FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO

PROVA MATEMÁTICA, VERDADE E AXIOMÁTICA
UM OLHAR SOBRE FREGE E HILBERT

Ana Cristina Marques Silva
2006

TESE Nº 211

U.PORTO

Departamento de Matemática Pura
Mestrado em Ensino da Matemática

O Presidente do Júri,
Carlos Correia de Sá

11-07-2007

Ana Cristina Marques Silva

PROVA MATEMÁTICA, VERDADE E AXIOMÁTICA

UM OLHAR SOBRE FREGE E HILBERT

Tese realizada sob a orientação do Professor Eduardo Rêgo
e submetida à Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
para obtenção do grau de Mestre em Ensino da Matemática

Departamento de Matemática Pura
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
2006

Ah, quanta mágoa repetida
Ah, quantos sonos incompletos
Mas oh, quanta palavra tomou vida
Na nascente dos afectos
Desorganizados alfabetos

Não sabe ler neles quem pensa
Nem lhe conhece bem as cores
Quem por secundários os despensa
Aos afectos medidores
Do corpo e da alma e seus sabores

Porque o quadrado da hipotenusa
É igual já não sei quê dos catetos
A traça do passado é tão confusa
Mas tão límpida a lembrança dos afectos
São fartos e temíveis
São as cordas sensíveis
Quietos e irrequietos
P'ra sempre
Politicamente incorrectos
Os afectos, os afectos
[...]

[Sérgio Godinho, "Os afectos" (1997)]

RESUMO

Os desenvolvimentos matemáticos, para além da acumulação de conhecimento, preocupam-se com a sustentação desse conhecimento. Assim, perante uma afirmação, o matemático deve questionar conscientemente o porquê e o porque não da sua validade. Mas, ainda que, de modo geral, esta tarefa não deva ser descurada do dia-a-dia matemático, há questões que, pela sua profundidade, são muitas vezes, consciente ou inconscientemente, ignoradas. Os Fundamentos da Matemática são o local onde se procuram esclarecer todas essas questões, clarificando conceitos base e métodos utilizados. Frege e Hilbert movimentaram-se neste meio, desenvolvendo estruturas axiomáticas que procurassem sustentar de forma inequívoca os conhecimentos matemáticos. O Logicismo de Frege vê na Lógica a explicação última da Aritmética e o Formalismo de Hilbert acentua a importância das inter-relações de conceitos na base de uma estrutura. Ambos defendem o desenvolvimento axiomático, mas diferem em questões de fundo como a significação de conceitos, o papel do símbolo e critérios de verdade. O Paradoxo de Russell e os Teoremas de Incompletude de Gödel inviabilizaram os desenvolvimentos na íntegra dos seus projectos iniciais. No entanto, os seus contributos para a solidificação do rigor matemático, nomeadamente na Aritmética e na Geometria, são inegáveis.

ABSTRACT

Mathematical developments, beyond knowledge accumulation, are concerned with knowledge support. So, in the presence of a sentence, the mathematician must question the why and the why not of its validity, Generally this task can't be forgotten in a mathematician's everyday work, nevertheless there are questions that, due to their deepness, are frequently, consciously or unconsciously, ignored. It is in the Foundations of Mathematics that all these questions should have an answer by clarifying concepts and methods used. Frege and Hilbert explored this area, developing axiomatic structures that seek for unequivocal mathematical knowledge support. Frege's Logicism sees in Logic the ultimate explanation for Arithmetic and Hilbert's Formalism emphasizes the importance of concepts' inter-relations on a structure's ground. They both defend axiomatic development, but they disagree on important questions such as how concepts get their meaning, what role is there to be played by the symbol and what truth criteria must lead our research. Russell's Paradox and Gödel's Incompleteness Theorems made it impossible for the full development of their initial projects to be attained. However, their contribution to the solidification of mathematical accuracy, namely on Arithmetic and on Geometry, is undeniable.

ÍNDICE

1. INTRODUÇÃO

Sempre foi assim
Dizem
Sempre foi assim
Sempre foi assim
Mas está a ser diferente
[Sérgio Godinho, "Sempre foi assim" (1981)]

[Rafal Olbinski, "Star of Bethlehem" in http://www.mupinc.net]

Prova matemática, verdade e axiomática são três conceitos que surgem habitualmente associados. A Matemática preocupa-se com a condução do raciocínio válido, procurando, quando assente em pressupostos verdadeiros, alcançar conclusões verdadeiras. A prova matemática mostra-se, assim, um veículo rumo à verdade ambicionada. Mas há muitos caminhos e atalhos esburacados que são tantas vezes percorridos no dia-a-dia matemático. A axiomática procura revelar-se como que uma estrada desimpedida e iluminada que garante a segurança no percurso. A construção desta estrada é de grande importância, não que a passemos a usar todos os dias, mas pela certeza que temos de que se precisarmos ela está lá. Mas as provas matemáticas são veículos cada vez mais exigentes, e a verdade como destino final parece ter muitas vezes uma localização obscura. Daí, também, a evolução do rigor na construção das axiomáticas que se têm de mostrar mais seguras no seu percurso.

Neste trabalho abordaremos estas questões sob dois pontos de vista diferentes: primeiro como condutores do veículo, depois como construtores da estrada.

Matematicamente falando: Como condutores, preocupamo-nos em chegar ao destino final, tomando apenas as precauções necessárias para não termos acidentes e não nos perdermos pelo caminho. Olharemos de perto duas provas matemáticas de condução simples de forma a podermos analisar as precauções tomadas mas também as opções inconscientes que nos podiam ter provocado acidentes de percurso ou mesmo desvios da rota inicial.

Descendo aos Fundamentos: Como construtores da estrada, interessa-nos garantir a solidez do terreno, a qualidade do piso e a correcta instalação de placas informativas dos destinos finais. Estas construções já vão sendo feitas há muito tempo, mas mesmo aquelas estradas que no seu tempo respeitavam os padrões de rigor vão ao longo dos anos ficando cobertas pela vegetação que vai crescendo, comprometendo a segurança do acesso ao destino final. Já quase nos nossos dias, destacam-se dois grandes construtores: *Gottlob Frege* e *David Hilbert*. Estes dois já se submetem a novos padrões de rigor, que o tempo se encarregou de tornar mais exigentes, tendo em conta as inúmeras viagens nas estradas até então construídas. Veremos, de um modo global, as preocupações e os métodos utilizados por cada um deles, e debruçar-nos-emos sobre algumas diferenças de fundo nos materiais de construção (*Significação de conceitos*), no piso utilizado (*Linguagem e símbolo*) e nas medidas de segurança (*Critérios de verdade*).

De seguida, olharemos mais de perto, mas de forma breve, os dois principais destinos destas estradas...

Começando a contar: A Aritmética é o destino de eleição de Frege, mas também inevitavelmente um ponto importante nos destinos de Hilbert, tendo cada um optado por construções diferentes para lá chegar. Veremos de forma breve as diferenças de material de construção (*Número e conjuntos*), os planos de extensão da estrada (*O infinito*) e algumas referências relativamente aos propósitos da construção e ao objectivo da viagem (*Definição e aplicação*).

Pensando geometricamente: A Geometria é relegada por Frege para segundo plano e é um dos postais de visita mais importantes de Hilbert. Veremos como tem variado a sua popularidade (*O estatuto da Geometria*), os melhoramentos que têm sofrido os seus acessos (*Dos «Elementos» aos «Fundamentos»*) e alguns cuidados a ter nas viagens (*O perigoso poder dos diagramas*).

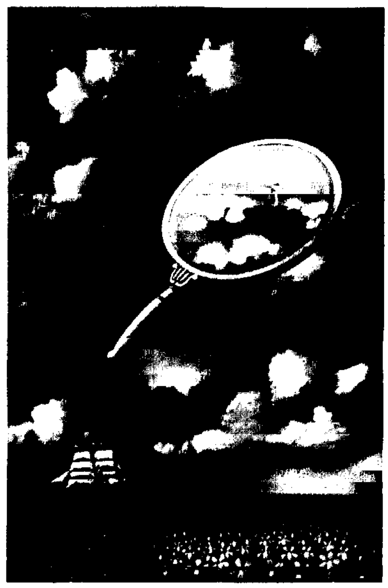
Por fim, espreitaremos um pouco daquilo que nenhuma destas estradas consegue alcançar...

Continuando a questionar: Os sucessivos becos sem saída, tantas vezes encontrados não são motivo suficiente para parar a viagem. Diante de um obstáculo, o matemático aprende contorná-lo, criando novos caminhos. Mas o que fazer quando o obstáculo se prova irremediavelmente incontornável, para determinado tipo de construção?... Que destino dar a todas aquelas estradas que com ele se deparam?... E como construir novas estradas que não estejam, já à partida, condenadas a terminarem nessa barreira?...

Estamos a analisar questões sobre o dia-a-dia do trabalho matemático, mas também, e sobretudo, a reflectir sobre e para além delas. Os pontos de partida de quase todas estas incursões são recomendações vigentes para o Ensino Básico e Secundário, onde já se revelam preocupações importantes, que muitas vezes passam despercebidas. E é a partir do reconhecimento e enquadramento dessas preocupações e do levantamento de questões sobre a sua natureza que abrimos portas para uma análise mais aprofundada. Não é ambição deste trabalho apresentar detalhadamente qualquer sistema axiomático ou teoria fundamental, mas sim alertar para questões tantas vezes ignoradas (nomeadamente no ensino) a respeito dos Fundamentos da Matemática. Os nomes de Frege e Hilbert surgem pela sua importância na revolução do rigor actual, ao mesmo tempo que pelas suas diferenças de abordagem desse rigor. Ambos defensores da axiomatização, mas adeptos de sistemas filosófico-matemáticos diferentes, Frege e Hilbert para além das suas obras deixaram trocas de correspondência interessantes pela argumentação directa de ideias contrárias. Os *Fundamentos da Aritmética* e os *Fundamentos da Geometria* são áreas cruciais para o sustento do edifício matemático, sendo também títulos de obras destes dois matemáticos, que também por aqui mostram a sua importância na construção das bases. Mais uma vez, o propósito deste trabalho não é revelar o conteúdo das obras em causa (nem de outras), mas sim abordar algumas das posições defendidas, em especial, por estes dois matemáticos.

Entremos, então, no mundo onde muitas vezes as perguntas valem por si só, pela capacidade que têm de questionar o que está feito, alertando para o que está por fazer e despertando vontade para o que ainda se fará... Procuremos também algumas respostas, não únicas, não universais, mas possíveis abordagens que nos permitam, quando não mais, apreciar a importância daqueles que sobre elas reflectem...

2. MATEMATICAMENTE FALANDO



[...]
Deste plano geral
Não dava p'ra ver em redor
E assim visto em close-up
Nem é grande quebra-cabeças
[Sérgio Godinho, "A Deusa do Amor" (2006)]

[Rafal Olbinski, "Violet" in http://www.mupinc.net]

A Matemática! Não vamos aqui tentar definir o que é a Matemática, mas sim reflectir um pouco sobre o que faz e como o faz. A Matemática, ultrapassada a fase em que é considerada a arte de fazer contas, é, habitualmente, tida como a ciência do rigor: rigor de escrita e, acima de tudo, rigor de raciocínio. A Matemática não nos diz como pensar, mas ajuda-nos, quando pensamos, a conduzir raciocínios válidos. Estas questões de validade de raciocínio são objecto de estudo da Lógica, sendo ferramenta de trabalho de todas as restantes áreas. Mas se assim é, talvez devêssemos todos começar por aprender toda a Lógica e só de seguida trabalhar a Álgebra, a Aritmética, a Análise e a Geometria... Como é evidente, não é isso que acontece! Há uma série de regras (lógicas e não lógicas) que intuímos e que usamos de forma mais ou menos consciente, estando como que enraizadas na linguagem natural. Isto dispensa, então, aqueles que se debruçam sobre o estudo da Lógica? Certamente que não! À medida que avançamos na idade, na História e na profundidade do estudo, requeremos um maior rigor naquilo que dizemos, de modo a que possa ser aceite por outros. Ora, este rigor, leva-nos a uma mais esmiuçada explicação do que fazemos. Assim, aquelas regras que inicialmente intuímos podem (e devem!), então ser postas em causa, na tentativa de obter para elas uma justificação credível – o trabalho de Hilbert neste campo merece especial destaque, pois, não se limita a rejeitar, procura reabilitar teorias dando-lhes novo sustento. E a linguagem deve sèr alvo de uma análise cuidada, de modo a que se consiga essa consciência do inconscientemente intuído – aqui Frege tem um papel preponderante, sendo um precursor da análise filosófica da linguagem. Rigor, validade, explicação, justificação,... estas parecem ser ideias indissociáveis do raciocínio matemático.

2.1. A Matemática

Há-de ser mais claro
Tudo um dia, vais ver
Tudo nos lugares
Que tu separares
Entre
O tanto que há para viver

[Sérgio Godinho, "É a vida (o que é que se há-de fazer)" (1997)]

Ser matematicamente competente envolve hoje, de forma integrada, um conjunto de atitudes, de capacidades e de conhecimentos relativos à matemática [...]*:*

- A predisposição para ***raciocinar matematicamente****, isto é, para explorar situações problemáticas, procurar regularidades, fazer e testar conjecturas, formular generalizações,* ***pensar de maneira lógica****;*

- [...] *a concepção de que a validade de uma afirmação está* ***relacionada com a consistência da argumentação lógica, e não com alguma autoridade exterior****;*

- A aptidão para discutir com outros e comunicar descobertas e ideias matemáticas através do uso de uma linguagem, escrita e oral, não ambígua e adequada à situação;

- A compreensão das noções de conjectura, teorema e demonstração, assim como das consequências do ***uso de diferentes definições****;*

[...]

[...] *A matemática distingue-se de todas as outras ciências, em especial no* ***modo como encara a generalização e a demonstração*** *e como* ***combina o trabalho experimental com os raciocínios indutivo e dedutivo****, oferecendo um contributo único* *como* ***meio de pensar, de aceder ao conhecimento e de comunicar.***

[in Currículo Nacional do Ensino Básico – Competências Essenciais (2001), pp. 57 e 59 (destaques nossos)]

«Raciocinar matematicamente», «pensar de maneira lógica»... Estas expressões levam-nos, de algum modo, a associar o pensamento matemático a algo de diferente do, digamos, pensamento ordinário. O que se deve entender por «raciocinar matematicamente»?... A Matemática é muitas vezes vista como um conjunto de fórmulas e, ainda que não seja só isso, também o é! Mas de onde vêm essas fórmulas? Como foram instituídas? E para que servem? O aluno deve perceber que as fórmulas não apareceram de um dia para o outro, simplesmente porque alguém o quis! São generalizações baseadas em testes de conjecturas que resultam das regularidades observadas na exploração de situações problemáticas; resultam, então, da combinação do «trabalho experimental com os raciocínios indutivo e dedutivo». As conjecturas são hipóteses, suposições, ideias não testadas; são elas que fazem avançar os projectos, sugerindo novos andares ou novas divisões no edifício matemático. Mas é com os teoremas e respectivas demonstrações que a construção realmente se concretiza da forma sólida que se pretende. Portanto, o aluno deve ver na Matemática mais do que um conjunto de fórmulas, deve encará-la num sentido mais amplo, percebendo a sua particular importância como «meio de pensar, de aceder ao conhecimento e de comunicar».

[...] O essencial da aprendizagem da Matemática [...] deve ser procurado ao ***nível das ideias****. [...]* ***O hábito de pensar correctamente****, que é o que afinal está em causa,* ***deve ser acompanhado do hábito de argumentar oralmente ou por escrito*** *e, sempre que possível, os estudantes devem realizar exercícios metodológicos de descoberta de justificações [...].*

O que é a Matemática? [...] a Matemática é sobre ideias não sobre ***símbolos e contas*** *que são apenas ferramentas do ofício. O objectivo da matemática é* ***perceber como diferentes ideias se relacionam entre si, pondo de lado o acessório*** *e penetrando no âmago do problema. A Matemática não se preocupa apenas com a* ***obtenção da resposta certa****, mas sobretudo com o* ***perceber de como uma resposta é de todo possível e porque tem determinada forma****. [Ian Stewart]*

[in Programa Escolar de Matemática A – 10.º ano (2001), pp. 5, 21 e 36 (destaques nossos)]

O «nível das ideias», o «hábito de pensar correctamente», o «perceber de como uma resposta é de todo possível e porque tem determinada forma»... Este parece ser, então, o verdadeiro lado da Matemática, aquele por detrás dos «símbolos e contas», que são muitas vezes a única face visível, e é importante que os alunos (e, antes deles, os professores!) o percebam. Daí que a par dos conteúdos ao nível dos conhecimentos haja também, na apresentação do programa do secundário, referências a atitudes e capacidades mais gerais que não devem ser esquecidas, com o risco de se perder o verdadeiro espírito da Matemática.

O «nível das ideias» é um patamar bastante amplo, que pode facilmente ficar atulhado, portanto convém que esteja minimamente organizado para que por ele possamos circular, para que nele possamos encontrar o que precisamos. Esta circulação e esta procura são o que determinam o nosso modo de pensar. O «hábito de pensar correctamente» depende, então, da arrumação que damos ao tal amplo patamar e dos caminhos que nele seguimos. Deparamo-nos frequentemente com duas situações distintas: a «obtenção da resposta certa» e o «perceber de como uma resposta é de todo possível e porque tem determinada forma». No primeiro caso é essencial a circulação enquanto que no segundo a organização é primordial. Ou seja, quando procuramos algo específico que responda às necessidades, convém que tenhamos o caminho desimpedido para que possamos prosseguir. As regras e as fórmulas são atalhos úteis que poupam caminho de busca permitindo obter a tal resposta certa mais rapidamente. Mas a abertura do atalho exige um trabalho extra que garanta a segurança do caminho dissipando possíveis acidentes. Este trabalho não tem de ser integralmente compreendido pelo utilizador do atalho, contudo, a sua necessidade não deve ser ignorada. Estamos agora no «perceber de como uma resposta é de todo possível e porque tem determinada forma», e aqui a organização assume um papel de destaque: mais do que arrumada, é importante ter a casa organizada, isto é, definir e ter consciência dos critérios de arrumação. É do «perceber como diferentes ideias se relacionam entre si, pondo de lado o acessório» que se conseguem estes critérios, que se separam e agrupam as ideias e se estabelecem ligações seguras entre diferentes locais do tal amplo patamar. Portanto, há que captar a essência das coisas, ter consciência daquilo que realmente é intrínseco aos objectos e aquilo que resulta de relações entre as suas propriedades e o contexto da sua utilização. Essas relações também têm de ser clarificadas de modo a que se garanta a segurança das tais ligações.

Todo este trabalho «deve ser acompanhado do hábito de argumentar oralmente ou por escrito», o que pressupõe, para além do trabalho justificativo – da arrumação e organização da casa –, uma necessidade de comunicação – de colocação de placas informativas, de elaboração de mapas e avisos à navegação inteligíveis. Queremos que as nossas ideias sejam entendidas pelos outros e queremos poder entender outras ideias.

Olhemos agora, nas próximas secções deste capítulo, duas provas matemáticas, que nos abrirão algumas portas para o resto do trabalho. São dois teoremas simples e que nos são familiares, pois a ideia não é admirar a riqueza do resultado obtido, mas sim analisar o seu encadeamento e as justificações apresentadas, procurando estar alerta para argumentos intuídos e expressões de linguagem que usamos tantas vezes sem reflectir.

2.2. Teorema de Pitágoras

Porque o quadrado da hipotenusa
É igual a já não sei quê dos catetos
[Sérgio Godinho, "Os afectos" (1997)]

<u>Teorema de Pitágoras</u>: *Num triângulo rectângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.*

Este é, talvez, o primeiro teorema com que tomamos contacto sustentando explicitamente o título de "teorema", mesmo antes de sabermos o que isso é. Um teorema é uma «proposição enunciando uma verdade que, por não ser evidente, precisa de ser demonstrada» [Durão et al. (2000), vol.1, p. 25] diz num livro escolar na margem a acompanhar a apresentação do Teorema de Pitágoras. Uma verdade que não é evidente... Isto deixa antever, sem contudo explicitar, que há verdades evidentes, e que, dada a sua evidência, não precisam de ser demonstradas. Que evidências serão essas?... Como e porquê adquirem esse estatuto?... Porque é que não é tudo demonstrável, ou porque é que não é tudo evidente?... Na Matemática há uma clara preferência pelo demonstrável em detrimento do evidente – daí resulta o rigor por que é conhecida. É da procura de relações para além do evidente que se vai construindo conhecimento. Mas a Matemática quer-se universal e, portanto, não pode ser apenas a acumulação de *insights* de alguns "iluminados". As afirmações têm, então, de ser justificadas, de modo a serem compreendidas e aceites por outros. A demonstração é o que sustenta a afirmação para além do seu "criador". Dever-se-iam, assim, demonstrar todas as afirmações! Cada demonstração vai-se baseando em afirmações já justificadas, criando-se uma estrutura de dependência e de sustento – daí a habitual expressão do "edifício matemático": é algo que se vai construindo assente em construções já feitas e que se querem sólidas. Mas este recuar na procura do sustento de uma demonstração tem de terminar em algum lado! O que está na base do edifício?... A base das demonstrações são os axiomas, as tais proposições que não são demonstradas. Surge, então, a pergunta: o que é que sustenta os axiomas?... Veremos no próximo capítulo, quando nos debruçarmos especificamente sobre conceitos de verdade, as diferenças apresentadas neste campo por Frege e Hilbert, mas deitemos, para já, um breve olhar às posições dos dois matemáticos. Frege responderia que o sustento dos axiomas é a evidência. E, por oposição à definição de teorema dada acima, um axioma pode aqui ser visto como um enunciado de uma verdade, que por ser evidente, não precisa de ser demonstrada. Ou seja, as afirmações mais complexas vão sendo demonstradas à custa de afirmações progressivamente mais simples, até se chegar a umas quantas (poucas!) afirmações que, de tão simples e evidentes, são aceites sem demonstração. Hilbert considera também o axioma como ponto de partida, como base de toda a estrutura demonstrativa, mas, numa posição mais formalista, vê-o, não como uma evidência, mas sim, como uma imposição resultante de uma escolha. Ou seja, aqui o matemático tem a possibilidade de se libertar do real, de ir mesmo contra as evidências, se nisso tiver alguma vantagem. Esta liberdade obriga-o, por outro lado, a uma verificação extra relativamente às escolhas que faz: os axiomas têm de poder co-existir, não se podem contradizer entre si e deles não podem resultar contradições. No caso de Frege, em que os axiomas são uma descrição da realidade, esta verificação não é necessária, pois a co-existência está garantida pela real existência daquilo que traduzem. Ainda olhando para a definição de teorema apresentada acima, e para que seja coerente com a visão de Hilbert, não podemos apelar à noção de evidência, e, portanto, quedamo-nos agora por dizer que um teorema é uma "proposição enunciando uma verdade [...] que precisa de ser demonstrada". Os motivos que exigem ou ilibam as afirmações de demonstração são mais complexos que a mera evidência.

O Teorema de Pitágoras tem, então, de ser demonstrado! E logo no momento da sua apresentação no 8.º ano são feitas com os alunos algumas "demonstrações" envolvendo, essencialmente, decomposição de figuras. A partir de um triângulo rectângulo e dos quadrados construídos sobre os seus lados, pede-se ao aluno que, depois de cortar convenientemente os quadrados sobre os catetos, ajuste os pedaços em novas posições de modo a cobrir o quadrado sobre a hipotenusa. Após a tarefa concluída, o aluno deverá ser levado a concluir que "num triângulo rectângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos". Mas, na realidade, o que o aluno mostrou foi que naquele triângulo rectângulo, ou, quanto muito, nos triângulos rectângulos experimentados na aula, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos. Como pode a propriedade ser extrapolada para o caso geral?... O aluno pode ficar convencido que, após experimentar para vários casos, todos os outros se comportarão da mesma forma, mas demonstrar não é verificar para muitos casos, é garantir para todos os casos! O que nos garante, aqui, essa generalidade?... O que é preciso compreender é que as propriedades utilizadas nada têm que ver com as medidas do triângulo, mas apenas com o facto de ele ser rectângulo. O modo de decomposição e composição dos quadrados é feito recorrendo a noções de paralelismo, perpendicularidade e congruência e não a noções métricas. Numa prova mais formal, não requerida ao nível do 8.º ano, há que provar de forma independente a possibilidade dessa decomposição identificando as propriedades necessárias a tais construções. Ou seja, há que fazer o tal recuo no sustento da demonstração. Os «Elementos»[1] de Euclides são uma das obras de referência neste campo da estruturação de proposições devidamente sustentadas. Euclides reuniu e organizou conhecimentos de forma sintética, e, partindo de um conjunto bem definido de propriedades não demonstradas, foi provando proposições assente apenas nesse tal conjunto de propriedades iniciais e em proposições anteriores (já previamente demonstradas). A obra está dividida em treze livros e o Teorema de Pitágoras é a penúltima proposição do primeiro livro. A demonstração aí apresentada por Euclides não é a primeira historicamente, nem a mais simples a nível de compreensão, mas está construída de forma a recorrer apenas às proposições anteriores do livro I (e às propriedades iniciais). Ou seja, Euclides poderia,

---

[1] Para uma análise comentada da obra, ver Heath, Sir Thomas (1956), *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, Dover Publications, Inc.
Para uma consulta da obra na internet, ver http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html

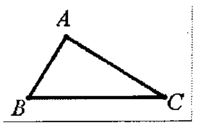
talvez, ter apresentado uma prova mais simples, mas isso implicaria o recurso a propriedades ainda não mostradas, o que levaria a que o teorema só pudesse aparecer mais à frente na obra.

