Joaquim António da Piedade Pinto

Teoria Matemática das Eleições

Departamento de Matemática Pura
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
Setembro / 2006

Joaquim António da Piedade Pinto

Teoria Matemática das Eleições

Tese submetida à Faculdade de Ciências da Universidade do Porto para obtenção do grau de Mestre em Ensino da Matemática

Departamento de Matemática Pura
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
Setembro / 2006

A Presidente do Júri,
Maria Leonor Moreira

Agradecimentos

Ao Professor Doutor António Machiavelo, que me orientou este trabalho, pelas suas sugestões, interpelações permanentes e incentivos à reflexão, bem como, pelo estímulo, amizade e enorme disponibilidade manifestada para acompanhar este trabalho.

Um profundo e sentido agradecimento aos Professores Donald Saari, Fabrice Valognes, Iain McLean, Laurie Snell, Peyton Young e Salvador Barberà, que, com a maior das simpatias, responderam às minhas dúvidas, trocando e-mails e, chegando mesmo ao ponto me enviarem artigos, a que de outro modo não teria tido acesso.

Agradeço a todos os membros das listas de discussão de LaTeX, a portuguesa GUTpt, e a brasileira (La)TeX, que contribuíram com preciosos esclarecimentos, para que eu pudesse ultrapassar as dúvidas que me foram surgindo; não posso deixar de agradecer em especial ao Miguel Vinícius Santini Frasson, pela sua total disponibilidade em me ajudar e de ter corrigido alguns "bugs" dos ficheiros de estilos que esta tese usa.

Ao Professor Doutor Jaime Carvalho e Silva e ao Mestre Vladimiro Machado pelo apoio, amizade e cumplicidade que ao longo dos anos fomos partilhando.

Aos meus colegas e amigos pela coragem que me foram transmitindo...

À Lu, porque sim...

À minha mãe, por tudo...

Ao meu pai, com quem já não posso partilhar este momento.

À Elsa e à Teresa, a quem dedico este trabalho, simplesmente por amor.

Conteúdo

Lista de Tabelas

Lista de Figuras

Introdução

A teoria da escolha social é, cada vez mais, um campo de investigação multidisciplinar. Por isso interessam-se por ela políticos, economistas, filósofos e matemáticos, entre outros. Considerando a forma como as sociedades tomam decisões colectivas, levando em conta, de modo mais ou menos adequado, os desejos de quem as compõe, este tema pode ser abordado de múltiplos ângulos: o político, analisando os procedimentos de votação, da estabilidade e da justiça dos resultados; o filosófico, reconhecendo que os modos como se adoptam as decisões podem traduzir, ou violar, diferentes princípios éticos, sustentar, ou não, a sua legitimidade e promover, ou limitar, as liberdades colectivas ou individuais; o económico, porque as grandes decisões, neste campo, são tomadas muitas vezes por indivíduos eleitos, e atentos às consequências das suas acções sobre a sua continuidade ou sobre as suas possibilidades de reeleição; o matemático, porque o estudo dos problemas de agregação de preferências, e suas regularidades, são bons problemas de modelação e análise matemática.

Para além de tudo o que se acabou de referir, o estudo dos sistemas eleitorais não só esclarece sobre a real possibilidade de eleição de cada candidato, como também entronca, de modo subtil, com a análise de decisões de qualquer tipo e, neste sentido, permite também discutir outros problemas metodológicos de grande profundidade e de grande alcance interdisciplinar, como a possibilidade de definir uma "vontade popular", ou de discutir as "preferências sociais." Resumindo, a teoria da escolha social, tanto como estudo dos sistemas eleitorais (ou de votação), como no seu papel mais sofisticado, de ferramenta crítica para pôr à prova a solidez das nossas concepções metodológicas, toca em muitas disciplinas chegando mesmo ao ponto de fazer parte delas.

Na escolha social, a questão desencadeada por Borda e Condorcet – se a maneira usual de votar pode não traduzir a verdadeira vontade dos eleitores – continua tão em aberto hoje como quando começou a sua discussão, entre 1770 e 1790. O contributo destes dois franceses conduziu ao estudo da teoria matemática das eleições. Assumindo que a História desempenha um papel fundamental na compreensão do caminho percorrido desde que esta discussão se iniciou por volta de 1770, optou-se por destinar o primeiro capítulo ao estudo de alguns dos aspectos mais relevantes, e mesmo, talvez, os mais apaixonantes da teoria matemática das eleições. Tendo a teoria matemática das eleições ganho um grande impulso na década de cinquenta do século passado, com os trabalhos de Kenneth Arrow, tornou-se para nós fundamental mencionar alguns dos mais importantes autores da actualidade, arriscando-nos assim a omitir autores, que para outros serão talvez mais relevantes.

Sendo o objecto da teoria matemática das eleições a análise da tomada de decisões colectivas a partir de preferências individuais, no segundo capítulo descrevemos os principais sistemas eleitorais e aquelas que nos parecem ser as condições imprescindíveis a qualquer sistema eleitoral para que este possa representar, verdadeiramente, a vontade popular. Partindo deste conjunto de sistemas eleitorais e condições, enunciamos e apresentamos uma demonstração do Teorema da Impossibilidade de Arrow, baseada na exibida por Alan D. Taylor em [28, pp. 248-259].

No último capítulo usaremos algumas das ferramentas algébricas e geométricas, que Donald Saari tem vindo a desenvolver, para comparar os diferentes sistemas eleitorais, e tentar encontrar o que melhor agrega as opiniões dos eleitores. Com o uso destas ferramentas, alcançámos um conhecimento mais pormenorizado dos sistemas eleitorais. Percebe-se como se comporta cada sistema eleitoral e, de certo modo, entendem-se os paradoxos que por vezes ocorrem quando se comparam os resultados obtidos por diferentes sistemas eleitorais aplicados ao mesmo perfil eleitoral.

Capítulo 1

Eleições, Matemática e História

A teoria matemática das eleições tem evoluído ao longo dos tempos, a ponto de se ter tornado um importante campo de investigação para a Matemática. Vamos, neste capítulo, fazer uma breve incursão pela História de modo a contextualizar o nosso estudo.

Dos primeiros relatos históricos conhecidos, passaremos pela eleição papal, e estudaremos o ambiente da *Academia Real das Ciências* francesa que levou ao aparecimento da moderna teoria matemática das eleições. Terminaremos o presente capítulo, com uma referência ao que se passou desde o fim do século XVIII até ao início do século XXI.

1.1 As primeiras manifestações de voto

A relação entre poder e votos surge de modo natural. Em vários relatos históricos são tratados modos pouco ortodoxos usados por certos "*senhores da guerra*" para ganharem eleições e chegarem ao poder. Reis, imperadores, ditadores e mesmo oligarquias, sem escrúpulos, vão, estrategicamente, dando o privilégio do voto a certos sectores da sociedade, para desse modo evitarem contestações que pudessem, de algum modo, colocar em perigo os seus lugares; como era de esperar, continuam a "ganhar" eleições. Segundo Saari [21, p. 17] fenómenos como os que acabamos de descrever já são observados por volta do ano 750 a.C. em Esparta. Mas ainda hoje os encontramos em países em desenvolvimento, saídos de ditaduras ou alvo de processos de descolonização.

Repare-se, por exemplo, no que está a acontecer no Nepal, com o rei a "devolver" o voto ao povo.

Importa questionar: como é que os processos eram conduzidos, uma vez ganho o direito ao voto?

Uma resposta dada à questão acabada de colocar é dada por Saari em [21, pp. 17-18]:

> "(...) *os primeiros processos envolviam tipicamente uma escolha entre* Sim *e* Não (...).
>
> (...) *Uma abordagem do século V a.C.* (...) *introduz uma modalidade em que os candidatos se expõem a uma assembleia para serem julgados pela multidão que demonstra a sua escolha através de gritos e aclamação* (...). *Procedimento que pode ser considerado como o antecessor da actual contagem dos votos* (...).
>
> (...) *Entre muitos outros processos encontra-se o tradicional levantar das mãos e a tentativa ateniense de introduzir um certo grau de anonimato ao deixar pequenas pedras em vasos. O que encontramos, ao longo dos primórdios da História, do acto eleitoral, desde os forums romanos e gregos até ao século XVII, é uma grande ênfase no processo – quem pode votar? como? quem é elegível? quem ganha? e como evitar fraude e manipulação?* (...). *É de salientar que na obra "Política" de Aristóteles já se encontram algumas referências quanto aos procedimentos legislativos e muito pouco existe sobre métodos de voto, isto é, sobre sistemas eleitorais* (...)".

1.2 O dilema de Plínio

Entre os primeiros relatos históricos encontramos o que nos é dado a conhecer pelo historiador romano Gaius Plinius Caecilius, também conhecido como Plínio, o Jovem, (61 ou 62-113) [5, pp. 334-342].

> "*Uma moção foi colocada perante o senado sobre os escravos libertos do consul Afranius Dexter que foi encontrado morto, ou pelas suas próprias mãos, ou pela mão dos seus escravos, morto num acto criminoso, ou em obediência aos seus próprios desejos*" [5, p. 334].

Esta moção resultou de um inquérito para apurar a verdade sobre a morte do consul e decidir o que fazer aos escravos. Então,

> "*Um senador pensou que deviam ser perdoados. Um segundo senador pensou que deviam ser desterrados para uma ilha, um terceiro senador que deveriam ser executados*" [5, p. 334].

A diversidade de propostas significa que tinham de ser votadas individualmente.

Plínio descreve três grupos de senadores romanos com opiniões diferentes sobre o que fazer aos escravos libertos, caso se viesse a comprovar que a morte do consul não se tratou de suicídio:

- **Grupo I**, acreditam na inocência dos escravos libertos, e propõem o perdão; este grupo representa 40% dos senadores.
- **Grupo II**, consideram os escravos libertos culpados; no entanto, como acreditam que eles se limitaram a obedecer a uma ordem do consul, propõem o desterro para uma ilha, representando este grupo 35% dos senadores.
- **Grupo III**, acreditam que os escravos libertos são culpados e como tal devem ser executados, representando este grupo uma minoria de 25% dos senadores.

Com estas proporções o resultado final da votação vai depender do sistema eleitoral usado pelos senadores e da estratégia que venha a ser seguida.

Os escravos libertos seriam perdoados se o sistema eleitoral usado fosse o "*comum*" – *um Homem um voto* – numa eleição entre todas as alternativas. Mas se, por exemplo, em vez de se poderem votar em todas as alternativas só se pudesse efectuar uma votação entre duas, e a votação fosse entre Perdão e Desterro, o que aconteceria aos escravos libertos? ou apenas uma votação entre Perdão e Execução? ou apenas entre Desterro e Execução? Mas porque não considerar uma votação em que fosse seguida uma agenda, previamente acordada, com as três alternativas, por exemplo: Desterro versus Execução e a alternativa vencedora iria a votação com o Perdão? Poderia existir, neste último caso, voto estratégico? Sim! Atendendo ao objectivo do grupo que está a favor do Perdão é de esperar que tudo façam para que os escravos sejam perdoados. Assim, se os elementos deste grupo na votação Desterro versus Execução optarem pela Execução, forçam a votação final entre Execução e Perdão; estando agora na "mão" do grupo que pretende o Desterro a decisão final. Então, o objectivo do grupo que quer o Perdão pode ser alcançado se, pelo menos, 10% + 1 dos elementos do grupo que querem o Desterro na votação final votarem a favor do Perdão, o que seria natural.

1.3 A eleição do Papa

Durante a disputa entre Henrique II de Inglaterra e Thomas Becket[1] ainda não tinham sido definidos procedimentos claros para a eleição do Papa. De facto, o corpo eleitoral carecia de definição e também faltava estabelecer regras que garantissem quem seria o vencedor. O sistema eleitoral vigente apenas impunha que, aos votos dos cardeais mais sábios e espiritualmente mais meritórios, era atribuída maior importância. Esta ambiguidade conduziu a que tenham sido eleitos, em 1130, um Papa e um "Antipapa" (um Cardeal que, não aceitando a derrota, se autoproclama como Papa) dando lugar a um cisma no seio da Igreja. De igual modo, na eleição que ocorreu em 1159 voltou a verificar-se a mesma situação com a eleição do Papa Alexandre III e do Antipapa Victor IV. Estes dois exemplos evidenciam a importância de se definirem, cuidadosamente, procedimentos eleitorais (sistemas eleitorais). Estes são fundamentais para se aclarar

[1]Thomas Becket, nascido entre 1115 e 1120 e falecido a 29 de Dezembro de 1170, foi Arcebispo de Cantuária de 1162 a 1170. Por se tratar de um jovem com educação, entrou para o serviço de Teobaldo, arcebispo de Cantuária, que lhe recompensou o seu trabalho com o arquidiaconado de Cantuária. Em 1155 Becket foi escolhido por Henrique II de Inglaterra para conselheiro real, uma posição que manteve durante sete anos, como íntimo e leal servidor do rei.

Henrique recompensou Becket fazendo-o arcebispo de Cantuária, após a morte de Teobaldo. O carácter de Becket modificou-se imediatamente, passou a viver uma vida de simplicidade e pobreza e, apesar de ter ajudado Henrique a diminuir o poder dos bispos, passou a defender activamente os direitos da Igreja. Seguiram-se violentas questões com Henrique e um longo período de exílio. Depois de se reconciliarem, entraram em conflito novamente, até que Henrique perguntou se não haveria ninguém capaz de o livrar "daquele padre turbulento".

Quatro cavaleiros ouviram-no e mataram Becket nos degraus do altar de Cantuária. Becket foi canonizado em 1173 e a catedral tornou-se num local de peregrinação. Essas peregrinações estariam na origem dos Contos de Cantuária, colectânea de contos em forma lírica, recolhidos e passados a escrito por Geoffrey Chaucer.

Nota retirada da Wikipedia em 29 de Abril de 2006 (http://pt.wikipedia.org/wiki/Thomas_Becket).

quem tem direito de voto e o que é necessário para se obter um vencedor.

Com o objectivo de evitar mais cismas, a Igreja, no III Concílio de Latrão, realizado em 1179, adopta para a eleição papal um sistema eleitoral em que só podem votar os cardeais, podendo qualquer pessoa ser Papa (mesmo não pertencendo ao colégio eleitoral, e podendo mesmo ser uma mulher), tendo que obter, para isso, $\frac{2}{3}+1$ dos votos; mas mesmo assim, não se conseguiu evitar cismas (ver [21, pp. 16-17]).

Actualmente o Papa é eleito pelo colégio de cardeais, reunidos em Conclave, na Capela Sistina, no Vaticano. Em 1975 o Papa Paulo VI introduziu mudanças significativas nas regras para a eleição do Papa, que vieram a ser promulgadas na Constituição Apostólica "*Romano Pontifico Eligendo*", e onde passam a ser excluídos do Conclave todos os cardeais com mais de 80 anos.[2] As alterações não ficaram por aqui. Em 1996, o Papa João Paulo II propôs alterações que estiveram na base da eleição do actual Papa Bento XVI. João Paulo II estabeleceu na Constituição Apostólica "*Universi Dominici Gregis*" que o Colégio de Cardeais só pode ser formado no máximo por 120 cardeais, tendo todos menos de 80 anos. O Conclave decorre na Capela Sistina e o Papa que vier a ser eleito terá que ter $\frac{2}{3}+1$ dos votos; se tal não acontecer, após um certo número de votações é eleito Papa o cardeal que obtiver metade dos votos mais 1, ou seja, basta uma maioria absoluta simples [11]. É de salientar que esta regra é uma importante mudança, dado que se pretende que o número de dias de votação não se torne num exercício penoso para todos os cardeais.

1.4 L'Académie Royale des Sciences

Academia Real das Ciências francesa, no Século XVIII, congregava alguns dos melhores académicos da época e concentrava algumas das melhores publicações do Mundo. Não é pois de estranhar que a teoria matemática das eleições (ou teoria da escolha social), apesar de não ter aí a sua génese, tenha começado a ser estudada sistematicamente por dois dos seus membros. Primeiro por Jean Charles Borda e depois por Marie Jean Antoine Nicolas Caritat de Condorcet (conhecido por Marquês de Condorcet).

[2] Nota retirada de (http://www.catholicpages.com/pope/election.asp), página consultada em 3 de Março de 2006.

1.4.1 Jean Charles Borda (1733-1799)

Jean Charles Borda nasceu a 4 de Maio de 1733 em Dax, uma cidade francesa perto de Bordeaux (Bordéus), sendo filho de uma família nobre; segundo Jean Mascart [14, p. 6] o oficial de cavalaria e capitão naval Jean Charles Borda era um homem notável: matemático; físico experimental; engenheiro de construção naval; astrónomo rigoroso e preciso; foi um dos criadores do sistema métrico [14, pp. 4-5]. Com vinte anos debutou para a ciência ao explicar uma questão de Geometria, o que lhe valeu a atenção de D'Alembert e, três anos mais tarde, em 1756, é aceite na Academia Real das Ciências francesa. Já como membro desta Academia inicia o estudo sistemático das eleições. O que descobre surpreende os seus contemporâneos. Analisando o sistema eleitoral como um método de agregar opiniões para encontrar uma escolha colectiva, notou que métodos diferentes conduzem a resultados diferentes.

Borda apresentou, *oralmente*, o problema à Academia Real das Ciências em 16 de Julho de 1770, catorze anos antes de ser publicado nas Memórias da Academia sob o título: "*Sur les élections par scrutin*" [4, p. 657, nota de rodapé].

> "*É a opinião geral, e contra a qual não encontrei ninguém que objectasse, que numa eleição por escrutínio de votos o candidato mais votado é o que reflecte a vontade dos eleitores, isto é, o candidato mais votado é aquele que os eleitores preferem entre todos os candidatos. Mas eu vou mostrar que esta opinião, que é verdadeira no caso de uma eleição entre dois candidatos, pode induzir-nos em erro em todos os outros casos*" [4, p. 657].

Ilustrou com um exemplo, no qual vinte e um eleitores escolhiam entre três candidatos, onde considerou as preferências relativas de cada eleitor, isto é, a forma como cada eleitor hierarquizava os candidatos e reparou que era possível eleger um candidato que a maioria dos eleitores colocava em último lugar. Bastava para isso que os votos nos outros dois estivessem suficientemente divididos.

Analisemos o seu exemplo: suponhamos que temos três candidatos, A, B e C. Dos 21 eleitores, 8 colocam o candidato A em primeiro lugar, em que 1 prefere o candidato B ao candidato C e 7 preferem o candidato C ao candidato B. Os restantes 7 preferem o candidato B e 6 preferem o candidato C, no entanto, para estes 13 eleitores o candidato que colocam em último lugar é o candidato A [4, pp. 657-658].

Neste exemplo, o candidato mais votado, segundo a *maneira usual de contar os votos*, é A, com 8 votos a favor, contra 7 em B e 6 em C. No entanto, esse é o **candidato mais detestado** pela maioria do eleitorado, uma vez que 13 eleitores em 21 colocam-no em último lugar [4, p. 658].

Borda afirmava que a injustiça da *maneira usual de contar os votos* era devida ao facto dos eleitores não poderem manifestar, no voto, a sua completa opinião sobre todos os candidatos. Para Borda era "*necessário dar aos eleitores uma forma de se pronunciarem sobre a ordem de mérito de cada um dos candidatos*" [4, p. 658].

Para reforçar a sua opinião chamou a atenção para o facto do candidato A perder em eleições entre pares de candidatos (ou ***comparações dois a dois***) para os outros candidatos, ou seja, Borda salientou o facto do candidato A ser aquilo que mais tarde se viria a chamar um **perdedor de Condorcet** [4, p. 32].

Como alternativa apresentou duas maneiras de contar as preferências dos eleitores. Em seguida iremos apreciar a elegância da prova, por ele apresentada, de que a segunda maneira de contar as preferências dos eleitores deriva da primeira [4, p. 659], e desse modo inferir a razão que leva muitos autores a considerarem que Borda atribui ordem de mérito zero ao último lugar do voto.

1.4.1.1 Eleição por ordem de mérito

Analisemos a maneira de contar as preferências que ele apresenta em primeiro lugar e a que chama "***eleição por ordem de mérito***".

> "*Suponhamos, daqui em diante, que temos três candidatos, e que cada eleitor escreve os seus três nomes num voto, ordenando-os segundo a ordem de mérito que atribui a cada um, e sejam* $\begin{matrix} A, & A, & B, \\ B, & C, & A, \\ C, & B, & C, \end{matrix}$ *etc, os seus votos; eu considero, daqui em diante um destes votos, por exemplo, o primeiro, aquele em que um eleitor dá o primeiro lugar a* A, *o segundo a* B *e o terceiro a* C, *e eu digo que o grau de superioridade que aquele eleitor dá a* A *sobre* B, *é o mesmo que o mesmo eleitor dá a* B *sobre* C; *com efeito, como o segundo candidato está igualmente sujeito a ocupar todos os graus*

> *de mérito, tal e qual os outros dois candidatos A e C, não temos assim nenhuma razão para dizer que o eleitor que fixou a posição entre os três candidatos, tenha querido colocar B mais perto de A do que de C, ou o que é a mesma coisa, que ele tenha atribuído maior superioridade ao primeiro sobre o segundo, nem ao segundo sobre o terceiro*" [4, p. 659].

Borda continua a explicação do método referindo que não há nenhuma distinção entre os votos de cada eleitor, dado que é suposta a igualdade entre todos os eleitores, salientando, ainda uma vez mais, que a cada lugar corresponde sempre o mesmo grau de mérito.

Borda passa a explicar como contabilizar os graus de mérito:

> "*Se representarmos por α o mérito que cada eleitor atribui ao último lugar, e por $\alpha+\beta$ o que ele atribui ao segundo lugar, representaremos por $\alpha+2\beta$ o mérito atribuído ao primeiro lugar, e o mesmo grau de mérito se dá a cada lugar dado pelos outros eleitores; assim cada último lugar será igualmente representado por α, cada segundo por $\alpha + \beta$ e cada primeiro por $\alpha + 2\beta$*" [4, p. 660].

Como era de esperar Borda generaliza o seu método ao caso em que há um qualquer número de candidatos, da maneira óbvia

> "*os méritos atribuídos pelos eleitores aos quarto, terceiro, segundo e primeiro lugares, podem ser representados por:*
>
> $$\alpha;\ \alpha+\beta;\ \alpha+2\beta;\ \alpha+3\beta.$$
>
> *Far-se-á de igual modo, para um grande número de candidatos*" [4, p. 660].

Após a atribuição dos graus de mérito, é apresentado o procedimento a seguir para a contagem dos graus de mérito totais de cada candidato

> "*Posto isto, será fácil perante uma eleição qualquer, comparar o número de votos obtido por qualquer um dos candidatos. Assim, multiplicaremos por α, o número de últimos votos obtidos por cada um dos candidatos; por $\alpha+\beta$*

> *o número de penúltimos votos; por $\alpha + 2\beta$, o número de antepenúltimos votos e assim sucessivamente, considerar-se-ão todos estes diferentes produtos para cada candidato, e as somas destes produtos representarão o número de votos obtido por cada um dos candidatos*" [4, p. 660].

Facilmente constatamos que as quantidades α e β podem assumir os valores que quisermos, sem que tal altere os resultados relativos dos candidatos. Se considerarmos $\alpha = 1$ e $\beta = 1$ estabelecemos que ao último lugar corresponde 1 ponto, ao penúltimo correspondem 2 pontos, ao antepenúltimo 3, e assim sucessivamente até ao primeiro que será igual ao número de candidatos [4, p. 661].

Considerando o exemplo de Borda, referido anteriormente, em que vinte e um eleitores votam em três candidatos e cujos votos são

A	A	A	A	A	A	A	A	B	B	B	B	B	B	B	C	C	C	C	C	C
B	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	B	B	B	B	B	B
C	B	B	B	B	B	B	B	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A

Tabela 1.1: Exemplo dos 21 eleitores de Borda

Como estamos na presença de três candidatos, ao primeiro lugar atribuiremos 3 pontos, ao segundo 2 e ao terceiro 1.

Contabilizando temos: o número de pontos do candidato A é 37, obtidos de multiplicando os seus 8 primeiros lugares por 3 e adicionando 13 dos seus 13 últimos lugares, ou seja, $8 \times 3 + 13 \times 1 = 37$; quanto ao candidato B terá 42 pontos, pois 7 eleitores colocam-no em primeiro lugar, assim como outros 7 o colocam em segundo e, de igual modo, outros 7 o colocam em terceiro, temos então $7 \times 3 + 7 \times 2 + 7 \times 1 = 42$; por fim, o candidato C apresenta um resultado de 47 pontos, uma vez que 6 eleitores o colocam em primeiro lugar, 14 em segundo e 1 em terceiro e $6 \times 3 + 14 \times 2 + 1 \times 1 = 47$ [4, p. 661].

Podemos agora constatar que usando a *eleição por ordem de mérito* o candidato mais votado é C seguido do candidato B e, por fim, o candidato A. Quando comparamos estes resultados com os obtidos segundo a *maneira usual de contar os votos* vemos que houve uma troca de lugares entre o primeiro e o último. Ou seja, a *maneira usual de contar os votos* consegue eleger em primeiro lugar o candidato que a maioria dos eleitores coloca em último lugar [4, p. 662], tal como anteriormente referido.

A *eleição por ordem de mérito* que veio a ficar conhecida por **Contagem de Borda**, e que definiremos de modo formal na subsecção 2.1.1 do capítulo 2, foi adoptada pela Real Academia das Ciências depois de 1770, continuando a ser usada mesmo após a dissolução e posterior transformação da Academia no Instituto de França, em 1795. Mas, em 1800, Napoleão Bonaparte, na sua única intervenção relativa a sistemas eleitorais, levanta objecções ao seu uso, o que o levou a criar uma comissão independente para apresentar uma nova maneira de contar os votos; a referida comissão apresentou e implementou um sistema eleitoral baseado em votações sucessivas. Da comissão criada por Napoleão Bonaparte, fazia parte, entre outros, o matemático Laplace[3](1749-1827), que tinha produzido uma justificação da contagem de Borda, no entanto rejeita-a. Note-se que o mesmo sistema eleitoral tinha sido adoptado para as eleições nacionais em França no ano de 1789, apesar de fortemente criticado por Condorcet [16, pp. 50-51].

