

João Emílio Raimundo Carrilho de Matos

# Formas Normais de Campos de Vectores

**U.** PORTO

**FC**

FACULDADE DE CIÊNCIAS  
UNIVERSIDADE DO PORTO

Departamento de Matemática Aplicada  
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto  
Março de 2005

# Formas Normais de Campos de Vectores



Departamento de Matemática Aplicada  
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

Março/2005

*Silvio Gama*

# Formas Normais de Campos de Vectores

João Emílio Raimundo Carrilho de Matos

14-04-05



Jose Agostinho

*Tese submetida à Faculdade de Ciências da Universidade do Porto  
para obtenção do grau de Mestre em Matemática-Matemática Aplicada*

orientada por

Pr. Doutor José Basto-Gonçalves

Departamento de Matemática Aplicada  
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

Março/2005

|   |                  |
|---|------------------|
| DEPARTAMENTO DE<br>MATEMÁTICA APLICADA - FCUP |                  |
| BIBLIOTECA                                    |                  |
| Data de entrada                               | 10 / 05 / 05     |
| N.º de registo                                | 4676             |
| Cota  | QA1m 2005 MATj E |

Aos meus pais

## Agradecimentos

Gostaria de lembrar algumas pessoas, como forma de lhes expressar a minha gratidão pelo facto de me terem ajudado a construir este trabalho.

Agradeço,

- ao Prof. Doutor José Basto-Gonçalves, por todo o seu apoio prestado desde a primeira hora, pela disposição e eficiência em solucionar vários problemas e pelos incentivos com que acompanhou este trabalho.
- à Dr<sup>a</sup>. Maria Helena da Silva, sem a sua compreensão não seria possível conciliar o trabalho no I.S.E.P. com a realização deste trabalho.
- à Carla, pela compreensão do tempo que não tive para ela.
- à Dulce, pelo tempo dedicado às traduções.

# Conteúdo

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Teoria Clássica das Formas Normais</b>     | <b>1</b>  |
| 1.1      | Introdução . . . . .                          | 1         |
| 1.2      | Redução Formal a uma Forma Normal . . . . .   | 2         |
| 1.2.1    | Caso não ressonante . . . . .                 | 2         |
| 1.2.2    | Caso ressonante . . . . .                     | 5         |
| 1.3      | Estudo da convergência . . . . .              | 7         |
| 1.3.1    | Definições e resultados elementares . . . . . | 7         |
| 1.3.2    | Ressonâncias no domínio de Poincaré. . . . .  | 7         |
| 1.3.3    | Ressonâncias no domínio de Siegel. . . . .    | 8         |
| 1.3.4    | Teorema de Poincaré-Dulac . . . . .           | 9         |
| <b>2</b> | <b>Campos Reais Finitamente Determinados.</b> | <b>10</b> |
| 2.1      | Definições e resultados elementares. . . . .  | 10        |
| 2.2      | Teoremas de Ichikawa e de Belitskii. . . . .  | 11        |
| 2.3      | Lema de Takens e corolários . . . . .         | 12        |
| <b>3</b> | <b>Renormalização Formal</b>                  | <b>16</b> |
| 3.1      | Introdução . . . . .                          | 16        |
| 3.2      | Método Utilizado na Renormalização . . . . .  | 17        |
| 3.3      | Primeiros Passos da Renormalização . . . . .  | 22        |
| 3.3.1    | $p = 3$ . . . . .                             | 22        |
| 3.3.2    | $p = 4$ . . . . .                             | 23        |
| 3.3.3    | $p = 5$ . . . . .                             | 23        |
| 3.3.4    | $p = 6$ . . . . .                             | 24        |
| 3.3.5    | $p = 7$ . . . . .                             | 24        |
| 3.3.6    | $p = 8$ . . . . .                             | 25        |
| 3.3.7    | $p = 9$ . . . . .                             | 26        |
| 3.4      | Passos Seguintes da Renormalização . . . . .  | 26        |

|          |                                      |           |
|----------|--------------------------------------|-----------|
| 3.4.1    | $p = 6j + 1$                         | 27        |
| 3.4.2    | $p = 6j + 2$                         | 29        |
| 3.4.3    | $p = 6j + 3$                         | 30        |
| 3.4.4    | $p = 6j + 4$                         | 31        |
| 3.4.5    | $p = 6j + 5$                         | 33        |
| 3.4.6    | $p = 6(j + 1)$                       | 34        |
| 3.5      | A Forma Renormalizada                | 36        |
| 3.6      | Transformação conjunta               | 37        |
| 3.6.1    | Primeiro Passo ( $j = 1$ )           | 38        |
| 3.6.2    | Passos Seguintes ( $j > 1$ )         | 40        |
| <b>A</b> | <b>Discussão dos Sistemas</b>        | <b>43</b> |
| A.1      | Discussão do Sistema 3.4.2           | 43        |
| A.2      | Código do programa ( $p = 6j + 2$ )  | 43        |
| A.3      | Discussão do Sistema 3.4.3           | 45        |
| A.4      | Código do programa ( $p = 6j + 3$ )  | 46        |
| A.5      | Discussão do Sistema 3.4.4           | 47        |
| A.6      | Discussão do Sistema 3.4.5           | 49        |
| A.7      | Código do programa ( $p = 6j + 5$ )  | 49        |
| A.8      | Discussão do Sistema 3.4.6           | 50        |
| A.9      | Código do programa ( $p = 6j + 6$ )  | 50        |
| A.10     | Código para o Sistema ( $j = 1$ )    | 52        |
| A.11     | Código para o Sistema ( $j \geq 2$ ) | 53        |

# Resumo

A Teoria das formas normais de campos de vectores foi introduzida por Poincaré na sua tese de doutoramento e revelou-se uma ferramenta útil para estudar sistemas dinâmicos numa vizinhança de um ponto singular. As formas normais são utilizadas para estudar a estabilidade de pontos singulares de sistemas dinâmicos bem como campos de vectores que dependem de parâmetros (teoria da bifurcação) e neste estudo é relevante encontrar uma forma normal “mais simples”.

Esta tese está estruturada da seguinte forma, o capítulo 1 contém os resultados clássicos da teoria das formas normais formais.

O capítulo 2 contém os resultados (devidos essencialmente a: F. Takens, F. Ichikawa, G. Belitskii e J. Yang) usados para encontrar a forma normal “mais simples” de campos de vectores finitamente determinados.

J. Yang encontrou a forma normal “mais simples” dos campos de vectores 1-ressonantes mas não fortemente 1-ressonantes em  $\mathbb{R}^3$  (ver[2]), completando deste modo a classificação de todos os campos de vectores finitamente determinados em  $\mathbb{R}^3$ .

No capítulo 3, propomos encontrar a forma normal formal (3.11) de campos de vectores em  $\mathbb{R}^3$  cujas partes lineares têm valores próprios  $\lambda = (1, -1, 2)$ , note-se que estes campos de vectores não são 0-ressonantes nem 1-ressonantes, logo pelo teorema de Ichikawa não são finitamente determinados <sup>1</sup>.

Para obtermos a forma normal (3.11), partimos da forma normal de Poincaré-Dulac e vamos sucessivamente simplificando os termos ressonantes de grau 2, 3, ..., usando sucessivamente transformações ressonantes de grau 1, 2, .... O número de monómios ressonantes que conseguimos eliminar em cada passo depende da resolução de um sistema de equações lineares. O es-

---

<sup>1</sup>É em  $\mathbb{R}^3$  que surgem os primeiros campos de vectores que não são 0-ressonantes nem 1-ressonantes.

tudo da característica das matrizes associadas a estes sistemas é efectuado no apêndice (A). Apesar de a forma normal (3.11) não ser analiticamente demonstrada, devido à dificuldade de demonstrar que certos sistemas lineares encontrados têm característica máxima, há fortes argumentos numéricos que o sugerem, para o efeito calcularam-se os determinantes das primeiras matrizes (de dimensão máxima) usando programas em MatLab, cujos resultados estão igualmente indicados no apêndice (A). Ao simplificarmos os monómios ressonantes de grau  $p = 6j + 3$  obtivemos um sistema com mais uma incógnita que equações, logo sob a hipótese de que a matriz associada a este sistema tem característica máxima, “desperdiçou-se” uma incógnita. Tendo em vista a simplificação da forma normal (3.11) aplicou-se uma transformação ressonante contendo apenas monómios ressonantes de grau  $6j + 1$  e  $6j + 2$  para simplificar simultaneamente os termos de grau  $6j + 2$  e  $6j + 3$ , este método (chamado de transformação conjunta) está indicado na secção 3.6. Contudo resultados numéricos (ver apêndices (A.10 e A.11)) mostram que, pelo menos nos primeiros termos, não é possível simplificar por este processo a forma normal (3.11).

# Summary

The normal forms theory was introduced by Poincaré in his thesis and became a useful tool to study the stability of vector fields and vector fields depending on parameters (bifurcation theory), and in this study it is relevant to find a “simplest” normal form.

The structure of this thesis is the following, in the chapter 1 we give the classic results of the normal forms theory.

In the chapter 2 we give the results (due to: F. Takens, F. Ichikawa, G. Belitskii and J. Yang) used to find the “simplest” normal form of finitely determined vector fields.

J. Yang finished the classification of all finitely determined vector fields on  $\mathbb{R}^3$  (see [2]).

In the chapter 3 we find a “simplest” normal form (3.11) of generic vector fields on  $\mathbb{R}^3$  with eigenvalues  $\lambda = (1, -1, 2)$ , we note that these vector fields are neither 0-resonant nor 1-resonant, then by Ichikawa’s theorem they are not finitely determined <sup>2</sup>.

In order to obtain the normal form (3.11) we start from Poincaré-Dulac’s normal form and we successively simplify the resonant terms of degree 2, 3 . . . , applying resonant transformations of degree 1, 2 . . . . The number of resonant monomials that we can kill in each step depends on the rank of a linear system. The study of the rank of these matrices is in appendix (A). We did not prove analytically the normal form (3.11) due to the difficulty to prove that certain matrices have maximal rank, however there are strong numeric arguments that take us to believe that in fact these matrices have maximal rank (in appendix (A) some results obtained from MatLab programs which show that the first ones matrices have maximal rank). In this process, when we try simplifying the terms of degree  $p = 6j + 3, j = 1, 2, \dots$ , we obtain one

---

<sup>2</sup>It is on  $\mathbb{R}^3$  that appear the first ones vector fields that are neither 0-resonant nor 1-resonant.

linear system that have one more variable than equations, so in order to use this variable we try simplify the resonant terms of degrees  $6j + 2$  and  $6j + 3$ , in the same step, with resonant transformations which contain only terms of degrees  $6j + 1$  and  $6j + 2$ , we explain this process in section (3.6). Again we used MatLab programs to show that the first matrices have vanishing determinant (see appendix (A.10 and A.11)).

# Résumé

La théorie des formes normales de champs de vecteurs a été introduite par Poincaré dans sa thèse de doctorat et elle s'a révélé un organe de travail utile pour l'étude des systèmes dynamiques au voisinage d'un point singulier. On utilise les formes normales pour étudier la stabilité de points singuliers de systèmes dynamiques ainsi que champs de vecteurs qui dépendent de paramètres (théorie de la bifurcation) et dans cette étude c'est relevant trouver une forme normal "plus simple".

Cette thèse est structurée comme suit: chapitre 1 contient les résultats classiques de la théorie des formes normales formelles. Chapitre 2 contient les résultats (essentiellement par: F. Takens, F. Ichikawa, G. Belitskii et J. Yang) utilisées pour trouver la forme normale "plus simple" des champs de vecteurs finitement déterminés. J. Yang a trouvé la forme normale "plus simple" des champs de vecteurs 1-résonnants mais pas fortement 1-resónnants dans  $\mathbb{R}^3$  (voir [2]), complétant de cette façon la classification de tous les champs de vecteurs finitement déterminés dans  $\mathbb{R}^3$ .

