

Reg. S 09265
Cota TESE N.º 165

Alexandre Artur Pinho Rodrigues

Exemplos de Ciclos e Redes Heteroclínicos em
Sistemas de Equações Diferenciais com Simetria



Tese submetida à Faculdade de Ciências da Universidade do Porto para
obtenção do grau de Mestre em Matemática - Fundamentos e Aplicações

Faculdade de Ciências do Porto
MATEMÁTICA

Departamento de Matemática Pura

Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

Julho/2006



FC

Biblioteca
Faculdade de Ciências
Universidade do Porto



0000100845

Fernando Jorge Sousa Martins
31-07-2006

À memória de
M. M. Pinho

Agradecimentos

*É uma escada em caracol
e que não tem corrimão.
Vai a caminho do Sol
mas nunca passa do chão.
(...)
Sobe-se numa corrida
Correm-se perigos em vão.
Adivinhaste: é a vida
A escada sem corrimão.*

O pequeno poema que antecede estas palavras, é um extracto da obra *Canto Secular* da autoria de David Mourão Ferreira, e metaforiza a vida como "*uma escada sem corrimão que vai a caminho do Sol*". Porém, a concretização desta tese só foi possível graças a vários "*corrimãos*", que se traduziram no apoio e na ajuda dum conjunto de pessoas, das quais nunca me vou esquecer e a quem quero deixar os meus agradecimentos.

Agradeço à Prof. Dra. Manuela Aguiar todo o seu apoio e empenho durante a realização desta tese. A sua disponibilidade ímpar nos cerca de onze meses que me orientou, nomeadamente em pleno mês de Agosto, o seu empenhamento em encontrar horas compatíveis com a minha vida profissional em Alenquer para nos reunirmos, as palavras de incentivo e os conselhos que me transmitiu, os inúmeros artigos que me disponibilizou, a sua capacidade de explicar com simplicidade conceitos complexos... enfim, uma orientadora no pleno sentido do termo! Foi a pedra basilar que tornou possível a concretização deste projecto, a quem estou francamente grato.

Aos meus pais, quero agradecer a possibilidade de ter a profissão com que sempre sonhei: ser professor. Mais, sê-lo numa área que me fascina: a Matemática. Agradeço-lhes, também, a oportunidade de estar a concluir a tese de mestrado nessa mesma área.

Um agradecimento especial para o Pedro Silva, pelo apoio informático que me deu e por todo o tempo que dispendeu comigo, desde a aquisição do portátil, até à instalação do DSTOOL, passando pela resolução de problemas informáticos. Sei que foi uma peça fundamental na realização desta tese, dado os meus fracos conhecimentos na vertente informática. Neste âmbito, não posso esquecer a minha amiga Liliana Duarte, à qual agradeço a disponibilidade para me ouvir, motivar e aconselhar.

Agradeço, também, à Joana Loureiro pela ajuda imediata que me deu na elaboração de cartas em inglês para o Prof. Ian Melbourne e na tradução do resumo desta tese. A ela e ao Lourenço, agradeço todos os afectos e carinho genuíno que me dão.

À Cláudia Sousa, quero agradecer todos os conselhos que me deu durante a parte curricular e na tese do mestrado. Aos meus colegas de mestrado, em especial ao Zé, agradeço o apoio nos momentos que partilhamos.

A todos os meus verdadeiros amigos, de quem me orgulho, em especial à Vânia, ao Nuno, à Catarina e à Sofia, quero-lhes pedir desculpa pelo pouco tempo que lhes dediquei durante a realização desta tese. A eles, agradeço a sua amizade incondicional e espero poder estar à altura deles sempre que precisem de mim, como eles o fazem comigo.

Aquela pessoa em especial, agradeço tudo o que faz por mim e peço desculpa pela ausência que lhe causei, durante a realização do mestrado. Foi graças a essa pessoa que o melhor ano da minha vida foi passado em Pinhal Novo, no ano lectivo 03/04, ano no qual a minha existência ganhou um novo significado. Com esta pessoa, os sorrisos eram autênticos e a vida era muito mais espontânea... Por tudo o que vivemos, vale a pena!

Fica o obrigado sincero a todas as pessoas referidas, por me ajudarem a subir a *escada da minha vida!*

Resumo

O trabalho desenvolvido nesta tese tem como ponto de partida dois sistemas de equações diferenciais com simetria, um em $\mathbb{R}^3$ e outro em $\mathbb{R}^4$, ambos estudados em (Aguiar, M.A.D., *Vector Fields with heteroclinic networks*, tese de doutoramento, Departamento de Matemática Aplicada, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, 2002). A simetria do sistema em $\mathbb{R}^3$ induz a existência de uma rede heteroclínica assintoticamente estável entre seis pontos de equilíbrio numa superfície esférica invariante e globalmente atratora. Dada a equivariância do sistema em $\mathbb{R}^3$, por um grupo cuja acção é isomorfa a $\mathbb{Z}_2$, e com base no artigo de (Aguiar, M.A.D, Castro, S.B. & Labouriau, I.S., *Simple Vector Fields with Complex Behaviour*, Int. Jour. of Bifurcation and Chaos, Vol. 16, Nr. 2, 2006 (a ser publicado)), o campo de vectores em $\mathbb{R}^3$ é rodado para $\mathbb{R}^4$, obtendo-se um sistema de equações diferenciais com simetria $SO(2)$, cujo fluxo possui uma rede heteroclínica entre uma trajectória periódica e quatro pontos de equilíbrio.

Dado o campo de vectores em $\mathbb{R}^4$ ser equivariante por um grupo cuja acção é isomorfa a $(\mathbb{Z}_2)^2$, generaliza-se a técnica de rotação e obtem-se um sistema definido em $\mathbb{R}^6$ com a simetria do toro de dimensão 3, cujo fluxo possui um ciclo heteroclínico assintoticamente estável entre três trajectórias periódicas, numa superfície esférica de dimensão 5 invariante e globalmente atratora.

Os exemplos apresentados nesta tese reflectem um papel fundamental da simetria em sistemas de equações diferenciais, a qual favorece a existência de ciclos e redes heteroclínicos, bem como a sua estabilidade estrutural para perturbações que preservem uma certa simetria.

Abstract

In this study we consider two systems of differential equations with symmetry, one in $\mathbb{R}^3$ and other in $\mathbb{R}^4$, both studied in (Aguiar, M.A.D., *Vector Fields with heteroclinic networks*, Doctoral Thesis, Applied Mathematics Department, Faculty of Science Oporto University, 2002). The symmetry of the system in $\mathbb{R}^3$ leads to the existence of an asymptotically stable heteroclinic network between six equilibria on an invariant and globally attracting spherical surface. Due to the equivariance of the system in $\mathbb{R}^3$ by a group action isomorphic to $\mathbb{Z}_2$, and based in (Aguiar, M.A.D, Castro, S.B. & Labouriau, I.S., *Simple Vector Fields with Complex Behaviour*, Int. Jour. of Bifurcation and Chaos, Vol. 16, Nr. 2, 2006 (to be published)), the vector field in $\mathbb{R}^3$ is rotated to $\mathbb{R}^4$ to give a system of differential equations with $\text{SO}(2)$ symmetry, whose flow has a heteroclinic network between a periodic trajectory and four equilibria.

As the vector field in $\mathbb{R}^4$ is equivariant by a group action isomorphic to $(\mathbb{Z}_2)^2$, we generalise the rotation technique to get a system in $\mathbb{R}^6$ with the symmetry of the three-dimensional torus, whose flow has an asymptotically stable heteroclinic cycle between three periodic trajectories, on a five dimensional invariant and globally attracting spherical surface.

The examples presented reflect a major role of symmetry in systems of differential equations. Symmetry forces the existence of heteroclinic cycles and networks, as well as its structural stability for perturbations which preserve a certain symmetry.

Conteúdo

Introdução	iii
1 Preliminares	1
1.1 Sistemas de Equações Diferenciais	1
1.1.1 Invariantes pelo Fluxo	2
1.1.2 Pontos de Equilíbrio e sua Estabilidade	3
1.1.3 Expoentes Característicos	6
1.2 Simetrias de Equações Diferenciais	8
1.2.1 Teoria de Grupos	9
1.2.2 Subespaços de Pontos Fixos	14
1.2.3 Funções equivariantes	16
2 Ciclos e Redes Heteroclínicos	17
2.1 Conjuntos ω e α limite	17
2.2 Conjuntos Estável e Instável de um Compacto Invariante	18
2.3 Ciclo e Rede Heteroclínicos	20
2.3.1 Definição	20
2.3.2 Estabilidade Estrutural	23
2.3.3 Estabilidade Assintótica	26
2.4 Ciclos e Redes Heteroclínicos em Sistemas com Simetria	31
3 Rede Heteroclínica em $\mathbb{R}^3$ entre pontos de equilíbrio	37
3.1 Definição do Grupo de Simetrias Γ	37
3.2 Γ -equivariância do Campo de Vectores	39
3.3 Caracterização da Dinâmica	40
3.3.1 Esfera Invariante e Pontos de Equilíbrio	40
3.3.2 Rede Heteroclínica	47

CONTEÚDO

4	Rede Heteroclínica com uma trajectória periódica	51
4.1	Campo de Vectores em $\mathbb{R}^4$	51
4.2	Grupo de Simetrias do Sistema em $\mathbb{R}^4$	52
4.3	Dinâmica do sistema em $\mathbb{R}^4$	54
5	Ciclo Heteroclínico entre três trajectórias periódicas	65
5.1	Campo de Vectores em $\mathbb{R}^6$	67
5.2	Grupo de Simetrias do Sistema em $\mathbb{R}^6$	68
5.3	Dinâmica do sistema em $\mathbb{R}^6$	69
5.4	Simulação numérica em DSTOOL	72
6	Trabalho Futuro	75
A	Especificação do Programa DSTOOL	77

Introdução

Seja $\dot{x} = g(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, um sistema de equações diferenciais ordinárias e autónomas onde $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um campo de vectores C^∞ . Diz-se que um compacto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ é um conjunto invariante pelo fluxo de $\dot{x} = g(x)$ se as curvas solução do sistema com condição inicial em U , estão todas contidas em U . Se o conjunto U , para além de invariante pelo fluxo, tiver variedades estável e instável (não degeneradas no conjunto), então U é uma sela invariante (Field [9]).

Dado um conjunto finito ordenado de selas invariantes pelo fluxo e mutuamente disjuntas $A_1, \dots, A_n$, diz-se que existe um ciclo heteroclínico associado a esse conjunto de selas se a variedade instável de cada sela, A_k , intersectar a variedade estável da sela seguinte, $A_{k+1 \pmod n}$. Quando a intersecção da variedade instável de uma sela A_k com a variedade estável de uma outra sela A_r é não vazia, diz-se que existe uma ligação heteroclínica da sela A_k para a sela A_r . Nesta tese, uma rede heteroclínica é considerada como uma união conexa de ciclos heteroclínicos. Os exemplos apresentados nesta tese exigem a noção de ciclo heteroclínico, ligação heteroclínica e rede heteroclínica.

No âmbito deste trabalho, estudam-se sistemas de equações diferenciais com simetria, isto é, sistemas de equações diferenciais cujo campo de vectores associado comuta com um determinado grupo de Lie Γ . Ao grupo de Lie Γ , chama-se frequentemente grupo de simetrias do sistema e, nas condições referidas, o sistema diz-se Γ -equivariante. Ao longo da exposição, considera-se apenas o caso de Γ ser compacto.

Frequentemente, a existência de ciclos e redes heteroclínicos origina comportamento dinâmico complexo e imprevisível, por vezes, caótico (ver por exemplo, Aguiar [1], Aguiar, Castro & Labouriau [2] e [3] e Dawes & Postlethwaite [6] e suas referências). Muitas vezes, a dinâmica de tais sistemas apenas é possível de ser estudada numericamente. Deste modo, torna-se útil a existência e o estudo

de sistemas mais simples, com dinâmica igualmente complexa, mas que sejam passíveis de manipulação analítica. A construção de exemplos nessas condições é efectuada, por exemplo, em Aguiar [1], Aguiar, Castro & Labouriau [2], Field [9] e nesta tese. A compleição destes modelos faz uso da simetria. Esta facilita o estudo da dinâmica dos sistemas, impondo restrições à geometria das soluções e forçando a existência de subespaços vectoriais de $\mathbb{R}^n$ invariantes pelo fluxo.

Por outro lado, a simetria pode também complicar bastante a dinâmica dos sistemas ao favorecer a existência de ciclos e redes heteroclínicos. Em sistemas em geral, que não sejam equivariantes por um dado grupo de simetrias, não é de esperar que existam ciclos heteroclínicos na sua dinâmica, muito menos ciclos heteroclínicos que sejam estruturalmente estáveis.

O sistema de Guckenheimer-Holmes [15] é um exemplo pioneiro na ilustração do modo como a simetria de um sistema pode favorecer a existência de ciclos heteroclínicos. Em [1], Aguiar estuda uma perturbação de ordem cinco deste sistema, a qual possui uma rede heteroclínica entre pontos de equilíbrio numa superfície esférica invariante e globalmente atractora. Em [1], a rotação do sistema perturbado de Guckenheimer-Holmes em torno de um plano de simetria originou um sistema em $\mathbb{R}^4$, com uma rede heteroclínica envolvendo pontos de equilíbrio e uma trajectória periódica. Nesta tese, prova-se a conjectura da existência de um ciclo heteroclínico entre três trajectórias periódicas num sistema em $\mathbb{R}^6$, obtido pela rotação do sistema em $\mathbb{R}^4$, em torno dos restantes hiperplanos de simetria. A existência de tal ciclo heteroclínico é confirmada por simulação numérica usando a ferramenta DSTOOL (Guckenheimer [14]). Prova-se ainda que o ciclo heteroclínico é assintoticamente estável, generalizando um resultado provado em Aguiar, Castro & Labouriau [2], onde se enuncia que a rotação, em torno de um plano de simetria, de um compacto assintoticamente estável é um conjunto com as mesmas características.

A tese está estruturada do seguinte modo:

- No capítulo 1, apresentam-se definições e resultados básicos sobre equações diferenciais, simetria e teoria de grupos usadas neste trabalho.
- No capítulo 2, definem-se ciclos e redes heteroclínicos, caracterizando-os quanto à sua estabilidade estrutural e enunciam-se as duas versões do critério de Krupa e Melbourne (apresentado em [25]) para se provar a estabilidade assintótica de um ciclo heteroclínico robusto. A primeira versão, utilizada no capítulo 3, é válida quando Γ é um grupo de Lie

finito e o ciclo heteroclínico é constituído apenas por pontos de equilíbrio estacionários. A segunda variante do critério de Krupa e Melbourne é usada quando o ciclo heteroclínico é constituído por equilíbrios relativos (órbitas de grupo invariantes pelo fluxo) e $\dim \Gamma > 0$. Nesta segunda versão, invoca-se um teorema provado por Krupa [24], o qual garante que o campo de vectores Γ -equivariante g , ao longo de uma vizinhança de um equilíbrio relativo, pode ser escrito como soma dois campos de vectores Γ -equivariantes: um normal g_N e outro tangente g_T . Deste resultado decorre que a estabilidade assintótica dos equilíbrios relativos pode ser estudada a partir da estabilidade assintótica dos pontos de equilíbrios de g_N . A aplicação desta segunda versão é ilustrada no capítulo 4 desta tese.

Um aspecto que pode parecer contra-intuitivo é que a quebra de simetria de um sistema (obtida através da adição de termos não Γ -equivariantes), pode também levar ao aparecimento de ciclos heteroclínicos. Este resultado, provado por Lauterbach & Roberts [27], foi o ponto de partida para o exemplo exibido no artigo de Hou & Golubitsky [21] e que, nesta tese, é descrito brevemente na parte final do capítulo 2.

- No capítulo 3, estuda-se um sistema de equações diferenciais definido em $\mathbb{R}^3$, estudado por Aguiar [1] na sua tese de doutoramento. De acordo com o Teorema da Esfera Invariante (Field [9]), prova-se a existência de uma superfície esférica de dimensão 2 invariante pelo fluxo e globalmente atratora. Na restrição do fluxo a esta variedade, existe uma rede heteroclínica assintoticamente estável, entre seis pontos de equilíbrio. A prova da estabilidade assintótica recorre à simetria do sistema e ao critério de Krupa e Melbourne, enunciado em [25] (caso Γ finito), usando apenas os valores próprios não radiais dos pontos de equilíbrio.
- No capítulo 4, obtem-se um sistema de equações diferenciais em $\mathbb{R}^4$ com uma superfície esférica de dimensão 3 invariante pelo fluxo e globalmente atratora, na qual existe uma rede heteroclínica assintoticamente estável envolvendo uma trajectória periódica e quatro pontos de equilíbrio. Esta técnica de construção foi usada por Aguiar em [1] e consiste num "levantamento" do campo de vectores de $\mathbb{R}^3$ para $\mathbb{R}^4$, através de uma rotação em torno de um plano de simetria. Este método é apresentado como uma técnica geral na construção de exemplos, com certas propriedades, em Aguiar, Castro & Labouriau [2]. Apesar de mais rápida e directa recorrendo ao artigo [2], a prova da estabilidade assintótica da rede recorre à simetria

do sistema e à segunda versão do critério de Krupa e Melbourne (caso $\dim \Gamma > 0$).

- Usando a simetria do sistema em $\mathbb{R}^4$ e generalizando a técnica de construção exibida em Aguiar, Castro & Labouriau [2], exhibe-se, no capítulo 5, um sistema de equações diferenciais em $\mathbb{R}^6$ com um ciclo heteroclínico entre três trajectórias periódicas hiperbólicas que é assintoticamente estável. Para se provar que o ciclo é assintoticamente estável usa-se a generalização dos resultados apresentados em Aguiar, Castro & Labouriau [2].

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Sistemas de Equações Diferenciais

Neste trabalho, estudam-se sistemas dinâmicos contínuos que, em geral, são descritos por sistemas de equações diferenciais. De seguida, vão-se introduzir alguns conceitos básicos que serão utilizados ao longo desta tese começando pela definição de sistema de equações diferenciais (ordinárias). O conteúdo desta primeira secção segue de perto Hirsch & Smale [18] e Perko [31].

Definição 1.1 *Um sistema de equações diferenciais ordinárias com k parâmetros é um sistema da forma*

$$\frac{dx}{dt} = g(x, \lambda),$$

onde $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação C^∞ ($n, k \in \mathbb{N}$).

Neste trabalho, restringe-se o estudo a sistemas de equações diferenciais a um parâmetro, isto é, sistemas da forma $\frac{dx}{dt} = g(x, \lambda)$, onde $\lambda \in \mathbb{R}$. No caso de sistemas de equações com mais parâmetros, o estudo é análogo. Além disso, consideram-se equações diferenciais autónomas, nas quais a aplicação g não depende explicitamente da variável t . Frequentemente, $\frac{dx}{dt}$ denotar-se-á por $\dot{x}$.

O campo de vectores na definição de equação diferencial assume o espaço vectorial real $\mathbb{R}^n$ como o espaço das variáveis, também designado por espaço de fase. Dependendo do interesse do estudo, diversos autores consideram o espaço

de fase como sendo um espaço de *Banach* (espaço vectorial normado completo) ou um espaço de *Hilbert* (espaço vectorial com produto interno e cuja norma é completa).

Definição 1.2 Fixado $\lambda \in \mathbb{R}$, uma curva solução da equação diferencial $\dot{x} = g(x, \lambda)$ é uma aplicação $\phi : J \rightarrow \mathbb{R}^n$, onde $J \subset \mathbb{R}$ e tal que

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = g(\phi(t), \lambda).$$

Uma solução $\phi(t)$ pode ser interpretada como uma curva no espaço $\mathbb{R}^n$, cujo vector velocidade, em cada ponto, é dado por $g(\phi(t), \lambda)$. A trajectória de uma solução é a projecção, em $\mathbb{R}^n$, do seu gráfico. Ao conjunto das trajectórias da equação diferencial chama-se habitualmente de *fluxo*. A representação do fluxo em $\mathbb{R}^n$ denomina-se por *diagrama de fase* do sistema de equações.

Em geral, um sistema de equações diferenciais tem uma infinidade de soluções. Adicionando ao sistema uma condição inicial da forma $\phi(t_0) = p$, com $t_0 \in \mathbb{R}$ e $p \in \mathbb{R}^n$ e se o campo de vectores g satisfizer a condição de Lipschitz, o Teorema da Existência e Unicidade de Solução (ver Perko [31], capítulo 2.2) assegura que

$$\begin{cases} \dot{x} = g(x, \lambda) \\ \phi(t_0) = p \end{cases}$$

tem uma e uma só solução (num intervalo fechado em torno de t_0). Se se considerar uma restrição de g a uma variedade compacta, Chillingworth provou que o sistema acima tem uma e uma só solução definida para todo o $t \in \mathbb{R}$ (Perko [31], capítulo 3.1). Nesta tese, a dinâmica dos sistemas pode ser restrita a compactos. Assim, é usual designar por $\phi(t, p)$ a única curva solução (definida em $\mathbb{R}$) do sistema $\dot{x} = g(x, \lambda)$ que, num dado instante está na posição p ; no decorrer deste trabalho, convencionou-se $t_0 = 0$. Daqui por diante, vai-se supor que as condições do Teorema da Existência e Unicidade de Solução são satisfeitas (basta que a função g seja C^∞) e que as soluções podem ser definidas para todo $t \in \mathbb{R}$.

1.1.1 Invariantes pelo Fluxo

Definição 1.3 (Perko [31], capítulo 2.5, definição 2) Sejam U um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ e $\dot{x} = g(x, \lambda)$ um sistema de equações diferenciais. Diz-se que U é invariante pelo fluxo do sistema $\dot{x} = g(x, \lambda)$ se

$$\forall p \in U, \forall t \in \mathbb{R}, \phi(t, p) \subseteq U.$$

É trivial concluir que $\emptyset$ e $\mathbb{R}^n$ são subconjuntos invariantes pelo fluxo. Uma vez que estes subconjuntos invariantes não têm grande interesse, é usual considerar-se apenas os subconjuntos próprios de $\mathbb{R}^n$. Da definição resulta imediatamente que toda a trajectória é invariante pelo fluxo, sendo que o exemplo mais simples é o de ponto de equilíbrio.

1.1.2 Pontos de Equilíbrio e sua Estabilidade

Numa interpretação cinemática, um ponto de equilíbrio é um ponto do espaço de fase que não se move pelo fluxo, ao longo do tempo t , isto é, que possui velocidade nula.

Definição 1.4 *Relativamente à equação $\dot{x} = g(x, \lambda)$ e fixado $\lambda \in \mathbb{R}$,*

1. *o ponto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ diz-se um ponto de equilíbrio se x_0 é uma solução da equação $g(x, \lambda) = 0$.*
2. *uma solução $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ do sistema diz-se T -periódica, $T \in \mathbb{R}^+$, se e só se $\forall t \in \mathbb{R}$, $\phi(t + T) = \phi(t)$.*
3. *o período de uma solução ϕ , T -periódica é o menor $K \in \mathbb{R}^+$ tal que $\forall t \in \mathbb{R}$, $\phi(t + K) = \phi(t)$.*

Dada uma condição inicial perto de um ponto de equilíbrio, a trajectória da solução definida por essa condição inicial pode-se aproximar, afastar ou manter à mesma distância desse ponto de equilíbrio. Este comportamento está relacionado com o conceito de estabilidade de um ponto de equilíbrio. De acordo com as definições 1, 2 e 3 de Hirsch & Smale ([18], capítulo 9), tem-se:

Definição 1.5 *Seja $x_0 \in \mathbb{R}^n$, um ponto de equilíbrio da equação $\dot{x} = g(x, \lambda)$.*

1. *O ponto x_0 diz-se um ponto de equilíbrio Lyapunov estável se para qualquer vizinhança U de x_0 , existe uma vizinhança W de x_0 contida em U tal que se $\phi(t)$ é uma solução da equação diferencial e $\phi(t_0) \in W$ (para algum $t_0 \in \mathbb{R}$), então $\phi(t)$ está contida em U para todo $t > t_0$.*

2. O ponto x_0 diz-se um ponto de equilíbrio *assimptoticamente estável* se é Lyapunov estável e se existe uma vizinhança W de x_0 , tal que se $\phi(t)$ é uma solução da equação diferencial com $\phi(t_0) \in W$, para algum $t_0 \in \mathbb{R}$, se tem $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(t) = x_0$, ou seja,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R} : t > M \Rightarrow \|\phi(t) - x_0\| < \varepsilon$$

3. O ponto x_0 diz-se um ponto de equilíbrio *instável* se não é Lyapunov estável, isto é, se existe uma vizinhança U de x_0 , tal que para toda a vizinhança W de x_0 contida em U , existe pelo menos uma solução $\phi(t)$ da equação diferencial com $\phi(t_0) \in W$ (para algum $t_0 \in \mathbb{R}$) e

$$\exists t_1 \in \mathbb{R} : (t_1 > t_0 \wedge \phi(t_1) \notin U).$$

Um ponto de equilíbrio *assimptoticamente estável* é um *atractor local*, no sentido que, para qualquer p numa vizinhança desse ponto de equilíbrio, a curva $\phi(t, p)$ aproxima-se, tanto quanto se queira, para esse ponto de equilíbrio. Convém notar que um ponto equilíbrio Lyapunov estável pode não ser um atractor.

Definição 1.6 (*Hirsch & Smale [18], capítulo 9*) Seja $x_0 \in \mathbb{R}^n$, um ponto de equilíbrio da equação $\dot{x} = g(x, \lambda)$.

1. Diz-se que x_0 é um ponto de equilíbrio *hiperbólico* se $Dg(x, \lambda)|_{x_0}$ não tiver valores próprios com parte real nula.
2. Se $n = 2$, diz-se que x_0 é um *centro* se todos os valores próprios de $Dg(x, \lambda)|_{x_0}$ são imaginários puros e conjugados.

Em Perko [31], prova-se que se x_0 é um ponto de equilíbrio Lyapunov estável, então a parte real de todos os valores próprios de $Dg(x, \lambda)|_{x_0}$ são não positivos. Um dos corolários imediatos deste facto é que um ponto de equilíbrio hiperbólico ou é *assimptoticamente estável* ou é *instável*.

Definição 1.7 (*Hirsch & Smale [18], capítulo 9*) Seja $x_0 \in \mathbb{R}^n$, um ponto de equilíbrio hiperbólico da equação $\dot{x} = g(x, \lambda)$.

1. Diz-se que x_0 é um *poço* se todos os valores próprios de $Dg(x, \lambda)|_{x_0}$ têm parte real negativa.

2. Diz-se que x_0 é uma fonte se todos os valores próprios de $Dg(x, \lambda)|_{x_0}$ têm parte real positiva.
3. Diz-se que x_0 é um ponto de sela se existem valores próprios de $Dg(x, \lambda)|_{x_0}$ com parte real positiva e valores próprios com parte real negativa.

