

**Raúl Miguel Soares Teixeira Alves**

Dep. de Física	283	C
Matrícula	3	04 06

**I – Evolução estelar**  
**II – A Matéria Escura, os WIMPs e a Heliossismologia**

**Biblioteca**  
Faculdade de Ciências  
Universidade do Porto

**FC**



**FC**

**FACULDADE DE CIÊNCIAS**  
**UNIVERSIDADE DO PORTO**

**Departamento de Física**  
**Faculdade de Ciências da Universidade do Porto**  
**Outubro de 2005**

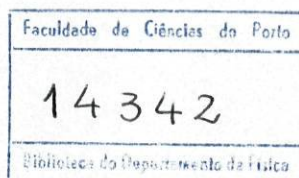


UNIVERSITY OF CALIFORNIA  
LIBRARY

QB 806 ALV ~ E 2005

**Raúl Miguel Soares Teixeira Alves**

**I – Evolução estelar**  
**II – A Matéria Escura, os WIMPs e a Heliossismologia**



27-3-2006  
Raul de Bi. Alves

**Tese submetida à Faculdade de Ciências da Universidade do Porto**  
**Para obtenção do grau de Mestre em Física para o Ensino**

**Departamento de Física**  
**Faculdade de Ciências da Universidade do Porto**  
**Outubro de 2005**

## Sumário

Ao longo dos anos o estudo do Cosmos foi negligenciado quer no ensino secundário quer no ensino superior. Felizmente, nos últimos anos tem havido uma consciencialização da importância desse estudo. Este trabalho visa estudar uma das maiores conquistas científicas do século XX, a descrição da evolução estelar, e os últimos desenvolvimentos do que será, possivelmente, a maior conquista científica da cosmologia no século XXI, a descoberta da natureza da matéria escura.

Tendo como público-alvo os alunos e professores do ensino secundário, o texto é apresentado de forma descritiva seguindo sempre que possível uma lógica racional, relegando todas as deduções matemáticas para apêndice. Além deste texto, inclui-se uma apresentação passível de ser utilizada pelos professores assim como dois cartazes contendo os fundamentos da evolução estelar e síntese dos elementos químicos bem como uma descrição geral sobre o problema da matéria escura.

# Índice

Sumário .....	2
Índice .....	3
Índice de figuras .....	4
Índice de tabelas .....	5
Introdução .....	1
Capítulo 1 .....	3
1.1. A origem das estrelas .....	3
1.2. As estrelas durante a sequência principal .....	9
1.2.1. Algumas simples deduções sobre as estrelas .....	10
1.2.2. A fusão nuclear .....	12
1.2.3. Extremos da sequência principal .....	16
1.3. O princípio do fim .....	17
1.4. O fim das estrelas .....	21
1.4.1. Estrelas pouco maciças .....	21
1.4.2. Estrelas maciças .....	21
Capítulo 2 .....	26
2.1. Matéria escura .....	26
2.1.1 – MACHO como matéria escura .....	29
2.1.2. A matéria escura pode ter natureza não-bariônica .....	31
2.1.2.1. Impondo limites a partículas WIMP através da heliossismologia .....	32
Apêndice A – Massa de Jeans .....	35
Apêndice B – Equações de estrutura estelar .....	38
Apêndice C – Efeito de Túnel .....	41
Apêndice D – Pressão de radiação .....	44
Apêndice E – Quanto demora a energia do núcleo solar a atingir a superfície .....	46
Apêndice F – Reações nucleares nas estrelas supergigantes .....	48
Apêndice G – Limite de Chandrasekhar .....	50
Apêndice H – Densidade Bariônica .....	54
Apêndice I – WIMPs e o Big Bang .....	58
Apêndice J – Os WIMPs no Sol .....	61
Apêndice L – Alguns problemas sobre evolução estelar .....	65
Bibliografia .....	71

## Índice de figuras

Figura 1 – Representação gráfica dos vários tipos de nuvens de gás e de alguns valores da Massa de Jeans .....	4
Figura 2 – Trilhos de Hayashi .....	6
Figura 3 – Diagrama de protostrela .....	7
Figura 4 – Diagrama de Hertzsprung-Russel .....	9
Figura 5 – A importância das cadeias pp e ciclo CNO em função da temperatura .....	13
Figura 6 – Descrição das cadeias pp e do ciclo CNO .....	15
Figura 7 – Gráfico da energia de ligação por nucleão para vários elementos químicos ....	20
Figura 8 – Estrela de neutrões .....	23
Figura 9 – Trilhos de evolução pós-sequência principal do Sol e de uma estrela maciça ..	25
Figura 10 – Curvas de rotação das estrelas .....	27
Figura 11 – Diagrama e imagem de lentes gravitacionais .....	28
Figura 12 – Diagrama de emissão da linha espectral de 21 cm .....	30
Figura 13 – Oscilações da superfície solar e a penetração no interior solar das ondas de várias frequências .....	33
Figura 14 – Densidades relativas de elementos leves produzidos após o Big Bang em função da razão entre a densidade bariônica e a densidade luminosa. ....	56

## Índice de tabelas

Tabela 1 – Valores típicos dos vários tipos de nuvens interestelares.....	4
Tabela 2 – Características da classificação espectral .....	10
Tabela 3 – Alguns valores típicos da “esperança de vida” das estrelas .....	11
Tabela 4 - Algumas propriedades de uma estrela maciça ( $M=25M_{\odot}$ ) .....	19
Tabela 5 - Supernovas observadas a olho nu ao longo dos tempos .....	23
Tabela 6 - Destinos das estrelas consoante a sua massa inicial .....	25

## Introdução

O céu noturno, limpo de toda e qualquer poluição luminosa, constitui uma das mais deslumbrantes visões que o Homem pode apreciar. Esta visão que sempre nos acompanhou durante a nossa evolução está na origem de lendas sobre deuses, heróis e figuras míticas que fazem parte da nossa História e Cultura.

Desde cedo o Homem descobriu a importância dos astros para o seu desenvolvimento, especialmente, o Sol e a Lua. Dadas as diferentes fases da Lua e as periodicidades das órbitas da Lua e do Sol, estes dois astros tornaram-se nos relógios da Antiguidade. O céu permitia também aos viajantes e marinheiros guiarem-se nas vastidões de Novos Mundos. Com o Renascimento e o aparecimento dos primeiros telescópios, nasce a astronomia como verdadeira ciência. Como ciência já estabelecida, um maior esforço na precisão com que se cartografava e catalogava o céu noturno permitiu importantes desenvolvimentos, incluindo a descrição da Mecânica Celeste. Mas só no século XX, com o aparecimento de gigantescos telescópios ópticos, fotómetros (instrumentos que medem a intensidade da luz), espectrómetros (instrumentos que analisam o espectro de luz emitido), máquinas fotográficas, radiotelescópios, satélites de observação e computadores pôde o Homem sondar as profundezas do Universo.

O conhecimento do Cosmos construiu-se com algumas das mais extraordinárias conquistas científicas de todos os tempos, sendo uma delas, a descrição do “nascimento”, “vida” e “morte” das estrelas. As estrelas mudam consideravelmente ao longo da sua existência de algumas dezenas de milhares a milhões de anos. Torna-se por isso, impossível observar as estrelas na passagem de uma fase da vida para outra, à excepção de um único evento, a supernova. A fase de supernova dura apenas alguns segundos sendo difícil assistir a tal fenómeno dada a vastidão do Universo. No entanto existem tantas estrelas que é possível observá-las nas diferentes fases permitindo identificar e descrever a cadeia de acontecimentos. O estudo da evolução estelar faz-se ao longo do primeiro capítulo.

O Universo tem, no entanto, a capacidade intrínseca de nos maravilhar e surpreender. Durante grande parte do século XX, como resultado de observações atentas de fenómenos cósmicos, os astrónomos sentiam que faltava algo, algo que lhes era invisível. Toda a matéria presente no nosso dia-a-dia emite ou reflecte fotões, razão pela qual, a podemos ver. Surgiu a necessidade de considerar a possível existência de matéria invisível, matéria que não interage

com fótons, a que se deu o nome de matéria escura. Cálculos e observações posteriores sugerem que a matéria escura supera largamente a quantidade de matéria visível. As observações que levaram à consideração da matéria escura, as várias formas possíveis de matéria escura e os mais recentes desenvolvimentos nesta área, compõem o segundo capítulo.

## Capítulo 1

### 1.1. A origem das estrelas

As estrelas mais jovens encontram-se, regra geral, na companhia de outras estrelas com idades semelhantes e rodeadas por enormes nuvens. O principal constituinte, quer das nuvens de gás quer das estrelas, é o hidrogénio, sugerindo que as nuvens de gás estão na origem das estrelas.

A origem das estrelas é de difícil observação, não só devido à sua duração, que pode ir até alguns milhões de anos, mas também devido à opacidade da nuvem de gás que a envolve. Só em Fevereiro do ano 2000, os astrónomos conseguiram, a partir de um telescópio de infravermelhos do ESO (European Southern Observatory), observar uma imagem do interior de uma nuvem de gás.

Todas as partículas (átomos, moléculas, iões, etc) de uma nuvem de gás atraem-se mutuamente por acção da força gravítica e encontram-se em movimento contínuo com uma energia cinética ditada pela temperatura da nuvem de gás. O movimento contínuo das partículas produz uma força exercida para o exterior, tal como a pressão de um gás nas paredes de um recipiente, que contraria o colapso gravitacional permitindo que a nuvem atinja um estado de equilíbrio.

O astrónomo inglês do princípio do século XX, James Jeans, foi quem pela primeira vez, estabeleceu quais as condições que podem levar ao colapso de uma nuvem de gás. Considerando um modelo de nuvem de gás homogénea, com forma esférica e temperatura constante, Jeans determinou a massa da nuvem acima da qual a atracção gravitacional suplantava a oposição da pressão devida ao movimento contínuo das partículas, levando ao colapso gravitacional. Esta massa crítica ficou conhecida por massa de Jeans<sup>1</sup> e tem a seguinte expressão:

$$M_J \propto T^{\frac{3}{2}} \left( \frac{1}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1)$$

---

<sup>1</sup> A dedução da expressão da massa de Jeans encontra-se no Apêndice A

Analisando a expressão para a massa de Jeans, facilmente se conclui que quanto maior for a densidade (o que implica maior atracção gravítica entre as partículas) e menor for a temperatura da nuvem de gás (o que implica menor energia cinética e consequentemente menor força de pressão) menor será a massa de Jeans, ou seja, mais facilmente se atinge o colapso gravitacional.

Mas uma nuvem de gás não é, regra geral, esférica com temperatura uniforme e homogénea, além disso, nenhuma consideração foi feita relativamente à rotação da nuvem de gás nem aos campos magnéticos criados por esta, que inibem a tendência da nuvem de gás para se contrair. No entanto, este modelo bastante simplificado, permite prever as condições de colapso gravitacional de uma nuvem de gás.

Na figura e tabela seguintes estão representadas algumas características dos vários tipos de nuvens:

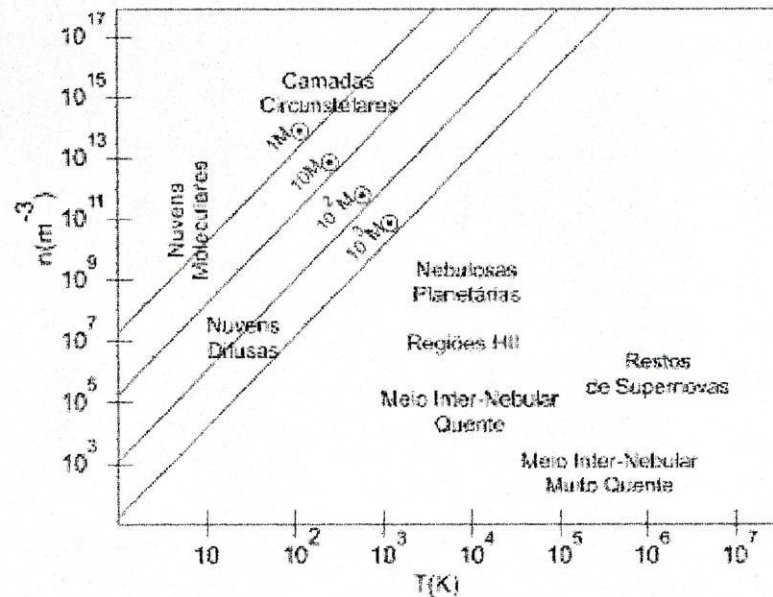


Figura 1 - Representação gráfica dos vários tipos de nuvens de gás e de alguns valores da Massa de Jeans

Tipo de nuvem	$M/M_{\odot}$	Tamanho/pc*	Forma predominante de H
Nuvem molecular	$1-10^4$	$10^1-20$	$H_2$
Nuvens difusas	$1-10^2$	$3-10^2$	$H/H_2$
Camadas circunstelares	$\leq 1$	$\leq 1$	$H/H_2$
Nebulosas planetárias	$\leq 1$	$\leq 2$	$H^+$
Regiões HII	$1-10^4$	$1-20$	$H^+$
Meio Internebular quente	-	-	$H^+/H$
Meio Inter- nebular muito quente	-	-	$H^+$
Restos de Supernovas	$\sim 3$	$\leq 10^3$	$H^+/H$

Tabela 1 - Valores típicos dos vários tipos de nuvens interestelares

\* 1pc (parsec) = 3.26 anos-luz =  $2,1 \times 10^5$  UA (unidades astronómicas) =  $3,1 \times 10^{13}$  km

Considerando os limites da massa de Jeans e as massas típicas dos vários tipos de nuvens é de esperar o colapso gravitacional da maior parte das nuvens moleculares. As nuvens difusas, apesar de não satisfazerem o critério de Jeans, podem dar origem a estrelas. Certas regiões destas nuvens, devido a perturbações exteriores, sofrem um aumento local de densidade, mantendo a temperatura praticamente constante. Os astrónomos desconhecem qual ou quais os fenómenos capazes de produzir tais perturbações, embora os mais plausíveis sejam:

- A influência de supernovas – as supernovas são explosões que libertam uma enorme quantidade de energia e de matéria, que viajam a grandes velocidades, percorrendo enormes distâncias e produzindo uma onda de choque capaz de introduzir alterações locais na densidade de uma nuvem molecular ou difusa.
- A influência das estrelas – as próprias estrelas como as do tipo O e B (as estrelas mais quentes com temperaturas superficiais superiores a  $15000\text{ K}$ ), quando associadas em conjunto de estrelas, produzem grandes quantidades de luz visível e ultravioleta, e um forte vento estelar capaz de produzir as perturbações necessárias ao colapso gravitacional.
- Colisões com nuvens de gás e galáxias – a aproximação ou colisão com outras nuvens de gases ou galáxias, criam ondas de choque, que se propagam ao longo das nuvens, capazes de alterar localmente a densidade de partículas.

As zonas das nuvens moleculares e difusas que, devido a perturbações externas vêm a sua densidade de partículas aumentada, sem um aumento significativo da temperatura, colapsam, atraindo partículas ao seu redor, formando corpos que se designam por fragmentos. À medida que as partículas caem em direcção ao fragmento a sua energia potencial diminui, logo, obedecendo ao Princípio de Conservação de Energia, a energia cinética aumenta, levando a um aumento das colisões entre partículas e conseqüente aumento de temperatura. A radiação emitida resultante do aumento de temperatura do fragmento, fica aprisionada nas camadas exteriores de gás que o envolve que, sendo opaco à radiação, permite um aumento significativo da temperatura do fragmento. A luminosidade do fragmento é cerca de 10 a 100 vezes superior à luminosidade da respectiva estrela na sequência principal, embora a temperatura seja inferior. Isto acontece porque o fragmento possui uma área de superfície muito grande, que contrabalança a temperatura da sua superfície, de acordo com a lei de Stefan-Boltzmann:

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4 \quad (2)$$

Os fragmentos continuam a atrair partículas da nuvem molecular ou difusa e a aumentar de tamanho e temperatura até que chegam a um ponto em que é inevitável a evolução para uma estrela na sequência principal. Por esta razão, o fragmento passa a ser designado por protostrela.

A evolução da protostrela para uma estrela na sequência principal é descrita pelos trilhos de Hayashi, assim designados, em honra do astrofísico japonês Chushiro Hayashi, pelo seu estudo sobre a evolução estelar pré-sequência principal.