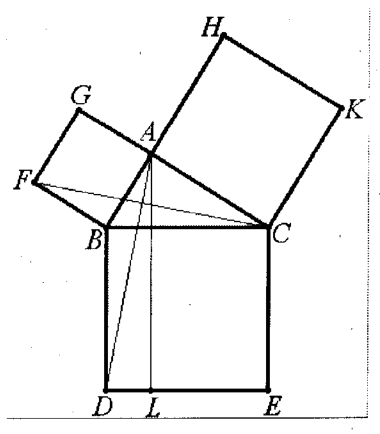
O Teorema de Pitágoras teve já muitas demonstrações[2], o que não quer dizer que cada demonstração que apareça invalide as anteriores... São argumentos diferentes, conjugados de modos diferentes para o mesmo fim; ou seja, não podemos falar n'A prova dum teorema, pois não há uma prova única!

Vejamos, então, o raciocínio apresentado[3] por Euclides:

Elementos I, 47: Em triângulos rectângulos o quadrado sobre o lado oposto ao ângulo recto é igual à soma dos quadrados sobre os lados contendo o ângulo recto.

Seja *ABC* um triângulo rectângulo em *A*. Quer-se mostrar que o quadrado sobre *BC* é igual à soma dos quadrados sobre *BA* e *AC*.





a) Construam-se o quadrado *BDEC* sobre *BC* e os quadrados *GFBA* e *HACK* sobre *BA* e *AC*. Desenhe-se *AL* por *A* paralela a *BD* ou *CE*, e trace-se *AD* e *FC*.

b) Uma vez que cada um dos ângulos *BAC* e *BAG* é rectângulo, segue que, relativamente à recta *BA*, no ponto *A* dessa recta, as duas rectas *AC* e *AG*, que não estão no mesmo lado, formam ângulos adjacentes que somam dois ângulos rectos,

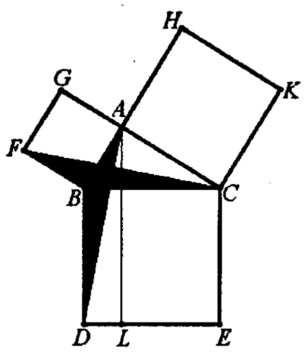
---

[2] Loomis, Elisha Scott, *The Pythagorean Proposition: Its Demonstrations Analyzed and Classified and Bibliography of Sources for Data of the Four Kinds of 'Proofs'*, National Council of Teachers of Mathematics, Washington, DC, 1968

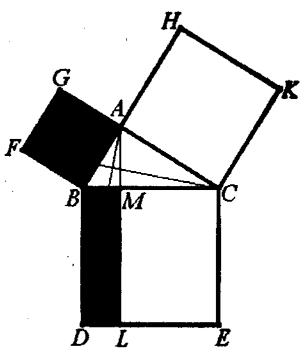
[3] Adaptado de http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html

portanto *CA* está na mesma recta que *AG*. Pela mesma razão *BA* também está na mesma recta que *AH*.

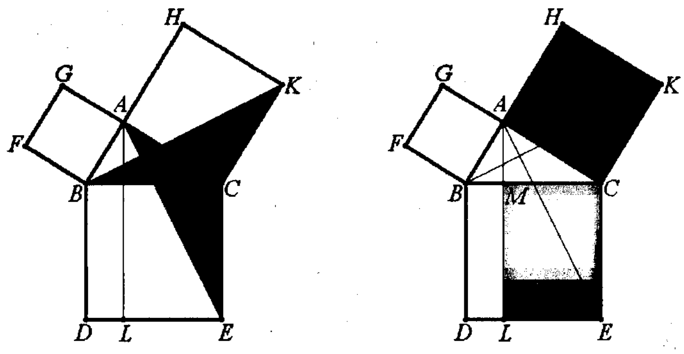
c) Como o ângulo *DBC* é igual ao ângulo *FBA*, pois são ambos rectos, somando o ângulo *ABC* a cada um deles, vem que o ângulo total *DBA* é igual ao ângulo total *FBC*.



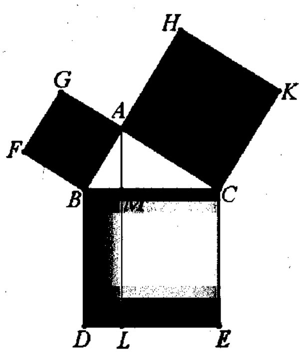
d) Uma vez que *DB* é igual a *BC* e *FB* é igual a *BA*, os dois lados *AB* e *BD* são iguais aos dois lados *FB* e *BC*, respectivamente, e o ângulo *ABD* é igual ao ângulo *FBC*, então, a base *AD* é igual à base *FC*, e o triângulo *ABD* é igual ao triângulo *FBC*.



e) Agora o paralelogramo *BDLM* [onde *M* é a intersecção de *AL* com *BC*] é o dobro do triângulo *ABD*, pois têm a mesma base *BD* e estão sob as mesmas paralelas *BD* e *AL*. E o quadrado *GFBA* é o dobro do triângulo *FBC*, pois têm novamente a mesma base *FB* e estão sob as mesmas paralelas *FB* e *GC*. Portanto, o paralelogramo *BDLM* também é igual ao quadrado *GFBA*.



f) Analogamente, se considerarmos *AE* e *BK*, também podemos provar que o paralelogramo *CMLE* é igual ao quadrado *HACK*.



g) Portanto, o quadrado total *BDEC* é igual à soma dos dois quadrados *GFBA* e *HACK*. E o quadrado *BDEC* está construído sobre *BC*, e os quadrados *GFBA* e *HACK* sobre *BA* e *AC*. Portanto, em triângulos rectângulos o quadrado sobre o lado oposto ao ângulo recto é igual à soma dos quadrados sobre os lados contendo o ângulo recto.

QED

Em termos gerais, o que Euclides faz é relacionar as áreas dos quadrados sobre os catetos com as áreas de determinados triângulos, mostrar que estes são congruentes com uns outros e relacionar a área dessoutros com a área de certos rectângulos, que somados igualam o quadrado sobre a hipotenusa. Mas, para além das justificações prévias relativamente às relações entre as áreas das figuras – Elementos I, 41 – e a critérios de congruência de triângulos – Elementos I, 4 –, o sustento da sua prova invoca mais justificações, por ventura de necessidade menos óbvia, de tão evidentes que parecem ser as afirmações. Desde logo a construção dos quadrados sobre os lados do triângulo... Pois é!... O que nos garante que podemos construir um quadrado sobre um dado segmento?... Euclides garante precisamente isso na proposição anterior – Elementos I, 46.

Vejamos, então, mais de perto algumas justificações dos passos desta demonstração. Ainda relativamente a a), Euclides assegura previamente a possibilidade de desenhar *AL* e de traçar *AD* e *FC*. Mas as justificações destes processos de construção revestem-se de uma natureza diferente. No primeiro caso, *AL* é construída como sendo a recta paralela a uma dada recta por um ponto exterior – Elementos I, 31. *AD* (e *FC*) é a recta por dois pontos distintos – postulado 1. A primeira justificação é uma proposição e a segunda é um postulado, ou seja, a construção de *AL* é demonstrada enquanto que a de *AD* é assumida. Mas este assumir não é deixado ao cuidado do leitor, é algo explicitamente declarado desde o início. A possibilidade de traçar uma (a única!) recta por dois pontos distintos é algo mais básico (mais evidente ou mais simples) do que traçar uma (a única!) paralela por um ponto exterior a uma dada recta. Assim, Euclides coloca-as em patamares diferentes, dissecando a construção da paralela noutras propriedades mais "pequenas" a par do postulado já referido. Mas a diferença entre estas duas construções vai mais além do que se pode inicialmente pensar...

A existência e unicidade de uma recta por quaisquer dois pontos distintos é, assim, o primeiro dos cinco postulados de Euclides. Outro postulado invocado directamente nesta demonstração é o quarto, que nos garante em c) que os ângulos *DBC* e *FBA* são iguais por serem ambos rectos. Mas, além dos cinco postulados, Euclides considera ainda inicialmente cinco noções comuns, que são também assumidas sem justificação. Estas, nos Elementos, distinguem-se dos postulados por terem um carácter mais geral, não associado directa nem exclusivamente à Geometria. Aqui é necessária a utilização directa da segunda noção comum que, em dois pontos da demonstração – em c) e em g) –, nos garante a igualdade das somas de iguais.

Um outro tipo de justificação a referir é o recurso directo às definições, isto é, a utilização de propriedades intrínsecas dos objectos, descritas (ou decretadas) à partida. Neste caso, é a definição de quadrado – definição 22 – como quadrilátero equilátero rectângulo que garante em d) que os lados são iguais e em b) e em c) que os ângulos são rectos.

Estamos perante diferentes níveis de argumentação – proposições já provadas, postulados, noções comuns e definições – que concorrem conjuntamente para fundamentar afirmações tantas vezes tidas por nós como certas por nos parecerem óbvias. Euclides promoveu um novo conceito de rigor, demonstrando propriedades com base em outras já provadas, procurando reduzir o número de afirmações sem prova. Seguindo uma tendência aristotélica, Euclides apresenta os seus «Elementos» de forma sintética, fixando à partida as definições de alguns objectos e umas quantas (poucas!) propriedades básicas a partir das quais deduz logicamente a existência de outros objectos e de outras propriedades mais elaboradas. Muitas das propriedades mostradas por Euclides não eram novidade (nomeadamente o Teorema de Pitágoras aqui apresentado), sendo já utilizadas antes dos seus Elementos, mas o grande valor da obra está, acima de tudo, na sua estruturação, na forma como são apresentados / justificados os conteúdos e não tanto nos conteúdos em si mesmos. Os «Elementos» fornecem-nos um sistema dedutivo desenvolvido de forma rigorosa e lógica, sendo, indiscutivelmente, uma obra de referência.

Como veremos mais à frente, no capítulo 5, hoje reconhecem-se as falhas dos «Elementos» de Euclides. Há, afinal, argumentos intuídos que não são justificados previamente nem constam das assunções iniciais, há definições que se pretendem rigorosas e que são demasiado vagas e há, também, o polémico enunciado do quinto postulado que hoje tem um "estatuto" diferente dos restantes. Os «Fundamentos da Geometria»[4] de Hilbert (muito mais recentes) procuram colmatar essas falhas (ao nível da Geometria) e adaptar-se a novos resultados entretanto provados, explicitando novos axiomas admitidos de forma inconsciente nos «Elementos», introduzindo o conceito de termo não definido a um nível, de certo modo, anterior ao da definição, e refinando as hipóteses do polémico V postulado dos Elementos, abarcando também outras Geometrias. Isto não quer, contudo, dizer que devemos esquecer Euclides e começar a abordagem axiomática da Geometria com os «Fundamentos»! À luz do rigor actual, os «Elementos» têm falhas, mas continuam, sem dúvida a ser uma referência na Geometria axiomatizada. Na secção 5.2 veremos mais de perto algumas destas questões.

[4] *Grundlagen der Geometrie* – A obra está disponível com tradução portuguesa, incluindo apêndices do autor e suplementos de P. Bernays, F. Enriques e H. Poincaré: Hilbert, David (1930), revisão e coordenação de A. J. Franco de Oliveira (2003), *Fundamentos da Geometria*, Gradiva

Vejamos, agora, uma outra prova, de um outro teorema, desta vez mais longe do contexto geométrico...

2.3. Raiz de 2 não é racional

Diz-me que o lugar mais escuro
É sempre debaixo da luz
Longe e mais longe
O que fiz
Nem supus
[Sérgio Godinho, "Balada das descobertas" (1984)]

Teorema: *$\sqrt{2}$ não é racional.*

Demonstração: Suponhamos, por redução ao absurdo, que $\sqrt{2}$ é racional, isto é, que $\sqrt{2}=\frac{m}{n}$ para alguns $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$. Fixemos m e n nestas condições primos entre si (considerando, assim, $\sqrt{2}$ representado por uma fracção irredutível).

Ora, $\sqrt{2}=\frac{m}{n} \Rightarrow 2=\frac{m^2}{n^2} \Leftrightarrow m^2=2n^2$ e, portanto, m^2 é par. Donde podemos concluir que m é par. Isto porque, se assim não fosse, teríamos $m=2k-1$, para algum k inteiro, e, portanto, tendo em conta que $m^2=(2k-1)^2=4k^2-4k+1=2(2k^2-2k)+1$, m^2 seria ímpar.

Temos, então, $m=2k$, para algum k inteiro, logo $m^2=2n^2 \Leftrightarrow (2k)^2=2n^2$ e, portanto $4k^2=2n^2$, isto é, $n^2=2k^2$. Ou seja, n^2 e, consequentemente, n são pares.

Mas m e n não podem ser ambos pares pois foram escolhidos de forma a serem primos entre si. Chegámos, assim, a uma contradição. E a contradição resultou de termos suposto que $\sqrt{2}$ é racional. Logo, $\sqrt{2}$ não é racional.

QED

«$\sqrt{2}$ não é racional» é um enunciado bastante curto e totalmente compreensível a partir do 9.º ano, altura em que os alunos tomam contacto com o conjunto dos números reais. Em rigor, o enunciado pode já ser entendido no 7.º ano, pois aí os alunos já sabem o que são raízes quadradas e já conhecem o conjunto dos racionais. No entanto, nessa altura é uma questão que não se pode pôr desta forma, pois os alunos não têm referências para além dos racionais. Ainda que admitíssemos que a demonstração pudesse ser entendida, o que poderiam os alunos, então, concluir?... Que $\sqrt{2}$ não é um número?... Historicamente, esta não seria uma conclusão completamente descabida. É claro que o nosso universo numérico de hoje está mais alargado, permitindo-nos ver a questão com outros olhos, sendo até difícil de imaginar como se poderia pensar tal coisa. Para que o aluno aceite novas entidades como sendo números, ainda que fora do seu universo numérico, ele tem primeiro de se familiarizar com elas, de perceber a sua utilidade de forma muito natural. É esta naturalidade que faz com que, ainda que consciente de um universo numérico, o aluno não se questione quanto à pertença ou não destas novas entidades, sendo relegada para mais tarde a sua catalogação. Nessa altura, dotados da tal familiaridade, faz-se notar ao aluno que estes números são diferentes daqueles que já tinham sido catalogados. Surge, então, a necessidade natural de alargar o universo numérico, de modo a incluir estes novos entes irracionais. Aqui, e na presença de uma afirmação como a do enunciado, o aluno concluirá que $\sqrt{2}$ é irracional, que é o que se pretende mostrar habitualmente. No entanto, esta conclusão só faz sentido no contexto dos números reais – algo para o qual os alunos não estão alertados (nem têm de estar!) pois desconhecem a existência de números para além deste seu novo universo. Não obstante esta questão de leitura das ilações, a compreensão do enunciado e do seu resultado em concreto está, então, ao alcance do aluno do 9.º ano. Apesar disso, não lhe é exigida a demonstração, pede-se apenas que "verifique" experimentalmente com a ajuda da calculadora que a dízima em questão é infinita não periódica, não correspondendo, portanto, a um número racional. A necessidade de demonstração do resultado surge (quando surge!) apenas no Ensino Superior, onde, pela simplicidade do enunciado e dos conteúdos envolvidos, pode ser dos primeiros contactos com a noção de demonstração a nível sistemático

Olhemos, agora, para a demonstração. «Suponhamos, por redução ao absurdo, que $\sqrt{2}$ é racional, isto é, que $\sqrt{2}=\dfrac{m}{n}$ para alguns $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$.» – esta frase tem demasiada informação oculta. Desde logo «suponhamos»... ora supor quer dizer presumir, imaginar, estabelecer por hipótese. A suposição é o início de muitas demonstrações e indica ao leitor o meio em que se vai movimentar. "Supomos" ao invés de "mostramos" ou "sabemos" exige do leitor uma aceitação passiva, é um pedido não é um argumento. Mas, será que isso nos dá autoridade de supor aquilo que quisermos?... De um modo geral, as suposições são as hipóteses do teorema, aquilo a partir do qual dizemos que acontece alguma coisa. É natural que aí, na prova do teorema, tomemos essas condições como hipóteses sem as questionarmos, pois o que queremos mostrar é o que delas se pode deduzir e não a sua veracidade. Concluída uma prova desse género, inferimos que, na presença de tais condições, obtemos determinado resultado. Sobre o que se passa na ausência dessas condições nada sabemos, mas também nada alegámos saber, daí que se peça inicialmente ao leitor que aceite essas hipóteses. Caso não sejam aceites, e daí resultem outras conclusões em nada isso invalida a nossa demonstração. Pode, quanto muito, questionar a força do nosso teorema, a sua aplicação e aplicabilidade. Questões importantes, sem dúvida, que vão filtrando e organizando o conhecimento acumulado, mas de menor importância quando restringimos a nossa análise ao conteúdo da prova.

Mas aqui o caso é diferente: não estamos a pedir ao leitor que aceite as hipóteses do teorema. Neste caso, pedimos que, por momentos, imagine que aquilo que dizemos (e queremos provar!) é falso. Isto, à partida, não é muito natural e é certamente menos intuitivo que no caso acima. Acima estaríamos a fazer uma prova directa, conduzida de forma mais ou menos linear desde as hipóteses até à tese. Aqui, o método é outro: fazemos uma prova por redução ao absurdo, mostrando, não que temos aquilo que queremos, mas que não podemos ter o contrário daquilo que queremos. Assim, mostrámos que a suposta existência de um tal racional nos leva a uma contradição. Mas entramos em contradição com o quê?... Entramos em contradição com o "meio" em que desenvolvemos o nosso trabalho. Em rigor, entramos em contradição com as hipóteses do nosso teorema. Mas quais hipóteses?... O enunciado do teorema diz apenas que «$\sqrt{2}$ não é racional»!... Pois bem, mas isto pressupõe uma contextualização prévia, explícita em resultados anteriores ou assumida de forma mais implícita. Quando supomos que $\sqrt{2}$ é racional admitimos, desde logo, a existência de $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$ tais que $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$. O que é que nos dá o direito de o fazer?... A definição que temos de número racional como sendo um quociente de inteiros de denominador não nulo (e algumas relações operativas entre inteiros e naturais, que nos permitem reduzir n ao domínio natural). E, por trás disto, estão também as noções de quociente, de inteiro e de natural.

"A definição que temos"... Mas "temos", quem?... E "temos", como?... Afinal, o que é uma definição?... Uma definição pode ser vista como uma descrição de um conceito: há uma noção trabalhada intuitivamente que quando chega o momento do rigor tem de ser explicitada, garantindo convergência e uniformização na base de trabalho. Pode pôr-se, então, a questão de saber se essa descrição é contemplativa ou impositiva, isto é, se estamos a tentar captar a essência de algo que existe autonomamente ou se estamos apenas a decretar como propriedades aquilo que, por força do hábito e da técnica, queremos que se verifique. Posições como estas são defendidas por diferentes matemáticos quando se debruçam sobre os Fundamentos, como veremos no próximo capítulo ao analisarmos a significação de conceitos. E até o conceito de número, que há-de ser um dos mais básicos em todo o edifício matemático, não tem definição consensual...

Relativamente à falta de consenso nas bases matemáticas, e ainda a propósito da prova por redução ao absurdo, é importante referir que ela assenta num princípio lógico, habitualmente tido como unânime, mas que é posto em causa por matemáticos adeptos do Intuicionismo. Estamos a falar do Princípio do Terceiro Excluído que nos diz que dada uma sentença ou ela é verdadeira ou a sua negação é verdadeira. Associado a este princípio está o princípio da dupla negação, que nos permite deduzir uma afirmação a partir da negação da sua negação – daqui resulta o mecanismo das provas por redução ao absurdo. Ora uma das ideias chave do Intuicionismo passa pela prova construtiva, nomeadamente pela importância da exibição em provas existenciais. Deste modo, as provas por redução ao absurdo não são, em geral, aceites, pois o facto de termos construído uma prova da falsidade da negação, não nos garante que possamos construir uma prova da afirmação... Note-se, no entanto, que nem todas as demonstrações se tornam problemáticas, os intuicionistas não rejeitam todas as inferências feitas por redução ao absurdo, porém não consideram que a dupla negação seja um princípio geral. A fechar estas curtas considerações sobre os intuicionistas [para mais desenvolvimento, ver George (2002), pp. 89 a 120], é interessante olharmos a posição de Hilbert, que, como a grande parte dos matemáticos, aceita sem problemas o Princípio do Terceiro Excluído:

> *O desafio mais agudo e apaixonado lançado pelo intuicionismo é aquele que contesta a validade do* «tertium non datur», *por exemplo, no caso mais simples, a validade do raciocínio segundo o qual toda a asserção contendo uma variável numérica ou é válida para todos os valores numéricos da variável ou existe um número para o qual é falsa. O* «tertium non datur» *é uma consequência do axioma lógico ε [que garante a existência de um objecto para o qual um enunciado é verdadeiro se for verdadeiro para algum objecto] e jamais originou o mais pequeno erro. Além disso, é tão claro e compreensível que exclui aplicações abusivas. [...] As demonstrações de existência com auxílio do* «tertium non datur» *são em geral especialmente atractivos pela sua brevidade e elegância surpreendentes. Tirar ao matemático o* «tertium non datur» *seria o mesmo que querer proibir ao astrónomo o uso do telescópio, ou ao boxeur o emprego dos punhos. A não aceitação do uso do* «tertium non datur» *nos teoremas de existência é, em síntese, quase que uma renúncia da ciência matemática.*
>
> [Hilbert (1928a), p. 270]

Voltando, agora, à demonstração, tínhamos admitido que $\sqrt{2}$ é racional, deduzindo, daí, por definição de racional, a existência de $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$ tais que $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$. Prosseguindo na prova... «Fixemos m e n nestas condições primos entre si (considerando, assim, $\sqrt{2}$ representado por uma fracção irredutível).» Ora, aqui estamos a ir além da mera aplicação da definição de racional. À partida, nada nos garante que existam números nessas condições – está, então, implícito outro resultado: que todo racional pode ser representado por uma fracção irredutível. Este resultado é facilmente aceite, a partir do momento em que se percebe como reduzir uma fracção por divisões sucessivas ou directamente pelo máximo divisor comum. No entanto, e para que possa ser aceite como argumento, a afirmação carece de prova. Esta é uma prova de existência que pode ser construtiva, indicando directamente, a partir dos números em causa (convenientemente decompostos em factores primos, a menos do sinal), como obter a tal fracção irredutível. Mas isto coloca também a questão de como garantir que um número natural pode ser decomposto em factores primos, para além, obviamente, de sabermos a definição de número primo. Ou seja, esta simples escolha de m e n, tem por trás outros resultados já provados ou assumidos, dependendo do nível de profundidade do contexto em causa. No entanto, para garantir a solidez do edifício matemático essas provas, ainda que pareçam evidentes, têm de ser feitas; só assim nos podemos defender de possíveis "ataques" à nossa demonstração. Não quero dizer que tenhamos de esmiuçar toda a prova de cada vez que recorramos à representação de um racional sob a forma de fracção irredutível... mas que tenhamos consciência que, quando não o fazemos, estamos a assumir outros resultados que podem ser provados. Tendo em conta a profundidade e especialização do trabalho de cada um, há argumentos que vão sendo assumidos de forma mais ou menos consciente e há termos que vão sendo trabalhados sem definições completamente rigorosas. É onde essas assunções descem às bases que o estudo dos Fundamentos começa a ganhar lugar, procurando realmente esmiuçar os argumentos assumidos e explicar os termos não definidos.