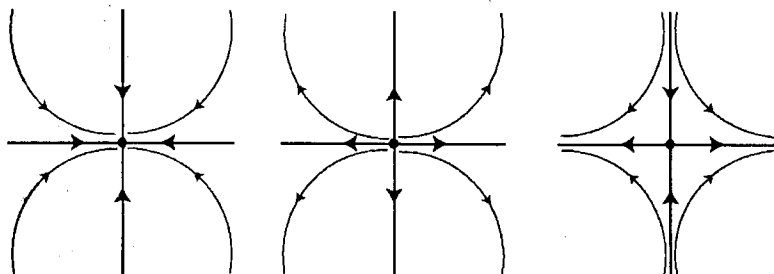


Figura 1.1: Exemplos de diagramas de fase de equações diferenciais que evidenciam três pontos de equilíbrio poço, fonte e sela, respectivamente.

4. Se $n = 2$, diz-se que x_0 é uma fonte em espiral se todos os valores próprios de $Dg(x, \lambda)|_{x_0}$ têm parte real positiva e parte imaginária não nula.
5. Se $n = 2$, diz-se que x_0 é um poço em espiral se todos os valores próprios de $Dg(x, \lambda)|_{x_0}$ têm parte real negativa e parte imaginária não nula.

Por vezes, uma fonte em espiral também pode ser designada por foco instável e um poço em espiral por foco estável. Um poço e um foco estável são exemplos de pontos de equilíbrio *atractores*. Uma fonte e um foco instável são exemplos de pontos de equilíbrio *repulsores*, no sentido que qualquer trajectória arbitrariamente perto do ponto de equilíbrio se afasta dele.

Em seguida, apresenta-se a definição de Perko [31], para sistemas topologicamente equivalentes em torno de $0_{\mathbb{R}^n}$. A definição é generalizável para qualquer ponto de equilíbrio, efectuando uma translação.

Definição 1.8 (Perko [31], capítulo 2.8) *Sejam g e h dois campos de vectores em $\mathbb{R}^n$ de classe C^∞ tais que $0_{\mathbb{R}^n}$ é um ponto de equilíbrio do sistema $\dot{x} = g(x, \lambda)$ e h é linear. Os sistemas $\dot{x} = g(x, \lambda)$ e $\dot{x} = h(x, \lambda)$ são topologicamente equivalentes numa vizinhança de $0_{\mathbb{R}^n}$ se existem abertos U e V de $\mathbb{R}^n$, com $0_{\mathbb{R}^n} \in U$ e $0_{\mathbb{R}^n} \in V$, e um homeomorfismo $H : U \rightarrow V$ que envia as curvas solução*

de $\dot{x} = g(x, \lambda)$ nas curvas solução de $\dot{x} = h(x, \lambda)$, preservando o seu sentido. Se, para além do que foi referido, a aplicação H preserva a parametrização do tempo, então os sistemas $\dot{x} = g(x, \lambda)$ e $\dot{x} = h(x, \lambda)$ são topologicamente conjugados.

O homeomorfismo H da definição anterior, é designado por *conjugação topológica*. Mais geralmente, dois campos de vectores g e h dizem-se *topologicamente equivalentes* se existe um homeomorfismo que envia as curvas solução de $\dot{x} = g(x, \lambda)$ nas curvas solução de $\dot{x} = h(x, \lambda)$, preservando o seu sentido.

Se $x_0 \in \mathbb{R}^n$ é um ponto de equilíbrio do sistema $\dot{x} = g(x, \lambda)$, então é usual chamar a

$$\dot{x} = Dg(x, \lambda)|_{x_0}(x - x_0) \quad (1.1)$$

a *parte linear de g* no ponto x_0 . O Teorema de Hartman-Grobman basicamente enuncia que se x_0 for um ponto de equilíbrio hiperbólico, então existe uma vizinhança V de x_0 tal que o sistema (1.1) possui o mesmo comportamento qualitativo que o sistema inicial $\dot{x} = g(x, \lambda)$.

Teorema 1.9 (Teorema de Hartman-Grobman) *Sejam E um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e $g : E \rightarrow E$ diferenciável. Seja $x_0 \in E$ um ponto de equilíbrio hiperbólico do sistema $\dot{x} = g(x, \lambda)$. Então a parte linear de g conjuga topologicamente o sistema $\dot{x} = g(x, \lambda)$, numa vizinhança de x_0 .*

A demonstração do teorema anterior pode ser encontrada no capítulo 6.3 de Katok & Hasselblatt [23] e em Palis & Melo [30].

1.1.3 Expoentes Característicos

Nesta secção, pretende-se definir o conceito de expoente característico associado a uma trajectória periódica de um sistema, para estudar a estabilidade de uma trajectória, sem recorrer directamente ao método clássico da derivada da função de Poincaré. Basicamente, a função de Poincaré associada a uma trajectória fechada é a seguinte: seja δ uma trajectória periódica de período T ($T \in \mathbb{R}^+$) do fluxo do sistema $\dot{x} = g(x, \lambda)$. Seja Σ uma secção transversal ao fluxo num determinado ponto $p \in \delta$. Dada a continuidade do fluxo do sistema, para cada ponto $q \in \Sigma$, próximo de p , a trajectória $\phi(t, q)$ permanece próxima de δ , com

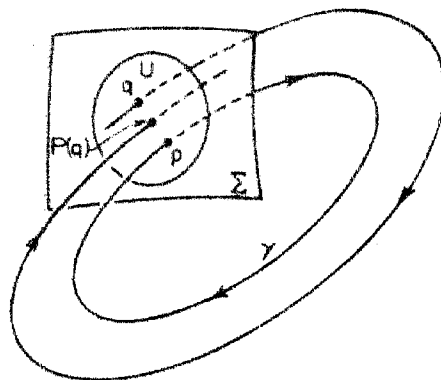


Figura 1.2: Representação da função de Poincaré ou de primeiro retorno (associada a uma trajetória periódica) (Imagem de Sotomayor [32]).

t pertencente a um intervalo compacto pré-fixado. A função de Poincaré, de domínio Σ , é a aplicação que a cada ponto $q \in \Sigma$, associa o seu primeiro retorno a Σ , por $\phi(t, q)$ (ver capítulo VI, secção 6 de Sotomayor [32]).

Na exposição que se segue, segue-se Hartman [17] e Perko [31]. Seja δ uma trajetória periódica de período T ($T \in \mathbb{R}^+$) do fluxo do sistema $\dot{x} = g(x, \lambda)$.

Definição 1.10 ([31], capítulo 3.5) *A linearização de $\dot{x} = g(x, \lambda)$ em torno de δ é o sistema linear*

$$\dot{x} = Dg(\delta(t), \lambda)x.$$

Daqui por diante, suponha-se que $Dg(\delta(t), \lambda)$ é uma matriz cujas entradas são funções contínuas e T -periódicas.

Definição 1.11 ([31], capítulo 3.5) *Diz-se que $\Phi(t)$ é uma matriz fundamental da linearização do sistema $\dot{x} = g(x, \lambda)$ em torno de δ se:*

1. $\forall t \in \mathbb{R}, \det \Phi(t) \neq 0$
2. $\forall t \in \mathbb{R}, \dot{\Phi}(t) = Dg(\delta(t), \lambda)\Phi(t).$

Se B é uma matriz quadrada $n \times n$, então, por definição, tem-se

$$e^{Bt} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{B^k t^k}{k!}.$$

Dada uma matriz fundamental Φ da linearização do sistema $\dot{x} = g(x, \lambda)$ em torno de δ , o *Teorema de Floquet* (Hartman [17] e Perko [31]), garante que, para qualquer $t \in \mathbb{R}$, a matriz $\Phi(t)$ pode ser escrita como $Q(t)e^{Bt}$, onde $\forall t \in \mathbb{R}, \det Q(t) \neq 0$, $Q(t)$ é diferenciável e T -periódica e B é uma matriz constante. De acordo com o que se acabou de observar, tem-se:

Definição 1.12 ([31], capítulo 3.5) *Sejam $\Phi(t)$ uma matriz fundamental da linearização do sistema $\dot{x} = g(x, \lambda)$ em torno de δ e B a matriz constante cuja existência está garantida pelo Teorema de Floquet. Os valores próprios de B são designados por expoentes característicos de δ .*

Apesar dos valores próprios de B estarem determinados a menos de $2\pi i$, a estabilidade de δ não depende da parte imaginária, como se verá, mais à frente, na secção 2.2.

1.2 Simetrias de Equações Diferenciais

Neste trabalho, restringe-se o estudo a sistemas de equações diferenciais com simetria, isto é, a sistemas que comutam com a acção de um determinado grupo de simetrias. Uma consequência importante da simetria é a existência de subespaços vectoriais de $\mathbb{R}^n$ que são invariantes pelo fluxo do sistema. Esta particularidade favorece o aparecimento de ciclos heteroclínicos, conforme será exemplificado ao longo desta tese.

As definições e resultados apresentados ao longo das próximas secções do capítulo 1 são de Golubitsky, Stewart & Schaeffer [13].

Definição 1.13 ([13], capítulo XI) *Seja γ uma matriz $n \times n$ invertível, com entradas reais. A aplicação linear γ diz-se uma simetria do sistema $\dot{x} = g(x, \lambda)$ se*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad g(\gamma x, \lambda) = \gamma g(x, \lambda).$$

Da definição anterior resulta que se γ é uma simetria de $\dot{x} = g(x, \lambda)$ e ϕ é uma solução do sistema, então $\gamma\phi$ é uma solução do sistema. De facto, tem-se

$$\frac{d(\gamma\phi(t))}{dt} = \gamma \left(\frac{d(\phi(t))}{dt} \right) = \gamma g(\phi(t), \lambda) = g(\gamma\phi(t), \lambda). \quad (1.2)$$

A primeira igualdade de (1.2) resulta da derivada da função composta e do facto da derivada de uma aplicação linear ser a própria aplicação. Em particular, se γ é uma simetria de $\dot{x} = g(x, \lambda)$ e se $x_0 \in \mathbb{R}^n$ é um ponto de equilíbrio do sistema, então γx_0 também é um ponto de equilíbrio de $\dot{x} = g(x, \lambda)$. Com efeito, dado γ ser uma simetria do sistema tem-se

$$g(\gamma x_0, \lambda) = \gamma g(x_0, \lambda). \quad (1.3)$$

Do facto de x_0 ser um ponto de equilíbrio, vem que $g(x_0, \lambda) = 0$. Uma vez que $0_{\mathbb{R}^n} \in \text{Ker}(\gamma)$, para qualquer aplicação linear γ , decorre imediatamente de (1.3) que $g(\gamma x_0, \lambda) = 0$, ou seja, γx_0 é um ponto de equilíbrio.

Um outro aspecto a salientar é que se ϕ uma solução T -periódica do sistema $\dot{x} = g(x, \lambda)$, então

$$(\gamma\phi)(t + T) = \gamma(\phi(t + T)) = \gamma\phi(t),$$

ou seja, $\gamma\phi$ é uma solução periódica do sistema com período menor ou igual a T . Suponha-se, por redução ao absurdo que existe $T' \in \mathbb{R}^+$ tal que $T' < T$ e

$$(\gamma\phi)(t + T') = \gamma\phi(t).$$

Uma vez que γ é uma aplicação linear de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$ e invertível, então γ é injectiva. Assim, da igualdade anterior vem que

$$\phi(t + T') = \phi(t),$$

de onde decorre um absurdo. Este derivou do facto de se ter suposto que $\gamma\phi$ é uma solução periódica com período menor do que T . Logo, $\gamma\phi$ é uma solução periódica do sistema com período T .

Finalmente, convém notar que se ϕ for uma solução de um sistema de equações diferenciais $\dot{x} = g(x, \lambda)$ e se γ for uma simetria do mesmo sistema, do Teorema da Existência e Unicidade de Solução, decorre que as curvas solução ϕ e $\gamma\phi$ são iguais (no sentido de possuírem o mesmo *traço*) ou disjuntas.

1.2.1 Teoria de Grupos

Recorde-se que $GL(\mathbb{R}^n)$ é o conjunto dos endomorfismos de $\mathbb{R}^n$ que são invertíveis (isto é, cuja matriz tem determinante não nulo).

Grupos de Simetrias

O conjunto das simetrias de um sistema de equações diferenciais $\dot{x} = g(x, \lambda)$ é o conjunto

$$\{\gamma \in GL(\mathbb{R}^n) : g(\gamma x, \lambda) = \gamma g(x, \lambda), \forall x \in \mathbb{R}^n\}.$$

Este conjunto, conforme demonstrado no próximo lema, tem a estrutura de grupo e será denotado por Γ .

Lema 1.14 *O conjunto Γ , munido da multiplicação usual de matrizes $(\cdot)$, é um grupo, denominado de grupo das simetrias do sistema $\dot{x} = g(x, \lambda)$.*

Prova. Para mostrar que o par $(\Gamma, \cdot)$ é um grupo, basta mostrar que $\Gamma \leq GL(\mathbb{R}^n)$ e, para tal, é suficiente mostrar que $(\Gamma, \cdot)$ é fechado para a multiplicação usual de matrizes, que o elemento neutro de $GL(\mathbb{R}^n)$ pertence a Γ e que, para todo $\gamma \in \Gamma$, $\gamma^{-1} \in \Gamma$ (ver secção 3 de Fraleigh [11]).

Fixem-se $\gamma, \delta \in \Gamma$ (quaisquer) e seja $x \in \mathbb{R}^n$. Uma vez que

$$\det(\gamma\delta) = \det \gamma \times \det \delta$$

e dado que $\det \gamma \neq 0 \neq \det \delta$, vem que $\det(\gamma\delta) \neq 0$. Do facto de γ ser uma simetria do sistema $\dot{x} = g(x, \lambda)$, vem que

$$g((\gamma\delta)x, \lambda) = \gamma g(\delta x, \lambda).$$

Usando, agora, o facto de δ ser também uma simetria de $\dot{x} = g(x, \lambda)$, o segundo membro da igualdade acima é igual a $(\gamma\delta)g(x, \lambda)$. Tem-se, portanto

$$g((\gamma\delta)x, \lambda) = (\gamma\delta)g(x, \lambda).$$

Conclui-se então que $\gamma\delta \in \Gamma$. Uma vez que γ e δ são quaisquer, resulta que $(\Gamma, \cdot)$ é fechado. O facto do elemento neutro de $GL(\mathbb{R}^n)$ pertencer a Γ é imediato. Só falta verificar que se $\gamma \in \Gamma$, então $\gamma^{-1} \in \Gamma$. Que $\det \gamma^{-1} \neq 0$ é imediato uma vez que $\det \gamma^{-1} = (\det \gamma)^{-1}$.

Seja $y = \gamma x$. Então tem-se:

$$\begin{aligned} g(\gamma x) &= \gamma g(x) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow g(y) &= \gamma g(\gamma^{-1} \gamma x) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow g(y) &= \gamma g(\gamma^{-1} y) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \gamma^{-1} g(y) &= g(\gamma^{-1} y), \end{aligned}$$

isto é, γ^{-1} comuta com g . ■

Definição 1.15 ([13], capítulo XI) *Se $x_0 \in \mathbb{R}^n$ é um ponto de equilíbrio do sistema $\dot{x} = g(x, \lambda)$ e se γ é uma simetria do sistema tal que $\gamma x_0 = x_0$, diz-se que γ é uma simetria de x_0 .*

Definição 1.16 ([13], capítulo XIII) *Seja $x_0 \in \mathbb{R}^n$.*

1. *O subgrupo de isotropia de x_0 , denotado por Σ_{x_0} , é o conjunto das simetrias de x_0 , isto é,*

$$\Sigma_{x_0} = \{\gamma \in \Gamma : \gamma x_0 = x_0\}$$

2. *A órbita de grupo de x_0 por Γ é o conjunto*

$$\Gamma x_0 = \{\gamma x_0, \gamma \in \Gamma\}.$$

Σ_{x_0} é, de facto, um subgrupo do grupo de simetrias do sistema $\dot{x} = g(x, \lambda)$. Já foi visto que se x_0 é um ponto de equilíbrio de $\dot{x} = g(x, \lambda)$ e se y é um elemento da órbita de grupo de x_0 , então y é um ponto de equilíbrio do sistema. Assim, se γ é uma simetria de x_0 , tem-se que γx_0 ou é o mesmo ponto de equilíbrio ou é um ponto de equilíbrio distinto. Neste sentido, assumindo a relação de equivalência

$$x \sim y \Leftrightarrow x \in \Gamma y,$$

pontos de equilíbrio que pertencem à mesma órbita de grupo são iguais.

Assim, ao enumerar os pontos de equilíbrio do sistema $\dot{x} = g(x, \lambda)$, é razoável considerar apenas os que não estão relacionados por qualquer simetria do sistema.

Grupos de Lie Compactos

Nesta secção, define-se um conceito essencial no desenrolar da teoria: o de *grupo de Lie (linear)*. A definição de grupo de Lie pode ser bastante mais complexa do que a que aqui é apresentada (ver, por exemplo, Fulton & Harris [12]). Porém, para o estudo em causa não é necessário desenvolver muito mais acerca destes conceitos.

Definição 1.17 ([13], capítulo XII) *Um grupo de Lie linear é um subgrupo fechado de $GL(\mathbb{R}^n)$.*

Diz-se que dois grupos são *isomorfos* se existir uma bijecção entre eles e se esta preserva o produto. Pode-se ver em Golubitsky [13], qualquer grupo de Lie compacto é topologicamente isomorfo a um grupo de Lie linear, razão pela qual se pode reduzir o estudo que se segue aos grupos de Lie lineares e compactos (Golubitsky [13]). Deste modo, daqui para diante, sempre que se fizer referência a um grupo de Lie, subentende-se que é linear e compacto.

Em seguida, apresentam-se alguns exemplos clássicos de grupos de Lie que vão ser usados no decorrer da exposição. Antes de prosseguir, convém ressaltar o seguinte: em geral, vai-se denominar o grupo de Lie com o nome do grupo abstracto, ao qual é isomorfo. Teoricamente, poderá causar alguma confusão mas, na prática é bastante útil e intuitivo. No que se segue, designa-se por M^t a matriz *transposta* de M .

Exemplos: Seja $n \in \mathbb{N}$.

1) Grupo de Lie $\mathbb{Z}_2$

O conjunto $\{\mathbb{I}_n, -\mathbb{I}_n\}$, munido da multiplicação usual de matrizes, é um subgrupo fechado de $GL(\mathbb{R}^n)$. Logo, $\{\mathbb{I}_n, -\mathbb{I}_n\}$ é um grupo de Lie e será frequentemente chamado de $\mathbb{Z}_2 = \{-1, 1\}$, uma vez que são *isomorfos*, como grupos abstractos.

2) Grupo de Lie Ortogonal $\mathbb{O}(n)$

$$\mathbb{O}(n) = \{M \in GL(\mathbb{R}^n) : M.M^t = \mathbb{I}_n\}$$

Se A e B são matrizes ortogonais, então

$$(AB).(AB)^t = (AB).(B^t.A^t) = A.(B.B^t).A^t = A.\mathbb{I}_n.A^t = A.A^t = \mathbb{I}_n.$$

Do facto do produto de matrizes ortogonais ser uma matriz ortogonal, uma vez que $\mathbb{I}_n \in \mathbb{O}(n)$ e dado que se $A \in \mathbb{O}(n)$, então $A^{-1} \in \mathbb{O}(n)$, decorre que $\mathbb{O}(n)$ é um grupo de Lie.

3) Grupo de Lie Ortogonal Especial (ou Grupo de Rotação n -dimensional) $\mathbb{SO}(n)$

$$\mathbb{SO}(n) = \{M \in GL(\mathbb{R}^n) : M.M^t = \mathbb{I}_n \wedge \det(M) = 1\}$$

A prova de que $\mathrm{SO}(n)$ é um grupo de Lie é análoga à que foi efectada para $\mathrm{O}(n)$, notando que o produto de matrizes unitárias é uma matriz unitária.

É frequente ver identificado o grupo $\mathrm{O}(2)$ como o produto de um grupo isomorfo a $\mathbb{Z}_2$ gerado por uma matriz isomorfa a $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, designado por *flip*, com o grupo $\mathrm{SO}(2)$.

4) Grupo Diedral 2n-dimensional $\mathbb{D}(n)$

$$\mathbb{D}(n) = \{F : T \rightarrow T : F \text{ é uma isometria de } T\}$$

onde T é um polígono regular com n lados. O grupo $\mathbb{D}(n)$ é gerado por $\mathbb{Z}_n \cong \mathrm{Rot}(O, \frac{2\pi}{n})$ (rotações) e um elemento de ordem 2 que não comuta com $\mathbb{Z}_n$.

5) Grupo de Lie do Toro 2-dimensional $\mathbb{T}^2$

$$\mathbb{T}^2 = (\theta, \phi) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$$

É fácil ver que $\mathbb{T}^2$ é um grupo de Lie uma vez que $\mathbb{T}^2$ pode ser visto como $\mathrm{SO}(2) \times \mathrm{SO}(2)$.

Os grupos de Lie infinitos que se vão estudar têm dimensão finita, razão pela qual se pode estabelecer, para cada vizinhança do grupo de Lie em estudo, um homeomorfismo com um aberto de $\mathbb{R}^{n^2}$ (usa-se, aqui, o facto dos grupos de Lie a estudar serem variedades topológicas). Assim, uma vez que a compacidade é um invariante topológico, um grupo de Lie é compacto se e só se todas as entradas das matrizes que o definem são limitadas. Decorre imediatamente que todos os grupos de Lie acima descritos são compactos.

Representações e Acções

Nesta secção, apresentam-se mais dois conceitos fundamentais na teoria a ser desenvolvida: acção e representação de um grupo de Lie num espaço vectorial de dimensão finita. Embora distintos, por abuso de linguagem, usam-se os conceitos de acção e representação de forma indiferenciada.

Definição 1.18 ([13], capítulo XII) *Seja V um espaço vectorial sobre o corpo dos reais (de dimensão finita) e seja Γ um grupo de Lie.*

1. Diz-se que Γ é uma acção linear em V se existe uma aplicação contínua (a acção)

$$\begin{aligned}\Gamma \times V &\rightarrow V \\ (\gamma, v) &\mapsto \gamma \cdot v\end{aligned}$$

tal que:

- (a) $\forall \gamma \in \Gamma, \quad \rho_\gamma: V \rightarrow V$
 $v \mapsto \gamma \cdot v$ é linear;
- (b) $\forall \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma, \forall v \in V \quad (\gamma_1 \cdot \gamma_2) \cdot v = \gamma_1 \cdot (\gamma_2 \cdot v)$ [associatividade]

2. Uma representação de Γ em V é uma aplicação

$$\begin{aligned}\rho: \Gamma &\rightarrow GL(V) \\ \gamma &\mapsto \rho_\gamma\end{aligned}$$

Enquanto a acção *informa* sobre o modo como um elemento do grupo transforma um elemento do espaço, a representação *informa* como um elemento do grupo transforma todo o espaço. Neste trabalho, o conjunto V da definição anterior é o espaço $\mathbb{R}^n$.

1.2.2 Subespaços de Pontos Fixos

Uma característica importante dos sistemas com simetria é que a simetria força a existência de subespaços lineares invariantes pelo fluxo, os subespaços de pontos fixos. Convém notar que o facto dos subespaços de pontos fixos serem invariantes pelo fluxo do campo de vectores g não implica que estes sejam invariantes pela acção do grupo de simetrias do sistema. No que se segue, Γ é o grupo de simetrias da equação $\dot{x} = g(x, \lambda)$.

Definição 1.19 ([13], capítulo XIII) *Sejam Γ um grupo de Lie compacto e Σ um subgrupo de Γ . O subespaço de pontos fixos de Σ é o conjunto*

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \forall \sigma \in \Sigma, \sigma x = x\}$$

e denota-se por $Fix(\Sigma)$.

Tal como já foi referido, é importante reconhecer que um subespaço de pontos fixos é um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^n$. Tal decorre trivialmente da igualdade

$$Fix(\Sigma) = \bigcap_{\sigma \in \Sigma} \text{Ker}(\sigma - Id).$$

Os espaços de pontos fixos mais simples são $Fix(Id) = \mathbb{R}^n$ e $Fix(\Gamma)$. Nos exemplos considerados neste trabalho, tem-se $Fix(\Gamma) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$, devendo-se salientar que há casos em que tal não acontece. O próximo resultado estabelece a invariância dos subespaços de pontos fixos pelo campo de vectores, da qual decorre a sua invariância pelo fluxo do sistema associado.

Lema 1.20 ([13], capítulo XI) *Seja Γ um grupo de Lie de simetrias da equação $\dot{x} = g(x, \lambda)$. Se Σ é um subgrupo de Γ , então $g(Fix(\Sigma), \lambda) \subseteq Fix(\Sigma)$.*

Prova. Fixe-se $x \in Fix(\Sigma)$. Uma vez que Γ é um grupo de simetrias da equação, tem-se

$$\forall \sigma \in \Gamma, \sigma g(x, \lambda) = g(\sigma x, \lambda).$$

Uma vez que $x \in Fix(\Sigma)$, tem-se

$$\forall \sigma \in \Sigma, g(\sigma x, \lambda) = g(x, \lambda).$$

Das duas igualdades, resulta que

$$\forall \sigma \in \Sigma, \sigma g(x, \lambda) = g(x, \lambda),$$

isto é, $g(x, \lambda) \in Fix(\Sigma)$. Como $x \in Fix(\Sigma)$ é qualquer, decorre o pretendido. ■

Do lema anterior, é possível restringir o estudo da dinâmica do sistema aos subespaços de pontos fixos, o que facilita o estudo do sistema.

Do mesmo modo que se define órbita de grupo de um ponto em $\mathbb{R}^n$, define-se órbita de grupo de um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ e prova-se que um elemento na órbita de grupo de um subespaço de pontos fixos é um subespaço de pontos fixos. Além disso, as dinâmicas em subespaços de pontos fixos que pertencem à mesma órbita de grupo são topologicamente conjugadas. Trata-se de mais uma ferramenta que facilita o estudo da dinâmica de um sistema.

1.2.3 Funções equivariantes

Nesta secção, V representa um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$).

Definição 1.21 ([13], capítulo XII) *Sejam $g : V \rightarrow V$ um campo de vectores e Γ um grupo de Lie com acção linear em V . Diz-se que g é Γ -equivariante se cada $\gamma \in \Gamma$ comuta com g , isto é,*

$$\forall \gamma \in \Gamma, \forall x \in V, g(\gamma x) = \gamma g(x).$$

Sempre que se disser que o sistema $\dot{x} = g(x, \lambda)$ é Γ -equivariante, pretende-se afirmar que o campo de vectores associado (g) é Γ -equivariante.

