

Reg. 509248
Cota TESE N.º 149

FCUP
Dep. Matemática Pura

Nomografia

Tese de Mestrado

Mestrado em Ensino da Matemática

Ano lectivo de 2004/05

Faculdade de Ciências do Porto
MATEMÁTICA

Mariana Teixeira de Sousa

Porto, Portugal

A Presidente do júri
Manoel Leon Henriques



FC

Biblioteca
Faculdade de Ciências
Universidade do Porto



0000100861

Sumário

A nomografia é um processo de cálculo utilizado na resolução de problemas matemáticos recorrendo a gráficos designados por nomogramas ou ábacos traçados através de um conjunto de eixos devidamente organizados. Neste trabalho faz-se uma análise a esta técnica utilizada em diversos ramos da ciência que recorrem a estas representações gráficas em que as soluções são obtidas por pontos de intersecção, segmentos de recta e outras grandezas geométricas. Assim após uma introdução histórica apresentam-se os vários conceitos inerentes á construção dos ábacos nomeadamente a definição de escala. No segundo capítulo introduzem-se e caracterizam-se os ábacos de cruzamento. Posteriormente procura-se que o leitor compreenda como é possível transformar um ábaco de cruzamento num ábaco de alinhamento caracterizando e identificando estes últimos. Nos sexto e sétimo capítulos apresentam-se aplicações práticas - resolução de equações quadrática, cúbica e biquadrática e resolução de triângulos esféricos - da nomografia e sua utilidade na obtenção de resultados rápidos. Paralelamente a este trabalho o leitor pode ainda consultar <http://cmup.fc.up.pt/cmup/nomografia>.

ÍNDICE:

1	Introdução	4
1.1	Ábacos e Nomogramas	5
1.1.1	Lalanne e os ábacos de rectas concorrentes	7
1.1.2	Maurice d'Ocagne e os ábacos de alinhamento	8
2	Conceitos Fundamentais - Escalas	10
2.1	Escalas Métricas	12
2.1.1	Métodos simplificados de construção de escalas métricas	13
2.2	Escalas Funcionais	15
2.3	Escalas Derivadas e Transformadas	18
2.4	Campo Binário	20
3	Ábacos de Cruzamento	24
3.1	Ábacos de Cruzamento Rectilíneo	27
3.2	Ábacos Cartesianos	28
3.3	Ábacos Cartesianos Rectilíneos	30
3.4	Equações com mais do que três variáveis	34
4	Transformação gráfica dos ábacos de cruzamento em ábacos de pontos alinhados	37
4.1	Ábacos de pontos alinhados	37
4.2	Princípio da Dualidade	38
4.3	Transformação gráfica de um ábaco cartesiano rectilíneo num ábaco de pontos alinhados com dois suportes paralelos	39
4.3.1	Construção do ábaco transformado	43
4.4	Anamorfose	44
5	Ábacos de Alinhamento	50
5.1	Sistemas de pontos definidos em coordenadas paralelas	51

5.2	Método dos Pontos Alinhados	52
5.3	Resolução nomográfica de equações da forma $z^m + pz + q = 0$	54
5.4	Transformação homográfica dos nomogramas de alinhamento	56
5.5	Relações que se podem reduzir à forma $\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 = \mathbf{f}_3$	57
5.6	Equações com mais do que três variáveis	59
5.7	Duplo Alinhamento	61
6	Soluções Gráficas das equações Quadrática, Cúbica e Biquadrática	63
6.1	Equação Quadrática	63
6.2	Equação Cúbica	65
6.3	Resolução da equação completa de terceiro grau	69
6.4	Equação Biquadrática I	71
6.5	Equação Biquadrática II	73
7	Aplicação dos Nomogramas de alinhamento aos diferentes casos de resolução de triângulos esféricos	75
7.1	Nomogramas da fórmula $\sin A \sin b = \sin a \sin B$	76
7.2	Nomogramas da fórmula $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$	78
7.3	Nomograma da fórmula $\cos a \cos B = \sin a \cot c - \sin B \cot C$	80

Capítulo 1

Introdução

Actualmente com o aparecimento das máquinas electrónicas e dos computadores, que fornecem sem qualquer esforço a solução numérica dos problemas matemáticos, cada vez menos se recorre ao cálculo gráfico.

Para avaliar a importância social que o cálculo gráfico desempenhou na sociedade é necessário recorrer às obras da época. Antigamente a solução de um problema era obtida através de uma construção ou traço geométrico a partir dos quais se liam os valores numéricos procurados.

Até por volta de 1970 o cálculo gráfico teve um papel importante no domínio científico e técnico. Quando não eram exigidos resultados com uma grande precisão, os profissionais da época (engenheiros, físicos, técnicos,...) preferiam recorrer aos métodos gráficos de modo a facilitar o seu trabalho.

O cálculo gráfico é o conjunto dos procedimentos que exploram os traços realizados sobre um suporte plano, procurando evitar, na totalidade ou em parte, o recurso ao cálculo numérico para a resolução de um problema.

Durante o séc. XIX e a primeira metade do séc. XX o cálculo gráfico sofreu um desenvolvimento, vindo a apresentar-se como uma disciplina autónoma do cálculo numérico com as suas técnicas, seus instrumentos, seus profissionais,...

Como técnicas desta ciência podem considerar-se o cálculo pelo traço, a nomografia e o cálculo grafomecânico.

O cálculo pelo traço é a componente mais antiga e tem as origens em Descartes na sua obra *Geométrie*[Descartes 1637]. Escolhe-se uma unidade de comprimento e os dados são representados sobre uma folha de papel através de segmentos de recta. De seguida recorrendo a vários instrumentos (p.e. régua, compasso, ...) realizam-se várias operações algébricas através de construções geométricas, conduzindo a novos segmentos de recta, que representam os valores procurados. O cálculo pelo traço é o cálculo geométrico propriamente dito.

No Cálculo Numérico recorre-se, frequentemente a tabelas numéricas procurando evitar operações fastidiosas. O mesmo aconteceu no cálculo geométrico onde surgiram, nos finais do séc. XVIII, tabelas gráficas que permitiam ler sobre uma folha de papel ou outro suporte o resultado de um cálculo.

As tabelas numéricas para além de exigirem uma construção exaustiva não permitem uma realização fácil quando se aumentam o número de entradas. Contrariamente as tabelas gráficas permitem representar relações com um qualquer número de variáveis.

Uma tabela gráfica apresenta-se como uma rede de linhas ou pontos cotados, com escalas convenientemente cotadas, móveis ou não, que permitem através de simples leitura obter o valor procurado em função de alguns parâmetros. As tabelas gráficas são os ábacos ou nomogramas. Estas tabelas desempenham o mesmo papel que as tabelas numéricas, utilizadas para o Cálculo Numérico. A disciplina que estuda e aplica as tabelas gráficas tem a designação de Nomografia.

Esta tese tem como principal objectivo visitar esta disciplina, procurando destacar o seu conteúdo matemático. Além disso, iremos também analisar, construir e aplicar nomogramas em vários problemas, demonstrando o papel preponderante que desempenharam em vários contextos da Matemática Aplicada de outrora.

A última componente citada foi o cálculo grafomecânico - ao mover determinadas linhas previamente traçadas sobre um gráfico, com o apoio de aparelhos mecânicos, resolvem-se problemas matemáticos. Através deste processo pode realizar-se a integração de uma função, estudar uma equação diferencial, etc [11].

O cálculo gráfico permite resolver problemas com rapidez e eficiência, com uma precisão limitada. No entanto em muitos trabalhos a rapidez tem um papel importante e daí que o cálculo gráfico desempenhe um papel primordial. Nos casos em que há necessidade de obter resultados com uma grande precisão, p.e., em Astronomia, o cálculo gráfico pode funcionar como apoio ao cálculo numérico. Quando se recorrem a aproximações sucessivas o cálculo gráfico pode servir para determinar rapidamente os primeiros valores. Na verdade perante um cálculo mais rigoroso o método gráfico funciona como complemento, preparando e verificando o cálculo numérico.

1.1 Ábacos e Nomogramas

No final do séc. XIX os ábacos apresentavam-se como um dos principais instrumentos do cálculo gráfico.

Datada do séc. XVII, a régua de cálculo - instrumento de origem inglesa, equivalente gráfica das tabelas de logaritmos - surge mais tarde como um nomograma de escalas móveis. Vários outros instrumentos antigos ficaram ligados à história da nomografia.

Como resultado dos trabalhos da revolução Francesa para impor um novo sistema de pesos e medidas surgem as primeiras tabelas gráficas. De modo a facilitar a passagem do sistema antigo para o novo sistema surgiu uma lei que permitia a construção de escalas métricas apropriadas para a realização das conversões sem qualquer cálculo.

Louis-Ézéquier Pouchet (1748-1809) escreveu uma obra da qual se realizaram três edições [Pou 1794, Pou 1795a, Pou 1797], todas elas com títulos diferentes. Como anexo da segunda edição [Pouchet 1795a] surge um tratado de "*Aritmética Linear*" que será assunto de uma publicação separada e ao qual é dedicado um capítulo na terceira edição. Segundo Pouchet:

"A aritmética linear consiste na capacidade de efectuar todos os cálculos possíveis, através do compasso, sobre um conjunto de linhas divididas, subdivididas e combinadas, de forma a produzir todos os cálculos que se possa desejar[...] a crítica não deixará de atribuir ao meu sistema uma falta de precisão [...] mas este método poderá servir em várias situações [...] onde se procura ter a solução aproximada do problema".

Na última versão dessa aritmética linear assiste-se ao nascimento do conceito de tabela gráfica, rede de linhas sobre a qual pode ler-se directamente, sem grandes manipulações, o resultado de uma operação. Historicamente esta última versão é de grande importância já que é neste trabalho que surge pela primeira vez a expressão "cálculo gráfico". Para Pouchet estava encontrada a forma de compor tabelas universais de modo a solucionar todos os problemas, passando do uso do compasso para a simples leitura das tabelas. Pouchet ficou conhecido como o fundador desta disciplina.

Através das tabelas gráficas de Pouchet é possível efectuar as operações elementares: adição, subtracção, multiplicação, divisão, mudança de unidade. Os seus ábacos são constituídos por dois feixes de linhas rectas cotadas, verticais e horizontais, através das quais passa um feixe de hipérbolas também cotadas. Esta representação designa-se por superfície topográfica, por usar as curvas de nível de uma determinada função, e pode ser aplicada a todas as relações $f(x, y, z)$ entre três variáveis (figura 1.1).

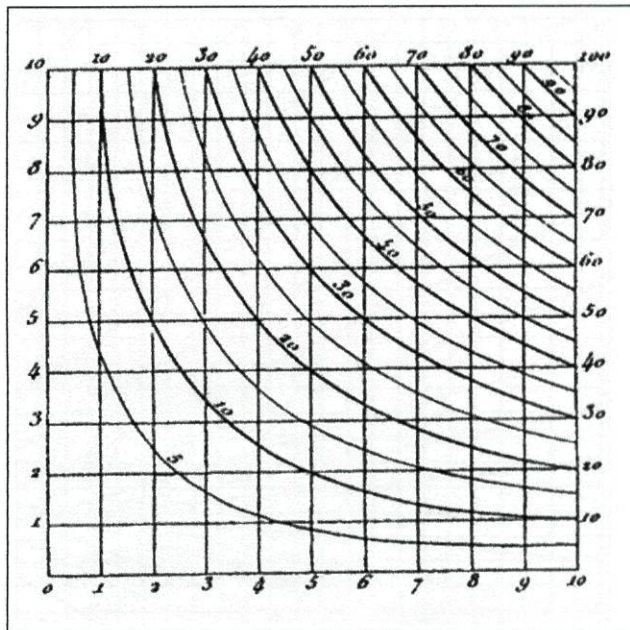


Figura 1.1: Tabela gráfica de Pouchet

Um exemplo desta representação é o caso da multiplicação $z = xy$ que se irá analisar no decorrer desta tese mas cuja tabela se encontra acima. Por vezes surgem valores que não aparecem directamente no gráfico, nestes casos é necessário recorrer à interpolação à vista.

1.1.1 Lalanne e os ábacos de rectas concorrentes

Em 1843, Léon-Louis Lalanne (1811-1892) - engenheiro de "Ponts et Chaussées" - teve um papel decisivo na teoria dos ábacos. Para Lalanne deviam utilizar-se escalas não regulares, substituindo as variáveis primitivas por funções auxiliares devidamente escolhidas, de modo a que as curvas do terceiro feixe resultassem também numa família de linhas rectas.

Com este intuito, no exemplo citado da multiplicação, aplicou logaritmos à relação $z = xy$, donde resulta $\ln z = \ln x + \ln y$. A escala das abcissas passa a estar graduada segundo a nova variável $x' = \ln x$ e a escala das ordenadas segundo $y' = \ln y$. Desta forma a família de hipérbolas do terceiro feixe resulta num feixe de rectas de equação $x' + y' - \ln z = 0$ (figura 1.2).

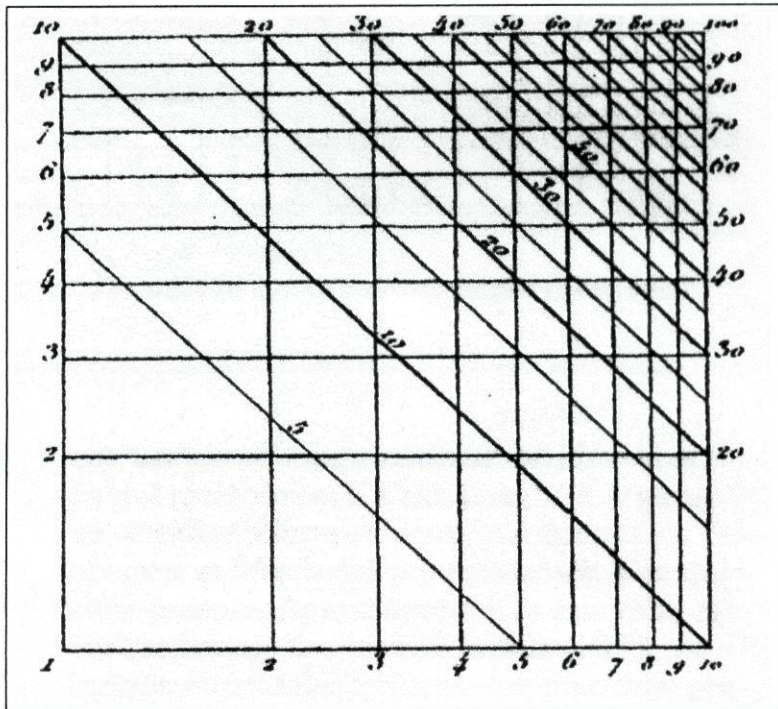


Figura 1.2: Tabela gráfica de Lalanne

A este processo Lalanne atribui a designação de "anamorfose geométrica" por semelhança com um fenómeno óptico. Neste contexto surge pela primeira vez a designação de ábaco.

Através da anamorfose de Lalanne uma relação entre três variáveis transforma-se num ábaco de três famílias de rectas. Os ábacos de rectas concorrentes apresentam grandes vantagens já que têm uma construção mais fácil que os ábacos anteriores, uma vez que para definir uma recta bastam dois pontos.

Os ábacos de Lalanne foram introduzidos nos trabalhos públicos obtendo um grande sucesso. Após 1843 a administração francesa enviou a todos os seus engenheiros tabelas gráficas que permitiam o cálculo das superfícies de aterro e de desaterro relativas ao perfil das ruas e vias férreas.

A grande capacidade de resolução de problemas complexos levou a que o recurso às ferramentas do cálculo fosse cada vez mais vantajoso. Um exemplo, destas ferramentas, é o calculador universal de Lalanne que ele refere em 1846. Esta ferramenta tem a forma de um livro contendo 64 páginas de explicações e um nomograma. Através dela é possível efectuar várias operações: a multiplicação, a divisão, a determinação de potências, a extracção de raízes, a multiplicação e divisão por π , a determinação da área de círculos e volumes de esferas.

Na prática os ábacos de rectas concorrentes (ábacos de cruzamento) também se revelam bastante vantajosos no caso dos problemas do terceiro grau, ou seja, no caso de equações gerais de terceiro grau, na variável z , tomadas na forma reduzida $z^3 + xz + y = 0$ (figura 1.3).

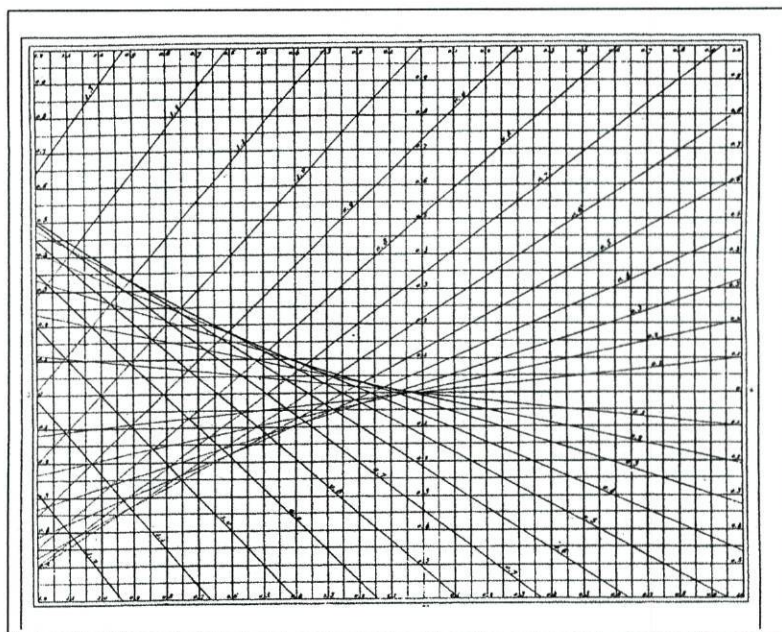


Figura 1.3: Ábaco de rectas concorrentes para a equação $z^3 + xz + y = 0$

Seguindo o trabalho de Pouchet e Lalanne muitas outras tabelas gráficas foram construídas durante o séc. XIX. No entanto, apenas no final deste século as noções matemáticas subjacentes à construção dos ábacos foram estudadas e generalizadas numa disciplina autónoma do cálculo gráfico.

1.1.2 Maurice d'Ocagne e os ábacos de alinhamento

Maurice d'Ocagne (1862-1938) - engenheiro e professor na Escola "Ponts et Chaussées", professor de geometria na escola politécnica a partir de 1912 - teve um papel preponderante na criação da nova disciplina à qual ele atribuiu a designação de nomografia. Ocagne desenvolveu vários trabalhos relativos a este assunto de onde se destacam dois: *Nomographie*[Ocagne 1891] e *Traité de Nomographie*[Ocagne 1899].

A obra de Maurice d'Ocagne no domínio do cálculo gráfico foi notável. Até esta fase a ciência dos ábacos limitava-se à construção de tabelas gráficas para equações de três variáveis recorrendo a feixes de linhas concorrentes que por anamorfose se poderiam transformar em feixes de rectas concorrentes (ver por exemplo, a figura 1.3).

Ocagne estudou a possibilidade de aplicar os nomogramas de linhas concorrentes a equações com mais do que três variáveis. Para além disso Ocagne explorou a geometria projectiva, nomeadamente o princípio da dualidade, com o intuito de transformar os nomogramas de rectas concorrentes de Lalanne em nomogramas de pontos alinhados [Ocagne 1884].

Com este objectivo Ocagne introduziu as "coordenadas paralelas". Neste novo sistema de coordenadas consideram-se dois eixos paralelos fixos. Como veremos com detalhe, o ponto de coordenadas (x, y) é representado pela recta que une o ponto de abcissa x sobre o primeiro eixo ao ponto de abcissa y segundo o segundo eixo. A recta de equação $ux + vy + w = 0$ é representada pelo ponto de intersecção das rectas que correspondem respectivamente às coordenadas paralelas $(-\frac{w}{u}, 0)$ e $(0, -\frac{w}{v})$.

Pelo princípio da dualidade três rectas concorrentes são transformadas em três pontos alinhados surgindo os nomogramas de pontos alinhados.

Dada a simplicidade da aplicação dos nomogramas de pontos alinhados, muitos foram os investigadores que demonstraram interesse por esta ferramenta. Do "*Traité de Nomographie*" [Oca 1899] de Ocagne resultaram 59 traduções ou adaptações em 14 línguas. Ao longo da sua carreira Ocagne reuniu várias dezenas de nomogramas no domínio da física, da topografia, da aviação, etc.

Paralelamente ao trabalho de Ocagne muitas outras tentativas foram feitas com o intuito de representar equações com mais do que três variáveis. Em 1922 dois concorrentes de Ocagne, Charles Lallemand e Rodolphe Soreau que também contribuíram para o desenvolvimento da teoria dos ábacos, questionaram as origens da nomografia e a paternidade das várias noções subjacentes.

A aplicação dos nomogramas continuou durante o séc. XX. Durante a década de 1950 as indústrias de petróleo e as indústrias químicas recorreram aos nomogramas como se evidencia em várias publicações nomeadamente nos Estados Unidos e no Museu da Ciência em Londres. Após 1950 é essencialmente na Rússia e nos países de Leste que a nomografia continua a desempenhar um papel importante facto que pode ser justificado pelo atraso da chegada de material electrónico a estes países.

Neste trabalho procura-se para além de salientar a importância que os nomogramas desempenharam na sociedade há algumas dezenas de anos atrás, analisar a aplicação da nomografia na resolução de equações quadráticas, cúbicas e biquadráticas e na resolução de triângulos esféricos.

Capítulo 2

Conceitos Fundamentais - Escalas

A Nomografia permite resolver através de um sistema de linhas cotadas, designado por àbaco ou nomograma, todos os problemas relativos a um determinado tipo de relações - relações entre duas variáveis, relações entre três variáveis e relações entre mais do que três variáveis. Ela aplica-se sempre que está envolvida uma mesma relação, que se pretende utilizar várias vezes, mas que, em cada caso, são fornecidos valores diferentes dos dados (parâmetros).

Em Nomografia existem algumas noções fundamentais - a noção de **ponto cotado**, **escala** e **campo binário**, que passamos a rever.

► Definições 2.1 ...

1. Um **ponto cotado** é um ponto no plano ao qual é atribuído uma ou várias cotas numéricas.
2. Uma **escala** é um conjunto de pontos cotados dependendo de um só parâmetro a que se chama **cota**. Designando por α a cota, a escala dir-se-á a escala α .

Num sistema de coordenadas rectangulares x, y para o plano, a equação da escala α é dada por:

$$\begin{cases} x = f(\alpha) \\ y = g(\alpha) \end{cases} \quad (2.0.1)$$

onde f e g são funções dadas (diferenciáveis) do parâmetro α .

Se $\alpha = \alpha_0$ é uma cota particular, o ponto $(x_0 = f(\alpha_0), y_0 = g(\alpha_0))$ diz-se o ponto de cota α_0 . Se agora se atribuem ao parâmetro α os valores $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$, em geral equidistantes, e se se calculam os valores correspondentes das coordenadas, obtêm-se os pontos cotados $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$. Ao unir estes pontos por uma linha contínua, definida pelas equações (2.0.1), obtêm-se a escala α . A linha é o suporte da escala (figura 2.1).

O sentido da escala é o sentido de crescimento das suas cotas. Na prática é impossível graduar cada ponto. Por vezes torna-se necessário recorrer à designada *interpolação à vista*, isto é, a partir das cotas efectivamente presentes na escala fazer uma aproximação de modo a determinar os valores intermédios. A interpolação à vista exerce-se de uma

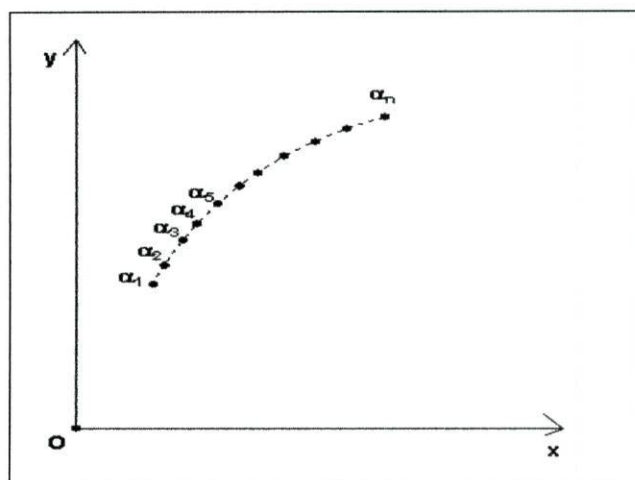


Figura 2.1: Escala α

forma mais facilitada e rigorosa no caso de um sistema de pontos distribuído sobre uma recta do que sobre um sistema de curvas e mesmo sobre um sistema de rectas.

A graduação da escala deve ser construída de modo a facilitar ao máximo a resolução de problemas do tipo:

- posicionar um ponto sobre a escala, dada a sua cota;
- encontrar a cota de um ponto da escala;

► **Definição 2.1** ... *O escalão é a diferença, geralmente constante, de duas cotas consecutivas.*

► **Exemplo 2.1 (Escala Rectilínea)** ... Esta é uma escala cujo suporte é uma recta.