Dans chapitre 3, nous proposons de trouver la forme normale formelle (3.11) de champs de vecteurs dans  $\mathbb{R}^3$ , dont les parties linéaires ont des valeurs propres  $\lambda = (1, -1, 2)$ , on peut noter que ces champs de vecteurs ne sont ni 0-résonnants ni 1-résonnants, et a veut dire que selon le théorème de Ichikawa ils ne sont pas finitement déterminés<sup>3</sup>. Pour obtenir la forme normale (3.11), nous partons de la forme normale de Poincaré-Dulac et nous simplifions successivement les termes résonnants de degré 2, 3, ..., usant successivement des transformations résonnantes de degré 1, 2, .... Le numéro de monômes résonnants que nous pouvons éliminer dans chaque phase dépend de la résolution d'un système d'équations linéaires. L'étude de la caractéristique des matrices associés a ces systèmes est effectué dans

---

<sup>3</sup>C'est dans  $\mathbb{R}^3$  que apparaissent les premiers champs de vecteurs que ne sont pas ni 0-resónnants ni 1-resónnants.

l'appendice (A). Même si la forme formale (3.11) n'est pas analytiquement démontrée, à cause de la difficulté pour démontrer que certains systèmes linéaires trouvés ont une caractéristique maximale, il y'a des arguments numériques forts que la suggèrent, pour l'effet ont été calculés les déterminants des premières matrices (de dimension maximale) usant des programmes en MatLab, dont les résultats sont également indiqués dans l'appendice (A). En simplifiant les monômes résonnants de degré  $p = 6j + 3$ , nous avons obtenu un système avec une inconnue en plus équations; sur l'hypothèse que la matrice associée à ce système, ait caractéristique maximale on perde une inconnue. Ayant en vue la simplification de la forme normale, on a appliqué une transformation résonnante contenant seulement des monômes résonnants de degré  $6j + 1$  et  $6j + 2$ , a fin de simplifier simultanément les termes de degré  $6j + 2$  et  $6j + 3$ , cette méthode (appelé de transformation conjointe) est indiquée dans la section (3.6). Mais les résultats numériques (voir appendices (A.10 et A.11)) montrent que, par moins dans les premières termes, il n'y est pas possible simplifier pour ce proces la forme normale (3.11).

# Capítulo 1

## Teoria Clássica das Formas Normais

### 1.1 Introdução

Um campo de vectores numa variedade diferenciável  $M$  é uma secção  $V : M \rightarrow TM$ . Em coordenadas locais  $V(\mathbf{x}) = \sum_i V_i(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i}$ , onde  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  é uma base de  $T_{\mathbf{x}}M$ . Um difeomorfismo  $\phi : M \rightarrow M$  transforma um campo de vectores  $V$  no campo de vectores

$$(\phi_*V)(\mathbf{x}) = (\phi'(\mathbf{x}))^{-1}V(\phi(\mathbf{x})),$$

onde  $\mathbf{x} \in M$  e  $\phi'(\mathbf{x})$  é a matriz jacobiana da função  $\phi(\mathbf{x})$ . Dois campos de vectores  $V$  e  $\tilde{V}$  dizem-se conjugados se existir uma transformação  $\phi$  tal que  $\tilde{V} = \phi_*V$ . A ideia intuitiva é encontrar uma transformação que leve um campo de vectores num campo de vectores mais simples (forma normal), e portanto mais conveniente para o estudo da equação. Dois campos de vectores  $V$  e  $\tilde{V}$  dizem-se conjugados numa vizinhança de um ponto  $\mathbf{x}_0 \in M$  se existir uma transformação local  $\phi : U_{\mathbf{x}_0} \rightarrow \tilde{U}_{\mathbf{x}_0}$  de uma vizinhança  $U$  de  $\mathbf{x}_0$  numa vizinhança  $\tilde{U}$  de  $\mathbf{x}_0$  tal que  $\tilde{V}(\mathbf{x}) = (\phi_*V)(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in U_{\mathbf{x}_0}$ .

No contexto local, podemos identificar uma vizinhança  $U$  e o espaço tangente  $T_{\mathbf{x}}M$ ,  $\mathbf{x} \in U$  com  $\mathbb{R}^n$ . Após esta identificação, um campo de vectores

$$V(\mathbf{x}) = \sum_i V_i(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

pode interpretar-se com a função  $V : W_{\mathbf{x}_0} \rightarrow \mathbb{R}^n$  onde  $W_{\mathbf{x}_0}$  é uma vizinhança de  $\mathbf{x}_0$  em  $\mathbb{R}^n$ .

**Exemplo 1.1.1.** Seja  $V(\mathbf{x}_0) = \mathbf{c}$ , onde  $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ , então pelo teorema da rectificação o campo de vectores é localmente conjugado com o campo de vectores constante  $(\phi_*V)(\mathbf{x}) = \mathbf{c}$ ,  $\mathbf{x} \in U_{\mathbf{x}_0}$ . Óbviamente as trajectórias deste campo são as rectas da forma  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{c}t + \mathbf{x}$ .

**Exemplo 1.1.2.** Seja  $V(x) = \lambda x + h(x)$ , onde  $x \in \mathbb{R}$  e  $h(0) = h'(0) = 0$ , um campo de vectores de classe  $C^\infty$  numa vizinhança de  $x_0 = 0$ . Se  $\lambda \neq 0$ , então o campo de vectores  $V$  é localmente  $C^\infty$ -conjugado á sua parte linear.

## 1.2 Redução Formal a uma Forma Normal

### 1.2.1 Caso não ressonante

De acordo com o teorema de Poincaré um campo de vectores “não ressonante”, na classe das séries formais<sup>1</sup>, pode ser reduzido à sua forma linear numa vizinhança de um ponto singular, por um difeomorfismo formal.

**Definição 1.2.1.** Seja  $V : U \rightarrow \mathbb{C}^n$  um campo de vectores, onde  $U$  é um aberto de  $\mathbb{C}^n$  que contém um ponto singular, que podemos supôr a origem, e  $V(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \dots$  a sua série (formal) de Taylor. O  $n$ -uplo  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  de valores próprios da matriz  $A$ , diz-se ressonante se existe  $s \in \{1, \dots, n\}$  tal que  $\lambda_s = (\mathbf{m}, \lambda)$ , onde  $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N}_0^n$  e  $\sum_{k=1}^n m_k \geq 2$ . A  $\|\mathbf{m}\| = \sum_{k=1}^n m_k$  chama-se ordem de ressonância.

**Teorema de Poincaré.** [1] *Se os valores próprios da matriz  $A$  forem não ressonantes, então a equação diferencial  $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \dots$  pode ser transformada, por uma mudança de variáveis formal  $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \dots$ , na equação*

$$\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y}.$$

A demonstração do teorema de Poincaré consiste na sucessiva eliminação dos termos de grau 2, 3, ... do lado direito da equação e cada eliminação exige a resolução de uma equação homológica.

**Lema 1.2.1.** [1] *A equação diferencial  $\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y}$  é transformada na equação*

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + V(\mathbf{x}) + \dots,$$

<sup>1</sup>i é, não exigimos a convergência numa vizinhança da origem

por uma mudança de variáveis da forma

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} + H(\mathbf{y}),$$

onde  $H(\mathbf{y})$  é um polinómio vectorial com 1-jacto nulo e

$$V(\mathbf{x}) = \left( \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \right) A\mathbf{x} - AH(\mathbf{x}).$$

**Demonstração.**

$$\dot{\mathbf{x}} = \left( I + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{y}} \right) A\mathbf{y} = \left( I + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{y}} \right) A(\mathbf{x} - H(\mathbf{x}) + \dots) = A\mathbf{x} + \left[ \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} A\mathbf{x} - Ah(\mathbf{x}) \right] + \dots$$

□

**Definição 1.2.2.** Dada uma matriz  $A$ , definimos o operador linear  $L_A$ , onde

$$L_A H = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} A\mathbf{x} - AH(\mathbf{x})$$

e chamamos equação homológica, à equação

$$L_A H = V,$$

onde  $V$  é um campo de vectores conhecido e  $H$  a incógnita.

O operador linear  $L_A$  actua no espaço vectorial dos campos de vectores formais, que denotaremos por  $\mathcal{H}_n$ . Ao subespaço, de dimensão finita, formado pelos polinómios vectoriais homogéneos de grau  $k$ , denotaremos por  $\mathcal{H}_n^k$ . Então temos  $\mathcal{H}_n = \mathcal{H}_n^0 \oplus \mathcal{H}_n^1 \oplus \mathcal{H}_n^2 \oplus \dots$  e que  $L_A(\mathcal{H}_n^k) \subset \mathcal{H}_n^k$ . Seja  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  uma base formada por vectores próprios da matriz  $A$ , então

$$\left\{ \mathbf{x}^{\mathbf{m}} \frac{\partial}{\partial x_i} = x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n} \frac{\partial}{\partial x_i} : \|\mathbf{m}\| = k \text{ e } i = 1 \dots n \right\}$$

forma uma base de  $\mathcal{H}_n^k$ .

**Lema 1.2.2.** [1] Se o operador  $A$  é diagonal, então o operador  $L_A$  é igualmente diagonal e os monómios vectoriais  $\mathbf{x}^{\mathbf{m}} \frac{\partial}{\partial x_i}$  são vectores próprios de  $L_A$  com valores próprios associados  $[(\mathbf{m}, \lambda) - \lambda_i]$ . Ou seja, temos:

$$L_A \left( \mathbf{x}^{\mathbf{m}} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) = [(\mathbf{m}, \lambda) - \lambda_i] \mathbf{x}^{\mathbf{m}} \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (1.1)$$

**Exemplo 1.2.1.** Seja  $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  um operador linear que na base  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ , é representada pela matriz:  $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ , e seja  $V \in \mathcal{H}_2^2$ , onde  $\mathcal{H}_2^2$  é o espaço dos polinómios homogêneos de grau 2 em  $\mathbb{R}^2$ . Então

$$\left( x^2 \frac{\partial}{\partial x}, xy \frac{\partial}{\partial x}, y^2 \frac{\partial}{\partial x}, x^2 \frac{\partial}{\partial y}, xy \frac{\partial}{\partial y}, y^2 \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

é uma base de  $\mathcal{H}_2^2$ , e a matriz de  $L_A$  relativa a esta base é:

$$L_A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_1 + 2\lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\lambda_1 - \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

**Corolário 1.2.1.** [1] Se o conjunto dos valores próprios de  $A$  for não ressonante, a equação homológica  $L_A H = V$  é resolúvel para todo o campo formal com 1-jacto nulo. Se não existem ressonâncias de ordem  $k$ , então a equação homológica,  $L_A H = V_k$ , tem uma solução  $H_k \in \mathcal{H}_n^k$ , para todo  $V_k \in \mathcal{H}_n^k$  onde  $k \geq 2$ .

Se a matriz  $A$  não é diagonal (tem blocos de Jordan), então  $L_A$  tem igualmente blocos de Jordan e os valores próprios de  $L_A$  são dados igualmente por (1.1). Então para valores próprios (eventualmente com multiplicidade maior do que um) não ressonantes, o operador  $L_A$  é igualmente invertível, aplicando-se portanto a este caso o corolário anterior.

**Demonstração do Teorema de Poincaré.** Seja a equação diferencial

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + V_r(\mathbf{x}) + \dots,$$

onde  $r \geq 2$ ,  $V_r(\mathbf{x}) \in \mathcal{H}_n^r$ , com  $V_r(\mathbf{x}) = \sum_{s=1}^n \sum_{\|\mathbf{m}\|=r} v_{m,s} \mathbf{x}^{\mathbf{m}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}$ , e os valores próprios da matriz  $A$  são não ressonantes, temos que, a equação

$$L_A H = V_r,$$

tem uma solução

$$H_r(\mathbf{x}) = \sum_{s=1}^n \sum_{\|\mathbf{m}\|=r} \frac{v_{m,s}}{(\mathbf{m}, \lambda) - \lambda_s} \mathbf{x}^{\mathbf{m}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}.$$

Aplicando agora à equação diferencial a mudança de variáveis  $\mathbf{x} = \mathbf{y} + H_r(\mathbf{y})$ , pelo lema 1.2.1, transformamos a equação inicial numa equação da forma

$$\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y} + \tilde{V}_{r+1}(\mathbf{y}) + \dots,$$

onde  $\tilde{V}_{r+1} \in \mathcal{H}_n^{r+1}$ , i.e., eliminámos todos os termos de ordem  $r$  do lado direito da equação diferencial. Usando sucessivamente este processo, construímos uma sucessão de mudanças de variáveis  $\mathbf{x} = \mathbf{y} + H_j(\mathbf{y})$ ,  $j = 2, 3, \dots$  que no limite transformam a equação dada na equação  $\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y}$  (forma normal de Poincaré).  $\square$

## 1.2.2 Caso ressonante

**Definição 1.2.3.** Se na parte linear de um campo de vectores  $V = A\mathbf{x} + \dots$ , existirem ressonâncias entre os valores próprios  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , ou seja, se existir  $i \in \{1, \dots, n\}$  tal que  $\lambda_i = (\mathbf{m}, \lambda)$  com  $\|\mathbf{m}\| \geq 2$ , dizemos que um monómio da forma

$$\mathbf{x}^{\mathbf{m}} \frac{\partial}{\partial x_i} = x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n} \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (1.2)$$

é um monómio ressonante (relativamente à matriz  $A$ ).