1.4.1.2 O método das eleições particulares

Após a apresentação da primeira maneira de contar votos, de dar o exemplo com vinte e um eleitores e de tecer as considerações que achou pertinentes sobre a maneira de contar votos, usada na Academia até então, Borda passa a descrever o "***método das eleições particulares***". Neste método Borda realiza todas as eleições possíveis entre pares de candidatos, chamando a cada uma delas uma *eleição particular*.

> "*Suponhamos que temos uma eleição entre três candidatos A, B e C; como podemos combinar estes três candidatos dois a dois de três maneiras diferentes, é necessário realizar três eleições particulares. Sejam os resultados destas eleições os seguintes:*
>
> $$1^{\underline{a}} \text{ eleição, entre } A \text{ e } B \left\{ \begin{array}{l} a \text{ votos para } A \\ b \text{ votos para } B \end{array} \right. ;$$
>
> $$2^{\underline{a}} \text{ eleição, entre } A \text{ e } C \left\{ \begin{array}{l} a' \text{ votos para } A \\ c \text{ votos para } C \end{array} \right. ;$$

[3] Encontramos duas passagens relevantes sobre teoria matemática das eleições da autoria de Laplace, nas páginas cx-xciv e 277-279 do Tomo VII das suas *Oeuvres Complètes*, edição de L'Académie des Sciences, Paris, 1886. (http://gallica.bnf.fr).

$$3^{\underline{a}} \text{ eleição, entre } B \text{ e } C \left\{ \begin{array}{l} b' \text{ votos para } B \\ c' \text{ votos para } C \end{array} \right. .$$

> *Trata-se de encontrar o valor comparativo dos votos obtidos por cada um dos três candidatos. Para isso, nós suporemos que estas eleições são o resultado de uma eleição por ordem de mérito, isto é sempre possível, porque conhecemos o lugar ocupado por cada candidato no voto de cada eleitor, podemos sempre determinar o número de votos que um candidato tem numa eleição realizada entre ele e um outro candidato qualquer*" [4, p. 662].

Das duas *eleições particulares*, que cada candidato disputa, é possível saber o número de pontos obtidos por cada candidato como se estivesse a disputar uma *eleição por ordem de mérito*. Assim, o candidato A na comparação com o candidato B obtém a votos e na comparação com o candidato C obtém a' votos. Então, o número de pontos do candidato A é dado pela soma $a + a'$. Por um processo idêntico ao descrito se obtém para o candidato B a quantidade de $b + b'$ pontos, enquanto que o candidato C obterá $c + c'$ pontos.

Posto isto, Borda parte de uma *eleição por ordem de mérito* em que considera y o número de eleitores que dão a sua preferência a A, colocando-o em primeiro lugar no voto, x o número de eleitores que o colocam em segundo lugar e z o número de eleitores que o colocam em terceiro lugar. Dado que estamos na presença de uma eleição entre três candidatos a votação em A é dada por $3y + 2x + z$. Representando por $\mathcal{E}$ o número de eleitores, que é igual a $y + x + z$, podemos eliminar z da votação no candidato A, que é igual a $2y + x + \mathcal{E}$, ou simplesmente por $2y + x$ dado que a parcela $\mathcal{E}$ é comum à votação de todos os candidatos [4, pp. 662-663].

De modo natural, e extremamente elegante, Borda vai mostrar que o método da *eleição por ordenem de mérito* e o método das *eleições particulares*, são equivalentes:

> "*Agora, observe-se que: por cada primeiro lugar que o candidato A tenha na eleição por ordem de mérito ele recebe dois votos na eleição particular, a saber, um da eleição entre A e B e outro da eleição entre A e C; que por cada segundo lugar que venha a obter na eleição por ordem de mérito ele não terá mais do que um voto na eleição particular; e pela terceira posição*

> *na eleição por ordem de mérito ele não receberá nenhum voto na eleição particular. Donde concluímos que o número de votos que ele terá em todas as eleições particulares, $a + a'$, é igual a $2y + x$; mas como acabámos de ver a quantidade $2y + x$ representa o valor da votação no candidato A na eleição por ordem de mérito; por conseguinte a quantidade $a + a'$ a representará nas eleições particulares; isto é dizer que a votação obtida por um candidato, será representada pela soma dos votos que ele venha a obter em todas as eleições particulares que ele disputa com todos os outros candidatos. Isto também se aplica a eleições realizadas entre um grande número de candidatos*" [4, p. 663].

De acordo com os votos do exemplo apresentado por Borda à Academia podemos determinar os valores de a, a', b, b', c e c', supondo que as *eleições particulares* são o resultado de *eleições por ordem de mérito*. Temos então: $a = 8$, $a' = 8$, $b = 13$, $b' = 8$, $c = 13$ e $c' = 13$. Assim podemos determinar a votação de cada um dos candidatos: assim o candidato A fica com $a + a' = 16$ votos; o candidato B recebe $b + b' = 21$ votos; e a votação do candidato C é $c + c' = 26$ votos [4, p. 663].[4]

A diferença apresentada entre o resultado obtido, nestas *eleições particulares* e o resultado o obtido na *eleição por ordem de mérito*, reside no facto de nesta última termos adicionado à votação final de todos os candidatos a parcela correspondente ao número de eleitores. Assim, se subtrairmos ao resultado obtido, na *eleição por ordem de mérito* os 21 votos, correspondentes aos 21 eleitores vamos obter o mesmo resultado.

Estamos agora em condições de afirmar que se na *eleição por ordem de mérito* considerarmos $\alpha = 0$ e $\beta = 1$ o resultado obtido por cada um dos candidatos em ambas as eleições (*eleição por ordem de mérito* e *eleições particulares*) é o mesmo.

Borda chama a atenção para o facto de o *método das eleições particulares* se tornar impraticável para um elevado número de candidatos, tornando-se o *método por ordem de mérito* muito mais expedito e fácil de usar [4, pp. 663-664].

[4]Borda, no original, por lapso, em vez de $b' = 8$ tem $b' = 13$ e em vez de $b+b' = 21$ tem $b+b' = 12$.

1.4.1.3 A "justeza" da maneira usual de contar votos

Analisemos por fim as duas últimas páginas da Memória apresentada à Academia [4, pp. 664-665], onde é estudado em que condições o resultado da *maneira usual de contar os votos* coincide com a vontade da maioria dos eleitores.

Consideremos m o número de candidatos, $\mathcal{E}$ o número de eleitores. Realize-se uma *eleição por ordem de mérito.* Seja A o candidato mais votado com y votos e B o candidato com z votos, o maior número de votos depois do número de votos do candidato A. Considerando o caso extremo em que, por um lado, todos os eleitores que não colocaram o candidato A em primeiro lugar o colocaram em último lugar e, por outro lado, todos os eleitores que não colocaram o candidato B em primeiro lugar o colocaram em segundo. Como estamos na presença de m candidatos ao primeiro lugar correspondem m votos, ao segundo lugar correspondem $m-1$ e ao último lugar irá, naturalmente, corresponder 1 voto; por conseguinte, na *eleição por ordem de mérito* a votação do candidato A é igual a $my + \mathcal{E} - y$ e a votação do candidato B igual a $mz + (m-1)(\mathcal{E} - z)$, donde concluímos que o resultado da eleição só é favorável ao candidato A se se verificar:

$$my + \mathcal{E} - y > mz + (m-1)(\mathcal{E} - z). \tag{1.1}$$

ou equivalentemente[5]

$$y > \frac{z + (m-2)\,\mathcal{E}}{m-1} \tag{1.2}$$

Analisando a inequação que acabámos de obter se considerarmos $m = 2$ vamos obter $y > z$, o que significa que no caso de termos uma eleição entre dois candidatos o candidato que tiver a maioria dos votos é legitimamente eleito; como refere Borda: "*assim neste caso, mas somente neste caso, o método de contar votos usual em eleições dá o resultado exacto*" [4, p. 665]. Supondo agora que todos os eleitores que não votam no candidato A votam no candidato B, ou seja, $z = \mathcal{E} - y$, valor que substituído na inequação (1.2) faz com que:

$$y > \mathcal{E}\,\frac{m-1}{m} \tag{1.3}$$

Quando temos uma eleição entre três candidatos, $m = 3$, e obtemos $y > \frac{2}{3}\,\mathcal{E}$. Isto quer dizer que, numa eleição entre três candidatos, se um deles tiver mais do que $\frac{2}{3}$

[5] Borda, no original, em vez de $my+\mathcal{E}-y > mz+(m-1)(\mathcal{E}-z)$ tem $my+\mathcal{E}-y > (mz-1)(\mathcal{E}-z)$.

dos votos podemos dizer que ele é um justo vencedor. Do mesmo modo, quando temos quatro candidatos, y tem que ser maior que $\frac{3}{4}\ \mathcal{E}$, e assim sucessivamente.[6]

> "*Finalmente, se o número de candidatos é igual ou maior que o número de eleitores a inequação* $y > \frac{z+(m-2)\ \mathcal{E}}{m-1}$ *será equivalente a* $y > \mathcal{E} - 1$, *o que significa que, nestes casos, só o candidato que reunir a unanimidade dos votos pode ser declarado vencedor*" [4, p. 665].

Borda termina a sua Memória referindo que

> "*tudo o que disse sobre eleições também se aplica a deliberações, dado que as deliberações não são mais do que uma espécie de eleições entre diferentes opiniões, estando portanto sujeitas às mesmas regras*"[4, p. 665].

1.4.2 Marquês de Condorcet (1743-1794)

Marie Jean Antoine Nicolas Caritat de Condorcet nasceu em Ribemont, a 17 de Setembro de 1743 [16, p. 3]. Filho de um Cavaleiro que veio a morrer cinco semanas depois do nascimento do filho, o que valeu ao filho a atribuição do título nobre de Marquês de Condorcet.

Condorcet foi um matemático precoce, filósofo, economista e sociólogo. Membro da Academia das Ciências desde 1769, tornou-se seu secretário vitalício em 1777. Segundo Duncan Black [3, p. 159] "*foi um enciclopedista que ajudou a trilhar o caminho para a revolução francesa e mais tarde veio a ser membro da Assembleia Legislativa; mas a sua atitude independente levou-o à prisão onde viria a morrer*". Condorcet foi contemporâneo de Jean Jacques Rousseau (1712-1778), também ele um dos pensadores mais influentes no desencadeamento da revolução francesa (ver [16, p. vii]).

Os seus trabalhos reflectem os seus principais campos de interesse: as Ciências Sociais e Humanas, e a Matemática. Da sua vasta obra[7] científica destacamos: o "*Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix*",

[6] Borda, no original, em vez de $y > \frac{2}{3}\ \mathcal{E}$ tem $y = \frac{2}{3}\ \mathcal{E}$.

[7] Uma listagem quase exaustiva das suas publicações pode ser consultada na Internet em: (http://cepa.newschool.edu/het/profiles/condorcet.htm), página consultada em 13 de maio de 2006 ou, em alternativa, (http://membros.aveiro-digital.net/pinto/mestrado/Tese/web/Condorcet.htm).

ensaio publicado em 1785, uma obra onde Condorcet aplica a teoria das probabilidades às Ciências Sociais.

O *Essai* (como nos referiremos, daqui em diante, a esta obra) está dividido em duas secções: o texto propriamente dito, e uma longa introdução que Condorcet designa por "*Discours Préliminaire*"[8] onde ele, além de apresentar, para leitores não matemáticos, as suas ideias desenvolve também parte do seu raciocínio. Apesar desta obra ser dedicada ao estudo da teoria matemática das eleições, Condorcet dispersa-se ao longo de quase quinhentas páginas, dedicando à teoria matemática das eleições cerca de cinquenta, e assim a teoria matemática das eleições de Condorcet pode ser encontrada da página 119 à página 136 do texto propriamente dito e no *Discours Préliminaire* da página *lxi* à página *lxx* e da página *clxviii* à página *clxxix* [3, p. 160].

O "*Essai*", segundo Duncan Black [3, pp. 160-161], é uma obra muito difícil de entender. A generalidade dos historiadores ou simplesmente o evitam ou referem-se a ele como uma obra do campo das probabilidades, sem entrarem em pormenores.

Condorcet, no *Essai*, faz uma justa chamada de atenção para o "célebre Geómetra" em referência a Borda, que foi o primeiro a observar que o método usual de contar votos apresenta falhas e também porque apresentou um método alternativo, muito simples de pôr em prática. No entanto, também afirma que este método apresenta algumas lacunas, embora não tantas quantas o método usual [6, p. *clxxix*]. Condorcet apresenta alguns exemplos onde fica patente a manipulabilidade a que está sujeita a contagem de Borda, pois é possível usar um voto estratégico, colocando um candidato mais abaixo, ou introduzindo propositadamente um novo candidato, para beneficiar um mais desejado. Isto significa que Condorcet se apercebeu de que a contagem de Borda é sensível à introdução de "alternativas irrelevantes". Quanto confrontado com este defeito, Borda responde que "*o meu sistema eleitoral foi feito para pessoas honestas*" [14, p. 130]. Repare-se, a título de exemplo, na tabela 1.2, apresentada por Young [30, p. 1240], onde cem eleitores comparam, dois a dois, seis candidatos.

Na tabela 1.2 observa-se que, por exemplo, na comparação entre os candidatos A e B dos cem eleitores, cinquenta e um preferem o candidato A enquanto que quarenta e nove preferem o candidato B, ou na comparação entre os candidatos C e E, sessenta e seis preferem o candidato C enquanto que trinta e quatro preferem o candidato E.

[8]Esta parte do "*Essai*" pode ser obtido em (http://gallica.bnf.fr).

	A	B	C	D	E	F	C. de Borda	
A	-	51	54	58	60	62	105	285
B	49	-	68	56	51	58	117	283
C	46	32	-	70	66	75	78	289
D	42	44	30	-	41	64		221
E	40	48	34	59	-	34		215
F	38	42	25	36	66	-		207

Tabela 1.2: Exemplo da manipulabilidade da contagem de Borda

Observa-se ainda que a soma de cada linha da tabela, corresponde à pontuação que cada candidato obtém na contagem de Borda. Assim, se considerarmos só os candidatos A, B e C, o vencedor segundo a contagem de Borda é o candidato B seguido do candidato A e por fim o candidato C, o que pode ser constatado considerando o rectângulo destacado a tracejado e a primeira coluna da contagem de Borda da tabela. Mas se introduzirmos os candidatos D, E e F, apesar de não alterarmos as votações relativamente a A, B e C, o resultado final, no que a estes três diz respeito, vai mudar, passando a ficar em primeiro lugar o candidato C, em segundo o candidato A e em terceiro o candidato B, considerando as somas da última coluna da contagem de Borda da tabela.

1.4.2.1 O sistema eleitoral de Condorcet

As democracias são, por definição, sistemas politicos em que a autoridade emana do povo, tendo como princípio que a opinião da maioria dos cidadãos deve ser imposta à restante Sociedade. Na tentativa de responder a questões naturais, tais como: o que é a maioria? ou, como obter a maioria da opinião dos cidadãos? surgem os sistemas eleitorais. Como já referido, um dos primeiros a estudar os sistemas eleitorais foi Jean Charles Borda, ao mostrar à Academia que muitas vezes o candidato mais votado (o candidato da maioria) é simultaneamente o mais detestado. Depois de Borda, é Condorcet que no seu *Essai* apresenta um sistema eleitoral procurando responder às falhas detectadas por Borda na *maneira usual de contar votos* e, também, às falhas, entretanto detectadas no sistema eleitoral apresentado pelo próprio Borda.

O sistema eleitoral apresentado por Condorcet é baseado no argumento de que os eleitores votam honestamente no candidato que julgam ser o melhor para a Sociedade, mas ocasionalmente enganam-se. Condorcet, assumindo que há uma maior probabilidade dos eleitores fazerem juízos correctos do que incorrectos [6, p. 136], desenvolve de forma rigorosa o seu sistema eleitoral utilizando o cálculo de probabilidades.

O *Essai*, como referido, é um texto de difícil leitura, e foi só em 1988 que Young [30] "descodifica" o sistema eleitoral, proposto por Condorcet.

O sistema eleitoral apresentado por Condorcet é baseado em comparações dois a dois e assenta no chamado ***Critério do Vencedor de Condorcet,*** isto é, *se existir um candidato que derrote todos os outros em comparações dois a dois então esse deve ser declarado o vencedor.* Condorcet, como veremos, apresenta um sistema eleitoral original e correcto para encontrar a ordenação mais provável entre os candidatos, tendo por objectivo a eleição do melhor candidato, considerando que os eleitores ao fazerem a sua escolha cometem erros. Mas, como acredita na honestidade dos eleitores, não fosse ele um humanista convicto, assume que a probabilidade de não cometer erros é maior que a probabilidade de os cometer.

1.4.2.2 O modelo de Condorcet

O objectivo de Condorcet é a procura da "verdade colectiva." Perante uma lista de candidatos procura-se o melhor primeiro, o melhor segundo, o melhor terceiro, etc. Para Condorcet, encontrar *"verdadeiramente o melhor"* candidato é encontrar aquele que com maior probabilidade, a maioria vai eleger [6, pp. 127-128]. Por exemplo, quando um tribunal de juri tem que decidir se um arguido é culpado ou inocente, espera-se que a decisão tomada seja a justa e correcta. Ora é este sentido (humanista) de honestidade que leva Condorcet a considerar que as assembleias de voto são formadas por pessoas que têm opiniões diferentes e, por isso mesmo enganam-se, considerando no entanto que é muito provável que a maioria tome a melhor decisão.

Conforme facilmente se deduz do *Critério do Vencedor de Condorcet,* se só existirem dois candidatos não haverá dificuldade nenhuma em os ordenar após a conclusão da votação. No entanto, quando o número de candidatos é maior que dois, começam a aparecer dificuldades.

Para descrever o algoritmo apresentado por Condorcet no *Essai* [6, pp. 125-126], apresentamos um exemplo dado por Young [30, p. 1233]. Consideremos um conjunto de três candidatos $\{A, B, C\}$ com os resultados das comparações dois a dois dados pela tabela 1.3,

	A	B	C
A	-	8	6
B	5	-	11
C	7	2	-

Tabela 1.3: Comparações dois a dois para 13 eleitores e 3 candidatos

Na tabela 1.3 observa-se que na comparação entre os candidatos A e B, há oito eleitores que preferem o candidato A e cinco preferem o candidato B. Quando comparados os candidatos A e C verifica-se que seis eleitores preferem o candidato A e sete preferem o candidato C. Por fim, na comparação entre os candidatos B e C, onze preferem o candidato B enquanto que só dois preferem o candidato C. Temos, então, como resultado desta votação, que o candidato A ganha ao candidato B, o candidato B ganha ao candidato C e o candidato C ganha ao candidato A, ou seja, não existe vencedor de Condorcet; existe aquilo a que, em comparações dois a dois, de designa por um ***ciclo***.

É com o objectivo de encontrar a ordenação mais provável que Condorcet, para quebrar os ciclos, propõe o seguinte algoritmo:

1. "*Todas as opiniões possíveis, e que não impliquem contradição, reduzem-se a indicar a ordem de mérito que se julga ter lugar entre os candidatos* (...). *Portanto para* n *candidatos, teremos* $n(n-1)\cdots 2$ *opiniões possíveis*".

2. "*Cada eleitor tendo dado assim a sua opinião, indicando a ordem de valor dos candidatos, quando comparados dois a dois, teremos em cada opinião* $\frac{n(n-1)}{2}$ *proposições a considerar separadamente. Tomando o número em que cada uma está compreendida na opinião de cada um dos* q *eleitores, teremos o número de vozes que adoptam cada proposição*".

3. "*Formaremos uma opinião a partir das* $\frac{n(n-1)}{2}$ *proposições que reúnem o maior número de vozes. Se esta opinião está no número* $n(n-1)\cdots 2$ *opiniões possíveis,*

encararemos como eleito o candidato a quem esta opinião dá a preferência. Se esta opinião é uma das $2^{\frac{n(n-1)}{2}} - n(n-2)\cdots 2$ *de opiniões impossíveis, então eliminaremos desta opinião impossível sucessivamente as proposições que têm uma menor pluralidade, e adoptaremos a opinião resultante daquelas que sobram".* [6, pp. 125-126]

Antes de aplicarmos o algoritmo de Condorcet ao exemplo da tabela 1.3, importa esclarecer a terminologia usada por Condorcet. Assim, Condorcet designa por *opinião* o conjunto de todas as comparações dois a dois, designa por *proposição* uma ordenação de dois candidatos (cada par de candidatos, X e Y, origina duas proposições: $X > Y$ e $Y > X$) e chama *vozes* ao número de votos. Importa ainda determinar o número total de opiniões que é possível formar com n candidatos; recorrendo ao cálculo combinatório e uma vez que dois candidatos originam duas proposições, com n candidatos podem-se formar $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ proposições, logo o número de opiniões é $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$. O número de opiniões possíveis é trivialmente dado por $n! = n(n-1)\cdots 2$. Donde se conclui que Condorcet, implicitamente, não admite empates.

Usando a linguagem de Condorcet, comecemos por procurar as três proposições com maior número de votos, que são: $B > C$ com 11 votos, $A > B$ com 8 votos e $C > A$ com 7 votos. Uma vez que estas três proposições formam um ciclo eliminamos a que tem menor pluralidade, isto é, eliminamos a proposição $C > A$, ficando com a "opinião" $B > C$ e $A > B$ e, implicitamente, $A > C$, o que implica a ordenação (ou proposição possível) $A > B > C$.

Para o caso em que só existem três candidatos o algoritmo é claro, mas pode tornar-se ambíguo no caso geral. Segundo Young [30, pp. 1233-1234], a dificuldade advém da frase "*eliminaremos desta opinião impossível sucessivamente as proposições*" no passo 3. O que literalmente significa que: se existir um ciclo nas proposições seleccionadas no passo 2, eliminam-se sucessivamente as proposições que tiverem o menor número de votos até que o ciclo desapareça e de modo que as proposições restantes não formem um ciclo.

Ainda segundo Young [30, p. 1234], existem algumas razões para provavelmente não ser exactamente isto que Condorcet quereria dizer, e dá como exemplo a tabela 1.4 para quatro candidatos e vinte e cinco eleitores. Neste exemplo, no passo 2 do algoritmo de Condorcet, seleccionam-se as seis proposições com o maior número de votos e ordenam-

-se-as por ordem decrescente, obtendo-se o resultado que pode ser observado na tabela 1.5. Verifica-se assim que existe um ciclo. De acordo com o passo 3, eliminamos a que tem menor pluralidade, isto é, $B > A$.

Mas, ainda não estamos perante uma "opinião" porque ainda nos resta um ciclo: $B > C$; $C > D$; e $D > B$. Portanto, necessitamos, de acordo com o passo 3, de eliminar a proposição $D > B$, a que agora tem a menor pluralidade. Todos os ciclos estão agora eliminados. Mas surge neste momento uma dificuldade: não se consegue estabelecer uma ordem entre os candidatos A e B. Obteve-se deste modo uma indeterminação.

	A	B	C	D
A	-	12	15	17
B	13	-	16	11
C	10	9	-	18
D	8	14	7	-

Tabela 1.4: Comparações dois a dois

$C > D$	$\rightarrow$	18
$A > D$	$\rightarrow$	17
$B > C$	$\rightarrow$	16
$A > C$	$\rightarrow$	15
$D > B$	$\rightarrow$	14
$B > A$	$\rightarrow$	13

Tabela 1.5: Ordenação decrescente

Parece ser mais provável, de acordo com Young [30, pp. 1234-1235] que Condorcet quisesse dizer "*inverter*" em vez de "*eliminar*". Assim, em vez de eliminar as duas últimas proposições inverte-se a que tiver menor pluralidade ($B > A$, ficaria $A > B$) e depois a que viesse a seguir com menor pluralidade ($D > B$, daria origem a $B > D$) e assim sucessivamente até não existirem mais ciclos.

Com esta pequena alteração, do exemplo da tabela 1.4 resulta a opinião $A > B > C > D$. Infelizmente esta resposta não se enquadra com o resto do argumento de Condorcet. Ele tinha como intenção encontrar a opinião mais provável, de entre o conjunto das opiniões que não contivessem ciclos, e que fosse simultaneamente suportada pelo maior número de comparações dois a dois possíveis. Neste caso, a soma dos votos de $A > B$ (12 votos) com $A > C$ (15 votos) com $A > D$ (17 votos) com $B > C$ (16 votos) com $B > D$ (11 votos) e com $C > D$ (18 votos) é igual a 89 votos. Mas, esta soma não corresponde ao maior número de votos que suporta uma opinião. A opinião $B > A > C > D$ é suportada por um total de 90 votos. Esta opinião é obtida invertendo somente a proposição $D > B$ e que, inesperadamente, não é aquela a que corresponde a menor pluralidade. Como diz Nanson (citado em Black [3, p. 175]):

> "*A regra geral para o caso de qualquer número de candidatos tal como foi dada por Condorcet é demasiado breve para ser inteligível... e como não são dados exemplos, não há esperança de descobrir o que é que ele queria dizer*."

No entanto, Young [30, pp. 1234-1235] lembra que o objectivo de Condorcet é encontrar a combinação mais provável de opiniões, e então sugere que ao passo 3 do algoritmo de Condorcet, seja dada uma nova redacção, propondo:

3. "*Formaremos uma opinião das* $\frac{n(n-1)}{2}$ *proposições que reúnem o maior número de vozes. Se esta opinião está no número* $n(n-1)\cdots 2$ *de opiniões possíveis, encararemos como eleito o candidato a quem esta opinião dá a preferência. Se esta opinião é uma das* $2^{\frac{n(n-1)}{2}} - n(n-2)\cdots 2$ *de opiniões impossíveis, então invertemos nessa opinião impossível o conjunto das proposições que tem a menor pluralidade combinada e adoptamos a opinião a partir daqueles que sobram*."

Young admite ser razoável esperar que fosse esta regra que Condorcet quisesse dizer. De qualquer modo considera ser esta a única interpretação que torna consistente o algoritmo, com o objectivo de encontrar a ordenação provavelmente mais correcta.

1.4.2.3 O modelo de Condorcet como teste de hipóteses

Do ponto de vista histórico, o sistema eleitoral de Condorcet é particularmente interessante porque ele representa uma das mais precoces aplicações do que hoje designamos por *testes de hipóteses* (Condorcet usa o *estimador da máxima verosimilhança*) [30, pp. 1235].