Supondo que o suporte da escala rectilínea α coincide com o eixo das abcissas, a equação da escala rectilínea será dada pela expressão

$$x = mf(\alpha) \quad (\text{e } y = 0) \quad (2.0.2)$$

onde m é o chamado **módulo** da escala. Quando $f(\alpha) = 0$ vem que $x = 0$ e quando $f(\alpha) = 1$ a abcissa é $x = m$. Concluímos pois que o módulo é um segmento, em geral medido em mm , que corresponde a uma variação da função de uma unidade.

Suponhamos que a função $f(\alpha)$ é estritamente crescente e que

$$\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$$

Seja L o comprimento da escala α compreendida entre os pontos de cotas α_1 e α_2 . Vem então que

$$\begin{aligned}
 L &= x_2 - x_1 \\
 &= mf(\alpha_2) - mf(\alpha_1) \\
 &= m[f(\alpha_2) - f(\alpha_1)]
 \end{aligned}
 \tag{2.0.3}$$

donde resulta que o módulo m , para o qual a escala α tem comprimento L , entre α_1 e α_2 , é dado por:

$$m = \frac{L}{f(\alpha_2) - f(\alpha_1)} \tag{2.0.4}$$

De uma forma geral uma escala rectilínea é obtida marcando sobre uma recta, através de pequenos traços transversais, uma sucessão de pontos e escrevendo nesses traços um conjunto de números crescentes - as cotas da escala. Elas representam os valores sucessivos de uma certa variável. A distância de um traço a um ponto fixo será função da cota desse traço.

As escalas rectilíneas podem ser de dois tipos: (i). escalas métricas e (ii). escalas funcionais, que, de seguida, se estudam mais em detalhe.

2.1 Escalas Métricas

Uma escala rectilínea diz-se uma **escala métrica** se a função f que surge em (2.0.2), é a identidade: $f(\alpha) = \alpha$. A equação da escala métrica é pois definida por

$$x = m\alpha$$

onde m é o módulo da escala.

As escalas métricas têm as divisões equidistantes, ou seja, duas cotas sucessivas diferem entre si por um valor constante.

► **Exemplo 2.2** ... Construa-se a escala métrica $x = m\alpha$ de módulo $m = 43,2$ mm com $0 \leq \alpha \leq 1$ (figura 2.2).

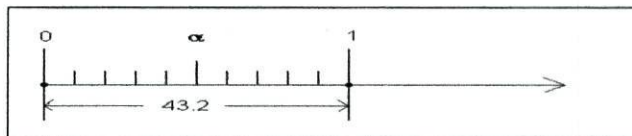


Figura 2.2: Escala métrica de módulo $m = 43.2$ mm

A equação da escala α é definida por

$$x = 43.2\alpha$$

Atribuem-se valores a α entre 0 e 1, com passo constante igual a 0.1, e a partir do ponto O traçam-se segmentos com os valores encontrados.

2.1.1 Métodos simplificados de construção de escalas métricas

Triângulo de Escalas Métricas:

Para traçar rapidamente escalas métricas de módulos diferentes pode recorrer-se ao triângulo de escalas métricas. Para isso constrói-se uma escala métrica qualquer, por exemplo, de módulo 100 mm entre 0 e 1. Exteriormente à escala escolhe-se um ponto arbitrário que se une aos pontos da escala. Paralelamente ao suporte da escala traçam-se rectas equidistantes de 5 mm. Desta forma obtém-se o triângulo de escalas métricas que permite construir escalas métricas de 0 a 1, com um qualquer módulo compreendido entre 15 mm e 100 mm.

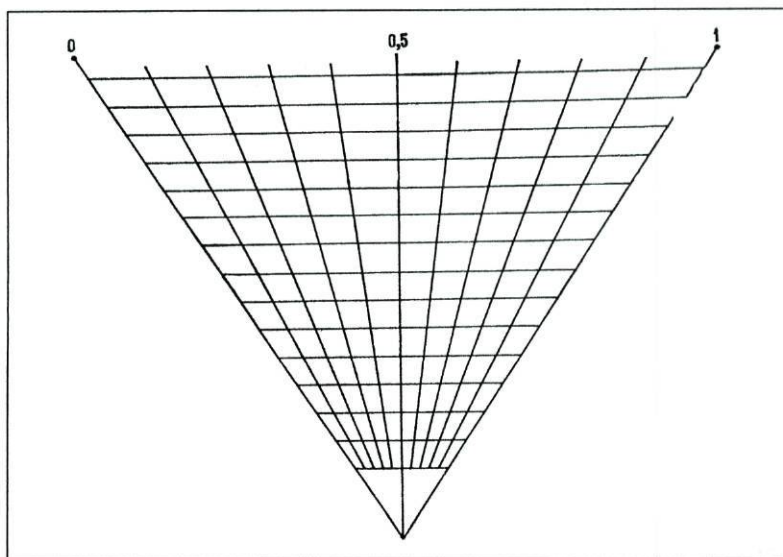


Figura 2.3: Triângulo de escalas métricas

► **Exemplo 2.3** Construa-se uma escala métrica de módulo $m = 93$ mm entre 0 e 1.

Com o apoio de uma folha de papel marquem-se dois traços que distem 93 mm. Ao traço do lado esquerdo atribua-se a cota 0 e ao da direita a cota 1. Aplique-se essa tira de papel sobre o triângulo de escalas métricas de modo que fique paralela à escala e que o traço da esquerda coincida com a recta 0 e o da direita com a recta que une o ponto exterior a 1. De seguida marquem-se os pontos de intersecção na tira de papel com as restantes rectas e construa-se a escala. Com o intuito de traçar os pontos intermédios sobre uma escala métrica divide-se o intervalo entre dois traços em duas, cinco ou dez partes. De modo a realizar esta operação utilizam-se os triângulos pequenos de escalas métricas com três, seis ou onze divisões representado abaixo (figura 2.4).

Família Regular de Rectas Paralelas:

Para construir escalas métricas de módulos diferentes pode, também, recorrer-se às famílias de rectas paralelas. Neste caso o módulo da escala a construir é sempre superior ao da família de rectas paralelas.

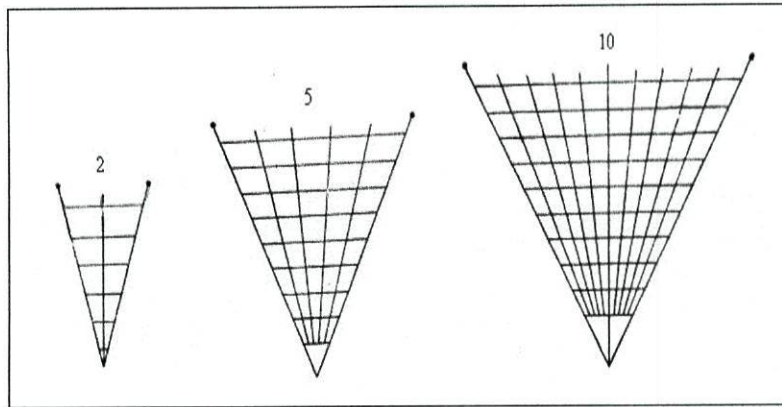


Figura 2.4: Triângulos de escalas métricas para a divisão de um intervalo em duas, cinco ou dez partes iguais

► **Exemplo 2.4** Construa-se uma escala métrica de módulo $m = 135\text{mm}$ entre 0 e 1.

Represente-se uma família de rectas paralelas recorrendo a uma escala métrica de módulo $m = 100\text{ mm}$ entre 0 e 1. Construa-se uma escala métrica de módulo $m = 135\text{ mm}$. De modo análogo ao anterior, comece-se por considerar numa tira de papel dois traços que distem 135 mm . Ao traço da esquerda atribua-se a cota 0 e ao da direita a cota 1. Aplique-se essa tira de papel sobre a família de rectas paralelas de modo que o traço da esquerda se sobreponha sobre a recta de cota 0 e o da direita sobre a recta de cota 1. De seguida marquem-se os pontos de intersecção da tira de papel com todas as outras rectas paralelas.

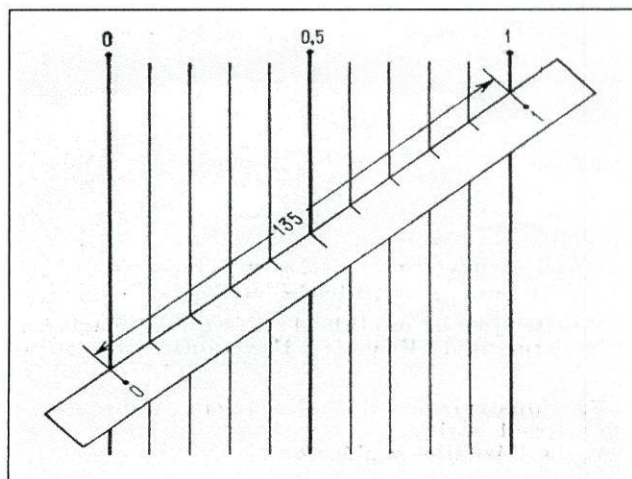


Figura 2.5: Construção de uma escala métrica de módulo 135mm entre 0 e 1 através de uma família regular de rectas paralelas

2.2 Escalas Funcionais

► **Definição 2.2** ...Uma escala rectilínea diz-se uma **escala funcional** se os segmentos considerados a partir da origem representam, relativamente a um módulo m escolhido, os valores que uma função toma para valores crescentes da variável:

$$x = mf(\alpha)$$

Estes últimos designam a cota dos pontos de divisão da escala.

A distância de um traço à origem da escala corresponde ao valor da função quando se toma o módulo para unidade. O intervalo (isto é, distância que separa dois pontos consecutivos da escala) de uma escala funcional não é, em geral, constante. Na verdade para certas escalas o intervalo diminui quando as cotas aumentam. Portanto só é possível manter o escalão (isto é, a diferença, em geral constante, entre as cotas de dois pontos consecutivos da escala) até ao momento em que esse escalão permite estabelecer interpolações precisas. O ponto que marca sobre a escala a mudança de escalão designa-se por **cesura**.

► **Definição 2.3** ...Uma escala funcional $x = mf(\alpha)$, diz-se **logarítmica** se a função f for da forma $f(\alpha) = \log \alpha$, **sinusoidal** se $f(\alpha) = \sin \alpha$ ou $f(\alpha) = \cos \alpha$, **quadrática** se $f(\alpha) = \alpha^2$, **de potências** se $f(\alpha) = \alpha^n$, onde n é uma constante e é **homográfica** se $f(\alpha) = \frac{a\alpha+b}{c\alpha+d}$ onde a, b, c e d são constantes. Esta última escala tem também a designação de escala projectiva já que pode ser obtida através da projecção de uma escala métrica rectilínea sobre uma recta a partir de um ponto nela não contido.

Escala Logarítmica

► **Definição 2.4** ...A **Escala Logarítmica** é definida através da equação

$$x = m \log(\alpha) \tag{2.2.1}$$

(o logaritmo é de base 10). Para $\alpha = 1$, $x = 0$ e para $\alpha = 10$ tem-se $x = m$. O módulo da escala logarítmica α é o comprimento do segmento da escala cujas extremidades são os pontos de cotas 1 e 10.

► **Exemplo 2.5** Construa-se a escala logarítmica α de módulo $m = 100\text{mm}$ entre 1 e 10. Neste caso, a equação da escala α é definida por $x = 100 \log \alpha$.

Trace-se a recta suporte da escala. Escolha-se a origem O e no sentido positivo marquem-se os pontos obtidos após substituir α pelos valores $1, 2, \dots, 10$ e calculando as distâncias correspondentes $30.1\text{mm}, 47.7\text{mm}, 60.2\text{mm}, \text{etc.}$. Depois constroem-se os intervalos mais finos. De 1 a 2, marcando traços de 0.1 em 0.1, de 2 a 5, de 0.2 em 0.2, etc... (figura 2.6).

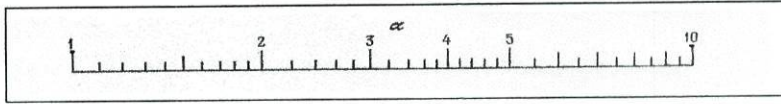


Figura 2.6: Escala logarítmica α de módulo 100mm entre 1 e 10

A escala logarítmica caracteriza-se por uma espécie de periodicidade que se deve ao facto de que a distância entre os pontos cotados α_1 e α_2 depende unicamente da razão entre essas cotas. Na verdade, a distância de dois pontos cotados α_1 e α_2 é dada pela fórmula:

$$L = m \log \alpha_2 - m \log \alpha_1$$

isto é,

$$L = m \log \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$$

Ao considerar as distâncias entre os pontos de cota 1 e 2, 2 e 4, 5 e 10, 10 e 20, 20 e 40 sobre uma escala logarítmica verifica-se que as distâncias são iguais.

Caso se tomem sobre a escala logarítmica pontos da forma a , $10a$, $100a$, $1000a$, etc conclui-se que as distâncias entre dois pontos consecutivos são sempre iguais entre elas e iguais ao módulo m da escala.

$$L = m \log \frac{10a}{a} = m \log 10 = m$$

$$L = m \log \frac{100a}{10a} = m \log 10 = m, \text{ etc}$$

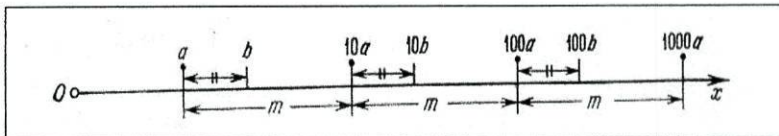


Figura 2.7: Esquema de uma escala logarítmica de módulo m entre a e $1000a$

Na verdade a graduação da escala é a mesma de 0.01 até 0.1; de 0.1 até 1, de 1 até 10, de 10 até 100. Logo para construir toda a escala é suficiente conhecer a porção da escala compreendida entre 1 e 10, facto que na prática se revela bastante vantajoso.

Métodos Simplificados de construção de escalas logarítmicas

Telas Logarítmicas

Para construir as escalas logarítmicas recorre-se, geralmente, a telas logarítmicas preparadas antecipadamente, isto é a escalas logarítmicas de 1 a 10 com vários módulos traçados sobre tiras de papel.

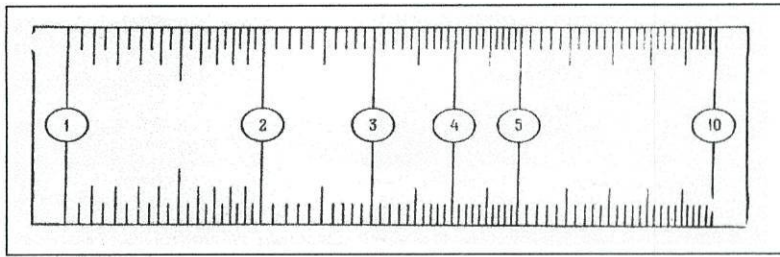


Figura 2.8: Tela logarítmica de módulo 100mm

Triângulo de escalas logarítmicas

Muitas vezes recorre-se ao triângulo de escalas logarítmicas para traçar rapidamente as escalas logarítmicas de vários módulos. Trace-se uma escala logarítmica, por exemplo de módulo 100 mm de 1 a 10, escolha-se exteriormente um ponto abaixo da escala que se irá unir aos pontos da mesma e levante-se em seguida paralelas ao suporte da escala com intervalos de 5 mm. Obtém-se um triângulo de escalas logarítmicas (figura 2.9).

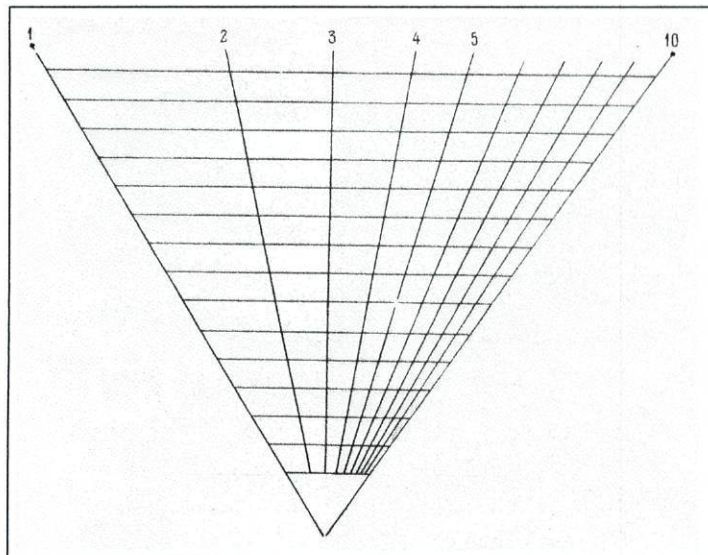


Figura 2.9: Triângulo de escalas logarítmicas

Família Logarítmica de Rectas Paralelas

Para construir rapidamente escalas logarítmicas de módulos diferentes pode utilizar-se uma família de rectas paralelas. Na figura seguinte representa-se uma família de 1 a 10 através de uma escala logarítmica de módulo 100 mm e constrói-se uma escala logarítmica de módulo 145mm entre 1 e 10 (figura 2.10).

► **Exemplo 2.6** Construa-se uma escala logarítmica α de 2 a 5, de módulo $m=173$ mm utilizando uma família de rectas paralelas.

Se tomar para origem da escala logarítmica α o ponto cotado α_1 a equação da escala α define-se por:

$$x = m(\log \alpha - \log \alpha_1)$$

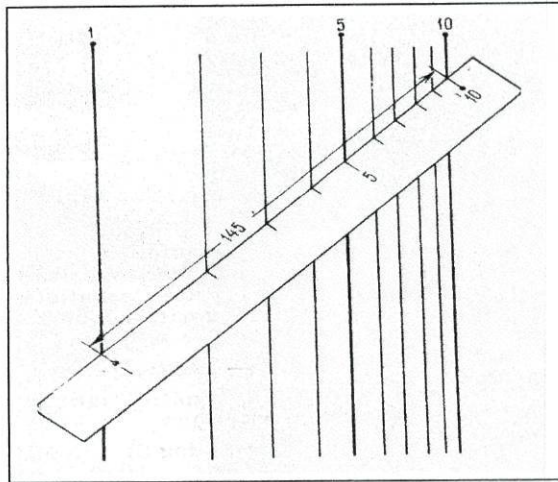


Figura 2.10: Família logarítmica de rectas paralelas e construção de uma escala logarítmica de módulo 145 mm entre 1 e 10

Na verdade, para $\alpha = \alpha_1$, tem-se $x = 0$. Neste caso $m = 173\text{mm}$, $\alpha_1 = 2$. A equação da escala α é pois

$$x = 173(\log \alpha - \log 2)$$

Para $\alpha = 2$ obtém-se $x = 0$. Para $\alpha = 5$, $x = 173(\log 5 - \log 2) = 173 \log 2.5 = 173.0,398 = 68.9\text{mm}$. Portanto marquem-se dois traços que distem 68.9 mm. Ao traço esquerdo associe-se a cota 2 e ao traço direito a cota 5. Recorrendo à família de rectas paralelas defina-se a escala α de modo que o ponto de cota 2 coincida na recta de cota 2 e o ponto de cota 5 recaia sobre a recta de cota 5.

2.3 Escalas Derivadas e Transformadas

Se numa folha de papel se marcar a escala da função $f(\alpha)$, é possível produzir uma outra escala, a escala da função $f(\varphi(\alpha))$, a que se chama uma escala derivada da primeira. Após ter calculado os valores de $\varphi(\alpha)$, para os α escolhidos, recorre-se à tira de papel para determinar o comprimento a que correspondem esses $\varphi(\alpha)$, e marcam-se sobre um eixo esses pontos correspondentes, a que se atribuem a cota α . É deste modo que se constroem escalas da forma $\log(a\alpha + b)$, que se transformam como uma escala logarítmica, assim como as escalas $a\alpha + b$ que utilizam uma escala métrica.

Por outro lado pode recorrer-se à escala de $f(\alpha)$ para construir as escalas das funções da forma $\varphi[f(\alpha)]$ que se designam por transformadas de $f(\alpha)$. Quando a função φ é racional e inteira esta construção pode efectuar-se através de projecções sucessivas. O caso mais frequente é aquele em que a escala transformada é da forma:

$$F(\alpha) = \frac{af(\alpha) + b}{cf(\alpha) + d}$$

que se obtém pela projecção de $f(\alpha)$ a partir de um centro conveniente. Diz-se que esta escala é **projectiva** de $f(\alpha)$.

Escala Projectiva

► **Definição 2.5** ...A *Escala Projectiva* resulta da projecção de uma escala métrica (*uniforme*), a partir do centro P , sobre uma recta (figura 2.11).

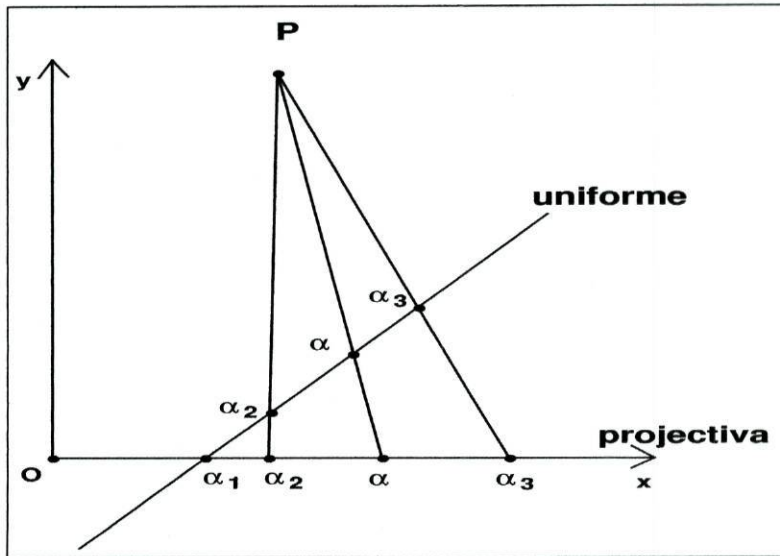


Figura 2.11: Escala Projectiva

Por construção a escala métrica e a escala projectiva α terão a mesma cota α_1 no ponto de intersecção.

Suponhamos que a escala métrica é dada pelas equações:

$$\begin{cases} x_m = A_1\alpha + B_1 \\ y_m = A_2\alpha + B_2 \end{cases} \quad (2.3.1)$$

onde A_1 , B_1 , A_2 e B_2 são constantes. Para coordenadas do ponto P consideremos A e B e por x_p e y_p as coordenadas dos pontos da escala projectiva. Uma vez que a escala projectiva coincide com o eixo Ox , $y_p = 0$.

Por construção, e já referido acima, o ponto P , o ponto cotado α da escala métrica e o ponto cotado α da escala projectiva estão alinhados, logo verifica-se a igualdade:

$$\begin{vmatrix} A & B & 1 \\ x_m & y_m & 1 \\ x_p & y_p & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (2.3.2)$$

Recorrendo às equações (2.3.1) e considerando que $y_p = 0$ conclui-se da equação (2.3.2) que:

$$x_p = \frac{(AA_2 - BA_1)\alpha + AB_2 - BB_1}{A_2\alpha + B_2 - B}$$

Substituindo x_p por x e tomando $a = AA_2 - BA_1$, $b = AB_2 - BB_1$, $c = A_2$ e $d = B_2 - B$, resulta a equação da escala projectiva

$$x = \frac{a\alpha + b}{c\alpha + d} \quad (2.3.3)$$

O segundo membro é uma função homográfica. Supõe-se sempre que

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0 \quad (2.3.4)$$

De salientar que para $c=0$ a escala projectiva transforma-se em escala métrica.

Existem vários métodos para construir a escala projectiva recorrendo às suas propriedades fundamentais. Vamos citar dois deles.

Num primeiro método note-se que o ponto P pode ser obtido pela intersecção de duas quaisquer semi-rectas projectivas.

Pela equação (2.3.3) da escala projectiva α , atribuem-se três valores quaisquer à variável α e calculem-se os valores correspondentes da abcissa x , por exemplo, x_1 , x_2 e x_3 .

Construam-se esses pontos da escala projectiva α tomando sobre o eixo Ox os pontos x_1 , x_2 e x_3 atribuindo-lhes as cotas α_1 , α_2 e α_3 . Pelo ponto de cota α_1 trace-se uma qualquer recta e construa-se sobre ela uma escala métrica conveniente de modo que os pontos α_1 das escalas métrica e projectiva coincidam. Tracem-se as rectas a passar pelos pontos cotados α_2 e α_3 a partir das escalas métrica e projectiva. O ponto de intersecção das rectas será o ponto P. A partir de P projecta-se a escala métrica sobre Ox e constrói-se a escala projectiva.

Num segundo método começa-se por traçar sobre uma folha de papel um feixe de rectas regular nos limites dados de α . Marca-se sobre uma tira de papel os pontos cotados α_1 , α_2 e α_3 da escala projectiva. Em seguida faz-se deslizar esta tira sobre o feixe de rectas de modo a que o ponto α_1 coincida sobre a recta α_1 , que o ponto α_2 coincida sobre a recta α_2 e por fim que o ponto α_3 coincida sobre a recta α_3 . Marque-se em seguida os pontos de intersecção das outras rectas com a tira e construa-se a escala (figura 2.12).

2.4 Campo Binário

► **Definição 2.6** ...Um **Campo Binário** é um conjunto de pontos cotados dependendo de dois parâmetros, α e β .

