidade entre os indivíduos,...) para a transmissão da doença. No entanto, nem todos os contactos adequados resultam em infecção. Para poderem resultar em infecção, o indivíduo infectado tem necessariamente de

estabelecer contacto com um indivíduo susceptível (ou com um indivíduo infectado em que o agente infeccioso seja diferente).

Para o parâmetro β há várias situações a distinguir:

- sempre que o termo de contágio é $\beta \frac{S}{N} I$ então cada indivíduo infectado estabelece, em média, β contactos adequados por unidade de tempo. Como a fracção de indivíduos susceptíveis na população é $\frac{S}{N}$, a taxa de novas infecções no instante t é $\beta \frac{S}{N} I$. Neste caso, a força de infecção é $\beta \frac{I}{N}$, a taxa de incidência é $\beta \frac{S}{N} I$ e β é designado por taxa de contactos adequados;
- sempre que o termo de contágio é βSI então cada indivíduo infectado estabelece, em média, βN contactos adequados por unidade de tempo. Como a fracção de indivíduos susceptíveis na população é $\frac{S}{N}$, a taxa de novas infecções no instante t é $\beta N \frac{S}{N} I = \beta SI$. A taxa de contactos adequados é agora βN . Esta situação é mais indicada para comunidades fechadas e aglomeradas como as escolas ou as grandes cidades em que aumentando o tamanho da população, aumenta o número de contactos;
- sempre que o tamanho da população, N , é constante, usamos proporções de indivíduos e βsi como termo de contágio. Este termo provém de $\beta \frac{S}{N} I$ e de considerar proporções de indivíduos.

De entre os modelos com população de tamanho variável, fazemos ainda uma distinção de acordo com a taxa de contactos adequados considerada (dependente ou independente de N). No caso em que a taxa de contactos adequados é dependente de N , consideramos uma taxa de recrutamento Λ e uma taxa de mortalidade μ . No caso em que a taxa de contactos adequados é independente de N , a taxa de natalidade é representada por θ e a taxa de mortalidade é dada por uma função $f(N)$, de classe C^1 em $\mathbb{R}_0^+$, satisfazendo

$$f(N) > 0, \quad f'(N) > 0 \quad \text{e} \quad f(0) < \theta < f(\infty).$$

Esta última condição parece-nos razoável uma vez que: quando o número de indivíduos de uma população é muito baixo é necessária uma taxa de natalidade superior à taxa de mortalidade para permitir o desenvolvimento dos indivíduos da população; quando o número de indivíduos é exageradamente elevado, supondo que existem limitações

por parte do meio ambiente, é necessária uma taxa de mortalidade superior à taxa de natalidade para permitir que a população baixe para um número de indivíduos que esse meio ambiente consiga suportar.

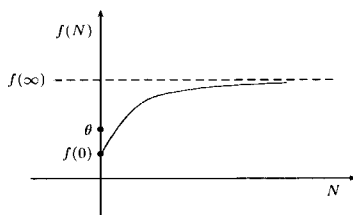


Figura 16: Uma possível representação gráfica da função $f(N)$.

3.2 O número de reprodução básico

A definição mais simples diz-nos que o **número de reprodução básico**, representado por $\mathcal{R}_0$, é o número esperado de casos secundários produzidos por um indivíduo infectado durante o seu período de infecção quando introduzido numa população constituída apenas por indivíduos susceptíveis.

Para a maior parte dos modelos epidemiológicos, o caso $\mathcal{R}_0 = 1$ é um valor de transição. Assim, $\mathcal{R}_0 < 1$ significa que, em média, um indivíduo infectado produz menos de uma nova infecção durante o seu período de infecção, e a infecção não invade a população; se $\mathcal{R}_0 > 1$ então cada indivíduo infectado produz, em média, mais de uma nova infecção, pelo que a doença pode invadir a população. Este princípio geral tem sido usado várias vezes para estimar a eficácia de planos de vacinação e a possibilidade de eliminação ou erradicação de uma infecção [1]. Contudo, existem modelos em que a situação $\mathcal{R}_0 < 1$ permite a existência de pontos de equilíbrio endémicos (ver secção 7.1) e portanto um cenário de doença. Esta observação conduziu à necessidade de uma definição matemática rigorosa para o número de reprodução básico. Diekmann et al. [4] definem $\mathcal{R}_0$, com toda a generalidade, como o raio espectral do "operador da próxima geração". P. van den Driessche e Watmough [5] aplicam essa definição a modelos epidemiológicos mais simples, mas ainda assim bastante abrangentes. No que se segue, descrevemos esta última abordagem.

Consideremos uma população heterogênea em que os indivíduos se distinguem uns dos outros pela sua idade, orientação sexual, posição espacial e/ou estado relativamente à

doença, mas que podem ser agrupados em n compartimentos homogêneos. Seja

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$$

onde $x_i \geq 0$ e representa o número de indivíduos no compartimento i . Para uma melhor organização das ideias, consideramos que os primeiros m compartimentos correspondem aos indivíduos infectados

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n)^t.$$

Existem então m compartimentos diferentes de indivíduos infectados e $n - m$ compartimentos diferentes de indivíduos não infectados.¹

Seja $\mathbf{X}_s$ o espaço da não doença, isto é,

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_s &= \{\mathbf{x} \geq 0 \mid x_i = 0, i = 1, \dots, m\} \\ &= \{(0, \dots, 0, x_{m+1}, \dots, x_n) \mid x_{m+1}, \dots, x_n \geq 0\}. \end{aligned}$$

Para o cálculo de $\mathcal{R}_0$, é importante distinguir as novas infecções de todas as outras alterações que ocorrem na população. Sejam então, para $i = 1, \dots, n$,

- $\mathcal{F}_i(\mathbf{x})$ a taxa de aparecimento de novas infecções no compartimento i ;
- $\mathcal{V}_i^+(\mathbf{x})$ a taxa de transferência de indivíduos para o interior do compartimento i por qualquer outra via que não o aparecimento de novas infecções;
- $\mathcal{V}_i^-(\mathbf{x})$ a taxa de transferência de indivíduos para fora do compartimento i .

Suponhamos que as funções $\mathcal{F}_i(\mathbf{x})$, $\mathcal{V}_i^+(\mathbf{x})$ e $\mathcal{V}_i^-(\mathbf{x})$ são pelo menos de classe $\mathcal{C}^2$ no seu domínio.

O modelo de transmissão da doença consiste de condições iniciais não negativas e de um sistema de n equações diferenciais do tipo

$$x'_i = f_i(\mathbf{x}) = \mathcal{F}_i(\mathbf{x}) - \mathcal{V}_i(\mathbf{x}), \quad i = 1, \dots, n \quad (3.1)$$

onde

$$\mathcal{V}_i(\mathbf{x}) = \mathcal{V}_i^-(\mathbf{x}) - \mathcal{V}_i^+(\mathbf{x}).$$

¹Nos modelos considerados na dissertação as variáveis são inicialmente apresentadas segundo a ordem (S, I, R) (ou (s, i, r)). Os cálculos que envolvem a determinação de $\mathcal{R}_0$ nesses modelos seguem a exposição feita nesta secção e portanto a ordem (I, S, R) (ou (i, s, r)).

De uma forma mais concisa, fazendo $\mathcal{F}(\mathbf{x}) = (\mathcal{F}_1(\mathbf{x}), \dots, \mathcal{F}_n(\mathbf{x}))$ e $\mathcal{V}(\mathbf{x}) = (\mathcal{V}_1(\mathbf{x}), \dots, \mathcal{V}_n(\mathbf{x}))$, podemos escrever o sistema (3.1) na forma

$$\mathbf{x}' = f(\mathbf{x}) = \mathcal{F}(\mathbf{x}) - \mathcal{V}(\mathbf{x}). \quad (3.2)$$

A função $\mathcal{F}(\mathbf{x})$ é, portanto, a parte do sistema relacionada com o aparecimento de novas infecções e a função $\mathcal{V}(\mathbf{x})$ é a parte relacionada com todos os outros movimentos entre os compartimentos que não o aparecimento de novas infecções. Estas funções devem satisfazer as cinco hipóteses seguintes

(H1) Se $\mathbf{x} \geq 0$ então $\mathcal{F}_i(\mathbf{x}), \mathcal{V}_i^+(\mathbf{x}), \mathcal{V}_i^-(\mathbf{x}) \geq 0$ para $i = 1, \dots, n$.

Isto significa que cada função, descrevendo uma transferência de indivíduos, terá de ser positiva ou nula.

(H2) Se existe $i = 1, \dots, n$ tal que $x_i = 0$ então $\mathcal{V}_i^-(\mathbf{x}) = 0$. Em particular, se $x \in \mathbf{X}_s$ então $\mathcal{V}_i^-(\mathbf{x}) = 0$ para $i = 1, \dots, m$.

Isto significa que se um compartimento está vazio, então não podem existir saídas (de qualquer tipo) desse compartimento.

Observação 3.2.1 Consideremos o modelo de transmissão de uma doença dado por (3.1) em que as funções $f_i, i = 1, \dots, n$, satisfazem as condições (H1) e (H2). Se existir i tal que $x_i = 0$ então

$$x'_i = \mathcal{F}_i(\mathbf{x}) + \mathcal{V}_i^+(\mathbf{x}) \geq 0$$

o que mostra que o cone não negativo $C = \{\mathbf{x} \in R^n | x_i \geq 0, i = 1, \dots, n\}$ é positivamente invariante. Resulta do Teorema de Existência e Unicidade (2.0.1) que para cada condição inicial não negativa de (3.1), existe uma única solução não negativa.

(H3) $\mathcal{F}_i(\mathbf{x}) \equiv 0$ se $i > m$.

Esta condição indica-nos que não pode haver entradas de novas infecções nos compartimentos de indivíduos não infectados.

(H4) $\mathcal{F}_i|_{\mathbf{X}_s} \equiv 0$ e $\mathcal{V}_i^+|_{\mathbf{X}_s} \equiv 0$ para $i = 1, \dots, m$.

Esta condição impõe que, numa situação de não doença, não haja entrada de novos indivíduos para os compartimentos de indivíduos infectados (nem por

reinfeção, nem por nascimento ou imigração). Isto garante que o subespaço de não doença, $\mathbf{X}_s$, seja invariante, isto é, se não existe doença na população então continuará a não existir doença.

Para enunciar a última condição precisamos de introduzir um novo conceito.

Definição 3.2.2 *Um ponto de equilíbrio de não doença de (3.1) é um ponto de equilíbrio do modelo livre de doença, isto é, de (3.1) restrito a $\mathbf{X}_s$.*

(H5) Se U_0 é um ponto de equilíbrio de não doença de (3.1) então todos os valores próprios de $-d\mathcal{V}(U_0)$ têm parte real negativa.

Esta condição diz-nos que, na ausência de nova infecção, qualquer ponto de equilíbrio de não doença é localmente assintoticamente estável. Assim, se considerarmos uma população próxima do ponto de equilíbrio de não doença, esta regressará a esse ponto de equilíbrio de acordo com o sistema linearizado

$$\mathbf{x}' = d\mathbf{f}(U_0)(\mathbf{x} - U_0). \quad (3.3)$$

Observação 3.2.3 *A invariância do cone C implica que esta derivada vai ser sempre lateral.*

As condições (H1)-(H5) permitem decompor as matrizes $d\mathcal{F}(U_0)$ e $d\mathcal{V}(U_0)$ de uma forma específica. Antes de mostrarmos essa decomposição, introduzimos alguns conceitos auxiliares.

Seja A uma matriz quadrada. Diz-se que A é positiva ($A > 0$) se todas as suas entradas são positivas. Analogamente se define matriz negativa, não negativa e não positiva. O **espectro** de A , $\sigma(A)$, é o conjunto dos valores próprios de A , o **raio espectral** de A é

$$\rho(A) = \max \{|\lambda|, \lambda \in \sigma(A)\},$$

e o **limite espectral** de A é

$$s(A) = \max \{|\operatorname{Re}(\lambda)|, \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Obviamente, $s(A) \leq \rho(A)$.

Diz-se que uma matriz real quadrada A é uma **Z-matriz** se todas as suas entradas fora da diagonal são não positivas. Resulta imediatamente da definição que qualquer

Z-matriz A pode ser escrita na forma

$$A = sI - B$$

para algum $s \in \mathbb{R}$ e $B \geq 0$. Uma Z-matriz A diz-se uma **M-matriz** se $s \geq \rho(B)$, uma **M-matriz singular** se $s = \rho(B)$, e uma **M-matriz não singular** se $s > \rho(B)$.

Lema 3.2.4 *Se U_0 é um ponto de equilíbrio de não doença de (3.1) e f satisfaz as condições (H1)-(H5) então*

$$d\mathcal{F}(U_0) = \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad d\mathcal{V}(U_0) = \begin{pmatrix} V & 0 \\ J_3 & J_4 \end{pmatrix}$$

onde F e V são matrizes $m \times m$ definidas por

$$F = \left(\frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial x_j}(U_0) \right)_{1 \leq i, j \leq m} \quad e \quad V = \left(\frac{\partial \mathcal{V}_i}{\partial x_j}(U_0) \right)_{1 \leq i, j \leq m}.$$

Além disso, a matriz F é não negativa, V é uma M-matriz não singular e todos os valores próprios de J_4 têm parte real positiva.

Demonstração: Seja U_0 um ponto de equilíbrio de não doença.

A condição (H3) implica que se $i > m$ então $\mathcal{F}_i(\mathbf{x}) = 0$ para todo o $\mathbf{x}$ e portanto

$$\frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = 0, \quad \text{para quaisquer } \mathbf{x} \text{ e } j = 1, \dots, n.$$

Em particular, $\frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial x_j}(U_0) = 0$ para $j = 1, \dots, n$, e a matriz $d\mathcal{F}(U_0)$ é da forma

$$d\mathcal{F}(U_0) = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por (H4), se $i \leq m$ então $\mathcal{F}_i(0, \dots, 0, x_{m+1}, \dots, x_n) = 0$, para qualquer $(x_{m+1}, \dots, x_n)$ e portanto

$$\frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial x_j}(0, \dots, 0, x_{m+1}, \dots, x_n) = 0, \quad \text{para quaisquer } (x_{m+1}, \dots, x_n) \text{ e } j = m+1, \dots, n.$$

Em particular, $\frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial x_j}(U_0) = 0$ e portanto

$$d\mathcal{F}(U_0) = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial x_j} \right)_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m} & \left(\frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial x_j} \right)_{1 \leq i \leq m, m+1 \leq j \leq n} \\ \left(\frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial x_j} \right)_{m+1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} & \left(\frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial x_j} \right)_{m+1 \leq i \leq n, m+1 \leq j \leq n} \end{pmatrix}_{|\mathbf{x}_0} = \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A matriz F é não negativa por (H1) e (H4): a função $\mathcal{F}$ é nula na fronteira do cone não negativo

$$C = \{\mathbf{x} \in R^n | x_i \geq 0, i = 1, \dots, n\}$$

e não negativa no interior desse cone, e o ponto U_0 pertence à fronteira de C , portanto $\mathcal{F}$ terá de ter derivada não negativa em U_0 .

Por (H2) e (H4), se $\mathbf{x} \in \mathbf{X}_s$ então $\mathcal{V}_i(\mathbf{x}) = \mathcal{V}_i^-(\mathbf{x}) - \mathcal{V}_i^+(\mathbf{x}) = 0 - 0 = 0$ para $i = 1, \dots, m$. Isto significa que

$$\mathcal{V}_i(0, \dots, 0, x_{m+1}, \dots, x_n) = 0, \quad \text{para quaisquer } (x_{m+1}, \dots, x_n) \text{ e } i = 1, \dots, m.$$

Daqui resulta que

$$\frac{\partial \mathcal{V}_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = 0, \quad \text{para quaisquer } \mathbf{x} \in \mathbf{X}_s \text{ e } j = m+1, \dots, n.$$

Assim, como $U_0 \in \mathbf{X}_s$

$$d\mathcal{V}(U_0) = \begin{pmatrix} * & 0 \\ * & * \end{pmatrix}.$$

Seja $\{e_j\}_{j=1, \dots, n}$ a base canônica euclideana, isto é, e_j é a coluna j da matriz identidade $n \times n$. Por definição de derivada parcial, para $j = 1, \dots, m$, tem-se

$$\frac{\partial \mathcal{V}_i}{\partial x_j}(U_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{V}_i(U_0 + he_j) - \mathcal{V}_i(U_0)}{h}.$$

Vamos mostrar que V é uma M-matriz não singular. Como já foi visto, (H2) e (H4) implicam que $\mathcal{V}_i(U_0)$, para $i = 1, \dots, m$. Sejam i, j tais que $1 \leq i, j \leq m$. A componente i de U_0 é 0 e a componente i de $U_0 + he_j$, com $i \neq j$, é também 0. Por (H2) e (H1) tem-se

$$\mathcal{V}_i(U_0 + he_j) = \mathcal{V}_i^-(U_0 + he_j) - \mathcal{V}_i^+(U_0 + he_j) \leq 0.$$

Por continuidade da derivada e por h ser positivo (invariância do cone C), $\frac{\partial \mathcal{V}_i}{\partial x_j}(U_0) \leq 0$, para $i \leq m$ e $i \neq j$, e portanto V é uma Z-matriz. Por (H5), todos os valores próprios $df(U_0) = d\mathcal{F}(U_0) - \mathcal{V}(U_0) = -d\mathcal{V}(U_0)$ têm parte real negativa sempre que $\mathcal{F} \equiv 0$ (o que acontece se só considerarmos $\mathcal{V}(U_0)$), o que implica que todos os valores próprios de V têm parte real positiva.

Por um resultado sobre M-matrizes que afirma que se uma Z-matriz B tem $s(B) > 0$ então B é uma M-matriz não singular, conclui-se que V é uma M-matriz não singular.

A condição (H5) implica que todos os valores próprios de $d\mathcal{V}(U_0)$ têm parte real positiva, o que faz com que também J_4 tenha valores próprios com parte real positiva, e termina a demonstração do lema.

A definição mais geral de número de reprodução básico é então a seguinte:

Definição 3.2.5 *O número de reprodução básico, $\mathcal{R}_0$, é o número esperado de novas infecções produzidas por um indivíduo infectado numa população que se encontra no ponto de equilíbrio de não doença, assumindo que o indivíduo infectado permanece nessa população durante a totalidade do seu período de infecção.*

Para determinar o destino de um indivíduo infectado depois de introduzido na população (que se encontra no ponto de equilíbrio de não doença), consideramos a dinâmica do sistema linearizado (3.3) com o processo de reinfeção desligado, isto é, consideramos o sistema

$$\mathbf{x}' = -d\mathcal{V}(U_0)(\mathbf{x} - U_0). \quad (3.4)$$

Por (H5), o ponto de equilíbrio de não doença do sistema (3.4) é localmente assintoticamente estável. Assim, (3.4) pode ser usado para determinar o destino de um número pequeno de indivíduos infectados numa população onde não exista doença.

Seguindo a abordagem do operador da próxima geração, desenvolvida por Diekmann et al. [4], interpretamos as gerações de indivíduos infectados como vectores. Assim, sejam

- . $\psi_i(0)$ o número de indivíduos infectados inicialmente no compartimento i (de indivíduos infectados);
- . $\psi(t) = (\psi_1(t), \dots, \psi_m(t))^t$ o vector que representa o número desses indivíduos introduzidos inicialmente na população que ainda estão em algum dos compartimentos t unidades de tempo depois de aí terem sido introduzidos.

O vector $\psi(t)$ pode ser representado por $(x_1(t), \dots, x_m(t))^t$ e $\psi(+\infty) = 0$ uma vez que todos os indivíduos têm um tempo de vida limitado.

A forma da matriz $d\mathcal{V}(\mathbf{x}_0)$ e a equação (3.4) implicam que ψ satisfaz a equação

$$\psi'(t) = -V\psi(t)$$

cujas soluções são únicas e são dadas por $\psi(t) = e^{-Vt}\psi(0)$. Assim,

$$\int_0^{+\infty} F\psi(t)dt$$

dá-nos o número esperado de novas infecções produzidas pelos indivíduos infectados $\psi(0)$ que foram inicialmente introduzidos na população. Ora,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} F\psi(t)dt &= \int_0^{+\infty} FV^{-1}V\psi(t)dt \\ &= -FV^{-1} \int_0^{+\infty} \psi'(t)dt \\ &= FV^{-1}\psi(0) \end{aligned}$$

portanto, de uma forma mais simples, o número esperado de novas infecções produzidas pelos indivíduos infectados $\psi(0)$ que foram inicialmente introduzidos na população é $FV^{-1}\psi(0)$. Seja $K = FV^{-1}$.

Para interpretar o significado das entradas de K , fixemos $k \in \{1, \dots, m\}$ e consideremos um indivíduo infectado introduzido no compartimento k (de indivíduos infectados) de uma população livre de doença. Para $j = \{1, \dots, m\}$, a entrada (j, k) de V^{-1} representa o tempo médio que esse indivíduo infectado gasta no compartimento j durante o seu período de vida, assumindo que a população permanece perto do ponto de equilíbrio de não doença e proibindo a reinfeção. Para $i, j = \{1, \dots, m\}$, a entrada (i, j) de F representa a taxa à qual os indivíduos infectados do compartimento j produzem novas infecções no compartimento i . Assim, a entrada (i, k) de K representa o número esperado de novas infecções no compartimento i produzidas pelo indivíduo infectado inicialmente introduzido no compartimento k .

De entre todas as entradas da matriz, falta agora extrair um número que represente a "média" dessas entradas. Diekmann et al. [4] designam a matriz $K = FV^{-1}$ por **operador da próxima geração** e definem

$$\mathcal{R}_0 = \rho(FV^{-1}),$$

como o **raio espectral do operador da próxima geração**.

Usando teoria de M-matrizes, pode-se mostrar que K é uma matriz não negativa e que o raio espectral $\mathcal{R}_0$ é o seu valor próprio dominante [5]. P. van den Driessche e Watmough [5] provam que $\mathcal{R}_0$ é um parâmetro limiar para a estabilidade local do ponto de equilíbrio de não doença.

Teorema 3.2.6 [5] *Seja U_0 um ponto de equilíbrio de não doença do modelo (3.1). Se $\mathcal{R}_0 < 1$ então U_0 é localmente assintoticamente estável, e se $\mathcal{R}_0 > 1$ então U_0 é instável.*

A prova deste resultado [5] passa por mostrar que $s(F - V) < 0$ se e só se $\rho(FV^{-1}) < 1$, $s(F - V) = 0$ se e só se $\rho(FV^{-1}) = 1$ e $s(F - V) > 0$ se e só se $\rho(FV^{-1}) > 1$, usando teoria de M-matrizes.

Observação 3.2.7 *O método de cálculo para a determinação de $\mathcal{R}_0$ acima apresentado é formulado para a situação em que o sistema modela o **número de indivíduos** existentes em cada compartimento. No caso em que **N é constante**, esse procedimento continua a ser válido se o sistema modelar as **proporções de indivíduos** existentes em cada compartimento.*

Capítulo 4

Modelo SIS sem vacinação

Nesta secção estudamos vários modelos SIS sem vacinação. Supomos em todos eles que a entrada de indivíduos para a população (por nascimento, imigração,...) é feita apenas para o compartimento dos susceptíveis.

4.1 População de tamanho constante [7]

Esquematicamente, e com a notação introduzida na secção 3.1, temos

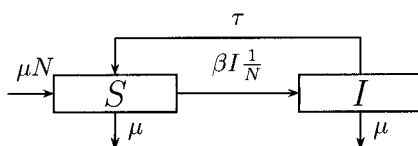


Figura 17: Modelo SIS sem vacinação numa população de tamanho constante.

a que correspondem as equações

$$\begin{aligned} S' &= \mu N - \mu S - \beta \frac{S}{N} I + \tau I \\ I' &= \beta \frac{S}{N} I - (\mu + \tau) I. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Em termos de proporções de indivíduos vem

$$\begin{aligned} s' &= \mu(1 - s) - \beta si + \tau i \\ i' &= \beta si - (\mu + \tau)i. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Proposição 4.1.1 *O número de reprodução básico associado ao sistema de equações (4.2) é*

$$\mathcal{R}_0 = \beta \frac{1}{\mu + \tau}.$$

Demonstração: Seja $\mathbf{x} = (i, s)$. Pelo método para a determinação de $\mathcal{R}_0$ descrito na secção 3.2 temos

$$\mathcal{F}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \beta si \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{V}^-(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} (\mu + \tau)i \\ \mu s + \beta si \end{pmatrix}, \quad \mathcal{V}^+(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu + \tau i \end{pmatrix}.$$

Em particular,

$$\mathcal{V}(\mathbf{x}) = \mathcal{V}^-(\mathbf{x}) - \mathcal{V}^+(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} (\mu + \tau)i \\ -\mu(1 - s) + \beta si - \tau i \end{pmatrix}.$$

Seja $\mathbf{X}_s = \{(0, s) | s > 0\}$ o espaço de não doença. Começamos por verificar que as hipóteses (H1)-(H4), referidas na secção 3.2, são trivialmente satisfeitas.

(H1) Se $\mathbf{x} \geq 0$ então $\mathcal{F}_i(\mathbf{x}), \mathcal{V}_i^-(\mathbf{x}), \mathcal{V}_i^+(\mathbf{x}) \geq 0$ para $i = 1, 2$;

(H2) Se $\mathbf{x}_i = 0$ então $\mathcal{V}_i^-(\mathbf{x}) = 0$ para $i = 1, 2$. Em particular, se $\mathbf{x} \in \mathbf{X}_s$ então $\mathcal{V}_1^-(\mathbf{x}) = 0$;

(H3) $\mathcal{F}_2(\mathbf{x}) \equiv 0$;

(H4) $\mathcal{F}_1|_{\mathbf{X}_s} \equiv 0$ e $\mathcal{V}_1^+|_{\mathbf{X}_s} \equiv 0$.

Para verificar (H5) precisamos de determinar o ponto de equilíbrio de não doença de (4.2). Ora, (4.2) restrito a $\mathbf{X}_s$ é a equação

$$s' = \mu(1 - s)$$

cujo único ponto de equilíbrio é 1 e portanto o ponto de equilíbrio de não doença de (4.2) tem coordenadas

$$U_0 : (s_0, i_0) = (1, 0).$$

Os valores próprios da matriz

$$-d\mathcal{V}(U_0) = \begin{pmatrix} -(\mu + \tau) & 0 \\ -\beta + \tau & -\mu \end{pmatrix}$$

têm parte real negativa. Isto mostra que a hipótese (H5) é satisfeita.

Sejam agora F e V as matrizes 1×1 definidas por

$$F = \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial i}|_{u_0} = \beta \quad \text{e} \quad V = \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial i}|_{u_0} = \mu + \tau.$$

O operador da próxima geração é então

$$FV^{-1} = \beta \frac{1}{\mu + \tau}$$

pelo que o número de reprodução básico é

$$\mathcal{R}_0 = \rho(FV^{-1}) = \beta \frac{1}{\mu + \tau}.$$

Observação 4.1.2 Dado que β é o coeficiente de transmissão e $\frac{1}{\mu + \tau}$ é a duração média do período efectivo de infecciosidade, a expressão obtida para $\mathcal{R}_0$ representa, de facto, o número médio de novas infecções provocadas por um indivíduo infectado quando colocado numa população que se encontra no ponto de equilíbrio de não doença (neste caso, constituída apenas por indivíduos susceptíveis: $s_0 = 1$).

Apresentamos em seguida uma análise qualitativa do comportamento de (4.2).

O sistema pode ser simplificado fazendo uma adimensionalização.

Seja

$$D = \frac{1}{\mu + \tau}$$

a duração média do período efectivo de infecciosidade, então

$$t' = \frac{t}{D}$$

representa o tempo medido em unidades da duração média da infecção.

O sistema diferencial (4.2) reescrito em função de t' é

$$\begin{aligned} s' &= \mu D(1 - s) - \beta Dsi + \tau iD \\ i' &= \beta Dsi - (\mu + \tau)Di, \end{aligned}$$

que é equivalente a

$$\begin{aligned} s' &= \mu D - \beta Dsi + (\tau + \mu)Di - \mu Di - \mu Ds \\ i' &= \beta Dsi - (\mu + \tau)Di. \end{aligned}$$

Sendo

$$\mathcal{R}_0 = \beta D \quad e \quad e = \mu D = D/(1/\mu),$$

onde e representa a duração média de um episódio infeccioso relativamente ao tempo médio de vida, o sistema anterior simplifica-se para

$$\begin{aligned} s' &= e - \mathcal{R}_0 si + i - ei - es \\ i' &= \mathcal{R}_0 si - i. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Esquemáticamente temos

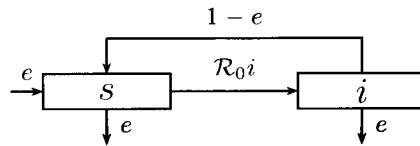


Figura 18: Modelo SIS sem vacinação numa população de tamanho constante com parâmetros dependentes do número de reprodução básico ($\mathcal{R}_0$) e da duração média de um episódio infeccioso relativamente ao tempo médio de vida (e).

Uma vez que $s + i = 1$ o sistema (4.3) pode ser reduzido a

$$i' = \mathcal{R}_0(1 - i)i - i. \quad (4.4)$$

Proposição 4.1.3 *A região simplesmente conexa*

$$T = \{(s, i) : s > 0, i \geq 0, s + i = 1\}$$

é positivamente invariante para (4.2). Em particular, as semi-órbitas positivas do sistema são limitadas.

Demonstração: Em qualquer ponto (s, i) pertencente à recta $s + i = 1$ tem-se $s' + i' = e(1 - s - i) = 0$.

Definição 4.1.4 *Um ponto de equilíbrio endémico de (4.2) é um ponto de equilíbrio do sistema em que o número de infectados na população é positivo.*

Proposição 4.1.5

- (a) *Se $\mathcal{R}_0 \leq 1$ então o sistema (4.2) admite apenas o ponto de equilíbrio de não doença $U_0 = (s_0, i_0) = (1, 0)$.*

- (b) Se $\mathcal{R}_0 > 1$ então o sistema admite dois pontos de equilíbrio, o ponto de equilíbrio de não doença U_0 e o ponto de equilíbrio endémico $U^* = (s^*, i^*) = \left(\frac{1}{\mathcal{R}_0}, 1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right)$.

Demonstração: O ponto de equilíbrio de não doença já foi calculado anteriormente e, pelas suas coordenadas, existe sempre.

Para a determinação do ponto de equilíbrio endémico usamos a equação (4.4), igualamos a zero e obtemos (pelo facto de se ter necessariamente $i^* \neq 0$)

$$i^* = 1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}.$$

Como o número de indivíduos infectados no ponto de equilíbrio endémico tem de ser positivo, este ponto de equilíbrio só existe quando $\mathcal{R}_0 > 1$.

Como $s^* + i^* = 1$, vem que $s^* = \frac{1}{\mathcal{R}_0}$.

Teorema 4.1.6

- (a) Se $\mathcal{R}_0 < 1$ então o ponto de equilíbrio de não doença U_0 é globalmente assintoticamente estável em T .
- (b) Se $\mathcal{R}_0 > 1$ então o ponto de equilíbrio de não doença U_0 é instável e o ponto de equilíbrio endémico U^* é globalmente assintoticamente estável em

$$T - \{(s, 0) : 0 < s \leq 1\}.$$

Demonstração: Consideramos a equação (4.4).

- (a) Se $\mathcal{R}_0 < 1$ então 0 é o único ponto de equilíbrio da equação e a função $\mathbf{f}(i) = i(\mathcal{R}_0 - \mathcal{R}_0 i - 1)$ é negativa em $]0, +\infty[$. Daqui resulta que $U_0 = (1, 0)$ é globalmente assintoticamente estável.
- (b) Se $\mathcal{R}_0 > 1$ então a estabilidade global dos pontos de equilíbrio é determinada pelo sinal da função $\mathbf{f}(i)$: é positiva em $]0, 1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}[$ e negativa em $]1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}, +\infty[$. Deste modo $U_0 = (1, 0)$ é instável e $U^* = \left(\frac{1}{\mathcal{R}_0}, 1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right)$ é globalmente assintoticamente estável.

4.2 População de tamanho variável

4.2.1 Com termo de contágio βSI [12]

Esquemáticamente temos

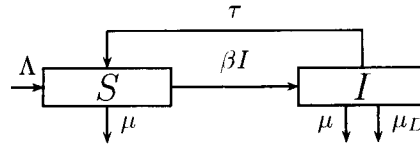


Figura 19: Modelo SIS sem vacinação com população de tamanho variável e termo de contágio βSI .

a que correspondem as equações

$$\begin{aligned} S' &= \Lambda - \beta SI - \mu S + \tau I \\ I' &= \beta SI - (\mu + \tau + \mu_D)I \\ (N' &= \Lambda - \mu N - \mu_D I). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Proposição 4.2.1 *O número de reprodução básico de (4.5) é*

$$\mathcal{R}_0 = \beta \frac{1}{\mu + \tau + \mu_D} \frac{\Lambda}{\mu}.$$

Demonstração: Seja $\mathbf{X} = (I, S)$. Pelo método de cálculo do $\mathcal{R}_0$ descrito na secção 3.2 temos

$$\mathcal{F}(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} \beta SI \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{V}^-(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} (\mu + \tau + \mu_D)I \\ \mu S + \beta SI \end{pmatrix}, \quad \mathcal{V}^+(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \Lambda + \tau I \end{pmatrix}.$$

Em particular,

$$\mathcal{V}(\mathbf{X}) = \mathcal{V}^-(\mathbf{X}) - \mathcal{V}^+(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} (\mu + \tau + \mu_D)I \\ \mu S + \beta SI - \tau I - \Lambda \end{pmatrix}.$$

Seja $\mathbf{X}_s = \{(0, S) | S > 0\}$ o espaço de não doença. Verificamos facilmente que as hipóteses (H1)-(H4) referidas na secção 3.2 são satisfeitas.

O ponto de equilíbrio de não doença de (4.5) é o ponto de equilíbrio da equação

$$S' = \Lambda - \mu S,$$

pelo que tem coordenadas

$$U_0 : (S_0, I_0) = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0 \right).$$

Os valores próprios da matriz

$$-d\mathcal{V}(U_0) = \begin{pmatrix} -(\mu + \tau + \mu_D) & 0 \\ -\beta \frac{\Lambda}{\mu} + \tau & -\mu \end{pmatrix}$$

têm parte real negativa e portanto a condição (H5) é verificada.

Sejam agora F e V as matrizes 1×1 definidas por

$$F = \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial I} \Big|_{U_0} = \beta \frac{\Lambda}{\mu} \quad \text{e} \quad V = \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial I} \Big|_{U_0} = \mu + \tau + \mu_D.$$

Então

$$FV^{-1} = \beta \frac{1}{\mu + \tau + \mu_D} \frac{\Lambda}{\mu}$$

e $\mathcal{R}_0$, sendo o valor próprio dominante de FV^{-1} , coincide exactamente com essa expressão.

Observação 4.2.2 Na expressão de $\mathcal{R}_0$, β é o coeficiente de transmissão, $\frac{\Lambda}{\mu}$ é o número de susceptíveis no ponto de equilíbrio de não doença e $\frac{1}{\mu + \tau + \mu_D}$ é a duração média do período efectivo de infecciosidade.

Proposição 4.2.3

- (a) Se $I(0) = 0$ então $I \equiv 0$ e $\lim_{t \rightarrow +\infty} S(t) = \frac{\Lambda}{\mu}$.
- (b) Se $I(0) > 0$ então $I(t) > 0$, para qualquer instante t positivo.
- (c) A região simplesmente conexa $T = \left\{ (S, I) : S > 0, I \geq 0, S + I \leq \frac{\Lambda}{\mu} \right\}$ é positivamente invariante para (4.5). Em particular, as semi-órbitas positivas do sistema são limitadas.

Demonstração:

- (a) Em qualquer ponto do tipo $(S, 0)$ tem-se $I' = 0$ e o semi-eixo horizontal

$$\{(S, 0) : S > 0\}$$

é positivamente invariante para (4.5). Em particular, se $I(0) = 0$ tem-se que $I(t) = 0$, para qualquer t positivo. Ainda sobre esse semi-eixo horizontal tem-se $S' = \Lambda - \mu S$ que é uma equação diferencial linear não homogénea cuja solução é

$$S(t) = \left(S(0) - \frac{\Lambda}{\mu} \right) e^{-\mu t} + \frac{\Lambda}{\mu}$$

e tende para $\frac{\Lambda}{\mu}$ quando $t \rightarrow +\infty$.

- (b) Por redução ao absurdo, suponhamos que $I(0) > 0$ e que existe um instante t_* positivo tal que $I(t_*) = 0$. Então, pela invariância do semi-eixo horizontal (referida anteriormente), $I(t) = 0$ para qualquer instante $t > t_*$, o que é absurdo pois conduz à intersecção de trajectórias de um sistema autónomo no diagrama de fase.
- (c) Observamos que se $I = 0$ então $I' = 0$, e se $S = 0$ então $S' = \Lambda + \tau I > 0$, o que implica que as órbitas do sistema nunca abandonam o primeiro quadrante. Para além disso, sempre que $S + I = \frac{\Lambda}{\mu}$ temos

$$S' + I' = \Lambda - \mu(S + I) - \mu_D I = -\mu_D I \leq 0.$$

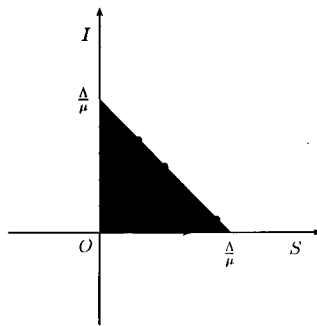


Figura 20: Região T e a direcção do campo de vectores sobre a fronteira. Por (a), sobre o eixo dos SS tem-se $\lim_{t \rightarrow +\infty} S(t) = \frac{\Lambda}{\mu}$.

Proposição 4.2.4

- (a) Se $\mathcal{R}_0 \leq 1$ então o sistema (4.5) admite apenas o ponto de equilíbrio de não doença $U_0 = (S_0, I_0) = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0 \right)$.
- (b) Se $\mathcal{R}_0 > 1$ então o sistema admite o ponto de equilíbrio de não doença U_0 e o ponto de equilíbrio endémico $U^* = (S^*, I^*) = \left(\frac{\mu + \tau + \mu_D}{\beta}, \frac{\Lambda}{\mu + \mu_D} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0} \right) \right)$.

Demonstração: As coordenadas S_0 e R_0 de U_0 já foram determinadas anteriormente e verificamos facilmente que este ponto de equilíbrio existe sempre.

Para o cálculo do ponto de equilíbrio endémico observamos que

$$I' = 0 \iff I = 0 \vee S = \frac{\mu + \tau + \mu_D}{\beta}.$$

Pelo facto de se ter necessariamente $I^* \neq 0$ obtemos

$$S^* = \frac{\mu + \tau + \mu_D}{\beta}.$$

Substituindo esta expressão na equação $S' = 0$ vem, após algumas manipulações algébricas simples,

$$I^* = \frac{\Lambda}{\mu + \mu_D} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0} \right).$$

Como o número de indivíduos infectados no ponto de equilíbrio endémico tem de ser positivo, I^* só existe quando $\mathcal{R}_0 > 1$.

Para facilitar o estudo da estabilidade global dos pontos de equilíbrio usamos dois sistemas equivalentes ao sistema (4.5), e diferentes entre si, um para o caso em que $\mathcal{R}_0 \leq 1$ e o outro para o caso em que $\mathcal{R}_0 > 1$.

Seja $\mathcal{R}_0 \leq 1$.

Fazendo $x = S - \frac{\Lambda}{\mu}$, o sistema equivalente a (4.5) e que vamos usar aquando o estudo da estabilidade global do ponto de equilíbrio de não doença no caso em que $\mathcal{R}_0 \leq 1$ é então

$$\begin{aligned} x' &= -\mu x - \left(\beta \frac{\Lambda}{\mu} - \tau \right) I - \beta I x \\ I' &= - \left[(\mu + \tau + \mu_D) - \beta \frac{\Lambda}{\mu} \right] I + \beta I x. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Seja $\mathcal{R}_0 > 1$.

Neste caso vamos reescrever o sistema (4.5) em função das coordenadas do ponto de equilíbrio endémico.

Consideremos a equação S' do referido sistema, isto é,

$$S' = \Lambda - \beta SI - \mu S + \tau I.$$

Já vimos que a coordenada S^* do ponto de equilíbrio endémico é dada por

$$S^* = \frac{\mu + \tau + \mu_D}{\beta} \iff \tau = \beta S^* - (\mu + \mu_D).$$

Substituindo o parâmetro τ pela expressão obtida, a equação S' é equivalente a

$$S' = \Lambda - \beta SI - \mu S + \beta S^* I - (\mu + \mu_D)I.$$

Fazendo uma expansão da equação anterior obtemos

$$\begin{aligned} S' &= \Lambda - \beta SI - \mu S + \beta S^* I - (\mu + \mu_D)I + (\mu S^* - \mu S^*) + (\beta S^* I^* - \beta S^* I^*) \\ &= (\Lambda - \beta S^* I^* - \mu S^*) - \beta SI - \mu S + \beta S^* I - \mu I - \mu_D I + \mu S^* + \beta S^* I^*. \end{aligned}$$

No ponto de equilíbrio endêmico a condição

$$\Lambda - \beta S^* I^* - \mu S^* + \tau I^* = 0 \iff \Lambda - \beta S^* I^* - \mu S^* = -\tau I^*$$

é verificada. Ora, substituindo na equação S' , verificamos que

$$S' = (-\tau I^*) - \beta SI - \mu S + \beta S^* I - \mu I - \mu_D I + \mu S^* + \beta S^* I^*.$$

No ponto de equilíbrio endêmico temos

$$\beta S^* I^* - (\mu + \tau + \mu_D)I^* = 0 \iff -\tau I^* = -\beta S^* I^* + \mu I^* + \mu_D I^*,$$

pelo que a equação S' é equivalente a

$$S' = -\beta S^* I^* + \mu I^* + \mu_D I^* - \beta SI - \mu S + \beta S^* I - \mu I - \mu_D I + \mu S^* + \beta S^* I^*.$$

Simplificando a equação anterior, chegamos ao pretendido, ou seja,

$$S' = -(\mu + \mu_D)(I - I^*) - (\mu + \beta I^*)(S - S^*) - \beta(I - I^*)(S - S^*).$$

Consideremos a equação I' do sistema (4.5), isto é,

$$I' = \beta SI - (\mu + \tau + \mu_D)I.$$

De acordo com a coordenada S^* do ponto de equilíbrio endêmico, a equação anterior pode ser escrita de outra forma, ou seja,

$$\begin{aligned} I' &= \beta SI - \beta S^* I \\ &= \beta I(S - S^*). \end{aligned}$$

O sistema equivalente a (4.5) e que vamos usar no estudo da estabilidade global do ponto de equilíbrio endêmico é então

$$\begin{aligned} S' &= -(\mu + \beta I^*)(S - S^*) - (\mu + \mu_D)(I - I^*) - \beta(S - S^*)(I - I^*) \quad (4.7) \\ I' &= \beta I(S - S^*). \end{aligned}$$

Em seguida apresentamos um resultado auxiliar para o estudo da estabilidade global dos pontos de equilíbrio.

Lema 4.2.5 *Seja $\mathcal{R}_0 \leq 1$.*

- (a) *Se $\beta \frac{\Lambda}{\mu} - \tau > 0$ então a função $W_1(x, I) = \frac{\beta}{2}x^2 + \left(\beta \frac{\Lambda}{\mu} - \tau\right) I$ é uma função de Liapunov estrita para o ponto de equilíbrio de não doença U_0 .*
- (b) *Se $\beta \frac{\Lambda}{\mu} - \tau \leq 0$ então a função $W_2(x, I) = |x| + I$ é uma função de Liapunov estrita para o ponto de equilíbrio de não doença U_0 .*

Seja $\mathcal{R}_0 > 1$.

- (c) *A função $W_3(S, I) = \frac{\beta}{2}(S - S^*)^2 + (\mu + \mu_D) \left(I - I^* - I^* \ln \frac{I}{I^*}\right)$ é uma função de Liapunov estrita para o ponto de equilíbrio endêmico U^* .*

Demonstração: Para cada uma das alíneas enunciadas, mostramos que as três condições de função de Liapunov estrita (2.0.9) são verificadas para o ponto de equilíbrio em causa.

Para a demonstração das alíneas (a) e (b) usamos o sistema (4.6) e portanto as coordenadas do ponto de equilíbrio de não doença são da forma $U_0 = (x_0, I_0) = (0, 0)$. No que diz respeito à alínea (c) usamos o sistema (4.7) e as coordenadas do ponto de equilíbrio endêmico são dadas por $U^* = (S^*, I^*)$.

Suponhamos que $\beta \frac{\Lambda}{\mu} - \tau > 0$. Então

- (i) $W_1(0, 0) = 0$ e $W_1(x, I) > 0$ para todo o par $(x, I) \neq (0, 0)$.

(ii)

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}(W_1(x, I)) &= (dW_1(x, I))(x', I') \\
 &= \beta x x' + \left(\beta \frac{\Lambda}{\mu} - \tau\right) I' \\
 &= -\beta \mu x^2 - \beta x I \left(\beta \frac{\Lambda}{\mu} - \tau\right) - \beta^2 I x^2 - \\
 &\quad - \left(\beta \frac{\Lambda}{\mu} - \tau\right) \left[(\mu + \tau + \mu_D) - \beta \frac{\Lambda}{\mu}\right] I + \beta x I \left(\beta \frac{\Lambda}{\mu} - \tau\right) \\
 &= -\beta \mu x^2 - \beta^2 I x^2 - \left(\beta \frac{\Lambda}{\mu} - \tau\right) \left[(\mu + \tau + \mu_D) - \beta \frac{\Lambda}{\mu}\right] I \\
 &\leq 0,
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

para qualquer (x, I) , pois $\mathcal{R}_0 \leq 1$ implica $\mu + \tau + \mu_D - \beta \frac{\Lambda}{\mu} \geq 0$.

Em particular, $\frac{d}{dt}(W_1(x, I)) \leq 0$, para todo o par ordenado (x, I) diferente de U_0 .