**Teorema de Poincaré-Dulac.** [1] *Seja  $\dot{\mathbf{x}} = V(\mathbf{x})$  uma equação diferencial onde*

$$V(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + V_2(\mathbf{x}) + \dots + V_k(\mathbf{x}) + \dots, \quad V_k \in \mathcal{H}_n^k, \quad (1.3)$$

*então a equação diferencial pode ser transformada numa equação da forma*

$$\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y} + W_2(\mathbf{y}) + \dots + W_k(\mathbf{y}) + \dots, \quad (1.4)$$

*onde  $W_i \in \mathcal{H}_n^i$  e  $W_i(\mathbf{y})$  contém apenas monómios ressonantes, para todo  $i \geq 2$ .*

O teorema de Poincaré-Dulac não permite geralmente a linearização de um campo de vectores, mesmo que na sua série de Taylor formal existam apenas monómios não ressonantes (ver exemplo 1.2.2).

**Exemplo 1.2.2.** [4] *Seja o campo de vectores  $V : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ ,*

$$V(x, y) = (-x + y^3) \frac{\partial}{\partial x} + (y + x^4 y) \frac{\partial}{\partial y},$$

a parte linear de  $V$  é ressonante e a parte não linear nem contém monómios da forma  $x^{k+1}y^k \frac{\partial}{\partial x}$  nem da forma  $x^k y^{k+1} \frac{\partial}{\partial y}$  (i.e. não contém monómios ressonantes). Contudo o primeiro passo do método de Poincaré-Dulac, leva-nos à mudança de variáveis  $x = x - \frac{y^3}{4}$ ,  $y = y$ , o que elimina os termos de ordem inferior mas o campo de vectores fica da forma:

$$V(x, y) = \left( -x - \frac{3}{4} \left( x + \frac{y^3}{4} \right)^4 y^3 \right) \frac{\partial}{\partial x} + \left( y + \left( x + \frac{y^3}{4} \right)^4 y \right) \frac{\partial}{\partial y},$$

que já contém os monómios ressonantes  $x^4 y^3 \frac{\partial}{\partial x}$  e  $x^3 y^4 \frac{\partial}{\partial y}$ .

No caso em que a matriz  $A$  na forma de Jordan tem parte nilpotente não nula podemos ainda “simplificar” a forma normal de Poincaré-Dulac (i.e., é ainda possível eliminar alguns monómios ressonantes existentes na forma normal de Poincaré-Dulac) usando o teorema de Belitskii (ver exemplo 1.2.3).

**Teorema de Belitskii.** ([5],[2]) *Seja  $V(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \dots$  um campo de vectores com parte linear  $A = S + N$ , onde  $S$  é a parte semi-simples e  $N \neq \mathbf{0}$  a parte nilpotente. Então a equação diferencial  $\dot{\mathbf{x}} = V(\mathbf{x})$  pode-se reduzir por uma mudança de variáveis formal a uma equação da forma*

$$\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y} + H(\mathbf{y}),$$

onde a série formal  $H(\mathbf{y})$  satisfaz as seguintes equações:

$$\left( \frac{\partial H}{\partial \mathbf{y}} \right) S\mathbf{y} - SH(\mathbf{y}) = 0, \text{ e } \left( \frac{\partial H}{\partial \mathbf{y}} \right) N^T \mathbf{y} - N^T H(\mathbf{y}) = 0.$$

**Exemplo 1.2.3.** Seja a equação diferencial  $\dot{\mathbf{x}} = V(\mathbf{x})$ , onde  $V : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$  com parte linear,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Os monómios ressonantes são da forma,

$$x_1^i x_2^j \frac{\partial}{\partial x_1}; x_1^i x_2^j \frac{\partial}{\partial x_2}, i + j \geq 2 \text{ e } x_1^i x_2^j x_3 \frac{\partial}{\partial x_3}, i + j \geq 1.$$

O teorema de Poincaré-Dulac permite-nos reduzir a equação diferencial na forma:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + f(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = g(x_1, x_2) \\ \dot{x}_3 = x_3 + h(x_1, x_2) \end{cases},$$

onde  $f$  e  $g$  não têm parte linear, e  $h$  não tem termo constante. Como a parte nilpotente é não nula o teorema de Belitskii permite-nos ainda reduzir a equação diferencial à forma normal de Belitskii:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + f(x_1) \\ \dot{x}_2 = x_2 f(x_1) + g(x_1) \\ \dot{x}_3 = x_3 + h(x_1) \end{cases},$$

onde  $f(0) = g(0) = g'(0) = h(0) = 0$ .

## 1.3 Estudo da convergência

### 1.3.1 Definições e resultados elementares

No estudo da convergência das séries de Poincaré, construídas na secção anterior, iremos distinguir dois casos dependendo da distribuição dos valores próprios em  $\mathbb{C}$ .

**Definição 1.3.1.** Um hiperplano em  $\mathbb{C}^n$  dado por uma equação do tipo  $\lambda_s = (m, \lambda)$ , onde  $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N}_0^n$ ,  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$  e  $\sum_{k=1}^n m_k \geq 2$  diz-se um plano ressonante.

Se fixarmos o vector  $\lambda$ , temos sempre um conjunto numerável de planos ressonantes.

**Definição 1.3.2.** Dizemos que  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  pertence ao domínio de Poincaré, se  $0 \notin E_c(\lambda)$ , onde  $E_c(\lambda)$  é a envolvente convexa do conjunto  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ , caso  $0 \in E_c(\lambda)$ , dizemos que pertence ao domínio de Siegel.

### 1.3.2 Ressonâncias no domínio de Poincaré.

Suponhamos que  $\lambda$  pertence ao domínio de Poincaré.

**Teorema 1.3.1.** [1] *Todo o  $\lambda$  pertencente ao domínio de Poincaré, satisfaz apenas um número finito de relações de ressonância  $\lambda_s = (\mathbf{m}, \lambda)$ , onde  $\mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^n$  e  $\|\mathbf{m}\| \geq 2$ , e tem uma vizinhança que não intersecta outros planos ressonantes.*

(Os planos ressonantes, de  $\lambda$ , são discretos se  $\lambda$  pertence ao domínio de Poincaré)

Vamos agora supôr que o campo de vectores  $V$  é definido por uma série convergente numa vizinhança do ponto singular,  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ , (i.e.  $V$  é holomorfo).

**Teorema de Poincaré.** [1] *Se os valores próprios da parte linear de um campo de vectores holomorfo numa vizinhança do ponto singular,  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ , pertencem ao domínio de Poincaré e não são ressonantes, então o campo de vectores é biholomórficamente equivalente à sua parte linear numa vizinhança de  $\mathbf{x}_0$ .*

(i.e. existe uma mudança de variáveis holomorfa  $\mathbf{y} = \psi(\mathbf{x})$ , tal que  $\psi(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$  e com inversa  $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{y})$  igualmente holomorfa.)

### 1.3.3 Ressonâncias no domínio de Siegel.

Suponhamos agora que  $\lambda$  pertence ao domínio de Siegel.

**Teorema 1.3.2.** [1] *Se  $\lambda$  pertence ao domínio de Siegel, então os planos de ressonância  $\lambda_s = (\mathbf{m}, \lambda)$  são densos.*

**Definição.** Um ponto

$$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$$

diz-se do tipo  $(C, \nu)$  se para todo  $s \in \{1, \dots, n\}$ , temos

$$|\lambda_s - (\mathbf{m}, \lambda)| \geq \frac{C}{|\mathbf{m}|^\nu}$$

para todo  $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N}_0^n$  tal que  $\sum_{i=1}^n m_i \geq 2$ .

**Teorema 1.3.3.** [1] *O conjunto dos pontos que não são do tipo  $(C, \nu)$  para todo  $C \geq 0$  tem medida nula, se  $\nu > (n - 2)/2$ . (no caso real exigimos que  $\nu > n - 1$ ).*

**Teorema de Siegel.** [1] *Seja  $V$  um campo de vectores holomorfo com um ponto singular  $\mathbf{x}_0$ . Se  $\lambda$  é do tipo  $(C, \nu)$ , então  $V$  é biholomórficamente equivalente à sua parte linear numa vizinhança de  $\mathbf{x}_0$ .*

### 1.3.4 Teorema de Poincaré-Dulac

Vamos agora considerar o caso em que existem ressonâncias.

**Teorema de Poincaré-Dulac.** [1] *Seja  $\lambda$  o vector dos valores próprios da parte linear de um campo de vectores  $V$  num ponto singular. Se  $\lambda$  pertence ao domínio de Poincaré, então numa vizinhança do ponto singular, o campo de vectores  $V$  é biholomórficamente equivalente a um campo de vectores polinomial, cujos monómios vectoriais de grau superior a um são ressonantes.*

(i.e. as séries de Poincaré são convergentes, mesmo no caso de existirem ressonâncias, se  $\lambda$  pertence ao domínio de Poincaré).

**Nota.** Se os valores próprios estão no domínio de Siegel, as séries que conduzem a formas normais formais em caso de ressonância são frequentemente divergentes.

Se  $\lambda$  é não ressonante e pertence ao domínio de Poincaré então é do tipo  $(C, \nu)$  para algum  $C$ . O teorema de Siegel pode ainda ser “melhorado”.

**Definição 1.3.3.** Um campo de vectores  $V$ , com parte não linear

$$W(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \sum_{|\mathbf{m}| \geq 2} w_{(m,i)} \mathbf{x}^{\mathbf{m}} \frac{\partial}{\partial x_i}$$

satisfaz a condição de Brjuno, se a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \ln w_k, \quad w_k = \min\{ |(\mathbf{m}, \lambda) - \lambda_i| : |(\mathbf{m}, \lambda) - \lambda_i| > 0, \|\mathbf{m} - \mathbf{e}_i\| < 2^k \},$$

é convergente.

**Teorema de Brjuno.** [9] *Se um campo de vectores  $V$  é formalmente equivalente à sua parte linear, e a condição de Brjuno é verificada, então  $V$  é biholomórficamente equivalente à sua parte linear numa vizinhança de um ponto singular.*

## Capítulo 2

# Campos Reais Finitamente Determinados.

### 2.1 Definições e resultados elementares.

**Definição 2.1.1.** Um campo de vectores  $\mathbf{V} = A\mathbf{x} + \dots$  diz-se 0-ressonante, se não existem relações de ressonância da forma

$$k_1\lambda_1 + \dots + k_n\lambda_n = 0$$

entre os valores próprios da sua parte linear. Neste caso o número de ressonâncias é necessariamente finito.

**Definição 2.1.2.** Um campo de vectores  $\mathbf{V}$  diz-se 1-ressonante, se todas as relações da forma

$$l_1\lambda_1 + \dots + l_n\lambda_n = 0,$$

são consequências de uma relação fixa da forma

$$k_1\lambda_1 + \dots + k_n\lambda_n = 0.$$

Neste caso o número de ressonâncias é necessariamente infinito.

**Definição 2.1.3.** Se  $\mathbf{V}$  é 1-ressonante distinguimos dois casos:

- (1) Se todas as relações são consequências da relação

$$k_1\lambda_1 + \dots + k_n\lambda_n = 0, \tag{2.1}$$

dizemos que  $\mathbf{V}$  é fortemente 1-ressonante.

(2) Se para além das relações derivadas da relação (2.1.3), existe apenas um número finito de relações que não são consequência da relação (2.1.3), dizemos que  $\mathbf{V}$  é 1-ressonante mas não fortemente 1-ressonante.

