

José Maria Eduardo Samuco

A Génese da Geometria Hiperbólica



*Tese submetida à Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
para a obtenção do grau de Mestre em Ensino da Matemática*

Departamento de Matemática Pura
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
Dezembro de 2005

O Presidente do Júri,
Carlo Correia de Sá
27 de Junho de 2006

José Maria Eduardo Samuco

A Génese da Geometria Hiperbólica

Reg. S09258
Cota TESE N.º 159



*Tese submetida à Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
para a obtenção do grau de Mestre em Ensino da Matemática*

Faculdade de Ciências do Porto
MATEMÁTICA

Departamento de Matemática Pura
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
Dezembro de 2005



FC

Biblioteca
Faculdade de Ciências
Universidade do Porto



0000100851

Agradecimentos

O meu testemunho de eterna e profunda gratidão vai para seis pessoas que de modo diferente tornaram possível este trabalho. Em primeiro lugar, ao meu pai por ter sugerido a minha candidatura ao mestrado e ter pago o valor das propinas. Em segundo lugar, à Doutora Rosário Pinto pela sua disponibilidade, atenção e dedicação dispensadas na orientação deste trabalho. Em terceiro lugar, ao meu filho, Eduardo, por ter sabido compreender a necessidade da minha ausência. Em quarto lugar, à Teresa Sousa por muito gentilmente me ter ajudado a traduzir alguns textos para português e o resumo deste trabalho para inglês. Finalmente, ao Luís Felipe Aguiar e ao Aníbal Neves por terem traduzido para francês, versões diferentes do resumo desta tese.

Resumo

Neste trabalho começa-se por fazer uma análise sobre a origem da geometria dedutiva, desde Tales de Mileto até ao seu expoente mais alto na Antiguidade Grega – Os Elementos de Euclides –, passando pela Escola Pitagórica, por Hipócrates de Quios e por Aristóteles.

Em virtude de o postulado das paralelas ter sido importante para a descoberta da Geometria Hiperbólica, é contada a sua história de forma breve.

Na sua obra “Euclides Livre de Todos os Erros” (1733), Gerolamo Saccheri, antecipou a descoberta da geometria não-euclidiana, por isso é feita uma análise do essencial do seu trabalho. Tal análise é complementada com uma descrição do trabalho de Lambert, que também descobriu resultados importantes, do ponto de vista de uma geometria alternativa à euclidiana.

A descoberta da primeira geometria não-euclidiana é devida a Gauss, Lobachevsky e Johann Bolyai. Por isso, faz-se uma descrição do papel de Gauss, seguida de uma análise detalhada do essencial do pequeno livro de Lobachevsky, publicado em 1840 com o título “Investigações Geométricas Sobre a Teoria das Paralelas”, e de uma comparação sumária das ideias de Lobachevsky e de J. Bolyai.

Summary

I will begin this work with the analysis of the deductive geometry origin, from Tales of Miletus to its greatest exponent in the Greek Antiquity – the Euclid's Elements –, as well as Pythagorean School, Hippocrates of Chios and Aristotle.

Due to its importance to the discovery of the Hyperbolic Geometry, I will briefly make the contextualisation of the Parallel Postulate.

In his work "Euclid Free from any Mistake" (1733), Gerolamo Saccheri anticipated the discovery of the non-Euclidean Geometry. Therefore, I will recall the most significant parts of his work. Such analysis will be complemented with a description of Lambert's work who also unveiled important results for an alternative to the Euclidean geometry.

Since the very first discovery of a non-Euclidean Geometry is attributed to Gauss, Lobachevsky and Johann Bolyai, I will mention Gauss's role and then provide a detailed analysis of the most essential parts of Lobachevsky's book, published in 1840, entitled "Geometrical Researches on the Theory of Parallels" and finally a brief comparison of Lobachevsky's and J. Bolyai's ideas will be provided as well.

Résumé

Dans ce travail on commence par faire une analyse sur l'origine de la géométrie déductive, de Tales de Milet jusqu'à son exposant plus haut dans l' Antiquité Grecque – Les Eléments de Euclide – en passant par l'École Pythagorique, par Hipocrate de Quios et par Aristote.

En vertu du postulat des parallèles avoir été important pour la découverte de la Géométrie Hyperbolique, son histoire est racontée d'une brève façon.

Dans son œuvre «Euclide Livre de Tous les Erreurs» (1733), Gerolamo Saccheri, a prévu la découverte de la géométrie non euclidienne, pour ça, une analyse de l'essentiel de son travail est faite. Tel analyse est complétée avec une description du travail de Lambert, qui a aussi découvert des résultats importants, du point de vue d'une géométrie alternative à celle de Euclide.

La découverte de la première géométrie non euclidienne est due à Guass, Lobachevsky et Johann Bolyai. À cause de ça, on fait une description du rôle de Gauss, suivie d'une analyse détaillée de l'essentiel du petit livre de Lobachevsky, publié en 1840 avec le titre «Investigations Géométriques Sur la Théorie des Parallèles», et d'une comparaison sommaire des idées de Lobachevsky et J. Bolyai.

ÍNDICE

Introdução	vi
Capítulo 1: A Origem da Geometria Dedutiva	1
1.1. De Tales de Mileto a Hipócrates de Quios.....	1
1.2. Os Elementos de Euclides	5
1.3. Breve história do postulado das paralelas de Euclides.....	7
Capítulo 2: Os Precursores da Geometria não-Euclidiana	11
2.1. Gerolamo Saccheri	12
2.2. Johann Heinrich Lambert	19
Capítulo 3: A Descoberta da Geometria Hiperbólica	22
3.1. O papel de Karl Friedrich Gauss	25
3.2. As descobertas de Lobachevsky e Johann Bolyai	28
3.3. A expansão da Geometria Hiperbólica.....	46
3.4. Modelos da Geometria Hiperbólica	48
Conclusão	51
Bibliografia.....	52
Índice Remissivo	54

Faculdade de Ciências do Porto
MATEMÁTICA

Introdução

Pretende-se com este trabalho caracterizar as circunstâncias que rodearam o aparecimento da primeira Geometria não-Euclidiana – a Geometria Hiperbólica, como hoje em dia se chama (graças à Félix Klein), sendo que Lobachevsky a chamou Geometria Imaginária e posteriormente Pangeometria (Geometria Universal).

Nessa perspectiva, este trabalho intitulado “A Génese da Geometria Hiperbólica” começa por uma análise das origens da geometria dedutiva, desde Tales de Mileto até ao seu expoente mais alto na Antiguidade – Os Elementos de Euclides –, passando pela Escola Pitagórica, por Hipócrates de Quios e por Aristóteles. A respeito de Euclides, é feita uma muito breve referência à sua geometria, nomeadamente aos termos primitivos, aos postulados e às noções comuns que apresentou no seu tratado.

O quinto postulado de Euclides ficou para a história por ter levantado muita controvérsia, em virtude de não ter sido aceite como tal. Nesse sentido, tal controvérsia é descrita de forma sumária.

Gerolamo Saccheri foi um dos muitos matemáticos que tentou provar o quinto postulado. No entanto, o seu trabalho foi muito mais longe e chegou a provar resultados que mais tarde foram descobertos pelos “pais” da Geometria Hiperbólica (Lobachevsky e Johann Bolyai). Por isso, Saccheri foi precursor desta geometria, sendo o capítulo 2 dedicado à análise do seu trabalho. De facto, nesse capítulo também se faz referência ao trabalho de Lambert, outro precursor da primeira geometria não-euclidiana, que também tentou provar o quinto postulado.

A descoberta da primeira geometria não-euclidiana é devida a Gauss, Lobachevsky e Johann Bolyai. Por isso, a tese termina com a descrição do papel de Gauss, seguida de uma análise detalhada do essencial do pequeno livro de Lobachevsky, publicado em 1840 com o título “Investigações Geométricas sobre a Teoria das Paralelas” (considerado o seu principal trabalho sobre Geometria não-Euclidiana), e de uma comparação sumária das ideias de Lobachevsky e de J. Bolyai, em virtude de estas serem muito semelhantes na sua essência.

Para fechar a contextualização histórica da descoberta da primeira geometria alternativa à Geometria Euclidiana, é feita uma exposição a respeito do acolhimento que a comunidade científica deu às publicações de Lobachevsky e J. Bolyai, bem como uma descrição de três modelos da Geometria Hiperbólica, os quais terão sido decisivos para a aceitação da nova geometria.

Capítulo 1: A Origem da Geometria Dedutiva

A palavra “geometria” tem origem no grego *geometrein* (*geo* significa terra e *metrein* significa medir), cujo significado é medição da terra.

As afirmações sobre a origem da geometria são necessariamente arriscadas, pois esta temática é mais antiga que a arte de escrever. Só nos últimos seis milénios é que o Homem se tornou capaz de passar a escrito os seus pensamentos e descobertas, numa carreira que pode ter atingido milhares de milénios. Para análises sobre a pré-história dependemos das interpretações que se baseiam nos poucos artefactos que restaram desse período e da extrapolação retroactiva, conjectural, a partir de documentos que “sobreviveram”, assim como do conhecimento de sociedade primitivas contemporâneas.

O historiador grego Heródoto, que viveu no século V antes de Cristo, defendia que a geometria tinha tido origem no Antigo Egipto como resultado da necessidade de medir terrenos depois da inundação anual do vale do rio Nilo. No entanto, sabe-se que outras civiliza  es antigas possuíam conhecimentos de carácter geométrico, como, por exemplo, as civiliza  es Babil  nica, Chinesa e Hindu.

1.1. De Tales de Mileto a Hipócrates de Quios

O primeiro nome grego associado    matemática    o de Tales de Mileto, que terá vivido na primeira metade do século VI a. C.. O relato de Eudemo-Proclo apresenta-o como tendo introduzido, na Grécia, a geometria (ou medi  o de terra) praticada no vale do rio Nilo:

“Tales, que tinha estado no Egipto, foi o primeiro a trazer essa teoria para a Grécia; ele próprio descobriu muitas coisas e ensinou os princípios de muitas delas aos seus sucessores, tratando umas de modo mais geral e outras de modo mais sensível.”

A tradição atribui a Tales de Mileto (624-547 a. C.) a proposição “um ângulo inscrito numa semi-circunferência é recto” e uma espécie de demonstração dessa proposição, bem como os quatro teoremas seguintes que se diziam provados por Tales:

- Um círculo é bissectado por um diâmetro;
- Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais;
- Os pares de ângulos opostos formados por duas rectas que se cortam são iguais;
- Se dois triângulos são tais que dois ângulos e um lado de um são iguais, respectivamente, a dois ângulos e um lado de outro, então os triângulos são iguais.

Por isso, Tales é frequentemente saudado como tendo sido o primeiro dos géometras a contribuir para o estabelecimento da geometria como teoria dedutiva. Embora a intuição, a descoberta empírica e a experimentação tenham sido consideradas por Tales, o estabelecimento da veracidade das proposições geométricas ficava a cargo do raciocínio dedutivo, da demonstração a partir de hipóteses conhecidas ou admitidas.

Tales era grego, como já foi referido, e viveu em Mileto, que naquele tempo estava no centro da cultura grega. Mileto situava-se na costa ocidental da Ásia Menor (actualmente Turquia). A apenas poucos quilómetros de Mileto ficava uma ilha chamada Samos, onde nasceu Pitágoras (c.571-496 a. C.) quando Tales tinha cerca de 50 anos.

Pitágoras deixou a Ásia Menor, e durante algum tempo estudou no Egipto. Por fim, por volta de 530 a. C., estabeleceu-se em Crotona, cidade do sul do que agora é a Itália, onde fundou um culto religioso e filosófico que cultivava a purificação do espírito através da música e da matemática. Os seus membros estavam sujeitos a um elevado grau de secretismo; por essa razão é impossível distinguir a autoria individual de ideias ou descobertas, sendo costume atribuir todo mérito colectivamente à Escola Pitagórica ou Escola de Crotona. Embora na antiguidade fosse usual dar todo o crédito ao mestre.

Os pitagóricos pensavam que os princípios das matemáticas eram os princípios de todas as coisas, pois tinham sido educados neles. Dos referidos princípios, os números eram, por natureza, os primeiros. Viam nos números as propriedades e as razões da harmonia. Todas as coisas pareciam para os pitagóricos serem formadas à semelhança dos números e os números pareciam-lhes ser a realidade primordial de toda a natureza, eles consideravam que os princípios dos números eram os elementos de todas as coisas, e que os céus eram uma razão musical e um número. Deste modo, pode-se resumir a maneira de encarar o universo, por parte pitagóricos, na

frase “tudo é número”. Para Pitágoras e os seus seguidores, a chave para a compreensão do mundo era o número, o que fez surgir a aritmética como a ciência por excelência.

Os pitagóricos continuaram o programa de Tales para fazer da geometria uma ciência dedutiva. Para esse fim, a sua grande contribuição foi a dramática descoberta da incomensurabilidade. O dramatismo da descoberta decorre do facto de esta contrariar a crença intuitiva dos primeiros pitagóricos, segundo a qual era possível encontrar uma medida comum¹ para quaisquer dois segmentos de recta; por outro lado, tal descoberta provocou uma enorme crise na Escola Pitagórica, por ter posto em causa os seus fundamentos filosóficos.

Supõe-se que as primeiras grandezas incomensuráveis a serem descobertas tenham sido segmentos de recta. O feito, como já se disse, terá sido obra dos pitagóricos, na medida em que as grandezas incomensuráveis ocorrem em figuras geométricas que lhes eram muito familiares. É de crer que os géometras da Escola de Crotona tenham querido saber qual a razão entre o lado e diagonal de um quadrado². Para o efeito terão procurado uma medida comum entre eles e aplicado subtracção recíproca aos dois segmentos de recta atrás referidos.

Na medida em que se tratou de uma descoberta que acabou com convicções fortemente instaladas, vale a pena reproduzir aqui aquela que poderá ter sido a prova da existência de grandezas incomensuráveis. Seja ABCD um quadrado de lado l e de diagonal d (figura 1.1). Para aplicar o processo de subtracção recíproca aos segmentos de recta l e d , os pitagóricos terão construído o segmento $d - l$ (note-se que l é menor que d) e marcado o segmento de recta AE, de comprimento l , sobre a diagonal AC; o segmento de recta EC tem comprimento $d - l$. Deste modo terão obtido geometricamente o segundo elemento do par de segmentos do processo de subtracção recíproca.

A construção do segmento diferença entre l e $d - l$ (obviamente $d - l$ é menor do que l) terá sido feita traçando a perpendicular à diagonal AC pelo ponto E. Chamando F ao ponto de intersecção da referida perpendicular com o lado CD do quadrado, o segmento de recta FD tem comprimento $d - l$ e, portanto, o segmento de recta CF tem comprimento $l - (d - l) = 2l - d$.

Como o ângulo ECF é metade de um recto e o ângulo CEF é recto, o triângulo ECF é isósceles e $EC = EF$. Por outro lado, uma vez que os triângulos AEF e ADF são congruentes, na

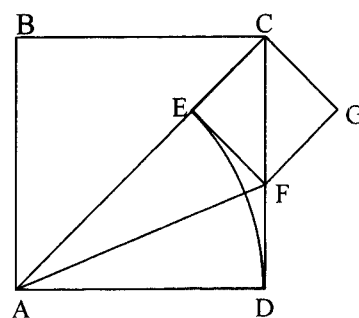


Figura 1.1

¹ Diz-se que um segmento XY é uma medida comum dos segmentos AB e CD, se existirem números inteiros m e n tais que $AB = mXY$ e $CD = nXY$.

² Também é provável que a descoberta de segmentos incomensuráveis tenha ocorrido num pentágono, quando se terá tentado encontrar uma medida comum entre o lado e a diagonal.

medida em que são rectângulos, têm um lado comum – as hipotenusas – e os catetos maiores iguais, conclui-se que $EF=FD$. Por conseguinte, $EC=FD$.

Nesta altura era necessário considerar um terceiro par para o processo de subtracção recíproca. Esse teria sido formado pelos comprimentos $d-l$ e $2l-d$, os quais terão sido associados aos segmentos de recta EC e CF , respectivamente, que são o lado e a diagonal do quadrado $CEFG$. Recorde-se que os elementos do primeiro par também eram o lado e diagonal de um mesmo quadrado.

Portanto, se se continuar o processo de subtracção recíproca, ao fim de mais dois passos obter-se-á um novo par de segmentos de recta que são o lado e diagonal de um mesmo quadrado, e assim sucessivamente.

Os pitagóricos terão constatado, assim, que deste modo nunca obteriam um par de segmentos de recta iguais, o que permitiria terminar o processo de subtracção recíproca. Por outro lado, sabiam que se l e d fossem comensuráveis o processo de subtracção recíproca terminaria ao fim de um número finito de passos. Chegados a este ponto, os pitagóricos terão concluído que da infinitude do processo de subtracção recíproca aplicado aos segmentos de recta l e d decorria, necessariamente, a sua incomensurabilidade, isto é, não existe uma medida comum para o lado e para a diagonal de um quadrado.

Nesta altura era evidente a perplexidade dos pitagóricos. Eles tinham a certeza, baseada na crença filosófica de que “tudo é número”, que dois segmentos de recta eram comensuráveis. Por outro lado, eles tinham igualmente a certeza, baseada na lógica e cálculo, que o lado e a diagonal de um quadrado não tinham uma medida comum.

Uma consequência importante da incomensurabilidade foi a separação dos domínios do numérico e do geométrico. As demonstrações da geometria que faziam uso da teoria das proporções tiveram de ser abandonadas, pois já não era lícito aplicar às grandezas aquilo que se sabia acerca dos números naturais. A matemática cindiu-se em dois domínios: a aritmética (ciência dos números, do discreto) e a geometria (ciência das grandezas, do contínuo).

Os matemáticos continuaram convencidos da veracidade de pelo menos algumas das proposições cujas provas tinham sido postas em causa e procuraram encontrar demonstrações alternativas para elas. Neste contexto, foi criada uma outra teoria das proporções (devida a Eudoxo de Cnido) que substituiu a teoria pitagórica, por ser aplicável a grandezas quer comensuráveis quer incomensuráveis. Por outro lado, adquiriu grande desenvolvimento um notável método de prova alternativo, usualmente designado por geometria das áreas.

A caminho do final do séc. V a. C. Hipócrates de Quios (384-322 a. C.) compilou os conhecimentos matemáticos da altura, num livro a que chamou Elementos. Não há notícia da existência de algum exemplar do livro de Hipócrates de Quios, pelo que apenas é possível conjecturar sobre o seu conteúdo. Com certeza o livro teria resultados da geometria de tradição

jónica e da aritmética de tradição pitagórica, os quais seriam os mais elementares, isto é, aqueles em que se baseariam os resultados mais complexos. “Nele seriam postuladas, pelo menos, as três construções geométricas mais simples: o traçado de uma recta passando por dois pontos dados, o prolongamento de uma recta dada, o traçado de uma circunferência com centro dado e passando por um ponto dado. O grau de desenvolvimento da geometria na segunda metade do século V a. C. já permitia a Hipócrates incluir no seu tratado uma apreciável quantidade de resultados sobre congruência de triângulos e sobre polígonos regulares inscritos em, e circunscritos a, circunferências” (*Carlos Sá, História da Matemática, p. 248*).

A composição dos Elementos de Hipócrates mostra que em meados do século V a. C., a tendência axiomática da matemática tinha atingido um nível relevante. A partir de então uma das preocupações dos géometras passou a ser a exposição dos conhecimentos num sistema de carácter dedutivo.

O primeiro tratado de lógica (ciência que estuda a estrutura do pensamento) de que há notícia foi o Organon (isto é, o instrumento do conhecimento) de Aristóteles (384-322 a.C.), onde apresentou as diferentes formas de que os raciocínios se podem revestir e desenvolveu uma teoria dos silogismos. Além disso, teorizou sobre as regras a que deve obedecer a exposição dedutiva do saber; os Elementos de Euclides constituíram um exemplo paradigmático de um tratado científico de concepção aristotélica. De acordo com esta, toda a ciência demonstrativa devia assentar num conjunto de primeiros princípios da teoria, que abrangiam as definições, as noções comuns e os postulados. Daí, todas as outras proposições deviam ser derivadas por via dedutiva.