(iii)

$$\frac{d}{dt}(W_1(x, I)) = 0 \iff -\beta\mu x^2 - \beta^2 I x^2 = \left(\beta \frac{\Lambda}{\mu} - \tau\right) \left[(\mu + \tau + \mu_D) - \beta \frac{\Lambda}{\mu}\right] I.$$

Ora, $-\beta\mu x^2 - \beta^2 I x^2 \leq 0$ e $\left(\beta \frac{\Lambda}{\mu} - \tau\right) \left[(\mu + \tau + \mu_D) - \beta \frac{\Lambda}{\mu}\right] I \geq 0$.

O sistema de equações

$$\left(\beta \frac{\Lambda}{\mu} - \tau\right) \left[(\mu + \tau + \mu_D) - \beta \frac{\Lambda}{\mu}\right] I = 0$$

$$-\beta\mu x^2 - \beta^2 I x^2 = 0$$

é equivalente a

$$I = 0$$

$$x = 0.$$

Concluimos que $\frac{d}{dt}(W_1(x, I)) = 0$ se e só se $(x, I) = (0, 0)$, o que significa que $\frac{d}{dt}(W_1(x, I)) < 0$, para todo o par ordenado (x, I) diferente de U_0 .

Suponhamos agora que $\beta \frac{\Lambda}{\mu} - \tau < 0$. Então

(i) $W_2(0, 0) = 0$ e $W_2(x, I) > 0$ para todo o par $(x, I) \neq (0, 0)$.

(ii)

$$\begin{aligned} \frac{d^+}{dt}(W_2(x, I)) &= (d^+ W_2(x, I))(x', I') \\ &= -\mu |x| - \left(\beta \frac{\Lambda}{\mu} - \tau\right) I - \beta I |x| - \left[(\mu + \tau + \mu_D) - \beta \frac{\Lambda}{\mu}\right] I + \\ &\quad + \beta I |x| \\ &= -\mu |x| - (\mu + \mu_D) I \\ &\leq 0, \end{aligned}$$

para qualquer (x, I) . Em particular para todo o par ordenado (x, I) diferente de U_0 .

(iii)

$$\frac{d^+}{dt}(W_2(x, I)) = 0 \iff |x| = -\frac{\mu + \mu_D}{\mu}I.$$

Como $|x| = -\frac{\mu + \mu_D}{\mu}I \leq 0$ e $|x|$ só pode tomar valores não negativos, teremos de ter necessariamente $x = 0$. Daqui resulta $I = 0$ e portanto $\frac{d^+}{dt}(W_2(x, I)) < 0$ para todo o par ordenado (x, I) diferente de U_0 .

Finalmente provamos a alínea (c) do lema.

$$(i) \quad W_3(S^*, I^*) = \frac{\beta}{2}(S^* - S^*)^2 + (\mu + \mu_D)(I^* - I^* - I^* \ln \frac{I^*}{I^*}) = 0.$$

Como $\frac{\beta}{2}(S - S^*)^2 > 0$, $\mu + \mu_D > 0$ e a função $f(I) = I - I^* - I^* \ln \frac{I}{I^*}$ tem um mínimo local em $I = I^*$, vem que $W_3(S, I) > 0$ para todo o par $(S, I) \neq (S^*, I^*)$.

(ii)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(W_3(S, I)) &= (dW_3(S, I))(S', I') \\ &= \beta(S - S^*)S' + (\mu + \mu_D)\left(I' - I^* \frac{I'}{I}\right) \\ &= -\beta(\mu + \beta I^*)(S - S^*)^2 - \beta(\mu + \mu_D)(I - I^*)(S - S^*) - \\ &\quad -\beta^2(S - S^*)^2(I - I^*) + (\mu + \mu_D)[\beta I(S - S^*) - I^* \beta(S - S^*)] \\ &= -\beta(\mu + \beta I^*)(S - S^*)^2 - \beta^2(S - S^*)^2(I - I^*) \\ &= -\beta(S - S^*)^2(\mu + \beta I) \\ &\leq 0, \end{aligned}$$

para todo o par (S, I) . Em particular, para todo o par ordenado (S, I) diferente de U^* .

(iii)

$$\frac{d}{dt}(W_3(S, I)) = 0 \iff S = S^* \vee I = -\frac{\mu}{\beta}.$$

Como o número de infectados só pode tomar valores não negativos, $\frac{d}{dt}(W_3(S, I)) = 0$ se e só se $(S, I) = (S^*, I^*)$, o que significa que $\frac{d}{dt}(W_3(S, I)) < 0$ para todo o par ordenado (S, I) diferente de U^* .

Teorema 4.2.6

- (a) Se $\mathcal{R}_0 \leq 1$ então o ponto de equilíbrio de não doença U_0 é globalmente assintoticamente estável em T .
- (b) Se $\mathcal{R}_0 > 1$ então o ponto de equilíbrio de não doença U_0 é instável e o ponto de equilíbrio endêmico U^* é globalmente assintoticamente estável em

$$T - \left\{ (S, 0) : 0 < S \leq \frac{\Lambda}{\mu} \right\}.$$

Demonstração:

- (a) Suponhamos que $\mathcal{R}_0 \leq 1$. Tendo em consideração o sistema (4.6) e as alíneas (a) e (b) do lema 4.2.5 resulta imediatamente do teorema 2.0.10 que U_0 é globalmente assintoticamente estável.
- (b) Seja $\mathcal{R}_0 > 1$. Nesta situação, U_0 é instável, pelo teorema 3.2.6. Relativamente ao ponto de equilíbrio endêmico, considerando o sistema (4.7) e a alínea (c) do lema 4.2.5 resulta imediatamente do teorema 2.0.10 que U^* é globalmente assintoticamente estável.

4.2.2 Com termo de contágio $\beta \frac{S}{N} I$

Esquemáticamente temos

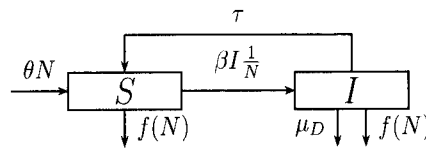


Figura 21: Modelo SIS sem vacinação com população de tamanho variável e termo de contágio $\beta \frac{S}{N} I$.

As equações do modelo são

$$\begin{aligned} S' &= \theta N - \beta \frac{S}{N} I - f(N)S + \tau I \\ I' &= \beta \frac{S}{N} I - [\tau + \mu_D + f(N)]I \\ (N' &= N[\theta - f(N)] - \mu_D I). \end{aligned} \tag{4.9}$$

Sendo $s = \frac{S}{N}$ e $i = \frac{I}{N}$ tem-se

$$\begin{aligned}
 s' &= \frac{S'}{N} - \frac{N'}{N}s \\
 &= \theta - \beta is - f(N)s + \tau i - \theta s + f(N)s + \mu_D is \\
 &= \theta - (\beta - \mu_D)is - \theta s + \tau i, \\
 i' &= \frac{I'}{N} - \frac{N'}{N}i \\
 &= \beta si - [\tau + \mu_D + f(N)]i - [\theta - f(N)]i - [r - f(N)]i + \mu_D i^2 \\
 &= i[\beta s + \mu_D i - (\theta + \tau + \mu_D)].
 \end{aligned}$$

Relativamente à equação de N' , tem-se

$$N' = N\theta - Nf(N) - N\mu_D i.$$

Em termos de proporções de indivíduos, o sistema (4.9) escreve-se então

$$\begin{aligned}
 s' &= \theta - (\beta - \mu_D)is - \theta s + \tau i \\
 i' &= i[\beta s + \mu_D i - (\theta + \tau + \mu_D)].
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

Uma vez que $s + i = 1$ as equações anteriores podem ser reduzidas apenas à equação

$$i' = i[\beta(1 - i) + \mu_D i - (\theta + \tau + \mu_D)]. \tag{4.11}$$

Proposição 4.2.7 *O número de reprodução básico associado ao modelo é dado por*

$$\mathcal{R}_0 = \beta \frac{1}{\theta + \tau + \mu_D}.$$

Demonstração: Vamos considerar o sistema (4.10). Seja $\mathbf{x} = (i, s)$. Usando o método referido na secção 3.2 para a determinação de $\mathcal{R}_0$ temos

$$\mathcal{F}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \beta si \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathcal{V}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} (\theta + \tau + \mu_D)i - \mu_D i^2 \\ \beta si + \theta s - \theta - \mu_D is - \tau i \end{pmatrix}.$$

Seja $\mathbf{X}_s = \{(0, s) | s > 0\}$ o espaço de não doença. As hipóteses (H1)-(H4) referidas na secção 3.2 são trivialmente satisfeitas. Para verificar (H5) consideramos o sistema (4.10) restrito a $\mathbf{X}_s$,

$$s' = \theta - \theta s,$$

cujo único ponto de equilíbrio é 1 e portanto o ponto de equilíbrio de não doença de (4.10) tem coordenadas

$$U_0 : (s_0, i_0) = (1, 0).$$

Os valores próprios da matriz

$$-d\mathcal{V}(U_0) = \begin{pmatrix} -(\theta + \tau + \mu_D) & 0 \\ -\beta + \mu_D + \tau & -\theta \end{pmatrix}$$

têm parte real negativa. Isto mostra que a hipótese (H5) é satisfeita.

Sejam agora F e V as matrizes 1×1 definidas por

$$F = \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial i}|_{U_0} = \beta \quad \text{e} \quad V = \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial i}|_{U_0} = \theta + \tau + \mu_D.$$

O operador da próxima geração é então

$$FV^{-1} = \beta \frac{1}{\theta + \tau + \mu_D}$$

pelo que o número de reprodução básico é

$$\mathcal{R}_0 = \rho(FV^{-1}) = \beta \frac{1}{\theta + \tau + \mu_D}.$$

Observação 4.2.8 Na expressão obtida para $\mathcal{R}_0$, β é a taxa de contactos adequados e $\frac{1}{\theta + \tau + \mu_D}$ é a duração média do período efectivo de infecciosidade (tal como se verá na secção 4.3).

Proposição 4.2.9 A região simplesmente conexa

$$T = \{(s, i) : s > 0, i \geq 0, s + i = 1\}$$

é positivamente invariante para (4.10). Em particular, as semi-órbitas positivas do sistema são limitadas.

Demonstração: Consideremos o sistema (4.10). Em qualquer ponto (s, i) pertencente à recta $s + i = 1$ tem-se $s' + i' = \theta(1 - s - i) + \mu_D i(s + i - 1) = 0$.

Proposição 4.2.10

- (a) Se $\mathcal{R}_0 \leq 1$ então o sistema (4.10) admite apenas o ponto de equilíbrio de não doença $U_0 = (s_0, i_0) = (1, 0)$.
- (b) Se $\mathcal{R}_0 > 1$ então o sistema admite dois pontos de equilíbrio, o ponto de equilíbrio de não doença U_0 e o ponto de equilíbrio endêmico

$$U^* = (s^*, i^*) = \left(\frac{\theta + \tau}{\beta - \mu_D}, \frac{\beta - (\theta + \tau + \mu_D)}{\beta - \mu_D} \right).$$

Demonstração: O ponto de equilíbrio de não doença já foi calculado anteriormente e, pelas suas coordenadas, existe sempre.

Para determinar o ponto de equilíbrio endêmico usamos a equação (4.11). Obtém-se

$$\begin{aligned} i' &= 0 \\ \iff i &= 0 \vee \mu_D i - \beta i = \theta + \tau + \mu_D - \beta \\ \iff i &= 0 \vee i = \frac{\beta - (\theta + \tau + \mu_D)}{\beta - \mu_D}. \end{aligned}$$

Sendo um ponto de equilíbrio endêmico, $i^* \neq 0$ e portanto $i^* = \frac{\beta - (\theta + \tau + \mu_D)}{\beta - \mu_D}$.

Como o número de indivíduos em cada compartimento tem de ser positivo, U^* só existe quando $\beta - (\theta + \tau + \mu_D) > 0$, (uma vez que isto implica $\beta > \mu_D$) o que implica que $\mathcal{R}_0 > 1$.

Como $s^* + i^* = 1$, vem que $s^* = \frac{\theta + \tau}{\beta - \mu_D}$.

Teorema 4.2.11

- (a) Se $\mathcal{R}_0 < 1$ então o ponto de equilíbrio de não doença U_0 é globalmente assintoticamente estável em T .
- (b) Se $\mathcal{R}_0 > 1$ então o ponto de equilíbrio de não doença U_0 é instável e o ponto de equilíbrio endêmico U^* é globalmente assintoticamente estável em

$$T - \{(s, 0) : 0 < s \leq 1\}.$$

Demonstração: Consideramos a equação (4.11).

(a) Suponhamos que $\mathcal{R}_0 < 1$. Então $\beta - \mu_D < \theta + \tau$ e da equação (4.11) obtemos

$$\begin{aligned} i' &= i[(\beta - \mu_D)(1 - i) - (\theta + \tau)] \\ &< i[(\theta + \tau)(1 - i) - (\theta + \tau)] \\ &= -i^2(\theta + \tau). \end{aligned}$$

Concluimos que $i' < 0$ e U_0 é globalmente assintoticamente estável quando $\mathcal{R}_0 < 1$.

(b) Seja $\mathcal{R}_0 > 1$. Vamos verificar o sinal de i' quando $i > \frac{\beta - (\theta + \tau + \mu_D)}{\beta - \mu_D}$ e quando $i < \frac{\beta - (\theta + \tau + \mu_D)}{\beta - \mu_D}$. Ora

$$\begin{aligned} i &> \frac{\beta - (\theta + \tau + \mu_D)}{\beta - \mu_D} \\ \Rightarrow (\beta - \mu_D)i &> \beta - (\theta + \tau + \mu_D), \quad \text{pois } \beta - \mu_D > 0 \quad \text{quando } \mathcal{R}_0 > 1. \\ \Rightarrow \beta - (\beta - \mu_D)i &< \theta + \tau + \mu_D \\ \Rightarrow \beta(1 - i) + \mu_D i - (\theta + \tau + \mu_D) &< 0 \\ \Rightarrow i' &< 0. \end{aligned}$$

De forma análoga provamos que se $i < \frac{\beta - (\theta + \tau + \mu_D)}{\beta - \mu_D}$ então $i' > 0$.

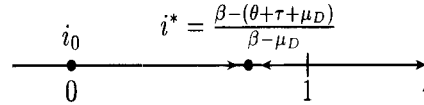


Figura 22: Diagrama de fase da equação (4.11).

4.2.2.1 Dinâmica do tamanho da população

Quando não existe infecção na população ($i = 0$) a equação

$$N' = N[\theta - f(N)]$$

tem um único ponto de equilíbrio positivo: $N^* = f^{-1}(\theta)$, tendo em conta as condições satisfeitas pela função $f(N)$ referidas anteriormente (teorema do valor médio). O ponto de equilíbrio N^* é globalmente assintoticamente estável porque:

- se $N > N^*$ então $f(N) > \theta$ (por f ser uma função estritamente crescente para $N \geq 0$) e portanto $N' < 0$;

- se $0 \leq N < N^*$ então, de forma análoga, mostramos que $N' > 0$.

Quando a doença existe e causa morte ($\mu_D > 0$), a expressão de N' é

$$N' = N[\theta - f(N) - \mu_D i].$$

Pelo teorema 4.2.11, a função i satisfaz uma das seguintes condições:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} i(t) = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} i(t) = i^* > 0,$$

onde i^* é o valor da ordenada do ponto de equilíbrio endêmico.

Proposição 4.2.12

(a) Se $\lim_{t \rightarrow +\infty} i(t) = 0$, então $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = N^*$;

(b) Se $\lim_{t \rightarrow +\infty} i(t) = i^* > 0$ e $f(0) < \theta - \mu_D i^*$ então

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = f^{-1}(\theta - \mu_D i^*) < N^*;$$

(c) Se $\lim_{t \rightarrow +\infty} i(t) = i^* > 0$ e $f(0) \geq \theta - \mu_D i^*$ então $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = 0$.

Demonstração:

(a) Se $\lim_{t \rightarrow +\infty} i(t) = 0$, então a solução de $N' = N(r - f(N) - \mu_D i)$ aproxima-se, quando $t \rightarrow +\infty$, da solução de $N' = N(r - f(N))$ que, por sua vez, tende para N^* quando $t \rightarrow +\infty$.

(b) Se $\lim_{t \rightarrow +\infty} i(t) = i^*$ então a solução de $N' = N(r - f(N) - \mu_D i)$ aproxima-se, quando $t \rightarrow +\infty$, da solução de $N' = N(r - f(N) - \mu_D i^*)$.

Os pontos de equilíbrio desta última equação são $N_1^* = 0$ e $N_2^* = f^{-1}(\theta - \mu_D i^*)$.

A estabilidade destes pontos é determinada pelo sinal de g' em cada um deles, onde

$$g(N) = N\theta - Nf(N) - N\mu_D i^*.$$

Sendo

$$g'(N) = \theta - f(N) - Nf'(N) - \mu_D i^*$$

tem-se

$$\begin{aligned} g'(N_1^*) &= \theta - \mu_D i^* - f(0) > 0, \text{ por hipótese,} \\ g'(N_2^*) &= -N_2^* f'(N_2^*) < 0, \text{ porque } N_2^* > 0 \text{ e } f' > 0. \end{aligned}$$

portanto N_1^* é instável e N_2^* é globalmente assintoticamente estável.

- (c) Se $f(0) \geq \theta - \mu_D i^*$ então a equação $N' = N(r - f(N) - \mu_D i^*)$ tem um único ponto de equilíbrio, $N_1^* = 0$, que é globalmente assintoticamente estável.

4.3 Discussão dos resultados

Os três modelos estudados neste capítulo seguem a dinâmica tradicional dos modelos epidemiológicos simples: se $\mathcal{R}_0 < 1$ o modelo apresenta um único ponto de equilíbrio (o de não doença) que é globalmente assintoticamente estável; se $\mathcal{R}_0 > 1$ então esse ponto de equilíbrio torna-se instável e surge um ponto de equilíbrio endémico que é globalmente assintoticamente estável.

As expressões obtidas para os vários modelos considerados são apresentadas na seguinte tabela:

Expressões de $\mathcal{R}_0$			
	$N' = 0$	$N' \neq 0$	$N' \neq 0$
Termo	$\beta \frac{S}{N} I$	βSI	$\beta \frac{S}{N} I$
Contágio			
Sem Vacinação	$\beta \frac{1}{\mu + \tau}$	$\beta \frac{1}{\mu + \tau + \mu_D} \frac{\Delta}{\mu}$	$\beta \frac{1}{\theta + \tau + \mu_D}$

No modelo correspondente à terceira coluna a taxa de mortalidade é dada por uma função derivável $f(N)$ que tende para θ (a taxa de natalidade) à medida que t tende para $+\infty$. Pela proposição 4.2.12, sempre que não existem indivíduos infectados, o tamanho da população tende para $N^* = f^{-1}(\theta)$ e portanto a taxa de mortalidade tende para θ . Assim, a expressão $\frac{1}{\theta + \tau + \mu_D}$ representa, ao longo de muitas gerações, a duração média do período efectivo de infecciosidade. Se $\mu_D > 0$ então o número de reprodução básico associado ao modelo da terceira coluna é menor do que o do modelo da primeira linha. Se $\mu_D = 0$, as duas expressões são iguais.

Apesar da semelhança aparente entre os números de reprodução básicos dos modelos que consideram o tamanho da população variável, as expressões obtidas não podem ser comparadas pois o parâmetro β tem um significado diferente em cada uma das situações: quando o termo de contágio é βSI , cada indivíduo estabelece, em média, βN contactos adequados por unidade de tempo, enquanto que, quando o termo de contágio é $\beta \frac{S}{N} I$, cada indivíduo estabelece β contactos adequados por unidade de tempo.

Quanto ao número/proporção de indivíduos infectados no ponto de equilíbrio endémico temos os seguintes valores:

Número/Proporção de infectados no ponto de equilíbrio endémico

	$N' = 0$	$N' \neq 0$	$N' \neq 0$
Termo	$\beta \frac{S}{N} I$	βSI	$\beta \frac{S}{N} I$
Contágio			
Sem Vacinação	$1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}$	$\frac{\Lambda}{\mu + \mu_I} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0} \right)$	$\frac{\beta}{\beta - \mu_I} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0} \right)$

Nota: Os $\mathcal{R}_0$ indicados têm expressões diferentes apesar de estarem a ser representados pela mesma letra na tabela.

A expressão da segunda coluna não é comparável com nenhuma das outras (consideram-se números de indivíduos enquanto que nas outras linhas se consideram proporções). Relativamente às expressões correspondentes aos modelos com termo de contágio $\beta \frac{S}{N} I$, o resultado das comparações é o oposto ao obtido para o número de reprodução básico. De facto, um menor período de infecciosidade liberta os indivíduos infectados do seu compartimento e permite que fiquem novamente infectados mais rapidamente.

Capítulo 5

Modelo SIS com vacinação proporcional e de recém-nascidos conferindo imunidade total

Neste capítulo analisamos o efeito da vacinação proporcional e da vacinação de recém-nascidos conferindo imunidade total em indivíduos susceptíveis. A **Vacinação Proporcional e de Recém-nascidos (VP + VRN)** é um plano de vacinação que consiste em vacinar uma proporção p de indivíduos susceptíveis e uma proporção ν de recém-nascidos (se os recém - nascidos não vacinados forem susceptíveis) por unidade de tempo.

As **hipóteses do modelo** são as seguintes:

- Os dois tipos de vacinação conferem **imunidade total**.
- A entrada de indivíduos para a população (por nascimento, imigração,...) é feita apenas para o compartimentos dos susceptíveis.
- Vacina-se uma proporção ν ($0 < \nu < 1$) de indivíduos recém-nascidos por unidade de tempo.
- Vacina-se uma proporção p ($0 < p < 1$) de indivíduos susceptíveis por unidade de tempo.

5.1 População de tamanho constante

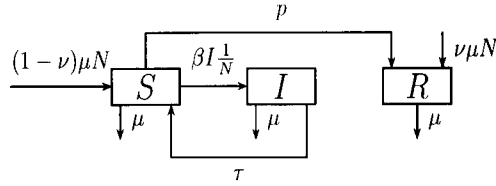


Figura 23: Modelo SIS com vacinação proporcional e de recém-nascidos numa população de tamanho constante.

As equações do modelo são

$$\begin{aligned} S' &= (1-\nu)\mu N - (\mu+p)S - \beta \frac{S}{N}I + \tau I \\ I' &= \beta \frac{S}{N}I - (\mu+\tau)I \\ R' &= pS + \nu\mu N - \mu R, \end{aligned} \quad (5.1)$$

que, em termos de proporções de indivíduos, temos

$$\begin{aligned} s' &= (1-\nu)\mu - (\mu+p)s - \beta si + \tau i \\ i' &= \beta si - (\mu+\tau)i \\ r' &= ps + \nu\mu - \mu r. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Uma vez que $s + i + r = 1$ as equações anteriores podem ser reduzidas apenas a

$$\begin{aligned} s' &= (1-\nu)\mu - (\mu+p)s - \beta si + \tau i \\ i' &= \beta si - (\mu+\tau)i. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Proposição 5.1.1 *O número de reprodução básico associado ao modelo é*

$$\mathcal{R}_0^{VP+VRN} = \beta \frac{1}{\mu + \tau} (1 - \nu) \frac{\mu}{\mu + p}.$$

Demonstração: Consideremos o sistema (5.3). Sejam $\mathbf{x} = (i, s)$,

$$\mathcal{F}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \beta si \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{V}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} (\mu + \tau)i \\ -(1 - \nu)\mu + \mu s + \beta si + ps - \tau i \end{pmatrix},$$

e $\mathbf{X}_s = \{(0, s) | s > 0\}$ o espaço de não doença. As hipóteses (H1)-(H4) referidas na secção 3.2 são trivialmente satisfeitas.

Para verificar (H5) precisamos de determinar o ponto de equilíbrio de não doença do sistema (5.3). Ora, o sistema (5.3) restrito a $\mathbf{X}_s$ é a equação

$$s' = (1 - \nu)\mu - (\mu + p)s,$$

pelo que o ponto de equilíbrio de não doença tem coordenadas

$$U_0 = (s_0, i_0) = \left((1 - \nu)\frac{\mu}{\mu + p}, 0 \right).$$

Os valores próprios da matriz

$$-d\mathcal{V}(U_0) = \begin{pmatrix} -(\mu + \tau) & 0 \\ -\beta(1 - \nu)\frac{\mu}{\mu + p} + \tau & -(\mu + p) \end{pmatrix}$$

têm parte real negativa e portanto a hipótese (H5) é satisfeita.

Sejam agora F e V as matrizes 1×1 definidas por

$$F = \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial i} \Big|_{U_0} = \beta(1 - \nu)\frac{\mu}{\mu + p} \quad \text{e} \quad V = \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial i} \Big|_{U_0} = \mu + \tau.$$

Então o número de reprodução básico é

$$\mathcal{R}_0^{VP+VRN} = \rho(FV^{-1}) = \beta \frac{1}{\mu + \tau} (1 - \nu) \frac{\mu}{\mu + p}.$$

Observação 5.1.2 Na expressão obtida para $\mathcal{R}_0^{VP+VRN}$, β é o coeficiente de transmissão e $\frac{1}{\mu + \tau}$ é a duração média do período efectivo de infecciosidade. Dado que $\frac{1}{\mu + p}$ é a duração média de permanência efectiva de um indivíduo no compartimento dos susceptíveis, $\frac{p + \nu\mu}{\mu + p}$ representa a proporção de indivíduos susceptíveis que abandonam o seu compartimento por vacinação proporcional ou por vacinação de recém-nascidos e portanto $(1 - \nu)\frac{\mu}{\mu + p} = 1 - \frac{p + \nu\mu}{\mu + p}$ é a proporção de indivíduos susceptíveis que ficarão infectados através de contactos adequados.

Proposição 5.1.3 A região simplesmente conexa

$$T = \{(s, i) : s > 0, i \geq 0, s + i \leq 1\}$$

é positivamente invariante para (5.3). Em particular, as semi-órbitas positivas do sistema são limitadas.

Demonstração: Consideremos o sistema (5.3). Em qualquer ponto do tipo $(0, i)$ tem-se $s' = (1 - \nu)\mu + \tau i > 0$, e em qualquer ponto do tipo $(s, 0)$ tem-se $i' = 0$, o que implica que as órbitas do sistema nunca abandonam o primeiro quadrante. Para além disso, em qualquer ponto (s, i) pertencente à recta $s + i = 1$ tem-se

$$s' + i' = -\nu\mu - ps < 0.$$

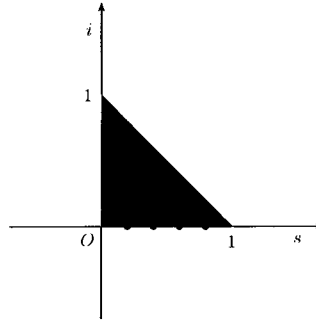


Figura 24: Região T e a direcção do campo de vectores sobre a fronteira.

Proposição 5.1.4

- (a) Se $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} \leq 1$ então o sistema (5.2) admite um único ponto de equilíbrio, o ponto de equilíbrio de não doença, de coordenadas

$$U_0 = (s_0, i_0, r_0) = \left((1 - \nu) \frac{\mu}{\mu + p}, 0, \frac{p + \nu\mu}{\mu + p} \right).$$

- (b) Se $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} > 1$ então o sistema admite o ponto de equilíbrio de não doença U_0 e o ponto de equilíbrio endémico $U^* = (s^*, i^*, r^*)$ de coordenadas

$$\left(\frac{\mu + \tau}{\beta}, (1 - \nu) \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0^{VP+VRN}} \right), \frac{1}{\mathcal{R}_0^{VP+VRN}} (1 - \nu) + \nu - \frac{\mu + \tau}{\beta} \right).$$

Demonstração: Relativamente ao ponto de equilíbrio de não doença, os valores de s_0 e i_0 já foram calculados anteriormente e $r_0 = 1 - s_0 - i_0$. Pelas suas coordenadas verificamos que este ponto de equilíbrio existe sempre.

Para a determinação do ponto de equilíbrio endémico, igualamos i' em (5.2) a zero obtendo

$$s^* = \frac{\mu + \tau}{\beta}.$$

Substituindo este valor na equação $s' = 0$ temos

$$\begin{aligned} (1 - \nu)\mu - (\mu + p)\frac{\mu + \tau}{\beta} - \beta i^* \frac{\mu + \tau}{\beta} + \tau i^* &= 0 \\ \Leftrightarrow i^* &= (1 - \nu) - \frac{(\mu + p)(\mu + \tau)}{\beta\mu} \\ \Leftrightarrow i^* &= (1 - \nu) \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0^{VP+VRN}} \right). \end{aligned}$$

A positividade do número de indivíduos em cada compartimento obriga a que o ponto de equilíbrio endêmico só exista quando $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} > 1$.

Teorema 5.1.5

- (a) Se $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} < 1$ então o ponto de equilíbrio de não doença U_0 é globalmente assintoticamente estável na região T .
- (b) Se $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} > 1$ então o ponto de equilíbrio de não doença U_0 é um ponto sela (instável) e o ponto de equilíbrio endêmico U^* é globalmente assintoticamente estável na região $T - \{(s, 0) : 0 < s \leq 1\}$.

Demonstração:

- (a) A estabilidade local de U_0 é garantida pelo teorema 3.2.6. Relativamente à estabilidade global deste ponto de equilíbrio, como as órbitas são limitadas (proposição 5.1.3), o Teorema de Poincaré - Poincaré - Bendixson garante que qualquer órbita com condição inicial em $\tilde{T} = \text{int}(T)$ tende ($t \rightarrow +\infty$) para um ponto de equilíbrio, para um ciclo limite ou para uma "cadeia cíclica", ou não existe limite e essa órbita é periódica.

No entanto,

- não existem pontos de equilíbrio em $\tilde{T}$;
- não existem ciclos limite nem órbitas periódicas contidos em $\tilde{T}$ porque o sistema é de dimensão dois e, consequentemente, os ciclos limite e as órbitas periódicas devem conter pelo menos um ponto de equilíbrio no seu interior;
- não existem "cadeias cíclicas" em $\tilde{T}$ porque o ponto de equilíbrio de não doença é localmente assintoticamente estável.

Assim, todas as órbitas com início em $\text{int}(T)$ tendem para o ponto de equilíbrio de não doença.

- (b) Para estudar a estabilidade local dos pontos de equilíbrio consideramos o sistema (5.3). A matriz jacobiana associada num ponto (s, i) genérico é dada por

$$\begin{pmatrix} -(\mu + p) - \beta i & -\beta s + \tau \\ \beta i & \beta s - (\mu + \tau) \end{pmatrix},$$

que avaliada em U_0 se reduz a

$$\begin{pmatrix} -(\mu + p) & -\beta(1 - \nu)\frac{\mu}{\mu + p} + \tau \\ 0 & \beta(1 - \nu)\frac{\mu}{\mu + p} - (\mu + \tau) \end{pmatrix}.$$

Os valores próprios desta matriz são as entradas da diagonal. A condição $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} > 1$ implica que tenham sinais contrários e portanto que U_0 seja um ponto sela.

Relativamente a U^* tem-se

$$Jac(U^*) = \begin{pmatrix} -(\mu + p) - \beta(1 - \nu)\left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0^{VP+VRN}}\right) & -\mu \\ \beta(1 - \nu)\left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0^{VP+VRN}}\right) & 0 \end{pmatrix}.$$

Os valores próprios da matriz são

$$\lambda_1 = \frac{-M + \sqrt{M^2 - 4N}}{2} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \frac{-M - \sqrt{M^2 - 4N}}{2},$$

onde

$$M = (\mu + p) + \beta(1 - \nu)\left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0^{VP+VRN}}\right) \quad \text{e} \quad N = \mu\beta(1 - \nu)\left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0^{VP+VRN}}\right).$$

Como $N > 0$, os valores próprios têm parte real negativa e portanto o ponto U^* é localmente assintoticamente estável.

A estabilidade global de U^* é obtida por aplicação do Teorema de Dulac. Escolhendo a função $\gamma(s, i) = \frac{1}{i}$, diferenciável no aberto simplesmente conexo $\tilde{T} = \text{int}(T)$, tem-se

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{i} ((1 - \nu)\mu - (\mu + p)s - \beta si + \tau i) \right) + \frac{\partial}{\partial i} \left(\frac{1}{i} (\beta si - (\mu + \tau)i) \right) \\ &= -\frac{\mu + p}{i} - \beta \\ &< 0, \end{aligned}$$

em $\tilde{T}$. Concluimos que não existem órbitas periódicas (nem ciclos limite) em $\tilde{T}$. Pelo Teorema de Poincaré - Bendixson, o conjunto w -limite de qualquer órbita com início em $\tilde{T}$ só poderá conter pontos de equilíbrio. Como U^* é o único ponto de equilíbrio em $\tilde{T}$ (e até já se viu que é localmente assintoticamente estável), conclui-se que qualquer órbita com início em $\tilde{T}$ tende ($t \rightarrow +\infty$) para este ponto de equilíbrio.

$$\begin{aligned} T &= \tilde{T} \cup \{(s, 0) \mid 0 < s \leq 1\} \cup \{(s, i) \mid s > 0, i > 0, s + i = 1\} \\ &= \tilde{T} \cup T_1 \cup T_2 \end{aligned}$$

e qualquer órbita com início em T_1 tende para U_0 (pelo estudo da sua estabilidade local), e qualquer órbita com início em T_2 tende para U^* (pela direcção e sentido do campo de vectores).

5.2 População de tamanho variável

5.2.1 Com termo de contágio βSI

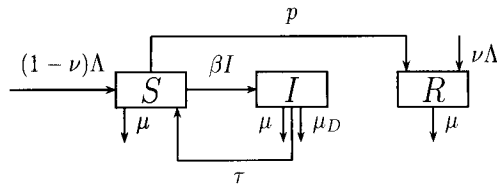


Figura 25: Modelo SIS com vac. prop. e de recém-nascidos numa pop. de tam. variável e termo de contágio βSI .

As equações do modelo são

$$\begin{aligned} S' &= (1 - \nu)\Lambda - (\mu + p)S - \beta SI + \tau I \\ I' &= \beta SI - (\mu + \tau + \mu_D)I \\ R' &= pS + \nu\Lambda - \mu R \\ (N' &= \Lambda - \mu N - \mu_D I). \end{aligned} \tag{5.4}$$

Fazendo $S = N - I - R$ obtemos o sistema equivalente dado por

$$\begin{aligned} I' &= I [\beta(N - I - R) - (\mu + \tau + \mu_D)] \\ R' &= p(N - I) + \nu\Lambda - (p + \mu)R \\ N' &= \Lambda - \mu N - \mu_D I. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Proposição 5.2.1 *O número de reprodução básico associado ao modelo é*

$$\mathcal{R}_0^{VP+VRN} = \beta \frac{1}{\mu + \tau + \mu_D} (1 - \nu) \frac{\Lambda}{\mu + p}.$$

Demonstração: Consideremos o sistema (5.4). Sejam $\mathbf{X} = (I, S, R)$,

$$\mathcal{F}(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} \beta SI \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{V}(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} (\mu + \tau + \mu_D)I \\ (\mu + p)S + \beta SI - \tau I - (1 - \nu)\Lambda \\ \mu R - pS - \nu\Lambda \end{pmatrix},$$

e $\mathbf{X}_s = \{(0, S, R) | S > 0, R \geq 0\}$ o espaço de não doença. As hipóteses (H1)-(H4) referidas na secção 3.2 são trivialmente satisfeitas. Vemos em seguida que (H5) é também verificada.

O ponto de equilíbrio de não doença de (5.4) é o ponto de equilíbrio do sistema

$$\begin{aligned} S' &= (1 - \nu)\Lambda - (\mu + p)S \\ R' &= pS + \nu\Lambda - \mu R, \end{aligned}$$

pelo que tem coordenadas

$$U_0 = (S_0, I_0, R_0) = \left((1 - \nu) \frac{\Lambda}{\mu + p}, 0, \frac{\Lambda}{\mu} \frac{p + \nu\mu}{\mu + p} \right).$$

Os valores próprios da matriz

$$-d\mathcal{V}(U_0) = \begin{pmatrix} -(\mu + \tau + \mu_D) & 0 & 0 \\ -\beta(1 - \nu) \frac{\Lambda}{\mu + p} + \tau & -(\mu + p) & 0 \\ 0 & p & -\mu \end{pmatrix}$$

têm parte real negativa. A hipótese (H5) é satisfeita.

Sejam agora F e V as matrizes 1×1 definidas por

$$F = \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial I} \Big|_{U_0} = \beta(1 - \nu) \frac{\Lambda}{\mu} \frac{\mu}{\mu + p} \quad \text{e} \quad V = \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial I} \Big|_{U_0} = \mu + \tau + \mu_D.$$

O operador da próxima geração é então

$$FV^{-1} = \beta \frac{1}{\mu + \tau + \mu_D} (1 - \nu) \frac{\Lambda}{\mu + p},$$

pelo que $\mathcal{R}_0^{VP+VRN}$, sendo o valor próprio dominante de FV^{-1} , coincide exactamente com essa expressão.

Observação 5.2.2 Na expressão do número de reprodução básico, β é o coeficiente de transmissão, $\frac{1}{\mu+\tau+\mu_D}$ é a duração média do período efectivo de infecciosidade e $(1-\nu)\frac{\Lambda}{\mu+p} = (1-\nu)\frac{\Lambda}{\mu}\frac{\mu}{\mu+p} = \frac{\Lambda}{\mu}\left(1-\frac{p+\nu\mu}{\mu+p}\right)$ é o número de susceptíveis no ponto de equilíbrio de não doença de (5.4). $\frac{\Lambda}{\mu}$ é o número de indivíduos que permanecem efectivamente no compartimento dos susceptíveis, por unidade de tempo, depois de para lá terem entrado (por imigração ou por nascimento).

Observação 5.2.3

(a) A solução da equação diferencial $N' = \Lambda - \mu N$ é dada por

$$N(t) = \left(N(t_0) - \frac{\Lambda}{\mu}\right)e^{-\mu(t-t_0)} + \frac{\Lambda}{\mu}$$

e

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = \frac{\Lambda}{\mu}.$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, podemos também escrever $N(t) = N(t_0) + \int_{t_0}^t (\Lambda - \mu N(s))ds$.

(b) A solução da equação diferencial $N' = \Lambda - \mu N - \mu_D I$ com $I \not\equiv 0$ é

$$N(t) = N(t_0) + \left[\int_{t_0}^t (\Lambda - \mu N(s))ds - \mu_D \int_{t_0}^t I(s)ds \right] < N(t_0) + \int_{t_0}^t (\Lambda - \mu N(s))ds,$$

portanto é estritamente menor do que a solução da equação de (a).

Proposição 5.2.4 As regiões simplesmente conexas

$$\Omega = \left\{ (I, R, N) : I \geq 0, R \geq 0, I + R \leq N \leq \frac{\Lambda}{\mu} \right\}$$

e

$$\Omega' = \left\{ (S, I, N) : S > 0, I \geq 0, S + I \leq N \leq \frac{\Lambda}{\mu} \right\}$$

são regiões positivamente invariantes para os sistemas (5.5) e (5.4), respectivamente. Em particular, as semi-órbitas positivas dos sistemas são limitadas.

Demonstração: Vamos mostrar primeiramente que a região Ω é positivamente invariante para o sistema (5.5). Em qualquer ponto do tipo $(0, R, N)$ tem-se $I' = 0$ e em qualquer ponto do tipo $(I, 0, N)$ tem-se $R' = p(N - I) + \nu\Lambda > 0$.

Quanto a N' :

Caso 1: $I = 0$.

Neste caso, $N' = \Lambda - \mu N$ e a sua solução é $N(t) = \left(N(t_0) - \frac{\Lambda}{\mu}\right)e^{-\mu(t-t_0)} + \frac{\Lambda}{\mu}$.

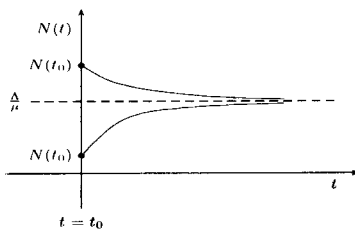


Figura 26: Gráfico da função $N(t)$ nos casos em que $N(t_0) < \frac{\Lambda}{\mu}$ e $N(t_0) > \frac{\Lambda}{\mu}$.

O único ponto de equilíbrio da equação é $\frac{\Lambda}{\mu}$. Em particular, a região $\left[0, \frac{\Lambda}{\mu}\right]$ é positivamente invariante, o que quer dizer que $N(t) \leq \frac{\Lambda}{\mu}$ para todo o tempo $t \geq 0$.

Caso 2: $I \neq 0$.

Neste caso, $N' = \Lambda - \mu N - \mu_D I < \Lambda - \mu N$.

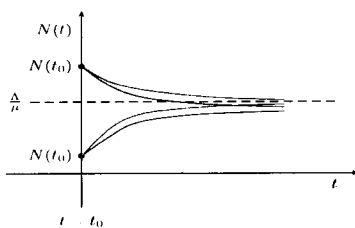


Figura 27: O gráfico a vermelho representa o comportamento típico das soluções da equação diferencial $N' = \Lambda - \mu N - \mu_D I$ nos casos em que $N(t_0) < \frac{\Lambda}{\mu}$ e $N(t_0) > \frac{\Lambda}{\mu}$.

Há duas situações a considerar:

- (i) Se t_0 for tal que $N(t_0) < \frac{\Lambda}{\mu}$ então $N(t) < \frac{\Lambda}{\mu}$ para todo o tempo $t \geq t_0$.
- (ii) Se t_0 for tal que $N(t_0) = \frac{\Lambda}{\mu}$ então $N(t) < \frac{\Lambda}{\mu}$ para todo o tempo $t > t_0$ porque $N' < 0$.

Portanto, sem perda de generalidade, podemos supor que

$$N(t) \leq \frac{\Lambda}{\mu}, \text{ para todo o tempo } t$$

e concluímos que $0 \leq I + R \leq N \leq \frac{\Lambda}{\mu}$.

Para mostrarmos que Ω' é uma região positivamente invariante para (5.4) observamos que em qualquer ponto do tipo $(0, I, N)$ se tem $S' = (1 - \nu)\Lambda + \tau I > 0$, e em qualquer ponto do tipo $(S, 0, N)$ se tem $I' = 0$. Como já vimos anteriormente que $N(t) \leq \frac{\Lambda}{\mu}$ para todo o tempo t , resulta que $0 \leq S + I \leq N \leq \frac{\Lambda}{\mu}$.

Proposição 5.2.5

(a) Se $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} \leq 1$ então o sistema (5.5) admite um único ponto de equilíbrio, o ponto de equilíbrio de não doença, de coordenadas

$$U_0 = (I_0, R_0, N_0) = \left(0, \frac{\Lambda}{\mu} \frac{p + \nu\mu}{\mu + p}, \frac{\Lambda}{\mu}\right).$$

(b) Se $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} > 1$ então o modelo admite o ponto de equilíbrio de não doença U_0 e o ponto de equilíbrio endêmico $U^* = (I^*, R^*, N^*)$ de coordenadas

$$\left((1 - \nu) \frac{\Lambda}{\mu + \mu_D} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0^{VP+VRN}}\right), \frac{p}{\beta\mu} (\mu + \tau + \mu_D) + \frac{\nu\Lambda}{\mu}, \frac{\Lambda - \mu_D I^*}{\mu} \right).$$

Demonstração: Pelas coordenadas S_0 , I_0 e R_0 do ponto de equilíbrio de não doença anteriormente determinadas tem-se

$$N_0 = S_0 + I_0 + R_0 = \frac{\Lambda}{\mu}.$$

Para o cálculo do ponto de equilíbrio endêmico consideramos o sistema (5.4). De $I' = 0$ e $I \neq 0$ obtém-se

$$S^* = \frac{\mu + \tau + \mu_D}{\beta},$$

que substituindo em $R' = 0$ dá

$$R^* = \frac{p}{\beta\mu} (\mu + \tau + \mu_D) + \frac{\nu\Lambda}{\mu} (> 0).$$

Para determinar o valor de I^* substituímos S pela expressão de S^* anterior na equação $S' = 0$ e obtemos

$$(1 - \nu)\Lambda - \beta I^* \frac{\mu + \tau + \mu_D}{\beta} - (\mu + p) \frac{\mu + \tau + \mu_D}{\beta} + \tau I^* = 0,$$

donde

$$\begin{aligned} I^* &= (1 - \nu) \frac{\Lambda}{\mu + \mu_D} \left[1 - \frac{(\mu + p)(\mu + \tau + \mu_D)}{\beta(1 - \nu)\Lambda} \right] \\ \Leftrightarrow I^* &= (1 - \nu) \frac{\Lambda}{\mu + \mu_D} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0^{VP+VRN}} \right). \end{aligned}$$

Em particular tem-se também $N' = 0$ e portanto

$$N^* = \frac{\Lambda - \mu_D I^*}{\mu}.$$

Como o número de indivíduos infectados no ponto de equilíbrio endêmico tem de ser positivo, U^* só existe quando $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} > 1$.

Teorema 5.2.6

- (a) Se $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} < 1$ então o ponto de equilíbrio de não doença U_0 é localmente assintoticamente estável.
- (b) Se $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} > 1$ então o ponto de equilíbrio de não doença U_0 é um ponto sela (instável) e o ponto de equilíbrio endêmico U^* é localmente assintoticamente estável.

Demonstração:

- (a) A estabilidade local de U_0 é garantida pelo teorema 3.2.6.
- (b) A matriz jacobiana num ponto (I, R, N) genérico associada ao sistema (5.5) é dada por

$$\begin{pmatrix} \beta(N - I - R) - (\mu + \tau + \mu_D) - \beta I & -\beta I & \beta I \\ -p & -(\mu + p) & p \\ -\mu_D & 0 & -\mu \end{pmatrix},$$

que avaliada no ponto de equilíbrio de não doença se reduz a

$$\begin{pmatrix} \beta(1 - \nu)\frac{\Lambda}{\mu+p} - (\mu + \tau + \mu_D) & 0 & 0 \\ -p & -(\mu + p) & p \\ -\mu_D & 0 & -\mu \end{pmatrix}.$$

A matriz tem dois valores próprios negativos e um valor próprio positivo (que resulta da condição $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} > 1$), pelo que U_0 é um ponto sela.