**Definição 2.1.4.** Um campo de vectores  $\mathbf{V}(\mathbf{x})$  de classe  $C^\infty$ ,  $\mathbf{V}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , diz-se  $k$ -determinado se é equivalente (reduzível por uma mudança de coordenadas local de classe  $C^\infty$ ) a todo o campo de vectores da forma  $\mathbf{V}(\mathbf{x}) + o(\|\mathbf{x}\|^k)$ . Um campo de vectores  $\mathbf{V}$  diz-se finitamente determinado, se existir um  $k < \infty$  tal que  $\mathbf{V}$  é  $k$ -determinado.

**Teorema de Chen.** [10] *Dois campos de vectores hiperbólicos são  $C^\infty$ -equivalentes sse forem formalmente equivalentes.*

Se não existem relações de ressonância, os valores próprios não estão no eixo imaginário, logo o campo é necessariamente hiperbólico.

**Teorema 2.1.1.** [10] *Seja  $\mathbf{V}$  um campo de vectores de classe  $C^\infty$  tal que  $\mathbf{V}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ , então as seguintes afirmações são equivalentes.*

- (1)  $\mathbf{V}$  é 1-determinado por uma mudança de variáveis de classe  $C^\infty$ .
- (2)  $\mathbf{V}$  é 1-determinado por uma mudança de variáveis formal.
- (3) Não existem relações de ressonância.

Seja  $\mathbf{V}$  um campo de vectores iremos denotar por  $l(\mathbf{V})$  à ordem máxima das relações de ressonância, e por  $i(\mathbf{V})$  o menor  $k$ ,  $k \leq l(\mathbf{V})$ , tal que  $\mathbf{V}$  é  $k$ -determinado. (se  $\mathbf{V}$  for 0-ressonante, então  $l(\mathbf{V})$  é finito.)

## 2.2 Teoremas de Ichikawa e de Belitskii.

O conjunto dos campos de vectores finitamente determinados contém os campos de vectores 0-ressonantes, contudo também existem campos de vectores com um número infinito de relações de ressonância que são finitamente determinados.

**Teorema de Ichikawa.** ([12],[13]) *Um campo de vectores é formalmente finitamente determinado sse é 0-ressonante, ou 1-ressonante e não pertence a um conjunto  $E$  de codimensão infinita no conjunto de todos os campos de vectores 1-ressonantes.*

O teorema seguinte valida este resultado para a classe  $C^\infty$ .

**Teorema de Belitskii.** ([5]) *Um campo de vectores é finitamente determinado por uma mudança de variáveis de classe  $C^\infty$  sse é formalmente finitamente determinado.*

## 2.3 Lema de Takens e corolários

Iremos denotar o  $k$ -jacto na origem do campo de vectores  $\mathbf{V}$ , por  $j^k\mathbf{V}$  e o parênteses de Lie dos campo de vectores  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{V}$  por  $[\mathbf{U}, \mathbf{V}] = D\mathbf{V}.\mathbf{U} - \mathbf{V}.D\mathbf{U}$ .

**Lema de Takens.** [7] *Sejam  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{V}$  dois campos de vectores tais que  $j^k[\mathbf{U}, \mathbf{V}] = \mathbf{0}$  e  $j^1\mathbf{V} = \mathbf{0}$ , e seja  $\Phi_V^t$  o fluxo do campo de vectores  $\mathbf{V}$ , então*

$$j^{k+1}((\Phi_V^t)_*\mathbf{U}) = j^{k+1}\mathbf{U} + tj^{k+1}[\mathbf{U}, \mathbf{V}].$$

**Lema 2.3.1.** [2] *Sejam  $\mathbf{U}$  e  $\tilde{\mathbf{U}}$  dois campos de vectores tal que  $j^k\mathbf{U} = j^k\tilde{\mathbf{U}}$ , então:*

a) *se a equação*

$$j^{k+1}[\mathbf{U}, \mathbf{V}] = j^{k+1}(\mathbf{U} - \tilde{\mathbf{U}}) \quad (2.2)$$

*tem uma solução  $\mathbf{V}$  tal que  $j^1\mathbf{V} = \mathbf{0}$ , então existe um difeomorfismo  $\Phi$  tal que*

$$j^{k+1}\Phi_*\mathbf{U} = j^{k+1}\tilde{\mathbf{U}}. \quad (2.3)$$

b) *Se existe um difeomorfismo  $\Phi$  com aproximação linear igual à identidade tal que se verifica (2.3) então a equação (2.2) tem uma solução  $\mathbf{V}$  tal que  $j^1\mathbf{V} = \mathbf{0}$ .*

**Definição 2.3.1.** Dois campos de vectores  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{V}$  dizem-se  $l$ -jacto equivalentes se existe um difeomorfismo  $\Phi$  tal que  $j^l\Phi_*\mathbf{U} = j^l\mathbf{V}$ .

**Lema 2.3.2.** [2] *Seja  $\mathbf{U}$  um campo de vectores, se para todo o campo de vectores  $\mathbf{W}$  tal que  $j^k\mathbf{W} = \mathbf{0}$  a equação  $[\mathbf{U}, \mathbf{V}] = \mathbf{W}$  tem uma solução  $\mathbf{V}$  com  $j^1\mathbf{V} = \mathbf{0}$ , então os campos de vectores  $\mathbf{U}$  e  $j^k\mathbf{U}$  são  $l$ -jacto equivalentes para todo o  $l < \infty$ .*

**Lema 2.3.3.** [2] *Se para todo o campo de vectores formal  $\mathbf{W}$  tal que  $j^k\mathbf{W} = \mathbf{0}$  a equação  $[j^k\mathbf{U}, \mathbf{V}] = \mathbf{W}$  tem uma solução formal  $\mathbf{V}$  tal que  $j^1\mathbf{V} = \mathbf{0}$ , então o campo de vectores  $\mathbf{V}$  é  $k$ -determinado por uma mudança de variáveis de classe  $C^\infty$ .*

**Definição.** Uma mudança de variáveis diz-se ressonante, com respeito a um  $n$ -uplo  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , se a sua parte linear é a identidade e a sua parte não linear contém apenas monómios ressonantes.

**Teorema 2.3.1.** [8] *As seguintes afirmações são verdadeiras:*

(1) *Toda a mudança de variáveis ressonante envia um campo de vectores na forma normal ressonante noutra forma normal ressonante.*

(2) *toda a mudança de variáveis com parte linear igual à identidade que envia qualquer campo de vectores na forma normal ressonante noutra forma normal ressonante é uma mudança de variáveis ressonante.*

(i.e. para simplificar uma forma normal ressonante necessitamos apenas de aplicar mudanças de variáveis ressonantes.)

**Lema 2.3.4.** [2] *Seja  $U$  um campo de vectores de classe  $C^\infty$ ,  $U(0) = 0$ . Se para todo o campo de vectores formal  $W$  ressonante, com respeito aos valores próprios da parte linear de  $U$ , tal que  $j^k W = 0$  a equação,*

$$[j^k U, V] = W, \tag{2.4}$$

*tem uma solução formal  $V$ , tal que  $j^1 V = 0$ , então  $U$  é  $k$ -determinado por uma mudança de variáveis de classe  $C^\infty$ .*

**Nota.** A equação (2.4) é uma generalização da equação homológica .

**Exemplo 2.3.1.** Seja  $U$  um campo de vectores em  $\mathbb{R}^3$  cuja parte linear tem valores próprios  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = 1$  e  $\lambda_3 = 3$ . Este campo é 1-ressonante mas não fortemente 1-ressonante. A sua forma normal de Poincaré-Dulac é da forma

$$\begin{cases} \dot{x} = xf(x) \\ \dot{y} = yg_1(x) \\ \dot{z} = zg_2(x) + y^3g_3(x) \end{cases}, \tag{2.5}$$

onde  $f$ ,  $g_1$ ,  $g_2$  e  $g_3$  são séries formais tais que  $f(0) = 0$ ,  $g_1(0) = 1$  e  $g_2(0) = 3$ ,  $m \geq 2$ . Iremos provar que sob as condições genéricas,

$$f'(0) \neq 0 \tag{2.6}$$

$$\frac{g_2'(0) - 3g_1'(0)}{f'(0)} \notin \{0, 1, 2, \dots\} \quad (2.7)$$

podemos reduzir o campo de vectores  $\mathbf{U}$  ao campo de vectores  $\tilde{\mathbf{U}}$  por uma mudança de coordenadas de classe  $C^\infty$  onde  $\tilde{\mathbf{U}}$  é da forma

$$\begin{cases} \dot{x} &= x^2 + ax^3 \\ \dot{y} &= y + bxy \\ \dot{z} &= 3z + cxy + \delta y^3 \end{cases} \quad (2.8)$$

e que  $i(\mathbf{U}) = 3$ .

Começamos por aplicar uma transformação da forma  $(x, y, z) \mapsto (\alpha(x), y, z)$ , usando a condição genérica (2.6) para reduzir a função  $f(x)$  à forma  $x + ax^2$  (ver [6]). Após renormalizada a primeira componente é suficiente provar que:

- i) O 3-jacto de  $\mathbf{U}$  pode ser normalizado à forma normal (2.8).
- ii) Assumindo que  $j^3\mathbf{U}$  tem a forma (2.8), a equação

$$[j^3\mathbf{U}, \mathbf{V}] = \mathbf{W} \quad (2.9)$$

tem uma solução  $\mathbf{V}$  com 1-jacto nulo para todo o campo de vectores ressonante  $\mathbf{W}$  com 3-jacto nulo (ou seja pelo lema (2.3.4) e pelo teorema (2.3.1) o campo de vectores  $\mathbf{U}$  é 3-determinado).

- iii) Os campos de vectores  $j^2\mathbf{U}$  e  $j^3\mathbf{U}$  não são equivalentes se  $\delta \neq 0$  (ou seja  $i(\mathbf{U}) = 3$ ).
- i) Eliminamos os monómios ressonantes  $x^2y\frac{\partial}{\partial y}$  e  $x^2z\frac{\partial}{\partial z}$  aplicando uma transformação da forma

$$\Phi : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y + \varphi_1 xy \\ z + \varphi_1 xz \end{pmatrix},$$

o campo de vectores transformado tem a seguinte forma,

$$j^3\Phi_*\mathbf{U} = j^3\mathbf{U} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\varphi_1 x^2 y \\ -\varphi_1 x^2 z \end{pmatrix},$$

logo o 3-jacto de  $\mathbf{U}$  redutível à forma normal (2.8), onde  $\delta \in \mathbb{R}$ . Podemos ainda reduzir  $\delta$  a 1 aplicando uma mudança de variáveis da forma  $y \mapsto cy$  trocando se necessário o sinal à variável  $z$ .

ii) Todo o campo de vectores ressonante  $\mathbf{W}$  com 3-jacto nulo é da forma

$$\mathbf{W} = xF_1(x)\frac{\partial}{\partial x} + yF_2(x)\frac{\partial}{\partial y} + (zF_3(x) + y^3F_4(x))\frac{\partial}{\partial z}$$

onde  $j^2F_i = 0$ , para  $i = 1, 2, 3$  e  $j^0F_4(x) = 0$ . Procuramos uma solução  $\mathbf{V}$  da equação (2.9) da forma

$$\mathbf{V} = xV_1(x)\frac{\partial}{\partial x} + yV_2(x)\frac{\partial}{\partial y} + (zV_3(x) + y^3V_4(x))\frac{\partial}{\partial z}.$$

A equação (2.9) origina o seguinte sistema

$$\begin{cases} (x + 2ax^2)V_1(x) - (x^2 - ax^3)V_1'(x) = F_1(x) \\ (x^2 + ax^3)V_2'(x) = bxV_1(x) - F_2(x) \\ (x^2 + ax^3)V_3'(x) = cxV_1(x) - F_3(x) \\ (c - 3b)xV_4(x) - (x^2 + ax^3)V_4'(x) = F_4(x) + \delta(V_3(x) - 3V_2(x)) \end{cases}.$$

Dado que  $j^2F_1 = j^2F_2 = j^2F_3 = 0$  as três primeiras equações deste sistema têm uma solução  $(V_1(x), V_2(x), V_3(x))$  com 1-jacto nulo. Como  $j^0F_4 = 0$  a última equação pode-se escrever na forma

$$(c - 3b)xV_4(x) - (x^2 + ax^3)V_4'(x) = H(x). \quad (2.10)$$

Seja  $V_4(x) = \beta_0 + \beta_1x + \beta_2x^2 + \dots$  e  $H(x) = h_0 + h_1x + h_2x^2 + \dots$ , então da equação (2.10) obtemos

$$\begin{cases} (c - mb)\beta_0 = h_0 \\ (c - mb - i)\beta_i = (i - 1)a\beta_{i-1} + h_i, \text{ para } i = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (2.11)$$

Para o campo de vectores (2.8) as condições genéricas (2.7) tomam a forma  $(c - mb) \notin \mathbb{N}_0$ , logo podemos resolver as equações (2.11). A solução obtida desta forma tem 1-jacto nulo dado que  $h_0 = 0$ .

iii) Resta provar que  $j^2\tilde{\mathbf{U}}$  e  $j^3\tilde{\mathbf{U}}$ , não são equivalentes (para que  $i(\mathbf{U}) = 3$ ). Para o efeito basta notar que o número de superfícies invariantes dos campos de vectores  $j^2\tilde{\mathbf{U}}$  e  $j^3\tilde{\mathbf{U}}$ , são diferentes: as superfícies  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$  e  $x_3 = 0$  são superfícies invariantes do campo de vectores  $j^2\tilde{\mathbf{U}}$ , e, apesar de as superfícies  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$  serem superfícies invariantes do campo de vectores  $j^3\tilde{\mathbf{U}}$ , a superfície  $x_3 = 0$  não é uma superfície invariante do campo de vectores  $j^3\tilde{\mathbf{U}}$ .