No sistema eleitoral de Condorcet é necessário inferir qual a ordem dos candidatos mais provável – um dado essencial mas não observável – partindo de um conjunto de votos correspondentes a comparações dois a dois.

Condorcet assume, em primeiro lugar, que em qualquer comparação dois a dois cada eleitor tem uma probabilidade fixa p de fazer a escolha correcta e uma probabilidade $1-p$ de essa escolha não ser a correcta, em que $\frac{1}{2} < p < 1$ e p é a mesma para todos os eleitores. Em segundo lugar, assume que a escolha de cada eleitor em cada comparação dois a dois, para cada par de candidatos, é independente da escolha feita, ou que venha a ser feita, para outro par de candidatos. Finalmente, assume que a escolha de cada eleitor é independente da escolha de qualquer outro eleitor [6, p. 3]. Ou seja, Condorcet está a colocar a determinação da ordenação mais provável nas condições do Teorema de Bernoulli [3, p. 164].

Apliquemos o que acabámos de referir ao exemplo da tabela 1.3. Suponhamos que pretendemos determinar a probabilidade da observação das 39 comparações dois a dois da tabela 1.3 para a ordenação $A > B > C$, em que a probabilidade de $X > Y$ é p e a de $Y > X$ é $1 - p$, para qualquer $X, Y \in \{A, B, C\}$ com $X \neq Y$. Tem-se

$$\begin{aligned} P(A > B > C) &= P(A > B)\, P(A > C)\, P(B > C) \\ &= \frac{13!}{8!5!}\left[p^8 (1-p)^5\right] \frac{13!}{6!7!}\left[p^6 (1-p)^7\right] \frac{13!}{11!2!}\left[p^{11} (1-p)^2\right] \\ &= \frac{(13!)^3}{8!5!6!7!11!2!}\left[p^{25} (1-p)^{14}\right]. \end{aligned}$$

De igual modo podemos determinar a probabilidade de $A > C > B$:

$$\begin{aligned} P(A > C > B) &= P(A > C)\, P(A > B)\, P(C > B) \\ &= \frac{13!}{8!5!}\left[p^8 (1-p)^5\right] \frac{13!}{6!7!}\left[p^6 (1-p)^7\right] \frac{13!}{2!11!}\left[p^{2} (1-p)^{11}\right] \\ &= \frac{(13!)^3}{8!5!6!7!2!11!}\left[p^{16} (1-p)^{23}\right]. \end{aligned}$$

Como o coeficiente das seis ordenações é sempre o mesmo:

$$k = \frac{(13!)^3}{8!5!6!7!2!11!},$$

as probabilidades das seis ordenações para treze eleitores e três candidatos constam na tabela 1.6.

Ordenação	Probabilidade	Ordenação	Probabilidade
$A > B > C$	$k\, p^{25} (1-p)^{14}$	$A > C > B$	$k\, p^{16} (1-p)^{23}$
$B > A > C$	$k\, p^{22} (1-p)^{17}$	$B > C > A$	$k\, p^{23} (1-p)^{16}$
$C > A > B$	$k\, p^{17} (1-p)^{22}$	$C > B > A$	$k\, p^{14} (1-p)^{25}$

Tabela 1.6: Probabilidade das 6 ordenações para 13 eleitores e 3 candidatos

Para cada ordenação $X > Y > Z$, em que $X, Y \in \{A, B, C\}$ com $X \neq Y$ o expoente de p é a soma dos resultados das comparações dois a dois em que os eleitores votam a favor de $X > Y$, enquanto que o expoente de $1 - p$ é a soma das comparações dois a dois em que os eleitores votam a favor de $Y > X$.

Admitindo que $p > \frac{1}{2}$, como Condorcet faz a ordenação mais provável do exemplo da tabela 1.3 é a que corresponde, na tabela 1.6, ao maior expoente de p, ou seja, $A > B > C$.

Por fim, veja-se a tabela 1.7 com as respectivas probabilidades referentes ao exemplo da tabela 1.4 e repare-se que ao maior expoente de p, 90, corresponde a ordenação $B > A > C > D$.

Ordenação	Probabilidade	Ordenação	Probabilidade
$A > B > C > D$	$k\,p^{89}\,(1-p)^{61}$	$C > A > B > D$	$k\,p^{77}\,(1-p)^{73}$
$A > B > D > C$	$k\,p^{78}\,(1-p)^{72}$	$C > A > D > B$	$k\,p^{80}\,(1-p)^{70}$
$A > C > B > D$	$k\,p^{82}\,(1-p)^{68}$	$C > B > A > D$	$k\,p^{78}\,(1-p)^{72}$
$A > C > D > B$	$k\,p^{85}\,(1-p)^{65}$	$C > B > D > A$	$k\,p^{69}\,(1-p)^{81}$
$A > D > B > C$	$k\,p^{81}\,(1-p)^{69}$	$C > D > A > B$	$k\,p^{71}\,(1-p)^{79}$
$A > D > C > B$	$k\,p^{74}\,(1-p)^{76}$	$C > D > B > A$	$k\,p^{72}\,(1-p)^{78}$
$B > A > C > D$	$k\,p^{90}\,(1-p)^{60}$	$D > A > B > C$	$k\,p^{72}\,(1-p)^{78}$
$B > A > D > C$	$k\,p^{79}\,(1-p)^{71}$	$D > A > C > B$	$k\,p^{65}\,(1-p)^{85}$
$B > C > A > D$	$k\,p^{85}\,(1-p)^{65}$	$D > B > A > C$	$k\,p^{73}\,(1-p)^{77}$
$B > C > D > A$	$k\,p^{76}\,(1-p)^{74}$	$D > B > C > A$	$k\,p^{68}\,(1-p)^{82}$
$B > D > A > C$	$k\,p^{70}\,(1-p)^{80}$	$D > C > A > B$	$k\,p^{60}\,(1-p)^{90}$
$B > D > C > A$	$k\,p^{65}\,(1-p)^{85}$	$D > C > B > A$	$k\,p^{61}\,(1-p)^{89}$

Tabela 1.7: Probabilidades referentes ao exemplo da tabela 1.4 (k é uma constante)

Pelo exposto, Young [30, pp. 1235-1236] suspeita que Condorcet estivesse à procura da ordenação mais provável, usando o estimador da máxima verosimilhança.

1.4.2.4 O modelo de Condorcet e a regra de Kemeny

Em 1959, na revista de divulgação científica *Daedalus* [12], John Kemeny propôs uma regra para encontrar a ordenação das alternativas que estivesse mais próxima daquela que deveria ser declarada como a que melhor representa a vontade colectiva dos eleitores, ou seja, aquela que deveria ser declarada como vencedora. O sistema eleitoral proposto por Condorcet tinha como objectivo: "*procurar a verdade colectiva*".

Ora, a regra de Kemeny encontra sempre o vencedor de Condorcet, desde que ele exista; quando não existe, segundo Young, em [30, p. 1236], a regra de Kemeny, ao estar de acordo com o objectivo de Condorcet, é uma importante aplicação do estimador da máxima verosimilhança, para encontrar a melhor ordenação que representa a vontade dos eleitores.

1.5 Do fim do século XVIII ao início do Século XXI

Conforme referimos no início da secção 1.4, foi na *Academia Real das Ciências* francesa que a teoria matemática das eleições começou a ser estudada sistematicamente e desde então até aos nossos dias nunca mais deixou de o ser. Vamos terminar este capítulo fazendo uma resenha histórica, não exaustiva, do que de mais significativo foi acontecendo, no vastíssimo campo da teoria matemática das eleições, depois de Borda e Condorcet. Chamamos desde já a atenção para que os vários autores a que nos referiremos estabelecem um "cordão" quase contínuo no tempo, desde o dia em que Borda apresentou, oralmente, a sua Memória à Academia, até hoje.

Depois de Borda e Condorcet é de salientar que na Suíça, mais propriamente na cidade-estado de Genebra (cidade onde o sistema eleitoral de Condorcet estava a ser usado), se encontra um conceituado matemático, Simon Antoine Jean Lhuilier (1750-1840). Em 1794 Lhuilier contesta, com contra-exemplos, o sistema eleitoral de Condorcet referindo que padece das mesmas falhas que a contagem de Borda [16, p. 49]. Lhuilier chegou a apresentar um sistema eleitoral baseado no proposto por Condorcet, mas que viria a ser considerado ininteligível [16, pp. 49-50].

Em 1797, José Isidore Morales (1758-1818) publica a *Memoria Matemática sobre el Cálculo de la Opinion en las Elecciones* [19, Memoria] e, em 1805, o *Apéndice a la Memoria Matemática sobre el Cálculo de la Opinion en las Elecciones* [19, Apéndice]. Trata-se de um espanhol, auto-didacta, que dedica toda a sua obra matemática à defesa da contagem de Borda. As ferramentas por ele usadas vão pouco além da combinatória e das progressões [19, pp. 14-16]. No *Apéndice* faz luz sobre alguns dos resultados apresentados na *Memoria* e rebate as críticas feitas à *Memoria*, rebatendo também, implicitamente, as críticas feitas à contagem de Borda. O interesse de Morales pela teoria matemática das eleições pode ter resultado do facto de ter pertencido a várias comissões onde era usado, com bastante frequência, o voto [19, p. 19]. Nos trabalhos de Morales não aparece nenhuma referência a Condorcet, o que provavelmente se deve ao facto de Condorcet ser um autor proibido pela Inquisição. No *Prólogo* da *Memoria*, Morales desvenda a motivação do seu trabalho: justificar a contagem de Borda [19, Memoria, Prólogo]. Começa por citar o periódico francês "*La Décade Philosophique*" do dia 7 de Agosto de 1796, onde de forma resumida a contagem de Borda é apresentada e o leitor informado do seu uso na eleição de membros para o Instituto Nacional de França. Morales designa a contagem de Borda por procedimento de votação "*de compensação e soma*", e é considerado por ele como "*simples e cómodo*" e estimado como "*a regra segura de votar e eleger*" [19, Memoria, p. 8].

Em 1829, trinta e dois anos depois da sua publicação, a *Memória* de Morales foi traduzida para francês por D. A. Bourgeois. No entanto, a tradução não foi tão fiel ao original quanto seria desejável [19, pp. 27-28].

Contemporâneo de Morales, encontra-se, em França, Pierre Claude François Daunou (1761-1840), fervoroso adepto de Condorcet, que publicou em 1803 um ensaio intitulado "*Mémoire sur les elections au scrutin*", onde além de contestar os argumentos de Morales e, consequentemente, os de Borda, apresenta como solução para o caso de não existir vencedor de Condorcet a escolha do candidato mais votado. Apesar de "parecer" ter entendido o algoritmo de Condorcet, não o conseguiu impor aos seus pares [16, pp. 52-54].

Na segunda metade do século XIX, encontra-se Charles Lutwidge Dodgson (1832--1898), mais conhecido pelo seu pseudónimo Lewis Carroll, a escrever sobre o modo de quebrar os ciclos apresentados pelo sistema de votação de Condorcet. Chega mesmo a afirmar, segundo Cranor e Cytron,[9] que as eleições "*são mais um jogo de habilidade que um teste real aos desejos dos eleitores*" e que "*na minha opinião é preferível que as eleições sejam decididas de acordo com os desejos da maioria do que os daqueles que têm mais habilidade no jogo, por isso penso ser desejável que todos devam saber as regras pelas quais este jogo se pode ganhar*". Lewis Carroll apresentou ainda mesmo, em 1876, um sistema eleitoral que ainda hoje é objecto de estudo.[10]

Exactamente cem anos após a publicação do *Essai* de Condorcet surge Edward John

[9] Artigo disponível, no dia 27 de Fevereiro de 2006, em (http://lorrie.cranor.org/pubs/mpsa).

[10] Veja-se: Hemaspaandra, E., Hemaspaandra, L. A., Rothe, J., Exact Analysis of Dodgson Elections: Lewis Carroll's 1876 Voting System Is Complete for Parallel Access to NP, *Journal of the ACM*, Vol. **44**, Nº **6**, November 1997, 806-825.

Nanson (1850-1936), membro do Corpo Directivo do Trinity College em Cambridge e Professor de Matemática em Melbourne de 1875 até 1922, onde escreveu as suas memórias sobre eleições. Por razões desconhecidas, as suas memórias não aparecem completas, o que torna a sua leitura bastante difícil. Apesar das ideias matemáticas expressas nas suas memórias sobre eleições serem bastante simples, ele torna-as desnecessariamente obscuras quando trata de as aplicar, para quebrar os ciclos de Condorcet, em eleições que envolvam mais de três candidatos. Nanson refere que os sistemas eleitorais de Borda e de Condorcet são os que melhor reflectem a vontade dos eleitores, mas não justifica porquê [3, p. 186]. Nanson chega mesmo a apresentar um sistema eleitoral parecido com o de Borda.[11]

Importa ainda destacar os trabalhos de Duncan Black (1908-1991) ao nível da investigação histórica que realizou e tão bem soube espelhar na obra *The Theory of Committees and Elections* [3].

Refiram-se também os trabalhos de John Kemeny (1926-1992) e Laurie Snell (1925-) em especial a obra *Mathematical Models in the Social Sciences* [13], onde é apresentada e axiomatizada a já referida regra de Kemeny.

Na segunda metade do século XX são publicados o artigo *A difficulty in the concept of social welfare* [1] e, posteriormente, o livro *Social Choice and Individual Values* [2], por Kenneth J. Arrow (1921-) que tiveram influência decisiva na moderna teoria da escolha social, ou teoria matemática das eleições. A este autor dedicaremos parte do capítulo seguinte. Contemporâneo de Arrow é Michael Dummett[12] (1925-), um defensor de Borda nos dias de hoje, que apresentou em 1984 um sistema eleitoral baseado na contagem de Borda e em "Quotas" (Quota Borda Sistem).[13]

Por fim salientam-se: Iain McLean (1946-), um professor de Política na Universidade de Oxford e que muito tem investido na investigação histórica da teoria matemática das eleições; o professor de Economia da Universidade Autónoma de Barcelona, e actualmente Secretário Geral de Política Científica e Tecnológica do Ministério da Educação e Ciência de Espanha, Salvador Barberà (1946-), pelos seus estudos à volta do sistema eleitoral de Condorcet; Peyton Young, professor do Departamento de Economia da Universidade Johns Hopkins, nos Estados Unidos da América, e do

[11] Wikipedia em 27 de Fevereiro de 2006, (http://en.wikipedia.org/wiki/Edward_J._Nanson).
[12] Wikipedia em 24 de Agosto de 2006, (http://en.wikipedia.org/wiki/Michael_Dummett).
[13] Wikipedia em 24 de Agosto de 2006, (http://en.wikipedia.org/wiki/Quota_Borda_system).

Departamento de Economia da Universidade de Oxford no Reino Unido, que foi um dos primeiros a explicar o sistema eleitoral proposto por Condorcet em 1988, no artigo *Condorcet's Theory of Voting* [30]. E Donald Saari (1940-), o mais profícuo de todos a escrever artigos e livros, na defesa da contagem de Borda, tendo mesmo chegado ao ponto de afirmar que a contagem de Borda viola a Independência mas satisfaz todas as outras condições de Arrow, e que portanto há, em sua opinião, espaço para lhe chamar a "melhor" regra de escolha social que viola a Independência [16, p. 75].

E isto só para referir algumas das personagens directamente envolvidas no estudo da teoria matemática das eleições.

A teoria da escolha social (ou teoria matemática das eleições) sofreu um desenvolvimento muito grande a partir da década de setenta, do século passado. Apareceram revistas de âmbito económico, como *Econometrica*, *Journal of Economic Theory* e *Review of Economic Studies*, entre outras, onde foram publicados uma quantidade apreciável de trabalhos. Posteriormente apareceram revistas ainda mais especializadas, a publicar trabalhos nesta área, tais como *Mathematical Social Sciences*, *Social Choice and Welfare*, *Theory and Decision*. O que garante que os estudos sobre a teoria matemática das eleições estão hoje a ser feitos e continuarão a ser objecto de estudo de muitos autores nos anos que se seguem.

Capítulo 2

O Teorema (da Impossibilidade) de Arrow

Neste capítulo procedemos ao estudo de alguns sistemas eleitorais. Para isso, começamos por clarificar o que se entende por voto e sistema eleitoral. Em seguida, apresentamos algumas condições, que parecem (à primeira vista...) imprescindíveis, para que um sistema eleitoral democrático traduza as preferências dos eleitores. Posteriormente verificamos quais destas condições são, ou não, satisfeitas por cada um dos sistemas eleitorais. Surpreendentemente não há um sistema eleitoral que satisfaça todas as condições desejáveis numa democracia (num sentido que precisaremos adiante); é isso que exprime o Teorema da Impossibilidade de Arrow com que termina este capítulo.[1]

2.1 Sistemas de votação

Consideremos uma eleição com n candidatos, ou alternativas (por exemplo, a tomada de decisões, que implicam votações por parte dos membros do Conselho Pedagógico de uma Escola, sobre quais as disciplinas de opção, a oferecer aos seus estudantes) C_1, C_2, ..., C_n. Chamamos ***voto*** (ou eventualmente, boletim de voto) a qualquer lista ordenada em que figurem os n candidatos, tendo em conta as preferências do

[1]Este capítulo é essencialmente baseado em Taylor [28, pp. 96-133, 248-259], tendo o autor desta tese beneficiado também do resumo da autoria de António Machiavelo, contido em (http://www.fc.up.pt/cmup/ajmachia/SistemasVot.html), no dia 7 de Agosto de 2005.

eleitor; cada eleitor ordena sempre do que prefere mais para o que prefere menos, ou não prefere; um eleitor pode preferir igualmente dois ou mais candidatos colocando-os empatados no voto. Neste parágrafo suporemos sempre que não há empates.

Note-se que o voto assim definido contém muito mais informação do que um voto em que o eleitor escolhe um só candidato, a chamada *votação plural* (ou *uninominal*); sendo o voto uma lista ordenada, é guardada informação sobre todas as preferências relativas de cada eleitor, o que garante que a este voto podem ser aplicados mais sistemas eleitorais. Pode-se pensar num voto no sentido mais comum, como um voto no sentido que aqui usaremos em que o eleitor coloca um candidato em primeiro lugar e todos os outros empatados em segundo. Neste mesmo sentido, o mesmo voto pode ser usado para determinar o resultado de uma eleição entre qualquer par de candidatos. Conforme referido no primeiro capítulo, define-se uma eleição entre qualquer par de candidatos como uma ***comparação dois a dois***.

Um ***sistema eleitoral*** é um processo, ou regra, que para qualquer conjunto individual de ordenações de candidatos, ou alternativas R_1, R_2, ..., R_m, (uma ordenação por cada um dos m eleitores) estabelece uma ordem final, R, como sendo o resultado (ou escolha colectiva) da votação [2, p. 23].

Na presença de um sistema eleitoral com três candidatos, A, B, e C, quando a preferência de um eleitor é em primeiro lugar o candidato B, em segundo C e por fim A, o seu voto será denotado por:

		B
$B \succ C \succ A$	ou	C
		A

Tabela 2.1: Representações de um voto

conforme seja mais adequado. Note-se que quando escrevemos $X \succ Y$, devemos ler X é preferido relativamente a Y.

Uma vez que, quando se vota, se ordenam os candidatos, é possível atribuir uma pontuação à posição de cada candidato. Assim, por exemplo, na *contagem de Borda*, ao voto $B \succ C \succ A$, corresponderiam dois pontos para o candidato B, um ponto para o candidato C e zero pontos para o candidato A.

Nos sistemas eleitorais que iremos estudar não nos vamos interessar directamente por "um" voto em particular, mas sim, por quantos votos existem, ou qual a percentagem, numa determinada eleição, de cada tipo. Num conjunto com três candidatos, $\mathcal{S} = \{A, B, C\}$, a situação que em geral consideraremos dá origem a 3!, ou seja 6, tipos de votos diferentes, a saber [23, p. 318]:

Tipo	Classificação	Tipo	Classificação
1	$A \succ B \succ C$	4	$C \succ B \succ A$
2	$A \succ C \succ B$	5	$B \succ C \succ A$
3	$C \succ A \succ B$	6	$B \succ A \succ C$

Tabela 2.2: Tipos de votos

Usando um triângulo equilátero, em que identificamos os vértices com os candidatos, obtemos uma representação geométrica da tabela 2.2, associando a cada tipo de voto uma região bem delimitada do triângulo, conforme pode ser observado na figura 2.1, em que os números 1, 2, 3, 4, 5 e 6 estão colocados na região associada a cada um dos seis tipos de votos possíveis [23, p. 320](este procedimento será detalhado mais adiante nos exemplos 2.1 e 2.2).

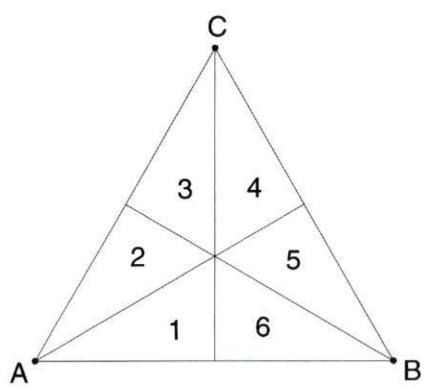

Figura 2.1: Associação de cada tipo de voto, à correspondente área do triângulo equilátero

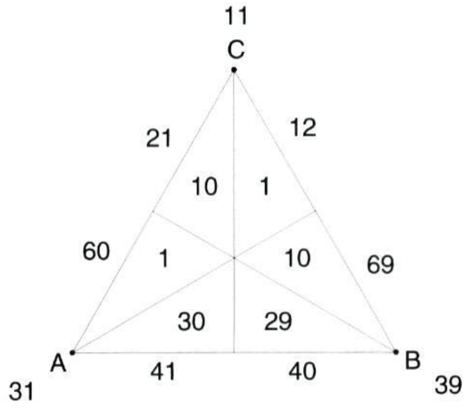

Figura 2.2: Exemplo de um perfil e resultados associados a dois sistemas eleitorais

A uma lista ou vector onde conste o número de votos de cada tipo chamamos ***perfil eleitoral***. Por exemplo, ao vector $(30, 1, 10, 1, 10, 29)$ de $\mathbb{R}^6$, correspondem: 30 votos do Tipo 1; 1 voto do Tipo 2; 10 votos do Tipo 3; 1 voto do Tipo 4; 10 votos do Tipo 5; e 29 votos do Tipo 6. A representação deste perfil no triângulo equilátero, figura 2.2, permite efectuar o cálculo do resultado de cada candidato para vários sistemas eleitorais, como se explica no exemplo 2.1.

Designe-se por $\mathcal{P}$ o subconjunto de $\mathbb{R}^6$ de todos os perfis possíveis no caso de haver três candidatos.

2.1.1 Sistemas eleitorais

No estudo que iremos fazer vamos considerar os seguintes sistemas eleitorais:

1. ***Sistema plural (ou Uninominal "um Homem um voto")***: A ordenação dos candidatos é feita contando, para cada um, o número de votos em que este ficou em primeiro lugar, e os candidatos são ordenados por ordem crescente do correspondente número de votos obtidos.

2. ***Contagem de Borda***: A cada posição do voto é atribuído um número de pontos: 0 (zero) para a última, 1 (um) para a penúltima, etc. ..., adicionando-se 1 (um) ponto quando se passa de uma posição para a imediatamente acima. Os pontos "ganhos" por cada candidato são adicionados, e os candidatos são ordenados por ordem crescente dos pontos obtidos.

3. ***Sistema de Hare***: Eliminam-se, em eleições sucessivas, o(s) candidato(s) com menor número de primeiros lugares, sendo os candidatos ordenados por ordem inversa de eliminação.

4. ***Sistema sequencial aos pares com agenda (S.S.P.A.)***: *Acorda-se uma ordenação preliminar dos candidatos, a que se chama uma* ***agenda***; consideram-se os resultados de eleições entre pares de candidatos (comparações dois a dois), pela ordem dada na agenda, eliminando-se os derrotados da agenda e prosseguindo até a agenda conter apenas um elemento. Os candidatos são finalmente ordenados por ordem inversa de eliminação da agenda.

5. ***Ditadura***: *Escolhe-se uma "pessoa" o* ***ditador***. Dada uma sequência de listas de preferências individuais, ignoram-se todas à excepção da do ditador. O

candidato que aparece em primeiro lugar na lista do ditador é declarado vencedor, ficando todos os outros candidatos em segundo lugar.

Analisem-se dois exemplos de como é que na presença de um perfil, e de um sistema eleitoral, se calculam os resultados de cada candidato, usando no primeiro exemplo o triângulo da figura 2.2, e no segundo a tabela 2.3 e o triângulo da figura 2.3, para finalmente determinar o resultado de uma eleição.

Exemplo 2.1 Considere-se o perfil[2] $p = (30, 1, 10, 1, 10, 29)$, e repare-se como se podem obter de modo imediato, a partir da representação no triângulo equilátero da figura 2.2, os resultados associados a este perfil usando três sistemas eleitorais diferentes: tem-se que para o sistema eleitoral plural, o resultado de cada candidato é a soma dos pontos que estão nas duas regiões do triângulo mais próximas do vértice, que representa cada um dos candidatos. Assim, o candidato A tem 31 pontos, o candidato B tem 39 pontos e o candidato C tem 11 pontos, ou seja, o vencedor é o candidato B, ficando em segundo o candidato A e por fim o candidato C. Considerando comparações dois a dois, como a altura de um triângulo equilátero o divide em dois triângulos rectângulos iguais, o resultado de cada comparação é a soma dos valores que se encontram no triângulo rectângulo mais próximo de cada um dos vértices associado a cada um dos dois candidatos que se quer comparar; por exemplo, na comparação entre os candidatos B e C, a pontuação do candidato B é de 69 pontos, enquanto que a do candidato C é de 12 pontos, ou seja, em comparações dois a dois o candidato A ganha aos outros dois, e como na comparação entre os candidatos B e C o vencedor é o B, então, numa votação em que o sistema eleitoral seja o de Condorcet o vencedor é o candidato A, seguido do candidato B e por fim do candidato C; também, a pontuação de cada candidato para a contagem de Borda pode ser facilmente obtida dado que basta adicionar as pontuações que cada candidato obtém nas comparações dois a dois, obtendo o candidato A 101 pontos, o candidato B 109 pontos e o candidato C 43 pontos, e assim, usando a contagem de Borda o vencedor é o candidato B, seguido do candidato A e ficando em último lugar o candidato C.