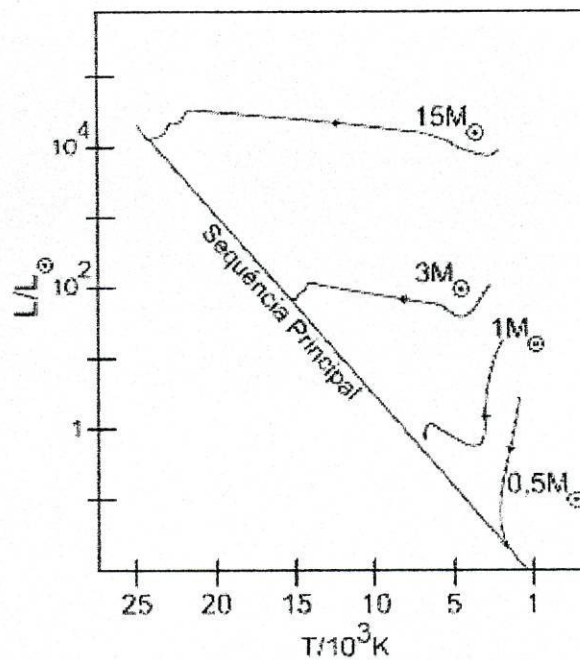


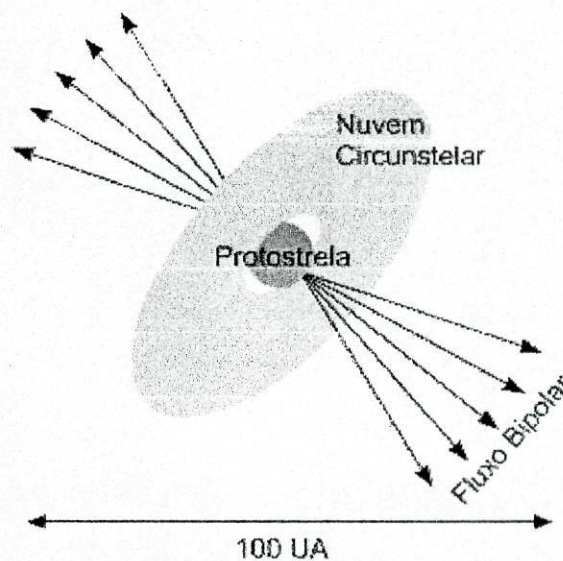
Figura 2 - Trilhos de Hayashi

As partículas que caem sobre as protostrelas pouco maciças, estão sujeitas a uma atracção gravítica relativamente baixa. Desta forma, resulta um colapso gravitacional lento que imprime um aumento, também ele lento, da temperatura da superfície da protostrela. A radiação electromagnética produzida pelas colisões é capaz de escapar através das camadas que envolvem a protostrela. Sendo uma radiação de baixa frequência, verifica-se um aumento pouco significativo da temperatura da protostrela. Como a diminuição da superfície da protostrela supera o aumento de temperatura, assiste-se, para estrelas pouco maciças, uma diminuição da luminosidade.

Para protostrelas com massas  $M > M_{\odot}$ , as partículas encontram-se sujeitas a uma elevada atracção gravítica, que resulta, num forte aumento da temperatura. As colisões entre partículas são suficientemente energéticas para que a radiação electromagnética, com frequências elevadas, seja capturada pelas camadas exteriores da protostrelas, aumentando ainda mais a sua temperatura. Como se verifica um equilíbrio entre a diminuição da superfície e aumento da temperatura da protostrela, a luminosidade desta pouco varia.

Ao aproximar-se da sequência principal a protostrela sofre uma quebra na sua luminosidade devido ao domínio do colapso gravitacional sobre a temperatura superficial.

Durante o colapso gravitacional muitas protostrelas evidenciam um fluxo bipolar de gás, viajando a velocidades da ordem de  $50 \text{ km/s}$  (cerca de  $180\,000 \text{ km/h}$ ) que se estendem por  $\sim 100 \text{ UA}$  ( $1,5 \times 10^{10} \text{ km}$ ). Estes fluxos bipolares requerem muita energia e levam consigo uma quantidade significativa de matéria, tipicamente metade da massa da futura estrela, durante um período relativamente curto de alguns milhares de anos. A matéria que vai sendo atraída forma um disco circunestelar de acreção, caindo de forma espiralada sobre a estrela.



**Figura 3 - Diagrama de protostrela**

A interacção entre o disco circunestelar e a protostrela faz aumentar a velocidade de rotação desta, podendo dar origem à sua destruição. Para que a velocidade de rotação da protostrela se mantenha dentro de níveis que permitam a sua evolução, esta tem de perder massa e fá-lo através do fluxo bipolar. O vento estelar é canalizado pelo disco circunestelar e pelos complexos campos magnéticos produzidos quer pelo disco quer pela protostrela sendo expulso, preferencialmente, ao longo do eixo de rotação.

Ao longo deste processo de colapso, apenas uma pequena parte da massa das nuvens moleculares e difusas é transformada em estrelas. O restante dessa massa pode-se associar à massa de outras nuvens para formar nuvens gigantes e complexas que podem posteriormente originar outras estrelas.

Na fase final de protostrela, o aumento de temperatura atinge um ponto crítico  $T \sim 5 \times 10^6 K$ , o ponto em que se dá início à fusão nuclear do hidrogénio no núcleo. Quando se inicia a fusão, a protostrela transforma-se, por direito próprio, numa nova estrela da sequência principal.

## 1.2. As estrelas durante a sequência principal

Uma das grandes ferramentas para o estudo da evolução estelar, o diagrama de Hertzsprung-Russel, surgiu por volta de 1910 quando Ejnar Hertzsprung e Henry Russell estudaram a relação entre a magnitude absoluta (brilho intrínseco de uma estrela) e o tipo espectral de estrelas. Surpreendentemente, verificou-se que as estrelas ocupam, preferencialmente, posições ao longo de uma curva diagonal (a que se deu o nome de sequência principal) e não uma distribuição uniforme.

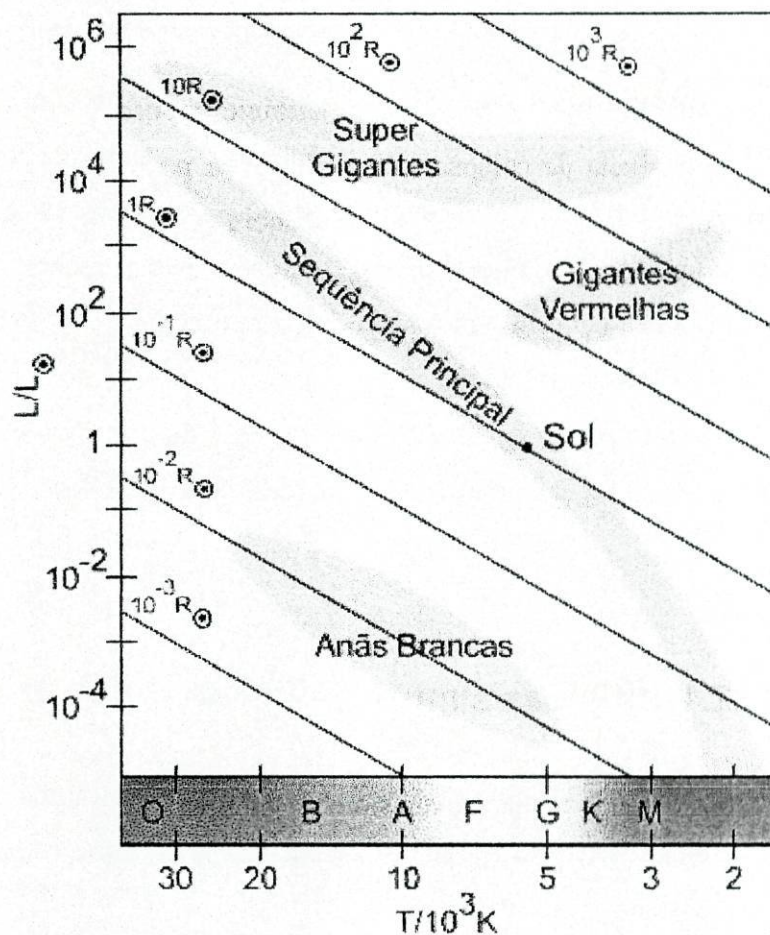


Figura 4 - Diagrama de Hertzsprung-Russel

Num dos eixos do diagrama encontra-se a classificação espectral (O, B, A, F, G, K, M) das estrelas, iniciada por Henry Draper em 1872 e continuada pelo Observatório de Harvard. Esta classificação baseia-se em linhas espectrais sensíveis à temperatura estelar como por exemplo: série de Balmer, He, Fe, etc.

Tipo de estrelas	Temperatura de superfície (K)	Cor
O	20.000-35.000	Azul
B	~ 15.000	Azul-branco
A	~ 9.000	Branco
F	~ 7.000	Amarelo-branco
G	~ 5.500	Amarelo
K	~ 4000	Laranja
M	~ 3000	Vermelho

Tabela 2 – Características da classificação espectral

Embora surja um factor novo e bastante importante como a fusão nuclear, a estrela continua a tendência de colapsar sobre si mesma por efeito da força gravítica. As camadas superiores de matéria da estrela exercem sobre as camadas inferiores uma pressão. Parece portanto natural concluir que a pressão numa estrela aumenta com a profundidade. Este gradiente de pressão dá origem a uma força que actua no sentido da superfície da estrela contrariando o colapso gravitacional.

Como as estrelas são um sistema em perda de energia tem de haver um gradiente de temperatura, sendo a temperatura das camadas externas inferior à temperatura das camadas internas.

### 1.2.1. Algumas simples deduções sobre as estrelas

Considerando a estrela com simetria esférica e constituída por um gás ideal, partículas ionizadas e electrões livres, podemos determinar a seguinte relação entre a temperatura do núcleo e a massa de uma estrela<sup>2</sup>:

$$T \propto \frac{M}{R} \quad (3)$$

<sup>2</sup> A dedução desta relação encontra-se em Apêndice B

Também a relação entre a massa e a luminosidade, descoberta por Arthur Eddington, pode ser obtida considerando a expressão anterior e a lei de Stefan-Boltzmann:

$$L \propto \frac{M^4}{R^2} \quad (4)$$

A partir das duas últimas relações, conclui-se que quanta mais maciça é a estrela, maiores são a sua temperatura e luminosidade.

Poderia pensar-se que uma estrela maciça tem uma fase de sequência principal mais longa porque a quantidade de combustível nuclear disponível é maior. No entanto, para contrariar o colapso gravitacional, uma estrela maciça tem de produzir uma maior quantidade de energia através de um elevado número de reacções nucleares, isto é, quanto maior for a estrela menor será a sua “esperança de vida”.

Alguns valores típicos para algumas estrelas encontram-se na seguinte tabela:

Massa da estrela ( $M_{\odot}$ )	Tempo de vida ( $10^9$ anos)
0,5	~100
1	~10
2	~0,8
5	~0,075
10	~0,02

Tabela 3 – Alguns valores típicos da “esperança de vida” das estrelas

### 1.2.2. A fusão nuclear

As estrelas, ao longo do período de tempo em que se encontram na fase de sequência principal, produzem e libertam grandes quantidades de energia. O único processo capaz de produzir tão grandes quantidades de energia é o da fusão nuclear. Tipicamente, numa estrela, tal como o Sol, cerca de 92% do total de partículas são núcleos de hidrogénio, 7,8% são núcleos de hélio e 0,2% de outros elementos. Para que a fusão ocorra, os núcleos atómicos têm de ser acelerados a velocidades elevadíssimas. Como os núcleos de hidrogénio são os mais leves, a energia necessária para que atinjam velocidades elevadas tem de ser menor, pelo que, a fusão dos núcleos de hidrogénio ocorre a temperaturas inferiores. No entanto se determinarmos a energia cinética média dos núcleos de hidrogénio no interior do Sol, usando a expressão:

$$E_c = \frac{3}{2}KT \quad (5)$$

onde  $K$  representa a constante de Boltzmann e  $T$  a temperatura, e a energia potencial eléctrica responsável pela repulsão entre partículas com a mesma carga, usando a expressão:

$$E_U = K_0 \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r}, \quad (6)$$

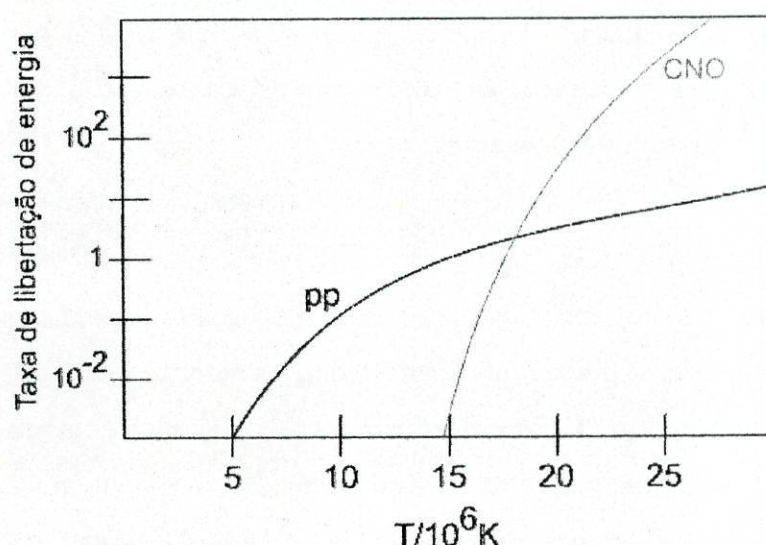
verifica-se que a energia cinética das partículas é cerca de mil vezes menor do que a energia de repulsão entre partículas. De acordo com a Física Clássica, o processo de fusão nuclear para temperaturas típicas dos núcleos estelares é impossível. Mas de acordo com a Física Quântica existe uma probabilidade não nula, embora muito pequena, de os núcleos se aproximarem o suficiente para que ocorra a fusão nuclear<sup>3</sup>.

Globalmente, no processo de fusão nuclear do hidrogénio, quatro núcleos de hidrogénio colidem dando origem a um núcleo de hélio libertando dois positrões (partículas semelhantes aos electrões mas cuja carga eléctrica é positiva), dois neutrinos e radiação gama. Tipicamente, a fusão do hidrogénio tem três canais de actuação, as cadeias pp. Outra cadeia de reacções importantes, presentes no núcleo estelar designa-se por ciclo CNO e actua nas

<sup>3</sup> Os cálculos que apoiam esta conclusão encontram-se em Apêndice C

estrelas maciças de 2ª geração. A presença de C e N actua como catalizador da fusão do H. Quer as cadeias pp, quer o ciclo CNO, estão representados nas figuras da página 15.

As quatro cadeias de reacções de fusão nuclear encontram-se presentes em todas as estrelas embora a sua influência varie com a temperatura do núcleo estelar. Assim, para estrelas como o Sol, com temperaturas do núcleo estelar inferiores a  $18 \times 10^6$  K (correspondendo a massas estelares inferiores a  $1,5 M_{\odot}$ ), a energia produzida tem a sua origem nas cadeias pp. Em estrelas maciças, com temperaturas do núcleo estelar superiores a  $1,8 \times 10^6$  K, o ciclo CNO passa a dominar a produção de energia sobrepondo-se às cadeias pp, como representado no seguinte gráfico:



**Figura 5 – A importância das cadeias pp e ciclo CNO em função da temperatura**

Como a taxa de reacções de fusão nuclear é bastante sensível à variação de temperatura, a fronteira do núcleo estelar (por definição, o local na estrela onde ocorre fusão) encontra-se bem definida.

Existem dois mecanismos de transporte de energia presentes nas estrelas, são eles:

- Radiação** – neste processo a energia é transportada através de radiação electromagnética (fotões). Este tipo de mecanismo não necessita de um meio para actuar podendo ocorrer no vácuo.
- Convecção** – neste processo o transporte de energia faz-se através da deslocação da matéria. Tal como na água a ferver, a matéria quente do interior do Sol sobe até à superfície enquanto a matéria fria da superfície se afunda no interior da estrela. Enquanto na superfície a matéria quente vai arrefecendo (por libertação de energia

para o espaço) a matéria fria (próxima do núcleo) vai aquecendo até que o processo se repita novamente.

Para estrelas cuja massa é inferior a  $1,5 M_{\odot}$  a diferença entre a temperatura no centro e na “superfície” do núcleo estelar não é suficiente para que o transporte de energia se faça por convecção. Para este tipo de estrelas o transporte de energia é um processo radiativo. Na zona imediatamente exterior ao núcleo estelar o transporte de energia faz-se também pelo processo radiativo pela mesma razão que se passa no núcleo. Mas numa zona envolvente que chega até à superfície da estrela o gradiente de temperatura é suficiente para que o transporte de energia se faça por convecção. A esta zona dá-se o nome de envelope convectivo.

Para estrelas com massa superiores a  $1,5 M_{\odot}$ , existe um gradiente de temperatura suficientemente elevado, entre o centro e a superfície do núcleo estelar para que o transporte de energia seja por convecção. Da zona envolvente do núcleo até à superfície da estrela o processo de transporte de energia é radiativo.

Como o núcleo estelar se encontra a densidades elevadíssimas, os fotões de raios- $\gamma$  produzidos nas cadeias pp avançam através do material estelar sendo dispersados ou absorvidos e reemitidos pelas partículas presentes no núcleo. Como os fotões emergentes têm praticamente igual probabilidade em seguir qualquer direcção, o seu progresso toma a forma de passeio aleatório. A dispersão dos fotões- $\gamma$  redistribui a energia pelas partículas do plasma estelar. Desta forma, estes fotões vão perdendo energia até atingirem a superfície da estrela (demorando  $\sim 10^6$  anos<sup>4</sup>), razão pela qual, os fotões emitidos pela superfície da estrela têm frequências na zona do visível no espectro electromagnético e são consequentemente menos energéticos. O único produto da fusão nuclear que não partilha energia com o plasma do núcleo estelar é o neutrino devido à sua dificuldade em interagir com outras partículas. Além da emissão de neutrinos e radiação electromagnética, as estrelas libertam um fluxo constante de plasma, composto por protões, electrões e núcleos de hélio ao longo das linhas de campo magnético que conduzem ao meio interestelar. A este fluxo dá-se o nome de vento estelar (ou vento solar, no caso do Sol) que é responsável pela perda de cerca de  $10^{-4} M_{\odot}$  (no caso do Sol) ao longo de todo o período da sequência principal.

---

<sup>4</sup> O cálculo desta estimativa encontra-se no apêndice E.