No ponto de equilíbrio endêmico, por se ter $I' = 0$ e consequentemente

$$\beta(N^* - I^* - R^*) - (\mu + \tau + \mu_D) = 0,$$

a matriz jacobiana reduz-se a

$$\begin{pmatrix} -\beta I^* & -\beta I^* & \beta I^* \\ -p & -(\mu + p) & p \\ -\mu_D & 0 & -\mu \end{pmatrix}.$$

Após manipulações algébricas simples, a equação característica correspondente pode-se escrever na forma

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0$$

com

$$\begin{aligned} a_1 &= \beta I^* + p + 2\mu, \\ a_2 &= \beta I^*(2\mu + \mu_D) + \mu(\mu + p), \\ a_3 &= \beta I^*\mu(\mu + \mu_D). \end{aligned}$$

Como $a_1, a_3 > 0$ e

$$\begin{aligned} &a_1 a_2 - a_3 \\ &= (\beta I^* + p + 2\mu) [\beta I^*(2\mu + \mu_D) + \mu(\mu + p)] - \beta I^*\mu(\mu + \mu_D) \\ &= \beta^2 I^{*2}(2\mu + \mu_D) + \beta I^*\mu p + \beta I^*p(2\mu + \mu_D) + \mu p(\mu + p) + 4\beta I^*\mu^2 + \beta I^*\mu\mu_D + \\ &\quad + 2\mu^2(\mu + p) \\ &> 0, \end{aligned}$$

o Critério de Routh - Hurwitz permite mostrar que todos os valores próprios da matriz têm parte real negativa, concluindo que U^* é localmente assintoticamente estável.

Teorema 5.2.7 *Se $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} \leq 1$ então o ponto de equilíbrio de não doença U_0 é globalmente assintoticamente estável em Ω' .*

Demonstração: A prova é constituída por duas partes.

- (1) Suponhamos que o número de reprodução básico do modelo correspondente sem vacinação (secção 4.2.1) é inferior ou igual a um, isto é,

$$\beta \frac{\Lambda}{\mu} \frac{1}{\mu + \tau + \mu_D} \leq 1 \quad (5.6)$$

(a condição $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} < 1$ permanece válida).

Do sistema (5.4) vem que

$$I' = I[\beta S - (\mu + \tau + \mu_D)] \leq I \left[\beta \frac{\Lambda}{\mu} - (\mu + \tau + \mu_D) \right] \leq 0,$$

pela hipótese (5.6) e portanto I é uma função decrescente. Mais ainda

$$0 \leq I \leq \frac{\Lambda}{\mu}.$$

Sendo uma função monótona e limitada, I é convergente e portanto tem-se necessariamente

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} I'(t) = 0,$$

isto é,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} S(t) = \tilde{S} = \frac{\mu + \tau + \mu_D}{\beta}.$$

Suponhamos que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = \tilde{I} \neq 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} S(t) = \tilde{S} = \frac{\mu + \tau + \mu_D}{\beta}.$$

Como $0 \leq I + S \leq \frac{\Lambda}{\mu}$ (em Ω') ter-se-ia

$$\tilde{I} \leq \frac{\Lambda}{\mu} - \frac{\mu + \tau + \mu_D}{\beta} \leq 0$$

e portanto $\tilde{I} = 0$.

Pela dependência contínua das soluções em relação ao campo de vectores, à medida que $I(t)$ tende ($t \rightarrow +\infty$) para 0, a solução de $N' = \Lambda - \mu N - \mu_D I$ tende ($t \rightarrow +\infty$) para a solução de $N' = \Lambda - \mu N$. Assim

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = \frac{\Lambda}{\mu}.$$

Relativamente à função $S(t)$, teremos, de forma análoga,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} S(t) = (1 - \nu) \frac{\Lambda}{\mu + p} = \frac{\Lambda}{\mu} (1 - \nu) \frac{\mu}{\mu + p}$$

donde resulta também que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} R(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (N(t) - S(t) - R(t)) = \frac{\Lambda p + \nu \mu}{\mu \mu + p}.$$

- (2) Suponhamos que $\beta \frac{\Lambda}{\mu} \frac{1}{\mu + \tau + \mu_D} > 1$ e $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} < 1$.

A primeira condição implica que $\frac{\Lambda}{\mu} > \frac{\mu + \tau + \mu_D}{\beta}$ o que significa que o plano $S = \frac{\mu + \tau + \mu_D}{\beta}$ divide a região Ω' em duas regiões.

Relativamente à segunda condição ($\mathcal{R}_0^{VP+VRN} < 1$), esta é equivalente a

$$\beta \frac{\Lambda}{\mu} \frac{1}{\mu + \tau + \mu_D} < \frac{\mu + p}{\mu} \frac{1}{1 - \nu} \quad (5.7)$$

e implica

$$S_0 = \frac{\Lambda}{\mu}(1-\nu)\frac{\mu}{\mu+p} < \frac{\mu+\tau+\mu_D}{\beta}. \quad (5.8)$$

Quando $S = \frac{\mu+\tau+\mu_D}{\beta}$ temos

$$\begin{aligned} S'_{|S=\frac{\mu+\tau+\mu_D}{\beta}} &= (1-\nu)\Lambda - (\mu+p)\frac{\mu+\tau+\mu_D}{\beta} - \beta I\frac{\mu+\tau+\mu_D}{\beta} + \tau I \\ &= (1-\nu)\Lambda - (\mu+p)\frac{\mu+\tau+\mu_D}{\beta} - (\mu+\mu_D)I \\ &\leq (1-\nu)\Lambda - (\mu+p)\frac{\mu+\tau+\mu_D}{\beta}. \end{aligned}$$

Por (5.8) concluimos que

$$S'_{|S=\frac{\mu+\tau+\mu_D}{\beta}} < (1-\nu)\Lambda - (\mu+p)\frac{\Lambda}{\mu}(1-\nu)\frac{\mu}{\mu+p} = 0.$$

Da invariância positiva de Ω' (proposição 5.2.4) e do sinal de S' restrito a $S = \frac{\mu+\tau+\mu_D}{\beta}$, resulta que a região $\Omega' - \Omega_1$ onde

$$\Omega_1 = \left\{ (S, I, N) : \frac{\mu+\tau+\mu_D}{\beta} < S \leq N \leq \frac{\Lambda}{\mu}, 0 < I \leq N - S \right\}$$

é positivamente invariante para (5.4).

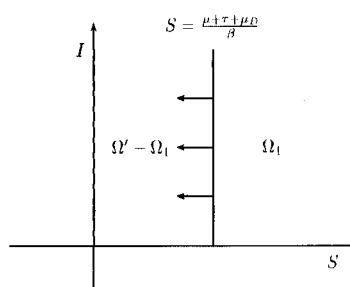


Figura 28: Projecção para o plano OIS do campo de vectores restrito a $S = \frac{\mu+\tau+\mu_D}{\beta}$.

De seguida é apresentado um lema necessário para concluir a demonstração.

Lema 5.2.8 Na região Ω_1 , $I' > 0$ e $S' < 0$.

Demonstração: $I' = I[\beta S - (\mu + \tau + \mu_D)] = \beta I \left(S - \frac{\mu+\tau+\mu_D}{\beta} \right)$. Como $S > \frac{\mu+\tau+\mu_D}{\beta}$ em Ω_1 vem que $I' > 0$ em Ω_1 .

As condições $S > \frac{\mu+\tau+\mu_D}{\beta}$ e $0 < I < \frac{\Lambda}{\mu}$ (válidas na região Ω_1) implicam que

$$\begin{aligned} S' &< (1-\nu)\Lambda - \frac{\mu+p}{\beta}(\mu+\tau+\mu_D) - \frac{\Lambda}{\mu}(\mu+\tau+\mu_D) + \tau\frac{\Lambda}{\mu} \\ &= \Lambda \left(1-\nu - \frac{\mu+\mu_D}{\mu} \right) - \frac{\mu+p}{\beta}(\mu+\tau+\mu_D) \\ &= \left(-\nu - \frac{\mu_D}{\mu} \right) \Lambda - \frac{\mu+p}{\beta}(\mu+\tau+\mu_D) \\ &< 0, \end{aligned}$$

em Ω_1 .

Como $S' < 0$ em Ω_1 e $S' < 0$ no plano $S = \frac{\mu+\tau+\mu_D}{\beta}$ concluímos que qualquer solução com condição inicial em Ω_1 entra na região positivamente invariante $\Omega' - \Omega_1$ num período finito de tempo. Em $\Omega' - \Omega_1$ as órbitas têm o mesmo comportamento do caso (1) pelo que U_0 é globalmente assintoticamente estável em Ω' .

Teorema 5.2.9 *Se $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} > 1$ então:*

- (a) *o ponto de equilíbrio de não doença U_0 é um ponto sela (instável);*
- (b) *seja*

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \beta m & \frac{\beta m + np}{2} & \frac{\mu_D - \beta m}{2} \\ \frac{\beta m + np}{2} & n(\mu + p) & \frac{np}{2} \\ \frac{\mu_D - \beta m}{2} & -\frac{np}{2} & \mu \end{pmatrix}.$$

Se existirem constantes positivas m e n de forma que a matriz M seja definida positiva, então o ponto de equilíbrio endêmico U^* é globalmente assintoticamente estável em $\Omega' - \left\{ (S, 0, N) : 0 < S \leq N \leq \frac{\Lambda}{\mu} \right\}$.

Demonstração: Já foi visto anteriormente que U_0 é um ponto sela nestas condições. Quanto ao ponto de equilíbrio endêmico, reescrevemos o sistema (5.5) na seguinte forma:

$$\begin{aligned} I' &= I[\beta(N - I - R) - (\mu + \tau + \mu_D)] \\ &= \beta I[(N - N^*) - (I - I^*) - (R - R^*)] + \beta I(N^* - I^* - R^*) - I(\mu + \tau + \mu_D) \\ &= \beta I[(N - N^*) - (I - I^*) - (R - R^*)] + \beta I S^* - I(\mu + \tau + \mu_D). \end{aligned}$$

Sendo $S^* = \frac{\mu + \tau + \mu_D}{\beta}$, a primeira equação de (5.5) é equivalente a

$$I' = \beta I [(N - N^*) - (I - I^*) - (R - R^*)].$$

Relativamente à segunda equação de (5.5) temos

$$\begin{aligned} R' &= p(N - I) + \nu\Lambda - (\mu + p)R \\ &= p(N - N^*) - p(I - I^*) - p(R - R^*) + p(N^* - I^* - R^*) + \nu\Lambda - \mu R \\ &= p(N - N^*) - p(I - I^*) - p(R - R^*) + pS^* + \nu\Lambda - \mu R. \end{aligned}$$

Como $R^* = \frac{1}{\mu}(pS^* + \nu\Lambda)$ vem que

$$R' = p(N - N^*) - p(I - I^*) - (\mu + p)(R - R^*).$$

Quanto à equação de N' , e usando $N^* = \frac{\Lambda - \mu_D I^*}{\mu}$, temos

$$\begin{aligned} N' &= \Lambda - \mu N - \mu_D I \\ &= -\mu(N - N^*) - \mu_D(I - I^*) - \mu N^* - \mu_D I^* + \Lambda \\ &= -\mu(N - N^*) - \mu_D(I - I^*). \end{aligned}$$

O novo sistema é então

$$\begin{aligned} I' &= \beta I [(N - N^*) - (I - I^*) - (R - R^*)] \\ R' &= p(N - N^*) - p(I - I^*) - (\mu + p)(R - R^*) \\ N' &= -\mu(N - N^*) - \mu_D(I - I^*). \end{aligned} \tag{5.9}$$

Considerando a mudança de coordenadas

$$x = I - I^*, \quad y = R - R^*, \quad z = N - N^*,$$

o sistema (5.9) simplifica-se, ficando

$$\begin{aligned} x' &= \beta(x + I^*)(z - x - y) \\ y' &= pz - px - (\mu + p)y \\ z' &= -\mu z - \mu_D x. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Seja

$$W(I, R, N) = m \left(I - I^* - I^* \ln \frac{I}{I^*} \right) + \frac{n}{2}(R - R^*)^2 + \frac{1}{2}(N - N^*)^2.$$

Vamos verificar quais as condições a serem satisfeitas para que W seja uma função de Liapunov estrita para o ponto de equilíbrio endêmico de (5.5). Seguindo as condições referidas em (2.0.10), temos

$$(i) \quad W(I^*, R^*, N^*) = m(I^* - I^* - I^* \ln \frac{I^*}{I^*}) + \frac{n}{2}(R^* - R^*)^2 + \frac{1}{2}(N^* - N^*)^2 = 0.$$

Além disso, a função $f(I) = I - I^* - I^* \ln \frac{I}{I^*}$ tem um mínimo local em $I = I^*$ e portanto $W(I, R, N) > 0$ para todo o terno ordenado (I, R, N) diferente de U^* .

(ii),(iii)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(W(I, R, N)) &= (dW(I, R, N))(I', R', N') \\ &= mI' - mI^* \frac{I'}{I} + n(R - R^*)R' + (N - N^*)N' \\ &= mI' \left(1 - \frac{I^*}{I}\right) + nyR' + zN' \\ &= mx' \left(1 - \frac{I^*}{x + I^*}\right) + ny y' + zz'. \end{aligned}$$

Por (5.10) fica

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}(W(I, R, N)) \\ &= m\beta I(z - x - y) \left(1 - \frac{I^*}{I}\right) + ny[pz - px - (\mu + p)y] + z(-\mu z - \mu_D x) \\ &= m\beta(x + I^*)(z - x - y) \left(1 - \frac{I^*}{x + I^*}\right) + nypz - nypx - ny^2(\mu + p) - \mu z^2 - \\ &\quad - \mu_D xz \\ &= m\beta(z - x - y)x + nypz - nypx - ny^2(\mu + p) - \mu z^2 - \mu_D xz \\ &= -\mathbf{uMu}^T, \end{aligned}$$

onde

$$\mathbf{u} = (x, y, z)$$

e

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \beta m & \frac{\beta m + np}{2} & \frac{\mu_D - \beta m}{2} \\ \frac{\beta m + np}{2} & n(\mu + p) & \frac{np}{2} \\ \frac{\mu_D - \beta m}{2} & \frac{-np}{2} & \mu \end{pmatrix}.$$

Observamos que a função W é uma função de Liapunov estrita para U^* se existirem constantes positivas m e n de forma a que a matriz $\mathbf{M}$ seja definida positiva, pois aí teremos $\frac{d}{dt}(W(I, R, N)) = 0$ se e só se $(I, R, N) = (I^*, R^*, N^*)$.

Assim, se existirem tais constantes, resulta, pelo teorema 2.0.10, que U^* é globalmente assintoticamente estável.

Em seguida, faz-se uma observação útil para o teorema 5.2.9.

Observação 5.2.10 As condições do teorema 5.2.9 podem ser satisfeitas com parâmetros adequados. Se, para quaisquer constantes positivas μ e p , a constante positiva μ_D satisfizer a desigualdade

$$\mu(2\mu + \mu_D)^2 > \mu_D^2(\mu + p),$$

então a matriz $\mathbf{M}$ é definida positiva quando

$$m = \frac{2\mu + \mu_D}{\beta} \quad e \quad n = \frac{2\mu + \mu_D}{p}.$$

A demonstração deste resultado será feita mais à frente numa situação mais geral (Observação 6.2.8).

5.2.2 Com termo de contágio $\beta \frac{S}{N} I$

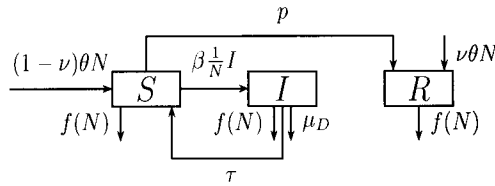


Figura 29: Modelo SIS com vac. prop. e de recém-nascidos numa pop. de tam. variável e termo de contágio $\beta \frac{S}{N} I$.

As equações do modelo são

$$\begin{aligned} S' &= (1-\nu)\theta N - \beta \frac{S}{N} I - [f(N) + p]S + \tau I \\ I' &= \beta \frac{S}{N} I - [\tau + \mu_D + f(N)]I \\ R' &= pS + \nu\theta N - f(N)R \\ (N' &= N[\theta - f(N)] - \mu_D I). \end{aligned} \tag{5.11}$$

Sendo $s = \frac{S}{N}$, $i = \frac{I}{N}$ e $r = \frac{R}{N}$ tem-se, por manipulações algébricas simples,

$$\begin{aligned} s' &= \frac{S'}{N} - \frac{N'}{N}s \\ &= (1 - \nu)\theta - (\beta - \mu_D)is - (\theta + p)s + \tau i, \\ i' &= \frac{I'}{N} - \frac{N'}{N}i \\ &= i[\beta s + \mu_D i - (\theta + \tau + \mu_D)], \\ r' &= \frac{R'}{N} - \frac{N'}{N}r \\ &= ps + \nu\theta - \theta r + \mu_D ir. \end{aligned}$$

Em termos de proporções, o sistema (5.11) escreve-se então

$$\begin{aligned} s' &= (1 - \nu)\theta - (\theta + p)s - (\beta - \mu_D)si + \tau i \\ i' &= i[\beta s + \mu_D i - (\theta + \tau + \mu_D)] \\ r' &= ps + \nu\theta - \theta r + \mu_D ir \end{aligned} \tag{5.12}$$

e, uma vez que $s + i + r = 1$, basta considerar

$$\begin{aligned} s' &= (1 - \nu)\theta - (\beta - \mu_D)si - (\theta + p)s + \tau i \\ i' &= i[\beta s + \mu_D i - (\theta + \tau + \mu_D)]. \end{aligned} \tag{5.13}$$

Proposição 5.2.11 *O número de reprodução básico associado ao modelo é*

$$\mathcal{R}_0^{VP+VRN} = \beta \frac{1}{\theta + \tau + \mu_D} (1 - \nu) \frac{\theta}{\theta + p}.$$

Demonstração: Vamos considerar o sistema (5.13). Seja $\mathbf{x} = (i, s)$,

$$\mathcal{F}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \beta si \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{V}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} (\theta + \tau + \mu_D)i - \mu_D i^2 \\ \beta si + (\theta + p)s - (1 - \nu)\theta - \mu_D is - \tau i \end{pmatrix},$$

e $\mathbf{X}_s = \{(0, s) | s > 0\}$ o espaço de não doença. As hipóteses (H1)-(H4) referidas na secção 3.2 são trivialmente satisfeitas.

O ponto de equilíbrio de não doença de (5.13) é o ponto de equilíbrio de

$$s' = (1 - \nu)\theta - (\theta + p)s$$

pelo que tem coordenadas

$$U_0 = (s_0, i_0) = \left((1 - \nu) \frac{\theta}{\theta + p}, 0 \right).$$

Os valores próprios da matriz

$$-d\mathcal{V}(U_0) = \begin{pmatrix} -(\theta + \tau + \mu_D) & 0 \\ (\mu_D - \beta)(1 - \nu) \frac{\theta}{\theta + p} + \tau & -(\theta + p) \end{pmatrix}$$

têm parte real negativa. Isto mostra que a hipótese (H5) é satisfeita.

Sendo F e V as matrizes 1×1 definidas por

$$F = \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial i} \Big|_{U_0} = \beta(1 - \nu) \frac{\theta}{\theta + p} \quad \text{e} \quad V = \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial i} \Big|_{U_0} = \theta + \tau + \mu_D.$$

tem-se

$$\mathcal{R}_0^{VP+VRN} = \rho(FV^{-1}) = \beta \frac{1}{\theta + \tau + \mu_D} (1 - \nu) \frac{\theta}{\theta + p}.$$

Observação 5.2.12 Na expressão de $\mathcal{R}_0^{VP+VRN}$, β é a taxa de contactos adequados, $\frac{1}{\theta + \tau + \mu_D}$ é a duração média do período efectivo de infecciosidade e $(1 - \nu) \frac{\theta}{\theta + p} = 1 - \frac{p + \nu\theta}{\theta + p}$ é a proporção de indivíduos susceptíveis no ponto de equilíbrio de não doença de (5.13). A justificação desta expressão é análoga à apresentada na observação 5.1.2.

Proposição 5.2.13 A região simplesmente conexa

$$T = \{(s, i) : s > 0, i \geq 0, s + i \leq 1\}$$

é positivamente invariante para (5.13). Em particular, as semi-órbitas positivas do sistema são limitadas.

Demonstração: Em qualquer ponto do tipo $(0, i)$ tem-se $s' = (1 - \nu)\theta + \tau i > 0$ e em qualquer ponto do tipo $(s, 0)$ tem-se $i' = 0$. Para além disso, nos pontos (s, i) pertencentes à recta $s + i = 1$ tem-se

$$\begin{aligned} s' + i' &= \theta - \nu\theta - ps + \mu_D i(s + i) - \theta(s + i) - \mu_D i \\ &= -\nu\theta - ps \\ &< 0. \end{aligned}$$

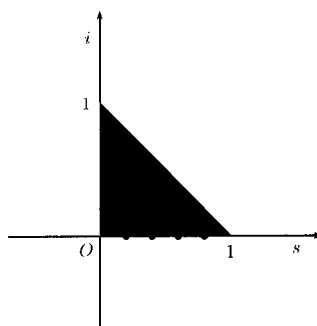


Figura 30: Região T e a direcção do campo de vectores sobre a fronteira.

Proposição 5.2.14

(a) Se $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} \leq 1$ então o sistema (5.12) admite apenas o ponto de equilíbrio de não doença $U_0 = (s_0, i_0, r_0) = \left((1 - \nu) \frac{\theta}{\theta + p}, 0, \frac{p + \nu\theta}{\theta + p} \right)$.

(b) Seja φ a função definida por

$$\begin{aligned} \varphi(i) = & \mu_D(\beta - \mu_D)i^2 - [\beta(\mu_D + \theta) - \mu_D(\tau + \mu_D + p + 2\theta)]i + \\ & + (\theta + p)(\theta + \tau + \mu_D)(\mathcal{R}_0^{VP+VRN} - 1). \end{aligned}$$

Se $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} > 1$ então o sistema admite dois pontos de equilíbrio, o ponto de equilíbrio de não doença U_0 e o ponto de equilíbrio endémico

$$U^* = (s^*, i^*, r^*) = \left(\frac{(\theta + \tau + \mu_D) - \mu_D i^*}{\beta}, i^*, r^* \right),$$

onde i^* é a solução da equação $\varphi(i) = 0$ e $r^* = 1 - s^* - i^*$.

Demonstração: As coordenadas s_0 e i_0 de U_0 já foram calculados anteriormente. O valor de r_0 obtém-se de $r_0 = 1 - s_0 - i_0$.

Para discutir a existência do ponto de equilíbrio endémico do sistema (5.12), vamos analisar a existência de soluções no interior da região T limitada por

$$\begin{aligned} \beta s + \mu_D i - (\theta + \tau + \mu_D) &= 0 \\ (\beta - \mu_D) s i + (\theta + p) s - \tau i &= (1 - \nu)\theta, \end{aligned} \tag{5.14}$$

que são as curvas isóclinas de (5.13). Da primeira equação de (5.14) vem $s^* = \frac{(\theta + \tau + \mu_D) - \mu_D i^*}{\beta}$. Substituindo esta expressão na segunda equação de (5.14) e, após

algumas manipulações algébricas simples, obtemos $\varphi(i) = 0$, onde a função $\varphi(i)$ é dada por

$$\mu_D(\beta - \mu_D)i^2 - [\beta(\mu_D + \theta) - \mu_D(\tau + \mu_D + p + 2\theta)]i + (\theta + p)(\theta + \tau + \mu_D)(\mathcal{R}_0^{VP+VRN} - 1).$$

Assim, i^* , se existir, é solução da equação $\varphi(i) = 0$ e nesse caso ter-se-á também $r^* = 1 - s^* - i^*$.

Seja $\mathcal{R}_1$ o número de reprodução básico do modelo correspondente sem vacinação (secção 4.2.2) e suponhamos que é inferior ou igual a um, isto é, $\mathcal{R}_1 = \frac{\beta}{\theta + \tau + \mu_D} \leq 1$ (o que implica $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} < 1$).

Vamos estudar o comportamento da recta $l_1 : \beta s + \mu_D i = \theta + \tau + \mu_D$ em relação à região T .

Se $s = 0$ então temos $i = \frac{\theta + \tau + \mu_D}{\mu_D} \geq 1$ e, quando $i = 0$ verificamos que $s = \frac{\theta + \tau + \mu_D}{\beta} \geq 1$, levando-nos a concluir que a recta l_1 encontra-se no exterior de T e portanto não existem pontos de equilíbrio endémicos nesta situação.

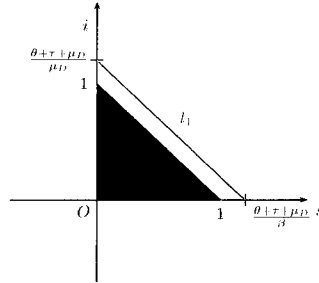


Figura 31: A recta l_1 encontra-se no exterior da região T .

Suponhamos agora que $\mathcal{R}_1 > 1$ (o que implica, em particular, $\mu_D < \beta$).

De forma análoga ao caso anterior analisamos o comportamento de l_1 em relação à região T e observamos que existe um ponto de intersecção entre a recta l_1 e a recta de equação $s + i = 1$, o qual denotamos por M .

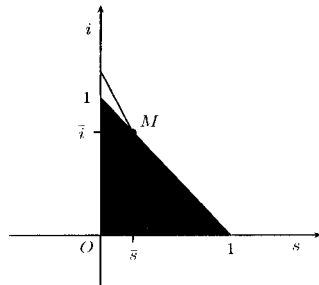


Figura 32: Ponto M de intersecção da recta l_1 (a vermelho) com a recta de equação $s + i = 1$.

Resolvendo o sistema de equações

$$\begin{aligned}\beta s + \mu_D i &= \theta + \tau + \mu_D \\ s + i &= 1,\end{aligned}$$

verificamos que a ordenada $\bar{i}$ do ponto M é a proporção de indivíduos infectados no ponto de equilíbrio endêmico do modelo sem vacinação correspondente, isto é,

$$\bar{i} = \frac{\beta - (\theta + \tau + \mu_D)}{\beta - \mu_D} \quad \text{e} \quad 0 < \bar{i} < 1.$$

Assim, a existência do ponto de equilíbrio endêmico é equivalente à existência da solução da equação $\varphi(i) = 0$ no intervalo $]0, \bar{i}[$. Ora

$$\varphi(\bar{i}) = \mu_D(\beta - \mu_D)\bar{i}^2 - [\beta(\mu_D + \theta) - \mu_D(\tau + \mu_D + p + 2\theta)]\bar{i} + (\theta + p)(\theta + \tau + \mu_D)(\mathcal{R}_0^{VP+VRN} - 1),$$

o que é equivalente, após uma série de cálculos e simplificações, a

$$(\beta - \mu_D)\varphi(\bar{i}) = -\beta[\nu\theta(\beta - \mu_D) + p(\theta + \tau)]. \quad (5.15)$$

Se $\mathcal{R}_1 > 1$ e $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} \leq 1$ obtemos

$$\begin{aligned}\varphi(\bar{i}) &= \frac{-\beta[\nu\theta(\beta - \mu_D) + p(\theta + \tau)]}{\beta - \mu_D} < 0, \\ \varphi(0) &= (\theta + p)(\theta + \tau + \mu_D)(\mathcal{R}_0^{VP+VRN} - 1) \leq 0.\end{aligned}$$

Como o gráfico de φ é uma parábola com concavidade voltada para cima, se $\mathcal{R}_1 > 1$ e $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} \leq 1$ então a equação $\varphi(i) = 0$ não tem soluções no intervalo $]0, \bar{i}[$.

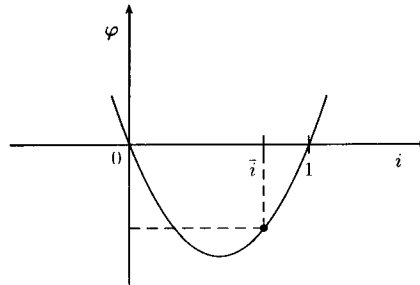


Figura 33: Gráfico da função φ considerando que $\varphi(0) = 0$.

Concluimos da análise feita que quando $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} \leq 1$ o sistema (5.12) admite apenas o ponto de equilíbrio de não doença.

Se $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} > 1$ então $\mathcal{R}_1 > 1$. Em particular $\mu_D < \beta$ e da equação (5.15) verificamos que $\varphi(\bar{i}) < 0$ e $\varphi(0) > 0$.

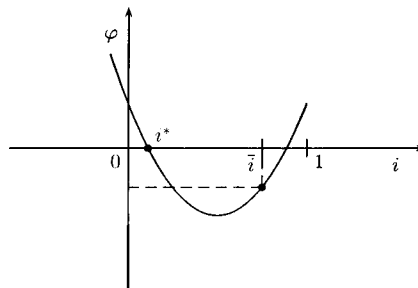


Figura 34: Gráfico da função φ no caso em que $\varphi(0) > 0$.

Daqui resulta que a equação $\varphi(i) = 0$ tem uma única solução no intervalo $]0, \hat{i}[$ e portanto quando $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} > 1$ o sistema (5.12) admite dois pontos de equilíbrio: o de não doença e o endêmico.

Teorema 5.2.15 *Se $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} < 1$ então o ponto de equilíbrio de não doença U_0 é um nó localmente assintoticamente estável e se $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} > 1$ então U_0 é um ponto sela (instável).*

Demonstração: Consideremos o sistema (5.13). A matriz jacobiana associada num ponto (s, i) genérico é dada por

$$\begin{pmatrix} -(\beta - \mu_D)i - (\theta + p) & -(\beta - \mu_D)s + \tau \\ \beta i & \beta s - (\theta + \tau + \mu_D) + 2\mu_D i \end{pmatrix},$$

portanto em $U_0 = \left((1 - \nu)\frac{\theta}{\theta + p}, 0\right)$ vale

$$\begin{pmatrix} -(\theta + p) & -(\beta - \mu_D)(1 - \nu)\frac{\theta}{\theta + p} + \tau \\ 0 & (\theta + \tau + \mu_D)(\mathcal{R}_0^{VP+VRN} - 1) \end{pmatrix}$$

e daqui se conclui que U_0 é um nó localmente assintoticamente estável se $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} < 1$ e é um ponto sela (instável) se $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} > 1$.

Em seguida é apresentado um lema necessário ao estudo da estabilidade local do ponto de equilíbrio endêmico.

Lema 5.2.16 *Se existir um ponto de equilíbrio endêmico $U^* = (s^*, i^*)$ de (5.13) então*

$$\varphi'(i^*) < 0 \quad e \quad i^* < \hat{i} = \frac{\theta + p}{\mu_D}$$

(onde φ é a função da proposição 5.2.14).

Demonstração: Da demonstração da proposição 5.2.14, no caso de existência do ponto de equilíbrio endêmico, a função φ pode ser representada graficamente por

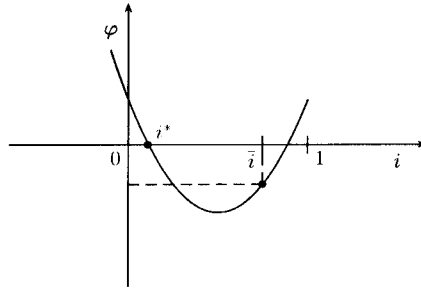


Figura 35: Gráfico da função φ no caso de existência do ponto de equilíbrio endêmico.

donde resulta facilmente que $\varphi'(i^*) < 0$ e que $i^* < \bar{i} < 1$.

Se $\hat{i} \geq 1$ então $i^* < \hat{i}$ e o lema fica provado. Se $\hat{i} < 1$ então a desigualdade $\theta + p < \mu_D$ é verificada. Após manipulações algébricas simples obtemos

$$\mu_D \varphi(\hat{i}) = \beta \{p[(\theta + p) - \mu_D] - \mu_D \nu \theta\}.$$

Como $\theta + p < \mu_D$ então $\mu_D \varphi(\hat{i}) < 0$ e portanto $\varphi(\hat{i}) < 0$. Pela demonstração da proposição 5.2.14 (no caso de existência do ponto de equilíbrio endêmico) e vendo a figura 35 concluímos que $i^* < \hat{i}$.

Teorema 5.2.17 Se $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} > 1$ então o ponto de equilíbrio endêmico U^* é localmente assintoticamente estável.

Demonstração: A matriz jacobiana associada ao sistema (5.13) e avaliada em $U^* = (s^*, i^*)$ é

$$Jac(U^*) = \begin{pmatrix} -(\beta - \mu_D)i^* - (\theta + p) & -(\beta - \mu_D)s^* + \tau \\ \beta i^* & \beta s^* - (\theta + \tau + \mu_D) + 2\mu_D i^* \end{pmatrix}.$$

O determinante e o traço da matriz são

$$\begin{aligned} \det(Jac(U^*)) &= [-(\beta - \mu_D)i^* - (\theta + p)][\beta s^* - (\theta + \tau + \mu_D) + 2\mu_D i^*] + [(\beta - \mu_D)s^* + \tau]\beta i^*, \\ \text{tr}(Jac(U^*)) &= [-(\beta - \mu_D)i^* - (\theta + p)] + [\beta s^* - (\theta + \tau + \mu_D) + 2\mu_D i^*], \end{aligned}$$

respectivamente.

Substituindo o valor de s^* por $\frac{(\theta+\tau+\mu_D)-\mu_D i^*}{\beta}$ e, após algumas simplificações, obtemos

$$\begin{aligned} \det(Jac(U^*)) &= -i^* \{2\mu_D(\beta - \mu_D)i^* - [\beta(\mu_D + \theta) - \mu_D(\tau + \mu_D + p + 2\theta)]\} \\ &= -i^* \varphi'(i^*) \\ &> 0, \\ \text{tr}(Jac(U^*)) &= -(\beta - \mu_D)i^* + \mu_D(i^* - \hat{i}) < 0, \end{aligned}$$

pelo lema 5.2.16. Logo U^* é localmente assintoticamente estável.

Para facilitar o estudo da estabilidade global do ponto de equilíbrio de não doença, apresentamos o seguinte lema.

Lema 5.2.18 *Se $\mathcal{R}_1 = \frac{\beta}{\tau+\mu_D+\theta} > 1$ e $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} \leq 1$ então*

(a) *se t_* é tal que $(s(t_*), i(t_*))$ pertence ao interior da região*

$$D_1 = \{(s, i) : s > 0, i \geq 0, s + i < 1, \beta s + \mu_D i > \theta + \tau + \mu_D\},$$

então $i'(t_*) > 0$ e $s'(t_*) < 0$;

(b) *a região*

$$D_2 = \{(s, i) : s > 0, i \geq 0, s + i < 1, \beta s + \mu_D i \leq \theta + \tau + \mu_D\}$$

é positivamente invariante para (5.13).

Demonstração:

(a) O sistema (5.13) tem a curva isóclina $l_1 : \beta s + \mu_D i = \theta + \tau + \mu_D$. Sabe-se pela demonstração da proposição 5.2.14 (no caso em que $\mathcal{R}_1 > 1$) que a ordenada do ponto de intersecção (M) de l_1 com a recta $s + i = 1$ é $\bar{i}$. O ponto de intersecção da recta l_1 com o eixo dos ss , o qual denotamos por N , tem abcissa $s_N = \frac{1}{\mathcal{R}_1}$. Como $i' = i[\beta s + \mu_D i - (\theta + \tau + \mu_D)]$ e $i > 0$ vem que

$$i' > 0 \iff i > \frac{\theta + \tau + \mu_D - \beta s}{\mu_D},$$

donde resulta que para todo o t_* tal que $(s(t_*), i(t_*))$ pertence ao interior de D_1 tem-se que $i'(t_*) > 0$.

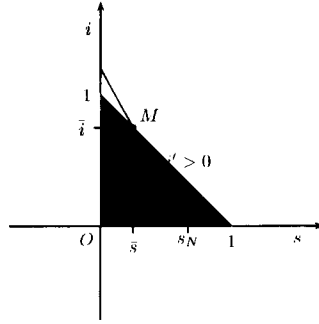


Figura 36: Sinal de i' no interior da região D_1 .

Para provar que $s'(t_*) < 0$ consideramos a curva isóclina

$$l_2 : (\beta - \mu_D)si + (\theta + p)s - \tau i = (1 - \nu)\theta$$

ou equivalentemente

$$i = \frac{(1 - \nu)\theta - (\theta + p)s}{(\beta - \mu_D)s - \tau}.$$

Esta curva tem como assíntotas vertical e horizontal as rectas

$$s = \frac{\tau}{\beta - \mu_D} > 0 \quad \text{e} \quad i = -\frac{\theta + p}{\beta - \mu_D} < 0,$$

respectivamente.

Mais ainda, l_2 intersecta o eixo dos ss em s_0 e o eixo dos ii em $-\frac{(1-\nu)\theta}{\tau}$.

Já vimos que se $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} \leq 1$ então o sistema (5.13) tem apenas o ponto de equilíbrio de não doença. Isto implica que as curvas isóclinas l_1 e l_2 não se intersectam no interior da região T . Como $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} \leq 1$ concluímos que $s_0 \leq s_N$ e portanto que o segmento de recta $\overline{MN}$ está acima de l_2 .

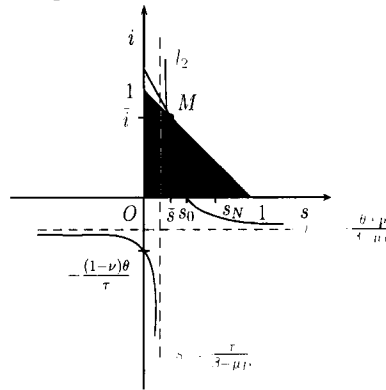


Figura 37: Possível representação da curva isóclina l_2 .

Como $s' = (1 - \nu)\theta - (\beta - \mu_D)si - (\theta + p)s + \tau i$ então

$$s' < 0 \iff i[(\beta - \mu_D)s - \tau] > -(\theta + p)s + (1 - \nu)\theta.$$

Olhando para a figura anterior verificamos que só nos interessa a região em que $s > \frac{\tau}{\beta - u_D}$ e portanto

$$s' < 0 \iff i > \frac{(1-\nu)\theta - (\theta+p)s}{(\beta - \mu_D)s - \tau},$$

donde resulta que para todo o t_* tal que $(s(t_*), i(t_*))$ pertence ao interior de D_1 se tem que $s'(t_*) < 0$.

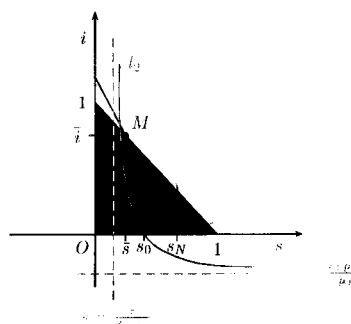


Figura 38: Sinal de s' no interior da região D_1 .

(b) Como $i' = i[\beta s + \mu_D i - (\theta + \tau + \mu_D)]$ e $i > 0$ vem que

$$i' < 0 \iff i < \frac{\theta + \tau + \mu_D - \beta s}{\mu_D},$$

donde resulta que para todo o t tal que $(s(t), i(t))$ pertence ao interior de D_2 tem-se que $i'(t) < 0$.

Uma vez que a região T é positivamente invariante para (5.13) (pela proposição 5.2.13) e não existe nenhum ponto de equilíbrio na região D_1 , de acordo com a alínea (a), qualquer solução com condição inicial em D_1 passa para D_2 . Suponhamos agora que existe um instante t_1 tal que essa solução cruza a recta l_1 , isto é, passa de D_2 para D_1 num ponto com ordenada $i(t_1) \neq 0$.

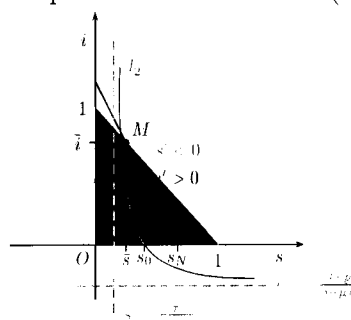


Figura 39: Solução com início na região D_2 e que passa para D_1 .

Neste caso, $i(t_1)$ é um mínimo pelo que

$$i'(t_1) = 0 \quad \text{e} \quad i''(t_1) > 0.$$

Ora

$$i'(t_1) = 0 \iff i(t_1) = \frac{\theta + \tau + \mu_D - \beta s(t_1)}{\mu_D}.$$

Como $i'' = \beta s + 2\mu_D i - (\theta + \tau + \mu_D)$ vem que

$$\begin{aligned} i''(t_1) &= -\beta s(t_1) + \theta + \tau + \mu_D \\ &\leq -\beta s_N + \theta + \tau + \mu_D \\ &= 0, \end{aligned}$$

o que é impossível.

Teorema 5.2.19 *Se $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} \leq 1$ então o ponto de equilíbrio de não doença U_0 é um nó globalmente assintoticamente estável na região T .*

Demonstração: Já vimos na proposição 5.2.14 que o único ponto de equilíbrio do sistema (5.12) quando $\mathcal{R}_0^{VP} \leq 1$ é o ponto de equilíbrio de não doença. Sendo T , D_1 e D_2 as regiões definidas anteriormente, há várias considerações a fazer nesta situação:

- pelo lema 5.2.18, qualquer solução com condição inicial na região D_1 passa para a região D_2 e não volta para a região D_1 ;
- se $(s(t), i(t)) \in D_2$ então $i(t) \geq 0$ e $i'(t) < 0$. portanto existe $\lim_{t \rightarrow +\infty} i(t)$ e é não negativo;
- qualquer solução convergente para um ponto, converge necessariamente para um ponto de equilíbrio e como no interior de D_2 não existem pontos de equilíbrio, $i(t) \rightarrow_{t \rightarrow +\infty} 0$.

Daqui concluímos que U_0 é um nó globalmente assintoticamente estável na região D_2 . Como já verificámos no lema 5.2.18 que qualquer solução com condição inicial em D_1 passa para D_2 , resulta que U_0 é um nó globalmente assintoticamente estável na região T .

A seguinte proposição serve de apoio ao estudo da estabilidade global do ponto de equilíbrio endémico.

Proposição 5.2.20 *A região*

$$\Omega = \{(s, i, r) : s > 0, i \geq 0, r \geq 0, s + i + r = 1\}$$

é positivamente invariante para (5.12). Em particular, as semi-órbitas positivas do sistema são limitadas.

Demonstração: Sempre que $s = 0$ e $i + r = 1$ temos

$$\begin{aligned} i' + r' &= \nu\theta - \theta(r + i) + \mu_D i(i + r) - (\tau + \mu_D)i \\ &= \theta(\nu - 1) - \tau i \\ &< 0, \end{aligned}$$

sempre que $i = 0$ e $s + r = 1$ temos

$$\begin{aligned} s' + r' &= (1 - \nu)\theta - \theta(s + r) + \nu\theta \\ &= 0, \end{aligned}$$

e finalmente sempre que $r = 0$ e $s + i = 1$ temos

$$\begin{aligned} s' + i' &= (1 - \nu)\theta - \theta(s + i) + \mu_D i(s + i) - \mu_D i - ps \\ &= -\nu\theta - ps \\ &< 0. \end{aligned}$$

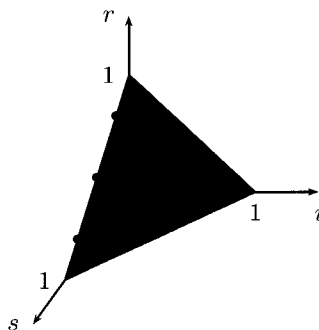


Figura 40: Região Ω e a direcção do campo de vectores sobre a fronteira.

Teorema 5.2.21 *Se $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} > 1$ então o ponto de equilíbrio endémico U^* é globalmente assintoticamente estável na região Ω .*

Demonstração: Vamos estudar a estabilidade global de U^* na região

$$\Omega = \{(s, i, r) : s > 0, i \geq 0, r \geq 0, s + i + r = 1\}.$$

Pela proposição 5.2.20 a região Ω é positivamente invariante para (5.12), pelo que as órbitas de (5.12) são limitadas. Sabemos, pelo teorema 5.2.17, que U^* é localmente assintoticamente estável.

Pelo Teorema de Poincaré - Bendixson, para mostrar que U^* é globalmente assintoticamente estável basta provar que o sistema não tem órbitas periódicas nem ciclos na região invariante Ω .

A fronteira da região Ω não pode conter cadeias cíclicas a partir do ponto de equilíbrio de não doença (sela) porque como foi visto na demonstração da proposição 5.2.20 a direcção do campo de vectores nessa fronteira nem sempre é nula. Vamos ver o que se passa no interior de Ω . Por redução ao absurdo, supomos que o sistema (5.12) tem uma solução periódica $\phi(t)$. A curva $\phi(t)$ é o bordo de um domínio plano Π pertencente ao interior de Ω .

Representando por (f_1, f_2, f_3) o campo de vectores do sistema (5.12), sejam

$$\begin{aligned} F &= (f_1, f_2, f_3)^T, \\ G(s, i, r) &= \frac{1}{sir} U \times F, \end{aligned}$$

onde $U = (s, i, r)^T$. Então $G \cdot F = 0$ e explicitando a função G obtemos

$$\begin{aligned} G(s, i, r) &= \left(\frac{1}{ir}, \frac{1}{sr}, \frac{1}{si} \right) \times (f_1, f_2, f_3) \\ &= \left(\frac{f_3}{sr} - \frac{f_2}{si}, \frac{f_1}{si} - \frac{f_3}{ir}, \frac{f_2}{ir} - \frac{f_1}{sr} \right) \\ &= (g_1, g_2, g_3). \end{aligned}$$

O rotacional de G é dado por

$$\text{rot } G = \left(\frac{\partial g_3}{\partial i} - \frac{\partial g_2}{\partial r}, \frac{\partial g_1}{\partial r} - \frac{\partial g_3}{\partial s}, \frac{\partial g_2}{\partial s} - \frac{\partial g_1}{\partial i} \right),$$

que após vários cálculos simples dá

$$\text{rot } G = \left(\frac{\beta}{r} - \frac{\tau}{sr} - \frac{\nu\theta}{ir^2} - \frac{ps}{ir^2}, -\frac{p}{r^2} - \frac{\beta}{r} - \frac{\theta}{s^2r} - \frac{\tau i}{s^2r}, -\frac{(1-\nu)\theta}{s^2i} - \frac{\tau}{s^2} - \frac{p}{ir} \right).$$

A componente do rotacional de G na direcção normal ao plano que contém Π é dada por

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \left(-\frac{\tau}{sr} - \frac{(i+s)(\nu\theta + ps)}{sir^2} - \frac{(i+r)[(1-\nu)\theta + \tau i] + ps^2}{s^2ir} \right) < 0 \quad \text{em } \text{int}(\Omega).$$

no interior de Ω . A componente G_t de G tangente à curva $\partial\Pi$ é dada por

$$\frac{G \cdot F}{|F|} = 0.$$

O Teorema de Stokes afirma que

$$0 = \int_{\partial\Pi} \frac{G \cdot F}{|F|} ds = \frac{1}{\sqrt{3}} \int_{\Pi} \text{rot } G \cdot (1, 1, 1)^T ds < 0,$$

o que é uma contradição.