Observe-se que, dizer que o grupo de simetrias de um sistema $\dot{x} = g(x, \lambda)$ é Γ -equivariante implica que o campo de vectores g é Γ -equivariante. No entanto, se o campo de vectores g é Γ -equivariante, então Γ é um subgrupo do grupo de simetrias do sistema $\dot{x} = g(x, \lambda)$.

O resultado que se segue permite reduzir a prova da equivariância de um sistema, pelo grupo de Lie Γ , à prova da sua equivariância pelos geradores do grupo.

Lema 1.22 *Sejam Γ um grupo de Lie e $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$. Se $g : V \rightarrow V$ é uma função equivariante por γ_1 e γ_2 , então $g : V \rightarrow V$ é equivariante por $\gamma_1 \gamma_2$.*

Prova. Seja $x \in V$. Uma vez que g é equivariante por γ_1 , tem-se

$$g(\gamma_1 \gamma_2 x) = \gamma_1 g(\gamma_2 x).$$

Usando a equivariância por γ_2 , o segundo membro da igualdade acima fica

$$\gamma_1 g(\gamma_2 x) = \gamma_1 \gamma_2 g(x).$$

Conjugando as duas igualdades, vem que $g(\gamma_1 \gamma_2 x) = \gamma_1 \gamma_2 g(x)$. Como $x \in V$ é qualquer, decorre o pretendido. ■

Do lema anterior, resulta imediatamente por indução sobre m , que:

Proposição 1.23 *Seja Γ um grupo de Lie gerado por $\{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$, para algum $m \in \mathbb{N}$. Se, para todo $k \in \{1, \dots, m\}$ se tem que $g : V \rightarrow V$ é uma função equivariante por γ_k , então $g : V \rightarrow V$ é equivariante por Γ .*

Capítulo 2

Ciclos e Redes Heteroclínicos

Neste capítulo, caracterizam-se formalmente ciclos e redes heteroclínicos, bem como a sua estabilidade estrutural e assintótica. A letra d representa a distância euclidiana em $\mathbb{R}^n$ (métrica usual).

2.1 Conjuntos ω e α limite

De acordo com Hirsch & Smale ([18], capítulo 11), tem-se:

Definição 2.1 *Sejam W um subconjunto de $\mathbb{R}^n$, $y, z \in W$ e $\dot{x} = g(x, \lambda)$ um sistema de equações diferenciais.*

1. *Diz-se que o ponto y é um ω -limite de z se existir uma sucessão $t_n \rightarrow +\infty$ tal que*

$$\lim_{n \in \mathbb{N}} \phi(t_n, z) = y.$$

O conjunto ω -limite de z é o conjunto de todos os pontos ω -limite de z e denota-se por $\omega(\{z\})$.

2. *Diz-se que o ponto y é um α -limite de z se existir uma sucessão $t_n \rightarrow -\infty$ tal que*

$$\lim_{n \in \mathbb{N}} \phi(t_n, z) = y.$$

O conjunto α -limite de z é o conjunto de todos os pontos α -limite de z e denota-se por $\alpha(\{z\})$.

Generalizando a definição 2.1, o conjunto ω -limite de um conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ é o conjunto dos ω -limite de todos os elementos de S e é denotado por $\omega(S)$. Analogamente, o conjunto α -limite de S é o conjunto dos α -limite de todos os elementos de S e é denotado por $\alpha(S)$. Quando S é uma trajectória fechada (definida para todo $t \in \mathbb{R}$), Hirsch & Smale [18] provam que $\omega(S)$ e $\alpha(S)$ são fechados e invariantes pelo fluxo do sistema. Desta observação, decorre que se uma curva solução $\phi(t, x)$ do sistema $\dot{x} = g(x, \lambda)$ tem um único ponto ω -limite (ou α -limite), então esse ponto é um ponto de equilíbrio.

Depois do que foi exposto, é fácil ver que o conjunto α -limite e ω -limite de um ponto de equilíbrio de um sistema de equações diferenciais se reduz ao próprio ponto e que os conjuntos ω -limite e α -limite de pontos que estão na mesma trajectória são iguais. Mais, se γ é uma solução T -periódica, então γ é o conjunto α -limite e ω -limite de qualquer um dos seus pontos (note-se que γ é uma curva fechada).

2.2 Conjuntos Estável e Instável de um Compacto Invariante

Definição 2.2 (*Field [9], definição 6.3*) *Seja $S \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto compacto invariante pelo fluxo de um sistema de equações diferenciais $\dot{x} = g(x, \lambda)$.*

1. *O conjunto estável de S é dado por*

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n : \lim_{t \rightarrow +\infty} d(\phi(t, x), S) = 0 \right\}$$

e denota-se por $W^s(S)$.

2. *O conjunto instável de S é dado por*

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n : \lim_{t \rightarrow -\infty} d(\phi(t, x), S) = 0 \right\}$$

e denota-se por $W^u(S)$.

Se, em todos os pontos x do compacto S , a linearização do campo de vectores g não tiver valores próprios com parte real zero, então está garantida

a existência de $W^s(S)$ e $W^u(S)$, como variedades topológicas de $\mathbb{R}^n$. Alguns autores chamam a $W^s(S)$ a *bacia de atracção* de S .

Segue da definição que $W^s(S)$ e $W^u(S)$ são invariantes pelo fluxo e que $S \subset W^s(S)$, $S \subset W^u(S)$. Relacionando os conceitos de ω -limite com variedade estável de um compacto, tem-se que $\omega(\{x\}) \subset S$ se e só se $x \in W^s(S)$, sendo válida uma relação análoga para $\alpha(\{x\})$ e $W^u(S)$ (Ashwin & Field [4]).

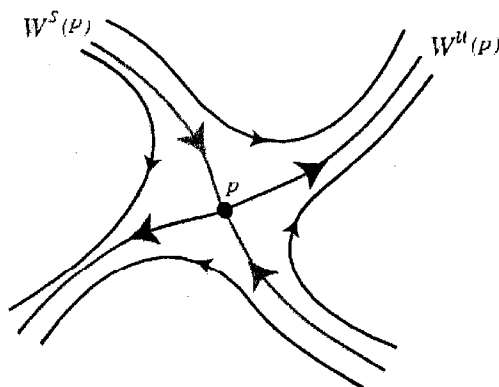


Figura 2.1: Variedades Instável e Estável de um ponto de sela em $\mathbb{R}^2$.

No caso particular de S ser um ponto de equilíbrio do sistema, em Perko [31] demonstra-se que as dimensões das variedades $W^s(S)$ e $W^u(S)$ são as mesmas que as dos subespaços próprios $\mathbb{E}^s$ e $\mathbb{E}^u$ da parte linear de g em S . Por abuso de linguagem, se $S = \{p\}$, onde $p \in \mathbb{R}^n$, escreve-se $W^u(p)$ e $W^s(p)$ em vez de $W^u(\{p\})$ e $W^s(\{p\})$.

No caso de S ser uma trajectória periódica do fluxo do sistema, com período T , é possível caracterizar as variedades estável e instável de S , através do *Teorema da Variedade Estável para Trajectórias Periódicas*, o qual se enuncia de seguida. A prova será omitida, sendo remetida para Hartman ([17], capítulo IX).

Teorema 2.3 *Seja δ uma trajectória periódica de período T do fluxo do sistema $\dot{x} = g(x, \lambda)$. Se k dos expoentes característicos de $\delta(t)$ tiverem parte real negativa onde $0 \leq k \leq n - 1$ e se $n - k - 1$ dos expoentes característicos tiverem parte real positiva, então $W^s(\delta)$ e $W^u(\delta)$ são variedades diferenciáveis com dimensão $k + 1$ e $n - k$, respectivamente, e que se intersectam transversalmente (isto é, os espaços tangentes às variedades estável e instável em qualquer ponto da órbita são não paralelos).*

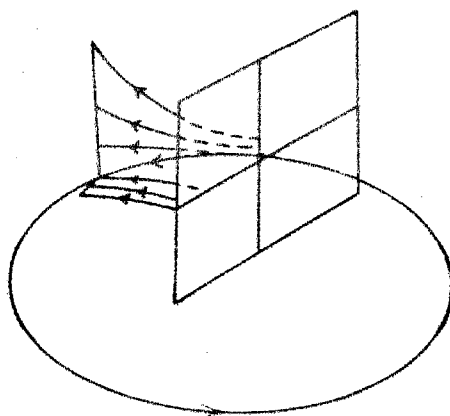


Figura 2.2: Variedades invariantes associadas a uma trajetória periódica.

2.3 Ciclo e Rede Heteroclínicos

A ideia intuitiva de ciclo heteroclínico é a de uma sequência finita e ordenada de compactos invariantes e de uma ligação de cada compacto para o compacto seguinte, incluindo do último para o primeiro (ver figura 2.3). As ligações consistem numa ou mais trajetórias, podendo ser uma infinidade.

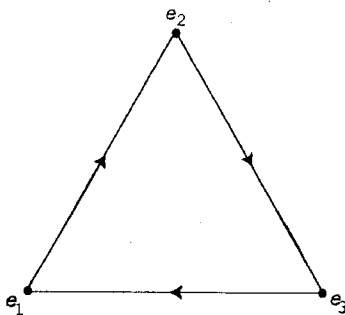


Figura 2.3: Exemplo de um ciclo heteroclínico em $\mathbb{R}^2$.

2.3.1 Definição

Se $A \subseteq \mathbb{R}^n$, representa-se por $\bar{A}$ a aderência ou fecho do conjunto A .

Definição 2.4 (*Field [9]*, definição 6.5) *Sejam S um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$ e $\dot{x} = g(x, \lambda)$ um sistema de equações diferenciais em $\mathbb{R}^n$. Diz-se que S é uma sela invariante se:*

1. S é invariante pelo fluxo de $\dot{x} = g(x, \lambda)$;
2. $S \subseteq \overline{W^s(S) \setminus S}$ e $S \subseteq \overline{W^u(S) \setminus S}$.

Definição 2.5 (*Field [9]*, definição 6.7) *Seja S um conjunto de selas invariantes (ordenadas) mutuamente disjuntas, definido por*

$$S = \{S_j : j \in \{1, \dots, k\}\}.$$

Se

$$\forall j \in \{1, \dots, k\}, W^u(S_j) \cap W^s(S_{(j+1) \bmod k}) \neq \emptyset,$$

diz-se que existe um ciclo heteroclínico associado a S . Ao conjunto

$$\Sigma = \bigcup_{j=1}^k (S_j \cup [W^u(S_j) \cap W^s(S_{(j+1) \bmod k})])$$

chama-se ciclo heteroclínico (maximal) associado a S .

Na sequência desta definição anterior, segue a definição de ligação heteroclínica.

Definição 2.6 (*Aguiar, Castro & Labouriau [2]*) *Sejam S_j e S_{j+1} duas selas invariantes. Uma ligação heteroclínica (de dimensão p , $p \in \mathbb{N}$), da sela S_j para a sela S_{j+1} , é uma variedade conexa e invariante pelo fluxo (de dimensão p) contida em $W^u(S_j) \cap W^s(S_{(j+1) \bmod k})$.*

Na definição anterior, se $p = 1$, então a ligação heteroclínica é uma trajectória (heteroclínica), a qual será denotada, unicamente por $S_j \rightarrow S_{j+1}$. Se $p > 1$, a ligação heteroclínica é uma união de trajectórias. Se $k = 1$, o conjunto Σ , conforme definido em 2.5, é designado por ciclo homoclínico.

Da definição de ciclo heteroclínico resulta trivialmente que um ciclo heteroclínico é invariante pelo fluxo, dado ser a união de conjuntos invariantes pelo fluxo.

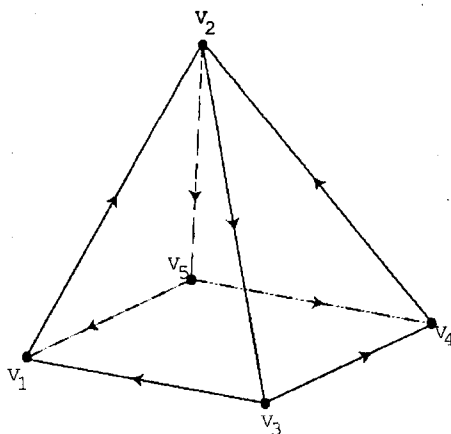


Figura 2.4: Exemplo de uma rede heteroclínica em $\mathbb{R}^3$.

Outro conceito essencial neste trabalho é o de rede heteroclínica. Intuitivamente, uma rede heteroclínica é uma colecção de ciclos heteroclínicos (ver figura 2.4). Em Field [9], as redes heteroclínicas são designadas por *complexos heteroclínicos*.

Definição 2.7 (*Field [9]*, definição 6.22) *Seja $\mathcal{A}$ um conjunto finito (não necessariamente ordenado) de selas invariantes do sistema $\dot{x} = g(x, \lambda)$:*

$$\mathcal{A} = \{A_r : r \in \{1, \dots, k\}\}.$$

Diz-se que um subconjunto Σ de $\mathbb{R}^n$ invariante pelo fluxo é uma rede heteroclínica se existe um conjunto finito de subconjuntos A_j de $\mathcal{A}$ não vazios (e ordenados) tais que:

1. *Cada A_j define um ciclo heteroclínico Σ_j ;*

$$2. \Sigma = \bigcup_{j=1}^p \Sigma_j;$$

3. *Se, para alguns m e n ($1 \leq m, n \leq k$), $W^u(A_m) \cap W^s(A_n) \neq \emptyset$, então existe $j \in \{1, \dots, p\}$ tal que $W^u(A_m) \cap W^s(A_n) \subset \Sigma_j$;*

$$4. \bigcup_{j=1}^p A_j = \mathcal{A}.$$

Note-se que se Σ é uma *rede heteroclínica* associada ao conjunto de selas invariantes

$$\mathcal{A} = \{A_r : r \in \{1, \dots, k\}\},$$

então

$$\sum = \bigcup_{r,s \in \{1, \dots, k\}} [W^u(A_r) \cap W^s(A_s)].$$

Nesta tese, as selas a considerar serão disjuntas entre si. Se a rede heteroclínica associada a $\mathcal{A} = \{A_r : r \in \{1, \dots, k\}\}$ for conexa, então dadas duas selas invariantes A_r e A_s , existe uma sequência finita de trajectórias do fluxo do sistema $\dot{x} = g(x, \lambda)$ que *liga* a sela A_r à sela A_s .

Os ciclos e as redes heteroclínicas costumam-se representar esquematicamente sob a forma de *grafos direccionados*. As selas invariantes representam os vértices. Se A_r e A_s são dois vértices do grafo tais que $W^u(A_r) \cap W^s(A_s) \neq \emptyset$, isto é, se existe uma ligação heteroclínica de A_r para A_s , então existe uma aresta a ligar o vértice A_r ao vértice A_s do grafo.

2.3.2 Estabilidade Estrutural

Nesta secção, apresenta-se o conceito de estabilidade estrutural de um campo de vectores, introduzido em 1937 pelos matemáticos Andronov e Pontryagin (Perko [31]). Um campo de vectores f diz-se estruturalmente estável se, para qualquer campo de vectores g "suficientemente perto" de f , se tem f e g topologicamente equivalentes. Impõe-se então a definição do conceito de "suficientemente perto", que exige a definição de uma métrica no conjunto das aplicações diferenciáveis definidas em $\mathbb{V} \subseteq \mathbb{R}^n$. No lema que se segue $|\cdot|$ representa a norma usual de $\mathbb{R}^n$ e $\|\cdot\|$ representa a norma do máximo definida nos endomorfismos de $\mathbb{R}^n$.

Lema 2.8 (*Perko [31], capítulo 4.1*) *Sejam $\mathbb{V}$ um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$ e $C^1(\mathbb{V})$ o conjunto dos campos de vectores definidos de $\mathbb{V}$ em $\mathbb{R}^n$ de classe C^1 . A aplicação*

$$\begin{aligned} \tau : C^1(\mathbb{V}) \times C^1(\mathbb{V}) &\rightarrow \mathbb{R}_0^+ \\ (f, g) &\mapsto \sup_{x \in \mathbb{V}} |f(x) - g(x)| + \sup_{x \in \mathbb{V}} \|Df(x) - Dg(x)\| \end{aligned}$$

define uma métrica em $C^1(\mathbb{V})$, a qual se designa por topologia C^1 ou métrica da convergência uniforme.

A demonstração deste lema consiste em verificar as propriedades da métrica. De acordo com este lema, dado $\varepsilon > 0$, um campo de vectores f está $\varepsilon - C^1$ perto

do campo de vectores g se $\tau(f, g) < \varepsilon$; nestas condições, o campo g diz-se uma *perturbação de norma ε de f* . Assim, tem-se:

Definição 2.9 (*Perko [31], capítulo 4.1*) *Seja $f \in C^1(V)$. Diz-se que o campo de vectores f é estruturalmente estável se qualquer perturbação de f com norma suficientemente pequena é topologicamente equivalente a f .*

Em geral, os campos de vectores cujo fluxo contém ligações heteroclínicas de dimensão 1 e que resultam da intersecção de variedades invariantes de dimensão 1, não são estruturalmente estáveis pois, dado essa intersecção ser não transversal, pequenas perturbações do campo de vectores fazem com que a intersecção, e consequentemente a ligação, deixem de existir. O mesmo já não acontece se a ligação estiver contida num espaço invariante pelo fluxo e a perturbação mantiver a invariância desse subespaço. Isso acontece, por exemplo, em sistemas equivariantes por um dado grupo de simetrias, quando as ligações estão contidas em subespaços de pontos fixos. Para ilustrar o que acaba de ser referido, explicita-se, em seguida, um exemplo apresentado em Field [9].

Considere-se a aplicação σ definida de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ por

$$(x, y) \mapsto (x, -y)$$

e seja Γ o grupo de Lie gerado pela aplicação σ . A acção σ pode ser interpretada como uma reflexão em torno do eixo dos xx , vendo-se facilmente que a acção de $\Gamma = \langle \sigma \rangle$ no espaço $\mathbb{R}^2$ é isomorfa a $\mathbb{Z}_2$. Suponha-se, agora, que g é um campo de vectores $\langle \sigma \rangle$ -equivariante com dois pontos de equilíbrio tipo sela e_1 e e_2 e que $W^u(e_1)$ e $W^s(e_2)$ são abertos do eixo dos xx (veja-se figura 2.5).

Se $\gamma = W^u(e_1) \cap W^s(e_2)$, tem-se que ϕ é uma curva-solução que "liga" e_1 a e_2 , ou seja, é uma ligação de e_1 para e_2 . Esta trajectória está contida em $\text{Fix}(\Gamma) = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$. Se se perturbar o sistema, com um termo que não seja $\langle \sigma \rangle$ -equivariante, o mais natural é ter-se $W^u(e_1) \cap W^s(e_2) = \emptyset$ e portanto, constata-se a quebra da trajectória (ver figura 2.6). No entanto, se o termo da perturbação for $\langle \sigma \rangle$ -equivariante, a ligação heteroclínica persiste.

Numa situação como a referida neste exemplo, se o campo de vectores não possuir simetria, e portanto se as ligações não estiverem contidas em subespaços de pontos fixos, qualquer perturbação irá, em geral, quebrar essa ligação.

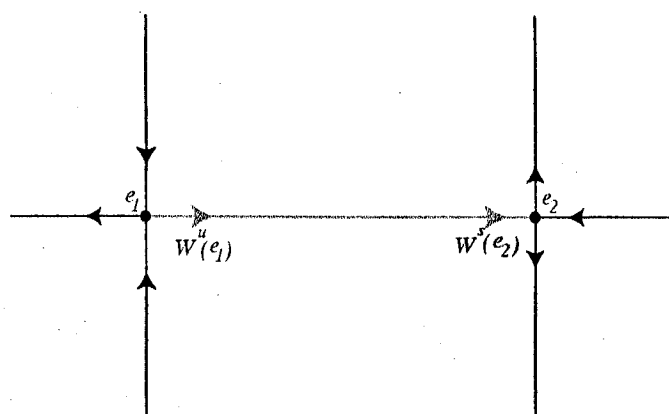


Figura 2.5: Diagrama de fase do sistema $\mathbb{Z}_2(\langle\sigma\rangle)$ -equivariante (não perturbado)

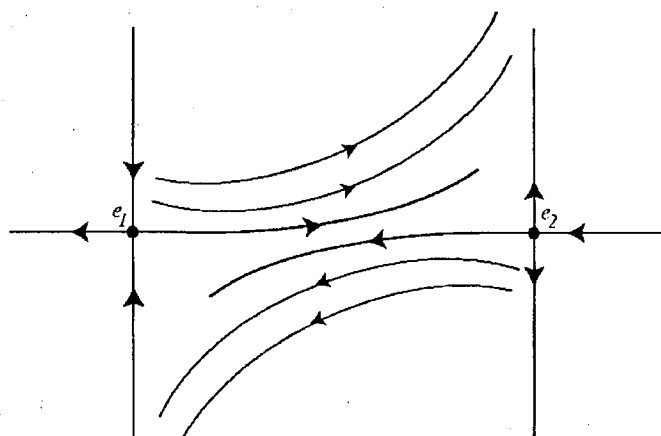


Figura 2.6: Possível diagrama de fase do sistema depois de adicionado um termo que não é $\mathbb{Z}_2(\langle\sigma\rangle)$ -equivariante.

Reside aqui umas das vantagens de se ter um sistema com simetria: em geral, se uma ligação heteroclínica de um sistema Γ -equivariante está contida num subespaço de simetria S , então ela é estruturalmente estável, para perturbações Δ -equivariantes, onde $\Delta \leq \Gamma$ e $Fix(\Delta) \subseteq S$. É esta a razão pela qual as simetrias de um sistema contribuem naturalmente para a existência de ciclos heteroclínicos estruturalmente estáveis.

Nesta tese, as ligações dos ciclos e as redes heteroclínicas que vão ser estudados estão todos contidos em subespaços de pontos fixos, resultando que todos eles (ciclos e redes) são estruturalmente estáveis para perturbações que comutem com as simetrias desses espaços de pontos fixos.

2.3.3 Estabilidade Assintótica

A noção de estabilidade de um ciclo heteroclínico pode ser vista como uma generalização da mesma noção para pontos de equilíbrio. Em seguida, apresenta-se a definição de estabilidade de um ciclo heteroclínico.

Definição 2.10 (*Krupa & Melbourne [25], definição 2.3*) *Seja Σ um ciclo heteroclínico do sistema $\dot{x} = g(x, \lambda)$.*

1. *Diz-se que Σ é Lyapunov estável se para toda a vizinhança aberta U de Σ , existir uma vizinhança $V \subseteq U$ de Σ tal que para todas as trajectórias ϕ tais que $x \in V$ se tem*

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \phi(t, x) \in U.$$

2. *Diz-se que Σ é assintoticamente estável se é estável e se existe uma vizinhança V de Σ tal que*

$$\forall x \in V, \lim_{t \rightarrow +\infty} d(\phi(t, x), \Sigma) = 0.$$

3. *Diz-se que Σ é instável se não é Lyapunov estável.*

Note-se que, apesar da definição de estabilidade de Krupa & Melbourne se restringir a ciclos heteroclínicos (que são os conjuntos invariantes que interessam, nesta tese), é possível extendê-la a qualquer conjunto invariante pelo fluxo.

Critério de Krupa e Melbourne

Exibe-se, de seguida, um resultado que permite verificar que um ciclo heteroclínico é assintoticamente estável, sem recorrer directamente à definição.

Em 1989, Melbourne, Chossat e Golubitsky [29], provaram dois resultados (teoremas 2.10 e 5.1) que fornecem condições suficientes para um determinado ciclo heteroclínico ser assintoticamente estável: um para o caso de Γ ser finito e outro para o caso de $\dim \Gamma > 0$. Em 1995, Krupa e Melbourne [25], melhoraram e estenderam a teoria já desenvolvida em [29], conseguindo obter condições algébricas necessárias e suficientes para um ciclo heteroclínico ser assintoticamente estável. Mais tarde, em 2002, os mesmos autores, em [26], demonstraram o mesmo teorema, combinando os métodos já usados em [25] com a técnica *transition matrix* utilizada por Field & Swift [10] e Hofbauer [22]. O conteúdo desta secção vai seguir de perto os artigos [25] e [26].

Definição 2.11 (*Krupa & Melbourne [26], definição 2.1*) *Sejam Γ um grupo de Lie e Σ um ciclo heteroclínico ligando pontos de equilíbrios tipo sela $A_1, \dots, A_k$ do sistema $\dot{x} = g(x, \lambda)$, onde g é um campo de vectores Γ -equivariante. Se, para cada $j \in \{1, \dots, k\}$, existe um subespaço de pontos fixos $P_j = \text{Fix}(\Sigma_j)$ onde $\Sigma_j \subset \Gamma$ e tal que:*

1. $W^u(A_j) \subseteq P_j$
2. $A_{j+1(\text{mod } k)}$ é um poço em P_j ,

então Σ diz-se um ciclo heteroclínico robusto.

A hipótese (H1) descrita na secção 2.2 de [25] corresponde à definição apresentada de ciclo heteroclínico robusto. Esta é a razão pela qual nos enunciados dos teoremas provenientes de [25], em vez de "ciclo que verifica a hipótese (H1)" aparece "ciclo robusto". No que se segue, vai-se apenas considerar ciclos robustos.

Para cada ponto de equilíbrio A_j do sistema $\dot{x} = g(x, \lambda)$ denote-se por:

i) $-r_j$, o valor máximo das partes reais dos valores próprios de $(dg)_{A_j}$, restrito a $P_{j-1} \cap P_j$, o qual se designa por valor próprio *radial mais fraco* em A_j . Note-se que $r_j > 0$.

ii) $-c_j$, o valor máximo das partes reais dos restantes valores próprios em P_{j-1} , o qual se designa por valor próprio *contractivo mais fraco* em A_j . Note-se que $c_j > 0$.

iii) e_j , o valor máximo das partes reais dos valores próprios de $(dg)_{A_j}$, o qual se designa por valor próprio *expansor mais forte*. É fácil ver que $e_j > 0$.

iv) t_j , o valor máximo das partes reais dos valores próprios de $(dg)_{A_j}$ com vectores próprios ortogonais ao subespaço vectorial $P_{j-1} + P_j$, ao qual se chama valor próprio *transversal mais fraco*. Por convenção, se $P_{j-1} + P_j = \mathbb{R}^n$, então faz-se $t_j = -\infty$. Note-se que se $t_j \neq -\infty$, então $t_j < 0$.

Teorema 2.12 (*Krupa & Melbourne [25], Teorema 2.7*) *Se existe um ciclo heteroclínico robusto Σ ligando pontos de equilíbrio hiperbólicos $\{A_j\}_{j=1}^k$ e se*

$$\prod_{j=1}^k \min\{c_j, e_j - t_j\} > \prod_{j=1}^k e_j, \quad (2.1)$$

então o ciclo Σ é assintoticamente estável.