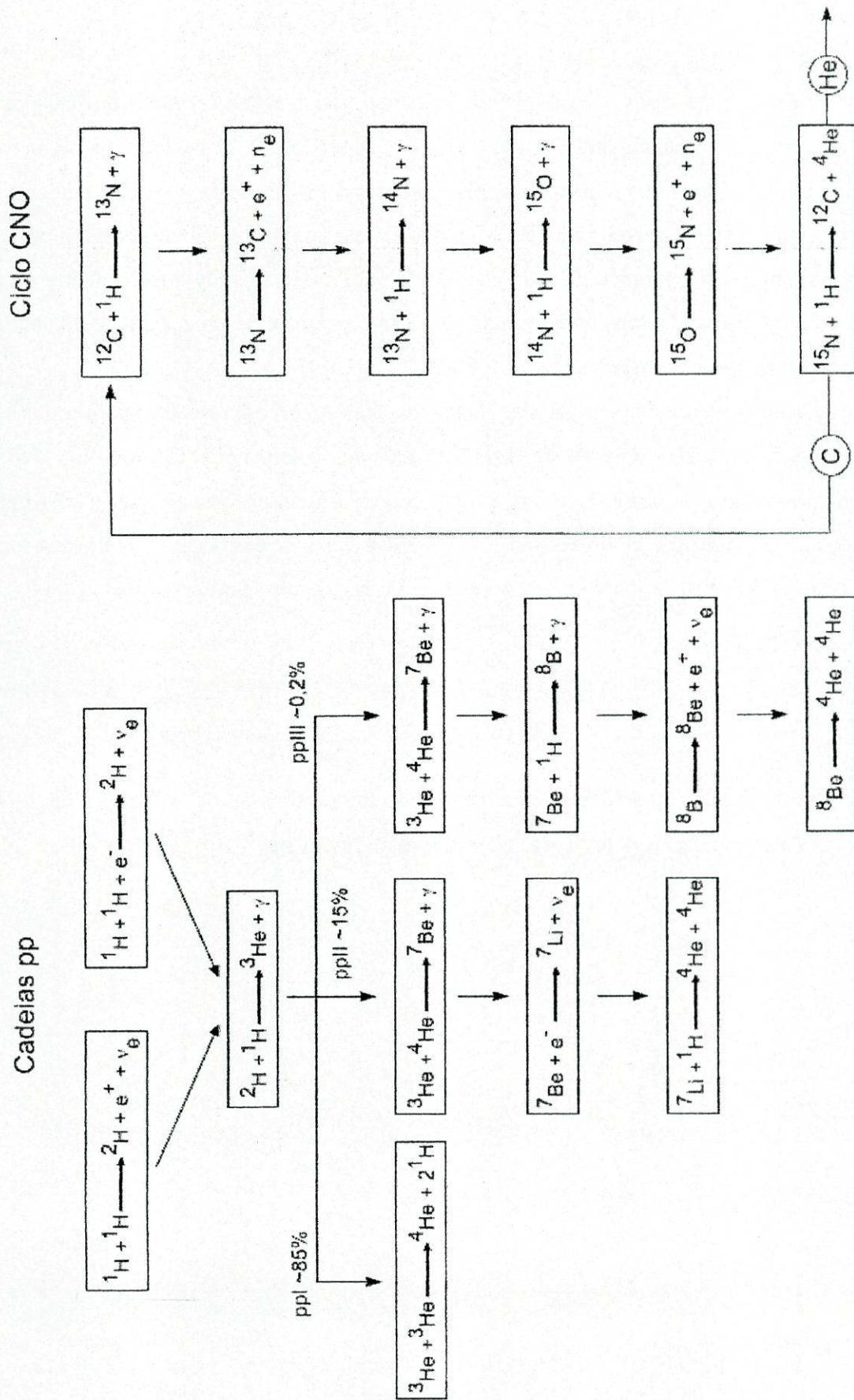


Figura 6 - Descrição das cadeias pp e do ciclo CNO

### 1.2.3. Extremos da sequência principal

Num dos extremos da sequência principal existem objectos formados por colapso gravitacional com massas inferiores a  $0,08 M_{\odot}$ . Abaixo deste valor, a temperatura e a pressão nas regiões centrais dos objectos são insuficientes para desencadear no seu núcleo a fusão do hidrogénio. Estes objectos radiam para o espaço energia que se situa na região infravermelha do espectro electromagnético. A radiação dissipa a energia residual proveniente da formação do objecto. Estes objectos designam-se por anãs castanhas, designação atribuída pelo facto de emitirem radiação infravermelha.

No outro extremo, para estrelas super maciças e ao contrário da maioria das estrelas, a pressão de radiação é a responsável pela oposição ao colapso gravitacional. Em estrelas como o Sol a pressão de radiação é largamente superada pela pressão do gás, razão pela qual, a pressão de radiação é negligenciada. Mas em estrelas maciças, logo com elevada temperatura e uma vez que a pressão de radiação varia de acordo com a seguinte expressão<sup>5</sup>:

$$P = \frac{1}{3} \alpha T^4 \quad (7)$$

a pressão de radiação sobrepõe-se à pressão do gás. A pressão de radiação pode tornar-se tão intensa que as estrelas com  $M > 100 M_{\odot}$  se tornam inviáveis.

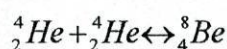
---

<sup>5</sup> A dedução encontra-se em Apêndice D.

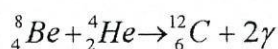
### 1.3. O princípio do fim

Durante a fase de sequência principal, as estrelas produzem energia a partir da fusão nuclear do hidrogénio no núcleo estelar. Para estrelas com massas  $M < 1,5 M_{\odot}$ , o transporte de energia faz-se através do processo radiativo, o que significa que o núcleo não se reabastece com hidrogénio das camadas envolventes. No caso das estrelas com massas  $M > 1,5 M_{\odot}$ , o transporte de energia faz-se por convecção, no entanto só uma fina camada imediatamente a seguir ao núcleo tem capacidade de o reabastecer. Como resultado do não reabastecimento, apenas o hidrogénio existente no núcleo estelar (cerca de 10% da massa da estrela) é utilizado na produção de energia por fusão nuclear. Quando todo o hidrogénio é consumido, o núcleo estelar começa a contrair-se lentamente uma vez que não produz energia para criar um gradiente de pressão capaz de suportar a pressão exercida pelas camadas envolventes. À medida que o núcleo estelar se contrai a sua temperatura aumenta. As camadas constituídas por hidrogénio que envolvem o núcleo atingem uma temperatura que permite a fusão nuclear do hidrogénio. A fusão nuclear do hidrogénio na camada envolvente do núcleo estelar, produz energia responsável pelo aumento do colapso do núcleo estelar e pela expansão das camadas exteriores da estrela. A temperatura do núcleo estelar aumenta cerca de dez vezes, o diâmetro da estrela aumenta também dez vezes, enquanto a sua temperatura superficial diminui. A estrela brilha com uma cor vermelha – alaranjada, razão pela qual se dá o nome de Gigante Vermelha.

Quando a temperatura do núcleo atinge aproximadamente  $10^8$  K torna-se possível a fusão nuclear do hélio (produto da reacção de fusão nuclear do hidrogénio). Na fusão nuclear do hélio, dois núcleos de hélio fundem-se dando origem a um núcleo de berílio. No entanto o núcleo de berílio é bastante instável decaindo quase imediatamente em dois núcleos de hélio (de notar, o carácter reversível da equação e o facto de nesta reacção não haver libertação de energia). Esta reacção está representada na seguinte equação:

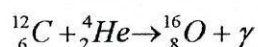


Antes de decair, o núcleo de berílio pode reagir com outro núcleo de hélio dando origem a um núcleo de carbono e conseqüente libertação de radiação gama:



Este processo, a que se dá o nome de reacção triplo- $\alpha$ , pára a contracção do núcleo e estabiliza a estrela. A energia libertada nesta reacção de fusão nuclear é cerca de 10% da energia libertada numa reacção de fusão de núcleos de hidrogénio. Como nesta fase a luminosidade da estrela é maior, esta necessita de uma maior taxa de reacções de fusão nuclear do hélio, o que se traduz num período de tempo para a fase de gigante vermelha consideravelmente menor do que o período de tempo em que ocorre a sequência principal.

Além das reacções referidas, outras podem ocorrer no núcleo estelar. Se o núcleo de carbono capturar um núcleo de hélio pode dar origem a um núcleo de oxigénio com consequente libertação de raios gama através da seguinte reacção:



A fusão dos núcleos de hélio e dos seus produtos nas gigantes vermelhas está na origem da maior parte do oxigénio e carbono do Universo. Outra reacção de fusão nuclear permite a produção de núcleos de néon, no entanto, esta é uma reacção quase inexistente.

Para gigantes com massas  $M < 8M_{\odot}$  a temperatura no núcleo estelar não é suficientemente alta para que ocorram reacções de fusão nuclear capazes de produzir núcleos de elementos mais pesados do que o carbono ou oxigénio. Quando o hélio se esgota, o núcleo estelar começa a contrair-se, aumentando a sua temperatura, assim como, a temperatura da camada envolvente. O núcleo estelar passa a um estado dormente (onde não existem reacções de fusão nuclear) e a camada envolvente aquece o suficiente para dar origem à fusão dos núcleos de hélio, resultando numa maior compressão do núcleo e expansão das camadas exteriores da estrela. Uma vez que a camada envolvente não consegue expandir, a sua temperatura aumenta cada vez mais até se verificar uma rápida libertação de energia, designada por impulso térmico. Como consequência do impulso térmico os núcleos dos elementos presentes na camada envolvente capturam neutrões lentamente, num processo designado por processo -S. Durante o processo -S ("slow", lento) o decaimento radioactivo de núcleos como o  ${}^{13}\text{Be}$  e  ${}^{14}\text{C}$  liberta neutrões que podem ser capturados facilmente porque não existe uma barreira de potencial de Coulomb. Dada a baixa densidade de neutrões, este

processo não é capaz de produzir elementos radioactivos com números de massa superior ao  ${}_{83}^{209}\text{Bi}$ .

As estrelas com massas  $M > 8 M_{\odot}$  evoluem para a forma de Super-gigante. Estas estrelas evoluem de forma semelhante às estrelas menos maciças, no entanto, verifica-se a ocorrência dos três tipos de reacções nucleares, atrás descritos, simultaneamente. Ao contrário das Gigantes Vermelhas, as Super-gigantes podem ter várias cores, como consequência da temperatura da superfície, que depende não só da massa da estrela mas também da taxa de perda de matéria através do vento estelar. Para as estrelas super gigantes as reacções de fusão nuclear não param com a fusão do hélio mas continuam até à produção de núcleos de ferro<sup>6</sup>.

As estrelas passam cada vez menos tempo em cada uma das fases de fusão no núcleo estelar. Na tabela seguinte representam-se algumas propriedades de uma estrela de  $M = 25M_{\odot}$ .

Fase de fusão	$L_R (L_{\odot})$	$L_N (L_{\odot})$	$T_s (K)$	R (km)	Duração
H	$7,8 \times 10^4$	-	39800	$4,2 \times 10^{11}$	$1 \times 10^7$ anos
He	$2,4 \times 10^5$	18,3	15800	$4,7 \times 10^{12}$	$6,7 \times 10^5$ anos
C	$3 \times 10^5$	$2,5 \times 10^6$	4360	$6,7 \times 10^{13}$	$1,6 \times 10^2$ anos
Ne	$3 \times 10^5$	$2,0 \times 10^9$	4360	$6,7 \times 10^{13}$	1,2 anos
O	$3 \times 10^5$	$5,8 \times 10^9$	4360	$6,7 \times 10^{13}$	26 semanas
Si	$3 \times 10^5$	$9,5 \times 10^{11}$	4360	$6,7 \times 10^{13}$	1,4 semanas
Colapso	$3 \times 10^5$	$2,0 \times 10^{15}$	4360	$6,7 \times 10^{13}$	0,35 segundos

Tabela 4 - Algumas propriedades de uma estrela maciça ( $M = 25M_{\odot}$ )

( $L_R$  e  $L_N$  representam as luminosidades de radiação e de neutrinos, respectivamente, e  $T_s$  representa a temperatura de superfície)

Quando o núcleo estelar é constituído apenas por ferro as reacções de fusão nuclear cessam. Isto acontece porque, para núcleos com massa atómica superior à do ferro as reacções de fusão deixam de ser reacções exotérmicas (reacções que libertam energia) e passam a ser reacções endotérmicas (reacções que necessitam de energia para ocorrer).

<sup>6</sup> As restantes reacções que ocorrem nas supergigantes encontram-se descritas em Apêndice F.

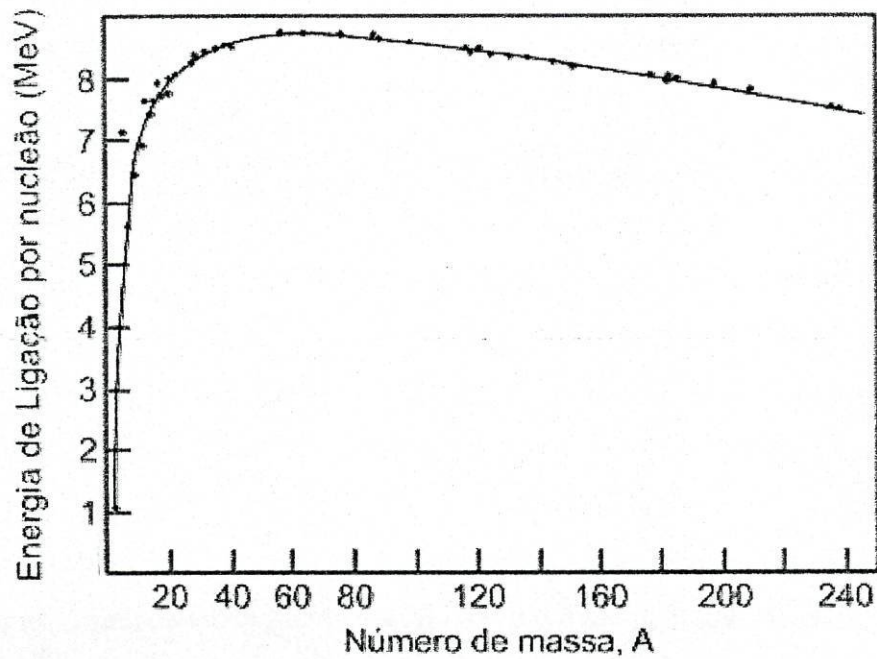


Figura 7 – Gráfico da energia de ligação por nucleão para vários elementos químicos

A super gigante consiste numa série de camadas sobrepostas em que cada uma possui núcleos de elementos mais leves à medida que avançamos em direcção à superfície.

Para estrelas com massas muito elevadas, massas superiores a  $50 M_{\odot}$ , as suas camadas exteriores expandem-se de tal forma que deixam o núcleo estelar completamente exposto. Não existindo uma camada de material estelar envolvendo o núcleo, as reacções de fusão nuclear cessam quando cessa o ciclo CNO (principal cadeia de reacções de fusão nuclear em estrelas maciças).

## 1.4. O fim das estrelas

### 1.4.1. Estrelas pouco maciças

Em estrelas com massas  $M < 11 M_{\odot}$ , sem reacções de fusão nuclear que impeçam o colapso gravitacional, o núcleo contrai-se alcançando densidades elevadíssimas e criando condições para a degenerescência dos electrões. Na matéria degenerada electronicamente, os electrões são obrigados por elevadas forças de pressão a ocupar os mesmos estados quânticos. Mas, de acordo com o Princípio de Exclusão de Pauli apenas um electrão pode ocupar um estado quântico. Não podendo os electrões violar este princípio surge uma força de pressão electrónica de degenerescência (também designada por pressão de Fermi) que se opõe ao colapso dando origem a uma estrela estável – uma anã branca.

O limite máximo da massa de uma anã branca é de cerca de  $1,4 M_{\odot}$ , designado por limite de Chandrasekhar<sup>7</sup>, acima do qual a pressão devida à degenerescência dos electrões é incapaz de contrariar o colapso do núcleo. Consoante o produto da última cadeia de reacções de fusão nuclear, podemos obter anãs brancas com núcleos em C, O, Ne ou Mg. Como as reacções de fusão nuclear dependem da massa da estrela, quanto mais maciça (dentro do limite de Chandrasekhar) for a estrela, maior será o número de massa dos núcleos que compõem o núcleo da anã branca.

A anã branca tem um tamanho aproximadamente igual ao da Terra com uma massa de cerca de  $0,5 M_{\odot}$ , uma baixa luminosidade devido ao seu pequeno tamanho e uma temperatura de superfície que varia de  $5\,000\text{ K}$  a  $25\,000\text{ K}$ .

Como a luminosidade da anã branca é baixa esta perde energia muito lentamente. Após se constituir anã branca a estrela arrefece e dissipa-se por períodos de  $10^9$  anos ou mais.