1.2. Os Elementos de Euclides

Por volta de 300 a. C., a exposição de conhecimentos por via dedutiva teve o seu ponto mais alto, na Antiguidade, com a publicação dos Elementos de Euclides de Alexandria, em treze livros.

Na redacção do seu tratado, Euclides (c. 323-285 a. C.), que era discípulo da Escola Platónica, baseou-se nos seus predecessores gregos: os pitagóricos, Arquitas de Tarento, Eudoxo de Cnido e Teeteto de Atenas. Todavia, Euclides para além de expor a teoria destes mestres, e no que respeita à geometria, organizou as matérias de modo sistemático a partir de cinco postulados, cinco noções comuns e várias definições, procedendo ao desenvolvimento por via dedutiva. A organização e nível de rigor lógico dos Elementos de Euclides era tal que desde cedo se tornou num texto de referência de geometria, o que perdurou por mais de dois milénios, desde o século III a. C. até ao século XIX.

Embora Euclides tenha reconhecido a necessidade de proposições primitivas, isto é, proposições admitidas sem demonstração, não terá feito o mesmo com os conceitos, ou seja, não

enunciou conceitos não definidos a partir dos quais definiria outros – os conceitos derivados. Tentou sim, definir vários conceitos como ponto, recta e plano. Porém, não teve êxito, na medida em que foi incapaz de os exprimir apenas em função de outros conceitos de maior simplicidade e de clareza mais imediata. Assim, no primeiro livro dos Elementos, Euclides chamou ponto ao que não tem partes, linha a um comprimento sem largura, linha recta [segmento] a uma linha que assenta igualmente com todos os seus pontos, superfície ao que apenas tem comprimento e largura e superfície plana a uma superfície que assenta igualmente com todas as linhas rectas sobre ela. Das vinte e três definições apresentadas no primeiro livro dos Elementos merece igualmente destaque a seguinte:

Elementos I, definição 23: Linhas rectas paralelas são linhas que, estando no mesmo plano e sendo prolongadas indefinidamente em ambos os sentidos, não se encontram em nenhum dos sentidos.

A seguir às definições, Euclides enunciou os seus cinco postulados do seguinte modo:

Postulado 1: [É possível] Traçar uma linha recta de qualquer ponto a qualquer ponto.

Postulado 2: [É possível] Prolongar continuamente uma linha recta numa linha recta.

Postulado 3: [É possível] Traçar um círculo [uma circunferência] com quaisquer centro e distância.

Postulado 4: Todos os ângulos rectos são iguais entre si.

Postulado 5: Se uma linha recta incidir em duas linhas rectas e fizer os ângulos internos do mesmo lado menores [em conjunto] do que dois ângulos rectos, então as duas linhas rectas, se prolongadas indefinidamente, encontram-se do lado em que estão os ângulos menores do que dois ângulos rectos (figura 1.2).

O primeiro postulado garante a possibilidade de se traçar uma recta passando por dois pontos dados, o segundo garante a possibilidade de se prolongar uma recta dada em qualquer dos sentidos e o terceiro sustenta a possibilidade de se traçar uma circunferência com centro num ponto dado e passando por outro ponto dado.

O quarto postulado é importante para a formulação do quinto, o qual desde cedo levantou controvérsia por não ser tão evidente como os demais.

O quinto postulado, também conhecido por postulado das paralelas é curiosamente um enunciado sobre rectas concorrentes... O seu enunciado é um enunciado de existência: se a hipótese do enunciado se verificar (se a soma dos ângulos indicados for inferior a dois rectos) então existe um ponto de intersecção de duas rectas cortadas por uma transversal comum. Para confirmar que existe o ponto

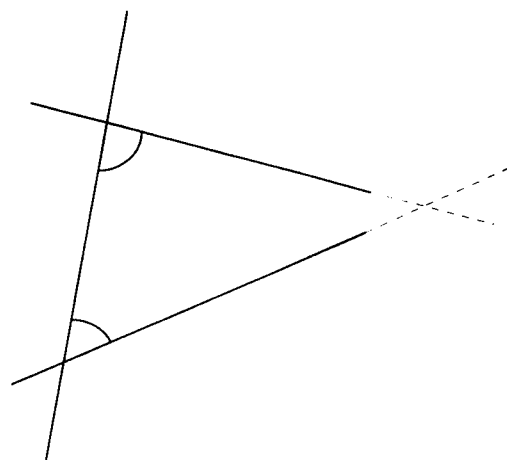


Figura 1.2

de intersecção não é preciso “ir ver onde ele está”, basta traçar uma secante às duas rectas e medir os ângulos internos de um dos lados.

O quinto postulado é uma das mais importantes e controversas componentes dos Elementos de Euclides e supõe-se que a sua inclusão, na lista de postulados foi um contributo do próprio Euclides para o avanço da matemática.

Depois dos postulados, Euclides apresentou cinco proposições, supostamente de conhecimento geral e universalmente aceites - as noções comuns. Na primeira, afirma que coisas que são iguais a uma mesma coisa são iguais entre si, na segunda refere que se iguais forem adicionados a iguais, então os todos são iguais, na terceira afirma que se iguais forem subtraídos de iguais, então os restantes são iguais, na quarta garante que coisas que coincidem com a mesma coisa são iguais entre si, e finalmente Euclides enuncia a quinta dizendo que o todo é maior do que a parte.

As três primeiras noções comuns encerram um carácter lógico. A quarta costuma ser considerada como garante implícito do movimento rígido que terá permitido a Euclides deslocar (mentalmente) figuras de uma posição para outra sem alterar as formas ou as dimensões de modo que, em caso de sobreposição, as figuras se considerem “iguais”. A quinta noção comum não merecerá polémica se se limitar a grandezas físicas como medidas de segmentos, ângulos, áreas e volumes. A sua aplicação não abarca os cardinais de conjuntos infinitos.

As noções comuns seguem-se, no livro I, quarenta e oito proposições que Euclides demonstra com base nos seus postulados e noções comuns, bem como com base em proposições previamente provadas.

1.3. Breve história do postulado das paralelas de Euclides

O postulado das paralelas é mais extenso do que os outros, incluindo as noções comuns. Por outro lado, Euclides só o utilizou pela primeira vez na demonstração da Proposição I, 29³. Talvez por isto, o quinto postulado terá sido considerado, pelos sucessores de Euclides, como sendo um teorema, posto indevidamente entre os postulados. Não era contestada a sua veracidade, mas a sua evidência.

Bem se procurou demonstrar o quinto postulado, ao longo de mais de dois mil anos. É claro que para ser convincente, uma demonstração do quinto postulado deve ser conduzida sem ele, isto é, no âmbito da geometria neutra. E se fosse possível demonstrá-lo nesta geometria, então ela compreenderia toda a geometria de Euclides. Todas as tentativas, por matemáticos de todas as

³ Proposição I, 29: Se uma recta intersecta duas rectas paralelas, então os ângulos alternos internos são iguais entre si, o ângulo externo é igual ao ângulo interno oposto e os ângulos internos do mesmo lado são iguais a dois ângulos rectos.

grandezas, foram goradas mas, em geral, alguma coisa se aprendeu com cada fracasso. Mais precisamente, a detecção do erro traduziu-se, quase sempre, na descoberta de uma proposição que se revelou ser equivalente ao postulado cuja prova se tentava fazer. Proposição essa que inadvertida ou tacitamente o autor da prova introduziu em seus argumentos.

Parece que o primeiro trabalho dedicado a esta temática foi o tratado de Arquimedes (287–212 a. C.), que se perdeu, intitulado “Sobre rectas paralelas” que apareceu algumas décadas após a publicação dos Elementos de Euclides.

Proclo, cujos comentários constituem uma das principais fontes de informação sobre a geometria dos gregos, criticou o quinto postulado de Euclides nos seguintes termos:

“Este deve ser absolutamente irradiado do conjunto dos postulados, porque é um teorema que envolve inúmeras dificuldades que Ptolomeu se propôs esclarecer num certo livro e cuja demonstração exige muitas definições e teoremas. Euclides, aliás, demonstra a proposição recíproca deste postulado (Proposição I, 17^a dos Elementos de Euclides) como sendo um teorema [...]. Resulta manifestamente do que precede que é preciso encontrar uma demonstração do teorema proposto e que ele difere da natureza especial dos postulados.”

Num outro comentário, agora à Proposição I, 29 dos Elementos de Euclides, Proclo apresentou a tentativa de demonstração do quinto postulado devida a Ptolomeu (c. 150 d. C.). Depois criticou-a, mostrando que ela contém um erro de raciocínio. De facto, Ptolomeu assumiu no seu argumento que por um ponto exterior a uma recta passa uma e uma só paralela a ela, o que é equivalente ao quinto postulado. A seguir, Proclo apresenta a sua própria tentativa, que também é inválida, pois ele assumiu que se uma recta corta uma de duas paralelas, corta também a outra; o que também é equivalente ao quinto postulado.

Os matemáticos árabes Ibn al-Haytham (965-1039) e Omar Khayyam (1048-1131) introduziram uma nova abordagem nas tentativas de demonstração do quinto postulado, utilizando o método de redução ao absurdo.

Ibn al-Haytham considerou um quadrilátero ABCD com três ângulos rectos A, B e C. Tentou provar que o quarto ângulo D também era recto e daí deduzir o quinto postulado. Para provar que as hipóteses “ângulo D agudo” e “ângulo D obtuso” levavam a uma contradição, ele admitiu que, se um ponto A descreve uma recta a e se um segmento AB de comprimento constante se desloca, permanecendo perpendicular à recta a , então o ponto B descreve uma recta. Contudo, este último enunciado é equivalente ao quinto postulado, pelo que a demonstração de Ibn al-Haytham não é válida.

⁴ Proposição I, 17: Em qualquer triângulo, dois ângulos quaisquer são menores do que dois ângulos rectos.

Também Omar Khayyam considerou um quadrilátero ABCD, porém com os dois ângulos da base A e B rectos e os dois lados (AD e BC) adjacentes à base iguais. “Mostrou” então que os ângulos C e D eram iguais e necessariamente rectos, visto que as hipóteses “C e D agudos” e “C e D obtusos” levavam a contradições. Isto permitiu a Omar Khayyam deduzir a Proposição I, 29 e daí o quinto postulado. Contudo na sua demonstração utilizou a afirmação segundo a qual duas perpendiculares à mesma recta são paralelas, o que é equivalente ao quinto postulado que pretendia provar.

John Wallis (1616-1703) abandonou a ideia de equidistância, utilizada por antecessores seus na tentativa de prova do postulado das paralelas, e apresentou uma nova prova deste postulado baseada no seguinte axioma: Toda a figura tem uma semelhante de tamanho arbitrário.

De facto, Wallis usou o axioma apenas para triângulos. O qual, nesse caso, pode ter a seguinte redacção: dados um triângulo ABC e um segmento DE, existe um triângulo DEF, tendo DE como um dos seus lados, que é semelhante a ABC. Nesse sentido, importa referir que triângulos semelhantes são triângulos cujos vértices podem ser postos em

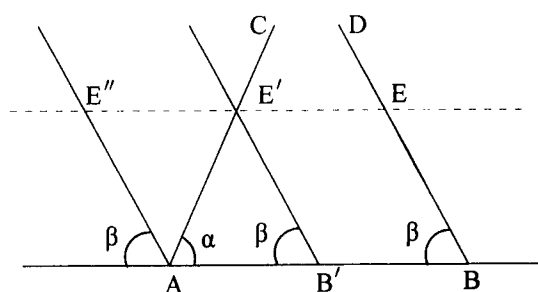


Figura 1.3

correspondência um para um de modo que os ângulos correspondentes sejam congruentes. Intuitivamente, o postulado de Wallis aplicado a triângulos quer dizer que podemos ampliar ou reduzir um triângulo, tanto quanto quisermos, sem o distorcer.

Wallis provou o postulado das paralelas, fazendo uso do seu postulado, começando por considerar a figura 1.3 em que as rectas AC e BD formam com a transversal AB dois ângulos α e β , que em conjunto são inferiores a dois ângulos rectos. A intenção de Wallis era mostrar que AC e BD se intersectam. Para o efeito considerou um ponto E pertencente à recta BD e deslocou, com continuidade, BD na direcção do ponto A de modo a preservar o ângulo β e até que B coincidisse com A. Quando B coincidir com A, o ponto E atinge a posição do ponto E'' do lado oposto de AC, tendo estado durante o deslocamento na posição de E' .

Chegado a este ponto Wallis socorreu-se do seu postulado, aplicando-o ao triângulo $AB'E'$ e ao segmento AB. E concluiu que o terceiro vértice do triângulo semelhante ao triângulo $AB'E'$, e que tem AB como um dos seus lados, é o ponto de intersecção das rectas AC e BD. Portanto, as rectas AC e BD intersectam-se do lado da recta AB em que fazem com esta ângulos cuja soma é menor do que dois ângulos rectos. Para Wallis o postulado das paralelas fica assim demonstrado. No entanto, esta prova de Wallis ficou ferida na sua validade, na medida em que o seu postulado é equivalente ao postulado das paralelas, que pretendia provar.

Os quadriláteros de Omar Khayyam e de Ibn al-Haytham serviram também de ponto de partida para as tentativas ensaiadas por outros dois actores importantes na história do postulado das paralelas, Saccheri e Lambert, respectivamente. Dada a importância do trabalho destes dois matemáticos, na perspectiva não euclidiana da geometria, este será analisado num capítulo reservado exclusivamente para esse efeito - o capítulo 2.

As muitas tentativas feitas pelo geómetra francês Adrien-Marie Legendre (1752-1833) para provar o quinto postulado, apareceram nas sucessivas edições do seu livro “Elementos de Geometria”, desde 1794 até 1823. Na 3ª. edição (c. 1800), provou independentemente do quinto postulado que a soma dos ângulos de um triângulo é menor ou igual a dois ângulos rectos. Depois desta prova, Legendre tentou mostrar que a soma não podia ser menor que dois ângulos rectos, o que não conseguiu. Este resultado permitir-lhe-ia concluir que a soma dos ângulos de um triângulo é igual a dois ângulos rectos (Proposição I, 32) e daí provar o quinto postulado.

Para terminar esta (muito) breve história do quinto postulado, importa referir que o matemático escocês John Playfair (1748-1819) foi responsável por se ter substituído o quinto postulado de Euclides nos tratados modernos de Geometria Euclidiana, por um postulado de formulação mais simples (e equivalente ao de Euclides) com o seu nome, embora Proclo de Lícia já o tivesse enunciado. O postulado de Playfair diz o seguinte: por um ponto exterior a uma recta passa uma e uma só recta paralela à dada.

Capítulo 2: Os Precursores da Geometria não-Euclidiana

Como tudo (ou quase tudo) na matemática, a Geometria Hiperbólica não apareceu do nada. Foi o resultado de um longo processo, que sem dúvida teve o seu início quando se levantaram vozes discordantes em relação ao quinto postulado de Euclides.

No tempo daqueles que aqui são chamados precursores da Geometria não-Euclidiana (e em particular no tempo de Saccheri) acreditava-se que a Geometria Euclidiana era a verdadeira, no sentido da idealização correcta do espaço físico. Um dos grandes matemáticos da época de Saccheri, Isaac Barrow (1630-1677), professor de Newton, afirmou que os princípios desta geometria se aplicavam ao espaço físico por razões inatas, isto é, nasce connosco a capacidade de perceber o universo segundo o modelo euclidiano.

Na perspectiva da Geometria não-Euclidiana, o trabalho de Saccheri é notável. Ele demonstrou correctamente vários teoremas desta geometria, antecipando em um século resultados posteriores. Simplesmente foi vítima da noção preconcebida da sua época, de que a única geometria possível era a euclidiana. Para além das investigações de Saccheri, também as de Lambert podem ser consideradas como precursoras daquela geometria. O trabalho de ambos aproximou-se bastante de uma alternativa à geometria proposta por Euclides. Embora Saccheri tenha sido o primeiro a vislumbrar o estranho novo universo, este só foi dado a conhecer no século XIX por J. Bolyai e Lobachevsky.

2.1. Gerolamo Saccheri

Gerolamo Saccheri (1667–1733) era um padre jesuíta que foi professor de teologia e filosofia em vários colégios jesuítas, e depois de ter sido encorajado a estudar matemática por Tammasco Ceva foi professor de matemática na Universidade de Pavia. A sua obra mais conhecida é “Euclides Livre de Todos os Erros” de 1733, onde praticamente descobriu a primeira geometria não-euclidiana, sem o ter pressentido. A maior parte do trabalho de Saccheri na obra atrás referida é dedicada à prova do quinto postulado.

A característica distintiva do trabalho geométrico de Saccheri reside na sua lógica demonstrativa. Trata-se de um simples e particular método de raciocínio, de acordo com o qual ao assumir por hipótese que a proposição que se pretende provar é falsa, chega-se à conclusão que ela é verdadeira.

Adoptando esta ideia, Saccheri tomou como premissas as vinte e sete primeiras proposições apresentadas por Euclides no livro I dos Elementos, e assumiu como hipótese que o quinto postulado era falso. Entre as consequências desta hipótese, Saccheri procurava alguma proposição que lhe garantisse a veracidade do quinto postulado.

Antes de se entrar na análise do essencial do trabalho de Saccheri, do ponto de vista da geometria não-euclidiana, é importante notar que Euclides assumiu implicitamente que a recta é infinita na demonstração da Proposição I, 16⁵, visto que o seu argumento é essencialmente baseado na existência de um segmento que é o dobro de outro dado. Ao usar a proposição anterior no seu trabalho, Saccheri também assumiu tacitamente que a recta é infinita.

Finalmente note-se que Saccheri usou o postulado de Arquimedes⁶ e a hipótese de continuidade da recta para estender a todas as figuras de um determinado tipo certas propriedades admitidas como verdadeiras para uma única dessas figuras. A hipótese de continuidade foi usada por Saccheri de forma intuitiva: um segmento que passa continuamente de um comprimento a para um comprimento b , diferente de a , toma, durante a sua variação, todos os comprimentos intermédios entre a e b .

A figura principal de Saccheri é um quadrilátero em que dois lados opostos são congruentes e perpendiculares à base (figura 2.1a). O estudo de propriedades deste quadrilátero, que será aqui chamado quadrilátero de Saccheri, toma o primeiro lugar nas preocupações de Saccheri, que as formulou do seguinte modo:

Proposição I: *Se um quadrilátero ABCD tiver os ângulos consecutivos A e B rectos e os lados AD e BC iguais, então os ângulos C e D são iguais.*

⁵ Nesta proposição, Euclides garante que em qualquer triângulo, se um dos lados for prolongado, o ângulo externo é maior do que qualquer dos ângulos internos opostos.

⁶ Não será aqui analisada a sua aplicação.

Para provar esta proposição, Saccheri uniu os pontos A e C, e B e D (figura 2.1a). Aplicou a Proposição I, 4⁷ dos Elementos de Euclides aos triângulos CAB e DBA e concluiu que os segmentos DB e AC são iguais.

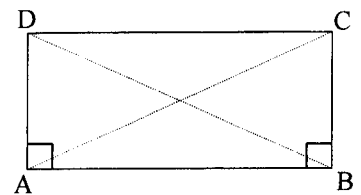


Figura 2.1a

Seguidamente, aplicou a Proposição I, 8⁸ dos Elementos de Euclides aos triângulos ACD e BDC e deduziu que os ângulos C e D são iguais.

Proposição II: *Se um quadrilátero ABCD tiver os ângulos consecutivos A e B rectos e os lados AD e BC iguais, o segmento que une os pontos médios M e N dos lados AB e CD, respectivamente, é perpendicular aos segmentos AB e CD.*

Saccheri provou esta propriedade, começando por aplicar a Proposição I, 4 dos Elementos de Euclides aos triângulos DAM e CBM (figura 2.1.b) e aos triângulos ADN e BCN para justificar que são iguais os segmentos, respectivamente, CM e DM, e NA e BN (note-se que pela Proposição I os ângulos C e D são iguais). Da comparação dos triângulos CNM e DNM, AMN e BMN, deduziu por aplicação da Proposição I, 8 dos Elementos de Euclides que o segmento MN é perpendicular à base e ao topo do quadrilátero da figura 2.1b.