«Fixemos *m* e *n*»... Este "fixar" representa uma escolha: de todos os pares de números nas condições definidas, escolhamos um! Será que nos ocorre a hipótese de eventualmente não ser possível fazer tal escolha?... Será também preciso garantir a possibilidade deste passo?... Neste caso, a escolha pode ser bem determinada (se atentarmos, no processo de construção da fracção irredutível), no entanto, há casos em que as escolhas não são especificadas, podendo levar à construção de conjuntos de elementos arbitrários. Quando saímos do campo das escolhas finitas, associado a este argumento surge, habitualmente, já na área da Lógica (mais concretamente, na Teoria de Conjuntos), o (controverso) Axioma da Escolha, que postula, exactamente a possibilidade de fazermos escolhas desse tipo não apenas em casos finitos ou infinitos numeráveis, mas estendendo a infinitos arbitrários. Um axioma é um argumento que não precisa de prova, ou seja, desta vez descemos de imediato aos Fundamentos. Mas, então, podemos simplesmente postular propriedades sem qualquer prova, só por nos estarmos a movimentar na área dos Fundamentos?!... Não era suposto ser ao contrário: vermos aqui as justificações mais rigorosas e esmiuçadas?!... Os axiomas são, de facto, afirmações não justificadas a partir das quais se provam as outras; no entanto, isto não quer dizer que possamos catalogar de axioma tudo aquilo que nos apeteça! No sentido de atingirmos o tal rigor matemático, procuramos que o conjunto de afirmações não provadas seja (entre outras coisas) o "menor possível", no sentido de não ter proposições desnecessárias (que se provam à custa das restantes). Caso contrário, bastaria mudar o rótulo, passando todos os teoremas a axiomas e estaríamos assim libertos de qualquer demonstração... A escolha de axiomas, aquilo que é suposto, ou não, eles representarem, a possibilidade de, de facto, se acrescentar axiomas só porque "dá jeito",... – estas questões não têm análise consensual, como veremos no próximo capítulo quando abordarmos critérios de verdade.

De volta à demonstração, temos, então, fixados $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$, primos entre si, tais que $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$. Segue-se uma sequência de implicações a partir desta igualdade, que nos vai permitir obter mais informação sobre m e n. Entrámos no campo da manipulação algébrica, ou seja, operamos com m e n como se de números se tratassem. Há aqui um processo de abstracção quase automático para nós mas nem sempre sequer possível historicamente: a utilização de letras para designar entidades desconhecidas. O elemento simbólico constitui um dos pontos-chave do Formalismo e da instrumentalização da linguagem defendida por Hilbert, como veremos no próximo capítulo. A utilização das letras resulta de um processo de abstracção que retém apenas algumas propriedades de determinadas entidades. A partir dessa selecção das propriedades significativas para a questão em causa, a letra passa a representar qualquer objecto que verifique essas propriedades pré-seleccionadas. Neste caso, temos um par de números (um inteiro e um natural) que são primos entre si e cujo quociente é $\sqrt{2}$. Os números em causa têm, obviamente, mais propriedades: podem ser maiores que 10, divisores de 30, somarem mais que 20,... Mas para a abordagem que estamos a fazer da questão, essas propriedades não são essenciais. Assim, à partida, nada sabemos a respeito dessas propriedades, podendo m e n abranger números que as verificam, bem como números que não as verificam. A tal manipulação algébrica vai dar-nos mais informação sobre os números, permitindo-nos ver propriedades que decorrem directamente de outras. Por exemplo, se soubéssemos que ambos os números eram maiores que 10, então "somarem mais que 20" seria algo que poderíamos concluir directamente dessa informação.

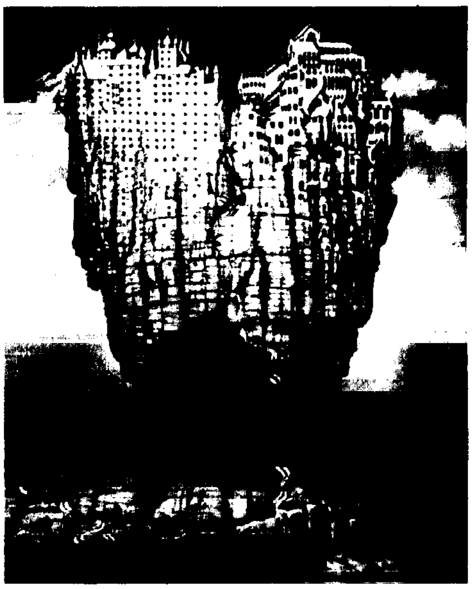
Obtivemos $m^2=2n^2$ e concluímos, primeiro, que m^2 é par e, depois, que m é par. Estas duas conclusões têm argumentos justificativos a níveis diferentes. O primeiro caso decorre directamente da definição de número par enquanto que o segundo exige algo mais. Assim, segue-se uma justificação desta segunda conclusão: «Isto porque, se assim não fosse [...]». Apesar de não ser apresentado do mesmo modo que o início da demonstração do teorema, este início indica também que se segue uma prova por redução ao absurdo, neste caso assente na dicotomia par-ímpar. Supondo que m é ímpar, após algumas considerações, induzimos que m^2 é ímpar, entrando em contradição com o facto de m^2 ser par. Portanto, nestas condições, m não pode ser ímpar, logo, tem de ser par. Neste ponto, a bivalência é importante, pois garante-nos que, aqui, a negação de "ser par" é "ser ímpar" e a negação de "ser ímpar" é "ser par". Só assim podemos concluir que m é par, pelo facto de não poder ser ímpar.

A prova prossegue, então, a partir da informação de que m é par, e depois de uma nova sequência de implicações concluímos que n^2 é par (por definição de número par). A consequência que se segue, analogamente ao caso acima, é que n também é par. Mas, desta vez, não é feita a prova. Isto porque a prova acima apenas exige de m que seja inteiro. Ora, n, sendo natural, também é inteiro e, portanto, o argumento também é válido para n. Esta é uma das vantagens da manipulação simbólica: a abstracção permite que as provas sejam válidas para todos os objectos passíveis de ocuparem os lugares das variáveis, independentemente do seu contexto de criação.

«Mas m e n não podem ser ambos pares pois foram escolhidos de forma a serem primos entre si. Chegámos, assim, a uma contradição.» Esta contradição é uma incompatibilidade de propriedades, é a obtenção, de alguma forma, de resultados que não podem co-existir. Neste caso, dois números que sejam primos entre si não podem ser ambos pares. Se não podemos obter este resultado então há algo a montante que está a causar problemas... «E a contradição resultou de termos suposto que $\sqrt{2}$ é racional. Logo, $\sqrt{2}$ não é racional» Como podemos afirmar tão certamente que o que levou à contradição foi essa suposição inicial?... Porque não pode ter sido algum passo intermédio?... Os passos intermédios foram (ou procuraram ser) todos justificados – vamos admitir que sim! Mas justificados com base em quê?... Os argumentos apresentados têm por base propriedades que, de alguma forma, já se têm por verdadeiras. Propriedades previamente provadas ou, em último caso, axiomas aceites como válidos. Então, admitindo que não vamos aqui pôr em causa os Fundamentos, questionar os axiomas não é uma opção a ter em conta. Assim, e como todas as restantes propriedades justificadas foram obtidas a partir dessas "verdades" aceites, poderíamos ainda questionar o modo de obtenção, o processo que nos permitiu as conclusões. Mas a argumentação assenta em regras lógicas de raciocínio e, mais uma vez, isso seria entrar nos Fundamentos. Sobra então como única opção as suposições iniciais, que foram os únicos passos que não foram justificados, foram simplesmente admitidos. Aqui se pode ver a importância das justificações no decorrer de uma prova, mas também a importância de uma axiomática sólida, capaz de aguentar pressões impostas por situações problemáticas. Mas apesar de não estarmos a pôr em causa axiomática no contexto desta demonstração, isso não quer dizer que as axiomáticas estejam livres de falhas e que os Fundamentos sejam imunes a contradições...

3. DESCENDO AOS FUNDAMENTOS

Entro
Naquilo que fora se chama por dentro
Buscando o caminho que há-de ir dar ao centro
Deixando as saudades e o medo lá fora
E agora?
Que vejo? Que faço?
Que passo eu não vou dar em falso
Até ao que se chama chegada
Porque é tudo e quase nada
[Sérgio Godinho, "O labirinto" (1983)]



[Jacek Yerka, "Europa" in http://www.yerka.pl/Yerka-pic-Pages/Image29.html]

A reflexão sobre os Fundamentos levanta novas questões, que se prendem, não com o acumular de conhecimento sobre uma área de estudo, mas sim com a solidificação das bases sobre as quais se constrói esse conhecimento. Antes de mais surge a questão de saber o que é que está de facto na base. O que é que justifica as nossas justificações? De que é que são feitos os nossos objectos? A eventual falta de unanimidade na aceitação, ou não, de argumentos nasce aqui. Se todos concordássemos em relação aos materiais e técnicas de trabalho, uma obra que cumprisse esses requisitos não poderia ser posta em causa. Assim, ainda que possamos não chegar a um acordo universal, podemos fazer uma espécie de pactos parciais que especificam as bases do trabalho. Ou seja, com estes materiais e técnicas que acho serem os melhores construí esta obra. Depois de verificarem que cumpri os requisitos, a obra pode ser aceite dentro daquelas condições de base. Se com outras condições obtiveram uma obra melhor que minha – mais robusta, mais estável –, isso não invalida o meu processo de construção, mas pode evidenciar falhas nos alicerces mostrando que aqueles métodos que me propus seguir podem não ser afinal os mais indicados. As tendências e correntes filosófico-matemáticas, não sendo obrigatoriamente mutuamente exclusivas, competem entre si neste campo da procura dos melhores alicerces.

A descoberta de falhas neste ponto deita por terra construções edificadas, a menos que se consiga colmatar essas falhas, seja directamente na base (com novas noções conceptuais) ou com uma espécie de construção auxiliar assente noutro terreno mais firme (adaptando ou acrescentando noções que completem as existentes dando-lhes nova sustentação).

Tudo isto não deve ser visto como um preciosismo desnecessário nem como uma total abstracção de tudo o que foi feito para começar de novo a construir. Por outro lado, não se quer, também, que a partir desta reflexão passemos a recorrer diariamente às "novas definições" e "novas justificações" com que tomamos contacto. O que se pretende é uma melhor compreensão do Universo matemático e do raciocínio que se quer válido. Assim se procura fundamentar aquilo que já está feito e que nos parece razoável, mas também assim, e questionando o porquê e o porque não dessa razoabilidade, se descobrem falhas e se abrem novos caminhos até então ocultos por essa suposta razoabilidade.

Neste capítulo vermos mais de perto as posições de Frege e de Hilbert, as preocupações do seu Logicismo e do seu Formalismo (respectivamente) neste campo dos Fundamentos, as suas convergências e divergências, as suas conquistas, mas também as suas falhas... Comecemos, no entanto, por uma abordagem geral ao campo da axiomatização lógica.

3.1. Lógica e axiomática

Primeiro sem saber porquê
E depois com um quê
De quem já sabe de saber mudar
De quem já sabe de saber fazer
[Sérgio Godinho, "De pequenino" (1976)]

E a Lógica, o que faz aqui no meio?... A Lógica trata de garantir a validade dos raciocínios, a coerência da sequência de pensamentos. O pensar de maneira lógica é um pensar fundamentado, apoiado em afirmações justificadas e encadeadas. O raciocínio matemático destaca-se, então, pelo «modo como encara a generalização e a demonstração» (como é referido na citação inicial [ver p. 14]), procurando atingir conclusões universais e universalmente aceites.

> *Noções muito elementares de Lógica devem ser introduzidas à medida que se revelem úteis à **clarificação de processos e de raciocínios**. [...] A introdução da lógica, da linguagem matemática e simbólica, das formas de raciocínio científico (matemático e outros) deve estar presente em todas as ocasiões, **impregnar o quotidiano da aprendizagem matemática**, sem se transformar num **conteúdo com valor em si mesmo**. O grau de formalismo deve sempre ter em conta o **nível de maturidade matemática** dos estudantes e deve surgir, se possível como necessidade, depois de o professor ter a certeza que o estudante apropriou verdadeiramente o conceito. [...] Não se pretende que a matemática ou matemáticas sejam introduzidas axiomaticamente, mas pretende-se que os estudantes fiquem com a ideia de que as teorias matemáticas são estruturadas dedutivamente.*
>
> [in Programa Escolar de Matemática A – 10.º ano (2001), pp. 11 e 19 (destaques nossos)]

A Lógica é útil «à clarificação de processos e de raciocínios» na medida em que evidencia as relações entre conceitos e proposições. Deixa visíveis dependências e independências tantas vezes ocultas numa primeira abordagem, devendo, portanto, «impregnar o quotidiano da aprendizagem matemática». No entanto, não deve ser tomada como um «conteúdo com valor em si mesmo»... Isto, se tivermos em conta apenas o Ensino Secundário e o seu objectivo pedagógico. Mas apesar desta aparente diluição da Lógica pelos restantes conteúdos programáticos no Secundário, ela tem de existir como objecto de estudo subsistente, claro está, para um outro «nível de maturidade matemática». A Lógica está na base do edifício matemático, sendo, habitualmente, uma pedra fundamental na estruturação axiomática em que as teorias matemáticas se desenvolvem. Mais uma vez, tendo em conta o «nível de maturidade matemática», não se pretende que o aluno construa ou sequer conheça essas estruturas, mas é importante que perceba que existem, e que são elas que sustentam o edifício em que ele se move. Assim, em detrimento do ponto de vista axiomático, a intuição e experimentação são frequentemente a base da apropriação de noções e conceitos, que só posteriormente são formalizados. À medida que vai trabalhando, o aluno deve sentir a necessidade de definir conceitos e de provar afirmações de forma mais rigorosa. E, de certo modo, também o desenvolvimento da Lógica (e toda a reflexão sobre os Fundamentos) pode ser visto como resposta a uma maior necessidade de rigor. A reflexão sobre os Fundamentos levanta novas questões, que se prendem, não com o acumular de conhecimento sobre uma área de estudo, mas sim com a solidificação das bases sobre as quais se constrói esse conhecimento. A Lógica procura responder às questões de validade de raciocínio, sendo uma importante ferramenta de trabalho de todas as restantes áreas – daí a importância da transversalidade no Ensino Secundário.

A axiomatização da Matemática vai assumindo, então, ao longo do nosso percurso escolar e ao longo da História em si uma importância cada vez maior, à medida que as questões lógicas vão ganhando razão de ser. A construção matemática sobre uma estrutura axiomática, erguendo-se seguindo deduções lógicas, fortalece a robustez do edifício. A axiomatização é um ponto forte no trabalho de Frege e de Hilbert, como veremos nas próximas secções. Mas olhemos, para já, de forma breve, as teorias destes dois matemáticos, nomeadamente as suas posições relativamente à importância da Lógica e da axiomática.

O Logicismo, como corrente filosófico-matemática, proporcionou-nos uma análise sustentada da relação entre o pensamento e a Matemática, contribuindo de forma decisiva para uma revolução no rigor. Mas o papel da Lógica para os logicistas vai bastante além de uma mera ferramenta de trabalho das outras áreas... No campo da Aritmética, Frege (logicista) acreditava ser possível obter todas as verdades tendo apenas por base as regras lógicas. Estas regras são axiomas, mas são axiomas lógicos gerais – ditam como conduzir o raciocínio, não postulam propriedades aritméticas. Assim, Frege procura reduzir os conceitos aritméticos básicos a termos lógicos dos quais pode deduzir (logicamente) as suas propriedades.

O Formalismo é também uma importante corrente filosófico-matemática com contribuições cruciais para o modo de encarar o trabalho matemático. Os formalistas focam atenções nas relações inter-conceptuais, subvalorizando, ou mesmo, negando (em casos mais radicais) o papel da intuição. Na Geometria, Hilbert (formalista moderado) defende a abstracção do conteúdo dos conceitos, trabalhando com termos não interpretados aos quais atribui à partida propriedades relacionais bem definidas. O desenvolvimento do seu trabalho é feito por deduções lógicas a partir dessas propriedades fixadas axiomaticamente.

Apesar dos seus esforços de afastamento do erro e da dúvida, também Frege e Hilbert viram os seus estudos sobre os Fundamentos sofrer fortes abalos, que deitaram por terra alguns dos seus intentos iniciais. Para Frege, o Paradoxo de Russell e, para Hilbert, os Teoremas da Incompletude de Gödel foram os causadores dos tais abalos. O Paradoxo de Russell é, como o próprio nome indica, um paradoxo, isto é, uma contradição. Mas é uma contradição diferente da que obtivemos na demonstração de não racionalidade de $\sqrt{2}$ por redução ao absurdo. Nesse caso a contradição resultava de suposições acrescentadas à partida. Aqui não, aqui as suposições que conduzem à contradição estão apenas ao nível da axiomática de Frege, o que inviabilizou o caminho que estava a tomar nos seus estudos, pois pôs em causa uma afirmação das suas bases. Os Teoremas da Incompletude de Gödel dizem (mostram!) que não é possível a um dado sistema provar a sua auto-consistência, negando, assim, aquilo que Hilbert aspirava alcançar.

Ainda que os seus programas possam não ter sido integralmente cumpridos, Frege e Hilbert deixaram-nos legados importantes na axiomatização da Matemática e na reflexão dos Fundamentos. Mas, apesar de serem adeptos de sistemas filosóficos diferentes, com algumas divergências de fundo, têm também opiniões convergentes em alguns aspectos.

Antes de mais, e talvez o ponto de maior convergência, a importância da axiomatização lógica como reflexão do matemático sobre a prova. Esta axiomatização é a base do programa logicista de Frege, que não aspira, no entanto, a ser «uma ferramenta de trabalho do matemático na sua pesquisa do dia-a-dia, mas sim uma contribuição para a nossa compreensão da inferência e a nossa habilidade para clarificar e organizar qualquer domínio do conhecimento revelando a estrutura sistemática justificativa assumida» [George (2002), p. 16]. Com Hilbert, apesar de poder não assumir um papel tão central, também o desenvolvimento da Lógica matemática não pode ser desligado do resto do seu programa. Aqui Hilbert defende a axiomática como uma ciência abstracta em si mesma, não dependente de qualquer disciplina [Detlefsen (1993), citado em Mancosu (1998), p. 164], apoiando uma ligação Lógica-Aritmética, com um desenvolvimento conjunto no sentido de evitar as situações paradoxais [Hilbert (1905), citado em Mancosu (1998), p. 179].

Também a uni-los está o facto de ambos considerarem a finalidade do raciocínio matemático como sendo a aquisição de conhecimento genuíno, afastando a intuição dos processos justificativos. Opõem-se à visão da Matemática puramente sintética e *a priori*, mas também não partilham da posição formalista mais radical que rejeita totalmente qualquer papel da intuição. Ou seja, para atingir o tal conhecimento genuíno que se pretende que prevaleça para além da razão, não podemos conduzir raciocínios de forma intuitiva, no entanto, sem perda de rigor, a intuição pode inspirar a criação, desde que devidamente acompanhada dos tais processos justificativos. Firmando o seu afastamento do formalismo radical, a intuição é reconhecida por Hilbert (1931) [citado em Mancosu (1998), p. 170] como uma terceira fonte de conhecimento, para além da experiência e do pensamento.

Este afastar do Formalismo radical aproxima-os também num outro ponto: «primeiro surge a necessidade e depois a satisfação» [Frege, citado em Sterrett (1994), p. 6]. Ou seja, não apoiam a ideia de uma estrutura matemática concebida sem o benefício de coisa alguma. «Quem quer criar ou desenvolver um simbolismo tem primeiro de estudar essas necessidades» [Hilbert, citado em Sterrett (1994), p. 7]. Neste ponto, Hilbert, numa visão mais formalista que Frege, defende, sem dúvida, o Princípio Criativo, reconhecendo ao matemático a autoridade para criar os seus instrumentos de trabalho, mas como meio de atingir os seus objectivos, não como mera liberdade intelectual.

Vejamos, então, nas próximas duas secções, mais de perto as posições destes dois matemáticos...

3.2. O Logicismo de Frege

Foste como quem me armasse uma emboscada
Ao sentir-me desatento
Dando aquilo em que me dei
Foste como quem me urdisse uma cilada
Vi-me com tão pouca coisa
Depois do que tanto amei
[Sérgio Godinho, "Emboscadas" (1986)]

O Logicismo proporcionou-nos uma análise sustentada da relação entre o pensamento e a Matemática, contribuindo de forma decisiva para uma revolução no rigor.

Num consenso entre logicistas, num sentido anti-kantiano, «as verdades básicas da Aritmética são susceptíveis de uma justificação que mostre que são mais gerais que qualquer outra verdade sustentada numa intuição dada *a priori*» [Denopoulous (2005), p. 130]. Há, assim, a revelação de que muitos conceitos aritméticos são puramente lógicos, associada a uma descrição da Lógica como sendo completamente geral e universalmente aplicável [Russell (1919), referido em Shapiro (2000), p. 123]. Esta aplicabilidade universal estende-se também à Aritmética, no sentido de ser aplicável a tudo o que pode ser pensado – «qualquer assunto tem uma ontologia e havendo objectos, podemos contá-los e aplicar Aritmética» [Shapiro (2000), p. 114].

> *[...] as verdades aritméticas regem o domínio do contável. Este é, de entre todos o mais abrangente; pertence-lhe não apenas o que é real, nem só o que é intuível, mas também tudo o que é pensável. Não será assim de esperar que as leis dos números estejam na mais íntima das ligações com as do pensamento?*
>
> [Frege (1884), p. 50]

Gottlob Frege (1848 – 1925), impelido pela crença na infalibilidade do raciocínio dedutivo, propôs-se a «reformular a salgalhada de resultados aritméticos, acumulados durante séculos, encaixando-os num [...] formato lógico» [Guillen (1983), p. 22]. Do resultado deste trabalho destacam-se primeiro «Os Fundamentos da Aritmética»[1], onde Frege se propõe a uma «investigação lógico-matemática acerca do conceito de número» [subtítulo da obra], e mais tarde os dois volumes d'«As Leis Fundamentais da Aritmética»[2], que se queriam como um modelo axiomático de certeza para a Aritmética.

O programa logicista de Frege procura obter as propriedades aritméticas a partir das leis lógicas gerais e definições, defendendo que «todas as verdades da Aritmética podem ser analisadas usando noções puramente lógicas e provadas a partir de axiomas lógicos na base de princípios lógicos de inferência» [George (2002), p. 17] – Frege acredita, então, que a Lógica é a base de toda a Aritmética, procurando reduzir os conceitos aritméticos básicos a termos lógicos dos quais pode deduzir (logicamente) as suas

[1] *Die Grundlagen der Arithmetik* – A obra está disponível com tradução portuguesa: Frege, Gottlob (1884), tradução, introdução e notas de António Zilhão (1992), *Os Fundamentos da Aritmética*, Imprensa Nacional – Casa da Moeda

[2] *Grundgesetze der Arithmetik*, vol. I (1893) e vol. II (1903)

propriedades. O programa é desenvolvido neste sentido, deixando também algumas referências à sua extensão à Análise – a Aritmética e a Análise são analíticas, logo «toda a verdade sobre os números naturais e toda a verdade sobre os números reais pode ser conhecida» [Frege, referido em Shapiro (2000), p. 109]. Fica, no entanto, bem clara a impossibilidade de extensão à Geometria, que Frege (numa visão mais kantiana) acredita ser válida apenas no domínio da "intuição espacial", não podendo ser analisada de forma independente.

Para uma análise do trabalho de Frege é necessária a compreensão de algum vocabulário [ver George (2002), pp. 20 a 23] que, fundamentalmente, gira em torno dos termos predicado, conceito e extensão. Um predicado (de primeiro nível) é o resultado de se retirar um nome de uma frase declarativa; um conceito é aquilo que é representado por um predicado; e uma extensão é a colecção daquilo que é abrangido por um conceito, isto é, aquilo que torna verdadeiro o predicado em causa. A ressalva feita na definição de predicado, indicando o primeiro nível, é uma noção importante no trabalho de Frege. Assim, falamos também em predicados de segundo nível, como resultado de se retirar um predicado de primeiro nível a uma frase; e dizemos também que os conceitos são de segundo nível quando abrangem conceitos de primeiro nível (ao contrário dos destes que abrangem objectos). Para Frege a Lógica não é de primeira ordem, admitindo predicados de nível maior e quantificação de conceitos de nível maior. Os quantificadores (existencial e universal) são predicados de segundo nível e Frege tem um papel importante no desenvolvimento da teoria da quantificação.

Um ponto fulcral no programa de Frege é o Princípio de Hume.

<u>*Princípio de Hume*</u>*: para cada conceito F e G, o número de F é igual ao número de G se e só se F e G são equipotentes (isto é, se existe bijecção entre os elementos de F e os elementos de G).*

A partir deste princípio, Frege obtém os princípios básicos da Aritmética – Teorema de Frege. No entanto, Frege não estava satisfeito com o desenvolvimento a partir daqui, pois o Princípio de Hume identifica igualdade entre os números de dois conceitos dados, mas não avalia a veracidade de frases "o número de F é t" onde t é um termo singular. Aqui é habitualmente apontado o Problema de Júlio César, que evidencia a incapacidade de decidir se Júlio César é um número ou não. Ficamos perante um problema de identificação dos naturais: como e porque é que qualquer número natural é diferente de qualquer outro objecto já conhecido? Há que fazer aqui uma observação [Denopoulous (2005), p. 137], que se prende com o facto de este problema não se colocar quando se trabalha apenas com linguagem de Aritmética pura; ele surge quando estendemos a linguagem de modo a admitir vocabulário empírico – resultado da aplicabilidade da Aritmética, no relacionamento entre objectos matemáticos e não matemáticos.