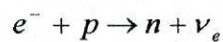
### 1.4.2. Estrelas maciças

Para estrelas maciças, uma vez que os núcleos atómicos do grupo do ferro são os mais estáveis, a estrela deixa de produzir energia a partir de reacções de fusão nuclear. Deste modo, o núcleo estelar começa a contrair-se de tal forma, que a densidade do núcleo aumenta o suficiente para permitir a degenerescência dos electrões. A pressão exercida pela

---

<sup>7</sup> A dedução do limite de Chandrasekhar encontra-se no Apêndice G

degenerescência dos electrões é incapaz de suster o colapso gravitacional do núcleo. A maioria das estrelas que na sequência principal possuem massas superiores a  $11 M_{\odot}$  vêem os seus núcleos superarem o limite de Chandrasekhar na fase final das suas vidas. Assim sendo, embora a contracção do núcleo tenha a oposição da pressão de degenerescência dos electrões, o processo de contracção continua e a temperatura aumenta até cerca de  $10^{10} K$ . A esta temperatura os núcleos de ferro começam a fotodesintegrar-se produzindo núcleos de hélio, prótons e neutrões. O processo de fotodesintegração retira energia do sistema, no entanto o núcleo continua a colapsar chegando a fazê-lo a velocidades supersónicas! Com o contínuo colapso do núcleo, os electrões degenerados vêem-se forçados a entrar dentro dos núcleos atômicos onde ocorre a seguinte reacção:



Finalmente o núcleo estelar pára de colapsar a uma temperatura de  $10^{12} K$  e densidade de aproximadamente  $10^{17} Kg/m^3$  (equivalente à densidade do núcleo do átomo)! O colapso do núcleo pára porque a estas densidades surge uma nova forma de degenerescência, a degenerescência dos neutrões. Embora o colapso do núcleo pare devido à pressão de degenerescência dos neutrões, causada pela tentativa de violação do Princípio de Exclusão de Pauli para fermiões (dois fermiões não podem ocupar o mesmo estado quântico), as camadas exteriores continuam a colapsar a velocidades da ordem das dezenas de milhares de quilómetros por segundo produzindo uma onda de choque e fazendo com que as camadas externas constituídas por núcleos de elementos leves se expandam. A temperatura destas camadas exteriores pode atingir os  $10^{10} K$  iniciando reacções de fusão nuclear que libertam grandes quantidades de energia expandindo ainda mais as camadas exteriores. Ao núcleo desta estrela, suportado pela pressão de degenerescência dos neutrões dá-se o nome de estrela de neutrões.

Com uma massa entre  $1,4 M_{\odot}$  (limite de Chandrasekhar) e  $3 M_{\odot}$  (limite de Oppenheimer-Volkoff) e um raio de apenas alguns quilómetros, a estrela liberta uma grande quantidade de energia (energia potencial gravítica) no colapso do núcleo estelar dando origem a uma gigantesca explosão que dura apenas alguns segundos. Neste período, a luminosidade da estrela aumenta cerca de cem milhões de vezes. A esta gigantesca explosão dá-se o nome de supernova.

Poucas supernovas foram observadas, em especial a olho nu. A tabela 5 (na página seguinte), representa as supernovas observadas e registadas desde o tempo das Antigas Civilizações. Embora a luminosidade da estrela aumente cerca de 100 milhões de vezes

durante a supernova, a maior parte da energia é libertada através de neutrinos. A energia libertada pelos neutrinos ( $\sim 10^{46}$  J/s) é cerca de 10 mil vezes superior à energia libertada através de radiação electromagnética.

As estrelas na sua fase de sequência principal produzem elementos pesados, mas todos os elementos e respectivos isótopos, existentes no Universo, são produzidos durante o instante em que ocorre a supernova. Com uma fonte abundante de neutrões provenientes do núcleo de ferro e temperaturas de  $10^{10}$  K todos os elementos podem ser produzidos e alguns destes pela captura de neutrões dão origem aos isótopos dos elementos.

Data (DC)	Constelação	Brilho Relativo	Diâmetro (kpc)	Observada por
185	Centauro	> Vénus (-6)	2,5	Chineses
396	Cassiopeia	> Júpiter (-3)	10	Chineses
1006	Lupus	> Vénus (-5)	3,3	Europeus e Árabes
1054	Caranguejo	> Vénus (-5)	2	Chineses e Árabes
1572	Cassiopeia	~ Vénus (-4)	5	Tycho et al.
1604	Ophiuchus	> Sirius (-2)	6	Kepler et al.
1987	GNM	+3	50	Ian Shelton

Tabela 5 - Supernovas observadas a olho nu ao longo dos tempos

Quanto às estrelas de neutrões, além da elevada massa e pequeno raio, apresentam outras características exóticas, tais como, períodos de rotação de alguns milissegundos e campos magnéticos da ordem dos  $10^8$  T (tesla). Algumas estrelas de neutrões emitem radiação com frequência de rádio ao longo do eixo magnético como demonstra a figura.

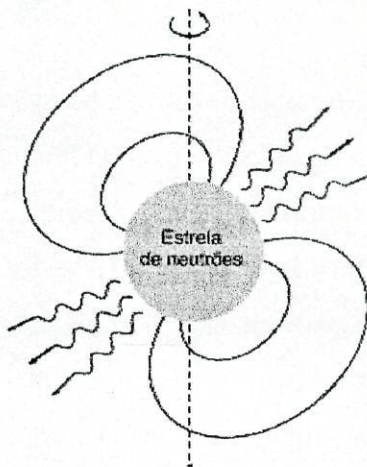


Figura 8 – Estrela de neutrões

A estas estrelas dá-se o nome de pulsar (pulsating radio source – fonte de rádio pulsante). Embora os astrónomos não conheçam exactamente o processo, a energia libertada pelo pulsar tem origem na sua energia cinética rotacional. Assim sendo, o pulsar vai lentamente perdendo velocidade de rotação acabando por terminar a emissão de ondas de rádio tornando-se invisível. Para alguns pulsares a companhia de uma estrela desprevenida, permite a captura de matéria estelar que aumentará a velocidade de rotação iniciando novamente a emissão de ondas de rádio.

Para estrelas que possuam, após a fase de supernova, uma massa  $M > 3 M_{\odot}$ , a pressão de degenerescência de neutrões não é capaz de suportar o colapso gravitacional. Na verdade, não existe nenhum mecanismo capaz de contrariar o colapso gravitacional do núcleo, de modo que este se torna cada vez mais pequeno sendo cada vez maior a força gravítica à sua superfície.

A velocidade de escape, isto é, a velocidade que um corpo deve ter para escapar à atracção gravítica exercida sobre si por um outro corpo, aumenta com o aumento da força gravítica. Quando o valor da velocidade de escape do núcleo atinge o valor da velocidade da luz no vazio, o núcleo estelar torna-se num buraco negro. Uma vez que, de acordo com a Teoria da Relatividade, nada no Universo consegue atingir uma velocidade superior à velocidade da luz, nada escapa ao abraço gravitacional de um buraco negro. Utilizando a velocidade da luz como a máxima velocidade possível para um determinado corpo podemos determinar o raio que um núcleo com massa  $M$  deve atingir para que se torne num buraco negro, através da seguinte expressão:

$$R_s = \frac{2GM}{c^2} \quad (8)$$

A este raio dá-se o nome de raio de Schwarzschild. Este raio define uma região que se designa por horizonte de acontecimentos. O buraco negro continuará a colapsar até se tornar num ponto de densidade infinita a que se dá o nome de singularidade.

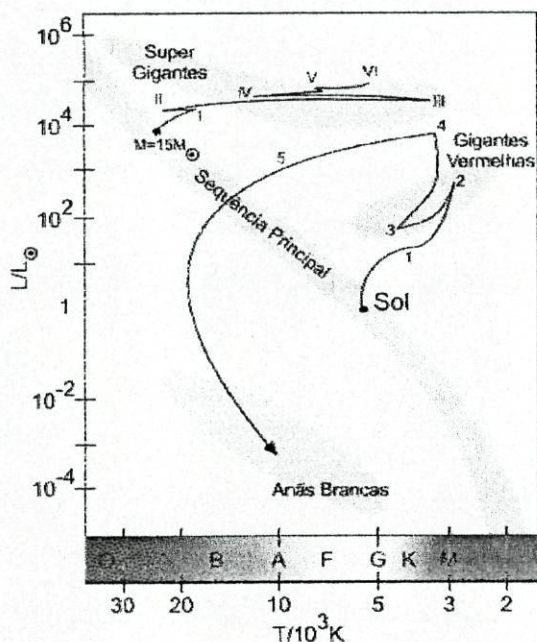
Nos anos 70, Stephen Hawking descobriu que os buracos negros podem emitir radiação que se designa por radiação de Hawking. Um buraco negro não pode fugir ao poder da sempre presente Termodinâmica. Quando a matéria circundante cai sobre um buraco negro a sua entropia aumenta. Como todos os corpos com entropia possuem temperatura e como todos os corpos com temperatura radiam energia, o buraco negro tem de emitir energia. Isso

acontece quando pares de partículas virtuais são produzidas na vizinhança do horizonte de acontecimentos de um buraco negro. Os pares de partículas virtuais tornam-se em pares de partículas não-virtuais devido à energia injectada no par pela curvatura do espaço-tempo em torno do buraco negro. Quando uma das partículas é atraída para o buraco negro a outra escapa-se para o espaço. Deste modo, o buraco negro perde uma pequena quantidade da sua massa. Para um observador, tudo se passaria como se a partícula fugitiva tivesse surgido do interior do buraco negro.

Na seguinte tabela e figura, em jeito de conclusão, encontra-se descrito o estado final de evolução das estrelas, consoante a sua massa inicial e os trilhos de evolução num diagrama de Hertzsprung-Russel para o Sol e uma estrela maciça.

Massa inicial ( $M_{\odot}$ )	Destino da estrela
$0,01 < M < 0,08$	Anã Castanha
$0,08 < M < 0,25$	Anã Branca (He)
$0,25 < M < 8$	Anã Branca (C-O)
$8 < M < 12$	Anã Branca (O-Ne-MG)
$12 < M < 40$	Supernova → Estrela de neutrões
$M > 40$	Supernova → Buraco Negro

Tabela 6 - Destinos das estrelas consoante a sua massa inicial



**Legenda do trilho do Sol**

1. Fusão da camada envolvente de H
2. Ignição do He
3. Fusão da camada envolvente de He
4. Núcleo de C inerte
5. Expansão das camadas externas que formarão nebulosas planetárias

**Legenda do trilho da estrela maciça**

- I. Ignição do He
- II. Fusão de He em camada envolvente
- III. Ignição do C
- IV. Fusão do C em camada envolvente
- V. Ignição do Ne
- VI. Evolução para Supernova

Figura 9 – Trilhos de evolução pós-sequência principal do Sol e de uma estrela maciça

## Capítulo 2

### 2.1. Matéria escura

Quando em 1933, Fritz Zwicky, um astrónomo suíço tentou estimar a massa de um enxame de galáxias com o nome de Coma, verificou a existência de uma discrepância significativa entre a estimativa obtida pela observação das fontes luminosas (estrelas) e a estimativa obtida pela observação do comportamento dinâmico do enxame. Esta última estimativa era cerca de 400 vezes superior à primeira. Este facto sugeria a existência de uma enorme quantidade de matéria não luminosa a que se deu o nome de matéria escura. Só nos anos 70 do século XX, os restantes astrónomos começaram a dar atenção a este facto realizando observações cujas conclusões apontavam também elas para a existência de matéria escura. Essas observações tinham como objecto de estudo os enxames de galáxias, as velocidades de rotação de estrelas em torno do eixo galáctico e fenómenos associados a lentes gravitacionais.

Nos enxames de galáxias grande parte da massa visível encontra-se sob a forma de gás muito quente com temperaturas da ordem dos  $10^7$ - $10^8$  K. A esta temperatura o gás encontra-se completamente ionizado e as partículas possuem velocidades relativistas, superiores à velocidade de escape dos enxames de galáxias considerando a massa estimada a partir da matéria luminosa (estrelas). Como o gás se encontra confinado pela força gravítica, a massa total do enxame terá de ser maior do que a massa luminosa para impedir as partículas de se escaparem.

Outra observação que sugere a existência de matéria escura surge da determinação da velocidade com que as estrelas rodam em torno do eixo de uma galáxia em espiral. Aplicando a Mecânica Newtoniana, a velocidade de translação de uma estrela é dada por:

$$v = \sqrt{\frac{MG}{r}} \quad (9)$$

A velocidade de uma estrela depende da massa da galáxia contida no volume interior da trajectória da estrela e da distância desta ao centro da galáxia. Supondo a densidade constante ( $\rho$ =constante) então a massa dentro do núcleo galáctico varia com:

$$M \propto r^3 \quad (10)$$

substituindo na expressão (10), conclui-se que a velocidade de uma estrela dentro do núcleo galáctico é proporcional à distância do centro da galáxia:

$$v \propto r \quad (11)$$

Para uma estrela fora do núcleo galáctico a massa a considerar é aproximadamente igual à massa da galáxia, logo a velocidade de uma estrela é inversamente proporcional à raiz quadrada da distância ao centro da galáxia:

$$v \propto \frac{1}{r^{1/2}} \quad (12)$$

Determinando os valores da velocidade das estrelas e comparando-os com os valores previstos pela Mecânica Clássica em função da distância obtemos o seguinte gráfico:

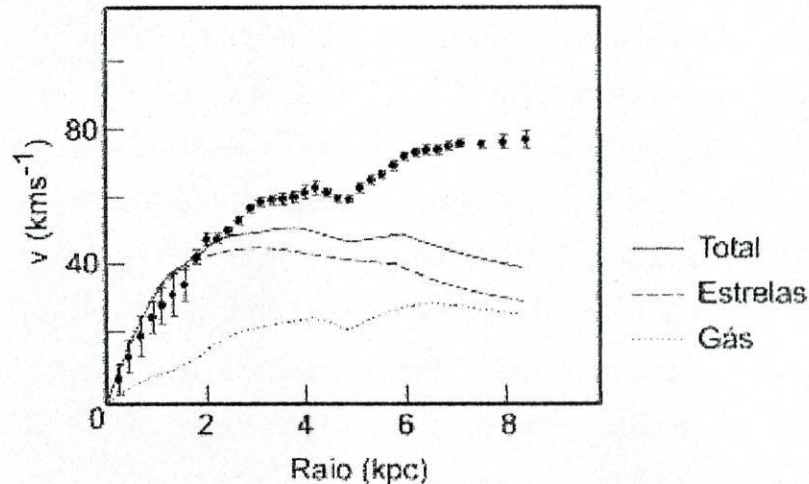
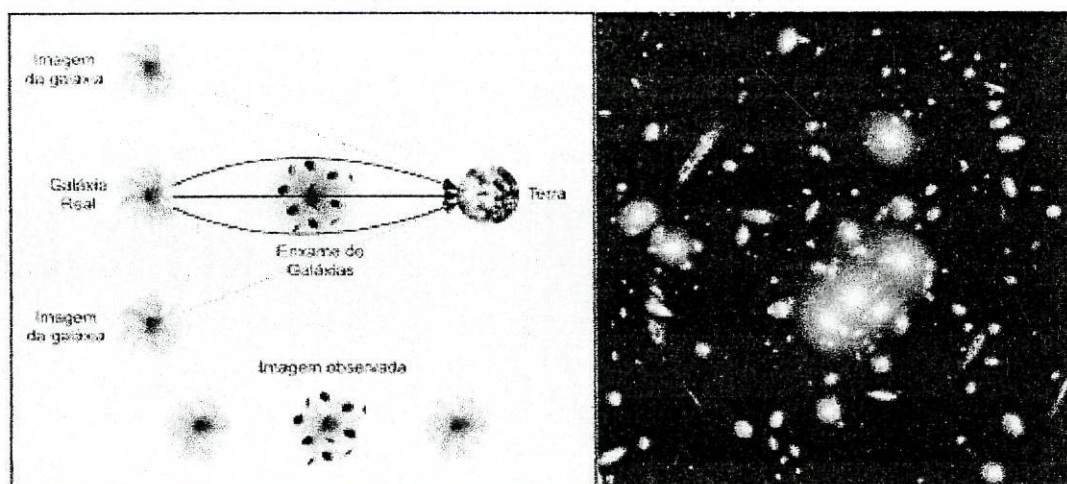


Figura 10 - Curvas de rotação das estrelas

Como se pode verificar na figura as velocidades das estrelas observadas são superiores às velocidades das estrelas obtidas teoricamente. Uma vez que a velocidade das estrelas depende da massa da galáxia, as galáxias devem possuir mais massa do que aquela estimada pela observação da matéria luminosa, isto é, as galáxias devem possuir uma quantidade de massa escura significativa, distribuída num halo envolvendo a galáxia.

Ao observar o Universo profundo, os astrónomos identificaram um fenómeno previsto pela Teoria Geral da Relatividade conhecido por lente gravitacional. Como foi referido atrás, a matéria curva o espaço de modo que objectos próximos muito maciços podem “dobrar” os raios de luz provenientes de corpos mais afastados. A seguinte imagem demonstra o efeito que corpos maciços têm sob a luz de galáxias mais distantes.



**Figura 91 - Diagrama e imagem de lentes gravitacionais.**

Uma vez que a luz se dobra devido à curvatura do espaço que se relaciona com a massa dos objectos (lentes), esta pode ser estimada desta forma.

Outra evidência para a matéria escura baseia-se na análise da nucleossíntese primordial. De acordo com as observações, a nucleossíntese primordial aponta para uma relação entre o número de bárions e o número de fótons que sugere uma densidade bariónica muito baixa, cerca de 15% da densidade total de matéria no Universo<sup>8</sup>.

A matéria escura representa cerca de 90% de toda a matéria existente e tornou-se o alvo principal dos astrónomos. Com a melhoria dos sistemas de observação do espaço profundo várias hipóteses foram sendo avançadas e embora nenhuma delas represente os 90% de matéria em falta, todas contribuem.

A natureza da matéria escura é ainda desconhecida e promete continuar a sê-lo durante os próximos anos. Existem dois tipos de matéria escura possíveis:

- Matéria bariónica – matéria constituída por bárions onde se incluem partículas como os prótons, neutrões e electrões. Esta forma de matéria constitui os objectos compactos não luminosos ou MACHO (Massive Compact Halo Objects).

<sup>8</sup> Mais detalhes podem ser encontrados no Apêndice H

- Matéria não-bariónica – matéria constituída por partículas exóticas muitas das quais não foi ainda provada a existência.