Concluimos que o sistema não tem órbitas periódicas no interior de Ω , pelo que U^* é globalmente assintoticamente estável.

5.3 Modelo SIS com vacinação proporcional conferindo imunidade total

Nesta secção analisamos um caso particular do modelo anterior que estuda apenas o efeito da vacinação proporcional (isto é, considera $\nu = 0$). Este tipo de vacinação é indicado para populações com uma proporção significativa de pessoas fisicamente débeis ou grupos de risco que alteram a letalidade da epidemia ao proteger os indivíduos mais fracos.

5.3.1 População de tamanho constante [15]

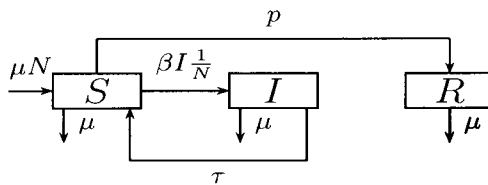


Figura 41: Modelo SIS com vacinação proporcional numa população de tamanho constante.

Dado que $\nu = 0$, do sistema (5.1) obtém-se

$$\begin{aligned} S' &= \mu N - (\mu + p)S - \beta \frac{S}{N} I + \tau I \\ I' &= \beta \frac{S}{N} I - (\mu + \tau)I \\ R' &= pS - \mu R, \end{aligned} \tag{5.16}$$

e portanto, em termos de proporções de indivíduos, temos

$$\begin{aligned} s' &= \mu - (\mu + p)s - \beta si + \tau i \\ i' &= \beta si - (\mu + \tau)i \\ r' &= ps - \mu r, \end{aligned} \tag{5.17}$$

o que é equivalente a

$$\begin{aligned} s' &= \mu - (\mu + p)s - \beta si + \tau i \\ i' &= \beta si - (\mu + \tau)i. \end{aligned} \tag{5.18}$$

Tal como anteriormente, a região simplesmente conexa

$$T = \{(s, i) : s > 0, i \geq 0, s + i \leq 1\}$$

é positivamente invariante para (5.18).

Da proposição 5.1.1 resulta que

$$\mathcal{R}_0^{VP} = \beta \frac{1}{\mu + \tau} \frac{\mu}{\mu + p} = \beta \frac{1}{\mu + \tau} \left(1 - \frac{p}{\mu + p}\right)$$

e tem-se

Proposição 5.3.1

- (a) Se $\mathcal{R}_0^{VP} \leq 1$ então o sistema (5.17) admite apenas o ponto de equilíbrio de não doença $U_0 = (s_0, i_0, r_0) = \left(\frac{\mu}{\mu+p}, 0, \frac{p}{\mu+p}\right)$.
- (b) Se $\mathcal{R}_0^{VP} > 1$ então o sistema admite o ponto de equilíbrio de não doença U_0 e o ponto de equilíbrio endêmico $U^* = (s^*, i^*, r^*) = \left(\frac{\mu+\tau}{\beta}, 1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0^{VP}}, \frac{1}{\mathcal{R}_0^{VP}} - \frac{\mu+\tau}{\beta}\right)$.

Relativamente à estabilidade global dos pontos de equilíbrio do sistema, os resultados são obtidos do teorema 5.1.5 fazendo $\nu = 0$, o que dá:

Teorema 5.3.2

- (a) Se $\mathcal{R}_0^{VP} < 1$ então o ponto de equilíbrio de não doença U_0 é globalmente assintoticamente estável na região T .
- (b) Se $\mathcal{R}_0^{VP} > 1$ então o ponto de equilíbrio de não doença U_0 é um ponto sela (instável) e o ponto de equilíbrio endêmico U^* é globalmente assintoticamente estável na região $T - \{(s, 0) : 0 < s \leq 1\}$.

5.3.2 População de tamanho variável

5.3.2.1 Com termo de contágio βSI

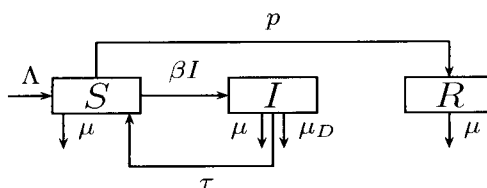


Figura 42: Modelo SIS com vacinação proporcional numa pop. de tamanho variável e com termo de contágio βSI .

Substituindo o valor de ν por zero nas equações do sistema (5.4) obtemos

$$\begin{aligned} S' &= \Lambda - (\mu + p)S - \beta SI + \tau I \\ I' &= \beta SI - (\mu + \tau + \mu_D)I \\ R' &= pS - \mu R \\ (N' &= \Lambda - \mu N - \mu_D I). \end{aligned} \quad (5.19)$$

que é equivalente a

$$\begin{aligned} I' &= I[\beta(N - I - R) - (\mu + \tau + \mu_D)] \\ R' &= p(N - I) - (p + \mu)R \\ N' &= \Lambda - \mu N - \mu_D I. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Das proposições 5.2.1 e 5.2.4 resulta que o número de reprodução básico associado ao modelo é

$$\mathcal{R}_0^{VP} = \beta \frac{1}{\mu + \tau + \mu_D} \frac{\Lambda}{\mu + p} = \beta \frac{1}{\mu + \tau + \mu_D} \frac{\Lambda}{\mu} \left(1 - \frac{p}{\mu + p}\right)$$

e as regiões simplesmente conexas

$$\Omega = \left\{ (I, R, N) : I \geq 0, R \geq 0, I + R \leq N \leq \frac{\Lambda}{\mu} \right\}$$

e

$$\Omega' = \left\{ (S, I, N) : S > 0, I \geq 0, S + I \leq N \leq \frac{\Lambda}{\mu} \right\}$$

são positivamente invariantes para os sistemas (5.20) e (5.19), respectivamente.

Relativamente à existência de pontos de equilíbrio e a sua estabilidade tem-se os seguintes resultados:

Proposição 5.3.3

- (a) Se $\mathcal{R}_0^{VP} \leq 1$ então o sistema (5.20) apenas admite o ponto de equilíbrio de não doença $U_0 = (I_0, R_0, N_0) = \left(0, \frac{\Lambda}{\mu} \frac{p}{\mu+p}, \frac{\Lambda}{\mu}\right)$.
- (b) Se $\mathcal{R}_0^{VP} > 1$ então o modelo admite o ponto de equilíbrio de não doença U_0 e o ponto de equilíbrio endêmico

$$U^* = (I^*, R^*, N^*) = \left(\frac{\Lambda}{\mu + \mu_D} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0^{VP}}\right), \frac{p}{\beta\mu}(\mu + \tau + \mu_D), \frac{\Lambda - \mu_D I^*}{\mu} \right).$$

Teorema 5.3.4

- (a) Se $\mathcal{R}_0^{VP} \leq 1$ então o ponto de equilíbrio de não doença U_0 é globalmente assintoticamente estável em Ω' .
- (b) Se $\mathcal{R}_0^{VP} > 1$ então U_0 é um ponto sela (instável) e, se existirem constantes positivas m e n de forma a que a matriz

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \beta m & \frac{\beta m + np}{2} & \frac{\mu_D - \beta m}{2} \\ \frac{\beta m + np}{2} & n(\mu + p) & \frac{np}{2} \\ \frac{\mu_D - \beta m}{2} & \frac{-np}{2} & \mu \end{pmatrix}$$

seja definida positiva, então o ponto de equilíbrio endêmico U^* é globalmente assintoticamente estável na região $\Omega' - \left\{ (S, 0, N) : 0 < S \leq N \leq \frac{\Lambda}{\mu} \right\}$.

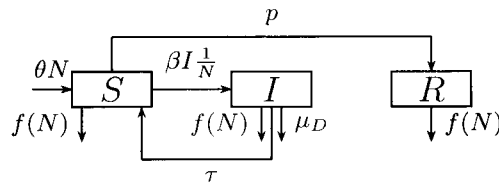
5.3.2.2 Com termo de contágio $\beta \frac{S}{N} I$ 

Figura 43: Modelo SIS com vacinação proporcional numa pop. de tamanho variável e com termo de contágio $\beta \frac{S}{N} I$.

Uma vez que $\nu = 0$, do sistema (5.11) obtém-se

$$\begin{aligned} S' &= \theta N - \beta \frac{S}{N} I - [f(N) + p]S + \tau I \\ I' &= \beta \frac{S}{N} I - [\tau + \mu_D + f(N)]I \\ R' &= pS - f(N)R \\ (N' &= N[\theta - f(N)] - \mu_D I), \end{aligned} \tag{5.21}$$

que, em termos de proporções de indivíduos, escreve-se

$$\begin{aligned} s' &= \theta - (\beta - \mu_D)si - (\theta + p)s + \tau i \\ i' &= i[\beta s + \mu_D i - (\theta + \tau + \mu_D)] \\ r' &= ps - \theta r + \mu_D ir, \end{aligned} \quad (5.22)$$

o que é equivalente a

$$\begin{aligned} s' &= \theta - (\beta - \mu_D)si - (\theta + p)s + \tau i \\ i' &= i[\beta s + \mu_D i - (\theta + \tau + \mu_D)]. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Da proposição 5.2.11 resulta que

$$\mathcal{R}_0^{VP} = \beta \frac{1}{\theta + \tau + \mu_D} \frac{\theta}{\theta + p} = \beta \frac{1}{\theta + \tau + \mu_D} \left(1 - \frac{p}{\theta + p}\right).$$

Tal como anteriormente, as regiões simplesmente conexas

$$T = \{(s, i) : s > 0, i \geq 0, s + i \leq 1\}$$

e

$$\Omega = \{(s, i, r) : s > 0, i \geq 0, r \geq 0, s + i + r = 1\}$$

são positivamente invariantes para (5.23) e (5.22), respectivamente.

Proposição 5.3.5

(a) Se $\mathcal{R}_0^{VP} \leq 1$ então o sistema (5.22) admite apenas o ponto de equilíbrio de não doença $U_0 = (s_0, i_0, r_0) = \left(\frac{\theta}{\theta+p}, 0, \frac{p}{\theta+p}\right)$.

(b) Seja φ a função definida por

$$\begin{aligned} \varphi(i) &= \mu_D(\beta - \mu_D)i^2 - [\beta(\mu_D + \theta) - \mu_D(\tau + \mu_D + p + 2\theta)]i + \\ &\quad + (\theta + p)(\theta + \tau + \mu_D)(\mathcal{R}_0^{VP} - 1). \end{aligned}$$

Se $\mathcal{R}_0^{VP} > 1$ então o sistema admite dois pontos de equilíbrio, o ponto de equilíbrio de não doença U_0 e o ponto de equilíbrio endémico

$$U^* = (s^*, i^*, r^*) = \left(\frac{(\theta + \tau + \mu_D) - \mu_D i^*}{\beta}, i^*, r^*\right),$$

onde i^* é a solução da equação $\varphi(i) = 0$ e $r^* = 1 - s^* - i^*$.

Relativamente à estabilidade dos pontos de equilíbrio do sistema, dos teoremas 5.2.15, 5.2.17, 5.2.19 e 5.2.21, fazendo $\nu = 0$, obtém-se os seguintes resultados:

Teorema 5.3.6

- (a) Se $\mathcal{R}_0^{VP} \leq 1$ então o ponto de equilíbrio de não doença U_0 é um nó globalmente assintoticamente estável em T .
- (b) Se $\mathcal{R}_0^{VP} > 1$ então U_0 é um ponto sela (instável) e o ponto de equilíbrio endémico U^* é globalmente assintoticamente estável em Ω .

5.4 Modelo SIS com vacinação de recém-nascidos conferindo imunidade total

Nesta secção analisamos outro caso particular do modelo com vacinação proporcional e de recém-nascidos que considera apenas o efeito da vacinação de recém-nascidos (isto é, $p = 0$).

5.4.1 População de tamanho constante

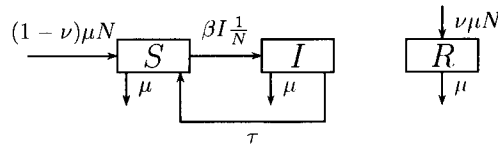


Figura 44: Modelo SIS com vacinação de recém-nascidos numa população de tamanho constante.

Fazendo $p = 0$, o sistema (5.1) fica

$$\begin{aligned} S' &= (1 - \nu)\mu N - \mu S - \beta \frac{S}{N} I + \tau I \\ I' &= \beta \frac{S}{N} I - (\mu + \tau) I \\ R' &= \nu \mu N - \mu R, \end{aligned} \tag{5.24}$$

e portanto, em termos de proporções de indivíduos, temos

$$\begin{aligned} s' &= (1 - \nu)\mu - \mu s - \beta s i + \tau i \\ i' &= \beta s i - (\mu + \tau) i \\ r' &= \nu \mu - \mu r, \end{aligned} \tag{5.25}$$

o que é equivalente a

$$\begin{aligned} s' &= (1 - \nu)\mu - \mu s - \beta si + \tau i \\ i' &= \beta si - (\mu + \tau)i. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Tal como no modelo que considera os dois tipos de vacinação, a região simplesmente conexa

$$T = \{(s, i) : s > 0, i \geq 0, s + i \leq 1\}$$

é positivamente invariante (5.26).

Da proposição 5.1.1, vem que o número de reprodução básico deste modelo é dado por

$$\mathcal{R}_0^{VRN} = \beta \frac{1}{\mu + \tau} (1 - \nu)$$

e tem-se

Proposição 5.4.1

- (a) Se $\mathcal{R}_0^{VRN} \leq 1$ então o sistema (5.25) admite apenas o ponto de equilíbrio de não doença $U_0 = (s_0, i_0, r_0) = (1 - \nu, 0, \nu)$.
- (b) Se $\mathcal{R}_0^{VRN} > 1$ então o sistema admite o ponto de equilíbrio de não doença U_0 e o ponto de equilíbrio endémico

$$U^* = (s^*, i^*, r^*) = \left(\frac{\mu + \tau}{\beta}, (1 - \nu) \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0^{VRN}} \right), \frac{1}{\mathcal{R}_0^{VRN}} (1 - \nu) + \nu - \frac{\mu + \tau}{\beta} \right).$$

Os resultados relativos à estabilidade global dos pontos de equilíbrio do sistema são obtidos do teorema 5.1.5 fazendo $p = 0$, o que dá:

Teorema 5.4.2

- (a) Se $\mathcal{R}_0^{VRN} < 1$ então o ponto de equilíbrio de não doença U_0 é globalmente assintoticamente estável na região T .
- (b) Se $\mathcal{R}_0^{VRN} > 1$ então o ponto de equilíbrio de não doença U_0 é um ponto sela (instável) e o ponto de equilíbrio endémico U^* é globalmente assintoticamente estável na região $T - \{(s, 0) : 0 < s \leq 1\}$.

5.4.2 População de tamanho variável

5.4.2.1 Com termo de contágio βSI

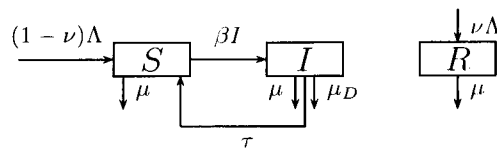


Figura 45: Modelo SIS com vacinação de recém-nascidos numa pop. de tam. variável e com termo de contágio βSI .

Dado que $p = 0$, das equações do sistema (5.4) obtém-se

$$\begin{aligned} S' &= (1 - \nu)\Lambda - \mu S - \beta SI + \tau I \\ I' &= \beta SI - (\mu + \tau + \mu_D)I \\ R' &= \nu\Lambda - \mu R \\ (N' &= \Lambda - \mu N - \mu_D I), \end{aligned} \tag{5.27}$$

que é equivalente a

$$\begin{aligned} I' &= I [\beta(N - I - R) - (\mu + \tau + \mu_D)] \\ R' &= \nu\Lambda - \mu R \\ N' &= \Lambda - \mu N - \mu_D I. \end{aligned} \tag{5.28}$$

Das proposições 5.2.1 e 5.2.4 resulta que o número de reprodução básico associado ao modelo é

$$\mathcal{R}_0^{VRN} = \beta \frac{1}{\mu + \tau + \mu_D} \frac{\Lambda}{\mu} (1 - \nu)$$

e as regiões simplesmente conexas

$$\Omega = \left\{ (I, R, N) : I \geq 0, R \geq 0, I + R \leq N \leq \frac{\Lambda}{\mu} \right\}$$

e

$$\Omega' = \left\{ (S, I, N) : S > 0, I \geq 0, S + I \leq N \leq \frac{\Lambda}{\mu} \right\}$$

são positivamente invariantes para os sistemas (5.28) e (5.27), respectivamente.

Os resultados sobre a existência de pontos de equilíbrio e a sua estabilidade são os seguintes:

Proposição 5.4.3

- (a) Se $\mathcal{R}_0^{VRN} \leq 1$ então o sistema (5.28) apenas admite o ponto de equilíbrio de não doença $U_0 = (I_0, R_0, N_0) = \left(0, \frac{\nu\Lambda}{\mu}, \frac{\Lambda}{\mu}\right)$.
- (b) Se $\mathcal{R}_0^{VRN} > 1$ então o modelo admite o ponto de equilíbrio de não doença U_0 e o ponto de equilíbrio endêmico

$$U^* = (I^*, R^*, N^*) = \left((1-\nu)\frac{\Lambda}{\mu + \mu_D} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0^{VRN}}\right), \frac{\nu\Lambda}{\mu}, \frac{\Lambda - \mu_D I^*}{\mu} \right).$$

Teorema 5.4.4

- (a) Se $\mathcal{R}_0^{VRN} \leq 1$ então o ponto de equilíbrio de não doença U_0 é globalmente assintoticamente estável em Ω' .
- (b) Se $\mathcal{R}_0^{VRN} > 1$ então U_0 é um ponto sela (instável) e, se existirem constantes positivas m e n de forma a que a matriz

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \beta m & \frac{\beta m}{2} & \frac{\mu_D - \beta m}{2} \\ \frac{\beta m}{2} & n\mu & 0 \\ \frac{\mu_D - \beta m}{2} & 0 & \mu \end{pmatrix}$$

seja definida positiva, então o ponto de equilíbrio endêmico U^* é globalmente assintoticamente estável na região $\Omega' - \left\{(S, 0, N) : 0 < S \leq N \leq \frac{\Lambda}{\mu}\right\}$.

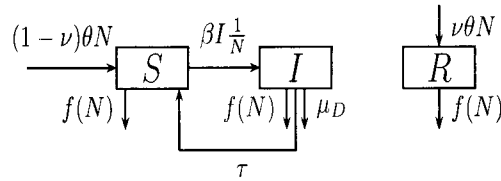
5.4.2.2 Com termo de contágio $\beta \frac{S}{N} I$ 

Figura 46: Modelo SIS com vacinação de recém-nascidos numa pop. de tam. variável e com termo de contágio $\beta \frac{S}{N} I$.

Fazendo $p = 0$ no sistema (5.11) obtém-se

$$\begin{aligned} S' &= (1-\nu)\theta N - \beta \frac{S}{N} I - f(N)S + \tau I \\ I' &= \beta \frac{S}{N} I - [\tau + \mu_D + f(N)]I \\ R' &= \nu\theta N - f(N)R \\ (N' &= N[\theta - f(N)] - \mu_D I), \end{aligned} \tag{5.29}$$

que, em termos de proporções de indivíduos, escreve-se

$$\begin{aligned} s' &= (1 - \nu)\theta - (\beta - \mu_D)si - \theta s + \tau i \\ i' &= i[\beta s + \mu_D i - (\theta + \tau + \mu_D)] \\ r' &= \nu\theta - \theta r + \mu_D i r, \end{aligned} \quad (5.30)$$

o que é equivalente a

$$\begin{aligned} s' &= (1 - \nu)\theta - (\beta - \mu_D)si - \theta s + \tau i \\ i' &= i[\beta s + \mu_D i - (\theta + \tau + \mu_D)]. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Da proposição 5.2.11 resulta que

$$\mathcal{R}_0^{VRN} = \beta \frac{1}{\theta + \tau + \mu_D} (1 - \nu).$$

Tal como no modelo com vacinação proporcional e de recém-nascidos, as regiões simplesmente conexas

$$T = \{(s, i) : s > 0, i \geq 0, s + i \leq 1\}$$

e

$$\Omega = \{(s, i, r) : s > 0, i \geq 0, r \geq 0, s + i + r = 1\}$$

são positivamente invariantes para (5.31) e (5.30), respectivamente.

Proposição 5.4.5

(a) Se $\mathcal{R}_0^{VRN} \leq 1$ então o sistema (5.30) admite apenas o ponto de equilíbrio de não doença $U_0 = (s_0, i_0, r_0) = (1 - \nu, 0, \nu)$.

(b) Seja φ a função definida por

$$\begin{aligned} \varphi(i) &= \mu_D(\beta - \mu_D)i^2 - [\beta(\mu_D + \theta) - \mu_D(\tau + \mu_D + 2\theta)]i + \\ &\quad + \theta(\theta + \tau + \mu_D)(\mathcal{R}_0^{VRN} - 1). \end{aligned}$$

Se $\mathcal{R}_0^{VRN} > 1$ então o sistema admite dois pontos de equilíbrio, o ponto de equilíbrio de não doença U_0 e o ponto de equilíbrio endémico

$$U^* = (s^*, i^*, r^*) = \left(\frac{(\theta + \tau + \mu_D) - \mu_D i^*}{\beta}, i^*, r^* \right),$$

onde i^* é a solução da equação $\varphi(i) = 0$ e $r^* = 1 - s^* - i^*$.

Relativamente à estabilidade dos pontos de equilíbrio do sistema, dos teoremas 5.2.15, 5.2.17, 5.2.19 e 5.2.21, fazendo $p = 0$, obtém-se os seguintes resultados:

Teorema 5.4.6

- (a) Se $\mathcal{R}_0^{VRN} \leq 1$ então o ponto de equilíbrio de não doença U_0 é um nó globalmente assintoticamente estável em T .
- (b) Se $\mathcal{R}_0^{VRN} > 1$ então U_0 é um ponto sela (instável) e o ponto de equilíbrio endêmico U^* é globalmente assintoticamente estável em Ω .

5.5 Discussão dos resultados

Os modelos SIS dos capítulos 4 e 5 (respectivamente, sem vacinação e com vacinação proporcional e vacinação de recém-nascidos conferindo imunidade total) apresentam uma dinâmica simples, condicionada pelo número de reprodução básico correspondente. Sempre que esse número é inferior a um, independentemente das condições iniciais do sistema, a doença extingue-se (o ponto de equilíbrio de não doença é globalmente assintoticamente estável); sempre que é superior a um, o sistema apresenta um (único) ponto de equilíbrio endêmico que é globalmente assintoticamente estável e portanto a doença vai necessariamente invadir a população. Para controlar e/ou prevenir a infecção, há portanto que garantir que o número de reprodução básico seja inferior a um, o que, como mostra a seguinte tabela, será diferente de modelo para modelo.

Expressões de $\mathcal{R}_0$			
	$N' = 0$	$N' \neq 0$	$N' \neq 0$
Termo Contágio	$\beta \frac{S}{N} I$	βSI	$\beta \frac{S}{N} I$
Sem Vacinação	$\beta \frac{1}{\mu + \tau}$	$\beta \frac{1}{\mu + \tau + \mu_D} \frac{\Lambda}{\mu}$	$\beta \frac{1}{\theta + \tau + \mu_D}$
VP Imun.Total	$\beta \frac{1}{\mu + \tau} \left(1 - \frac{p}{\mu + p}\right)$	$\beta \frac{1}{\mu + \tau + \mu_D} \frac{\Lambda}{\mu} \left(1 - \frac{p}{\mu + p}\right)$	$\beta \frac{1}{\theta + \tau + \mu_D} \left(1 - \frac{p}{\theta + p}\right)$
VRN Imun.Total	$\beta \frac{1}{\mu + \tau} (1 - \nu)$	$\beta \frac{1}{\mu + \tau + \mu_D} \frac{\Lambda}{\mu} (1 - \nu)$	$\beta \frac{1}{\theta + \tau + \mu_D} (1 - \nu)$
VP+VRN Imun.Total	$\beta \frac{1}{\mu + \tau} \left(1 - \frac{p + \nu \mu}{\mu + p}\right)$	$\beta \frac{1}{\mu + \tau + \mu_D} \frac{\Lambda}{\mu} \left(1 - \frac{p + \nu \mu}{\mu + p}\right)$	$\beta \frac{1}{\theta + \tau + \mu_D} \left(1 - \frac{p + \nu \theta}{\theta + p}\right)$

Proporção i (resp. número I) de indivíduos infectados

Nos três modelos SIS com vacinação analisados numa população de tamanho constante, se os números de reprodução básicos forem inferiores a um, a proporção i de indivíduos infectados é uma função monótona decrescente e que tende para $i_0 = 0$ (teorema 5.1.5), apresentando portanto um comportamento análogo ao do modelo SIS sem vacinação numa população de tamanho constante (teorema 4.1.6). O mesmo não acontece nos modelos SIS com vacinação aplicados numa população de tamanho

variável. Nesta situação, apesar da função i (resp. I) tender para zero, esta apresenta comportamentos distintos dependentes do valor do número de reprodução básico $\mathcal{R}_0$ do modelo correspondente sem vacinação.

Se o termo de contágio é βSI , pelo teorema 4.2.6 do modelo SIS sem vacinação e pelos teoremas 5.3.4, 5.4.4 e 5.2.7 associados aos três modelos SIS com vacinação, há duas situações a considerar:

- se $\mathcal{R}_0 \leq 1$ então $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} < 1$ (resp. $\mathcal{R}_0^{VP} < 1$ e $\mathcal{R}_0^{VRN} < 1$) e o número I de indivíduos infectados é uma função monótona decrescente que tende para $I_0 = 0$;
- se $\mathcal{R}_0 > 1$ e $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} < 1$ (resp. $\mathcal{R}_0^{VP} < 1$ e $\mathcal{R}_0^{VRN} < 1$) então a função I apresenta um comportamento condicionado pelas condições iniciais.

Se $(S(0), I(0), N(0))$ pertence à região

$$\Omega_1 = \left\{ (S, I, N) : \frac{\mu + \tau + \mu_D}{\beta} < S \leq N \leq \frac{\Lambda}{\mu}, 0 < I \leq N - S \right\}$$

então inicialmente a função I é monótona crescente atingindo o valor máximo em $t = t_1$ tal que $(S(t_1), I(t_1), N(t_1))$ pertence ao plano $S = \frac{\mu + \tau + \mu_D}{\beta}$. Posteriormente, para $t > t_1$, situação em que $(S(t), I(t), N(t))$ pertence à região $\Omega' - \Omega_1$, a função I é monótona decrescente e tende para $I_0 = 0$.

Se $(S(0), I(0), N(0))$ pertence à região $\Omega' - \Omega_1$, a função I decresce de forma monótona e tende para zero (I_0).

Se o termo de contágio é $\beta \frac{S}{N} I$, pelo teorema 4.2.11 correspondente ao modelo SIS sem vacinação e pelos teoremas 5.3.6, 5.4.6 e 5.2.19 associados aos três modelos SIS com vacinação, temos:

- se $\mathcal{R}_0 \leq 1$ então $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} < 1$ (resp. $\mathcal{R}_0^{VP} < 1$ e $\mathcal{R}_0^{VRN} < 1$) e a proporção i de indivíduos infectados é uma função monótona decrescente que tende para $i_0 = 0$;
- se $\mathcal{R}_0 > 1$ e $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} < 1$ (resp. $\mathcal{R}_0^{VP} < 1$ e $\mathcal{R}_0^{VRN} < 1$) então o comportamento da função i depende das condições iniciais. Se $(s(0), i(0))$ pertence à região

$$D_1 = \{ (s, i) : s > 0, i \geq 0, s + i < 1, \beta s + \mu_D i > \theta + \tau + \mu_D \}$$

então a função i é monótona crescente numa fase inicial e atinge o valor máximo em $t = t_1$ tal que $(s(t_1), i(t_1))$ pertence à recta $\beta s + \mu_D i = \theta + \tau + \mu_D$. Para

$t > t_1$ o ponto $(s(t), i(t))$ pertence à região

$$D_2 = \{(s, i) : s > 0, i \geq 0, s + i < 1, \beta s + \mu_D i \leq \theta + \tau + \mu_D\}$$

e a função i é monótona decrescente e tende para zero (i_0). Se $(s(0), i(0))$ pertence à região D_2 , a função i decresce monotonamente e tende a anular-se (i_0).

Por outras palavras, nos modelos SIS sem vacinação e com vacinação estudados, sempre que o número de reprodução é inferior a um, o ponto de equilíbrio de não doença é globalmente assintoticamente estável mas a proporção i (resp. número I) de indivíduos infectados, como função de t , apresenta comportamentos distintos. No modelo SIS sem vacinação, essa função é monótona decrescente, tende para zero e a doença nunca conseguirá expandir-se dentro da população. Nos modelos SIS com vacinação, para além deste fenómeno, pode também acontecer que a função i (resp. I) seja inicialmente monótona crescente e posteriormente monótona decrescente, tendendo para zero, isto é, a doença expande-se num período inicial (surge uma epidemia) e, só mais tarde, acaba por se extinguir.

Eficácia da vacinação

Observando a tabela verificamos que, independentemente do tamanho da população (variável ou não), temos sempre

$$\mathcal{R}_0^{VP+VRN} < \mathcal{R}_0^{VP} < \mathcal{R}_0 \quad \text{e} \quad \mathcal{R}_0^{VP+VRN} < \mathcal{R}_0^{VRN} < \mathcal{R}_0.$$

As desigualdades anteriores são totalmente previsíveis pois ao considerarmos qualquer tipo de vacinação numa população, estamos claramente a diminuir o número de indivíduos susceptíveis nessa população e, conseqüentemente, a diminuir o número de casos secundários que um indivíduo infectado pode provocar. As expressões analíticas para $\mathcal{R}_0^{VP}$, $\mathcal{R}_0^{VRN}$ e $\mathcal{R}_0^{VP+VRN}$ são importantes pelo facto de nos permitirem estimar p e ν de forma a eliminar a doença (supondo que existem condições razoáveis de estabilidade sobre o ponto de equilíbrio de não doença).

A desigualdade $\mathcal{R}_0^{VP} < \mathcal{R}_0$ (resp. $\mathcal{R}_0^{VRN} < \mathcal{R}_0$) significa que, se partirmos de um cenário em que $\mathcal{R}_0 > 1$ e conseguirmos vacinar a população de forma a obter $\mathcal{R}_0^{VP} < 1$ (resp. $\mathcal{R}_0^{VRN} < 1$), o ponto de equilíbrio endémico do modelo SIS sem vacinação é

eliminado e ficamos apenas com o ponto de equilíbrio de não doença. Por outro lado, se o ponto de equilíbrio endêmico do modelo com vacinação existir, a proporção (resp. número) de indivíduos infectados é menor do que no modelo sem vacinação, o que mostra sinais visíveis dos efeitos da vacinação.

Número/Proporção de infectados no ponto de equilíbrio endêmico

	$N' = 0$	$N' \neq 0$	$N' \neq 0$
Termo Contágio	$\beta \frac{S}{N} I$	βSI	$\beta \frac{S}{N} I$
Sem Vac.	$1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}$	$\frac{\Lambda}{\mu + \mu_D} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0} \right)$	$\frac{\beta}{\beta - \mu_D} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0} \right)$
VP Total	$1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0^{VP}}$	$\frac{\Lambda}{\mu + \mu_D} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0^{VP}} \right)$	$0 < i^* < \frac{\beta}{\beta - \mu_D} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0} \right)$
VRN Total	$(1 - \nu) \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0^{VP+VRN}} \right)$	$\frac{(1 - \nu)\Lambda}{\mu + \mu_D} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0^{VP+VRN}} \right)$	$0 < i^* < \frac{\beta}{\beta - \mu_D} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0} \right)$
VP+VRN Total	$(1 - \nu) \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0^{VP+VRN}} \right)$	$\frac{(1 - \nu)\Lambda}{\mu + \mu_D} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0^{VP+VRN}} \right)$	$0 < i^* < \frac{\beta}{\beta - \mu_D} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0} \right)$

Nota: Os $\mathcal{R}_0$ indicados em cada linha têm expressões diferentes apesar de estarem a ser representados pela mesma letra na tabela. A notação usada para $\mathcal{R}_0$ foi escolhida de acordo com o modelo de vacinação considerado.

Suponhamos que $\mathcal{R}_0 > 1$ e que o programa de vacinação escolhido é a vacinação proporcional. Para que $\mathcal{R}_0^{VP} < 1$ teremos de ter

$$1 - \frac{p}{\mu + p} < \frac{1}{\mathcal{R}_0} \iff \frac{\mu}{\mu + p} < \frac{1}{\mathcal{R}_0} \iff p > \mu(\mathcal{R}_0 - 1)$$

(quando a população é de tamanho variável e o termo de contágio é $\beta \frac{S}{N} I$, em vez de μ temos θ).

Uma vez que $0 \leq p \leq 1$, a função $g(p) = \frac{\mu}{\mu + p}$ atinge os valores máximo (1) e mínimo $\left(\frac{\mu}{\mu + 1} \right)$ quando $p = 0$ e $p = 1$, respectivamente.

Se $\frac{\mu}{\mu + p} < \frac{1}{\mathcal{R}_0}$ então a proporção p de indivíduos susceptíveis a vacinar (de forma a que a vacinação proporcional seja eficaz no controlo da doença) tem de satisfazer as condições:

$$0 < p \leq 1 \quad \text{e} \quad p > \mu(\mathcal{R}_0 - 1).$$

Se $\frac{\mu}{\mu + p} > \frac{1}{\mathcal{R}_0}$ então não existe p tal que $\mathcal{R}_0^{VP} < 1$ e, nesta situação, devemos adoptar outros métodos de prevenção e/ou cura para que a doença se extinga.

Um dos métodos a adoptar poderá ser o acréscimo da vacinação de recém-nascidos. Se $\mathcal{R}_0^{VP} > 1$, com um determinado p , queremos que $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} < 1$, isto é,

$$1 - \nu < \frac{1}{\mathcal{R}_0^{VP}} \iff \mu > 1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0^{VP}}.$$

Uma vez que $0 \leq \nu \leq 1$, a função $h(\nu) = 1 - \nu$ atinge os valores máximo (1) e mínimo (0) quando $\nu = 0$ e $\nu = 1$, respectivamente.

Se $1 - \nu < \frac{1}{\mathcal{R}_0^{VP}}$ então a proporção ν de recém-nascidos a vacinar (de forma a garantir a eficácia deste plano de vacinação) tem de satisfazer as condições:

$$0 < \nu \leq 1 \quad \text{e} \quad \nu > 1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0^{VP}}.$$

Se $1 - \nu > \frac{1}{\mathcal{R}_0^{VP}}$ então não existe ν tal que $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} < 1$, o que nos levará ter de escolher outras medidas para eliminar a doença.

Suponhamos agora que $\mathcal{R}_0 > 1$ e que o plano de vacinação a implementar é a vacinação de recém-nascidos. De forma a que $\mathcal{R}_0^{VRN} < 1$ teremos de ter

$$1 - \nu < \frac{1}{\mathcal{R}_0} \iff \nu > 1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}.$$

Se $1 - \nu < \frac{1}{\mathcal{R}_0}$ então a proporção ν de indivíduos recém-nascidos a vacinar tem de satisfazer as condições:

$$0 < \nu \leq 1 \quad \text{e} \quad \nu > 1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}.$$

Se $1 - \nu > \frac{1}{\mathcal{R}_0}$ então não existe ν tal que $\mathcal{R}_0^{VRN} < 1$ e, neste caso, teremos de escolher outros métodos de prevenção e/ou cura para que a doença tenda para a sua eliminação.

Um dos métodos a implementar poderá ser o acréscimo da vacinação proporcional. Se $\mathcal{R}_0^{VRN} > 1$, com um determinado ν , pretendemos que $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} < 1$, isto é,

$$\frac{\mu}{\mu + p} < \frac{1}{\mathcal{R}_0^{VRN}} \iff p > \mu(\mathcal{R}_0^{VRN} - 1).$$

(quando a população é de tamanho variável e o termo de contágio é $\beta \frac{S}{N} I$, em vez de μ temos θ).

Se $\frac{\mu}{\mu + p} < \frac{1}{\mathcal{R}_0^{VRN}}$ então a proporção p de indivíduos susceptíveis a vacinar satisfaz as condições:

$$0 < p \leq 1 \quad \text{e} \quad p > \mu(\mathcal{R}_0^{VRN} - 1).$$

Se $\frac{\mu}{\mu + p} > \frac{1}{\mathcal{R}_0^{VRN}}$ então não existe p tal que $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} < 1$, o que nos levará ter de adoptar outras medidas para que a doença se extinga.

Comparação entre os números de reprodução básicos tendo em conta o tamanho da população

Tal como foi referido na secção 4.3: a expressão do número de reprodução básico correspondente ao modelo da segunda coluna não pode ser comparada com as que figuram na primeira e terceira colunas; se $\mu_D > 0$ então a expressão do número de reprodução básico correspondente ao modelo da terceira coluna é menor do que o correspondente ao modelo da primeira coluna; se $\mu_D = 0$ então estas expressões são iguais.

Dinâmica do tamanho da população

A estabilidade global do ponto de equilíbrio de não doença e do ponto de equilíbrio endémico em qualquer um dos modelos dos capítulos 4 e 5 juntamente com a proposição 4.2.12 para o tamanho da população provam o seguinte resultado para qualquer um dos três modelos apresentados na terceira coluna das tabelas anteriores:

Corolário 5.5.1

- (a) Se $\mathcal{R}_0 < 1$ então $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = N^*$. Em particular, a doença extingue-se e o tamanho da população estabiliza.
- (b) Se $\mathcal{R}_0 > 1$ e $f(0) < \theta - \mu_D i^*$ então $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = f^{-1}(\theta - \mu_D i^*) < N^*$. Em particular, a doença expande-se, resultando numa endemia, mas o tamanho da população tende a estabilizar.
- (c) Se $\mathcal{R}_0 > 1$ e $f(0) \geq \theta - \mu_D i^*$ então $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = 0$. Em particular, a doença persiste e a taxa de mortalidade total é tal que leva a população à extinção.

Capítulo 6

Modelo SIS com vacinação proporcional e de recém-nascidos conferindo imunidade temporária

As hipóteses do modelo são as seguintes:

- Os dois tipos de vacinação conferem **imunidade temporária**. A **imunidade temporária** é um tipo de imunidade que se vai desvanecendo ao longo do tempo.
- A entrada de indivíduos para a população (por nascimento, imigração,...) é feita apenas para o compartimentos dos susceptíveis.
- Vacina-se uma proporção ν de indivíduos recém-nascidos por unidade de tempo.
- Vacina-se uma proporção p de indivíduos susceptíveis por unidade de tempo.
- O retorno dos indivíduos vacinados para a classe dos susceptíveis por perda de imunidade é feito a uma taxa α_V ($\alpha_V > 0$).

6.1 População de tamanho constante

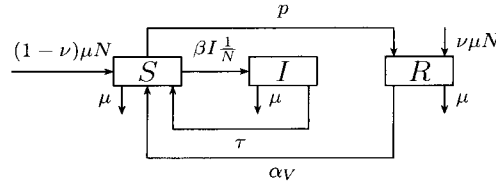


Figura 47: Modelo SIS com vacinação proporcional e de recém-nascidos numa população de tamanho constante.

As equações correspondentes a esta situação são

$$\begin{aligned} S' &= (1 - \nu)\mu N - (\mu + p)S - \beta \frac{S}{N} I + \tau I + \alpha_V R \\ I' &= \beta \frac{S}{N} I - (\mu + \tau)I \\ R' &= pS + \nu\mu N - (\mu + \alpha_V)R, \end{aligned} \quad (6.1)$$

que em termos de proporções de indivíduos temos

$$\begin{aligned} s' &= (1 - \nu)\mu - (\mu + p)s - \beta si + \tau i + \alpha_V r \\ i' &= \beta si - (\mu + \tau)i \\ r' &= ps + \nu\mu - (\mu + \alpha_V)r. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Dado que $s + i + r = 1$ podemos considerar apenas o sistema

$$\begin{aligned} s' &= (1 - \nu)\mu - (\mu + p)s - \beta si + \tau i + \alpha_V(1 - s - i) \\ i' &= \beta si - (\mu + \tau)i. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Proposição 6.1.1 *O número de reprodução básico associado ao modelo é*

$$\mathcal{R}_0^{VP+VRN} = \beta \frac{1}{\mu + \tau} \frac{(1 - \nu)\mu + \alpha_V}{\mu + p + \alpha_V}.$$

Demonstração: Consideremos o sistema (6.3). Sejam $\mathbf{x} = (i, s)$,

$$\mathcal{F}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \beta si \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{V}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} (\mu + \tau)i \\ -(1 - \nu)\mu + \mu s + \beta si + ps - \tau i - \alpha_V(1 - s - i) \end{pmatrix},$$

e $\mathbf{X}_s = \{(0, s) | s > 0\}$ o espaço de não doença. As hipóteses (H1)-(H4) referidas na secção 3.2 são trivialmente satisfeitas.

Para verificar (H5) precisamos de determinar o ponto de equilíbrio de não doença do sistema (6.3). Ora, o sistema (6.3) restrito a $\mathbf{X}_s$ é a equação

$$s' = (1 - \nu)\mu - (\mu + p)s + \alpha_V(1 - s),$$

pelo que o ponto de equilíbrio de não doença tem coordenadas

$$U_0 = (s_0, i_0) = \left(\frac{(1 - \nu)\mu + \alpha_V}{\mu + p + \alpha_V}, 0 \right).$$

Os valores próprios da matriz

$$-d\mathcal{V}(U_0) = \begin{pmatrix} -(\mu + \tau) & 0 \\ -\beta \frac{(1 - \nu)\mu + \alpha_V}{\mu + p + \alpha_V} + \tau - \alpha_V & -(\mu + p + \alpha_V) \end{pmatrix}$$

têm parte real negativa, o que prova que a hipótese (H5) é verificada.

Sejam agora F e V as matrizes 1×1 definidas por

$$F = \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial i} \Big|_{U_0} = \beta \frac{(1 - \nu)\mu + \alpha_V}{\mu + p + \alpha_V} \quad \text{e} \quad V = \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial i} \Big|_{U_0} = \mu + \tau.$$

Então o número de reprodução básico é

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_0^{VP+VRN} = \rho(FV^{-1}) &= \beta \frac{1}{\mu + \tau} \frac{(1 - \nu)\mu + \alpha_V}{\mu + p + \alpha_V} \\ &= \beta \frac{1}{\mu + \tau} \left(1 - \frac{p + \nu\mu}{\mu + p + \alpha_V} \right). \end{aligned}$$

(Nesta expressão $\frac{1}{\mu + p + \alpha_V}$ é a duração média de permanência efectiva de um indivíduo no compartimento dos susceptíveis.)

Proposição 6.1.2 *A região simplesmente conexa*

$$T = \{(s, i) : s > 0, i \geq 0, s + i \leq 1\}$$

é positivamente invariante para (6.3). Em particular, as semi-órbitas positivas do sistema são limitadas.

Demonstração: Consideremos o sistema (6.3). Em qualquer ponto do tipo $(0, i)$ tem-se $s' = (1 - \nu)\mu + \tau i + \alpha_V(1 - i) > 0$, e em qualquer ponto do tipo $(s, 0)$ tem-se $i' = 0$, o que implica que as órbitas do sistema nunca abandonam o primeiro quadrante. Em qualquer ponto (s, i) pertencente à recta $s + i = 1$ tem-se

$$s' + i' = (1 - \nu)\mu - \mu(s + i) - ps + \alpha_V(1 - s - i) = -\nu\mu - ps < 0.$$

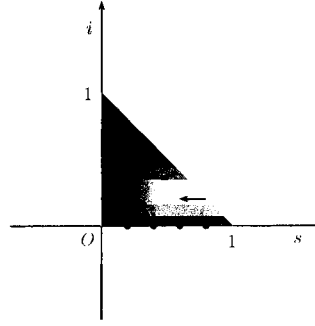


Figura 48: Região T e a direcção do campo de vectores sobre a fronteira.

Proposição 6.1.3

- (a) Se $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} \leq 1$ então o sistema (6.2) admite um único ponto de equilíbrio (o de não doença) de coordenadas $U_0 = (s_0, i_0, r_0) = \left(\frac{(1-\nu)\mu + \alpha_V}{\mu + p + \alpha_V}, 0, \frac{p + \nu\mu}{\mu + p + \alpha_V} \right)$.
- (b) Se $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} > 1$ então o sistema admite o ponto de equilíbrio de não doença U_0 e o ponto de equilíbrio endémico $U^* = (s^*, i^*, r^*)$, onde

$$\begin{aligned} s^* &= \frac{\mu + \tau}{\beta}, \\ i^* &= \frac{(1-\nu)\mu + \alpha_V}{\mu + \alpha_V} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0^{VP+VRN}} \right), \\ r^* &= \frac{1}{\mathcal{R}_0^{VP+VRN}} \frac{(1-\nu)\mu + \alpha_V}{\mu + \alpha_V} + \frac{\nu\mu}{\mu + \alpha_V} - \frac{\mu + \tau}{\beta}. \end{aligned}$$

Demonstração: Relativamente ao ponto de equilíbrio de não doença, os valores de s_0 e i_0 já foram calculados anteriormente e $r_0 = 1 - s_0 - i_0$. Pelas coordenadas verificamos que este ponto de equilíbrio existe para qualquer valor de $\mathcal{R}_0$.