Na sua abordagem inicial, Frege assume que as extensões não requerem mais explicação e que, em particular, todo o conceito tem extensão. Mais tarde, n'«As Leis Fundamentais da Aritmética», sentiu necessidade de tratar as extensões com maior detalhe, fazendo um desenvolvimento completo da teoria dos conceitos e extensões, onde tenta explicar o significado da expressão "a extensão de *F*". Surge, assim, a Lei Básica V.

Lei Básica V: dados dois conceitos F e G, a extensão de F é igual à extensão de G se e só se abrangem os mesmos objectos.

Esta lei é mais tarde mostrada ser inconsistente, com a apresentação do Paradoxo de Zermelo-Russell.

Paradoxo de Russell: considerar a extensão do conceito "conjunto que não é membro de si próprio" e decidir se esta entidade é, ou não, elemento de si mesma.

A tentativa de decisão desta questão sobre esta extensão leva a uma contradição que pode ser facilmente detectada. Assumindo que sim, que é elemento de si mesma, então é abrangida pelo conceito que a determina, isto é, "conjunto que não é membro de si próprio". Mas, então, tem de respeitar o predicado "não é membro de si próprio", o que entra em contradição com o que assumimos por hipótese. Suponhamos agora que não, que não é elemento de si mesma, então não é abrangida pelo conceito que a determina, ou seja, não respeita o predicado "não é membro de si próprio", o que entra em contradição com a nova hipótese que tínhamos suposto.

Na axiomática de Frege, uma forma de evitar este paradoxo é considerar que, ao contrário do que Frege acreditava, há conceitos que não têm extensão. Frege vê, assim, inviabilizado o caminho que havia tomado no desenvolvimento da sua teoria das extensões, que se tornou inconsistente.

> *Um cientista dificilmente encontrará algo de mais indesejável do que ser forçado a voltar ao princípio exactamente quando julga o trabalho já concluído, posição em que fui colocado por uma carta de Mr. Bertrand Russell, quando o meu livro ia entrar no prelo.*
>
> [Frege, citado em Guillen (1983), p. 23]

No entanto, e apesar de todo o desânimo e consequente abandono de Frege, nem todo o seu trabalho é afectado por este paradoxo: o desenvolvimento da lógica de segunda ordem é consistente e a teoria dos números naturais pode ser justificada independentemente da teoria das extensões [ver Denopoulous (2005), pp. 134 a 137].

Mas do ponto de vista da Matemática em geral e dos seus desenvolvimentos na área da Lógica, a descoberta deste paradoxo no trabalho de Frege, foi importante e, ainda de dentro do seu desânimo, Frege também o reconhece:

> *Em todo o caso a sua descoberta é notável e provavelmente resultará em grandes avanços na lógica, por muito desagradável que possa parecer à primeira vista.*
>
> [Frege, citado em Shapiro (2000), p. 115]

O paradoxo não põe, portanto, fim ao Logicismo, antes pelo contrário, destacando-se duas teorias que procuram contornar o problema levantado pelo paradoxo. O que se pretende contornar, ou melhor, regulamentar de outra forma são questões relacionadas com colecções infinitas e auto-referências. Mas também essas teorias têm os seus problemas...

Russell detecta na impredicatividade – definição de entidades por auto-referência – a origem dos problemas da teoria de Frege e procura combatê-la, construindo e reconstruindo o trabalho de Frege à luz de um novo princípio [George (2002), p. 46]:

> *<u>Princípio do círculo-vicioso</u>: Aquilo que envolve a totalidade de uma colecção, não pode ser elemento dessa colecção.*

Tendo isto em mente, Russell desenvolve a Teoria (Ramificada) dos Tipos [ver Shapiro (2000), p. 115 a 124], onde distingue como que níveis de pertença, garantindo que colecções de elementos de um tipo não são do mesmo tipo dos seus elementos, sendo catalogadas no nível seguinte. Mas, para manter as possibilidades de trabalho, Russell, introduz alguns axiomas extra-lógicos, como o do infinito e da reducibilidade. Estes axiomas postulam propriedades que Russell considera essenciais para a Aritmética: (neste caso) a existência de um número infinito de individuais e uma correspondência intra-níveis na definição dos seus tipos (o que permite, em particular, contornar o problema das definições impredicativas). No entanto, estes axiomas vão além de meras propriedades lógicas e, portanto, do ponto de vista da generalidade lógica (tão ambicionada por Frege) "viciam" a sua Teoria.

A Teoria de Conjuntos de Zermelo-Frankel [ver desenvolvimento em George (2002), pp. 48 a 85] é menos forte que a de Russell (sendo muitas vezes suficiente). As bases da teoria (como o próprio nome denuncia) são os conjuntos: cada elemento é um conjunto, cujos elementos são também conjuntos. Os problemas surgem quando se alcança um "número infinito demasiado grande" de conjuntos... Em particular, a colecção de todos os conjuntos não é considerada um conjunto – aqui começam as menções às classes próprias, que são utilizadas sem estarem regulamentadas. E o problema põe-se na indefinição da localização da linha que separa os conjuntos dos não conjuntos, os "infinitos aceitáveis" dos "não aceitáveis".

Sobre os fracassos do Logicismo, Hilbert considera que se devem a uma tentativa inevitavelmente condenada de isolar a Lógica de toda e qualquer referência exterior.

> *De facto, uma condição para o exercício do raciocínio lógico e para a prática de operações lógicas é que alguma coisa tenha sido previamente apresentada à nossa faculdade de representação, certos objectos concretos extra-lógicos intuitivamente presentes como experiência imediata antes de qualquer pensamento. Para a inferência lógica ser fiável, é necessário que estes objectos se possam abarcar completamente de um só golpe em todas as suas partes, e o facto de eles ocorrerem, diferirem entre si, a sua ordenação ou a sua justaposição sejam um dado imediato da intuição, tal como os próprios objectos, como algo que nem pode, nem há a necessidade de reduzir a outro algo. Este é o requisito filosófico básico que considero*

indispensável para a matemática e, em geral, para todo o pensamento, compreensão e comunicação científicas.

[Hilbert (1926), p. 244]

Vejamos, agora, mais especificamente a posição de Hilbert...

3.3. O Formalismo de Hilbert

O que em mim aparece
Parece, acho
Que não vou deixar
Transparecer

[Sérgio Godinho, "Bate coração" (1981)]

O Formalismo é muitas vezes caracterizado como defensor de ideias como "a matemática é um jogo de símbolos". No entanto, isso é apenas uma visão (mais radical) que não revela muitas outras ideias formalistas mais gerais.

O Formalismo emerge de três marcos históricos importantes [Detlefsen (2005), p. 249], todos eles também interligados: a queda da intuição, a ascensão da Álgebra e a utilização do elemento simbólico. A separação hierarquizada entre ciências do contínuo e ciências do discreto deu durante muito tempo uma posição privilegiada à Geometria, que se mostrava reveladora de métodos de pesquisa e de prova capazes de tratar a continuidade do real. Num contexto primordialmente geométrico, nomeadamente no tratamento de problemas da Geometria das Áreas, a Álgebra vai ganhando importância e, mais tarde, a introdução do elemento simbólico é, sem dúvida, um conceito chave em todo este percurso. O símbolo como abstracção de um conceito permite o tratamento de problemas mais gerais e, assim, a Álgebra simbólica, quer como método de descoberta quer como método de prova, vai-se afirmando. Ao mesmo tempo, a intuição (nomeadamente a geométrica) vai sendo cada vez mais desvalorizada (enquanto elemento de prova), tendo sido a aritmetização da Análise e a descoberta de Geometria não euclidianas passos cruciais.

Assim, o Formalismo assenta em cinco elementos chave [Detlefsen (2005), p. 236]. No contexto atrás assinalado, o formalista rejeita a hierarquia tradicional das áreas matemáticas, enfatiza a abstracção em vez da imersão na intuição e significado e defende um papel não representativo da linguagem no raciocínio matemático. Há também uma rejeição da concepção genética da prova, negando o conhecimento das causas como único meio de conhecimento das coisas. Aqui Hilbert prefere claramente o método axiomático, defendendo a estruturação a partir de hipóteses de existência (consistentes!) em detrimento da produção de conceitos por extensões.

> *A minha opinião é a seguinte:* apesar do alto valor heurístico e pedagógico do método genético, merece, no entanto a minha preferência o método axiomático para a representação definitiva do nosso conhecimento e a sua plena fundamentação lógica.
>
> [Hilbert (1900), p. 217]

E, por fim, a defesa de uma componente criativa, onde o matemático é livre para criar instrumentos para atingir os seus objectivos.

É importante referir uma posição assumida por Hilbert perante o conhecimento: a concepção comunitária [Detlefsen (1998), p. 322]. Isto é, a ideia de que deve haver um igual acesso ao conhecimento por parte da comunidade. Hilbert rejeita o conhecimento pela captação da essência das coisas, considerando válida a construção de entidades pela atribuição de propriedades (convenientemente escolhidas pelo seu criador). Assim, o criador e o não-criador não estão, à partida, num mesmo patamar de conhecimento da coisa criada. O que Hilbert defende é a dissolução deste desfasamento inicial pela rejeição da intuição como única forma de conhecimento ou mesmo como fonte principal. O objecto depois de criado deve ser auto-sustentável, e, se o seu único suporte fosse a intuição individual, na ausência do seu criador ele desapareceria. É, então, importante a equidade de acesso ao conhecimento, possibilitando iguais condições de exploração. Também assim se potencializa a eficiência, pois há uma divulgação e sustentação de novos objectos e ferramentas disponíveis. O matemático não está dependente apenas da sua habilidade intuitiva nem nela reside o centro do seu conhecimento.

Neste campo do afastamento da intuição, é curioso observar a posição de Leibniz [Detlefsen (1998), p. 329], que compara a capacidade intelectual inata com a capacidade de compreender acções elementares. A primeira está relacionada mais directamente com a intuição e não está distribuída por todos de modo uniforme. A segunda é mais importante na capacidade de produção e está distribuída mais uniformemente, e, ainda que não esteja o suficiente, pode ser trabalhada. Assim, Leibniz defende a promoção da capacidade do fazer e não do intuir. Deste modo, a preguiça seria a única justificação para não se conseguir atingir objectivos. Esta posição de Leibniz é bastante moralista, mas toca na opinião de Hilbert em pontos como a cooperação e divisão de trabalho, apontando, para além da equidade, para a importância da eficiência. A formalização, a justificação e demonstração das afirmações permite a admissão de candidatos à construção do conhecimento independentemente da sua visão e a acumulação de meios de produção sem se perder a garantia de qualidade dos recursos.

É importante notar, no entanto, que Hilbert não rejeita completamente o papel da intuição no conhecimento. Esta é uma intuição imediata [Detlefsen (1998), p. 327], é uma captação involuntária e não uma intuição reflectida, não uma extrapolação, nem tão pouco uma adivinhação. Mas, ainda assim, esta intuição imediata não deve ser centrada no sujeito, deve ser considerada como inter-subjectiva, como um conhecimento igualmente e naturalmente obtido por todos – pela razão humana e não especificamente por cada um de nós. Ou seja, também aqui Hilbert preserva a sua noção de equidade de acesso ao conhecimento, eliminando as diferenças entre o criador e o não-criador. O papel atribuído à intuição distingue em Hilbert, dois tipos de construções / existência: real e ideal [Detlefsen (1998), p. 324]. A existência real está associada a esta intuição inter-subjectiva, sendo na construção ideal que Hilbert faz questão de afastar o papel da intuição, defendendo o primado da consistência.

A Matemática ideal surge como uma espécie de complemento da Matemática real, na linha de ideias do Princípio Criativo [Detlefsen (2005), p. 290]. O matemático é livre de criar entidades que são admitidas como correctas desde que não entrem em contradição com o previamente estabelecido / reconhecido como correcto. Ou seja, no desenvolvimento de uma teoria, a introdução de novas proposições pode ser uma maneira de preservar a simplicidade e eficiência do trabalho já desenvolvido.

> *[Na Geometria] Os elementos ideais «no infinito» têm a vantagem de tornar o sistema das leis de incidência tão simples e claras quanto possível. Por causa da simetria entre os pontos e rectas, deduz-se, como se sabe, o fecundo princípio da dualidade geométrica.*
>
> *As grandezas complexas usuais da álgebra são outro exemplo do emprego de elementos ideais: servem para a unificação dos teoremas sobre a existência e o número de raízes de uma equação.*
>
> *[...] pois do mesmo modo, para preservar as regras formais básicas da lógica aristotélica ordinária, temos de* suplementar as proposições finitárias com proposições ideais.
>
> [Hilbert (1926), pp. 239 e 247]

A Matemática ideal é resultado desta liberdade de criação, que se solta da construção intuitiva da exibição para se centrar na co-existência consistente da criação.

Hilbert mostra, assim, uma posição moderada dentro do Formalismo relativamente ao trabalho já feito, nomeadamente a não demissão da Matemática Clássica, e o aproveitamento do tão comummente falado "paraíso de Cantor".

> *Investigaremos aquelas maneiras de formação de conceitos e aqueles modos de raciocínio que se revelam frutíferos; e vamos acarinhar, sustentar e torná-los úteis sempre que exista a mais pequena promessa de sucesso. Ninguém nos expulsará do paraíso que Cantor criou para nós.*
>
> [Hilbert (1926), p. 243]

Com isto, Hilbert defende a reformulação de modo a que seja possível trabalhar com o que de bom / útil já se conseguiu, ao invés da rejeição só porque não está inteiramente de acordo com a nova teoria. Aqui Hilbert, referindo novamente a teoria de Cantor, faz notar que é saudável a pesquisa e reflexão sobre os Fundamentos, mas que há que ter em conta aquilo que entretanto fez avançar a Matemática.

> *[...] Quando penso no conteúdo e nos resultados de tais investigações, todavia, inclino-me, na maior parte, para discordar da sua tendência; sinto que elas estão desfasadas, como se viessem,, dos tempos em que o majestoso mundo de ideias de Cantor ainda não tinha sido descoberto.*
>
> [Hilbert (1928a), p. 267]

Hilbert tem um papel importante na axiomatização matemática. Não rejeitando as contribuições logicistas anteriores, nomeadamente de Frege e Russell, mas olhando-as de forma crítica, Hilbert defende uma outra direcção no seu programa. Com o desenvolvimento da sua Teoria da Prova, acredita ser possível trabalhando apenas dentro de um dado conjunto de axiomas provar a sua consistência. Esta consistência, que significando a não-contradição dos axiomas, seria uma prova da possibilidade da sua coexistência e, assim, uma garantia da existência / veracidade de qualquer estrutura que sobre eles se construísse.

Os esforços de Hilbert na sua Teoria da Demonstração entram, então, no campo da Metamatemática. São um olhar sobre a Matemática em si mesma, sobre os seus métodos, sobre a forma como é construída, sobre a garantia de verdade das suas afirmações. São uma espécie de reflexão introspectiva e não um alargamento dos domínios matemáticos estudados. Os propósitos de Hilbert nesta área ficaram conhecidos como "Programa de Hilbert".

> *[...] Desejo eliminar definitivamente as questões relativas aos fundamentos da matemática na maneira como actualmente se colocam, mediante uma conversão de toda a proposição matemática numa fórmula que possa ser concretamente exibida e rigorosamente demonstrável, e assim retratar as definições e inferências matemáticas de tal jeito que resultem irrefutáveis, sem deixar de reflectir uma visão adequada do conjunto da ciência matemática.*
>
> [Hilbert (1928a), p. 256]

Inicialmente, é, então, essencial a descrição das proposições através de fórmulas desligadas de significação material, tendo por base um conjunto de símbolos (lógicos e matemáticos) previamente "catalogados", também eles despidos de qualquer significado – teremos a exibição correcta. Assim, a dedução pode reduzir-se à tal manipulação simbólica do Formalismo – teremos a demonstração rigorosa. Mas mais, Hilbert procura que isto seja aplicável a «toda a proposição matemática», que, deste modo, se tornaria irrefutável. Havia a ambição de reduzir a veracidade de uma afirmação à existência de uma sua demonstração

> *O objectivo da minha teoria é estabelecer de uma vez por todas a certeza dos métodos matemáticos.*
>
> [Hilbert (1925), citado em Shapiro (2000), p. 158]

Esta ambição de Hilbert fica, mais tarde, permanentemente inviabilizada com os teoremas de incompletude de Gödel.

> *<u>Primeiro Teorema de Incompletude de Gödel</u>: Num sistema dedutivo efectivo (consistente, decidível e que contenha uma certa quantidade de Aritmética) existem frases na sua linguagem que não são decidíveis pelas suas regras.*
>
> *<u>Segundo Teorema de Incompletude de Gödel</u>: Nenhuma teoria consistente (que contenha uma certa quantidade de Aritmética) pode provar a sua própria consistência.*

Gödel veio introduzir um carácter de incerteza na Matemática, no sentido em que provou logicamente que há verdades indemonstráveis pela Lógica. A ideia consiste em considerar (num dado sistema dedutivo consistente) uma frase como:

G: Não podemos demonstrar que G é verdadeira.

Trabalhando sob o pressuposto de que podemos dicotomicamente demonstrar que *G* é verdadeira ou demonstrar que *G* é falsa, esta auto-referência conduz-nos a conclusões contraditórias. Admitindo que mostramos que *G* é verdadeira, então é verdadeiro aquilo que afirma. Mas, então, é verdade que não podemos demonstrar que *G* é verdadeira, o que entra em contradição com o que assumimos por hipótese. Supondo agora que mostramos que *G* é falsa, então é falso aquilo que afirma, ou seja é falso que não possamos demonstrar que *G* é verdadeira. Isto diz-nos, então, que podemos mostrar que *G* é verdadeira, o que entra em contradição com a nova suposição.

À face destas contradições, para manter a consistência, somos forçados a concluir que, afinal, não podemos demonstrar nem que *G* é verdadeira, nem que *G* é falsa. No entanto, além disso, e por isso mesmo, "vemos" que *G* é verdadeira... o que nos obriga a considerar a incompletude do sistema.

Esta permissão da incerteza no mundo matemático deitou por terra a convicção de Hilbert (e inúmeros matemáticos pré-godelianos) de que matematicamente qualquer sentença seria decidível.

Na matemática não existe o «igniramus». Pelo contrário, podemos sempre responder a questões com sentido.

[Hilbert (1928b), p. 284]

Cada problema matemático definido tem por força de ser susceptível duma resolução exacta, quer na forma duma resposta real à questão posta, quer pela prova da impossibilidade de ser resolvido.

[Hilbert, citado em Guillen (1983), p. 28]

Nas restantes secções deste capítulo, debruçar-nos-emos sobre dois aspectos onde são particularmente visíveis as diferenças de posição entre Frege e Hilbert (a significação de conceitos e os critérios de verdade), olhando também, de forma breve, questões relativas a aspectos de linguagem.

3.4. Significação de conceitos

Na vida real as aparências
Estão do outro lado do espelho
Na vida real não me assemelho
À simulação das evidências
[Sérgio Godinho, "Na vida real" (1986)]

O aluno deve compreender o edifício matemático como uma estrutura (em construção!), que se quer firme e assente em bases sólidas. As definições fazem parte dessas bases, daí que (como é referido na citação inicial [ver p. 14]) o «uso de diferentes definições» possa resultar em diferentes conclusões – ideia importante que o aluno deve ter em atenção.

*[...] Os conceitos são **construídos a partir da experiência de cada um** e de situações concretas; os conceitos são **abordados sob diferentes pontos de vista e progressivos níveis de rigor e formalização** [...]. [...] **Defende-se que os conceitos***

***fundamentais e as suas propriedades básicas sejam motivados intuitivamente, mas defende-se que os alunos possam trabalhá-los até chegarem a formulações matemáticas precisas** [...].*

[in Programa Escolar de Matemática A – 10.º ano (2001), pp. 10 e 19 (destaques nossos)]

O que é um conceito?... Geralmente pensamos nos conceitos como sendo as ideias que temos do que as coisas são. E como obtemos essas ideias?... Pedagogicamente, «defende-se que os conceitos fundamentais e as suas propriedades básicas sejam motivados intuitivamente», que sejam «construídos a partir da experiência de cada um e de situações concretas». No entanto, «defende-se que os alunos possam trabalhá-los até chegarem a formulações matemáticas precisas», sendo «abordados sob diferentes pontos de vista e progressivos níveis de rigor e formalização». Ou seja, a meta a atingir é a definição rigorosa, a «formulação matemática precisa», algo que diga claramente o que é a coisa em causa. Mas para definir algo é preciso primeiro ter consciência da existência (ou da necessidade) de tal coisa – e não é só uma questão de pedagogia, também historicamente, essas definições rigorosas não nascem já claras e acabadas!

A nota entre parêntesis, apesar de subtil, marca uma importante diferença – existência ou necessidade – na natureza dos objectos aos quais se referem os conceitos. As tais definições descrevem objectos existentes ou criam novos objectos?... Partindo destas duas descrições, podemos destacar as posições de Frege e de Hilbert, o primeiro mais enquadrado na descrição e o segundo na criação.

Para falarmos das divergências entre Frege e Hilbert temos de começar por referir uma distinção claramente assumida por Frege e não por Hilbert e que podemos dizer que está na base de grande parte das suas diferenças de opinião. Enquanto que Hilbert, numa base formalista, não distingue particularmente a Geometria das restantes áreas matemáticas, Frege defende a existência de fortes diferenças ontológicas. Para Frege a Geometria não é tão básica como a Aritmética ou a Lógica, defendendo que estas têm uma validade geral enquanto que a primeira é válida apenas no domínio da "intuição espacial" não podendo ser examinada de forma independente.

De uma forma geral, será conveniente não sobrestimar o parentesco [da Lógica] com a Geometria. [...] Se na Geometria se obtêm proposições de carácter geral a partir da intuição, isso esclarece-se facilmente pelo facto de os pontos, rectas *ou planos intuídos não terem um carácter individual e, portanto, poderem funcionar como representantes de toda a sua espécie.*

[Frege (1884), p. 50]

Portanto, para Frege, uma axiomatização da Geometria, para além das leis lógicas, teria por base um conjunto de objectos existentes, ainda que gerais, dos quais tomamos consciência de forma intuitiva e um conjunto de axiomas que traduzem verdades evidentes (no tal domínio da "intuição espacial"). Ora a axiomatização de Hilbert vai numa outra direcção. Para Hilbert, o conjunto de objectos base não é relevante, sendo de maior importância as relações que entre eles se estabelecem. Ou seja, a partir do momento em que essas relações estão bem definidas (consistência!) podemos invocar quaisquer objectos, desde que verifiquem essas relações. É deste modo que a Geometria de Hilbert de solta do domínio da "intuição espacial", podendo ser analisada de forma independente.

Desta maneira, o Professor Hilbert quis, por assim dizer, pôr os axiomas numa forma tal que pudessem ser aplicados por uma pessoa que não percebesse o seu significado, por nunca ter visto nem um ponto, nem uma recta ou um plano. De acordo com ele, deveria ser possível reduzir o raciocínio a regras puramente mecânicas, e para criar uma geometria deveria bastar aplicar estas regras cegamente aos axiomas sem saber o que os axiomas significam. Devemos, portanto, ser capazes de construir toda a geometria, não diria sem a perceber de todo, visto que poderemos captar a conexão lógica das proposições, mas em todo o caso sem a visualizar.

[Poincaré (1902), p. 318]

Note-se que Hilbert não defende a Geometria totalmente desligada da intuição. O matemático é livre para criar mas quando o faz, à partida, tem em conta a tal visão espacial que capta intuitivamente. No entanto, a partir do momento em que tem uma estrutura (consistente!) pode, sem prejuízo para seu trabalho, reinterpretar os conceitos trabalhando num outro domínio não imperativamente próximo do intuitivo. Além disso, não se pretende com esta reinterpretação mostrar apenas o quão livre pode ser o trabalho matemático, mas sim fornecer novas ferramentas úteis de alguma forma ao matemático na investigação, aplicação e sustentação no seu trabalho.

Portanto, para Hilbert, os conceitos ganham o significado que lhes atribuirmos, dentro de certas restrições, que se prendem com as relações estabelecidas pelos axiomas.

Partindo, então, de um conjunto de termos primitivos, esvaziados de conteúdo significativo, são os axiomas que nos dão como que definições implícitas, postulando as inter-relações que têm de se verificar. Estes axiomas, ao contrário dos de Frege, são criações livres do matemático, não tendo à partida qualquer carácter de veracidade evidente ou intuitiva (exigindo, por isso, uma verificação extra que garanta a possibilidade de coexistência de tais propriedades: consistência!).