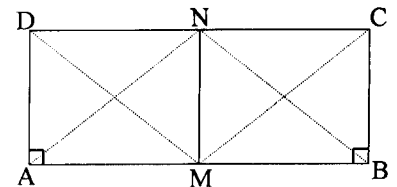


Figura 2.1b

Proposição III: *Se um quadrilátero ABCD tiver os ângulos consecutivos A e B rectos e os lados AD e BC iguais, então o lado CD é maior, igual ou menor que o lado AB, conforme os ângulos C e D sejam, respectivamente agudos, rectos ou obtusos.*

A demonstração da veracidade desta proposição, foi dividida em três partes por Saccheri. Na primeira, considerou que os ângulos C e D são rectos (figura 2.1c). Saccheri começou por supor que os segmentos CD e AB eram tais que $CD > AB$. Sobre o segmento CD considerou o segmento CK igual ao segmento AB e uniu A e K. Como os segmentos BA e CK são iguais e são perpendiculares a BC, os ângulos BAK e CKA serão iguais pela Proposição I, o que é absurdo pois BAK é, por construção, menor que o ângulo BAD que foi assumido como sendo recto. Saccheri socorreu-se da Proposição I, 16 de Euclides (ver a nota de rodapé no início desta secção), aplicada ao triângulo AKD e ao seu ângulo externo CKA, para concluir que este é maior que o ângulo CDA, o

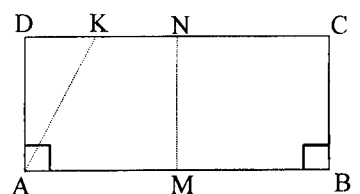


Figura 2.1c

⁷ Proposição I, 4: Se dois triângulos têm dois lados correspondentes iguais e o ângulo por eles formado igual, então os terceiros lados e os ângulos opostos aos lados iguais também são iguais.

⁸ Proposição I, 8: Se dois triângulos têm os três lados correspondentes iguais, então os ângulos compreendidos entre os lados iguais também são iguais.

qual é por hipótese um ângulo recto. Daqui Saccheri deduziu que nenhum dos segmentos de recta DC e AB é maior do que o outro se os ângulos C e D forem rectos e, consequentemente, os segmentos DC e AB são iguais.

Atendendo à figura 2.1c, onde M e N são os pontos médios dos segmentos a que pertencem (AB e CD), Saccheri prosseguiu a demonstração, considerando agora que C e D são obtusos. Os segmentos AM e DN são diferentes pois, caso contrário, o quadrilátero AMND teria dois ângulos rectos em M e N (pela Proposição II). E pela Proposição I, os ângulos A e D seriam iguais. No entanto, um deles é recto e o outro é obtuso.

Saccheri considerou então que $DN < AM$ pois, caso contrário, o segmento KN era tal que $KN = AM$, o quadrilátero AMNK teria dois ângulos rectos (em M e N); e pela Proposição I os ângulos NKA e KAM seriam iguais. Contudo, o ângulo NKA é obtuso pois é externo ao triângulo obtusângulo ADK e o ângulo KAM é agudo, visto que o ângulo MAD é recto. Daqui Saccheri concluiu que $DN < AM$ e, consequentemente, $CD < AB$.

Restava a Saccheri considerar que C e D eram ângulos agudos. Na figura 2.1d, sendo M e N os pontos médios dos segmentos AB e CD, respectivamente, fez notar que o segmento MN é perpendicular aos lados AB e CD, atendendo à Proposição II.

Para Saccheri $DN \neq AM$ pois, caso contrário, o quadrilátero AMND seria isósceles ($DN = AM$) e teria os ângulos A e D iguais pela Proposição I, o que não se verifica pois o ângulo A é recto e D é agudo. Então, afirmou que $DN > AM$ porque, se assim não for, considerando o segmento LN (figura 2.1d) igual ao segmento AM, o quadrilátero AMNL é isósceles ($LN = AM$), o qual tem dois ângulos rectos em M e N. Saccheri sabia que pela Proposição I, os ângulos A e L eram iguais e, portanto, estava diante de um absurdo, na medida em que o ângulo MAL é, por construção, maior que o ângulo MAD que, por hipótese, é recto e o ângulo NLA é, por construção, interno e oposto e, consequentemente, menor que o ângulo externo NDA, que por hipótese é agudo (considerando o triângulo LAD). Daqui Saccheri concluiu que na hipótese de C e D serem agudos, $DN > AM$ e, consequentemente, $CD > AB$.

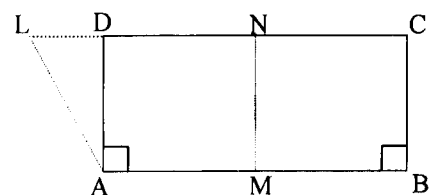


Figura 2.1d

Proposição IV: *Se um quadrilátero ABCD tiver os ângulos consecutivos A e B rectos e os lados AD e BC iguais, então se o lado CD é maior, igual ou menor que o lado AB, os ângulos C e D são, respectivamente, agudos, rectos ou obtusos.*

Para garantir a veracidade desta proposição, que representa o recíproco da anterior, Saccheri considerou que para os segmentos CD e AB se tem $CD = AB$ e os ângulos C e D são obtusos ou agudos. Da Proposição III sabia que sendo C e D obtusos ou agudos, então $CD < AB$ ou $CD > AB$,

respectivamente. Logo, $CD \neq AB$, o que é absurdo pois contraria a hipótese. Terminou referindo que do mesmo modo se provam os restantes casos.

Considere-se um quadrilátero de Saccheri ABCD (figura 2.1a). Sob a hipótese euclidiana (considerando o quinto postulado), os ângulos C e D são rectos. Portanto, se se assumir que ambos são obtusos ou agudos, está-se a negar implicitamente o quinto postulado. Saccheri estudou as três hipóteses relativamente aos ângulos C e D e nomeou-as do seguinte modo: a hipótese do ângulo recto, a hipótese do ângulo obtuso e a hipótese do ângulo agudo.

Os estudos de Saccheri conduziram-no a um resultado importante envolvendo a soma dos ângulos internos de um triângulo. Esta propriedade, no que concerne à hipótese do ângulo agudo, está em harmonia com a geometria de Lobachevsky.

Proposição IX: *Sob a hipótese do ângulo recto, do ângulo obtuso, ou do ângulo agudo, a soma dos ângulos internos de um triângulo é, respectivamente, igual a dois ângulos rectos, maior que dois ângulos rectos, ou menor que dois ângulos rectos.*

Para provar a afirmação anterior, Saccheri considerou o triângulo ABC (figura 2.2) rectângulo em B e obteve um quadrilátero traçando o segmento AD perpendicular ao segmento AB e igual ao segmento BC; e ligou C e D, obtendo o segmento CD.

Considerando em primeiro lugar a hipótese do ângulo recto, os triângulos ABC e ADC são iguais. Portanto, $\angle BAC = \angle DCA$ e $\angle CAD = \angle BCA$. Segue que, no triângulo ABC, $\angle A + \angle B + \angle C$ é igual a dois ângulos rectos.

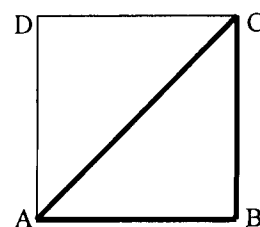


Figura 2.2

Na hipótese do ângulo obtuso, visto que $AB > DC$ (Proposição IV), tem-se $\angle ACB > \angle DAC$, atendendo à Proposição I, 25⁹ dos Elementos de Euclides. Portanto, no triângulo ABC tem-se $\angle A + \angle B + \angle C$ maior do que dois ângulos rectos.

Sob a hipótese do ângulo agudo, uma vez que $AB < DC$, tem-se $\angle ACB < \angle DAC$ e, portanto, no mesmo triângulo ABC, $\angle A + \angle B + \angle C$ é menor do que dois ângulos rectos.

A Proposição IX pode ser facilmente estendida para o caso de qualquer triângulo, dividindo-o em dois triângulos rectângulos. Na sua Proposição XV, Saccheri provou o recíproco por redução ao absurdo.

⁹ Proposição I, 25: Se dois lados de um triângulo são iguais a dois lados de outro, mas a base de um é maior que a base do outro, então o ângulo oposto à base maior é maior do que o ângulo oposto à base menor.

Com o intuito de rejeitar a hipótese do ângulo obtuso, Saccheri começou por provar uma relação entre o postulado de Euclides e duas das hipóteses para os ângulos de topo do quadrilátero de Saccheri.

Proposição XIII: *O quinto postulado é verdadeiro sob a hipótese do ângulo recto e sob a hipótese do ângulo obtuso.*

Na figura 2.3, AB e CD são duas rectas cortadas pela recta AC.

Supondo que $\angle BAC + \angle ACD$ é menor do que dois ângulos rectos, então um dos ângulos BAC ou ACD é agudo. Seja BAC o ângulo agudo.

Por C trace-se a perpendicular CH em relação a AB. No triângulo ACH, atendendo às hipóteses que foram feitas, tem-se que $\angle A + \angle C + \angle H$ é maior ou igual a dois ângulos

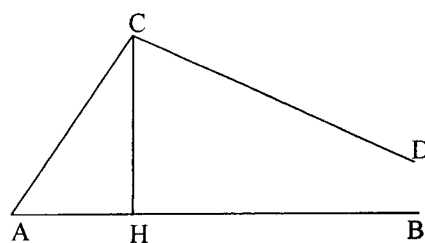


Figura 2.3

rectos. Todavia foi assumido que $\angle BAC + \angle ACD$ é menor do que dois ângulos rectos. Estes dois resultados mostram que $\angle AHC > \angle HCD$. Consequentemente, como o ângulo AHC é recto, o ângulo HCD tem que ser agudo. Com a conjugação proposições XI e XII¹⁰, que Saccheri provou, fica garantido que na hipótese do ângulo recto e na hipótese do ângulo obtuso, uma recta perpendicular a outra dada e uma recta que a corte num ângulo agudo intersectam-se. Deste modo, conclui-se que as rectas AB e CD intersectam-se.

Proposição XIV: *A hipótese do ângulo obtuso é absolutamente falsa, porque se destrói a si mesma.*

De facto, sob esta hipótese o postulado de Euclides verifica-se pela Proposição XIII e, consequentemente, os teoremas deduzidos do referido postulado também se verificam. Assim, a soma dos ângulos internos do quadrilátero de Saccheri é igual a quatro ângulos rectos, de modo que a hipótese do ângulo recto é verdadeira, o que é uma contradição¹¹.

Saccheri pretendia provar que o quinto postulado é verdadeiro em todos os casos. Consequentemente, decidiu destruir a hipótese do ângulo agudo, começando por mostrar a seguinte afirmação:

¹⁰ Proposição XI: Sob a hipótese do ângulo recto, uma recta perpendicular a uma recta dada e uma recta que a corte segundo um ângulo agudo intersectam-se.

Proposição XII: Sob a hipótese do ângulo obtuso, uma recta perpendicular a uma recta dada e uma recta que a corte segundo um ângulo agudo intersectam-se.

¹¹ É importante notar que nesta demonstração, Saccheri fez uso de um tipo especial de argumento. De facto, da assumption de que a hipótese do ângulo obtuso é verdadeira, chega-se à conclusão que a hipótese do ângulo recto é verdadeira. Esta é uma característica assumida, nestes casos, pelo argumento da redução ao absurdo ordinário.

Proposição XVII: *Sob a hipótese do ângulo agudo, sendo dada uma recta, pode ser traçada uma perpendicular a ela e uma recta que a corte segundo um ângulo agudo, as quais não se intersectam.*

Para construir estas rectas, considere-se um triângulo ABC rectângulo em C (figura 2.4). Pelo ponto B trace-se a recta BD fazendo o ângulo ABD igual ao ângulo BAC. Então, sob a hipótese do ângulo agudo, o ângulo CBD é agudo e as duas rectas CA e BD, que não se intersectam, segundo a Proposição I, 27¹² dos Elementos de Euclides, uma faz um ângulo recto com BC (a recta AC).

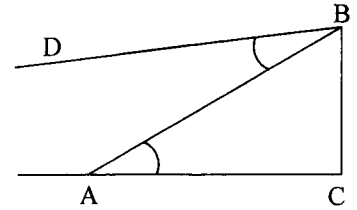


Figura 2.4

No que se segue, Saccheri assumiu apenas a hipótese do ângulo agudo, que como já se referiu tinha intenção de rejeitar. Sejam a e b (figura 2.5) duas rectas no mesmo plano que não se intersectam. As rectas A_1B_1 e A_2B_2 traçadas por A_1 e A_2 são perpendiculares a b . No caso de os ângulos A_1 e A_2 do quadrilátero $B_1B_2A_2A_1$ serem ambos agudos, Saccheri provou (na sua Proposição XXII) a existência de uma perpendicular comum usando a ideia de continuidade. De facto, se a recta A_1B_1 for movida continuamente, mantendo-se perpendicular a b até alcançar a posição A_2B_2 , o ângulo $B_1A_1A_2$ começa como um ângulo agudo e aumenta até se tornar obtuso. Por continuidade, existe uma posição intermédia AB na qual o ângulo BAA_2 é um ângulo recto. Então, AB é a perpendicular comum às duas rectas a e b .

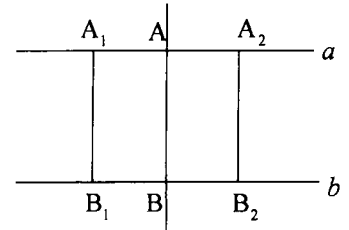


Figura 2.5

Com esta hipótese de existência de duas rectas complanares que não se intersectam, e que têm uma perpendicular comum, Saccheri provou (na sua Proposição XXIII) que tais rectas se aproximam cada vez mais uma da outra, e que a distância que as separa se torna mais pequena que qualquer segmento, tomado tão pequeno quanto se queira (na sua Proposição XXV). Por outras palavras, se existirem duas rectas complanares que não se intersectam, e que têm uma perpendicular comum, então essas rectas aproximam-se assintoticamente.

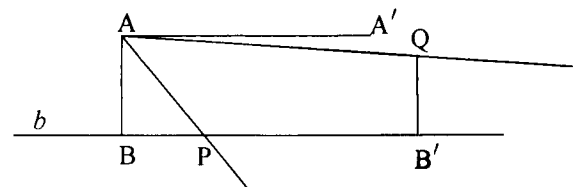


Figura 2.6

Saccheri trabalhou na prova da existência efectiva de rectas assintóticas. Na figura 2.6, entre as rectas do feixe de rectas que contêm A, complanares com b , existem rectas que

¹² Proposição I, 27: Se uma linha recta fizer com outras duas ângulos alternos iguais, essas duas linhas rectas serão paralelas.

intersectam b , como, por exemplo, a recta AB perpendicular a b ; e rectas que têm uma perpendicular comum com b , como, por exemplo, a recta AA' perpendicular a AB .

Se AP intersecta b , todas as outras rectas do feixe que façam com AB um ângulo mais pequeno do que o ângulo agudo BAP , também intersectam b . Por outro lado, se a recta AQ , diferente de AA' , tiver uma perpendicular comum com b , todas as outras rectas, que fazem com AB um ângulo agudo maior do que o ângulo BAQ , têm uma perpendicular comum com b .

Também é claro que, se se tomar as rectas do feixe de rectas por A , a partir da semi-recta AB em direcção à semi-recta AA' , não se encontrará, entre as que intersectam b , alguma recta que seja a última recta desse conjunto. Por outras palavras, os ângulos BAP , que as rectas AP , intersectando b , fazem com AB , têm um limite superior, o ângulo BAX , tal que a recta AX não intersecta b .

Então Saccheri provou (na sua Proposição XXX) que, se se começar com AA' e no feixe de rectas por A se for em direcção oposta à que já foi tomada, não se encontrará nenhuma recta no conjunto que tenha uma perpendicular comum com b . O mesmo é dizer que os ângulos BAQ , onde AQ tem uma perpendicular comum com b , têm um limite inferior, o ângulo BAY , tal que a recta AY não intersecta b e não tem uma perpendicular comum com b . Segue-se que AY é uma recta assintótica a b . Saccheri provou (na sua Proposição XXXII) que as rectas AX e AY são coincidentes. O seu argumento depende de considerações de pontos no infinito. No entanto, usar-se-á aqui um argumento baseado na sua Proposição XXI¹³.

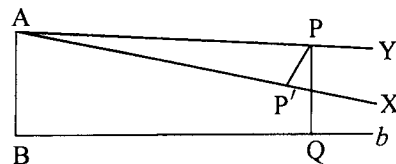


Figura 2.7

Se AX (figura 2.7) não coincide com AY , pode-se tomar P sobre AY , tal que a perpendicular PP' a AX e que contém P satisfaz a desigualdade $PP' > AB$ atendendo à Proposição XXI. Por outro lado, se PQ é perpendicular a b , a propriedade das rectas assintóticas (Proposição XXIII¹⁴) garante que $AB > PQ$.

Mas P e b estão em lados opostos de AX . Portanto, $PQ > PP'$. Combinando esta desigualdade com a anterior, resulta $AB > PP'$. O que é uma contradição com o facto de $PP' > AB$. Portanto as rectas AX e AY coincidem.

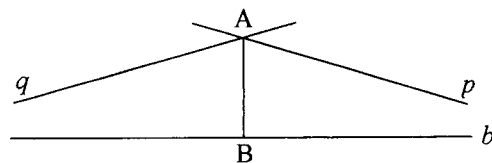


Figura 2.8

Bonola resume os resultados anteriores (atendendo à figura 2.8) no seguinte: *Sob a hipótese do ângulo agudo, existem, no feixe de rectas que contêm A , duas rectas p e q , assintóticas a b ,*

¹³ Proposição XXI: Na hipótese do ângulo recto ou do ângulo agudo, a distância de um ponto, sobre um dos lados de um ângulo, ao outro lado aumenta indefinidamente à medida que o ponto se afasta do vértice do ângulo.

¹⁴ Proposição XXIII: Se duas rectas estão no mesmo plano, então ou têm (mesmo na hipótese do ângulo agudo) uma perpendicular comum ou se prolongadas do mesmo lado – a menos que se intersectem –, elas aproximam-se cada vez mais uma da outra.

uma à direita e outra à esquerda, que dividem o feixe em duas partes: a primeira é formada pelas rectas que intersectam b e a segunda é formada pelas rectas que têm uma perpendicular com ela.

A partir da hipótese do ângulo agudo, Saccheri não encontrou qualquer contradição e até deduziu vários e interessantes resultados. Mas não era o que ele buscava; ele buscava uma contradição para poder demonstrar o quinto postulado. Daí ter confiado na intuição e feito fé na validade do quinto postulado, ao invés de apostar na lógica. Tendo concluído que:

Proposição XXXIII: A hipótese do ângulo agudo é absolutamente falsa, porque repugna a natureza da linha recta.

A prova que Saccheri apresentou não é válida, já que estende ao infinito certas propriedades válidas no finito. O seu argumento resume-se a afirmação que se a hipótese do ângulo agudo fosse verdadeira, as rectas p e b (figura 2.8) teriam uma perpendicular comum no seu ponto comum no infinito, o que é contrário a natureza da recta.

Visto que Saccheri terá afirmado, “*a luta contra a hipótese do ângulo agudo foi mais longa*”, fica claro que o verdadeiro objectivo de Saccheri era a demonstração do quinto postulado. Talvez por isso não estivesse mentalmente aberto para não encontrar contradições, o que o terá impedido de aceitar que tais contradições não existiam. Assim, como refere Heath, “*Saccheri apresenta o curioso espectáculo de um homem que levanta laboriosamente um edifício, sobre novas fundações, com o propósito único de o destruir a seguir*”.

Embora tenha falhado no seu objectivo, o trabalho de Saccheri é de grande importância. Nele o seu mais determinado esforço foi feito a favor do quinto postulado, e o facto de não ter conseguido descobrir qualquer contradição entre as consequências da hipótese do ângulo agudo, sugere que um sistema geométrico logicamente consistente podia ser construído de acordo com esta hipótese e o postulado de Euclides é impossível de demonstrar, a partir dos outros postulados propostos por Euclides.