Para a determinação do ponto de equilíbrio endémico, igualamos i' em (6.2) a zero obtendo

$$s^* = \frac{\mu + \tau}{\beta}.$$

Substituindo este valor na equação $s' = 0$ temos

$$\begin{aligned} (1-\nu)\mu - (\mu + p)\frac{\mu + \tau}{\beta} - \beta i^* \frac{\mu + \tau}{\beta} + \tau i^* + \alpha_V \left(1 - \frac{\mu + \tau}{\beta} - i^* \right) &= 0 \\ \iff i^* &= \frac{(1-\nu)\mu + \alpha_V}{\mu + \alpha_V} - \frac{(\mu + p + \alpha_V)(\mu + \tau)}{\beta(\mu + \alpha_V)} \\ \iff i^* &= \frac{(1-\nu)\mu + \alpha_V}{\mu + \alpha_V} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0^{VP+VRN}} \right). \end{aligned}$$

A positividade do número de indivíduos em cada compartimento obriga a que o ponto de equilíbrio endêmico só exista quando $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} > 1$.

Teorema 6.1.4

- (a) Se $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} < 1$ então o ponto de equilíbrio de não doença U_0 é globalmente assintoticamente estável na região T .
- (b) Se $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} > 1$ então o ponto de equilíbrio de não doença U_0 é um ponto sela (instável) e o ponto de equilíbrio endêmico U^* é globalmente assintoticamente estável na região $T - \{(s, 0) : 0 < s \leq 1\}$.

Demonstração:

- (a) A estabilidade local de U_0 é garantida pelo teorema 3.2.6. A estabilidade global deste ponto de equilíbrio é conseguida por aplicação da proposição 6.1.2 e do Teorema de Poincaré - Bendixson, de forma análoga à demonstração da alínea (a) do teorema 5.1.5.
- (b) Para estudar a estabilidade local dos pontos de equilíbrio consideramos o sistema (6.3). A matriz jacobiana associada num ponto (s, i) genérico é dada por

$$\begin{pmatrix} -(\mu + p + \alpha_V) - \beta i & -\beta s + \tau - \alpha_V \\ \beta i & \beta s - (\mu + \tau) \end{pmatrix},$$

que em U_0 se reduz a

$$\begin{pmatrix} -(\mu + p + \alpha_V) & -\beta \frac{(1-\nu)\mu + \alpha_V}{\mu + p + \alpha_V} + \tau - \alpha_V \\ 0 & \beta \frac{(1-\nu)\mu + \alpha_V}{\mu + p + \alpha_V} - (\mu + \tau) \end{pmatrix}.$$

Facilmente se verifica que os valores próprios da matriz têm sinais contrários e portanto que o ponto de equilíbrio de não doença é um ponto sela.

Relativamente ao ponto de equilíbrio endêmico, a matriz jacobiana avaliada neste ponto é

$$\begin{pmatrix} -(\mu + p + \alpha_V) - \beta \frac{(1-\nu)\mu + \alpha_V}{\mu + \alpha_V} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0^{VP+VRN}}\right) & -\mu - \alpha_V \\ \beta \frac{(1-\nu)\mu + \alpha_V}{\mu + \alpha_V} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0^{VP+VRN}}\right) & 0 \end{pmatrix}.$$

Os valores próprios da matriz são

$$\lambda_1 = \frac{-M + \sqrt{M^2 - 4N}}{2} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \frac{-M - \sqrt{M^2 - 4N}}{2},$$

onde

$$M = (\mu + p + \alpha_V) + \beta \frac{(1 - \nu)\mu + \alpha_V}{\mu + \alpha_V} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0^{VP+VRN}} \right)$$

e

$$N = \beta[(1 - \nu)\mu + \alpha_V] \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0^{VP+VRN}} \right).$$

Como $N > 0$, os valores próprios têm parte real negativa pelo que U^* é localmente assintoticamente estável.

A demonstração da estabilidade global de U^* segue os passos da demonstração da estabilidade global do ponto de equilíbrio endémico correspondente ao modelo da secção 5.1: aplicamos o Teorema de Dulac (com $\gamma(s, i) = \frac{1}{i}$), para concluir que não existem órbitas periódicas, e a proposição 6.1.2 juntamente com o Teorema de Poincaré - Bendixson finalizam a prova.

6.2 População de tamanho variável

6.2.1 Com termo de contágio βSI [12]

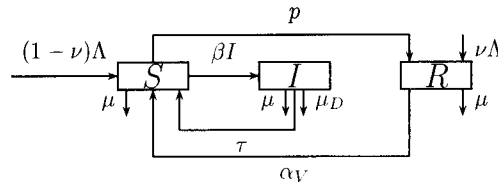


Figura 49: Modelo SIS com vac. prop. e de recém-nascidos numa pop. de tam. variável e termo de contágio βSI .

As equações do modelo são

$$\begin{aligned} S' &= (1 - \nu)\Lambda - (\mu + p)S - \beta SI + \tau I + \alpha_V R \\ I' &= \beta SI - (\mu + \tau + \mu_D)I \\ R' &= pS + \nu\Lambda - (\mu + \alpha_V)R \\ (N' &= \Lambda - \mu N - \mu_D I). \end{aligned} \tag{6.4}$$

Fazendo $S = N - I - R$ obtemos o sistema equivalente dado por

$$\begin{aligned} I' &= I[\beta(N - I - R) - (\mu + \tau + \mu_D)] \\ R' &= p(N - I) + \nu\Lambda - (p + \mu + \alpha_V)R \\ N' &= \Lambda - \mu N - \mu_D I. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Proposição 6.2.1 *O número de reprodução básico associado ao modelo é*

$$\mathcal{R}_0^{VP+VRN} = \beta \frac{1}{\mu + \tau + \mu_D} \frac{\Lambda}{\mu} \frac{(1 - \nu)\mu + \alpha_V}{\mu + p + \alpha_V}.$$

Demonstração: Vamos considerar o sistema (6.4). Sejam $\mathbf{X} = (I, S, R)$,

$$\mathcal{F}(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} \beta SI \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{V}(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} (\mu + \tau + \mu_D)I \\ (\mu + p)S + \beta SI - \tau I - (1 - \nu)\Lambda - \alpha_V R \\ (\mu + \alpha_V)R - pS - \nu\Lambda \end{pmatrix},$$

e $\mathbf{X}_s = \{(0, S, R) | S > 0, R \geq 0\}$ o espaço de não doença. As hipóteses (H1)-(H4) referidas na secção 3.2 são trivialmente satisfeitas. Vemos em seguida que (H5) é também verificada.

O ponto de equilíbrio de não doença de (6.4) é o ponto de equilíbrio do sistema

$$\begin{aligned} S' &= (1 - \nu)\Lambda - (\mu + p)S + \alpha_V R \\ R' &= pS + \nu\Lambda - (\mu + \alpha_V)R, \end{aligned}$$

pelo que tem coordenadas

$$U_0 = (S_0, I_0, R_0) = \left(\frac{\Lambda}{\mu} \frac{(1 - \nu)\mu + \alpha_V}{\mu + p + \alpha_V}, 0, \frac{\Lambda}{\mu} \frac{p + \nu\mu}{\mu + p + \alpha_V} \right).$$

Os valores próprios da matriz

$$-d\mathcal{V}(U_0) = \begin{pmatrix} -(\mu + \tau + \mu_D) & 0 & 0 \\ -\beta \frac{\Lambda}{\mu} \frac{(1 - \nu)\mu + \alpha_V}{\mu + p + \alpha_V} + \tau & -(\mu + p) & \alpha_V \\ 0 & p & -(\mu + \alpha_V) \end{pmatrix}$$

são

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -(\mu + \tau + \mu_D) \\ \lambda_2 &= \frac{-(2\mu + p + \alpha_V) + \sqrt{(2\mu + p + \alpha_V)^2 - 4\mu(\mu + p + \alpha_V)}}{2} \\ \lambda_3 &= \frac{-(2\mu + p + \alpha_V) - \sqrt{(2\mu + p + \alpha_V)^2 - 4\mu(\mu + p + \alpha_V)}}{2}. \end{aligned}$$

Como facilmente se verifica, os valores próprios têm parte real negativa e portanto a hipótese (H5) é satisfeita.

Sejam agora F e V as matrizes 1×1 definidas por

$$F = \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial I}|_{u_0} = \beta \frac{\Lambda}{\mu} \frac{(1-\nu)\mu + \alpha_V}{\mu + p + \alpha_V} \quad \text{e} \quad V = \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial I}|_{u_0} = \mu + \tau + \mu_D.$$

O operador da próxima geração é então

$$\begin{aligned} FV^{-1} &= \beta \frac{1}{\mu + \tau + \mu_D} \frac{\Lambda}{\mu} \frac{(1-\nu)\mu + \alpha_V}{\mu + p + \alpha_V} \\ &= \beta \frac{1}{\mu + \tau + \mu_D} \frac{\Lambda}{\mu} \left(1 - \frac{p + \nu\mu}{\mu + p + \alpha_V} \right) \end{aligned}$$

pelo que $\mathcal{R}_0^{VP+VRN}$, sendo o valor próprio dominante de FV^{-1} , coincide exactamente com essa expressão.

Proposição 6.2.2 *As regiões simplesmente conexas*

$$\Omega = \left\{ (I, R, N) : I \geq 0, R \geq 0, I + R \leq N \leq \frac{\Lambda}{\mu} \right\}$$

e

$$\Omega' = \left\{ (S, I, N) : S > 0, I \geq 0, S + I \leq N \leq \frac{\Lambda}{\mu} \right\}$$

são positivamente invariantes para os sistemas (6.5) e (6.4), respectivamente. Em particular, as semi-órbitas positivas dos sistemas são limitadas.

Demonstração: Vamos mostrar primeiramente que a região Ω é positivamente invariante para o sistema (6.5). Em qualquer ponto do tipo $(0, R, N)$ tem-se $I' = 0$ e em qualquer ponto do tipo $(I, 0, N)$ tem-se $R' = p(N - I) + \nu\Lambda > 0$. Para mostrarmos que $0 \leq I + R \leq N \leq \frac{\Lambda}{\mu}$ seguimos os passos correspondentes efectuados na demonstração da proposição 5.2.4.

Para mostrarmos que Ω' é uma região positivamente invariante para (6.4) observamos que em qualquer ponto do tipo $(0, I, N)$ se tem $S' = (1 - \nu)\Lambda + \tau I + \alpha_V R > 0$, em qualquer ponto do tipo $(S, 0, N)$ se tem $I' = 0$, e tal como no caso anterior $0 \leq S + I \leq N \leq \frac{\Lambda}{\mu}$.

Proposição 6.2.3

- (a) Se $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} \leq 1$ então o sistema (6.5) admite um único ponto de equilíbrio (o de não doença) de coordenadas $U_0 = (I_0, R_0, N_0) = \left(0, \frac{\Lambda}{\mu} \frac{p+\nu\mu}{\mu+p+\alpha_V}, \frac{\Lambda}{\mu}\right)$.
- (b) Se $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} > 1$ então o modelo admite o ponto de equilíbrio de não doença U_0 e o ponto de equilíbrio endêmico $U^* = (I^*, R^*, N^*)$ onde

$$\begin{aligned} I^* &= \frac{\Lambda}{\mu + \mu_D} \frac{(1-\nu)\mu + \alpha_V}{\mu + \alpha_V} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0^{VP+VRN}}\right), \\ R^* &= \frac{1}{\mu + \alpha_V} \left[\frac{p}{\beta} (\mu + \tau + \mu_D) + \nu\Lambda \right], \\ N^* &= \frac{\Lambda - \mu_D I^*}{\mu}. \end{aligned}$$

Demonstração: Pelas coordenadas S_0, I_0 e R_0 do ponto de equilíbrio de não doença anteriormente determinadas tem-se $N_0 = S_0 + I_0 + R_0 = \frac{\Lambda}{\mu}$.

Para o cálculo do ponto de equilíbrio endêmico consideramos o sistema (6.4). De $I' = 0$ e $I \neq 0$ obtém-se

$$S^* = \frac{\mu + \tau + \mu_D}{\beta}$$

que substituído em $R' = 0$ dá

$$R^* = \frac{1}{\mu + \alpha_V} \left[\frac{p}{\beta} (\mu + \tau + \mu_D) + \nu\Lambda \right].$$

Para determinar o valor de I^* substituímos o valor de R por R^* e o valor de S por S^* na equação $S' = 0$ e obtemos, após vários cálculos e simplificações,

$$\begin{aligned} I^* &= \frac{(1-\nu)\Lambda\mu + \alpha_V\Lambda}{(\mu + \mu_D)(\mu + \alpha_V)} - \frac{(\mu + \tau + \mu_D)[(\mu + p)(\mu + \alpha_V) - \alpha_V p]}{\beta(\mu + \mu_D)(\mu + \alpha_V)} \\ \Leftrightarrow I^* &= \frac{\Lambda}{\mu + \mu_D} \frac{(1-\nu)\mu + \alpha_V}{\mu + \alpha_V} \left[1 - \frac{(\mu + \tau + \mu_D)\mu(\mu + \alpha_V + p)}{\beta\Lambda[(1-\nu)\mu + \alpha_V]} \right] \\ \Leftrightarrow I^* &= \frac{\Lambda}{\mu + \mu_D} \frac{(1-\nu)\mu + \alpha_V}{\mu + \alpha_V} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0^{VP+VRN}} \right). \end{aligned}$$

Em particular tem-se também $N' = 0$ e portanto

$$N^* = \frac{\Lambda - \mu_D I^*}{\mu}.$$

Como o número de indivíduos infectados no ponto de equilíbrio endêmico tem de ser positivo, U^* só existe quando $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} > 1$.

Teorema 6.2.4

- (a) Se $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} < 1$ então o ponto de equilíbrio de não doença U_0 é localmente assintoticamente estável.
- (b) Se $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} > 1$ então o ponto de equilíbrio de não doença U_0 é um ponto sela (instável) e o ponto de equilíbrio endêmico U^* é localmente assintoticamente estável.

Demonstração:

- (a) A estabilidade local do ponto de equilíbrio de não doença é garantida pelo teorema 3.2.6.
- (b) Para estudar a estabilidade local dos pontos de equilíbrio consideramos o sistema (6.5). A matriz jacobiana associada num ponto (I, R, N) genérico é dada por

$$\begin{pmatrix} \beta(N - I - R) - (\mu + \tau + \mu_D) - \beta I & -\beta I & \beta I \\ -p & -(\mu + p + \alpha_V) & p \\ -\mu_D & 0 & -\mu \end{pmatrix},$$

que em U_0 se reduz a

$$\begin{pmatrix} \beta \frac{\Delta}{\mu} \frac{(1-\nu)\mu + \alpha_V}{\mu + p + \alpha_V} - (\mu + \tau + \mu_D) & 0 & 0 \\ -p & -(\mu + p + \alpha_V) & p \\ -\mu_D & 0 & -\mu \end{pmatrix}.$$

A matriz tem dois valores próprios negativos e um valor próprio positivo (que resulta da condição $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} > 1$), pelo que U_0 é um ponto sela.

No ponto de equilíbrio endêmico, por se ter $I' = 0$ e consequentemente

$$\beta(N^* - I^* - R^*) - (\mu + \tau + \mu_D) = 0,$$

a matriz jacobiana reduz-se a

$$\begin{pmatrix} -\beta I^* & -\beta I^* & \beta I^* \\ -p & -(\mu + p + \alpha_V) & p \\ -\mu_D & 0 & -\mu \end{pmatrix}.$$

Esta matriz é análoga à matriz jacobiana associada ao ponto de equilíbrio endêmico do modelo da secção 5.2.1 (a matriz figura na demonstração da alínea (b) do teorema 5.2.6), sendo apenas acrescentado o parâmetro α_V . No entanto, mostra-se da mesma forma que a equação característica é uma equação cúbica e aplicando o Critério de Routh - Hurwitz conclui-se que todos os valores próprios da matriz têm parte real negativa.

Teorema 6.2.5 *Se $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} \leq 1$ então o ponto de equilíbrio de não doença U_0 é globalmente assintoticamente estável em Ω' .*

Demonstração: A prova é constituída por duas partes.

- (1) Suponhamos que o número de reprodução básico do modelo correspondente sem vacinação (secção 4.2.1) é inferior ou igual a um, isto é,

$$\beta \frac{\Lambda}{\mu} \frac{1}{\mu + \tau + \mu_D} \leq 1 \quad (6.6)$$

(a condição $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} < 1$ permanece válida).

A demonstração segue os passos da primeira parte da demonstração do teorema 5.2.7, apenas com duas alterações:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} S(t) = \frac{\Lambda}{\mu} \frac{(1-\nu)\mu + \alpha_V}{\mu + p + \alpha_V} \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} R(t) = \frac{\Lambda}{\mu} \frac{p + \nu\mu}{\mu + p + \alpha_V}.$$

- (2) Suponhamos que

$$\beta \frac{\Lambda}{\mu} \frac{1}{\mu + \tau + \mu_D} > 1 \quad \text{e} \quad \mathcal{R}_0^{VP+VRN} < 1.$$

A primeira condição implica que o plano $S = \frac{\mu + \tau + \mu_D}{\beta}$ divide a região Ω' em duas partes.

A condição $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} < 1$ é equivalente a

$$\beta \frac{\Lambda}{\mu} \frac{1}{\mu + \tau + \mu_D} < \frac{\mu + p + \alpha_V}{(1-\nu)\mu + \alpha_V} \quad (6.7)$$

que implica

$$S_0 = \frac{\Lambda}{\mu} \frac{(1-\nu)\mu + \alpha_V}{\mu + p + \alpha_V} < \frac{\mu + \tau + \mu_D}{\beta}. \quad (6.8)$$

Quando $S = \frac{\mu+\tau+\mu_D}{\beta}$ temos

$$\begin{aligned}
 S'_{|S=\frac{\mu+\tau+\mu_D}{\beta}} &= (1-\nu)\Lambda - (\mu+p)\frac{\mu+\tau+\mu_D}{\beta} - \beta I \frac{\mu+\tau+\mu_D}{\beta} + \tau I + \alpha_V R \\
 &= (1-\nu)\Lambda - (\mu+p)\frac{\mu+\tau+\mu_D}{\beta} - (\mu+\mu_D)I + \alpha_V(N-S-I) \\
 &= (1-\nu)\Lambda - (\mu+p+\alpha_V)\frac{\mu+\tau+\mu_D}{\beta} - (\mu+\mu_D+\alpha_V)I + \alpha_V N \\
 &\leq (1-\nu)\Lambda - (\mu+p+\alpha_V)\frac{\mu+\tau+\mu_D}{\beta} + \alpha_V N \\
 &\leq (1-\nu)\Lambda - (\mu+p+\alpha_V)\frac{\mu+\tau+\mu_D}{\beta} + \alpha_V \frac{\Lambda}{\mu} \\
 &= \frac{\Lambda}{\mu}[(1-\nu)\mu + \alpha_V] - \frac{\mu+\tau+\mu_D}{\beta}(\mu+p+\alpha_V) \\
 &< 0.
 \end{aligned}$$

Na segunda desigualdade usámos $N \leq \frac{\Lambda}{\mu}$ e a última é consequência de 6.8.

Da invariância positiva de Ω' (proposição 6.2.2) e do sinal de S' restrito a $S = \frac{\mu+\tau+\mu_D}{\beta}$ resulta que $\Omega' - \Omega_1$ é uma região positivamente invariante para (6.4), onde Ω_1 é a região definida na segunda parte da demonstração do teorema 5.2.7.

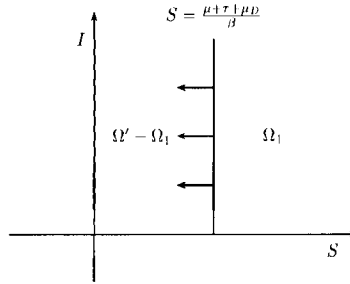


Figura 50: Projecção para o plano OIS do campo de vectores restrito a $S = \frac{\mu+\tau+\mu_D}{\beta}$.

Seguidamente vamos enunciar um lema útil para concluir a demonstração.

Lema 6.2.6 *Em Ω_1 , $I' > 0$ e $S' < 0$.*

Demonstração: Para mostrar que $I' > 0$ em Ω_1 seguimos os passos correspondentes da segunda parte da demonstração do teorema 5.2.7.

Relativamente ao sinal de S' em Ω_1 tem-se

$$\begin{aligned}
 S' &= (1 - \nu)\Lambda - (\mu + p)S - \beta SI + \tau I + \alpha_V R \\
 &= (1 - \nu)\Lambda - (\mu + p)S - \beta SI + \tau I + \alpha_V(N - S - I) \\
 &= (1 - \nu)\Lambda - (\mu + p + \alpha_V)S - (\beta S + \alpha_V)I + \tau I + \alpha_V N \\
 &< (1 - \nu)\Lambda - \frac{\mu + p + \alpha_V}{\beta}(\mu + \tau + \mu_D) - \frac{\Lambda}{\mu}(\mu + \tau + \mu_D + \alpha_V) + \tau \frac{\Lambda}{\mu} + \alpha_V \frac{\Lambda}{\mu} \\
 &= \Lambda \left(1 - \nu - \frac{\mu + \mu_D}{\mu} \right) - \frac{\mu + p + \alpha_V}{\beta}(\mu + \tau + \mu_D) \\
 &= \left(-\nu - \frac{\mu_D}{\mu} \right) - \frac{\mu + p + \alpha_V}{\beta}(\mu + \tau + \mu_D) \\
 &< 0.
 \end{aligned}$$

Qualquer órbita com início em Ω_1 entra na região positivamente invariante $\Omega' - \Omega_1$ em tempo finito porque tanto em Ω_1 como no plano $S = \frac{\mu + \tau + \mu_D}{\beta}$ o sinal de S' é negativo. Depois das órbitas entrarem em $\Omega' - \Omega_1$ comportam-se como no caso (1) e concluímos que o ponto U_0 é globalmente assintoticamente estável em Ω' .

Teorema 6.2.7 *Se $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} > 1$ então*

(a) *O ponto de equilíbrio de não doença U_0 é um ponto sela (instável);*

(b) *Seja*

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \beta m & \frac{\beta m + np}{2} & \frac{\mu_D - \beta m}{2} \\ \frac{\beta m + np}{2} & n(\mu + p + \alpha_V) & \frac{np}{2} \\ \frac{\mu_D - \beta m}{2} & \frac{-np}{2} & \mu \end{pmatrix}.$$

Se existirem constantes positivas m e n de forma que a matriz M seja definida positiva, então o ponto de equilíbrio endêmico U^* é globalmente assintoticamente estável em $\Omega' - \left\{ (S, 0, N) : 0 < S \leq N \leq \frac{\Lambda}{\mu} \right\}$.

Demonstração: Já foi visto anteriormente que o ponto de equilíbrio de não doença é um ponto sela nestas condições.

Quanto ao ponto de equilíbrio endêmico, reescrevemos o sistema (6.5) na seguinte forma (analogamente ao que foi feito na demonstração da alínea (b) do teorema 5.2.9):

$$\begin{aligned}
 I' &= \beta I [(N - N^*) - (I - I^*) - (R - R^*)], \\
 N' &= -\mu(N - N^*) - \mu_D(I - I^*).
 \end{aligned}$$

Relativamente à segunda equação de (6.5) temos

$$\begin{aligned} R' &= p(N - I) + \nu\Lambda - (\mu + p + \alpha_V)R \\ &= p(N - N^*) - p(I - I^*) - p(R - R^*) + p(N^* - I^* - R^*) + \nu\Lambda - \mu R - \alpha_V R \\ &= p(N - N^*) - p(I - I^*) - p(R - R^*) + pS^* + \nu\Lambda - \mu R - \alpha_V R. \end{aligned}$$

Como $R^* = \frac{1}{\mu + \alpha_V}(pS^* + \nu\Lambda)$ vem que

$$R' = p(N - N^*) - p(I - I^*) - (\mu + p + \alpha_V)(R - R^*).$$

O novo sistema é então

$$\begin{aligned} I' &= \beta I [(N - N^*) - (I - I^*) - (R - R^*)] \\ R' &= p(N - N^*) - p(I - I^*) - (\mu + p + \alpha_V)(R - R^*) \\ N' &= -\mu(N - N^*) - \mu_D(I - I^*). \end{aligned} \tag{6.9}$$

Considerando a mudança de coordenadas

$$x = I - I^*, \quad y = R - R^*, \quad z = N - N^*,$$

o sistema (6.9) simplifica-se, ficando

$$\begin{aligned} x' &= \beta(x + I^*)(z - x - y) \\ y' &= pz - px - (\mu + p + \alpha_V)y \\ z' &= -\mu z - \mu_D x. \end{aligned}$$

Os passos seguintes da demonstração são análogos aos dados na demonstração referida atrás: verificamos que a função

$$W(I, R, N) = m \left(I - I^* - I^* \ln \frac{I}{I^*} \right) + \frac{n}{2}(R - R^*)^2 + \frac{1}{2}(N - N^*)^2$$

é uma função de Liapunov estrita para o ponto de equilíbrio endémico se existirem constantes positivas m e n de forma a que a matriz $\mathbf{M}$ (que consta no enunciado) seja definida positiva e concluímos que o ponto de equilíbrio endémico é globalmente assintoticamente estável nessas condições.

Em seguida faz-se uma observação útil para o enunciado do teorema 6.2.7.

Observação 6.2.8 As condições do teorema 6.2.7 podem ser satisfeitas com parâmetros adequados. Se, para quaisquer constantes positivas μ e p , a constante positiva μ_D satisfizer a desigualdade

$$(\mu + \alpha_V)(2\mu + \mu_D)^2 > \mu_D^2(\mu + p + \alpha_V),$$

então a matriz $\mathbf{M}$ é definida positiva quando

$$m = \frac{2\mu + \mu_D}{\beta} \quad e \quad n = \frac{2\mu + \mu_D}{p}. \quad (6.10)$$

Demonstração: Sejam m e n os apresentados em (6.10). A matriz $\mathbf{M}$ é definida positiva se e só se

- $\det(\beta m) > 0$;
- $\det \begin{pmatrix} \beta m & \frac{\beta m + np}{2} \\ \frac{\beta m + np}{2} & n(\mu + p + \alpha_V) \end{pmatrix} > 0$;
- $\det(\mathbf{M}) > 0$.

Ora,

- $\det(\beta m) = \beta m > 0$.
- $\det \begin{pmatrix} \beta m & \frac{\beta m + np}{2} \\ \frac{\beta m + np}{2} & n(\mu + p + \alpha_V) \end{pmatrix} = 2\beta mnp + 4\beta mn(\mu + \alpha_V) - \beta^2 m^2 - n^2 p^2$.

Substituindo m e n pelos valores dados em (6.10) em alguns termos da expressão anterior obtém-se $4\beta mn(\mu + \alpha_V) > 0$.

- Podemos escrever a matriz $\mathbf{M}$ na forma

$$\begin{pmatrix} 2\mu + \mu_D & 2\mu + \mu_D & -\mu \\ 2\mu + \mu_D & \frac{2\mu + \mu_D}{p}(p + \mu + \alpha_V) & \frac{2\mu + \mu_D}{2} \\ -\mu & -\frac{2\mu + \mu_D}{2} & \mu \end{pmatrix},$$

pelo que, usando o Teorema de Laplace ao longo da primeira linha, se tem

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{M}) &= (2\mu + \mu_D) \left[\frac{2\mu + \mu_D}{p}(p + \mu + \alpha_V)\mu + \left(\frac{2\mu + \mu_D}{2} \right)^2 \right] - \\ &\quad - (2\mu + \mu_D) \left[(2\mu + \mu_D)\mu + \frac{2\mu + \mu_D}{2}\mu \right] - \\ &\quad - \mu \left[-\frac{(2\mu + \mu_D)^2}{2} + \mu \frac{2\mu + \mu_D}{p}(p + \mu + \alpha_V) \right], \end{aligned}$$

que, após várias simplificações, dá

$$\begin{aligned}
 \det(\mathbf{M}) &= 4(p + \mu + \alpha_V)\mu(\mu + \mu_D) + p(2\mu + \mu_D)^2 - 4\mu(2\mu + \mu_D)p \\
 &= (2\mu + \mu_D)^2(\mu + \alpha_V) - (2\mu + \mu_D)^2(\mu + \alpha_V) + 4(p + \mu + \alpha_V)\mu(\mu + \mu_D) + \\
 &\quad + p(2\mu + \mu_D)^2 - 4\mu(2\mu + \mu_D)p \\
 &= (2\mu + \mu_D)^2(\mu + \alpha_V) - \mu_D^2(\mu + \alpha_V - p) + 4\mu p \mu_D \\
 &= (2\mu + \mu_D)^2(\mu + \alpha_V) - \mu_D^2(\mu + \alpha_V + p) + 2\mu_D^2 p + 4\mu p \mu_D
 \end{aligned}$$

que é positivo se a desigualdade

$$(2\mu + \mu_D)^2(\mu + \alpha_V) > \mu_D^2(\mu + \alpha_V + p)$$

for verificada.

6.2.2 Com termo de contágio $\beta \frac{S}{N} I$ [11]

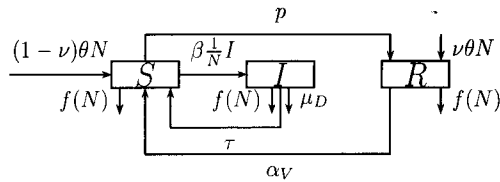


Figura 51: Modelo SIS com vac. prop. e de recém-nascidos numa pop. de tam. variável e termo de contágio $\beta \frac{S}{N} I$.

As equações do modelo são

$$\begin{aligned}
 S' &= (1 - \nu)\theta N - \beta \frac{S}{N} I - [f(N) + p]S + \tau I + \alpha_V R \\
 I' &= \beta \frac{S}{N} I - [\tau + \mu_D + f(N)]I \\
 R' &= pS + \nu\theta N - [f(N) + \alpha_V]R \\
 (N' &= N[\theta - f(N)] - \mu_D I),
 \end{aligned} \tag{6.11}$$

que, em termos de proporções, $s = \frac{S}{N}$, $i = \frac{I}{N}$ e $r = \frac{R}{N}$ dão

$$\begin{aligned} s' &= \frac{S'}{N} - \frac{N'}{N}s \\ &= (1 - \nu)\theta - (\beta - \mu_D)is - (\theta + p)s + \tau i + \alpha_V r, \\ i' &= \frac{I'}{N} - \frac{N'}{N}i \\ &= i[\beta s + \mu_D i - (\theta + \tau + \mu_D)], \\ r' &= \frac{R'}{N} - \frac{N'}{N}r \\ &= ps + \nu\theta - (\theta + \alpha_V)r + \mu_D ir, \end{aligned} \tag{6.12}$$

$$N' = N\theta - Nf(N) - N\mu_D i.$$

Uma vez que $s + i + r = 1$ as equações anteriores podem ser reduzidas apenas às equações

$$\begin{aligned} s' &= (1 - \nu)\theta - (\beta - \mu_D)si - (\theta + p)s + \tau i + \alpha_V(1 - s - i) \\ i' &= i[\beta s + \mu_D i - (\theta + \tau + \mu_D)]. \end{aligned} \tag{6.13}$$

Proposição 6.2.9 *O número de reprodução básico associado ao modelo é dado por*

$$\mathcal{R}_0^{VP+VRN} = \beta \frac{1}{\theta + \tau + \mu_D} \frac{(1 - \nu)\theta + \alpha_V}{\theta + p + \alpha_V}.$$

Demonstração: Vamos considerar o sistema (6.13). Sejam $\mathbf{x} = (i, s)$,

$$\mathcal{F}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \beta si \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{V}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} (\theta + \tau + \mu_D)i - \mu_D i^2 \\ \beta si + (\theta + p)s - (1 - \nu)\theta - \mu_D is - \tau i - \alpha_V(1 - s - i) \end{pmatrix}$$

e $\mathbf{X}_s = \{(0, s) | s > 0\}$ o espaço de não doença. As hipóteses (H1)-(H4) referidas na secção 3.2 são trivialmente satisfeitas.

O ponto de equilíbrio de não doença de (6.13) é o ponto de equilíbrio correspondente à equação

$$s' = (1 - \nu)\theta - (\theta + p)s + \alpha_V(1 - s),$$

pelo que tem coordenadas

$$U_0 = (s_0, i_0) = \left(\frac{(1 - \nu)\theta + \alpha_V}{\theta + p + \alpha_V}, 0 \right).$$

Os valores próprios da matriz

$$-d\mathcal{V}(U_0) = \begin{pmatrix} -(\theta + \tau + \mu_D) & 0 \\ (\mu_D - \beta) \frac{(1-\nu)\theta + \alpha_V}{\theta + p + \alpha_V} + \tau - \alpha_V & -(\theta + p) - \alpha_V \end{pmatrix}$$

têm parte real negativa. Isto mostra que a hipótese (H5) é satisfeita.

Sejam agora F e V as matrizes 1×1 definidas por

$$F = \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial i}|_{U_0} = \beta \frac{(1-\nu)\theta + \alpha_V}{\theta + p + \alpha_V} \quad \text{e} \quad V = \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial i}|_{U_0} = \theta + \tau + \mu_D.$$

Então

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_0^{VP+VRN} &= \rho(FV^{-1}) = \beta \frac{1}{\theta + \tau + \mu_D} \frac{(1-\nu)\theta + \alpha_V}{\theta + p + \alpha_V} \\ &= \beta \frac{1}{\theta + \tau + \mu_D} \left(1 - \frac{p + \nu\theta}{\theta + p + \alpha_V} \right). \end{aligned}$$

Proposição 6.2.10 *A região simplesmente conexa*

$$T = \{(s, i) : s > 0, i \geq 0, s + i \leq 1\}$$

é positivamente invariante para (6.13). Em particular, as semi-órbitas positivas do sistema são limitadas.

Demonstração: Nos pontos (s, i) tais que $s = 0$ tem-se $s' = (1-\nu)\theta + \tau i + \alpha_V r > 0$ e nos pontos (s, i) tais que $i = 0$ verificamos facilmente que $i' = 0$. Finalmente nos pontos (s, i) pertencentes à recta $s + i = 1$ tem-se

$$\begin{aligned} s' + i' &= \theta - \nu\theta - ps + \mu_D i(s + i) - \theta(s + i) - \mu_D i \\ &= -\nu\theta - ps \\ &< 0. \end{aligned}$$

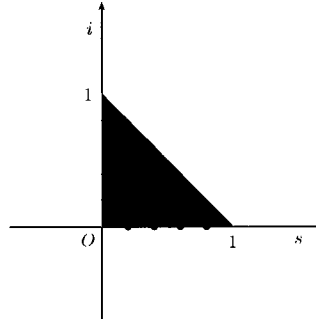


Figura 52: Região T e a direcção do campo de vectores sobre a fronteira.

Proposição 6.2.11

(a) Se $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} \leq 1$ então o sistema (6.12) admite apenas o ponto de equilíbrio de não doença $U_0 = (s_0, i_0, r_0) = \left(\frac{(1-\nu)\theta + \alpha_V}{\theta + p + \alpha_V}, 0, \frac{p + \nu\theta}{\theta + p + \alpha_V} \right)$.

(b) Seja φ a função definida por

$$\begin{aligned} \varphi(i) = & \mu_D(\beta - \mu_D)i^2 - [\beta(\theta + \mu_D + \alpha_V) - \mu_D(\tau + \mu_D + p + 2\theta + \alpha_V)]i + \\ & + (\theta + p + \alpha_V)(\theta + \tau + \mu_D)(\mathcal{R}_0^{VP+VRN} - 1). \end{aligned}$$

Se $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} > 1$ então o sistema admite dois pontos de equilíbrio: U_0 e o ponto de equilíbrio endêmico

$$U^* = (s^*, i^*, r^*) = \left(\frac{(\theta + \tau + \mu_D) - \mu_D i^*}{\beta}, i^*, r^* \right),$$

onde i^* é a solução da equação $\varphi(i) = 0$ e $r^* = 1 - s^* - i^*$.

Demonstração: As coordenadas do ponto de equilíbrio de não doença já foram calculadas anteriormente.

Para discutir a existência do ponto de equilíbrio endêmico do sistema (6.12), vamos analisar a existência de soluções no interior do domínio T das equações

$$\begin{aligned} \beta s + \mu_D i - (\theta + \tau + \mu_D) &= 0 \\ (\beta - \mu_D)s i + (\theta + p + \alpha_V)s + (\alpha_V - \tau)i &= (1 - \nu)\theta + \alpha_V, \end{aligned} \quad (6.14)$$

que são as curvas isóclinas de (6.13). Resolvendo a primeira equação de (6.14) verificamos que o número de susceptíveis no ponto de equilíbrio endêmico é $s^* = \frac{(\theta + \tau + \mu_D) - \mu_D i^*}{\beta}$. Substituindo o valor de s por s^* na segunda equação de (6.14) e, após algumas manipulações algébricas simples, obtemos $\varphi(i) = 0$, onde a função φ é definida por

$$\begin{aligned} \varphi(i) = & \mu_D(\beta - \mu_D)i^2 - [\beta(\theta + \mu_D + \alpha_V) - \mu_D(\tau + \mu_D + p + 2\theta + \alpha_V)]i + \\ & + (\theta + p + \alpha_V)(\theta + \tau + \mu_D)(\mathcal{R}_0^{VP+VRN} - 1). \end{aligned}$$

Assim, i^* , se existir, é solução da equação obtida.

Seja $\mathcal{R}_1$ o número de reprodução básico do modelo correspondente sem vacinação (secção 4.2.2) e suponhamos que é inferior ou igual a um, isto é, $\mathcal{R}_1 = \frac{\beta}{\theta + \tau + \mu_D} \leq 1$

(o que implica que $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} < 1$).

Vamos estudar o comportamento da recta $l_1 : \beta s + \mu_D i = \theta + \tau + \mu_D$ em relação à região T .

Tal como na demonstração da proposição 5.2.14 verificamos que a recta l_1 encontra-se no exterior da região T e portanto não existe ponto de equilíbrio endémico nesta situação.

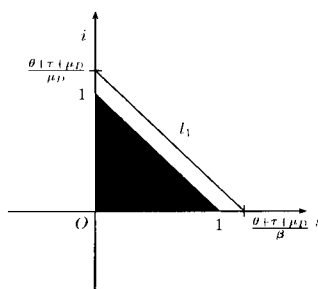


Figura 53: A recta l_1 encontra-se no exterior da região T .

Suponhamos agora que $\mathcal{R}_1 > 1$ (o que implica, em particular, que $\mu_D < \beta$).

Nesta situação, tal como na demonstração referida anteriormente, a existência do ponto de equilíbrio endémico é equivalente à existência da solução da equação $\varphi(i) = 0$ no intervalo $]0, \bar{i}[$, onde

$$\bar{i} = \frac{\beta - (\theta + \tau + \mu_D)}{\beta - \mu_D} \quad \text{e} \quad 0 < \bar{i} < 1.$$

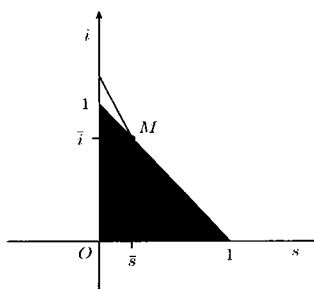


Figura 54: A ordenada $\bar{i}$ do ponto M representa a proporção de indivíduos infectados no ponto de equilíbrio endémico.

Ora

$$\begin{aligned} \varphi(\bar{i}) &= \mu_D(\beta - \mu_D)\bar{i}^2 - [\beta(\theta + \mu_D + \alpha_V) - \mu_D(\tau + \mu_D + p + 2\theta + \alpha_V)]\bar{i} + \\ &\quad + (\theta + p + \alpha_V)(\theta + \tau + \mu_D)(\mathcal{R}_0^{VP+VRN} - 1), \end{aligned}$$

que, após uma série de cálculos e simplificações, dá

$$(\beta - \mu_D)\varphi(\bar{i}) = -\beta[\nu\theta(\beta - \mu_D) + p(\theta + \tau)]. \quad (6.15)$$

Se $\mathcal{R}_1 > 1$ e $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} \leq 1$ obtemos

$$\begin{aligned}\varphi(\bar{i}) &= \frac{-\beta[\nu\theta(\beta - \mu_D) + p(\theta + \tau)]}{\beta - \mu_D} < 0, \\ \varphi(0) &= (\theta + p + \alpha_V)(\theta + \tau + \mu_D)(\mathcal{R}_0^{VP+VRN} - 1) \leq 0.\end{aligned}$$

Como o gráfico de φ é uma parábola com concavidade voltada para cima, se $\mathcal{R}_1 > 1$ e $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} \leq 1$ então a equação $\varphi(i) = 0$ não tem soluções no intervalo $]0, \bar{i}[$ e o sistema (6.12) admite apenas o ponto de equilíbrio de não doença quando $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} \leq 1$.

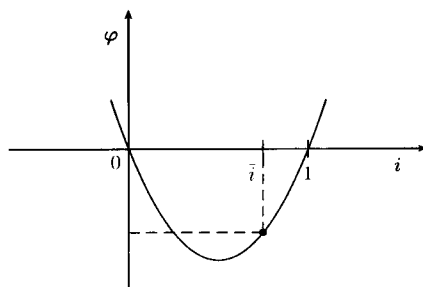


Figura 55: Gráfico da função φ considerando que $\varphi(0) = 0$.

Se $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} > 1$ então $\mathcal{R}_1 > 1$. Em particular, $\mu_D < \beta$ e da equação (6.15) verificamos que $\varphi(\bar{i}) < 0$ e $\varphi(0) > 0$.

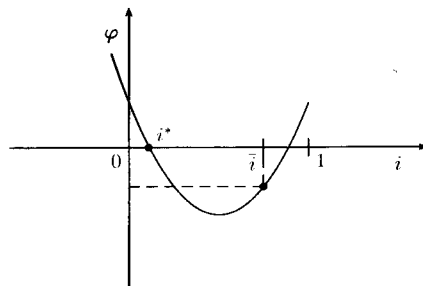


Figura 56: Gráfico da função φ no caso em que $\varphi(0) > 0$.

Daqui resulta que a equação $\varphi(i) = 0$ tem uma única solução no intervalo $]0, \bar{i}[$ e portanto o sistema (6.12) admite dois pontos de equilíbrio: um de não doença e um endêmico quando $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} > 1$.

Teorema 6.2.12 *Se $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} < 1$ então o ponto de equilíbrio de não doença U_0 é um nó localmente assintoticamente estável e se $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} > 1$ então U_0 é um ponto sela (instável).*

Demonstração: A matriz jacobiana associada ao sistema (6.13) avaliada num ponto genérico (s, i) é

$$\begin{pmatrix} -(\beta - \mu_D)i - (\theta + p + \alpha_V) & -(\beta - \mu_D)s + \tau - \alpha_V \\ \beta i & \beta s - (\theta + \tau + \mu_D) + 2\mu_D i \end{pmatrix},$$

pelo que em $U_0 = (s_0, i_0) = \left(\frac{(1-\nu)\theta + \alpha_V}{\theta + p + \alpha_V}, 0\right)$ é

$$\begin{pmatrix} -(\theta + p + \alpha_V) & -(\beta - \mu_D)\frac{(1-\nu)\theta + \alpha_V}{\theta + p + \alpha_V} + \tau - \alpha_V \\ 0 & (\theta + \tau + \mu_D)(\mathcal{R}_0^{VP+VRN} - 1) \end{pmatrix}.$$

Em seguida é apresentado um lema necessário ao estudo da estabilidade local do ponto de equilíbrio endêmico.

Lema 6.2.13 *Se existir um ponto de equilíbrio endêmico $U^* = (s^*, i^*)$ de (6.13) então*

$$\varphi'(i^*) < 0 \quad e \quad i^* < \hat{i} = \frac{\theta + p + \alpha_V}{\mu_D}.$$

Demonstração: Da demonstração da proposição 6.2.11 (no caso de existência do ponto de equilíbrio endêmico) verificamos que o gráfico de φ pode ser

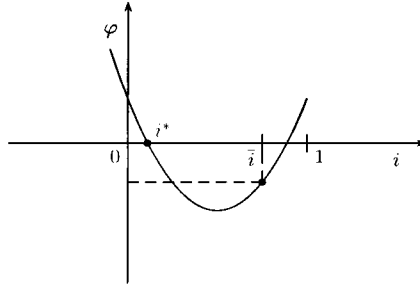


Figura 57: Gráfico da função φ no caso de existência do ponto de equilíbrio endêmico.

e portanto $\varphi'(i^*) < 0$ e $i^* < \hat{i} < 1$.

Se $\hat{i} \geq 1$ então $i^* < \hat{i}$ e o lema fica provado. Se $\hat{i} < 1$ então $\theta + p + \alpha_V < \mu_D$ e de

$$\mu_D \varphi(\hat{i}) = \beta \{p[(\theta + p + \alpha_V) - \mu_D] - \mu_D \nu \theta\}$$

resulta $\mu_D \varphi(\hat{i}) < 0$ e portanto $\varphi(\hat{i}) < 0$. Pela demonstração da proposição 6.2.11 (no caso de existência do ponto de equilíbrio endêmico) e tendo em conta a figura 57 podemos concluir que $i^* < \hat{i}$.

Teorema 6.2.14 *Se $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} > 1$ então o ponto de equilíbrio endêmico U^* é localmente assintoticamente estável.*

Demonstração: Usando o lema 6.2.13, a demonstração é análoga à demonstração do teorema 5.2.17, sendo apenas acrescentado o parâmetro α_V .

Para facilitar o estudo da estabilidade global do ponto de equilíbrio de não doença apresentamos o seguinte lema.