Frege vê as relações descritas nos axiomas de Hilbert não como axiomas, mas sim como proposições, ou melhor pseudo-proposições, pois falam de propriedades sobre conceitos ainda não definidos. Como já referimos, para Frege, os conceitos geométricos ganham significado de forma intuitiva, como que numa transposição descritiva do real, opondo-se, portanto, a esta significação contextual via axiomas que permite várias interpretações. Frege rejeita a utilização de frases não interpretadas, defendendo que a expressão correcta de um pensamento não dá lugar a diferentes interpretações; fala, quanto muito, em diferentes níveis de um conceito, correspondendo a diferentes graus de abstracção e especificação do, sempre e inevitavelmente presente, objecto existente. Além disso, é contra o modo de definição implícito, defendendo que o conceito deve ser sempre reduzido a termos já conhecidos, que em última análise nos são apresentados por meio de proposições explicatórias baseadas numa espécie de acordo de linguagem generalizado – "meeting of minds" [Sterrett (1994), p. 19].

Hilbert considera que exigir que todos os termos sejam redutíveis a outros já conhecidos seria circular, e pretere as proposições explicatórias de Frege em favor de um maior rigor objectivo que julga alcançar com as definições implícitas dadas pelos seus axiomas sobre um conjunto de termos primitivos não interpretados.

> *A exigência universal de que cada fórmula particular seja individualmente interpretável não é de todo razoável; pelo contrário, uma teoria, pela sua própria natureza, é tal que não necessitamos de retroceder à intuição ou ao significado no seio de um qualquer argumento.*
>
> [Hilbert (1928a), p. 269]

Também na Aritmética podemos encontrar opiniões divergentes no Logicismo de Frege e no Formalismo de Hilbert, que não são obrigatoriamente as visões de outros logicistas e formalistas. O conceito de número, a questão da sua existência e a explicação das suas propriedades são assuntos importantes para quem se debruça sobre os

Fundamentos da Matemática (em particular, da Aritmética). Frege defende que os números existem, frisando a importância de os vermos como objectos auto-subsistentes dos quais procuramos captar as propriedades essenciais, de forma a podermos defini-los correctamente. Para Hilbert, os números não têm de ter uma existência própria, considerando-os como símbolos aos quais atribuímos propriedades convenientes.

> *De acordo com Frege os números são objectos lógicos, sendo a tarefa de um filósofo da Matemática apontar isso claramente. Defini-los não é criá-los, mas delimitar o que existe por direito próprio. Definições contextuais de objectos lógicos não servem porque não exibem o seu carácter como entidades independentes. Postulá-los está, de acordo com Frege, igualmente fora de questão: nós podemos postular a existência de objectos lógicos independentes tão pouco quanto podemos fazê-lo com unicórnios, que, caso existissem, existiriam independentemente de serem postulados e, caso não existam, como não existem, não serão trazidos adiante por qualquer, mesmo a mais enérgica, postulação.*
>
> [Körner (1968), pp. 36/7]

Na visão de Frege (1893) [citado em Detlefsen (2005), p. 301], que tem ao longo da sua obra uma clara preocupação em fazer emergir do seu Logicismo uma descrição do que é um número, a posição de postulação formalista poupa, sem dúvida, trabalho intelectual, pois «não precisamos de provar que os números têm determinadas propriedades, basta-nos introduzir figuras às quais atribuímos convenientemente propriedades». Nesta linha de ideias, Thomae (1989) [citado em Detlefsen (2005), p. 301], diz que «a concepção formal dos números aceita limites mais modestos que a concepção lógica», pois «não pergunta o que os números são ou têm de ser; pergunta o que precisamos dos números na Aritmética». Por outro lado, e de acordo com a posição de Hilbert, Bernays (1923) [citado em Mancosu (1998), p. 169] frisa que, apesar de os símbolos numéricos não serem criados por pensamento isso não significa que tenham existência própria, acrescentando que esta ideia de os números como objectos existentes não é impossível, mas é desnecessária.

Apetece dizer que a posição de Frege é mais ontológica e a de Hilbert mais funcional, por isso convém assinalar que nem Frege está a querer complicar o que é simples, nem Hilbert está a querer ignorar o que é complicado. São duas posições diferentes que decorrem de linhas de pensamento diferentes, mas que procuram ambas fundamentar o conceito de número e a utilização que dele fazemos. O Logicismo de Frege procura na Lógica a explicação última de toda a Aritmética, evitando termos primitivos e axiomas desnecessários, que serão reduzidos a noções e leis lógicas gerais. O Formalismo de Hilbert enfatiza as relações e a instrumentalização da linguagem, defendendo uma componente criativa sustentada na consistência.

Uma última referência geral à definição dos conceitos prende-se com a linguagem, com a descrição e transmissão de ideias, que será abordado na próxima secção.

3.5. Linguagem e símbolo

Farto de voar
Pouso as palavras no chão
[Sérgio Godinho, "Farto de voar" (1972)]

A discussão e a comunicação são importantes na construção e sustentação do raciocínio: o aluno tem de ser capaz de transmitir as suas ideias e de as defender convenientemente. A linguagem é, assim, uma importante ferramenta. A linguagem matemática quer-se rigorosa, daí a simbologia própria que lhe permite soltar-se da linguagem natural, tantas vezes ambígua. No entanto, a comunicação rigorosa não tem de ser puramente simbólica; o símbolo é um auxílio precioso, mas não é uma obrigação. A Matemática não nasceu simbólica! O símbolo foi sendo adoptado à medida das necessidades – e assim deve ser introduzido com os alunos: para facilitar e sintetizar a comunicação.

[...] Sem que, em algum momento, se confunda o grau de precisão de um conceito matemático com qualquer grau de "simbolização". ***Um conceito matemático pode estar completa e rigorosamente compreendido expresso em língua natural ou em linguagem matemática ordinária que é uma mistura de linguagem natural, simbologia lógica e matemática.*** *A escrita simbólica das proposições matemáticas*

há-de aparecer, se possível naturalmente, ***para efeitos de precisão, condensação, economia e clareza de exposição.***

[in Programa Escolar de Matemática A – 10.º ano (2001), p. 19 (destaques nossos)]

A simbologia é, sem dúvida, uma parte importante da Matemática actual. A ideia do matemático rascunhando num quadro ou numa folha complexas fórmulas e encarreirando de forma interminável símbolos indecifráveis é um estereótipo bastante comum. Mas é importante perceber a diferença entre o trabalho e as ferramentas, entre as ideias e a linguagem. A comunicação matemática, em especial a escrita, é, actualmente, bastante simbólica, mas não é isto que faz (ou deixa de fazer) da Matemática um mero jogo de símbolos. Quando nos referimos aqui à escrita simbólica, temos em mente a comunicação, a descrição de processos ou a caracterização de conceitos, e isto é útil, de facto, «para efeitos de precisão, condensação, economia e clareza de exposição», pois liberta-nos de ambiguidades inerentes à linguagem natural. «Um conceito matemático pode estar completa e rigorosamente compreendido expresso em língua natural ou em linguagem matemática ordinária que é uma mistura de linguagem natural, simbologia lógica e matemática». No dia-a-dia matemático, não nos devemos retrair ao dizer, por exemplo, que

um número racional é o quociente entre um inteiro e um natural.

A descrição puramente simbólica condensa a informação ao mesmo tempo que a torna independente da língua de origem contribuindo para uma maior universalização da Matemática, mas não acrescenta conteúdo na comunicação:

$$x \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \exists(m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}): x = \frac{m}{n}.$$

Poderão os formalistas concordar que não acrescenta conteúdo mas alegar que, pelo contrário, filtra conteúdo, informações desnecessárias, restringindo-se ao essencial, sendo ela própria o conteúdo. No entanto, a escrita puramente simbólica torna-se indecifrável a quem desconhecer a simbologia e a sua manipulação, podendo falhar aí, desnecessariamente, o propósito da comunicação. Por outro lado, muitas vezes só nos damos conta das imprecisões do nosso discurso quando o tentamos formalizar ao máximo, e, no caso das definições, a escrita simbólica ajuda-nos a ver ambiguidades linguísticas que podem minar a nossa definição. Interessa, pois, estar atento às possíveis falhas do discurso em linguagem natural. Mas de um modo geral o que acontece é fazermos um uso conjunto das duas descrições, a tal «mistura de linguagem natural, simbologia lógica e matemática» (referida na citação do início da secção):

$$x \text{ é racional se e só se } x = \frac{m}{n}, \text{ para alguns } m \in \mathbb{Z} \text{ e } n \in \mathbb{N}.$$

Esta será, certamente, uma boa opção para o discurso da Matemática escolar. Permite-nos uma maior fluidez de discurso, não sendo a descrição demasiado críptica nem demasiado extensiva, ao mesmo tempo que procura dissipar algumas ambiguidades e aproximá-la do seu contexto de utilização. De qualquer forma, ainda que não seja uma escrita puramente simbólica, o aluno (e o professor!) deve estar alertado para a necessidade de rigor da descrição dos seus conceitos e métodos de trabalho.

Frege refere também a importância pedagógica de um discurso ocasionalmente menos rigoroso, desde que se disso se tenha consciência.

> *Quando alguém se sente na obrigação de dar uma definição sem ser capaz de o fazer, acha que deve, pelo menos, descrever o modo como chegou ao objecto ou conceito em causa. [...] Uma introdução ao problema é também algo perfeitamente adequado para fins didácticos; deve-se é distingui-la sempre claramente de uma definição.*
>
> [Frege (1884), p. 33]

Mas dentro dos Fundamentos, é imperativo algo mais que a comunicação, exige-se uma análise isenta de qualquer elemento perturbador. Assim, a instrumentalização da linguagem, que se procura esvaziar de significado material, é uma forma de ultrapassar essa possibilidade de imprecisão ou de descuido intuitivo, permitindo a concentração de atenções nas deduções em si mesmas. É neste contexto que o Formalismo defende a substituição dos processos de raciocínio por símbolos e fórmulas. E aqui o símbolo é mais que um mero condensador de informação, torna-se ele próprio a informação

> *Esta noção pode parecer artificial e pueril; e é desnecessário apontar o quão desastrosa seria no ensino e quão perniciosa ao desenvolvimento mental; quão mortífera seria para os investigadores, cuja originalidade ela mataria à nascença. Mas, como utilizada pelo Professor Hilbert, ela explica-se e justifica-se a si própria, se não esquecermos o fim em vista. Será a lista de axiomas completa, ou teremos esquecido alguns que aplicamos inconscientemente? É o que queremos saber. Para*

> *tal temos um critério, e apenas um. Devemos descobrir se a geometria é uma consequência lógica dos axiomas explicitamente enunciados, isto é, se após introduzirmos estes axiomas na máquina de raciocinar, podemos extrair toda a sequência de proposições.*
>
> [Poincaré (1902), p. 318]

Temos, então, duas situações distintas, consoante nos encontramos nos domínios da Metamatemática ou no dia-a-dia do desenvolvimento e pedagogia matemáticos. Se no segundo caso a formalização e o símbolo são úteis, mas não são indispensáveis nem sequer desejáveis na sua totalidade, no primeiro caso parecem essenciais.

No espírito do Formalismo Simbólico, Berkeley (1710) [citado em Detlefsen (2005), p. 264] defende que a linguagem matemática deve ser usada de forma instrumental, no sentido em que a manipulação simbólica se deve abstrair do significado inicial das suas partes. O símbolo, ainda que representativo de algum conteúdo, deve, na sua utilização, libertar-se dessa ligação, de forma a poder ser manipulado sem a constante lembrança do seu sentido inicial. Isto permite uma aplicação e análise mais gerais dos processos. O Princípio da Permanência das Formas Equivalentes [Peacock (1830), citado em Detlefsen (2005), p. 274] explica este elemento simbólico, segundo o qual os símbolos constituem abstracções de propriedades comuns a vários conceitos, passíveis de serem tratadas em conjunto. A Álgebra é uma área onde essas abstracções e manipulações simbólicas nos são mais familiares. A Álgebra simbólica permite o tratamento geral e simultâneo de várias situações aritméticas que partilham propriedades comuns. Mas a manipulação algébrica simbólica ainda que possa ser inspirada na manipulação aritmética (pois, de um modo geral, pretende-se que, quando reinterpretadas, as abstracções simbólicas correspondam novamente a conteúdos significativos), não se lhe deve subjugar, deve valer por si só, no sentido em que as suas leis não devem ser meras transposições das regras aritméticas. «A Aritmética só pode ser considerada como uma Ciência de Sugestão, da qual os princípios e operações da Álgebra são adaptados, mas pela qual não são nem limitados nem determinados.» [Peacock (1830), citado em Detlefsen (2005), p. 275] E Berkeley (1732) [referido em Detlefsen (2005), p. 267] vai mais longe, considerando mesmo a existência de sinais que não expressam qualquer ideia, que não são interpretados, nem interpretáveis.

Esta ideia de esvaziamento total de conteúdo é inconcebível para Frege, ainda que reconheça a manipulação instrumental dos símbolos durante os cálculos.

> *Podemos evidentemente usar de forma mecânica os sinais numéricos, tal como podemos papaguear palavras e frases; mas muito dificilmente se poderá chamar a isso pensar. [...]*
>
> *Todo aquele que usa palavras ou sinais matemáticos exige que estes denotem alguma coisa e ninguém esperará que se diga alguma coisa com sentido por meio de sinais vazios. Mas é possível que um matemático se embrenhe em extensos cálculos sem entender pelos seus sinais o que quer que seja de sensorialmente perceptível ou intuível. E não é por causa disso que estes sinais se tornam de imediato sem sentido; o seu conteúdo deve, apesar de tudo, ser distinguido dos próprios sinais, mesmo que talvez só seja apreensível por intermédio desses mesmos sinais.*
>
> [Frege (1884), pp. 31 e 51]

Hilbert, não é radical ao ponto de considerar a Matemática como um mero jogo de símbolos, mas, ao contrário de Frege, defende a importância do elemento simbólico como entidade significativa em si mesma. O símbolo não é apenas uma abstracção, pode ser ele próprio uma ideia, sendo algo captado intuitivamente. Neste aspecto, a sua tangibilidade torna-o um elemento primitivo, constituindo a referência exterior *a priori* exigida por Hilbert antes mesmo da própria Lógica. «No início... era o símbolo» [Hilbert (1922), citado em Detlefsen (1998), p. 322] é apresentado como *slogan* da campanha finitista de Hilbert

3.6. Critérios de verdade

Ter sempre a certeza das dúvidas
Por via das dúvidas saber o que achar
[...]
Ter sempre a destreza da prática
Por via da prática saber o que achar
[Sérgio Godinho, "Ser ou não ser" (1997)]

Num raciocínio matemático, a validade de uma afirmação está «relacionada com a consistência da argumentação lógica, e não com alguma autoridade exterior» (como é referido na citação inicial [ver p. 14]). O aluno deve perceber desde logo que não é o professor em si que valida as afirmações, mas a argumentação que delas é feita. O que dá vantagem ao professor é o facto de já conhecer mais argumentos, e de estar mais familiarizado com a sua utilização. A argumentação do aluno, se devidamente justificada, deve ser aceite, mesmo que não seja a inicialmente prevista pelo professor.

> *No ensino secundário, o estudante deverá ser solicitado frequentemente a* ***justificar*** *processos de resolução, a* ***encadear*** *raciocínios, a* ***confirmar*** *conjecturas, a* ***demonstrar*** *fórmulas e alguns teoremas. [...] A aprendizagem matemática dos estudantes passa por* ***fases intuitivas e informais****, mas, desde muito cedo, mesmo estas não podem deixar de ser rigorosas ou desprovidas de demonstrações correctas, bem como não podem passar sem um mínimo de linguagem simbólica. Na aprendizagem da matemática elementar dos ensinos básico e secundário são absolutamente necessárias as demonstrações matemáticas, mas estas não podem confundir-se com demonstrações formalizadas (no sentido de* ***deduções formais em teorias formais****). [...] No que diz respeito aos métodos de demonstração, eles devem ser referidos à medida que vão sendo usados ou após os estudantes terem já utilizado os vários métodos em pequenas demonstrações informais (mesmo para confirmar as suas resoluções de problemas). [...] A indução matemática deve aparecer individualizada como exemplo particular do raciocínio dedutivo [...]. A abordagem de algumas demonstrações directas e indirectas (e nestas, a demonstração por redução ao absurdo) é inevitável. Assumem também uma grande importância demonstrações utilizando contra-exemplos.*
>
> [in Programa Escolar de Matemática A – 10.º ano (2001), pp. 11, 19 e 21 (destaques nossos)]

«Justificar», «encadear», «confirmar», «demonstrar» são verbos habitualmente associados aos raciocínios matemáticos, que se querem rigorosos e correctos. O aluno deve perceber a importância deste leque verbal e pôr em prática conscientemente algumas das suas acções. No entanto, não se pode exigir que tudo seja por ele provado, nem em amplitude nem em profundidade. Ou seja, deve-se também saber tirar partido de «fases intuitivas e informais» e, mesmo com o que é demonstrado, não se quer que o aluno produza «deduções formais em teorias formais». Impõe-se aqui uma questão: o que são «deduções formais em teorias formais»?... Fica claro que é algo mais do que aquilo que se pretende que o aluno faça... E este algo mais tem que ver com a profundidade da prova, com as propriedades que são assumidas, com os métodos que são utilizados, com o rigor das definições dos termos trabalhados. Uma dedução formal numa teoria formal é, antes de mais, uma dedução, ou seja um encadeamento de argumentos logicamente dependentes – isto também existe nas provas dos alunos. O que não é tão forte é a formalidade: a consciência das regras lógicas, o esmiuçar das definições, o dissecar das propriedades, a explicitação das propriedades assumidas – o menor grau de formalidade decorre da intuição inconsciente de alguns destes elementos. Quanto às teorias formais, as diferenças são maiores, pois o aluno não se apercebe de que a prova que faz está enquadrada numa teoria, num conjunto de princípios, de assunções que, apesar de se quererem universais, não são unânimes...

Mas será que há umas provas melhores que outras?... Uma prova é um encadeamento de argumentos assente em algumas suposições. Podemos, então, alegar que a melhor prova é aquela que utiliza menos argumentos ou que a melhor prova é aquela que parte de menos suposições... O número de argumentos, desde que devidamente justificados, não deve afectar a perfeição da prova, pode ser apenas uma adequação a contextos e níveis de desenvolvimento diferentes. Quanto às suposições, quer-se que sejam, obviamente, poucas, mas não é tanto o número que é importante mas a simplicidade, o nível que ocupam no tal edifício matemático – ou a sua evidência como diria Frege. Se assumirmos à partida um argumento já com algum nível de complexidade, podemos obter uma prova mais curta, pois estamos a partir de um ponto já mais avançado. Mas se formos buscar os argumentos que sustentam a suposição a partir da qual deduzimos tudo o resto, aí podemos ver com mais clareza o "tamanho" da nossa prova. Portanto, não é o tamanho que a prova aparenta ter que vai decidir se ela é ou não uma boa prova, mas sim a solidez dos argumentos e a clareza dedutiva do raciocínio.

Noções como proposição, demonstração, hipótese, consequência, axioma são (devem ser!) abordadas no 9.º ano, habitualmente integradas num capítulo de Geometria, aludindo aos Elementos. Aí, um bocado ao jeito de Euclides, deduzem-se de forma lógica, a partir de um conjunto pré-definido de axiomas, algumas propriedades já conhecidas mas, até então, aceites de forma intuitiva sem justificação formal. Não quero com isto dizer que a partir desse momento os alunos não mais voltem a utilizar propriedades não provadas, mas pretende-se que isto seja um alerta para o rigor conseguido e a necessidade de fundamentação das afirmações ainda que pareçam óbvias.

Tendo presentes as diferenças epistemológicas relativamente à Geometria patentes nas visões de Frege e de Hilbert podemos também analisar as suas diferentes posições relativamente a critérios de verdade. Notemos primeiro que ambos defendem a correcção dum raciocínio quando ele é devidamente deduzido a partir de um conjunto de leis básicas (axiomas) de acordo com os princípios lógicos de inferência. Ou seja, há um consenso relativamente ao papel nulo da intuição na justificação de frases para além das leis básicas. As divergências estão exactamente no critério de verdade dessas leis básicas a partir das quais todas as outras podem ser deduzidas.

Ora, para Frege a Geometria mora apenas no domínio da "intuição espacial", sendo daí decorrentes estas leis básicas – os tais axiomas que traduzem verdades evidentes – como descrições da realidade. Assim sendo, a sua veracidade é genética, uma vez que eles procuram ser descritivos e não construtivos. Com Hilbert, a Geometria solta-se deste domínio, e portanto, as leis básicas, ainda que possam ser inspiradas pelo real intuitivo, formam uma estrutura que pode ser analisada de forma independente, não tendo à partida qualquer carácter de verdade evidente ou intuitiva. Deste modo, exige-se uma verificação extra que garanta a possibilidade de coexistência de tais propriedades.

> *Chegados a um ponto no desenvolvimento da teoria, pode-se encarar uma nova proposição como verdadeira assim que se reconheça que nenhuma contradição vai resultar se acrescentarmos essa proposição como axioma à lista das proposições anteriormente achadas verdadeiras [...].*
>
> [Hilbert (1904), p. 229]

Esta verificação é, para Hilbert, a prova da consistência da axiomática. Uma vez obtido um conjunto de axiomas consistente, ele passa a existir – é verdadeiro –, podendo ser tomado como uma ferramenta de trabalho – isto, no espírito do Princípio Criativo formalista. A consistência assenta no princípio da não-contradição, que mostra a possibilidade de coexistência, que Hilbert acredita ser o suficiente para mostrar a existência/veracidade.

Frege não concorda com esta implicação, defendendo que o facto de as afirmações não serem contraditórias não basta para que sejam verdadeiras – a existência de um ser omnipresente e omnipotente não pode ser justificada pela simples não contradição dos seus atributos. Ou seja, a verdade de um conjunto de afirmações não pode apenas dizer respeito às inter-relações que podem ser estabelecidas. Note-se que essas inter-relações têm, claramente, de ser válidas, mas essa validade resulta, para Frege, do facto de as afirmações serem, já à partida, verdadeiras, descritivas de uma coexistência real intuitiva.

E aqui Hilbert, defendendo que «a Matemática é uma ciência sem pressupostos» [Hilbert (1928a), p. 274], frisa que não nos podemos basear em suposições materiais.

> *[...] Se utilizarmos axiomas materiais como pontos de partida e fundamentos para as demonstrações, a matemática perde, por causa disso, o seu carácter de segurança absoluta.*
>
> [Hilbert (1928b), p. 277]

A ilustrar estas divergências, surge em vários autores uma citação de uma passagem de uma carta de Hilbert a Frege, que deixa bem evidentes estas diferenças e a perfeita consciência delas:

> *A sua frase interessou-me bastante: "Da verdade dos axiomas segue que eles não se contradizem uns aos outros" porque de tudo o que tenho pensado, escrito e ensinado sobre isto, eu tenho dito exactamente o contrário: Se os axiomas arbitrariamente dados não se contradizem uns aos outros, então são verdadeiros, e as coisas definidas por eles existem. Este é para mim o critério de verdade e existência.*
>
> [Hilbert, citado em Sterrett (1994), p. 18]

Ainda assim, mesmo que a consistência bastasse para mostrar a existência, Frege considera inútil a constatação dessa implicação. A prova de consistência é feita por exibição, indicação de um modelo que verifique as propriedades. Ora, ao exibirmos, mostramos, evidentemente, que existe e, portanto, na prática, o processo prova a existência directamente. De facto, Hilbert, para mostrar a consistência do seu sistema axiomático para a Geometria, recorre à exibição de um modelo aritmético – que se presume consistente! Mas, na linha de raciocínio de Hilbert, também é necessário mostrar a consistência da Aritmética. E aqui surgem mais problemas...

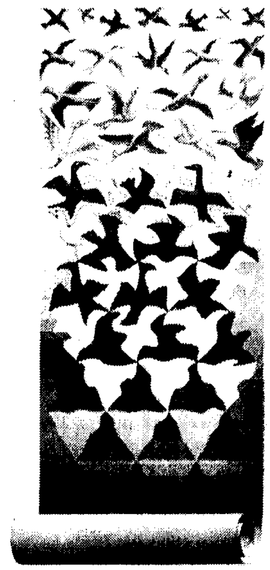
> *Com efeito: as dificuldades que aparecem ao fundamentar a aritmética são, em parte, em virtude da sua natureza, distintas daquelas que foram ultrapassadas ao estabelecer os fundamentos da geometria. No exame dos fundamentos desta ciência podiam deixar-se de lado certas dificuldades de carácter puramente aritmético; porém ao fundamentar a aritmética, não parece permitido o recurso a outra disciplina básica.*
>
> [Hilbert (1904), p. 221]

Deste modo, Hilbert propõe-se a desenvolver uma estrutura para a Aritmética de acordo com o método axiomático da sua Teoria da Demonstração, promovendo o desenvolvimento conjunto com a Lógica, donde deve decorrer directamente a conclusão da sua consistência [ver Hilbert (1904), pp. 223 a 233]

> *As considerações esboçadas constituem o primeiro exemplo em que se logra chegar a uma demonstração directa da consistência de axiomas, sendo certo que falham necessariamente, aqui, os métodos habituais em tais demonstrações – em particular, na geometria –, de especialização apropriada ou de construções de exemplos.*
>
> [Hilbert (1904), p. 228]

Nos próximos dois capítulos, exploraremos mais especificamente dois domínios fundamentais da Matemática – a Aritmética e a Geometria –, abordando algumas destas questões que levantamos a propósito dos Fundamentos...