2.2. Johann Heinrich Lambert

Lambert (1728–1777) foi colega de Euler e Lagrange na Academia das Ciências em Berlim. Foi o primeiro a publicar a demonstração de que π é irracional. Fez importantes trabalhos sobre a teoria das paralelas, tendo escrito um livro com esse título, onde deduziu muitas propriedades da Geometria não-Euclidiana, embora não aceitasse claramente a sua existência.

É difícil dizer que influência terá tido o trabalho de Saccheri sobre os géometras do século XVIII. Todavia, é provável que Lambert estivesse familiarizado com ele, uma vez que no seu

livro “Teoria das Paralelas” cita a dissertação de Klügel, onde o trabalho de Saccheri é cuidadosamente analisado.

Lambert estudou quadriláteros com três ângulos rectos, o que o levou a considerar três hipóteses para a natureza do quarto ângulo. A primeira é a hipótese do ângulo recto, a segunda é a hipótese do ângulo obtuso e a terceira é a hipótese do ângulo agudo. No tratamento destas hipóteses Lambert não se afastou do método de Saccheri.

A primeira hipótese conduz à Geometria Euclidiana. Tal como Saccheri, Lambert rejeitou a hipótese do ângulo obtuso. Fê-lo mostrando que sob essa hipótese duas perpendiculares à mesma recta intersectam-se. Não resulta daqui nenhuma contradição com o postulado das paralelas, mas o facto contradiz os restantes axiomas da geometria euclidiana.

Lambert mostrou que se a geometria baseada na hipótese do ângulo obtuso fosse possível, então a soma dos ângulos internos de um triângulo excederia dois ângulos rectos.

A análise da hipótese do ângulo agudo, levou Lambert a descobrir que, sob esta hipótese, a soma dos ângulos internos de um triângulo é menor do que dois ângulos rectos. Comparando este facto com o teorema que sob a hipótese do ângulo obtuso a soma dos ângulos internos de um triângulo é maior do que dois ângulos rectos, Lambert terá afirmado:

“É fácil constatar que sob a terceira hipótese pode-se ir ainda mais além e que consequências análogas, mas diametralmente opostas, podem ser descobertas sob a segunda hipótese. Mas, na maioria das vezes, procurei tais consequências sob a terceira hipótese para verificar se surgiam contradições. Por tudo isto, é claro que não é fácil refutar esta hipótese ...”

Outra das descobertas que se pode destacar, e que Lambert protagonizou, tem a ver com o facto de a área de um triângulo plano, sob as segunda e terceira hipóteses, ser proporcional ao excesso e ao defeito, respectivamente. A expressão da área de um triângulo ABC, sob a terceira hipótese, é $\Delta = k(\pi - \hat{A} - \hat{B} - \hat{C})$ e sob a segunda hipótese é $\Delta = k(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi)$, onde k é uma constante positiva.

Para Lambert parecia extraordinário que a segunda hipótese se verificava se em vez de um triângulo plano se tomasse um triângulo esférico, uma vez que neste também a soma dos ângulos internos é maior que dois ângulos rectos, e o excesso é proporcional à área do triângulo. Segundo Lambert, o que era ainda mais extraordinário era que, o que foi aqui dito sobre triângulos esféricos pode ser provado independentemente da dificuldade causada pelas paralelas, assumindo somente o axioma segundo o qual todo o plano que contenha o centro de uma esfera divide-a em duas partes iguais.

De modo profético Lambert afirmou: “Estou quase inclinado a concluir que a terceira hipótese surge com uma superfície esférica imaginária”. A ideia de Lambert foi confirmada pelo

facto de na fórmula $\Delta = k(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi)$ que, para $k = r^2$, representa a área de um triângulo esférico, se substituir r por $r\sqrt{-1}$, sendo $r^2 = k$, obtém-se $\Delta = k(\pi - \hat{A} - \hat{B} - \hat{C})$.

Chegou ainda a uma conclusão surpreendente: na hipótese do ângulo agudo existe mais um caso de congruência de triângulos, que corresponde aos dois triângulos terem os três ângulos respectivamente iguais. Como se sabe na Geometria Euclidiana este é um caso de semelhança de triângulos.

Capítulo 3: A Descoberta da Geometria Hiperbólica

É extraordinário o facto de algumas vezes uma nova ideia ocorrer em várias pessoas mais ou menos simultaneamente. Foi assim no século XVII com a descoberta do Cálculo por Newton na Inglaterra e Leibniz na Alemanha, e no século XIX com a descoberta da primeira Geometria não-Euclidiana.

Friedrick Luwdig Wachter (1792-1817), estudante de Gauss, designou a geometria obtida negando o postulato das paralelas de Euclides por “Geometria Anti-Euclidiana”. Em carta escrita a Gauss em Dezembro de 1816, Wachter prova o espantoso resultado segundo o qual a superfície para a qual uma esfera tende à medida o seu raio se aproxima do infinito não é um plano na Geometria Anti-Euclidiana e que a geometria nesta superfície é idêntica à do plano euclidiano. A 3 de Abril de 1817, Wachter fez a sua caminhada habitual de fim de tarde, mas nunca mais regressou. O enigma do súbito desaparecimento deste jovem que poder-se-ia ter tornado o “inventor da Geometria não-Euclidiana” nunca foi resolvido.

Em 1820 Johann Bolyai informou o seu pai que estava interessado na teoria das paralelas. Wolfgang Bolyai aconselhou-o, *“não desperdices um hora no problema. Em vez de ser recompensador, envenenará toda a tua vida. Os maiores géometras ponderaram o problema durante centenas de anos e não conseguiram provar o postulato das paralelas sem um novo axioma. Acredito que eu próprio investiguei todas as ideias possíveis... [Gauss] afirmou que tinha meditado infrutiferamente sobre isso.”* Contudo, J. Bolyai não seguiu os conselhos do seu pai. O jovem oficial da artilharia húngara, de 21 anos, escreveu ao seu pai a 3 de Novembro de 1823, *“Resolvi publicar um trabalho sobre a teoria das paralelas, mal arranje o material e as minhas circunstâncias o permitam. Não completei o meu trabalho, mas o caminho que segui torna quase certo que o objectivo será alcançado, se isso for de todo possível; o objectivo ainda não foi atingido, mas efectuei descobertas maravilhosas que me deixaram extasiado, e seria*

motivo de lamento se as perdesse. Quando as vires, querido pai, também perceberás. Presentemente não posso dizer mais nada excepto isto: Criei um novo universo do nada. Tudo o que te enviei até hoje não passa duma casa de cartas em comparação com uma torre. Tenho a certeza que isto me trará honra, tal como se já tivesse completado a descoberta.” Em resposta, W. Bolyai agora aconselhou o filho a completar o seu trabalho e publicá-lo quanto antes “... primeiro porque as ideias passam facilmente duns para os outros, que as podem de imediato publicar, e, segundo, há alguma verdade no facto de muitas coisas terem uma época para serem descobertas ao mesmo tempo em vários sítios, tal como as violetas aparecem em cada extremo da primavera.” Na altura, W. Bolyai trabalhava nos seus *Ensaio sobre os Elementos de Matemática para Juvens Estudiosos* e convidou J. Bolyai para incluir os seus resultados no seu trabalho.

Em 1823, J. Bolyai inventou a primeira Geometria não-Euclidiana. Nesta altura, Lobachevsky, que seria o primeiro a publicar, ainda nem sequer tinha iniciado o caminho que o levaria ao sucesso. Embora Gauss possa ter encontrado a Geometria não-Euclidiana no trabalho de outros mais do que a tenha inventado sozinho, também detinha a chave do problema e tinha plena consciência que as bases da matemática, ciência e filosofia do século XIX estavam em jogo.

Em 12 de Fevereiro de 1826, Lobachevsky apresentou um documento que se perdeu e que era intitulado “Exposição Sucinta dos Princípios da Geometria com uma Demonstração Rigorosa do Teorema das Paralelas”. Apesar da preocupante “prova rigorosa do teorema das paralelas”, provavelmente a palestra marcou o começo da Geometria Hiperbólica.

Embora J. Bolyai tenha enviado resumos do seu trabalho em 1825, o seu manuscrito só foi entregue ao seu pai em 1829. Wolfgang Bolyai não compreendeu porque é que as fórmulas de J. Bolyai continham uma constante indeterminada, mas decidiu que a nova teoria do espaço seria um apêndice ao 1º. volume dos *Ensaio*s.

O Mensageiro de Kazan de 1829 contém o artigo “*Sobre os Fundamentos da Geometria*” de Lobachevsky, o primeiro trabalho publicado que apresenta a Geometria não-Euclidiana (a Geometria Hiperbólica). Este monumental documento foi escrito em russo e teve pouco impacto, embora contenha o desenvolvimento completo da Geometria Hiperbólica, que Lobachevsky infelizmente designou de Geometria Imaginária.

Após vários atrasos, o 1º. volume dos *Ensaio*s de W. Bolyai foi finalmente publicado em 1832, contendo o eternamente famoso *Apêndice* de J. Bolyai com o título “*A ciência do espaço absoluto com uma demonstração da independência da verdade ou falsidade do axioma XI de Euclides (que não pode ser decidido a priori) e também a quadratura do círculo no caso da sua falsidade*”.

A única influência que Gauss teve nas invenções de Lobachevsky e Bolyai foi que cada autor sabia que Gauss não tinha conseguido anteriormente provar o postulado das paralelas. J. Bolyai e Lobachevsky fizeram as suas invenções independentes um do outro. Embora J. Bolyai

não publicasse mais nada, Lobachevsky, num esforço para fazer a sua invenção mais conhecida, publicou o documento em francês “Geometria Imaginária” no *Jornal de Crelle* em 1837 e um pequeno livro, em alemão, “Investigações Geométricas sobre a Teoria das Paralelas”, em 1840. Um ano antes da sua morte em 1856, o então cego Lobachevsky ditou e publicou em russo e francês a sua exposição completa “Pangeometria”. O novo nome “Pangeometria” de Lobachevsky era certamente mais atractivo do que o anterior, a auto-desaprovante designação “Geometria Imaginária”.

Em 1842, por recomendação de Gauss, Lobachevsky tornou-se membro da Sociedade Científica de Göttingen. Aparentemente Lobachevsky parece nunca ter ouvido falar de J. Bolyai, embora este viesse a saber em 1848 que teria de partilhar a honra da sua invenção com Lobachevsky. Contudo, para ele havia pouca honra na partilha. Uma linha ou duas de Gauss em qualquer jornal científico teria tornado J. Bolyai famoso. O pouco generoso Gauss, o chamado “Príncipe dos Matemáticos”, nunca deu a J. Bolyai qualquer menção pública. J. Bolyai morreu antes do seu trabalho receber o reconhecimento que merecia.

A sugestão de que o espaço físico possa ser algo mais que o que Euclides afirmou, fez a filosofia prevalecer no início do séc. XIX. Immanuel Kant, na sua *Crítica da Razão Pura* (1781) afirmou que o conhecimento do espaço não era empírico mas intuitivo, provindo de conceitos que existem *a priori* na mente humana. As nossas mentes dão forma e ordenam o influxo de percepções sensoriais impostas à nossa consciência, tal qual uma vasilha dá forma a um fluído no qual é vertido. Em todos nós, estas percepções são sempre organizadas ou formadas de acordo com a concepção de Euclides, isto é, no contexto de Euclides. Uma vez que todos nascemos com uma intuição de espaço euclidiana, apenas pode haver um tipo de geometria. Descobertas científicas matemáticas desde Kant amplamente invalidaram esta filosofia. Onde Kant assegurava que a ideia de espaço é algo que nos é imposto pela nossa consciência, e por isso independente da presença ou ausência de objectos e/ou matérias, a teoria geral da relatividade de Einstein ensina-nos que as propriedades do espaço são determinadas pela distribuição da matéria no espaço. Contudo, a filosofia de Kant teve uma grande influência na comunidade intelectual, e de facto foi, pelo menos em parte, responsável pelo grande atraso na aceitação da primeira Geometria não-Euclidiana.

Durante trinta e cinco anos os trabalhos de J. Bolyai e Lobachevsky foram ignorados, não sendo alheio o domínio do pensamento pela teoria de Kant. A grande mudança começou cerca de 1866. Os documentos expositivos de Jules Hoüel (1823-1886) que seguiram às traduções dos trabalhos de Lobachevsky (em 1866) e J. Bolyai (em 1867) foram de importância primordial para chamarem atenção à nova geometria. Artigos e traduções expositivas noutras línguas rapidamente se seguiram.

A descoberta da primeira Geometria não-Euclidiana, mais tarde designada Geometria Hiperbólica é creditada a Gauss, Johann Bolyai e Lobachevsky. Esta geometria corresponde à hipótese do ângulo agudo de Saccheri.

3.1. O papel de Karl Friedrich Gauss

Provavelmente a primeira pessoa a compreender plenamente a geometria independente do quinto postulado de Euclides terá sido Karl Friedrich Gauss (1777-1855), figura dominante da matemática no seu tempo. As suas meditações sobre o tema podem ser lidas nas suas cartas a colegas ao longo de três décadas.

Inicialmente, tal como Saccheri e Lambert, Gauss tentou provar o postulado das paralelas, deduzindo uma contradição a partir da sua negação. Ele julgava que a geometria de Euclides era a geometria do espaço físico. Porém, rapidamente convenceu-se que o postulado das paralelas era independente dos outros, de tal modo que, após 1813, passou a aceitar a existência de uma nova geometria na qual mais do que uma paralela pode ser traçada a uma recta por um determinado ponto exterior. Chamou a esta geometria primeiro “Anti-Euclidiana” depois “Geometria Astral”, e finalmente “Geometria não-Euclidiana”. Considerou que esta geometria seria sustentável para a descrição do espaço físico.

Em 1817, ao escrever ao seu amigo, o famoso astrónomo amador Wilhelm Olbers (um físico em exercício), ele lamentou:

Continuo a aproximar-me da convicção de que a necessária verdade da nossa geometria não pode ser provada, pelo menos pelo intelecto humano para o intelecto humano. Talvez noutra vida cheguemos a outras conclusões relativamente à natureza do espaço que presentemente não conseguimos atingir. Até lá temos de colocar a geometria em pé de igualdade, não com a aritmética, que tem uma base a priori, mas com a mecânica.

Ao dizer “a verdade necessária da geometria”, Gauss quer dizer “a necessidade física da geometria de Euclides”. Ele rotulou a geometria como uma ciência empírica.

Por volta de 1824, Gauss apurou os detalhes da sua Geometria não-Euclidiana e tencionava publicar as suas ideias, como se pode perceber nesta carta a Taurinus:

No que concerne a sua tentativa, eu não tenho nada (ou não muito) a dizer excepto que está incompleta. É verdade que a sua demonstração de que a soma dos três ângulos dum triângulo plano não pode ser maior do que 180° carece de rigor geométrico. Mas isto por si só pode ser facilmente remediado, e não há dúvida que a impossibilidade pode ser provada rigorosamente. Mas a situação é bastante diferente na segunda parte, a assumpção de que a soma dos ângulos não pode ser menor do que 180° ; este é o ponto crítico, o recife no qual todos os naufrágios ocorrem. Suponho que este problema não está

devidamente aprofundado. Eu ponderei mais de 30 anos e não acredito que alguém pode ter pensado mais do que eu nesta segunda parte, embora eu nunca tenha publicado nada sobre isso. A assumpção de que a soma dos três ângulos é menor que 180° conduz a uma geometria curiosa, bastante diferente da nossa (a euclidiana), embora consistente, que desenvolvi com inteira satisfação, de modo que eu possa resolver todos os problemas com base nela, à exceção da determinação da constante, que não pode ser designada a priori. Quanto maior se considera esta constante, mais perto se fica da Geometria Euclidiana, e quando é escolhido um valor infinitamente grande as duas coincidem. Os teoremas desta geometria parecem ser paradoxais e, para os novatos, absurdos, mas uma reflexão calma e fixa revela que eles não contêm nada de impossível. Por exemplo, os três ângulos dum triângulo ficam tão pequenos quanto se quiser se os lados forem suficientemente grandes; contudo a área do triângulo nunca pode exceder um limite definido, independentemente do tamanho dos lados, nem pode atingi-lo. Todos os meus esforços para descobrir uma contradição, uma inconsistência, nesta Geometria não-Euclidiana foram infrutíferos e a única coisa a que é oposta às nossas concepções é que, se é verdade, deve haver no espaço uma magnitude linear, determinada por si mesma (mas desconhecida por nós). Mas parece-me que nós sabemos, apesar da sabedoria da palavra de dizer nada dos metafísicos, bastante pouco ou quase nada mesmo, acerca da verdadeira natureza do espaço, para considerar absolutamente impossível aquilo que nos parece não natural. Se esta Geometria não-Euclidiana fosse verdade, e fosse possível comparar essa constante com tais magnitudes como encontramos nas nossas medições na terra e nos céus, poderia então ser determinado a posteriori. Consequentemente, em gracejo às vezes expressei o desejo que a Geometria Euclidiana não fosse verdade, uma vez que aí teríamos a priori um padrão absoluto de medição.

Não receio que qualquer homem que demonstrou que possui uma mente criativa matemática não perceba o que se disse acima, mas de qualquer modo, considere-a uma comunicação privada da qual não se faça uso público ou a publicitem. Talvez eu, se tiver mais tempo livre futuramente do que presentemente, torne públicas as minhas investigações.

A “constante” à qual Gauss se refere é a constante do espaço ou raio de curvatura do plano de Lobachevsky e a análoga do raio da esfera na Geometria Esférica. A “magnitude linear determinada por si mesma” alude ao facto de que os comprimentos são absolutos na geometria de Lobachevsky. A sabedoria do “não digas nada dos metafísicos” provavelmente significa uma bofetada a Kant e aos seus seguidores.

É significativo que Gauss, cuja reputação matemática era inatacável, tenha considerado a nova geometria tão revolucionária que se recusou a publicá-la. Em 1829 ele escreveu, numa comunicação privada a Bessel,

Pode demorar que eu torne públicas as minhas investigações nesta matéria; de facto, isto pode não acontecer no meu tempo de vida pois temo o “clamor dos Boécios”¹⁵.

Gauss evitava publicar muitas das suas maiores descobertas. Tinha uma forte aversão à controvérsia e ao debate público. Além disso, ele preferia apurar as suas provas e aprofundar as suas exposições até alcançar uma obra-prima completa e sem falhas, sem falsas e antecipadas partidas ou caminhos alternativos menos perfeitos. Se Gauss tivesse publicado o seu trabalho sobre Geometria não-Euclidiana em 1824, a história tinha-lhe atribuído a descoberta desta nova geometria. Em vez disso, o crédito foi para aqueles que publicaram primeiro.

Finalmente, Gauss tomou a decisão de publicar. Em 1831, escreveu a Schumacher,

Comecei a escrever nas últimas semanas algumas das minhas meditações, parte das quais nunca tinha anteriormente colocado no papel, de tal forma que agora já tenho que pensar novamente em tudo três ou quatro vezes. Mas espero que isto não morra comigo.

Contudo, antes de completar a sua tarefa, Gauss recebeu, Janeiro de 1832, uma cópia do Apêndice de J. Bolyai depois de uma primeira cópia que lhe foi enviada em Junho de 1831 não ter chegado às suas mãos. Em 14 de Fevereiro, Gauss escreveu a Gerling,

Deixe-me acrescentar que hoje recebi da Hungria um pequeno trabalho sobre a Geometria não-Euclidiana, no qual encontro todas as minhas ideias e resultados desenvolvidos com grande elegância, embora numa forma tão concisa que oferece dificuldade a quem não esteja familiarizado com a temática... Considero este jovem geómetra J. Bolyai um génio de primeira classe.

Em 6 de Março de 1832, Gauss escreveu a W. Bolyai,

... Agora uma palavra acerca do trabalho do seu filho. Se começar por dizer que não posso elogiá-lo ficará surpreso por momentos, mas não posso fazê-lo de outro modo. Elogiá-lo seria elogiar-me, porque o conteúdo do trabalho, a abordagem que o seu filho faz, e os resultados a que chegou coincidem quase por completo com as meditações que levei a cabo há 30 ou 35 anos. De facto, estou extremamente surpreso pelo trabalho...