# Capítulo 3

## Renormalização Formal

### 3.1 Introdução

No processo de Poincaré consideramos uma sucessão de mudança de coordenadas da forma  $\mathbf{x} = \mathbf{y} + H_k(\mathbf{y})$ , onde  $H_k(\mathbf{y})$  são polinómios vectoriais homogéneos e grau  $k \geq 2$ . Estes polinómios são escolhidos de forma a serem solução da equação homológica associada, e tais soluções são únicas a menos de termos que pertencem ao núcleo do operador homológico. Desta forma eliminamos sucessivamente os monómios não ressonantes, contudo cada mudança de coordenadas produz novos termos de ordem superior. Aqueles que são não ressonantes serão eliminados em mudanças de coordenadas posteriores, enquanto este algoritmo não permite eliminar os termos ressonantes. Contudo devemos notar que dois polinómios vectoriais  $H_k(\mathbf{y})$  e  $H_k(\mathbf{y}) + \tilde{H}_k(\mathbf{y})$  que apenas diferem de um elemento que pertence ao núcleo do operador homológico produzem a mesma transformação nos termos de ordem  $k$ , mas geralmente, originam diferentes termos ressonantes de ordem superior. A renormalização consiste essencialmente na escolha apropriada de um elemento que pertence ao núcleo do operador homológico (i.e. na escolha apropriada dos monómios ressonantes) de forma a eliminar o maior número possível de monómios ressonantes.

Neste capítulo pretende-se encontrar uma forma normal formal “mais simples” de campos de vectores genéricos em  $\mathbb{R}^3$ , cuja parte linear tem valores próprios  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = -1$  e  $\lambda_3 = 2$ .

Note-se que neste caso o campo de vectores não é 0-ressonante nem 1-ressonante, logo de acordo com o teorema de Ichikawa o campo de vectores

não é finitamente determinado.

Apesar da forma encontrada não ser analiticamente demonstrada, devido à dificuldade de demonstrar que certos sistemas lineares encontrados têm característica máxima, há fortes argumentos numéricos que o sugerem.

## 3.2 Método Utilizado na Renormalização

Para os campos de vectores cuja parte linear têm valores próprios  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = -1$  e  $\lambda_3 = 2$  temos as seguintes ressonâncias:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= n\lambda_1 + (n + 2m - 1)\lambda_2 + m\lambda_3 \\ \lambda_2 &= n\lambda_1 + (n + 2m + 1)\lambda_2 + m\lambda_3 \\ \lambda_3 &= (n + 2)\lambda_1 + (n + 2m)\lambda_2 + m\lambda_3\end{aligned}$$

Estas relações originam os monómios ressonantes indicados na tabela 3.1 (onde para efeito de cálculos distinguiremos quatro tipos),

Tabela 3.1: Monómios Ressonantes.

|   | Tipo 0                            | Tipo I                                    | Tipo II                                    | Tipo III   |
|---|-----------------------------------|---|--|--|
| Monómios em $\frac{\partial}{\partial x}$ | —                                 | $x^{n+1}y^n \frac{\partial}{\partial x}$  | $y^{2m-1}z^m \frac{\partial}{\partial x}$  | $x^n y^{n+2m-1} z^m \frac{\partial}{\partial x}$ |
| Monómios em $\frac{\partial}{\partial y}$ | —                                 | $x^n y^{n+1} \frac{\partial}{\partial y}$ | $y^{2m+1} z^m \frac{\partial}{\partial y}$ | $x^n y^{n+2m+1} z^m \frac{\partial}{\partial y}$ |
| Monómios em $\frac{\partial}{\partial z}$ | $x^2 \frac{\partial}{\partial z}$ | $x^{n+2} y^n \frac{\partial}{\partial z}$ | $y^{2m-2} z^m \frac{\partial}{\partial z}$ | $x^n y^{n+2m-2} z^m \frac{\partial}{\partial z}$ |

onde  $n, m \geq 1$ .

Então podemos escrever a forma normal de Poincaré-Dulac do campo vectorial no modo seguinte,

$$\begin{cases} \dot{x} = x + \sum_{i=2}^{\infty} f_i(x, y, z) \\ \dot{y} = -y + \sum_{i=2}^{\infty} g_i(x, y, z) \\ \dot{z} = 2z + \sum_{i=2}^{\infty} h_i(x, y, z) \end{cases},$$

onde  $f_i(x, y, z)$ ,  $g_i(x, y, z)$  e  $h_i(x, y, z)$ ,  $i = 2, \dots$ , são polinómios homogêneos de grau  $i$  contendo apenas monómios ressonantes (indicados na tabela 3.1).

Começamos a renormalização do campo de vectores (já na forma normal de Poincaré-Dulac) aplicando uma transformação da forma,

$$(x, y, z) \mapsto (\alpha x, y, \beta z),$$

ao campo de vectores,

$$\begin{cases} \dot{x} = x + ayz + \mathbf{t.o.s.} \\ \dot{y} = -y + \mathbf{t.o.s.} \\ \dot{z} = 2z + bx^2 + \mathbf{t.o.s.} \end{cases},$$

onde **t.o.s.** significa termos de ordem superior.

Como, por hipótese, o campo de vectores é genérico ( $a$  e  $b \neq 0$ ) para uma escolha apropriada de  $\alpha$  e  $\beta$  obtemos um campo de vectores da forma,

$$\begin{cases} \dot{x} = x + yz + \mathbf{t.o.s.} \\ \dot{y} = -y + \mathbf{t.o.s.} \\ \dot{z} = 2z + x^2 + \mathbf{t.o.s.} \end{cases}.$$

Os passos seguintes consistem em simplificar os polinómios  $f_i(x, y, z)$ ,  $g_i(x, y, z)$  e  $h_i(x, y, z)$ ,  $i = 3, \dots$  (i.e. eliminar o maior número possível de monómios ressonantes de grau  $i$ ), usando transformações ressonantes da forma,

$$(x, y, z) \mapsto (x + \tilde{f}_{i-1}(x, y, z), y + \tilde{g}_{i-1}(x, y, z), z + \tilde{h}_{i-1}(x, y, z)).$$

No cálculo do campo de vectores resultante iremos usar o corolário (3.2.1) do seguinte teorema (ver [3]),

**Teorema 3.2.1.** [3] Consideremos um campo de vectores da forma,

$$\dot{\mathbf{x}} = L\mathbf{x} + F(\mathbf{x}) \equiv V_1(\mathbf{x}) + F_2(\mathbf{x}) + F_3(\mathbf{x}) + \cdots + F_k(\mathbf{x}) + \dots,$$

onde  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $V_1(\mathbf{x}) = L\mathbf{x}$  e  $F_k(\mathbf{x})$  denota os polinómios vectoriais homogéneos de grau  $k$ . Então se efectuarmos uma mudança de variáveis da forma,

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} + H(\mathbf{y}) \equiv \mathbf{y} + H_2(\mathbf{y}) + H_3(\mathbf{y}) + \cdots + H_k(\mathbf{y}) + \dots,$$

obtemos um campo de vectores da forma,

$$\dot{\mathbf{y}} = L\mathbf{y} + G(\mathbf{y}) \equiv L\mathbf{y} + G_2(\mathbf{y}) + G_3(\mathbf{y}) + \cdots + G_k(\mathbf{y}) + \dots,$$

onde  $H_k(\mathbf{y})$  e  $G_k(\mathbf{y})$  são polinómios vectoriais homogéneos de grau  $k$  e,

$$\begin{aligned} G_k = & F_k + [H_k, V_1] + \sum_{i=2}^{k-1} \left\{ [H_{k-i+1}, F_i] + DH_i(F_{k-i+1} - G_{k-i+1}) \right\} + \\ & + \sum_{m=2}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \frac{1}{m!} \sum_{\substack{l_1+l_2+\dots+l_m=k-(i-m) \\ 2 \leq l_1, l_2, \dots, l_m \leq k-(i-m)-2(m-1)}} \sum_{i=m}^{k-m} D^m F_i(H_{l_1}, H_{l_2}, \dots, H_{l_m}), \end{aligned} \quad (3.1)$$

para  $k = 2, 3, \dots$  (para não sobrecarregar a notação omitimos  $\mathbf{y}$ ).

**Corolário 3.2.1.** Suponhamos que temos um campo de vectores da forma,

$$\dot{\mathbf{x}} = V_1\mathbf{x} + F_2(\mathbf{x}) + \cdots + F_k(\mathbf{x}) + \mathbf{t.o.s.},$$

ao qual vamos aplicar uma transformação da forma,

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} + H_{k-1}(\mathbf{y}).$$

Então o campo de vectores resultante é da forma,

$$\dot{\mathbf{y}} = V_1\mathbf{y} + \cdots + F_k(\mathbf{y}) + [H_{k-1}(\mathbf{y}), F_2(\mathbf{y})] + \mathbf{t.o.s.},$$

**Demonstração.** Por hipótese temos,  $H_j = \mathbf{0}$ ,  $j \neq k-1$ . A transformação utilizada apenas altera os termos de grau superior a  $k-1$ , logo neste caso temos,  $G_j = F_j$ ,  $2 \leq j \leq k-1$ . Assim a fórmula (3.1) reduz-se a  $G_k = F_k + [H_{k-1}, F_2]$ .  $\square$

Suponhamos agora que  $k_p$  é o número de monómios ressonantes de grau  $p$  e que  $k_{p-1}$  é o número de monómios ressonantes de grau  $p-1$ . Então eliminar o maior número possível de monómios ressonantes de grau  $p$  é equivalente a resolver um sistema linear com  $k_p$  equações e  $k_{p-1}$  incógnitas.