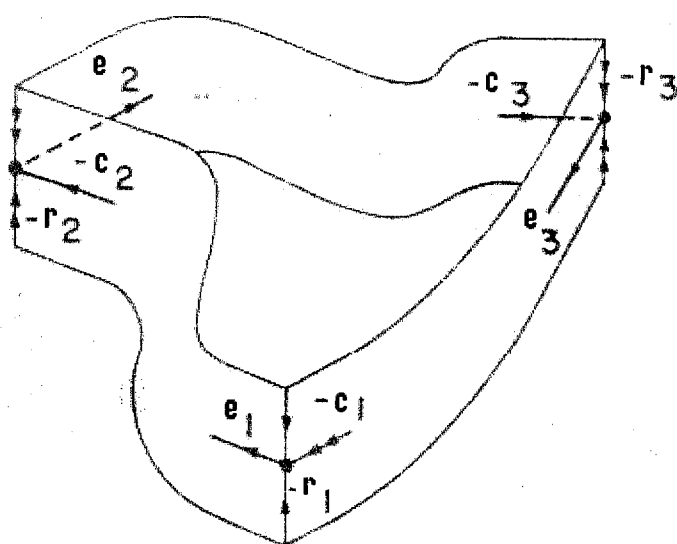


Figura 2.7: Esquematização dos valores próprios num sistema com três equilíbrios (Ian Melbourne [28]).

O teorema anterior, provado por Krupa e Melbourne [25], pretende dar uma condição suficiente para que um ciclo robusto seja assintoticamente estável. É habitualmente designado por Critério de Krupa e Melbourne (caso Γ finito).

No que se segue, a teoria anteriormente exposta, em que Γ é um grupo de Lie finito, é generalizada para o caso em que Γ é um grupo compacto não necessariamente finito (Krupa e Melbourne [25]). Neste âmbito, consideram-se ciclos heteroclínicos em que as selas são equilíbrios relativos.

Definição 2.13 (Melbourne, Chossat & Golubitsky [29], definição 2.8) *Seja Γ um grupo de Lie com acção linear no espaço vectorial $\mathbb{R}^n$. Diz-se que c é um equilíbrio relativo do sistema Γ -equivariante $\dot{x} = g(x, \lambda)$ se:*

1. *c é invariante pelo fluxo do sistema;*
2. *c é uma órbita de grupo pela acção do grupo Γ .*

Convém notar que, num sistema, podem existir órbitas de grupo que não são invariantes pelo fluxo.

Definição 2.14 (*Krupa [24]*, página 1456) *Sejam Γ um grupo de Lie com acção linear no espaço vectorial $\mathbb{R}^n$, $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo de vectores C^∞ e $\Gamma x_0 \in \mathbb{R}^n$ um equilíbrio relativo do sistema $\dot{x} = g(x, \lambda)$. Diz-se que:*

1. *g é um campo de vectores tangente se*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, g(x) \text{ é tangente a } \Gamma x_0$$

2. *g é um campo de vectores normal se*

$$\forall x \in \Gamma x_0, N_x \text{ é invariante pelo fluxo de } g,$$

onde N_x é o espaço de vectores normais a Γx_0 , em x (N_x também é designado por fibrado normal em x).

Observe-se que o campo de vectores normal a um determinado equilíbrio relativo pode não ser normal a outros equilíbrios relativos.

Sejam Γ um grupo de Lie com acção linear no espaço vectorial $\mathbb{R}^n$, g um campo de vectores C^∞ e Γ -equivariante e $x_0 \in \mathbb{R}^n$. No teorema 2.1 de [24], Krupa demonstra que numa vizinhança de Γx_0 , o campo de vectores g pode ser decomposto como uma soma de dois campos de vectores Γ -equivariantes e C^∞ : um campo de vectores tangente g_T e um campo de vectores normal g_N . Este resultado é conhecido como *Teorema da Decomposição*. Em [24], Krupa demonstra ainda que a Γ -equivariância de g_N implica que a dinâmica do sistema $\dot{x} = g(x, \lambda)$ fica completamente determinada pela dinâmica de g_N na restrição ao invariante N_{x_0} .

Observação 2.15 Do Teorema da Decomposição segue que as partes reais dos valores próprios de dg_N ao longo dos pontos da órbita Γx_0 são iguais às partes reais dos valores próprios de dg em Γx_0 que correspondem a vectores próprios não tangentes a Γx_0 . Michael Field [8] abordou este assunto em 1980 e concluiu que as partes reais dos valores próprios da linearização de g_N num ponto de Γx_0 é independente do ponto considerado.

Definição 2.16 (*Melbourne, Chossat & Golubitsky [29]*, definição 2.8) *Sejam Γ um grupo de Lie compacto com $\dim \Gamma > 0$ e c um equilíbrio relativo do sistema Γ -equivariante $\dot{x} = g(x, \lambda)$. O equilíbrio c diz-se hiperbólico se todos os pontos de c forem pontos de equilíbrio hiperbólicos de $\dot{x} = g_N(x, \lambda)$, onde g_N está restrito ao conjunto dos fibrados normais $\{N_x, x \in c\}$.*

Da observação 2.15 resulta imediatamente que um equilíbrio relativo c é hiperbólico se e só se qualquer ponto de c é um ponto de equilíbrio hiperbólico de g_N (Krupa & Melbourne [25]).

Adaptando as definições de direcções radial, contractiva e expansora ao campo de vectores normal, Krupa & Melbourne generalizaram o teorema 2.12 para equilíbrios relativos do seguinte modo:

Teorema 2.17 (*Krupa e Melbourne [25]*¹⁾ *Se Σ é um ciclo heteroclínico robusto ligando pontos de equilíbrio relativos hiperbólicos A_j ($j \in \{1, \dots, k\}$) tais que $P_j = \text{Fix}(\Sigma_j)$, para algum subgrupo de isotropia Σ_j e se*

$$\prod_{j=1}^k \min\{c_j, e_j - t_j\} > \prod_{j=1}^k e_j,$$

então o ciclo Σ é assintoticamente estável.

O resultado anterior será designado por Critério de Krupa & Melbourne (caso $\dim \Gamma > 0$).

Melbourne, Chossat & Golubitsky [29], a respeito do Teorema da Decomposição, referem que os equilíbrios relativos de g correspondem a pontos de equilíbrio de g_N e a estabilidade assintótica dos equilíbrios relativos de g é dada pela estabilidade assintótica dos pontos de equilíbrio de g_N . Uma vez que as partes reais dos valores próprios da linearização de g_N num ponto de Γx_0 é independente do ponto considerado, para estudar a estabilidade de um equilíbrio relativo, basta estudar a parte real dos valores próprios da linearização de g_N num qualquer ponto da órbita.

As redes heteroclínicas que se consideram neste trabalho correspondem a uma órbita de grupo de um dado ciclo heteroclínico. Assim, se as hipóteses do Critério de Krupa e Melbourne forem verdadeiras para cada um dos ciclos que constituem uma rede, a estabilidade assintótica desta está garantida. Noutros termos, se uma rede $\mathcal{R}$ corresponde à órbita do ciclo Σ , pelo grupo de Lie Γ , então a estabilidade assintótica de $\mathcal{R}$ é dada pela estabilidade assintótica de Σ .

¹Na página 10 de [25], Krupa e Melbourne afirmam que o enunciado e a prova do Critério de Estabilidade Assintótica (Γ finito) é válido para o caso de Γ ser um grupo de Lie infinito e compacto.

2.4 Ciclos e Redes Heteroclínicos em Sistemas com Simetria

Conforme já foi referido da secção 2.3.2, a simetria favorece a estabilidade estrutural dos ciclos e redes heteroclínicos existentes no fluxo de campos de vectores que são equivariantes por um dado grupo de simetrias. Falta referir um outro aspecto anterior a esse, o de que a simetria favorece a própria existência desses ciclos e redes heteroclínicos. A ideia básica é que existindo um ponto de equilíbrio então existem, em princípio, outros pontos de equilíbrio, que são os que estão na sua órbita de grupo. De igual modo, existindo uma ligação heteroclínica entre dois pontos de equilíbrio então existem, em princípio, outras ligações heteroclínicas, que são as que estão na sua órbita de grupo. Desde que exista uma sequência de ligações heteroclínicas que começa e termina no mesmo ponto de equilíbrio, tem-se um ciclo heteroclínico. Este facto é ilustrado com detalhe na construção dos exemplos descritos nos capítulos 3, 4 e 5.

Outro aspecto que pode parecer contraditório, e que embora não vá ser usado neste trabalho é interessante mencionar, é que a quebra de simetria de um sistema (ou seja, a diminuição da simetria) pode também levar ao aparecimento de ciclos e redes heteroclínicos.

Mais concretamente, um teorema de Lauterbach & Roberts ([27], capítulo 2) enuncia que quando se adicionam termos não Γ -equivariantes a um sistema Γ -equivariante com um órbita de grupo de equilíbrios M , podem surgir ciclos heteroclínicos na variedade M^ε , onde M^ε é uma variedade invariante pelo fluxo do sistema perturbado, C^∞ difeomorfa e próxima da variedade do sistema inicial M .

O aparecimento do ciclo heteroclínico deve-se a um fenómeno bastante simples, cuja ideia é apresentada em seguida, através da descrição breve de um exemplo estudado por Hou & Golubitsky [21]. Considerem-se as aplicações lineares

$$\begin{aligned} k_1 : \mathbb{R}^4 &\rightarrow \mathbb{R}^4 & k_3 : \mathbb{R}^4 &\rightarrow \mathbb{R}^4 \\ (x, y, v, w) &\mapsto (x, -y, v, w) & (x, y, v, w) &\mapsto (v, w, x, y) \end{aligned} ,$$

e

$$\begin{aligned} (\theta, \phi) : \mathbb{R}^4 &\rightarrow \mathbb{R}^4 \\ (x, y, v, w) &\mapsto (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta, v \cos \phi - w \sin \phi, v \sin \phi + w \cos \phi) \end{aligned} ,$$

onde $(\theta, \phi) \in \mathbb{T}^2 = \{(a, b) : a, b \in [0, 2\pi[)\}$. Defina-se Γ como sendo $\langle k_1, k_3 \rangle \times \mathbb{T}^2$. Γ é um grupo de Lie compacto uma vez que é o produto cartesiano de grupos de Lie compactos.

No que se segue, impõem-se a definição de produto semi-directo.

Definição 2.18 *Sejam G um grupo, e o seu elemento neutro e A e B dois subgrupos de G tais que $G = A * B$. Se*

- B é normal em G
- $A \cap B = \{e\}$,

diz-se que $*$ é um *produto semi-directo* e denota-se por $A \ltimes B$.

Uma vez que a acção de $\langle k_1, k_3 \rangle$ em $\mathbb{R}^4$ pode ser identificada com a acção usual de $\mathbb{D}_4$ no mesmo espaço, é fácil ver que o grupo Γ é isomorfo ao produto semi-directo $\mathbb{D}_4 \ltimes \mathbb{T}^2$ (notação de Lauterbach & Chossat [5]).

Seja $\dot{x} = g(x, \lambda)$, um sistema de equações diferenciais tal que $x \in \mathbb{R}^4$ e $g : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ é um campo de vectores equivariante por Γ . Hou e Golubitsky reduzem o estudo de g ao estudo da forma normal de Birkhoff associada (Golubitsky [13], capítulo XVI) a qual, sob certas condições, possui uma dinâmica (qualitativamente) equivalente à do sistema $\dot{x} = g(x, \lambda)$ (ver Hou & Golubitsky [21], teorema 2.2). Sem entrar em detalhes, assumam-se que essas condições são satisfeitas.

Dada a existência de um ponto de equilíbrio p_0 (diferente da origem) do sistema $\dot{x} = g(x, \lambda)$ contido no espaço

$$Fix(\mathbb{D}_4) = \langle (1, 0, 1, 0) \rangle,$$

então p_0 pode ser escrito da forma $(\mu, 0, \mu, 0)$, com $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Conforme já foi referido, a imagem de um ponto de equilíbrio pela acção de cada elemento do grupo de simetrias do sistema é um ponto de equilíbrio. Assim, a órbita de grupo

$$(\mathbb{D}_4 \ltimes \mathbb{T}^2)p_0 = \{(x, y, v, w) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 = \mu^2 \wedge v^2 + w^2 = \mu^2\}$$

é uma variedade de pontos de equilíbrio difeomorfa à variedade $\mathbb{T}^2$. Está assim garantida a existência de um toro de dimensão 2 de pontos de equilíbrio, na dinâmica do sistema $\dot{x} = g(x, \lambda)$, que se irá designar por $\mathbb{T}_0^2$.

Assuma-se que, para o campo de vectores g considerado, a variedade $\mathbb{T}_0^2$ é normalmente hiperbólica. A definição de variedade normalmente hiperbólica em Hou [20] é um caso particular da definição de Hirsch, Pugh & Shub [19].

Definição 2.19 (*Hou [20]*) *Sejam $\dot{x} = g(x, \lambda)$ um sistema equivariante pelo grupo de Lie compacto Γ e x_0 um ponto de equilíbrio. Diz-se que M é uma variedade normalmente hiperbólica se:*

1. $M = \Gamma x_0$.
2. para qualquer $x \in M$, a aplicação $dg|_x : T_x \mathbb{R}^n \rightarrow T_x \mathbb{R}^n$
 - (a) não tem valores próprios imaginários puros.
 - (b) admite 0 como valor próprio cuja multiplicidade é igual à dimensão da variedade M .

Considere-se a aplicação linear

$$\begin{aligned} k_2 : \mathbb{R}^4 &\rightarrow \mathbb{R}^4 \\ (x, y, v, w) &\mapsto (x, y, v, -w) \end{aligned}$$

e note-se que $k_2 \in \langle k_1, k_3 \rangle$.

O passo seguinte é o de perturbar o sistema $\dot{x} = g(x, \lambda)$, com um termo $\langle k_1, k_2 \rangle$ -equivariante (note-se que a acção de $\langle k_1, k_2 \rangle$ no espaço vectorial $\mathbb{R}^4$ é isomorfa à acção de $\mathbb{D}_2$ no mesmo espaço), mas que não seja $(\mathbb{D}_4 \ltimes \mathbb{T}^2)$ -equivariante. Seja então $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tal que o sistema $\dot{x} = g(x, \lambda) + \varepsilon f(x)$ seja uma perturbação nas condições desejadas. Conforme o resultado provado por Hirsch, Pugh & Shub [19], tem-se:

Teorema 2.20 *Sejam V um compacto de $\mathbb{R}^n$ e $g : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo de vectores C^r . Se $M \subset V$ é uma variedade normalmente hiperbólica e invariante pelo fluxo do sistema $\dot{x} = g(x, \lambda)$. Então, para qualquer perturbação g' , existe uma única variedade M' invariante pelo fluxo do sistema $\dot{x} = g'(x, \lambda)$, que está arbitrariamente perto (relativamente à métrica usual) e é C^r -difeomorfa a M .*

Do que foi visto e tendo em conta o teorema 2.20, pode-se concluir que o fluxo do sistema perturbado, quando ε é suficientemente pequeno, possui uma variedade $\mathbb{T}_\varepsilon^2$, invariante pelo fluxo e que é difeomorfa a $\mathbb{T}_0^2$. Como as variedades $\mathbb{T}_\varepsilon^2$ e $\mathbb{T}_0^2$ estão muito próximas e são difeomorfas, pode-se considerar $\mathbb{T}_0^2$ em vez de $\mathbb{T}_\varepsilon^2$ no estudo da dinâmica perturbada, na restrição a $\mathbb{T}_\varepsilon^2$. Em particular, pode-se considerar que, se $\Upsilon \leq \Gamma$ então $\text{Fix}(\Upsilon) \cap \mathbb{T}_0^2$ é invariante pelo fluxo do sistema perturbado (Hou & Golubitsky [21]).

Usando a parametrização habitual do toro nas coordenadas (θ, ϕ) , tem-se

$$k_1(\theta, \phi) = (-\theta, \phi) \quad \text{e} \quad k_2(\theta, \phi) = (\theta, -\phi).$$

Se $\Upsilon \leq \Gamma$, define-se $\text{Fix}^0(\Upsilon) = \{x \in \Gamma p_0 : vx = x, \forall v \in \Upsilon\}$. Portanto,

$$\text{Fix}^0(\langle k_1 \rangle) = \{(0, \phi), (\pi, \phi)\} \quad \text{e} \quad \text{Fix}^0(\langle k_2 \rangle) = \{(\theta, 0), (\theta, \pi)\}$$

correspondem a quatro circunferências e

$$\text{Fix}^0(\mathbb{D}_2) = \{(0, 0), (\pi, 0), (\pi, \pi), (0, \pi)\}$$

corresponde a quatro pontos de equilíbrio do sistema, os quais Hou & Golubitsky denominam de equilíbrios $\mathbb{D}_2$. Estes pontos de equilíbrio decorrem da intersecção das circunferências $\text{Fix}^0(\langle k_1 \rangle)$ e $\text{Fix}^0(\langle k_2 \rangle)$.

Em Hou & Golubitsky [21], prova-se que os equilíbrios $\mathbb{D}_2$ são os únicos que se encontram em $\text{Fix}^0(\langle k_1 \rangle)$ e em $\text{Fix}^0(\langle k_2 \rangle)$ e que são pontos de sela. Demonstra-se ainda que as suas variedades estável e instável têm dimensão 1 e intersectam-se como na figura 2.8.

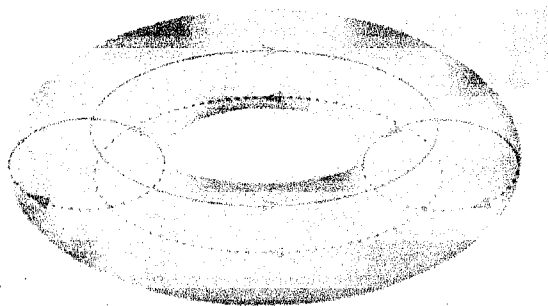


Figura 2.8: Esquema do toro invariante de dimensão 2 e dos espaços $\text{Fix}^0(\langle k_1 \rangle)$ e $\text{Fix}^0(\langle k_2 \rangle)$. As intersecções correspondem aos equilíbrios $\mathbb{D}_2$ (esquema de Chossat & Lauterbach [5]).

Em contraposição com o exemplo de Guckenheimer & Holmes [15], fica assim descrito um exemplo de um sistema em que a "perda" de parte da simetria favorece a existência de um ciclo heteroclínico. Em ambas as situações, a existência do ciclo resulta da intersecção de variedades invariantes pelo fluxo.

Capítulo 3

Rede Heteroclínica em $\mathbb{R}^3$ entre pontos de equilíbrio

Neste capítulo, vai-se estudar um exemplo de um sistema de equações diferenciais definido em $\mathbb{R}^3$ estudado por Aguiar [1], o qual é uma perturbação de ordem 5 de um sistema apresentado em Guckenheimer-Holmes [15]. O objectivo deste capítulo é o de caracterizar a dinâmica do sistema, designadamente o de provar a existência de uma rede heteroclínica assintoticamente estável associada a seis pontos de equilíbrio tipo sela. Nos capítulos 4 e 5, "levanta-se" o sistema estudado neste capítulo para exhibir uma rede heteroclínica em $\mathbb{R}^4$ e um ciclo em $\mathbb{R}^6$, respectivamente, usando a técnica estudada por Aguiar, Castro & Labouriau [2].

3.1 Definição do Grupo de Simetrias Γ

Nesta secção, considera-se o espaço vectorial $\mathbb{R}^3$ e acção neste espaço, do grupo Γ gerado pelas seguintes acções lineares:

$$\begin{array}{ccc} d: \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (\rho, v, w) & \mapsto & (v, w, \rho) \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ccc} q: \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (\rho, v, w) & \mapsto & (-\rho, v, w) \end{array}.$$

O grupo Γ é um grupo de Lie compacto; é um grupo de Lie porque é um subgrupo fechado de $GL(\mathbb{R}^3)$; é compacto porque é finito. Para comprovar que o grupo é finito, basta determinar explicitamente os vinte e quatro elementos

de Γ . Geometricamente, este grupo consiste em permutações cíclicas dos eixos coordenados e reflexões nos planos coordenados.

No resultado que se segue, enumeram-se os subespaços de pontos fixos, isto é, os subespaços de simetria da acção de Γ em $\mathbb{R}^3$.

Lema 3.1 *Os subespaços de simetria não triviais de Γ em $\mathbb{R}^3$ são:*

1. $Fix(\langle qd^2qd \rangle) = \{(\rho, v, w) \in \mathbb{R}^3 : \rho = v = 0\}$
2. $Fix(\langle dqd^2qd^2 \rangle) = \{(\rho, v, w) \in \mathbb{R}^3 : v = w = 0\}$
3. $Fix(\langle qdqd^2 \rangle) = \{(\rho, v, w) \in \mathbb{R}^3 : \rho = w = 0\}$
4. $Fix(\langle d \rangle) = \{(\rho, v, w) \in \mathbb{R}^3 : \rho = v = w\}$
5. $Fix(\langle qdq \rangle) = \{(\rho, v, w) \in \mathbb{R}^3 : v = w \wedge v = -\rho\}$
6. $Fix(\langle qdqd \rangle) = \{(\rho, v, w) \in \mathbb{R}^3 : \rho = v \wedge w = -\rho\}$
7. $Fix(\langle qd^2qd^2 \rangle) = \{(\rho, v, w) \in \mathbb{R}^3 : \rho = w \wedge v = -\rho\}$
8. $Fix(\langle q \rangle) = \{(\rho, v, w) \in \mathbb{R}^3 : \rho = 0\}$
9. $Fix(\langle d^2qd \rangle) = \{(\rho, v, w) \in \mathbb{R}^3 : v = 0\}$
10. $Fix(\langle dqd^2 \rangle) = \{(\rho, v, w) \in \mathbb{R}^3 : w = 0\}$

Prova. Demonstra-se apenas o cálculo de $Fix(\langle qd^2qd \rangle)$ dado que a prova das restantes alíneas é análoga.

Uma vez que $\langle qd^2qd \rangle = \{Id, qd^2qd\}$, pela definição de subespaço de pontos fixos, tem-se

$$Fix(\langle qd^2qd \rangle) = \{(\rho, v, w) \in \mathbb{R}^3 : (qd^2qd)(\rho, v, w) = (\rho, v, w)\}.$$

Ora,

$$\begin{aligned} (qd^2qd)(\rho, v, w) &= (\rho, v, w) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (-\rho, -v, w) = (\rho, v, w) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \rho = 0 \\ v = 0 \\ w \in \mathbb{R} \end{cases} \end{aligned}$$

ficando demonstrado o pretendido. ■

Mais uma vez, sublinha-se a importância de se determinarem os subespaços de pontos fixos de Γ , dado serem subespaços vectoriais de $\mathbb{R}^3$ que são invariantes pelo fluxo de um qualquer sistema Γ -equivariante.

Considere-se o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias e autónomas:

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho(\lambda + \alpha\rho^2 + \beta v^2 + \gamma w^2 + \delta(v^4 - \rho^2 w^2)) \\ \dot{v} = v(\lambda + \alpha v^2 + \beta w^2 + \gamma\rho^2 + \delta(w^4 - \rho^2 v^2)) \\ \dot{w} = w(\lambda + \alpha w^2 + \beta\rho^2 + \gamma v^2 + \delta(\rho^4 - v^2 w^2)) \end{cases}, \quad (3.1)$$

onde $\rho^2 + v^2 + w^2 = r^2$ e α, β, γ e δ são parâmetros reais. No decorrer da exposição desta secção, para não sobrecarregar o texto, F_3 denotará o campo de vectores em $\mathbb{R}^3$ definido por

$$F_3(\rho, v, w) = \begin{pmatrix} \rho(\lambda + \alpha\rho^2 + \beta v^2 + \gamma w^2 + \delta(v^4 - \rho^2 w^2)), \\ v(\lambda + \alpha v^2 + \beta w^2 + \gamma\rho^2 + \delta(w^4 - \rho^2 v^2)), \\ w(\lambda + \alpha w^2 + \beta\rho^2 + \gamma v^2 + \delta(\rho^4 - v^2 w^2)) \end{pmatrix}.$$

3.2 Γ -equivariância do Campo de Vectores

Lema 3.2 *O campo de vectores F_3 é Γ -equivariante.*

Prova. Para mostrar que o campo de vectores F_3 é Γ -equivariante é preciso mostrar que

$$\forall \gamma \in \Gamma, \forall (\rho, v, w) \in \mathbb{R}^3 : F_3(\gamma(\rho, v, w)) = \gamma F_3(\rho, v, w).$$

Pela proposição 1.23, basta mostrar a igualdade acima para os geradores de Γ , isto é, basta mostrar a igualdade acima para as aplicações d e q .

Se $\gamma = d$, tem-se

$$\begin{aligned} F_3(d(\rho, v, w)) &= F_3(v, w, \rho) \\ &= \begin{pmatrix} v(\lambda + \alpha v^2 + \beta w^2 + \gamma\rho^2 + \delta(w^4 - v^2\rho^2)), \\ w(\lambda + \alpha w^2 + \beta\rho^2 + \gamma v^2 + \delta(\rho^4 - v^2 w^2)), \\ \rho(\lambda + \alpha\rho^2 + \beta v^2 + \gamma w^2 + \delta(v^4 - w^2\rho^2)) \end{pmatrix} = \\ &= dF_3(\rho, v, w). \end{aligned}$$

Se $\gamma = q$, tem-se

$$F_3(q(\rho, v, w)) = F_3(-\rho, v, w) \quad (3.2)$$

$$= \begin{pmatrix} -\rho(\lambda + \alpha\rho^2 + \beta v^2 + \gamma w^2 + \delta(v^4 - \rho^2 w^2)), \\ v(\lambda + \alpha v^2 + \beta w^2 + \gamma\rho^2 + \delta(w^4 - \rho^2 v^2)), \\ w(\lambda + \alpha w^2 + \beta\rho^2 + \gamma v^2 + \delta(\rho^4 - v^2 w^2)) \end{pmatrix} = \\ = qF_3(\rho, v, w) \quad (3.3)$$

■

3.3 Caracterização da Dinâmica

3.3.1 Esfera Invariante e Pontos de Equilíbrio

Lema 3.3 *A componente radial do sistema (3.1), em coordenadas esféricas, é dada por*

$$\dot{r} = r(\lambda + \alpha r^2 + (\beta + \gamma - 2\alpha)r^2 \sin^2 \theta [\sin^2 \theta \sin^2 \phi \cos^2 \phi + \cos^2 \theta]).$$

Prova. A passagem de coordenadas esféricas para coordenadas cartesianas é dada por

$$\begin{cases} \rho = r \sin \phi \sin \theta \\ v = r \cos \phi \sin \theta \\ w = r \cos \theta \end{cases} \quad (3.4)$$

onde $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ e $\phi \in [0, 2\pi[$.