Num sistema de coordenadas rectangulares xOy as equações do campo binário definem-se por:

$$\begin{cases} x = f(\alpha, \beta) \\ y = g(\alpha, \beta) \end{cases} \quad (2.4.1)$$

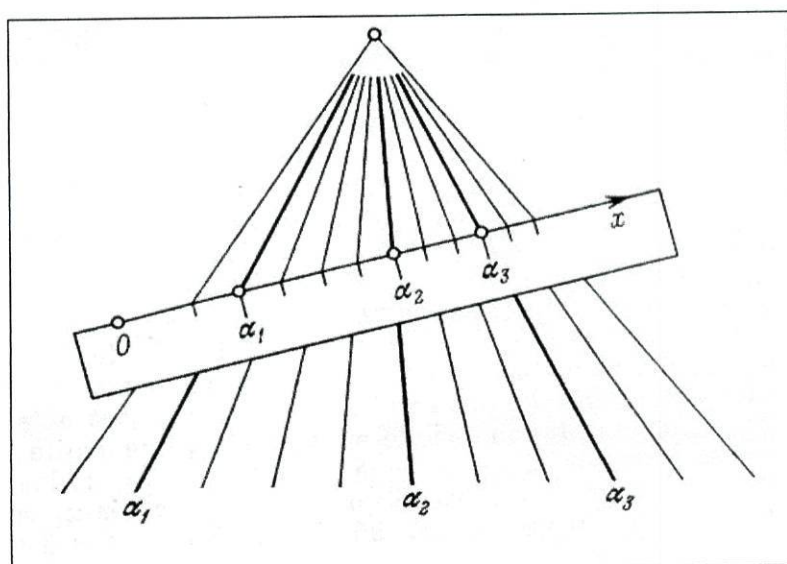


Figura 2.12: Construção de uma escala projectiva através de um feixe regular de rectas

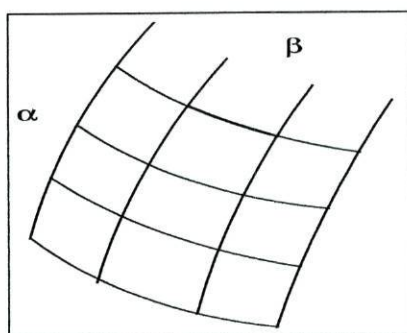


Figura 2.13: Campo Binário (α, β)

Apenas um e um só par de valores x e y está associado a cada par de valores α e β . Ao atribuir às variáveis α e β quaisquer valores α_0 e β_0 determinam-se através de (2.4.1) as coordenadas x_0 e y_0 do ponto correspondente do campo (α_0, β_0) . De modo similar se constroem todos os outros pontos.

O Campo Binário (α, β) é representado por uma família de linhas α e por uma família de linhas β e apresenta-se sob a forma de uma rede. Cada ponto do campo binário resulta da intersecção de linhas α e β de cotas dadas.

Um campo binário pode ser considerado como uma generalização da escala. Se tomarmos, por exemplo, $\beta = \beta_0$ obtém-se as equações da escala α , para esse valor fixo de β :

$$\begin{cases} x = f(\alpha, \beta_0) \\ y = g(\alpha, \beta_0) \end{cases} \quad (2.4.2)$$

De modo análogo construa-se a escala α para os valores $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ de β . Unam-se os pontos da escala α com a mesma cota por uma linha à qual ficará atribuída essa cota

(figura 2.14). Deste modo fica definido o campo binário (α, β) composto pelas famílias de linhas cotadas α e β .

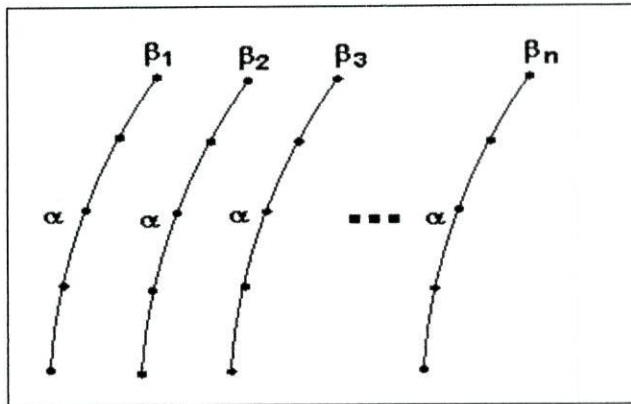


Figura 2.14: Construção da escala α para valores fixos de β

Eliminando sucessivamente as variáveis α e β nas equações (2.4.1), obtêm-se as equações das famílias de linhas α e β , em forma implícita:

$$F_1(\alpha, x, y) = 0 \quad (2.4.3)$$

$$F_2(\beta, x, y) = 0 \quad (2.4.4)$$

Recorrendo às equações anteriores também é possível construir o campo binário. Atribuindo valores a α , determinam-se a partir da equação (2.4.3) os valores de x e y que correspondem a esses α e constrói-se a família de linhas α . De modo análogo e recorrendo à equação (2.4.4) constroem-se as linhas β .

Redes funcionais são outra possível designação para campos binários. Introduzindo os módulos m e n na equação do campo binário (ou rede funcional) resulta:

$$\begin{cases} x = mf(\alpha, \beta) \\ y = ng(\alpha, \beta) \end{cases} \quad (2.4.5)$$

As redes mais correntes são definidas pelas equações:

$$\begin{cases} x = mf(\alpha) \\ y = ng(\beta) \end{cases} \quad (2.4.6)$$

As redes métricas, logarítmicas e semi-logarítmicas têm por equações respectivamente:

$$\begin{cases} x = m\alpha \\ y = n\beta \end{cases} \quad (2.4.7)$$

$$\begin{cases} x = m \log(\alpha) \\ y = n \log(\beta) \end{cases} \quad (2.4.8)$$

$$\begin{cases} x = m\alpha \\ y = n \log(\beta) \end{cases} \quad (2.4.9)$$

Na vida do dia-a-dia encontravam-se, muitas vezes, no comércio papel logarítmico e papel semi-logarítmico para vários módulos e limites, redes triangulares, papel em coordenadas polares, vários tipos de papel para o controle de qualidade da produção, as telas de probabilidades, o papel sinusoidal, as redes transformadas para a projecção para a escolha dos parâmetros das fórmulas empíricas.

Capítulo 3

Ábacos de Cruzamento

Para expôr os princípios da nomografia vamos usar as notações frequentes na obra de Ocagne: as várias variáveis intervenientes numa dada equação são representadas pela mesma letra, por exemplo z , à qual se atribuem índices correspondentes, z_1, z_2, z_3, \dots . Por outro lado, o símbolo f_1 designa uma função apenas da variável z_1 , f_{12} uma função das variáveis z_1 e z_2 e f_{123} uma função das variáveis z_1, z_2 e z_3 .

Quando uma função de uma variável, $z_2 = f(z_1)$, é representada por uma curva, os valores de z_1 são tomados no eixo de z_1 e os valores de z_2 são representados por linhas perpendiculares ao eixo de z_1 . Desta forma obtém-se o gráfico usual da função f_1 .

Do mesmo modo, uma função de duas variáveis independentes

$$z_3 = f_{12} = f(z_1, z_2)$$

pode ser representada considerando z_1 e z_2 como coordenadas rectangulares, levantando linhas perpendiculares ao plano z_1z_2 , em todos os pontos (z_1, z_2) , onde $f(z_1, z_2)$ é definida e considerando os comprimentos das perpendiculares proporcionais a z_3 . Deste modo obtém-se o gráfico usual da função f_{12} como uma superfície no espaço.

Considerando todos os pontos, no domínio das variáveis z_1 e z_2 , em que $f_{12} = f(z_1, z_2)$ toma o mesmo valor constante α , define-se uma curva no plano z_1z_2 , que se chama a curva de nível da função f_{12} , correspondente ao nível α . Tomem-se várias destas curvas de nível, cotadas pelo respectivo nível. Caso estas curvas estejam suficientemente próximas, para além de ser possível determinar o valor de $f(z_1, z_2)$, relativamente a alguma das curvas consideradas, também é possível, através de interpolação à vista determinar o valor de $f(z_1, z_2)$ em algum ponto entre duas curvas. É conveniente escolher valores equidistantes de $f(z_1, z_2)$ de modo a facilitar a interpolação.

Os ábacos de cruzamento permitem representar equações com três variáveis da forma

$$f_{123} = 0 \tag{3.0.1}$$

Se atribuímos sucessivamente a uma das variáveis, por exemplo, z_3 , valores crescentes a partir de um certo valor, separados por escalões iguais, então, para cada um desses valores fixos da variável z_3 , a equação (3.0.1) transforma-se numa equação com duas variáveis z_1 e z_2 que se representa por uma curva e à qual se atribui a cota z_3 .

A relação (3.0.1) surge, muitas vezes, na forma:

$$z_2 = \phi(z_1, z_3) \quad (3.0.2)$$

Com o intuito de traçar o ábaco de cruzamento, relativo à equação (3.0.2), toma-se um campo binário arbitrário de variáveis z_1 e z_2 . Atribuindo à variável z_3 uma série de valores fixos e traçando na rede (z_1, z_2) os gráficos das relações $z_2 = \phi(z_1, z_3)$, para valores fixos de z_3 , obtém-se o ábaco de cruzamento:

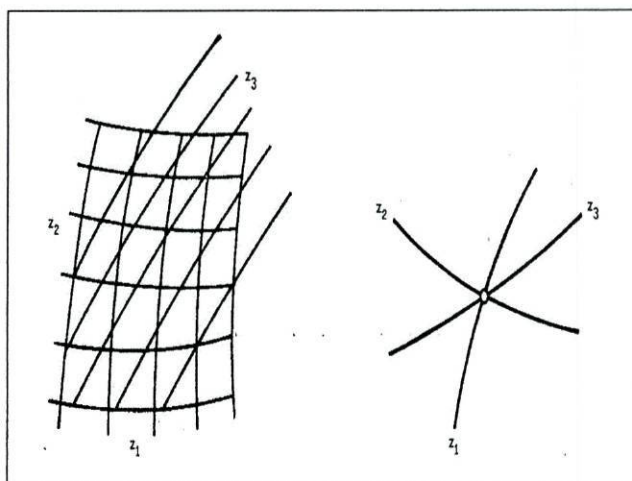


Figura 3.1: Esquema de um nomograma para equações da forma $f_{123} = 0$

► **Definição 3.1** ...O *ponto resolvente ou de resolução* é o ponto de intersecção das linhas cotadas z_1 , z_2 e z_3 em que as variáveis z_1 , z_2 e z_3 verificam a equação $f(z_1, z_2, z_3) = 0$.

Nos ábacos de cruzamento cada uma das variáveis pode desempenhar o papel da incógnita desconhecida. Assim, por exemplo, conhecendo z_1 e z_2 determina-se z_3 . Para isso define-se o ponto de intersecção das linhas z_1 e z_2 e a cota da linha z_3 , que passa por esse ponto, fornece a solução procurada.

Se relativamente a um sistema de coordenadas rectangulares XOY , o campo binário, formado pelas famílias de curvas z_1 e z_2 , é definido implicitamente pelas equações:

$$\begin{aligned} \alpha(X, Y; z_1) &= 0 \\ \beta(X, Y; z_2) &= 0 \end{aligned} \quad (3.0.3)$$

resta eliminar z_1 e z_2 entre estas equações e a equação dada (3.0.1) de forma a obter a terceira família de curvas:

$$\delta(X, Y; z_3) = 0 \quad (3.0.4)$$

Por outro lado se eliminar X e Y nas equações:

$$\begin{aligned}\alpha(X, Y; z_1) &= 0 \\ \beta(X, Y; z_2) &= 0 \\ \delta(X, Y; z_3) &= 0\end{aligned}\tag{3.0.5}$$

obtém-se a equação (3.0.1). Logo as curvas representadas por estas três equações intersectam-se num mesmo ponto (z_1, z_2, z_3) que satisfaz a equação $f(z_1, z_2, z_3) = 0$

► **Exemplo 3.1** Considere-se a equação com três variáveis:

$$z - x^3y = 0$$

(aqui regressamos às notações mais usuais, neste contexto, $x = z_1, y = z_2$ e $z = z_3$). Com o intuito de construir o nomograma correspondente a esta equação representa-se relativamente a um sistema de eixos cartesianos XOY as rectas $X = x$ e $Y = y$ e as curvas de nível $X^3Y = z$ (x, y e z constantes).

Ao atribuir às variáveis X e Y os valores x e y respectivamente, o valor de Z tal que (x, y, z) satisfaça a equação dada, isto é, tal que $z - x^3y = 0$, corresponde ao nível z da curva de nível que passa no ponto de intersecção das duas rectas $X = x$ e $Y = y$.

Este nomograma podia também ser construído considerando o sistema de eixos cartesianos XOZ, juntamente com o campo binário definido pelas rectas $X = x$ e $Z = z$, e as curvas de nível relativas a valores constantes de Y , diga-se $Y = y$, isto é, o conjunto dos pontos (X, Z) tais que $Z = yX^3$ (x, y e z constantes). A leitura da solução faz-se por um processo análogo ao anterior.

Por fim existe uma terceira possibilidade de construção do ábaco em que se considera um sistema de eixos cartesianos YOZ, as rectas $Y = y$ e $Z = z$, e as curvas de nível relativas a valores constantes de X , isto é, o conjunto dos pontos (Y, Z) tais que $Z = x^3Y$. Neste caso a construção fica facilitada uma vez que o nomograma é formado apenas por linhas rectas.

Assim para este exemplo e considerando a primeira proposta de construção apresentada resulta:

$$\begin{aligned}\alpha(X, Y; x) &= X - x = 0 \\ \beta(X, Y; y) &= Y - y = 0 \\ \delta(X, Y; z) &= X^3Y - z = 0\end{aligned}\tag{3.0.6}$$

Em síntese um ábaco de cruzamento para uma equação do tipo (3.0.1), $f_{123} = 0$, pode ser construído de duas formas:

- **Processo Sintético** - neste caso constrói-se um campo binário arbitrário (z_1, z_2) no intervalo de variação das variáveis (ou então utiliza-se uma escala funcional já construída). Em seguida traçam-se ponto por ponto a família de linhas z_3 através da equação (3.0.2) na rede (z_1, z_2) . Neste caso não é necessário conhecer as equações das famílias das linhas z_1, z_2 e z_3 visto não se recorrer a um sistema de coordenadas rectangulares.

- **Processo Analítico**- Neste caso introduz-se um sistema de coordenadas rectangulares xOy . São dadas as equações de duas famílias de linhas (ou equivalentemente as equações do campo binário) e utilizando a equação (3.0.1) e a equação das duas famílias dadas determina-se a equação da terceira família. De seguida traçam-se separadamente as três famílias de rectas que irão dar origem ao ábaco de cruzamento da equação (3.0.1).

3.1 Ábacos de Cruzamento Rectilíneo

► **Definição 3.2** ...Um **ábaco de cruzamento rectilíneo** é um ábaco de cruzamento constituído por três famílias de rectas z_1 , z_2 e z_3 .

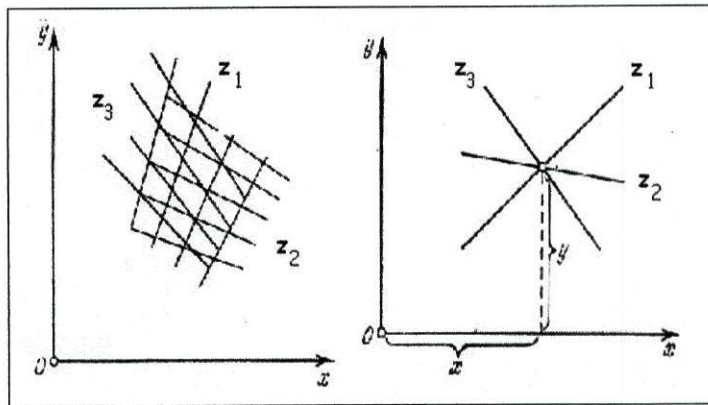


Figura 3.2: Esquema de um ábaco de cruzamento rectilíneo

Considerem-se as três famílias de rectas definidas por:

$$\begin{cases} \gamma(x, y; z_1) : f_1x + g_1y + h_1 = 0 \\ \varphi(x, y; z_2) : f_2x + g_2y + h_2 = 0 \\ \mu(x, y; z_3) : f_3x + g_3y + h_3 = 0 \end{cases} \quad (3.1.1)$$

Eliminando x e y nestas equações, obtém-se a equação $F(z_1, z_2, z_3) = 0$ que neste caso é caracterizada por:

$$F(z_1, z_2, z_3) = \begin{vmatrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \\ f_3 & g_3 & h_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (3.1.2)$$

Esta equação traduz a condição necessária para que, com z_1 , z_2 e z_3 fixos, as três rectas correspondentes se intersectem num mesmo ponto (x, y) , isto é para que o sistema (3.1.1) tenha solução.

Em particular, considere-se um ábaco de cruzamento rectilíneo cujas famílias de rectas z_1 , z_2 e z_3 são definidas por:

$$\begin{cases} f_1x + g_1y + 1 = 0 \\ f_2x + g_2y + 1 = 0 \\ f_3x + g_3y + 1 = 0 \end{cases} \quad (3.1.3)$$

As rectas definidas por estas equações devem passar pelo ponto de coordenadas x e y caso z_1 , z_2 e z_3 verifiquem a equação procurada.

A compatibilidade do sistema de equações anteriores relativamente às coordenadas do ponto x e y , é definida pelo anulamento do determinante do sistema:

$$\begin{vmatrix} f_1 & g_1 & 1 \\ f_2 & g_2 & 1 \\ f_3 & g_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (3.1.4)$$

Pelo que foi visto acima a equação (3.1.4) define um ábaco de cruzamento rectilíneo.

Reciprocamente se é dada a equação anterior, as equações das famílias de rectas z_1 , z_2 e z_3 deduzem-se das três equações (3.1.3).

Podemos ainda definir um outro processo para determinar a equação (3.1.4) representável por um ábaco de cruzamento rectilíneo, eliminando as variáveis x e y nas equações (3.1.3). Para isso subtrai-se a primeira às restantes equações:

$$\begin{cases} (f_2 - f_1)x + (g_2 - g_1)y = 0 \\ (f_3 - f_1)x + (g_3 - g_1)y = 0 \end{cases} \quad (3.1.5)$$

A partir das equações anteriores resulta

$$\begin{aligned} -\frac{y}{x} &= \frac{f_2 - f_1}{g_2 - g_1} \\ -\frac{y}{x} &= \frac{f_3 - f_1}{g_3 - g_1} \end{aligned}$$

de onde resulta:

$$\frac{f_2 - f_1}{g_2 - g_1} = \frac{f_3 - f_1}{g_3 - g_1} \quad (3.1.6)$$

A equação anterior define uma outra forma de apresentar a equação (3.1.4). Estes dois processos são aplicados na nomografia.

3.2 Ábacos Cartesianos

Como foi visto anteriormente pode escolher-se arbitrariamente o campo binário (z_1, z_2) para construir o ábaco de cruzamento da equação $f(z_1, z_2, z_3) = 0$. Logo é possível estabelecer a equação do campo de modo a que a rede (z_1, z_2) seja ortogonal. Neste caso, a equação do campo será da forma:

$$\begin{aligned} x &= m[f_1(z_1) - a] \\ y &= n[f_2(z_2) - b] \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

onde m , n , a e b são os parâmetros de transformação.

► **Definição 3.3** ... Um **ábaco cartesiano** é um ábaco de cruzamento constituído por uma rede (z_1, z_2) , ortogonal e uma família de linhas z_3 obtidas através da equação $z_2 = \phi(z_1, z_3)$.

Se tomar $f_1(z_1) = z_1$ e $f_2(z_2) = z_2$ obtém-se um ábaco cartesiano simples com rede métrica (z_1, z_2) .

Caso se considere $f_1(z_1) = \log z_1$ e $f_2(z_2) = \log z_2$ nas equações do campo (3.2.1) obtém-se um ábaco cartesiano com rede logarítmica.

Geometricamente os parâmetros a e b definem a posição da origem das coordenadas e m e n os módulos das escalas z_1 e z_2 , nos eixos das abcissas e das ordenadas, respectivamente.

Suponhamos que as funções $f_1(z_1)$ e $f_2(z_2)$ são monótonas crescentes, quando as variáveis z_1 e z_2 evoluem nos limites $z_{1a} \leq z_1 \leq z_{1b}$, $z_{2a} \leq z_2 \leq z_{2b}$. Neste caso, é usual tomar a origem das coordenadas no ponto de cotas (z_{1a}, z_{2a}) da rede (z_1, z_2) .

Pode portanto escrever-se:

$$\begin{aligned} 0 &= m[f_1(z_{1a}) - a] \\ 0 &= n[f_2(z_{2a}) - b] \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

e daí que:

$$a = f_1(z_{1a})$$

$$b = f_2(z_{2a})$$

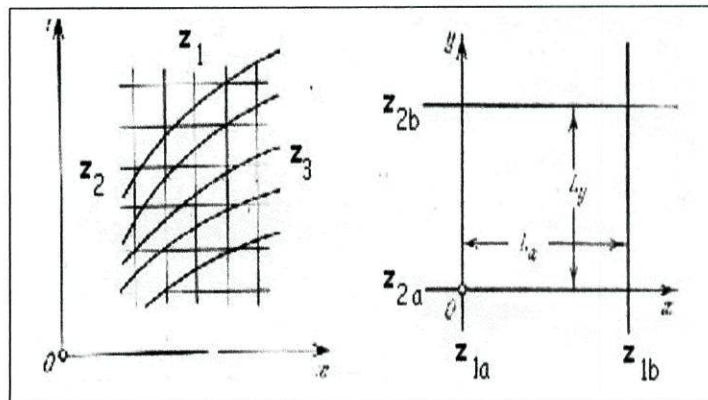


Figura 3.3: Esquema de um ábaco cartesiano para a equação $z_2 = \phi(z_1, z_3)$

Suponhamos que L_x é o comprimento da rede em Ox e L_y o comprimento sobre o eixo Oy . Os valores dos módulos m e n para os quais a rede admite L_x e L_y para comprimentos, deduzem-se das equações:

$$L_x = m[f_1(z_{1b}) - f_1(z_{1a})] \quad (3.2.3)$$

$$L_y = n[f_2(z_{2b}) - f_2(z_{2a})] \quad (3.2.4)$$

Daqui se obtém:

$$m = \frac{L_x}{f_1(z_{1b}) - f_1(z_{1a})}$$

$$n = \frac{L_y}{f_2(z_{2b}) - f_2(z_{2a})}$$

Analogamente ao que foi analisado anteriormente o ábaco cartesiano pode ser considerado como uma representação das curvas de nível da superfície $f(z_1, z_2, z_3) = 0$. As linhas cotadas do ábaco são as linhas de nível dessa superfície projectadas sobre o plano z_1Oz_2 .

Através deste ábaco, o valor da função z_3 correspondente ao par de valores $z_1 = a$ e $z_2 = b$ é determinado pela cota da linha que passa pelo ponto de coordenadas cartesianas (a, b) .

► **Exemplo 3.2** No caso de $z_3 = z_1z_2$ obtém-se a tabela gráfica da multiplicação de *L.E.Pouchet*, de 1795, onde as linhas cotadas são as hipérbolés equiláteras.

O produto de 6 por 5, por exemplo, é fornecido pela cota 30 da hipérbole equilátera que passa pelo ponto de abcissa 6 e ordenada 5.

Recorrendo ao ábaco da multiplicação de Pouchet é possível determinar a área de uma figura rectangular. Para isso aplique-se sobre a área as linhas z_3 de modo que a origem coincida com o extremo inferior esquerdo do rectângulo e o eixo Oz_1 com a base do rectângulo. De seguida lê-se a resposta relativamente a z_3 tendo em atenção o extremo superior direito do rectângulo. Este modo de determinar áreas dispensa a medição dos segmentos z_1 e z_2 , já que estes são introduzidos automaticamente no ábaco.

3.3 Ábacos Cartesianos Rectilíneos

Entre os ábacos cartesianos, aqueles cujas linhas z_3 são representadas por rectas oferecem um interesse particular. Para traçar uma recta são apenas necessários dois pontos o que traduz uma maior precisão relativamente à curva.

► **Definição 3.4** ...*Um ábaco cartesiano rectilíneo para a relação $f(z_1, z_2, z_3) = 0$ é um ábaco cartesiano em que as linhas z_3 são representadas por rectas.*

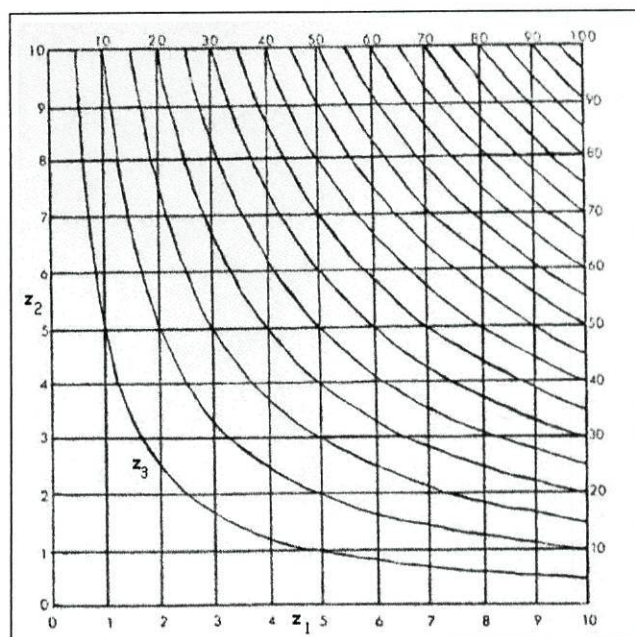


Figura 3.4: Nomograma da equação $z_3 = z_1 z_2$

Importa agora definir qual a forma da equação (3.0.1) que pode ser representada por um ábaco cartesiano rectilíneo.