Os monómios ressonantes de grau  $p$  podem ser facilmente determinados e estão indicados na tabela 3.2,

Tabela 3.2: Monómios Ressonantes de Grau  $p$ .

| $p = 6j$                      | Tipo I  | Tipo II   | Tipo III  |
|-------------------------------|---|---|---|
| $\frac{\partial}{\partial x}$ | —   | —   | $x^{3(j-l)-1}y^{3j+l}z^{2l+1}\frac{\partial}{\partial x}, \quad l = 0, 1, \dots, j-1$     |
| $\frac{\partial}{\partial y}$ | —   | —   | $x^{3(j-l)-2}y^{3j+l+1}z^{2l+1}\frac{\partial}{\partial y}, \quad l = 0, 1, \dots, j-1$   |
| $\frac{\partial}{\partial z}$ | $x^{3j+1}y^{3j-1}\frac{\partial}{\partial z}$   | —   | $x^{3(j-l)-2}y^{3j+l}z^{2(l+1)}\frac{\partial}{\partial z}, \quad l = 0, 1, \dots, j-1$   |
| $p = 6j + 1$                  | Tipo I  | Tipo II   | Tipo III  |
| $\frac{\partial}{\partial x}$ | $x^{3j+1}y^{3j}\frac{\partial}{\partial x}$     | —   | $x^{3(j-l)-2}y^{3j+l+1}z^{2(l+1)}\frac{\partial}{\partial x}, \quad l = 0, 1, \dots, j-1$ |
| $\frac{\partial}{\partial y}$ | $x^{3j}y^{3j+1}\frac{\partial}{\partial y}$     | $y^{4j+1}z^{2j}\frac{\partial}{\partial y}$     | $x^{3(j-l)-3}y^{3j+l+2}z^{2(l+1)}\frac{\partial}{\partial y}, \quad l = 0, 1, \dots, j-2$ |
| $\frac{\partial}{\partial z}$ | —   | $y^{4j}z^{2j+1}\frac{\partial}{\partial z}$     | $x^{3(j-l)}y^{3j+l}z^{2l+1}\frac{\partial}{\partial z}, \quad l = 0, 1, \dots, j-1$       |
| $p = 6j + 2$                  | Tipo I  | Tipo II   | Tipo III  |
| $\frac{\partial}{\partial x}$ | —   | $y^{4j+1}z^{2j+1}\frac{\partial}{\partial x}$   | $x^{3(j-l)}y^{3j+l+1}z^{2l+1}\frac{\partial}{\partial x}, \quad l = 0, 1, \dots, j-1$     |
| $\frac{\partial}{\partial y}$ | —   | —   | $x^{3(j-l)-1}y^{3j+l+2}z^{2l+1}\frac{\partial}{\partial y}, \quad l = 0, 1, \dots, j-1$   |
| $\frac{\partial}{\partial z}$ | $x^{3j+2}y^{3j}\frac{\partial}{\partial z}$     | —   | $x^{3(j-l)-1}y^{3j+l+1}z^{2(l+1)}\frac{\partial}{\partial z}, \quad l = 0, 1, \dots, j-1$ |
| $p = 6j + 3$                  | Tipo I  | Tipo II   | Tipo III  |
| $\frac{\partial}{\partial x}$ | $x^{3j+2}y^{3j+1}\frac{\partial}{\partial x}$   | —   | $x^{3(j-l)-1}y^{3j+l+2}z^{2(l+1)}\frac{\partial}{\partial x}, \quad l = 0, 1, \dots, j-1$ |
| $\frac{\partial}{\partial y}$ | $x^{3j+1}y^{3j+2}\frac{\partial}{\partial y}$   | —   | $x^{3(j-l)-2}y^{3j+l+3}z^{2(l+1)}\frac{\partial}{\partial y}, \quad l = 0, 1, \dots, j-1$ |
| $\frac{\partial}{\partial z}$ | —   | —   | $x^{3(j-l)+1}y^{3j+l+1}z^{2l+1}\frac{\partial}{\partial z}, \quad l = 0, 1, \dots, j$     |
| $p = 6j + 4$                  | Tipo I  | Tipo II   | Tipo III  |
| $\frac{\partial}{\partial x}$ | —   | —   | $x^{3(j-l)+1}y^{3j+l+2}z^{2l+1}\frac{\partial}{\partial x}, \quad l = 0, 1, \dots, j$     |
| $\frac{\partial}{\partial y}$ | —   | $y^{4j+3}z^{2j+1}\frac{\partial}{\partial y}$   | $x^{3(j-l)}y^{3j+l+3}z^{2l+1}\frac{\partial}{\partial y}, \quad l = 0, 1, \dots, j-1$     |
| $\frac{\partial}{\partial z}$ | $x^{3j+3}y^{3j+1}\frac{\partial}{\partial z}$   | $y^{4j+2}z^{2(j+1)}\frac{\partial}{\partial z}$ | $x^{3(j-l)}y^{3j+l+2}z^{2(l+1)}\frac{\partial}{\partial z}, \quad l = 0, 1, \dots, j-1$   |
| $p = 6j + 5$                  | Tipo I  | Tipo II   | Tipo III  |
| $\frac{\partial}{\partial x}$ | $x^{3(j+1)}y^{3j+2}\frac{\partial}{\partial x}$ | $y^{4j+3}z^{2(j+1)}\frac{\partial}{\partial x}$ | $x^{3(j-l)}y^{3j+l+3}z^{2(l+1)}\frac{\partial}{\partial x}, \quad l = 0, 1, \dots, j-1$   |
| $\frac{\partial}{\partial y}$ | $x^{3j+2}y^{3j+3}\frac{\partial}{\partial y}$   | —   | $x^{3(j-l)-1}y^{3j+l+4}z^{2(l+1)}\frac{\partial}{\partial y}, \quad l = 0, 1, \dots, j-1$ |
| $\frac{\partial}{\partial z}$ | —   | —   | $x^{3(j-l)+2}y^{3j+l+2}z^{2l+1}\frac{\partial}{\partial z}, \quad l = 0, 1, \dots, j$     |

Analisando a tabela 3.2 obtemos o seguinte resultado indicado na tabela

3.3

Tabela 3.3: Número  $(k_p)$  de Monómios Ressonantes de Grau  $p$ ,  $j \geq 1$ .

|              | $k_p$    |
|--------------|----------|
| $p = 6j$     | $3j + 1$ |
| $p = 6j + 1$ | $3j + 3$ |
| $p = 6j + 2$ | $3j + 2$ |
| $p = 6j + 3$ | $3j + 3$ |
| $p = 6j + 4$ | $3j + 4$ |
| $p = 6j + 5$ | $3j + 4$ |
| $p = 6j + 6$ | $3j + 4$ |

Se pretendermos simplificar os monómios ressonantes de grau  $p$  verificamos que a diferença entre o número de equações e o número de incógnitas dos sistemas de equações depende apenas do número  $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ , onde  $p \equiv k \pmod{6}$ . Logo este processo consiste essencialmente na resolução de 6 sistemas de equações lineares.

### 3.3 Primeiros Passos da Renormalização

Iremos efectuar os 7 primeiros passos da renormalização.

#### 3.3.1 $p = 3$

Temos um campo de vectores da forma,

$$\begin{cases} \dot{x} = x + yz + ax^2y + \mathbf{t.o.s.} \\ \dot{y} = -y + bxy^2 + \mathbf{t.o.s.} \\ \dot{z} = 2z + x^2 + cxyz + \mathbf{t.o.s.} \end{cases},$$

ao qual aplicamos uma transformação da forma,

$$(x, y, z) \mapsto (x + \alpha yz, y, z + \gamma x^2),$$

obtemos o sistema com 2 equações e 2 incógnitas,

$$\begin{cases} -\alpha + \gamma = -a \\ 2\alpha - 2\gamma = -b \end{cases},$$

e verificamos que, geralmente, apenas podemos eliminar um monómio ressonante de grau 3, podendo escolher eliminar o monómio  $ax^2y\frac{\partial}{\partial x}$  ou o monómio  $cxyz\frac{\partial}{\partial z}$ . Tendo em vista a forma renormalizada (3.11), optamos por não eliminar o monómio  $ax^2y\frac{\partial}{\partial x}$ .

### 3.3.2 $p = 4$

Neste passo temos um campo da forma,

$$\begin{cases} \dot{x} &= x + \cdots + axy^2z + \mathbf{t.o.s} \\ \dot{y} &= -y + \cdots + by^3z + \mathbf{t.o.s} \\ \dot{z} &= 2z + \cdots + c_1x^3y + c_2y^2z^2 + \mathbf{t.o.s} \end{cases},$$

onde os pontos representam os monómios ressonantes de ordem inferior que não conseguimos eliminar (daqui para a frente iremos usar esta notação). Aplicamos uma transformação da forma,

$$(x, y, z) \mapsto (x + \alpha x^2y, y + \beta xy^2, z + \gamma xyz)$$

obtemos assim um sistema com 4 equações e 3 incógnitas,

$$\begin{cases} -2\alpha + \beta + \gamma &= -a \\ \beta &= b \\ \gamma &= c_2 \\ 2\alpha - \gamma &= -c_1 \end{cases}.$$

Logo, geralmente, podemos eliminar todos os monómios ressonantes de grau 4 excepto um. Para atingirmos a forma (3.11), não eliminamos o monómio da forma  $xy^2z\frac{\partial}{\partial x}$ .

### 3.3.3 $p = 5$

Temos um campo de vectores da forma,

$$\begin{cases} \dot{x} &= x + \cdots + a_1x^3y^2 + a_2y^3z^2 + \mathbf{t.o.s.} \\ \dot{y} &= -y + \cdots + bx^2y^3 + \mathbf{t.o.s.} \\ \dot{z} &= 2z + \cdots + cx^2y^2z + \mathbf{t.o.s.} \end{cases},$$

uma transformação da forma,

$$(x, y, z) \mapsto (x + \alpha xy^2z, y + \beta y^3z, z + \gamma_1x^3y + \gamma_2y^2z^2),$$

e um sistema de 4 equações e 4 incógnitas,

$$\begin{cases} -\alpha + \gamma_1 & = -a_1 \\ -\alpha + \beta + \gamma_2 & = -a_2 \\ \beta & = b \\ 2\alpha - 3\gamma_1 - 2\gamma_2 & = -c \end{cases} .$$

Este sistema é possível e determinado, podemos eliminar todos os monómios ressonantes de grau 5.

### 3.3.4 $p = 6$

Temos um campo de vectores da forma,

$$\begin{cases} \dot{x} & = x + \dots + ax^2y^3z + \mathbf{t.o.s.} \\ \dot{y} & = -y + \dots + bxy^4z + \mathbf{t.o.s.} \\ \dot{z} & = 2z + \dots + c_1x^4y^2 + c_2xy^3z^2 + \mathbf{t.o.s.} \end{cases} ,$$

uma transformação da forma,

$$(x, y, z) \mapsto (x + \alpha_1x^3y^2 + \alpha_1y^3z^2, y + \beta x^2y^3, z + \gamma x^2y^2z),$$

e um sistema de 4 equações e 4 incógnitas,

$$\begin{cases} -3\alpha_1 - 2\alpha_2 + \beta + \gamma & = -a \\ -2\beta & = b \\ 2\alpha_2 - 2\gamma & = -c_2 \\ 2\alpha_1 - \gamma & = -c_1 \end{cases} .$$

Este sistema é possível e determinado, podemos eliminar todos os monómios ressonantes de grau 6.

### 3.3.5 $p = 7$

Temos um campo de vectores da forma,

$$\begin{cases} \dot{x} & = x + \dots + a_1x^4y^3 + a_2xy^4z^2 + \mathbf{t.o.s.} \\ \dot{y} & = -y + \dots + b_1x^3y^4 + b_2y^5z^2 + \mathbf{t.o.s.} \\ \dot{z} & = 2z + \dots + c_1y^4z^3 + c_2x^3y^3z + \mathbf{t.o.s.} \end{cases} ,$$

uma transformação da forma,

$$(x, y, z) \mapsto (x + \alpha x^2 y^3 z, y + \beta x y^4 z, z + \gamma_1 x^4 y^2 + \gamma_2 x y^3 z^2),$$

e um sistema de 6 equações e 4 incógnitas,

$$\begin{cases} -\alpha + \gamma_1 & = -a_1 \\ -2\alpha + \beta + \gamma_2 & = -a_2 \\ \beta & = b_1 \\ \beta & = b_2 \\ \gamma_2 & = c_1 \\ 2\alpha - 4\gamma_1 - 2\gamma_2 & = -c_2 \end{cases}.$$

Neste passo, geralmente, não é possível eliminar um dos monómios da forma:

$$x^3 y^4 \frac{\partial}{\partial y}, \quad y^5 z^2 \frac{\partial}{\partial y}.$$

E também não é possível eliminar um dos monómios da forma:

$$x^4 y^3 \frac{\partial}{\partial x}, \quad x y^4 z^2 \frac{\partial}{\partial x}, \quad y^4 z^3 \frac{\partial}{\partial z} \quad e \quad x^3 y^3 z \frac{\partial}{\partial z}.$$

Optámos neste caso por não eliminar os monómios das formas,

$$x^4 y^3 \frac{\partial}{\partial x} \quad e \quad x^3 y^4 \frac{\partial}{\partial y}.$$

### 3.3.6 $p = 8$

O campo de vectores é da forma,

$$\begin{cases} \dot{x} & = x + \cdots + a_1 y^5 z^3 + a_2 x^3 y^4 z + \mathbf{t.o.s.} \\ \dot{y} & = -y + \cdots + b x^2 y^5 z + \mathbf{t.o.s.} \\ \dot{z} & = 2z + \cdots + c_1 x^5 y^3 + c_2 x^2 y^4 z^2 + \mathbf{t.o.s.} \end{cases},$$

a transformação da forma,

$$(x, y, z) \mapsto (x + \alpha_1 x^4 y^3 + \alpha_2 x y^4 z^2, y + \beta_1 x^3 y^4 + \beta_2 y^5 z^2, z + \gamma_1 y^4 z^3 + \gamma_2 x^3 y^3 z)$$

e obtemos o sistema com 5 equações e 6 incógnitas,

$$\begin{cases} -\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_1 & = -a_1 \\ -4\alpha_1 - 2\alpha_2 + \beta_1 + \gamma_2 & = -a_2 \\ 3\beta_1 + 2\beta_2 & = b_1 \\ 2\alpha_2 - 3\gamma_1 - 3\gamma_2 & = -c_2 \\ 2\alpha_1 - \gamma_2 & = -c_1 \end{cases} .$$

A característica da matriz associada a este sistema é 5, logo pode-se eliminar todos os monómios ressonantes de grau 8.