Como

$$r^2 = \rho^2 + v^2 + w^2,$$

decorre que (derivando em ordem a t e dividindo ambos os membros por 2):

$$r\dot{r} = \rho\dot{\rho} + v\dot{v} + w\dot{w}.$$

Substituindo $\dot{\rho}$, $\dot{v}$ e $\dot{w}$ de (3.1) na igualdade acima, tem-se:

$$\begin{aligned} r\dot{r} = & \rho^2(\lambda + \alpha\rho^2 + \beta v^2 + \gamma w^2 + \delta(v^4 - \rho^2 w^2)) + \\ & + v^2(\lambda + \alpha v^2 + \beta w^2 + \gamma\rho^2 + \delta(w^4 - \rho^2 v^2)) + \\ & + w^2(\lambda + \alpha w^2 + \beta\rho^2 + \gamma v^2 + \delta(\rho^4 - v^2 w^2)). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Agrupando no segundo membro de (3.5) os termos que têm o mesmo parâmetro e notando que os termos com parâmetro δ se anulam, tem-se:

$$r\dot{r} = (\rho^2 + v^2 + w^2)\lambda + (\rho^4 + v^4 + w^4)\alpha + (\rho^2 v^2 + v^2 w^2 + \rho^2 w^2)\beta + (\rho^2 w^2 + \rho^2 v^2 + v^2 w^2)\gamma \quad (3.6)$$

Tendo em conta que $(\rho^2 + v^2 + w^2)^2 = (\rho^4 + v^4 + w^4) - 2(\rho^2 w^2 + \rho^2 v^2 + v^2 w^2)$, a igualdade (3.6) pode ser reescrita como:

$$r\dot{r} = (\rho^2 + v^2 + w^2)\lambda + (\rho^2 + v^2 + w^2)^2\alpha - (\rho^2 v^2 + v^2 w^2 + \rho^2 w^2)2\alpha + (\rho^2 v^2 + v^2 w^2 + \rho^2 w^2)\beta + (\rho^2 w^2 + \rho^2 v^2 + v^2 w^2)\gamma,$$

isto é,

$$r\dot{r} = (\rho^2 + v^2 + w^2)\lambda + (\rho^2 + v^2 + w^2)^2\alpha + (\rho^2 w^2 + \rho^2 v^2 + v^2 w^2)(\beta + \gamma - 2\alpha). \quad (3.7)$$

Substituindo ρ, v e w pelas coordenadas esféricas definidas em (3.4), a igualdade (3.7) é equivalente a:

$$r\dot{r} = r^2\lambda + r^4\alpha + r^4(\beta + \gamma - 2\alpha)\sin^2(\theta)[\sin^2(\phi)\cos^2(\theta) + \sin^2(\phi)\sin^2(\theta)\cos^2(\phi) + \cos^2(\phi)\cos^2(\theta)].$$

Dividindo ambos os membros por r , supondo-o não nulo, e tendo em conta que

$$\sin^2(\phi)\cos^2(\theta) + \cos^2(\phi)\cos^2(\theta) = \cos^2(\theta),$$

decorre o pretendido. ■

Se $r \in \mathbb{R}_0^+$ e $n \in \mathbb{N}$, denota-se por S_r^{n-1} a superfície esférica de dimensão $n-1$, centrada na origem e com raio r . Tal como em Field [9], se S_r^{n-1} é invariante pelo fluxo do sistema de equações diferenciais $\dot{x} = g(x, \lambda)$, diz-se que S_r^{n-1} é *globalmente atratora* se, para qualquer $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, se tem

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} d(\phi(t, p), S_r^{n-1}) = 0,$$

onde d representa a distância euclidiana em $\mathbb{R}^n$.

Teorema 3.4 *Se $\lambda > 0$, $\beta + \gamma = 2\alpha$, $\beta < \alpha < \gamma < 0$ e $\delta < 0$, o sistema (3.1) satisfaz o seguinte:*

1. a superfície esférica de dimensão 2, S_R^2 , de centro na origem e com raio $R = \sqrt{-\frac{\lambda}{\alpha}}$ é invariante pelo fluxo e globalmente atratora.

2. os pontos de equilíbrio do sistema (3.1) são a origem, $p_{\rho\pm} = (\pm R, 0, 0)$, $p_{v\pm} = (0, \pm R, 0)$, $p_{w\pm} = (0, 0, \pm R)$ e $p_{\rho\pm v\pm w\pm} = \left(\pm\sqrt{-\frac{\lambda}{3\alpha}}, \pm\sqrt{-\frac{\lambda}{3\alpha}}, \pm\sqrt{-\frac{\lambda}{3\alpha}}\right)$.
3. a origem é uma fonte.
4. na restrição à superfície esférica S_R^2 , os pontos de equilíbrio $p_{\rho\pm}$, $p_{v\pm}$, $p_{w\pm}$ são selas.
5. na restrição à superfície esférica S_R^2 , os pontos de equilíbrio $p_{\rho\pm v\pm w\pm}$ são focos instáveis.

Prova.

1. Dado que se considera $\beta + \gamma = 2\alpha$, a componente radial do campo de vectores fica reduzida a

$$\dot{r} = r(\lambda + \alpha r^2).$$

Para verificar que a variedade S_R^2 é invariante pelo fluxo, basta notar que a componente radial é nula na superfície esférica, isto é, $\dot{r} = 0$ para $r = R$. Isto significa que, dado um qualquer ponto de S_R^2 , a distância à origem de qualquer ponto da sua trajectória se mantém igual a R , ou seja, a trajectória está toda contida em S_R^2 .

Para mostrar que S_R^2 é globalmente atractora, é necessário mostrar que a trajectória de um qualquer ponto, excluindo a origem, se aproxima assintoticamente da superfície esférica de raio R , quando $t \rightarrow +\infty$. Para tal, comece-se por notar que, a componente radial é independente das restantes coordenadas esféricas e portanto pode ser analisada em separado. De

$$\frac{\partial \dot{r}}{\partial r}(r) = \lambda + 3\alpha r^2,$$

vem que a linearização da componente radial em $r = 0$ tem valor próprio positivo λ e em $r = R$ tem valor próprio negativo -2λ , donde se conclui que a origem é repulsora e S_R^2 é globalmente atractora.

A atracção global de S_R^2 pode também ser provada recorrendo-se ao Teorema da Esfera Invariante (Teorema 5.5, Field [9]). O campo de vectores do sistema de equações diferenciais (3.1) é uma perturbação do campo de vectores estudado por Guckenheimer & Holmes [15]

$$G_3(\rho, v, w) = \begin{pmatrix} \rho(\lambda + \alpha\rho^2 + \beta v^2 + \gamma w^2) \\ v(\lambda + \alpha v^2 + \beta w^2 + \gamma\rho^2) \\ w(\lambda + \alpha w^2 + \beta\rho^2 + \gamma v^2) \end{pmatrix},$$

que é tangente a qualquer superfície esférica centrada na origem. Ora, G_3 satisfaz as condições do Teorema da Esfera Invariante (G_3 é um campo de vectores Γ -equivariante, homogêneo de grau 3 ⁽¹⁾ e

$$\langle G_3(\rho, v, w) - \lambda(\rho, v, w), (\rho, v, w) \rangle = \alpha r^4 < 0,$$

o qual garante a existência de uma única superfície esférica topológica de dimensão 2 invariante pelo fluxo que é globalmente atractora. Uma vez que S_R^2 é o único conjunto homeomorfo a uma superfície esférica de dimensão 2 que é invariante pelo fluxo, decorre que S_R^2 é globalmente atractora.

O sistema (3.1) mantém a invariância pelo fluxo e a atracção global de S_R^2 porque F_3 é uma perturbação de G_3 tangente a qualquer superfície esférica centrada na origem (perturbações tangentes a uma variedade mantém a invariância e a atracção global dessa variedade).

2. Facilmente se prova que a origem é um ponto de equilíbrio do sistema.

Uma vez que a variedade S_R^2 e os eixos coordenados (são subespaços de pontos fixos) são invariantes pelo fluxo, decorre que a intersecção da superfície esférica com os eixos também é invariante pelo fluxo. Essa intersecção reduz-se aos pontos $p_{\rho\pm}$, $p_{v\pm}$ e $p_{w\pm}$, decorrendo assim que estes pontos são pontos de equilíbrio. Analogamente se conclui que os pontos $p_{\rho\pm v\pm w\pm}$ são pontos de equilíbrio, considerando a intersecção da variedade S_R^2 com os restantes subespaços de pontos fixos de dimensão 1.

Falta verificar que não existem mais pontos de equilíbrio. Um ponto de equilíbrio do sistema (3.1) é um ponto $(\rho, v, w) \in \mathbb{R}^3$ tal que $F_3((\rho, v, w)) = 0$. Suponha-se que $(\rho, v, w) \neq (0, 0, 0)$. A equação

$$F_3((\rho, v, w)) = 0$$

implica ter-se

$$\begin{cases} \rho = 0 \vee \lambda + \alpha\rho^2 + \beta v^2 + \gamma w^2 + \delta(v^4 - \rho^2 w^2) = 0 \\ v = 0 \vee \lambda + \alpha v^2 + \beta w^2 + \gamma \rho^2 + \delta(w^4 - \rho^2 v^2) = 0 \\ w = 0 \vee \lambda + \alpha w^2 + \beta \rho^2 + \gamma v^2 + \delta(\rho^4 - v^2 w^2) = 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

¹Diz-se que $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é homogêneo de grau 3 se e só se

$$\forall k \in \mathbb{R}, \forall u \in \mathbb{R}^n, f(ku) = k^3 f(u).$$

Comece-se por analisar a existência de pontos de equilíbrio nos planos de simetria. Se $\rho = 0$, o sistema (3.8) é equivalente a

$$\begin{cases} v = 0 \vee \lambda + \alpha v^2 + \beta w^2 + \delta w^4 = 0 \\ w = 0 \vee \lambda + \alpha w^2 + \gamma v^2 - \delta v^2 w^2 = 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

Se $v = 0$, então $w = \pm R$. Analogamente, se $w = 0$, tem-se $v = \pm R$. Em ambos os casos, obtêm-se as coordenadas de pontos de equilíbrios já conhecidos e que estão nos eixos coordenados. Suponha-se que $v.w \neq 0$. Então (3.9) implica ter-se:

$$\lambda + \alpha v^2 + \beta w^2 + \delta w^4 = \lambda + \alpha w^2 + \gamma v^2 - \delta v^2 w^2,$$

o que é equivalente a

$$v^2(\alpha - \gamma) + w^2(\beta - \alpha) + \delta w^2(v^2 + w^2) = 0.$$

Uma vez que, por hipótese, se tem $\alpha - \gamma = \beta - \alpha$, a equação acima pode ser reescrita na forma

$$(\alpha - \gamma)(v^2 + w^2) + \delta w^2(v^2 + w^2) = 0,$$

ou seja

$$(v^2 + w^2)(\alpha - \gamma + \delta w^2) = 0.$$

Uma vez que $v^2 + w^2 \neq 0$, decorre que $\delta w^2 = \gamma - \alpha$, condição esta que é impossível uma vez que

$$\forall w \in \mathbb{R}, \quad \gamma - \alpha > 0 > \delta w^2.$$

Daqui se conclui que, no plano definido por $\rho = 0$, não existem mais pontos de equilíbrios para além dos que se encontram nos eixos coordenados. Demonstra-se o análogo para os planos definidos por $v = 0$ e $w = 0$.

Falta ver que não existem mais pontos de equilíbrio fora dos planos de simetria. Uma vez que o sistema é simétrico relativamente aos planos coordenados, basta ver que não existem mais pontos de equilíbrio no primeiro octante, para além do ponto $p_{\rho^+ v^+ w^+}$. Suponha-se, por redução ao absurdo, que existe um ponto de equilíbrio do sistema com coordenadas $(\rho_0, v_0, w_0) \in (\mathbb{R}^+)^3 \setminus \text{Fix}(\langle d \rangle)$. Então tem-se

$$\begin{cases} \lambda + \alpha \rho_0^2 + \beta v_0^2 + \gamma w_0^2 + \delta(v_0^4 - \rho_0^2 w_0^2) = 0 \\ \lambda + \alpha v_0^2 + \beta w_0^2 + \gamma \rho_0^2 + \delta(w_0^4 - \rho_0^2 v_0^2) = 0 \\ \lambda + \alpha w_0^2 + \beta \rho_0^2 + \gamma v_0^2 + \delta(\rho_0^4 - v_0^2 w_0^2) = 0 \end{cases},$$

o que implica

$$3\lambda + \alpha(\rho_0^2 + v_0^2 + w_0^2) + \beta(\rho_0^2 + v_0^2 + w_0^2) + \gamma(\rho_0^2 + v_0^2 + w_0^2) = -\delta(\rho_0^4 + v_0^4 + w_0^4 - \rho_0^2 w_0^2 - \rho_0^2 v_0^2 - v_0^2 w_0^2). \quad (3.10)$$

Uma vez que $\beta + \gamma = 2\alpha$ e $\rho_0^2 + v_0^2 + w_0^2 = R^2 = -\frac{\lambda}{\alpha}$, o primeiro membro da igualdade (3.10) anula-se. Usando a lei do anulamento do produto e reordenando os termos do segundo membro de (3.10), vem que

$$\rho_0^2(\rho_0^2 - w_0^2) + v_0^2(v_0^2 - \rho_0^2) + w_0^2(w_0^2 - v_0^2) = 0. \quad (3.11)$$

É fácil ver que se uma das parcelas do primeiro membro de (3.11) for zero, então $\rho_0 = v_0 = w_0$, resultando um absurdo. Uma vez que $\rho_0^2 > 0$, $v_0^2 > 0$ e $w_0^2 > 0$, então os binómios $(\rho_0^2 - w_0^2)$, $(v_0^2 - \rho_0^2)$ e $(w_0^2 - v_0^2)$ não podem ter todos o mesmo sinal. Suponha-se, sem perda de generalidade, que

$$\rho_0^2 - w_0^2 > 0 \wedge v_0^2 - \rho_0^2 > 0. \quad (3.12)$$

Em particular, tem-se

$$v_0^2 - w_0^2 = (\rho_0^2 - w_0^2) + (v_0^2 - \rho_0^2). \quad (3.13)$$

Usando o facto de $v_0^2 > \rho_0^2 > w_0^2$ decorrente de (3.12) e a igualdade anterior, vem que:

$$w_0^2(v_0^2 - w_0^2) < \rho_0^2(\rho_0^2 - w_0^2) + v_0^2(v_0^2 - \rho_0^2). \quad (3.14)$$

Por outro lado, de (3.11) tem-se

$$\rho_0^2(\rho_0^2 - w_0^2) + v_0^2(v_0^2 - \rho_0^2) = w_0^2(v_0^2 - w_0^2),$$

contrariando (3.14). Raciocínios análogos podem ser feitos para as restantes cinco possibilidades de sinais das parcelas de (3.11), chegando-se em todos a um absurdo. O absurdo resulta do facto de se ter suposto que existem pontos de equilíbrio no primeiro octante e que não estão no eixo de simetria. Assim, os pontos de equilíbrio são apenas os que resultam da intersecção da variedade S_R^2 com os subespaços de pontos fixos de dimensão 1.

3. A linearização do sistema na origem é dada por uma matriz escalar com λ na diagonal de onde decorre imediatamente que o único valor próprio do sistema é $\lambda > 0$ (com multiplicidade 3), concluindo-se que a origem é uma fonte.

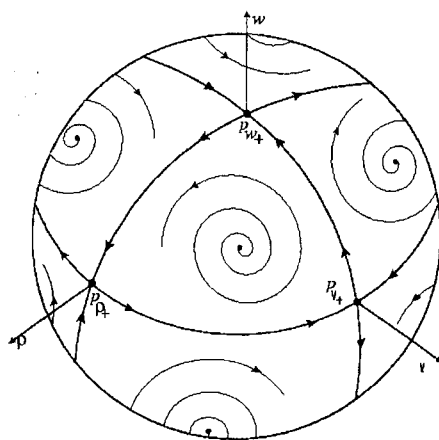


Figura 3.1: Dinâmica do sistema (3.1) restrita a S_R^2 (Aguiar [1]).

4. A linearização do sistema nos pontos de equilíbrio que estão nos eixos coordenados, exceptuando a origem, é uma matriz diagonal com os seguintes valores próprios:

$$-2\lambda, \quad \frac{\lambda(\alpha - \gamma)}{\alpha} \quad \text{e} \quad \lambda - \frac{\beta\lambda}{\alpha} + \frac{\delta\lambda^2}{\alpha^2}.$$

Nenhum dos valores próprios tem parte imaginária. Quanto ao seu sinal, usando as hipóteses do teorema, tem-se $-2\lambda < 0$, $\frac{\lambda(\alpha - \gamma)}{\alpha} > 0$ e $\lambda - \frac{\beta\lambda}{\alpha} + \frac{\delta\lambda^2}{\alpha^2} = \frac{\lambda[\alpha(\alpha - \beta) + \delta\lambda]}{\alpha^2} < 0$. Notando que -2λ é um valor próprio radial, os pontos de equilíbrio $p_{p\pm}$, $p_{v\pm}$, $p_{w\pm}$ são pontos de sela.

5. Nos pontos de equilíbrio $p_{\rho\pm v\pm w\pm}$, os valores próprios não radiais da linearização do sistema são:

$$\frac{-\delta\lambda^2 \pm \sqrt{-3(-\alpha\beta + \alpha\gamma + \delta\lambda)^2}}{3\alpha^2}.$$

Observando que $-3(-\alpha\beta + \alpha\gamma + \delta\lambda)^2 < 0$ e que a parte real destes valores próprios é positiva, decorre que os pontos de equilíbrio $p_{\rho\pm v\pm w\pm}$ são focos instáveis, na restrição à superfície esférica S_R^2 , como se pretendia mostrar.

■

Nas condições do teorema 3.4, dado a superfície esférica S_R^2 ser invariante e globalmente atratora, o comportamento dinâmico que interessa estudar restringe-se a esta variedade. Daqui por diante, admite-se que as constantes α , β , γ e δ presentes na expressão analítica do campo de vectores F_3 satisfazem as hipóteses do teorema 3.4.

3.3.2 Rede Heteroclínica

Já foi visto que da intersecção dos eixos de simetria com a superfície esférica invariante S_R^2 resultam catorze pontos de equilíbrio, dos quais seis selas nos eixos coordenados. Considerando agora a intersecção de S_R^2 com os restantes subespaços de pontos fixos (planos coordenados descritos pelas equações: $\rho = 0$, $v = 0$ e $w = 0$), têm-se três circunferências ortogonais invariantes. Cada uma destas circunferências intersecta cada um dos eixos coordenados em dois dos pontos de equilíbrio tipo sela. O teorema que se segue afirma a existência de uma rede heteroclínica associada a estes seis pontos de equilíbrio.

Teorema 3.5 *Na superfície esférica S_R^2 , o sistema (3.1) possui uma rede heteroclínica assintoticamente estável associada aos seis pontos de equilíbrio tipo sela $p_{\rho\pm}$, $p_{v\pm}$, $p_{w\pm}$.*

Prova. Considere-se o conjunto de selas invariantes:

$$\mathcal{A} = \{p_{\rho\pm}, p_{v\pm}, p_{w\pm}\}.$$

Vai-se provar que o conjunto $\mathcal{R}$ definido pela união das três circunferências invariantes definidas pelas equações

$$v^2 + w^2 = R^2 \wedge \rho = 0, \quad \rho^2 + w^2 = R^2 \wedge v = 0 \quad \text{e} \quad v^2 + \rho^2 = R^2 \wedge w = 0,$$

é uma rede heteroclínica associada a $\mathcal{A}$. É imediato que $\mathcal{R}$ é invariante pelo fluxo dado ser a união de conjuntos invariantes pelo fluxo.

Conforme já foi demonstrado, os únicos pontos de equilíbrio em $\mathcal{R}$ são as seis selas invariantes de $\mathcal{A}$. Deste modo $\mathcal{R} \setminus \mathcal{A}$ é um conjunto de doze trajectórias tendo cada uma como α -limite um ponto de equilíbrio em $\mathcal{A}$ e como ω -limite um outro ponto de equilíbrio em $\mathcal{A}$ (ver figura 3.1).

Por exemplo, a trajectória definida por

$$\rho^2 + v^2 = R^2 \wedge w = 0 \wedge \rho > 0 \wedge v > 0$$

pode ter $p_{\rho+}$ como α -limite e p_{v+} como ω -limite ou pode ter p_{v+} como α -limite e $p_{\rho+}$ como ω -limite. Por simetria, pela acção de d^2qd , a trajectória definida por

$$\rho^2 + v^2 = R^2 \wedge w = 0 \wedge \rho > 0 \wedge v < 0$$

pode ter $p_{\rho+}$ como α -limite e p_{v-} como w -limite ou pode ter p_{v-} como α -limite e $p_{\rho+}$ como w -limite, respectivamente. No primeiro caso, ter-se-ia que uma das trajectórias está contida em $W^u(p_{\rho+}) \cap W^s(p_{v+})$ e a outra em $W^u(p_{\rho+}) \cap W^s(p_{v-})$, existindo portanto uma ligação heteroclínica de $p_{\rho+}$ para p_{v+} e outra de $p_{\rho+}$ para p_{v-} . No segundo caso, ter-se-ia que uma das trajectórias está contida em $W^u(p_{v+}) \cap W^s(p_{\rho+})$ e a outra em $W^u(p_{v-}) \cap W^s(p_{\rho+})$, ficando então provada a existência de uma ligação heteroclínica de p_{v+} para $p_{\rho+}$ e outra de p_{v-} para $p_{\rho+}$. Para determinar qual dos dois casos se verifica, basta o seguinte: os valores próprios não radiais da linearização de F_3 no ponto $p_{\rho+}$ são

$$\frac{\lambda(\alpha - \gamma)}{\alpha} > 0 \quad \text{e} \quad \lambda - \frac{\beta\lambda}{\alpha} + \frac{\delta\lambda^2}{\alpha^2} < 0.$$

com vectores próprios associados $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$, respectivamente.

Pelo Teorema da Variedade Instável, tem-se que o espaço tangente à variedade instável em $p_{\rho+}$ é paralelo ao subespaço vectorial associado ao valor próprio positivo $\frac{\lambda(\alpha - \gamma)}{\alpha}$. Esse espaço tangente é a recta que contém $p_{\rho+}$ e é paralela ao vector de coordenadas $(0, 1, 0)$. Assim, a variedade instável de $p_{\rho+}$ é a semi-circunferência (aberta) definida por

$$\rho^2 + v^2 = R^2 \wedge w = 0 \wedge \rho > 0.$$

Logo, existe uma ligação heteroclínica de $p_{\rho+}$ para p_{v+} e outra de $p_{\rho+}$ para p_{v-} (primeiro caso acima descrito).

De uma forma inteiramente análoga, pelo Teorema da Variedade Estável, se mostra que a variedade estável de $p_{\rho+}$, em S_R^2 , é a semi-circunferência definida por

$$\rho^2 + w^2 = R^2 \wedge v = 0 \wedge \rho > 0.$$

Pela acção d em $p_{\rho+}$, tem-se que a variedade instável de p_{v+} é o conjunto dos pontos que estão contidos na semi-circunferência definida por

$$v^2 + w^2 = R^2 \wedge \rho = 0 \wedge v > 0.$$

e que a restrição a S_R^2 da variedade estável de p_{v+} é definida pelos pontos que satisfazem a condição

$$\rho^2 + v^2 = R^2 \wedge w = 0 \wedge v > 0.$$

De igual modo, pela acção d^2 , tem-se que a variedade instável de p_{w+} é a semi-circunferência definida por

$$\rho^2 + w^2 = R^2 \wedge v = 0 \wedge w > 0$$

e que a restrição a S_R^2 da variedade estável deste ponto de equilíbrio é definida pela condição

$$v^2 + w^2 = R^2 \wedge \rho = 0 \wedge w > 0.$$

Assim, tem-se

$$W^u(p_{\rho+}) \cap W^s(p_{v+}) \neq \emptyset,$$

$$W^u(p_{v+}) \cap W^s(p_{w+}) \neq \emptyset$$

e

$$W^u(p_{w+}) \cap W^s(p_{\rho+}) \neq \emptyset.$$

Pode-se assim concluir a existência de um ciclo heteroclínico Σ associado às selas $p_{\rho+}$, p_{v+} e p_{w+} , o qual é conhecido, na literatura, por ciclo de Guckenheimer-Holmes (ver Field [9], Guckenheimer-Holmes [15] e Melbourne, Chossat & Golubitsky [29]).

A órbita deste ciclo heteroclínico pela acção das reflexões nos planos coordenados consiste em Σ e mais sete ciclos heteroclínicos, cada um deles limitando os octantes de S_R^2 . A união de todos os ciclos heteroclínicos resulta nas três circunferências invariantes. Assim, prova-se a existência de uma rede heteroclínica $\mathcal{R}$ associada a $\mathcal{A}$, onde $\mathcal{R} = \Gamma\Sigma$.

Falta provar que a rede heteroclínica $\mathcal{R}$ é assintoticamente estável. Uma vez que $\mathcal{R} = \Gamma\Sigma$, basta provar, recorrendo ao Critério de Krupa e Melbourne (caso Γ finito), que o ciclo heteroclínico Σ é assintoticamente estável. Para usar este critério, é necessário verificar que, para qualquer sela p_j de Σ , existe um subespaço vectorial P_j invariante pelo fluxo tal que $W^u(p_j) \subset P_j$ e $p_{j+1(\text{mod } 3)}$ é um poço em P_j . Veja-se que tal se verifica para a sela $p_{\rho+}$. Seja

$$P_{p_{\rho+}} = \{(\rho, v, w) \in \mathbb{R}^3 : w = 0\}.$$

Tem-se que $W^u(p_{\rho+}) \subset P_{p_{\rho+}}$ e, dado que $P_{p_{\rho+}} = \text{Fix}(\langle dqd^2 \rangle)$, decorre que $P_{p_{\rho+}}$ é invariante pelo fluxo. Só falta verificar que p_{v+} é um poço em $P_{p_{\rho+}}$. Já foi visto que

$$-2\lambda < 0 \quad \text{e} \quad \lambda - \frac{\beta\lambda}{\alpha} + \frac{\delta\lambda^2}{\alpha^2} < 0$$

são valores próprios da linearização de F_3 em p_{v+} associados a $(0, 1, 0)$ e a $(1, 0, 0)$, respectivamente. Conclui-se então que, restrito ao subespaço $P_{p_{\rho+}}$, a linearização de p_{v+} só tem valores próprios reais negativos. Noutros termos, p_{v+} é um poço em $P_{p_{\rho+}}$. A prova é análoga para as restantes selas, considerando $P_{p_{v+}} = \text{Fix}(\langle q \rangle)$ e $P_{p_{w+}} = \text{Fix}(\langle d^2qd \rangle)$.