4. COMEÇANDO A CONTAR



[Escher, "Liberation" in http://4umi.com/escher/]

4.1. Números e conjuntos

Um e um são sempre dois
Dois e dois são sempre quatro
Por quem sois, por quem sois
Não troqueis luas e sóis
Cada pé em seu sapato
[Sérgio Godinho, "O Farturas quer ser rico" (1988)]

A Matemática são números! – é o que se ouve muitas vezes. Realmente, o trabalho dos números é uma parte importante da Matemática, mas não é a única! Ainda assim, as potencialidades dos números na descrição e compreensão do real tornam-nos numa peça chave em todo o edifício matemático. E desde muito cedo que vamos aprendendo os números, identificámo-los, comparámo-los, manipulámo-los,... E isto dá-se desde tão cedo que nos "esquecemos" de perguntar o que é um número. Também para o que nos é pedido que façamos com eles, precisamos de lhes conhecer as relações e o modo como trabalham e não o material de que são feitos. Mais uma vez, esta questão só assume grande importância quando chegamos aos Fundamentos, quando queremos, de facto, descrever aquilo com que trabalhamos. Uma vez que o estudo dos Fundamentos não se quer que seja um momento de puro entretenimento intelectual, há que captar aquilo que é realmente intrínseco aos números quando com eles trabalhamos ou aquilo que eles têm de ser para que com eles possamos trabalhar habitualmente. E, nesta disjunção, podemos, mais uma vez, distinguir as posições de Frege e de Hilbert... Mas voltemos, ainda, às nossas primeiras bases...

A Matemática como disciplina escolar é-nos apresentada logo no primeiro ano da escola e, ainda antes dos números e das contas, são-nos pedidas associações, comparações e identificações com base em análise de propriedades. A ideia de conjunto como colecção de coisas que partilham uma propriedade é das primeiras noções intuitivas que adquirimos, sendo, de facto, o conceito de conjunto de primordial importância no edifício matemático. Mas afinal, o que é um conjunto? Vamo-nos apercebendo que conjuntos são algumas coisas todas juntas, eventualmente por algum motivo... Vamos juntando os pares dos sapatos, os lápis da escola, os meninos da turma, as coisas amarelas, as coisas que voam,... Aprendemos a falar destes todos como algo único, mas nunca definimos o que é um conjunto. Com o passar dos anos, os conjuntos trabalhados na sala de aula de Matemática tornam-se, essencialmente, numéricos e são objecto de trabalho habitual mas continuam sem uma definição. Isso não é preocupante pois aquela noção intuitiva das coisas juntas e da partilha de propriedades é suficiente para que com eles e sobre eles possamos trabalhar. A questão ganha importância apenas quando chegamos aos Fundamentos e aí, sim, pode tornar-se preocupante não sabermos definir o nosso objecto de trabalho. Já no Ensino Superior, em cursos de Lógica podemos tomar contacto com teorias que nos apresentam o conjunto como sendo uma espécie de termo primitivo. Nessa altura, o conceito já está tão enraizado e mecanicamente trabalhado que pode parecer estranha a sua utilização para a definição de outros conceitos que adquirimos também sem definição como o número ou as operações numéricas. Mas um recuo no tempo para relembrar como aprendemos essas ideias, ainda que intuitivamente, mostra-nos que, de facto, o conjunto já, então, lá estava presente... Estabelecem-se correspondências biunívocas entre conjuntos e os números são-nos apresentados como o "tamanho" desses "conjuntos físicos" (sempre como colecções de coisas bem visíveis). As operações básicas resultam também quase directamente da manipulação desses conjuntos e dos seus objectos (que se juntam e separam, agrupam e reagrupam).

«Os Fundamentos da Aritmética» de Frege têm como subtítulo «Uma investigação lógico-matematica acerca do conceito de número», deixando antever uma preocupação concertada em fazer emergir o conceito de número. Frege, após algumas considerações iniciais, apresenta e destrói pontos de vista aceites por muitos que considera falharem na compreensão do conceito de número, apresentando e defendendo em seguida a sua própria visão. Os números não têm uma definição geométrica. Considerar o número cardinal como indefinível por ser auto-evidente é apenas resultado das tentativas falhadas de o tornar definível. Os números não são propriedades de coisas exteriores. Os números não são representações mentais subjectivas. Os números não são colecções de unidades. [Frege (1884), p. 53 e 61]

A ideia chave na compreensão do número de Frege é que ele não é uma propriedade mas sim ele próprio um objecto. E como tal, surge associado a conceitos e não a objectos, até porque correríamos o risco de sobre o mesmo objecto caírem diferentes números. «De facto, aquilo que se verifica quando no mesmo fenómeno físico se contam simultaneamente 52 cartas, 13 grupos de figuras, 4 naipes e 1 baralho é a atribuição de diferentes números a conceitos diferentes e não a atribuição de diferentes números aos mesmos objectos» [Zilhão (1992), in Frege, p. 11].

Frege enumera três princípios fundamentais, cruciais para compreender a sua análise:

> *É necessário separar com nitidez o que é psicológico do que é lógico, o que é subjectivo do que é objectivo.*
>
> *Só se pode perguntar pela denotação de uma palavra no contexto de uma proposição e não considerando-a isoladamente.*
>
> *Deve manter-se sempre presente a distinção entre conceito e objecto.*
>
> [Frege (1884), p. 34]

O conceito é um elemento base na sua teoria, sendo importante notar que não deve ser concebido como uma abstracção subjectiva dos objectos, devendo ser possível constituir-se conceitos «apenas a partir de características, isto é, de forma independente de qualquer consideração de grupos de objectos» [Zilhão (1992), in Frege, p. 10].

Frege reconhece que

> *É certo que [...] os meus argumentos se tornaram bem mais filosóficos do que o que poderá parecer lícito a muitos matemáticos; mas uma investigação exaustiva em redor do conceito de número está sempre destinada a ter que ter um pendor algo filosófico. Esta tarefa é comum à Matemática e à Filosofia.*
>
> [Frege (1884), p. 31]

A comparação de números está associada ao conceito de equinumericidade, pelo estabelecimento da correspondência biunívoca que vimos atrás no Princípio de Hume. Mas para chegar explicitamente ao "0", ao "1" e ao "2", Frege, além da definição dada implicitamente pelo Princípio de Hume, acrescenta [ver George (2002), pp. 30 a 33] outra definição para o "número de *F*'s".

O número de F's = extensão do conceito "equipotente com F".

E depois disto...

n é um número (cardinal) se e só se existe um conceito F tal que n = número de F's.

Assim, Frege define "0" como sendo o número do conceito "não é idêntico a si próprio". No seguimento, o "1" é o número do conceito "é idêntico a 0" – cujo o único objecto que abrange é o próprio "0". E, de modo análogo, "2" é o número do conceito "é idêntico a 0 ou a 1"... Prossegue na sua estruturação, procurando atingir a definição de número natural. E, depois de uma definição da noção de sucessor [ver George (2002), pp. 32 a 35], podemos concluir que «os números naturais são apenas o 0, o sucessor de 0, o sucessor do sucessor de 0, e assim por diante», restando clarificar o significado lógico de este «assim por diante»... Esta clarificação feita por Frege aproxima-nos do princípio da indução, dizendo-se por vezes que define os números naturais como a colecção de objectos para os quais é válida a indução»...

k é um número natural se e só se k é abrangido por todo o conceito F que satisfaz

- 0 é abrangido por F

- sempre que x é abrangido por F o seu sucessor também é

Hilbert mostra-se contra esta construção dos números à custa de conceitos e extensões...

> *G. Frege [um dos sábios que penetraram mais profundamente na essência do número inteiro] propôs-se o problema de fundamentar as leis da aritmética com os recursos da* lógica, *no sentido tradicional. Prestou o serviço de haver reconhecido correctamente as propriedades essenciais do conceito de número inteiro bem como o significado do raciocínio por indução matemática. Todavia, por coerência com o seu próprio projecto, ao aceitar como princípio fundamental, entre outros, que um conceito (um conjunto) seja definido e aplicável imediatamente, somente quando para cada objecto está determinado se ele é ou não abrangido pelo conceito, e aqui não impõe restrição alguma na noção «cada objecto», expõe-se a cair naqueles paradoxos da teoria dos conjuntos que radicam, por exemplo, na noção de conjunto de todos os conjuntos e que me parecem mostrar que as concepções e os meios de investigação da lógica tradicional não estão à altura das severas exigências da teoria dos conjuntos.* Ao invés, desde o princípio que deve ser considerado como objecto primordial das investigações sobre a noção de número o evitar de tais contradições e o esclarecimento desses paradoxos.

[Hilbert (1904), p. 222]

O símbolo é, para Hilbert, a base da construção dos números. No seu programa finitista, os números são entidades reais e não ideais, e portanto, «algo tem de ser dado na concepção», há a necessidade de existência de «certos objectos extra-lógicos concretos que são intuídos directamente pela experiência anterior a qualquer pensamento» [Hilbert (1925), citado em Shapiro (2000), p. 161].

> *[...] na matemática são objectos da nossa consideração os próprios símbolos concretos, cuja forma é imediatamente clara e reconhecível, de acordo com a concepção adoptada.*

[Hilbert (1926), p. 244]

Tendo por base um primeiro símbolo numérico, Hibert considera justaposições e combinações desse objecto consigo mesmo para criar os números

1, 11, 111, 1111,...

e desenvolve sobre eles um sistema de axiomas que lhes atribui as propriedades [ver Hilbert (1904), pp. 223 a 233]. Assim, procura, à semelhança do que fez com a Geometria, aplicar o método axiomático também à Aritmética, havendo uma liberdade criativa na escolha dos axiomas apenas sujeita, mais uma vez, à garantia da sua consistência.

> *Penso que todas as dificuldades que abordámos podem ser ultrapassadas, e que é possível chegar a uma fundamentação rigorosa e satisfatória do conceito de número por um método que designo por* axiomático *[...].*
>
> *Caracteriza-se frequentemente a aritmética como uma parte da lógica, e as noções lógicas tradicionais fundamentais são geralmente pressupostas quando se trata de estabelecer uma fundamentação para a aritmética. Numa observação atenta, todavia, constata-se que na exposição tradicional das leis da lógica já estão presentes alguns conceitos aritméticos fundamentais como, por exemplo, o de conjunto e também, em certa medida, o de número. Sendo assim, encontramo-nos às voltas num círculo e, portanto, para evitar paradoxos é preciso um desenvolvimento parcialmente simultâneo da lógica e da aritmética.*
>
> [Hilbert (1904), p. 223]

4.2. O infinito

Desbravaremos de florestas
A mares
Se vais pelos ares
Logo pousas e penso
Melhor irás entre o furor e o bom senso
[Sérgio Godinho, "Salão de festas" (1984)]

Desde cedo que aprendemos a contar; muitas vezes ainda antes de sabermos falar ensinam-nos a mostrar com os dedos quantos anos temos. Inicialmente será algo mecânico, por imitação, mas com o passar dos anos, vamos percebendo que cada dedo indica um ano, e se eu tenho mais dedos no ar é porque tenho mais anos... Aprendemos também a chamar nomes a essas combinações de dedos... "um", "dois", "três",... Já em processo escolar, aprendemos mais números... "vinte", "trinta", "cem", "mil",... e vamos ganhando consciência que podemos continuar o processo de contagem indefinidamente. Passamos a ser capazes de "inventar" números cada vez maiores e perante um número sabemos sempre como suplantá-lo: se dizem "1", eu posso dizer "2", se dizem "100", eu posso dizer "101", se dizem "8 475", eu posso dizer "8 476", se dizem "999 999 999 999 999 999", eu sei que posso dizer "1 000 000 000 000 000 000" – ainda que possa não saber como nomear tal entidade...

Na impossibilidade de escrever "todos os números", familiarizamo-nos com a utilização das reticências como indicação de que a enumeração continua à semelhança do que se verificava até então. Esta continuação indefinida ganha também um nome: "infinito". O infinito é – sem o ser! – assim uma espécie de último número, aquele lá longe, bem longe, depois de todos os outros, que sabemos que nunca seremos capazes de enumerar na totalidade. Os conjuntos infinitos passam a ser material de trabalho da sala de aula. Aqueles números das contagens recebem o nome de "naturais", mas depois vêm outros, os "inteiros", os "racionais", os "reais",... Todos eles conjuntos infinitos, parecendo-nos cada um maior que o anterior... Mas nós já tínhamos "chegado" ao infinito... Afinal quantos números temos? Já tínhamos infinitos, e passamos a ter ainda mais... Mas mais do que infinitos???!!! Pois é, quando pensamos nisso, as coisas começam a complicar-se, e podem parecer ainda mais complicadas quando começamos a tentar responder-lhes... «Ora, que haja um infinito maior do que o infinito parece-me um conceito totalmente ininteligível» dizia Simplício, personagem aristotélica dos Discursos de Galileu.

A problemática dos cardinais infinitos ocupa os matemáticos desde há muito tempo. A ideia de que «o todo é maior que a parte» (já defendida na quinta noção comum de Euclides), em relação a grandezas, foi generalizada, o que levou a que se pensasse que se um conjunto estivesse estritamente contido noutro, este seria maior que o primeiro. Galileu apercebe-se que, no caso dos conjuntos infinitos, não é bem assim, dizendo nos seus Discursos, na voz de Salviati, «estimo que atributos de majoranças, menoridade e igualdade não convêm aos infinitos». Apresenta, então, o exemplo dos quadrados perfeitos e dos números naturais: apesar de o primeiro conjunto estar estritamente contido no segundo, isto é, de acordo com a concepção dos gregos, o primeiro ser menor que o segundo, mostra que existem tantos elementos num como noutro, exibindo o que hoje denominaríamos por bijecção. Chega assim a uma contradição acabando por concluir (novamente pela voz de Salviati) que os cardinais infinitos não são comparáveis: «Não vejo que possa chegar-se a outra decisão que não seja dizer serem infinitos todos os números, infinitos todos os quadrados, infinitas as suas raízes, nem ser a quantidade dos quadrados menor do que a de todos os números, nem esta maior do que aquela, e, finalmente, os atributos igual, maior e menor não terem lugar nos infinitos, mas somente nas quantidades limitadas». Galileu evita assim o confronto, contornando a questão... Mas o grande "legislador" dos cardinais infinitos é Cantor que, enfrentando novamente a questão, diz que estes conjuntos se comparam através de bijecções e não de inclusões. Agora o todo pode não ser maior do que a parte! E um conjunto diz-se infinito, precisamente nessa situação, isto é, quando se pode pôr em bijecção com algum dos seus subconjuntos próprios. São, além disso, reconhecidos diferentes tipos de infinito, sendo a infinidade de naturais igual à de inteiros e de racionais, mas diferente da infinidade de reais. Neste sentido, podemos, de facto, dizer que os reais são mais que os naturais, mas não podemos afirmar essa desigualdade entre racionais e naturais, pois sobre os primeiros mostra-se não ser possível estabelecer uma bijecção enquanto que sobre os segundos essa bijecção pode ser construída – ainda que possa não o parecer à partida...

Reconhecendo a existência de diferentes cardinalidades infinitas, em particular, a dos naturais e a dos reais, pergunta-se se haverá outras... Ainda Cantor responde que sim, considerando para tal o conjunto de todos os subconjuntos de um conjunto dado e mostrando que não pode ser posto em bijecção com o conjunto inicial – Teorema de Cantor. Assim, dada uma cardinalidade ($\aleph_n$) consegue outra estritamente superior ($2^{\aleph_n}$), ou seja, há uma infinidade de cardinalidades infinitas. Mostra também que as cardinalidades de $\mathbb{N}$ e de $\mathbb{R}$ respeitam a relação acima, isto é, designando por $\aleph_0$ a cardinalidade dos naturais, a cardinalidade dos reais (ou cardinalidade do contínuo – por sugestão do preenchimento da recta) é $2^{\aleph_0}$. Pergunta-se, então, se haverá alguma coisa pelo meio... Ou seja, considerando a ordenação dos transfinitos $\aleph_0$, $\aleph_1$, $\aleph_2$,... será que $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$?... Esta era a primeira questão dos famosos 23 problemas de Hilbert – questões simples (de resposta complicada) ainda em aberto (aquando da sua reunião por Hilbert em 1900). Hoje tem-se esta questão por indecidível, pois mostrou-se serem tão consistentes sistemas que a tomam como axioma (Hipótese do Contínuo) como sistemas que postulam a sua negação.

O trabalho de Cantor de legislação do infinito e tratamento dos transfinitos foi revolucionário e, apesar de críticas por parte daqueles que se recusavam a «tratar o infinito como se ele fosse um substantivo» [Guillen (1983), p. 57], a sua teoria foi tida como muito bem-vinda, nomeadamente, por Frege e por Hilbert.

> *[...] eu saúdo nestas investigações um alargamento da Ciência, em particular porque, por seu intermédio, se trilhou um caminho puramente aritmético em direcção aos números cardinais infinitamente grandes de ordem superior (Potências).*
>
> [Frege (1884), p. 99]

Apesar de imbuída de outro espírito de existência, a posição de Frege vai ao encontro da de Cantor...

> *O número cardinal que vem para o conceito «Número cardinal finito» é infinito. Designemo-lo através de, por exemplo, ∞_1! [...]*
>
> *[...] «O número cardinal que vem para o conceito F é ∞_1» quer dizer nem mais nem menos que: há uma relação que faz corresponder biunivocamente os objectos que caem sob o conceito F com os números cardinais finitos.*
>
> [Frege (1884), p. 98]

Um outro ponto de acordo está relacionado com a irrelevância da incapacidade de representação. Quanto às diferenças que Frege aponta vêm já de trás, da definição de número. Frege alega que o recurso finito à ordenação – por estar relacionado com o último termo de uma sucessão – utilizado por Cantor (numa visão de teoria de conjuntos), não é adequado ao infinito, exigindo, por isso, uma ampliação do conceito de número. E frisa que com a sua definição «não houve qualquer necessidade de ampliação porque o [...] conceito de número cardinal abrange também desde logo números infinitos» [Frege (1884), p. 99], que se encontram «tão caracteristicamente determinado[s] como qualquer número cardinal finito» [Frege (1884), p. 98].

Hilbert, talvez um dos mais entusiastas, mostrou-se um forte admirador do trabalho de Cantor, classificando-o como «a mais admirável flor do intelecto matemático e um dos mais altos empreendimentos da actividade humana puramente racional» [Hilbert (1910), citado em Guillen (1983), p. 58] – daí a sua célebre referência ao "paraíso de Cantor". O desenvolvimento de Hilbert procura, então, habilitar de forma consistente a existência destas novas entidades cantorianas. Mas, no percurso da definição e manipulação do infinito, Hilbert identifica diferentes atitudes por parte dos matemáticos...

Em face da falta de legislação existente, Hilbert reconhece a riqueza das novas ideias que surgiram para tratar o infinito; a importância do seu tratamento axiomático de modo a matematizar noções até então envolvidas numa névoa mais ou menos densa, ignorada de forma mais ou menos conveniente pelos que por ela passavam.

> *[...] com a gigantesca colaboração de Frege, Dedekind e Cantor o infinito foi finalmente elevado ao trono e gozou um período do mais alto triunfo. Em voo da maior ousadia, o infinito alcançou um sucesso vertiginoso.*
>
> [Hilbert (1926), p. 242]

O sucesso do infinito vem directamente do levantar daquela névoa em que estava envolto, tornando-se numa entidade bem definida e tratável matematicamente às claras, sem necessidade de artifícios mais ou menos assumidos. O infinito adquire, assim, um novo estatuto, o de entidade matemática. E esse estatuto confere-lhe novas utilizações, que, apesar de férteis, se revelam, por vezes, descuidadas...

> *Com a euforia inerente aos novos e ricos resultados, os matemáticos não cuidaram aparentemente da análise crítica suficiente da admissibilidade dos novos modos de raciocínio; pois, do mero exercício dos modos de definição de conceitos e de raciocínios utilizados – modos a que, com o tempo, se tinham habituado –, resultaram algumas contradições, esporádicas de início, e depois cada vez mais severas e incontornáveis: os chamados paradoxos da teoria de conjuntos.*
>
> [Hilbert (1926), p. 242]

A extrapolação dos hábitos do finito ao infinito tem de ser cuidada, pois "muitos" não é "infinitos" e mesmo os infinitos não são todos iguais... Os paradoxos da teoria de conjuntos estão, então, habitualmente associados a problemas com "infinidades demasiado grandes". Perante as contradições apontadas, houve teorias abandonadas pelos seus criadores, nomeadamente a de Frege (como já vimos no capítulo anterior), e ataques à capacidade de resposta de qualquer teoria que se visse nessa situação.

> *A reacção foi tão violenta que até os conceitos mais comuns e úteis e os raciocínios mais simples e importantes em matemática foram postos em causa e ameaçados de proibição. [...] Os remédios contra os paradoxos foram recomendados*

em demasia e os métodos de clarificação enfermaram de muitas vicissitudes.

[Hilbert (1926), pp. 242/3]

Falando «Sobre o infinito», Hilbert (1926) tece considerações sobre o atomismo da matéria, da electricidade e da energia e sobre as teorias cosmológicas de um universo finito, mas não deixa de reservar um lugar indispensável ao infinito, apesar de não real.

Estabelecemos a finitude do mundo real em duas direcções: segundo o infinitamente pequeno e segundo o infinitamente grande. No entanto, pode bem dar-se o caso de o infinito ter um lugar bem justificado no nosso pensamento *e aí desempenhar o papel de um conceito indispensável. Examinaremos a situação a esse respeito na ciência matemática e, em primeiro lugar, consultaremos a mais pura e ingénua criação do intelecto humano, a teoria dos números.*

[Hilbert (1926), p. 238]

Para Hilbert, o lugar do infinito está, então, ao nível das ideias, num lugar distinto dos números, que têm uma espécie de captação real – chama-lhe infinito actual, para distinguir do infinito real (que não encontramos, de facto, «em parte alguma na realidade, quaisquer que sejam as experiências ou observações ou ciências que sejam aduzidas» [Hilbert (1926), p. 243]). Entramos, assim, no mundo da Matemática ideal, que surge (como já referimos no capítulo anterior) como forma de complementar a Matemática real, preservando possibilidade de aplicação de métodos gerais e a simplicidade das conclusões extraídas. De acordo com as suas ideias finitistas, mas também na sua postura de recuperação das teorias úteis, Hilbert defende que

[...] devemos substituir o infinito nos raciocínios dedutivos por processos finitos que tenham exactamente os mesmos resultados, isto é, que permitam fazer demonstrações segundo as mesmas linhas directrizes e utilizar os mesmos métodos para obter fórmulas e teoremas.

[Hilbert (1926), p. 235]

Hilbert enquadra, então, o tratamento do infinito no desenvolvimento do seu programa finitista, onde procura enumerar proposições finitárias e formalizar proposições ideais, assumindo o seu esvaziamento de conteúdo. Consegue, assim, de forma controlada, uma extensão desejada da aplicabilidade da Lógica Clássica.

O direito a operar com o infinito só pode ser assegurado através do finito.

O papel que fica reservado ao infinito é simplesmente o de uma ideia [...] na qual só podemos confiar sem hesitações dentro do quadro fornecido pela teoria que aqui esbocei e defendi.

[Hilbert (1926), pp. 254/5]

4.3. Definição e aplicação

E já que no fundo
Vai tudo dar ao mesmo
Diga-me se o mesmo é mesmo
Tudo o que ainda vai mudar
[Sérgio Godinho, "Caramba" (1980)]

A Aritmética entra nas nossas vidas desde muito cedo e de forma tão natural, que não nos damos conta das noções utilizadas e dos processos envolvidos: aprendemos pela repetição e sabemos pela prática. Quando, de facto, se tentam formalizar conceitos e métodos, a utilização que deles fazemos até então é um condicionador bastante forte. Será que conseguimos sempre distinguir aquilo que as coisas são, daquilo que queremos que elas sejam?... Será que distinguimos as causas das consequências?...