Exemplo 2.2 Analisemos um exemplo em que os quinze elementos (que designaremos por eleitores) do Conselho Pedagógico de uma Escola, têm de optar por uma de três

[2]Perfil apresentado por Condorcet no *Essai* para mostrar a fragilidade da contagem de Borda; este perfil será também estudado no exemplo 3.1.

disciplinas (ou alternativas) para oferecer como opção aos seus estudantes. O resultado da votação é o seguinte: 6 eleitores preferem a disciplina de Artes do Fogo (AF) em primeiro lugar, em segundo lugar preferem Temas Actuais da Matemática (TAM) e por fim, Introdução à Política (IP); 5 eleitores preferem a disciplina de IP em primeiro lugar, em segundo lugar preferem TAM e por fim, AF; por último, os restantes 4 eleitores preferem a disciplina de TAM em primeiro lugar, em segundo lugar preferem IP e por fim, AF. Observe-se a tabela 2.3 e o triângulo da figura 2.3.

Votos	Preferência
6	$AF \succ TAM \succ IP$
5	$IP \succ TAM \succ AF$
4	$TAM \succ IP \succ AF$

Tabela 2.3: Preferências dos membros do C. Pedagógico

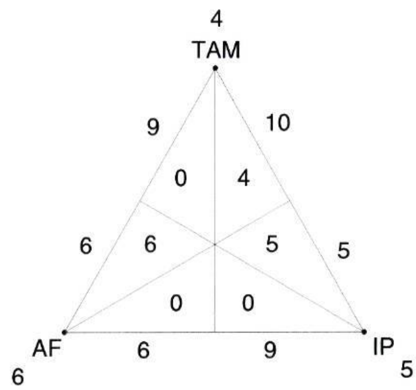

Figura 2.3: Representação das preferências do C. Pedagógico

Determine-se o vencedor e a ordenação final usando o sistema eleitoral sequencial aos pares, com a agenda $AF - TAM - IP$, isto é, determine-se a alternativa vencedora da eleição entre AF e TAM e a alternativa vencedora desta eleição disputa a eleição com a alternativa IP. Assim, por simples observação do triângulo da figura 2.3 vemos que a alternativa vencedora da primeira comparação é TAM, pois esta alternativa obtém 9 votos, enquanto que AF obtém 6. Agora, na comparação entre TAM e IP, a alternativa TAM obtém 10 votos e IP obtém 5. Conclui-se que a ordenação final das alternativas para o sistema eleitoral sequencial aos pares com a agenda $AF-TAM-IP$ é: em primeiro lugar TAM, em segundo IP e em último AF.

A tabela 2.4 permite observar as ordenações finais das três alternativas que o Conselho Pedagógico votou, usando diferentes sistemas eleitorais.

Plural	Hare	S.S.P.A. $AF - TAM - IP$	S.S.P.A. $TAM - IP - AF$	Borda	Condorcet
AF	IP	TAM	TAM	TAM	TAM
IP	AF	IP	AF	IP	IP
TAM	TAM	AF	IP	AF	AF

Tabela 2.4: Ordenações finais usando vários sistemas eleitorais

Estes dois exemplos mostram de forma clara e até chocante a influência que os sistemas eleitorais têm no resultado final de uma votação. Seria bom que conseguíssemos provar que alguns dos sistemas eleitorais dão mais garantias democráticas que os restantes. Para isso vamos analisar algumas condições a que um sistema eleitoral verdadeiramente democrático deve satisfazer.

2.1.2 Condições

As condições seguintes parecem ser imprescindíveis para que um sistema eleitoral democrático traduza as preferências dos eleitores.

1. ***Condição de Pareto (ou de unanimidade)***:

   (i) ***condição fraca***: Se o candidato X é preferido ou está empatado com o candidato Y em todos os votos então, na lista final (correspondente ao resultado da votação), deve ter-se que o candidato X é preferido ou está empatado com o candidato Y.

   (ii) ***condição forte***: Se o candidato X é preferido ou está empatado com o candidato Y em todos os votos exceptuando, pelo menos, um voto onde o candidato X é preferido relativamente ao candidato Y então, na lista final (correspondente ao resultado da votação), deve ter-se que o candidato X é preferido relativamente ao candidato Y.

   Observe-se que daqui em diante usaremos o termo "*condição de Pareto*", para designar a "*condição forte de Pareto*".

2. ***Critério do Vencedor de Condorcet (CVC)***: Se existir um vencedor de Condorcet este deve ser o vencedor da eleição. O ***vencedor de Condorcet*** é

o candidato que em comparações dois a dois ganha a todos os outros (se existir é fácil de ver que é único); o ***perdedor de Condorcet*** é um candidato que, igualmente, em comparações dois a dois perde com todos os outros (se existir é fácil de ver que é único).

3. ***Monotonia***: Se de uma eleição para outra, envolvendo os mesmos eleitores e os mesmos candidatos, a posição de um dos candidatos for alterada, em um ou mais votos, mas sempre a favor desse candidato, então a sua posição na ordenação final não deve ser inferior à posição em que ficou colocado na primeira eleição.

4. ***Independência das Alternativas Irrelevantes (IAI)***: Se em duas eleições distintas, envolvendo os mesmos eleitores e os mesmos candidatos, a ordem relativa de dois dos candidatos não for alterada em nenhum voto, então a ordem relativa desses mesmos candidatos no resultado final deve ser a mesma.

5. ***Igualdade (ou anonimato)***: Permutar as listas de preferência, sem as alterar, não deve ter nenhum efeito no resultado da eleição.

6. ***Neutralidade***: Se todos os eleitores cometerem o erro de trocar os candidatos X e Y, então basta trocar X com Y no resultado final para corrigir o erro.

Repare-se que a quinta condição, a igualdade, não é satisfeita se o sistema eleitoral for a Ditadura, uma vez que se todos os eleitores permutam as listas, em particular o ditador também permuta a sua com a de um outro eleitor, a nova lista do ditador passa a ser a vencedora, podendo desse modo, influenciar o resultado final da eleição. Todos os outros sistemas eleitorais descritos no parágrafo anterior satisfazem as duas últimas condições, conforme realçado na tabela 2.5.

Condições / **Sistema de Votação**	Igualdade	Neutralidade
Plural	Sim	Sim
Contagem de Borda	Sim	Sim
Hare	Sim	Sim
Sequencial aos Pares Com Agenda	Sim	Sim
Ditadura	Não	Sim

Tabela 2.5: Quinta e sexta condições / Sistemas de votação

Alan D. Taylor em [28, pp. 96-127] mostra quais das primeiras quatro condições acima referidas são, ou não, satisfeitas pelos cinco sistemas de votação aqui considerados. A tabela 2.6 sintetiza essa informação.

Condições / **Sistema de Votação**	Pareto	C.V.C.	Monotonia	I.A.I.
Plural	Sim	Não	Sim	Não
Contagem de Borda	Sim	Não	Sim	Não
Hare	Sim	Não	Não	Não
Sequencial aos Pares Com Agenda	Não	Sim	Sim	Não
Ditadura	Não	Não	Sim	Sim

Tabela 2.6: Primeiras quatro condições / Sistemas de votação

Para verificar a veracidade da tabela 2.6 vamos, por um lado, provar todas as propriedades que cada um dos sistemas eleitorais satisfaz e, por outro lado, dar contra-exemplos para as que não são satisfeitas.

Proposição 2.1.1 *O sistema plural satisfaz a condição de Pareto.*

Demonstração: Se o candidato X é preferido ou está empatado com o candidato Y em todos os votos exceptuando, pelo menos, um voto onde o candidato X é preferido relativamente ao candidato Y então, como o sistema plural atribui um ponto ao candidato que aparece em primeiro lugar e zero a todos os outros, X tem necessariamente mais pontos do que Y e portanto o candidato X é preferido relativamente ao candidato Y. ∎

Proposição 2.1.2 *A contagem de Borda satisfaz a condição de Pareto.*

Demonstração: Considere-se que o candidato X é preferido ou está empatado com o candidato Y em todos os votos exceptuando, pelo menos, um voto onde o candidato X é preferido relativamente ao candidato Y. Então X recebe, pelo menos, mais um ponto do que Y e assim, quando adicionamos os pontos obtidos por cada candidato, o candidato X obtém, pelo menos, mais um ponto do que o candidato Y. ∎

Proposição 2.1.3 *O sistema de Hare satisfaz a condição de Pareto.*

Demonstração: Considere-se que o candidato X é preferido ou está empatado com o candidato Y em todos os votos exceptuando, pelo menos, um voto onde o candidato X é preferido relativamente ao candidato Y. Resulta que em qualquer das eleições intermédias, Y tem menos primeiros lugares que X, logo é eliminado antes de X. ∎

Proposição 2.1.4 *O sistema sequencial aos pares com agenda satisfaz o Critério do Vencedor de Condorcet.*

Demonstração: Considere-se que o candidato X é o vencedor de Condorcet. No sistema sequencial aos pares com agenda o candidato vencedor é aquele que não é eliminado em nenhuma das comparações dois a dois que se vão realizando sucessivamente (segundo a agenda previamente acordada). Mas o vencedor de Condorcet é, precisamente, o candidato que ganha a todos os outros em comparações dois a dois. Então, X é o vencedor de Condorcet, o que prova o pretendido. ∎

Proposição 2.1.5 *O sistema plural satisfaz a Monotonia.*

Demonstração: Considere-se o candidato X numa posição qualquer da lista final. Considere-se, ainda por hipótese, que algum ou alguns dos eleitores mudam a posição de algum ou alguns dos candidatos, mas sempre a favor do candidato X. Em particular as mudanças processadas, nunca fazem diminuir a pontuação que o candidato X tinha inicialmente. Assim, o candidato X nunca pode ficar colocado numa posição inferior à que tinha inicialmente. ∎

Proposição 2.1.6 *A contagem de Borda satisfaz a Monotonia.*

Demonstração: Seja X um candidato. Suponha-se, que algum ou alguns eleitores trocam a posição do candidato X no seu voto por uma imediatamente acima. A troca efectuada num só voto, descrita acima, adiciona, pelo menos, um ponto ao total que o candidato X tinha e subtrai, pelo menos, um ponto ao outro candidato (com o qual foi feita a troca), deixando a pontuação de todos os outros candidatos inalterada. Assim, o candidato X melhora a sua pontuação, nunca podendo ficar numa posição inferior à que tinha inicialmente. ∎

Proposição 2.1.7 *O sistema sequencial aos pares com agenda satisfaz a Monotonia.*

Demonstração: Considere-se uma agenda previamente fixada. Suponha-se ainda que algum ou alguns eleitores trocam a posição do candidato X com a posição de um outro candidato que lhe estava acima no seu voto. De facto, a troca descrita, afecta unicamente o candidato X na eleição com o candidato que iria disputar a eleição e claramente X não só ganha a eleição, como a ganha por uma margem ainda maior. ∎

Proposição 2.1.8 *A ditadura satisfaz a Monotonia.*

Demonstração: Seja X um candidato. Suponha-se que algum ou alguns eleitores trocam a posição do candidato X com um candidato que lhe está acima no seu voto. Como o candidato X, também está na lista do ditador, se trocar de posição é por uma acima, logo na ordenação final não fica pior do que estava na primeira ordenação. ∎

Proposição 2.1.9 *A ditadura satisfaz a Independência das Alternativas Irrelevantes.*

Demonstração: Suponha-se que existem votos onde o candidato X é o preferido relativamente ao candidato Y, e votos onde o candidato Y é preferido relativamente ao candidato X. Suponha-se agora, que a ordem de preferência dos candidatos é trocada, no entanto ninguém muda de ideias relativamente aos que preferem o candidato X ao candidato Y ou vice-versa. Em particular o ditador não alterou a ordem de preferência do candidato X relativamente ao candidato Y, logo a ordem destes candidatos mantém-se. ∎

Proposição 2.1.10 *O sistema sequencial aos pares com agenda não satisfaz a condição de Pareto.*

Demonstração: Consideremos quatro candidatos, que designaremos por A, B, C e D, a agenda $ABCD$, e o perfil eleitoral dado pela tabela 2.7.

Todos os eleitores preferem o candidato B ao candidato D, mas com a agenda $ABCD$ o candidato A derrota o candidato B por 2 a 1; de seguida, A perde para C, também pelo mesmo resultado; e por fim o candidato D derrota o candidato C, novamente, pelo resultado 2 a 1. Assim o candidato D é o vencedor, apesar de todos os eleitores o preterirem a favor de B. A condição de Pareto não é pois verificada pelo sistema sequencial aos pares com agenda. ∎

Nº de eleitores:	1	1	1
	A	C	B
	B	A	D
	D	B	C
	C	D	A

Tabela 2.7: Perfil para a proposição 2.1.10

Proposição 2.1.11 *A ditadura não satisfaz a condição de Pareto.*

Demonstração: Considere-se que o candidato X é preferido ou está empatado com o candidato Y em todos os votos exceptuando, pelo menos, um voto onde o candidato X é preferido relativamente ao candidato Y, que não é o do ditador. Se considerarmos que o ditador prefere tanto o candidato X como o candidato Y, então no seu voto eles ficarão empatados, logo X e Y ficarão empatados no resultado final da eleição. ∎

Proposição 2.1.12 *O sistema de votação plural não satisfaz o Critério do Vencedor de Condorcet.*

Demonstração: Considerem-se três candidatos A, B, e C, e o perfil eleitoral formado por 9 eleitores, dado pela tabela 2.8.

Nº de eleitores:	4	3	2
	A	B	C
	B	C	B
	C	A	A

Tabela 2.8: Perfil para a proposição 2.1.12

Com o sistema plural o candidato A é o vencedor com 4 votos, contra 3 do candidato B e 2 do candidato C. Mas o vencedor de Condorcet é B, pois em comparações dois a dois ganha ao candidato A por 5 a 4 e ao candidato C por 7 a 2. ∎

Proposição 2.1.13 *A contagem de Borda não satisfaz o Critério do Vencedor de Condorcet.*

Demonstração: Considerem-se três candidatos A, B, e C, e o perfil eleitoral formado por 5 eleitores, conforme ilustrado pela tabela 2.9.

Nº de eleitores:	3	2
	A	B
	B	C
	C	A

Tabela 2.9: Perfil para a proposição 2.1.13

Usando a contagem de Borda B é o candidato vencedor. De facto, a pontuação do candidato A é $3 \times 2 + 2 \times 0$, ou seja, 6 pontos; a do candidato B é $3 \times 1 + 2 \times 2$, que perfaz 7; enquanto que a pontuação do candidato C é $3 \times 0 + 2 \times 1$, ou seja, 2 pontos. Contudo A é o vencedor de Condorcet, pois derrota cada um dos outros dois candidatos, em comparações dois a dois, por 3 a 2. ∎

Proposição 2.1.14 *O sistema de Hare não satisfaz o Critério do Vencedor de Condorcet.*

Demonstração: Considerem-se cinco candidatos A, B, C, D e E, e o perfil eleitoral formado por 17 eleitores, conforme detalhado na tabela 2.10.

Nº de eleitores:	5	4	3	3	2
	A	E	D	C	B
	B	B	B	B	C
	C	C	C	D	D
	D	D	E	E	E
	E	A	A	A	A

Tabela 2.10: Perfil para a proposição 2.1.14

Comece-se por observar que o vencedor de Condorcet é o candidato B. De facto, B derrota A por 12 a 5; derrota C por 14 a 3; derrota D por 14 a 3; e derrota E por 13 a 4. No entanto, usando o sistema de Hare, B não é o candidato vencedor, sendo até o candidato com menos primeiros lugares, só 2 em 17 eleitores o colocam em primeiro lugar. B é pois o primeiro candidato a ser eliminado de todos os votos. ∎

Proposição 2.1.15 *A ditadura não satisfaz o Critério do Vencedor de Condorcet.*

Demonstração: Considerem-se três candidatos A, B, e C, e o perfil eleitoral formado por 3 eleitores, dado pela tabela 2.11.

Nº de eleitores:	1	2
	A	C
	B	B
	C	A

Tabela 2.11: Perfil para a proposição 2.1.15

Considere-se que o voto do ditador é o voto representado na primeira coluna da tabela. Assim, A é o vencedor apesar de C ser claramente o vencedor de Condorcet, pois derrota, em comparações dois a dois, quer A quer B por 2 a 1. ∎

Proposição 2.1.16 *O sistema de Hare não satisfaz a Monotonia.*

Demonstração: Considerem-se três candidatos A, B, e C, e o perfil eleitoral formado por 17 eleitores, de acordo com a tabela 2.12.

Nº de eleitores:	7	5	4	1
	A	C	B	B
	B	A	C	A
	C	B	A	C

Tabela 2.12: Perfil para a proposição 2.1.16

Há dois candidatos com 5 primeiros lugares e um com 7. Assim, eliminamos os candidatos B e C restando-nos o candidato A, que será então o vencedor. Portanto, com este perfil eleitoral e usando o sistema eleitoral de Hare, o candidato A é o vencedor.

Nº de eleitores:	8	5	4
	A	C	B
	B	A	C
	C	B	A

Tabela 2.13: Perfil para a proposição 2.1.16

Suponha-se agora que um só eleitor, o representado na última coluna da tabela 2.12, troca, no seu voto, a posição de A pela do candidato que lhe está acima, podendo assim, adicionar-se aos eleitores representados na primeira coluna da tabela 2.12. Esta "aparente" mudança a favor de A produz o perfil representado na tabela 2.13.

Aplicando novamente o sistema eleitoral de Hare a este novo perfil, o candidato B é o primeiro a ser eliminado, resultando o perfil ilustrado na tabela 2.14.

Nº de eleitores:	8	9
	A	C
	C	A

Tabela 2.14: Perfil para a proposição 2.1.16

Ou seja, agora o candidato C é o candidato vencedor segundo o sistema de Hare, pois obtém 9 primeiros lugares dos 17 possíveis. Esta mudança de candidato vencedor de A para C mostra que o sistema eleitoral de Hare não satisfaz a monotonia. ∎

Proposição 2.1.17 *O sistema plural não satisfaz a condição de Independência das Alternativas Irrelevantes.*

Demonstração: Considerem-se três candidatos A, B, e C, e o perfil eleitoral formado por 7 eleitores, conforme detalhado na tabela 2.15.

Com o sistema eleitoral plural o vencedor é o candidato A, dado que dispõe de 3 primeiros lugares contra 2 de cada um dos outros dois candidatos.

Nº de eleitores:	3	2	2
	A	B	C
	B	C	B
	C	A	A

Tabela 2.15: Perfil para a proposição 2.1.17

Suponha-se, agora, que os eleitores representados na terceira coluna da tabela 2.15 mudam o seu voto, colocando o candidato C entre o candidato B e o candidato A, dando origem ao perfil representado na tabela 2.16.

Nº de eleitores:	3	4
	A	B
	B	C
	C	A

Tabela 2.16: Perfil para a proposição 2.1.17

Saliente-se que esta troca mantém a posição relativa do candidato B relativamente ao candidato A. No entanto, com o sistema eleitoral plural o candidato B é agora o vencedor com 4 primeiros lugares contra 3 do candidato A. Ou seja, ninguém mudou as suas preferências relativamente aos candidatos A e B, mas o candidato B, de derrotado passou a vencedor. O que prova que o sistema eleitoral plural não satisfaz a Independência das Alternativas Irrelevantes. ∎

Proposição 2.1.18 *A contagem de Borda não satisfaz a Independência das Alternativas Irrelevantes.*

Demonstração: Considerem-se três candidatos A, B, e C, e o perfil eleitoral formado por 5 eleitores, dado na tabela 2.17.

Nº de eleitores:	3	2
	A	C
	B	B
	C	A

Tabela 2.17: Perfil para a proposição 2.1.18

A contagem de Borda elege o candidato A como candidato vencedor uma vez que a pontuação de cada candidato é: $3 \times 2 + 2 \times 0 = 6$ pontos para o candidato A; $3 \times 1 + 2 \times 1 = 5$ para o candidato B; e $3 \times 2 + 2 \times 2 = 4$ para o candidato C. Suponhamos agora que os eleitores representados na segunda coluna da tabela 2.17 resolvem mudar a posição do candidato C colocando-o em segundo lugar, o que não altera a posição relativa dos candidatos A e B, criando um novo perfil eleitoral, que está representado na tabela 2.18:

Nº de eleitores:	3	2
	A	B
	B	C
	C	A

Tabela 2.18: Perfil para a proposição 2.1.18

A contagem de Borda elege agora o candidato B como vencedor com 7 pontos, contra 6 pontos do candidato A e 2 do candidato C. Assim, o vencedor desta eleição mudou de A para B apesar de ninguém ter mudado as preferências relativas do candidato A em relação ao candidato B. O que mostra que a contagem de Borda não satisfaz a Independência das Alternativas Irrelevantes. ∎

Proposição 2.1.19 *O sistema de Hare não satisfaz a Independência das Alternativas Irrelevantes.*

Demonstração: Considerem-se três candidatos A, B, e C, e o perfil eleitoral formado por 4 eleitores, conforme detalhado na tabela 2.19.

Nº de eleitores:	2	1	1
	A	B	C
	B	C	B
	C	A	A

Tabela 2.19: Primeiro perfil para a proposição 2.1.19

Com o sistema eleitoral de Hare o candidato A é o vencedor. Suponha-se agora que o eleitor representado na terceira coluna da tabela 2.19 muda o seu voto, colocando o candidato C entre o candidato B e o candidato A, alteração que não muda a posição relativa dos candidatos A e B, originando o perfil eleitoral representado na tabela 2.20.

Nº de eleitores:	2	2
	A	B
	B	C
	C	A

Tabela 2.20: Segundo perfil para a proposição 2.1.19

Os candidatos A e B aparecem agora empatados em primeiro lugar (cada um com, exactamente, metade dos votos, ou seja, dois) apesar de ninguém ter mudado a sua preferência no que respeita aos candidatos A e B. Assim, o candidato B passou de derrotado a vencedor. Isto mostra que o sistema eleitoral de Hare não satisfaz a Independência das Alternativas Irrelevantes. ∎

Proposição 2.1.20 *O sistema sequencial aos pares com agenda não satisfaz a Independência das Alternativas Irrelevantes.*

Demonstração: Considerem-se os candidatos C, B e A, e assuma-se que a agenda é dada por esta ordem alfabética inversa. Tome-se o perfil eleitoral dado pela tabela 2.21, constituído por 3 eleitores.

Nº de eleitores:	1	1	1
	C	A	B
	B	C	A
	A	B	C

Tabela 2.21: Primeiro perfil para a proposição 2.1.20

Com o sistema sequencial aos pares com agenda e com a agenda considerada, o candidato C derrota o candidato B por 2 a 1 e de seguida perde para o candidato A também por 2 a 1. Assim, o candidato A é o vencedor (o candidato B é um dos derrotados). Mas suponha-se que o eleitor representado na primeira coluna da tabela 2.21 muda a posição do candidato C colocando-o entre os candidatos B e A, dando origem ao perfil eleitoral da tabela 2.22.

Nº de eleitores:	1	1	1
	B	A	B
	C	C	A
	A	B	C

Tabela 2.22: Segundo perfil para a proposição 2.1.20

Utilizando o mesmo sistema eleitoral e a mesma agenda (a fixada inicialmente), o candidato B derrota agora o candidato C por 2 a 1 e também derrota o candidato A pelo mesmo resultado, ou seja, B é o novo vencedor. No entanto, o eleitor que mudou o seu voto não alterou a sua opinião quanto aos candidatos A e B, pois continua a preferir o candidato B. Mas esta alteração fez com que o candidato B passasse de derrotado a vencedor, o que mostra que o sistema sequencial aos pares com agenda não satisfaz a Independência das Alternativas Irrelevantes. ∎

2.2 A escolha social como resultado de uma eleição

Depois da análise de alguns sistemas eleitorais e de um certo número de condições, importa perceber qual o sistema eleitoral que melhor pode merecer a designação de sistema eleitoral democrático, como emanação da vontade colectiva dos eleitores. Em 1950, Kenneth Arrow demonstrou, que é impossível encontrar um sistema eleitoral satisfatório de tomar decisões colectivas e que respeite de uma forma tanto quanto possível fiel, as escolhas individuais, para alguma surpresa dos estudiosos do assunto. Arrow usou ideias muito originais e métodos formais procedentes da lógica e da teoria de conjuntos que eram completamente novos em Economia [19, p. 13].

Conforme nota Lorrie Cranor na sua tese de doutoramento[3] "*a essência deste teorema é que não há nenhum método de associar as preferências individuais sobre três ou mais alternativas que satisfaça várias condições de lisura e que gere sempre um resultado lógico. As condições, que Arrow definiu com rigor, de lisura e racionalidade foram analisadas detalhadamente por outros estudiosos. Contudo, nenhum encontrou um modo de enfraquecer uma ou mais dessas condições que permita obter um sistema de votação satisfatório que fique imune aos paradoxos das votações. Portanto o teorema de Arrow tem a profunda implicação de em muitas situações não haver um modo justo e lógico de associar as preferências individuais – não há modo de determinar com precisão a vontade colectiva do povo*".

Na demonstração de Arrow há duas condições que desempenham um papel fundamental: a condição de Pareto e a Independência das Alternativas Irrelevantes.

A condição de Pareto é muito usada em economia, teoria de jogos, engenharia e ciências sociais. O nome vem do matemático, economista sociólogo e filósofo italiano Vilfredo Pareto[4] (1848-1923) que se licenciou em Matemática e doutorou em Engenharia na Universidade Politécnica de Turim. Foi professor de Economia e Gestão nas Universidade de Florença (Itália) e Lausanne (Suíça).

Pareto utilizou, de forma não sistemática, a matemática para traduzir a evolução da economia. Por isso sofreu muitas críticas; escreveu ele:

[3](http://lorrie.cranor.org/pubs/diss/book.html), página consultada em 13 de Setembro de 2006.

[4]Nota biográfica retirada da Wikipedia em 12/09/2006, das páginas:
(http://en.wikipedia.org/wiki/Vilfredo_Pareto); e (http://en.wikipedia.org/wiki/Pareto_efficiency).

> "*Alguns críticos gritam autoritariamente contra as novas teorias como sendo absurdas porque tentam exprimir fenómenos económicos por meio de* ***fórmulas matemáticas***".