Suponhamos que o ábaco já se encontra construído. As equações das famílias das suas linhas correspondem a:

$$\text{rectas } z_1 : x = f_1(z_1)$$

$$\text{rectas } z_2 : y = f_2(z_2)$$

$$\text{rectas } z_3 : g_3(z_3)x + h_3(z_3)y + f_3(z_3) = 0$$

Eliminando x e y nas equações anteriores resulta a relação:

$$f_1 g_3 + f_2 h_3 + f_3 = 0 \quad (3.3.1)$$

que surge como determinante

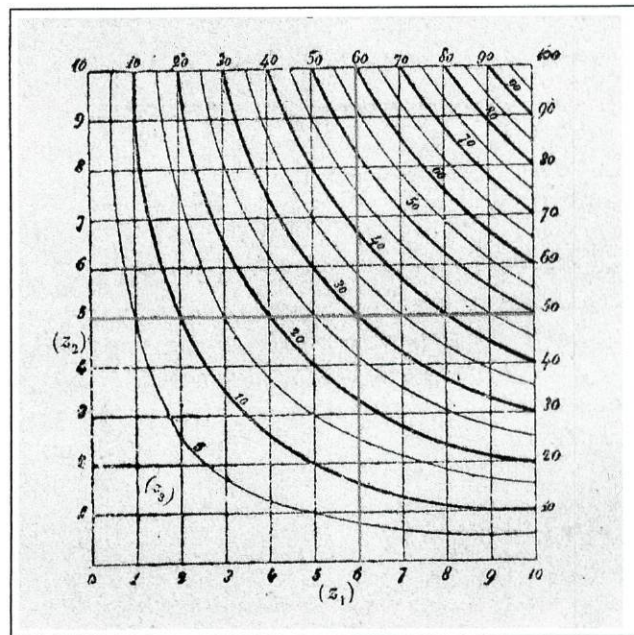
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -f_1 \\ 0 & 1 & -f_2 \\ g_3 & h_3 & f_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (3.3.2)$$

e que é representável por um ábaco cartesiano rectilíneo e à qual se atribui a designação de forma de Cauchy.

Muitas vezes a equação (3.3.1) é reduzida a

$$f_1 + f_2 + f_3 = 0$$

As linhas z_3 do ábaco são definidas por rectas caso a equação dada seja da forma (3.3.1)

Figura 3.5: Multiplicação de 6×5

Lalanne representou, por volta de 1843, por um ábaco deste tipo a equação trinomial do 3º grau na variável z :

$$z^3 + xz + y = 0 \quad (3.3.3)$$

onde x e y são as parâmetros dados, variáveis conforme as aplicações.

O problema resume-se a determinar os valores de z que satisfazem a equação (3.3.3).

Cada par ordenado (x, y) representa uma equação do terceiro grau do tipo (3.3.3), e o nomograma permite por leitura gráfica determinar a solução z .

Recorrendo ao método acima pode começar-se por construir o ábaco definido por:

$$\begin{aligned} \alpha(X, Y; x) &= X - x = 0 \\ \beta(X, Y; y) &= Y - y = 0 \\ \delta(X, Y; z) &= z^3 + Xz + Y = 0 \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

onde novamente revertemos para as notações mais usuais $z_1 \rightarrow x, z_2 \rightarrow y, z_3 \rightarrow z$, e usamos o plano cartesiano XOY .

No referencial XOY tome-se $X = x$ e $Y = y$ que representam rectas verticais e horizontais respectivamente.

Dado um certo valor fixo de z obtemos a recta de equação $z^3 + Xz + Y = 0$ no plano XOY . Por exemplo, para $z = -0.3$ temos a recta de equação:

$$-0.027 - 0.3X + Y = 0 \quad (3.3.5)$$

As diferentes rectas, obtidas variando z , são tangentes a uma curva.

As rectas da família $z^3 + Xz + Y = 0$, parametrizada por z , são tangentes a uma curva cuja equação resulta da eliminação do parâmetro z nas equações:

$$\begin{cases} z^3 + Xz + Y = 0 \\ 3z^2 + X = 0 \end{cases} \quad (3.3.6)$$

Esta curva diz-se a **envolvente** da família referida. Tem por equações paramétricas:

$$\begin{cases} Y = 2z^3 \\ X = -3z^2 \end{cases} \quad (3.3.7)$$

e é pois a cúbica de equação (figura 3.6):

$$4X^3 + 27Y^2 = 0 \quad (3.3.8)$$

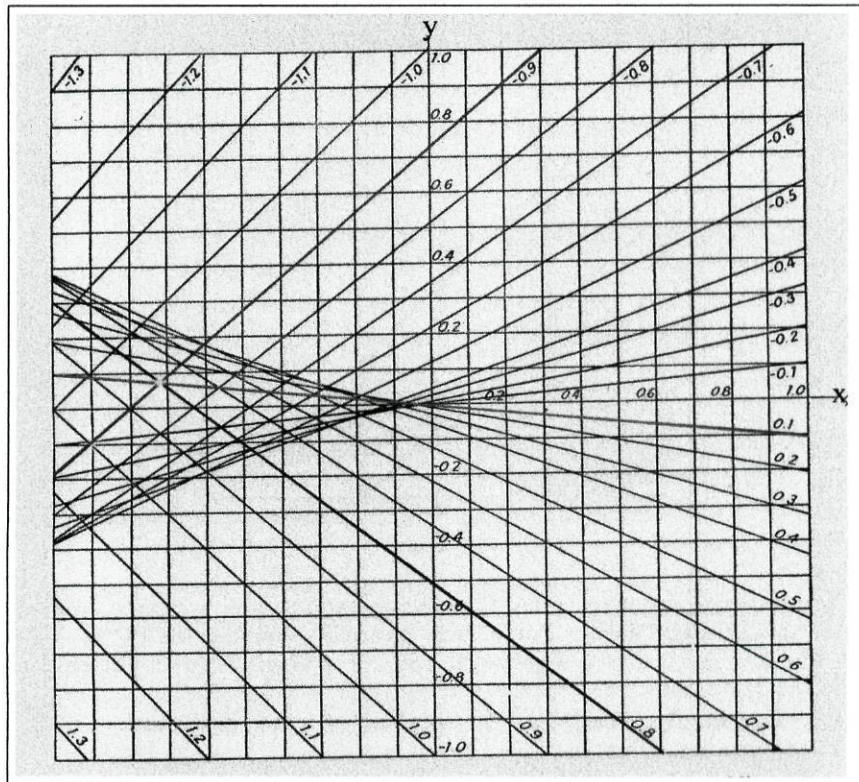


Figura 3.6: Nomograma relativo á equação $z^3 + xz + y = 0$

Quando o ponto de coordenadas x e y se encontra no interior do triângulo curvilíneo da figura, podem construir-se três tangentes à cúbica (3.3.8), que passam por esse ponto (x, y) , e portanto a equação do terceiro grau relativa a estes valores particulares de x e y tem três raízes reais. Quando o ponto de coordenadas x e y não se encontra no interior do triângulo definido pela equação cúbica conclui-se que só existe uma solução real, ou seja, por cada ponto dessa região só é possível traçar uma tangente à cúbica (3.3.8).

Uma equação trinomial da forma $z^m + xz^n + y = 0$ pode analogamente ser representada por um ábaco cartesiano retilíneo. Na verdade:

"Se uma relação de três variáveis é do primeiro grau em relação ao conjunto de duas dessas quantidades, obtém-se um ábaco cartesiano retilíneo. Considerando duas das quantidades como coordenadas cartesianas conclui-se que as escalas adoptadas sobre os eixos são as escalas métricas".

3.4 Equações com mais do que três variáveis

Através de um único nomograma de cruzamento não é possível obter a representação de equações com mais do que três variáveis. Estas equações têm solução quando se consideram variáveis auxiliares. Considerando a ligação entre vários nomogramas de cruzamento e substituindo a equação com mais do que três variáveis por várias outras que não ultrapassem as três variáveis o problema fica resolvido. Considerem-se os casos de quatro, cinco ou seis variáveis.

Seja a equação

$$F_{1234} = 0$$

Considere-se que a equação anterior pode ser definida como resultado da eliminação da variável t entre as equações:

$$f_{12}(z_1, z_2, t) = 0$$

$$g_{34}(z_3, z_4, t) = 0$$

Assim igualando o valor de t em ambas as equações obtém-se algo da forma:

$$\varphi_{12} = \psi_{34}$$

. Assim cada uma das equações acima pode ser representada por um nomograma de cruzamento de modo que o sistema t seja o mesmo sobre cada um dos nomogramas dando origem a uma única figura. Na verdade o sistema t acaba por funcionar como passagem de um nomograma para o outro.

Caso se considerem 5 variáveis (figura 3.8), ou seja

$$F_{12345} = 0$$

esta equação pode ser tomada como resultado da eliminação de t e t' entre as equações

$$f_{12}(z_1, z_2, t) = 0$$

$$g_{34}(z_3, z_4, t') = 0$$

$$h_5(z_5, t, t') = 0$$

No caso de 6 variáveis (figura 3.9), ou seja

$$F_{123456} = 0$$

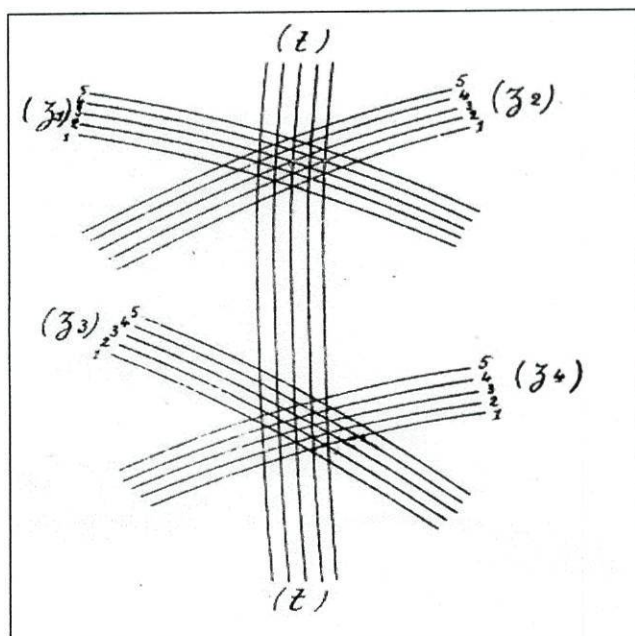


Figura 3.7: Nomograma para equações com 4 variáveis

esta equação pode também ser tomada como resultado da eliminação de t , t' e t'' entre as equações

$$f_{12}(z_1, z_2, t) = 0$$

$$g_{34}(z_3, z_4, t') = 0$$

$$h_{56}(z_5, z_6, t'') = 0$$

$$\varphi(t, t', t'') = 0$$

Após analisar estes exemplos facilmente se conclui "que as equações com mais de três variáveis representáveis por ábacos de cruzamento fixos são aquelas que podem ser deduzidas de uma equação de três variáveis através de um conjunto de substituições em que se substitui uma variável por uma função de duas outras variáveis."

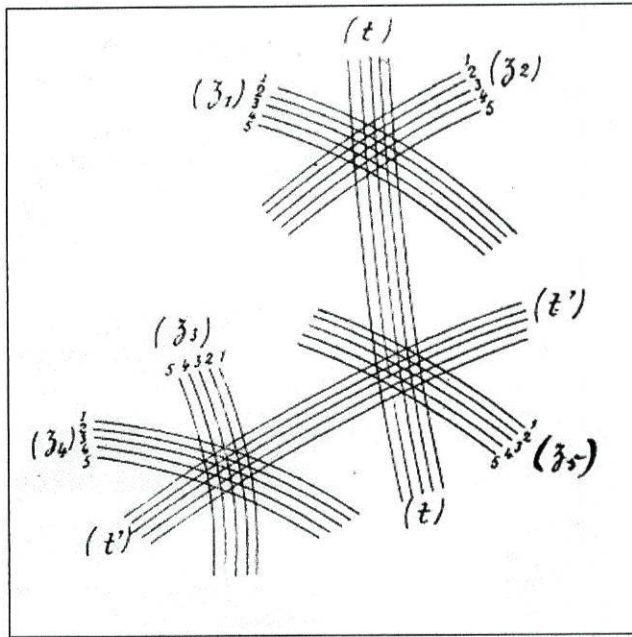


Figura 3.8: Nomograma para equações com 5 variáveis

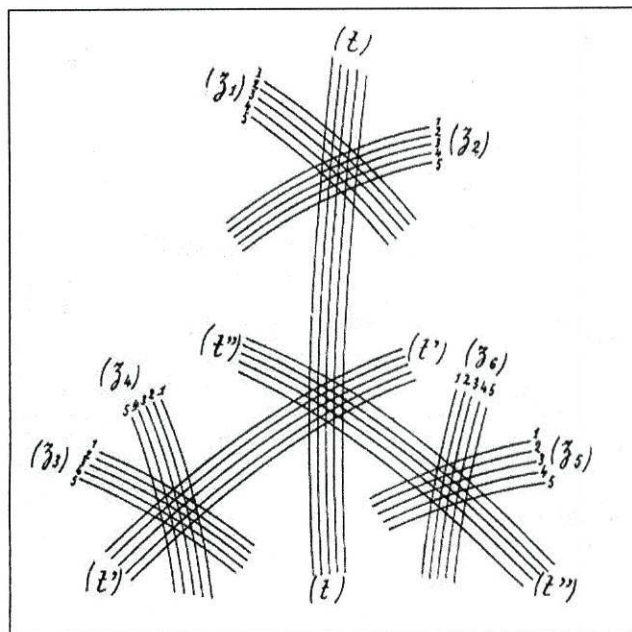


Figura 3.9: Nomograma para equações com 6 variáveis

Capítulo 4

Transformação gráfica dos ábacos de cruzamento em ábacos de pontos alinhados

Como se verificou os ábacos de cruzamento são definidos por três famílias de linhas sobrepostas, o que muitas vezes dificulta a leitura dos dados. De modo a superar este inconveniente transformam-se os ábacos de cruzamento em ábacos de pontos alinhados.

4.1 Ábacos de pontos alinhados

Suponhamos que uma das famílias de linhas da rede de cruzamento, por exemplo a família z_3 , é um feixe de rectas de centro num ponto P. Escolha-se de forma arbitrária a família de linhas z_2 . Recorrendo á equação

$$z_2 = \phi(z_1, z_3) \tag{4.1.1}$$

construa-se a família de linhas z_1 sobre a rede construída (z_2, z_3) . De seguida intersecte-se o feixe z_3 por uma qualquer linha determinando assim a escala z_3 . Retirando o feixe z_3 da figura permanecendo o centro P e a escala z_3 , obtém-se o ábaco da figura (4.1), constituído pelo ponto fixo P, pelo campo binário (z_1, z_2) e pela escala z_3 . Para determinar um valor procurado de z_3 , que corresponde a valores de z_1 e z_2 conhecidos, utiliza-se uma régua unindo o ponto P ao ponto dado do campo binário. O ponto de intersecção com a escala z_3 fornece então a solução procurada. Assim o ponto P, o ponto (z_1, z_2) do campo binário e o ponto da escala z_3 , onde (z_1, z_2, z_3) verificam a equação $f(z_1, z_2, z_3) = 0$, estão todos alinhados.

O ábaco representado é um caso particular de um ábaco de pontos alinhados com três campos binários - um dos campos está reduzido a um ponto fixo e um outro campo reduzido a uma escala. Uma vez que uma das famílias é substituída por um ponto e uma escala este nomograma revela vantagens em relação aos ábacos de cruzamento.

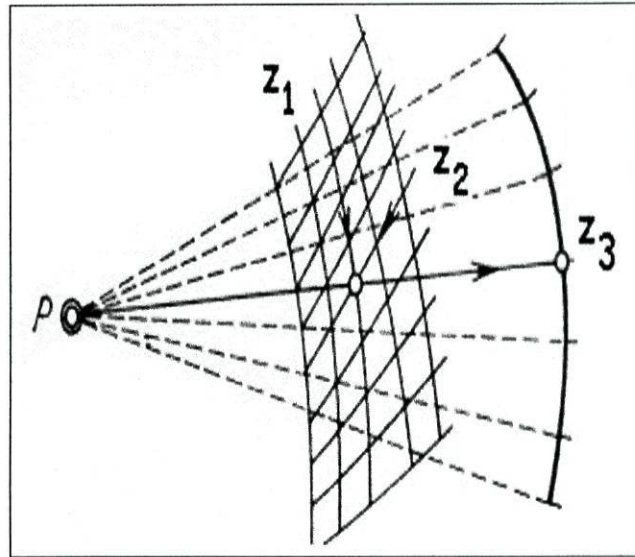


Figura 4.1: Ábaco de Alinhamento deduzido de um ábaco de cruzamento substituindo o feixe de rectas z_3 pelo centro P e pela escala z_3

Já que o rodar de uma recta em torno de um ponto fixo P pode ser realizado mecânicamente, este ábaco pode servir de base a aparelhos nomográficos de tipo mecânico.

4.2 Princípio da Dualidade

Os ábacos de pontos alinhados apresentam vantagens em relação aos ábacos de cruzamento que serão devidamente analisadas no próximo capítulo. Portanto, interessa compreender qual o processo que permite transformar os ábacos de cruzamento em ábacos de alinhamento. Estas transformações dos ábacos de cruzamento serão fundamentadas no princípio de dualidade e estão na base da descoberta dos ábacos de pontos alinhados.

Como exemplo serão utilizadas transformações dualísticas particulares, baseadas na aplicação das chamadas coordenadas paralelas de uma recta. Ocagne utiliza exclusivamente estas coordenadas; no entanto por vezes surgem também as coordenadas ditas de Plücker. As coordenadas paralelas u , v fixam a posição de uma qualquer recta pelos segmentos u e v que essa recta determina sobre dois eixos paralelos, como se explica em detalhe, na secção seguinte.

4.3 Transformação gráfica de um ábaco cartesiano rectilíneo num ábaco de pontos alinhados com dois suportes paralelos

Consideremos dois planos \mathcal{P} e \mathcal{P}^* . Uma dualidade ou correlação entre eles é uma correspondência do tipo:

$$\text{Ponto } P \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \text{recta } p \subset \mathcal{P}^*$$

que verifica as propriedades indicadas no quadro seguinte.

Plano \mathcal{P}		Plano dual \mathcal{P}^*
Ponto $P = (x, y)$	\Leftrightarrow	Recta $p = (u = x, v = y)$
Recta l $ax + by + c = 0$	\Leftrightarrow	Feixe de rectas \approx ponto suporte L $au + bv + c = 0$
Recta que une dois pontos	\Leftrightarrow	Ponto intersecção de duas rectas
3 rectas intersectam-se num ponto	\Leftrightarrow	3 pontos estão alinhados sobre uma mesma recta
Ponto intersecção de duas rectas	\Leftrightarrow	Recta que une dois pontos \approx recta comum a dois feixes
Curva pontual $\phi(x, y) = 0$	\Leftrightarrow	Família de um parâmetro de rectas \approx envolvente $\phi(u, v) = 0$
Recta tangente à curva num ponto P	\Leftrightarrow	Ponto característico da recta dual a P
Curvas intersectam-se num ponto	\Leftrightarrow	Recta tangente comum às curvas duais

Esta dualidade far-se-á da seguinte forma - no plano \mathcal{P} escolhe-se um referencial cartesiano OXY , e no plano \mathcal{P}^* escolhem-se duas rectas paralelas orientadas e uma terceira que intersecte ambas nos pontos A e B .

Ao ponto $P \in \mathcal{P}$, de coordenadas (x, y) , associámos a recta p , de \mathcal{P}^* , que une os pontos M e N , onde $AM = u = x$ e $BN = v = y$ (ambos marcados de acordo com a orientação definida em cada recta). (u, v) dizem-se as coordenadas paralelas da recta p .

► **Proposição 4.1** ... Quando o ponto $P = (x, y) \in \mathcal{P}$ percorre a recta r de \mathcal{P} , de equação:

$$ax + by + c = 0$$

a recta $p = (u = x, v = y)$, em \mathcal{P}^* , roda em torno de um ponto fixo $R \in \mathcal{P}^*$.

Este ponto $R \in \mathcal{P}^*$ diz-se o dual da recta r de \mathcal{P} . Como (u, v) satisfazem a equação:

$$\boxed{au + bv + c = 0} \tag{4.3.1}$$

esta diz-se a equação tangencial do ponto R . Simbòlicamente:

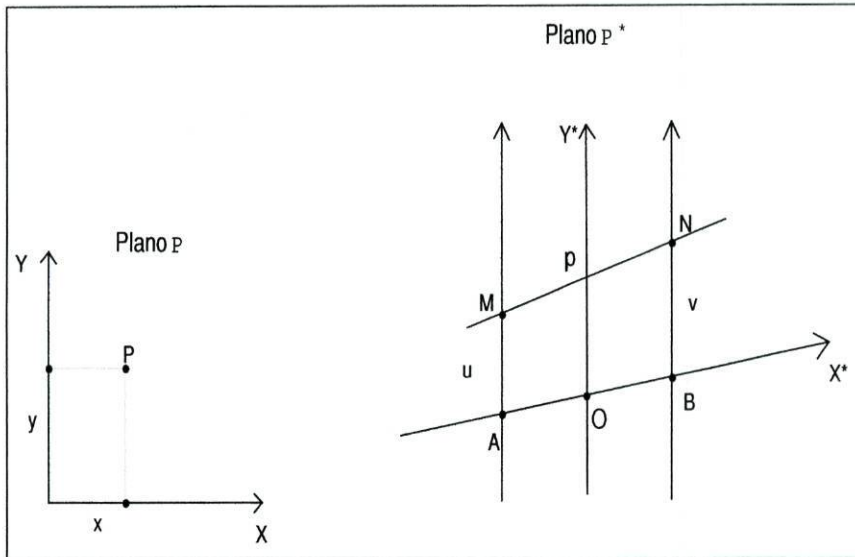


Figura 4.2: Dualidade entre o plano P e o plano P^*

$$\boxed{P \in r \iff p \ni R} \quad (4.3.2)$$

O ponto R é o ponto de intersecção das rectas de coordenadas paralelas ($u = 0, v = -c/b$) e ($u = -c/a, v = 0$), que correspondem aos pontos de intersecção da recta r com os eixos OX e OY , respectivamente.

Considere-se um referencial OX^*Y^* , no plano \mathcal{P}^* , como o que se indica na figura anterior em que O é o ponto médio de AB . Neste referencial, a recta p , de coordenadas paralelas (u, v) , é a recta que une os pontos $M(-1, u)$ e $N(1, v)$, e portanto tem por equação:

$$\det \begin{bmatrix} X^* & Y^* & 1 \\ -1 & u & 1 \\ 1 & v & 1 \end{bmatrix} = 0$$

Mas:

$$\det \begin{bmatrix} X^* & Y^* & 1 \\ -1 & u & 1 \\ 1 & v & 1 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} X^* & Y^* & 1 \\ -a+b & au+bv & a+b \\ 1 & v & 1 \end{bmatrix} = 0$$

(substituímos a segunda linha pela que se obtém multiplicando-a por a e somando-a à terceira linha multiplicada por b). Como $au + bv = -c$, concluí-se que a recta passa sempre pelo ponto R de coordenadas:

$$\begin{aligned} X^* &= -\frac{a-b}{a+b} \\ Y^* &= -\frac{c}{a+b} \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

que são portanto as coordenadas, relativas ao referencial OX^*Y^* , do ponto cuja equação tangencial é $au + bv + c = 0$.

Se uma curva \mathcal{C} , no plano \mathcal{P} , é dada implicitamente por:

$$\phi(x, y) = 0 \tag{4.3.4}$$

a equação da recta tangente a \mathcal{C} , num dos seus pontos $P(x, y)$, é:

$$(X - x, Y - y) \cdot (\phi'_x(x, y), \phi'_y(x, y)) = 0$$

isto é:

$$\phi'_x X + \phi'_y Y + (-\phi'_x x - \phi'_y y) = 0 \tag{4.3.5}$$

onde (X, Y) são as coordenadas de um ponto corrente sobre essa recta tangente, que se define por $t(x, y)$.

Por dualidade, o ponto $P(x, y) \in \mathcal{C}$, que verifica a equação $\phi(x, y) = 0$, corresponde à recta $p(u, v) \in \mathcal{P}^*$, onde $u = x$ e $v = y$. Portanto as coordenadas (u, v) desta recta satisfazem a equação $\phi(u, v) = 0$. A pontual \mathcal{C} , no plano \mathcal{P} , corresponde assim a uma família de rectas (u, v) , no plano \mathcal{P}^* , que satisfazem a equação $\phi(u, v) = 0$.