Entre os objectos MACHO possíveis incluem-se os planetas, anãs castanhas, buracos negros, buracos negros supermaciços, estrelas de neutrões, anãs brancas e nuvens de gás. As hipóteses para a matéria escura não-bariónica incluem neutrinos e partículas Wimp.

### 2.1.1 – MACHO como matéria escura

Em 1996 um grupo de astrónomos suíços descobriu o primeiro planeta fora do Sistema Solar (a estes planetas dá-se o nome de exoplanetas) e desde então mais de cem exoplanetas foram descobertos. A descoberta destes planetas é difícil não só porque são objectos não-luminosos mas também porque estão na companhia de estrelas cuja luz ofusca a sua presença. No entanto, a influência gravitacional do planeta sobre a estrela permite aos astrónomos não só detectá-los mas também determinar a sua trajectória e massa. Considerando o Sistema Solar verifica-se que 99% da sua massa está concentrada no Sol, isto é, a massa dos planetas representa apenas 1% da massa total. O mesmo é de esperar em todos os outros sistemas estelares, logo teria de haver um número elevadíssimo de exoplanetas para que estes constituam a matéria escura.

As anãs castanhas são outra hipótese. Como foi referido atrás, as anãs castanhas são corpos celestes que não conseguem dar início às reacções de fusão nuclear do hidrogénio, logo são praticamente invisíveis (na realidade, as anãs castanhas emitem radiação infravermelha). Estudos recentes indicam que não existe um número de anãs castanhas suficientemente elevado na Via Láctea para que possam ser consideradas matéria escura, acontecendo o mesmo nas outras galáxias. O mesmo acontece com os buracos negros, estrelas de neutrões e anãs brancas. Estes objectos maciços não se encontram em número suficiente para que correspondam à matéria escura.

No ano 2000 foi descoberto que os núcleos das galáxias activas (quasars) eram constituídos por buracos negros de proporções gigantescas com massas milhões de vezes superiores às massas de buracos negros “normais”. Observações posteriores revelaram outro facto surpreendente. Os buracos negros supermaciços não só se encontram no centro das galáxias activas mas também no centro das galáxias inactivas como a Via Láctea. Todas as galáxias observadas apresentam um buraco negro supermaciço no seu centro, de tal modo que os astrónomos acreditam que tais objectos estão no centro de todas as galáxias existentes no

universo. Embora estes buracos negros tenham proporções gigantescas, a sua massa é insuficiente para explicar a dinâmica observada nas galáxias.

Outra possibilidade descartada consiste nas nuvens de gás que existem no meio interestelar. Estas nuvens com massas que podem chegar a milhares de massas solares podem ser suficientemente frias para que não emitam radiação visível. Mas como o principal constituinte das nuvens de gás é o hidrogénio estas nuvens deveriam emitir radiação rádio ( $\lambda=21\text{cm}$ ). A emissão no comprimento de onda de  $21\text{cm}$  do hidrogénio, deve-se à transição do electrão com um spin paralelo ao do protão, para um spin oposto (anti-paralelo). O estado de energia de um electrão com spin anti-paralelo é mais baixo do que o estado de energia de um electrão de spin paralelo. Tudo no Universo prefere ocupar o estado de mais baixa energia possível, logo, quando um electrão de spin paralelo “roda” tornando-se num electrão de spin anti-paralelo liberta-se um fóton de comprimento de onda de  $21,1\text{ cm}$ . A diferença de energia é tão pequena que podem passar-se milhões de anos até que a transição entre spin ocorra.

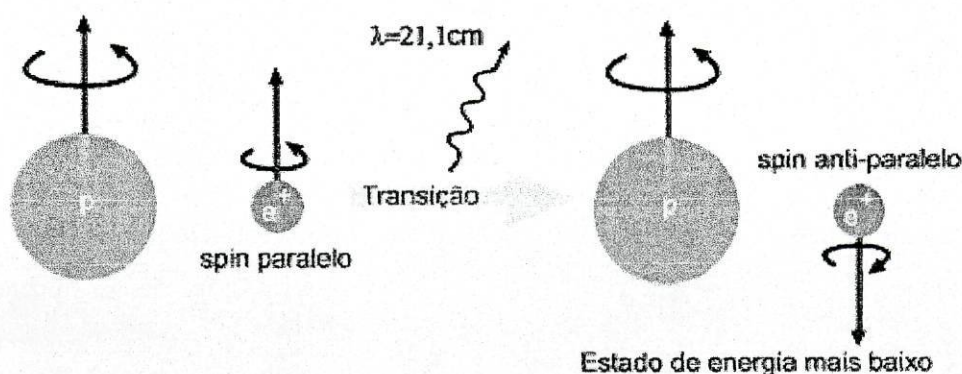


Figura 12 - Diagrama de emissão da linha espectral de 21 cm

O hidrogénio molecular não produz radiação rádio mas absorve radiação ultravioleta e emite radiação infravermelha. No entanto, as nuvens de gás são tão grandes que tornam ineficazes os métodos de determinação da quantidade de  $\text{H}_2$ . Felizmente, juntamente com o  $\text{H}_2$  existem também, nas nuvens de gás, moléculas de CO. Com a colisão entre as moléculas de  $\text{H}_2$  e CO, este último produz radiação rádio facilmente detectável ( $\lambda \sim 2,6\text{mm}$  e  $\lambda \sim 1,3\text{ mm}$ ). Deste modo pode-se estimar a massa de  $\text{H}_2$  existente nas nuvens de gás. Nenhum destes tipos de radiação foi até hoje observado.

### 2.1.2. A matéria escura pode ter natureza não-bariónica.

As partículas que no passado foram bastante promissoras, como partículas de matéria escura, designam-se por neutrinos. Os neutrinos como foi já referido atrás, são partículas resultantes das reacções de fusão nuclear e terão sido criadas em abundância nos primeiros instantes após o Big Bang<sup>9</sup>. Como são partículas que interagem fracamente com a matéria e com a luz (o leitor sem se aperceber esta a ser bombardeado por milhares de neutrinos neste momento) pareciam ser o candidato ideal. No entanto, no ano de 1998, uma equipa de cientistas do laboratório SuperKamiokande estabeleceu um limite superior para a massa do neutrino  $\sim 0,07 \text{ eV}$ <sup>10</sup> (cerca de um milionésimo da massa do electrão), que é insuficiente para a quantidade de matéria escura que é necessário existir por forma a explicar os fenómenos atrás descritos.

Actualmente um dos candidatos mais promissores para matéria escura não-bariónica designa-se por WIMP (Weakly Interactive Massive Particle). Esta partícula estável, neutra e que interage fracamente com a matéria ordinária terá sido produzidas abundantemente nos primeiros momentos após o Big Bang, quando as densidades de radiação e matéria se igualavam. Como partículas maciças e de fraca interacção elas atingiriam um estado não relativista muito antes dos leptões se separarem do plasma quente. Deste modo, as partículas WIMP poderiam mover-se livremente, com consequente diminuição da taxa de aniquilação destas partículas. Após a separação das partículas WIMP do plasma quente, seria a vez dos bariões, que acabariam caindo no poço de potencial das perturbações de fundo WIMP. As perturbações na densidade de partículas WIMP dariam origem a perturbações na densidade dos bariões, que resultariam, muito posteriormente, nas superestruturas do Universo, tais como as galáxias, como previsto teoricamente. Por este motivo, os WIMPs são fortes candidatos para a matéria escura dos halos galácticos.

Algumas partículas WIMP do halo galáctico, podem eventualmente, ao cruzar a galáxia, ser atraídas pelo Sol e interagir, no núcleo solar, com os núcleos atómicos de hélio e de elementos mais pesados aí existentes. Estas interacções dependem da secção eficaz das partículas WIMP e são mais eficientes com núcleos atómicos pesados. Se a secção eficaz das partículas WIMP for pequena, então a probabilidade de interacção com os núcleos atómicos é

<sup>9</sup> Mais detalhes podem ser encontrados no Apêndice I

<sup>10</sup> Fonte: Super-Kamiokande finds neutrino mass - <http://physicsweb.org/articles/news/2/6/2>

baixa, o que implica, um percurso livre médio elevado, isto é, a partícula WIMP percorre uma grande distância entre colisões sucessivas. As partículas WIMP, ao colidirem com os núcleos atômicos, recebem desta energia que posteriormente será cedida aos núcleos atômicos das camadas superiores, isto é, o transporte de energia é não local. No caso em que a secção eficaz é grande, o percurso médio livre é menor, o que implica que as partículas WIMP interagem com bastante frequência de modo a estarem em equilíbrio térmico com os núcleos atômicos do núcleo solar. Neste caso, as partículas WIMP redistribuiriam a energia pelas partículas presentes no núcleo solar tornando-o quasi-isotérmico, e actuariam como um mecanismo de transporte de energia, complementar ao transporte de energia por radiação. Além disso, reduziriam a temperatura do núcleo solar. Como o núcleo solar tem de vencer a pressão exercida pelas camadas superiores devido ao colapso gravitacional, uma diminuição da temperatura do núcleo solar só pode ser compensada por um aumento da densidade neste. Outra consequência da existência de partículas WIMP é a diminuição da abundância de hélio no núcleo solar, uma vez que diminuindo a temperatura a taxa de reacções de fusão nuclear também diminui.

As diferenças de temperatura e densidade alteram o valor da velocidade do som no Sol uma vez que

$$v_s^2 \propto \frac{d\rho}{dp}. \quad (13)$$

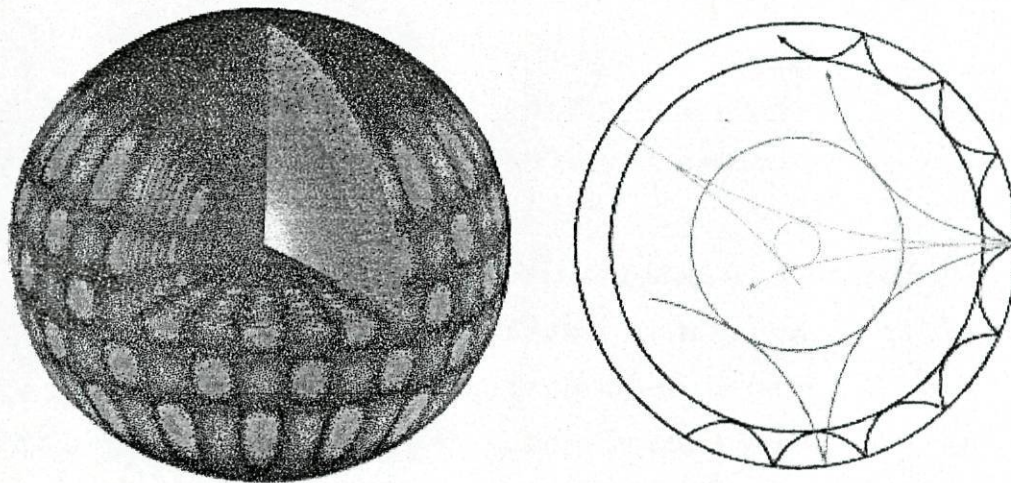
Para um gás ionizado a pressão é  $p = \mu KT$ .

A velocidade do som pode ser determinada recorrendo à heliossismologia e usada para determinar a influência das partículas WIMP no Sol.

### 2.1.2.1. Impondo limites a partículas WIMP através da heliossismologia

Embora as estrelas sejam opacas à luz visível, pelo que é impossível observar o que se passa no interior estelar, os mecanismos verificados no interior das estrelas e, em especial, no interior do Sol, podem ser estudados a partir da observação dos neutrinos e da superfície solar. Pelo facto de os neutrinos não interagirem com outras partículas, a sua observação e estudo é difícil. Quanto ao estudo da superfície do Sol, os astrónomos sabem desde os anos 60

do século XX que a superfície do Sol oscila, movendo-se para cima e para baixo, como a subida e descida das marés.



**Figura 103 – Oscilações da superfície solar e a penetração no interior solar das ondas de várias frequências**

À primeira vista estas oscilações parecem desordenadas e sem qualquer significado, no entanto nos anos 70, os astrónomos concluíram que as oscilações observadas resultavam da combinação de oscilações simples, individualmente ordenadas.

Existem três tipos de oscilações solares: oscilações acústicas, gravíticas e de superfície. Estas oscilações geram modos de oscilação de ressonância porque o Sol actua como uma cavidade ressonante. Estas oscilações têm amplitudes e frequências diferentes e aquelas cuja frequência é elevada são essencialmente oscilações superficiais, enquanto que as oscilações de baixa frequência penetram profundamente no interior do Sol. As oscilações solares podem ter períodos que variam entre 1,5 e 20 minutos e comprimentos de onda entre alguns quilómetros e o raio solar.

O Sol actua como uma cavidade ressonante porque as oscilações fazem-se entre uma superfície em que a densidade cai bruscamente e outra superfície em que a densidade aumenta bruscamente. A oscilação, ao se mover de encontro a uma superfície, “reflecte”, voltando na direcção da superfície de “origem”, uma vez que a velocidade do som depende da densidade. Deste modo criam-se oscilações estáticas.

Um dos mais importantes objectivos da heliosismologia é o de confirmar se as teorias da evolução e da estrutura estelar estão correctas. Para isso é necessário comparar, no caso do Sol, o Modelo Solar( em que se descreve a composição química, densidade, luminosidade,

massa, pressão, e temperatura a diferentes profundidades do Sol) com os dados obtidos através da observação das oscilações solares.

O estudo da heliossismologia tem permitido verificar os vários modelos solares e determinar algumas propriedades do Sol, como por exemplo:

- A temperatura do núcleo solar é de  $1,56 \times 10^7 K$
- A fronteira entre as zonas radiativa e convectiva situa-se a  $0,68R_{\odot}$  do centro do Sol.

Mas a mais inovadora área de estudo da heliossismologia actualmente é a de impor limites às propriedades físicas das partículas WIMP<sup>11</sup>. A existência das partículas WIMP não será verificada a partir da observação das oscilações solares, mas ao impor algumas restrições, a heliossismologia permite a elaboração de experiências cujo objectivo é a verificação directa das partículas WIMP.

Se os astrónomos conseguirem determinar a velocidade do som no interior solar poderão calcular a temperatura e a densidade do núcleo solar e a partir daí determinar a influência que as partículas WIMP terão sobre as partículas do plasma solar.

---

<sup>11</sup> Mais detalhes podem ser encontrados no Apêndice J

## Apêndice A

### Massa de Jeans

Considerando uma nuvem de gás como um fluido não relativista, com densidade  $\rho$ , velocidade  $v$ , e campo gravitacional  $g$ , o limite de massa para que a nuvem colapse pode ser obtido considerando uma das muitas formas da equação de continuidade:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (\text{A.1})$$

e a equação de movimento de Euler:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} + \frac{\nabla p}{\rho} - \vec{g} = 0 \quad (\text{A.2})$$

sendo as equações para o campo gravítico (sistema conservativo):

$$\nabla \times \vec{g} = 0 \quad (\text{A.3})$$

$$\nabla \cdot \vec{g} = -4\pi G\rho \quad (\text{A.4})$$

Considerando uma perturbação no sistema ( $\rho'$ ,  $p'$ ,  $v'$ , e  $g'$ ) então:

$$\frac{d\rho'}{dt} + \rho \nabla \cdot \vec{v}' = 0 \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{dv'}{dt} = -\frac{v_s^2}{\rho} \nabla \rho' + g' \quad (\text{A.6})$$

onde  $(\vec{v}' \cdot \nabla)\vec{v}' = 0$ . e a velocidade do som é  $v_s^2 = \frac{p'}{\rho'}$ .

Resolvendo em ordem a  $\rho'$ , começamos por derivar a equação A.5:

$$\frac{d^2 \rho'}{dt^2} = -\rho \nabla \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (\text{A.7})$$

substituindo a equação A.6 na equação A.7:

$$\frac{d^2 \rho'}{dt^2} = v_s^2 \nabla^2 \rho' - \rho \nabla \cdot \vec{g}' \quad (\text{A.8})$$

Substituindo a equação A.4 em A.8, temos:

$$\frac{d^2 \rho'}{dt^2} = v_s^2 \nabla^2 \rho' + 4\pi G \rho' \quad (\text{A.9})$$

A equação A.9 tem a forma de uma equação de onda:

$$\frac{d^2 X}{dt^2} = A \nabla^2 X + B X \quad (\text{A.10})$$

cuja solução é :

$$\rho' = C e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \quad (\text{A.11})$$

onde :

$$\omega^2 = v_s^2 k^2 - 4\pi G \rho \quad (\text{A.12})$$

Para  $\omega=0$ , temos:

$$k^2 = \frac{4\pi G \rho}{v_s^2} \quad (\text{A.13})$$

A partir da equação A.13 pode-se determinar o comprimento de onda designado por comprimento de Jeans:

$$\lambda_J^2 = \frac{\pi v_s^2}{G\rho} \quad (\text{A.14})$$

Se o comprimento da nuvem de gás  $L \ll \lambda_J$ , então a perturbação resulta numa onda de som oscilando livremente. Pelo contrário, se  $L \gg \lambda_J$  então as ondas sonoras não viajam suficientemente depressa para responder às perturbações de densidade e a nuvem começa a condensar em torno delas.