Da correspondência de Gauss, resultam evidências claras de que meditou bastante sobre a Geometria não-Euclidiana, tinha ideias concretas sobre o assunto, mas a falta de tempo e a necessidade de apresentar um trabalho com qualidade, que não levantasse controvérsia, levaram-no a adiar a publicação das suas meditações. Justifica-se, pois, que se associe o seu nome aos daqueles que tornaram publico o seu pensamento sobre a temática que aqui é analisada. Até

¹⁵ Boécios eram os antigos habitantes de uma província da Grécia Antiga que ficaram conhecidos pela sua preguiça e ignorância. Há quem veja nesta expressão uma alusão aos Kantianos.

porque após a morte de Gauss foram encontradas notas, por si manuscritas, que se referiam à Geometria não-Euclidiana.

3.2. As descobertas de Lobachevsky e Johann Bolyai

Nikolai Ivanovich Lobachevsky (1793-1856) estudou matemática na Universidade de Kazan (Rússia), onde se formou em 1813. Lobachevsky permaneceu na Universidade, primeiro como Assistente e depois como Professor e Reitor.

Para descrever o método seguido por Lobachevsky na construção da Geometria Imaginária ou Pangeometria analisar-se-á o seu pequeno livro de 1840, intitulado “Investigações Geométricas sobre a Teoria das Paralelas”, onde, segundo o próprio, apresenta detalhadamente o substancial das suas investigações sobre uma nova geometria.

Após uma breve introdução, Lobachevsky começou por apresentar um grupo de quinze teoremas geométricos independentes do postulado das paralelas, os quais servem de base à compreensão das suas ideias alternativas à geometria dominante na altura. Seguidamente, apresentou a sua definição de rectas paralelas.

Definição 16¹⁶: *Todas as rectas que num plano passam por um ponto podem, com referência a uma dada recta no mesmo plano, ser divididas em duas classes—as que intersectam e as que não intersectam a recta dada. As rectas fronteira de uma e de outra classes serão chamadas paralelas à recta dada.*

Pelo ponto A (figura 3.1) trace-se a recta AD perpendicular a BC e a recta AE perpendicular a AD.

No ângulo EAD todas as rectas que passam pelo ponto A intersectam a recta DC, como por exemplo AF, ou algumas delas, como a perpendicular AE, não intersectam DC. Na dúvida se a perpendicular AE é a única recta que não intersecta DC, Lobachevsky assumiu que pode ser possível que haja outras rectas, por exemplo AG, que não intersectam DC, por mais que sejam prolongadas. Ao passar das rectas que intersectam DC, como AF, para as que não intersectam DC, como AG, encontra-se uma recta AH, paralela a DC, uma recta-fronteira, de um lado todas as rectas AG não intersectam, enquanto do outro lado todas as rectas AF intersectam a recta DC.

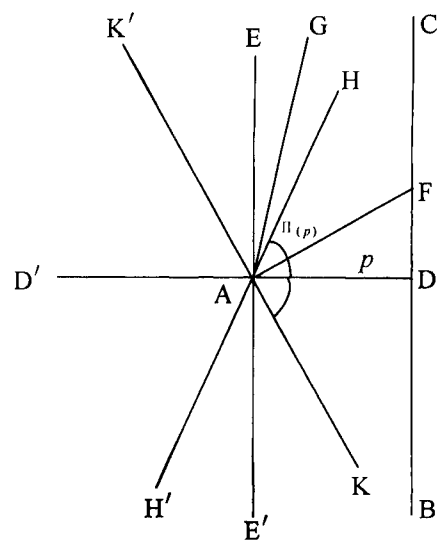


Figura 3.1

¹⁶ A explicação que se segue à Definição 16 considerar-se-á aqui parte integrante da mesma.

Lobachevsky chamou ao ângulo HAD, entre a paralela AH e a perpendicular AD, ângulo de paralelismo e representou-o por $\Pi(p)$, com $p=AD$.

Se $\Pi(p) = \frac{\pi}{2}$, o prolongamento AE' da perpendicular AE será igualmente paralelo ao prolongamento DB de DC. Adicionalmente, todas as rectas que passam pelo ponto A, elas próprias ou pelo menos os seus prolongamentos, situam-se num dos dois ângulos rectos voltados para BC (no ponto A formam-se quatro ângulos rectos entre as perpendiculares AE e AD, e os seus prolongamentos AE' e AD'). Deste modo, exceptuando a paralela EE' , todas as outras, se suficientemente prolongadas dos dois lados, intersectam a recta BC.

Se $\Pi(p) < \frac{\pi}{2}$, do outro lado de AD, fazendo o mesmo ângulo $DAK = \Pi(p)$ encontra-se também uma recta AK, paralela ao prolongamento DB da recta DC, deste modo sob esta hipótese devemos fazer uma distinção dos lados de paralelismo.

Todas as demais rectas ou os seus prolongamentos dentro dos dois ângulos rectos voltados para BC pertencem às que intersectam BC, se se encontrarem dentro do ângulo $HAK = 2 \times \Pi(p)$ entre as paralelas. Por outro lado, elas pertencem ao conjunto das que não intersectam BC se se encontrarem do outro lado das paralelas AH e AK, nos ângulos $EAH = \frac{\pi}{2} - \Pi(p)$ e

$E'AK = \frac{\pi}{2} - \Pi(p)$, entre as paralelas (AH e AK) e EE' , a perpendicular a AD. Do outro lado da perpendicular EE' do mesmo modo os prolongamentos AH' e AK' das paralelas AH e AK, respectivamente, são igualmente paralelos a BC. As restantes rectas pertencem às que intersectam BC, se estiverem no ângulo $K'AH'$, e às que não intersectam, se estiverem nos ângulos $K'AE$ e $H'AE'$.

De acordo com o que foi exposto, para a hipótese $\Pi(p) = \frac{\pi}{2}$ as rectas podem apenas intersectar BC ou serem paralelas a BC; mas se se assumir que $\Pi(p) < \frac{\pi}{2}$, então deve admitir-se duas paralelas uma em cada lado de AD.

Para as duas hipóteses serve como indicação de paralelismo que a recta passe a intersectar BC ao mais pequeno desvio em direcção ao lado onde se encontra a paralela, assim se AH é paralela a DC, toda a recta AF intersecta DC por mais pequeno que seja o ângulo HAF.

Portanto, Lobachevsky substituiu o quinto postulado de Euclides pelo seguinte: dados um ponto e uma recta que não contém o ponto, existem duas rectas paralelas à recta dada.

A partir da definição de rectas paralelas Lobachevsky deduziu as suas principais propriedades, das quais se destaca em primeiro lugar a seguinte:

Teorema 18: *Duas rectas são sempre mutuamente paralelas.*

Isto é, se b é paralela a c , então c é paralela a b .

Na figura 3.2, seja AC uma perpendicular a CD e AB uma paralela a CD . Lobachevsky traçou a partir de C a recta CE fazendo um ângulo agudo ECD com CD , e deixou cair por A a perpendicular AF sobre CE , obtendo um triângulo rectângulo ACF , no qual AC , sendo a hipotenusa, é maior do que o lado AF (pelo Teorema 9¹⁷).

Posto isto, fez $AG=AF$, e deslocou a figura $EFAB$ até AF coincidir com AG , quando AB e FE tomarem a posição de AK e GH , respectivamente, de modo que os ângulos BAK e FAC coincidam, consequentemente AK deve intersectar a recta DC num ponto K (Definição 16), portanto formando o triângulo AKC , do lado do qual GH

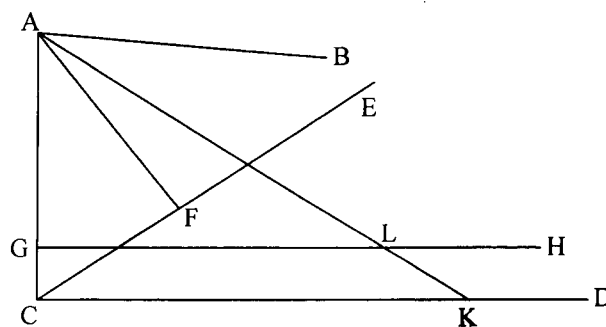


Figura 3.2

intersecta a recta AK em L (Teorema 3¹⁸), e portanto determina a distância AL , do ponto A ao ponto de intersecção das rectas AB e CE .

Portanto, CE intersectará sempre AB , por mais pequeno que seja o ângulo ECD , consequentemente CD é paralela a AB (atendendo à Definição 16). Deste modo termina a prova.

Com a demonstração do resultado seguinte, Lobachevsky extraiu uma conclusão muito importante envolvendo a soma dos ângulos internos de um triângulo sob a hipótese não euclidiana. A referida conclusão corresponde a uma afirmação que foi provada na hipótese do ângulo agudo de Saccheri e de Lambert.

Teorema 22: *Se duas perpendiculares à mesma recta são paralelas, então a soma dos ângulos de um triângulo rectilíneo é igual a dois ângulos rectos.*

Sejam as rectas AB e CD (figura 3.3) paralelas entre si e perpendiculares à recta AC .

Lobachevsky tomou sobre CD os pontos E e F de modo que $FC > EC$; e considerou os segmentos AE e AF .

¹⁷Teorema 9: Num triângulo, o maior dos lados opõe-se ao maior dos ângulos. Num triângulo rectângulo a hipotenusa é maior do que cada um dos outros dois lados e os ângulos adjacentes à hipotenusa são agudos.

¹⁸ Teorema 3: Uma recta suficientemente prolongada dos dois lados deve ir para além de todos os limites, e nesse sentido corta qualquer região limitada em duas partes.

Supôs que no triângulo rectângulo ACE a soma dos três ângulos internos é $\pi - \alpha$ e que no triângulo AEF é igual a $\pi - \beta$. Então, concluiu que no triângulo ACF a soma é igual a $\pi - \alpha - \beta$, para α e β não negativos.

Além disso, sendo $\angle BAF = a$ e $\angle AFC = b$, então $\alpha + \beta = a - b$. Afastando a recta AF da perpendicular AC, considerou que se pode fazer o ângulo a entre AF e AB tão pequeno quanto se desejar; deste modo também se diminui o ângulo b , consequentemente os dois ângulos α e β são tais que $\alpha = 0$ e $\beta = 0$. E concluiu assim a prova.

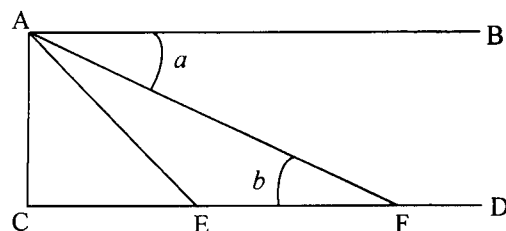


Figura 3.3

A partir daqui e visto que no Teorema 19 tinha provado que a soma dos três ângulos de um triângulo rectilíneo não excede π , Lobachevsky deduziu que para todos os triângulos rectilíneos a soma dos seus três ângulos é igual a π e ao mesmo tempo o ângulo de paralelismo é $\Pi(p) = \frac{\pi}{2}$, para todo o p , ou para todos os triângulos a soma dos seus três ângulos é menor do que π e ao mesmo tempo $\Pi(p) < \frac{\pi}{2}$.

Para Lobachevsky a primeira afirmação serve de base à geometria ordinária (a Geometria Euclidiana) e à sua trigonometria plana. Já a segunda pode ser admitida sem que conduza a qualquer contradição e funda uma nova geometria, à qual deu o nome de “Geometria Imaginária”.

No Teorema 23, Lobachevsky mostrou que para um dado ângulo α existe um comprimento p tal que $\Pi(p) = \alpha$. A prova do referido teorema permitiu-lhe concluir que com a diminuição de p o ângulo α aumenta, enquanto, para $p=0$, α aproxima-se do valor $\frac{\pi}{2}$; com o crescimento de p o ângulo α decresce, enquanto α se aproxima de zero, para $p=+\infty$.

Para Lobachevsky há total liberdade para a escolha do ângulo representado por $\Pi(p)$ quando p é negativo, por isso assumiu que $\Pi(p) + \Pi(-p) = \pi$, para todo o p positivo, negativo ou nulo.

Lobachevsky apresentou mais duas propriedades das rectas paralelas. A primeira (Teorema 24) é interessante na medida em que se opõe ao facto de na Geometria Euclidiana a distância entre duas rectas paralelas ser constante; portanto, não há dúvidas que Lobachevsky estava a apresentar uma geometria que não era euclidiana. Quanto à segunda (Teorema 25), foi muito usada por Lobachevsky na caracterização do horociclo e da horoesfera (estes termos são definidos a seguir), importantes na dedução das fórmulas da sua trigonometria.

Teorema 24: *Quanto mais são prolongadas duas rectas paralelas do lado do seu paralelismo, mais elas se aproximam uma da outra.*

Para provar a sua afirmação, Lobachevsky começou por traçar, relativamente ao segmento AB (figura 3.4), dois segmentos perpendiculares e iguais AC e BD, e uniu as suas extremidades C e D, concluindo que o quadrilátero CABD tem dois ângulos rectos em A e em B, mas dois ângulos agudos em C e D (atendendo à conclusão que se segue à prova do

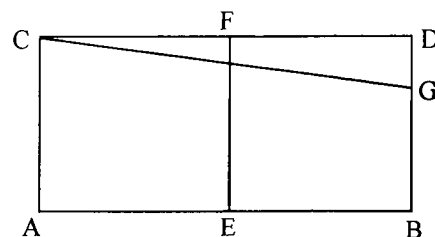


Figura 3.4

Teorema 22) que são iguais, como facilmente se constata imaginando o quadrilátero sobreposto sobre si mesmo, de modo que BD fique sobre AC e AC sobre BD.

A partir do ponto médio E do segmento AB traçou o segmento EF perpendicular a AB. Este segmento é também perpendicular a CD, uma vez que os quadriláteros CAEF e FDBE se ajustam um ao outro se se colocar um sobre o outro de modo que o segmento EF permaneça na mesma posição. Portanto, a recta CD não é paralela a AB, mas a paralela a AB pelo ponto C, isto é, CG deve inclinar-se em direcção a AB (Definição 16) e corta BD em G, com $BG < CA$.

Uma vez que C é um ponto arbitrário de CG, Lobachevsky concluiu que CG se aproxima de AB por mais que seja prolongada, que é o que queria mostrar.

Teorema 25: *Se duas rectas são paralelas a uma terceira recta, então as duas rectas são paralelas entre si.*

Primeiro Lobachevsky assumiu que as três rectas, AB, CD e EF (figura 3.5a), estão no mesmo plano. Posto isto, supôs então que duas delas, AB e CD, são paralelas à terceira, EF. Traçou pelo ponto A da recta exterior AB a perpendicular AE a EF (a outra recta exterior), que intersecta a recta do meio CD num ponto C (Teorema 3, já enunciado atrás), segundo um ângulo DCE menor que $\frac{\pi}{2}$ (Teorema 22).

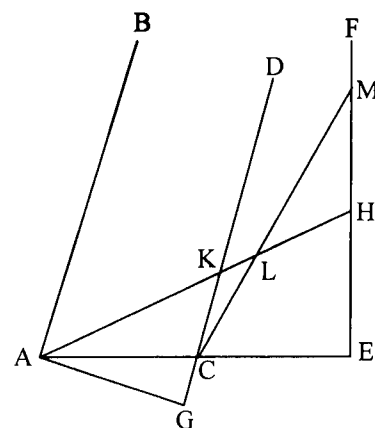


Figura 3.5a

Novamente pelo ponto A traçou a perpendicular AG a CD e referiu que AG devia cair dentro do ângulo agudo ACG, pelo Teorema 9 (enunciado atrás). Tendo considerado que todas as rectas AH traçadas dentro do ângulo BAC intersectam EF (paralela a AB) num ponto H, por mais pequeno que seja o ângulo BAH. Consequentemente, CD intersecta a recta AH num ponto K, visto que é impossível que intersecte EF. Se AH passasse pelo interior do ângulo CAG, então intersectaria o prolongamento de CD

entre os pontos C e G no triângulo CAG. Socorrendo-se da Definição 16 e do Teorema 18, Lobachevsky concluiu que as rectas AB e CD são paralelas.

Assumiu depois que as rectas exteriores AB e EF são paralelas à recta do meio CD, então toda a recta AK traçada dentro do ângulo BAE intersecta a recta CD num ponto K por mais pequeno que seja o ângulo BAK.

Sobre o prolongamento de AK, Lobachevsky tomou um ponto L e ligou-o a C pela recta CL, que intersecta EF num ponto M, definindo o triângulo MCE. O prolongamento de AL dentro do triângulo MCE não pode intersectar AC nem CM uma segunda vez, consequentemente, intersecta EF num ponto H. Portanto, Lobachevsky foi levado a concluir que AB e EF são mutuamente paralelas.

A prova prossegue, com Lobachevsky a considerar que as paralelas AB e CD estão em dois planos cuja intersecção é a recta EF (figura 3.5b). Do ponto E de EF traçou a perpendicular EA sobre AB, então por A, o pé da perpendicular AE, traçou uma nova perpendicular AC sobre CD e uniu os pontos E e C das duas perpendiculares pela recta EC. O ângulo BAC é agudo (Teorema 22), consequentemente, uma perpendicular CG a AB, deixada cair por C, intersecta AB num ponto G, do lado de CA relativamente ao qual as rectas AB e CD são consideradas paralelas.

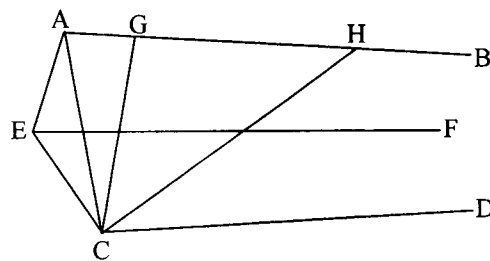


Figura 3.5b

Toda a recta EH (no plano FEAB) pertence com a recta EC a um plano que intersecta o plano das duas paralelas AB e CD ao longo de uma recta CH. Esta recta intersecta AB, no ponto H, que é comum aos três planos, pelo qual passa necessariamente também a recta EH. Em consequência, Lobachevsky concluiu que EF é paralela a AB; e considerou que de modo análogo se pode mostrar o paralelismo de EF e CD.

Portanto, Lobachevsky concluiu que a hipótese de que a recta EF é paralela a uma das duas outras rectas paralelas, AB e CD, é equivalente a considerar EF como a intersecção de dois planos aos quais as duas paralelas, AB e CD, pertencem. Consequentemente, duas rectas são paralelas, se elas são paralelas a uma terceira, embora as três não sejam coplanares. O que lhe permitiu dar por terminada a prova da veracidade da afirmação que formulou.

A parte mais importante da Geometria Imaginária é a construção das fórmulas da trigonometria. Para obtê-las Lobachevsky introduziu duas novas figuras: o horociclo e a horoesfera, que na geometria ordinária são a recta e o plano, respectivamente.

Definição 31: Chama-se horociclo à curva do plano para a qual todas as perpendiculares que passam pelo ponto médio de cordas são paralelas entre si.

De acordo com esta definição Lobachevsky considerou que se pode representar a formação de um horociclo, se se traçar para uma dada recta AB (figura 3.6) de um dado ponto A sobre ela, fazendo diferentes ângulos $CAB = \angle(a)$, cordas $AC=2a$; as extremidades C de tais cordas pertencerão ao horociclo, cujos pontos se podem determinar gradualmente.

A perpendicular DE à corda AC que contém o seu ponto médio D será paralela à recta AB, a que se chamará eixo do horociclo. Do mesmo modo cada perpendicular FG que contenha o ponto médio de qualquer corda AH é paralela a AB, consequentemente esta particularidade também é satisfeita por toda a perpendicular KL traçada pelo ponto médio K de qualquer corda CH. Tais perpendiculares devem, portanto, chamar-se igualmente eixos do horociclo.