Quanto à recta tangente a \mathcal{C} , no ponto $P(x, y)$, recta que notámos por $t(x, y)$, e cuja equação é (4.3.5), ela corresponde por dualidade ao ponto de \mathcal{P}^* de equação:

$$\phi'_u U + \phi'_v V + (-\phi'_u u - \phi'_v v) = 0 \tag{4.3.6}$$

Este ponto $T(u, v)$ pertence à recta $p(u, v) \in \mathcal{P}^*$, e diz-se o ponto característico dessa recta. O ponto $T(u, v)$ descreve pois uma pontual \mathcal{C}^* , no plano \mathcal{P}^* , a que chamámos a curva dual à curva \mathcal{C} e que não é mais do que a envolvente da família de rectas $p(u, v)$.

A curva dual pode reduzir-se a um ponto, como por exemplo acontece quando \mathcal{C} é uma recta em \mathcal{P} .

► **Exemplo 4.1** Transformemos por dualidade o nomograma da equação cúbica

$$z^3 + xz + y = 0 \tag{4.3.7}$$

definido pontualmente no plano \mathcal{P} , pelas famílias de rectas:

$$\begin{cases} X = x \\ Y = y \\ zX + Y + z^3 = 0 \end{cases} \tag{4.3.8}$$

Relativamente às coordenadas paralelas (U, V) , as duas primeiras famílias correspondem por dualidade às duas pontuais no plano \mathcal{P}^* :

$$\begin{cases} U = u = x \\ V = v = y \end{cases}$$

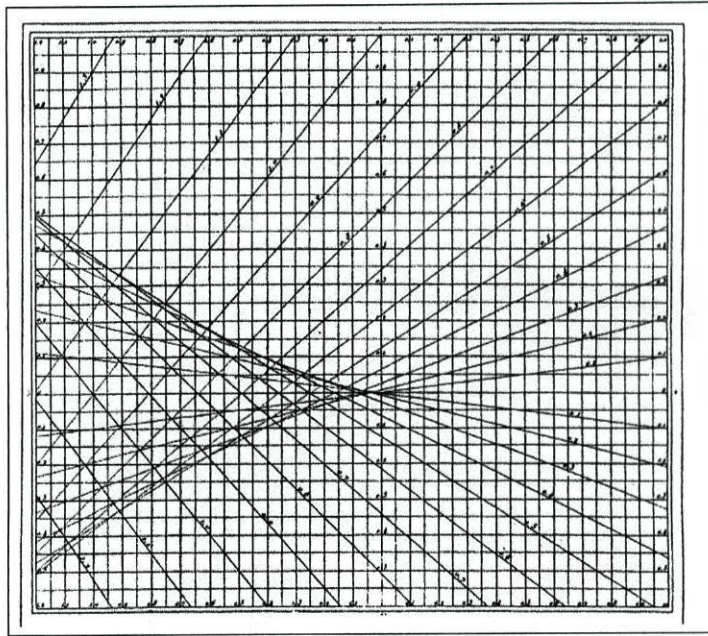


Figura 4.3: Ábaco de rectas concorrentes para a equação $z^3 + xz + y = 0$

que são as rectas AU e BV , respectivamente. A terceira família representa uma família de rectas (não paralelas) - para cada z temos a recta de equação $zX + Y + z^3 = 0$, no plano \mathcal{P} , a que corresponde por dualidade o ponto, de \mathcal{P}^* , de equação:

$$zU + V + z^3 = 0$$

Quando z varia estes pontos descrevem uma curva pontual que, nas coordenadas X^*, Y^* , em \mathcal{P}^* , tem por equações paramétricas:

$$\begin{aligned} X^* &= -\frac{z-1}{z+1} \\ Y^* &= -\frac{z^3}{z+1} \end{aligned} \tag{4.3.9}$$

Recordemos que cada ponto do plano \mathcal{P} , de coordenadas $(X = x, Y = y)$, representava a equação do terceiro grau, em z , $z^3 + xz + y = 0$. Por outras palavras, a intersecção das rectas $X = x$ e $Y = y$, das duas primeiras famílias, representa a equação $z^3 + xz + y = 0$. As soluções desta equação são dadas pelos valores de z correspondentes às rectas da terceira família que passam em (x, y) .

Por dualidade, a descrição correspondente no plano \mathcal{P}^* é a seguinte: a recta que une os pontos $U = u = x$ e $V = v = y$, das duas primeiras famílias de pontuais, isto é, a recta (u, v) , representa agora a equação $z^3 + uz + v = 0$. As soluções desta equação são dadas pelos valores de z dos pontos de intersecção da pontual (4.3.9) com a recta (u, v) .(4.4)

► **Exemplo 4.2** Como outro exemplo, transformemos por dualidade o nomograma da equação de Fermat:

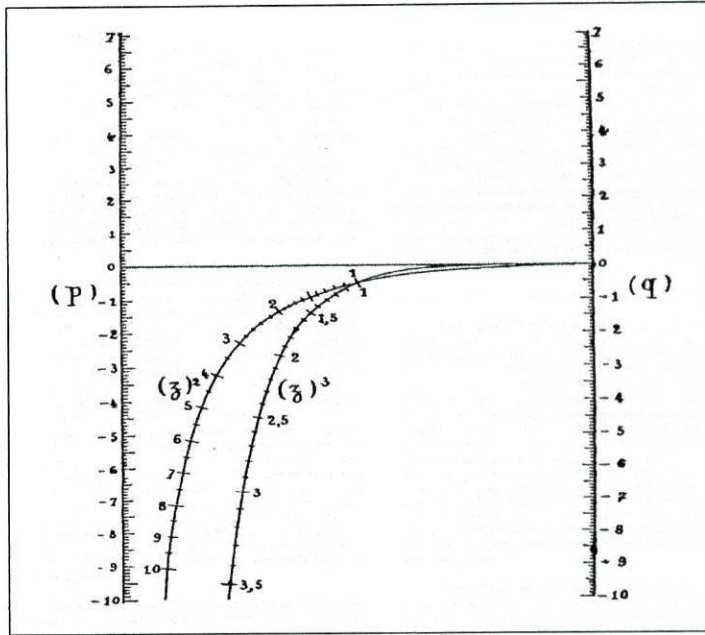


Figura 4.4: Ábaco de pontos alinhados para a equação $z^3 + pz + q = 0$

$$x^n + y^n - z^n = 0 \tag{4.3.10}$$

Aqui as duas primeiras famílias de rectas paralelas, $X = x^n$ e $Y = y^n$ são transformadas nas pontuais $U = u^n = x^n$ e $V = v^n = y^n$, respectivamente. Isto é, nos eixos AU e BV , considerámos as escalas funcionais u^n e v^n , respectivamente. A terceira família de rectas paralelas $X + Y - z^n = 0$ transforma-se na pontual que, nas coordenadas X^*, Y^* , em \mathcal{P}^* , tem por equações paramétricas:

$$\begin{aligned} X^* &= 0 \\ Y^* &= \frac{z^n}{2} \end{aligned} \tag{4.3.11}$$

As soluções da equação são mais uma vez dadas pelos valores z dos pontos de intersecção da pontual (4.3.11) com a recta (u, v) .

4.3.1 Construção do ábaco transformado

Através da transformação dualística todo ábaco cartesiano rectilíneo \mathcal{A} é transformado num ábaco de pontos alinhados \mathcal{B} .

A construção do ábaco transformado a partir de \mathcal{A} requer a escolha de dois suportes dirigidos L_1, L_2 e de duas origens O_1 e O_2 sobre esses suportes. Tome-se, no ábaco \mathcal{A} , sobre uma das escalas, Ox , um ponto qualquer, de cota $z_1 = 4$ por exemplo.

Para esse ponto $u = \overline{Oa}$ e $v = 0$.

Portanto a transformada desse ponto na figura \mathcal{B} será uma recta O_2a' tal que $\overline{O_1a'} = \overline{Oa}$.

De seguida levantando a partir de $z_1 = 4$ em A uma paralela a Oy uma vez que todos os pontos dessa recta têm a mesma abcissa, as suas transformadas serão as rectas concorrentes ao ponto a' .

A esse ponto associa-se a cota $z_1 = 4$ e procede-se da mesma forma para a determinação dos pontos de divisões sucessivas de L_1 em B. Procede-se da mesma forma em relação a Oy . Portanto o suporte da escala z_1 em B será uma recta que coincide com L_1 . A segunda escala, z_2 , será rectilínea e confunde-se com L_2 . Logo o ábaco B é um ábaco de dois suportes paralelos. De onde se conclui que:

Todo o ábaco cartesiano rectilíneo se transforma num ábaco de pontos alinhados de dois suportes paralelos.

A terceira escala tem, também, uma construção simples. Analisando o processo visto acima constrói-se a transformada de uma linha cotada qualquer de A em B. A cota do ponto resultante será a da linha cotada correspondente. Procedendo de igual forma para todas as outras linhas cotadas, encontra-se uma série de pontos que ao unirem-se por um traço contínuo definem a escala procurada.

4.4 Anamorfose

Para a representação cartesiana da equação

$$f_{123} = 0 \quad (4.4.1)$$

geralmente, numa primeira abordagem, fazem-se corresponder às variáveis z_1 e z_2 escalas métricas em Ox e Oy . No entanto, uma vez construído o ábaco conforme se indicou antes, pode também considerar-se a possibilidade de o transformar tomando escalas funcionais para as variáveis z_1 e z_2 :

$$\begin{aligned} x &= \mu_1 f_1 \\ y &= \mu_2 f_2 \end{aligned} \quad (4.4.2)$$

onde f_1 e f_2 são funções convenientemente escolhidas que irão dar origem a uma transformação pontual nas abcissas e nas ordenadas.

Se tomarmos para cada uma das variáveis o mesmo escalão que o que se toma no caso das escalas métricas verifica-se que o quadrículado regular, construído segundo as escalas métricas, será substituído por um quadrículado irregular sobre o qual as linhas z_3 estarão deformadas. (4.6)

A nova equação das linhas z_3 obtém-se por eliminação de z_1 e z_2 entre as duas equações anteriores e a equação dada.

O caso mais interessante é aquele em que esta equação tem a forma:

$$f_1 g_3 + f_2 h_3 + f_3 = 0 \quad (4.4.3)$$

Desta equação resulta para as linhas z_3 a equação:

$$\mu_2 g_3 x + \mu_1 h_3 y + \mu_1 \mu_2 f_3 = 0 \quad (4.4.4)$$

que define uma família a um parâmetro (z_3) de rectas. Estas rectas são tangentes a uma certa curva envolvente, cuja equação se obtém por eliminação de z_3 entre a equação anterior e a sua derivada.

A esta transformação, Lalanne atribuiu a designação de **anamorfose**.

Lalanne considerou inicialmente o caso particular em que as funções g_3 e h_3 são substituídas por constantes, ou seja

$$f_1 + f_2 + f_3 = 0 \quad (4.4.5)$$

A importância desta anamorfose de Lalanne centra-se no facto de as curvas que surgiam no ábaco, e que apenas podiam ser determinadas a partir de um grande número de pontos, serem agora substituídas por rectas, determinadas apenas por dois pontos.

Na verdade, nem sempre é fácil reconhecer que uma equação da forma $f_{123} = 0$ pode ser transformada na equação (4.4.3).

Na prática, as equações que se encontram nas aplicações são quase sempre da forma (4.4.3) ou (4.4.5) - forma canónica - ou então podem reduzir-se a essa forma por transformações simples.

► **Exemplo 4.3** ... Analisando a equação

$$\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 = 1$$

vemos que é possível transformá-la na forma (4.4.3) dando lugar a um ábaco semelhante ao que está indicado na figura 4.5, onde se considerou

$$f_1 = \frac{-1}{\varphi_1}, \quad g_3 = 1, \quad f_2 = \varphi_2, \quad h_3 = \varphi_3, \quad f_3 = 0$$

e à forma (4.4.5) quando se toma

$$f_1 = \log \varphi_1, \quad f_2 = \log \varphi_2, \quad f_3 = \log \varphi_3$$

Esta última forma define a chamada anamorfose logarítmica, inicialmente proposta por Lalanne.

Para o ábaco da equação da multiplicação $z_1 z_2 = z_3$ se se tomar a equação sob a forma

$$\log z_1 + \log z_2 - \log z_3 = 0$$

com

$$\begin{aligned} x &= \mu \log z_1 \\ y &= \mu \log z_2 \end{aligned} \quad (4.4.6)$$

resulta para z_3

$$x + y = \mu \log z_3$$

que correspondem a rectas perpendiculares à bissectriz do ângulo dos eixos (figura 4.6).

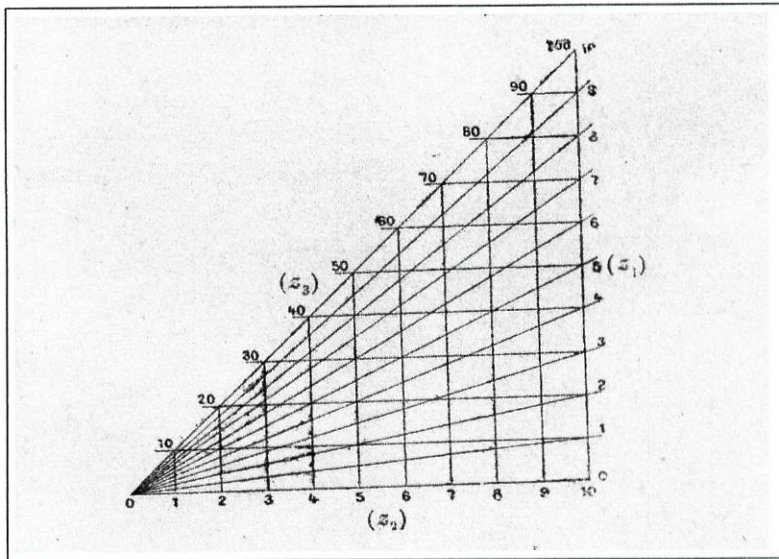


Figura 4.5: Ábaco relativo a $\varphi_1\varphi_2\varphi_3 = 1$

Logo substitui-se o ábaco de Pouchet, com as respectivas hipérbolas equiláteras, por um ábaco constituído apenas por linhas rectas.

Note-se que uma equação composta por certas funções das variáveis, tomadas isoladamente (φ_1 , φ_2 e φ_3 no exemplo acima) pode ser reduzido á forma canónica, substituindo as funções que compõem a equação por outras que formam com elas relações de projectividade (por exemplo, $-\frac{1}{\varphi_1}$), relações mais complexas ou relações transcendentais (exemplo, $\log \varphi_1$).

O princípio da anamorfose conduz a simplificações muito úteis na construção dos ábacos. No entanto, nada vai alterar o seu modo de aplicação. As linhas cotadas relativas a z_1 , z_2 e z_3 intersectam-se num mesmo ponto.

Nos casos vistos anteriormente as duas variáveis z_1 e z_2 correspondem a sistemas de rectas perpendiculares a Ox e Oy , respectivamente. No entanto não é necessário que este facto se verifique.

Pode também construir-se um nomograma de linhas concorrentes, para representar uma equação do tipo $f_{123} = 0$, fazendo corresponder ás variáveis z_1 e z_2 quaisquer linhas definidas respectivamente pelas equações

$$\begin{aligned} f_1(x, y, z_1) &= 0 \\ f_2(x, y, z_2) &= 0 \end{aligned} \quad (4.4.7)$$

As linhas z_3 são, por sua vez, definidas por uma equação da forma

$$f_3(x, y, z_3) = 0$$

que resulta da eliminação de z_1 e z_2 entre as duas equações precedentes e a equação dada

$$f_{123}(z_1, z_2, z_3) = 0$$

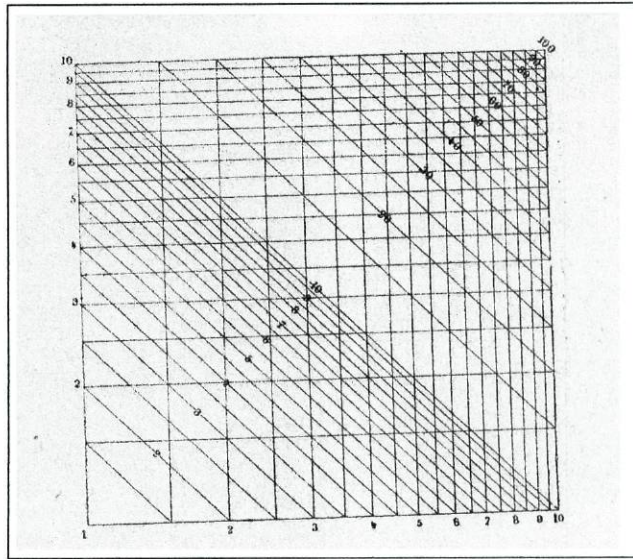


Figura 4.6: Tabela gráfica de Lalanne para a multiplicação

À operação que consiste em formar as equações dos três sistemas (z_1) , (z_2) e (z_3) atribui-se a designação de **disjunção de variáveis**.

Após ter construído as cotas (z_1) , (z_2) e (z_3) relativas aos diversos valores das variáveis e crescendo por escalões iguais, suficientemente pequenos, de forma a permitir interpolação à vista com uma precisão suficiente, obtém-se o nomograma de cruzamento geral relativo à equação $f_{123} = 0$. A aplicação deste nomograma processa-se de modo idêntico ao já referido anteriormente: as cotas (z_1) , (z_2) e (z_3) cujas cotas verificam a equação dada intersectam-se num mesmo ponto (figura 4.7)

O caso considerado de maior importância é aquele cuja equação dada pode transformar-se em:

$$\begin{vmatrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \\ f_3 & g_3 & h_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (4.4.8)$$

Esta equação pode ser representada através de três sistemas cotados rectilíneos

$$\begin{aligned} f_1x + g_1y + h_1 &= 0 \\ f_2x + g_2y + h_2 &= 0 \\ f_3x + g_3y + h_3 &= 0 \end{aligned} \quad (4.4.9)$$

Esta anamorfose rectilínea mais geral foi considerada pela primeira vez pelo engenheiro belga Massau. Existem outros casos onde a anamorfose generalizada oferece um interesse particular, nomeadamente nos casos onde a representação obtida não utiliza rectas mas sim círculos - a chamada anamorfose circular.

► **Exemplo 4.4** Considere-se a equação relativa à Resistência de Materiais de M. Collignon:

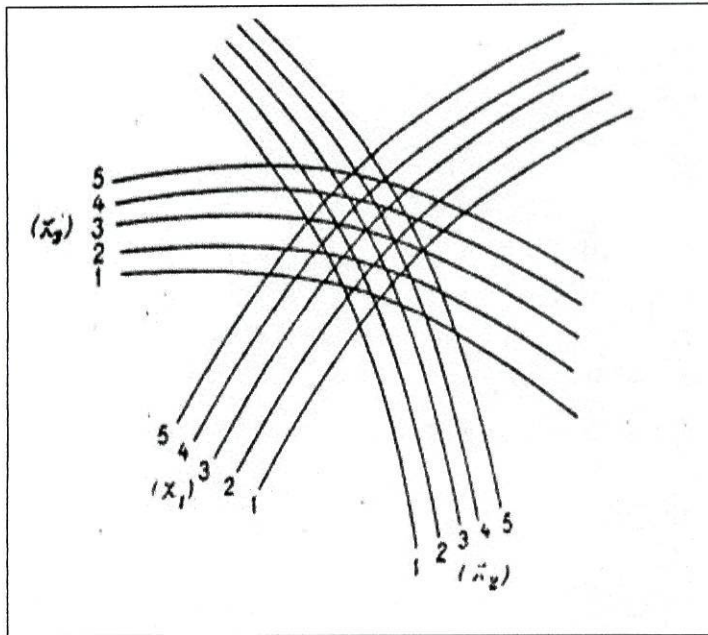


Figura 4.7: Intersecção das linhas de cotas (z_1) , (z_2) e (z_3)

)

$$k^2 + kp \sin \varphi \cos \varphi - \frac{p}{3} \cos^2 \varphi = 0 \quad (4.4.10)$$

Afim de reconhecer se é ou não representável por três sistemas de rectas, aplica-se o processo de disjunção:

$$\begin{aligned} y &= p \sin \varphi \cos \varphi \\ x &= p \cos^2 \varphi \end{aligned} \quad (4.4.11)$$

Da eliminação sucessiva de p e φ resulta que:

$$\begin{aligned} y &= x \tan \varphi \\ x^2 + y^2 - px &= 0 \end{aligned} \quad (4.4.12)$$

rectas e círculos fáceis de construir e que se adoptam para cotas φ e p .

Resulta através da equação acima, para as cotas k a equação

$$k^2 + ky - \frac{x}{3} = 0 \quad (4.4.13)$$

rectas que têm como envolvente uma parábola, mas que são bastante fáceis de construir notando que unem os pontos de mesma cota das duas escalas métricas definidas respectivamente por

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= -k \end{aligned} \quad (4.4.14)$$

e

$$\begin{aligned}x &= 3k \\ y &= 1 - k\end{aligned}\quad (4.4.15)$$

De um modo geral, as rectas k determinam, sobre uma qualquer k_0 entre elas, uma escala métrica como se vê a partir das equações correspondentes e subtraindo a equação e dividindo por $k - k_0$, resulta

$$k + k_0 + y = 0 \quad (4.4.16)$$

ou

$$y = -(k + k_0) \quad (4.4.17)$$

A projecção desta escala métrica sobre Ox obtida por eliminação de y entre esta última equação e a da recta k_0 , é dada por:

$$x = -3k_0k$$

As duas escalas indicadas acima correspondem respectivamente nas hipóteses $k_0 = 0$ e $k_0 = -1$.

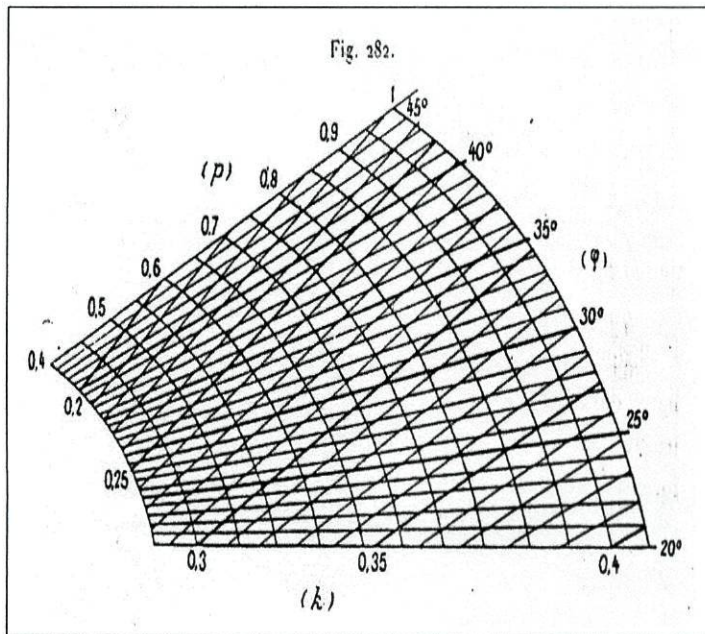


Figura 4.8: Ábaco relativo à equação $k^2 + kp \sin \varphi \cos \varphi - \frac{p}{3} \cos^2 \varphi = 0$

Capítulo 5

Ábacos de Alinhamento

Os ábacos de cruzamento têm vários inconvenientes, dos quais se destacam os seguintes:

- Cada cota é representada por uma linha e na leitura, ao correr visualmente uma determinada linha, pode passar-se, por erro visual, para a linha vizinha, conduzindo assim a uma intersecção errada.
- A representação por ábacos de cruzamento não se aplica aos casos com mais do que três variáveis, a não ser por recurso a substituições sucessivas de funções de duas variáveis.
- A interpolação à vista exige uma atenção bem mais acentuada no caso dos ábacos de cruzamento do que no caso da graduação de uma escala.

Estes vários inconvenientes são superados quando se considera, como modo de representação, pontos em vez de linhas. Assim os sistemas de rectas cotadas e as tangentes a certas envolventes são substituídos por sistemas de pontos cotados distribuídos pelos vários suportes. Em vez de se determinar a solução de um problema através da intersecção das linhas cotadas - ábacos de cruzamento - passa-se a recorrer ao alinhamento dos pontos cotados - ábacos de alinhamento. Este último processo é designado por método dos pontos alinhados.

Na verdade, através do princípio da dualidade e partindo de nomogramas rectilíneos é possível obter nomogramas cujos elementos são pontos tais que as cotas de três deles estão situados sobre uma mesma recta satisfazendo a equação dada. Para isso, é suficiente tomar as coordenadas que figuram nas equações dos sistemas de rectas do nomograma inicial como coordenadas paralelas.

Se Au e Bv são dois eixos paralelos, orientados, os segmentos $AM = u$ e $BN = v$ determinados nessa recta a partir das origens A e B , dizem-se as coordenadas paralelas da recta MN . Conclui-se facilmente (ver a secção 5.2) que se a recta MN varia de tal forma que as suas coordenadas paralelas u e v satisfazem a equação linear

$$au + bv + c = 0$$

então a recta passa por um ponto fixo P . A equação anterior diz-se, por isso, a equação de P , em coordenadas paralelas.

Tomando agora coordenadas cartesianas com origem no ponto médio O do segmento de recta $[AB]$, que une as origens dos eixos Au e Bv .