Finalmente, falta verificar que

$$\prod_{j=1}^3 \min\{c_j, e_j - t_j\} > \prod_{j=1}^3 e_j.$$

Uma vez que o sistema restrito à aderência do primeiro octante de S_R^2 é $\mathbb{Z}_3(\langle d \rangle)$ -equivariante, as três selas possuem os mesmos valores próprios radial, contractivo e expansor. Assim, se se provar que

$$\min\{c_{p_{\rho+}}, e_{p_{\rho+}} - t_{p_{\rho+}}\} > e_{p_{\rho+}},$$

fica demonstrada a hipótese do critério. Uma vez que $P_{p_{\rho+}} + P_{p_{v+}} = \mathbb{R}^3$, tem-se que $-t_{p_{\rho+}} = +\infty$. Além disso, conforme já foi visto

$$-\left(\lambda - \frac{\beta\lambda}{\alpha} + \frac{\delta\lambda^2}{\alpha^2}\right) = \frac{\lambda(\beta - \alpha)}{\alpha} - \frac{\delta\lambda^2}{\alpha^2} = \frac{\lambda(\alpha - \gamma)}{\alpha} - \frac{\delta\lambda^2}{\alpha^2} \stackrel{(\delta < 0)}{>} \frac{\lambda(\alpha - \gamma)}{\alpha}, \quad (3.15)$$

de onde decorre

$$c_{p_{\rho+}} = -\left(\lambda - \frac{\beta\lambda}{\alpha} + \frac{\delta\lambda^2}{\alpha^2}\right) > \frac{\lambda(\alpha - \gamma)}{\alpha} = e_{p_{\rho+}}.$$

Portanto $\min\{c_{p_{\rho+}}, e_{p_{\rho+}} - t_{p_{\rho+}}\} = c_{p_{\rho+}} > e_{p_{\rho+}}$. Então, pelo Critério de Krupa e Melbourne, conclui-se que o ciclo Σ definido pelas selas $p_{\rho+}$, p_{v+} e p_{w+} é assintoticamente estável, razão pela qual a rede $\mathcal{R}$ é assintoticamente estável.

■

Apesar de se ter apresentado a rede heteroclínica $\mathcal{R}$ como sendo a união dos ciclos heteroclínicos na órbita de grupo de Σ , chama-se a atenção para a existência de outros ciclos heteroclínicos na rede como, por exemplo, o ciclo definido pelo conjunto de pontos de equilíbrio $\{p_{\rho+}, p_{w+}, p_{v+}, p_{\rho-}, p_{w-}, p_{v-}\}$ (Field [9]).

Capítulo 4

Rede Heteroclínica com uma trajectória periódica

Nesta secção, vai-se rodar (ou levantar) o campo de vectores (3.1) definido no espaço $\mathbb{R}^3$ em torno de um plano de simetria, usando a técnica de levantamento estudada em Aguiar, Castro & Labouriau [2], obtendo-se um novo sistema de equações diferenciais no espaço vectorial $\mathbb{R}^4$. Esta técnica de levantamento de um campo de vectores foi inicialmente usada em Aguiar [1], tendo sido mais tarde formalizada em [2] como uma técnica geral de construção de exemplos de sistemas com redes heteroclínicas, satisfazendo determinadas propriedades. Este processo exige um requisito prévio: a equivariância do sistema por um grupo cuja acção é isomorfa a $\mathbb{Z}_2$.

O plano em torno do qual se vai efectuar a rotação é o plano definido por $\rho = 0$, uma vez que o campo de vectores (3.1) é simétrico relativamente a este plano pela acção q . A ideia geométrica da rotação é a seguinte: um ponto do plano $\rho = 0$ "permanece" neste subespaço, visto este ser um plano de simetria da rotação. Um ponto (ρ_0, v_0, w_0) , com $\rho_0 \neq 0$, gera o lugar geométrico dos pontos $(x, y, v, w) \in \mathbb{R}^4$ que satisfazem a condição:

$$x^2 + y^2 = \rho_0^2 \quad \wedge \quad v = v_0 \quad \wedge \quad w = w_0.$$

4.1 Campo de Vectores em $\mathbb{R}^4$

Analiticamente, a rotação em torno de $\rho = 0$ obtem-se juntando a equação angular $\dot{\varphi} = \xi$ ($\xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) às coordenadas esféricas do sistema (3.1) e considerando

a coordenada ρ como raio da rotação (Aguiar, Castro & Labouriau [2]). Interpretando o par de coordenadas polares (ρ, φ) em coordenadas rectangulares, tem-se

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos \varphi \\y &= \rho \sin \varphi\end{aligned}$$

com $x^2 + y^2 = \rho^2$. Derivando ambas as equações em ordem à variável independente t , tem-se

$$\dot{x} = \dot{\rho} \cos \varphi - \rho \dot{\varphi} \sin \varphi$$

e

$$\dot{y} = \dot{\rho} \sin \varphi + \rho \dot{\varphi} \cos \varphi.$$

Substituindo as equações de $\dot{\rho}$ do sistema (3.1) nas expressões de $\dot{x}$ e $\dot{y}$ e tendo em conta que $x^2 + y^2 = \rho^2$, $\rho \cos \varphi = x$ e $\rho \sin \varphi = y$, o sistema em $\mathbb{R}^4$ é dado, em coordenadas cartesianas, por:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(\lambda + \alpha(x^2 + y^2) + \beta v^2 + \gamma w^2 + \delta(v^4 - (x^2 + y^2)w^2)) - \xi y \\ \dot{y} = y(\lambda + \alpha(x^2 + y^2) + \beta v^2 + \gamma w^2 + \delta(v^4 - (x^2 + y^2)w^2)) + \xi x \\ \dot{v} = v(\lambda + \alpha v^2 + \beta w^2 + \gamma(x^2 + y^2) + \delta(w^4 - (x^2 + y^2)v^2)) \\ \dot{w} = w(\lambda + \alpha w^2 + \beta(x^2 + y^2) + \gamma v^2 + \delta((x^2 + y^2)^2 - v^2 w^2)) \end{cases} \quad (4.1)$$

onde $x^2 + y^2 + v^2 + w^2 = r^2$. Por comodidade de notação, o campo de vectores do sistema de equações diferenciais (4.1) denotar-se-á por F_4 .

4.2 Grupo de Simetrias do Sistema em $\mathbb{R}^4$

As simetrias do sistema (4.1) em $\mathbb{R}^4$ advêm das simetrias do sistema em $\mathbb{R}^3$ e da rotação (Aguiar, Castro & Labouriau [2], secção 2). "Levantando" as simetrias do sistema em $\mathbb{R}^3$ para $\mathbb{R}^4$, as únicas acções que não se transformam na acção trivial são as que correspondiam, em $\mathbb{R}^3$, a q , $d^2 q d$, $d q d^2$, $q d^2 q d$, $d q d^2 q d^2$ e $q d q d^2$. Explicitamente, as acções lineares em $\mathbb{R}^4$ herdadas das simetrias do sistema em $\mathbb{R}^3$ são as seguintes:

$$\left\{ \begin{array}{l} (x, y, v, w) \xrightarrow{Id} (x, y, v, w) \\ (x, y, v, w) \xrightarrow{r} (-x, -y, v, w) \\ (x, y, v, w) \xrightarrow{s} (x, y, -v, w) \\ (x, y, v, w) \xrightarrow{t} (x, y, v, -w) \\ (x, y, v, w) \xrightarrow{rs} (-x, -y, -v, w) \\ (x, y, v, w) \xrightarrow{st} (x, y, -v, -w) \\ (x, y, v, w) \xrightarrow{rt} (-x, -y, v, -w) \end{array} \right.$$

É fácil ver que estas acções são geradas por r , s e t . Uma vez que a acção r pode ser vista como um elemento da acção usual do grupo de Lie $SO(2)$ sobre as duas primeiras coordenadas de $\mathbb{R}^4$, o grupo de simetrias do sistema em $\mathbb{R}^4$ é o grupo Λ gerado por s , t e por ζ , onde

$$\begin{aligned} \zeta : \mathbb{R}^4 &\rightarrow \mathbb{R}^4 \\ (x, y, v, w) &\mapsto (x \cos \psi - y \sin \psi, x \sin \psi + y \cos \psi, v, w) \end{aligned}$$

com $\psi \in \mathbb{R}$.

Λ é um grupo de Lie compacto. Uma vez que as acções de s e t no espaço vectorial $\mathbb{R}^4$ são isomorfas a $\mathbb{Z}_2$, frequentemente serão designadas por $\mathbb{Z}_2(s)$ e por $\mathbb{Z}_2(t)$. O mesmo argumento serve para justificar que a acção $\langle \zeta \rangle$ seja denotada por $SO(2)(\zeta)$.

Do que foi visto, prova-se facilmente o seguinte lema:

Lema 4.1 *O sistema de equações (4.1) em $\mathbb{R}^4$ é equivariante pelo grupo $\mathbb{Z}_2(s) \times \mathbb{Z}_2(t) \times SO(2)(\zeta)$.*

Os subespaços de simetria não triviais da acção de $\mathbb{Z}_2(s) \times \mathbb{Z}_2(t) \times SO(2)(\zeta)$ sobre o espaço $\mathbb{R}^4$ são enumerados no lema que se segue. A demonstração é análoga à que foi apresentada para estudar os subespaços de simetria de Γ em $\mathbb{R}^3$.

Lema 4.2 *Os subespaços de simetria da acção de $\mathbb{Z}_2(s) \times \mathbb{Z}_2(t) \times SO(2)(\zeta)$ em $\mathbb{R}^4$ são:*

1. $Fix(\mathbb{Z}_2(s) \times SO(2)(\zeta)) = \{(x, y, v, w) \in \mathbb{R}^4 : x = 0 \wedge y = 0 \wedge v = 0\}$
2. $Fix(\mathbb{Z}_2(t) \times SO(2)(\zeta)) = \{(x, y, v, w) \in \mathbb{R}^4 : x = 0 \wedge y = 0 \wedge w = 0\}$

3. $Fix(SO(2)(\zeta)) = \{(x, y, v, w) \in \mathbb{R}^4 : x = 0 \wedge y = 0\}$
4. $Fix(\mathbb{Z}_2(s) \times \mathbb{Z}_2(t)) = \{(x, y, v, w) \in \mathbb{R}^4 : v = 0 \wedge w = 0\}$
5. $Fix(\mathbb{Z}_2(s)) = \{(x, y, v, w) \in \mathbb{R}^4 : v = 0\}$
6. $Fix(\mathbb{Z}_2(t)) = \{(x, y, v, w) \in \mathbb{R}^4 : w = 0\}$

4.3 Dinâmica do sistema em $\mathbb{R}^4$

Antes de estudar a dinâmica do sistema em $\mathbb{R}^4$, convém ver como é que, analiticamente, ficam definidos os conjuntos invariantes pelo fluxo que são obtidos por rotação do campo de vectores (3.1) em torno do plano $\rho = 0$. Neste âmbito, Aguiar, Castro & Labouriau [2] definem *levantamento por rotação* de $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ como o conjunto dos pontos $(x, y, v, w) \in \mathbb{R}^4$ tais que $(\pm\rho, v, w) \in \Sigma$ e $\|(x, y)\| = |\rho|$, denotando-o por $\mathcal{L}(\Sigma)$.

Assim, se se considerar a inclusão

$$\begin{aligned} i : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^4 \\ (\rho, v, w) &\mapsto (\rho, 0, v, w) \end{aligned} \quad (4.2)$$

decorre que $\mathcal{L}(\Sigma)$ é a órbita da acção usual do grupo $SO(2)$ sobre as duas primeiras coordenadas de $i(\Sigma)$, ou seja,

$$\mathcal{L}(\Sigma) = SO(2).i(\Sigma).$$

Agora, a ideia geométrica de um ponto "permanecer num subespaço" introduzida no início deste capítulo, pode ser traduzida mais formalmente do seguinte modo:

$$\begin{aligned} p &= (0, v_0, w_0) \in Fix(\langle q \rangle) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mathcal{L}(\{p\}) = i((0, v_0, w_0)) = (0, 0, v_0, w_0) \in \mathcal{L}(Fix(\langle q \rangle)). \end{aligned}$$

Teorema 4.3 *Se $\lambda > 0$, $\beta + \gamma = 2\alpha$, $\beta < \alpha < \gamma < 0$ e $\xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, o sistema de equações (4.1) satisfaz o seguinte:*

1. a superfície esférica de dimensão 3, S_R^3 , de centro na origem e com raio $R = \sqrt{-\frac{\lambda}{\alpha}}$ é invariante pelo fluxo e globalmente atractora.

2. o sistema possui cinco pontos de equilíbrio de coordenadas $(0, 0, 0, 0)$, $p_{v+} = (0, 0, R, 0)$, $p_{v-} = (0, 0, -R, 0)$, $p_{w+} = (0, 0, 0, R)$ e $p_{w-} = (0, 0, 0, -R)$. A origem é repulsora e os restantes pontos de equilíbrio são selas.
3. na restrição do fluxo à superfície esférica S_R^3 , existe uma trajectória periódica, que se designará por c , definida por

$$x^2 + y^2 = -\frac{\lambda}{\alpha} \quad \wedge \quad v = 0 \quad \wedge \quad w = 0,$$

que é uma sela invariante.

Por abuso de notação, os pontos de equilíbrio dos sistemas em $\mathbb{R}^3$ e em $\mathbb{R}^4$ são denotados de igual modo. Não há, todavia, qualquer perigo de ambiguidade porque se sabe, à partida, a dimensão do espaço no qual se está a trabalhar.

Prova.

1. A prova desta alínea é trivial uma vez que a rotação do campo de vectores mantém a componente radial do sistema (3.1) definido em $\mathbb{R}^3$, isto é, em coordenadas esféricas, a componente $\dot{r}$ não é alterada pela rotação.
2. Uma vez que o sistema (4.1) é obtido pela rotação do sistema (3.1) em torno do plano de simetria $\rho = 0$, decorre que os pontos de equilíbrio do sistema (3.1) contidos neste plano permanecem como pontos de equilíbrio do sistema (4.1), no sentido de corresponderem à inclusão i de pontos de equilíbrio do sistema em $\mathbb{R}^3$. É o caso da origem e dos pontos de equilíbrio p_{v+} , p_{v-} , p_{w+} e p_{w-} .

Para mostrar que a origem é repulsora, basta ver a rotação não altera a parte real dos valores próprios (Aguiar, Castro & Labouriau [2]). Indo de encontro a este resultado, basta notar que, restrito ao plano definido por $\text{Fix}(\text{SO}(2)(\zeta))$, a linearização do campo de vectores F_4 em $(0, 0, 0, 0)$ admite λ como valor próprio com multiplicidade 2. Em $\text{Fix}((\mathbb{Z}_2(s)) \cap \text{Fix}((\mathbb{Z}_2(t)))$, a linearização de F_4 , na origem, tem dois valores próprios complexos conjugados $(\lambda \pm \xi i)$. Em ambos os casos, os valores próprios encontrados têm parte real positiva λ , decorrendo que a origem é repulsora.

Para ver que os pontos p_{v+} , p_{v-} , p_{w+} e p_{w-} são pontos de sela, usa-se o mesmo argumento de que a rotação não altera a parte real dos valores próprios. Com efeito, os valores próprios de F_4 nos pontos referidos são

-2λ e $\lambda - \frac{\beta\lambda}{\alpha} + \frac{\delta\lambda^2}{\alpha^2}$, que são reais e negativos e $\frac{\lambda(\alpha-\gamma)}{\alpha} \pm i\xi$ que possui parte real positiva. Decorre assim que os pontos são selas.

O sistema não tem mais pontos de equilíbrio porque uma rotação não pode gerar mais pontos de equilíbrio.

De facto, as duas primeiras componentes do sistema em $\mathbb{R}^4$, são dadas, em coordenadas esféricas, por

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{\rho} \cos \varphi - \rho \xi \sin \varphi \\ \dot{y} = \dot{\rho} \sin \varphi + \rho \xi \cos \varphi \end{cases}$$

Para calcular os pontos de equilíbrio, ter-se-ia que igualar $\dot{x}$ e $\dot{y}$ a zero. Notando que $\xi \neq 0$, a equação $\dot{x} = 0$ é equivalente a ter-se

$$\rho = \frac{\dot{\rho} \cos \varphi}{\xi \sin \varphi} \text{ com } \sin \varphi \neq 0. \quad (4.3)$$

Substituindo (4.3) em $\dot{y} = 0$, tem-se

$$\dot{\rho} \sin \varphi + \frac{\dot{\rho} \cos^2 \varphi}{\sin \varphi} = 0$$

que, depois de simplificado, é o mesmo que se ter

$$\frac{\dot{\rho}}{\sin \varphi} = 0.$$

Então $\dot{x} = \dot{y} = 0$ implica ter-se $\dot{\rho} = 0$ e consequentemente $\rho = 0$. Se $\sin \varphi = 0$, é imediato. Assim, os pontos de equilíbrio do sistema em $\mathbb{R}^4$ são dados por $i(p_j)$, onde p_j são os pontos de equilíbrio do sistema em $\mathbb{R}^3$ contidos no plano $\rho = 0$.

3. Ao rodar o campo de vectores F_3 definido em $\mathbb{R}^3$, os dois pontos de equilíbrio tipo sela $p_{\rho+}$ e $p_{\rho-}$ (em $\mathbb{R}^3$) vão dar origem à circunferência c definida por

$$x^2 + y^2 = -\frac{\lambda}{\alpha} \quad \wedge \quad v = 0 \quad \wedge \quad w = 0.$$

Para facilitar os cálculos, vai-se supor que a velocidade angular de φ é igual a 1 (supor que $\dot{\varphi} = 1$ não afecta a dinâmica do sistema). Uma matriz fundamental (2π -periódica) do sistema (4.1) é dada por

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} \cos t & -\sin t & 0 & 0 \\ e^{-2t} \sin t & \cos t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{(\lambda - \frac{\beta\lambda}{\alpha} + \frac{\delta\lambda^2}{\alpha^2})t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{(\frac{\lambda(\alpha-\gamma)}{\alpha})t} \end{pmatrix}.$$

Assim, a matriz constante B (associada a Φ) garantida pelo Teorema de Floquet é

$$B = \begin{pmatrix} -2\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - \frac{\beta\lambda}{\alpha} + \frac{\delta\lambda^2}{\alpha^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda(\alpha-\gamma)}{\alpha} \end{pmatrix},$$

decorrendo imediatamente que os expoentes característicos não nulos são

$$-2\lambda < 0, \lambda - \frac{\beta\lambda}{\alpha} + \frac{\delta\lambda^2}{\alpha^2} < 0 \text{ e } \frac{\lambda(\alpha-\gamma)}{\alpha} > 0.$$

Decorre do teorema 2.3, a existência de $W^u(c)$ e $W^s(c)$, com dimensões 2 e 3. Do facto de c ser compacto e invariante pelo fluxo, decorre que c é uma sela invariante.

■

O lema seguinte permitirá relacionar as intersecções das variedades instável e estável das selas c , p_{v+} , p_{v-} , p_{w+} e p_{w-} . Este lema vai de encontro ao corolário 2 de Aguiar, Castro & Labouriau [2], o qual assegura que:

i) se ξ é uma trajectória heteroclínica do sistema em $\mathbb{R}^3$ tal que $\xi \subset \text{Fix}(\mathbb{Z}_2(\langle q \rangle))$ ligando dois pontos de equilíbrio $p_1, p_2 \in \text{Fix}(\mathbb{Z}_2(\langle q \rangle))$, então $\mathcal{L}(\xi)$ é uma trajectória heteroclínica ligando $i(p_1)$ e $i(p_2)$;

ii) se ξ é uma trajectória heteroclínica do sistema em $\mathbb{R}^3$ tal que $\xi \subset \mathbb{R}^3 \setminus \text{Fix}(\mathbb{Z}_2(\langle q \rangle))$ ligando dois pontos de equilíbrio p_1, p_2 , então $\mathcal{L}(\xi)$ é uma ligação heteroclínica de dimensão 2 entre $\mathcal{L}(\{p_1\})$ e $\mathcal{L}(\{p_2\})$.

Lema 4.4 *Restrito a S_R^3 e relativamente ao sistema (4.1), tem-se:*

1. $W^u(p_{w+}) = \{(x, y, v, w) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 + w^2 = R^2 \wedge w > 0 \wedge v = 0\}$
2. $W^u(p_{w-}) = \{(x, y, v, w) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 + w^2 = R^2 \wedge w < 0 \wedge v = 0\}$
3. $W^s(p_{w+}) = \{(x, y, v, w) \in \mathbb{R}^4 : v^2 + w^2 = R^2 \wedge w > 0 \wedge x = 0 \wedge y = 0\}$
4. $W^s(p_{w-}) = \{(x, y, v, w) \in \mathbb{R}^4 : v^2 + w^2 = R^2 \wedge w < 0 \wedge x = 0 \wedge y = 0\}$
5. $W^s(p_{v+}) = \{(x, y, v, w) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 + v^2 = R^2 \wedge v > 0 \wedge w = 0\}$
6. $W^s(p_{v-}) = \{(x, y, v, w) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 + v^2 = R^2 \wedge v < 0 \wedge w = 0\}$
7. $W^u(p_{v+}) = \{(x, y, v, w) \in \mathbb{R}^4 : v^2 + w^2 = R^2 \wedge v > 0 \wedge x = 0 \wedge y = 0\}$

$$8. W^u(p_{v-}) = \{(x, y, v, w) \in \mathbb{R}^4 : v^2 + w^2 = R^2 \wedge v < 0 \wedge x = 0 \wedge y = 0\}$$

$$9. W^s(c) = \{(x, y, v, w) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 + w^2 = R^2 \wedge v = 0\}$$

$$10. W^u(c) = \{(x, y, v, w) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 + v^2 = R^2 \wedge w = 0\}$$

Prova. Vai-se efectuar a demonstração das alíneas 1 e 9 do lema, sendo análoga a prova das restantes alíneas.

Comece-se pela alínea 1: quer-se provar que

$$W^u(p_{w+}) = \{(x, y, v, w) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 + w^2 = R^2 \wedge w > 0 \wedge v = 0\}.$$

Em $\mathbb{R}^3$, o ponto de equilíbrio correspondente a p_{w+} é o ponto de coordenadas $(0, 0, R)$. A variedade instável deste ponto de equilíbrio é a semi-circunferência definida, em $\mathbb{R}^3$, por

$$\rho^2 + w^2 = R^2 \wedge w > 0 \wedge v = 0,$$

não estando contida no plano definido por $\rho = 0$. Tendo em conta o modo como é efectuada a rotação e usando a técnica de levantamento de conjuntos explicitada no início desta secção, decorre que a variedade instável de p_{w+} é dada pela semi-superfície esférica definida, em $\mathbb{R}^4$, por

$$x^2 + y^2 + w^2 = R^2 \wedge w > 0 \wedge v = 0.$$

Quanto à alínea 9, basta observar que $W^s(c)$ resulta da rotação de $W^s(p_{\rho+}) \cup W^s(p_{\rho-})$ do sistema em $\mathbb{R}^3$. Sabendo que

$$W^s(p_{\rho+}) = \{(\rho, v, w) \in \mathbb{R}^3 : \rho^2 + w^2 = R^2 \wedge v = 0 \wedge \rho > 0\},$$

$$W^s(p_{\rho-}) = \{(\rho, v, w) \in \mathbb{R}^3 : \rho^2 + w^2 = R^2 \wedge v = 0 \wedge \rho < 0\}$$

e tendo em conta como foi efectuada a rotação (sendo $x^2 + y^2 = \rho^2$), decorre que

$$W^s(c) = \{(x, y, v, w) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 + w^2 = R^2 \wedge v = 0\}.$$

■

A intersecção da superfície esférica globalmente atractora S_R^3 com os subespaços de simetria de dimensão 1 do sistema, correspondem aos pontos de equilíbrio p_{v+} e p_{v-} e p_{w+} e p_{w-} . De igual modo, as intersecções da superfície esférica com $Fix(SO(2)(\zeta))$ e $Fix(\mathbb{Z}_2(s) \times \mathbb{Z}_2(t))$ correspondem às circunferências definidas por

$$v^2 + w^2 = R^2 \wedge x = y = 0$$

e

$$x^2 + y^2 = R^2 \wedge v = w = 0,$$

respectivamente. Por fim, a intersecção da mesma superfície esférica com os subespaços de simetria de dimensão 3 são as superfícies esféricas definidas por

$$x^2 + y^2 + w^2 = R^2 \wedge v = 0$$

e

$$x^2 + y^2 + v^2 = R^2 \wedge w = 0.$$

Seja $\mathcal{R}$ a união das duas circunferências e das superfícies esféricas acima mencionadas. Do que foi exposto, é fácil concluir que $\mathcal{R}$ é um conjunto invariante pelo fluxo do sistema (4.1). O próximo teorema afirma que $\mathcal{R}$ é uma rede heteroclínica assintoticamente estável. Na demonstração da estabilidade assintótica da rede, vai-se usar a simetria do sistema e o critério de Krupa e Melbourne (caso $\dim \Gamma > 0$). Chama-se a atenção que a prova pode ser simplificada usando a teoria exposta em Aguiar, Castro & Labouriau [2].

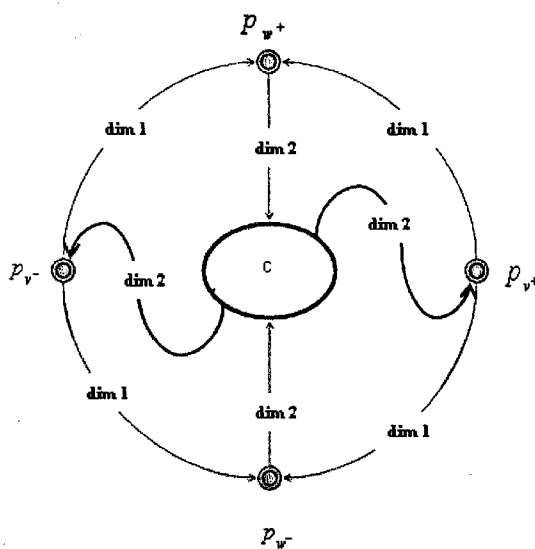


Figura 4.1: Representação esquemática da rede heteroclínica presente na dinâmica do sistema (4.1).

Teorema 4.5 *Na dinâmica do sistema (4.1), $\mathcal{R}$ é uma rede heteroclínica assintoticamente estável associada às selas c , p_{v+} , p_{v-} , p_{w+} e p_{w-} . As ligações heteroclínicas entre os pontos de equilíbrio p_{v+} , p_{v-} , p_{w+} e p_{w-} têm dimensão 1 e as ligações heteroclínicas que envolvem a sela c têm dimensão 2.*

Prova. Considere-se o conjunto de selas invariantes

$$S = \{c, p_{v+}, p_{w+}, p_{v-}, p_{w-}\}.$$

Que o conjunto invariante $\mathcal{R}$ é uma rede heteroclínica envolvendo as selas de S , decorre trivialmente do lema 4.4.