A massa de Jeans é aquela que se encontra contida numa esfera cujo diâmetro é  $\lambda_J$ :

$$M_J = \frac{4}{3} \pi \rho \left( \frac{1}{2} \lambda_J \right)^3 \quad (\text{A.15})$$

$$M_J = \frac{1}{6} \pi \rho \left( \frac{\pi v_s^2}{G\rho} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (\text{A.16})$$

Sabendo que  $v_s^2 = \frac{1}{\mu} RT$ , em que  $\mu$  representa a massa molecular média,  $R$  a constante

molar e  $T$  a temperatura, fica:

$$M_J = \frac{1}{6} \pi \left( \frac{\pi RT}{\mu G \rho^{\frac{1}{3}}} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (\text{A.17})$$

$$M_J \propto \left( \frac{T^3}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A.18})$$

## Apêndice B

### Equações da estrutura estelar

A maior parte das estrelas evoluem muito lentamente na fase de sequência principal, razão pela qual se consideram corpos quase estáticos para pequenos intervalos de tempo. Eliminando, ou melhor, não considerando, a dependência no tempo, as grandezas físicas dependem apenas da distância ao centro da estrela.

Para uma estrela na sequência principal, a força gravítica opõe-se a pressão. Considerando um pequeno elemento de área  $dA$  composto pela camada  $r+dr$ , como ilustrado na figura, a pressão total é dada por:

$$P(r)dA - P(r + dr)dA = -\frac{dP}{dr}drdA \quad (\text{B.1})$$

A força da gravidade que actua nesse elemento com massa  $dm$  é dada por:

$$dF = -\frac{GM_r dm}{r^2} \quad (\text{B.2})$$

expressando  $dm$  por:

$$dm = \rho_r drdA \quad (\text{B.3})$$

a força da gravidade é expressa por:

$$dF = -\frac{GM_r}{r^2} \rho_r drdA \quad (\text{B.4})$$

Uma vez que consideramos a estrela como um corpo estático, isto é, não há expansão nem contracção da estrela, a soma das forças deve ser nula, isto é:

$$-\frac{dP}{dr} - \frac{GM_r}{r^2} \rho_r = 0 \quad (\text{B.5})$$

reescrevendo a expressão anterior obtém-se a equação de equilíbrio hidrostático:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM_r}{r^2} \rho_r \quad (\text{B.6})$$

De notar, que o sinal negativo implica, como seria de esperar, que a pressão deve diminuir com o aumento da distância ao centro da estrela. Além disso, esta equação apresenta três variáveis ( $P$ ,  $M$  e  $\rho$ ), de modo que, mesmo sabendo as condições fronteira é necessário mais duas equações.

A segunda equação da estrutura estelar, não é mais do que a equação de continuidade de massa, isto é:

$$\frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 \rho_r \quad (\text{B.7})$$

Quanto à terceira equação, a equação de estado, resume-se à lei dos gases perfeitos.

$$P_r = \frac{\rho_r k T_r}{\mu m_H} \quad (\text{B.8})$$

De notar, que para estrelas muito maciças a pressão que contraria a força gravítica tem origem na radiação. Na equação anterior, a massa molecular média depende de  $r$ , uma vez que a composição química e o estado de ionização varia com a distância. O interior do Sol é essencialmente constituído por H e He ionizados e por alguns metais sendo  $\mu = 0,62$ .

Fazendo a aproximação grosseira de que a densidade de matéria não varia com a distância ao centro da estrela, temos que:

$$\frac{\Delta P}{\Delta r} \sim -G \frac{M \rho}{r^2} \quad (\text{B.9})$$

$$\frac{0 - P_N}{R - 0} \sim -G \frac{M\rho}{R^2} \quad (\text{B.10})$$

Onde  $P_N$  representa a pressão no núcleo e  $M$  e  $R$  representam a massa e o raio estelares. Substituindo a equação B.10 em B.8, obtemos a temperatura para o núcleo estelar:

$$T_N \sim \frac{G\mu m_H M}{k R} \quad (\text{B.10})$$

Substituindo os devidos valores para o Sol obtemos uma temperatura para o núcleo solar de  $T_N \sim 1,1 \times 10^7 \text{ K}$ .

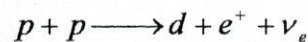
## Apêndice C

### Efeito de Túnel

O potencial electrostático entre dois núcleos de carga  $Z_1e$  e  $Z_2e$  com números de massa  $A_1$  e  $A_2$  é dado por:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} \quad (\text{C.1})$$

Quando em contacto a distância é  $r = r_0 \left( A_1^{\frac{1}{3}} + A_2^{\frac{1}{3}} \right)$  com  $r_0 = 1,2 \text{ fm}$ . Considerando a primeira parte de uma cadeia pp:



temos que:

$$V_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_0} \quad (\text{C.2})$$

Substituindo os respectivos valores obtemos para o potencial electrostático entre os protões  $V_0 = 0,6 \text{ MeV}$ .

A energia cinética dos protões no interior do Sol é dada por:

$$E_C = \frac{3}{2} KT \quad (\text{C.3})$$

Substituindo os valores para a constante de Boltzmann  $K = 1,38 \times 10^{-23} \text{ JK}^{-1}$  e para a temperatura do núcleo solar  $T_S \sim 15 \times 10^6 \text{ K}$ , resulta numa energia cinética  $E_C = 0,1 \text{ KeV}$ .

Embora em termos clássicos os protões jamais ultrapassem a barreira de potencial de Coulomb (para isso a temperatura do núcleo solar teria de ser  $1 \times 10^9 \text{ K}$ ), de acordo com a Mecânica Quântica existe uma pequena probabilidade de tal acontecer.

Utilizando a massa reduzida do sistema  $m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$  e a velocidade relativa das duas partículas  $v = v_1 - v_2$ , a distância mínima a que os prótons se podem aproximar é dada por:

$$V = E_c \Rightarrow r_{\min} = \frac{2e^2}{mv^2}. \quad (\text{C.4})$$

Neste ponto, a probabilidade de um próton ultrapassar a barreira de potencial de Coulomb é dada por:

$$P_U = Ae^{-\frac{r_{\min}}{\lambda}} \quad (\text{C.5})$$

onde  $A$  é uma constante e  $\lambda$  é o comprimento de onda de de Broglie:

$$\lambda = \frac{\hbar}{2\pi mv} \quad (\text{C.6})$$

Utilizando as equações C.4 e C.6, podemos reescrever a equação C.5:

$$P_U = Ae^{-\frac{2\pi e^2}{\hbar v}} \quad (\text{C.7})$$

A probabilidade de as partículas terem uma velocidade relativa  $v$  é dada pela distribuição de Maxwell-Boltzmann:

$$P_v = Be^{-\frac{mv^2}{2KT}} \quad (\text{C.8})$$

onde  $B$  representa uma constante. A probabilidade de uma partícula com velocidade  $v$  ultrapassar a barreira de potencial obtém-se multiplicando as equações C.7 e C.8:

$$P_{\text{Fusão}} = P_U \cdot P_v = Ce^{-\left(\frac{2\pi e^2}{\hbar v} + \frac{mv^2}{2KT}\right)} \quad (\text{C.7})$$

onde  $C$  representa uma constante.

Mesmo que a barreira seja penetrada com sucesso, o mais provável é que ocorra uma dispersão elástica em vez de uma fusão. A probabilidade para ocorrer uma fusão é de 1 para  $10^{20}$ . Por esta razão os prótons têm de colidir milhões e milhões de vezes até darem início a uma cadeia pp.

## Apêndice D

### Pressão de radiação

Consideremos uma caixa contendo um gás. A pressão deve-se às colisões das partículas nas paredes da caixa. Quando uma partícula atinge a caixa, o momento da partícula varia de:

$$\Delta p = 2p_x \quad (\text{D.1})$$

para uma partícula que se move segundo o eixo dos  $xx$ . A pressão é dada por:

$$P = \frac{F}{A} = \frac{\sum \frac{\Delta p}{\Delta x}}{A} \quad (\text{D.2})$$

Sabendo que  $A = \Delta y \Delta z$  e  $\Delta t = 2 \frac{\Delta x}{v_x}$ , resulta:

$$P = \frac{\sum p_x v_x}{\Delta x \Delta y \Delta z} = \frac{N \langle p_x v_x \rangle}{V} = \frac{Nm \langle v_x^2 \rangle}{V} \quad (\text{D.3})$$

onde  $N$  representa o número total de partículas,  $V$  representa o volume da caixa e  $\langle \dots \rangle$  representa valores médios.

Considerando a velocidade isotrópica, isto é:

$$\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle \quad (\text{D.4})$$

então, para uma partícula que se move em qualquer direcção, temos:

$$\langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle = \langle v^2 \rangle \Rightarrow \langle v^2 \rangle = 3 \langle v_x^2 \rangle \quad (\text{D.5})$$

A pressão de um gás considerando qualquer partícula, é dada por:

$$P = \frac{Nm \langle v^2 \rangle}{3V} \quad (\text{D.6})$$

Considerando que a energia dos fótons é:

$$E = Nmc^2 \quad (\text{D.7})$$

onde  $m$  representa a massa do fóton de modo que  $mc^2 = h\nu$  (na realidade, admite-se que a massa dos fótons é nula), então a pressão de um gás de fótons é dada por:

$$P = \frac{1}{3} \frac{E}{V} \quad (\text{D.8})$$

De acordo com a Lei de Radiação do Corpo Negro, a densidade é dada por:

$$\frac{E}{V} = \frac{4}{c} \sigma T^4 = \alpha T^4 \quad (\text{D.9})$$

onde  $\sigma$  representa a constante de Stefan. Substituindo na expressão anterior a pressão de radiação é dada por:

$$P = \frac{1}{3} \alpha T^4 \quad (\text{D.10})$$

## Apêndice E

### Quanto demora a energia do núcleo solar a atingir a superfície

A energia de um fóton no núcleo solar é aproximadamente  $1 \text{ KeV}$  correspondendo à região dos raios-X. Os fótons estão constantemente a ser dispersados, absorvidos e reemitidos. A distância média percorrida pelos fótons é dada por:

$$L^2 = \langle \sum d_i^2 \rangle = Nd^2 \quad (\text{E.1})$$

onde  $d$  representa a distância média de um passo e  $N$  o número médio de passos.

Para chegar à superfície (supondo que o processo radiativo se encontra ao longo de toda a estrela), o fóton tem de percorrer  $l \sim R_{\odot}$  logo, o número total de passos é dado por:

$$N \approx \frac{R_{\text{Sol}}^2}{d^2} \quad (\text{E.2})$$

O tempo que o fóton demora a atingir a superfície é dado por:

$$t \approx \frac{R_{\text{Sol}}^2}{dc} \quad (\text{E.3})$$

Se os fótons pudessem escapar livremente, então:

$$t' \approx \frac{R_{\text{Sol}}}{c} \quad (\text{E.4})$$

Pode-se verificar que a difusão radiativa abranda a taxa de escape de energia do Sol por um factor de:

$$\frac{t}{t'} \propto \frac{R_{Sol}}{d} \quad (E.5)$$

Também a luminosidade do núcleo solar é reduzida para a luminosidade da superfície solar pelo mesmo factor:

$$\frac{R_{Sol}^2 T_C^4}{R_{Sol}^2 T_S^4} \propto \frac{R_{Sol}}{d} \quad (E.6)$$

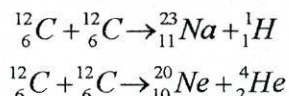
Substituindo a equação E.6 em E.3 e considerando que  $T_C \approx 10^7 K$  e  $T_S \approx 10^3 K$ , obtemos para o intervalo de tempo que um fóton do núcleo demora até atingir a superfície:

$$t \approx \left( \frac{T_C^4}{T_S^4} \right) \frac{R_{Sol}}{d} \approx 10^{14} s \approx 10^6 \text{ anos} \quad (E.6)$$

## Apêndice F

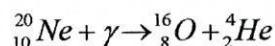
### Reacções nucleares nas estrelas gigantes

Quando a fusão do hélio cessa, o núcleo estelar contrai-se atingindo temperaturas de cerca de  $5 \times 10^8 K$  e iniciando a fusão do carbono como expresso nas seguintes equações:

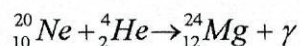


Seria de esperar que a fusão dos núcleos de carbono desse origem a núcleos de magnésio  ${}^{24}_{12}\text{Mg}$ , no entanto esta reacção ocorre muito raramente. Um ponto bastante importante é que com a fusão dos núcleos de carbono são “reintroduzidos” no núcleo estelar núcleos de hidrogénio e hélio.

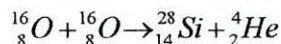
O aumento da temperatura do núcleo estelar( com o fim da fusão dos núcleos de carbono) para cerca de  $10^9 K$  faz estender o espectro de emissão para a zona dos raios- $\gamma$ . Este facto permite que os núcleos atómicos se transformem em núcleos mais leves. Por exemplo:



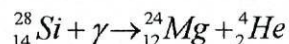
A este tipo de fenómeno dá-se o nome de fotodesintegração. Os restantes núcleos de néon podem reagir com os núcleos de hélio para dar origem a núcleos de magnésio:



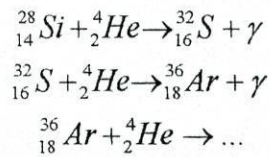
Depois da fusão do néon, o núcleo estelar atinge, devido à sua contracção, uma temperatura de  $2 \times 10^9 K$ . A esta temperatura inicia-se a fusão dos núcleos de oxigénio para dar origem a núcleos de silício:



Quando a fusão do oxigénio cessa, a temperatura do núcleo estelar volta a subir. A temperatura próximas dos  $3 \times 10^9 K$ , o silício começa a fotodesintegrar-se:



Os núcleos de hélio resultantes passam a reagir com os núcleos de silício para dar origem a núcleos de elementos com massas atómicas inferiores a  $A=56$ . Parte desta cadeia de reacções está representada nas equações seguintes:



Quando a maior parte do silício tiver sido convertido em ferro, a temperatura do núcleo estelar volta a aumentar, atingindo cerca de  $7 \times 10^9 \text{ K}$  (devido à energia libertada em cada uma das reações nucleares). Como as reações nucleares vão sendo sucessivamente menos eficientes, a estrela super gigante passa cada vez menos tempo em cada nova fase de fusão nuclear.

## Apêndice G

### Limite de Chandrasekhar

Ao cessarem as reacções de fusão nuclear numa estrela, deixa de existir um mecanismo capaz de travar o colapso gravitacional. Ao contrair, a densidade da estrela vai aumentando, ao mesmo tempo que diminui a separação média entre as partículas. Quando esta separação for da ordem do comprimento de onda de de Broglie para os electrões, diz-se que a estrela é constituída por um gás de electrões degenerados. Mesmo a uma temperatura nula, a pressão exercida pelo gás de electrões degenerados é significativa uma vez que os electrões não podem violar o Princípio de Exclusão de Pauli.

O número de electrões que num dado volume  $V$  possuem momento  $p < p_F$ , em que  $p_F$  designa-se por momento de Fermi, é dado por:

$$N = 2 \frac{4\pi}{h^3} V \int_0^{p_F} p^2 dp = \frac{8\pi}{3h^3} V p_F^3 \quad (\text{G.1})$$

A densidade de electrões, é dada por:

$$n = \frac{N}{V} = \frac{8\pi}{3h^3} p_F^3 \quad (\text{G.2})$$

logo

$$p_F = \frac{h}{2} \left( \frac{3n}{\pi} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (\text{G.3})$$

Conforme  $p_F \ll m_e c$  ou  $p_F \gg m_e c$  os electrões são partículas não-relativistas ou relativistas, respectivamente.

**Partículas não relativistas  $p_F \ll m_e c$** 

A energia cinética dos electrões não relativistas é dada por:

$$E_C = \frac{p^2}{2m_e} \quad (\text{G.4})$$

e a densidade de energia é dada por:

$$\frac{E}{V} = \frac{8\pi V}{h^3} \int_0^{p_F} \left( \frac{p^2}{2m_e} \right) p^2 dp = \frac{8\pi}{10m_e h^3} p_F^5 \quad (\text{G.6})$$

Sabendo que para um gás de partículas não relativistas a pressão é:

$$P = \frac{2}{3} \frac{E}{V} \quad (\text{G.8})$$

A pressão de um gás degenerado é dado por:

$$P = \left[ \left( \frac{3}{8\pi} \right)^{\frac{2}{3}} \left( \frac{h^2}{5m_e} \right) \right] n^{\frac{5}{3}} \quad (\text{G.10})$$

**Partículas relativistas  $p_F \gg m_e c$** 

A energia cinética dos electrões relativistas é dada por:

$$E_C \approx pc \quad (\text{G.5})$$

e a densidade de energia é dada por:

$$\frac{E}{V} = \frac{8\pi V}{h^3} \int_0^{p_F} (pc) p^2 dp = \frac{2\pi c}{h^3} p_F^4 \quad (\text{G.7})$$

Sabendo que para um gás de partículas não relativistas a pressão é:

$$P = \frac{1}{3} \frac{E}{V} \quad (\text{G.9})$$

A pressão de um gás degenerado é dada por:

$$P = \left[ \left( \frac{3}{8\pi} \right)^{\frac{1}{3}} \left( \frac{hc}{4} \right) \right] n^{\frac{4}{3}} \quad (\text{G.11})$$

Consideremos os efeitos da pressão gravitacional. A energia potencial gravítica de uma estrela de massa  $M$ , raio  $R$  e volume  $V$  com densidade  $\rho$  uniforme, é dada por:

$$E = \frac{3}{5} G \frac{M^2}{R} \quad (\text{G.12})$$

A pressão devida à gravidade é dada por:

$$P = \frac{1}{3} \frac{E}{V} = \left( \frac{G}{5} \right) \left( \frac{4\pi}{3} \right) M^{\frac{2}{3}} \left( \frac{A}{Z} m_p \right)^{\frac{4}{3}} n^{\frac{4}{3}} \quad (\text{G.13})$$

com densidade de electrões  $n = \left( \frac{Z}{A} \right) \frac{\rho}{m_p}$ .