Com o eixo dos xx segundo esta recta AB e o eixo dos yy paralelo às rectas Au e Bv , e tomando ainda $AO = OB = \delta$, conclui-se que a recta MN , relativamente a estes novos eixos tem por equação:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -\delta & u & 1 \\ \delta & v & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (5.0.1)$$

Adicionando as duas últimas linhas, multiplicadas respectivamente por a e b resulta

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -\delta(a-b) & -c & a+b \\ \delta & v & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (5.0.2)$$

esta última representação permite concluir que a recta passa pelo ponto cujas coordenadas são:

$$x = -\delta \frac{a-b}{a+b} \quad (5.0.3)$$

e

$$y = \frac{-c}{a+b} \quad (5.0.4)$$

Caso a paralela aos eixos levantada por P intersecte AB em p , tem-se:

$$\frac{pA}{pB} = -\frac{b}{a} \quad (5.0.5)$$

donde se conclui que os pontos para os quais a relação $\frac{a}{b}$ é constante estão sobre uma paralela aos eixos.

5.1 Sistemas de pontos definidos em coordenadas paralelas

Quando a posição de um determinado ponto, que varia sobre um plano, depende de um parâmetro z , a sua equação em relação a u e v é definida por:

$$uf(z) + vg(z) + h(z) = 0 \quad (5.1.1)$$

e o lugar geométrico desse ponto variável (suporte do sistema), definido por (5.1.1), obtém-se por eliminação de z entre essa equação e a sua derivada tomada em relação a z . No

entanto, para construir os pontos (z) pode recorrer-se às coordenadas cartesianas tomadas em relação aos eixos Ox e Oy , considerados na secção anterior

$$x = -\delta \frac{f(z) - g(z)}{f(z) + g(z)} \quad (5.1.2)$$

e

$$y = \frac{-h(z)}{f(z) + g(z)} \quad (5.1.3)$$

Assim sendo, o suporte do sistema obtém-se por eliminação de z entre as duas últimas equações.

► **Exemplo 5.1** ... Quando a equação é linear em z :

$$U + zV = 0$$

onde U e V representam funções lineares em u e v , estes pontos determinam uma escala homográfica de z (escala métrica), sobre a recta que une os pontos $U = 0$ e $V = 0$.

No caso da equação ser de segundo grau em z , ou seja da forma

$$U + zV + z^2W = 0$$

onde U , V e W representam funções lineares em u e v , pode concluir-se eliminando z na equação anterior e na sua derivada em ordem a z que o suporte do sistema (z) é a cónica:

$$V^2 - 4UW = 0$$

passando pelos pontos $U = 0$ (onde a cota é $z = 0$) e $W = 0$ (onde a cota é $z = \infty$), as tangentes nesses pontos passam pelo ponto $V = 0$. Se considerarmos um ponto qualquer do sistema, por exemplo z_0 de equação:

$$U + z_0V + z_0^2W = 0$$

que se une a todos os outros pontos do sistema (z), as coordenadas u e v das rectas do feixe satisfazem por sua vez as equações anteriores satisfazendo a sua diferença

$$V + (z + z_0)W = 0$$

equação que define uma escala homográfica sobre a recta que une os pontos $V = 0$ e $W = 0$. De uma forma geral todo o sistema do $n^{\text{ésimo}}$ grau pode ser construído através de projecções sucessivas a partir de escalas métricas.

5.2 Método dos Pontos Alinhados

Muitas vezes nos problemas surgem equações da forma

$$\begin{vmatrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \\ f_3 & g_3 & h_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (5.2.1)$$

Estas equações podem ser representadas por simples pontos cotados permitindo uma leitura mais precisa quando se recorre à interpolação á vista.

Para representar a equação anterior basta construir os três sistemas de pontos:

$$\begin{aligned} u f_1 + v g_1 + h_1 &= 0 \\ u f_2 + v g_2 + h_2 &= 0 \\ u f_3 + v g_3 + h_3 &= 0 \end{aligned} \quad (5.2.2)$$

e tomar o alinhamento entre os pontos.

Esses três sistemas de pontos podem ser construídos a partir das suas equações tangenciais (em coordenadas paralelas) ou através das coordenadas cartesianas dadas anteriormente. O nomograma que representa estas equações é da forma:

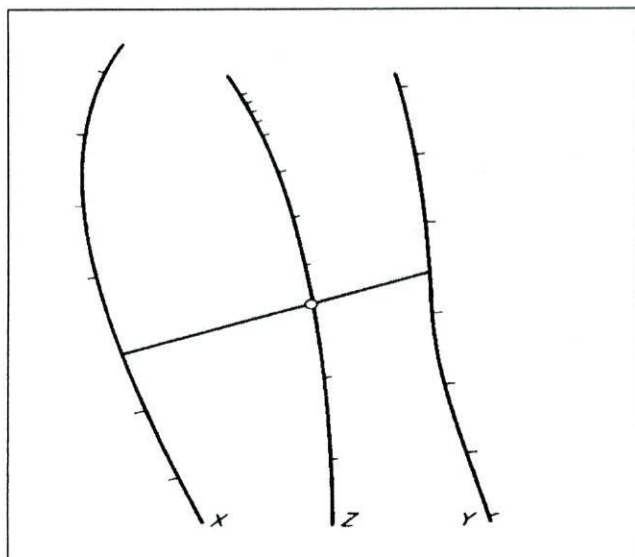


Figura 5.1: Ábaco de Alinhamento

Na prática o caso mais comum é aquele que surge na forma

$$f_1 g_3 + f_2 h_3 + f_3 = 0 \quad (5.2.3)$$

para o qual se toma

$$\begin{aligned} u &= \mu_1 f_1 \\ v &= \mu_2 f_2 \end{aligned} \quad (5.2.4)$$

atribuindo a z_1 e z_2 as escalas das funções f_1 e f_2 tomadas respectivamente sobre Au e Bv com os módulos μ_1 e μ_2 . Assim para a terceira escala resulta:

$$\mu_2 g_3 u + \mu_1 h_3 v + \mu_1 \mu_2 f_3 = 0$$

Esta equação define um sistema de pontos que se constrói atendendo ao que foi analisado anteriormente, calculando as coordenadas cartesianas dos pontos (z_3) ou, quando a equação é algébrica em apenas em z_3 , recorrendo às projecções sucessivas. Na maioria das vezes recorre-se aos dois métodos anteriores determinando para coordenadas cartesianas quaisquer pontos fundamentais que são tomados como marcadores traçando o suporte que os une e marcando sobre esse suporte os pontos intermediários por projecção central.

5.3 Resolução nomográfica de equações da forma $z^m + pz + q = 0$

Para construir o nomograma da equação

$$z^m + pz + q = 0 \quad (5.3.1)$$

tome-se

$$\begin{aligned} u &= \mu p \\ v &= \mu q \end{aligned} \quad (5.3.2)$$

Daqui resulta, para o sistema (z):

$$zu + v + \mu z^m = 0 \quad (5.3.3)$$

que representa uma pontual em coordenadas paralelas. Em coordenadas cartesianas virá:

$$x = \delta \frac{1 - z}{1 + z} \quad (5.3.4)$$

e:

$$y = \frac{-\mu z^m}{1 + z} \quad (5.3.5)$$

Analisando as equações anteriores, conclui-se que, para todo m , a projecção dos pontos (z) sobre o eixo AB das origens define a mesma escala homográfica que aquela em que o ponto cotado 0 coincide com a origem B, o ponto cotado 1 com a origem O dos eixos cartesianos, o ponto cotado ∞ com a origem A.

Representemos por $(z)^m$, a escala (z) correspondente ao expoente m . Para $m = 2$, a construção da escala z^2 resulta do facto seguinte: se se projectar essa escala z^2 , a partir do ponto B, sobre o eixo Au, obtém-se sobre este eixo a escala p a menos de mudança do sinal das suas cotas. Com efeito, fazendo $v = 0$ obtém-se

$$zu + \mu z^2 = 0 \quad (5.3.6)$$

ou

$$u = -\mu z \tag{5.3.7}$$

Partindo da escala $(z)^2$ podem construir-se sucessivamente as escalas $(z)^m$, atendendo ao facto de que a projecção de $(z)^{m-1}$ sobre Oy , a partir do ponto A, e da escala $(z)^m$, a partir do ponto B, são coincidentes. Esta conclusão é determinada quando se toma na equação (5.3.3), por um lado, $u = 0$ com expoente $m - 1$ e, por outro lado, $v = 0$ com expoente m , pois neste caso:

$$v + \mu z^{m-1} = 0 \tag{5.3.8}$$

e

$$u + \mu z^{m-1} = 0 \tag{5.3.9}$$

ou seja, Au e Bv definem escalas idênticas. O exemplo que se segue refere-se aos casos em que $m = 3$ e $m = 2$.

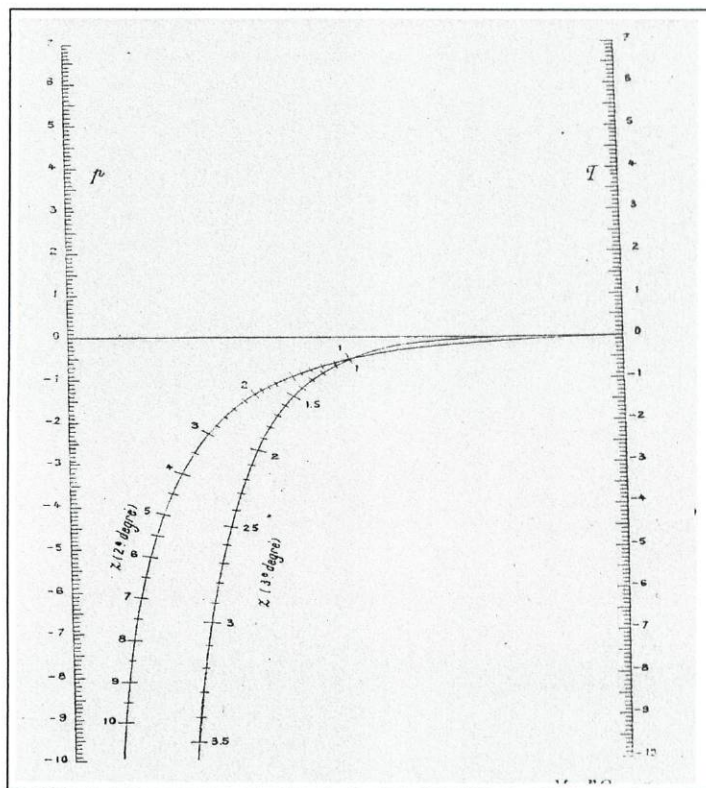


Figura 5.2: Ábaco de Alinhamento relativo a $z^m + pz + q = 0$

No caso dos valores absolutos das raízes negativas estes podem ser obtidos como raízes positivas da transformada em $-z$.

5.4 Transformação homográfica dos nomogramas de alinhamento

A transformação homográfica conserva os alinhamentos daí que seja aplicável aos nomogramas de alinhamento.

Seja dada uma equação sob a forma:

$$\begin{vmatrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \\ f_3 & g_3 & h_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (5.4.1)$$

Para obter a nova forma desta equação, correspondente à transformação homográfica referida, basta multiplicá-la pelo determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ \lambda' & \mu' & \nu' \\ \lambda'' & \mu'' & \nu'' \end{vmatrix} \quad (5.4.2)$$

suposto diferente de zero. Resulta então que as funções $f_i, g_i, h_i, i = 1, 2, 3$, serão substituídas por

$$\begin{aligned} f'_i &= \lambda f_i + \mu g_i + \nu h_i \\ g'_i &= \lambda' f_i + \mu' g_i + \nu' h_i \\ h'_i &= \lambda'' f_i + \mu'' g_i + \nu'' h_i \end{aligned} \quad (5.4.3)$$

determinando a nova equação:

$$\begin{vmatrix} f'_1 & g'_1 & h'_1 \\ f'_2 & g'_2 & h'_2 \\ f'_3 & g'_3 & h'_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (5.4.4)$$

De salientar que os sistemas que satisfazem esta última equação, equivalente á anterior, apresentam vantagens perante os sistemas obtidos directamente.

Como a transformação homográfica depende de oito parâmetros, podemos escolher livremente quatro pontos do nomograma. Logo é possível efectuar geometricamente a transformação homográfica de um ábaco de pontos alinhados num outro no qual se fixa a posição de cada um dos quatro pontos do nomograma que marcam as extremidades das duas escalas e que correspondem às variáveis tomadas para dados.

Sejam A, B, C e D os quatro pontos do nomograma inicial que transformamos nos pontos A', B', C' e D' , respectivamente, e seja M um ponto qualquer do nomograma inicial e M' o seu transformado. Ao unir, respectivamente, A e A' aos quatro pontos B, C, D, M e B', C', D', M' , obtém-se dois feixes cuja razão anarmónica é a mesma. Desta forma facilmente se constróem as rectas $A'M'$ e $B'M'$ e, a partir da intersecção delas, se determina o ponto M' procurado.

5.5 Relações que se podem reduzir à forma $f_1 + f_2 = f_3$

No caso em que uma equação surge na forma $f_1 + f_2 = f_3$ pelo que foi visto anteriormente ela é representável por um ábaco de pontos alinhados, onde as escalas têm as origens arbitrarias mas alinhadas e um módulo arbitrário sobre as três. Considerem-se agora outros casos que podem ser reduzidos a esta forma:

1. $f_1 f_2 = f_3$: Esta formula passa à forma $f_1 + f_2 = f_3$ tomando os logaritmos nos dois membros:

$$\log f_1 + \log f_2 = \log f_3$$

As relações

$$u = l \log f_1$$

$$v = l' \log f_2$$

permitem determinar a terceira escala. Esta fica determinada pela relação:

$$w = l'' \log f_3$$

2. $f_1 f_2 f_3 = A$, onde A representa uma constante. Comece-se por escrever $f_1 f_2 = \frac{A}{f_3}$ e tome-se, como anteriormente, os logaritmos dos dois membros:

$$\log f_1 + \log f_2 = (\log A - \log f_3)$$

Esta última relação já se apresenta na forma pretendida.

3. $f_1 f_3 + f_2 f_3 = f_1 f_2$ Através da divisão dos dois membros por $f_1 f_2 f_3$ verifica-se a igualdade:

$$\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{f_3}$$

Esta relação já se encontra na forma pretendida.

4. $f_1 + f_2 + f_3 = f_1 f_2 f_3$ Resolve-se esta equação em relação a f_3 e determina-se:

$$-f_3 = \frac{f_1 + f_2}{1 - f_1 f_2}$$

De seguida recorre-se à seguinte mudança de variáveis:

$$f_1 = \tan(\alpha)$$

$$f_2 = \tan(\beta)$$

A partir daí conclui-se que:

$$-f_3 = \tan(\alpha + \beta)$$

e considerando que:

$$-f_3 = \tan \gamma$$

Concluiu-se que:

$$\tan(\alpha + \beta) = \tan \gamma$$

$$\alpha + \beta = \gamma + n\pi$$

α é uma função de z_1 , β é uma função de z_2 e γ uma função de z_3 . Após este processo obtém-se a forma procurada.

5. $f_1 + f_2 + f_3 = Af_1f_2f_3$, onde A é uma constante positiva.

Com o intuito de se recorrer ao caso precedente faz-se a seguinte transformação:

$g_1 = af_1$, $g_2 = af_2$ e $g_3 = af_3$, onde a representa uma constante a determinar.

A relação $f_1 + f_2 + f_3 = Af_1f_2f_3$ resulta:

$$\frac{g_1 + g_2 + g_3}{a} = A \frac{g_1g_2g_3}{a^3}$$

$$a^2(g_1 + g_2 + g_3) = Ag_1g_2g_3$$

De seguida tome-se $a = \sqrt{A}$ e encontra-se a relação anteriormente estudada:

$$g_1 + g_2 + g_3 = g_1g_2g_3$$

Assim é um requisito que $a^2 = A$, daí que se tenha suposto $A > 0$.

6. $f_1f_2 + f_2f_3 + f_3f_1 = A$ sendo A uma constante positiva.

Esta forma pode ser tratada de modo semelhante à anterior. Basta dividir os dois membros por $f_1f_2f_3$:

$$\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_3} = A \frac{1}{f_1} \times \frac{1}{f_2} \times \frac{1}{f_3}$$

E em seguida toma-se:

$$g_1 = \frac{1}{f_1}$$

$$g_2 = \frac{1}{f_2}$$

$$g_3 = \frac{1}{f_3}$$

7. $f_3(f_1f_2 - 1) = f_1 + f_2$

Esta forma é idêntica à analisada no número 4 anterior.

5.6 Equações com mais do que três variáveis

Para as equações com três variáveis, os nomogramas de alinhamento apresentam várias vantagens, desde a facilidade da construção até à precisão da leitura. Mas a sua superioridade evidencia-se quando se aplicam às equações com mais do que três variáveis em que não é possível representar por nomogramas de cruzamento.

Considere-se na equação (5.4.1) as funções de uma só variável substituídas por funções de duas variáveis, ou seja,

$$\begin{vmatrix} f_{14} & g_{14} & h_{14} \\ f_{25} & g_{25} & h_{25} \\ f_{36} & g_{36} & h_{36} \end{vmatrix} = 0 \quad (5.6.1)$$

Se se aplicar a disjunção em coordenadas cartesianas, sob a forma

$$\begin{aligned} x f_{14} + y g_{14} + h_{14} &= 0 \\ x f_{25} + y g_{25} + h_{25} &= 0 \\ x f_{36} + y g_{36} + h_{36} &= 0 \end{aligned} \quad (5.6.2)$$

definem-se assim três sistemas ∞^2 (a dois parâmetros) de rectas.

Recorrendo às equações de disjunção em coordenadas paralelas,

$$\begin{aligned} u f_{14} + v g_{14} + h_{14} &= 0 \\ u f_{25} + v g_{25} + h_{25} &= 0 \\ u f_{36} + v g_{36} + h_{36} &= 0 \end{aligned} \quad (5.6.3)$$

conclui-se que cada uma delas define um sistema ∞^2 de pontos que será representado de forma permanente na figura através de uma rede composta de duas famílias de linhas.

Considerando, por exemplo

$$u f_{14} + v g_{14} + h_{14} = 0 \quad (5.6.4)$$

obtém-se para coordenadas cartesianas de um ponto na rede:

$$x = \delta \frac{g_{14} - f_{14}}{g_{14} + f_{14}}, \quad y = \frac{-h_{14}}{g_{14} + f_{14}} \quad (5.6.5)$$

Se se eliminarem entre as equações anteriores primeiro a variável z_4 e depois z_1 obtêm-se duas equações do tipo

$$\varphi_1(x, y, z_1) = 0$$

$$\varphi_4(x, y, z_4) = 0$$

que definem dois sistemas ∞^1 de curvas. Para um par particular de valores desses parâmetros, o ponto (z_1, z_4) resulta da intersecção das curvas cotadas (z_1) e (z_4) . Da

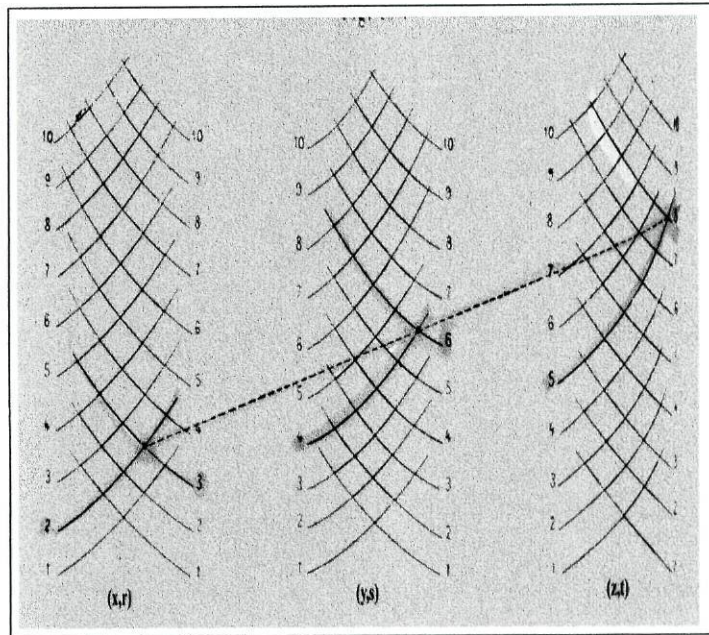


Figura 5.3: Ábaco de Alinhamento

mesma forma que se constroem as redes (z_1, z_4) se procede para (z_2, z_5) e (z_3, z_6) e se verifica que a representação nomográfica da equação (5.6.1) consiste no alinhamento de três pontos tomados respectivamente nas três redes.

Esta simplicidade na representação de equações de mais do que três variáveis é uma das maiores vantagens do método dos pontos alinhados. O método aplica-se especialmente no caso de quatro variáveis em que se substitui em duas linhas do determinante (5.6.1) as funções de duas variáveis por uma de uma só variável. O nomograma que resulta desta substituição é algo análogo à figura (5.4)

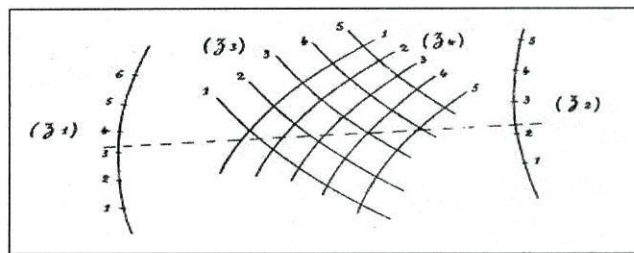


Figura 5.4: Ábaco de Alinhamento

Em alguns casos os pontos da rede definidos pelas fórmulas do tipo (5.6.5) definem uma só curva. Neste caso diz-se que os pontos estão *condensados* sobre essa linha.

5.7 Duplo Alinhamento

Unindo dois nomogramas e recorrendo a uma variável auxiliar pode obter-se a representação de equações de quatro variáveis evitando a rede de pontos e utilizando apenas escalas simples. Seja C o suporte relativo á variável auxiliar. Os alinhamentos tomados entre os pontos (z_1) e (z_2) por um lado e (z_3) e (z_4) por outro lado intersectam o suporte C no ponto P . Assim para passar de um lado para o outro basta recorrer ao ponto P - pivot - para este caso particular. À linha C atribui-se a designação de linha dos pivots ou *charneira*.

Considerem-se as equações da forma

$$f_1 g_2 + f_2 = f_3 g_4 + f_4$$

e seja t o valor comum dos dois membros,

$$\begin{aligned} f_1 g_2 + f_2 &= t \\ f_3 g_4 + f_4 &= t \end{aligned} \tag{5.7.1}$$

e tomando, por um lado,

$$\begin{aligned} u &= \mu_1 f_1 \\ v &= \mu t \end{aligned} \tag{5.7.2}$$

e, por outro lado,

$$\begin{aligned} u &= \mu_3 f_3 \\ v &= \mu t \end{aligned} \tag{5.7.3}$$

obtém-se um nomograma de duplo alinhamento em que a linha dos pivots é constituída pela eixos v .

Em certos casos é possível utilizar conjuntamente um nomograma de cruzamento e um nomograma de alinhamento.

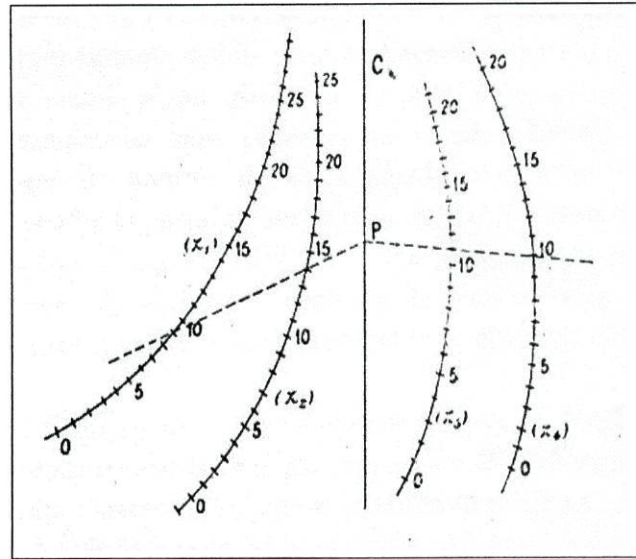


Figura 5.5: Duplo Alinhamento

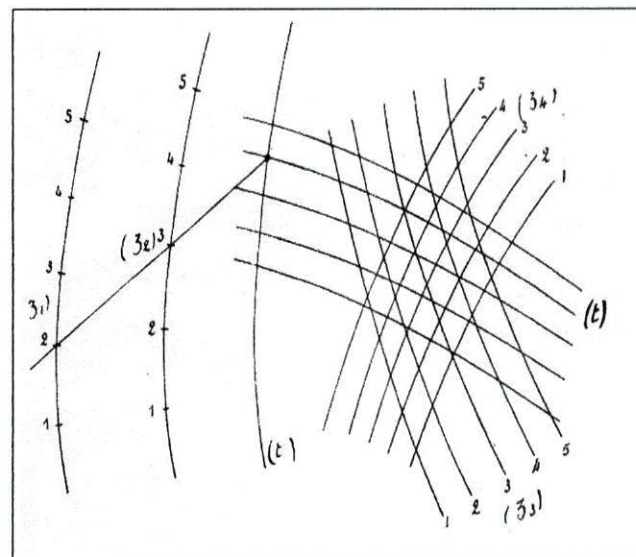


Figura 5.6: Ábaco de Alinhamento + Ábaco de Cruzamento

Capítulo 6

Soluções Gráficas das equações Quadrática, Cúbica e Biquadrática

As soluções das equações podem ser encontradas graficamente através de nomogramas, onde são lidas, quando os coeficientes, ou combinações deles, são usados como coordenadas.