Um exemplo desta dificuldade de distinção é apresentado por Steiner [Steiner (2005), pp. 632 a 636] e está relacionado com noção de multiplicação. É habitual pensarmos a multiplicação como uma soma repetida em que um dos factores é uma parcela e o outro é o número de vezes que essa parcela é somada. Aqui Steiner faz notar que o papel ontológico das variáveis é distinto, sendo o factor parcela uma verdadeira variável matemática enquanto que o factor repetição é uma variável metalinguística. Tendo em conta esta diferença ontológica das variáveis, como justificar a comutatividade da operação? Steiner alerta, então, para o facto de a soma repetida ser uma equivalência da multiplicação, mas uma equivalência justificável por processos não puramente lógicos, ou seja, não deve ser vista como uma definição. Prossegue apresentando uma outra visão, agora do ponto de vista da teoria de conjuntos. Aqui a multiplicação é definida como o número (cardinal) de um conjunto de conjuntos, e, ainda que os factores desempenhem papéis diferentes, deixamos de ter variáveis metamatemáticas. Esta diferença de papeis (não ontológica) é o que nos permite "multiplicar doces por crianças", impedindo-nos de "multiplicar doces por doces". A comutatividade segue por análise bijectiva dos conjuntos em causa e a soma repetida é, no fundo, uma aplicação do conceito de multiplicação, que Steiner frisa não ser, de todo, empírica.

Do lado oposto da definição descuidada, minada por intuições ou utilizações frequentes, está o excessivo esvaziamento de conteúdo, a adopção de descrições meramente formais... Com tanta formalização, será que as definições que construímos ainda são aplicáveis?... Será que as preocupações dos Fundamentos têm em conta a aplicabilidade da Matemática?...

Uma das críticas que Frege aponta ao Formalismo (mais radical) é precisamente o não ter em conta a aplicabilidade. Os resultados matemáticos são ferramentas de trabalho de inúmeras ciências, se esvaziamos os conceitos de conteúdo e manipulamos apenas símbolos sem significado de acordo com regras estabelecidas criativamente, como explicamos a real aplicação que se verifica da Matemática aos outros domínios? O que distingue aqui a Matemática da enumeração de regras de um jogo de xadrez?

> *É a aplicabilidade por si só [...] que eleva a Aritmética de um jogo ao posto de uma ciência. Portanto, a aplicabilidade pertence-lhe necessariamente.*
>
> [Frege (1903), citado em Dummet, p. 256]

Frege contraria o Formalismo, defendendo que a aplicabilidade é intrínseca à Aritmética e não algo isolado que lhe surge como exterior e independente (como parecem fazer crer as interpretações formalistas). E para ser aplicável tem de expressar alguma forma de pensamento, não podem ser apenas regras vazias de conteúdo. No entanto, também não nos podemos deixar levar pela ideia de que cada uma das suas aplicações específicas deve ser captada para a sua construção. Interessa reter o que de comum há entre elas...

> *é razoável exigir este trabalho dos aritméticos, até ao ponto em que eles o possam realizar sem invadir aqueles domínios específicos do conhecimento. Por isto, ele precisa, acima de tudo, de atribuir um sentido às suas fórmulas; e isto será feito de forma tão geral que, com a ajuda dos axiomas geométricos e das observações e hipóteses físicas e astronómicas, possam ser encontradas diversas aplicações dentro destas ciências.*
>
> [Frege (1903), citado em Dummet, p. 259]

É, também, nesta generalidade que Frege sustenta que aplicações posteriores, tão diferentes de todos os desenvolvimentos até então, possam ocorrer sem que sejam vistas como coincidências ou milagres [como referido em Dummet (1991), p. 293]. Esta posição de Frege na análise da aplicabilidade da Aritmética e na sua conciliação com o rigor dedutivo é rebatida e são-lhe apontadas falhas ao nível, essencialmente, da natureza ontológica dos objectos matemáticos, mas o seu papel, ainda que não completamente conseguido, é, sem dúvida, crucial [ver capítulo 23 de Dummet (1991)].

> *[...] quando chegamos ao nível de estabelecer a teoria sobre fundamentos firmes, não podemos ser tentados pela visão mais forte do estruturalismo [que se preocupa apenas com as estruturas abstractas] para perder de vista quer as aplicações originais, quer as futuras.*
>
> [Dummet (1991), p. 300]

Olhemos, agora, a Geometria, na sua evolução do tratamento rigoroso do conhecimento...

5. PENSANDO GEOMETRICAMENTE

[Escher, "Reptiles" in http://www.mupinc.net]

5.1. O estatuto da Geometria

Vieram profetas
Vieram doutores
Santos milagreiros, poetas, cantores
Cada qual com um discurso diferente
P'ra curar a vida da gente
[Sérgio Godinho, "Barnabé" (1973)]

[...] A Geometria é, por excelência, um tema formativo no sentido mais amplo do termo que, pela resolução de problemas apropriados desenvolve variadas capacidades, desde a observação ao raciocínio dedutivo, ao mesmo tempo que deixa perceber verdadeiras conexões entre os vários temas da Matemática, da Álgebra à Análise e à Estatística. [...] Não estão sugeridos explicitamente no corpo do programa, mas todo o estudo da Geometria Analítica se baseia numa geometria sintética euclidiana, semi-indutiva, semi-dedutiva em que se procuram explorar

intuições espaciais e habilidades dedutivas.

[in Programa Escolar de Matemática A – 10.º ano (2001), pp. 7 e 21 (destaque nosso)]

A exploração de «intuições espaciais e habilidades dedutivas» é bastante incentivada no ensino, pois permitem que o aluno literalmente "veja" melhor aquilo que prova e como o faz. Mas, por outro lado, a utilização da nossa habilidade intuitiva para além do "permitido" pode induzir-nos em alguns erros. A nossa intuição espacial, usada tantas vezes de modo inconsciente, levanta uma questão importante relativamente ao carácter da Geometria. Surgem posições diferentes relativamente à sua simetria ou assimetria dos restantes domínios da Matemática, ao papel atribuído à intuição e ao conhecimento *a priori*.

A Geometria é uma área que historicamente passou por diferentes picos de importância. É no contexto das medições de áreas e comprimentos de terrenos que habitualmente nos é apresentado o início da Geometria (ainda na época egípcia). A Geometria vai acumulando saberes e informações essencialmente práticas, mas o seu contributo para a criação / descoberta e organização do conhecimento rigoroso foi durante muito tempo subvalorizado. No início da tão produtiva época da Antiguidade Grega, a Geometria tem um papel secundário numa peça protagonizada pela Aritmética. Mas a descoberta da incomensurabilidade evidencia falhas graves no desempenho da protagonista e aí começa a ascensão da Geometria, como principal suporte no estudo do contínuo. A Geometria das Áreas vai-se instalando como novo método de descoberta, surgindo a Álgebra como forte utilizadora deste novo método – fala-se mesmo em Álgebra Geométrica ou Geometria Algébrica. Mas esta utilização, este novo método, que se revela bastante produtivo na descoberta, é questionada nas suas capacidades de prova efectiva. As justificações geométricas são aceites como motor de descoberta, pois possibilitam uma visão mais intuitiva das propriedades, no entanto, e talvez por isso, as justificações puramente geométricas não são muitas vezes tidas como verdadeiras provas, carecendo de "verdadeiros argumentos", nomeadamente algébricos e analíticos. Há também a ideia, entre alguns dos precursores da Álgebra, que os métodos algébricos já há muito que eram utilizados como motor de descoberta de resultados geométricos, sendo, no entanto, "egoisticamente" mantidos em segredo: «Infelizmente, afirmava Descartes, os antigos cobiçavam a admiração dos outros mais do que amavam a verdade e, por isso, esconderam os seus métodos para impedir que outros vissem o quão fáceis e vulgares eram realmente muitas das suas descobertas» [Detlefsen (2005), p. 254].

A Geometria está, então, desde há muito ligada à Álgebra e à Análise, sendo frequentemente o ponto de partida, mais ou menos oficial, com maior ou menor autoridade, para a intuição e demonstração de resultados. Daí que, também pedagogicamente, seja de incentivar o recurso à Geometria para o desenvolvimento da capacidade de observação e a exploração de «intuições espaciais» tantas vezes úteis em diversas áreas, aparentemente não "tão geométricas". Mas a afirmação da Geometria também como ciência rigorosa tem o seu forte pilar em Euclides e nos seus «Elementos». A axiomatização e síntese conseguidas por Euclides procuram libertar a Geometria da mera capacidade intuitiva, criando uma argumentação sustentada e procurando minimizar o número de afirmações sem prova. É neste contexto que a Geometria surge como área de exploração de «habilidades dedutivas», tornando (literalmente!) mais visíveis relações de dependência e independência de propriedades. Já no século XIX, e num contexto geralmente fora do âmbito escolar, a Geometria sofre um forte abanão com a afirmação das Geometrias Não Euclidianas. Ainda que as propriedades geométricas fossem justificadas de forma sintética e estivessem inseridas num sistema axiomático, a, digamos, inspiração criativa dos argumentos, bem como os resultados finais das provas foram-se mantendo bastante intuitivos. A descoberta da independência do Postulado V de Euclides e o consequente desenvolvimento de outras Geometrias exige uma reestruturação axiomática da Geometria. Hilbert consegue-o nos seus «Fundamentos da Geometria», devolvendo e solidificando o rigor axiomático da Geometria. Com Hilbert, os conceitos, as propriedades e os argumentos, ainda que inspirados numa intuição geométrica, são passíveis de se libertarem completamente dessa ligação, mantendo-se a consistência de toda a estrutura. Num nível axiomático, a Geometria é assim colocada, por Hilbert, a par de outras áreas.

Esta paridade disciplinar atingida pela Geometria de Hilbert não é apoiada por Frege, que, apesar de também estar empenhado na axiomatização matemática, não desliga completamente a Geometria do seu carácter intuitivo, reconhecendo, nomeadamente, à Lógica e à Aritmética uma posição diferente, estas sim passíveis de uma análise independente e completamente geral...

Frege e Hilbert reconhecem à Geometria, como a todo o conhecimento matemático, a possibilidade / necessidade de desenvolvimento axiomático segundo deduções lógicas. No entanto, diferem quanto à natureza dos axiomas. Frege distingue a

Geometria da Aritmética, mantendo na primeira um estatuto a priori onde os objectos e axiomas são reflexo do real e elevando a segunda a um nível dependente apenas do pensamento racional, mais imbuído nos Fundamentos e completamente desligado do real. Hilbert defende uma simetria entre as duas, vendo a Geometria não como um reflexo de propriedades do real, mas sim, acima de tudo, como uma rede de relações. Hilbert não rejeita toda a influência do real intuitivo mas concebe a possibilidade de libertação após essa inspiração intuitiva.

5.2. Dos «Elementos» aos «Fundamentos»

E quero aplaudir a gente
Que se amanha e que se mexe
É p'lo menos ponto assente
Não ficar no queixe-queixe
[Sérgio Godinho, "Aguenta aí" (1997)]

*Devem dar-se a conhecer problemas históricos e propor ao estudante a resolução de pelo menos um. Será também conveniente dar a conhecer um pouco da História da Geometria à qual estão ligados nomes dos maiores matemáticos de todos os tempos (**Euclides**, Arquimedes, Newton, Descartes, Euler, **Hilbert**, entre muitos outros).*
[in Programa Escolar de Matemática A – 10.º ano (2001), p. 24 (destaques nossos)]

Estão apenas citados alguns nomes de Euclides a Hilbert, mas, na História da Geometria (axiomatizada), estes dois são, de facto, grandes nomes, sendo os seus «Elementos»[1] e «Fundamentos da Geometria»[2] pilares importantes. Os «Elementos» são uma obra de referência a este nível escolar, que, pela sua proximidade do real sensível, é

[1] Para uma análise comentada da obra, ver Heath, Sir Thomas (1956), *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, Dover Publications, Inc.
Para uma consulta da obra na internet, ver http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html

[2] *Grundlagen der Geometrie* – A obra está disponível com tradução portuguesa, incluindo apêndices do autor e suplementos de P. Bernays, F. Enriques e H. Poincaré: Hilbert, David (1930), revisão e coordenação de A. J. Franco de Oliveira (2003), *Fundamentos da Geometria*, Gradiva

facilmente compreensível nos seus princípios básicos, sendo habitualmente o ponto de partida para a introdução das noções de estruturação axiomática. Os «Fundamentos» de Hilbert, são, sem dúvida, ao nível da Geometria, uma obra mais completa que os «Elementos» de Euclides, quer ao nível axiomático, quer ao nível de conteúdos. Mas porque é que Euclides não atingiu logo o nível de axiomatização de Hilbert?... E porque é que sabendo nós deste aperfeiçoamento de Hilbert relativamente a Euclides, continuamos a nível escolar a basear a apresentação axiomática nos «Elementos»?... O processo de descoberta, construção e justificação do conhecimento é gradual, tanto no ensino, como na História, e, muitas vezes, é do questionar do que já foi alcançado que se consegue avançar. A obra de Euclides é um exemplo de rigor axiomático, tendo em conta a sua época. «É à publicação dos *Elementos* que Euclides deve o seu lugar de honra na história da matemática. Depois da *Bíblia,* é a obra mais editada em todo o mundo; e foi praticamente o único livro de texto usado no ensino elementar da matemática durante mais de dois milénios (desde o século III a.C. até ao século XIX)» [Sá (2000), p. 250]. Hilbert beneficiou do questionamento que se foi fazendo ao longo de todos estes anos sobre os «Elementos» e das descobertas que daí resultaram, vivendo, também, um período rico no que toca à discussão dos Fundamentos da Matemática. Assim, Hilbert atinge uma formulação consistente e auto-suficiente que respeita novos padrões de rigor, apesar disso, os seus axiomas «são certamente os mais próximos do espírito de Euclides» [Greenberg, p. 71].

Debrucemo-nos agora sobre algumas das diferenças de fundo nestas duas obras.

Sobre a questão dos argumentos intuídos de forma inconsciente, é habitual apontar-se logo a primeira proposição de Euclides:

Elementos I, 1: Construir um triângulo equilátero sobre um dado segmento de recta.

A prova apresentada por Euclides passa por construir duas circunferências centradas nos extremos do segmento e, da intersecção destas circunferências, determinar o terceiro ponto que, juntamente com os extremos do segmento será vértice do triângulo pedido, que é obtido unindo, por segmentos, os três vértices. A possibilidade de construção das circunferências e dos segmentos está garantida por postulados (III e I, respectivamente). A congruência dos segmentos é justificada pela definição de circunferência e pela primeira noção comum (que garante a igualdade de coisas iguais a uma terceira). Fica a faltar um passo: a garantia de intersecção das duas circunferências... Se as circunferências não tivessem ponto comum, como obteríamos o terceiro vértice do triângulo? Este passo é inconscientemente intuído e é aqui que falha a argumentação de Euclides. Hilbert colmata essa falha considerando explicitamente no seu sistema um grupo de axiomas de continuidade (axioma de Arquimedes e axioma linear da completabilidade) [ver Hilbert (1930), p. 28].

Mas das questões que se fizeram sobre os «Elementos», ainda antes das demonstrações, aquelas sobre o Postulado V foram de primordial importância para o alargamento da Geometria.

> Postulado V: *Se uma linha recta incidir em duas linhas rectas e fizer ângulos internos do mesmo lado menores que dois ângulos rectos, então as duas linhas rectas, se prolongadas indefinidamente, encontram-se do mesmo lado em que estão os ângulos menores do que os dois ângulos rectos.*

Este postulado foi controverso desde o seu aparecimento, mesmo o próprio Euclides só o utiliza na sua obra pela primeira vez na demonstração da proposição I, 29. Mas porque é que se há-de pôr em causa um axioma?... Nos «Elementos», Euclides considera cinco postulados e cinco noções comuns, e, destes dez axiomas, este é claramente o mais extenso e o menos evidente. Portanto, uma questão natural foi se este axioma não seria na realidade um teorema, ou seja, se não seria possível deduzi-lo dos restantes. Assim, inicialmente o pôr em causa deste postulado não é um questionar da sua veracidade, é apenas uma questão formal de independência do conjunto dos axiomas. Naturalmente, quer-se que o conjunto dos axiomas seja, entre outras coisas, o mais pequeno possível, sendo a independência dos axiomas um modo de evitar a "repetição". No entanto, as inúmeras tentativas de o demonstrar apenas à custa dos outros axiomas não foram bem sucedidas nesse sentido, abrindo portas no sentido contrário: sendo ele independente, seria possível construir novas Geometrias sem ele ou com outro que o contradissesse? Aqui não é um problema meramente formal, entramos já no conteúdo daquilo que se pode construir com a axiomática em questão. Não é só o Postulado V que é posto em causa, são todas as deduções posteriores que dele dependem. E deste postulado extenso e menos evidente dependem proposições simples (que hoje se sabem serem-lhe equivalentes) como:

> Elementos I, 31: *Traçar uma linha recta por um ponto dado, paralela à linha recta dada.*
>
> Elementos I, 32: *[...] a soma dos três ângulos internos de um triângulo é igual a dois rectos.*

Sem o Postulado V (ou um equivalente) estas proposições, tantas vezes por nós utilizadas, deixam de estar sustentadas. O axioma, sendo independente, se não estiver lá, não pode ser deduzido... Mas e porque é que ele há-de ter de ser deduzido ou assumido? Porque é que ele tem de fazer parte da nossa estrutura? Isto levanta a questão de como decidir o que considerar como axioma?... A Geometria de Euclides, ainda que axiomaticamente estruturada e desenvolvida de forma sintética por deduções lógicas, não perde nunca o seu carácter intuitivo. Os axiomas e as proposições (para já não falar nas definições) têm uma correspondência imediata no nosso real sensível. Portanto, a evidência intuitiva é em Euclides uma forte influência na escolha dos axiomas. Frege tem neste campo uma posição mais próxima de Euclides, no sentido em que defende a veracidade dos axiomas pela sua evidência. Os axiomas geométricos para Frege devem ser o reflexo da realidade, são descrições de verdades que, pela sua evidência não precisam de demonstração. Mas a resposta de Hilbert é mais objectiva, pois, na linha do Princípio Criativo, defende que o matemático pode postular o que quiser se tiver nisso qualquer vantagem, desde que preserve a consistência do conjunto e das suas deduções. Hilbert considera cinco grupos de axiomas: incidência, ordem, congruência, paralelismo e continuidade – mostra a sua não-contradição e independência, clarificando a possibilidade de existência de novas Geometrias [ver Poincaré (1902)].

No caso do Postulado V dos «Elementos», Hilbert considera no IV grupo de axiomas dos seus «Fundamentos» um que lhe é equivalente:

> *Fundamentos, axioma IV (Axioma das paralelas): por um ponto exterior a uma recta passa, no máximo, uma recta paralela à recta dada.*

Mas depois da sua apresentação e da demonstração de algumas das suas consequências, Hilbert, ao provar a sua independência dos restantes axiomas, considera também alguns resultados que são válidos independentemente deste axioma [Hilbert (1930), pp. 36 a 43]. Assim, há nos «Fundamentos» a consciência de que a Geometria Euclidiana é resultado de uma opção e não uma inevitabilidade...

Como com Euclides, a Geometria da Matemática escolar é bastante intuitiva. Por exemplo, a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é um conteúdo introduzido logo no 2º Ciclo do Ensino Básico. Experimentalmente os alunos medem ângulos com um transferidor em triângulos desenhados e manipulam triângulos de papel, cortando e reajustando os pedaços de forma mais elucidativa. Mais adiante, têm justificações mais abstractas baseadas em correspondências de ângulos de rectas paralelas. Só aquando do, eventual, estudo de novas Geometrias somos alertados para a necessidade de enquadramento da propriedade e das provas que a "justificam" no contexto da Geometria Euclidiana. A Geometria esférica, tendo por base a superfície terrestre, é, habitualmente, um bom exemplo para quebrar a crença cega na Geometria de Euclides, pois permite, de forma também visual, observar triângulos que desrespeitam a tal propriedade que durante tantos anos nos acompanhou. A chegada deste novo conhecimento não deita por terra aquele que já tínhamos, mas dá-lhe uma nova apresentação. Em vez de dizermos que "a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180º" dizemos, ou pelo menos pensamos, que "no plano a que estamos habituados, com as rectas, os polígonos e os ângulos usuais, a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180º".

O que fizeram Euclides e Hilbert neste caso? Euclides, traça por um dos vértices do triângulo a recta paralela ao lado oposto – construção que lhe é permitida por Elementos I, 31, tendo por base o seu Postulado V – e utilizando correspondências já provadas sobre ângulos, obtém a tal soma que nos é tão familiar. Com Hilbert, que tem já contacto com as novas Geometrias, semelhante construção pode não ser sempre possível, uma vez que o polémico postulado deixa de ser um "axioma universal" – até porque é falso quando fora da Geometria de Euclides –, passando a reflectir uma escolha. Exige-se, portanto, uma contextualização inicial – "Em Geometria Euclidiana..." –, uma opção consciente pela adopção do respectivo axioma de paralelismo, podendo de seguida aplicar-se procedimentos idênticos aos de Euclides.

Uma outra diferença crucial entre as estruturas dos «Elementos» e dos «Fundamentos» mora ainda a montante dos axiomas: as definições! Euclides inicia os «Elementos» apresentando 29 definições: ponto, recta, ângulo plano, rectas perpendiculares, círculo, quadrado, rectas paralelas,... Nem todas estas definições estão ao mesmo nível, umas são (pretendem ser!) primitivas e outras pressupõem o conhecimento de algumas das anteriores, como por exemplo a definição de quadrado:

> <u>Definição 22</u>: *Das figuras quadriláteras, um quadrado é aquela que é equilátera de ângulos rectos; [...]*
>
> <u>Definição 19</u>: *Figuras rectilíneas são aquelas contidas por linhas rectas, [...] quadriláteras aquelas contidas por quatro [...] linhas rectas.*
>
> <u>Definição 14</u>: *Uma figura é aquilo que está contido por qualquer fronteira ou fronteiras.*
>
> <u>Definição 13</u>: *Uma fronteira é uma extremidade de alguma coisa.*
>
> <u>Definição 10</u>: *Quando uma linha recta incide numa linha recta fazendo ângulos adjacentes iguais, cada um dos ângulos iguais é recto [...]*
>
> <u>Definição 4</u>: *Uma linha recta é uma linha na qual incidem pontos uniformemente.*
>
> <u>Definição 2</u>: *Uma linha é comprimento sem largura.*
>
> <u>Definição 1</u>: *Ponto é o que não tem partes.*

As definições primitivas podem cair em dois tipos de erros: um ciclo vicioso e a falta de conteúdo significativo. Por exemplo, as definições 13 e 14 formam uma espécie de ciclo, pois dizem-nos que uma fronteira é aquilo que limita alguma coisa e que uma figura é aquilo que é limitado por uma fronteira, ou seja, basicamente, dizem-nos que uma fronteira é aquilo que limita uma figura, o que compromete a primitividade da noção de fronteira... Em relação ao significado do conteúdo, é importante referir as primeiras definições. São elas que nos dão as noções de ponto e de recta, que pretendem ser primitivas, não dependendo de definições a montante. São, com Euclides, noções que apelam ao conceito intuitivo de dimensão e espessura. E, ainda que ignoremos o facto de não termos definidos esses tais conceitos supostamente intuitivos, o que Hilbert [Shapiro (2000), p. 156] observa é que definições deste tipo não são trabalhadas nem trabalháveis matematicamente. Ou seja, se a ideia é fornecer uma definição para garantir maior rigor, o intento falha redondamente pois, ainda que consideradas, essas definições não são utilizadas nos desenvolvimentos matemáticos. Esta procura da definição dos termos geométricos primitivos é, para Hilbert, um caminho inevitavelmente interminável em busca de algo que não existe. Interessam então apenas as relações que se estabelecem entre esses objectos, sejam lá o que eles forem...

> <u>Fundamentos, axioma I-1</u>: *Por dois pontos distintos passa uma única recta.*

Euclides também se refere a relações deste tipo nos seus postulados. Aliás, é com os postulados que Euclides estabelece a existência dos termos definidos:

> <u>Elementos, Postulado I</u>: *Traçar uma linha recta de qualquer ponto a qualquer ponto.*

Ou seja, Hilbert como que passou à frente as definições primitivas, bastando-lhe com os axiomas fixar as relações entre esses termos deixados propositadamente indefinidos. Toda a axiomática dos «Fundamentos» é construída, então, sobre uns quantos termos não interpretados para os quais Hilbert fornece apenas imposições relacionais. Desta forma, este conjunto inicial indefinido pode ser interpretado de um modo qualquer, desde que se verifiquem os axiomas. A existência desses objectos solta-se de toda a sua inspiração intuitiva e fica garantida apenas pela consistência dos axiomas, que, ainda que não explicitamente, funcionam para Hilbert como definições dos seus termos indefinidos.