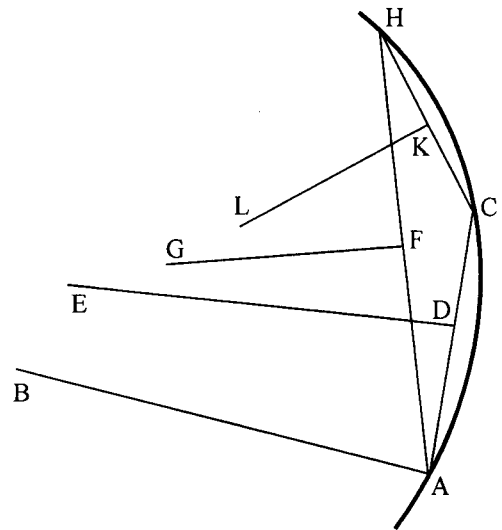


Figura 3.6

Antes de definir horoesfera, Lobachevsky provou que um horociclo é um círculo de raio infinitamente grande (Teorema 32) e o seguinte teorema, que lhe permitiu caracterizar as rectas paralelas como sendo assintóticas.

Teorema 33: *Sejam AA' e BB' duas rectas paralelas que servem de eixo para dois arcos s e s' de dois horociclos. Então, $s' = se^{-x}$, onde e é independente dos arcos s e s' , e $x = AA' = BB'$.*

Para convencer os seus leitores da veracidade da sua afirmação, Lobachevsky começou por assumir que a razão entre os arcos s e s' é igual à razão de dois números inteiros n e m .

Entre os eixos AA' e BB' (figura 3.7) desenhou um terceiro eixo CC' , que divide o arco AB numa parte $AC = t$ e o arco $A'B'$ (do mesmo lado de CC') numa parte $A'C' = t'$, e assumiu que a razão de t para s é igual à de dois números inteiros p e q . Então, $s = \frac{n}{m}s'$ e $t = \frac{p}{q}s$.

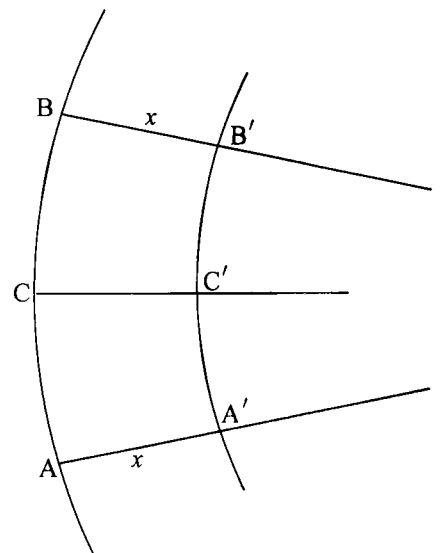


Figura 3.7

Dividindo s , através eixos, em nq partes iguais, então haverá mq dessas partes sobre s' e np sobre t . No entanto, Lobachevsky considerou que correspondem às partes iguais sobre s e t , do mesmo modo, partes

iguais sobre s' e t' ; consequentemente, tem-se $\frac{t'}{t} = \frac{s'}{s}$. Por isso, quaisquer que sejam os arcos t e t' tomados entre os eixos AA' e BB' , a razão de t para t' é constante, desde que a distância x entre eles seja a mesma. Se, portanto, para $x = 1$, se puser $s = es'$, então para todo o x ter-se-á $s' = se^{-x}$.

Depois de provar o que pretendia, Lobachevsky considerou que pelo facto de e ser uma constante apenas sujeita à condição de ter que ser maior que 1 e, além disso, pelo facto de a unidade de x poder ser escolhida livremente, para simplificar os cálculos escolheu para e a base do logaritmo neperiano.

Seguidamente, fez notar que $s' = 0$ para $x = +\infty$ e que, portanto, não é apenas a distância entre as paralelas que diminui (Teorema 24), mas com o prolongamento das paralelas, no seu lado de paralelismo, esta por fim desaparece totalmente. Por isso, para Lobachevsky as paralelas têm carácter assintótico.

Definição 34: Chamar-se-á *horoefera*¹⁹ à superfície que resulta da rotação de um horociclo em torno de um dos seus eixos, que juntamente com os outros eixos do horociclo será um eixo da horoefera.

Lobachevsky chamou plano principal a um plano que contém um eixo de uma horoefera. Em consequência, todo plano principal intersecta a horoefera num horociclo, enquanto que para os restantes planos a intersecção é um círculo.

Para Lobachevsky o ângulo de superfície de dois planos é o ângulo entre duas perpendiculares a esses planos. Visto que tinha mostrado (no seu Teorema 28) que três planos que se intersectam segundo rectas paralelas formam três ângulos de superfície cuja soma é igual a dois ângulos rectos, conclui-se que três planos principais que se intersectam mutuamente formam três ângulos de superfície cuja soma é π . Estes ângulos foram considerados por Lobachevsky como sendo de um triângulo-fronteira cujos lados são arcos de horociclos, que são feitos na horoefera pela intersecção dos três planos principais. Consequentemente, num triângulo-fronteira verifica-se a mesma interdependência dos lados e ângulos que se prova na geometria ordinária (Geometria Euclidiana) para triângulos rectilíneos.

Daqui em diante, Lobachevsky passou a designar o comprimento de um segmento por uma letra com uma plica, por exemplo x' , para indicar que este tem uma relação com outro segmento,

¹⁹ No seu último trabalho, Pangeometria (de 1855), Lobachevsky assumiu explicitamente que a horoefera é uma esfera de raio infinito.

cujo comprimento representou pela mesma letra sem plica, que na sequência do exemplo representou por x , sendo a referida relação dada pela igualdade $\Pi(x) + \Pi(x') = \frac{\pi}{2}$.

Seja ABC (figura 3.8) um triângulo rectilíneo rectângulo (também representado na figura 3.9), em que a hipotenusa é $AB=c$, os outros lados são $AC=b$, $BC=a$, e os ângulos opostos são $\hat{BAC} = \Pi(\alpha)$ e $\hat{ABC} = \Pi(\beta)$ (Teorema 23).

Pelo ponto A trace-se a perpendicular AA' ao plano do triângulo ABC e pelos pontos B e C trace-se BB' e CC' paralelas a AA' .

Os planos a que pertencem estas paralelas fazem entre si um ângulo $\Pi(\alpha)$ em AA' , um ângulo recto em CC' (Teorema 11²⁰ e Teorema 13²¹) e, consequentemente, um ângulo $\Pi(\alpha')$ em BB' (Teorema 28, referido a seguir à definição 34).

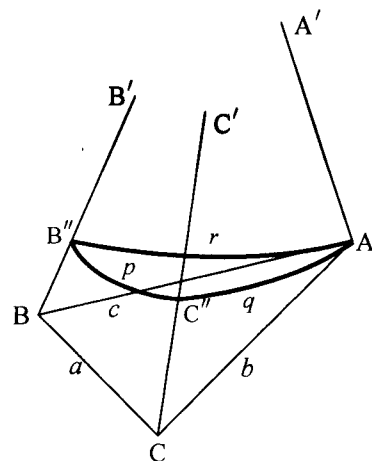


Figura 3.8

Supondo que pelo ponto A (figura 3.8) passa uma horoesfera com AA' como eixo, intersectando os outros dois eixos BB' e CC' , em B'' e C'' , e cujas intersecções com os planos das paralelas formam um triângulo-fronteira de lados $B''C''=p$, $C''A=q$ e $B''A=r$ e ângulos opostos $\Pi(\alpha)$, $\Pi(\alpha')$ e $\frac{\pi}{2}$; Lobachevsky concluiu que

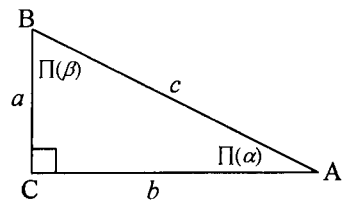


Figura 3.9

$p = r \times \text{sen}(\Pi(\alpha))$ e $q = r \times \text{cos}(\Pi(\alpha))$, em virtude de nestes

triângulos se verificar a mesma interdependência entre ângulos e lados que existe na Geometria Euclidiana.

Seguidamente, Lobachevsky separou a ligação entre os três planos principais ao longo da recta BB' e fez os três planos coincidir num único plano, onde consequentemente os arcos p , q e r se unirão num só arco de um horociclo que passa pelo ponto A e tem AA' como eixo, de tal forma que (figura 3.10) de um lado (de AA') fiquem os arcos p e q , o lado b do triângulo que é perpendicular a AA' em A, o eixo CC' (paralelo a AA') que contém a extremidade de b e C'' o ponto de ligação entre p e q , o lado a perpendicular a CC' no ponto C, e da extremidade de a o

²⁰ Teorema 11: Uma recta r , que faz ângulos rectos com duas rectas s e t não coplanares com r , é perpendicular a todas as rectas que contêm o ponto de intersecção comum às rectas r , s e t e que está contido no plano definido por s e t .

²¹ Teorema 13: Uma recta, que faz ângulos rectos com a intersecção de dois planos perpendiculares e que está contida num desses planos, é perpendicular ao outro plano.

eixo BB' paralelo a AA' , passando pela extremidade B'' do arco p . Do outro lado de AA' estará o lado c perpendicular a AA' no ponto A , o eixo BB' paralelo a AA' e o arco r .

O comprimento de CC'' depende de b , tal dependência foi expressa por Lobachevsky por $CC''=f(b)$. Do mesmo modo $BB''=f(c)$.

Chegado aqui, descreveu um novo horociclo a partir do ponto C , tomando CC' como eixo, cuja intersecção com o eixo BB' é D ; designando o arco CD por t , obteve $BD=f(a)$. Como $BB''=BD+DB''=BD+CC''$, resulta que $f(c)=f(a)+f(b)$.

Socorrendo-se do Teorema 33, Lobachevsky concluiu que $t = pe^{f(b)}$, isto é $t = r[\text{sen}(\Pi(\alpha))]e^{f(b)}$, visto que $p = r \times \text{sen}(\Pi(\alpha))$.

Se a perpendicular ao plano do triângulo ABC (figura 3.8) for traçada por B , em vez de o ser pelo ponto A , então c e r permanecerão os mesmos, os arcos q e t passarão a t e q , os segmentos a e b passarão a b e a e o ângulo $\Pi(\alpha)$ passará a $\Pi(\beta)$. Consequentemente, tem-se $q = r[\text{sen}(\Pi(\beta))]e^{f(a)}$ e portanto segue-se que

$$\cos(\Pi(\alpha)) = [\text{sen}(\Pi(\beta))]e^{f(a)} \quad (1)$$

atendendo a que $q = r \cos(\Pi(\alpha))$. Se se substituir, em (1), α por b' e β por c , obtém-se

$$\cos(\Pi(b')) = [\text{sen}(\Pi(c))]e^{f(a)},$$

que é equivalente a

$$\text{sen}(\Pi(b)) = [\text{sen}(\Pi(c))]e^{f(a)}; \quad (2)$$

além disso, se se multiplicar os dois membros de (2) por $e^{f(b)}$ obtém-se

$$e^{f(b)}\text{sen}(\Pi(b)) = e^{f(c)}\text{sen}(\Pi(c)),$$

atendendo a que $f(c) = f(a) + f(b)$. Portanto, também se verifica que

$$e^{f(a)}\text{sen}(\Pi(a)) = e^{f(b)}\text{sen}(\Pi(b)).$$

Visto que agora os segmentos a e b são independentes um do outro e, além disso, para $b = 0$, $f(b) = 0$ e $\Pi(b) = \frac{\pi}{2}$, então tem-se para todo a

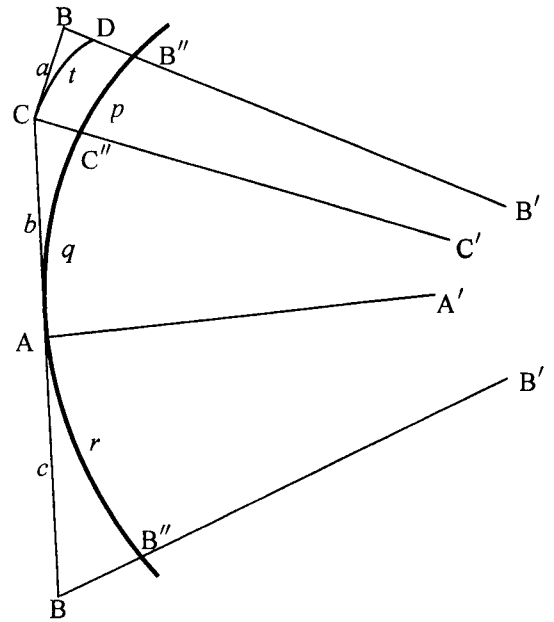


Figura 3.10

$$e^{-f(a)} = \text{sen}(\Pi(a)). \quad (3)$$

Por conseguinte, substituindo (3) em (2) obtém-se

$$\text{sen}(\Pi(c)) = \text{sen}(\Pi(a))\text{sen}(\Pi(b)) \quad (4)$$

e substituindo (3) em (1) fica

$$\text{sen}(\Pi(\beta)) = \cos(\Pi(\alpha))\text{sen}(\Pi(a)). \quad (5)$$

Além disso, ao substituir em (5) β por α , a por b e α por β obtém-se

$$\text{sen}(\Pi(\alpha)) = \cos(\Pi(\beta))\text{sen}(\Pi(b)); \quad (6)$$

ao substituir em (6) β por c , b por α' e α por b' obtém-se

$$\cos(\Pi(b)) = \cos(\Pi(c))\cos(\Pi(\alpha)); \quad (7)$$

e para obter

$$\cos(\Pi(a)) = \cos(\Pi(c))\cos(\Pi(\beta)) \quad (8)$$

Basta, em (7), escrever a no lugar de b e β no lugar de α .

Considere-se o triângulo rectângulo ABC (figura 3.11), cujos lados são a , b , e c e os ângulos opostos são $\Pi(\alpha)$, $\Pi(\beta)$ e $\frac{\pi}{2}$, respectivamente.

Prolongue-se a hipotenusa c pelo ponto B e faça-se $BD = \beta$; pelo ponto D trace-se a perpendicular DD' a BD , que consequentemente será paralela a BB' , o prolongamento do lado a acima do ponto B. A partir do ponto A trace-se a paralela AA' a DD' , que é ao mesmo tempo paralela a CB' (Teorema 25). Portanto, $\hat{A'AD} = \Pi(c + \beta)$, $\hat{A'AC} = \Pi(b)$ e, consequentemente,

$$\Pi(b) = \Pi(\alpha) + \Pi(c + \beta). \quad (9)$$

Se a partir do ponto B se colocar β sobre a hipotenusa c , então pelo ponto D (figura 3.12a) trace-se a perpendicular DD' a AB , e a partir do ponto A trace-se AA' paralela a DD' , deste modo BC' será a terceira paralela; então $\hat{CAA'} = \Pi(b)$, $\hat{DAA'} = \Pi(c - \beta)$ e, consequentemente,

$$\Pi(c - \beta) = \Pi(\alpha) + \Pi(b). \quad (10)$$

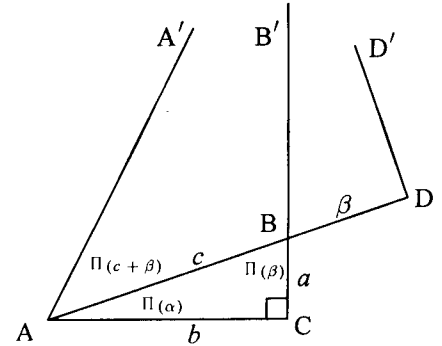


Figura 3.11

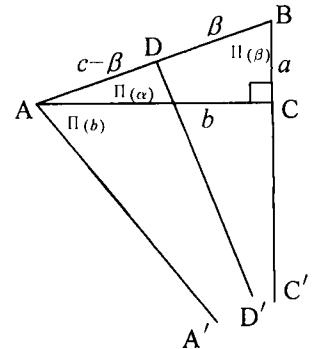


Figura 3.12a

Se em (10) $c = \beta$, por um lado $\Pi(c - \beta) = \Pi(0) = \frac{\pi}{2}$ (depois da prova do Teorema 23, Lobachevsky assumiu que $\Pi(p) + \Pi(-p) = \pi$, para todo o p) e, por outro lado, a perpendicular AA' a AB (figura 3.12b) será paralela ao lado $BC=a$ com o seu prolongamento CC' , portanto $\Pi(b) = \frac{\pi}{2} - \Pi(\alpha)$, o que está de acordo com (10).

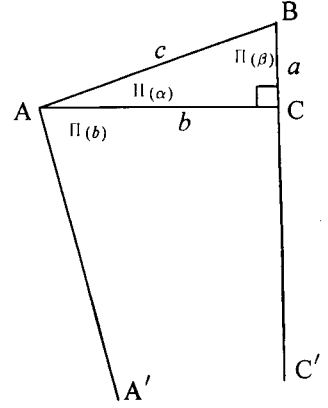


Figura 3.12b

Se $c < \beta$, a extremidade de β cairá para além do ponto A, em D (figura 3.12c), a uma distância igual a $\beta - c$, sobre o prolongamento da hipotenusa AB. A perpendicular DD' relativamente a AD e a recta AA' , paralela a DD' , são igualmente paralelas ao lado $BC=a$ com o seu prolongamento CC' . Uma vez que $\hat{DAA'} = \Pi(\beta - c)$,

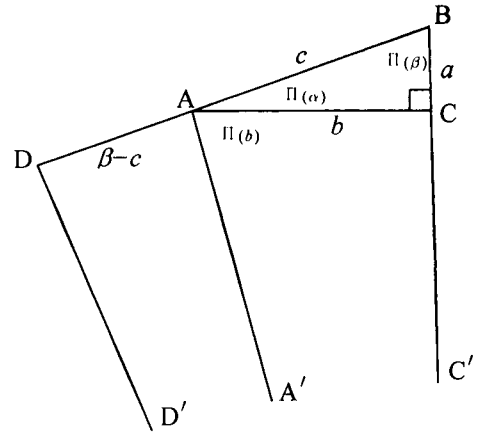


Figura 3.12c

$\Pi(b) + \Pi(\alpha) = \pi - \Pi(\beta - c) = \Pi(c - \beta)$ (depois da prova do Teorema 23, Lobachevsky assumiu que $\Pi(p) + \Pi(-p) = \pi$, para todo o p). Deste modo Lobachevsky mostrou que (10) verifica-se mesmo quando $c = \beta$ ou $c < \beta$.

Adicionando, por um lado, e subtraindo (de (9) subtrair-se (10)), por outro, membro a membro as equações (9) e (10), obtém-se

$$2\Pi(\alpha) = \Pi(c - \beta) - \Pi(c + \beta) \text{ e } 2\Pi(b) = \Pi(c - \beta) + \Pi(c + \beta),$$

e portanto,

$$\frac{\cos(\Pi(b))}{\cos(\Pi(\alpha))} = \frac{\cos\left[\frac{1}{2}\Pi(c - \beta) + \frac{1}{2}\Pi(c + \beta)\right]}{\cos\left[\frac{1}{2}\Pi(c - \beta) - \frac{1}{2}\Pi(c + \beta)\right]}. \quad (11)$$

Atendendo a que $\cos(\Pi(c)) = \frac{\cos(\Pi(b))}{\cos(\Pi(\alpha))}$ (por (7)), a expressão (11) transforma-se em

$$\cos(\Pi(c)) = \frac{\cos\left[\frac{1}{2}\Pi(c - \beta) + \frac{1}{2}\Pi(c + \beta)\right]}{\cos\left[\frac{1}{2}\Pi(c - \beta) - \frac{1}{2}\Pi(c + \beta)\right]}. \quad (12)$$

Substituindo (12) em

$$\left[\operatorname{tg} \left(\frac{\Pi(c)}{2} \right) \right]^2 = \frac{1 - \cos(\Pi(c))}{1 + \cos(\Pi(c))}$$

obtem-se

$$\operatorname{tg}^2 \left(\frac{\Pi(c)}{2} \right) = \operatorname{tg} \left(\frac{\Pi(c - \beta)}{2} \right) \times \operatorname{tg} \left(\frac{\Pi(c + \beta)}{2} \right).$$

Todavia, a única função (contínua)²² que satisfaz a condição $[f(c)]^2 = f(c - \beta) \times f(c + \beta)$ é $f(c) = e^{-c}$, para uma constante $e > 1$. Então, para todo x

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\Pi(x)}{2} \right) = e^{-x}. \quad (13)$$

A expressão (13) é tal que $\Pi(x) = \frac{\pi}{2}$ para $x = 0$ e $\Pi(x) = 0$ para $x = +\infty$, o que está em consonância com o que Lobachevsky concluiu da prova do teorema 23.