Para os electrões não relativistas a pressão de degenerescência varia com  $n^{5/3}$  sobrepondo-se à pressão gravítica que varia com  $n^{4/3}$ . No caso dos electrões degenerados relativistas, quer a pressão de degenerescência quer a pressão gravítica, variam com  $n^{4/3}$ . Por estas razões, as anãs brancas constituídas por electrões degenerados não relativistas são mais estáveis do que aquelas que são constituídas por electrões degenerados relativistas. Assim sendo, na condição de electrões degenerados não relativistas ( $p_F \ll m_e c$ ), a densidade de electrões é dada por:

$$n \approx \left( \frac{8\pi}{3} \right) \left( \frac{m_e c}{h} \right)^3 \quad (\text{G.14})$$

Considerando a densidade de nucleões igual a  $\left( \frac{A}{Z} \right) n$ , a densidade crítica para a estabilidade de uma anã branca é:

$$\rho_0 = \left( \frac{8\pi m_p A}{3Z} \right) \left( \frac{m_e c}{h} \right)^3 \quad (\text{G.15})$$

Igualando as expressões da pressão gravitacional e da pressão de degenerescência dos electrões não relativistas, a densidade a que as pressões se igualam é dada por:

$$\rho = \left( \frac{4\pi}{3} \right)^3 \left( \frac{4m_e^3 G^3 M^2}{h^6} \right) \left( \frac{A m_p}{Z} \right)^5 \quad (\text{G.16})$$

Igualando esta expressão à expressão obtida para a densidade crítica de uma anã branca, obtém-se o valor máximo da massa de um núcleo estelar capaz de suportar o colapso gravitacional:

$$M_{CH} = \left( \frac{3\sqrt{2}}{8\pi} \right) \left( \frac{hc}{G} \right)^{\frac{3}{2}} \left( \frac{Z}{Am_p} \right)^2 \quad (\text{G.17})$$

Considerando a razão  $\frac{Z}{A} = \frac{1}{2}$ , o limite de Chandrasekhar é  $M_{CH} \approx 1,2M_{\odot}$ . O valor actualmente aceite, obtido através de modelos mais sofisticados em que a densidade varia com o raio da estrela, é de  $M_{CH} \approx 1,4M_{\odot}$ . Utilizando a expressão G.16 e substituindo a massa da anã branca pelo valor do limite de Chandrasekhar determinámos que a densidade mínima que uma anã branca pode ter é  $\rho = 2,7 \times 10^9 \text{ Kg/m}^3$ . A partir deste valor de densidade podemos obter o valor máximo do raio de uma anã branca:

$$R = \left( \frac{3M_{CH}}{4\pi\rho} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (\text{G.18})$$

$$R \approx 6 \times 10^6 \text{ m} \approx R_{Terra}$$

## Apêndice H

### Densidade Bariônica

A densidade bariônica pode ser determinada através da nucleossíntese primordial. Após o Big Bang foram criados um elevado número de nucleões (protões e neutrões) e suas respectivas antipartículas. Estas partículas formavam-se a partir da energia do meio para logo de seguida se aniquilarem em radiação. Com o arrefecimento do Universo um pequeno número de partículas (cerca de  $10^9$  dos nucleões criados) sobreviveu para formar os constituintes do Universo.

Os neutrões e protões obedecem à distribuição de Fermi-Dirac, pelo que a densidade dos nucleões é dada por:

$$N(n) = \frac{g_n}{2\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{e^{E/KT} + 1}$$

$$N(p) = \frac{g_p}{2\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{e^{E/KT} + 1}$$
(H.1)

As expressões são iguais com a diferença de que a energia depende da massa:

$$E^2 = c^2 p^2 + m^2 c^4$$
(H.2)

Deste modo, a razão entre o número de protões e o número de neutrões por unidade de volume, é dado por:

$$\frac{N_n}{N_p} = e^{\left(\frac{A}{KT}\right)} \text{ com } A = (m_n - m_p)c^2$$
(H.3)

Considerando as seguintes interações:

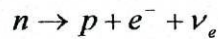
$$\nu_e + n \leftrightarrow e^- + p$$

$$\bar{\nu}_e + p \leftrightarrow e^+ + n,$$

a temperatura de desacoplamento (*freeze-out*) para as reacções descritas é de  $KT=0,8MeV$ , de modo que a razão neutrão-protão inicial era:

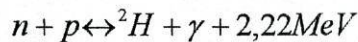
$$\frac{N_{n,0}}{N_{p,0}} = e^{\left(\frac{\mu}{KT}\right)} = 0,2 \quad (\text{H.3})$$

Posteriormente os neutrões começam a decair através de:

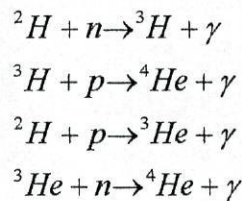


Para um tempo  $t$  após o desacoplamento haverá  $N_{n,0}e^{-t/\tau}$  neutrões e  $\left[ N_{p,0} + N_{n,0}\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \right]$  protões, com  $\tau = 887$ .

Mas antes que os neutrões decaiam todos em protões, eles interagem com os protões para formar núcleo de deutério ( ${}^2\text{H}$ ):



Como a densidade de fotões sobre os neutrões é elevada, o deutério só desacopla para temperaturas tais que  $KT=0,05 \text{ MeV}$ . Logo que a fotodesintegração do deutério termina, iniciam-se as reacções de produção de hélio.



A  $KT=0,05 \text{ MeV}$  corresponde um tempo de expansão de:

$$KT \approx \frac{1,31 \times 10^6}{t^{1/2}} \Rightarrow t \approx 300s$$

Substituindo na equação  $\left[ N_{p,0} + N_{n,0} \left( 1 - e^{-t/\tau} \right) \right]$ , a razão entre o número de neutrões e o número de prótons por unidade de volume é:

$$\frac{N_n}{N_p} = 0,135$$

Considerando a massa do núcleo de hélio igual a quatro vezes a massa do próton, a fração de hélio existente no Universo é de:

$$Y = \frac{2 \frac{N_n}{N_p}}{1 + \frac{N_n}{N_p}} \Rightarrow Y = 0,24$$

De acordo com as observações de nebulosas planetárias, atmosferas estelares, etc. os astrónomos determinaram que os valores da fracção de hélio no Universo variam entre 0,23 - 0,24.

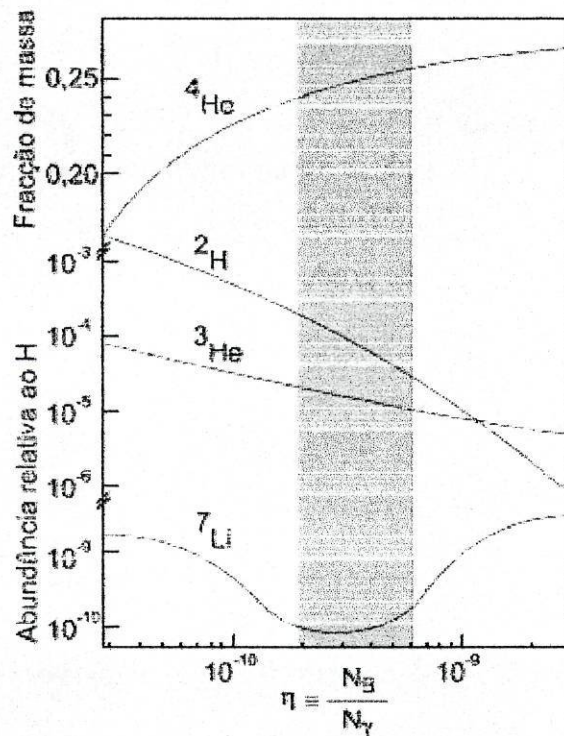


Figura 14- Densidades relativas de elementos leves produzidos após o Big Bang em função da razão entre a densidade bariônica e a densidade luminosa.

Destes valores resulta um valor para a razão entre o número de bariões e o número de fótons de:

$$\eta = \frac{N_B}{N_\gamma} \approx (4 \pm 2) \times 10^{-10}$$

Sabendo que  $N_\gamma \approx 4,1 \times 10^8 \text{ m}^{-3}$ , então  $N_B = 0,18 \text{ bariões/m}^3$  e a densidade bariônica  $\rho_B \approx 3 \times 10^{-28} \text{ Kg} \cdot \text{m}^{-3}$ .

## Apêndice I

### WIMPs e o Big Bang

Momentos após o Big Bang terão sido produzidas em abundância, partículas, entre as quais os Wimps. As partículas seriam criadas e aniquiladas constantemente dada a energia elevada do Universo. Com a expansão do Universo e conseqüente arrefecimento, as partículas desacoplam do meio (*freeze out*) e deixam de ser criadas tornando-se numa relíquia do Big Bang, quando a taxa de aniquilações das partículas WIMP se torna inferior à taxa de expansão do Universo:

$$N\langle\sigma v\rangle \leq H \quad (\text{I.1})$$

(onde  $N$  representa a densidade de partículas WIMP,  $\sigma$  a secção eficaz de aniquilação,  $v$  a velocidade relativa do par partícula-antipartícula e  $H$  a taxa de expansão do Universo).

Os astrónomos supõem que os WIMPs são partículas “maciças”, estáveis, não relativistas e que interagem com a matéria bariónica à escala da interacção fraca. Porque são partículas relativistas, a densidade de partículas WIMP pode ser determinada pela relação de Boltzmann:

$$N = \left(\frac{mT}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m}{T}} \quad (\text{I.2})$$

onde  $m$  representa a massa da partícula WIMP e  $T$  a temperatura do Universo.

Sabendo que a taxa de expansão do Universo é dada por:

$$H = 1,66g^{\frac{1}{2}} \frac{T^2}{M_{Pl}} = f \frac{T^2}{M_{Pl}} \quad (\text{I.3})$$

onde  $g^*$  representa o número de graus de liberdade e  $M_{Pl}$  representa a massa de Planck e substituindo as equações I.2 e I.3 na equação I.1, obtemos:

$$\langle \sigma v \rangle \left( \frac{mT}{2\pi} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m}{T}} \leq f \frac{T^2}{M_{Pl}} \quad (I.4)$$

A resolução numérica, conduz a valores de  $\frac{M}{T} = 20$  e  $\frac{M}{T} = 30$  para  $M=1\text{GeV}$  e  $M=100\text{GeV}$  respectivamente. Considerando o parâmetro de expansão  $R \propto \frac{1}{T}$  e a temperatura do Universo  $T_0=2,73\text{K}$ , o número de partículas Wimps é:

$$N_0 \approx \frac{\left( \frac{T_0}{T} \right)^3 \left( \frac{T^2}{M_{Pl}} \right)}{\langle \sigma v \rangle} \approx \frac{1}{T} \frac{1}{\langle \sigma v \rangle} \frac{T_0^3}{M_{Pl}} \quad (I.5)$$

A densidade de Wimps é dada por:

$$\rho_{WIMP} = mN_0 = \left( \frac{m}{T} \right) \left( \frac{T_0^3}{M_{Pl}} \right) \frac{1}{\langle \sigma v \rangle} \approx \frac{6 \times 10^{-37}}{\langle \sigma v \rangle} \text{GeV} s^{-1} \quad (I.6)$$

Dividindo pela densidade crítica  $\rho_c = \frac{3H_0^2 c^2}{8\pi G} \approx 5\text{GeV} m^{-3}$ , obtemos para o parâmetro de densidade:

$$\Omega_{WIMP} = \frac{\rho_{WIMP}}{\rho_c} \approx \frac{10^{-31}}{\langle \sigma v \rangle} m^3 s^{-1} \quad (I.7)$$

A velocidade das partículas WIMP no momento de desacoplação é dada por:

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{3}{2} K T \Rightarrow v \approx 0,3c \quad (I.8)$$

Substituindo o resultado de I.8 na equação I.7, uma secção eficaz de  $10^{-39} m^2$  resultaria num parâmetro de densidade da ordem de grandeza da unidade. A secção eficaz avançada é da ordem de grandeza das interacções fracas.

O que se espera descobrir no futuro é a massa do WIMP, a temperatura a que se deu o desacoplamento e a secção eficaz destas partículas.

## Apêndice J

### Os WIMPs no Sol

Qualquer partícula WIMP do halo galáctico que se atravessa na trajetória do Sol em torno do centro da galáxia, pode ser capturado. No Sol, a partícula WIMP pode interagir com os núcleos atômicos do núcleo solar e perder energia suficiente para que lhes seja impossível escapar do poço potencial gravítico da estrela.

Se considerarmos constante a densidade do número de partículas WIMP no halo galáctico, o fluxo de partículas capturadas pelo Sol é dado por:

$$dF = v \cdot dS dn, \quad (\text{J.1})$$

onde  $v$  representa a velocidade das partículas WIMP,  $dS$  a unidade de área e  $dn$  a densidade do número de partículas no halo galáctico.

Tendo em conta uma distribuição maxwelliana:

$$dn = n_0 \left( \frac{3}{2\pi\bar{v}^2} \right) 4\pi v^2 e^{-\left(\frac{3v^2}{2\bar{v}^2}\right)} dv \quad (\text{J.2})$$

a velocidade do halo é dada por:

$$\bar{v}^2 = 3K \frac{T_x}{m_x} \quad (\text{J.3})$$

Substituindo a equação J.2 na equação J.1 obtemos para o fluxo de WIMPs:

$$dF = n_0 \left( \frac{3}{2\pi\bar{v}^2} \right) \pi v^3 e^{-\left(\frac{3v^2}{2\bar{v}^2}\right)} d(\cos^2 \theta) dv, \quad (\text{J.4})$$

com limites de integração  $0 < v < \infty$  e  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ .

A energia  $E$  e o momento angular  $J$  por unidade de massa, são

$$E = \frac{1}{2}v^2 \text{ e } J = vR \sin \theta \quad (\text{J.5})$$

Podemos realizar uma mudança de variáveis através do Jacobiano:

$$\left| \frac{\partial(\cos^2 \theta, v)}{\partial(E, J)} \right| = \left( \frac{2}{E} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(vR)^2} dE dJ^2 \quad (\text{J.6})$$

Substituindo na equação J.4, a taxa de acreção total de partículas WIMP por unidade de tempo é dada por:

$$dF = n_0 \left( \frac{3}{2\pi v^2} \right) e^{-\left(\frac{3E}{v^2}\right)} dE dJ^2 \quad (\text{J.7})$$

Como as partículas WIMP possuem trajectórias elípticas, apenas as partículas cujo perihélio (distância mais curta ao Sol numa trajectória elíptica em torno deste) é menor do que  $R_{\odot}$  podem ser capturadas. Sabendo que

$$E = \frac{v_{Radial}^2}{2} + \frac{J^2}{2r^2} - \frac{GM_{Sol}}{r} \quad (\text{J.8})$$

E que o perihélio é o ponto onde a velocidade radial  $v_{Radial}$  do WIMP é nula, logo:

$$E = \frac{J^2}{2r^2} - \frac{GM_{Sol}}{r} \quad (\text{J.9})$$

Pode-se então definir o plano  $(J^2, E)$  onde as capturas são possíveis:

$$E \geq 0 \text{ e } J^2 \leq 2R_{Sol}^2 \left( E + \frac{GM_{Sol}}{R_{Sol}} \right) \quad (\text{J.10})$$

Daqui resulta, por integração numérica da equação J.7 no plano definido pelas equações J.10, que o fluxo total de partículas WIMP capturadas pelo Sol é:

$$F \approx 1,1573 \times 10^{30} \left( s^{-1} \right) \left( \frac{m_p}{m_\chi} \right) \quad (\text{J.11})$$

em que  $m_p$  é a massa do protão.

Se as partículas WIMP não se aniquilarem o número de partículas capturadas pelo Sol vai aumentando com o tempo, caso contrário, sabendo que a taxa de aniquilação de partículas WIMP no Sol é:

$$A = \langle \sigma v \rangle \int_{\text{Sol}} n_\chi^2 dV \quad (\text{J.12})$$

$$= \frac{1}{2} C_a n_\chi^2, \quad (\text{J.13})$$

a evolução temporal da densidade de partículas WIMP no Sol (calculada a partir da diferença entre o número de partículas capturadas e o número de partículas aniquiladas) é

$$\frac{dn_\chi}{dt} = F - 2A = F - C_a n_\chi^2 \quad (\text{J.14})$$

O factor 2 deve-se ao facto de “desaparecerem” duas partículas em cada aniquilação. Resolvendo a equação diferencial, obtemos:

$$n_\chi = F\tau \tanh\left(\frac{t}{\tau}\right) \quad (\text{J.15})$$

em que  $\tau$  representa o tempo de relaxamento, isto é, o tempo que demora a atingir o equilíbrio entre as partículas WIMP capturadas e aniquiladas:

$$\tau = (FC_a)^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{J.16})$$

Como a idade do Sol é muito superior ao tempo de relaxamento  $t_{\odot} \gg \tau$ , pode-se considerar que a taxa de captura de partículas WIMP é igual à taxa de aniquilações, resultando em:

$$n_{\chi} \approx F\tau \quad (\text{J.17})$$

$$A = \frac{1}{2}F \quad (\text{J.18})$$

Como as velocidades típicas das partículas WIMP ( $\approx 300 \text{ Km/s}$ ) é inferior à velocidade de escape do Sol ( $= 618 \text{ Km/s}$ ), o Sol captura de forma eficiente as partículas WIMP do halo galáctico. Ocupando as partículas WIMP uma região limitada no núcleo solar, podemos considerar que a densidade nessa região é constante. Aí, a distribuição de partículas WIMP tem forma gaussiana:

$$n_{\chi} = n_0 e^{-\left(\frac{r}{r_0}\right)^2} \quad (\text{J.19})$$

em que  $r_0$ , representa o espaço ocupado pelas partículas WIMP:

$$r_0 = \left( \frac{3KT_{\chi}}{2\pi G\rho m_{\chi}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{J.20})$$

Se o percurso médio livre  $l_{\chi}$  (a distância percorrida entre duas colisões sucessivas) for superior à escala de comprimento  $r_0$ , as partículas WIMP percorrem uma grande distância levando consigo energia resultante das colisões no núcleo estelar e cedendo-a às partículas na camada exterior à região de partículas WIMP definida pela equação J.20. Desta forma, o Sol e as estrelas possuem outro mecanismo de transporte de energia.