> *[Mesmo] as expressões «estar entre», «passar por», etc., não são supostas suscitar figuras mentais; apenas são sinónimas da palavra «determinam». As próprias palavras «ponto», «recta» e plano, não são supostas gerar na mente qualquer imagem visual. Denotam indiferentemente objectos de qualquer espécie, desde que possamos estabelecer entre eles uma correspondência tal que a cada par de objectos chamados* pontos *possa corresponder um e um só dos objectos chamados* rectas. *[...]*
>
> [Poincaré (1902), p. 318]

Este esvaziamento dos conceitos de um conteúdo próprio não é concebível para Frege, que recusa a construção axiomática da Geometria sustentada em termos sem interpretação. Hilbert não inviabiliza a associação de Frege ao real intuitivo, nem nega que estas intuições possam ser úteis no processo de criação, mas retira-lhes importância na solidez da axiomatização; o que ele faz é permitir que o seu estudo se abstraia completamente de tais inspirações de modo a que os termos primitivos possam ser interpretados de outras formas.

A Geometria dos «Elementos» é, então, a nossa "geometria habitual", habitante solitária – e suficiente! – de todo o Universo geométrico escolar. A Geometria dos «Fundamentos» exige outro nível de abstracção, e, refinando aquela de Euclides – que não se quer ignorar! –, abre portas a outras Geometrias. Não era natural para Euclides considerar como hipótese a negação do seu Postulado V, pois toda a sua Geometria, apesar de justificada de modo formal, tinha um acompanhamento bastante intuitivo do real sensível. Não era natural para Euclides considerar que os seus pontos e rectas pudessem ser outra coisa senão aqueles objectos imediatamente intuídos e indissociáveis do que se passa à nossa volta. Também no ensino, não é natural apresentar desde logo como dado adquirido os axiomas de paralelismo de Hilbert, nem tão pouco pôr a hipótese de trabalhar com "pontos, rectas e planos" como se de "mesas, cadeiras e canecas de cerveja" se tratassem...

5.3. O perigoso poder dos diagramas

Ficava de olho aberto
Vias as coisas de perto
Que é uma maneira de melhor pensar
Via o que estava mal
E como é natural
Tentava sempre não se deixar enganar
[Sérgio Godinho, "Cuidado com as imitações" (1979)]

O ensino da Geometria reveste-se da maior importância devendo desenvolver no estudante uma intuição geométrica e um raciocínio espacial assim como capacidades para explorar, conjecturar, raciocinar logicamente, usar e aplicar a Matemática, formular e resolver problemas abstractos ou numa perspectiva de

> *modelação matemática. [...] A prática de manipulação e observação de figuras e modelos tem um papel central e decisivo no ensino das noções matemáticas que estão em jogo, com prejuízo absoluto do ponto de vista axiomático. [...] Mesmo quando o estudante resolver um problema por via analítica o professor deve incentivá-lo a* ***fazer uma figura geométrica de modo a tirar proveito da visualização do problema e a desenvolver a sua capacidade de representação, ou seja, não se deve deixar que o estudante se limite à resolução exclusiva de equações e à utilização de fórmulas****. Para além disso o estudante deve* ***descrever sempre com algum detalhe o processo utilizado, justificando-o adequadamente****.*
>
> [in Programa Escolar de Matemática A – 10.º ano (2001), p. 24 (destaques nossos)]

A consciência das relações de Hilbert é crucial para a construção e correcta interpretação de diagramas. Mas o paralelo constante com o real de Frege é incontornável ao nível escolar. As proposições geométricas estão habitualmente associadas a procedimentos esquemáticos bastante visuais, quer no entendimento do enunciado, quer no desenvolvimento da prova. O aluno "vê" permanentemente os pontos e as rectas em causa – aqueles objectos euclidianos associados aos desenhos que faz no caderno. E isto não tem de ser mau, nem errado, mas do ponto de vista de Hilbert é desnecessário e por vezes inútil. No entanto, do ponto de vista pedagógico a utilidade dos diagramas é incontornável... O aluno deve ser incentivado «a fazer uma figura geométrica de modo a tirar proveito da visualização do problema e a desenvolver a sua capacidade de representação, ou seja, não se deve deixar que o estudante se limite à resolução exclusiva de equações e à utilização de fórmulas». Faz-se um desenho, acrescentam-se uns pontos e umas linhas e observam-se propriedades, com base nas tais «intuições espaciais e habilidades dedutivas» (referidas na citação do início do capítulo [ver p. 82]). É, no entanto, importante perceber o perigo dos diagramas, pois podem levar-nos a admitir como gerais propriedades apenas particulares daquele desenho. Um diagrama mal feito não tem obrigatoriamente uma construção errada, pode ter uma construção apenas "tendenciosa". Ao trabalhar com conceitos gerais fazem-se, no diagrama, escolhas arbitrárias e estas escolhas são "tendenciosas" quando se revelam um caso particular demasiado específico, mostrando-nos, para além das propriedades gerais procuradas, algumas propriedades válidas apenas naquele caso "mal escolhido". Interessa, pois, perceber que são as relações que justificam as construções e não as idealizações que temos do que são pontos e rectas, e menos ainda as representações que delas fazemos. Pasch (1882) [citado em Detlefsen

(2005), p. 251] frisa que a verificação rigorosa da validade de uma inferência não deve apelar ao objecto em causa, que a prova tem de ser independente do diagrama e que a referência aos conceitos pode ser útil mas é desnecessária, devendo nós ter em conta apenas as relações entre os conceitos.

De qualquer modo, com as provas geométricas e a construção de diagramas devemos «descrever sempre com algum detalhe o processo utilizado, justificando-o adequadamente», sendo importante frisar as propriedades relacionais dos objectos representados, sejam eles os termos não interpretados (de Hilbert), os conceitos reais (de Frege), ou outra qualquer interpretação de momento.

A fechar toda esta abordagem do o como e do porquê do rigor matemático, pondo em causa métodos e definições, resta-nos uma importante questão sobre o próprio rigor matemático... Já nos debruçámos sobre aquilo que ele consegue, mas... e o que não consegue?...

6. CONTINUANDO A QUESTIONAR

[...]
Há mistérios
Que ninguém sabe porquê
E porquê
Explicar a explicação?
Há segredos sagrados
Pelo sim, pelo não
[Sérgio Godinho, "A Deusa do Amor" (2006)]

[Rafal Olbinski, "Mimosa" in http://www.mupinc.net]

Frege e Hilbert, adeptos de sistemas filosóficos diferentes, defendem ambos a importância da axiomatização lógica como reflexão do matemático sobre a prova. Afastando a intuição dos processos justificativos, acreditam na primazia da prova como meio de chegar à verdade de afirmações mais complexas. Mas, e tomando caminhos diferentes, nenhum dos dois consegue cumprir na íntegra os seus planos iniciais. O Paradoxo de Russell conduz a desenvolvimentos axiomáticos para além da exclusividade lógica que ambicionava Frege. Os Teoremas da Incompletude de Gödel inviabilizam o projecto finitista de Hilbert de reduzir o processo de prova a um conjunto de manipulações simbólicas dentro de um sistema formal. Em particular, Gödel mostrou que os sistemas formais, independentemente de quão grandes sejam, contêm sempre verdades indemonstráveis.

Hilbert estava errado – mas errado de uma maneira incrivelmente proveitosa, porque ele perguntou uma questão muito boa. De facto, ao perguntar esta questão ele criou uma disciplina completamente nova chamada Metamatemática, um campo introspectivo da Matemática onde se estuda o que a Matemática pode ou não *alcançar.*

[Chaitin (2002 b), p. 166]

Perante este novo cenário de incompletude criado por Gödel desenvolvem-se, então, novas teorias nos Fundamentos que deixam de ter como pano de fundo a primazia da prova formal, permitindo a entrada da temível incerteza no mundo matemático.

Portanto, Gödel não foi só incrivelmente inteligente, ele teve a coragem de imaginar que Hilbert podia estar errado.

[Chaitin (2002 b), p. 167]

Os desenvolvimentos pós-godelianos[1] partem da análise algorítmica sugerida pela formalização de Hilbert, entrando frequentemente na área da programação computacional. Turing, interessado nos processos computáveis, questionou-se sobre a possibilidade prévia de decisão da paragem ou não dos programas computacionais – Problema da Paragem. A resposta a este problema, que se revela equivalente à Incompletude de Gödel, diz-nos que não há qualquer processo sistemático capaz de decidir, sem limites temporais, se um programa irá alguma vez parar. Mais tarde Chaitin, que se interessou pelos resultados de Gödel, parecendo-lhe, no entanto, demasiado frágeis, vê na abordagem de Turing maior profundidade e, decidido a continuar a análise pós-godeliana, tem «uma ideia engraçada sobre a aleatoriedade» [Chaitin (2002 b), p. 169]:

A minha ideia era olhar para o tamanho dos programas de computador, para a quantidade de informação que temos de dar a um computador para que ele desempenhe uma dada tarefa.

[Chaitin (2002 b), p. 169]

Este tamanho dos programas e esta quantidade de informação traduzem a complexidade computacional (que é medida em bits) e estão relacionados com a redutibilidade dos programas a informações mais simples. A Teoria da Informação Algorítmica desenvolve-se nesta área da complexidade computacional, que se revela um instrumento de medida da

[1] Pode ser consultada na internet a página de G. J. Chaitin, onde estão disponíveis diversos conteúdos, nomeadamente os seus artigos publicados, que abordam os desenvolvimentos pós-godelianos (com especial incidência sobre os seus próprios contributos): http://www.cs.auckland.ac.nz/CDMTCS/chaitin/

aleatoriedade:

> *Podemos definir a aleatoriedade como algo que não pode, de todo, ser comprimido.*
>
> [Chaitin (2002 b), p.170]

Associado aos desenvolvimentos da aleatoriedade de Chaitin, surge um número Ω, que representa a probabilidade de um programa computacional parar. E o que este número tem de surpreendente é «o facto de ser irredutível, ou algoritmicamente aleatório, e de ter complexidade infinita» [Chaitin (2005)]. Ou seja, ao contrário, por exemplo, de $\sqrt{2}$, que, apesar de ser uma dízima infinita não periódica, isto é sem regularidades, é computável por aproximações sucessivas tanto quanto queiramos, não existe qualquer procedimento semelhante para Ω. «Apesar de Ω ter uma definição matemática precisa, os seus infinitos bits não podem ser captados num programa finito, eles são tão "maus" como uma sequência de infinitos bits escolhidos ao acaso» [Chaitin (2005)]. E Chaitin conclui que:

> *Se temos n bits de axiomas, nunca podemos determinar a complexidade de alguma coisa que tenha mais do que n bits de complexidade, o que significa quase tudo.*
>
> [Chaitin (2002 b), p.170]

Já mais fora da exclusividade computacional, surgem também neste campo da aleatoriedade as equações diofantinas (construídas unicamente por somas, produtos e potências de inteiros). O problema aqui prende-se com a impossibilidade de prever se uma destas equações tem ou não solução, ou ainda se são em número finito ou infinito. E, novamente, «um matemático não pode fazer melhor do que um jogador lançando uma moeda para decidir se uma particular equação tem um número finito ou infinito de soluções» [Chaitin (1988)].

> *Nesta parte da matemática as coisas são aleatórias ao máximo, não têm estrutura absolutamente nenhuma, a verdade matemática é completamente acidental, é um caso extremo. É uma espécie de pesadelo para a mente racional.*
>
> [Chaitin (2002 a), p. 160]

O que fazer, então, perante as descobertas de Gödel e os seus desenvolvimentos? Que lugar guardar a todo o trabalho de axiomatização e formalização rumo a uma certeza matemática universal... que afinal não existe?!...

> *Na realidade, o velho mundo dos matemáticos começou, na viragem do século, a ceder o lugar ao novo, com o colocar da lógica sob suspeita. Até aí sempre a lógica gozara da fama de padrão infalível de demonstração.*
>
> *[...] O uso da palavra «provavelmente», associada a decisões acerca de verdades matemáticas, era desconhecido no mundo de fantasia dos matemáticos pré-godelianos, mas agora a importância dessa decisão acertada não pode ser dissimulada.*
>
> [Guillen (1983), p. 125/6 e 128]

Há, portanto, que aprender a deixar entrar a incerteza, permitindo a utilização de materiais não completamente fiáveis, mas que respondem bem em diversas situações experimentadas e revelam potencial para novas construções mais produtivas. «A procura de novos axiomas para a teoria de conjuntos, recomendada por Gödel, pode ser comparada às observações feitas pelos astrónomos» [Dummett (1991), p. 301] – procuram-se, "experimentam-se" e aceitam-se novos axiomas pela sua possível produtividade em novos resultados.

> *E agora existe uma nova escola de pensamento quasi-empírica, que eu apoio, que se dedica aos fundamentos da matemática. A matemática, parece-me, é diferente da física, mas não é tão diferente como os matemáticos gostariam de pensar. Na minha opinião, não devíamos ter medo de adicionar novos princípios que são pragmaticamente justificáveis através de experiências em computador, mesmo que não seja possível demonstrá-los.*
>
> [Chaitin (2002 a), p. 120]

No entanto, estas novas escolhas têm de ser controladas, não podemos simplesmente alegar a aleatoriedade de cada vez que nos deparamos com um resultado mais difícil de explicar...

> *Se tiver uma conjectura ou hipótese matemática e trabalhar durante uma semana sem sucesso para tentar demonstrá-la, é evidente que não tenho o direito de*

dizer: «Bem, obviamente, invocando o teorema da incompletude de Gödel, a culpa não é minha: o raciocínio matemático normal não pode provar isto – temos de acrescentar um novo axioma»! É claro que esta atitude extrema não é justificável.

[Chaitin (2002 a), p. 88]

Apesar de poder parecer um factor libertador, este reconhecimento da incompletude não é simples... E a eminência da incerteza levanta, sem dúvida, novas questões matemática e metamatematicamente relevantes:

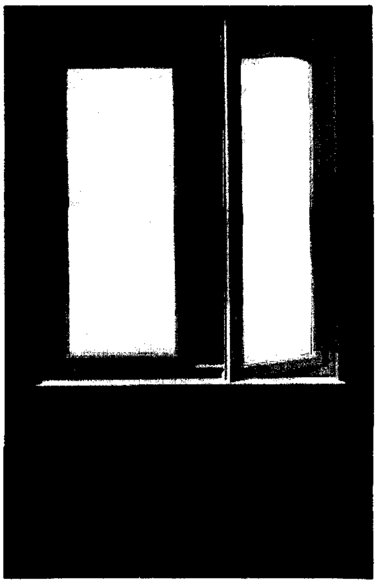
[...] como se deve fazer matemática? A teoria dos números deve ser considerada uma ciência experimental, à semelhança da física? Ou devemos esquecer o resultado de Gödel no nosso trabalho diário como matemáticos? [...]

Acho que estas são questões muito difíceis. Penso que vão ser precisos muitos anos e muitas pessoas para que sejam compreendidas completamente.

[Chaitin (2002 a), p. 89]

7. CONCLUSÃO

Viva quem muda
Sem ter medo do escuro
O desconhecido
É o irmão do futuro
[Sérgio Godinho, "O rei vai nu" (1981)]



[René Magritte, "The Telescope" in http://www.mupinc.net]

Inspeccionado o veículo, vistoriada a estrada, analisadas as atracções do destino final, estaremos prontos para nos fazermos à viagem?... A verdade é um destino aliciante, facilmente vendível sem grandes operações de marketing... No entanto, a ânsia de lá chegar leva muitas vezes a que se tomem atalhos sem olhar à segurança. Por outro lado, quando conscientemente nos preocupamos com a segurança, no meio de tanta expectativa, corremos o risco de nos sentirmos defraudados com acidentes de percurso ou abismos finais sem sequer apreciarmos a beleza da viagem...

Frege e Hilbert propuseram-se fazer essa viagem... A prova matemática, logicamente encadeada é, sem dúvida, o veículo eleito e ambos partilham a consciência da necessidade de uma estrada sólida que possa sustentar devidamente os veículos que por ela passem – a axiomática é também para ambos esse sustento necessário. A distinguir as suas viagens estão meios e métodos de construção e segurança. Mas, apesar do zelo, pelo caminho surgiram imprevistos que impediram que qualquer dos dois conseguisse levar o seu projecto inicial até ao fim. Não obstante deixaram-nos, sem dúvida, novas abordagens e importantes reflexões. A Aritmética pode não ser só Lógica como pensava Frege e a consistência pode não ser obtida unicamente dentro do próprio sistema axiomático como pensava Hilbert, mas o dissecar das propriedades aritméticas e a sistematização das propriedades geométricas conseguidas são feitos notáveis no caminho do rigor lógico-matemático.

Os sistemas axiomáticos trouxeram à Matemática um grau de certeza que nos permite fundamentar o seu estatuto de ciência do rigor. Quando olhamos a Matemática para além da manipulação técnica dos números e reflectimos o porquê da certeza com que o fazemos deparamo-nos com um novo mundo de preocupações. Aqui, para além de estarmos interessados em obter uma resposta, interessa-nos o porquê dessa resposta, o porquê do percurso que fazemos até ela, o porquê do sentimento de infalibilidade com que o fazemos...

A definição dos conceitos básicos e das leis que os regem não é estanque nem consensual e, portanto, a universalidade dos resultados pode ser questionada. Frege e Hilbert trabalharam para que essas questões não se pudessem colocar depois de firmadas as bases. E é precisamente nesse firmar de bases que encontramos as diferenças das suas posições. O conceito deve ser captado ou criado? O símbolo é um instrumento ou um conteúdo? Os axiomas são descrições ou criações? A não contradição decorre ou implica a verdade?

Com tantas questões de diferente resposta, é natural que, quando aplicadas em concreto a domínios matemáticos mesmo dos mais básicos (ou em especial nesses mesmo!) como a Aritmética ou a Geometria, as divergências se mantenham. Assim, o número é um objecto associado a um conceito ou é um objecto ao qual atribuímos propriedades convenientes? E o símbolo é uma representação posterior ou pode ser número em si mesmo? E os axiomas geométricos exigem objectos reais ou podem ser construídos sobre termos não interpretados?

Mas, no fecho deste trabalho, tendo em conta as revelações de Gödel, impõe-se a questão: que fazer perante a incompletude dos sistemas formais?... Que lugar guardar a todo este trabalho de axiomatização e formalização rumo a uma certeza matemática universal... que afinal não existe?!... Frege e Hilbert viviam ainda no mundo da certeza pré-godeliana e nele desenvolveram as suas teorias. Mas agora a prova matemática pode, nem sempre, ser o veículo mais apropriado rumo a uma verdade que poderá nem ser atingível, perante uma estrada axiomática permanentemente inacabada.

> *Acredito que nem todas as provas têm de ser absolutamente claras como água e que provas diferentes podem levar a diferentes graus de convicção.*
>
> *[...] encontrei uma área na matemática, ou construí uma área da matemática, em que, de facto, Deus joga aos dados, em que a verdade matemática é acidental, em que as coisas são verdade por nenhuma razão.*
>
> [Chaitin (2002 a), p. 120 e 160]

Prova matemática, verdade e axiomática são conceitos que têm de ser revistos, e enquadrar os contributos de *Frege* e *Hilbert* neste novo mundo pode não ser imediato. Mas também não podemos – nem queremos! – nem precisamos! – ignorar todo o rigor conseguido...

Perante esta, pelo menos aparente, dualidade, Chaitin conclui:

> *[...] às segundas-feiras, às quartas-feiras e às sextas-feiras tenho dúvidas acerca da matemática e às terças-feiras, às quintas-feiras e aos sábados faço matemática!*
>
> [Chaitin (2002 a), p. 142]

E poderíamos nós acrescentar: *aos domingos descanso e aprecio aquilo que consegui!* Pois a viagem, apesar de se poder revelar mais turbulenta e de exigir passagens por campos inseguros, continua a ser bela e a merecer reconhecimento.

> *[...] não devemos dizer que a matemática está morta e enterrada; pelo contrário, a matemática está viva e recomenda-se e, de uma certa forma, [...] uma visão estática da matemática não funciona, a matemática está em constante evolução.*
>
> *[...] Não vejo o meu trabalho como pessimista, vejo-o como um exemplo do facto de a matemática poder avançar através da descoberta de novos conceitos ou pela criação de novos conceitos. A matemática evolui!*
>
> [Chaitin (2002 a), pp. 161 e 166]

LISTA DE REFERÊNCIAS

Chaitin, Gregory J. (1988), *Randomness in Arithmetic*, in *Scientific American* 259 (1), pp. 80 a 85 [in http://www.cs.auckland.ac.nz/CDMTCS/chaitin/sciamer2.html]

Chaitin, Gregory J. (2002 a), tradução de Leonor Moreira (2003), *Conversas com um Matemático – Matemática, Arte, Ciência e os Limites da Razão*, Gradiva

Chaitin, Gregory J. (2002 b), *Computers, Paradoxes and the Foundations of Mathematics*, in *American Scientist* 90 (2), pp. 161 a 171 [in http://www.cs.auckland.ac.nz/CDMTCS/chaitin/amsci.pdf]

Chaitin, Gregory J. (2005), *Omega and why maths has no TOEs*, in *Plus* 37 [in http://plus.maths.org/issue37/features/omega/]

Currículo Nacional do Ensino Básico – Competências Essenciais (referência a partir de 2001/2002) [in http://www.dgidc.min-edu.pt/public/cnebindex.asp]

Denopoulous, William e Peter Clark, *The Logicism of Frege, Dedekind and Russell* [in Shapiro, Stewart (2005), *Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, Oxford University Press, pp. 129 a 165]

Detlefsen, Michael, *Constructive Existence Claims* [in Schirn, Matthias (1998), *Philosophy of Mathematics Today*, ..., pp.307 a 335]

Detlefsen, Michael, *Formalism* [in Shapiro, Stewart (2005), *Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, Oxford University Press, pp. 236 a 317]

Dummett, Michael (1991), *Frege: philosophy of mathematics*, Harvard University Press

Durão, Elza Gouveia e Maria Margarida Baldaque (2000), *Mat8 – 8.º ano*, Texto Editora

Frege, Gottlob (1884), tradução, introdução e notas de António Zilhão (1992), *Os Fundamentos da Aritmética*, Imprensa Nacional – Casa da Moeda

George, Alexander e Daniel J. Velleman (2002), *Philosophies of Mathematics*, Blackwell Publichers

Greenberg, Marvin Jay (...), *Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History*, W. H. Freeman and Company

Guillen, Michael (1983), tradução de Jorge da Silva Branco, *Pontes para o Infinito – O lado humano das matemáticas*, 2ª edição (1998), Gradiva

Heath, Sir Thomas (1956), *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, Dover Publications, Inc.

Hilbert, David (1900), *Sobre o conceito de número* [in Hilbert (1930), pp. 216 a 220 (Apêndice VI)]

Hilbert, David (1904), *Sobre os fundamentos da lógica e da aritmética* [in Hilbert (1930), pp. 221 a 233 (Apêndice VII)]

Hilbert, David (1926), *Sobre o infinito* [in Hilbert (1930), pp. 234 a 255 (Apêndice VIII)]

Hilbert, David (1928a), *Os fundamentos da matemática* [in Hilbert (1930), pp. 256 a 275 (Apêndice IX)]

Hilbert, David (1928b), *Problemas na fundamentação da matemática* [in Hilbert (1930), pp. 276 a 284 (Apêndice X)]

Hilbert, David (1930), revisão e coordenação de A. J. Franco de Oliveira (2003), *Fundamentos da Geometria*, Gradiva

Körner, Stephen (1968), *The Philosophy of Mathematics – an introductory essay*, Dover Publications, Inc.

Mancosu, Paolo (1998), *From Brouwer to Hilbert: the debate on the foundations of mathematics in the 1920s*, Oxford University Press

Poincaré, H. (1902), *Revisão dos Fundamentos da Geometria de Hilbert* [in Hilbert (1930), pp.315 a 334 (Suplemento VII)]

Programa Escolar de Matemática A – 10.º ano (homologado em 2001) [in http://www.dgidc.min-edu.pt/programs/prog_hom.asp]

Sá, Carlos Correia, *A Matemática na Grécia Antiga* [in Estrada, Maria Fernanda, Carlos Correia de Sá, João Filipe Queiró, Maria do Céu Silva e Maria José Costa (2000), *História da Matemática*, Universidade Aberta, pp. 219 a 367]

Shapiro, Stewart (2000), *Thinking About Mathematics – The Philosophy of Mathematics*, Oxford University Press

Steiner, Mark, *Mathematics – Aplication and Aplicability* [in Shapiro, Stewart (2005), *Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, Oxford University Press, pp. 625 a 650]

Sterrett, Susan G. (1994), *Frege and Hilbert on the Foundations of Geometry*, [in http://www.phil.cam.ac.uk/research_fellows/leng/b_theories4_02.pdf]

http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html

http://www.cs.auckland.ac.nz/CDMTCS/chaitin/

Fomos a descobrir como entender
Coisas tão simples de pensar
Tudo o que é fácil é difícil ter
[...]

[Sérgio Godinho, "Balada das descobertas" (1984)]