6.1 Equação Quadrática

Considere-se a equação

$$x^2 + Ax + B = 0 \quad (6.1.1)$$

O problema consiste em determinar os valores de x que satisfazem essa equação, conhecendo os valores dos coeficientes A e B . Se atribuirmos a x um determinado valor fixo, a equação obtida definirá uma recta

$$-xA - B = x^2 \quad (6.1.2)$$

no plano cartesiano com coordenadas (A, B) . É claro que, nesta forma, $-x$ representa o declive e $-x^2$ a ordenada na origem da recta referida.

Cada par (A, B) representa pois uma equação quadrática do tipo (6.1.1), e o nomograma permitirá calcular (por leitura gráfica) as soluções x dessa equação. Estas soluções correspondem às rectas do tipo (6.1.2), cotadas pelo seu valor x , que passam em (A, B) .

A família de rectas no plano (A, B) :

$$\{-xA - B = x^2\}_x$$

parametrizada por x , envolve uma curva \mathcal{E} cuja equação é determinada eliminando o parâmetro x nas equações:

$$\begin{cases} -xA - B = x^2 \\ -A = 2x \end{cases}$$

A curva \mathcal{E} tem equações paramétricas

$$\begin{cases} A = -2x \\ B = x^2 \end{cases}$$

e é portanto a parábola de equação:

$$B = A^2/4 \quad (6.1.3)$$

Esta parábola envolvente \mathcal{E} determina duas regiões conexas no plano AB . Pontos na região (I) representam equações com 2 soluções reais - por cada ponto da região (I) podemos traçar 2 rectas tangentes a \mathcal{E} . Pontos na região (II) representam equações com soluções complexas. Pontos sobre a parábola representam equações com uma solução dupla real por cada um desses pontos podemos traçar uma única recta tangente a \mathcal{E} .

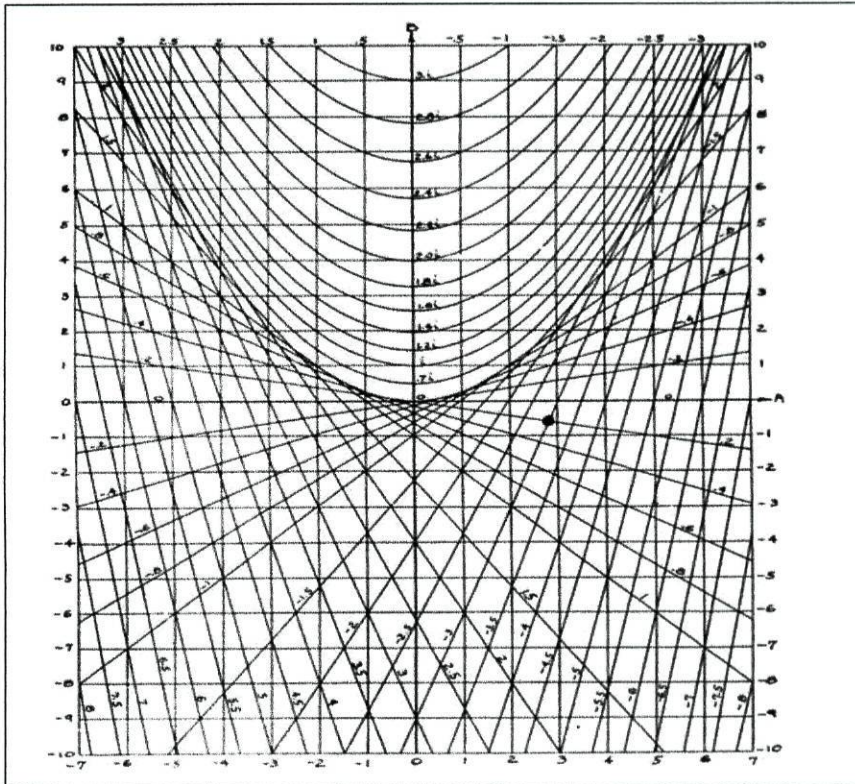


Figura 6.1: Nomograma I - resolução de equações da forma $x^2 + Ax + B = 0$

Vejamos um exemplo:

► **Exemplo 6.1** ... Considere-se a equação:

$$x^2 + 2.8x - 0.6 = 0 \quad (6.1.4)$$

Para se determinarem as raízes desta equação localize-se o ponto $(2.8, -0.6)$ e os valores de x correspondentes às rectas que passam por esse ponto.

Os valores procurados são $x = -3$ e $x = 0.2$. No caso de pelo ponto em estudo não passar qualquer recta faz-se interpolação.

Para determinar as raízes complexas pode proceder-se da seguinte forma - se $x = a \pm ib$ são as soluções complexas conjugadas da equação

$$x^2 + Ax + B = 0 \quad (6.1.5)$$

então $b \neq 0$ e

$$x = a \pm ib = -\frac{A}{2} \pm \sqrt{\frac{A^2}{4} - B} \quad (6.1.6)$$

isto é $a = -A/2$ e, pondo

$$\frac{1}{4}A^2 - B = -b^2$$

então virá

$$B = \frac{1}{4}A^2 + b^2$$

que representa um sistema de parábolas, cujos vértices são $(0, b^2)$ e cujo eixo coincide com o eixo dos B 's.

Estas parábolas estão representadas no nomograma acima e encontram-se cotadas com os valores de b (para valores positivos de b), o coeficiente da parte imaginária das raízes.

► **Exemplo 6.2** Para encontrar as raízes de

$$x^2 + 0.6x + 2.69 = 0 \quad (6.1.7)$$

localize-se o ponto $(0.6, 2.69)$ e leia-se o valor de $a = -A/2 = -0.6/2 = -0.3$ da parte real das raízes procuradas no cimo do nomograma I. A parte imaginária é encontrada através da cota da parábola que passa pelo ponto ou seja, aproximadamente, $1,61i$.

Logo, as raízes são:

$$x = -0.3 \pm 1.61i$$

Se $b = 0$, ou seja, se

$$B = \frac{1}{4}A^2$$

obtemos a parábola \mathcal{E} , referida antes, que define a envolvente das rectas (6.1.2) e estabelece a fronteira entre a região das equações com raízes reais e a região das que têm raízes complexas.

6.2 Equação Cúbica

A equação geral da cúbica é definida por:

$$x^3 + ux^2 + vx + w = 0 \quad (6.2.1)$$

Pondo

$$x = z + k$$

onde $k = -\frac{u}{3}$, é possível reduzir esta equação a uma que não tem coeficiente de segundo grau.

Fazendo esta substituição na equação (6.2.1) resulta então que:

$$z^3 + \left(v - \frac{1}{3}u^2\right)z + w - \frac{uv}{3} + \frac{2}{27}u^3 = 0 \quad (6.2.2)$$

Fazendo:

$$A = v - \frac{1}{3}u^2$$

e

$$B = w - \frac{uv}{3} + \frac{2}{27}u^3$$

podemos escrever a equação (6.2.2) na forma:

$$B = -zA - z^3 \quad (6.2.3)$$

que representa uma família de rectas, parametrizada pelos valores de z , no plano AB . Cada ponto (A, B) deste plano representa pois uma equação cúbica reduzida da forma (6.2.2), onde A e B são dados pelas fórmulas anteriores.

As raízes reais da equação representada pelo ponto (A, B) , são os parâmetros (ou cotas) das rectas que passam nesse ponto.

O método que aqui é utilizado para encontrar as raízes reais das equações quadrática e cúbica foi descoberto por Lalanne em 1846.

► **Exemplo 6.3** Consideremos a equação:

$$x^3 - 3x^2 + 1.25x + 1.5 = 0 \quad (6.2.4)$$

Pondo $x = z + 1$ na equação anterior resulta:

$$z^3 - 1.75z + 0.75 = 0 \quad (6.2.5)$$

Através do nomograma II conclui-se que as raízes da equação (6.2.5) são -1.5, 1 e 0.5. Portanto, as raízes de (6.2.4) serão -0.5, 2 e 1.5.

Suponhamos agora que a equação (6.2.3) tem uma raiz real (tem sempre) digamos da forma

$$-2a$$

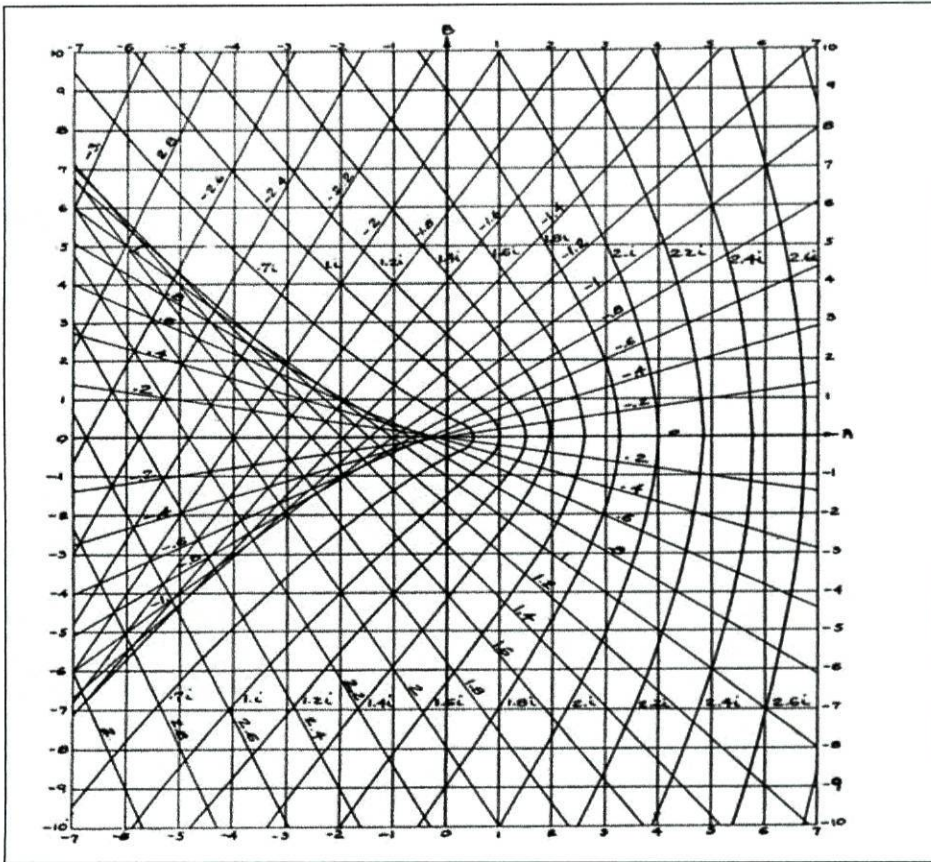


Figura 6.2: Nomograma II - Resolução de equações da forma $x^3 + ux^2 + vx + w = 0$

Então virá que:

$$\begin{aligned}
 z^3 + Az + B &= (z + 2a)(z^2 + Cz + D) \\
 &= z^3 + (C + 2a)z^2 + (D + 2aC)z + 2aD \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{6.2.6}$$

donde se conclui que

$$C = -2a, \quad D + 2aC = A \quad \text{e} \quad 2aD = B$$

Portanto se a equação tem duas raízes complexas conjugadas elas são raízes da equação quadrática $z^2 - 2az + B/2a = 0$ e são pois da forma

$$a + bi \quad \text{e} \quad a - bi$$

para um certo $b \neq 0$. Logo

$$\begin{aligned}
 z^3 + Az + B &= (z + 2a)(z - a - ib)(z - a + ib) \\
 &= z^3 - (3a^2 - b^2)z + 2a^3 + 2ab^2
 \end{aligned} \tag{6.2.7}$$

donde se deduz que

$$A = b^2 - 3a^2 \quad (6.2.8)$$

e

$$B = 2a^3 + 2ab^2 \quad (6.2.9)$$

De (6.2.8) vem que

$$a = \pm \sqrt{\frac{b^2 - A}{3}}$$

e substituindo em (6.2.9)

$$B = \pm \frac{2}{3} \sqrt{\frac{b^2 - A}{3}} (4b^2 - A) \quad (6.2.10)$$

ou ainda

$$B^2 = -\frac{4}{27} (A - b^2)(A - 4b^2)^2 \quad (6.2.11)$$

Esta é a equação de uma família de curvas cúbicas no plano AB , parametrizada pelos valores de b , que estão representadas no nomograma II. As equações do tipo (6.2.3), representadas por pontos (A, B) ao longo da curva de cota b , têm todas raízes complexas com parte imaginária constante e igual a b .

A fronteira entre a região das equações (6.2.3) com raízes complexas e a região das que têm apenas raízes reais é determinada pela equação (6.2.11) quando $b = 0$, isto é, pela cúbica:

$$B^2 = -\frac{4}{27} A^3$$

que é a envolvente da família de rectas, parametrizada por z , definida por (6.2.3):

$$B = -zA - z^3$$

► **Exemplo 6.4** Calcular as raízes de:

$$x^3 - 1.2x^2 + 0.37x - 0.17 = 0 \quad (6.2.12)$$

Seja $x = z + 0.4$ pela equação anterior concluiu-se:

$$z^3 - 0.11z - 0.15 = 0 \quad (6.2.13)$$

As raízes serão determinadas localizando o ponto $(-0.11; -0.15)$.

Uma vez que as coordenadas deste ponto são muito pequenas torna-se aconselhável recorrer a uma equação em que as raízes são quatro vezes maiores do que as definidas por (6.2.13) e posteriormente dividi-las por quatro.

A equação é

$$z^3 - 1.76z - 9.6 = 0 \quad (6.2.14)$$

Pelo nomograma II conclui-se que as raízes desta equação são 2.4 e $-1.2 \pm 1.6i$, e as da equação (6.2.13) 0.6, $-3 \pm .4i$. Portanto as soluções de (6.2.12) são 1, $0.1 \pm 0.4i$.

Saliente-se que a parte real das raízes imaginárias é a metade negativa da raiz real.

6.3 Resolução da equação completa de terceiro grau

Considere-se a equação

$$z^m + nz^{m'} + pz^{m''} + q = 0 \quad (6.3.1)$$

Tome-se

$$\begin{aligned} u &= \mu p \\ \nu &= \mu q \end{aligned} \quad (6.3.2)$$

Daqui resulta o sistema (n, z) definido por:

$$uz^{m''} + \nu + \mu(z^m + nz^{m'}) = 0 \quad (6.3.3)$$

Assim nesta rede as soluções de z procuradas são determinadas pela intersecção da linha n com a recta que une p a q .

Considere-se a equação completa de terceiro grau.

Seja a equação

$$z^3 + nz^2 + pz + q = 0 \quad (6.3.4)$$

Tomando dois módulos quaisquer considere-se

$$\begin{aligned} u &= \mu_1 p \\ v &= \mu_2 q \end{aligned} \quad (6.3.5)$$

que definem duas escalas métricas tomadas sobre Au e Bv . O ponto (n, z) é determinado pela equação:

$$\mu_2 z u + \mu_1 v + \mu_1 \mu_2 (z^3 + nz^2) = 0 \quad (6.3.6)$$

ou seja pelas expressões:

$$x = \delta \frac{\mu_1 - \mu_2 z}{\mu_1 + \mu_2 z} \quad y = -\frac{\mu_1 \mu_2 (z^3 + nz^2)}{\mu_1 + \mu_2 z} \quad (6.3.7)$$

As linhas cotadas z definem na rede (n, z) rectas paralelas aos eixos coordenados Au e Bv , determinando sobre o eixo AB , eixo das origens, uma escala projectiva. Para determinar as curvas n , as cúbicas cúspidas, pode eliminar-se z entre os valores de x e y no entanto esta alteração não conduzirá a grandes conclusões.

Através da expressão de y conclui-se que as curvas n são metricamente espaçadas em relação a Oy .

Logo para determinar as curvas n basta obter sobre cada linha z dois pontos da escala métrica correspondente.

Caso se tome $n = 0$ situado sobre a recta z resulta a equação:

$$\mu_2 z u + \mu_1 v + \mu_1 \mu_2 z^3 = 0 \quad (6.3.8)$$

que para $v = 0$ define $u = -\mu_1 z^2$.

Quando se toma o ponto $n = \frac{\mu_1}{\mu_2}$ da expressão acima em y resulta $y = -\mu_1 z^2$

A projecção ortogonal sobre Au do ponto cotado $\frac{\mu_1}{\mu_2}$ situado sobre uma recta (z) coincide com a projecção do ponto cotado 0 sobre essa mesma recta(z), feita a partir da origem B sobre o eixo Au .

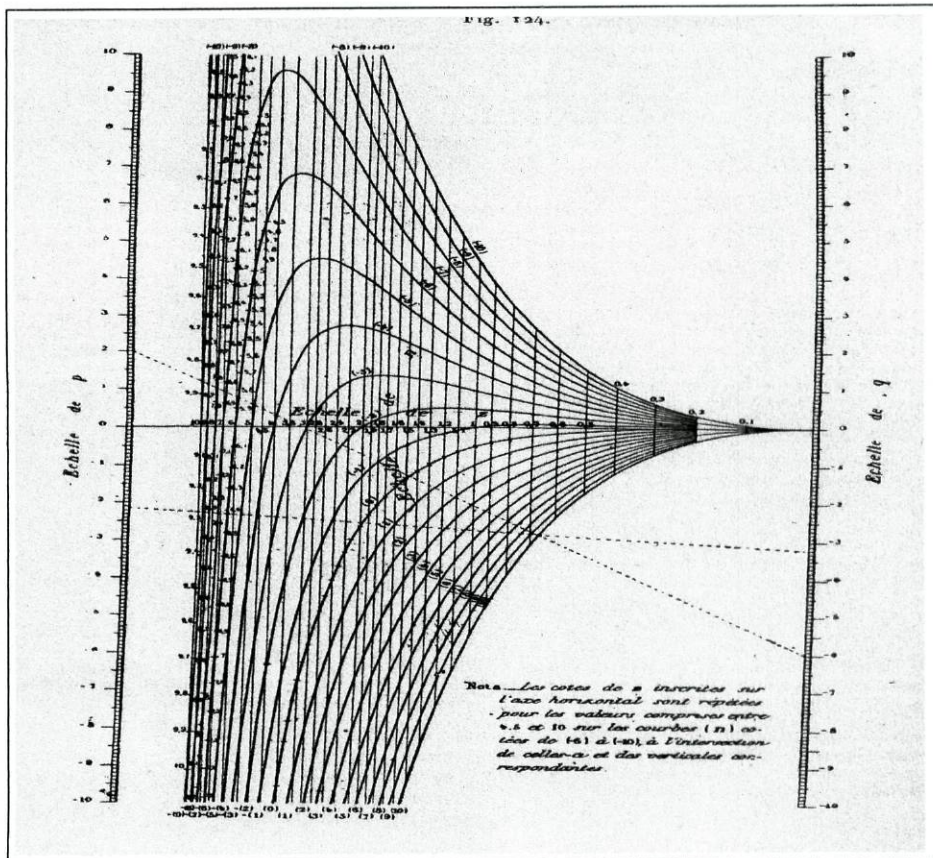


Figura 6.3:

Tomando

$$\mu_1 = \mu_2 = \frac{\delta}{5}$$

constrói-se o nomograma anterior. Unindo os pontos p e q lê-se as cotas z nas paralelas aos eixos onde intersectam com as respectivas curvas n.

As linhas a tracejado que surgem no nomograma referem-se às equações:

$$z^3 + 2z - 6 = 0$$

$$z^3 + z^2 - 2.16z - 3.2 = 0$$

onde se verifica que z é respectivamente, $z = 1.46$ e $z = 1.6$.

6.4 Equação Biquadrática I

A equação geral da biquadrática é:

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0 \quad (6.4.1)$$

Nesta primeira abordagem para a resolução gráfica da equação biquadrática recorre-se á resolução da equação quadrática e da cúbica. Comece-se por factorizar o primeiro membro da equação (6.4.1) em dois factores quadráticos. A equação biquadrática será reescrita da seguinte forma:

$$(x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d) = 0 \quad (6.4.2)$$

ou

$$x^4 + (a + c)x^3 + (b + d + ac)x^2 + (ad + bc)x + bd = 0 \quad (6.4.3)$$

Considerem-se as igualdades:

$$\begin{cases} a + c & = & A \\ b + d + ac & = & B \\ ad + bc & = & C \\ bd & = & D \end{cases} \quad (6.4.4)$$

Se $ac = K_1$ e $b + d = K_2$ então $K_1 + K_2 = B$. Das equações $b + d = K_2$ e $bd = D$, resulta

$$b = \frac{1}{2}K_2 + \frac{1}{2}\sqrt{K_2^2 - 4D}$$

$$d = \frac{1}{2}K_2 - \frac{1}{2}\sqrt{K_2^2 - 4D}$$

Das equações $a + c = A$ e $ac = K_1$,

$$a = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}\sqrt{A^2 - 4K_1}$$

$$c = \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}\sqrt{A^2 - 4K_1}$$

Substituindo os valores a , b , c e d na equação $ad + bc = C$ e tomando $K_1 = B - K_2$, define-se a cúbica

$$K_2^3 - BK_2^2 + (AC - 4D)K_2 + 4BD - C^2 - A^2D = 0 \quad (6.4.5)$$

Agora recorrendo ao que já foi visto atrás considera-se $K_2 = z + \frac{1}{3}B$ na equação anterior e obtém-se a cúbica auxiliar:

$$z^3 + (AC - 4D - \frac{1}{3}B^2)z + \frac{1}{3}(ABC + 8BD - \frac{2}{9}B^3 - 3C^2 - 3A^2D) = 0 \quad (6.4.6)$$

Os coeficientes da equação cúbica auxiliar são obtidos, directamente, a partir da equação (6.4.1) e as suas raízes são encontradas através do nomograma II.

Após determinar o valor de z , $b + d$ é determinado a partir da relação:

$$K_2 = b + d = z + \frac{1}{3}B$$

Através da equação biquadrática factorizada conclui-se que existem sempre três possibilidades para $b + d$ real ou imaginário. A maior raiz real dá origem a valores reais de b e d . Uma vez que $b + d = K_2$ e $bd = D$, verifica-se que b e d são raízes de

$$x^2 - K_2x + D = 0$$

e são encontradas através do nomograma I. Os valores de a e c são encontrados da mesma forma. Os valores de a , b , c e d devem ser seleccionados de modo a satisfazer a equação $ad + bc = C$. Após serem encontrados os valores de a , b , c e d define-se a factorização da equação biquadrática e através do nomograma I definem-se as soluções da equação.

► **Exemplo 6.5** ... Considere-se a equação biquadrática

$$x^4 - 3x^3 + 5x^2 - x - 10 = 0$$

Fazendo as respectivas substituições define-se a equação cúbica auxiliar:

$$z^3 + 34.667z - 48.593 = 0$$

Seja $z = 3w$. Neste caso a equação anterior resulta em:

$$w^3 + 3.85w - 1.8 = 0$$

Através do nomograma II conclui-se que $w = .44$, $z = 1.32$, $K_2 = b + d = 2.99$, $bd = -10$. Pelo nomograma I resulta que $b = -2$, $d = 5$, $a = -1$ e $c = -2$.

O primeiro membro da equação quadrática é factorizado resultando:

$$(x^2 - x - 2)(x^2 - 2x + 5) = 0$$

Recorrendo ao nomograma I resulta que as soluções da equação biquadrática são

$$-1, 2, 1 + 2i, 1 - 2i$$

6.5 Equação Biquadrática II

Seja a equação de quarto grau

$$z^4 + mz^3 + nz^2 + pz + q = 0 \quad (6.5.1)$$

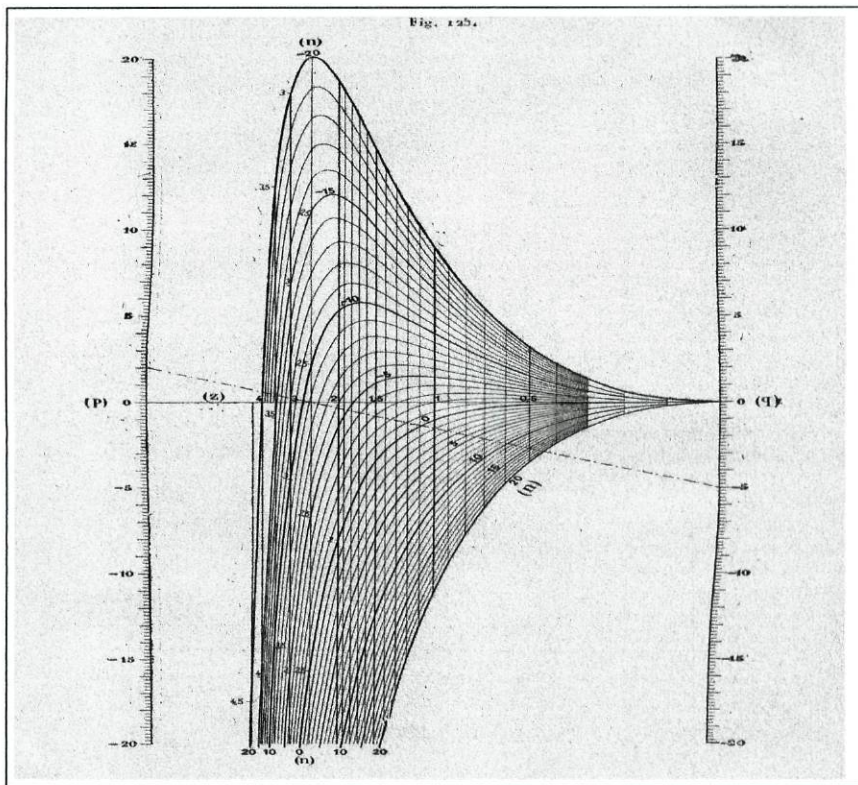


Figura 6.4: Resolução da equação de quarto grau

Tomando

$$\begin{aligned}
 z &= mz' \\
 n &= m^2 n' \\
 p &= m^3 p' \\
 q &= m^4 q'
 \end{aligned}
 \tag{6.5.2}$$

Define-se a equação:

$$z'^4 + z'^3 + n' z'^2 + p' z' + q' = 0 \tag{6.5.3}$$

Para construir o nomograma basta considerar

$$\begin{aligned}
 u &= \mu_1 p' \\
 v &= \mu_2 q'
 \end{aligned}
 \tag{6.5.4}$$

ficando os pontos (n', z') determinados a partir de

$$x = \epsilon \frac{\mu_1 - \mu_2 z'}{\mu_1 + \mu_2 z'} \quad y = -\frac{\mu_1 \mu_2 (z'^4 + z'^3 + n' z'^2)}{\mu_1 + \mu_2 z'} \tag{6.5.5}$$

Neste caso as curvas n' são definidas por quárticas e não cúbicas, como no caso anterior. Após ser definida a curva $n' = 0$ todas as outras se encontram de modo semelhante ao anterior. Caso se comparem a expressão anterior de y com a expressão em y obtida no caso da equação cúbica conclui-se que para um mesmo valor de z' ou de z existe uma diferença constante entre as duas expressões. Logo construindo o nomograma seguinte com os mesmos módulos que o anterior conclui-se que as escalas métricas determinadas sobre z pelas curvas n' são iguais em ambos os casos. Desta forma obtém-se o nomograma acima.