Embora Lobachevsky não o tenha feito no livro que aqui é analisado, vale a pena referir que em virtude de $\left[\operatorname{tg} \left(\frac{\Pi(x)}{2} \right) \right]^2 = \frac{1 - \cos(\Pi(x))}{1 + \cos(\Pi(x))}$ e atendendo a (13), obtém-se

$$\cos(\Pi(x)) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad (14)$$

que representa o que hoje se chama tangente hiperbólica de x . Por outro lado, uma vez que

$$\operatorname{tg}(\Pi(x)) = \frac{2 \operatorname{tg} \left(\frac{\Pi(x)}{2} \right)}{1 - \left[\operatorname{tg} \left(\frac{\Pi(x)}{2} \right) \right]^2}$$

e se se atender a (13), resulta

$$\operatorname{tg}(\Pi(x)) = \frac{2}{e^x - e^{-x}}, \quad (15)$$

que representa o inverso do que hoje se chama seno hiperbólico de x . Usando (14) e (15) e

considerando que $\operatorname{tg}(\Pi(x)) = \frac{\operatorname{sen}(\Pi(x))}{\cos(\Pi(x))}$, obtém-se

$$\operatorname{sen}(\Pi(x)) = \frac{2}{e^x + e^{-x}}, \quad (16)$$

que representa o inverso do que se chama, nos nossos dias, co-seno hiperbólico de x .

²² Este argumento não é o apresentado por Lobachevsky, mas sim o argumento apresentado por Gray (p.116, [8]). Lobachevsky considerou que e representa a base do logaritmo neperiano.

Depois de obter a expressão (ver figura 3.9)

$$tg(\Pi(c)) = \text{sen}(\Pi(\alpha))tg(\Pi(a)), \quad (17)$$

atendendo que $tg(\Pi(c)) = \frac{\text{sen}(\Pi(c))}{\cos(\Pi(c))}$ e usando (4), (6), (7) e (8),

Lobachevsky passou a considerar um triângulo rectilíneo cujos lados são a , b e c , e os ângulos opostos são A , B e C (figura 3.13). E referiu que se A e B forem agudos, então a perpendicular p tirada pelo vértice do ângulo C , passa pelo interior do triângulo e corta o lado c em duas partes: x do lado do ângulo A e $c-x$ do lado do ângulo B .

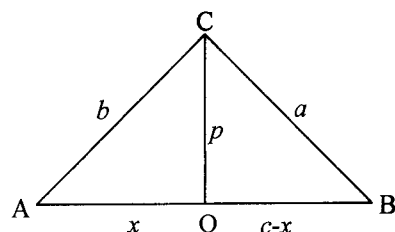


Figura 3.13

Portanto, erguem-se dois triângulos rectângulos, pelo que, por aplicação de (17) a cada um deles, se obtém as fórmulas,

$$tg(\Pi(a)) = \text{sen}(B)tg(\Pi(p)) \quad (18)$$

e

$$tg(\Pi(b)) = \text{sen}(A)tg(\Pi(p)), \quad (19)$$

as quais se verificam também quando um dos ângulos, por exemplo B é recto (figura 3.14a) ou obtuso (figura 3.14b). Deste modo, para todo o triângulo, atendendo a (18) e (19), tem-se que

$$\text{sen}(A)tg(\Pi(a)) = \text{sen}(B)tg(\Pi(b)). \quad (20)$$

Para um triângulo com ângulos agudos A e B (figura 3.13) tem-se (atendendo a (8))

$$\cos(\Pi(x)) = \cos(A)\cos(\Pi(b)), \quad (21)$$

$$\cos(\Pi(c-x)) = \cos(B)\cos(\Pi(a)), \quad (22)$$

que são aplicáveis também a um triângulo em que um dos ângulos A ou B é recto ou obtuso.

Segundo Lobachevsky, para $B = \frac{\pi}{2}$ (figura 3.14a) deve tomar-se $x = c$, transformando-se a expressão (21) em (8) e a igualdade (22) fica na mesma. Para $B > \frac{\pi}{2}$ (figura 3.14b) a expressão (21) permanece inalterada, mas em vez de (22) Lobachevsky escreveu a sua correspondente

$$\cos(\Pi(x-c)) = \cos(\pi - B)\cos(\Pi(a));$$

mas $\cos(\Pi(x-c)) = -\cos(\Pi(c-x))$ (depois da prova do Teorema 23, Lobachevsky assumiu que $\Pi(p) + \Pi(-p) = \pi$, para todo o p

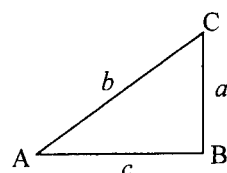


Figura 3.14a

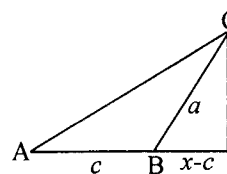


Figura 3.14b

positivo, negativo ou nulo) e $\cos(\pi - B) = -\cos(B)$, obtendo-se assim (22).

Se A for um ângulo recto ou obtuso, então deve-se substituir $c - x$ e x por x e $c - x$, respectivamente, de modo a este caso cair no anterior.

Segundo Lobachevsky²³, aplicando (4) ao triângulo QBC da figura 3.13, obtém-se

$$\text{sen}(\Pi(a)) = \text{sen}(\Pi(p))\text{sen}(\Pi(c - x)). \quad (23)$$

Usando a igualdade

$$\text{sen}(\Pi(m - n)) = \frac{\text{sen}(\Pi(n))\text{sen}(\Pi(m))}{1 - \cos(\Pi(n))\cos(\Pi(m))} \quad (24)$$

(desenvolvendo o segundo membro e se se atender a (14) e (16), mostra-se a veracidade desta igualdade) em (23) resulta

$$\frac{\text{sen}(\Pi(a))}{\text{sen}(\Pi(p))} = \frac{\text{sen}(\Pi(c))\text{sen}(\Pi(x))}{1 - \cos(\Pi(c))\cos(\Pi(x))}. \quad (25)$$

Novamente, Lobachevsky aplicou (4), porém desta vez, ao triângulo AQC da figura 3.13, tendo obtido

$$\text{sen}(\Pi(b)) = \text{sen}(\Pi(p))\text{sen}(\Pi(x)). \quad (26)$$

Por outro lado, depois de ter aplicado (7) ao último triângulo atrás referido, obteve

$$\cos(\Pi(x)) = \cos(\Pi(b))\cos(A). \quad (27)$$

Chegado a este ponto, Lobachevsky substituiu em (25) as expressões de $\text{sen}(\Pi(p))$ e $\cos(\Pi(x))$, dadas por (26) e (27), respectivamente, o que lhe permitiu obter

$$1 - \cos(\Pi(b))\cos(\Pi(c))\cos(A) = \frac{\text{sen}(\Pi(b))\text{sen}(\Pi(c))}{\text{sen}(\Pi(a))}. \quad (28)$$

Depois de em (28) ter substituído $\Pi(a)$ por $\Pi(c)$, $\Pi(c)$ por $\Pi(a)$ e A por C , obteve

$$1 - \cos(\Pi(b))\cos(\Pi(a))\cos(C) = \frac{\text{sen}(\Pi(b))\text{sen}(\Pi(a))}{\text{sen}(\Pi(c))}. \quad (29)$$

Finalmente, a multiplicação, membro a membro de (28) e (29), conduziu Lobachevsky à igualdade

$$[\text{sen}(\Pi(b))]^2 = [1 - \cos(A)\cos(\Pi(b))\cos(\Pi(c))][1 - \cos(C)\cos(\Pi(a))\cos(\Pi(b))]. \quad (30)$$

Do mesmo modo, se obtém

²³ Esta consideração encontra-se clarificada no último trabalho de Lobachevsky – Pangeometria – e não no livro “Investigações Geométricas Sobre a Teoria das Paralelas”.

$$[\text{sen}(\Pi(a))]^2 = [1 - \cos(C)\cos(\Pi(a))\cos(\Pi(b))][1 - \cos(B)\cos(\Pi(c))\cos(\Pi(a))] \quad (31)$$

e

$$[\text{sen}(\Pi(c))]^2 = [1 - \cos(B)\cos(\Pi(c))\cos(\Pi(a))][1 - \cos(A)\cos(\Pi(b))\cos(\Pi(c))]. \quad (32)$$

De (30), (31) e (32) resulta

$$\frac{[\text{sen}(\Pi(b))]^2 [\text{sen}(\Pi(c))]^2}{[\text{sen}(\Pi(a))]^2} = [1 - \cos(A)\cos(\Pi(b))\cos(\Pi(c))]^2.$$

Portanto,

$$\cos(A)\cos(\Pi(b))\cos(\Pi(c)) + \frac{\text{sen}(\Pi(b))\text{sen}(\Pi(c))}{\text{sen}(\Pi(a))} = 1. \quad (33)$$

Se se substituir em (33) o valor de $\text{sen}(\Pi(c))$ correspondente a (20), isto é,

$$\text{sen}(\Pi(c)) = \frac{\text{sen}(A)}{\text{sen}(C)} \times \text{tg}(\Pi(a))\cos(\Pi(c))$$

obtem-se

$$\cos(\Pi(c)) = \frac{\cos(\Pi(a))\text{sen}(C)}{\text{sen}(A)\text{sen}(\Pi(b)) + \cos(A)\text{sen}(C)\cos(\Pi(a))\cos(\Pi(b))}; \quad (34)$$

mas substituindo (34) em (31) fica

$$\cotg(A)\text{sen}(C)\text{sen}(\Pi(b)) + \cos(C) = \frac{\cos(\Pi(b))}{\cos(\Pi(a))} \quad (35)$$

Eliminando $\text{sen}(\Pi(b))$ na equação (35) com recurso à equação (20) obtém-se

$$\frac{\cos(\Pi(a))}{\cos(\Pi(b))}\cos(C) = 1 - \frac{\cos(A)}{\text{sen}(B)}\text{sen}(C)\text{sen}(\Pi(a)). \quad (36)$$

Entretanto, substituindo $\Pi(a)$ por $\Pi(b)$, $\Pi(b)$ por $\Pi(a)$ e A por B na equação (35), fica

$$\cotg(B)\text{sen}(C)\text{sen}(\Pi(a)) + \cos(C) = \frac{\cos(\Pi(a))}{\cos(\Pi(b))}. \quad (37)$$

De (36) e (37), por substituição em (36) da expressão de $\frac{\cos(\Pi(a))}{\cos(\Pi(b))}$ dada por (37), resulta

$$\cos(A) + \cos(B)\cos(C) = \frac{\text{sen}(B)\text{sen}(C)}{\text{sen}(\Pi(a))}. \quad (38)$$

Portanto, num triângulo rectilíneo, as quatro equações que exprimem a interdependência entre os lados a , b e c , e os ângulos A , B e C são (as equações (20), (33), (35) e (38)):

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sen}(A) \operatorname{tg}(\Pi(a)) &= \operatorname{sen}(B) \operatorname{tg}(\Pi(b)) \\ \cos(A) \cos(\Pi(b)) \cos(\Pi(c)) &+ \frac{\operatorname{sen}(\Pi(b)) \operatorname{sen}(\Pi(c))}{\operatorname{sen}(\Pi(a))} = 1 \\ \cotg(A) \operatorname{sen}(C) \operatorname{sen}(\Pi(b)) &+ \cos(C) = \frac{\cos(\Pi(b))}{\cos(\Pi(a))} \\ \cos(A) + \cos(B) \cos(C) &= \frac{\operatorname{sen}(B) \operatorname{sen}(C)}{\operatorname{sen}(\Pi(a))} \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Na hipótese dos lados a , b e c do triângulo serem muito pequenos, Lobachevsky socorreu-se das aproximações (que se podem obter de modo análogo para b e c)

$$\cotg(\Pi(a)) = a, \operatorname{sen}(\Pi(a)) = 1 - \frac{a^2}{2} \text{ e } \cos(\Pi(a)) = a$$

para obter as seguintes fórmulas correspondentes a (39):

$$b \times \operatorname{sen}(A) = a \times \operatorname{sen}(B), \quad (40)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times \cos(A), \quad (41)$$

$$a \times \operatorname{sen}(A + C) = b \times \operatorname{sen}(A) \quad (42)$$

e

$$\cos(A) + \cos(B + C) = 0. \quad (43)$$

As equações (40) e (41) são conhecidas da trigonometria euclidiana e as equações (42) e (43), com recurso à equação (40), conduzem à conclusão $A + B + C = \pi$. Lobachevsky concluiu daqui que a sua Geometria Imaginária corresponde à geometria ordinária, quando se supõe que os lados de um triângulo rectilíneo são muito pequenos.

Se alguma dúvida havia quanto as intenções de Lobachevsky, elas ficam desfeitas na sua afirmação: “As equações (39) constituem por si só uma base suficiente para considerar possível a Geometria Imaginária.” Portanto, Lobachevsky defendeu que tinha lançado os primeiros dados para uma trigonometria inserida numa nova geometria, que tinha condições para coexistir com a Geometria Euclidiana.

No início da década de 30 do século XIX, a mesma descoberta foi anunciada por Johann Bolyai (1802-1860), oficial húngaro no exército austríaco e filho de Wolfgang Bolyai. Desde a adolescência que J. Bolyai mostrou uma espantosa apetência para a matemática, tendo sido instruído pelo seu pai. Os ensinamentos deste rapidamente o levaram a interessar-se pela temática à volta do quinto postulado de Euclides. Durante a frequência do Royal College for Engineers em Viena, entre 1817 e 1822, J. Bolyai conheceu Carl Szász (1798-1853). Algumas das ideias, que

conduziram J. Bolyai à criação da “Ciência Absoluta do Espaço”, foram alinhavadas durante as conversas dos dois colegas.

J. Bolyai construiu a teoria absoluta do espaço seguindo o método clássico dos gregos, isto é, de acordo com o método dedutivo, sem, no entanto, decidir a priori sobre a veracidade ou falsidade do quinto postulado.

Como já foi referido, J. Bolyai publicou as suas descobertas em forma de apêndice de um livro do seu pai com o título “Apêndice contendo a absolutamente verdadeira ciência do espaço, independente da verdade ou da falsidade do axioma XI de Euclides (que não pode ser decidido a priori)”.

É espantoso como tão similares são as ideias de Lobachevsky e J. Bolyai. Ambos atacaram a geometria plana através da horoesfera no espaço, tendo ambos mostrado que a geometria na horoesfera, onde as rectas são interpretadas como horociclos, é euclidiana.

Por outro lado, as ideias dos dois coincidiram, mais uma vez, quando mostraram que a trigonometria esférica euclidiana é válida na geometria neutral, tendo construído uma aplicação da esfera para o plano não euclidiano para deduzir as fórmulas da trigonometria não euclidiana. J.

Bolyai descobriu a fórmula $\operatorname{tg} \frac{\Pi(a)}{2} = e^{\frac{-a}{k}}$, que relaciona o ângulo de paralelismo com a recta

que lhe corresponde. Esta equação é a chave da Trigonometria não-Euclidiana, sendo um ponto de convergência com as ideias de Lobachevsky, como se mostrou atrás.

Enquanto Lobachevsky deu à Geometria Imaginária um grande desenvolvimento especialmente analítico, J. Bolyai entrou mais profundamente na questão da dependência ou independência dos teoremas da geometria relativamente ao quinto postulado. Também enquanto Lobachevsky procurou principalmente construir um sistema geométrico sob a negação do postulado de Euclides, J. Bolyai fez sobressair as proposições e construções que na geometria ordinária são independentes do referido postulado. Tais proposições, a que chamou “absolutamente verdade”, pertencem à geometria absoluta do espaço. Pode-se encontrar as proposições desta ciência comparando a geometria de Euclides com a de Lobachevsky. Tudo o que elas têm em comum pertence à Geometria Absoluta. J. Bolyai, no entanto, não seguiu este caminho. Mostrou directamente que, independentemente do quinto postulado, as suas proposições são verdadeiras.

O que J. Bolyai e Lobachevsky reivindicaram é que matematicamente a Geometria não-Euclidiana era possível. Ambos chegaram a esta conclusão da mesma maneira.

3.3. A expansão da Geometria Hiperbólica

Os trabalhos de Lobachevsky e J. Bolyai não receberam, a quando da sua publicação, as boas vindas que muitos séculos de lento e contínuo trabalho pareciam prometer. Esta situação não é surpreendente, na medida em que a história das descobertas científicas mostra que todas as mudanças radicais não alteram subitamente as convicções e as pressuposições sobre as quais os investigadores e professores têm baseado por muito tempo a apresentação das suas matérias.

No caso particular da Geometria Hiperbólica, a sua aceitação foi retardada pela dificuldade de conhecer a fundo o trabalho de Lobachevsky, na medida que este tinha sido escrito em russo, os nomes de Lobachevsky e J. Bolyai eram uma novidade para a comunidade científica, e a concepção de espaço defendida por Kant estava em ascensão.

As publicações de Lobachevsky em francês e em alemão ajudaram a dissipar a escuridão em que as novas teorias tinham caído nos primeiros anos, mais do que todo o trabalho proveitoso, constante e infatigável de alguns géometras, cujos nomes ficaram associados a difusão da Geometria Hiperbólica. Registe-se em particular os casos de Gerling (1788–1864), Baltzer (1818–1887), Schmidt (1827–1901), na Alemanha, Hoüel (1823–1886) e Battaglini (1826–1894), Beltrami (1835–1900), em França e Itália.

Em 1832 Gerling ficou a saber, por intermédio de Gauss, em termos que não estimularam a sua curiosidade natural, da existência de um trabalho sobre Geometria não-Euclidiana escrito por um jovem oficial húngaro, filho de W. Bolyai. As referências que recebeu mais tarde de Gauss (em 1844) sobre os trabalhos de Lobachevsky e J. Bolyai levaram Gerling a procurar “As Investigações Geométricas sobre a Teoria das Paralelas” (de Lobachevsky) e o Apêndice (de J. Bolyai), salvando-os do esquecimento a que pareciam estar mergulhados.

A tradução para francês do trabalho de Lobachevsky intitulado “Investigações Geométricas sobre a Teoria das Paralelas” apareceu em 1866 e foi acompanhada por alguns extractos da correspondência entre Gauss e Schumacher. O facto dos pontos de vista de Lobachevsky, J. Bolyai e Gauss terem aparecido juntos foi extremamente feliz, visto que o nome de Gauss e a sua aprovação das descobertas dos dois géometras, então desconhecidas, ajudaram a dar crédito às novas teorias da mais eficaz e segura maneira.

A tradução para francês do Apêndice de J. Bolyai apareceu em 1867. Esta tradução foi precedida de um trabalho sobre a vida e obra dos matemáticos húngaros J. Bolyai e W. Bolyai da autoria do arquitecto Schmidt a convite de Hoüel.

Hoüel mostrou-se muito interessado nos manuscritos de J. Bolyai que em 1867 foram preservados na biblioteca da Faculdade de Maros-Vásárhely (Hungria). Com a ajuda do Príncipe Boncampagni (1821-1894), que por seu turno despertou o interesse do ministro húngaro da educação, Baron Eötvös, Hoüel conseguiu que os manuscritos de J. Bolyai fossem colocados na

Academia Húngara de Ciências em Budapest. Deste modo os manuscritos ficaram mais acessíveis e foram alvo de uma análise meticulosa, primeiro por Schmidt e depois por Stäckel.