Ao que Pareto respondeu:

> "(...) *longe de pretender exprimir fenómenos complexos com uma fórmula simples, os economistas claramente reconhecem que não sabem nem nunca saberão a teoria de cada fenómeno concreto em todos os seus detalhes. Eles estão apenas familiarizados com fenómenos ideais que são uma aproximação cada vez mais próxima dos casos concretos*".[5]

A Independência das Alternativas Irrelevantes, sendo um critério para "avaliar" regras de ordenação, foi introduzido na literatura moderna por Huntington (1938), Nash (1950) e Arrow (1950). No entanto, já Condorcet o tinha usado, quer em 1785, quer em 1788, assim como Daunou, em 1803, apelou à Independência das Alternativas Irrelevantes como parte de um argumento a favor do sistema eleitoral de Condorcet contra a contagem de Borda [15, p. 107]. Já o exemplo apresentado na tabela 1.2 chama a atenção para a importância das Alternativas Irrelevantes; também no final da presente secção essa relevância será um pouco mais detalhada.

2.2.1 Teorema da Impossibilidade de Arrow

Em 1950, Kenneth Arrow publicou um artigo no "*Journal of Political Economy*" intitulado "A Difficulty in the concept of Social Welfare" [28, p. 248]. Demonstrou nesse artigo o, desde então assim chamado, **Teorema da Impossibilidade de Arrow**, apesar de Arrow o ter designado em [1, p. 342] por *Teorema da Possibilidade* (*Possibility Theorem*) e por *Teorema da Possibilidade Geral* (*General Possibility Theorem*) em [2, p. 59]. De acordo com Paul Samuelson, citado por Taylor [28, p. 249], a descoberta do teorema da impossibilidade foi uma das razões que levaram à atribuição a Arrow do prémio Nobel da Economia em 1972. O Teorema da Impossibilidade de Arrow aparece em [1, p. 342], como corolário de uma série de "observações" e "consequências", que Arrow vai tirando das definições e condições que vai introduzindo e que culminam

[5] (http://www.marxists.org/reference/subject/economics/pareto/theories.htm) em 13/09/2006.

na sua demonstração. O objectivo, nesta subsecção, é dar uma demonstração do ***Teorema da Impossibilidade de Arrow***, baseada em Taylor[6] [28, pp. 248-259].

O ***Teorema da Impossibilidade*** pode ser enunciado do seguinte modo: ***não existe nenhum sistema eleitoral que satisfaça as condições de Pareto (forte), a Independência das Alternativas Irrelevantes, e a Monotonia.***

Considerem-se $\mathcal{C}$ um conjunto com, pelo menos, três candidatos e $\mathcal{E}$ um conjunto finito de eleitores, e um sistema eleitoral, onde se verifique a transitividade, que satisfaça as condições de Pareto (forte), Independência das Alternativas Irrelevantes, e a Monotonia.

Definição 2.2.1 *Dado um subconjunto $\mathcal{X}$ de $\mathcal{E}$, dois candidatos distintos, X e Y, dizemos que $\mathcal{X}$* **força** X **acima de** Y, *que se denotará por $\mathcal{X} \rightsquigarrow \substack{X \\ Y}$, quando se obtém $\substack{X \\ Y}$ (isto é, X acima de Y) como resultado da eleição sempre que todos os eleitores em $\mathcal{X}$ coloquem $\substack{X \\ Y}$ no seu voto.*

Esta definição permite fazer a seguinte observação, que vai desempenhar um papel crucial na demonstração do teorema da impossibilidade de Arrow:

Observação 2.2.1 *Como o sistema eleitoral que se está a considerar satisfaz a Independência das Alternativas Irrelevantes e a Monotonia, torna-se muito mais fácil mostrar que um dado conjunto $\mathcal{X}$ força algum candidato X acima de algum candidato Y, do que inicialmente poderá parecer. Isto é, para mostrar que $\mathcal{X} \rightsquigarrow \substack{X \\ Y}$ basta exibir um perfil no qual se verifique o seguinte:*

1. *Todos em $\mathcal{X}$ têm $\substack{X \\ Y}$ nos seus votos;*

2. *Todos os que não estão em $\mathcal{X}$ têm $\substack{Y \\ X}$ nos seus votos;*

3. *Como resultado da eleição obtém-se $\substack{X \\ Y}$.*

Para ver que isto é suficiente, notemos que a Independência das Alternativas Irrelevantes assegura que X ficar, ou não, acima de Y no resultado final da eleição não

[6] A demonstração apresentada por Taylor usa uma "*condição de Pareto*" mais fraca do que a "*condição fraca de Pareto*" por nós enunciada.

depende, de modo algum, da posição ocupada por outros candidatos. A segunda condição reflecte o facto de a Monotonia garantir que basta considerar o caso em que todos os eleitores que não pertencem a $\mathcal{X}$ tentam evitar que X fique acima de Y no resultado final, colocando no seu voto $\genfrac{}{}{0pt}{}{Y}{X}$. Assim, qualquer mudança que ocorra nos eleitores que não pertencem a $\mathcal{X}$ só favorecerá o candidato X e como se verifica que $\genfrac{}{}{0pt}{}{X}{Y}$ no resultado final, o mesmo se continuará a verificar após hipotética mudança que venha a ocorrer nos referidos eleitores. ∎

Definição 2.2.2 *O conjunto $\mathcal{X}$ é dito um conjunto ditador se $\mathcal{X} \rightsquigarrow \genfrac{}{}{0pt}{}{X}{Y}$, $\forall\ X, Y \in \mathcal{C}$.*

Observação 2.2.2

1. *Se $\mathcal{X}$ é o conjunto de todos os eleitores, então $\mathcal{X}$ é um conjunto ditador;*
2. *Se P é um eleitor e $\mathcal{X}= \{P\}$, então $\mathcal{X}$ é um conjunto ditador se e só se P é um ditador.* ∎

A condição de Pareto garante que $\mathcal{X} = \mathcal{E}$ é um conjunto ditador (vejam-se a definição 2.2.2 e a observação 2.2.2). O objectivo a que se pretende chegar está no extremo oposto, isto é, procura-se um conjunto singular $\mathcal{X}= \{P\}$, em que P é um ditador, contradizendo deste modo o enunciado do Teorema da Impossibilidade de Arrow. Este objectivo será obtido pela partição do universo dos eleitores $\mathcal{E} = \mathcal{X}$ como conjunto ditador em dois conjuntos $\mathcal{Y}$ e $\mathcal{Z}$, ou seja, $\mathcal{X} = \mathcal{Y} \cup \mathcal{Z}$ e $\mathcal{Y} \cap \mathcal{Z} = \emptyset$, de tal modo que ou $\mathcal{Y}$ é um conjunto ditador ou $\mathcal{Z}$ é um conjunto ditador. Por partições sucessivas do conjunto ditador, chegar-se-á ao conjunto ditador singular $\mathcal{X}= \{P\}$.

Tendo em vista a demonstração do Teorema da Impossibilidade de Arrow começamos por demonstrar um resultado que dá uma boa oportunidade de ver como a Independência das Alternativas Irrelevantes e a condição de Pareto são usadas em conjunto. E que, não sendo necessário para o que se segue – a prova de cinco lemas, que estabelecem a prova do Teorema da Impossibilidade de Arrow – permite poupar algum trabalho na demonstração dos cinco lemas.

Proposição 2.2.1 *Um qualquer sistema eleitoral que satisfaça simultaneamente a Independência das Alternativas Irrelevantes e a condição de Pareto (forte) só admite o empate de dois candidatos quando esses candidatos estão empatados em todos os votos, e a eleição envolve, pelo menos, três candidatos.*

Demonstração: Assuma-se, por redução ao absurdo, que se tem um sistema eleitoral satisfazendo a Independência das Alternativas Irrelevantes e a condição de Pareto e um perfil envolvendo, pelo menos, mais de três candidatos, no qual dois candidatos, A e B, estão empatados no resultado final, que denotamos como $A \asymp B$, e não o estão em, pelo menos, um dos votos. Seja $\mathcal{X}$ o conjunto dos eleitores que preferem A a B (suponha-se, sem perda de generalidade, que $\mathcal{X} \neq \emptyset$), seja $\mathcal{Y}$ o conjunto dos eleitores que preferem B a A, e seja $\mathcal{Z}$ o conjunto dos eleitores em que os candidatos A e B estão empatados. O perfil eleitoral respectivo é traduzido tabela 2.23.

	$\mathcal{X}$			$\mathcal{Y}$		$\mathcal{Z}$
$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$	
A	$\ldots$	A	B	$\ldots$	B	$\vdots$
$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$	$A \asymp B$
B	$\ldots$	B	A	$\ldots$	A	$\vdots$
$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$	

Tabela 2.23: $A \asymp B$

Seja C um terceiro candidato, cuja existência está garantida por hipótese. Considere-se uma nova eleição em que todos os eleitores de $\mathcal{X}$ colocam C, algures, entre A e B, obtendo-se a relação $A \succ C \succ B$, em que os eleitores de $\mathcal{Y}$ preferem C a B, obtendo-se a relação $C \succ B \succ A$, e em que os eleitores de $\mathcal{Z}$ colocam os três candidatos empatados, obtendo-se a relação $A \asymp B \asymp C$. Tal situação é traduzida pela tabela 2.24.

	$\mathcal{X}$			$\mathcal{Y}$		$\mathcal{Z}$
$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$	
A	$\ldots$	A	C	$\ldots$	C	$\vdots$
$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$	
C	$\ldots$	C	B	$\ldots$	B	$A \asymp B \asymp C$
$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$	
B	$\ldots$	B	A	$\ldots$	A	$\vdots$
$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$	

Tabela 2.24: $C \succ B \asymp A$

Nesta eleição as posições relativas de A e de B mantiveram-se, pelo que $A \asymp B$, dado que o sistema eleitoral verifica a Independência das Alternativas Irrelevantes. No entanto, pela condição de Pareto, como existe pelo menos um voto onde $C \succ B$, então verifica-se que no resultado final se deverá ter $C \succ B$. Como $B \asymp A$ então teremos $C \succ A$.

Consideremos agora uma terceira eleição em que todos os eleitores de $\mathcal{X}$ e de $\mathcal{Y}$ permutam as posições dos candidatos B e C, e os eleitores de $\mathcal{Z}$ continuam a manter os três candidatos A, B e C empatados. A Independência das Alternativas Irrelevantes garante que $A \asymp B$, dado que as posições relativas dos candidatos A e B ficam inalteradas. Veja-se a tabela 2.25.

$\mathcal{X}$			$\mathcal{Y}$			$\mathcal{Z}$
$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$	
A	$\ldots$	A	B	$\ldots$	B	$\vdots$
$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$	
B	$\ldots$	B	C	$\ldots$	C	$A \asymp B \asymp C$
$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$	
C	$\ldots$	C	A	$\ldots$	A	$\vdots$
$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$	

Tabela 2.25: $A \asymp B \succ C$

Os eleitores de $\mathcal{X}$ preferem o candidato A ao candidato B e o candidato B ao candidato C, verificando-se a relação $A \succ B \succ C$, os eleitores de $\mathcal{Y}$ preferem o candidato B ao candidato C e o candidato C ao candidato A, verificando-se a relação $B \succ C \succ A$, enquanto que para os eleitores de $\mathcal{Z}$ se mantém a relação $A \asymp B \asymp C$. Pela condição de Pareto, como existe pelo menos um voto onde se verifica que $B \succ C$, então no resultado final desta terceira eleição ter-se-á $B \succ C$. Como $A \asymp B$ então $A \succ C$.

Comparando as posições relativas dos candidatos A e C, tem-se que da segunda eleição (tabela 2.24) para a terceira eleição (tabela 2.25) nenhum eleitor alterou as posições relativas destes dois candidatos. Logo pela Independência das Alternativas Irrelevantes o resultado tem de ser o mesmo. Mas vimos na segunda eleição que $C \succ A$ (tabela 2.24) e na terceira eleição que $A \succ C$ (tabela 2.25), ou seja, estamos perante uma contradição. ∎

Observe-se que se existisse um sistema eleitoral que satisfizesse as condições da proposição acabada de demonstrar, esse sistema eleitoral desempataria o perfil cíclico de Condorcet (vejam-se a tabela 2.27 e a figura 2.4) para três candidatos e três eleitores!

Os cinco lemas seguintes são suficientes para completar a demonstração do Teorema da Impossibilidade de Arrow. Note-se que a Independência das Alternativas Irrelevantes só é directamente usada na demonstração do lema 2.2.1.

Lema 2.2.1 *Suponha-se que* $\mathcal{X} \rightsquigarrow \substack{A\\B}$, *e que* $\mathcal{Y}$ *e* $\mathcal{Z}$ *formam uma partição de* $\mathcal{X}$ *(podendo um deles ser o conjunto vazio). Então ou* $\mathcal{Y} \rightsquigarrow \substack{A\\C}$ *ou* $\mathcal{Z} \rightsquigarrow \substack{C\\B}$, $\forall\, C \notin \{A, B\}$.

Demonstração: Considere-se o perfil eleitoral representado pela tabela 2.26 (onde apenas são assinaladas as posições relativas de A, B e C).

$\mathcal{X}$		Outros
$\mathcal{Y}$	$\mathcal{Z}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A	C	B
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
B	A	C
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
C	B	A
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Tabela 2.26: Perfil usado para demonstrar o lema 2.2.1

Neste perfil todos os eleitores de $\mathcal{Y}$ e de $\mathcal{Z}$, ou seja, todos os eleitores de $\mathcal{X}$, colocam $\substack{A\\B}$. Como supusemos que $\mathcal{X} \rightsquigarrow \substack{A\\B}$, então no resultado final obter-se-á $\substack{A\\B}$. Em particular, verifica-se que não se podem obter simultaneamente $\substack{B\\C}$ e $\substack{C\\A}$ no resultado final, o que implicaria pela transitividade, $\substack{B\\A}$ como resultado final. Portanto tem de se ter $\substack{A\\C}$ ou $\substack{C\\B}$. Consideremos os dois casos:

Caso 1: no resultado final obtemos $\substack{A\\C}$

Neste caso, produzimos um perfil em que todos os eleitores de $\mathcal{Y}$ colocam $\substack{A\\C}$ nos seus votos e todos os outros eleitores colocam $\substack{C\\A}$; no resultado final obtemos $\substack{A\\C}$. Tendo em conta a observação 2.2.1, isto é suficiente para mostrar que $\mathcal{Y} \rightsquigarrow {}^{A}_{C}$, o que prova o lema 2.2.1 para este primeiro caso.

Caso 2: no resultado final obtemos ${}^{C}_{B}$

Com um argumento igual ao usado no caso 1 mostra-se que $\mathcal{Z} \rightsquigarrow {}^{C}_{B}$.

Com estes dois casos damos como provado o lema 2.2.1. ∎

Lema 2.2.2 *Suponha-se que* $\mathcal{X} \rightsquigarrow {}^{A}_{B}$. *Então* $\mathcal{X} \rightsquigarrow {}^{A}_{C}$ *e* $\mathcal{X} \rightsquigarrow {}^{C}_{B}$, $\forall\, C \notin \{A, B\}$.

Demonstração: Consideremos, em primeiro lugar, o caso particular do lema 2.2.1 onde $\mathcal{Y} = \mathcal{X}$ e $\mathcal{Z} = \emptyset$. A conclusão a tirar é que ou $\mathcal{X} \rightsquigarrow {}^{A}_{C}$, que é o desejado, ou $\emptyset \rightsquigarrow {}^{C}_{B}$, o que está fora de causa dado que o sistema eleitoral usado satisfaz a condição de Pareto. Assim, $\mathcal{X} \rightsquigarrow {}^{A}_{C}$. Completamos a demonstração, considerando o caso análogo em que tomamos $\mathcal{Y} = \emptyset$ e $\mathcal{Z} = \mathcal{X}$ que, por um argumento igual ao usado na primeira parte da demonstração, mostra que $\mathcal{X} \rightsquigarrow {}^{C}_{B}$. ∎

Lema 2.2.3 *Se* $\mathcal{X} \rightsquigarrow {}^{A}_{B}$, *então* $\mathcal{X} \rightsquigarrow {}^{B}_{A}$.

Demonstração: Assuma-se que $\mathcal{X} \rightsquigarrow {}^{A}_{B}$. Então, pelo lema 2.2.2, $\mathcal{X} \rightsquigarrow {}^{A}_{X}$, $\forall\, X \neq A$. Envolvendo um candidato C tal que $C \notin \{A, B\}$, tem-se em particular $\mathcal{X} \rightsquigarrow {}^{A}_{C}$. Mas o lema 2.2.2 também garante que $\mathcal{X} \rightsquigarrow {}^{X}_{C}$, $\forall\, X \neq C$, em particular, $\mathcal{X} \rightsquigarrow {}^{B}_{C}$. Assim, pelo lema 2.2.2, uma vez mais, tem-se que $\mathcal{X} \rightsquigarrow {}^{B}_{X}$, $\forall\, X \neq B$, e portanto, $\mathcal{X} \rightsquigarrow {}^{B}_{A}$ obtendo-se o pretendido. Resumindo,

$$\mathcal{X} \rightsquigarrow \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} \Rightarrow \mathcal{X} \rightsquigarrow \begin{matrix} A \\ C \end{matrix} \Rightarrow \mathcal{X} \rightsquigarrow \begin{matrix} B \\ C \end{matrix} \Rightarrow \mathcal{X} \rightsquigarrow \begin{matrix} B \\ A \end{matrix}$$

∎

Lema 2.2.4 *Suponha-se que existem dois candidatos* A *e* B *tais que* $\mathcal{X} \rightsquigarrow {}^{A}_{B}$. *Então* $\mathcal{X}$ *é um conjunto ditador.*

Demonstração: Assuma-se que $\mathcal{X} \rightsquigarrow {}^{A}_{B}$, e suponha-se também que X e Y são dois quaisquer candidatos. Necessita-se de mostrar que $\mathcal{X} \rightsquigarrow {}^{X}_{Y}$. Note-se que o lema 2.2.3 garante que $\mathcal{X} \rightsquigarrow {}^{B}_{A}$. Assim, o lema 2.2.2 permite concluir que $\mathcal{X}$ pode forçar A

acima ou abaixo de qualquer candidato, assim como pode forçar B acima ou abaixo de qualquer candidato. Para se concluir a prova deste lema, considerem-se dois casos:

Caso 1: $A = Y$

Aqui, é preciso de mostrar que $\mathcal{X} \rightsquigarrow {X \atop A}$. Mas, como se sabe que $\mathcal{X}$ pode forçar A abaixo de qualquer candidato, conclui-se que $\mathcal{X} \rightsquigarrow {X \atop A}$ como pretendido.

Caso 2: $A \neq Y$

Como $\mathcal{X} \rightsquigarrow {A \atop B}$ e $A \neq Y$, sabe-se que $\mathcal{X} \rightsquigarrow {A \atop Y}$. Assim $\mathcal{X}$ pode forçar Y abaixo de qualquer candidato. Em particular $\mathcal{X} \rightsquigarrow {X \atop Y}$, concluindo-se o pretendido.

Resumindo,

$$\mathcal{X} \rightsquigarrow {A \atop B} \Rightarrow \mathcal{X} \rightsquigarrow {A \atop Y} \Rightarrow \mathcal{X} \rightsquigarrow {X \atop Y}$$

∎

Lema 2.2.5 *Suponha-se que $\mathcal{X}$ é um conjunto ditador. Considerem-se dois conjuntos $\mathcal{Y}$ e $\mathcal{Z}$, tal que $\mathcal{X} = \mathcal{Y} \cup \mathcal{Z}$ e $\mathcal{Y} \cap \mathcal{Z} = \emptyset$, isto é, $\mathcal{Y}$ e $\mathcal{Z}$ formam uma partição de $\mathcal{X}$. Então ou $\mathcal{Y}$ é um conjunto ditador ou $\mathcal{Z}$ é um conjunto ditador.*

Demonstração: Considerem-se três candidatos distintos A, B e C. Uma vez que $\mathcal{X}$ é um conjunto ditador, tem-se que $\mathcal{X} \rightsquigarrow {A \atop B}$. O lema 2.2.1 garante que ou $\mathcal{Y} \rightsquigarrow {A \atop C}$, e neste caso $\mathcal{Y}$ é um conjunto ditador pelo lema 2.2.4; ou $\mathcal{Z} \rightsquigarrow {C \atop B}$ e então $\mathcal{Z}$ é um conjunto ditador, novamente pelo lema 2.2.4. ∎

Com a demonstração do lema 2.2.5 completa-se a demonstração do **Teorema da Impossibilidade de Arrow**. Provou-se que, partindo do universo dos eleitores, que é um conjunto ditador, é possível ir fazendo sucessivas partições do conjunto ditador, até se obter um conjunto ditador singular, ou seja, até se obter o ditador. Como a Ditadura não satisfaz a condição de Pareto, o que prova a impossibilidade de encontrar um sistema eleitoral que satisfaça as hipótese do Teorema de Arrow.

2.2.2 A relevância da Independência das Alternativas Irrelevantes

Na secção 2.1 foram introduzidos cinco sistemas eleitorais e, além das duas simetrias, as quatro condições: a de Pareto (fraca e forte), a Monotonia, o Critério do Vencedor de Condorcet e a Independência das Alternativas Irrelevantes. Mostrou-se que só a Ditadura satisfaz a Independência das Alternativas Irrelevantes, e o Critério do Vencedor de Condorcet só é satisfeito pelo sistema sequencial aos pares com agenda. Mas, além de nenhum sistema eleitoral satisfazer as quatro condições que se consideraram, aparentemente imprescindíveis para se produzir um sistema eleitoral que reflicta adequadamente a vontade colectiva, prova-se uma outra condição igualmente forte:

Proposição 2.2.2 *Não há nenhum sistema eleitoral, para três ou mais candidatos, que satisfaça simultaneamente a Independência das Alternativas Irrelevantes e o Critério do Vencedor de Condorcet.*

Demonstração: Assuma-se, por redução ao absurdo, que existe um sistema eleitoral que satisfaz simultaneamente a Independência das Alternativas Irrelevantes e o Critério do Vencedor de Condorcet. Mostrar-se-á que este sistema eleitoral, quando aplicado ao perfil cíclico de Condorcet (para três candidatos), não produz um conjunto de vencedores, o que é uma contradição, pois por definição de sistema eleitoral tem que se obter como resultado final uma ordenação.

Considere-se o conjunto de candidatos $\mathcal{S} = \{A,\ B,\ C\}$, e o perfil cíclico de Condorcet da tabela 2.27, formado por três eleitores; designe-se esse perfil por p_1. Como pode ser observado na figura 2.4, não se produz um vencedor de Condorcet.

Tipo 1	Tipo 3	Tipo 5
A	C	B
B	A	C
C	B	A

Tabela 2.27: Perfil cíclico de Condorcet, p_1

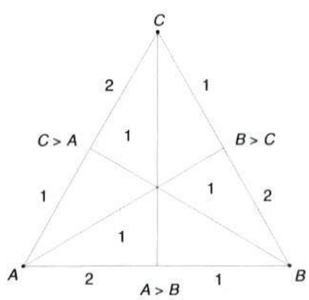

Figura 2.4: Resultado de p_1

Seja $\mathcal{V}_1$ o conjunto dos vencedores para o perfil p_1, que por hipótese é determinado pelo sistema eleitoral.

(i) $A \notin \mathcal{V}_1$

Seja p_2 o perfil da tabela 2.28, obtido do perfil p_1 por troca de B com C no eleitor correspondente à terceira coluna.

Como por hipótese o sistema eleitoral considerado satisfaz o Critério do Vencedor de Condorcet então C é o vencedor, isto é, $\mathcal{V}_2 = \{C\}$, pois C derrota, em comparações dois a dois, cada um dos outros candidatos, por 2 a 1, conforme pode ser observado na figura 2.5.

Tipo 1	Tipo 2	Tipo 4
A	C	C
B	A	B
C	B	A

Tabela 2.28: Perfil p_2

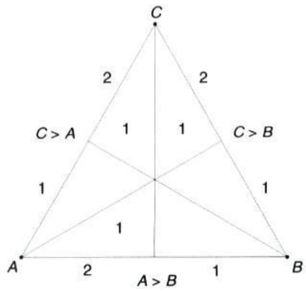

Figura 2.5: Resultado de p_2

Considere-se o eleitor correspondente à terceira coluna; ele prefere o candidato C ao candidato A. Se se trocarem as posições relativas de C e de B esta troca não afecta a posição do candidato C relativamente ao candidato A. Então, como, por hipótese, o sistema eleitoral satisfaz a Independência das Alternativas Irrelevantes se $A \in \mathcal{V}_1$ então também será $A \in \mathcal{V}_2$. Mas como se verifica que $\mathcal{V}_2 = \{C\}$ e $A \neq C$ então só pode ser $A \notin \mathcal{V}_1$.

(ii) $B \notin \mathcal{V}_1$

A demonstração é igual à anterior, bastando trocar no perfil da tabela 2.27, na segunda coluna, correspondente ao segundo eleitor, as posições de C e A. O que permite mostrar de que $B \notin \mathcal{V}_1$ usando um argumento idêntico ao que foi usado em **(i)**.

(iii) $C \notin \mathcal{V}_1$

A demonstração é análoga às anteriores, bastando trocar no perfil da tabela 2.27, na primeira coluna, correspondente ao primeiro eleitor, as posições de A e B.

Por **(i)**, **(ii)** e **(iii)**, mostra-se que A, B, $C \notin \mathcal{V}_1$, ou seja, $\mathcal{V}_1 = \emptyset$, o que está em contradição com a definição de sistema eleitoral. ∎

Este resultado, acabado de demonstrar, põe em evidência o facto da condição da *Independência das Alternativas Irrelevantes* ser demasiado forte. Portanto, na presença de três ou mais candidatos (ou alternativas) não é possível exibir um sistema eleitoral que possa ser considerado "razoável", no sentido em que reflecte a vontade colectiva.

Capítulo 3

Votos, Álgebra e Geometria

No presente capítulo apresentamos alguns resultados de Donald Saari, que usam alguma álgebra linear e geometria para estudar os sistemas eleitorais. Definir-se-á vector de voto e caracterizar-se-á qualquer sistema eleitoral por um vector de voto. Na posse de um vector de voto e de um perfil eleitoral, definir-se-á uma função, que nos permitirá determinar a pontuação de cada candidato no sistema eleitoral associado ao vector de voto considerado. Definir-se-á também uma função que nos dará o resultado de qualquer eleição entre pares de candidatos.