Capítulo 7

Aplicação dos Nomogramas de alinhamento aos diferentes casos de resolução de triângulos esféricos

Neste capítulo, vamos apresentar mais uma das aplicações dos nomogramas de alinhamento, nomeadamente, à resolução dos triângulos esféricos, que surgem frequentemente, por exemplo, em Astronomia.

Consideremos um triângulo esférico e designemos os lados por a , b e c e os ângulos opostos por A , B e C . A questão relativa à resolução dos triângulos esféricos, por métodos nomográficos, pode ser formulada da seguinte forma:

Dados três dos seis elementos a, b, c, A, B, C pretende-se encontrar um entre os restantes.

Este enunciado propõe a procura de um único dos três elementos desconhecidos e não dos três. Com este intuito considera-se a disposição do sistema de quatro elementos, constituído pelos três elementos dados e pelo elemento desconhecido.

Esta disposição pode ser apresentada de três formas distintas:

- ▶ Dois pares de elementos contíguos, separados por dois elementos não intervenientes, por exemplo, os pares A, b e B, a separados por c e C . Uma tal disposição é designada por (2, 2).
- ▶ Três elementos contíguos e um quarto isolado deste grupo e, por consequência, oposto ao elemento central dos três primeiros, por exemplo, b, A, c e a . Uma tal disposição será designada por (3, 1).
- ▶ Quatro elementos consecutivos como, por exemplo, C, a, B e c . Uma tal disposição será designada pelo símbolo (4).

A estas três disposições correspondem respectivamente as fórmulas:

$$\sin A \sin b = \sin a \sin B \quad (7.0.1)$$

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \quad (7.0.2)$$

$$\cos a \cos B = \sin a \cot c - \sin B \cot C \quad (7.0.3)$$

Em cada uma delas qualquer dos quatro elementos pode ser considerado a incógnita.

É possível mostrar que se se conhecer quaisquer três elementos dos seis de um triângulo, pode associar-se um dos outros três, de modo a obter uma disposição (3,1). Uma vez determinado este primeiro elemento pode, novamente, constituir-se uma disposição (3,1) para cada um dos dois elementos restantes associando convenientemente a três dos quatro já conhecidos. Ou seja, através unicamente da fórmula (7.0.2) é possível obter a resolução completa do triângulo.

No entanto, para a resolução nomográfica directa, em todos os casos citados, são necessários três nomogramas, correspondendo às três fórmulas fundamentais dadas acima.

Antes de passar à construção desses três nomogramas, convém referir uma nota especial relativa aos triângulos rectângulos. Suponhamos que se conhecem dois dos elementos (para além do ângulo recto). Para determinar o terceiro elemento basta recorrer á disposição formada por esses três elementos e pelo ângulo recto e aplicar a fórmula apropriada entre as que foram definidas acima.

Por exemplo, se se pretende conhecer a relação entre a hipotenusa a , um dos lados b e o ângulo C , por eles formado, reconhece-se que á disposição formada por esses três elementos e o ângulo recto A é a que foi designada por (4).

Uma permutação circular de (7.0.3) permite obter:

$$\cos b \cos C = \sin b \cot a - \sin C \cot A \quad (7.0.4)$$

que, tendo em consideração que $A = \frac{\pi}{2}$, conduz a

$$\cos b \cos C = \sin b \cot a \quad (7.0.5)$$

ou ainda

$$\tan b = \tan a \cos C \quad (7.0.6)$$

Fica assim demonstrado que os três nomogramas relativos às três fórmulas acima fornecem a solução completa de todos os problemas possíveis.

7.1 Nomogramas da fórmula $\sin A \sin b = \sin a \sin B$

Para obter o nomograma da fórmula $\sin A \sin b = \sin a \sin B$ escrevê-mo-la na forma

$$\frac{\sin a}{\sin b} = \frac{\sin A}{\sin B} \quad (7.1.1)$$

Caso se utilizem coordenadas paralelas considera-se t como o valor comum das duas relações anteriores.

$$\sin a = t \sin b \quad (7.1.2)$$

Tome-se

$$\sin a = u \quad \sin b = -v \quad (7.1.3)$$

e A_0 e B_0 como origens dos eixos coordenados. Logo para equação do ponto (t) vem:

$$u + vt = 0 \quad (7.1.4)$$

que representa os pontos do eixo A_0B_0 das origens.

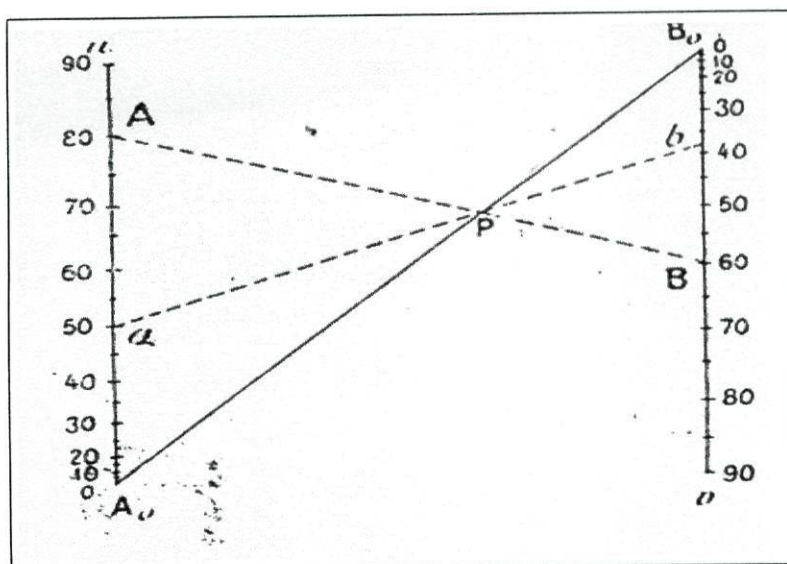


Figura 7.1: Nomograma relativo a $\sin A \sin b = \sin a \sin B$

A equação (7.1.1) exprime que as rectas AB e ab intersectam a recta A_0B_0 no mesmo ponto P .

Este facto indica a construção de duas escalas de senos idênticas, sobre dois eixos paralelos, com os zeros em A_0 e B_0 e as graduações de sentidos contrários de modo a permitir que o ponto P se encontre entre A_0 e B_0 . Desta forma as rectas AB e ab intersectam A_0B_0 no mesmo ponto P . (figura 7.1)

Considere-se, por exemplo, que A , B e a são dados e b é procurado. A operação é a seguinte:

Os pontos cujas cotas são A e B nas duas escalas são unidos por uma recta que intersecta A_0B_0 num ponto P . A recta que une o ponto P ao ponto cotado a , sobre a primeira escala, intersecta a segunda num ponto cuja cota é b .

7.2 Nomogramas da fórmula $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$

A equação (7.0.2) pode ser reescrita na forma:

$$\cos a - \sin b \sin c \cos A = \cos b \cos c \quad (7.2.1)$$

Para obter a sua representação por um nomograma de alinhamento basta tomar:

$$u = \cos a \quad v = -\cos A \quad (7.2.2)$$

Considerando os eixos A_0u e B_0v obtém-se para rede de pontos (b, c) a equação

$$u + v \sin b \sin c = \cos b \cos c \quad (7.2.3)$$

As curvas b e c são as mesmas em virtude da simetria da equação anterior em b e c . A rede de pontos (b, c) resulta das intersecções das curvas desta família.

Para determinar a equação das curvas que resultam da variação de c é necessário determinar o lugar geométrico dos pontos de equação (7.2.3) quando c é visto como variável. A equação em u e v desse lugar resulta da eliminação do parâmetro c entre (7.2.3) e a sua derivada em relação a c , ou seja

$$v \sin b \cos c = -\cos b \sin c \quad (7.2.4)$$

Adicionando as duas equações anteriores (7.2.3) e (7.2.4), após multiplicá-las, por um lado, a primeira por $\sin c$ e a segunda por $\cos c$, e, por outro lado, a primeira por $\cos c$ e a segunda por $\sin c$, obtêm-se as seguintes equações:

$$u \sin c = -v \sin b \quad u \cos c = \cos b \quad (7.2.5)$$

Elevando ambas as equações ao quadrado e adicionando-as obtém-se:

$$u^2 = v^2 \sin^2 b + \cos^2 b \quad (7.2.6)$$

A equação (7.2.6) mostra que as curvas (b) são elipses cujo o eixo é dirigido segundo a recta A_0B_0 que resulta de unir as origens dos eixos A_0u e B_0v .

Para traçar as elipses, ponto por ponto, é necessário recorrer às coordenadas cartesianas relativas aos eixos Ox e Oy em que a origem O é o ponto médio de A_0B_0 , o sentido positivo de Ox coincide com OB_0 , o eixo Oy é paralelo aos eixos A_0u e B_0v e tem o mesmo sentido.

Com esses eixos, as coordenadas do ponto (b, c) são:

$$x = -\frac{1 - \sin b \sin c}{1 + \sin b \sin c}, \quad y = \frac{\cos b \cos c}{1 + \sin b \sin c} \quad (7.2.7)$$

Note-se que, se b e c estão compreendidos entre 0 e π , então

$$-1 < x < 0$$

e ainda que

$$0 < y < 1 \quad \text{ou} \quad -1 < y < 0$$

dependendo se b e c estão ambos do mesmo lado ou de lados diferentes relativamente a $\frac{\pi}{2}$.

A equação (7.2.6) mostra que a elipse (b) ou (c) é a mesma para dois valores suplementares do ângulo correspondente; por outro lado, as elipses (b) e (c) têm dois pontos comuns simétricos em relação a Ox . De salientar que se toma o ponto acima ou abaixo de Ox dependendo se (b) e (c) estão do mesmo lado ou de lados diferentes relativamente a $\frac{\pi}{2}$.

Suponhamos agora que b e c são iguais ou suplementares de tal modo que as respectivas elipses coincidem. Neste caso, vê-se que se deve tomar para ponto (b, c) sobre o nomograma o ponto de contacto da única elipse com uma das tangentes comuns levantadas por O , seja acima ou abaixo de Ox dependendo de b e c serem iguais ou suplementares.

As equações (7.2.7) permitem concluir sem dificuldade que

$$\sin b \sin c = \frac{1+x}{1-x} \quad (7.2.8)$$

$$\cos c \cos b = \frac{2y}{1-x} \quad (7.2.9)$$

donde, por eliminação de c , se obtém

$$\frac{(1+x)^2}{\sin^2 b} + \frac{4y^2}{\cos^2 b} = (1-x)^2 \quad (7.2.10)$$

ou ainda

$$(1+x)^2 \cos^2 b + 4y^2 \sin^2 b = (1-x)^2 \sin^2 b \cos^2 b \quad (7.2.11)$$

Desta equação conclui-se que para $x = -1$ resulta $y = \pm \cos b$, ou seja, a elipse (b) intersecta a escala a , com suporte A_0u , nos pontos cotados b e $\pi - b$.

De salientar que se em (7.2.6), se tomar $v = 0$, resulta $u = \pm \cos b$, que significa que a recta que une os pontos cotados b e $\pi - b$ da escala (a) ao ponto B_0 são tangentes à elipse (b) nesses pontos.

Através das fórmulas (7.2.7) ou da equação (7.2.11), podem construir-se as elipses (b) através da geometria analítica.

Mas um modo de construção mais simples e mais específico é fornecido pela equação (7.2.1). Na verdade esta equação exprime o alinhamento dos pontos (a) de A_0u , (A) de B_0v e (b, c) . Pela equação conclui-se que se $A = 0$, tem-se $a = b - c$ e para $A = \pi$, $a = b + c$. Estes dois pares de valores de a e A determinam as rectas cujo ponto de intersecção coincide com o ponto (b, c) .

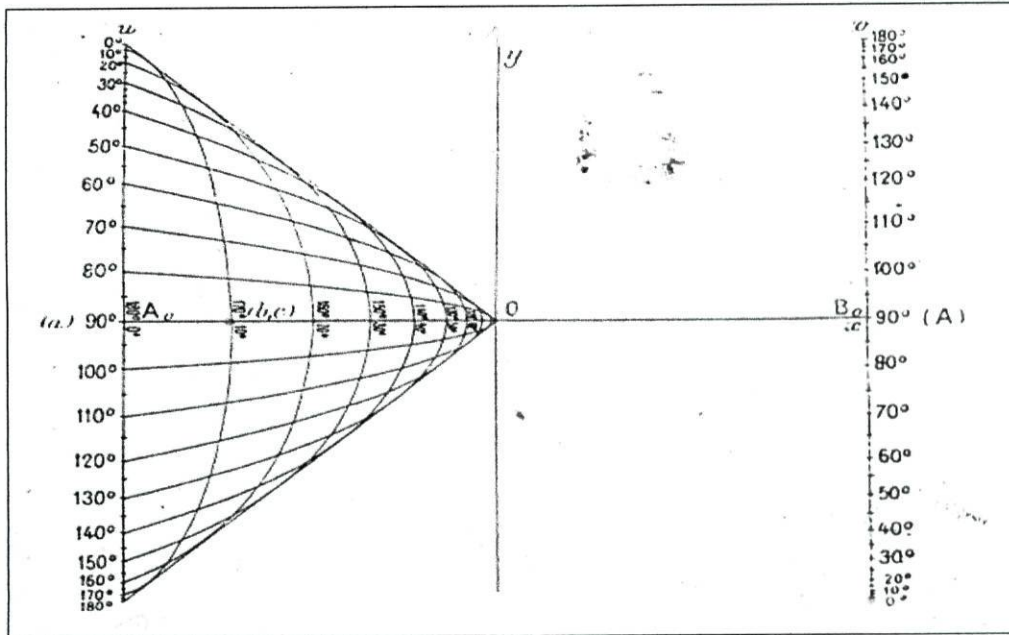


Figura 7.2: Nomograma relativo a $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$

Os eixos A_0u e B_0v suportam as escalas a e A definidas pelas equações (7.2.2). Unindo cada um dos pontos $A = 0$ e $A = \pi$ a todos os pontos das escala (a) , obtêm-se dois feixes de rectas cujas intersecções mútuas encontram-se sobre as elipses (b) . Para que duas rectas destes feixes se intersectem num ponto da elipse (b) é apenas necessário e suficiente que a soma ou a diferença dos ângulos correspondentes a essas duas rectas seja igual a $2b$.

Logo o ponto (b, c) é o ponto de intersecção das elipses (b) e (c) e encontra-se abaixo ou acima de A_0B_0 dependendo se b e c estão ou não do mesmo lado relativamente a $\frac{\pi}{2}$. Os pontos cotados (a) , (A) e (b, c) estão em linha recta.

7.3 Nomograma da fórmula $\cos a \cos B = \sin a \cot c - \sin B \cot C$

Escreva-se a fórmula sob a forma

$$\cot c \sin a - \cot C \sin B = \cos a \cos B \tag{7.3.1}$$

e tome-se

$$\begin{aligned} u &= \cot c \\ v &= -\cot C \end{aligned} \tag{7.3.2}$$

Estas fórmulas definem as escalas cujos suportes são os eixos A_0u e B_0v , e dão para rede de pontos (a, B) a equação

$$u \sin a + v \sin B = \cos a \cos B \tag{7.3.3}$$

Para obter a equação em u e v da curva (a) , resultante da variação de B , é necessário eliminar, como habitualmente, B entre essa equação e a sua derivada em rela[ção a B , ou seja

$$v \cos B = -\cos a \sin B \tag{7.3.4}$$

Se se fizer a soma dessas equações após tê-las multiplicado, respectivamente, por $\cos B$ e $-\sin B$ e depois por $\sin B$ e $\cos B$, obtem-se:

$$u \sin a \cos B = \cos a \tag{7.3.5}$$

$$u \sin a \sin B = -v \tag{7.3.6}$$

Elevando estas equações ao quadrado e adicionando resulta a seguinte equação

$$u^2 \sin^2 a = v^2 + \cos^2 a \tag{7.3.7}$$

ou

$$(u^2 + 1) \sin^2 a = v^2 + 1 \tag{7.3.8}$$

Através da equação (7.3.7) conclui-se que as curvas (a) são hipérbolas em que um dos eixos está situado sobre A_0B_0 .

Se se permutar a com B e u com v , nada altera na equação (7.3.3). Na verdade obtém-se imediatamente para equação das curvas (B)

$$u^2 + 1 = (v^2 + 1) \sin^2 B \tag{7.3.9}$$

que define um feixe de hipérbolas, algebricamente idêntico ao anterior. No entanto, as hipérbolas (a) , que têm um foco comum em 0, têm a sua concavidade voltada para o lado A_0 , enquanto que as hipérbolas (B) , que têm também um foco comum em 0, têm a sua concavidade voltada para o lado de B_0 . Estes dois feixes (a) e (B) são simétricos em relação a Oy .

Para construir as hipérbolas ponto por ponto recorre-se às coordenadas cartesianas.

As coordenadas do ponto (a, B) são:

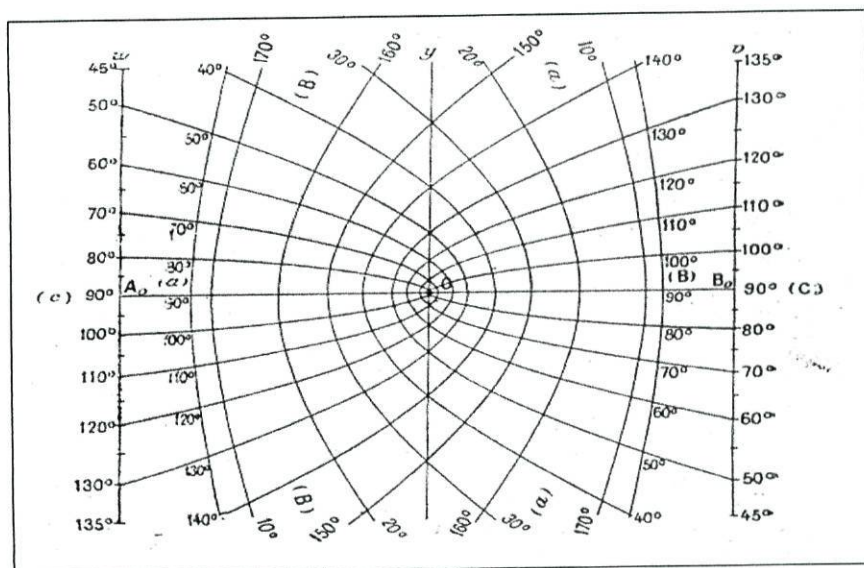


Figura 7.3: Nomograma relativo a $\cos a \cos B = \sin a \cot c - \sin B \cot C$

$$x = \frac{\sin B - \sin a}{\sin B + \sin a}, \quad y = \frac{\cos a \cos B}{\sin B + \sin a} \quad (7.3.10)$$

De salientar que se a e B estão compreendidos entre 0 e π então:

$$-1 < x < 1$$

e

$$y > 0 \quad \text{ou} \quad y < 0$$

dependendo se a e B estão ou não do mesmo lado relativamente a $\frac{\pi}{2}$.

Para ter a equação cartesiana das hipérboles (a) conclui-se do que foi visto atrás que

$$\sin B = \frac{1+x}{1-x} \sin a, \quad \cos B = \frac{2y}{1-x} \tan a \quad (7.3.11)$$

resultando:

$$(1+x)^2 \sin^2 a + 4y^2 \tan^2 a = (1-x)^2 \quad (7.3.12)$$

ou

$$(1-x)^2 \cos^2 a - 4y^2 \sin^2 a = (1+x)^2 \sin^2 a \cos^2 a \quad (7.3.13)$$

Para $x = -1$ resulta, pela equação anterior $y = \pm \cot a$ o que mostra que a hipérbole (a) intersecta o eixo A_0u nos pontos cotados a e $\pi - a$ da escala (c). Caso se considere $v = 0$ na equação (7.3.7) ou $u = 0$ na equação (7.3.9) conclui-se que as tangentes as hipérboles (a) nos seus pontos de intersecção com A_0u passam por B_0 e que as tangentes

às hipérboles (B) nos pontos de intersecção com B_0v passam por A_0 . Contrariamente ao que ocorreu nos casos anteriores, neste nomograma apenas se apresenta uma parte restrita do nomograma, visto que este varia de $-\infty$ até $+\infty$ na direcção de Oy .

Bibliografia

- [1] Belgrano, J. C., "Tratado de Nomografia", Madrid, 1953.
- [2] Béghin, Henri, "Cours de Mécanique Théorique et Appliquée", Gauthiers-Villars, 1952.
- [3] Cremona L., "Graphical Statics. Two treatises on the Graphical Calculus and Reciprocal Figures in Graphical Statics". Clarendon Press, 1890.
- [4] Evesham, H.A., *Origins and Development of Nomography*, "Annals of the History of Computing", Volume 8, Número 4, 324 - 333, Out. 1986
- [5] Fréchet, M., Rouillet, H., "Nomographie", Librairie Armand Colin, 1928, Paris
- [6] Jacob L., "Le Calcul Mécanique", Octave Doin et Fils, 1911.
- [7] , Khovanski, G. "Éléments de nomographie", Éditions Mir - Moscou
- [8] Martin, R., "Cours de Nomographie", Editions Eyrolles, Paris, 1955
- [9] Molk, J., "Calculs Numériques", Encyclopédie des Sciences Mathématiques pures et appliquées, Tome 1, vol. 4, 1908. Éditions Jacques Gabay, 1993 [reedição].
- [10] Moritz R.E., "Some Physical Solutions of the General Equation of the n^{th} degree", Annals of Mathematics (2) 6 64-78 (1905).
- [11] D'Ocagne M., "Calcul graphique et Nomographie". Octave Doin et Fils, 1914.
- [12] D'Ocagne M., "Coordonnées parallèles e axiales", Paris, Gauthiers-Villars, 1885.
- [13] D'Ocagne M., "Cours de Géométrie Pure et Appliquée". Gauthiers-Villars, 1918.
- [14] D'Ocagne M., *Application des Nomogrammes a alignement aux differents cas de résolution des triangles sphériques*, "Deux Conférences sur la nomographie", 1914, Université d'Edimbourg
- [15] D'Ocagne M., *Principes de Nomographie*, "Deux Conférences sur la nomographie", 1914, Université d'Edimbourg
- [16] D'Ocagne M., "Traité de Nomographie", Gauthier-Villars, 1921

-
- [17] Taylor, J., "Plane and Spherical Trigonometry with answers and tables", New York, Barnes & Noble, Inc., 1944
- [18] Runge C., "Graphical Methods", A course of lectures delivered in Columbia University in 1910. Chelsea Publishers, 1910.
- [19] Running T. R., "Graphical Solutions of the quadratic, cubic and biquadratic equations"; University of Michigan, p. 415 - 423, Nov. - Dec. 1921.
- [20] Tournès D., "Du Compas aux Intégraphes: les instruments du calcul graphique"; Repères. Num. 50. p. 63-84., éditions Metz, 2003.
- [21] Tournès D., "Pour une histoire du calcul graphique"; Repères. Revue d'histoire des Mathématiques, Notes e Débats. Société mathématique de France, 6(2000), p. 127-161.
- [22] Willers A., "Practical Analysis. Graphical and Numerical Methods". Dover Publications, Inc. 1928.
- [23] <http://cmup.fc.up.pt/cmup/nomografia>
- [24] <http://pt.Wikipedia.org/Wiki/Nomografia>