Seja $\Sigma_{s_1 s_2}$, onde $s_1, s_2 \in \{-, +\}$, o ciclo heteroclínico definido pelas selas c , $p_{v^{s_1}}$ e $p_{w^{s_2}}$. Tem-se que

$$\mathcal{R} = \bigcup_{s_1, s_2 \in \{-, +\}} \Sigma_{s_1 s_2}.$$

Uma vez que $\mathcal{R} = \Lambda \Sigma_{++}$, para mostrar que $\mathcal{R}$ é assintoticamente estável, basta mostrar que Σ_{++} é assintoticamente estável. Para tal, vai-se recorrer ao critério de Krupa e Melbourne exposto no teorema 2.17. O ciclo heteroclínico Σ_{++} contém um equilíbrio relativo: o equilíbrio c . Assim, para aplicar o critério, é necessário estudar o campo de vectores normal associado a F_4 em torno da órbita (de grupo) c . O campo de vectores normal associado a F_4 é dado por

$$F_4^N(x, y, v, w) = \begin{pmatrix} x(\lambda + \alpha(x^2 + y^2) + \beta v^2 + \gamma w^2 + \delta(v^4 - (x^2 + y^2)w^2)) \\ y(\lambda + \alpha(x^2 + y^2) + \beta v^2 + \gamma w^2 + \delta(v^4 - (x^2 + y^2)w^2)) \\ v(\lambda + \alpha v^2 + \beta w^2 + \gamma(x^2 + y^2) + \delta(w^4 - (x^2 + y^2)v^2)) \\ w(\lambda + \alpha w^2 + \beta(x^2 + y^2) + \gamma v^2 + \delta((x^2 + y^2)^2 - w^2 v^2)) \end{pmatrix}.$$

Para mostrar que F_4^N é o campo de vectores normal associado a F_4 , em c , é preciso verificar que a imagem de um vector normal à curva c , num qualquer ponto de c , é normal à curva e que $F_4 - F_4^N$ é tangente a c . Que $F_4 - F_4^N$ é tangente a c é imediato.

Calculando o produto escalar entre $F_4^N(x, y, v, w)$ e um vector tangente a c , por exemplo $(-\sin \varphi, \cos \varphi, 0, 0)$, tem-se que $\langle F_4^N(x, y, v, w), (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0, 0) \rangle$ é o mesmo que se ter

$$-x \sin \varphi (\lambda + \alpha(x^2 + y^2) + \beta v^2 + \gamma w^2 + \delta(v^4 - (x^2 + y^2)w^2)) + \\ + y \cos \varphi (\lambda + \alpha(x^2 + y^2) + \beta v^2 + \gamma w^2 + \delta(v^4 - (x^2 + y^2)w^2))$$

o que é equivalente a

$$(\lambda + \alpha(x^2 + y^2) + \beta v^2 + \gamma w^2 + \delta(v^4 - (x^2 + y^2)w^2)) \cdot (-\rho \cos \varphi \sin \varphi + \rho \cos \varphi \sin \varphi),$$

ou seja,

$$\langle F_4^N(x, y, v, w), (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0, 0) \rangle = 0,$$

para qualquer $(x, y, v, w) \in \mathbb{R}^4$. Provou-se que a imagem de qualquer vector, por F_4^N , é normal a c ; em particular o fibrado normal N_x , $x \in \mathbb{R}^4$, é invariante por F_4^N .

Os valores próprios não nulos da linearização do campo de vectores normal F_4^N num ponto qualquer de c são:

$$-2\lambda < 0, \quad \frac{\lambda(\alpha - \gamma)}{\alpha} > 0, \quad \lambda - \frac{\beta\lambda}{\alpha} + \frac{\delta\lambda}{\alpha^2} < 0.$$

Assim, é fácil ver que c é hiperbólico (conforme demonstrado em Field [8], as partes reais dos valores próprios não dependem da escolha do ponto no equilíbrio relativo c).

Para se poder aplicar o Critério de Krupa e Melbourne, é preciso que o ciclo seja robusto (ou que a hipótese (H1) de [25] seja satisfeita). Com efeito,

$$W^u(p_{v+}) \subset \text{Fix}(\text{SO}(2)(\zeta))$$

e o ponto de equilíbrio p_{w+} é um poço em $\text{Fix}(\text{SO}(2)(\zeta))$, observando que os valores próprios da linearização de F_4^N em p_{w+} são negativos (nesta restrição). Analogamente,

$$W^u(p_{w+}) \subset \text{Fix}(\mathbb{Z}_2(s))$$

e $(R, 0, 0, 0)$ (note-se que $c = \mathcal{L}(\{(R, 0, 0)\})$) é um poço em $\text{Fix}(\mathbb{Z}_2(s))$. Finalmente, tem-se que

$$W^u(c) \subset \text{Fix}(\mathbb{Z}_2(t))$$

e p_{v+} é um poço em $\text{Fix}(\mathbb{Z}_2(t))$.

Usando a terminologia que antecede o teorema 2.12, tem-se

$$c_{v+} = c_{w+} = c_{(R,0,0,0)} = \lambda - \frac{\beta\lambda}{\alpha} + \frac{\delta\lambda^2}{\alpha^2},$$

$$e_{v+} = e_{w+} = e_{(R,0,0,0)} = \frac{\lambda\alpha - \gamma\lambda}{\alpha} = \frac{\lambda(\alpha - \gamma)}{\alpha}$$

e

$$t_{v+} = t_{w+} = t_{(R,0,0,0)} = -\infty.$$

Uma vez que $\lambda - \frac{\beta\lambda}{\alpha} + \frac{\delta\lambda^2}{\alpha^2} > \frac{\lambda(\alpha - \gamma)}{\alpha}$ (já provado), decorre o pretendido, isto é, o ciclo $\mathcal{R}$ é assintoticamente estável, pelo critério de Krupa e Melbourne.

Finalmente, quanto às dimensões das ligações heteroclínicas, basta notar que

$$W^u(c) \cap W^s(p_{v+}) = \{(x, y, v, w) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 + v^2 = -\frac{\lambda}{\alpha} \wedge v > 0 \wedge w = 0\}$$

é uma variedade de dimensão 2, que

$$W^u(p_{v+}) \cap W^s(p_{w+}) = \{(x, y, v, w) \in \mathbb{R}^4 : v^2 + w^2 = -\frac{\lambda}{\alpha} \wedge w > 0 \wedge x = 0 \wedge y = 0\}$$

tem dimensão 1 e que

$$W^u(p_{w+}) \cap W^s(c) = \{(x, y, v, w) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 + w^2 = -\frac{\lambda}{\alpha} \wedge w > 0 \wedge v = 0\}$$

tem dimensão 2. ■

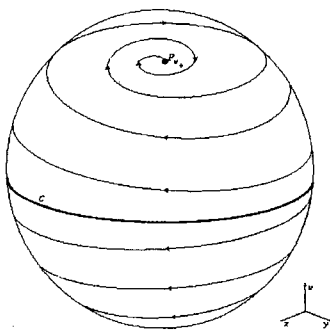


Figura 4.2: Esquema de $W^s(p_{v-})$ e $W^s(p_{v+})$ que coincidem com $W^u(c)$ (Aguiar [1]).

Proposição 4.6 *Na dinâmica do sistema (4.1), existem quatro trajectórias periódicas hiperbólicas que são repulsoras, na restrição à variedade S_R^3 .*

Prova. Na dinâmica do sistema (3.1), existem oito pontos de equilíbrio instáveis de coordenadas

$$p_{\rho \pm v \pm w \pm} = \left(\pm \sqrt{-\frac{\lambda}{3\alpha}}, \pm \sqrt{-\frac{\lambda}{3\alpha}}, \pm \sqrt{-\frac{\lambda}{3\alpha}} \right). \quad (4.4)$$

Geometricamente, ao rodar os pontos $p_{\rho \pm v \pm w \pm}$ em torno do plano $\rho = 0$, cada dois pontos de equilíbrio simétricos relativamente a $Fix(\langle q \rangle)$ dão origem a uma circunferência. Assim, o levantamento por rotação de $p_{\rho \pm v \pm w \pm}$ origina quatro circunferências definidas por

$$x^2 + y^2 = -\frac{\lambda}{3\alpha} \quad \wedge \quad v = \pm \sqrt{-\frac{\lambda}{3\alpha}} \quad \wedge \quad w = \pm \sqrt{-\frac{\lambda}{3\alpha}}.$$

É imediato concluir que estas quatro circunferências são equilíbrios relativos (são invariantes pelo fluxo e pela acção do grupo). Assim, a parte real dos

valores próprios da linearização de F_4^N em qualquer ponto das circunferências não depende do ponto escolhido na órbita (Field [8]). Tomando, por exemplo, o ponto de coordenadas

$$\left(\sqrt{-\frac{\lambda}{3\alpha}}, 0, \sqrt{-\frac{\lambda}{3\alpha}}, \sqrt{-\frac{\lambda}{3\alpha}} \right),$$

os valores próprios da linearização de F_4^N têm todos parte real positiva, quando restritos à variedade S_R^3 . Fica, deste modo, provado que as circunferências são trajectórias hiperbólicas e repulsoras. ■

Capítulo 5

Ciclo Heteroclínico entre três trajectórias periódicas

Neste capítulo, com o objectivo de obter um ciclo heteroclínico entre três trajectórias periódicas efectua-se duas rotações análogas à do capítulo 4. Roda-se o campo de vectores (4.1) em torno do hiperplano $v = 0$ e em torno do hiperplano $w = 0$, obtendo-se um novo sistema de equações diferenciais em $\mathbb{R}^6$. Estas rotações estão bem definidas uma vez que os campos de vectores em $\mathbb{R}^4$ e em $\mathbb{R}^5$ são $\mathbb{Z}_2$ -simétricos em relação aos hiperplanos

$$Fix(\mathbb{Z}_2(s)) = \{(x, y, v, w) \in \mathbb{R}^4 : v = 0\}$$

e

$$Fix(\mathbb{Z}_2(t)) = \{(x, y, p, q, w) \in \mathbb{R}^5 : w = 0\},$$

condições essenciais para se poder efectuar a rotação (Aguiar, Castro & Labouriau [2]).

Antes de prosseguir na exposição, vai-se generalizar a noção de rotação de um campo de vectores em torno de um hiperplano de simetria e a de levantamento de um conjunto. Esta generalização vai ser utilizada para estudar a dinâmica do sistema que se obtém por (dupla) rotação do sistema (4.1).

Com base no artigo de Aguiar, Castro & Labouriau [2], a noção de levantamento por rotação de um subconjunto invariante pelo fluxo pode ser generalizada do seguinte modo: suponha-se que F_n é um campo de vectores $\mathbb{Z}_2$ -equivariante. Suponha-se, sem perda de generalidade, que é equivariante pela acção

$$\begin{aligned} k : \quad \mathbb{R}^n & \rightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) & \mapsto (x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n) \end{aligned}$$

e seja F_{n+1} o campo de vectores que se obtém, juntando às coordenadas esféricas de F_n , a equação $\dot{\varphi}_n = \xi_n$ (onde $\xi_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) e considerando a coordenada x_n como raio de rotação. Importa saber como se podem caracterizar os conjuntos invariantes do sistema F_{n+1} .

Neste sentido, define-se *levantamento por rotação* de $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^n$, denotado por $\mathcal{L}(\Sigma)$, como o conjunto dos pontos $(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tais que $(x_1, \dots, \pm x_n^0) \in \Sigma$ onde $\|(x_n, x_{n+1})\| = |x_n^0|$. Se se considerar a inclusão

$$\begin{aligned} i: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto (x_1, \dots, x_n, 0) \end{aligned}$$

decorre que $\mathcal{L}(\Sigma)$ é a órbita da acção usual do grupo $SO(2)$ sobre as duas últimas coordenadas de $i(\Sigma)$, ou seja,

$$\mathcal{L}(\Sigma) = SO(2).i(\Sigma). \quad (5.1)$$

Assim, generalizando Aguiar, Castro & Labouriau [2], tem-se:

Proposição 5.1 *Sejam $F_n: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo de vectores $\mathbb{Z}_2(k)$ -equivariante e F_{n+1} o campo de vectores obtido juntando às coordenadas esféricas de F_n , a equação $\dot{\varphi}_n = \xi_n$ (onde $\xi_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) e considerando a coordenada x_n como raio de rotação. Seja $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ invariante pelo fluxo de F_n . Então:*

1. $\mathcal{L}(\Sigma)$ é invariante pelo fluxo do sistema F_{n+1} .
2. se Σ é compacto, então $\mathcal{L}(\Sigma)$ é um compacto de $\mathbb{R}^{n+1}$.
3. se Σ é assintoticamente estável, então $\mathcal{L}(\Sigma)$ é um conjunto assintoticamente estável do sistema F_{n+1} .
4. se Σ é uma ligação heteroclínica entre pontos de equilíbrio e_1 e e_2 , então $\mathcal{L}(\Sigma)$ é uma ligação heteroclínica entre equilíbrios relativos $\mathcal{L}(\{e_1\})$ e $\mathcal{L}(\{e_2\})$.

Esta proposição generaliza os resultados apresentados na secção 3 no artigo de Aguiar, Castro & Labouriau [2], sendo a demonstração análoga à que é efectuada. Decorre imediatamente das alíneas 1 e 3 da proposição 5.1, que se S_r^{n-1} é uma variedade invariante pelo fluxo e assintoticamente estável na dinâmica do sistema $\dot{x} = F_n(x, \lambda)$, então $\mathcal{L}(S_r^{n-1}) = S_r^n$ é uma variedade invariante pelo fluxo e assintoticamente estável para o sistema associado ao campo de vectores F_{n+1} .

5.1 Campo de Vectores em $\mathbb{R}^6$

Analiticamente, a primeira rotação é obtida juntando a equação angular $\dot{\psi} = \eta$ ($\eta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) às coordenadas esféricas do sistema (4.1) e considerando a coordenada v como raio da rotação. A segunda rotação é obtida juntando a equação angular $\dot{\sigma} = \varrho$ ($\varrho \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) e considerando a coordenada w como raio da rotação.

Interpretando o par de coordenadas polares (v, ψ) em coordenadas rectangulares, define-se:

$$\begin{aligned} p &= v \cos \psi \\ q &= v \sin \psi \end{aligned} \quad (5.2)$$

com $p^2 + q^2 = v^2$. De igual modo, interpretando o par de coordenadas (w, σ) em coordenadas rectangulares, tem-se

$$\begin{aligned} u &= w \cos \sigma \\ z &= w \sin \sigma \end{aligned} \quad (5.3)$$

com $u^2 + z^2 = w^2$. Derivando as equações de (5.2) e de (5.3) em ordem à variável independente t , tem-se

$$\dot{p} = \dot{v} \cos \psi - v \dot{\psi} \sin \psi \quad \text{e} \quad \dot{q} = \dot{v} \sin \psi + v \dot{\psi} \cos \psi$$

e

$$\dot{u} = \dot{w} \cos \sigma - w \dot{\sigma} \sin \sigma \quad \text{e} \quad \dot{z} = \dot{w} \sin \sigma + w \dot{\sigma} \cos \sigma.$$

Substituindo as equações de $\dot{v}$ e $\dot{w}$ do sistema (4.1) nas expressões de $\dot{p}$, $\dot{q}$, $\dot{u}$ e $\dot{z}$ e tendo em conta que $p^2 + q^2 = v^2$, $v \cos \psi = p$, $v \sin \psi = q$, $p^2 + q^2 = v^2$, $u = w \cos \sigma$ e $z = w \sin \sigma$, o sistema em $\mathbb{R}^6$ é dado, em coordenadas cartesianas, por:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(\lambda + \alpha(x^2 + y^2) + \beta(p^2 + q^2) + \gamma(u^2 + z^2) + \delta((p^2 + q^2)^2 - (x^2 + y^2)(u^2 + z^2))) - \xi y \\ \dot{y} = y(\lambda + \alpha(x^2 + y^2) + \beta(p^2 + q^2)^2 + \gamma(u^2 + z^2) + \delta((p^2 + q^2)^2 - (x^2 + y^2)(u^2 + z^2))) + \xi x \\ \dot{p} = p(\lambda + \alpha(p^2 + q^2) + \beta(u^2 + z^2) + \gamma(x^2 + y^2) + \delta((u^2 + z^2)^2 - (x^2 + y^2)(p^2 + q^2))) - \eta q \\ \dot{q} = q(\lambda + \alpha(p^2 + q^2) + \beta(u^2 + z^2) + \gamma(x^2 + y^2) + \delta((u^2 + z^2)^2 - (x^2 + y^2)(p^2 + q^2))) + \eta p \\ \dot{u} = u(\lambda + \alpha(u^2 + z^2) + \beta(x^2 + y^2) + \gamma(p^2 + q^2) + \delta((x^2 + y^2)^2 - (u^2 + z^2)(p^2 + q^2))) - \varrho z \\ \dot{z} = z(\lambda + \alpha(u^2 + z^2) + \beta(x^2 + y^2) + \gamma(p^2 + q^2) + \delta((x^2 + y^2)^2 - (u^2 + z^2)(p^2 + q^2))) + \varrho u \end{cases} \quad (5.4)$$

onde $x^2 + y^2 + p^2 + q^2 + u^2 + z^2 = r^2$. Seja $F_6 : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^6$ o campo de vectores tal que o sistema (5.4) pode ser escrito como $\dot{x} = F_6(x, \lambda)$, com $x \in \mathbb{R}^6$.

5.2 Grupo de Simetrias do Sistema em $\mathbb{R}^6$

As simetrias do sistema (5.4) em $\mathbb{R}^6$ advêm do efeito das rotações e da simetria do sistema (4.1) em $\mathbb{R}^4$, ficando definidas pelas acções:

$$\begin{aligned} \zeta: \mathbb{R}^6 & \rightarrow \mathbb{R}^6 \\ (x, y, p, q, u, z) & \mapsto (x \cos \psi - y \sin \psi, x \sin \psi + y \cos \psi, p, q, u, z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta: \mathbb{R}^6 & \rightarrow \mathbb{R}^6 \\ (x, y, p, q, u, z) & \mapsto (x, y, p \cos \theta - q \sin \theta, p \sin \theta + q \cos \theta, u, z) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \tau: \mathbb{R}^6 & \rightarrow \mathbb{R}^6 \\ (x, y, p, q, u, z) & \mapsto (x, y, p, q, u \cos \nu - z \sin \nu, u \sin \nu + z \cos \nu) \end{aligned}$$

onde $\psi, \theta, \nu \in \mathbb{R}$. Seja Ω o grupo de Lie definido por $\langle \zeta, \eta, \tau \rangle$. Pelo modo como Ω está definido, Ω é um grupo de Lie compacto. Analogamente ao que foi feito anteriormente, representam-se os grupos $\langle \zeta \rangle$, $\langle \eta \rangle$ e $\langle \tau \rangle$ por $SO(2)(\zeta)$, $SO(2)(\eta)$ e $SO(2)(\tau)$, respectivamente. Se não houver perigo de ambiguidade, poderão ser simplesmente denotados por $SO(2)$. Assim, é fácil provar que:

Lema 5.2 *O sistema de equações (5.4) em $\mathbb{R}^6$ é equivariante pelo grupo Ω , o qual é isomorfo a $SO(2)^3$.*

Os subespaços de simetria não triviais da acção de Ω em $\mathbb{R}^6$ são enumerados no lema que se segue.

Lema 5.3 *Os subespaços de simetria não triviais da acção de Ω em $\mathbb{R}^6$ são:*

1. $Fix(SO(2)(\zeta)) = \{(x, y, p, q, u, z) \in \mathbb{R}^6 : x = y = 0\}$
2. $Fix(SO(2)(\eta)) = \{(x, y, p, q, u, z) \in \mathbb{R}^6 : p = q = 0\}$
3. $Fix(SO(2)(\tau)) = \{(x, y, p, q, u, z) \in \mathbb{R}^6 : u = z = 0\}$
4. $Fix(SO(2)(\zeta) \times SO(2)(\eta)) = \{(x, y, p, q, u, z) \in \mathbb{R}^6 : x = y = p = q = 0\}$
5. $Fix(SO(2)(\zeta) \times SO(2)(\tau)) = \{(x, y, p, q, u, z) \in \mathbb{R}^6 : x = y = u = z = 0\}$
6. $Fix(SO(2)(\eta) \times SO(2)(\tau)) = \{(x, y, p, q, u, z) \in \mathbb{R}^6 : p = q = u = z = 0\}$

5.3 Dinâmica do sistema em $\mathbb{R}^6$

Teorema 5.4 *Se $\lambda > 0$, $\beta + \gamma = 2\alpha$, $\beta < \alpha < \gamma < 0$ e ξ, η e $\varrho \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, o fluxo do sistema de equações (5.4) satisfaz o seguinte:*

1. *a superfície esférica de dimensão 5, S_R^5 , de centro na origem e com raio $R = \sqrt{-\frac{\lambda}{\alpha}}$ é invariante pelo fluxo e globalmente atractora.*
2. *a origem é o único ponto de equilíbrio do sistema e é repulsora.*
3. *restrito à superfície esférica de dimensão 5, S_R^5 , possui três trajectórias que são selas invariantes, definidas por:*

$$x^2 + y^2 = -\frac{\lambda}{\alpha} \quad \wedge \quad p = q = u = z = 0,$$

$$p^2 + q^2 = -\frac{\lambda}{\alpha} \quad \wedge \quad x = y = u = z = 0$$

e

$$u^2 + z^2 = -\frac{\lambda}{\alpha} \quad \wedge \quad x = y = p = q = 0,$$

e que serão denotadas por c_1 , c_2 e c_3 , respectivamente.

Prova. A alínea 1 decorre da observação que se segue à proposição 5.1.

A trajectória periódica c do sistema em $\mathbb{R}^4$ está contida em $Fix(\mathbb{Z}_2(s)) \cup Fix(\mathbb{Z}_2(t))$, sendo portanto preservada pelas duas rotações e corresponde à trajectória periódica c_1 do sistema em $\mathbb{R}^6$. Os dois pontos de equilíbrio p_{v+} e p_{v-} do sistema em $\mathbb{R}^4$ estão contidos em $Fix(\mathbb{Z}_2(t))$, dando origem à trajectória periódica c_2 através da rotação em torno do hiperplano $Fix(\mathbb{Z}_2(s))$, trajectória que é preservada pela rotação em torno de $Fix(\mathbb{Z}_2(t))$. Os dois pontos de equilíbrio p_{w+} e p_{w-} do sistema em $\mathbb{R}^4$ estão contidos em $Fix(\mathbb{Z}_2(s))$ e dão origem à trajectória c_3 através da rotação em torno do hiperplano $Fix(\mathbb{Z}_2(t))$.

Do facto de uma rotação não poder gerar novos pontos de equilíbrio, fica demonstrado que a origem é o único ponto de equilíbrio do sistema (5.4). Este ponto de equilíbrio é obtido por (duplo) levantamento da origem do sistema em $\mathbb{R}^4$. Assim, uma vez que a parte real dos valores próprios dos equilíbrios é invariante pelo efeito da rotação e dado que a origem em $\mathbb{R}^4$ é repulsora, vem que a origem em $\mathbb{R}^6$ também o é. Com efeito, os valores próprios da linearização do campo de vectores F_6 na origem são

$$\lambda \pm \xi i \quad , \quad \lambda \pm \eta i \quad \text{e} \quad \lambda \pm \nu i.$$

Analogamente ao que se fez no capítulo 4, para ver que as trajectórias $\{c_j\}_{j=1}^3$ são selas, basta analisar as partes reais dos expoentes característicos de cada uma das trajectórias, admitindo que a velocidade angular (de rotação) é 1. Os expoentes característicos não nulos associados a cada uma das trajectórias não dependem da trajectória considerada e são dados por:

$$-2\lambda, \lambda - \frac{\beta\lambda}{\alpha} + \frac{\delta\lambda^2}{\alpha^2} \pm i \text{ e } \frac{\lambda(\alpha - \gamma)}{\alpha} \pm i.$$

Assim, se $j \in \{1, 2, 3\}$, decorre do *Teorema da Variedade Estável para Trajectórias Periódicas* (teorema 2.3), a existência de $W^u(c_j)$ e $W^s(c_j)$, com dimensões 3 e 4. Tendo em conta que c_j é um compacto invariante pelo fluxo, conclui-se que a trajectória c_j é uma sela. ■

O lema que se segue permitirá relacionar mais facilmente as intersecções das variedades instável e estável das selas c_1 , c_2 e c_3 . A prova é análoga à que foi feita para o lema 4.4.

Lema 5.5 *Restrito a S_R^5 e relativamente ao sistema (5.4), tem-se:*

1. $W^s(c_1) = \{(x, y, p, q, u, z) \in \mathbb{R}^6 : x^2 + y^2 + u^2 + z^2 = R^2 \wedge p = q = 0\}$
2. $W^u(c_1) = \{(x, y, p, q, u, z) \in \mathbb{R}^6 : x^2 + y^2 + p^2 + q^2 = R^2 \wedge u = z = 0\}$
3. $W^u(c_2) = \{(x, y, p, q, u, z) \in \mathbb{R}^6 : p^2 + q^2 + u^2 + z^2 = R^2 \wedge x = y = 0\}$
4. $W^s(c_2) = \{(x, y, p, q, u, z) \in \mathbb{R}^6 : x^2 + y^2 + p^2 + q^2 = R^2 \wedge u = z = 0\}$
5. $W^u(c_3) = \{(x, y, p, q, u, z) \in \mathbb{R}^6 : x^2 + y^2 + u^2 + z^2 = R^2 \wedge p = q = 0\}$
6. $W^s(c_3) = \{(x, y, p, q, u, z) \in \mathbb{R}^6 : p^2 + q^2 + u^2 + z^2 = R^2 \wedge x = y = 0\}$

A intersecção dos hiperplanos de simetria $Fix(SO(2)(\eta) \times SO(2)(\tau))$, $Fix(SO(2)(\zeta) \times SO(2)(\tau))$ e $Fix(SO(2)(\zeta) \times SO(2)(\eta))$ com S_R^5 corresponde às trajectórias periódicas c_1 , c_2 e c_3 respectivamente. A intersecção de cada um dos hiperplanos de simetria $Fix(SO(2)(\zeta))$, $Fix(SO(2)(\tau))$ e $Fix(SO(2)(\eta))$ com S_R^5 corresponde a uma 3-superfície esférica invariante pelo fluxo. Seja $\mathcal{T}$ a união das três 3-superfícies esféricas invariantes. Então, tem-se

$$\mathcal{T} = \bigcup_{j=1}^3 [c_j \cup W^s(c_j) \cup W^u(c_j)].$$

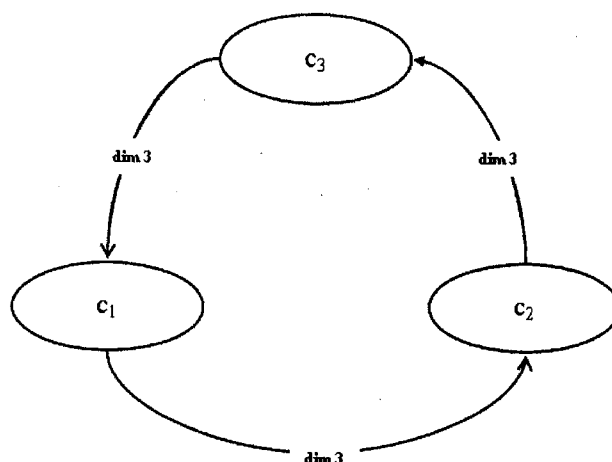


Figura 5.1: Representação esquemática da rede heteroclínica presente na dinâmica do sistema (5.4).