Lema 6.2.15 *Se $\mathcal{R}_1 > 1$ e $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} \leq 1$ então*

(a) *se t_* é tal que $(s(t_*), i(t_*))$ pertence ao interior da região*

$$D_1 = \{(s, i) : s > 0, i \geq 0, s + i < 1, \beta s + \mu_D i > \theta + \tau + \mu_D\},$$

então $i'(t_*) > 0$ e $s'(t_*) < 0$;

(b) *a região*

$$D_2 = \{(s, i) : s > 0, i \geq 0, s + i < 1, \beta s + \mu_D i \leq \theta + \tau + \mu_D\}$$

é positivamente invariante para (6.13).

Demonstração:

(a) Sendo t_* tal que $(s(t_*), i(t_*))$ pertence ao interior da região D_1 , a prova de que $i'(t_*) > 0$ é análoga à que figura na demonstração da alínea (a) do lema 5.2.18.

Para provar que $s'(t_*) < 0$ consideramos a curva isóclina do sistema (6.13)

$$l_2 : i = \frac{[(1 - \nu)\theta + \alpha_V] - (\theta + p + \alpha_V)s}{(\beta - \mu_D)s + (\alpha_V - \tau)}.$$

As assíntotas vertical e horizontal de l_2 são

$$s = -\frac{\alpha_V - \tau}{\beta - \mu_D} \quad \text{e} \quad i = -\frac{\theta + p + \alpha_V}{\beta - \mu_D} < 0,$$

respectivamente. Verificamos facilmente que a abcissa do ponto de intersecção de l_2 com o eixo dos ss é s_0 e que a ordenada do ponto de intersecção de l_2 com o eixo dos ii é $\frac{(1-\nu)\theta + \alpha_V}{\alpha_V - \tau}$.

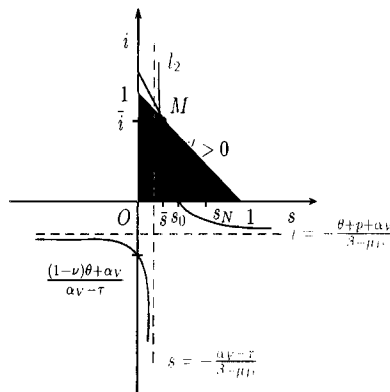


Figura 58: Possível curva isóclina l_2 considerando que $s = -\frac{\alpha_V - \tau}{\beta - \mu_D} > 0$ e $\frac{(1-\nu)\theta + \alpha_V}{\alpha_V - \tau} < 0$.

Já vimos que se $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} \leq 1$ então o sistema (6.13) tem apenas o ponto de equilíbrio de não doença. Isto implica que as curvas isóclinas l_1 e l_2 não se intersectam no interior da região T . Como $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} \leq 1$ concluímos que $s_0 \leq s_N$ e portanto que o segmento de recta $\overline{MN}$ está acima de l_2 .

Como $s' = (1 - \nu)\theta - (\beta - \mu_D)si - (\theta + p)s + \tau i + \alpha_V(1 - s - i)$ então

$$s' < 0 \iff i[(\beta - \mu_D)s + (\alpha_V - \tau)] > -(\theta + p + \alpha_V)s + [(1 - \nu)\theta + \alpha_V].$$

Olhando para a figura anterior verificamos que só nos interessa a região em que $s > \frac{-(\alpha_V - \tau)}{\beta - \mu_D}$ e portanto

$$s' < 0 \iff i > \frac{[(1 - \nu)\theta + \alpha_V] - (\theta + p + \alpha_V)s}{(\beta - \mu_D)s + (\alpha_V - \tau)},$$

donde resulta que para todo o t_* tal que $(s(t_*), i(t_*))$ pertence ao interior de D_1 se tem $s'(t_*) < 0$.

- (b) Tendo em conta a invariância da região T , a demonstração segue os mesmos passos da demonstração da alínea (b) do lema 5.2.18.

Teorema 6.2.16 *Se $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} \leq 1$ então o ponto de equilíbrio de não doença U_0 é um nó globalmente assintoticamente estável na região T .*

Demonstração: Sabendo que U_0 é o único ponto de equilíbrio do sistema (6.12) quando $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} \leq 1$ e tendo em consideração o lema 6.2.15, a demonstração é absolutamente análoga à demonstração do teorema 5.2.19.

A seguinte proposição serve de apoio ao estudo da estabilidade global do ponto de equilíbrio endêmico.

Proposição 6.2.17 *A região*

$$\Omega = \{(s, i, r) : s > 0, i \geq 0, r \geq 0, s + i + r = 1\}$$

é positivamente invariante para (6.12). Em particular, as semi-órbitas positivas do sistema são limitadas.

Demonstração: Sempre que $s = 0$ e $i + r = 1$ temos

$$\begin{aligned} i' + r' &= \nu\theta - (\theta + \alpha_V)r + \mu_D i(i + r) - (\theta + \tau + \mu_D)i \\ &= \nu\theta - \theta(r + i) - \tau i - \alpha_V r \\ &= \theta(\nu - 1) - \tau i - \alpha_V r \\ &< 0, \end{aligned}$$

sempre que $i = 0$ e $s + r = 1$ temos

$$\begin{aligned} s' + r' &= (1 - \nu)\theta - \theta(s + r) + \nu\theta \\ &= 0, \end{aligned}$$

e finalmente sempre que $r = 0$ e $s + i = 1$ temos

$$\begin{aligned} s' + i' &= (1 - \nu)\theta - \theta(s + i) + \mu_D i(s + i) - \mu_D i - ps \\ &= -\nu\theta - ps \\ &< 0. \end{aligned}$$

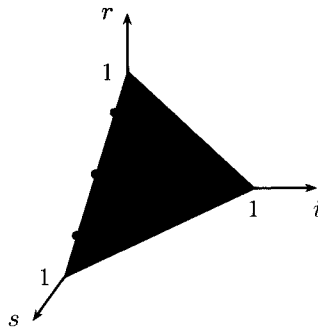


Figura 59: Região Ω e a direcção do campo de vectores sobre a fronteira.

Teorema 6.2.18 *Se $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} > 1$ então o ponto de equilíbrio endémico U^* é globalmente assintoticamente estável em Ω .*

Demonstração: Tendo em consideração o teorema 6.2.14, a proposição 6.2.17 e o Teorema de Poincaré - Bendixson, a demonstração é análoga à demonstração do teorema 5.2.21: basta provar que o sistema (6.12) não tem órbitas periódicas no interior da região Ω . Sendo G a função definida na demonstração atrás referida, o rotacional de G é

$$\left(\frac{\beta}{r} - \frac{\tau}{sr} - \frac{\alpha_V}{si} - \frac{\nu\theta}{ir^2} - \frac{ps}{ir^2}, -\frac{p}{r^2} - \frac{\beta}{r} - \frac{\theta}{s^2r} - \frac{\tau i}{s^2r} - \frac{\alpha_V}{s^2}, -\frac{(1-\nu)\theta}{s^2i} - \frac{\tau}{s^2} - \frac{\alpha_V r}{s^2i} - \frac{p}{ir} \right),$$

pelo que a componente na direcção normal ao plano que contém Π (Π é um domínio plano pertencente ao interior de Ω) é dada por

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \left(-\frac{\tau}{sr} - \frac{(i+s)(\nu\theta + ps) + \alpha_V r^2}{sir^2} - \frac{(i+r)[(1-\nu)\theta + \tau i + \alpha_V r] + ps^2}{s^2ir} \right) < 0,$$

no interior de Ω . Por outro lado, a componente G_t de G tangente à curva $\partial\Pi$ é 0, o que contradiz o Teorema de Stokes e mostra que o sistema não tem órbitas periódicas no interior de Ω .

Observação 6.2.19 *Todos os resultados correspondentes ao modelo estudado nesta secção podem ser obtidos como corolário dos resultados que vão ser apresentados na secção 7.1 fazendo $\sigma_V = 0$. Contudo as demonstrações foram apresentadas detalhadamente por seguirem um percurso independente das da secção 7.1.*

6.3 Modelo SIS com vacinação proporcional conferindo imunidade temporária

Esta secção trata um caso particular do modelo anterior, considerando apenas o efeito da vacinação proporcional, isto é, $\nu = 0$.

6.3.1 População de tamanho constante

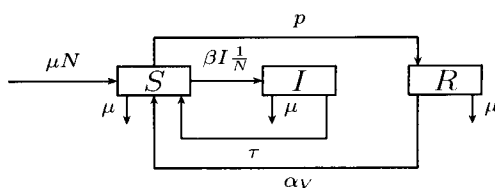


Figura 60: Modelo SIS com vacinação proporcional numa população de tamanho constante.

As equações a considerar, dado que $s + i + r = 1$, são

$$\begin{aligned} s' &= \mu - (\mu + p)s - \beta si + \tau i + \alpha_V(1 - s - i) \\ i' &= \beta si - (\mu + \tau)i. \end{aligned} \quad (6.16)$$

De forma análoga ao modelo anterior, a região simplesmente conexa

$$T = \{(s, i) : s > 0, i \geq 0, s + i \leq 1\}$$

é positivamente invariante para (6.16).

O número de reprodução básico associado ao modelo resulta da proposição 6.1.1 e é dado por

$$\mathcal{R}_0^{VP} = \beta \frac{1}{\mu + \tau} \frac{\mu + \alpha_V}{\mu + p + \alpha_V} = \beta \frac{1}{\mu + \tau} \left(1 - \frac{p}{\mu + p + \alpha_V} \right).$$

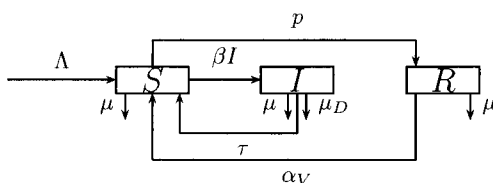
A existência e a estabilidade global dos pontos de equilíbrio resultam da proposição 6.1.3 e do teorema 6.1.4 considerando $\nu = 0$. Tem-se

Proposição 6.3.1

- (a) Se $\mathcal{R}_0^{VP} \leq 1$ então o sistema admite apenas o ponto de equilíbrio de não doença $U_0 = (s_0, i_0, r_0) = \left(\frac{\mu + \alpha_V}{\mu + p + \alpha_V}, 0, \frac{p}{\mu + p + \alpha_V} \right)$.
- (b) Se $\mathcal{R}_0^{VP} > 1$ então o sistema admite o ponto de equilíbrio de não doença U_0 e o ponto de equilíbrio endémico $U^* = (s^*, i^*, r^*) = \left(\frac{\mu + \tau}{\beta}, 1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0^{VP}}, \frac{1}{\mathcal{R}_0^{VP}} - \frac{\mu + \tau}{\beta} \right)$.

Teorema 6.3.2

- (a) Se $\mathcal{R}_0^{VP} < 1$ então o ponto de equilíbrio de não doença U_0 é globalmente assintoticamente estável na região T .
- (b) Se $\mathcal{R}_0^{VP} > 1$ então o ponto de equilíbrio de não doença U_0 é um ponto sela (instável) e o ponto de equilíbrio endêmico U^* é globalmente assintoticamente estável na região $T - \{(s, 0) : 0 < s \leq 1\}$.

6.3.2 População de tamanho variável**6.3.2.1 Com termo de contágio βSI** **Figura 61:** Modelo SIS com vacinação proporcional numa pop. de tamanho variável e com termo de contágio βSI .

As equações do modelo são

$$\begin{aligned}
 S' &= \Lambda - (\mu + p)S - \beta SI + \tau I + \alpha_V R \\
 I' &= \beta SI - (\mu + \tau + \mu_D)I \\
 R' &= pS - (\mu + \alpha_V)R \\
 (N' &= \Lambda - \mu N - \mu_D I),
 \end{aligned} \tag{6.17}$$

que são equivalentes às equações

$$\begin{aligned}
 I' &= I[\beta(N - I - R) - (\mu + \tau + \mu_D)] \\
 R' &= p(N - I) - (p + \mu + \alpha_V)R \\
 N' &= \Lambda - \mu N - \mu_D I.
 \end{aligned} \tag{6.18}$$

Da proposição 6.2.1 resulta que

$$\mathcal{R}_0^{VP} = \beta \frac{1}{\mu + \tau + \mu_D} \frac{\Lambda}{\mu} \frac{\mu + \alpha_V}{\mu + p + \alpha_V} = \beta \frac{1}{\mu + \tau + \mu_D} \frac{\Lambda}{\mu} \left(1 - \frac{p}{\mu + p + \alpha_V}\right)$$

e, tal como anteriormente, as regiões simplesmente conexas

$$\Omega = \left\{ (I, R, N) : I \geq 0, R \geq 0, I + R \leq N \leq \frac{\Lambda}{\mu} \right\}$$

e

$$\Omega' = \left\{ (S, I, N) : S > 0, I \geq 0, S + I \leq N \leq \frac{\Lambda}{\mu} \right\}$$

são positivamente invariantes para os sistemas (6.18) e (6.17), respectivamente.

Os resultados sobre a existência e a estabilidade global dos pontos de equilíbrio são apresentados de seguida:

Proposição 6.3.3

(a) Se $\mathcal{R}_0^{VP} \leq 1$ então o sistema (6.18) admite apenas o ponto de equilíbrio de não doença $U_0 = (I_0, R_0, N_0) = \left(0, \frac{\Lambda}{\mu} \frac{p}{\mu + p + \alpha_V}, \frac{\Lambda}{\mu}\right)$.

(b) Se $\mathcal{R}_0^{VP} > 1$ então o modelo admite, para além do ponto de equilíbrio de não doença U_0 , o ponto de equilíbrio endémico

$$U^* = (I^*, R^*, N^*) = \left(\frac{\Lambda}{\mu + \mu_D} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0^{VP}}\right), \frac{1}{\mu + \alpha_V} \frac{p}{\beta} (\mu + \tau + \mu_D), \frac{\Lambda - \mu_D I^*}{\mu} \right).$$

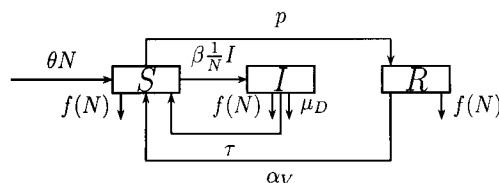
Teorema 6.3.4

(a) Se $\mathcal{R}_0^{VP} \leq 1$ então o ponto de equilíbrio de não doença U_0 é globalmente assintoticamente estável em Ω' .

(b) Se $\mathcal{R}_0^{VP} > 1$ então U_0 é um ponto sela (instável) e, se existirem constantes positivas m e n de forma a que a matriz

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \beta m & \frac{\beta m + np}{2} & \frac{\mu_D - \beta m}{2} \\ \frac{\beta m + np}{2} & n(\mu + p + \alpha_V) & \frac{np}{2} \\ \frac{\mu_D - \beta m}{2} & \frac{-np}{2} & \mu \end{pmatrix}$$

seja definida positiva, então o ponto de equilíbrio endémico U^* é globalmente assintoticamente estável na região $\Omega' - \left\{ (S, 0, N) : 0 < S \leq N \leq \frac{\Lambda}{\mu} \right\}$.

6.3.2.2 Com termo de contágio $\beta \frac{S}{N} I$ Figura 62: Modelo SIS com vacinação proporcional numa pop. de tamanho variável e com termo de contágio $\beta \frac{S}{N} I$.

As equações do modelo, em termos de proporções de indivíduos, são dadas por

$$\begin{aligned} s' &= \theta - (\beta - \mu_D)si - (\theta + p)s + \tau i + \alpha_V r \\ i' &= i[\beta s + \mu_D i - (\theta + \tau + \mu_D)] \\ r' &= ps - (\theta + \alpha_V)r + \mu_D i r, \end{aligned} \quad (6.19)$$

o que é equivalente a

$$\begin{aligned} s' &= \theta - (\beta - \mu_D)si - (\theta + p)s + \tau i + \alpha_V(1 - s - i) \\ i' &= i[\beta s + \mu_D i - (\theta + \tau + \mu_D)]. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Das proposições 6.2.9, 6.2.10 e 6.2.17 resulta que

$$\mathcal{R}_0^{VP} = \beta \frac{1}{\theta + \tau + \mu_D} \frac{\theta + \alpha_V}{\theta + p + \alpha_V} = \beta \frac{1}{\theta + \tau + \mu_D} \left(1 - \frac{p}{\theta + p + \alpha_V}\right)$$

e que as regiões simplesmente conexas

$$T = \{(s, i) : s > 0, i \geq 0, s + i \leq 1\}$$

e

$$\Omega = \{(s, i, r) : s > 0, i \geq 0, r \geq 0, s + i + r = 1\}$$

são positivamente invariantes para (6.20) e (6.19), respectivamente.

Relativamente à existência e estabilidade global dos pontos de equilíbrio tem-se os seguintes resultados:

Proposição 6.3.5

- (a) Se $\mathcal{R}_0^{VP} \leq 1$ então o sistema (6.19) admite apenas o ponto de equilíbrio de não doença $U_0 = (s_0, i_0, r_0) = \left(\frac{\theta + \alpha_V}{\theta + p + \alpha_V}, 0, \frac{p}{\theta + p + \alpha_V}\right)$.

(b) Seja φ a função definida por

$$\begin{aligned} \varphi(i) = & \mu_D(\beta - \mu_D)i^2 - [\beta(\theta + \mu_D + \alpha_V) - \mu_D(\tau + \mu_D + p + 2\theta + \alpha_V)]i + \\ & + (\theta + p + \alpha_V)(\theta + \tau + \mu_D)(\mathcal{R}_0^{VP} - 1). \end{aligned}$$

Se $\mathcal{R}_0^{VP} > 1$ então o sistema admite dois pontos de equilíbrio, o ponto de equilíbrio de não doença U_0 e o ponto de equilíbrio endêmico

$$U^* = (s^*, i^*, r^*) = \left(\frac{(\theta + \tau + \mu_D) - \mu_D i^*}{\beta}, i^*, r^* \right),$$

onde i^* é a solução da equação $\varphi(i) = 0$ e $r^* = 1 - s^* - i^*$.

Teorema 6.3.6

- (a) Se $\mathcal{R}_0^{VP} \leq 1$ então o ponto de equilíbrio de não doença U_0 é um nó globalmente assintoticamente estável em T .
- (b) Se $\mathcal{R}_0^{VP} > 1$ então U_0 é um ponto sela (instável) e o ponto de equilíbrio endêmico U^* é globalmente assintoticamente estável em Ω .

6.4 Modelo SIS com vacinação de recém-nascidos conferindo imunidade temporária

Esta secção trata outro caso particular do modelo com vacinação proporcional e de recém-nascidos, analisando apenas o efeito da vacinação de recém-nascidos, isto é, $p = 0$.

6.4.1 População de tamanho constante

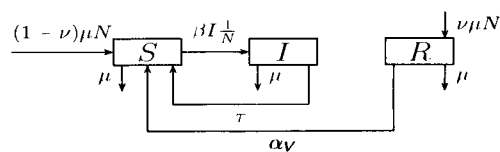


Figura 63: Modelo SIS com vacinação de recém-nascidos numa população de tamanho constante.

Dado que $s + i + r = 1$, as equações do modelo a considerar são

$$\begin{aligned} s' &= (1 - \nu)\mu - \mu s - \beta si + \tau i + \alpha_V(1 - s - i) \\ i' &= \beta si - (\mu + \tau)i. \end{aligned} \quad (6.21)$$

A região simplesmente conexa

$$T = \{(s, i) : s > 0, i \geq 0, s + i \leq 1\}$$

é positivamente invariante para (6.21) e o número de reprodução básico associado ao modelo é

$$\mathcal{R}_0^{VRN} = \beta \frac{1}{\mu + \tau} \frac{(1 - \nu)\mu + \alpha_V}{\mu + \alpha_V} = \beta \frac{1}{\mu + \tau} \left(1 - \frac{\nu\mu}{\mu + \alpha_V}\right).$$

Relativamente à existência dos pontos de equilíbrio e à sua estabilidade global tem-se os seguintes resultados:

Proposição 6.4.1

- (a) Se $\mathcal{R}_0^{VRN} \leq 1$ então o sistema admite apenas o ponto de equilíbrio de não doença $U_0 = (s_0, i_0, r_0) = \left(\frac{(1-\nu)\mu + \alpha_V}{\mu + \alpha_V}, 0, \frac{\nu\mu}{\mu + \alpha_V}\right)$.
- (b) Se $\mathcal{R}_0^{VRN} > 1$ então o sistema admite o ponto de equilíbrio de não doença U_0 e o ponto de equilíbrio endémico $U^* = (s^*, i^*, r^*)$, onde

$$\begin{aligned} s^* &= \frac{\mu + \tau}{\beta}, \\ i^* &= \frac{(1 - \nu)\mu + \alpha_V}{\mu + \alpha_V} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0^{VRN}}\right), \\ r^* &= \frac{1}{\mathcal{R}_0^{VRN}} \frac{(1 - \nu)\mu + \alpha_V}{\mu + \alpha_V} + \frac{\nu\mu}{\mu + \alpha_V} - \frac{\mu + \tau}{\beta}. \end{aligned}$$

Teorema 6.4.2

- (a) Se $\mathcal{R}_0^{VRN} < 1$ então o ponto de equilíbrio de não doença U_0 é globalmente assintoticamente estável na região T .
- (b) Se $\mathcal{R}_0^{VRN} > 1$ então o ponto de equilíbrio de não doença U_0 é um ponto sela (instável) e o ponto de equilíbrio endémico U^* é globalmente assintoticamente estável na região $T - \{(s, 0) : 0 < s \leq 1\}$.

6.4.2 População de tamanho variável

6.4.2.1 Com termo de contágio βSI

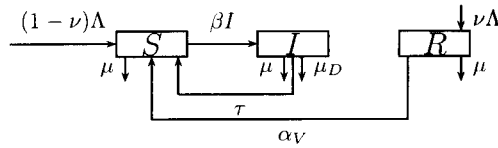


Figura 64: Modelo SIS com vacinação de recém-nascidos numa pop. de tam. variável e com termo de contágio βSI .

As equações do modelo são

$$\begin{aligned} S' &= (1 - \nu)\Lambda - \mu S - \beta SI + \tau I + \alpha_V R \\ I' &= \beta SI - (\mu + \tau + \mu_D)I \\ R' &= \nu\Lambda - (\mu + \alpha_V)R \\ (N' &= \Lambda - \mu N - \mu_D I), \end{aligned} \tag{6.22}$$

sendo equivalentes às equações

$$\begin{aligned} I' &= I[\beta(N - I - R) - (\mu + \tau + \mu_D)] \\ R' &= \nu\Lambda - (\mu + \alpha_V)R \\ N' &= \Lambda - \mu N - \mu_D I. \end{aligned} \tag{6.23}$$

O número de reprodução básico associado ao modelo é

$$\mathcal{R}_0^{VRN} = \beta \frac{1}{\mu + \tau + \mu_D} \frac{\Lambda}{\mu} \frac{(1 - \nu)\mu + \alpha_V}{\mu + \alpha_V} = \beta \frac{1}{\mu + \tau + \mu_D} \frac{\Lambda}{\mu} \left(1 - \frac{\nu\mu}{\mu + \alpha_V}\right)$$

e as regiões simplesmente conexas

$$\Omega = \left\{ (I, R, N) : I \geq 0, R \geq 0, I + R \leq N \leq \frac{\Lambda}{\mu} \right\}$$

e

$$\Omega' = \left\{ (S, I, N) : S > 0, I \geq 0, S + I \leq N \leq \frac{\Lambda}{\mu} \right\}$$

são positivamente invariantes para os sistemas (6.23) e (6.22), respectivamente.

Da proposição (6.2.3) resulta que

Proposição 6.4.3

- (a) Se $\mathcal{R}_0^{VRN} \leq 1$ então o sistema (6.23) admite apenas o ponto de equilíbrio de não doença $U_0 = (I_0, R_0, N_0) = \left(0, \frac{\Lambda}{\mu} \frac{\nu\mu}{\mu + \alpha_V}, \frac{\Lambda}{\mu}\right)$.
- (b) Se $\mathcal{R}_0^{VRN} > 1$ então o modelo admite, para além do ponto de equilíbrio de não doença U_0 , o ponto de equilíbrio endêmico
- $$U^* = (I^*, R^*, N^*) = \left(\frac{\Lambda}{\mu + \mu_D} \frac{(1 - \nu)\mu + \alpha_V}{\mu + \alpha_V} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0^{VRN}}\right), \frac{\nu\Lambda}{\mu + \alpha_V}, \frac{\Lambda - \mu_D I^*}{\mu} \right).$$

A estabilidade global dos pontos de equilíbrio é dada pelo seguinte teorema:

Teorema 6.4.4

- (a) Se $\mathcal{R}_0^{VRN} \leq 1$ então o ponto de equilíbrio de não doença U_0 é globalmente assintoticamente estável em Ω' .
- (b) Se $\mathcal{R}_0^{VRN} > 1$ então U_0 é um ponto sela (instável) e, se existirem constantes positivas m e n de forma a que a matriz

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \frac{\beta m}{2} & \frac{\beta m}{2} & \frac{\mu_D - \beta m}{2} \\ \frac{\beta m}{2} & n(\mu + \alpha_V) & 0 \\ \frac{\mu_D - \beta m}{2} & 0 & \mu \end{pmatrix}$$

seja definida positiva, então o ponto de equilíbrio endêmico U^* é globalmente assintoticamente estável na região $\Omega' - \left\{(S, 0, N) : 0 < S \leq N \leq \frac{\Lambda}{\mu}\right\}$.

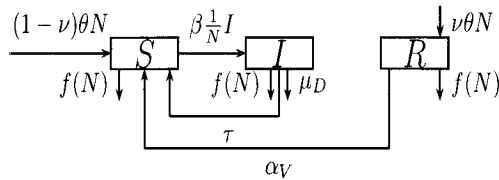
6.4.2.2 Com termo de contágio $\beta \frac{S}{N} I$ 

Figura 65: Modelo SIS com vacinação de recém-nascidos numa pop. de tam. variável e com termo de contágio $\beta \frac{S}{N} I$.

Em termos de proporções de indivíduos, as equações do modelo são

$$\begin{aligned} s' &= (1 - \nu)\theta - (\beta - \mu_D)si - \theta s + \tau i + \alpha_V r \\ i' &= i[\beta s + \mu_D i - (\theta + \tau + \mu_D)] \\ r' &= \nu\theta - (\theta + \alpha_V)r + \mu_D i r, \end{aligned} \tag{6.24}$$

que podem ser reduzidas apenas às equações

$$\begin{aligned} s' &= (1 - \nu)\theta - (\beta - \mu_D)si - \theta s + \tau i + \alpha_V(1 - s - i) \\ i' &= i[\beta s + \mu_D i - (\theta + \tau + \mu_D)]. \end{aligned} \quad (6.25)$$

As regiões simplesmente conexas

$$T = \{(s, i) : s > 0, i \geq 0, s + i \leq 1\}$$

e

$$\Omega = \{(s, i, r) : s > 0, i \geq 0, r \geq 0, s + i + r = 1\}$$

são positivamente invariantes para (6.25) e (6.24), respectivamente.

O número de reprodução básico é dado por

$$\mathcal{R}_0^{VRN} = \beta \frac{1}{\theta + \tau + \mu_D} \frac{(1 - \nu)\theta + \alpha_V}{\theta + \alpha_V} = \beta \frac{1}{\theta + \tau + \mu_D} \left(1 - \frac{\nu\theta}{\theta + \alpha_V}\right).$$

Da proposição 6.2.11 resulta que

Proposição 6.4.5

(a) Se $\mathcal{R}_0^{VRN} \leq 1$ então o sistema (6.24) admite apenas o ponto de equilíbrio de não doença

$$U_0 = (s_0, i_0, r_0) = \left(\frac{(1 - \nu)\theta + \alpha_V}{\theta + \alpha_V}, 0, \frac{\nu\theta}{\theta + \alpha_V} \right).$$

(b) Seja φ a função definida por

$$\begin{aligned} \varphi(i) &= \mu_D(\beta - \mu_D)i^2 - [\beta(\theta + \mu_D + \alpha_V) - \mu_D(\tau + \mu_D + 2\theta + \alpha_V)]i + \\ &\quad + (\theta + \alpha_V)(\theta + \tau + \mu_D)(\mathcal{R}_0^{VRN} - 1). \end{aligned}$$

Se $\mathcal{R}_0^{VRN} > 1$ então o sistema admite dois pontos de equilíbrio, o ponto de equilíbrio de não doença U_0 e o ponto de equilíbrio endêmico

$$U^* = (s^*, i^*, r^*) = \left(\frac{(\theta + \tau + \mu_D) - \mu_D i^*}{\beta}, i^*, r^* \right),$$

onde i^* é a solução da equação $\varphi(i) = 0$ e $r^* = 1 - s^* - i^*$.

Relativamente à estabilidade global dos pontos de equilíbrio tem-se o seguinte resultado:

Teorema 6.4.6

- (a) Se $\mathcal{R}_0^{VRN} \leq 1$ então o ponto de equilíbrio de não doença U_0 é um nó globalmente assintoticamente estável em T .
- (b) Se $\mathcal{R}_0^{VRN} > 1$ então U_0 é um ponto sela (instável) e o ponto de equilíbrio endêmico U^* é globalmente assintoticamente estável em Ω .

6.5 Discussão dos resultados

Tal como os modelos SIS dos capítulos 4 e 5, este modelo apresenta uma dinâmica simples: se $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} < 1$ então o sistema admite um único ponto de equilíbrio (o de não doença) que é globalmente assintoticamente estável e, conseqüentemente, a doença progride para a sua eliminação; se $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} > 1$ então o sistema admite também um ponto de equilíbrio endêmico (único) que é globalmente assintoticamente estável, resultando na expansão da doença pela população. Para evitar esta situação pretendemos, obviamente, que $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} < 1$.

A tabela seguinte mostra as expressões dos números de reprodução básico obtidas anteriormente em diferentes situações.

Expressões de $\mathcal{R}_0$			
	$N' = 0$	$N' \neq 0$	$N' \neq 0$
Termo Contágio	$\beta \frac{S}{N} I$	βSI	$\beta \frac{S}{N} I$
Sem Vac.	$\beta \frac{1}{\mu + \tau}$	$\beta \frac{1}{\mu + \tau + \mu_I} \frac{\Delta}{\mu}$	$\beta \frac{1}{\theta + \tau + \mu_I}$
VP Imun. Temp.	$\beta \frac{1}{\mu + \tau} \left(1 - \frac{p}{\mu + p + \alpha_V} \right)$	$\beta \frac{1}{\mu + \tau + \mu_I} \frac{\Delta}{\mu} \left(1 - \frac{p}{\mu + p + \alpha_V} \right)$	$\beta \frac{1}{\theta + \tau + \mu_I} \left(1 - \frac{p}{\theta + p + \alpha_V} \right)$
VRN Imnu. Temp.	$\beta \frac{1}{\mu + \tau} \left(1 - \frac{\nu \mu}{\mu + \alpha_V} \right)$	$\beta \frac{1}{\mu + \tau + \mu_I} \frac{\Delta}{\mu} \left(1 - \frac{\nu \mu}{\mu + \alpha_V} \right)$	$\beta \frac{1}{\theta + \tau + \mu_I} \left(1 - \frac{\nu \theta}{\theta + \alpha_V} \right)$
VP+VRN Imun. Temp.	$\beta \frac{1}{\mu + \tau} \left(1 - \frac{p + \nu \mu}{\mu + p + \alpha_V} \right)$	$\beta \frac{1}{\mu + \tau + \mu_I} \frac{\Delta}{\mu} \left(1 - \frac{p + \nu \mu}{\mu + p + \alpha_V} \right)$	$\beta \frac{1}{\theta + \tau + \mu_I} \left(1 - \frac{p + \nu \theta}{\theta + p + \alpha_V} \right)$

Como seria de esperar, temos

$$\mathcal{R}_0^{VP+VRN} < \mathcal{R}_0^{VP} < \mathcal{R}_0 \quad \text{e} \quad \mathcal{R}_0^{VP+VRN} < \mathcal{R}_0^{VRN} < \mathcal{R}_0,$$

independentemente do tamanho da população considerado.

Proporção i (resp. número I) de indivíduos infectados

Nos três modelos SIS com vacinação analisados neste capítulo, sempre que o número de reprodução básico é inferior a um, a proporção i (resp. número I) de indivíduos

infectados é uma função com um comportamento análogo aos modelos com vacinação conferindo imunidade total estudados no capítulo 5. Dependendo do número de reprodução básico do modelo correspondente sem vacinação ($\mathcal{R}_0$) e das condições iniciais, essa função ou é monótona decrescente e tende para zero (e consequentemente a doença não se expande na população), ou é inicialmente monótona crescente e posteriormente monótona decrescente e tendendo para zero (o que resulta numa expansão da doença na fase inicial - epidemia - e na sua extinção na fase final).

Eficácia da vacinação

Apesar das desigualdades $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} < \mathcal{R}_0^{VP} < \mathcal{R}_0$ e $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} < \mathcal{R}_0^{VRN} < \mathcal{R}_0$ serem totalmente previsíveis, em qualquer uma das situações, a tabela anterior é importante na medida em que traduz matematicamente quão menor é $\mathcal{R}_0^{VP+VRN}$ em relação a $\mathcal{R}_0^{VP}$, a $\mathcal{R}_0^{VRN}$ e a $\mathcal{R}_0$ do modelo sem vacinação.

Se partirmos de um cenário de doença em que $\mathcal{R}_0 > 1$ e conseguirmos vacinar a população de forma a obter ou $\mathcal{R}_0^{VP} < 1$ ou $\mathcal{R}_0^{VRN} < 1$ ou $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} < 1$, o ponto de equilíbrio endêmico do modelo SIS sem vacinação é eliminado. Por outro lado, mesmo que o modelo SIS com qualquer plano de vacinação admita um ponto de equilíbrio endêmico, a proporção (resp. número) de indivíduos infectados é menor do que no modelo sem vacinação, como podemos verificar na tabela:

Número/Proporção de infectados no ponto de equilíbrio endêmico			
	$N' = 0$	$N' \neq 0$	$N' \neq 0$
Termo Contágio	$\beta \frac{S}{N} I$	βSI	$\beta \frac{S}{N} I$
Sem Vac.	$1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}$	$\frac{\Lambda}{\mu + \mu_D} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right)$	$\frac{\beta}{\beta - \mu_D} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right)$
VP Temp.	$1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0^{VP}}$	$\frac{\Lambda}{\mu + \mu_D} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0^{VP}}\right)$	$0 < i^* < \frac{\beta}{\beta - \mu_D} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right)$
VRN Temp.	$\frac{(1-\nu)\mu + \alpha_V}{\mu + \alpha_V} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0^{VRN}}\right)$	$\frac{\Lambda[(1-\nu)\mu + \alpha_V]}{(\mu + \mu_D)(\mu + \alpha_V)} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0^{VRN}}\right)$	$0 < i^* < \frac{\beta}{\beta - \mu_D} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right)$
VP+VRN Temp.	$\frac{(1-\nu)\mu + \alpha_V}{\mu + \alpha_V} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0^{VP+VRN}}\right)$	$\frac{\Lambda[(1-\nu)\mu + \alpha_V]}{(\mu + \mu_D)(\mu + \alpha_V)} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0^{VP+VRN}}\right)$	$0 < i^* < \frac{\beta}{\beta - \mu_D} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right)$

Nota: Os $\mathcal{R}_0$ indicados em cada linha têm expressões diferentes apesar de estarem a ser representados pela mesma

letra na tabela. A notação usada para $\mathcal{R}_0$ foi escolhida de acordo com o modelo de vacinação considerado.

Se $\mathcal{R}_0 > 1$, uma das medidas a tomar, para evitar a expansão da doença, é a implementação dos dois tipos de vacinação ¹ considerados neste capítulo de tal forma que $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} < 1$, isto é,

$$1 - \frac{p + \nu\mu}{\mu + p + \alpha_V} < \frac{1}{\mathcal{R}_0} \iff \frac{\alpha_V + \mu(1 - \nu)}{\mu + p + \alpha_V} < \frac{1}{\mathcal{R}_0} \iff p + \mathcal{R}_0\mu\nu > (\alpha_V + \mu)(\mathcal{R}_0 - 1)$$

(quando a população é de tamanho variável e o termo de contágio é $\beta \frac{S}{N} I$, em vez de μ temos θ).

Uma vez que $0 \leq \nu, p \leq 1$, a função $i(\nu, p) = \frac{\alpha_V + \mu(1 - \nu)}{\mu + p + \alpha_V}$ atinge o seu valor máximo (1) em (0, 0) e seu valor mínimo $\left(\frac{\alpha_V}{\mu + 1 + \alpha_V}\right)$ é atingido em (1, 1).

Se $\frac{\alpha_V + \mu(1 - \nu)}{\mu + p + \alpha_V} > \frac{1}{\mathcal{R}_0}$ então não existem p e ν tais que $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} < 1$. Nesta situação, devemos procurar outras medidas de prevenção e/ou cura de forma a diminuir a infecção.

Se $\frac{\alpha_V + \mu(1 - \nu)}{\mu + p + \alpha_V} < \frac{1}{\mathcal{R}_0}$ então as proporções p de indivíduos susceptíveis e ν de indivíduos recém-nascidos a vacinar (de forma a conseguir a eficácia deste plano de vacinação) devem satisfazer as condições:

$$0 \leq \nu, p \leq 1 \quad \text{e} \quad p + \mathcal{R}_0\mu\nu > (\alpha_V + \mu)(\mathcal{R}_0 - 1).$$

Daqui podemos ainda afirmar que:

- se $\mathcal{R}_0\mu > 1$, é mais eficaz aumentar a proporção ν de recém-nascidos a vacinar;
- se $\mathcal{R}_0\mu < 1$, é mais eficaz aumentar a proporção p de indivíduos susceptíveis a vacinar.

Plano de vacinação VP+VRN conferindo imunidade temporária / Plano de vacinação VP+VRN conferindo imunidade total

Comparando os números de reprodução básicos associados aos modelos SIS com os dois tipos de vacinação conferindo imunidade temporária e total, verificamos que o valor do segundo é menor do que o primeiro, independentemente do tamanho da população. Já estávamos à espera que tal acontecesse uma vez que a imunidade total

¹Aqui consideramos a situação mais geral. Os resultados para a situação particular correspondente à vacinação proporcional ou de recém-nascidos obtêm-se fazendo $\nu = 0$ ou $p = 0$, respectivamente.

é mais forte que a imunidade temporária. Sendo assim, perante um cenário de doença, se implementarmos um plano de vacinação VP+VRN conferindo imunidade total, em detrimento da temporária, será possível atingir mais facilmente a eliminação da infecção.

Comparação entre os números de reprodução básicos tendo em conta o tamanho da população

De forma análoga ao que foi observado na secção 4.3, as expressões obtidas para os números de reprodução básico dos modelos que consideram uma população de tamanho variável não podem ser comparadas; se $\mu_D = 0$ então as expressões dos números de reprodução básicos correspondentes aos modelos da primeira e terceira colunas da tabela são iguais; se $\mu_D > 0$ então a expressão do número de reprodução básico correspondente ao modelo da terceira coluna é menor do que o correspondente ao modelo da primeira coluna.

Dinâmica do tamanho da população

A dinâmica do tamanho da população do modelo SIS com vacinação proporcional e de recém-nascidos conferindo imunidade temporária associado à terceira coluna da tabela é idêntica à dinâmica dos modelos correspondentes presentes nos capítulos 4 e 5, e que está enunciada no corolário 5.5.1.

Capítulo 7

Modelo SIS com vacinação proporcional e de recém-nascidos conferindo imunidade parcial e temporária

Nos modelos epidemiológicos estudados até agora tem existido apenas um valor limiar: o número de reprodução básico $\mathcal{R}_0$. Nestes modelos verificámos que na situação $\mathcal{R}_0 \leq 1$ não existem pontos de equilíbrio endémicos e, no caso $\mathcal{R}_0 > 1$ existe somente um ponto de equilíbrio endémico que é globalmente assintoticamente estável. Além disso, o número/proporção de indivíduos infectados é baixo quando o valor de $\mathcal{R}_0$ é ligeiramente maior do que 1.

Actualmente existe um grande interesse em analisar modelos com mais do que um ponto de equilíbrio endémico. Este fenómeno tem importantes implicações e a sua análise matemática é bem mais complicada. Nesta secção vamos estudar um modelo epidemiológico com dois valores limiares, $\mathcal{R}_0$ e $\mathcal{R}_c$. Dependendo da relação de ordem entre estes dois valores teremos diferentes situações epidemiológicas para a população. Ao contrário dos modelos estudados até agora, a situação $\mathcal{R}_0 < 1$ permite a existência de pontos de equilíbrio endémicos e portanto de um cenário de doença e a proporção de indivíduos infectados quando o valor de $\mathcal{R}_0$ é ligeiramente superior a 1 é relativamente alta (este resultado foi deduzido de [10] por simulação, dado que é muito difícil de obter uma expressão de $\mathcal{R}_0$ em função da proporção de indivíduos infectados no ponto

de equilíbrio endémico).

As hipóteses do modelo são as seguintes:

- Os dois tipos de vacinação conferem **imunidade parcial e temporária**. A **imunidade parcial** é um tipo de imunidade que se mantém constante ao longo do tempo mas que é inferior ao da imunidade total.
- Os indivíduos nascem susceptíveis.
- Vacina-se uma proporção ν de indivíduos recém-nascidos por unidade de tempo.
- Vacina-se uma proporção p de indivíduos susceptíveis por unidade de tempo.
- O retorno dos indivíduos vacinados para a classe dos susceptíveis por perda de imunidade é feito a uma taxa α_V ($\alpha_V > 0$).
- Cada indivíduo infectado transmite efectivamente a doença, em média, a β indivíduos susceptíveis, por unidade de tempo.
- Cada indivíduo infectado transmite efectivamente a doença, em média, a $\sigma_V \beta$ indivíduos recuperados, por unidade de tempo. O parâmetro σ_V reflecte o efeito da vacinação: se $\sigma_V = 0$, a vacina pode ser eficaz na prevenção da infecção; se $\sigma_V = 1$, a vacina é completamente ineficaz na prevenção da infecção. Neste secção estudaremos o caso em que $0 < \sigma_V < 1$.

7.1 População de tamanho variável e com termo de contágio $\beta \frac{S}{N} I$ [10]

Esquemáticamente temos

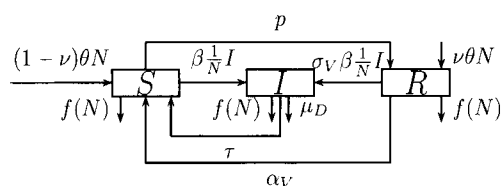


Figura 66: Modelo SIS com vac. prop. e de recém-nascidos numa pop. de tam. variável e termo de contágio $\beta \frac{S}{N} I$.

As equações do modelo são

$$\begin{aligned}
 S' &= \theta(1-\nu)N - \beta \frac{SI}{N} - [f(N) + p]S + \tau I + \alpha_V R \\
 I' &= \beta(S + \sigma_V R) \frac{I}{N} - [\tau + \mu_D + f(N)]I \\
 R' &= \theta\nu N + pS - \sigma_V \beta \frac{IR}{N} - [f(N) + \alpha_V]R \\
 (N' &= N[\theta - f(N)] - \mu_D I),
 \end{aligned} \tag{7.1}$$

que, em termos de proporções, $s = \frac{S}{N}$, $i = \frac{I}{N}$ e $r = \frac{R}{N}$, temos

$$\begin{aligned}
 s' &= \frac{S'}{N} - \frac{N'}{N}s \\
 &= \theta(1-\nu) - \beta si - f(N)s - ps + \tau i + \alpha_V r - \theta s + f(N)s + \mu_D is \\
 &= \theta(1-\nu) - (\beta - \mu_D)is - (\theta + p)s + \tau i + \alpha_V r, \\
 i' &= \frac{I'}{N} - \frac{N'}{N}i \\
 &= \beta(s + \sigma_V r)i - [\tau + \mu_D + f(N)]i - [\theta - f(N)] + \mu_D i^2 \\
 &= i[\beta s + \beta \sigma_V r - (\theta + \tau + \mu_D) + \mu_D i], \\
 r' &= \frac{R'}{N} - \frac{N'}{N}r \\
 &= \theta\nu + ps + (\mu_D - \sigma_V \beta)ir - (\alpha_V + \theta)r,
 \end{aligned} \tag{7.2}$$

$$(N' = N\theta - Nf(N) - N\mu_D i).$$

Uma vez que $s + i + r = 1$, o estudo das equações anteriores pode ser reduzido ao estudo de

$$\begin{aligned}
 i' &= i[\beta - (\theta + \tau + \mu_D) - (\beta - \mu_D)i - \beta(1 - \sigma_V)r] \\
 r' &= \theta\nu + p - pi - (\theta + p + \alpha_V)r + (\mu_D - \sigma_V \beta)ir.
 \end{aligned} \tag{7.3}$$

Proposição 7.1.1 *O número de reprodução básico associado ao modelo é dado por*

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R}_0^{VP+VRN} &= \beta \frac{1}{\theta + \tau + \mu_D} \frac{\alpha_V + \theta(1-\nu)}{\theta + p + \alpha_V} + \sigma_V \beta \frac{1}{\theta + \tau + \mu_D} \frac{p + \nu\theta}{\theta + p + \alpha_V} \\
 &= \beta \frac{\alpha_V + \sigma_V \theta + p(1 - (1 - \sigma_V)\nu)}{(\theta + \tau + \mu_D)(\theta + p + \alpha_V)}.
 \end{aligned}$$

Demonstração: Vamos considerar o sistema (7.2). Sejam $\mathbf{x} = (i, s, r)$,

$$\mathcal{F}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \beta si + \beta \sigma_V ri \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{V}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} (\theta + \tau + \mu_D)i - \mu_D i^2 \\ -(1 - \nu)\theta + (\beta - \mu_D)si + (\theta + p)s - \tau i - \alpha_V r \\ (\sigma_V \beta - \mu_D)ir + (\alpha_V + \theta)r - \theta \nu - ps \end{pmatrix},$$

e $\mathbf{X}_s = \{(0, s, r) | s > 0, r \geq 0\}$ o espaço de não doença. As hipóteses (H1)-(H4) referidas na secção 3.2 são trivialmente satisfeitas. Vemos em seguida que (H5) também é verificada.