Se  $l_{\chi} < r_0$ , então as partículas WIMP colidem frequentemente com as partículas do núcleo solar atingindo o equilíbrio térmico. Isto faz com que a temperatura do núcleo diminua e aumente a densidade de partículas (WIMP+bariões) no núcleo estelar.

## Apêndice L

### Alguns problemas sobre evolução estelar

Os seguintes problemas têm como objectivo mostrar aos docentes do ensino secundário de que forma podem utilizar conhecimentos adquiridos nesta tese no âmbito do currículo da disciplina de Ciências Físico-Químicas. Pretende-se, recorrendo a conhecimentos adquiridos pelos alunos e modelos simplificados, obter estimativas de algumas propriedades das estrelas em geral e do Sol em particular.

1. Estime a temperatura do núcleo solar (nota: aplique o Teorema de Virial).

O Teorema Virial para um sistema auto-gravitante é dado por:

$$E_c = -\frac{1}{2}U \quad (\text{L.1})$$

Substituindo a energia cinética e a energia potencial das partículas no núcleo solar, temos que:

$$\frac{3}{2}NKT = \frac{3}{5}G \frac{M_{SOL}^2}{R_{SOL}} \quad (\text{L.2})$$

onde  $K$  representa a constante de Boltzmann,  $N$  representa o número médio de partículas:

$$N = \frac{M_{Sol}}{m} \quad (\text{L.3})$$

e  $m$  representa a massa média das partículas no Sol. Como o Sol é constituído por 75% de hidrogénio e 25% de hélio (desprezando a contribuição de elemento pesados) a massa média é  $m = 0,75m_p + 0,25(4m_p)$ .

Substituindo na equação L.2, obtemos uma temperatura para o núcleo solar de:

$$T = \frac{2}{5} G \frac{M_{\text{Sol}} \cdot m}{K \cdot R_{\text{SOL}}} \sim 16,1 \times 10^6 \text{ K} \quad (\text{L.4})$$

Apesar de todas as simplificações e considerando que a temperatura do núcleo solar determinada a partir da heliossismologia é de  $T=1,56 \times 10^7 \text{ K}$ , obtém-se um erro de apenas 3%!

2. Considerando as propriedades do Sol descritas na tabela 1., estime o intervalo de tempo em que este ocupa a fase de sequência principal.

(nota: suponha que apenas 10% do hidrogénio solar participa nas reacções de fusão)

Alguns valores sobre o Sol	
Raio do Sol	$6,960 \times 10^8 \text{ m}$
Massa do Sol	$1,99 \times 10^{30} \text{ kg}$
Luminosidade do Sol	$3,9 \times 10^{26} \text{ W}$

Tabela 1.

### Resolução

Em primeiro lugar necessitámos de determinar a energia libertada por cada reacção de fusão nuclear. Sabendo que 4 núcleos de hidrogénio dão origem a um núcleo de hélio, a energia libertada por cada reacção de fusão é:

$$E = (4m_{\text{H}} - m_{\text{He}})c^2 \sim 4 \times 10^{-12} \text{ J} \quad (\text{L.5})$$

Como o Sol possui uma luminosidade de  $3,9 \times 10^{26} \text{ W}$ , o número de reacções que ocorrem no interior solar, são:

$$n = \frac{L_{\text{SOL}}}{E} \sim 8,73 \times 10^{37} \text{ reacções por segundo} \quad (\text{L.6})$$

A massa de hidrogénio consumida por segundo, nas reacções de fusão nuclear, é dada por:

$$m = 4n \cdot m_H \sim 5,8 \times 10^{11} \text{ Kg} \quad (\text{L.7})$$

em que o factor 4 se deve ao facto de serem consumidos quatro núcleos de hidrogénio por reacção.

Nas estrelas, a fusão nuclear ocorre apenas nos núcleos estelares. Sabendo que a massa do núcleo solar é cerca de 10% da massa do Sol e que o Sol consome cerca de  $5,8 \times 10^{11} \text{ Kg}$  por segundo, então o tempo que demora a consumir todo o núcleo solar é:

$$t = \frac{0,1 \times M_{SOL}}{m} \sim 3,4 \times 10^{17} \text{ s} \sim 11 \times 10^9 \text{ anos} \quad (\text{L.8})$$

A fase de sequência principal para uma estrela como o Sol demora cerca de 11 mil milhões de anos!

3. O engenho explosivo mais potente alguma vez criado foi detonado em 30 de Outubro de 1961 pelas forças da antiga União Soviética e designava-se por *Tsar Bomba*. Com uma potência de 50 mega toneladas, toda a energia foi libertada em apenas  $3,9 \times 10^{-8} \text{ s}$ .

Determina:

- Quanto tempo demora o Sol a libertar uma energia equivalente a uma bomba nuclear Tsar Bomba
- Quantas bombas nucleares Tsar Bomba seriam necessárias detonar para libertar a mesma energia que o Sol liberta num segundo.

(nota: 1 mega tonelada equivale a  $4,2 \times 10^9 \text{ J}$ )

### Resolução

a) Considerando a luminosidade  $L_{SOL} = 39 \times 10^{26} \text{ W}$ , o Sol liberta uma energia equivalente a uma Tsar Bomba em:

$$t = \frac{P_{Tsar} \times 4,2 \times 10^9 \text{ J}}{L_{SOL}} = \frac{50 \times 10^6 \times 4,2 \times 10^9}{3,9 \times 10^{26}} \sim 0,5 \times 10^{-9} \text{ s} \quad (\text{L.9})$$

cerca de meio nanossegundo!

b) Durante um segundo o Sol liberta energia equivalente a:

$$n = \frac{L_{SOL}}{P_{Tsar} \times 4,2 \times 10^9 J} = \frac{3,9 \times 10^{26}}{50 \times 10^6 \times 4,2 \times 10^9} \sim 2 \times 10^9 \quad (\text{L.10})$$

cerca de 2 mil milhões de bombas nucleares Tsar Bomba!

4. Considerando as anãs brancas, estrelas de neutrões e buracos negros como corpos perfeitamente esféricos com densidades constantes e os dados apresentados na tabela 2, estime:
- O raio e a densidade que teria um buraco negro com a massa da Terra.
  - A densidade de uma anã branca.
  - A densidade de uma estrela de neutrões.
  - A densidade de um buraco negro<sup>12</sup>.

Massa da Terra	$5,978 \times 10^{24} \text{ kg}$
Raio típico de uma anã branca	$\sim R_{Terra} \sim 6 \times 10^6 \text{ m}$
Raio típico de uma estrela de neutrões	$10 \times 10^3 \text{ m}$

Tabela 2.

### Resolução

Um buraco negro, classicamente, é um objecto celeste cuja velocidade de escape é superior à velocidade da luz (proposto por Laplace em 1795). A velocidade de escape de um corpo é calculada igualando as energias cinética e potencial. Resolvendo em ordem a R:

$$E_c = U \Rightarrow \frac{1}{2} mc^2 = G \frac{Mm}{R} \Rightarrow R = 2G \frac{M}{c^2} \quad (\text{L.11})$$

<sup>12</sup> A densidade a calcular, trata-se de uma densidade média, aproximada, para efeitos de comparação. Embora a massa de um buraco negro possa ser estimada, este consiste num *ponto* (definição matemática) de *densidade infinita*. O raio de Schwarzschild, a ser aqui utilizado, define a região onde a velocidade de escape é igual à velocidade da luz no vazio e não o raio do buraco negro.

Esta é a equação que nos permite determinar o raio de um buraco negro (Raio de Schwarzschild) em função da massa do mesmo. Para um buraco negro cuja massa é igual à massa da Terra o raio é:

$$R = 2G \frac{M_{Terra}}{c^2} = 8,9 \times 10^{-3} m = 8,9 mm \quad (L.12)$$

A densidade de tal buraco negro, considerando a densidade constante, é de:

$$\rho = \frac{3M_{Terra}}{4\pi R^3} = 2 \times 10^{30} Kg \cdot m^{-3} \quad (L.13)$$

A densidade de uma anã branca é:

$$\rho = \frac{3M_{CH}}{4\pi R_{anãbranca}^3} = 3 \times 10^9 Kg \cdot m^{-3} \quad (L.14)$$

A densidade de uma estrela de neutrões é:

$$\rho = \frac{3M_{CH}}{4\pi R_{est.neutrões}^3} = 6 \times 10^{17} Kg \cdot m^{-3} \quad (L.15)$$

Para calcular a *densidade* mínima de um buraco negro necessitamos de determinar o raio que teria se tivesse uma massa igual ao limite de Oppenheimer-Volkoff.

$$R = 2G \frac{M_{Op-Vol}}{c^2} = 2G \frac{3M_{Solares}}{c^2} = 8,9 \times 10^3 m \quad (L.16)$$

Logo a *densidade* de tal buraco negro é:

$$\rho = \frac{3 \times 3M_{Solares}}{4\pi R_{BuracoNegro}^3} = 2 \times 10^{18} Kg \cdot m^{-3} \quad (L.17)$$

5. As anãs brancas e as estrelas de neutrões possuem inicialmente temperaturas na superfície de vários  $10^6$  K. No entanto, uma vez que não existem processos de fusão nuclear no seu interior, as anãs brancas e estrelas de neutrões arrefecem rapidamente para temperaturas de superfície de  $\sim 2,5 \times 10^4$  K e  $\sim 1 \times 10^6$  K respectivamente. A que zona do espectro electromagnético devemos estar atentos se queremos detectar uma anã branca ou estrela de neutrões?

### Resolução

Aplicando a lei de Wien às anãs brancas, obtemos:

$$\lambda T = 0,2899 \times 10^{-2} \Rightarrow \lambda = 1,2 \times 10^{-7} \text{ m} \quad (\text{L.18})$$

Que se encontra na zona da radiação ultravioleta. No caso das estrelas de neutrões:

$$\lambda T = 0,2899 \times 10^{-2} \Rightarrow \lambda = 2,9 \times 10^{-9} \text{ m} \quad (\text{L.19})$$

devemos estar atentos à zona dos raios-X.

## Bibliografia

### Livros e artigos

1. Peebles, Phillip. Principles of Physical Cosmology. New Jersey: Princeton University Press, 1993.
2. Weinberg, Steven. Gravitation and Cosmology. EUA: John Wiley & Sons. Inc, 1972.
3. Green, Simon and Mark Jones. An Introduction to the Sun and Stars. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.
4. Phillips, A.C.. The Physics of Stars. UK: John Wiley & Sons, 1994.
5. Kartunnen, Hannu. Fundamental Astronomy, 3<sup>a</sup> Ed. Berlim: Springer-Verlag , 1996.
6. Perkins, Donald. Particle Astrophysics. UK: Oxford University Press, 2003.
7. Overduin, J.M. and P.S. Wesson. Dark Sky, Dark Matter. UK: IOP Publishing, 2003.
8. Liddle, Andrew. An Introduction to Modern Cosmology. UK: John Wiley and Sons, 2003.
9. Tetradis, N. Dark Energy and Dark Matter in Galaxy Halos. (arXiv:hep-ph/0507288 v.1 25 Jul 2005)
10. Muñoz, Carlos. Dark Matter Detection In The Light Of Recent Experimental Results. (arXiv:hep-ph/0309346 v.4 31 May 2004)
11. Kaplinghat, Manoj. Dark Matter from Early Decays. (arXiv:astro-ph/0507300 v.1 13 Jul 2005)
12. Olive. Keith A. Why Do We Need Non-Baryonic Dark Matter? (arXiv:astro-ph/9605068 v.1 13 May 1996)
13. Kochanek, C.S. Where Does The Dark Matter Begin? (arXiv:astro-ph/0412089 v1 3 Dec 2004)
14. Griest, Kim. The Search for Dark Matter: WIMPs and MACHOS. (arXiv:hep-ph/9303253 v1.13 Mar 1993)
15. Griest, Kim. The Particle- And Astro-Physics Of Dark Matter. (arXiv:astro-ph/9411038 v1 9 Nov 1994)
16. Jungman, Gerard e Kamionkowski, Marc e Griest, Kim. Supersymmetric Dark Matter. (arXiv:hep-ph/9506380 v1 22 Jun 1995)
17. Drees, Manuel. Supersymmetric Dark Matter 2004. (arXiv:hep-ph/0410113 v1 7 Oct 2004)
18. Olive, Keith A. Dark Matter Candidates in Supersymmetric Models

- (arXiv:hep-ph/0412054 v1 3 Dec 2004)
19. Primack, Joel R. Status of Cold Dark Matter Cosmology. (arXiv:astro-ph/0205391 v1 22 May 2002)
  20. Na, Jin H. e Evans, N. Wyn. Simple Models for the Distribution of Dark Matter. (arXiv:astro-ph/0508419 v1 19 Aug 2005)
  21. Wells, James D. Mass Density Of Neutralino Dark Matter. (arXiv:hep-ph/9708285 v1 7 Aug 1997)
  22. Bergh, Sidney Van Den. The Early History Of Dark Matter. (astro-ph/9904251 19 Apr 1999)
  23. Bottino, A. et al. Does Solar Physics Provide Constraints to Weakly Interacting Massive Particles? (arXiv:hep-ph/0206211 v1 21 Jun 2002)
  24. Bertone, Gianfranco et al. Particle Dark Matter: Evidence, Candidates and Constraints. (arXiv:hep-ph/0404175 v2 13 Aug 2004)
  25. Gould, Andrew. Resonant Enhancements in Weakly Interacting Massive Particle Capture by the Earth. *The Astrophysical Journal*. 321. 1987. 571-585
  26. Press W.H. e Spergel D.N. Capture by the Sun of a Galactic Population of Weakly Interacting Massive Particles. *The Astrophysical Journal*. 296. 1985. 679-684
  27. Bouquet A. e Salati P. Dark Matter and the Suppression of Stellar Core Convection. *The Astrophysical Journal*. 346. 1989. 284-288
  28. Bouquet A. e Salati P. Life and Death of Cosmions in Stars. *Astronomy and Astrophysics*. 217. 1989. 270-282
  29. Lopes, Ilídio P. et al. Solar Seismic Model as a New Constraint on Supersymmetric Dark Matter. (arXiv:astro-ph/0205066 v1 6 May 2002)
  30. Lopes, Ilídio P. et al. Helioseismology as a New Constraint on SUSY Dark Matter. (arXiv:astro-ph/0111530 v1 28 Nov 2001)

#### **Páginas Web e Artigos publicados na Internet**

31. Silk, Joe. Dark Matter (<http://astron.berkeley.edu/~mwhite/darkmatter/essay.html>)
32. Smith, Nigel. The search for dark matter. <http://physicsweb.org/articles/world/13/1/9>
33. Araújo, Henrique. Universe reveals its dark side. <http://physicsweb.org/articles/world/18/5/4>
34. Ellis, John. Particle physics: the next generation. <http://physicsweb.org/articles/world/12/12/12>

35. Horne, Keith. Gravitational lensing brings extrasolar planets into focus.  
<http://physicsweb.org/articles/world/17/6/3>
36. Cameron, Andrew C. Extrasolar planets. <http://physicsweb.org/articles/world/14/1/7/2>
37. Dumé, Belle. Can stars become only so big? <http://physicsweb.org/articles/news/9/3/8>
38. Dumé, Belle. Old star sheds light on creation of elements.  
<http://physicsweb.org/articles/news/6/10/20>
39. Zane, Sílvia. e Turolla, Roberto. Strongest magnet in the cosmos.  
<http://physicsweb.org/articles/world/16/1/3>
40. Dumé, Belle. X-rays probe neutron stars. <http://physicsweb.org/articles/news/6/11/4>
41. Nave, Carl R. HyperPhysics. <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/hframe.html>

#### **Páginas e artigos sem autores declarados**

42. Stellar Evolution – Cycles of Formation and Destruction.  
[http://chandra.harvard.edu/edu/formal/stellar\\_ev/story/story.pdf](http://chandra.harvard.edu/edu/formal/stellar_ev/story/story.pdf)
43. Stellar Evolution & The Chandra X-Ray Observatory.  
[http://chandra.harvard.edu/edu/formal/stellar\\_ev/stellar\\_ev.pdf](http://chandra.harvard.edu/edu/formal/stellar_ev/stellar_ev.pdf)
44. NASA's Observatorium: Stellar Evolution & Death.  
[http://observe.arc.nasa.gov/nasa/space/stellardeath/stellardeath\\_intro.html](http://observe.arc.nasa.gov/nasa/space/stellardeath/stellardeath_intro.html)
45. Super-Kamiokande finds neutrino mass. <http://physicsweb.org/articles/news/2/6/2>
46. Neutrino mass discovered. <http://physicsweb.org/articles/world/11/7/3>
47. Uranium reveals the age of the universe. <http://physicsweb.org/articles/news/5/2/5>
48. Dark matter claim meets resistance. <http://physicsweb.org/articles/news/4/2/16>