A noção de perfil diferencial, introduzida por Saari, ir-nos-á permitir escrever qualquer perfil eleitoral como combinação linear dos vectores de uma certa base de $\mathbb{R}^6$ considerada por Saari e, consequentemente, perceber o efeito que cada um dos subespaços gerados pelos vectores dessa base tem sobre os sistemas eleitorais.

O capítulo termina com dois exemplos: o exemplo apresentado por Condorcet para mostrar que a contagem de Borda apresenta falhas e o exemplo exposto por Borda à Academia para mostrar que o sistema eleitoral plural pode não representar a vontade da maioria dos eleitores.

Todo o estudo feito ao longo deste capítulo tem por base um conjunto de três candidatos $\mathcal{S} = \{A, B, C\}$.

3.1 Votos, vectores e resultados

Aos sistemas eleitorais associamos um vector

$$V^3 = (a, b, c), \quad \text{com} \quad a \geq b \geq c,$$

que determina o número de pontos a atribuir a cada posição num voto: a pontos à primeira posição; b pontos à segunda posição; e c pontos à terceira posição. Este vector é designado por ***vector de voto*** e **permite ponderar cada voto atribuindo uma pontuação a cada candidato**.

Procedendo a uma ***normalização*** do vector de voto, considerando

$$v^3 = \left(\frac{a-c}{a-c}, \frac{b-c}{a-c}, \frac{c-c}{a-c}\right),$$

fazemos assim com que o candidato mais preferido receba um ponto e o menos preferido receba zero pontos. Por exemplo, ao vector

$$B^3 = (2, 1, 0),$$

usado na contagem de Borda, associamos o vector de voto normalizado

$$b^3 = \frac{1}{2}B^3 = \left(1, \frac{1}{2}, 0\right).$$

Com a normalização aqui introduzida qualquer sistema eleitoral, com três candidatos, pode ser caracterizado por um vector de voto

$$w_s^3 = (1, s, 0), \quad \text{com} \quad 0 \leq s \leq 1.$$

Proposição 3.1.1 *Todos os vectores normalizados que representem um sistema eleitoral com três candidatos podem ser expressos por:*

$$w_s^3 = (1, s, 0) = b^3 + \left(s - \frac{1}{2}\right)d^3, \ 0 \leq s \leq 1 \ e \ d^3 = (0, 1, 0). \tag{3.1}$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} b^3 + \left(s - \tfrac{1}{2}\right)d^3 &= \left(1, \tfrac{1}{2}, 0\right) + \left(s - \tfrac{1}{2}\right)(0, 1, 0) \\ &= \left(1, \tfrac{1}{2}, 0\right) + \left(0, s - \tfrac{1}{2}, 0\right) \\ &= \left(1, \tfrac{1}{2} + s - \tfrac{1}{2}, 0\right) \\ &= (1, s, 0) \\ &= w_s^3. \end{aligned}$$

∎

Para o estudo que se segue é conveniente introduzir funções que associam os resultados quer aos diferentes sistemas eleitorais quer às comparações dois a dois, a um qualquer perfil.

Definimos $F(p, V^3)$ como um **vector** de $\mathbb{R}^3$, em que as coordenadas são, respectivamente, as pontuações dadas a cada um dos candidatos do conjunto $\mathcal{S}$, para o perfil $p \in \mathcal{P}$ e pelo sistema eleitoral associado ao vector V^3. Assim,

$$\begin{array}{rcl} F \; : \; \mathcal{P} \times \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (p, V^3) & \longmapsto & F(p, V^3) = (f(A), f(B), f(C)) \end{array}$$

onde, se $p = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6)$, tal que p_j é o número de votos do tipo j, com $j = 1, \ldots, 6$, e $V^3 = (a, b, c)$, se tem;[1]

$$\begin{aligned} f(A) &= ap_1 + ap_2 + bp_3 + cp_4 + cp_5 + bp_6 \\ f(B) &= bp_1 + cp_2 + cp_3 + bp_4 + ap_5 + ap_6 \\ f(C) &= cp_1 + bp_2 + ap_3 + ap_4 + bp_5 + cp_6 \end{aligned}$$

Note-se que $F(p, V^3)$ é linear em ambas as variáveis, pois facilmente se verifica que

$$\begin{aligned} F(p, \lambda V_1^3 + \mu V_2^3) &= \lambda F(p, V_1^3) + \mu F(p, V_2^3) \\ F(\alpha p + \beta q, V^3) &= \alpha F(p, V^3) + \beta F(q, V^3), \end{aligned}$$

para todos os escalares λ, μ, α, β $\in \mathbb{R}$, para quaisquer perfis p e q e para quaisquer vectores de voto V^3, V_1^3, V_2^3.

Definimos, também, $G_{\{X,Y\}}(p)$, com X, $Y \in \mathcal{S}$, e $X \neq Y$, como o **vector** de $\mathbb{R}^2$ em que as coordenadas são, respectivamente, as somas dos votos que favorecem os candidatos X e Y, quando comparados dois a dois, para o perfil $p = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6)$, tal que p_j é o número de votos do tipo j, com $j = 1, \ldots, 6$. Assim;[2]

$$\begin{array}{rcl} G_{\{A,B\}} \; : \; \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ p & \longmapsto & G_{\{A,B\}}(p) = (p_1 + p_2 + p_3, \; p_4 + p_5 + p_6)\,; \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} G_{\{A,C\}} \; : \; \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ p & \longmapsto & G_{\{A,C\}}(p) = (p_1 + p_2 + p_6, \; p_3 + p_4 + p_5)\,; \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} G_{\{B,C\}} \; : \; \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ p & \longmapsto & G_{\{B,C\}}(p) = (p_1 + p_5 + p_6, \; p_2 + p_3 + p_4)\,. \end{array}$$

[1] Tenha-se em atenção cada tipo de voto, já descrito na tabela 2.2.

[2] Tenha-se em atenção cada tipo de voto, já descrito na tabela 2.2.

Saliente-se que $G_{\{X,Y\}}(p)$ é linear, dado verificar-se facilmente que

$$G_{\{X,Y\}}(\alpha p + \beta q) = \alpha G_{\{X,Y\}}(p) + \beta G_{\{X,Y\}}(q),$$

para todos os escalares α e $\beta \in \mathbb{R}$ e para quaisquer perfis p e q.

No que se segue usaremos também a notação $G_{\{X,Y\}}(p) = (g_p(X),\ g_p(Y))$.

Proposição 3.1.2 *A contagem da eleição com o sistema eleitoral representado pelo vector w_s^3, para o perfil p, pode ser representada por:*

$$F\left(p, w_s^3\right) = F(p, b^3) + \left(s - \frac{1}{2}\right) F(p, d^3). \tag{3.2}$$

O resultado decorre da linearidade de F e da proposição 3.1.1. ∎

3.2 Decomposição de perfis

Saari em [23, pp. 321-323] introduz uma decomposição dos perfis eleitorais que facilita a análise dos resultados eleitorais, quer para os diferentes sistemas eleitorais quer para as comparações dois a dois, e permite, também, analisar as razões da existência de paradoxos.

Para tal é útil introduzir a noção de ***perfil diferencial***, que é a diferença entre dois perfis que envolvam o mesmo número de votos; equivalentemente, um perfil é dito diferencial se e somente se a soma do número de votos é zero. Importa ainda salientar que também podemos aplicar aos perfis diferenciais as funções F e G, definidas na secção anterior, apesar de aqui p_j não representar o número de votos de cada tipo.

Os perfis diferenciais são usados para determinar bases convenientes para vários subespaços de perfis; estas bases permitem perceber como se comporta cada sistema eleitoral em função dos coeficientes dos vectores das bases.

Na determinação de subespaços de perfis, com vista à análise do resultado de eleições, Saari [23, pp. 321-323] põe em evidência quatro componentes: uma que não afecta nenhum resultado, qualquer que seja o sistema eleitoral considerado (ou comparações dois a dois) que designa por ***núcleo*** e que tem dimensão 1; uma componente constituída pelo conjunto dos perfis que só influenciam os resultados de comparações dois a dois, que designa por componente de ***Condorcet***, que tem também dimensão 1 (e que explica as diferenças entre a contagem de Borda e os resultados de comparações dois a dois); uma componente que designa por ***inversa***, de dimensão 2, e que não afecta os resultados das comparações dois a dois, afectando os resultados de qualquer outro sistema eleitoral que se considere; por fim a componente ***básica***, também de dimensão 2, que é o conjunto dos perfis que produzem o mesmo resultado independentemente do sistema eleitoral considerado, isto é, para qualquer sistema eleitoral ou para comparações dois a dois, o resultado é sempre o mesmo.

Mais precisamente estes espaços são definidos por:

1. O ***núcleo*** ($\mathcal{K}^3$) é o subespaço gerado pelo vector:

$$\mathcal{K} = (1, 1, 1, 1, 1, 1).$$

2. O subespaço ($\mathcal{C}^3$) de ***Condorcet*** é o subespaço gerado pelo vector:

$$\mathcal{C} = (1, -1, 1, -1, 1, -1).$$

3. O subespaço ***inverso*** ($\mathcal{I}^3$) é o subespaço gerado pelos vectores:

$$I_A = (1, 1, -2, 1, 1, -2); \; I_B = (-2, 1, 1, -2, 1, 1); \; I_C = (1, -2, 1, 1, -2, 1).$$

   Saliente-se que estes três vectores são linearmente dependentes, tendo-se

$$I_C = -(I_A + I_B).$$

4. O subespaço ***básico*** ($\mathcal{B}^3$) é o subespaço gerado pelos vectores:

$$B_A = (1, 1, 0, -1, -1, 0); \; B_B = (0, -1, -1, 0, 1, 1); \; B_C = (-1, 0, 1, 1, 0, -1).$$

   Também estes três vectores são linearmente dependentes, tendo-se

$$B_C = -(B_A + B_B).$$

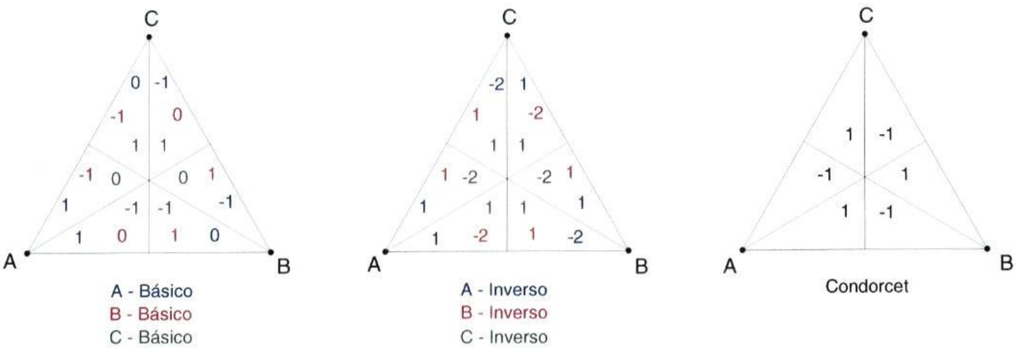

Figura 3.1: Simetrias dos diferentes subespaços

A simetria destes subespaços é evidente nas configurações geométricas da figura 3.1.

A reunião das bases dos diferentes subespaços atrás introduzidos forma uma base de $\mathbb{R}^6$, isto é, o conjunto formado pelos vectores

$$\mathcal{K},\ \mathcal{C},\ B_A,\ I_A,\ I_B,\ B_B \tag{3.3}$$

formam uma base de $\mathbb{R}^6$.

Como já foi referido, $dim(\mathcal{K}^3) = 1$, $dim(\mathcal{C}^3) = 1$, $dim(\mathcal{I}^3) = 2$, e $dim(\mathcal{B}^3) = 2$; e sendo os subespaços ortogonais dois a dois (para o produto escalar usual de dois vectores) tem-se que são linearmente independentes. Qualquer vector da base de um dos subespaços é ortogonal a qualquer vector da base de um outro subespaço. Por exemplo, I_A é ortogonal a B_B pois

$$I_A \cdot B_B = (1, 1, -2, 1, 1, -2) \cdot (0, -1, -1, 0, 1, 1) = 0 - 1 + 2 + 0 + 1 - 2 = 0.$$

Resulta do exposto que

$$\mathbb{R}^6 = \mathcal{K}^3 \oplus \mathcal{C}^3 \oplus \mathcal{I}^3 \oplus \mathcal{B}^3. \tag{3.4}$$

3.3 Conversão de perfis

Usando os métodos básicos da álgebra linear, é fácil decompor o perfil

$$p = (p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4,\ p_5,\ p_6), \tag{3.5}$$

onde figuram o número de eleitores de cada tipo, na base de $\mathbb{R}^6$ dada por (3.3):

$$p = a_B B_A + b_B B_B + a_I I_A + b_I I_B + \gamma\mathcal{C} + k\mathcal{K}. \tag{3.6}$$

Podemos escrever o perfil p, na forma da equação (3.6), quando conhecermos o vector

$$v = (a_B,\ b_B,\ a_I,\ b_I,\ \gamma,\ k) \tag{3.7}$$

formado pelos coeficientes de cada componente da base de $\mathbb{R}^6$ dada por (3.3).

Com o objectivo de associar um vector v ao perfil p, considere-se a matriz quadrada $\mathcal{A} = \begin{bmatrix} B_A & B_B & I_A & I_B & \mathcal{C} & \mathcal{K} \end{bmatrix}$.

Seja $\mathcal{A}^T = \begin{bmatrix} B_A \\ B_B \\ I_A \\ I_B \\ \mathcal{C} \\ \mathcal{K} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ a matriz transposta de $\mathcal{A}$.

Por definição de produto de matrizes $p = v\mathcal{A}^T$ donde $v = p\left[\mathcal{A}^T\right]^{-1}$.

Torna-se conveniente introduzir a matriz, de coeficientes inteiros, $\mathcal{T} = 6\left[\mathcal{A}^T\right]^{-1}$ que permite calcular v fazendo

$$v = \frac{1}{6}\, p\, \mathcal{T}. \tag{3.8}$$

3.3.1 Impacto da Decomposição

A importância da decomposição deriva do modo como cada sistema eleitoral reage aos diferentes subespaços.

Proposição 3.3.1 *Todos os perfis podem ser expressos da seguinte forma:*

$$p = p_K + p_B + p_I + p_C \tag{3.9}$$

em que p_K, p_B, p_I e p_C representam a projecção do perfil p, respectivamente, no núcleo, no subespaço básico, no subespaço inverso e no subespaço de Condorcet. O perfil diferencial

$$p_K + p_B + p_I + p_C$$

tem as seguintes propriedades:

1. *Todas as comparações dois a dois assim como qualquer sistema eleitoral ficam empatados para qualquer perfil do núcleo, $\mathcal{K}^3$; dado que nos perfis do núcleo cada tipo de voto aparece exactamente o mesmo número de vezes.*

2. *(i) Todos os sistemas eleitorais normalizados têm resultados idênticos para um qualquer vector do subespaço básico. Um perfil genérico do subespaço básico tem a forma $p_B = a_B B_A + b_B B_B$; tem-se ainda que*

$$\begin{aligned} & F\left(p_B, w_s^3\right) = \\ = \; & F\left(a_B B_A + b_B B_B, w_s^3\right) = a_B F\left(B_A, w_s^3\right) + b_B F\left(B_B, w_s^3\right) = \\ = \; & \left(2a_B,\, -a_B,\, -a_B\right) + \left(-b_B,\, 2b_B,\, -b_B\right) = \\ = \; & \left(2a_B - b_B,\, -a_B + 2b_B,\, -a_B - b_B\right). \end{aligned} \tag{3.10}$$

(ii) Os resultados de todas as comparações dois a dois, para perfis do subespaço básico são iguais aos resultados obtidos em qualquer dos sistemas eleitorais considerados. Para $p_B = a_B B_A + b_B B_B$ e para as comparações dois a dois, $\{A, B\}$, $\{A, C\}$ e $\{B, C\}$, obtêm-se, respectivamente, os valores:

$$\begin{aligned} & G_{\{A,B\}}(p_B) = \\ = \; & G_{\{A,B\}}\left(a_B B_A + b_B B_B\right) = a_B G_{\{A,B\}}\left(B_A\right) + b_B G_{\{A,B\}}\left(B_B\right) = \\ = \; & \left(2a_B,\, -2a_B\right) + \left(-2b_B,\, 2b_B\right) = \\ = \; & \left(2a_B - 2b_B,\, -2a_B + 2b_B\right); \end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned} & G_{\{A,C\}}(p_B) = \\ = \; & G_{\{A,C\}}\left(a_B B_A + b_B B_B\right) = a_B G_{\{A,C\}}\left(B_A\right) + b_B G_{\{A,C\}}\left(B_B\right) = \\ = \; & \left(2a_B,\, -2a_B\right) + (0,\, 0) = \\ = \; & \left(2a_B,\, -2a_B\right); \end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned} & G_{\{B,C\}}(p_B) = \\ = \; & G_{\{B,C\}}\left(a_B B_A + b_B B_B\right) = a_B G_{\{B,C\}}\left(B_A\right) + b_B G_{\{B,C\}}\left(B_B\right) = \\ = \; & (0,\, 0) + \left(2b_B,\, -2b_B\right) = \\ = \; & \left(2b_B,\, -2b_B\right). \end{aligned} \tag{3.13}$$

Note-se que estes valores não dependem de $\mathbf{s}$, *quer se trate de sistemas eleitorais quer de comparações dois a dois.*

3. (i) *Para o subespaço de Condorcet* $\mathcal{C}^3$ *todos os sistemas eleitorais atribuem zero pontos a cada candidato. Um perfil genérico do subespaço de Condorcet tem a forma* $p_C = \gamma(1,-1,1,-1,1,-1)$; *a contagem para* p_C *é:*

$$\begin{aligned} &F\left(p_C, w_s^3\right) = \\ &= F\left(\gamma(1,-1,1,-1,1,-1), w_s^3\right) = \gamma F\left((1,-1,1,-1,1,-1), w_s^3\right) = \\ &= \gamma\,(1-1+s-s,\ s-s+1-1,\ -s+1-1+s) = \\ &= (0,\,0,\,0)\,. \end{aligned} \tag{3.14}$$

(ii) *Para o subespaço de Condorcet* $\mathcal{C}^3$, *nas comparações dois a dois, vamos obter como resultado um ciclo. Para* $p_C = \gamma(1,-1,1,-1,1,-1)$ *e para as comparações dois a dois,* $\{A,B\}$, $\{A,C\}$ *e* $\{B,C\}$, *obtemos, respectivamente:*

$$\begin{aligned} &G_{\{A,B\}}(p_C) = \\ &= G_{\{A,B\}}\left(\gamma(1,-1,1,-1,1,-1)\right) = \gamma G_{\{A,B\}}\left((1,-1,1,-1,1,-1)\right) = \\ &= \gamma\,(1-1+1,\ -1+1-1) = \\ &= \gamma\,(1,\,-1)\,; \end{aligned} \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned} &G_{\{A,C\}}(p_C) = \\ &= G_{\{A,C\}}\left(\gamma(1,-1,1,-1,1,-1)\right) = \gamma G_{\{A,C\}}\left((1,-1,1,-1,1,-1)\right) = \\ &= \gamma\,(1-1-1,\ 1-1+1) = \\ &= \gamma\,(-1,\,1)\,; \end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned} &G_{\{B,C\}}(p_C) = \\ &= G_{\{B,C\}}\left(\gamma(1,-1,1,-1,1,-1)\right) = \gamma G_{\{B,C\}}\left((1,-1,1,-1,1,-1)\right) = \\ &= \gamma\,(1+1-1,\ -1+1-1) = \\ &= \gamma\,(1,\,-1)\,. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Se $\gamma > 0$ *obtemos o ciclo de Condorcet:* $A \succ B$, $B \succ C$ *e* $C \succ A$, *enquanto que se* $\gamma < 0$ *o ciclo de Condorcet obtido é:* $A \succ C$, $C \succ B$ *e* $B \succ A$.

4. Para a contagem de Borda e para as comparações dois a dois o resultado correspondente a um perfil do subespaço inverso é zero. Todos os sistemas eleitorais que não usarem a contagem de Borda ou comparações dois a dois têm resultados diferentes de zero para cada vector da base. Um perfil genérico do subespaço inverso tem a forma $p_I = a_I I_A + b_I I_B$; para p_I obtemos

$$\begin{aligned} F\left(p_I, w_s^3\right) = & \\ = & \; F\left(a_I I_A + b_I I_B, w_s^3\right) = a_I F\left(I_A, w_s^3\right) + b_I F\left(I_B, w_s^3\right) = \\ = & \; (2a_I - 4a_I s,\; -a_I + 2a_I s,\; -a_I + 2a_I s) + \\ & + (-b_I + 2b_I s,\; 2b_I - 4b_I s,\; -b_I + 2b_I s) = \\ = & \; (1-2s)\,(2a_I - b_I,\; -a_I + 2b_I,\; -a_I - b_I)\,. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Uma maneira interessante, eficaz, e já introduzida no exemplo 2.2, de contabilizar os resultados das comparações dois a dois obtidos no ponto 2, é usarmos o triângulo equilátero da figura 3.2.

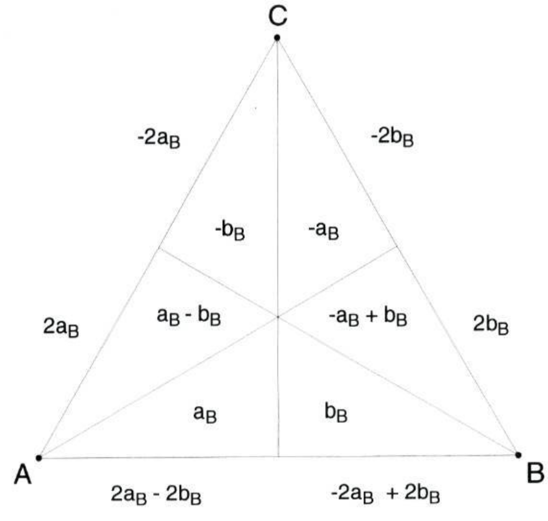

Figura 3.2: Resultados das comparações dois a dois para o subespaço básico $\mathcal{B}$

Suponhamos que para $F\left(p_B, w_s^3\right)$ obtemos o resultado $A \succ B \succ C$.

Nestas condições, por (3.10), temos

$$A \succ B \Rightarrow 2a_B - b_B > -a_B + 2b_B \Leftrightarrow 3a_B > 3b_B \Leftrightarrow a_B > b_B.$$

Uma vez que

$$A \succ C \Rightarrow 2a_B - b_B > -a_B - b_B \Leftrightarrow 3a_B > 0 \Leftrightarrow a_B > 0$$

e como

$$B \succ C \Rightarrow -a_B + 2b_B > -a_B - b_B \Leftrightarrow 3b_B > 0 \Leftrightarrow b_B > 0.$$

chegamos, assim, à condição

$$a_B > b_B > 0.$$

A condição $a_B > b_B > 0$, que se acabou de obter, para a comparação dois a dois, $\{A, B\}$, por (3.11) conduzirá ao resultado $A \succ B$ pois como $a_B > b_B$ a condição

$$2a_B - 2b_B > -2a_B + 2b_B \Leftrightarrow 2\left(a_B - b_B\right) > 2\left(-a_B + b_B\right)$$

faz com que a pontuação de A seja positiva enquanto que a pontuação de B é negativa. De igual modo se verifica que os resultados para as outras duas comparações dois a dois, $\{A, C\}$ e $\{B, C\}$, são, respectivamente, por (3.12) e por (3.13): $A \succ C$ e $B \succ C$. Obtém-se, deste modo, o resultado esperado $A \succ B \succ C$.

Salienta-se que para $F\left(p_B, w_s^3\right)$ e para $\{X, Y, Z\} = \{A, B, C\}$ ao resultado $X \succ Y \succ Z$ corresponde sempre a relação $x_B > y_B > 0$.

Também, para as comparações dois a dois, considerando os pares de elementos do conjunto $\{X, Y, Z\} = \{A, B, C\}$, as condições obtidas partindo do resultado $X \succ Y \succ Z$ para os coeficientes de cada vector da base do subespaço básico, $\mathcal{B}$, conduzem aos resultados $X \succ Y$, $X \succ Z$ e $Y \succ Z$, que por sua vez levam a $X \succ Y \succ Z$, como resultado final das comparações dois a dois, como era de esperar.

Relativamente ao ponto 3, da proposição 3.3.1, e quanto às comparações dois a dois a geometria do triângulo equilátero permite observar os dois ciclos referidos: $A \succ B$, $B \succ C$ e $C \succ A$ na figura 3.3; e na figura 3.4 o ciclo $A \succ C$, $C \succ B$ e $B \succ A$.

Por fim, quanto ao ponto 4, da proposição 3.3.1, na contagem de Borda, onde $s = \frac{1}{2}$ e portanto $1 - 2s = 0$, tem-se por (3.18), que

$$F\left(p_I, w^3_{\frac{1}{2}}\right) = (0, 0, 0).$$

O resultado das comparações dois a dois é facilmente calculado e, tal como a contagem de Borda, vai conduzir a um empate em que cada candidato tem zero pontos, resultado

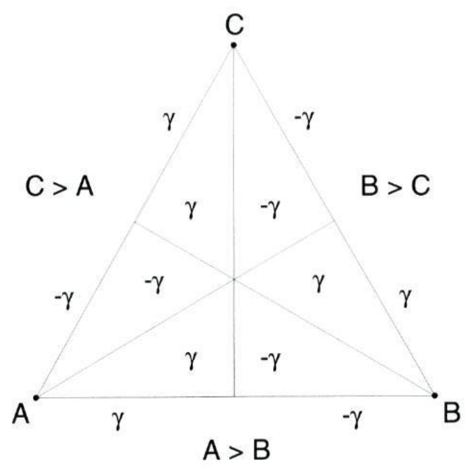

Figura 3.3: Comparações dois a dois para $\gamma > 0$ no subespaço de Condorcet

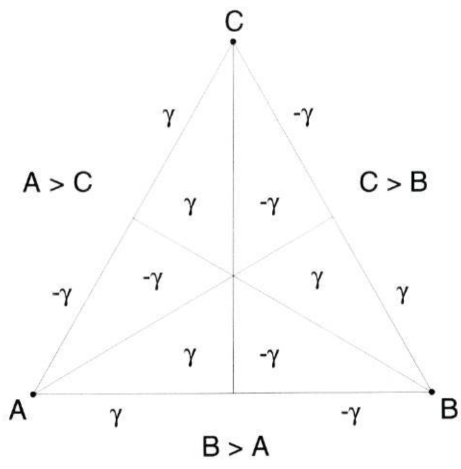

Figura 3.4: Comparações dois a dois para $\gamma < 0$ no subespaço de Condorcet

evidente no triângulo equilátero da figura 3.5, pela simetria verificada relativamente à contagem dos pontos de cada tipo de voto.