Adicionalmente, Hoüel não fracassou nos seus esforços para, sempre que foi oportuno, conseguir um duradouro triunfo para a primeira Geometria não-Euclidiana. Se simplesmente se mencionar o seu “Ensaio crítico sobre os princípios fundamentais da geometria”; o seu artigo “Sobre a impossibilidade de demonstrar por uma construção plana o postulado de Euclides”; as “Notas sobre a vida e obra de N. I. Lobachevsky”; e, finalmente, as suas traduções para francês de vários escritos sobre a Geometria não-Euclidiana, fica-se a compreender quanto interesse a nova geometria despertou neste matemático francês.

O trabalho de Hoüel incitou Frischauf a realizar na Alemanha o que Hoüel tinha feito em França. O seu livro—*Absolute Geometrie nach J. Bolyai*— (1872) é uma simples tradução do Apêndice de J. Bolyai, ao qual adicionou as opiniões de W. Bolyai sobre os fundamentos da geometria. Uma nova e revista edição do livro de Frischauf apareceu em 1876. Neste trabalho são feitas referências aos trabalhos de Lobachevsky e a outros autores que na época se tinham dedicado ao estudo da temática introduzida por Lobachevsky e J. Bolyai, de um modo mais avançado. Esta edição permaneceu por muitos anos como o único livro no qual as novas doutrinas sobre o espaço são apresentadas em conjunto e comparadas.

Com igual convicção e fervor Battaglini introduziu as novas ideias sobre geometria na Itália. A partir de 1867, o *Jornal de Matemática*, do qual Battaglini foi fundador e editor, tornou-se o órgão reconhecido da Geometria Hiperbólica.

O primeiro trabalho de Battaglini—*Sobre a Geometria Imaginária de Lobachevsky*—foi escrito para estabelecer directamente o princípio que constitui a base da teoria das paralelas e a trigonometria de Lobachevsky. Este trabalho foi complementado com a tradução italiana da “Pangeometria” de Lobachevsky; e esta, por seu turno, em 1868, pela tradução do Apêndice de J. Bolyai.

Ao mesmo tempo, no sexto volume do *Jornal de Matemática*, apareceu o famoso trabalho de Beltrami “Uma tentativa de interpretação da Geometria não-Euclidiana”. Este lançou uma inesperada luz sobre a questão então em debate relativamente aos princípios fundamentais da geometria, e a concepção de Gauss e de Lobachevsky. Nos volumes subsequentes do *Jornal de Matemática* foi frequente encontrar trabalhos de vários autores sobre a Geometria não-Euclidiana.

O trabalho de difusão do conhecimento da nova geometria começado e energicamente levado para frente pelos géometras atrás referidos, recebeu um poderoso impulso de outro conjunto de publicações, que apareceram entre 1868 e 1872. Estas consideraram o problema dos fundamentos da geometria de um modo mais geral e menos elementar do que aquele que tinha sido adoptado nas investigações de Gauss, Lobachevsky e J. Bolyai. A velha questão das paralelas, a partir da qual todo interesse parece ter sido tomado pelas investigações de Legendre

quarenta anos antes, uma vez mais, e sob um aspecto completamente novo atraiu a atenção dos géometras e filósofos, e tornou-se o centro de um extremamente amplo campo de trabalho. Alguns destes esforços foram simplesmente dirigidos para tornar a interpretação dos trabalhos dos fundadores da Geometria Hiperbólica mais acessível à generalidade da comunidade matemática.

3.4. Modelos da Geometria Hiperbólica

Um modelo dum sistema axiomático formal pode definir-se como uma interpretação dos conceitos primitivos na qual os axiomas se transformam em proposições verdadeiras. Geralmente, procura-se uma tal interpretação em termos de uma teoria já conhecida, de forma a facilitar a verificação da veracidade das proposições referidas.

Os modelos da Geometria Hiperbólica foram decisivos para a sua aceitação, especialmente no que diz respeito à consistência. De facto, como se trata de modelos euclidianos, qualquer inconsistência da Geometria Hiperbólica traduzir-se-ia numa inconsistência da Geometria Euclidiana. É o que se chama consistência relativa da Geometria Hiperbólica por referência à Geometria Euclidiana: a Geometria Hiperbólica é consistente se a Geometria Euclidiana o é.

No seu artigo “Uma tentativa de interpretação da geometria não-euclidiana” (1868), Eugénio Beltrami (1835-1900) descreve um modelo euclidiano para a Geometria Hiperbólica. Anos mais tarde Félix Klein (1849-1925) aplicou o conceito de métrica projectiva do matemático inglês Arthur Cayley (1821-1895) para introduzir um conceito de distância no modelo proposto por Beltrami. Parece ter sido esta a razão pela qual o modelo se passou a chamar modelo de Beltrami-Klein.

Para caracterizar o referido modelo considere-se fixado um círculo γ no plano euclidiano. Neste modelo, os pontos no interior de γ representam os pontos e as cordas de γ sem as extremidades representam as rectas do plano hiperbólico. Denotando por $A)(B$ a corda AB sem as extremidades, a relação “ P pertence a $A)(B$ ” significa que P pertence à recta euclidiana AB e P está entre A e B . A relação hiperbólica “entre” é representada pela usual relação euclidiana “entre”. A representação da “congruência” não será aqui tratada²⁴.

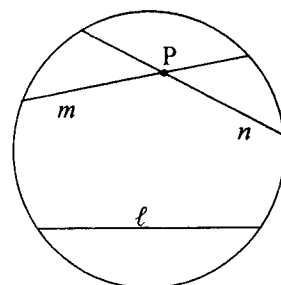


Figura 3.15

Duas rectas no modelo de Beltrami-Klein dizem-se paralelas se não tiverem pontos em comum. É claro a partir da figura 3.15 que pelo ponto P passam pelo menos duas rectas (no sentido do modelo) m e n paralelas à recta ℓ .

²⁴O tratamento da congruência pode ser consultado nas páginas 258, 259 e 260 do livro [9] da bibliografia.

Antes de se fazer referência a outros modelos da Geometria Hiperbólica, será importante referir que duas circunferências dizem-se ortogonais se nos seus pontos de intersecção as suas tangentes são perpendiculares.

Os modelos do disco e do semi-plano superior são devidos a Henri Poincaré (1854-1912). No modelo do disco, Poincaré considera, também, como sendo pontos do plano hiperbólico, os pontos do interior de um círculo euclidiano δ ; no entanto, as rectas são de dois tipos: primeiro, todos os diâmetros abertos (diâmetros sem as extremidades) de δ representam rectas. As outras rectas são representadas por arcos abertos (arcos sem as extremidades) de circunferências ortogonais a δ . Mais precisamente, seja γ uma circunferência ortogonal a δ (em cada ponto de intersecção de δ e γ os seus raios são perpendiculares). Então, intersectando γ com o interior de δ , obtém-se um arco aberto m , o qual por definição representa uma recta hiperbólica no modelo do disco de Poincaré. Na figura 3.16 estão representados os dois tipos de rectas do modelo do disco de Poincaré.

Um ponto do interior de δ “pertence a” uma recta do modelo do disco de Poincaré se lhe pertence no sentido euclidiano. De modo análogo, “entre” tem a interpretação euclidiana usual. Para A, B e C pertencentes a um arco de uma circunferência γ (ortogonal à circunferência δ) de centro P, B está entre A e C se as semi-recta PB está entre as semi-rectas PA e PC.

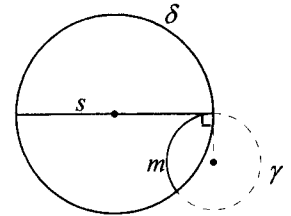


Figura 3.16

Dados dois pontos A e B no interior de δ , sejam P e Q as extremidades da recta de Poincaré que contém A e B. Define-se razão cruzada (AB, PQ) por $(AB, PQ) = \frac{\overline{AP} \times \overline{BQ}}{\overline{BP} \times \overline{AQ}}$ (onde, por exemplo, $\overline{AP}$ é o

comprimento euclidiano do segmento euclidiano AP). Posto isto, o comprimento de Poincaré do segmento AB define-se por $d(AB) = |\log(AB, PQ)|$.

Antes de se definir segmentos de Poincaré congruentes, note-se que o comprimento de um segmento de Poincaré não depende da ordem pela qual se escreve P e Q. Se $(AB, PQ) = x$, então

$(AB, QP) = \frac{1}{x}$, e $\left| \log \left(\frac{1}{x} \right) \right| = |-\log x| = |\log x|$. Além disso, uma vez que $(AB, PQ) = (BA, QP)$,

conclui-se que $d(AB)$ também não depende da ordem pela qual se escreve A e B.

Posto isto, dois segmentos de Poincaré AB e CD dizem-se congruentes se $d(AB) = d(CD)$.

A congruência de ângulos tem o significado euclidiano usual. Esta é a principal vantagem do modelo do disco de Poincaré em relação ao modelo de Beltrami-Klein²⁵. Especificamente, se dois arcos circulares se intersectam num ponto A, a amplitude do ângulo por eles formado, em graus, é, por definição, igual à amplitude do ângulo formado pelas semi-rectas tangentes em A (figura 3.17). No caso de um arco circular intersectar uma semi-recta num ponto A, a amplitude do ângulo por eles formado, em graus, é, por definição, igual à amplitude do ângulo formado entre a semi-recta tangente ao arco em A e a semi-recta dada (figura 3.18).

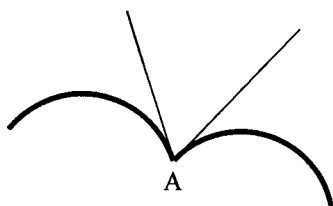


Figura 3.17

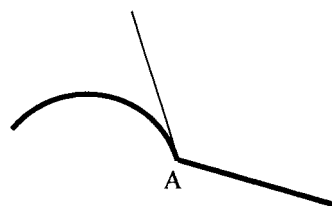


Figura 3.18

Duas rectas de Poincaré são paralelas se, e somente se, não têm pontos em comum.

No outro modelo de Poincaré, o modelo do semi-plano superior, os pontos do plano hiperbólico são representados pelos pontos do semi-plano euclidiano determinado por uma recta euclidiana fixa. Se se usar o modelo cartesiano para o plano euclidiano é habitual considerar o eixo dos x a recta fixa e utilizar para modelo o semi-plano superior formado por todos os pontos (x,y) tais que $y > 0$. As rectas hiperbólicas são representadas de duas maneiras (figura 3.19):

1. Semi-rectas com origem em pontos do eixo dos x e perpendiculares a ele;
2. Semi-circunferências no semi-plano superior cujos centros estão sobre o eixo dos x .

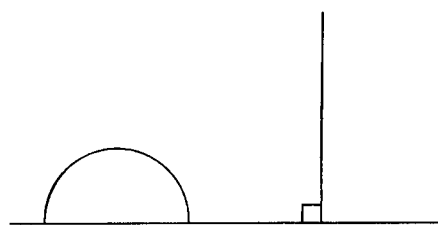


Figura 3.19

Os termos “pertence a” e “entre” têm a interpretação euclidiana usual. Este modelo também é conformal (a amplitude dos ângulos é medida à maneira euclidiana).

²⁵ O modelo do disco de Poincaré diz-se conformal, porque a medida é mantida na representação dos ângulos. O que não sucede no modelo de Beltrami-Klein.

Conclusão

Supõe-se que o postulado das paralelas terá sido um contributo pessoal de Euclides para o avanço da matemática. Este postulado foi alvo de contestação, no que diz respeito à sua evidência, foi considerado susceptível de poder ser deduzido dos outros quatro. Pelo que durante mais de dois mil anos, matemáticos de todas as grandezas tentaram demonstrá-lo, sem êxito.

Saccheri na sua tentativa de prova do quinto postulado, que foi conhecida em 1733, praticamente descobriu a Geometria Hiperbólica, embora não a tenha aceite. Foi vítima da noção pré-concebida do seu tempo, segundo a qual a única geometria possível era a euclidiana.

Embora tenham sido descobertas evidências de que Gauss considerava possível uma geometria independente do postulado das paralelas, este nunca chegou a publicar qualquer trabalho sobre geometria não-euclidiana. Essencialmente porque era avesso a polémicas e pretendia publicar um trabalho suficientemente amadurecido.

O anúncio público de que a geometria não-euclidiana era possível, foi obra de N. I. Lobachevsky e Johann Bolyai, os quais protagonizaram a mesma descoberta de forma independente e extraordinariamente semelhante.

Não será exagero considerar que também Euclides esteve na génese da Geometria Hiperbólica, na medida em que esta foi o resultado do auge da discussão em torno do último postulado, de uma lista de cinco, que apresentou no seu tratado “Elementos”.

Bibliografia

- [1] **Agazzi, E. e Palladino, D.** Le Geometrie Non Euclidee e i fondamenti della geometria: dal punto di vista elementare. Brescia: La Scuola Editrice, 1998.
- [2] **Araújo, Paulo Ventura.** Curso de Geometria (3ª edição). Lisboa: Gradiva, 2002.
- [3] **Bolyai, Johann.** The Science Of Absolute Space. (Tradução de George Halsted incluída em [4]), 1832.
- [4] **Bonola, Roberto.** Non-Euclidean Geometry. New York: Dover Publications, 1955.
- [5] **Boyer, Carl.** História da Matemática (2ª edição). S. Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda, 1996.
- [6] **Estrada, Maria Fernanda; Sá, Carlos Correia; Queiró, João Filipe; Silva, Maria do Céu e Costa, Maria José.** História da Matemática. Lisboa: Universidade Aberta, 2000.
- [7] **Faber, Richard.** Foundations of Euclidean and Non-Euclidean Geometry. New York: Marcel Dekker, Inc, 1983.
- [8] **Gray, Jeremy.** Ideas of Space: Euclidean, Non-Euclidean Relativistic. Oxford: Clarendon Press, 1989.
- [9] **Greenberg, Marvin Jay.** Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History. New York: W. H. Freeman and Company, 1993.
- [10] **Heath, Thomas.** The Thirteen Books of the Elements (vol. 1). New York: Dover Publications, 1925.

- [11] **Katz, Victor J.** History of Mathematics. New York: HapperCollins College Publishers, 1993.
- [12] **Lobachevsky, Nikolai I.** Geometrical Researches On The Theory Of Parallels (Tradução de George Halsted incluída em [4]), 1840.
- [13] **Lobachevsky, Nikolai I.** Pangéométrie ou Précis de Géométrie Fondée sur la Théorie Rigoureuse et Générale des Parallèles, 1856.
- [14] **Martin, George.** The Foundations of Geometry and the Non-Euclidean Plane . New York: Intext Educational Publishers, 1972.
- [15] **Oliveira, J. A. Franco de.** Geometria Euclidiana. Lisboa: Universidade Aberta, 1995.
- [16] **Rosenfeld, Boris.** History of Non-Euclidean Geometry. New York: Springer-Verlag, 1988.
- [17] **Saccheri, Gerolamo.** Euclides Vindictus. Tradução de George Halsted. New York: Dover Publications, 1986.
- [18] **Smith, David.** A Souce Book in Mathematics. New York: Dover Publications, 1959.
- [19] **Trudeau, Richard.** The Non-Euclidean Revolution. New York: Birkhauser, 1987.
- [20] **Veloso, Eduardo.** Geometria: Temas Actuais. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional, 1998.

Índice Remissivo

A

Academia Húngara de Ciências · 47
al-Haytham · 8, 10
ângulo agudo · 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 25, 30, 32
ângulo de paralelismo · 29, 31, 45
ângulo obtuso · 15, 16, 20
ângulos internos · 6, 7, 12, 15, 16, 20, 30, 31
ângulos rectos · 6, 7, 8, 9, 10, 14, 15, 16, 20, 29, 30, 32, 35, 36
árabes · 8
Aristóteles · 5
aritmética · 3, 4, 5, 25
Arquimedes · 8, 12
Arquitas · 5
assimptóticas · 17, 18, 34
axioma XI · 23, 45

B

Baltzer · 46
Barrow · 11
Battaglini · 46, 47
Beltrami · 46, 47, 48, 50
Bessel · 27

C

Cayley · 48
circunferência · 2, 5, 6, 49
circunferências ortogonais · 49
comensuráveis · 4
complanares · 17, 33, 36
conformal · 50
congruência · 5, 21, 48, 50
Crítica da Razão Pura · 24

E

Egipto · 1, 2
eixo da horoesfera · 35
eixo do horociclo · 34
Elementos de Euclides · 5, 7, 8, 13, 15, 17
Elementos de Hipócrates · 5
Escola de Crotona · 2, 3
Escola Pitagórica · 2, 3
Escola Platônica · 5
Euclides · 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 19, 22, 23, 24, 25, 29, 44, 45, 47, 53
Eudoxo · 4, 5

F

Frischauf · 47

G

Gauss · 22, 23, 24, 25, 26, 27, 46, 47
Geometria Absoluta · 45
Geometria Anti-Euclidiana · 22
Geometria Astral · 25
Geometria de Lobachevsky · 23
Geometria Hiperbólica · 11, 21, 22, 23, 25, 46, 47, 48, 49
Geometria Imaginária · 23, 24, 28, 31, 33, 44, 45, 47
Geometria não-Euclidiana · 11, 12, 19, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 45, 46, 47
Gerling · 27, 46
Göttingen · 24
grandezas · 3, 4, 7, 8
grandezas incomensuráveis · 3

H

Heródoto · 1
Hipócrates de Quios · 1, 4
hipótese do ângulo agudo · 15, 16, 20
hipótese do ângulo obtuso · 15, 16, 20
hipótese do ângulo recto · 15, 16, 18, 20
horociclo · 31, 33, 34, 35, 36, 37
horoesfera · 31, 33, 34, 35, 36, 45
Hoüel · 24, 46, 47

I

incomensurabilidade · 3, 4
incomensuráveis · 3, 4

J

J. Bolyai · 11, 22, 23, 24, 27, 44, 45, 46, 47
Johann Bolyai · 22, 25, 28, 44
Jornal de Crelle · 24

K

Kant · 24, 26, 46
Klein · 48, 50
Klûgel · 20

L

Lambert · 10, 11, 19, 20, 25, 30
Legendre · 10, 47
Lobachevsky · 11, 15, 23, 24, 25, 26, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 39, 40, 41, 44, 45, 46, 47, 53
logaritmo neperiano · 35, 40

M

medida comum · 3, 4
 Mensageiro de Kazan · 23
 modelo de Beltrami–Klein · 48
 modelo do disco de Poincaré · 49, 50
 modelo do semi-plano superior · 50

N

noção comum · 7
 noções comuns · 5, 7

O

Omar Khayyam · 8, 9, 10
 Organon · 5

P

Pangeometria · 24, 28, 35, 47
 paralelas · 6, 7, 8, 9, 10, 17, 19, 20, 22, 23, 25, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 39, 47, 48, 50
 perpendicular comum · 17, 18, 19
 Pitágoras · 2, 3
 pitagóricos · 2, 3, 4, 5
 plano principal · 35
 Poincaré · 49, 50
 postulado das paralelas · 6, 7, 9, 10, 20, 22, 23, 25, 28
 postulado de Arquimedes · 12
 postulado de Euclides · 8, 10, 11, 16, 19, 25, 29, 44, 45, 47
 postulado de Wallis · 9
 Proclo · 1, 8, 10
 Ptolomeu · 8

Q

quadrilátero de Saccheri · 12, 15, 16
 quinto postulado · 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 15, 16, 19, 25, 29, 44, 45

R

recta hiperbólica · 49
 recta-fronteira · 28

S

Saccheri · 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 25, 30, 53
 Schmidt · 46, 47
 Schumacher · 46
 segmentos de Poincaré · 49
 silogismos · 5
 subtracção recíproca · 3, 4
 Szász · 44

T

Tales · 1, 2, 3
 Taurinus · 25
 Teeteto · 5
 Teoria das Paralelas · 20, 24, 28, 46
 teoria das proporções · 4
 transversal · 6, 9
 triângulo esférico · 20, 21
 triângulo plano · 20, 25
 triângulo rectilíneo · 30, 36, 41, 43, 44
 triângulo-fronteira · 35, 36
 Trigonometria não-Euclidiana · 45

U

Universidade de Kazan · 28

W

W. Bolyai · 23, 27, 46, 47
 Wachter · 22
 Wallis · 9
 Wilhelm Olbers · 25
 Wolfgang Bolyai · 22, 23, 44