O ponto de equilíbrio de não doença de (7.2) é o ponto de equilíbrio do sistema (7.2) restrito a $\mathbf{X}_s$, isto é, de

$$\begin{aligned} s' &= \theta(1 - \nu) - (\theta + p)s + \alpha_V r \\ r' &= \theta \nu + ps - (\alpha_V + \theta)r, \end{aligned}$$

pelo que tem coordenadas

$$U_0 = (s_0, i_0, r_0) = \left(\frac{\alpha_V + (1 - \nu)\theta}{\theta + p + \alpha_V}, 0, \frac{p + \nu\theta}{\theta + p + \alpha_V} \right).$$

Os valores próprios da matriz

$$-d\mathcal{V}(U_0) = \begin{pmatrix} -(\theta + \tau + \mu_D) & 0 & 0 \\ -(\beta - \mu_D)s_0 + \tau - \alpha_V & -(\theta + p) - \alpha_V & 0 \\ (\mu_D - \sigma_V \beta)r_0 & p & -(\alpha_V + \theta) \end{pmatrix}$$

têm parte real negativa. Isto mostra que a hipótese (H5) é satisfeita.

Sejam agora F e V as matrizes 1×1 definidas por

$$F = \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial i}|_{U_0} = (\beta s + \beta \sigma_V r)|_{U_0} = \beta \frac{\alpha_V + \theta(1 - \nu)}{\theta + p + \alpha_V} + \beta \sigma_V \frac{p + \nu\theta}{\theta + p + \alpha_V}$$

e

$$V = \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial i}|_{U_0} = \theta + \tau + \mu_D.$$

O número de reprodução básico é então

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_0^{VP+VRN} &= \beta \frac{1}{\theta + \tau + \mu_D} \frac{\alpha_V + \theta(1 - \nu)}{\theta + p + \alpha_V} + \sigma_V \beta \frac{1}{\theta + \tau + \mu_D} \frac{p + \nu\theta}{\theta + p + \alpha_V} \\ &= \beta \frac{\alpha_V + \sigma_V \theta + p(1 - (1 - \sigma_V)\nu)}{(\theta + \tau + \mu_D)(\theta + p + \alpha_V)}. \end{aligned}$$

Observação 7.1.2 Na primeira expressão obtida para $\mathcal{R}_0^{VP+VRN}$, β e $\sigma_V\beta$ são os coeficientes de transmissão, $\frac{1}{\theta+\tau+\mu_D}$ é a duração média do período efectivo de infeciosidade e:

- $\frac{\alpha_V+\theta(1-\nu)}{\theta+p+\alpha_V}$ representa a proporção de indivíduos susceptíveis no ponto de equilíbrio de não doença. Mais concretamente, $\frac{\alpha_V+\theta(1-\nu)}{\theta+p+\alpha_V} = 1 - \frac{p+\nu\theta}{\theta+p+\alpha_V}$. Dado que $\frac{1}{\theta+p+\alpha_V}$ é a duração média de permanência efectiva de um indivíduo no compartimento dos susceptíveis, $\frac{p+\nu\theta}{\theta+p+\alpha_V}$ representa a proporção de indivíduos susceptíveis que abandonam o seu compartimento apenas por vacinação e portanto $\frac{\alpha_V+\theta(1-\nu)}{\theta+p+\alpha_V} = 1 - \frac{p+\nu\theta}{\theta+p+\alpha_V}$ é a proporção de indivíduos susceptíveis que ficarão infectados através de contactos adequados;
- $\frac{p+\nu\theta}{\theta+p+\alpha_V}$ representa a proporção de indivíduos recuperados no ponto de equilíbrio de não doença. Em particular, é a proporção de indivíduos susceptíveis que foram vacinados mas que podem ainda ficar infectados (com uma probabilidade menor do que os indivíduos susceptíveis).

Proposição 7.1.3

- (a) Se $i(0) = 0$ então $i \equiv 0$ e $\lim_{t \rightarrow +\infty} r(t) = \frac{p+\nu\theta}{\theta+p+\alpha_V}$.
- (b) Se $i(0) > 0$ então $i(t) > 0$, para qualquer instante t positivo.
- (c) A região simplesmente conexa $T = \{(i, r) : i \geq 0, r \geq 0, i + r < 1\}$ é positivamente invariante para (7.3). Em particular, as semi-órbitas positivas do sistema são limitadas.

Demonstração:

- (a) Em qualquer ponto do tipo $(0, r)$ tem-se $i' = 0$ e o semi-eixo vertical

$$\{(0, r) : 0 \leq r < 1\}$$

é positivamente invariante para (7.3). Em particular, se $i(0) = 0$ tem-se que $i(t) = 0$, para qualquer t positivo. Ainda sobre esse semi-eixo vertical tem-se $r' = \theta\nu + p - (\theta + p + \alpha_V)r$ que é uma equação diferencial linear não homogénea cuja solução é

$$r(t) = \left(r(0) - \frac{p + \nu\theta}{\theta + p + \alpha_V} \right) e^{-(\theta+p+\alpha_V)t} + \frac{p + \nu\theta}{\theta + p + \alpha_V}$$

e tende para $\frac{p+\nu\theta}{\theta+p+\alpha_V}$ quando $t \rightarrow +\infty$.

- (b) Por redução ao absurdo, suponhamos que $i(0) > 0$ e que existe um instante t_* positivo tal que $i(t_*) = 0$. Então, pela invariância do semi-eixo vertical (referida anteriormente), $i(t) = 0$ para qualquer instante $t > t_*$, o que é absurdo pois conduz à intersecção de trajectórias de um sistema autónomo no diagrama de fase.
- (c) Observamos que se $i = 0$ então $i' = 0$, e se $r = 0$ então $r' = \theta\nu + p(1-i) > 0$, o que implica que as órbitas do sistema nunca abandonam o primeiro quadrante. Para além disso, sempre que $i + r = 1$ temos

$$i' + r' = -\tau i - \theta(i + r) + \theta\nu - \alpha_V r = -\tau i - \theta(1 - \nu) - \alpha_V r < 0.$$

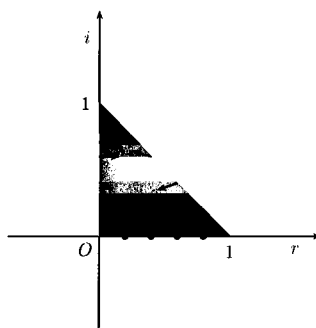


Figura 67: Região T e a direcção do campo de vectores sobre a fronteira.

Proposição 7.1.4

- (a) O sistema (7.3) admite (sempre) o ponto de equilíbrio de não doença $U_0 = (i_0, r_0) = \left(0, \frac{p+\nu\theta}{\theta+p+\alpha_V}\right)$.

- (b) Sejam

$$A = (\mu_D - \sigma_V \beta)(\beta - \mu_D),$$

$$B = \mu_D(p + \alpha_V + \tau + \mu_D + 2\theta) - \beta[(\theta + \mu_D + \alpha_V) - \sigma_V(\beta - \theta - \mu_D - \tau - p)]$$

e

$$\begin{aligned} C &= \beta(\theta + p + \alpha_V) - \beta(1 - \sigma_V)(p + \nu\theta) - (\theta + p + \alpha_V)(\theta + \tau + \mu_D) \\ &= (\theta + p + \alpha_V)(\theta + \tau + \mu_D)(\mathcal{R}_i^{VP+VRN} - 1). \end{aligned}$$

Relativamente aos pontos de equilíbrio endémicos, as seguintes afirmações são verdadeiras:

- (b.1) se $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} > 1$ então o sistema admite um ponto de equilíbrio endémico, $U_1^* = (i_1^*, r_1^*)$;
- (b.2) se $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} < 1$, $\beta > \theta + \tau + \mu_D$, $\mu_D < \sigma_V \beta$ e $B > 2\sqrt{AC}$, então existem dois pontos de equilíbrio endémicos, $U_2^* = (i_2^*, r_2^*)$ e $U_3^* = (i_3^*, r_3^*)$, onde $i_2^* < i_3^*$ e $r_2^* > r_3^*$;
- (b.3) se $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} < 1$, $\beta > \theta + \tau + \mu_D$, $\mu_D < \sigma_V \beta$ e $B = 2\sqrt{AC}$, então existe um ponto de equilíbrio endémico, $U_4^* = (i_4^*, r_4^*)$;
- (b.4) se $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} = 1$, $\mu_D < \sigma_V \beta$ e $B > 0$, então existe um ponto de equilíbrio endémico $U_5^* = (i_5^*, r_5^*)$;
- (b.5) não existem pontos de equilíbrio endémicos fora das situações referidas em (b.1) - (b.4).

Demonstração:

- (a) O ponto de equilíbrio de não doença tem coordenadas $U_0 = (i_0, r_0) = \left(0, \frac{p+\nu\theta}{\theta+p+\alpha_V}\right)$ que estão sempre bem definidas pois

$$\frac{p+\nu\theta}{\theta+p+\alpha_V} < \frac{\theta+p}{\theta+p+\alpha_V} < 1.$$

- (b) Os pontos de equilíbrio endémicos situam-se no interior da região T e são solução das equações

$$\beta - (\theta + \tau + \mu_D) - (\beta - \mu_D)i - \beta(1 - \sigma_V)r = 0 \quad (7.4)$$

$$\theta\nu + p - pi - (\theta + p + \alpha_V)r + (\mu_D - \sigma_V\beta)ir = 0$$

isto é, resultam da intersecção da recta l_1 ,

$$r = h_1(i) = \frac{\beta - (\theta + \tau + \mu_D) - (\beta - \mu_D)i}{\beta(1 - \sigma_V)} \quad (7.5)$$

com a curva l_2 ,

$$r = h_2(i) = \frac{\theta\nu + p - pi}{(\theta + p + \alpha_V) - (\mu_D - \sigma_V\beta)i}, \quad (7.6)$$

no interior de T .

Suponhamos que $\beta = \mu_D$. Neste caso, de (7.5) temos $r = -\frac{\theta+\tau}{\beta(1-\sigma_V)} < 0$, ou seja, não existem pontos de equilíbrio endémicos. Portanto só consideramos o

caso em que $\beta \neq \mu_D$.

A abscissa i_1 do ponto de intersecção de l_1 com o eixo dos ii e a ordenada r_1 do ponto de intersecção de l_1 com o eixo dos rr são, respectivamente,

$$i_1 = \frac{\beta - (\theta + \tau + \mu_D)}{\beta - \mu_D}, \quad r_1 = h_1(0) = \frac{\beta - (\theta + \tau + \mu_D)}{\beta(1 - \sigma_V)}.$$

Observação 7.1.5 Observamos que i_1 corresponde exactamente à proporção de indivíduos infectados no ponto de equilíbrio endémico U^* do modelo correspondente sem vacinação. Em particular, teremos de ter $0 < i_1 < 1$.

A abscissa i_2 do ponto de intersecção de l_2 com o eixo dos ii e a ordenada r_2 do ponto de intersecção de l_2 com o eixo dos rr são, respectivamente,

$$i_2 = \frac{p + \nu\theta}{p} > 1, \quad r_2 = h_2(0) = \frac{p + \nu\theta}{\theta + p + \alpha_V} = r_0 < 1.$$

Se $\mu_D = \sigma_V\beta$ então a curva l_2 admite uma assíntota horizontal dada por $r = -p$.

Se $\mu_D \neq \sigma_V\beta$ então as assíntotas vertical e horizontal da curva l_2 são

$$i = \frac{\theta + p + \alpha_V}{\mu_D - \sigma_V\beta} \quad \text{e} \quad r = \frac{p}{\mu_D - \sigma_V\beta},$$

respectivamente.

Relativamente à primeira derivada de h_2 temos

$$\begin{aligned} h_2'(i) &= \frac{-p[(\theta + p + \alpha_V) - (\mu_D - \sigma_V\beta)i] + (\mu_D - \sigma_V\beta)(\theta\nu + p - pi)}{[(\theta + p + \alpha_V) - (\mu_D - \sigma_V\beta)i]^2} \\ &= \frac{(\mu_D - \sigma_V\beta)(\theta\nu + p) - p(\theta + p + \alpha_V)}{[(\theta + p + \alpha_V) - (\mu_D - \sigma_V\beta)i]^2}. \end{aligned}$$

e quanto à segunda derivada,

$$h_2''(i) = \frac{2(\mu_D - \sigma_V\beta)[(\mu_D - \sigma_V\beta)(\theta\nu + p) - p(\theta + p + \alpha_V)]}{[(\theta + p + \alpha_V) - (\mu_D - \sigma_V\beta)i]^3}.$$

Vamos provar a existência de pontos de equilíbrio endémicos de (7.3) no interior de T estudando três casos distintos, conforme o valor de $\mathcal{R}_0^{VP+VRN}$.

Caso 1: $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} > 1$.

A condição $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} > 1$ é equivalente à condição $r_1 > r_2$. De facto,

$$\begin{aligned}
 & r_1 > r_2 \\
 \Leftrightarrow & \frac{\beta - (\theta + \tau + \mu_D)}{\beta(1 - \sigma_V)} > \frac{p + \nu\theta}{\theta + p + \alpha_V} \\
 \Leftrightarrow & \beta(\theta + p + \alpha_V) - (\theta + \tau + \mu_D)(\theta + p + \alpha_V) > \beta(1 - \sigma_V)(p + \nu\theta) \\
 \Leftrightarrow & \beta(\theta + p + \alpha_V - \theta\nu - p + \sigma_V\theta\nu + \sigma_V p) > (\theta + \tau + \mu_D)(\theta + p + \alpha_V) \\
 \Leftrightarrow & \frac{\beta[\alpha_V + \sigma_V\theta + p(1 - (1 - \sigma_V)\nu)]}{(\theta + \tau + \mu_D)(\theta + p + \alpha_V)} > 1 \\
 \Leftrightarrow & \mathcal{R}_0^{VP+VRN} > 1.
 \end{aligned}$$

Verificamos facilmente que a condição $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} > 1$ implica que $C > 0$ e que a condição $r_1 > r_2 > 0$ implica que $\beta > \theta + \tau + \mu_D$ e, portanto, $\beta > \mu_D$. Assim, $0 < i_1 < 1 < i_2$ e os pontos $Q_1 = (i_2, 0)$ e $Q_2 = (0, r_2)$ estão situados em lados opostos relativamente à recta l_1 .

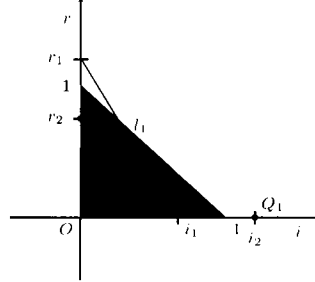


Figura 68: Recta l_1 considerando que $r_1 > 1$ e pontos de intersecção (Q_1 e Q_2) da curva l_2 com os eixos coordenados.

Suponhamos que $\mu_D \leq \sigma_V \beta$. Então h_2 é uma função contínua e tem-se $h'_2(i) < 0$ e $h''_2(i) \geq 0$ para qualquer $i > 0$. Isto implica que h_2 é uma função monótona decrescente e com concavidade voltada para cima. Uma vez que os pontos Q_1 e Q_2 estão em lados opostos relativamente à recta l_1 , o sistema (7.4) tem apenas uma única solução positiva $U_1^* = (i_1^*, r_1^*)$ no interior de T .

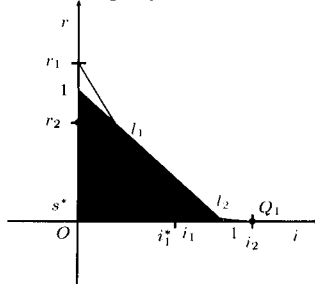


Figura 69: Uma possível curva isóclina l_2 e a ordenada i_1^* do ponto de equilíbrio endémico.

Seja agora $\mu_D > \sigma_V \beta$. Então $r_1 = \frac{\beta - (\theta + \tau + \mu_D)}{\beta - \sigma_V \beta} < 1$ e portanto a parte da recta l_1 que está no primeiro quadrante encontra-se no interior de T .

– Se $\frac{\theta+p+\alpha_V}{\mu_D-\sigma_V\beta} < \frac{p+\nu\theta}{p}$ então

$$\begin{aligned} p(\theta + p + \alpha_V) &< (p + \nu\theta)(\mu_D - \sigma_V\beta) \\ \iff (p + \nu\theta)(\mu_D - \sigma_V\beta) - p(\theta + p + \alpha_V) &> 0 \\ \implies h'_2(i) > 0, \quad \text{para qualquer } i > 0 \end{aligned}$$

o que implica que h_2 é uma função monótona crescente e que a sua assíntota vertical $i = \frac{\theta+p+\alpha_V}{\mu_D-\sigma_V\beta}$ está situada do lado esquerdo da recta $i = i_2 = \frac{p+\nu\theta}{p}$. Uma vez que Q_2 está abaixo de l_1 e $i_1 < 1 < i_2$, é fácil de ver que existe apenas um único ponto de intersecção $U_1^* = (i_1^*, r_1^*)$ entre l_1 e l_2 no interior de T .

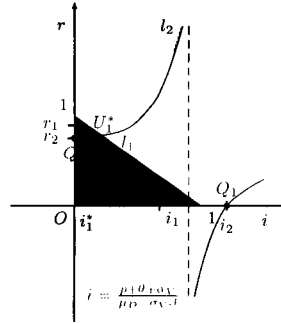


Figura 70: Curva isóclina l_2 e a ordenada i_1^* do ponto de equilíbrio endémico no caso em que $\frac{\theta+p+\alpha_V}{\mu_D-\sigma_V\beta} < \frac{p+\nu\theta}{p}$.

– Se $\frac{\theta+p+\alpha_V}{\mu_D-\sigma_V\beta} = \frac{p+\nu\theta}{p}$ então $h'_2 \equiv 0$, o que significa que l_2 consiste de duas semi-rectas $r = r_2 = \frac{p+\nu\theta}{\theta+p+\alpha_V}$ ($i \neq \frac{\theta+p+\alpha_V}{\mu_D-\sigma_V\beta}$). Uma vez que o ponto Q_2 está abaixo de l_1 , existe apenas uma única intersecção $U_1^* = (i_1^*, r_1^*)$ entre l_1 e l_2 no interior de T .

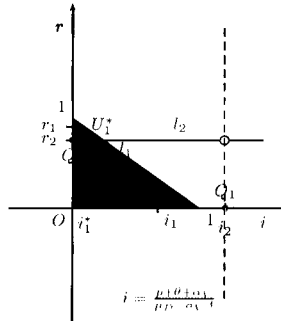


Figura 71: Curva isóclina l_2 e a ordenada i_1^* do ponto de equilíbrio endémico no caso em que

$$\frac{\theta+p+\alpha_V}{\mu_D-\sigma_V\beta} = \frac{p+\nu\theta}{p}.$$

- Se $\frac{\theta+p+\alpha_V}{\mu_D-\sigma_V\beta} > \frac{p+\nu\theta}{p}$ temos $h'_2(i) < 0$, para qualquer $i > 0$. Quanto à segunda derivada temos

$$\begin{aligned} h''_2(i) &< 0 \\ \iff (\theta + p + \alpha_V) - (\mu_D - \sigma_V\beta)i &> 0 \\ \iff i &< \frac{\theta + p + \alpha_V}{\mu_D - \sigma_V\beta}. \end{aligned}$$

Em particular se $i < i_2 = \frac{p+\nu\theta}{p}$ vem que $h''_2(i) < 0$, e portanto a função h_2 é decrescente e tem concavidade voltada para baixo em $]0, i_2[$. A assíntota vertical $i = \frac{\theta+p+\alpha_V}{\mu_D-\sigma_V\beta}$ está situada do lado direito da recta $i = i_2 = \frac{p+\nu\theta}{p}$. Uma vez que os pontos Q_1 e Q_2 estão em lados opostos de l_1 , o sistema (7.4) tem apenas uma única solução positiva $U_1^* = (i_1^*, r_1^*)$ no interior de T .

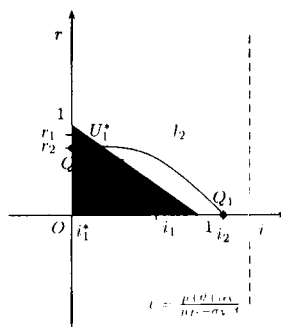


Figura 72: Curva h_2 e a ordenada i_1^* do ponto de equilíbrio endêmico no caso em que $\frac{\theta+p+\alpha_V}{\mu_D-\sigma_V\beta} > \frac{p+\nu\theta}{p}$.

Desta análise concluímos que se $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} > 1$ o sistema (7.3) admite apenas um ponto de equilíbrio endêmico $U_1^* = (i_1^*, r_1^*)$. A alínea (b.1) da proposição está provada.

Caso 2: $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} < 1$.

A condição $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} < 1$ equivale a dizer que $r_1 < r_2 < 1$, o que implica que o ponto Q_2 está acima de l_1 . Além disso, temos também que $C < 0$.

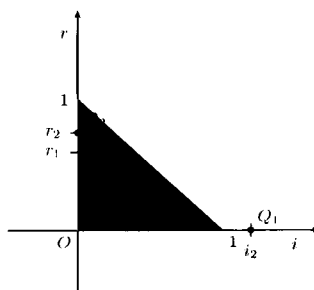


Figura 73: O ponto Q_2 situa-se acima da recta l_1 .

Resolvendo a primeira equação de (7.4) em ordem a r obtemos facilmente que $r = \frac{\beta - (\theta + \tau + \mu_D) - (\beta - \mu_D)i}{\beta(1 - \sigma_V)}$ e substituindo este valor na segunda equação do referido sistema vem

$$\begin{aligned} & \beta(1 - \sigma_V)pi + (\theta + p + \alpha_V)[\beta - (\theta + \tau + \mu_D) - (\beta - \mu_D)i] - \\ & - (\mu_D - \sigma_V\beta)i[\beta - (\theta + \tau + \mu_D) - (\beta - \mu_D)i] = (p + \nu\theta)\beta(1 - \sigma_V), \end{aligned}$$

que após algumas manipulações algébricas simples dá

$$Ai^2 + Bi + C = 0, \quad (7.7)$$

onde os coeficientes A , B e C da equação (7.7) são os referidos no enunciado da proposição. Seja

$$h(i) = Ai^2 + Bi + C.$$

Comparando os valores de μ_D e $\sigma_V\beta$ temos as seguintes situações:

(i) Se $\mu_D < \sigma_V\beta$ então $\mu_D < \beta$ e $A < 0$. Vamos considerar cinco casos:

(i.1) $\mu_D < \sigma_V\beta$ e $\mu_D < \beta \leq \theta + \tau + \mu_D$.

Nesta situação, $i_1 \leq 0$ e $r_1 \leq 0$ e portanto a recta l_1 não passa no primeiro quadrante. O sistema (7.4) não tem soluções no interior de T .

(i.2) $\mu_D < \sigma_V\beta$, $\beta > \theta + \tau + \mu_D$ e $B \leq 0$.

Os coeficientes A e C são negativos, pelo que a equação (7.7) não tem soluções reais positivas e, consequentemente, o sistema (7.4) não admite soluções no interior de T .

(i.3) $\mu_D < \sigma_V\beta$, $\beta > \theta + \tau + \mu_D$ e $0 < B < 2\sqrt{AC}$.

Os coeficientes A e C são negativos e a equação (7.7) só admite soluções complexas. O sistema (7.4) não tem soluções no interior da região T .

(i.4) $\mu_D < \sigma_V\beta$, $\beta > \theta + \tau + \mu_D$ e $B > 2\sqrt{AC}$.

A equação (7.7) tem duas soluções reais positivas e distintas, i_2^* e i_3^* ($i_2^* < i_3^*$). Estas soluções pertencem ao intervalo $]0, i_1[$ pois $A < 0$ (o que implica que a concavidade da curva representada pela equação

(7.7) é voltada para baixo), $h(0) = C < 0$ e

$$\begin{aligned}
 & h(i_1) \\
 = & C + (\beta - \mu_D)(\mu_D - \sigma_V \beta) \left[\frac{\beta - (\theta + \tau + \mu_D)}{\beta - \mu_D} \right]^2 + \\
 & + [\mu_D(p + 2\theta + \alpha_V + \tau + \mu_D) - \\
 & - \beta[(\theta + \alpha_V + \mu_D - \sigma_V(\beta - p - \tau - \mu_D - \theta))]] \frac{\beta - (\theta + \tau + \mu_D)}{\beta - \mu_D} \\
 = & C + \frac{\beta - (\theta + \tau + \mu_D)}{\beta - \mu_D} [(\mu_D - \sigma_V \beta)[\beta - (\theta + \tau + \mu_D)] + \\
 & + \mu_D(p + 2\theta + \alpha_V + \tau + \mu_D) - \\
 & - \beta[(\theta + \alpha_V + \mu_D - \sigma_V(\beta - p - \tau - \mu_D - \theta))]] \\
 = & C + \frac{\beta - (\theta + \tau + \mu_D)}{\beta - \mu_D} [p(\mu_D - \sigma_V \beta) + (\mu_D - \beta)(\theta + \alpha_V)] \quad (7.8) \\
 < & C \\
 < & 0.
 \end{aligned}$$

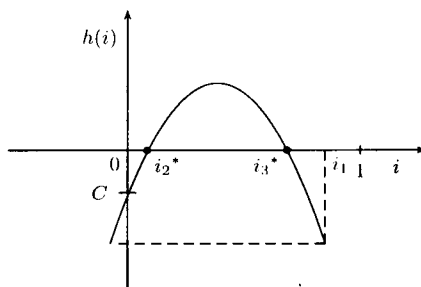


Figura 74: Gráfico da função h .

Substituindo i_2^* e i_3^* em (7.5) obtemos respectivamente r_2^* e r_3^* e o sistema (7.4) tem duas soluções positivas, $U_2^* = (i_2^*, r_2^*)$ e $U_3^* = (i_3^*, r_3^*)$, no interior de T , onde $r_2^* > r_3^*$.

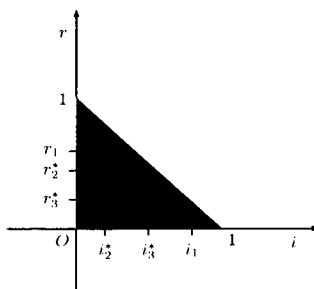


Figura 75: Pontos de equilíbrio endêmicos U_2^* e U_3^* .

Desta análise concluímos que se $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} < 1$, $\beta > \theta + \tau + \mu_D$, $\mu_D < \sigma_V \beta$ e $B > 2\sqrt{AC}$ então o sistema (7.3) admite dois pontos de equilíbrio endêmicos, $U_2^* = (i_2^*, r_2^*)$ e $U_3^* = (i_3^*, r_3^*)$, onde $i_2^* < i_3^*$ e $r_2^* > r_3^*$. A alínea (b.2) da proposição está provada.

(i.5) $\mu_D < \sigma_V \beta$, $\beta > \theta + \tau + \mu_D$ e $B = 2\sqrt{AC}$.

A equação (7.7) tem uma solução dupla positiva $i_4^* < i_1$ pois $A < 0$, $h(0) = C < 0$ e $h(i_1) < C$.

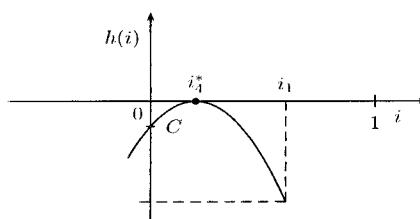


Figura 76: Gráfico da função h .

Substituindo i_4^* em (7.5) obtemos r_4^* e o sistema (7.4) tem uma única solução $U_4^* = (i_4^*, r_4^*)$.

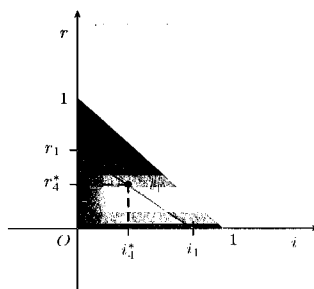


Figura 77: Ponto de equilíbrio endêmico U_4^* .

A alínea (b.3) da proposição está provada.

(ii) Se $\mu_D = \sigma_V \beta$ então $A = 0$, $h(0) = C < 0$ e $h(1) = B + C$. Esta última

igualdade implica que

$$\begin{aligned}
 h(1) &= \mu_D(p + \alpha_V + \tau + \mu_D + 2\theta) - \beta[(\theta + \mu_D + \alpha_V) - \sigma_V(\beta - \theta - \mu_D - \\
 &\quad - \tau - p)] + \beta(\theta + p + \alpha_V) - \beta(1 - \sigma_V)(p + \nu\theta) - \\
 &\quad - (\theta + p + \alpha_V)(\theta + \tau + \mu_D) \\
 &= \mu_D(\theta + p + \alpha_V) + \mu_D(\theta + \tau + \mu_D) - \beta(\theta + \alpha_V) - \beta\mu_D + \\
 &\quad + \sigma_V\beta(\beta - p - \tau - \mu_D - \theta) + \beta(\theta + \alpha_V) + \beta p - \mu_D(\theta + p + \alpha_V) - \\
 &\quad - (\theta + p + \alpha_V)(\theta + \tau) - \beta\theta\nu - \beta p + \sigma_V\beta(p + \nu\theta) \\
 &= -(\theta + p + \alpha_V)(\theta + \tau) + \sigma_V\beta(\theta + \tau + \mu_D) - \beta\sigma_V\beta + \beta\sigma_V\beta - \\
 &\quad - p\sigma_V\beta + \beta\sigma_V(-\theta - \tau - \mu_D) - \beta\theta\nu + \sigma_V\beta\theta\nu + p\sigma_V\beta \\
 &= -(\theta + p + \alpha_V)(\theta + \tau) - \beta\theta\nu(1 - \sigma_V) \\
 &< 0.
 \end{aligned}$$

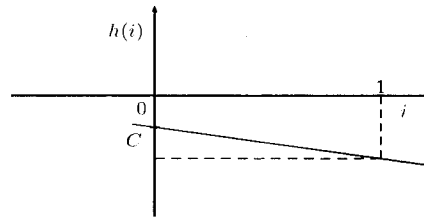


Figura 78: Possível gráfico da função $h(i) = Bi + C$.

Portanto não existe nenhuma solução da equação (7.7) no intervalo $]0, 1[$, pelo que o sistema (7.4) não tem soluções no interior de T .

(iii) Se $\mu_D > \sigma_V\beta$ há três casos a considerar:

$$(iii.1) \quad \frac{\theta + p + \alpha_V}{\mu_D - \sigma_V\beta} < \frac{p + \nu\theta}{p}.$$

Já vimos anteriormente que esta condição implica que a função h_2 é monótona crescente e a sua assíntota vertical está situada do lado esquerdo da recta $i = i_2$.

Como $0 < i_1 = \frac{\beta - (\theta + \tau + \mu_D)}{\beta - \mu_D} < 1$ (Observação 7.1.5) então $\beta > \mu_D > \sigma_V\beta$ e a função h_1 é monótona decrescente pois $h'_1(i) = \frac{-(\beta - \mu_D)}{\beta(1 - \sigma_V)} < 0$. Já vimos que $r_2 > r_1$ e que $h_2(i_2) = 0$. Assim, l_1 e l_2 não se intersectam no interior de T .

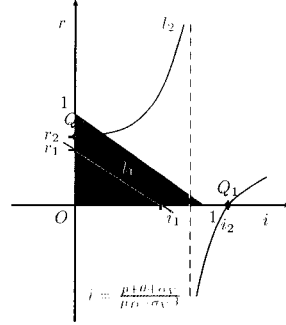


Figura 79: As curvas isóclinas l_1 e l_2 não se intersectam no interior de T .

Em conclusão, o sistema (7.4) não tem soluções no interior de T .

$$(iii.2) \quad \frac{\theta+p+\alpha_V}{\mu_D - \sigma_V\beta} = \frac{p+\nu\theta}{p}.$$

Já vimos anteriormente que, neste caso, $h'_2 \equiv 0$ e que l_2 é a união de duas semi-rectas $r = r_2 > r_1$ ($i \neq \frac{\theta+p+\alpha_V}{\mu_D - \sigma_V\beta}$).

Como $\sigma_V\beta < \mu_D < \beta$ então a função h_1 é monótona decrescente e $h_1(0) = r_1 < r_2$. Portanto, l_1 e l_2 não se intersectam no interior de T .

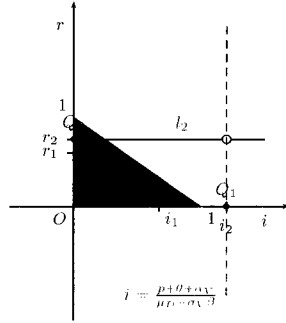


Figura 80: As curvas isóclinas l_1 e l_2 não se intersectam no interior de T .

Portanto, o sistema (7.4) não tem soluções no interior de T .

$$(iii.3) \quad \frac{\theta+p+\alpha_V}{\mu_D - \sigma_V\beta} > \frac{p+\nu\theta}{p}.$$

Nesta situação, $h'_2 < 0$, como já foi observado anteriormente. Também já foi verificado que a condição $h''_2(i) < 0$ é equivalente a dizer que $i < \frac{\theta+p+\alpha_V}{\mu_D - \sigma_V\beta}$. Assim, em particular, se $0 < i < \frac{p+\nu\theta}{p} = i_2$ então $h''_2(i) < 0$. Isto implica que a função h_2 é decrescente, tem concavidade voltada para baixo em $0 < i < i_2$, a sua assíntota vertical está situada do lado direito da recta $i = i_2$ e a assíntota horizontal está acima da recta $r = r_2$ ($\frac{\theta+p+\alpha_V}{\mu_D - \sigma_V\beta} > \frac{p+\nu\theta}{p} \iff \frac{p}{\mu_D - \sigma_V\beta} > \frac{p+\nu\theta}{\theta+p+\sigma_V} = r_2$). Como $\beta > \mu_D$ então

a função h_1 é decrescente e $i_1 < 1$. Assim, l_1 e l_2 não se intersectam no interior de T .

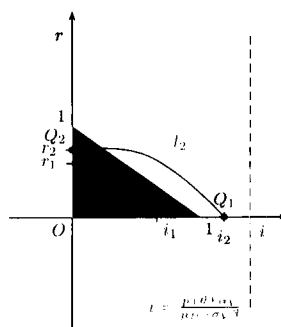


Figura 81: As curvas isóclinas l_1 e l_2 não se intersectam no interior de T .

Concluimos assim que o sistema (7.4) não tem soluções no interior de T .

Caso 3: $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} = 1$.

A condição $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} = 1$ equivale a dizer que $r_1 = r_2 < 1$ ou seja,

$$\frac{\beta - (\theta + \tau + \mu_D)}{\beta(1 - \sigma_V)} = \frac{p + \nu\theta}{\theta + p + \alpha_V} > 0$$

$$\implies \beta > (\theta + \tau + \mu_D).$$

Além disso, $C = 0$ e, por consequência, $h(0) = 0$.

(i) $\mu_D < \sigma_V\beta$.

Então $A < 0$ e os zeros da função h são $i = 0$ e $i = -\frac{B}{A}$. Portanto, se $B \leq 0$ então não existe nenhuma solução de $h(i) = 0$ em $]0, i_1[$. Se $B > 0$, $h(i_1) < 0$ e a equação $h(i) = 0$ tem uma solução, $i_5^* = -\frac{B}{A} < i_1$, no intervalo $]0, i_1[$.

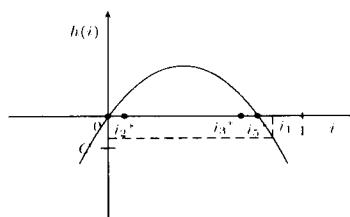


Figura 82: Gráfico da função h .

Concluimos que se $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} = 1$, $\mu_D < \sigma_V\beta$, $B > 0$, então o sistema (7.4) admite um ponto de equilíbrio endêmico $U_5^* = (i_5^*, r_5^*)$ no interior de T .

(ii) $\mu_D = \sigma_V \beta$.

Então $A = 0$ e o único zero da função h é $i = 0$, pelo que a equação $h(i) = 0$ não tem soluções não nulas.

(iii) $\mu_D > \sigma_V \beta$.

Então $A > 0$ e os zeros de h são $i = 0$ e $i = -\frac{B}{A}$. Vamos considerar duas situações:

(iii.1) Se $B \geq 0$ então não existem soluções positivas de $h(i) = 0$.

(iii.2) Se $B < 0$ então não existem soluções de $h(i) = 0$ no intervalo $]0, i_1[$.

De facto, se existisse um tal zero, então deveriam existir duas soluções no intervalo $]0, 1[$ quando $\mathcal{R}_0 = 1 + \delta$, onde δ é um número positivo suficientemente pequeno, o que contradiz os resultados do Caso 1.

Proposição 7.1.6 *Considere-se B definido na proposição 7.1.4 como uma função linear de σ_V ,*

$$B = B(\sigma_V) = \mu_D(p + \alpha_V + \tau + \mu_D + 2\theta) - \beta[(\theta + \mu_D + \alpha_V) - \sigma_V(\beta - \theta - \mu_D - \tau - p)].$$

Sejam $\sigma_{V_1} = \frac{(\theta + p + \alpha_V)(\theta + \tau + \mu_D) - \beta[\alpha_V + \theta(1 - \nu)]}{\beta(p + \nu\theta)}$, σ_{V_2} a solução de $B(\sigma_V) = 0$ (caso exista) e σ_{V_C} ($\sigma_{V_2} < \sigma_{V_C} < \sigma_{V_1} < 1$) a solução de $B(\sigma_V) = 2\sqrt{AC}$ (caso exista). Então:

(a) o sistema (7.3) admite (sempre) um ponto de equilíbrio de não doença $U_0 = (i_0, r_0)$;

(b) relativamente aos pontos de equilíbrio endémicos, as seguintes afirmações são verdadeiras:

(b.1) se $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} > 1$ então o sistema admite o ponto de equilíbrio endémico, $U_1^* = (i_1^*, r_1^*)$;

(b.2) se $\sigma_{V_C} < \sigma_V < \sigma_{V_1} < 1$ então existem dois pontos de equilíbrio endémicos, $U_2^* = (i_2^*, r_2^*)$ e $U_3^* = (i_3^*, r_3^*)$, onde $i_2^* < i_3^*$ e $r_2^* > r_3^*$;

(b.3) se $\sigma_V = \sigma_{V_C} < \sigma_{V_1} < 1$ então existe um ponto de equilíbrio endémico, $U_4^* = (i_4^*, r_4^*)$;

(b.4) se $\sigma_{V_C} < \sigma_V = \sigma_{V_1} < 1$ então existe um ponto de equilíbrio endémico $U_5^* = (i_5^*, r_5^*)$;

(b.5) não existe nenhum ponto de equilíbrio endêmico, excepto nos quatro casos anteriores, onde $\mathcal{R}_0^{VP+VRN}$, A , B , C e as coordenadas dos pontos de equilíbrio endêmicos referidos são os mesmos da proposição 7.1.4.

Demonstração: A demonstração consiste em simplificar as afirmações (b.2), (b.3) e (b.4) da proposição 7.1.4 anterior. Ora,

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{R}_0^{VP+VRN} < 1 \\
 \iff & \beta[\alpha_V + \sigma_V\theta + p(1 - (1 - \sigma_V)\nu)] < (\theta + \tau + \mu_D)(\theta + p + \alpha_V) \\
 \iff & \beta[\alpha_V + \theta(1 - \nu)] + \sigma_V\beta(p + \nu\theta) < (\theta + \tau + \mu_D)(\theta + p + \alpha_V) \\
 \iff & \sigma_V < \frac{(\theta + \tau + \mu_D)(\theta + p + \alpha_V) - \beta[\alpha_V + \theta(1 - \nu)]}{\beta(p + \nu\theta)} \\
 \iff & \sigma_V < \sigma_{V_1},
 \end{aligned}$$

e a condição $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} = 1$ é equivalente à condição $\sigma_V = \sigma_{V_1}$. Além disso,

$$\begin{aligned}
 & \sigma_{V_1} < 1 \\
 \iff & (\theta + \tau + \mu_D)(\theta + p + \alpha_V) - \beta[\alpha_V + \theta(1 - \nu)] < \beta(p + \nu\theta) \\
 \iff & (\theta + \tau + \mu_D)(\theta + p + \alpha_V) < \beta(\theta + p + \alpha_V) \\
 \iff & \beta > \theta + \tau + \mu_D.
 \end{aligned}$$

Se $\beta > \theta + \tau + \mu_D$ (o que implica que $\beta > \mu_D$) e $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} < 1$ (o que implica que $C < 0$) então como $A = (\mu_D - \sigma_V\beta)(\beta - \mu_D)$ vem que $AC > 0$ se e só se $\mu_D - \sigma_V\beta < 0$. Portanto, $\frac{\mu_D}{\beta} < \sigma_V < \sigma_{V_1} < 1$.

Se $\theta + \tau + \mu_D < \beta \leq \theta + \tau + \mu_D + p$ então

$$B'(\sigma_V) = \beta(\beta - \theta - \mu_D - \tau - p) \leq 0$$

e portanto B , como função de σ_V , é (sempre) decrescente.

Como para $\sigma_V = \frac{\mu_D}{\beta}$ se tem

$$B(\sigma_V) = (\mu_D - \beta)(\theta + \alpha_V) < 0,$$

concluimos que $B < 0$ para $\sigma_V > \frac{\mu_D}{\beta}$.

Se $\beta > \theta + \tau + \mu_D + p$ então B , como função de σ_V , é (sempre) crescente. Quando $\theta + \tau + \mu_D + p < \beta \leq \tau + \mu_D + 2\theta + p + \alpha_V$ e $\sigma_V = 1$ obtemos, após alguns cálculos simples

$$B = (\mu_D - \beta)[(\tau + \mu_D + 2\theta + p + \alpha_V) - \beta] \leq 0,$$

o que implica que se $\frac{\mu_D}{\beta} < \sigma_V < 1$ então $B < 0$. Quando $\beta > \tau + \mu_D + 2\theta + p + \alpha_V$ e $\sigma_V = 1$ então

$$B = (\mu_D - \beta)[(\tau + \mu_D + 2\theta + p + \alpha_V) - \beta] > 0,$$

e, se $\sigma_V = \frac{\mu_D}{\beta}$,

$$B = (\mu_D - \beta)(\theta + \alpha_V) < 0.$$

Então existe σ_{V_2} ($\frac{\mu_D}{\beta} < \sigma_{V_2} < 1$) tal que se $\frac{\mu_D}{\beta} < \sigma_V < \sigma_{V_2}$ então $B < 0$, e se $\sigma_{V_2} < \sigma_V < 1$ então $B > 0$.

Quando $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} < 1$ e $\beta > \tau + \mu_D + 2\theta + p + \alpha_V$ temos as seguintes situações:

- se $\sigma_{V_2} > \sigma_{V_1}$ então a desigualdade $B > 2\sqrt{AC}$ não é válida para σ_V tal que $\frac{\mu_D}{\beta} < \sigma_V < 1$ (já vimos anteriormente que se $\beta > \theta + \tau + \mu_D$ e $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} < 1$ então $AC > 0$ se e só se $\frac{\mu_D}{\beta} < \sigma_V < \sigma_{V_1} < 1$);
- se $\sigma_V = \sigma_{V_2} = \sigma_{V_1}$ então $B = 0$;
- se $\sigma_{V_2} < \sigma_{V_1}$ então existe $\sigma_{V_C} \in]\sigma_{V_2}, \sigma_{V_1}[$ tal que $0 < B < 2\sqrt{AC}$ para $\sigma_V \in]\sigma_{V_2}, \sigma_{V_C}[$, $B = 2\sqrt{AC}$ para $\sigma_V = \sigma_{V_C}$, e $B > 2\sqrt{AC}$ para $\sigma_V \in]\sigma_{V_2}, \sigma_{V_1}[$.

Desta análise concluímos que

- as condições $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} < 1$, $\beta > \theta + \tau + \mu_D$, $\mu_D < \sigma_V \beta$ e $B > 2\sqrt{AC}$ são equivalentes à condição $\sigma_{V_C} < \sigma_V < \sigma_{V_1} < 1$;
- as condições $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} < 1$, $\beta > \theta + \tau + \mu_D$, $\mu_D < \sigma_V \beta$ e $B = 2\sqrt{AC}$ são equivalentes à condição $\sigma_V = \sigma_{V_C} < \sigma_{V_1} < 1$;
- as condições $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} = 1$, $\mu_D < \sigma_V \beta$ e $B > 0$ são equivalentes à condição $\sigma_{V_C} < \sigma_V = \sigma_{V_1} < 1$.

A proposição está demonstrada.

Observação 7.1.7 *Seja*

$$\mathcal{R}_C = \beta \frac{\alpha_V + \sigma_{V_C} \theta + p(1 - (1 - \sigma_{V_C})\nu)}{(\theta + \tau + \mu_D)(\theta + p + \alpha_V)}.$$

Então:

- a condição $\sigma_{V_C} < \sigma_V < \sigma_{V_1} < 1$ é equivalente à condição $\mathcal{R}_C < \mathcal{R}_0^{VP+VRN} < 1$;
- a condição $\sigma_V = \sigma_{V_C} < \sigma_{V_1} < 1$ é equivalente à condição $\mathcal{R}_C = \mathcal{R}_0^{VP+VRN} < 1$;
- a condição $\sigma_{V_C} < \sigma_V = \sigma_{V_1} < 1$ é equivalente à condição $\mathcal{R}_C < \mathcal{R}_0^{VP+VRN} = 1$.

Teorema 7.1.8 Para o sistema (7.3) têm-se as seguintes afirmações:

- (a) se $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} < 1$ então o ponto de equilíbrio de não doença U_0 é um nó localmente assintoticamente estável e se $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} > 1$ então U_0 é um ponto sela (instável);
- (b) se $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} > 1$ então o ponto de equilíbrio endêmico U_1^* é localmente assintoticamente estável;
- (c) se $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} < 1$, $\beta > \theta + \tau + \mu_D$, $\mu_D < \sigma_V \beta$ e $B > 2\sqrt{AC}$, então os pontos de equilíbrio endêmicos U_2^* e U_3^* são, respectivamente, um ponto sela e um ponto localmente assintoticamente estável;
- (d) se $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} < 1$, $\beta > \theta + \tau + \mu_D$, $\mu_D < \sigma_V \beta$, $B = 2\sqrt{AC}$ e, se U_3^* for um nó na situação (c), então o ponto de equilíbrio endêmico U_4^* é um ponto sela-nó;
- (e) se $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} = 1$, $\mu_D < \sigma_V \beta$ e $B > 0$, então o ponto de equilíbrio de não doença U_0 é um ponto sela-nó e instável no interior de T e, se U_3^* for um nó na situação (c), então o ponto de equilíbrio endêmico U_5^* é um nó localmente assintoticamente estável.