### 3.3.7 $p = 9$

O campo de vectores é da forma,

$$\begin{cases} \dot{x} = x + \dots + a_1 x^2 y^5 z^2 + a_2 x^5 y^4 + \mathbf{t.o.s.} \\ \dot{y} = -y + \dots + b_1 x y^6 z^2 + b_2 x^4 y^5 + \mathbf{t.o.s.} \\ \dot{z} = 2z + \dots + c_1 x y^5 z^3 + c_2 x^4 y^4 z + \mathbf{t.o.s.} \end{cases} ,$$

a transformação da forma,

$$(x, y, z) \mapsto (x + \alpha_1 y^5 z^3 + \alpha_2 x^3 y^4 z, y + \beta_1 x^2 y^5 z, z + \gamma_1 x^5 y^3 + \gamma_2 x^2 y^4 z^2)$$

e obtemos o sistema com 6 equações e 5 incógnitas,

$$\begin{cases} -3\alpha_1 - 3\alpha_2 + \beta_1 + \gamma_2 & = -a_1 \\ -\alpha_2 + \gamma_1 & = -a_2 \\ -2\beta_1 & = -b_1 \\ \beta_1 & = -b_2 \\ 2\alpha_1 - 2\gamma_2 & = -c_1 \\ 2\alpha_2 - 5\gamma_1 - 2\gamma_2 & = -c_2 \end{cases} .$$

A matriz associada a este sistema não tem característica máxima (tem característica 4), logo, além de não podermos eliminar o monómio  $x^4 y^5 \frac{\partial}{\partial y}$ , não podemos eliminar (por opção) o monómio  $x^4 y^4 z \frac{\partial}{\partial z}$ .

## 3.4 Passos Seguintes da Renormalização

Nos passos seguintes iremos distinguir 6 casos.

**3.4.1**  $p = 6j + 1$ 

Se  $p = 6j + 1$  temos um campo de vectores da forma,

$$\begin{cases} \dot{x} = x + \dots + \bar{a}_1 x^{3j+1} y^{3j} + \sum_{l=0}^{j-1} a_l x^{3(j-l)-2} y^{3j+l+1} z^{2(l+1)} + \mathbf{t.o.s.} \\ \dot{y} = -y + \dots + \bar{b}_1 x^{3j} y^{3j+1} + \bar{b}_2 y^{4j+1} z^{2j} + \sum_{l=0}^{j-2} b_l x^{3(j-l)-3} y^{3j+l+2} z^{2(l+1)} + \mathbf{t.o.s.} , \\ \dot{z} = 2z + \dots + \bar{c}_1 y^{4j} z^{2j+1} + \sum_{l=0}^{j-1} c_l x^{3(j-l)} y^{3j+l} z^{2l+1} + \mathbf{t.o.s.} \end{cases}$$

e uma transformação da forma,

$$\Phi : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x + \sum_{l=0}^{j-1} \alpha_l x^{3(j-l)-1} y^{3j+l} z^{2l+1} \\ y + \sum_{l=0}^{j-1} \beta_l x^{3(j-l)-2} y^{3j+l+1} z^{2l+1} \\ z + \bar{\gamma}_1 x^{3j+1} y^{3j-1} + \sum_{l=0}^{j-1} \gamma_l x^{3(j-l)-2} y^{3j+l} z^{2(l+1)} \end{pmatrix},$$

que origina o seguinte sistema com  $3j+3$  equações lineares e  $3j+1$  incógnitas,

$$-\alpha_0 + \bar{\gamma}_1 = -\bar{a}_1 \quad (\text{I})$$

$$-2\alpha_{j-1} + \beta_{j-1} + \gamma_{j-1} = -a_{j-1} \quad (\text{II})$$

$$3(l-j)\alpha_l - (2l+3)\alpha_{l+1} + \beta_l + \gamma_l = -a_l, \quad l = 0, \dots, j-2 \quad (\text{III})$$

$$\beta_0 = \bar{b}_1 \quad (\text{IV})$$

$$\beta_{j-1} = \bar{b}_2 \quad (\text{V})$$

$$(3(l-j)+2)\beta_l - (2l+3)\beta_{l+1} = -b_l, \quad l = 0, \dots, j-2 \quad (\text{VI})$$

$$2\alpha_0 - (3j+1)\bar{\gamma}_1 - 2\gamma_0 = -c_0 \quad (\text{VII})$$

$$\gamma_{j-1} = -\bar{c}_1 \quad (\text{VIII})$$

$$2\alpha_{l+1} + (3(l-j)+2)\gamma_l - 2(l+2)\gamma_{l+1} = -c_{l+1}, \quad l = 0, \dots, j-2 \quad (\text{IX})$$

A matriz associada a este sistema tem característica máxima, se retirarmos as equações (I) e (IV) ficamos com um sistema possível e determinado, logo podemos eliminar todos os monómios ressonantes de grau  $6j+1$  excepto os monómios da forma,

$$x^{3j+1}y^{3j}\frac{\partial}{\partial x} \text{ e } x^{3j}y^{3j+1}\frac{\partial}{\partial y}. \quad (3.2)$$

**Demonstração.** Neste caso retirámos ao sistema 3.4.1 as equações (I) e (IV). Das equações (II), (V) e (VIII) obtemos o sistema,

$$\begin{cases} -2\alpha_{j-1} + \beta_{j-1} + \gamma_{j-1} = -a_{j-1} \\ \beta_{j-1} = \bar{b}_2 \\ \gamma_{j-1} = -\bar{c}_1 \end{cases}, \quad (3.3)$$

e a matriz  $A_{j-1}$  associada a este sistema linear tem determinante não nulo, ( $\det(A_{j-1}) = -2$ ) logo podemos determinar

$$\alpha_{j-1}, \beta_{j-1} \text{ e } \gamma_{j-1}. \quad (3.4)$$

Das equações (III), (VI) e (IX) obtemos os seguintes sistemas,

$$\begin{cases} 3(l-j)\alpha_l + \beta_l + \gamma_l = -a_l - (2l+3)\alpha_{l+1} \\ (3(l-j)+2)\beta_l = -b_l + (2l+3)\beta_{l+1} \\ (3(l-j)+2)\gamma_l = -c_l - 2\alpha_{l+1} + 2(l+2)\gamma_{l+1} \end{cases}, \quad l = 0, \dots, j-2. \quad (3.5)$$

As matrizes  $A_l$ , onde  $l = 0, \dots, j-2$  associadas aos sistemas (3.5) são da forma,

$$A_l = \begin{pmatrix} 3(l-j) & 1 & 1 \\ 0 & (3(l-j)+2) & 0 \\ 0 & 0 & (3(l-j)+2) \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

logo temos que,

$$\det(A_l) = 3(l-j)(3(l-j)+2)^2, \quad l = 0, \dots, j-2, \quad (3.7)$$

e obviamente,  $\det(A_l) \neq 0$  para todo  $l = 0, \dots, j-2$ . Logo começando por resolver o sistema 3.5 ( $l = j-2$ ) determinamos,

$$\alpha_{j-2}, \beta_{j-2} \text{ e } \gamma_{j-2}, \quad (3.8)$$

dado que,

$$\alpha_{j-1}, \beta_{j-1} \text{ e } \gamma_{j-1} \quad (3.9)$$

já estão determinados (foram determinados no sistema 3.3). Procedendo deste modo determinamos sucessivamente,

$$\alpha_{j-3}, \beta_{j-3} \text{ e } \gamma_{j-3} \dots \alpha_0, \beta_0 \text{ e } \gamma_0.$$

Finalmente, como já determinámos  $\alpha_0, \gamma_0$  e  $3j + 1 \neq 0$ , da equação (VII) encontramos  $\bar{\gamma}_1$ .  $\square$

### 3.4.2 $p = 6j + 2$

Se  $p = 6j + 2$  temos um campo de vectores da forma,

$$\begin{cases} \dot{x} = x + \dots + \bar{\alpha}_1 y^{4j+1} z^{2j+1} + \sum_{l=0}^{j-1} \alpha_l x^{3(j-l)} y^{3j+l+1} z^{2l+1} + \mathbf{t.o.s.} \\ \dot{y} = -y + \dots + \sum_{l=0}^{j-1} b_l x^{3(j-l)-1} y^{3j+l+2} z^{2l+1} + \mathbf{t.o.s.} \\ \dot{z} = 2z + \dots + \bar{c}_1 x^{3j+2} y^{3j} + \sum_{l=0}^{j-1} c_l x^{3(j-l)-1} y^{3j+l+1} z^{2(l+1)} + \mathbf{t.o.s.} \end{cases},$$

e uma transformação da forma,

$$\Phi : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x + \bar{\alpha}_1 x^{3j+1} y^{3j} + \sum_{l=0}^{j-1} \alpha_l x^{3(j-l)-2} y^{3j+l+1} z^{2(l+1)} \\ y + \bar{\beta}_1 x^{3j} y^{3j+1} + \bar{\beta}_2 y^{4j+1} z^{2j} + \sum_{l=0}^{j-2} \beta_l x^{3(j-l)-3} y^{3j+l+2} z^{2(l+1)} \\ z + \bar{\gamma}_1 y^{4j} z^{2j+1} + \sum_{l=0}^{j-1} \gamma_l x^{3(j-l)} y^{3j+l} z^{2l+1} \end{pmatrix},$$

o que origina o seguinte sistema de  $3j + 2$  equações e  $3j + 3$  incógnitas,

$$-(3j+1)\bar{\alpha}_1 - 2\alpha_0 + \bar{\beta}_1 + \gamma_0 = -a_0 \quad (\text{I})$$

$$-\alpha_{j-1} + \bar{\beta}_2 + \bar{\gamma}_1 = -\bar{a}_1 \quad (\text{II})$$

$$(3(l-j)-1)\alpha_{l-1} - 2(l+1)\alpha_l + \beta_{l-1} + \gamma_l = -a_l, \quad l = 1, \dots, j-1 \quad (\text{III})$$

$$-3j\bar{\beta}_1 - 2\beta_0 = -b_0 \quad (\text{IV})$$

$$-2j\bar{\beta}_2 - 3\beta_{j-2} = -b_{j-1}, \quad j \geq 2 \quad (\text{V})$$

$$3(l-j)\beta_{l-1} - 2(l+1)\beta_l = -b_l, \quad l = 1, \dots, j-2 \quad (\text{VI})$$

$$2\bar{\alpha}_1 - \gamma_0 = -\bar{c}_1 \quad (\text{VII})$$

$$2\alpha_{j-1} - (2j+1)\bar{\gamma}_1 - 3\gamma_{j-1} = -c_{j-1} \quad (\text{VIII})$$

$$2\alpha_{l-1} + (3(l-j)-3)\gamma_{l-1} - (2l+1)\gamma_l = -c_{l-1}, \quad l = 1, \dots, j-1 \quad (\text{IX})$$

Sob a hipótese de que este sistema tem característica máxima podemos eliminar todos os monómios ressonantes de grau  $6j+2$ . Os resultados estão indicados no apêndice (A.1)