Vamos usar a proposição 3.3.1 para construir um **exemplo** paradoxal de um perfil eleitoral, no sentido em que o mesmo perfil, dependendo do sistema eleitoral usado, provoca três resultados diferentes. Designemos por p o perfil eleitoral que vamos construir, à custa do perfil diferencial p_d.

Suponhamos que queremos um perfil em que da contagem de Borda resulte a ordenação $C \succ A \succ B$.

A proposição 3.3.1 garante-nos que o resultado da contagem de Borda é estritamente determinado por vectores do subespaço básico. Temos então de procurar coeficientes que satisfaçam $c_B > a_B > b_B$; por questões de simplificação considerando $c_B = 2$, $a_B = 1$ e $b_B = 0$ encontramos coeficientes que satisfazem o pretendido.

Com estes coeficientes definimos o perfil

$$\begin{aligned} p_d &= p_B = 1B_A + 0B_B + 2B_C = \\ &= (1,1,0,-1,-1,0) + 2(-1,0,1,1,0,-1) = \\ &= (-1,1,2,1,-1,-2) \end{aligned}$$

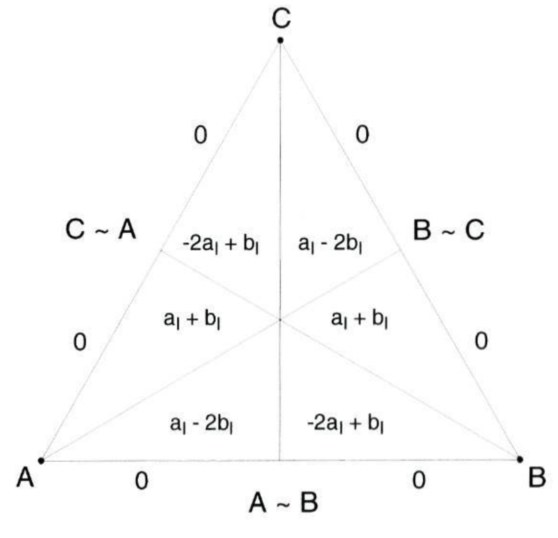

Figura 3.5: Resultados das comparações dois a dois para o subespaço inverso, $\mathcal{I}$

Vejamos que a condição inicialmente imposta, $C \succ A \succ B$, para a contagem de Borda é satisfeita:

$$F\left(p_d, w_{\frac{1}{2}}^3\right) = \left(-1+1+1-1,\ -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-1-2,\ \frac{1}{2}+2+1-\frac{1}{2}\right) = (0, -3, 3),$$

o que implica o pretendido.

Constatamos ainda que, de acordo com a proposição 3.3.1, todos os sistemas eleitorais normalizados conduzem ao mesmo resultado.

Façamos agora com que B seja o vencedor de uma votação plural, que é dada pelo vector w_0^3. De acordo com a proposição 3.3.1 temos de adicionar um perfil inverso $p_I = b_I I_B$; para escolher b_I sabemos que o resultado que o perfil p_B produz para w_0^3 é igual ao obtido para a contagem de Borda; averiguemos qual é o resultado obtido para $p_I = b_I(0, -1, -1, 0, 1, 1)$, numa votação normalizada plural. Assim temos,

$$F\left(p_I, w_0^3\right) = F\left(b_I I_B, w_0^3\right) = (-b_I,\ 2b_I,\ -b_I).$$

Tendo em conta os resultados obtidos, B será o vencedor plural se $-3 + 2b_I > 3 - b_I$, ou seja, $3b_I > 6$ e então $b_I > 2$. Adicionando a p_B o perfil $p_I = 3I_B$ obtemos

$$p_d = p_B + p_I = (-7, 4, 5, -5, 2, 1).$$

Saliente-se que a proposição 3.3.1 garante que não alteramos a contagem de Borda, pois para o perfil que estamos a adicionar a contagem de Borda de cada candidato é zero (o mesmo pode ser afirmado para as comparações dois a dois).

Obtivemos o perfil $p_d = (-7, 4, 5, -5, 2, 1)$ que satisfaz as restrições impostas, uma vez que obtemos o resultado $B \succ C \succ A$ para a votação plural, pois

$$F\left(p_d, w_0^3\right) = (-7+4, 2+1, 5-5) = (-3, 3, 0),$$

mantendo-se inalterado o resultado para a contagem de Borda.

Usemos agora o subespaço de Condorcet $\mathcal{C}^3$ de modo a que nem A nem B sejam vencedores de Condorcet; pela proposição 3.3.1 sabemos que o perfil de Condorcet p_C, a adicionar a p_d, não irá alterar os resultados já encontrados. Comecemos por comparar os resultados, em comparações dois a dois, para o perfil p_d e para $(1, -1, 1, -1, 1, -1)$. Usando o triângulo equilátero da figura 3.6 observa-se que para o perfil p_d nas comparações dois a dois $\{A, B\}$ e $\{A, C\}$ os vencedores são A e C, respectivamente, com o mesmo resultado; enquanto que na comparação $\{B, C\}$ o vencedor é C, com o dobro da pontuação dos vencedores das outras duas comparações dois a dois.

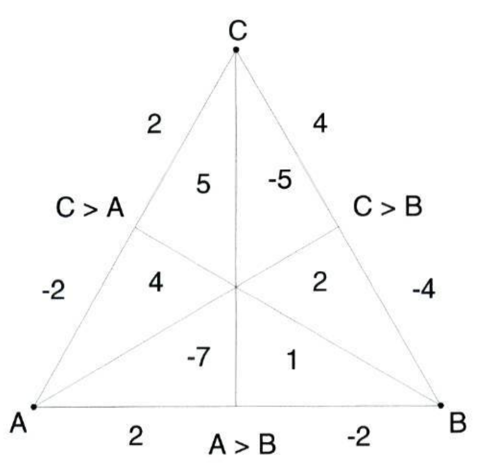

Figura 3.6: Comparações dois a dois para o perfil p_d

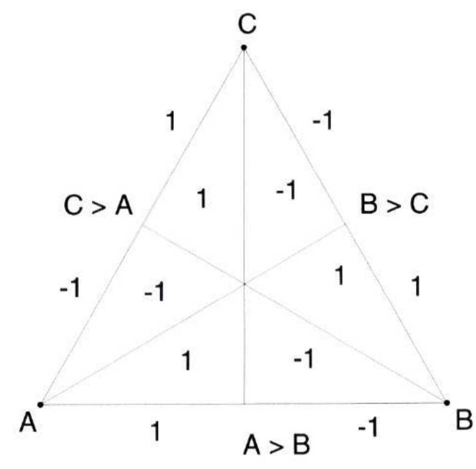

Figura 3.7: Comparações dois a dois para $(1, -1, 1, -1, 1, -1)$

Já sabemos que $(1, -1, 1, -1, 1, -1)$ provoca o ciclo $A \succ B$, $B \succ C$ e $C \succ A$. Assim, considerando $(-1)(1, -1, 1, -1, 1, -1)$, invertemos o ciclo fazendo, em particular, com que $C \succ B$. Se ao perfil p_d adicionarmos $(-2)(1, -1, 1, -1, 1, -1)$ provocamos um empate nas comparações dois a dois entre $\{A, B\}$ e $\{A, C\}$ não obtendo, deste modo, um vencedor de Condorcet, conforme pode ser observado no triângulo equilátero da figura 3.8, uma vez que

$$p_d = (-7, 4, 5, -5, 2, 1) + (-2, 2, -2, 2, -2, 2, -2) = (-9, 6, 3, -3, 0, 3).$$

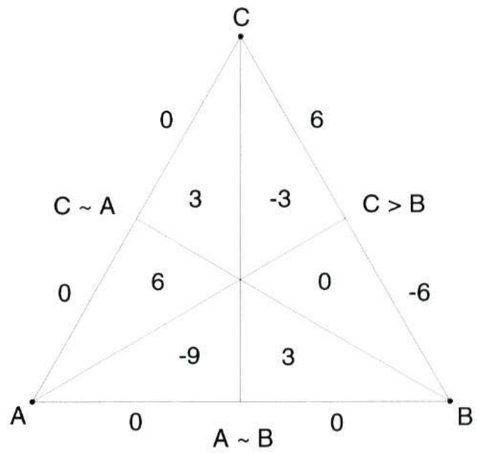

Figura 3.8: Resultados das comparações dois a dois para p_d

Obtivemos, deste modo, um perfil diferencial p_d que satisfaz as condições que fomos impondo.

Transformamos o perfil diferencial obtido, p_d, num perfil propriamente dito, adicionando $p_K = 9\mathcal{K}$ a p_d obtendo $p = (0, 15, 12, 6, 9, 12)$. Este perfil, por construção, conduz ao resultado $C \succ A \succ B$ na contagem de Borda; conduz a $B \succ C \succ A$ no sistema eleitoral plural; nas comparações dois a dois obtemos $A \asymp B$, $A \asymp C$ e $C \succ B$ fazendo com que não exista vencedor de Condorcet. Portanto, o mesmo perfil p provoca três resultados diferentes conforme o sistema eleitoral adoptado.

3.4 Comparações dois a dois e decomposição de perfis

Vimos, na proposição 3.3.1, que qualquer comparação dois a dois assim como qualquer sistema eleitoral ficam empatados para um perfil do núcleo. Também vimos na proposição 3.3.1 que o subespaço inverso não afecta o resultado das comparações dois a dois, dado que provoca um empate, atribuindo zero pontos a cada candidato. Assim, as comparações dois a dois só são afectadas pelas componentes básicas e de Condorcet de um perfil. Consequentemente todas as contagens de Borda, todas as comparações dois a dois, todas as propriedades do vencedor de Condorcet e dos ciclos ficam completamente caracterizadas pelos perfis diferenciais básico e de Condorcet, [23, pp. 324-325].

Definimos $\tau_p(X,Y)$ como a diferença entre as contagens obtidas pelos candidatos X, $Y \in \mathcal{S}$, em comparações dois a dois, para o perfil $p \in \mathcal{P}$. Assim, e tendo em conta que $G_{\{X,Y\}}(p) = (g_p(X),\ g_p(Y))$, temos

$$\begin{array}{rccl} \tau_p : & \mathcal{S}\times\mathcal{S} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (X,Y) & \longmapsto & \tau_p(X,Y) = g_p(X) - g_p(Y) \end{array}$$

Detalhemos um pouco o que se passa em comparações dois a dois para perfis do subespaço básico.

A proposição 3.3.1 garante-nos que os resultados das comparações dois a dois no subespaço básico verificam a transitividade, isto é, se $A \succ B$ e $B \succ C$ então $A \succ C$.

De facto, considerando-se $p_B = a_B B_A + b_B B_B$, temos pela propriedade 2 da proposição 3.3.1 que:

$$\begin{aligned} G_{\{A,B\}}(p_B) &= (2a_B - 2b_B,\ -2a_B + 2b_B); \\ G_{\{A,C\}}(p_B) &= (2a_B,\ -2a_B); \\ G_{\{B,C\}}(p_B) &= (2b_B,\ -2b_B). \end{aligned}$$

Uma vez que por hipótese

$$A \succ B \Rightarrow 2a_B - 2b_B > -2a_B + 2b_B \Leftrightarrow a_B > b_B.$$

Ainda, por hipótese, verifica-se que

$$B \succ C \Rightarrow 2b_B > -2b_B \Leftrightarrow b_B > 0.$$

Do exposto, vem que se $b_B > 0$ e $a_B > b_B$ então $a_B > 0$. Podemos então concluir que $2a_B > -2a_B$ e consequentemente $A \succ C$.

Além disso podemos ainda afirmar que

$$\tau_{p_B}(A,B) + \tau_{p_B}(B,C) = \tau_{p_B}(A,C) \tag{3.19}$$

o que significa que as contagens em duas comparações dois a dois determinam a terceira contagem.

Este resultado é fácil de provar. Temos

$$\begin{aligned}
\tau_{p_B}(A,B)+\tau_{p_B}(B,C) &= g_{p_B}(A)-g_{p_B}(B)+g_{p_B}(B)-g_{p_B}(C)= \\
&= 2a_B-2b_B+2a_B-2b_B+2b_B+2b_B= \\
&= 2a_B+2a_B=g_{p_B}(A)-g_{p_B}(C)= \\
&= \tau_{p_B}(A,C).
\end{aligned}$$

Note-se que este resultado continua a verificar-se para qualquer permutação circular dos candidatos pertencentes ao conjunto $\mathcal{S}$.

A transitividade nas comparações dois a dois não se verifica. Comprovamos este facto analisando os resultados das comparações dois a dois para o perfil $p=(0,15,12,6,9,12)$ construído no fim da secção 3.2 e onde os resultados para as comparações dois a dois são: $A \asymp B$, $A \asymp C$ e $C \succ B$. Daqui inferimos que é a componente de Condorcet que quebra a transitividade.

A equação (3.19) realça o facto dos vectores do subespaço básico medirem a "força" com que um candidato ganha a outro nas comparações dois a dois, [23, pp. 325-326]. Num "mundo ideal" esperamos que em comparações dois a dois se $A \succ B$ e $B \succ C$ então $A \succ C$. Mais, esperamos que a vitória de A sobre C seja maior que a vitória de B sobre C. Mas esta asserção é, em geral, falsa e, em particular para o subespaço básico, verifica-se a igualdade (3.19).

Para compararmos os subespaços básico e de Condorcet use-se a representação no "cubo" apresentada por Saari [21, pp. 56-64], e que denotaremos por $\mathcal{RC}$. No entanto, aqui, em vez de usarmos $\tau_p(X,Y)$, vamos considerar a fracção que se obtém quando dividimos $\tau_p(X,Y)$ pelo número de eleitores. Isto é, considerando v eleitores, definimos

$$x_{X,Y}=\frac{\tau_p(X,Y)}{v} \tag{3.20}$$

o que implica

$$-1 \leq x_{X,Y} \leq 1 \ \wedge \ x_{X,Y}=-x_{Y,X}$$

O ponto $(x_{A,B},x_{B,C},x_{C,A})$ de $\mathbb{R}^3$ define a contagem para todas as comparações dois a dois entre os três candidatos. A condição $-1 \leq x_{X,Y} \leq 1$ obriga a que qualquer ponto

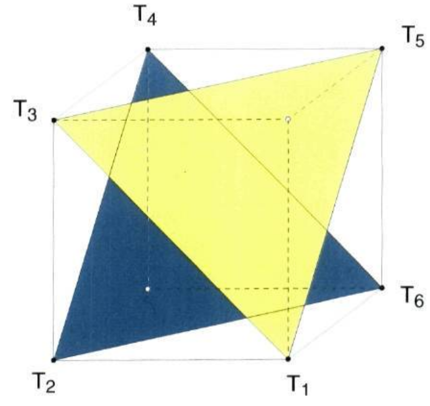

Figura 3.9: Representação no "cubo" - $\mathcal{RC}$

esteja "dentro" do cubo centrado na origem de aresta duas unidades (veja-se o cubo da figura 3.9).

Repare-se que seis dos oito vértices do cubo correspondem a ***perfis unânimes***, *perfis em que todos os eleitores têm exactamente as mesmas preferências* (veja-se a tabela 3.1). Por exemplo, se todos os eleitores preferirem $B \succ C \succ A$ então o resultado unânime implicará $-x_{A,B} = x_{B,C} = x_{C,A} = 1$, que define o vértice $(-1, 1, 1)$ do cubo.

Tipo	**Resultado**	**Vértice**	**Tipo**	**Resultado**	**Vértice**
T_1	$A \succ B \succ C$	$(1, 1, -1)$	T_4	$C \succ B \succ A$	$(-1, -1, 1)$
T_2	$A \succ C \succ B$	$(1, -1, -1)$	T_5	$B \succ C \succ A$	$(-1, 1, 1)$
T_3	$C \succ A \succ B$	$(1, -1, 1)$	T_6	$B \succ A \succ C$	$(-1, 1, -1)$

Tabela 3.1: Perfis unânimes e respectivos vértices no cubo

Estes seis vértices definem o octaedro representado na figura 3.10, que é *o menor conjunto convexo que contém todos os vértices* [21, p. 26].

Os pontos do cubo que correspondem à contagem de alguma comparação dois a dois são os que se encontram entre os planos $x_{A,B} + x_{B,C} + x_{C,A} = 1$ e $x_{A,B} + x_{B,C} + x_{C,A} = -1$, observação que resulta da definição (3.20) (veja-se a figura 3.10).

As contagens das comparações dois a dois são representadas pela soma convexa dos vértices correspondentes aos perfis unânimes. A saber, se p_j é a fracção de eleitores do tipo j com $j \in \{1, \ldots, 6\}$, correspondente a um perfil diferencial p e E_j é o vértice unânime correspondente a cada tipo, então a contagem q para o perfil p de comparações

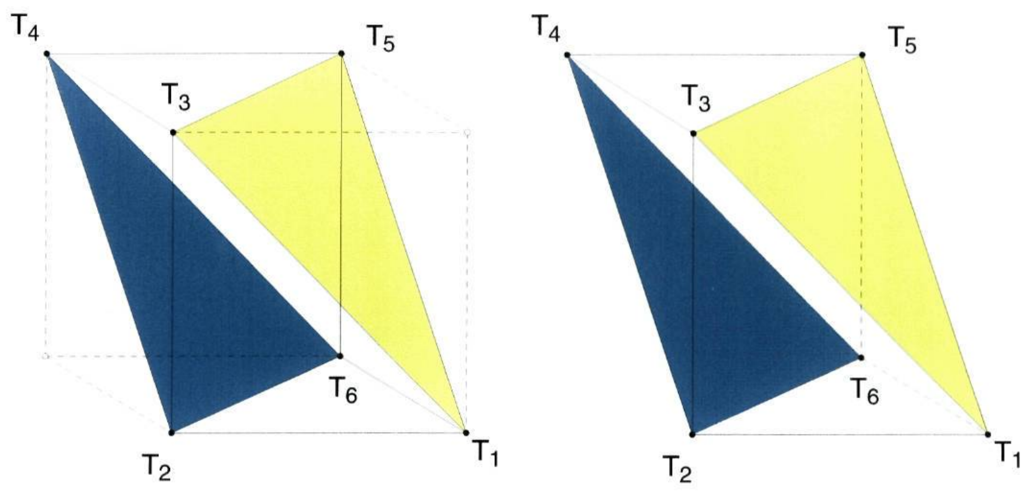

Figura 3.10: Os planos: $x_{A,B} + x_{B,C} + x_{C,A} = \pm 1$ e octaedro

dois a dois é:

$$q = \sum_{j=1}^{6} p_j E_j.$$

Para ver que assim é, consideremos as fracções do perfil diferencial p obtido pelas preferências de v eleitores, $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6)$. Por definição $q = (x_{A,B}, x_{B,C}, x_{C,A})$. Usando a representação no triângulo da figura 3.11 e a definição de $x_{X,Y}$ vamos obter

$$q = (p_1+p_2+p_3-p_4-p_5-p_6,\ p_1-p_2-p_3-p_4+p_5+p_6,\ -p_1-p_2+p_3+p_4+p_5-p_6) \quad (3.21)$$

Reciprocamente, $q = \sum_{j=1}^{6} p_j E_j = p_1 E_1 + p_2 E_2 + p_3 E_3 + p_4 E_4 + p_5 E_5 + p_6 E_6 = p_1(1,1,-1) + p_2(1,-1,-1) + p_3(1,-1,1) + p_4(-1,-1,1) + p_5(-1,1,1) + p_6(-1,1,-1) = (p_1 + p_2 + p_3 - p_4 - p_5 - p_6,\ p_1 - p_2 - p_3 - p_4 + p_5 + p_6,\ -p_1 - p_2 + p_3 + p_4 + p_5 - p_6)$. Obtendo o resultado (3.21), calculado com a ajuda do triângulo da figura 3.11 e com a definição de $x_{X,Y}$.

A definição (3.20) de $x_{X,Y}$ permite escrever a equação (3.19) como

$$x_{A,B} + x_{B,C} = x_{A,C} \Leftrightarrow x_{A,B} + x_{B,C} + x_{C,A} = 0, \quad (3.22)$$

obtendo-se a equação de um plano em $\mathbb{R}^3$. Este plano, que Saari, em [23, p. 326], designa por ***plano transitivo*** é o lugar geométrico dos pontos que representam resultados de comparações dois a dois onde se verifica a transitividade.

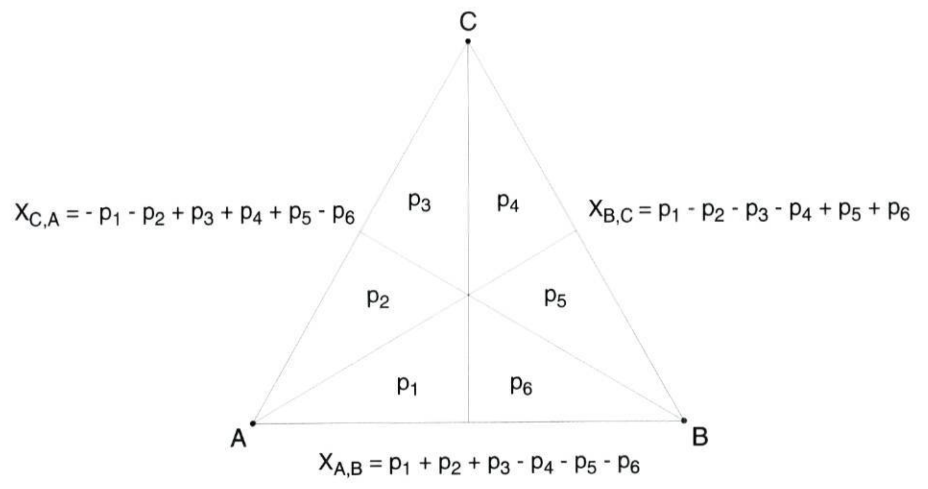

Figura 3.11: Cálculo de $x_{A,B}$, $x_{A,C}$ e $x_{B,C}$

Uma vez mais de acordo com a equação (3.19), este plano, representado na figura 3.12, contém todos os resultados associados a perfis que só contenham a porção básica. A intersecção com o cubo é um hexágono regular.

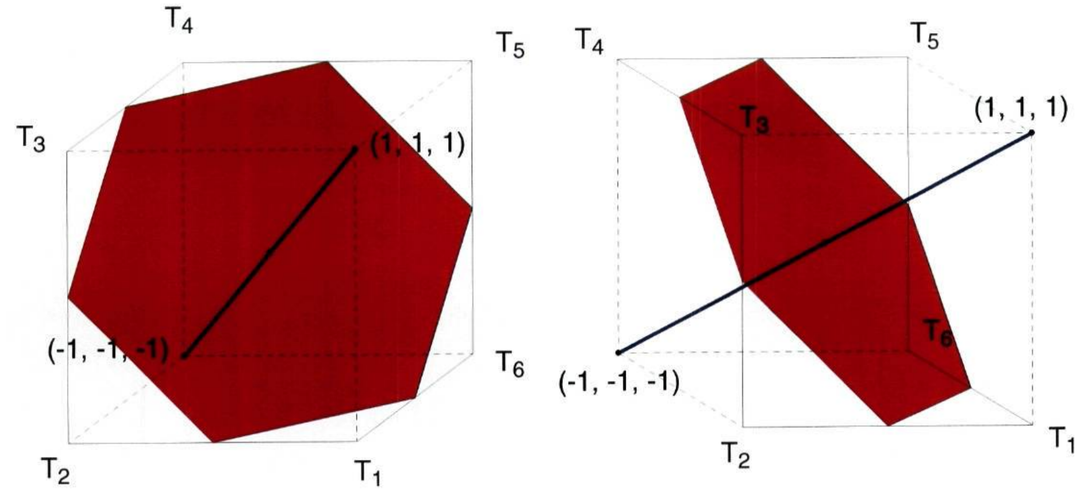

Figura 3.12: Plano transitivo e Eixo cíclico

Perpendicularmente ao plano transitivo, está a recta que contém os vértices $(1,1,1)$ e $(-1,-1,-1)$ do cubo, que definem os resultados cíclicos; Saari, em [23, p. 327], chama a esta recta ***eixo cíclico***, isto é, qualquer resultado de $\mathcal{C}^3$ tem a direcção deste eixo.

Proposição 3.4.1 *O resultado de uma comparação dois a dois, de um perfil do subespaço básico, está no plano transitivo; o resultado de uma eleição para o perfil de Condorcet está no eixo cíclico. O resultado de qualquer perfil pode ser decomposto nas suas projecções no plano transitivo e no eixo cíclico. Geometricamente, o ponto* $q \in \mathcal{RC}$ *pode ser decomposto de modo único na forma*

$$q = q_T + \mu(1, 1, 1), \tag{3.23}$$

onde q_T *é um ponto do plano transitivo e* μ *um escalar.*

Saari designa a representação (3.23) por **sistema de coordenadas no plano transitivo**.