No teorema que se segue, enuncia-se que $\mathcal{T}$ é um ciclo heteroclínico assintoticamente estável. Contrariamente ao que foi feito no sistema em $\mathbb{R}^4$, não se vai aplicar o critério de Krupa e Melbourne; usando as propriedades dos levantamentos de conjuntos enunciadas na proposição 5.1, decorre facilmente que:

Teorema 5.6 *Na dinâmica do sistema (5.4), $\mathcal{T}$ é um ciclo heteroclínico assintoticamente estável associado às selas c_1 , c_2 e c_3 . Todas as ligações heteroclínicas entre as selas têm dimensão 3.*

Prova. Usando o lema 5.5, é fácil concluir que $\mathcal{T}$ é um ciclo heteroclínico envolvendo as três trajetórias c_1 , c_2 e c_3 . Usando a alínea 3 da proposição 5.1, decorre a estabilidade assintótica da rede. Finalmente, quanto às dimensões das ligações heteroclínicas, basta notar que

$$\begin{aligned} W^u(c_1) \cap W^s(c_2) &= \{(x, y, p, q, u, z) \in \mathbb{R}^6 : x^2 + y^2 + p^2 + q^2 = R^2 \wedge u = z = 0\}, \\ W^u(c_2) \cap W^s(c_3) &= \{(x, y, p, q, u, z) \in \mathbb{R}^6 : p^2 + q^2 + u^2 + z^2 = R^2 \wedge x = y = 0\} \end{aligned}$$

e

$$W^u(c_3) \cap W^s(c_1) = \{(x, y, p, q, u, z) \in \mathbb{R}^6 : x^2 + y^2 + u^2 + z^2 = R^2 \wedge p = q = 0\}$$

são variedades de dimensão 3. ■

Proposição 5.7 *Na dinâmica do sistema (5.4), existe um toro de dimensão 3 que é repulsor, quando restrito à variedade S_R^6 .*

Prova. A proposição 4.6 garante a existência, em $\mathbb{R}^4$, de quatro circunferências repulsoras definidas pelas equações

$$x^2 + y^2 = -\frac{\lambda}{3\alpha} \quad \wedge \quad v = \pm \sqrt{-\frac{\lambda}{3\alpha}} \quad \wedge \quad w = \pm \sqrt{-\frac{\lambda}{3\alpha}}.$$

Rodando-as em torno de $Fix(\mathbb{Z}_2(s))$, estes equilíbrios relativos geram dois toros de dimensão 2 definidos por

$$x^2 + y^2 = -\frac{\lambda}{3\alpha} \quad \wedge \quad p^2 + q^2 = -\frac{\lambda}{3\alpha} \quad \wedge \quad w = \pm \sqrt{-\frac{\lambda}{3\alpha}}.$$

Usando um processo análogo, rodando em torno de $Fix(\mathbb{Z}_2(t))$, o toro de dimensão 2 dá origem a um toro 3-dimensional definido por

$$x^2 + y^2 = -\frac{\lambda}{3\alpha} \quad \wedge \quad p^2 + q^2 = -\frac{\lambda}{3\alpha} \quad \wedge \quad u^2 + z^2 = -\frac{\lambda}{3\alpha}.$$

Usando a proposição 5.1, esta variedade é um equilíbrio relativo uma vez que é invariante pelo fluxo e é invariante pela acção do grupo Ω . Assim, a parte real dos valores próprios da linearização de F_6^N em qualquer ponto das trajectórias que constituem o toro tridimensional não depende do ponto escolhido (Field [8]). Tomando, por exemplo, o ponto de coordenadas $(\sqrt{-\frac{\lambda}{3\alpha}}, 0, \sqrt{-\frac{\lambda}{3\alpha}}, 0, \sqrt{-\frac{\lambda}{3\alpha}}, 0)$, os valores próprios da linearização de F_6^N têm todos parte real positiva, quando restritos à variedade S_R^6 . Fica, deste modo, provado que o toro é hiperbólico e repulsor. ■

5.4 Simulação numérica em DSTOOL

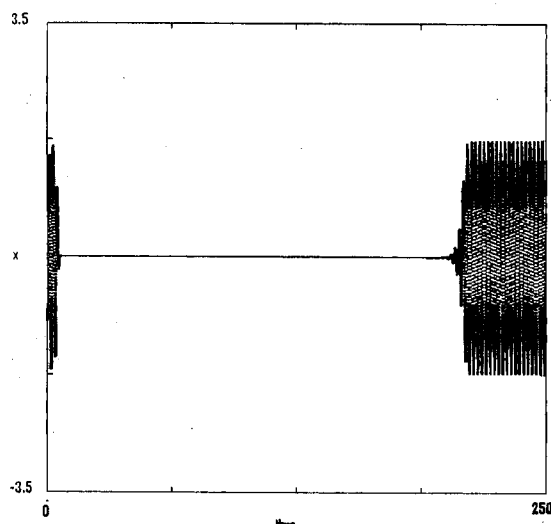
O comportamento de uma trajectória com condição inicial perto de um ciclo heteroclínico assintoticamente estável é o seguinte: quando a trajectória se aproxima de uma das selas invariantes, permanece lá por um período de tempo e afasta-se ao longo de uma ligação heteroclínica para a sela seguinte, onde permanecerá por um período de tempo mais longo. Em seguida, irá ao longo de outra ligação heteroclínica para perto da sela seguinte, e assim sucessivamente.

Nesta secção, são apresentadas séries temporais que evidenciam a existência do ciclo heteroclínico entre as três trajectórias periódicas c_1 , c_2 e c_3 . Fixada a condição inicial

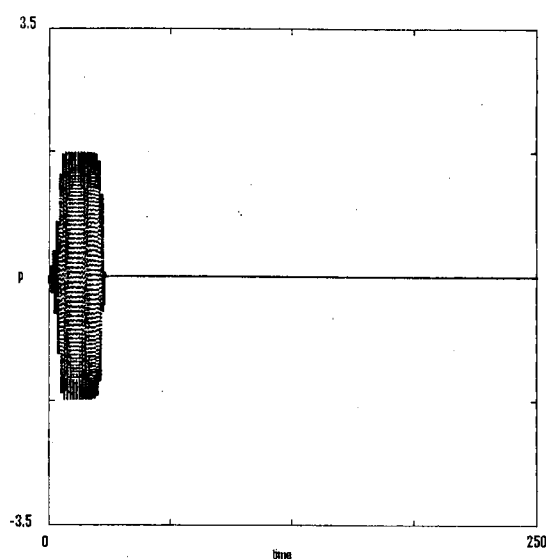
$$r_0 = (0.289, -0.799, 0.001, -0.081, 0.001, 0.278),$$

fora dos planos coordenados, constata-se que a trajectória $\phi(t, r_0)$ inicia um movimento em torno de c_1 , sendo posteriormente captada para junto da trajectória c_2 . Mais tarde, aproxima-se da sela c_3 , voltando a c_1 e repetindo indefinidamente o movimento. Este comportamento evidencia o facto da variedade instável de c_j intersectar a variedade estável de $c_{j+1(\text{mod } 3)}$, tendo corroborado a conjectura da existência do ciclo heteroclínico entre as selas $\{c_j\}_{j=1}^3$. Dado que a trajectória converge para o ciclo heteroclínico, ela aproxima-se cada vez mais das selas invariantes e consequentemente permanece perto delas por períodos de tempo cada vez mais longos. Este comportamento de *intermitência* confirma a estabilidade assintótica do ciclo $\mathcal{T}$.

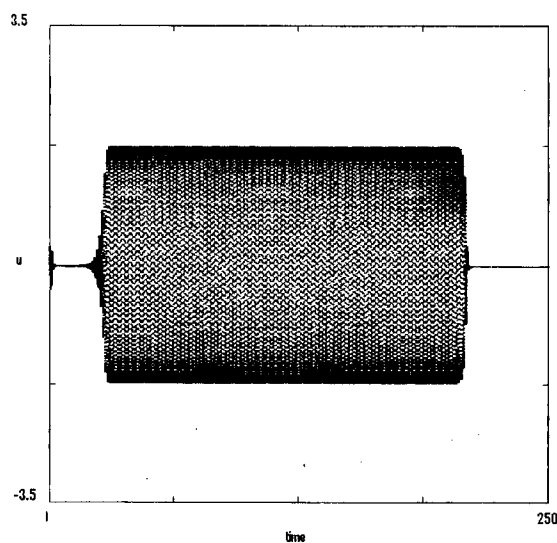
As séries temporais apresentadas foram obtidas, usando a ferramenta DSTOOL (Guckenheimer [14]). O DSTOOL é um programa de computador para a investigação interactiva, simulação numérica e visualização de sistemas dinâmicos discretos e contínuos. Permite, por exemplo, efectuar projecções de trajectórias de um sistema dinâmico em planos do espaço de fase, fixada uma condição inicial, bem como estudar as séries temporais correspondentes (ver programa usado em *Apêndice A*).



Série temporal da variável x , para $\phi(t, r_0)$, com $\lambda = 1$, $\alpha = -\frac{1}{3}$, $\beta = -\frac{1}{2}$, $\gamma = -\frac{1}{6}$, $\delta = -0.05$, $\xi = 3$, $\eta = 2$ e $\varrho = -1$.



Série temporal da variável p , para $\phi(t, r_0)$, com $\lambda = 1$, $\alpha = -\frac{1}{3}$, $\beta = -\frac{1}{2}$, $\gamma = -\frac{1}{6}$, $\delta = -0.05$, $\xi = 3$, $\eta = 2$ e $\varrho = -1$.



Série temporal da variável u , para $\phi(t, r_0)$, com $\lambda = 1$, $\alpha = -\frac{1}{3}$, $\beta = -\frac{1}{2}$, $\gamma = -\frac{1}{6}$, $\delta = -0.05$, $\xi = 3$, $\eta = 2$ e $\varrho = -1$.

Capítulo 6

Trabalho Futuro

Se, no sistema em $\mathbb{R}^6$, se identificarem as velocidades angulares, isto é, se $\xi = \eta = \varrho$, então o sistema (5.4) é equivariante por um grupo Ψ isomorfo a $SO(2)^3 \times \mathbb{Z}_3$ (recorde-se que em $\mathbb{R}^3$, o sistema (3.1) é equivariante por um grupo isomorfo a $\mathbb{Z}_3 \ltimes (\mathbb{Z}_2)^3$ (Field [9])). Nessas condições, as trajectórias periódicas c_1 , c_2 e c_3 constituem uma órbita de grupo pela acção de $\mathbb{Z}_3$. De igual modo, as ligações heteroclínicas entre as três trajectórias periódicas constituem uma órbita de grupo pela mesma acção.

Considere-se o fluxo na restrição à variedade compacta S_R^5 . De acordo com o exposto na secção 2.5 de Aguiar [1] e tendo em conta a relação de equivalência $\sim$ definida na secção 1.2.1 desta tese, podem-se identificar elementos que pertencem à mesma órbita de grupo, obtendo-se um espaço quociente em $S_R^5/\mathbb{Z}_3$, denominado *espaço das órbitas*. Sendo o fluxo, em S_R^5 , diferenciável e o grupo de simetrias compacto, decorre que o fluxo no espaço das órbitas também é diferenciável (Aguiar [1]).

Identificando as três trajectórias periódicas e as três ligações heteroclínicas, o ciclo heteroclínico em S_R^5 induz uma ligação homoclínica para uma trajectória periódica no espaço das órbitas $S_R^5/\mathbb{Z}_3$.

De modo análogo ao que foi efectuado na secção 4.1.3.1 de Aguiar [1], deve ser possível perturbar o sistema em $\mathbb{R}^6$, com termos que quebrem a simetria $SO(2)^3$ mas que preservem a equivariância por $\mathbb{Z}_3$ e tal que as variedades instável e estável das trajectórias periódicas se intersectem transversalmente. Deste modo, no espaço das órbitas, a ligação homoclínica para a trajectória periódica estará contida na intersecção transversal das suas variedades invariantes.

Deverá assim ser possível provar, sob certas condições, a existência de comportamento caótico tipo ferradura de Smale na vizinhança do ciclo homoclínico em $S_r^5/\mathbb{Z}_3$ e portanto também do ciclo heteroclínico em S_R^5 entre as três trajectórias periódicas (Aguilar, Castro & Labouriau [3]).

Resumidamente, considerando-se uma secção transversal ao fluxo na vizinhança da trajectória periódica e definindo-se uma aplicação de Poincaré, o estudo da dinâmica na vizinhança da trajectória periódica pode ser reduzido ao estudo da dinâmica na vizinhança de um ponto homoclínico transversal da aplicação de Poincaré (secção 3.4 de Wiggins [33]). Mais concretamente, a órbita homoclínica para a trajectória periódica corresponde a uma órbita homoclínica para um ponto fixo. Tal órbita homoclínica está contida na intersecção transversal das variedades invariantes do ponto fixo. Nesta situação, sob certas condições, existe dinâmica tipo ferradura de Smale.

Apêndice A

Especificação do Programa DSTOOL

Seguidamente, é apresentado o programa de DSTOOL que permitiu a obtenção das séries temporais apresentadas no capítulo 5.

```
/* _____
```

This program is the property of:

Cornell University

Center for Applied Mathematics

Ithaca, NY 14853

and may be used, modified and distributed freely, subject to the following restrictions:

Any product which incorporates source code from the dstool program or utilities, in whole or in part, is distributed with a copy of that source code, including this notice. You must give the recipients all the rights that you have with respect to the use of this software. Modifications of the software must carry prominent notices stating who changed the files and the date of any change.

DsTool is distributed in the hope that it will be useful, but WITHOUT ANY WARRANTY; without even the implied warranty of FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE. The software is provided as is without any obligation on the part of Cornell faculty, staff or students to assist in its use, correction, modification or enhancement.

```
_____
```

EXEMPLO 1

ROTAÇÃO DO SISTEMA GUCKENHEIMER-HOLMES (PERTURBADO)
SISTEMA EM R^6

```
_____ */
```

```
#include <model_headers.h>
```

```
/* _____
```

Required function used to define the vector field or map.

The values of the vector field mapping at point x with parameter values p are returned in the pre-allocated array f . For vector fields, the last components of both f and x are time components. All arrays are indexed starting from 0.

```

_____/
int exemplo_R6(f,x,p)
double *f,*x,*p;
{
    double l;
    double R,a,b,c,d,k,g,h;

    l=p[0];
    R=1;
    a=-0.333333;
    b=-0.5;
    c=-0.166666;
    d=-0.05;
    k=3;
    g=2;
    h=-1;

    f[0]=x[0]*(1+a*(x[0]*x[0]+x[1]*x[1])+b*(x[2]*x[2]+x[3]*x[3])+c*(x[4]*x[4]+x[5]*x[5])+
    d*((x[2]*x[2]+x[3]*x[3])*(x[2]*x[2]+x[3]*x[3])*(x[2]*x[2]+x[3]*x[3])*(x[2]*x[2]+x[3]*x[3])-
    (x[0]*x[0]+x[1]*x[1])*(x[5]*x[5]+x[4]*x[4])))-k*x[1];
    f[1]=x[1]*(1+a*(x[0]*x[0]+x[1]*x[1])+b*(x[2]*x[2]+x[3]*x[3])+c*(x[4]*x[4]+x[5]*x[5])+
    d*((x[2]*x[2]+x[3]*x[3])*(x[2]*x[2]+x[3]*x[3])*(x[2]*x[2]+x[3]*x[3])*(x[2]*x[2]+x[3]*x[3])-
    (x[0]*x[0]+x[1]*x[1])*(x[5]*x[5]+x[4]*x[4])))+k*x[0];
    f[2]=x[2]*(1+a*(x[2]*x[2]+x[3]*x[3])+b*(x[4]*x[4]+x[5]*x[5])+c*(x[0]*x[0]+x[1]*x[1])+
    d*((x[4]*x[4]+x[5]*x[5])*(x[4]*x[4]+x[5]*x[5])*(x[4]*x[4]+x[5]*x[5])*(x[4]*x[4]+x[5]*x[5])-
    (x[0]*x[0]+x[1]*x[1])*(x[2]*x[2]+x[3]*x[3])))-g*x[3];
    f[3]=x[3]*(1+a*(x[2]*x[2]+x[3]*x[3])+b*(x[4]*x[4]+x[5]*x[5])+c*(x[0]*x[0]+x[1]*x[1])+
    d*((x[4]*x[4]+x[5]*x[5])*(x[4]*x[4]+x[5]*x[5])*(x[4]*x[4]+x[5]*x[5])*(x[4]*x[4]+x[5]*x[5])-
    (x[0]*x[0]+x[1]*x[1])*(x[2]*x[2]+x[3]*x[3])))+g*x[2];
    f[4]=x[4]*(1+a*(x[4]*x[4]+x[5]*x[5])+b*(x[0]*x[0]+x[1]*x[1])+c*(x[2]*x[2]+x[3]*x[3])+
    d*((x[0]*x[0]+x[1]*x[1])*(x[0]*x[0]+x[1]*x[1])*(x[0]*x[0]+x[1]*x[1])*(x[0]*x[0]+x[1]*x[1])-
    (x[4]*x[4]+x[5]*x[5])*(x[2]*x[2]+x[3]*x[3])))-h*x[5];
    f[5]=x[5]*(1+a*(x[4]*x[4]+x[5]*x[5])+b*(x[0]*x[0]+x[1]*x[1])+c*(x[2]*x[2]+x[3]*x[3])+
    d*((x[0]*x[0]+x[1]*x[1])*(x[0]*x[0]+x[1]*x[1])*(x[0]*x[0]+x[1]*x[1])*(x[0]*x[0]+x[1]*x[1])-
    (x[4]*x[4]+x[5]*x[5])*(x[2]*x[2]+x[3]*x[3])))+h*x[4];
}

```

```

/* -----
Optional function used to define the Jacobian m at point x with
parameters p. The matrix m is pre-allocated (by the routine dmatrix);
At exit, m[i][j] is to be the partial derivative of the i'th component
of f with respect to the j'th component of x.
----- */

/*
int user_jac(m,x,p)
double **m, *x, *p;
{
}
*/
/* -----
Optional function used to define the inverse or approximate inverse y at
the point x with parameter values p. The array y is pre-allocated.
----- */

/*
int user_inv(y,x,p)
double *y,*x,*p;
{
}
*/
/* -----
Optional function used to define aux functions f of the variables x
and parameters p. The array f is pre-allocated. Time is available as the
last component of x.
----- */

/*
int user_aux_func(f,x,p)
double *f,*x,*p;
{
}
*/
/* -----
Required procedure to define default data for the dynamical system. NOTE: You
may change the entries for each variable but PLEASE DO NOT change the list
of
items. If a variable is unused, NULL or zero the entry, as appropriate.
----- */

int exemplo_R6_init()
{
/* ----- define the dynamical system in this segment ----- */
int n_varb=6; /* dim of phase space */
static char *variable_names[] = {"x","y","p","q","r","s"}; /* list of phase varb
names */

```

```

static double variables[]={-0.5,-0.5,-0.5,-0.5,-0.5,-0.5}; /* default varb initial values
*/
static double variable_min[]={-3.5,-3.5,-3.5,-3.5,-3.5,-3.5}; /* default varb min for
display */
static double variable_max[]={3.5,3.5,3.5,3.5,3.5,3.5}; /* default varb max for
display */
static char *indep_varb_name="time"; /* name of indep variable */
double indep_varb_min=0.; /* default indep varb min for display */
double indep_varb_max=10000.; /* default indep varb max for display */
int n_param=1; /* dim of parameter space */
static char *parameter_names[]={"lambda"}; /* list of param names */
static double parameters[]={1.}; /* initial parameter values */
static double parameter_min[]={-1.}; /* default param min for display */
static double parameter_max[]={2.}; /* default param max for display */
int n_func=0; /* number of user-defined functions */
static char *func_names[]={}; /* list of func names; {} if none */
static double func_min[]={0.}; /* default func min for display */
static double func_max[]={0.}; /* default func max for display */
int manifold_type=EUCLIDEAN; /* PERIODIC (a periodic varb) or EUCLID-
EAN */
static int periodic_varb[]={FALSE, FALSE,FALSE,FALSE}; /* if PERIODIC,
which varbs are periodic? */
static double period_start[]={0.,0.}; /* if PERIODIC, begin fundamental domain
*/
static double period_end[]={1., 1.}; /* if PERIODIC, end of fundamental domain
*/
int mapping_toggle=FALSE; /* this is a map? TRUE or FALSE */
int inverse_toggle=FALSE; /* if so, is inverse FALSE, APPROX_INV, */
/* or EXPLICIT_INV? FALSE for vec field */
/* In this section, input NULL or the name of the function which contains... */
int (*def_name)()=exemplo_R6; /* the eqns of motion */
int (*jac_name)()=NULL; /* the jacobian (deriv w.r.t. space) */
int (*aux_func_name)()=NULL; /* the auxiliary functions */
int (*inv_name)()=NULL; /* the inverse or approx inverse */
int (*dfdt_name)()=NULL; /* the deriv w.r.t time */
int (*dfdparam_name)()=NULL; /* the derivs w.r.t. parameters */
/* ----- end of dynamical system definition ----- */
#include <ds_define.c>
}

```

Bibliografia

- [1] Aguiar, M.A.D., *Vector Fields with heteroclinic networks* (tese de doutoramento), Departamento de Matemática Aplicada, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, 2002
- [2] Aguiar, M.A.D., Castro S.B. & Labouriau, I.S., *Simple Vector Fields with Complex Behaviour*, Int. Jour. of Bifurcation and Chaos, Vol. 16, Nr.2, 2006 (*a ser publicado*)
- [3] Aguiar, M.A.D., Castro S.B. & Labouriau, I.S., *Dynamics near a heteroclinic network*, Nonlinearity 18, pág. 391 - 414, 2005
- [4] Ashwin, P. & Field M., *Heteroclinic Networks in Coupled Cell Systems*, Arch. Rational Mech. Anal., pág. 107 - 143, 1999
- [5] Chossat, P. & Lauterbach, R., *Methods in Equivariant Bifurcations and Dynamical Systems*, World Scientific, 2000
- [6] Dawes, J.H.P. & Postlethwaite, C.M., *Regular and irregular cycling near a heteroclinic network*, Nonlinearity 18, pág. 1477 - 1509, 2005
- [7] Devaney, R.L., *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems* (Second Edition), Addison-Wesley, 1989
- [8] Field, M., *Equivariant dynamical systems*, Transactions Amer. Math. Soc., vol. 259, Nr. 1, pág. 185 - 205, 1980
- [9] Field, M., *Lectures on bifurcations, dynamics and symmetry*, Pitman Research Notes in Mathematics Series, vol. 356, Longman, 1996
- [10] Field, M. & Swift, J.W., *Stationary bifurcation to limit cycles and heteroclinic cycles*, Nonlinearity 4, pág. 1001 - 1043, 1991
- [11] Fraleigh, J. B., *A first course in abstract algebra*, Addison-Wesley, 1973
- [12] Fulton, W. & Harris, J., *Representation Theory - A First Course*, Springer Verlag, 1991
- [13] Golubitsky, M., Stewart, I. & Schaeffer, D.G., *Singularities and Groups in Bifurcation Theory* (Vol. II), Springer, 2000

- [14] Guckenheimer J., Myers, M.R., Wicklin, F.J. & Worfolk P.A., *DsTool: A Dynamical System Toolkit with an Interactive Graphical Interface - User's Manual*, Version Tk Draft, Center For Applied Mathematics, Cornell University, 1997
- [15] Guckenheimer, J. & Holmes, P., *Structurally stable heteroclinic cycles*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 103, pág. 189 - 191, 1988
- [16] Hale, J. & Koçak, H., *Dynamics and Bifurcations*, Springer-Verlag, 1991
- [17] Hartman P., *Ordinary Differential Equations*, John Wiley and Sons, New York, 1964
- [18] Hirsch, M.W. & Smale, S., *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*, Academic Press, 1974
- [19] Hirsch, M.W., Pugh, C.C. & Shub, M., *Invariant Manifolds*, Springer-Verlag, 1977
- [20] Hou, C., *Symmetry Breaking and Heteroclinic Cycles* (tese de doutoramento), Department of Mathematics, University of Houston, 1995
- [21] Hou, C. & Golubitsky, M., *An Example of Symmetry Breaking to Heteroclinic Cycles*, Journal of Differential Equations 133, pág. 30 - 43, 1997
- [22] Hofbauer, J., *Heteroclinic cycles on the simplex*, Proc. Int. Conf. Nonlinear Oscillations, Janos Bolyai Math. Soc. Budapest, 1987
- [23] Katok, A. & Hasselblatt B., *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*, Cambridge University Press, 1995
- [24] Krupa, M., *Bifurcations of relative equilibria*, SIAM, J. Math. Anal, vol. 21, Nr. 6, pág. 1453 - 1486, 1990
- [25] Krupa, M. & Melbourne, I., *Asymptotic Stability of Heteroclinic Cycles in Systems with Symmetry*, Ergod. Th. & Dynam. Sys., vol. 15, pág. 121-147, 1995
- [26] Krupa, M. & Melbourne, I., *Asymptotic Stability of Heteroclinic Cycles in Systems with Symmetry, II*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 134A, pág. 1177 - 1197, 2004
- [27] Lauterbach, R. & Roberts, M., *Heteroclinic Cycles in Dynamical Systems with broken Spherical Symmetry*, Journal of Differential Equations, 100, pág. 22 - 48, 1992
- [28] Melbourne, I., *Intermittency as a Codimension-Three Phenomenon*, Journal of Dynamics and Differential Equations, pág. 347 - 367, 1989

- [29] Melbourne, I., Chossat, P. & Golubitsky, M., *Heteroclinic cycles involving periodic solutions in mode interactions with $O(2)$ symmetry*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 113 A, pág. 315 - 345, 1989
- [30] Palis, J., Melo, W., *Introdução aos Sistemas Dinâmicos*, Projecto Euclides, 1978
- [31] Perko, L., *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer Verlag, 1993
- [32] Sotomayor, J., *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, Projecto Euclides, 1979
- [33] Wiggins, S., *Global Bifurcations and Chaos*, Springer Verlag, 1988