Demonstração: A matriz jacobiana associada ao sistema (7.3) avaliada num ponto genérico (i, r) é dada por

$$\begin{pmatrix} \beta - (\theta + \tau + \mu_D) - 2(\beta - \mu_D)i - \beta(1 - \sigma_V)r & -\beta(1 - \sigma_V)i \\ -p + (\mu_D - \sigma_V \beta)r & -(\theta + p + \alpha_V) + (\mu_D - \sigma_V \beta)i \end{pmatrix}$$

que em U_0 se reduz a

$$J(U_0) = \begin{pmatrix} \beta - (\theta + \tau + \mu_D) - \beta(1 - \sigma_V) \frac{p+\nu\theta}{\theta+p+\alpha_V} & 0 \\ -p + (\mu_D - \sigma_V \beta)r_0 & -(\theta + p + \alpha_V) \end{pmatrix}.$$

Dado que

$$\begin{aligned}
 & \beta - (\theta + \tau + \mu_D) - \beta(1 - \sigma_V) \frac{p + \nu\theta}{\theta + p + \alpha_V} \\
 = & (\theta + \tau + \mu_D) \left(\frac{\beta}{\theta + \tau + \mu_D} - 1 - \frac{\beta(1 - \sigma_V)(p + \nu\theta)}{(\theta + \tau + \mu_D)(\theta + p + \alpha_V)} \right) \\
 = & (\theta + \tau + \mu_D) \left(\frac{\beta(\theta + p + \alpha_V) - \beta(1 - \sigma_V)(p + \nu\theta)}{(\theta + \tau + \mu_D)(\theta + p + \alpha_V)} - 1 \right) \\
 = & (\theta + \tau + \mu_D) \left(\frac{\beta[\alpha_V + \sigma_V\theta + p(1 - (1 - \sigma_V)\nu)]}{(\theta + \tau + \mu_D)(\theta + p + \alpha_V)} - 1 \right) \\
 = & (\theta + \tau + \mu_D)(\mathcal{R}_0^{VP+VRN} - 1)
 \end{aligned}$$

a matriz $J(U_0)$ é dada por

$$J(U_0) = \begin{pmatrix} (\theta + \tau + \mu_D)(\mathcal{R}_0^{VP+VRN} - 1) & 0 \\ -p + (\mu_D - \sigma_V\beta)r_0 & -(\theta + p + \alpha_V) \end{pmatrix}.$$

Os valores próprios da matriz são reais e iguais a $(\theta + \tau + \mu_D)(\mathcal{R}_0^{VP+VRN} - 1)$ e $-(\theta + p + \alpha_V)$.

Se $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} > 1$ então os dois valores próprios têm sinais contrários e o ponto de equilíbrio de não doença é um ponto sela (instável). Se $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} < 1$ então os dois valores próprios da matriz são negativos e o ponto de equilíbrio de não doença é um nó localmente assintoticamente estável.

Seja $U^* = (i^*, r^*)$, $i^* > 0$, um ponto de equilíbrio endémico.

Como $\beta - (\theta + \tau + \mu_D) - (\beta - \mu_D)i^* - \beta(1 - \sigma_V)r^* = 0$, a matriz jacobiana associada ao sistema (7.3) e avaliada em U^* é

$$J(U^*) = \begin{pmatrix} -(\beta - \mu_D)i^* & -\beta(1 - \sigma_V)i^* \\ -p + (\mu_D - \sigma_V\beta)r^* & -(\theta + p + \alpha_V) + (\mu_D - \sigma_V\beta)i^* \end{pmatrix}$$

com determinante dado por

$$\begin{aligned}
 \det(J(U^*)) &= (\beta - \mu_D)i^*(\theta + p + \alpha_V) - (\beta - \mu_D)i^*(\mu_D - \sigma_V\beta)i^* - \beta(1 - \sigma_V)i^*p + \\
 & \quad + \beta(1 - \sigma_V)i^*(\mu_D - \sigma_V\beta)r^* \\
 &= \beta(\theta + \alpha_V + \sigma_V p)i^* - \mu_D(\theta + p + \alpha_V)i^* - (\beta - \mu_D)i^*(\mu_D - \sigma_V\beta)i^* + \\
 & \quad + \beta(1 - \sigma_V)i^*(\mu_D - \sigma_V\beta)r^*.
 \end{aligned}$$

Seja l a recta definida por $\det(J(U^*)) = 0$, isto é,

$$(\beta - \mu_D)(\mu_D - \sigma_V\beta)i^* - \beta(1 - \sigma_V)(\mu_D - \sigma_V\beta)r^* = \beta(\theta + \alpha_V + \sigma_V p) - \mu_D(\theta + p + \alpha_V).$$

Para estudar a estabilidade local dos pontos de equilíbrio endêmicos vamos considerar quatro casos distintos, conforme o valor de $\mathcal{R}_0^{VP+VRN}$ e de outros parâmetros do modelo.

Caso 1: $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} > 1$.

Pela proposição 7.1.4, a condição $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} > 1$ implica que o sistema (7.3) tem um único ponto de equilíbrio endêmico, $U_1^* = (i_1^*, r_1^*)$, e que $\beta > \theta + \tau + \mu_D$. Seja então $i^* = i_1^*$ e $r^* = r_1^*$. Uma vez que

$$1 < \mathcal{R}_0^{VP+VRN} < \frac{\beta(\theta + \alpha_V + \sigma_V p)}{\mu_D(\theta + p + \alpha_V)}$$

vem

$$(\beta - \mu_D)(\theta + \alpha_V) + (\sigma_V \beta - \mu_D)p > 0. \quad (7.9)$$

Da segunda equação do sistema (7.4) resulta que

$$(\theta + p + \alpha_V) - (\mu_D - \sigma_V \beta)i_1^* = \frac{\theta\nu + p(1 - i_1^*)}{r_1^*} > 0,$$

e portanto o traço da matriz $J(U_1^*)$ é

$$\text{tr}(J(U_1^*)) = -(\beta - \mu_D)i_1^* - (\theta + p + \alpha_V) + (\mu_D - \sigma_V \beta)i_1^* < 0.$$

Para estudar o sinal do $\det(J(U_1^*))$ vamos considerar duas situações:

(i) $\mu_D = \sigma_V \beta$.

Por (7.9),

$$\det(J(U_1^*)) = [(\beta - \mu_D)(\theta + \alpha_V) + (\sigma_V \beta - \mu_D)p]i_1^* > 0,$$

e concluímos que o ponto de equilíbrio endêmico U_1^* é localmente assintoticamente estável.

(ii) $\mu_D \neq \sigma_V \beta$.

Para determinar o sinal do $\det(J(U_1^*))$ vamos analisar a posição relativa do ponto U_1^* com a recta l , ou seja, vamos resolver o sistema de equações:

$$\begin{aligned} (\beta - \mu_D)i + \beta(1 - \sigma_V)r &= \beta - (\theta + \tau + \mu_D) \\ (\beta - \mu_D)(\mu_D - \sigma_V \beta)i - \beta(1 - \sigma_V)(\mu_D - \sigma_V \beta)r &= \beta(\theta + \alpha_V + \sigma_V p) - \mu_D(\theta + p + \alpha_V), \end{aligned} \quad (7.10)$$

que, após várias simplificações, é equivalente ao seguinte sistema

$$\begin{aligned} i &= \frac{\beta - (\theta + \tau + \mu_D) - \beta(1 - \sigma_V)r}{\beta - \mu_D} \\ r &= \frac{-\beta(\theta + \alpha_V + \sigma_V p) + \mu_D(\theta + p + \alpha_V) + (\mu_D - \sigma_V \beta)[\beta - (\theta + \tau + \mu_D)]}{2\beta(1 - \sigma_V)(\mu_D - \sigma_V \beta)}. \end{aligned}$$

Substituindo o valor de r na equação de i obtemos, após alguns cálculos,

$$\begin{aligned} i &= \frac{-\mu_D(p + 2\theta + \alpha_V + \tau + \mu_D) + \beta[(\theta + \mu_D + \alpha_V) - \sigma_V(-p - \tau - \mu_D - \theta + \beta)]}{2(\mu_D - \sigma_V \beta)(\beta - \mu_D)} \\ &= -\frac{B}{2A}, \end{aligned}$$

que é a abcissa do ponto de intersecção da recta l_1 (uma das curvas isóclinas do sistema (7.3)) com a recta l .

- Se $\mu_D < \sigma_V \beta$ então $A < 0$. Uma vez que $C > 0$ (pois $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} > 1$) concluímos que o produto das soluções da equação $h(i) = 0$ é negativo. Assim, sendo i_1^* a solução positiva dessa equação, tem-se $i_1^* > -\frac{B}{2A}$. Assim, o ponto de equilíbrio endémico U_1^* encontra-se abaixo da recta l .

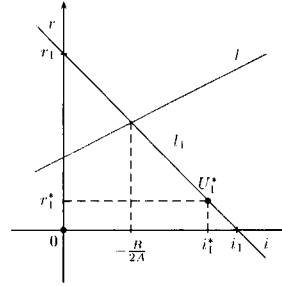


Figura 83: O ponto de equilíbrio endémico U_1^* encontra-se abaixo da recta l .

Tendo em conta a equação de l (segunda equação do sistema (7.10)),

$$r_1^* < \frac{-\beta(\theta + \alpha_V + \sigma_V p) + \mu_D(\theta + p + \alpha_V) + (\beta - \mu_D)(\mu_D - \sigma_V \beta)i_1^*}{\beta(1 - \sigma_V)(\mu_D - \sigma_V \beta)},$$

donde $\det(J(U_1^*)) > 0$. O ponto de equilíbrio endémico U_1^* é localmente assintoticamente estável.

- Se $\mu_D > \sigma_V \beta$ então $A > 0$. Uma vez que $C > 0$ concluímos que o produto das soluções da equação $h(i) = 0$ é positivo. Ora, i_1^* é a solução positiva dessa equação no intervalo $]0, i_1[$. Por (7.8),

$$h(i_1) = C + \frac{\beta - (\theta + \tau + \mu_D)}{\beta - \mu_D} [p(\mu_D - \sigma_V \beta) + (\mu_D - \beta)(\theta + \alpha_V)].$$

Após vários passos de simplificação obtemos

$$h(i_1) = -\beta(1 - \sigma_V) \left[\theta_V + \frac{p(\theta + \tau)}{\beta - \mu_D} \right] < 0.$$

Como $i_1^* < i_1$ e $h(i_1) < 0$ vem que $i_1^* < -\frac{B}{2A}$.

O ponto de equilíbrio endêmico U_1^* encontra-se acima da recta l .

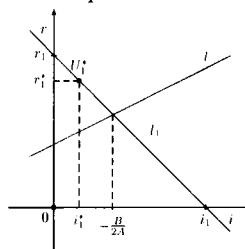


Figura 84: O ponto de equilíbrio endêmico U_1^* encontra-se acima da recta l .

Assim, $\det(J(U_1^*)) > 0$ e o ponto de equilíbrio endêmico U_1^* é localmente assintoticamente estável.

Caso 2: $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} < 1$, $\beta > \theta + \tau + \mu_D$, $\mu_D < \sigma_V \beta$, $B > 2\sqrt{AC}$.

Pela proposição 7.1.4, estas condições implicam que o sistema (7.3) tem dois pontos de equilíbrio endêmicos, $U_2^* = (i_2^*, r_2^*)$ e $U_3^* = (i_3^*, r_3^*)$. Nesta situação, $A < 0$ e $C < 0$, ou seja, o produto das soluções da equação $h(i)$ é positivo. Assim $i_2^* < -\frac{B}{2A} < i_3^*$ onde i_2^* e i_3^* são as soluções dessa equação.

Os pontos de equilíbrio endêmicos U_2^* e U_3^* estão situados em lados opostos relativamente à recta l .

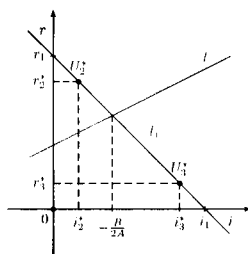


Figura 85: Os pontos de equilíbrio endêmicos U_2^* e U_3^* estão situados em lados opostos relativamente à recta l .

Concluimos, de forma análoga ao caso anterior, que

$$\det(J(U_2^*)) < 0 \quad \text{e} \quad \det(J(U_3^*)) > 0.$$

Os traços das matrizes $J(U_2^*)$ e $J(U_3^*)$ são, respectivamente,

$$\begin{aligned} \text{tr}(J(U_2^*)) &= -(\beta - \mu_D)i_2^* - (\theta + p + \alpha_V) + (\mu_D - \sigma_V\beta)i_2^* < 0, \\ \text{tr}(J(U_3^*)) &= -(\beta - \mu_D)i_3^* - (\theta + p + \alpha_V) + (\mu_D - \sigma_V\beta)i_3^* < 0, \end{aligned}$$

pelo que os pontos de equilíbrio endémicos U_2^* e U_3^* são, respectivamente, um ponto sela (instável) e um ponto localmente assintoticamente estável.

Caso 3: $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} < 1$, $\beta > \theta + \tau + \mu_D$, $\mu_D < \sigma_V\beta$, $B = 2\sqrt{AC}$.

Pela proposição 7.1.4, estas condições implicam que o sistema (7.3) tem um único ponto de equilíbrio endémico, $U_4^* = (i_4^*, r_4^*)$, que acontece quando os pontos de equilíbrio endémicos U_2^* e U_3^* do caso 2 se sobrepõem. Se U_3^* for um nó então, pelo caso 2, concluimos que U_4^* é um ponto sela-nó.

Caso 4: $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} = 1$, $\mu_D < \sigma_V\beta$, $B > 0$.

Pela proposição 7.1.4, estas condições implicam que o sistema (7.3) tem um único ponto de equilíbrio endémico, $U_5^* = (i_5^*, r_5^*)$, onde $i_5^* = -\frac{B}{A} > -\frac{B}{2A}$. Este ponto de equilíbrio encontra-se abaixo da recta l .

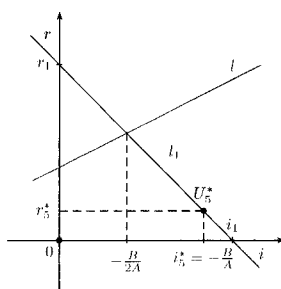


Figura 86: O ponto de equilíbrio endémico U_5^* encontra-se abaixo da recta l .

Daqui resulta que $\det(J(U_5^*)) > 0$. Facilmente se verifica que $\text{tr}(J(U_5^*)) < 0$ e concluimos que U_5^* é localmente assintoticamente estável.

Como foi referido anteriormente, os pontos de equilíbrio endémicos são os zeros da função $h(i) = Ai^2 + Bi + C$.

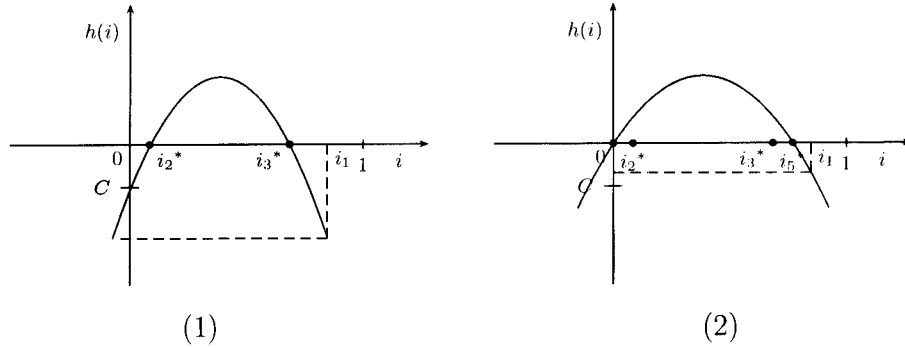


Figura 87: Gráfico da função $h(i)$: (1) no caso $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} < 1$, $\mu_D < \sigma_V \beta$, $\beta > \theta + \tau + \mu_D$, $B > 2\sqrt{AC}$; (2) no caso $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} = 1$, $\mu_D < \sigma_V \beta$, $B > 0$.

À medida que $\mathcal{R}_0^{VP+VRN}$ tende para 1 por valores inferiores, a figura (1) tende para a figura (2).

De facto, isso acontece porque:

- quando $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} < 1$ o parâmetro C é negativo; quando $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} = 1$ o parâmetro C é nulo;
- $i_2^* = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$ e $i_3^* = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$ são as raízes (positivas) de $h(i) = Ai^2 + Bi + C = 0$ quando $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} < 1$;
- à medida que $\mathcal{R}_0^{VP+VRN}$ se aproxima de 1 por valores inferiores, C aproxima-se de 0 por valores inferiores.

Portanto, das expressões de i_2^* e i_3^* , resulta que à medida que $\mathcal{R}_0^{VP+VRN}$ se aproxima de 1 por valores inferiores, i_2^* aproxima-se de 0 (por valores superiores) e i_3^* aproxima-se de i_5^* (por valores inferiores). Da expressão (7.6) resulta, pela continuidade da função h_2 , que r_2^* se vai aproximar de $r_0 = \frac{\theta\nu+p}{\theta+p+\alpha\nu}$ e r_3^* se vai aproximar de r_5^* . Assim na situação limite $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} = 1$, U_2^* sobrepõe-se a U_0 e U_3^* sobrepõe-se a U_5^* .

Relativamente à estabilidade local dos pontos de equilíbrio U_0 e U_5^* tem-se:

- na situação $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} < 1$ foi visto que o ponto de equilíbrio de não doença U_0 é um nó e que U_2^* é um ponto sela. Como na presente situação ($\mathcal{R}_0^{VP+VRN} = 1$), U_2^* se sobrepõe a U_0 , resulta que U_0 se torna num ponto sela-nó;

- já foi demonstrado anteriormente que U_5^* é localmente assintoticamente estável. Como para $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} = 1$ o ponto de equilíbrio U_3^* se sobrepõe a U_5^* então, se U_3^* for um nó no caso 2, concluímos que U_5^* é um nó localmente assintoticamente estável.

Vamos agora estudar a distribuição das órbitas do sistema (7.3) perto do ponto de equilíbrio de não doença. Considerando a mudança de variável

$$u = i \quad z = [p - (\mu_D - \sigma_V \beta)r_0]i + (\theta + p + \alpha_V)(r - r_0) \quad t = -s,$$

vem

$$\begin{aligned} r &= \frac{z - [p - (\mu_D - \sigma_V \beta)r_0]i}{\theta + p + \alpha_V} + r_0 \\ \frac{du}{dt} &= i[\beta - (\theta + \tau + \mu_D) - (\beta - \mu_D)i - \beta(1 - \sigma_V)r] \\ &= u \left\{ \beta - (\theta + \tau + \mu_D) - (\beta - \mu_D)u - \beta(1 - \sigma_V) \left[\frac{z - [p - (\mu_D - \sigma_V \beta)r_0]u}{\theta + p + \alpha_V} + r_0 \right] \right\} \\ &= u \left\{ \left[-(\beta - \mu_D) + \frac{\beta(1 - \sigma_V)[p - (\mu_D - \sigma_V \beta)r_0]}{\theta + p + \alpha_V} \right] u - \frac{\beta(1 - \sigma_V)z}{\theta + p + \alpha_V} \right\} - \\ &\quad - \beta(1 - \sigma_V)r_0 u + \beta u - (\theta + \tau + \mu_D)u \\ \frac{du}{ds} &= -\frac{du}{dt} \end{aligned}$$

Já vimos que a condição $\mathcal{R}_0 = 1$ é equivalente à condição $r_1 = r_2$, onde r_1 e r_2 ($= r_0$) são os referidos anteriormente. Daqui resulta que $\beta - (\theta + \tau + \mu_D) = \beta(1 - \sigma_V)r_0$ e portanto que a expressão de $\frac{du}{ds}$ é

$$\frac{du}{ds} = u \left\{ \left[(\beta - \mu_D) - \frac{\beta(1 - \sigma_V)[p - (\mu_D - \sigma_V \beta)r_0]}{\theta + p + \alpha_V} \right] u + \frac{\beta(1 - \sigma_V)z}{\theta + p + \alpha_V} \right\}.$$

Relativamente à expressão de $\frac{dz}{ds}$ temos que

$$\begin{aligned} \frac{dz}{ds} &= \frac{dz}{du} \frac{du}{ds} \\ &= \left[[p - (\mu_D - \sigma_V \beta)r_0] + (\theta + p + \alpha_V) \frac{dr}{dt} \frac{dt}{ds} \frac{ds}{du} \right] \frac{du}{ds} \\ &= [p - (\mu_D - \sigma_V \beta)r_0] \frac{du}{ds} - (\theta + p + \alpha_V) \frac{dr}{dt}. \end{aligned} \tag{7.11}$$

Uma vez que

$$\begin{aligned}
 & [p - (\mu_D - \sigma_V \beta) r_0] \frac{du}{ds} \\
 &= [p - (\mu_D - \sigma_V \beta) r_0] u \left\{ \left[(\beta - \mu_D) - \frac{\beta(1 - \sigma_V)[p - (\mu_D - \sigma_V \beta) r_0]}{\theta + p + \alpha_V} \right] u + \frac{\beta(1 - \sigma_V)z}{\theta + p + \alpha_V} \right\} \\
 &= u^2 \left[[p - (\mu_D - \sigma_V \beta) r_0] (\beta - \mu_D) - \beta(1 - \sigma_V)[p - (\mu_D - \sigma_V \beta) r_0] \frac{p - (\mu_D - \sigma_V \beta) r_0}{\theta + p + \alpha_V} \right] + \\
 & \quad + uz[p - (\mu_D - \sigma_V \beta) r_0] \frac{\beta(1 - \sigma_V)}{\theta + p + \alpha_V},
 \end{aligned}$$

a equação (7.11) é equivalente a

$$\begin{aligned}
 \frac{dz}{ds} &= u^2 \left[[p - (\mu_D - \sigma_V \beta) r_0] (\beta - \mu_D) - \beta(1 - \sigma_V)[p - (\mu_D - \sigma_V \beta) r_0] \frac{p - (\mu_D - \sigma_V \beta) r_0}{\theta + p + \alpha_V} \right] + \\
 & \quad + uz[p - (\mu_D - \sigma_V \beta) r_0] \frac{\beta(1 - \sigma_V)}{\theta + p + \alpha_V} - (\theta + p + \alpha_V) r'.
 \end{aligned}$$

No entanto,

$$\begin{aligned}
 (\theta + p + \alpha_V) r' &= (\theta + p + \alpha_V)(p + \nu\theta) - pu(\theta + p + \alpha_V) - (\theta + p + \alpha_V)^2 r + \\
 & \quad + (p + \theta + \alpha_V)(\mu_D - \sigma_V \beta) ur.
 \end{aligned}$$

Usando a expressão de r e sabendo que $r_0 = \frac{p + \nu\theta}{\theta + p + \alpha_V}$, a equação anterior é equivalente a

$$(\theta + p + \alpha_V) r' = -(\theta + p + \alpha_V) z + (\mu_D - \sigma_V \beta) uz - (\mu_D - \sigma_V \beta)[p - (\mu_D - \sigma_V \beta) r_0] u^2.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 \frac{dz}{ds} &= u^2 \left[[p - (\mu_D - \sigma_V \beta) r_0] (\beta - \mu_D) - \beta(1 - \sigma_V)[p - (\mu_D - \sigma_V \beta) r_0] \frac{p - (\mu_D - \sigma_V \beta) r_0}{\theta + p + \alpha_V} \right] + \\
 & \quad + uz[p - (\mu_D - \sigma_V \beta) r_0] \frac{\beta(1 - \sigma_V)}{\theta + p + \alpha_V} + (\theta + p + \alpha_V) z - (\mu_D - \sigma_V \beta) uz + \\
 & \quad + (\mu_D - \sigma_V \beta)[p - (\mu_D - \sigma_V \beta) r_0] u^2 \\
 &= (\theta + p + \alpha_V) z - uz \left[(\mu_D - \sigma_V \beta) - [p - (\mu_D - \sigma_V \beta) r_0] \frac{\beta(1 - \sigma_V)}{\theta + p + \alpha_V} \right] + \\
 & \quad + u^2 \beta(1 - \sigma_V)[p - (\mu_D - \sigma_V \beta) r_0] \left(1 - \frac{p - (\mu_D - \sigma_V \beta) r_0}{\theta + p + \alpha_V} \right) \\
 &= (\theta + p + \alpha_V) z - uz \left[(\mu_D - \sigma_V \beta) - [p - (\mu_D - \sigma_V \beta) r_0] \frac{\beta(1 - \sigma_V)}{\theta + p + \alpha_V} \right] + \\
 & \quad + u^2 \beta(1 - \sigma_V)[p - (\mu_D - \sigma_V \beta) r_0] \left(\frac{\alpha_V + \theta + (\mu_D - \sigma_V \beta) r_0}{\theta + p + \alpha_V} \right).
 \end{aligned}$$

Após a mudança de variáveis, o sistema (7.3) é então equivalente a

$$\begin{aligned}\frac{du}{ds} &= u \left\{ \left[(\beta - \mu_D) - \frac{\beta(1 - \sigma_V)[p - (\mu_D - \sigma_V\beta)r_0]}{\theta + p + \alpha_V} \right] u + \frac{\beta(1 - \sigma_V)}{\theta + p + \alpha_V} z \right\} \\ \frac{dz}{ds} &= (\theta + p + \alpha_V)z - uz \left[(\mu_D - \sigma_V\beta) - [p - (\mu_D - \sigma_V\beta)r_0] \frac{\beta(1 - \sigma_V)}{\theta + p + \alpha_V} \right] + \\ &\quad + u^2\beta(1 - \sigma_V)[p - (\mu_D - \alpha_V\beta)r_0] \left(\frac{\alpha_V + \theta + (\mu_D - \sigma_V\beta)r_0}{\theta + p + \alpha_V} \right).\end{aligned}\quad (7.12)$$

O sistema de equações lineares correspondente ao sistema (7.12) é

$$\begin{aligned}\frac{du}{ds} &= 0 \\ \frac{dz}{ds} &= (\theta + p + \alpha_V)z.\end{aligned}\quad (7.13)$$

A matriz jacobiana associada ao sistema (7.13) num ponto (u, z) genérico é

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \theta + p + \alpha_V \end{pmatrix},$$

que tem um valor próprio nulo e outro positivo: $\theta + p + \alpha_V$.

Considerando a mudança de variável

$$s' = (\theta + p + \alpha_V)s,$$

o sistema (7.12) pode ser escrito na forma

$$\begin{aligned}\frac{du}{ds} &= \frac{1}{\theta + p + \alpha_V} P_2(u, z) \\ \frac{dz}{ds} &= z + \frac{1}{\theta + p + \alpha_V} Q_2(u, z),\end{aligned}\quad (7.14)$$

onde

$$\begin{aligned}P_2(u, z) &= u \left\{ \left[(\beta - \mu_D) - \frac{\beta(1 - \sigma_V)[p - (\mu_D - \sigma_V\beta)r_0]}{\theta + p + \alpha_V} \right] u + \frac{\beta(1 - \sigma_V)z}{\theta + p + \alpha_V} \right\}, \\ Q_2(u, z) &= -uz \left[(\mu_D - \sigma_V\beta) - [p - (\mu_D - \sigma_V\beta)r_0] \frac{\beta(1 - \sigma_V)}{\theta + p + \alpha_V} \right] + \\ &\quad + u^2\beta(1 - \sigma_V)[p - (\mu_D - \alpha_V\beta)r_0] \left(\frac{\alpha_V + \theta + (\mu_D - \sigma_V\beta)r_0}{\theta + p + \alpha_V} \right).\end{aligned}$$

Temos que:

- $O = (0, 0)$ é um ponto de equilíbrio isolado de (7.12);
- P_2 e Q_2 são funções analíticas numa vizinhança de O de ordem não inferior a 2.

Pelo Teorema da Função Implícita (2.0.14), numa vizinhança suficientemente pequena $S_\delta(O)$ de O , a equação

$$F(u, z) = z + \frac{1}{\theta + p + \alpha_V} Q_2(u, z) = 0$$

tem exactamente uma solução $z = \phi(u)$, que é analítica em $S_\delta(O)$ e satisfaz:

- $\phi(0) = 0$.
- $\phi'(0) = -\frac{F_u(0, \phi(0))}{F_z(0, \phi(0))} = -\frac{F_u(0, 0)}{F_z(0, 0)} = 0$.

Como ϕ é analítica, terá de ser da forma

$$\phi(u) = \sum_{k \geq 0} b_k u^k$$

numa vizinhança de 0 e as condições anteriores implicam que $b_0 = 0$ e $b_1 = 0$ logo

$$\phi(u) = b_2 u^2 + [u]_3,$$

onde $[u]_3$ representa a soma dos termos de $\phi(u)$ de ordem superior ou igual a 3.

Seja

$$\psi(u) = P_2(u, \phi(u)) = a_2 u^2 + [u]_3.$$

Então,

$$\begin{aligned} \psi(u) &= u \left\{ \left[(\beta - \mu_D) - \frac{\beta(1 - \sigma_V)[p - (\mu_D - \sigma_V \beta)r_0]}{\theta + p + \alpha_V} \right] u + \frac{\beta(1 - \sigma_V)\phi(u)}{\theta + p + \alpha_V} \right\} \\ &= \left\{ \frac{(\beta - \mu_D)(\theta + p + \alpha_V) - \beta(1 - \sigma_V)[p - (\mu_D - \sigma_V \beta)r_0]}{\theta + p + \alpha_V} \right\} u^2 + [u]_3. \end{aligned}$$

Uma vez que

$$\mathcal{R}_0^{VP+VRN} = 1 \iff \beta(1 - \sigma_V)r_0 = \beta - (\theta + \tau + \mu_D)$$

verificamos que

$$\begin{aligned}
 & (\beta - \mu_D)(\theta + p + \alpha_V) - \beta(1 - \sigma_V)[p - (\mu_D - \sigma_V\beta)r_0] \\
 &= (\beta - \mu_D)(\theta + p + \alpha_V) - \beta(1 - \sigma_V)p + [\beta - (\theta + \tau + \mu_D)](\mu_D - \sigma_V\beta) \\
 &= -\mu_D(p + \alpha_V + \tau + \mu_D + 2\theta) + \beta[(\mu_D + \alpha_V + \theta) - \sigma_V(\beta - \theta - \mu_D - \tau - p)] \\
 &= -B,
 \end{aligned}$$

onde B é o definido no enunciado a proposição 7.1.4. Assim,

$$\psi(u) = -\frac{B}{\theta + p + \alpha_V}u^2 + [u]_3 \quad \text{e} \quad B > 0,$$

ou seja,

$$\psi(u) = a_2u^2 + [u]_3 \quad \text{com} \quad a_2 < 0.$$

Pelo teorema 2.0.34, as órbitas de (7.3) tendem para U_0 ao longo do eixo dos rr e afastam-se de U_0 no interior de T quando $t \rightarrow +\infty$. Logo U_0 é instável no interior da região T .

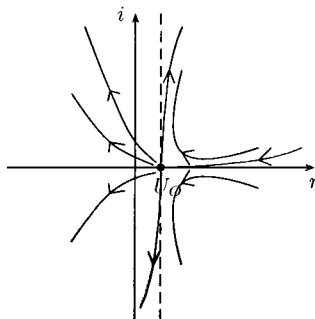


Figura 88: Estrutura topológica das órbitas numa vizinhança de U_0 .

Proposição 7.1.9 *A região*

$$\Omega = \{(s, i, r) : s > 0, i \geq 0, r \geq 0, s + i + r = 1\}$$

é positivamente invariante para (7.2). Em particular, as semi-órbitas positivas do sistema são limitadas.

Demonstração: Sempre que $s = 0$ e que $r + i = 1$ temos

$$\begin{aligned}
 i' + r' &= \theta\nu + \mu_D i(r + i) - \alpha_V r - \theta(r + i) - (\tau + \mu_D)i \\
 &= \theta(\nu - 1) - \alpha_V r - \tau i \\
 &< 0,
 \end{aligned}$$

sempre que $i = 0$ e que $s + r = 1$ temos

$$\begin{aligned} s' + r' &= (1 - \nu)\theta - \theta(s + r) + \nu\theta \\ &= \theta - \theta(s + r) \\ &= 0, \end{aligned}$$

e finalmente sempre que $r = 0$ e $s + i = 1$ temos

$$\begin{aligned} s' + i' &= (1 - \nu)\theta - \theta(s + i) + \mu_D i(s + i) - ps - \mu_D i \\ &= -\theta\nu - ps \\ &< 0. \end{aligned}$$

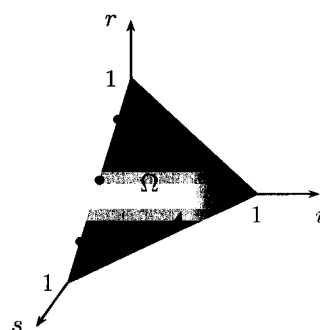


Figura 89: Região Ω e a direção do campo de vetores sobre a fronteira.

A seguinte proposição é importante para o estudo da estabilidade global dos pontos de equilíbrio.

Proposição 7.1.10 *O sistema (7.2) não tem órbitas periódicas na região invariante Ω .*

Demonstração: A fronteira da região Ω não pode formar soluções periódicas do sistema (7.2) porque como foi visto na demonstração da proposição 7.1.9 a direção do campo de vetores nessa fronteira nem sempre é nula. Vamos ver o que se passa no interior de Ω . Por redução ao absurdo, supomos que o sistema (7.2) tem uma solução periódica $\phi(t)$. A curva $\phi(t)$ é o bordo de um domínio plano Π pertencente ao interior de Ω .

Representando por (f_1, f_2, f_3) o campo de vetores do sistema (7.2), sejam

$$\begin{aligned} F &= (f_1, f_2, f_3)^T, \\ G &= \frac{1}{sir} U \times F, \end{aligned}$$

onde $U = (s, i, r)^T$. Então $G \cdot F = 0$ e explicitando a função G obtemos

$$\begin{aligned} G &= \left(\frac{1}{ir}, \frac{1}{sr}, \frac{1}{si} \right) \times (f_1, f_2, f_3) \\ &= \left(\frac{f_3}{sr} - \frac{f_2}{si}, \frac{f_1}{si} - \frac{f_3}{ir}, \frac{f_2}{ir} - \frac{f_1}{sr} \right) \\ &= (g_1, g_2, g_3). \end{aligned}$$

O rotacional de G é dado por

$$\text{rot } G = \left(\frac{\partial g_3}{\partial i} - \frac{\partial g_2}{\partial r}, \frac{\partial g_1}{\partial r} - \frac{\partial g_3}{\partial s}, \frac{\partial g_2}{\partial s} - \frac{\partial g_1}{\partial i} \right),$$

onde

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_3}{\partial i} - \frac{\partial g_2}{\partial r} &= \frac{\beta}{r} - \frac{\tau}{sr} - \frac{\alpha_V}{si} - \frac{\theta\nu + ps}{ir^2}, \\ \frac{\partial g_1}{\partial r} - \frac{\partial g_3}{\partial s} &= -\frac{\theta\nu}{sr^2} - \frac{p}{r^2} - \frac{\beta\sigma_V}{s} - \frac{\beta}{r} - \frac{\theta(1-\nu) + \tau i}{s^2 r} - \frac{\alpha_V}{s^2}, \\ \frac{\partial g_2}{\partial s} - \frac{\partial g_1}{\partial i} &= -\frac{(1-\nu)\theta + \alpha_V r}{s^2 i} - \frac{\tau}{s^2} - \frac{p}{ir} + \frac{\sigma_V \beta}{s}. \end{aligned}$$

A componente do rotacional de G na direcção normal ao plano que contém Π é dada por

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{3}} \text{rot } G \cdot (1, 1, 1)^T \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left[-\frac{ps + \tau i + \alpha_V r}{sir} - \frac{\theta\nu + ps}{r^2} \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{i} \right) - \frac{\theta(1-\nu) + \tau i + \alpha_V r}{s^2} \left(\frac{1}{i} + \frac{1}{r} \right) \right] \\ &< 0, \end{aligned}$$

no interior de Ω . A componente G_t de G tangente à curva $\partial\Pi$ é dada por

$$\frac{G \cdot F}{|F|} = 0.$$

O Teorema de Stokes afirma que

$$0 = \int_{\partial\Pi} \frac{G \cdot F}{|F|} ds = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \int_{\Pi} \text{rot } G \cdot (1, 1, 1)^T ds < 0,$$

o que é uma contradição.

Concluimos que o sistema não tem órbitas periódicas no interior de Ω .

Para o sistema (7.2) tem-se o seguinte:

Teorema 7.1.11

(a) se $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} > 1$ então o ponto de equilíbrio de não doença U_0 é um ponto sela (instável) e o ponto de equilíbrio endêmico U_1^* é globalmente assintoticamente estável em $T - \{(0, r) : 0 \leq r < 1\}$;

(b) se $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} < 1$, $\mu_D < \sigma_V \beta$, $\beta > \theta + \tau + \mu_D$ e $B > 2\sqrt{AC}$ então existem duas órbitas tendendo ($t \rightarrow +\infty$) para U_2^* que dividem a região T em duas sub-regiões, D_1 e D_2 , tais que $U_3^* \notin D_1$, $U_3^* \in D_2$,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (i(t), r(t)) = U_0 \quad \text{se} \quad (i(0), r(0)) \in D_1$$

e

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (i(t), r(t)) = U_3^* \quad \text{se} \quad (i(0), r(0)) \in D_2.$$

O ponto de equilíbrio de não doença U_0 é um nó globalmente assintoticamente estável em D_1 e os pontos de equilíbrio endêmicos U_2^* e U_3^* são, respectivamente, um ponto sela (instável) e um ponto globalmente assintoticamente estável em D_2 ;

(c) se $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} < 1$, $\mu_D < \sigma_V \beta$, $\beta > \theta + \tau + \mu_D$ e $B = 2\sqrt{AC}$ então existem duas órbitas tendendo ($t \rightarrow +\infty$) para U_4^* que dividem a região T em duas sub-regiões, D'_1 e D'_2 , e

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (i(t), r(t)) = U_0 \quad \text{se} \quad (i(0), r(0)) \in D'_1.$$

O ponto de equilíbrio de não doença U_0 é um nó globalmente assintoticamente estável na região D'_1 e, se U_3^* for um nó na situação (b), então o ponto de equilíbrio endêmico U_4^* é um ponto sela-nó;

(d) se $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} = 1$, $\mu_D < \sigma_V \beta$ e $B > 0$ então o ponto de equilíbrio endêmico U_5^* é um ponto globalmente assintoticamente estável na região $T - \{(0, r) : 0 \leq r < 1\}$ e U_0 é um ponto sela-nó e instável no interior de T ;

(e) se os parâmetros do sistema (7.2) não satisfazem os casos (a)–(d) então o ponto de equilíbrio de não doença U_0 é um nó globalmente assintoticamente estável em T .

Demonstração: Aplicando o Teorema de Poincaré - Bendixson às regiões adequadas e tendo em conta as proposições 7.1.3 e 7.1.10 e o teorema 7.1.8, facilmente se demonstra a estabilidade global dos pontos de equilíbrio.

7.2 Discussão dos resultados

Para comparar o modelo SIS sem vacinação com o modelo VP+VRN conferindo imunidade parcial e temporária apresentamos a seguinte tabela onde constam as expressões de $\mathcal{R}_0$ no caso do tamanho N da população ser variável e a taxa de contágio ser independente de N .

Expressões de $\mathcal{R}_0$	
	$N' \neq 0$
Termo Contágio	$\beta \frac{S}{N} I$
Sem Vacinação	$\beta \frac{1}{\theta + \tau + \mu_D}$
VP+VRN Parcial e Temporária	$\beta \frac{1}{\theta + \tau + \mu_D} \left(1 - \frac{p + \nu \theta}{\theta + p + \alpha_V} \right) + \sigma_V \beta \frac{1}{\theta + \tau + \mu_D} \frac{p + \nu \theta}{\theta + p + \alpha_V}$

Por observação da tabela verificamos que

$$\mathcal{R}_0^{VP+VRN} < \mathcal{R}_0,$$

o que mostra que este tipo de vacinação pode ter um efeito positivo na prevenção da infecção. Esse efeito depende do parâmetro σ_V . Se $\sigma_V = 0$ (o que significa que estamos perante o modelo VP+VRN com imunidade temporária) então a vacina pode ser eficaz na eliminação da doença. Se $\sigma_V = 1$ então a vacina é completamente ineficaz e o modelo comporta-se como o modelo SIS sem qualquer tipo de vacinação. Tanto numa situação como noutra os modelos apresentam dinâmicas simples: sempre que $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} < 1$ só existe o ponto de equilíbrio de não doença e é globalmente assintoticamente estável (em particular a doença tende a extinguir-se). No caso $0 < \sigma_V < 1$, a proposição 7.1.6 e o teorema 7.1.11 mostram que a eficácia da vacina é importante no controlo e na prevenção da doença. Os resultados anteriores afirmam que:

- Quando $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} > 1$ então a doença invade a população de uma forma endémica;
- Quando $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} < 1$ há a referir várias situações. Introduzindo um valor $\mathcal{R}_C$ e as constantes σ_{V_C} e σ_{V_1} temos:

- Quando $0 < \sigma_{V_C} < \sigma_V < \sigma_{V_1} < 1$ (ou equivalentemente $\mathcal{R}_C < \mathcal{R}_0^{VP+VRN} < 1$) então existem dois pontos de equilíbrio endêmicos (U_2^* e U_3^*) e a dinâmica do modelo depende das condições iniciais. Se as condições iniciais pertencerem a uma dada região (D_1) então a doença tende a desaparecer, se pertencerem a outra região (D_2) então a doença invade a população;
- Quando $0 < \sigma_{V_C} = \sigma_V < \sigma_{V_1} < 1$ (ou equivalentemente $\mathcal{R}_C = \mathcal{R}_0^{VP+VRN} < 1$) então existe um ponto de equilíbrio endêmico (U_4^*) e as condições iniciais influenciam a dinâmica do modelo. A extinção da doença só acontece se as condições iniciais pertencerem a uma dada região (D'_1);
- Quando $0 < \sigma_{V_C} < \sigma_V = \sigma_{V_1} < 1$ (ou equivalentemente $\mathcal{R}_C < \mathcal{R}_0^{VP+VRN} = 1$) então a infecção invade a população, resultando numa endemia;
- Quando $\sigma_V < \sigma_{V_C} < \sigma_{V_1} < 1$ (isto é, $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} < \mathcal{R}_C$ e $\mathcal{R}_0^{VP+VRN} < 1$) então não existem pontos de equilíbrio endêmicos e a doença progride para a sua eliminação.

Eficácia da vacinação

Na demonstração da proposição 7.1.6 verificámos que

$$i_1^*, i_2^*, i_3^*, i_4^*, i_5^* < i_1,$$

isto é, a proporção de infectados nos pontos de equilíbrio endêmicos U_1^* , U_2^* , U_3^* , U_4^* e U_5^* é menor do que no modelo correspondente sem vacinação. Este facto mostra que o efeito deste plano de vacinação é bem visível.

Dinâmica do tamanho da população

O corolário apresentado na discussão dos resultados dos capítulos 5 e 6 deixa de ser válido face à dinâmica complexa do modelo. As únicas conclusões que podemos tirar são as apresentadas na proposição 4.2.12, sendo i^* o valor da ordenada de um ponto de equilíbrio endêmico (determinada pelos valores dos parâmetros do modelo).

Referências Bibliográficas

- [1] F. Brauer, C. Castillo Chavéz, *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*, Springer Verlag, 2001.
- [2] R. Breban, S. Blower, *Letter to the Editor*, Journal of Theoretical Biology (2005), **235**, 151-152.
- [3] R. Courant, F. John, *Introduction to Calculus and Analysis*, Volume II, Springer Verlag, 1989.
- [4] O. Diekmann *et al*, *On the definition and the computation of the basic reproduction ratio R_0 in models for infectious diseases in heterogeneous populations*, Journal of Mathematical Biology (1990), **28**, 365-382.
- [5] P. v. d. Driessche, J. Watmough, *Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission*, Mathematical Biosciences (2002), **180**, 29-48.
- [6] A. R. Gaio, *Apontamentos de Modelos Matemáticos em Biologia e Medicina*, 2004/2005.
- [7] M. G. Gomes *et al*, *Infection, reinfection, and vaccination under suboptimal immune protection: epidemiological perspectives*, Journal of Theoretical Biology (2004), **228**, 539-549.
- [8] H. W. Hethcote, *The mathematics of infectious diseases*, SIAM Review (2000), **42**, 599-653.
- [9] M. Hirsch *et al*, *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*, Academic Press, 1974.

- [10] Li Jianquan *et al*, *Global Analysis of SIS Epidemic Models with a Simple Vaccination and Multiple Endemic Equilibria*, Acta Mathematica Scientia (2006), **26B**(1), 83-93.
- [11] Li Jianquan, Ma Zhien, *Qualitative Analyses of SIS epidemic Model with Vaccination and Varying Total Population Size*, Mathematical and Computer Modelling (2002), **35**, 1235-1243.
- [12] Li Jianquan, Ma Zhien, *Global Analysis of SIS Epidemic Models with Variable total Population Size*, Mathematical and Computer Modelling (2004), **39**, 1231-1242.
- [13] S. A. Levin *et al*, *Applied Mathematical Ecology*, Springer-Verlag, 1989.
- [14] J. D. Murray, *Mathematical Biology: an Introduction*, 3rd edition, Springer Verlag, 2002.
- [15] Zhou Yicang, Liu Hanwu, *Stability of Periodic Solutions for an SIS Model with Pulse Vaccination*, Mathematical and Computer Modelling (2003), **38**, 299-308.
- [16] Zhang Zhifen *et al*, *Qualitative Theory of Differential Equations*, American Mathematical Society, 2002.