Comecemos por provar que a contagem de uma comparação dois a dois envolvendo um perfil do subespaço básico está no plano transitivo. Dado que os vectores B_A, B_B, e B_C são linearmente dependentes, consideremos, sem perda de generalidade, o perfil do subespaço básico $p_B = a_B B_A + b_B B_B$ e provemos que a contagem q, que lhe está associada, pertence ao plano transitivo. Pela proposição 3.3.1 e considerando a diferença entre as contagens obtidas por cada um dos candidatos obtemos $q = 4(a_B - b_B, b_B, -a_B)$, um vector cuja soma das coordenadas é nula e que por conseguinte está no plano transitivo. Para provarmos que o resultado de uma eleição envolvendo um perfil do subespaço de Condorcet está no eixo cíclico, consideremos $p_C = (1, -1, 1, -1, 1, -1)$. Pela proposição 3.3.1 e considerando a diferença entre as contagens obtidas por cada um dos candidatos obtemos $q = 2(1, 1, 1)$, o que garante que q pertence ao eixo cíclico. Quanto ao facto de a contagem de qualquer perfil poder ser decomposta como soma ortogonal resulta imediatamente do facto de o plano transitivo e o eixo cíclico formarem uma base de $\mathbb{R}^3$. ∎

Proposição 3.4.2 *Ao perfil* $p = a_B B_A + b_B B_B + \gamma\mathcal{C} + k\mathcal{K}$ *corresponde em* $\mathcal{RC}$ *o ponto*

$$q = \frac{1}{3k}\left[2\left(a_B - b_B,\ b_B,\ -a_B\right) + \gamma\left(1, 1, 1\right)\right], \tag{3.24}$$

onde o primeiro vector é a componente do plano transitivo e o segundo é a componente do eixo cíclico.

Reciprocamente, o ponto $\left(q_1^T,\ q_2^T,\ q_3^T\right) + \mu\left(1, 1, 1\right)$ *de* $\mathcal{RC}$ *em que* $q_1^T + q_2^T + q_3^T = 0$*, corresponde aos perfis cujos coeficientes de cada vector são descritos por:*

$$a_B = \frac{-\lambda q_3^T}{2}, \qquad b_B = \frac{\lambda q_2^T}{2}, \qquad \gamma = \lambda\mu, \qquad k = \frac{\lambda}{3}, \qquad \forall \lambda > 0. \tag{3.25}$$

Seja $p = a_B B_A + b_B B_B + \gamma \mathcal{C} + k\mathcal{K}$; por definição dos subespaços básico, de Condorcet e núcleo,

$$p = (a_B+\gamma+k,\ a_B-b_B-\gamma+k,\ -b_B+\gamma+k,\ -a_B-\gamma+k,\ -a_B+b_B+\gamma+k,\ b_B-\gamma+k).$$

Uma vez p escrito como um vector de $\mathbb{R}^6$ e, pertencente a $\mathcal{P}$, as contagens obtidas para as comparações dois a dois $\{A, B\}$, $\{B, C\}$ e $\{C, A\}$ são, respectivamente:

$$\begin{aligned}
G_{\{A,B\}}(p) &= (2a_B - 2b_B + \gamma + 3k,\ -2a_B + 2b_B - \gamma + 3k);\\
G_{\{B,C\}}(p) &= (2b_B + \gamma + 3k,\ -2b_B - \gamma + 3k);\\
G_{\{C,A\}}(p) &= (-2a_B + \gamma + 3k,\ 2a_B - \gamma + 3k).
\end{aligned}$$

As diferenças entre as contagens destas três comparações são, respectivamente:

$$\begin{aligned}
\tau_p(A, B) &= 4a_B - 4b_B + 2\gamma;\\
\tau_p(B, C) &= 4b_B + 2\gamma;\\
\tau_p(C, A) &= -4a_B + 2\gamma.
\end{aligned}$$

Dividindo por $6k$, o número de eleitores, obtemos as coordenadas do correspondente ponto

$$q = \frac{1}{6k}(4a_B-4b_B+2\gamma;\ 4b_B+2\gamma;\ -4a_B+2\gamma) = \frac{1}{6k}\left[4\,(a_B - b_B,\ b_B,\ -a_B) + 2\gamma\,(1, 1, 1)\right],$$

ou seja,

$$q = \frac{1}{3k}\left[2\,(a_B - b_B, b_B, -a_B) + \gamma\,(1, 1, 1)\right],$$

obtendo deste modo o que pretendíamos.

Reciprocamente, consideremos q, um ponto de $\mathcal{RC}$, tal que

$$q = \left(q_1^T, q_2^T, q_3^T\right) + \mu\,(1, 1, 1)\,, \tag{3.26}$$

com $q_1^T + q_2^T + q_3^T = 0$. Pretendemos encontrar os escalares a_B, b_B, γ e k que nos permitam obter um perfil p que corresponda a q.

Por (3.24) temos que

$$\frac{\gamma}{3k} = \mu \Leftrightarrow k = \frac{\gamma}{3\mu}.$$

Como γ é desconhecido e k é positivo podemos considerar o parâmetro λ tal que

$$\lambda = \frac{\gamma}{\mu} \Leftrightarrow \gamma = \lambda\mu$$

e assim obtemos

$$k = \frac{\lambda}{3}, \ \forall \lambda > 0.$$

Novamente por (3.24) temos que

$$\begin{cases} \frac{2}{\lambda} b_B = q_2^T \\ -\frac{2}{\lambda} a_B = q_3^T \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_B = \frac{\lambda}{2} q_2^T \\ a_B = -\frac{\lambda}{2} q_3^T \end{cases},$$

o que prova o pretendido. ∎

Uma aplicação interessante da decomposição de perfis dada por (3.9) na proposição 3.3.1, é ver até que ponto as componentes básica e de Condorcet influenciam a contagem de Borda e as comparações dois a dois, para o mesmo perfil.

Consideremos, sem perda de generalidade, um perfil p para o qual a contagem de Borda dá o resultado $A \succ B \succ C$, o que se verifica, por (3.10), se e só se os coeficientes dos vectores do subespaço básico satisfizerem $a_B > b_B > 0$; a contagem associada ao vector normalizado b^3, por (3.10), é:

$$F(p, b^3) = (2a_B - b_B, \ -a_B + 2b_B, \ -a_B - b_B). \tag{3.27}$$

As contagens das comparações dois a dois para os pares de comparações $\{A, B\}$, $\{A, C\}$, e $\{B, C\}$, respectivamente, por (3.11), (3.12) e (3.13), são:

$$\begin{aligned} G_{\{A,B\}}(p) &= (2a_B - 2b_B, \ -2a_B + 2b_B); \\ G_{\{A,C\}}(p) &= (2a_B, \ -2a_B); \\ G_{\{B,C\}}(p) &= (2b_B, \ -2b_B). \end{aligned} \tag{3.28}$$

Como $a_B > b_B > 0$, então de (3.28) vem que $A \succ B$, $A \succ C$ e $B \succ C$, ou seja, a contagem para as comparações dois a dois está de acordo com o imposto para a contagem de Borda e é $A \succ B \succ C$, sendo A o vencedor de Condorcet.

Vamos agora ver que é possível alterar o vencedor de Condorcet escolhendo um valor apropriado para γ, escalar associado à componente de Condorcet, que, como se sabe, não afectará a contagem de Borda. Assim, atendendo à linearidade de $G_{\{X,Y\}}(p)$ podemos adicionar a (3.28) o resultado obtido, respectivamente, em (3.15), (3.16) e (3.17) para o vector $\gamma(1, -1, 1, -1, 1, -1)$ obtendo as contagens das comparações dois a dois para os pares de comparações $\{A, B\}$, $\{A, C\}$, e $\{B, C\}$:

$$\begin{aligned} G_{\{A,B\}}(p) &= (2a_B - 2b_B + \gamma, \ -2a_B + 2b_B - \gamma); \\ G_{\{A,C\}}(p) &= (2a_B - \gamma, \ -2a_B + \gamma); \\ G_{\{B,C\}}(p) &= (2b_B + \gamma, \ -2b_B - \gamma). \end{aligned} \tag{3.29}$$

Para fazer B o vencedor de Condorcet necessitamos que $B \succ A$ e que $B \succ C$ em comparações dois a dois, ou seja, que se tenha

$$2(a_B - b_B) + \gamma < -2(a_B - b_B) - \gamma \wedge 2b_B + \gamma > -2b_B - \gamma \Leftrightarrow 2(a_B - b_B) < -\gamma < 2b_B.$$

Proposição 3.4.3 *Considere-se o resultado para a contagem de Borda $A \succ B \succ C$ ($a_B > b_B > 0$) e as comparações dois a dois $\{A, B\}$, $\{A, C\}$, e $\{B, C\}$.*

(i) Uma condição necessária e suficiente para que o candidato vencedor da contagem de Borda seja diferente do vencedor de Condorcet (B), associado às comparações dois a dois, é que o coeficiente γ, de C, satisfaça:

$$2(a_B - b_B) < -\gamma < 2b_B \tag{3.30}$$

(ii) Uma condição necessária e suficiente para que a contagem de Borda seja acompanhada de um ciclo, como resultado das comparações dois a dois, é que o coeficiente γ, de C, satisfaça uma das seguintes inequações:

$$2a_B < \gamma \vee -2\max[(a_B - b_B), b_B] > \gamma \tag{3.31}$$

A primeira inequação define o ciclo $A \succ B$, $B \succ C$ e $C \succ A$ enquanto que a segunda define o ciclo $A \succ C$, $C \succ B$ e $B \succ A$, em comparações dois a dois.

A prova da condição necessária e suficiente que nos conduziu aos sistemas de inequações (3.30) foi feita como motivação para a proposição; provemos, agora, a condição necessária e suficiente que conduz às inequações (3.31). Da contagem de Borda vem que para as comparações dois a dois $\{A, B\}, \{B, C\}$, e $\{A, C\}$ já se verifica, por (3.28), que $A \succ B$ e $B \succ C$. Para completarmos o ciclo, se obrigarmos a que $C \succ A$, nas comparações dois a dois, terá de ser

$$2a_B - \gamma < -2a_B + \gamma \Leftrightarrow 2a_B < \gamma.$$

Quanto ao ciclo $A \succ C$, $C \succ B$ e $B \succ A$ como já se verifica que $A \succ C$, uma vez mais por (3.28), resta-nos obrigar a que:

$$-2b_B - \gamma > 2b_B + \gamma \wedge -2(a_B - b_B) - \gamma > 2(a_B - b_B) + \gamma \Leftrightarrow -2b_B > \gamma \wedge -2(a_B - b_B) > \gamma,$$

de onde resulta a condição $-2\max[(a_B - b_B), b_B] > \gamma$. ∎

3.5 Sistemas eleitorais e subespaço inverso

O subespaço inverso é "o responsável" por muitos dos conflitos e paradoxos associados aos sistemas eleitorais. Como provámos atrás, no subespaço básico os resultados das eleições baseadas em sistemas eleitorais são sempre os mesmos e os ciclos são causados pelo subespaço de Condorcet. Resta-nos, pois, estudar o subespaço inverso e verificar que devidamente "manipulado" pode provocar uma série de paradoxos, levando a que o mesmo perfil conduza a resultados completamente diferentes, dependendo do sistema eleitoral usado.

Para percebermos os efeitos "perversos" do subespaço inverso vamos mostrar como construir um exemplo de um perfil

$$p = a_B B_A + b_B B_B + c_B B_C + a_I I_A + b_I I_B + c_I I_C$$

tal que o resultado associado à contagem de Borda é, por exemplo, $B \succ A \succ C$ e em que A é o vencedor plural e C é o vencedor anti-plural.

Dado que o subespaço inverso não afecta a contagem de Borda, podemos desde já escolher os coeficientes do subespaço básico convenientes. Assim, como pretendemos o resultado $B \succ A \succ C$, então $b_B > a_B > 0$. Podemos, pois, procurar um perfil p, da forma

$$p = a_B B_A + b_B B_B + a_I I_A + b_I I_B,$$

cuja contagem associada ao vector w_s^3 é, como vimos na proposição 3.1.2,

$$F\left(p, w_s^3\right) = F(p, b^3) + \left(s - \frac{1}{2}\right) F(p, d^3).$$

Como para b^3 o resultado é $F(p, b^3) = (2a_B - b_B,\ -a_B + 2b_B,\ -a_B - b_B)$, enquanto que para d^3 é $F(p, d^3) = (-4a_I + 2b_I,\ 2a_I - 4b_I,\ 2a_I + 2b_I)$, então o resultado associado a w_s^3 é

$$\begin{aligned} F\left(p, w_s^3\right) &= (2a_B - b_B, -a_B + 2b_B, -a_B - b_B) + \\ &+ \left(s - \frac{1}{2}\right)(-4a_I + 2b_I, 2a_I - 4b_I, 2a_I + 2b_I). \end{aligned}$$

Para o sistema eleitoral plural $s = 0$, e então

$$F\left(p, w_0^3\right) = (2a_B - b_B + 2a_I - b_I,\ -a_B + 2b_B - a_I + 2b_I,\ -a_B - b_B - a_I - b_I).$$

Como pretendemos que o vencedor seja A, então A tem que vencer quer B quer C, o que nos leva ao sistema:

$$\begin{cases} 2a_B - b_B + 2a_I - b_I > -a_B + 2b_B - a_I + 2b_I \\ 2a_B - b_B + 2a_I - b_I > -a_B - b_B - a_I - b_I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_I - b_I > -a_B + b_B \\ a_I > -a_B \end{cases}.$$

Para o sistema eleitoral anti-plural $s = 1$, e então

$$F\left(p, w_1^3\right) = \left(2a_B - b_B - 2a_I + b_I, -a_B + 2b_B + a_I - 2b_I, -a_B - b_B + a_I + b_I\right).$$

Pretendendo agora que o vencedor seja C, somos conduzidos ao sistema:

$$\begin{cases} -a_B - b_B + a_I + b_I > 2a_B - b_B - 2a_I + b_I \\ -a_B - b_B + a_I + b_I > -a_B + 2b_B + a_I - 2b_I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_I > a_B \\ b_I > b_B \end{cases}.$$

Estamos agora em condições de afirmar que uma condição necessária e suficiente para que um perfil genérico p tenha o resultado $B \succ A \succ C$ para a contagem de Borda, sendo A o vencedor plural e C o vencedor anti-plural, é que $b_B > a_B > c_B = 0$, $c_I = 0$, $a_I > a_B$, $b_I > b_B$ e $a_I - b_I > b_B - a_B$.

Repare-se que para o mesmo perfil p, dependendo do sistema eleitoral usado, consegue-se fazer com que todos os candidatos consigam ser vencedores; esta estranha combinação de resultados, só é possível devido à existência do subespaço inverso.

Resumindo, um caminho para evitar resultados estranhos e paradoxos eleitorais é remover os subespaços inverso e de Condorcet de um perfil. Mas como a contagem de Borda não é afectada por nenhum destes dois subespaços, uma solução simples e pragmática é adoptar a contagem de Borda como sistema eleitoral. Este facto leva Saari a considerar a contagem de Borda como o melhor sistema eleitoral [26, p. 127].

Analisemos o efeito de cada subespaço nos resultados associados a alguns exemplos historicamente importantes.

Exemplo 3.1 No *Essai*, Condorcet, visando mostrar algumas fragilidades da contagem de Borda, apresenta o perfil $p = (30, 1, 10, 1, 10, 29)$ como exemplo onde a contagem de Borda e o vencedor de Condorcet não são o mesmo [6, pp. *clxxvii-clxxix*]. Os coeficientes da decomposição de p, por (3.8), na base de $\mathbb{R}^6$, descrita em 3.2, são:

$$\frac{1}{6}(68, 76, -28, -20, 19, 81).$$

Podemos agora estudar o perfil apresentado por Condorcet à luz da decomposição apresentada por Saari. Assim, e no que ao subespaço básico diz respeito temos que $a_B = \frac{68}{6}$, $b_B = \frac{76}{6}$; quanto ao subespaço inverso virá $a_I = -\frac{28}{6}$, $b_I = -\frac{20}{6}$; por fim, a componente relativa ao subespaço de Condorcet tem o coeficiente $\gamma = \frac{19}{6}$.

Pela proposição 3.3.1, no subespaço básico os resultados são todos iguais qualquer que seja o vector w_s^3 considerado. Assim, por (3.10), temos que, para o subespaço básico, a contagem é

$$F\left(p_B, w_s^3\right) = \left(\frac{60}{6}, \frac{84}{6}, -\frac{144}{6}\right), \tag{3.32}$$

o que nos permite afirmar que para a contagem de Borda ($s = \frac{1}{2}$), para o sistema eleitoral plural ($s = 0$), e para o sistema eleitoral anti-plural ($s = 1$), vamos obter sempre o mesmo resultado, $B \succ A \succ C$.

A contagem do perfil p associado ao subespaço inverso, dado por (3.18), é:

$$F\left(p_I, w_s^3\right) = (1-2s)\left(-\frac{36}{6}, -\frac{12}{6}, \frac{48}{6}\right). \tag{3.33}$$

Adicionando (3.32) com (3.33) obtemos para o sistema eleitoral plural a contagem $\left(\frac{24}{6}, \frac{72}{6}, -\frac{96}{6}\right)$, mantendo-se ainda o resultado $B \succ A \succ C$, enquanto que para o sistema eleitoral anti-plural obtemos $\left(\frac{96}{6}, \frac{96}{6}, -\frac{192}{6}\right)$, conduzindo ao resultado $A \asymp B \succ C$; é já evidente que, apesar de fraca, há alguma influência do subespaço inverso nos resultados do perfil em causa dependendo do vector w_s^3 considerado.

Por (3.11), (3.12) e (3.13) para a componente p_B os resultados das comparações dois a dois $\{A, B\}$, $\{A, C\}$ e $\{B, C\}$ são respectivamente:

$$\begin{aligned} G_{\{A,B\}}(p_B) &= \left(-\frac{16}{6}, \frac{16}{6}\right); \\ G_{\{A,C\}}(p_B) &= \left(\frac{68}{6}, -\frac{68}{6}\right); \\ G_{\{B,C\}}(p_B) &= \left(\frac{76}{6}, -\frac{76}{6}\right). \end{aligned} \tag{3.34}$$

Manteve-se, como era de esperar, o resultado $B \succ A \succ C$. Adicionando agora a componente de Condorcet, com $\gamma = \frac{19}{6}$, a (3.1) tem-se o resultado:

$$\begin{aligned} G_{\{A,B\}}(p) &= \left(\frac{3}{6}, -\frac{3}{6}\right); \\ G_{\{A,C\}}(p) &= \left(\frac{49}{6}, -\frac{49}{6}\right); \\ G_{\{B,C\}}(p) &= \left(\frac{95}{6}, -\frac{95}{6}\right). \end{aligned} \tag{3.35}$$

Alterou-se o resultado de $B \succ A \succ C$ para $A \succ B \succ C$.

Este resultado mostra a influência que o subespaço de Condorcet exerce sobre o resultado das comparações dois a dois; reside neste subespaço uma das causas de grande parte dos paradoxos associados aos sistemas eleitorais.

Exemplo 3.2 Outro perfil frequentemente citado é o usado por Borda, em [4, p. 661], para mostrar que o sistema eleitoral plural elege por vezes o candidato mais detestado pela maioria dos eleitores. O perfil apresentado por Borda é $p = (1, 7, 0, 6, 7, 0)$, cujos coeficientes na decomposição acima mencionada são:

$$\frac{1}{6}(-10, -5, 14, 7, -5, 21).$$

Assim, $a_B = -\frac{10}{6}$, $b_B = -\frac{5}{6}$, $a_I = \frac{14}{6}$, $b_I = \frac{7}{6}$, e $\gamma = -\frac{5}{6}$. Por (3.10), a contagem associada à componente p_B do perfil p para qualquer w_s^3 é

$$F\left(p_B, w_s^3\right) = \left(-\frac{15}{6},\ 0,\ \frac{15}{6}\right), \tag{3.36}$$

ou seja, obtemos o resultado $C \succ B \succ A$.

Como a contagem de Borda não é afectada nem pelo subespaço inverso nem pelo subespaço de Condorcet, o resultado associado à contagem de Borda para o perfil p é, também, $C \succ B \succ A$.

A contagem do perfil p para o subespaço inverso é, por (3.18):

$$F\left(p_I, w_s^3\right) = (1 - 2s)\left(\frac{21}{6},\ 0,\ -\frac{21}{6}\right). \tag{3.37}$$

Da adição de (3.36) com (3.37), para $s = 0$, obtemos a contagem associada ao sistema eleitoral plural para o perfil p, e que é $F(p, w_0^3) = (1, 0, -1)$, a que corresponde o resultado $A \succ B \succ C$, que revela a grande influência que o subespaço inverso exerce, neste perfil, a favor do candidato A. Também de (3.37) obtemos que o resultado associado ao sistema eleitoral anti-plural se mantém igual ao já obtido para o subespaço básico.

No que respeita aos resultados das comparações dois a dois, $\{A,B\}$, $\{A,C\}$ e $\{B,C\}$, por (3.11), (3.12) e (3.13), vamos obter, para o subespaço básico, respectivamente:

$$\begin{aligned} G_{\{A,B\}}(p_B) &= \left(-\frac{10}{6}, \frac{10}{6}\right); \\ G_{\{A,C\}}(p_B) &= \left(-\frac{20}{6}, \frac{20}{6}\right); \\ G_{\{B,C\}}(p_B) &= \left(-\frac{10}{6}, \frac{10}{6}\right). \end{aligned} \tag{3.38}$$

Ou seja, obtemos o resultado $C \succ B \succ A$. Adicionando a componente de Condorcet, com $\gamma = -\frac{5}{6}$, obtém-se:

$$\begin{aligned} G_{\{A,B\}}(p) &= \left(-\frac{15}{6}, \frac{15}{6}\right); \\ G_{\{A,C\}}(p) &= \left(-\frac{15}{6}, \frac{15}{6}\right); \\ G_{\{B,C\}}(p) &= \left(-\frac{15}{6}, \frac{15}{6}\right). \end{aligned} \tag{3.39}$$

Que não altera o resultado já obtido, prova que o perfil apresentado por Borda não é afectado pela componente de Condorcet.

Resumindo, podemos dizer que o perfil que serviu de base a Borda para mostrar as deficiências do sistema eleitoral plural só é afectado pelo subespaço inverso.

Referências

[1] Arrow, K. J., A difficulty in the concept of social welfare, *Journal of Political Economy*, Vol. **58**, Issue **4**, (1950), 328-346.

[2] Arrow, K. J., *Social Choice and Individual Values*, 2nd edition, Yale University Press, 1963.

[3] Black, D., *The Theory of Committees and Elections*, Cambridge University Press, 1958.

[4] Borda, J. C., Mémoire sur les Elections au Scrutin, *Histoire de L'Academie Royale des Sciences*, Paris: 1784.

[5] COMAP, *For All Practical Purposes – an introduction to contemporary mathematics*, 3rd edition, W. H. Freeman, (1994), 334-339.

[6] Condorcet, J. M., [1785], *Éssai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix*, Chelsea Publishing Company, (1972). Reimpressão *facsimile* do original publicado em Paris pela Imprimerie Royale.

[7] Condorcet, J. M., (1789), *Sur la forme des élections*, Firmin Fréres Libraires, Imprimeurs de L'Institut, Paris: 1849.

[8] Condorcet, J. M., (1793), *Sur les élections*, Firmin Fréres Libraires, Imprimeurs de L'Institut, Paris: 1847.

[9] Dodgson, C. (1876), A method of taking votes on more than two issues, in Black, D., *The Theory of Committees and Elections*, Cambridge University Press, London: 1958.

[10] Geanakoplos, J., Three brief proofs of Arrow's Impossibility Theorem, *Economic Theory*, Vol. **26**, Nº **1** (2005), 211-215.

[11] João Paulo II, Constituição Apostólica - *Universi Dominici Gregis*, Roma, 1996.

[12] Kemeny, Mathematics Without Numbers, *Daedalus*, **88** (1959), 577-591.

[13] Kemeny, J. G., Snell, J. L., *Mathematical Models in the Social Sciences*, Blaisdell Publishing Company, 1962.

[14] Mascart, J., *La vie et les travaux du chevalier Jean-Charles de Borda (1733-1799). Épisodes de la vie scientifique au XVIII^e siècle*, Seconde édition, Presses de l'Université de Paris-Sorbonne, 2000.

[15] McLean, I., Independence of Irreelevant Alternatives before Arrow, *Mathematical Social Sciences*, Vol. **30**, (1995), 107-126.

[16] McLean, I. (Editor) & Hewitt, F. (Editor), *Condorcet: Foundations of Social Choice and Political Theory*, Edward Elgar, Oxford, 1994.

[17] McLean, I., *The Reasonableness of Independence: A Conversation from Condorcet and Borda to Arrow and Saari*, Nuffield College Working Papers in Politics, 2003--W6, 2003, (http://www.nuff.ox.ac.uk/Politics/papers).

[18] Niemi, R. G., Riker, W. H., The Choice of Voting Systems, *Scientific American* **234** (1976), 21-27.

[19] Panero, M. M., & Lapresta, J. L. G., *José Isidoro Morales, Precursor Ilustrado de la Teoría de la Elección Social: Edición facsímil de la Memoria Matemática sobre el Cálculo de la Opinion en las Elecciones (1797) y Apéndice (1805)*, Universidad de Valladolid, Secretariado de Publicaciones e Intercambio Editorial, 2003.

[20] Reny, P., Arrow's Theorem and the Gibbard-Satterthwaite Theorem, *Economics Letters*, **70** (2001), 99-105.

[21] Saari, D. G., *Basic Geometry of Voting*, Springer-Verlag, 1995.

[22] Saari, D. G., Are Individual Rights Possible?, *Mathematics Magazine* Vol. **70**, Nº **2**, (1997), 83-92.

[23] Saari, D. G., Explaining All Three-Alternative Voting Outcomes, *Journal of Economic Theory*, Vol. **87**, Nº **2** (1999), 313-355.

[24] Saari, D. G., Mathematical structure of voting paradoxes I: pairwise vote, *Economic Theory* Vol. **15**, Nº **1** (2000), 1-53.

[25] Saari, D. G., Mathematical structure of voting paradoxes II: positional voting, *Economic Theory*, Vol. **15**, Nº **1** (2000), 55-101.

[26] Saari, D. G., *Chaotic Elections!: A Mathematician Looks at Voting*, American Mathematical Society, 2001.

[27] Saari, D. G., Valognes, F., Geometry, Voting, and Paradoxes, *Mathematics Magazine*, Vol. **71**, Nº **4**, (1998), 243-259.

[28] Taylor, A. D., *Mathematics and Politics: Strategy, Voting, Power and Proof*, Springer-Verlag, 1995.

[29] Young, H. P., Levenglick, A., A Consistent Extension of Condorcet's Election Principle, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, Vol. **35**, (1978), 285-300.

[30] Young, H. P., Condorcet's Theory of Voting, *American Political Science Review*, Vol. **82**, (1988), 1231-1244.

Índice remissivo