### 3.4.3 $p = 6j + 3$

Neste caso o campo de vectores é da forma,

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = x + \dots + \bar{a}_1 x^{3j+2} y^{3j+1} + \sum_{l=0}^{j-1} a_l x^{3(j-l)-3} y^{3j+l+2} z^{2(l+1)} + \mathbf{t.o.s.} \\ \dot{y} = -y + \dots + \bar{b}_1 x^{3j+1} y^{3j+2} + \sum_{l=0}^{j-1} b_l x^{3(j-l)-2} y^{3j+l+3} z^{2(l+1)} + \mathbf{t.o.s.} , \\ \dot{z} = 2z + \dots + \sum_{l=0}^j c_l x^{3(j-l)+1} y^{3j+l+1} z^{2l+1} + \mathbf{t.o.s.} \end{array} \right.$$

a transformação tem a forma,

$$\Phi : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x + \bar{\alpha}_1 y^{4j+1} z^{2j+1} + \sum_{l=0}^{j-1} \alpha_l x^{3(j-l)} y^{3j+l+1} z^{2l+1} \\ y + \sum_{l=0}^{j-1} \beta_l x^{3(j-l)-1} y^{3j+l+2} z^{2l+1} \\ z + \bar{\gamma}_1 x^{3j+2} y^{3j} + \sum_{l=0}^{j-1} \gamma_l x^{3(j-l)-1} y^{3j+l+1} z^{2(l+1)} \end{pmatrix},$$

e temos o seguinte sistema de  $3j + 3$  equações e  $3j + 2$  incógnitas,

$$-(2j+1)\bar{\alpha}_1 - 3\alpha_{j-1} + \beta_{j-1} + \gamma_{j-1} = -a_{j-1} \quad (\text{I})$$

$$-\alpha_0 + \bar{\gamma}_1 = -a_1 \quad (\text{II})$$

$$3(l-j)\alpha_l - (2l+3)\alpha_{l+1} + \beta_l + \gamma_l = -a_l, \quad l = 0, \dots, j-2 \quad (\text{III})$$

$$-2\beta_{j-1} = -b_{j-1} \quad (\text{IV})$$

$$\beta_0 = \bar{b}_1 \quad (\text{V})$$

$$(3(l-j)+1)\beta_l - (2l+3)\beta_{l+1} = -b_l, \quad l = 0, \dots, j-2 \quad (\text{VI})$$

$$2\bar{\alpha}_1 - 2\gamma_{j-1} = -c_j \quad (\text{VII})$$

$$2\alpha_0 - (3j+2)\bar{\gamma}_1 - 2\gamma_0 = -c_0 \quad (\text{VIII})$$

$$2\alpha_{l+1} - 2(l+2)\gamma_{l+1} + (3(l-j)+1)\gamma_l = -c_{l+1}, \quad l = 0, \dots, j-2 \quad (\text{IX})$$

Se retirarmos a equação (V) a este sistema, supondo que o sistema resultante é possível e determinado, podemos eliminar todos os monómios ressonantes de grau  $6j + 3$ ,  $j \geq 2$ , excepto os monómios da forma  $x^{3j+1} y^{3j+2} \frac{\partial}{\partial y}$ . Os resultados estão indicados no apêndice (A.3)

#### 3.4.4 $p = 6j + 4$

O campo de vectores é da forma,

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = x + \dots + \sum_{l=0}^j a_l x^{3(j-l)+1} y^{3j+l+2} z^{2l+1} + \mathbf{t.o.s.} \\ \dot{y} = -y + \dots + \bar{b}_1 y^{4j+3} z^{2j+1} + \sum_{l=0}^{j-1} b_l x^{3(j-l)} y^{3j+l+3} z^{2l+1} + \mathbf{t.o.s.} \\ \dot{z} = 2z + \dots + \bar{c}_1 x^{3(j+1)} y^{3j+1} + \bar{c}_2 y^{4j+2} z^{2(j+1)} + \\ \quad + \sum_{l=0}^{j-1} c_l x^{3(j-l)} y^{3j+l+2} z^{2(l+1)} + \mathbf{t.o.s.} \end{array} \right. ,$$

a transformação tem a forma,

$$\Phi : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x + \bar{\alpha}_1 x^{3j+2} y^{3j+1} + \sum_{l=0}^{j-1} \alpha_l x^{3(j-l)-1} y^{3j+l+2} z^{2(l+1)} \\ y + \bar{\beta}_1 x^{3j+1} y^{3j+2} + \sum_{l=0}^{j-1} \beta_l x^{3(j-l)-2} y^{3j+l+3} z^{2(l+1)} \\ z + \sum_{l=0}^j \gamma_l x^{3(j-l)+1} y^{3j+l+1} z^{2l+1} \end{pmatrix} ,$$

e o seguinte sistema de  $3j + 4$  equações e  $3j + 3$  incógnitas,

$$-(3j+2)\bar{\alpha}_1 - 2\alpha_0 + \bar{\beta}_1 + \gamma_0 = -a_0 \quad (\text{I})$$

$$-2\alpha_{j-1} + \beta_{j-1} + \gamma_j = -a_j \quad (\text{II})$$

$$(3(l-j)-2)\alpha_{l-1} - 2(l+1)\alpha_l + \beta_{l-1} + \gamma_l = -a_l, \quad l = 1, \dots, j-1 \quad (\text{III})$$

$$-(3j+1)\bar{\beta}_1 - 2\beta_0 = -b_0 \quad (\text{IV})$$

$$\beta_{j-1} = \bar{b}_1 \quad (\text{V})$$

$$(3(l-j)-1)\beta_{l-1} - (2l+1)\beta_l = -b_l, \quad l = 1, \dots, j-1 \quad (\text{VI})$$

$$\gamma_j = \bar{c}_2 \quad (\text{VII})$$

$$2\bar{\alpha}_1 - \gamma_0 = -c_1 \quad (\text{VIII})$$

$$2\alpha_0 - (3j+1)\gamma_0 - 3\gamma_1 = -c_0 \quad (\text{IX})$$

$$2\alpha_l + (3(l-j)-1)\gamma_l - (2l+3)\gamma_{l+1} = -c_l, \quad l = 1, \dots, j-1 \quad (\text{X})$$

Se retirar-mos a este sistema a equação (I), obtemos um sistema possível e determinado, i.e. conseguimos eliminar todos os monómios ressonantes de grau  $6j+4$ , excepto os monómios da forma,

$$x^{3j+1}y^{3j+2}z \frac{\partial}{\partial x}. \quad (3.10)$$

Na demonstração usamos os mesmos argumentos utilizados para o caso  $p = 6j+1$  ( ver apêndice A.5).

### 3.4.5 $p = 6j+5$

O campo de vectores é da forma,

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = x + \dots + \bar{a}_1 x^{3(j+1)} y^{3j+2} + \bar{a}_2 y^{4j+3} z^{2(j+1)} + \\ \quad + \sum_{l=0}^{j-1} a_l x^{3(j-l)} y^{3j+l+3} z^{2(l+1)} + \mathbf{t.o.s.} \\ \dot{y} = -y + \dots + \bar{b}_1 x^{3j+2} y^{3(j+1)} + \sum_{l=0}^{j-1} b_l x^{3(j-l)-1} y^{3j+l+4} z^{2(l+1)} + \mathbf{t.o.s.} \\ \dot{z} = 2z + \dots + \sum_{l=0}^j c_l x^{3(j-l)+2} y^{3j+l+2} z^{2l+1} + \mathbf{t.o.s.} \end{array} \right. ,$$

a transformação tem a forma,

$$\Phi : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x + \sum_{l=0}^j \alpha_l x^{3(j-l)+1} y^{3j+l+2} z^{2l+1} \\ y + \bar{\beta}_1 y^{4j+3} z^{2j+1} + \sum_{l=0}^{j-1} \beta_l x^{3(j-l)} y^{3j+l+3} z^{2l+1} \\ z + \bar{\gamma}_1 x^{3(j+1)} y^{3j+1} + \bar{\gamma}_2 y^{4j+2} z^{2(j+1)} + \sum_{l=0}^{j-1} \gamma_l x^{3(j-l)} y^{3j+l+2} z^{2(l+1)} \end{pmatrix},$$

e o seguinte sistema de  $3j + 4$  equações e  $3j + 4$  incógnitas,

$$-\alpha_0 + \bar{\gamma}_1 = -\bar{a}_1 \quad (\text{I})$$

$$-\alpha_j + \bar{\beta}_1 + \bar{\gamma}_2 = -\bar{a}_2 \quad (\text{II})$$

$$(3(l-j) - 1)\alpha_l - (2l+3)\alpha_{l+1} + \beta_l + \gamma_l = -a_l, \quad l = 0, \dots, j-1 \quad (\text{III})$$

$$-(2j+1)\bar{\beta}_1 - 3\beta_{j-1} = -b_{j-1} \quad (\text{IV})$$

$$\beta_0 = \bar{b}_1 \quad (\text{V})$$

$$3(l-j)\beta_l - (2l+3)\beta_{l+1} = -b_l, \quad l = 0, \dots, j-2 \quad (\text{VI})$$

$$2\alpha_0 - 3(j+1)\bar{\gamma}_1 - 2\gamma_0 = -c_0 \quad (\text{VII})$$

$$2\alpha_j - 2(j+1)\bar{\gamma}_2 - 3\gamma_{j-1} = -c_j \quad (\text{VIII})$$

$$2\alpha_{l+1} + 3(l-j)\gamma_l - 2(l+2)\gamma_{l+1} = -c_l, \quad l = 0, \dots, j-2 \quad (\text{IX})$$

Neste caso é possível eliminar todos os monómios ressonantes de grau  $6j + 5$ , uma vez que o sistema é possível e determinado.

Os resultados estão indicados no apêndice (A.6)

### 3.4.6 $p = 6(j + 1)$

O campo de vectores é da forma,

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = x + \dots + \sum_{l=0}^j a_l x^{3(j-l)+2} y^{3j+l+3} z^{2l+1} + \mathbf{t.o.s.} \\ \dot{y} = -y + \dots + \sum_{l=0}^j b_l x^{3(j-l)+1} y^{3j+l+4} z^{2l+1} + \mathbf{t.o.s.} \\ \dot{z} = 2z + \dots + \bar{c}_1 x^{3j+4} y^{3j+2} + \sum_{l=0}^j c_l x^{3(j-l)+1} y^{3j+l+3} z^{2(l+1)} + \mathbf{t.o.s.} \end{array} \right. ,$$

a transformação tem a forma,

$$\Phi : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x + \bar{\alpha}_1 x^{3j+3} y^{3j+2} + \bar{\alpha}_2 y^{4j+3} z^{2(j+1)} + \sum_{l=0}^{j-1} \alpha_l x^{3(j-l)} y^{3j+l+3} z^{2(l+1)} \\ y + \bar{\beta}_1 x^{3j+2} y^{3j+3} + \sum_{l=0}^{j-1} \beta_l x^{3(j-l)-1} y^{3j+l+4} z^{2(l+1)} \\ z + \sum_{l=0}^j \gamma_l x^{3(j-l)+2} y^{3j+l+2} z^{2l+1} \end{pmatrix} ,$$

e o seguinte sistema de  $3j + 4$  equações e  $3j + 4$  incógnitas,

$$-3(j+1)\bar{\alpha}_1 - 2\alpha_0 + \bar{\beta}_1 + \gamma_0 = -a_0 \quad (\text{I})$$

$$-2(j+1)\bar{\alpha}_2 - 3\alpha_{j-1} + \beta_{j-1} + \gamma_j = -a_j \quad (\text{II})$$

$$(3(l-j) - 3)\alpha_{l-1} - 2(l+1)\alpha_l + \beta_{l-1} + \gamma_l = -a_l, \quad l = 1, \dots, j-1 \quad (\text{III})$$

$$-(3j+2)\bar{\beta}_1 - 2\beta_0 = -b_0 \quad (\text{IV})$$

$$2\beta_{j-1} = b_j \quad (\text{V})$$

$$(3(l-j) - 2)\beta_{l-1} - (2l+1)\beta_l = -b_l, \quad l = 1, \dots, j-1 \quad (\text{VI})$$

$$2\bar{\alpha}_1 - \gamma_0 = -\bar{c}_1 \quad (\text{VII})$$

$$2\alpha_0 - (3j+2)\gamma_0 - 3\gamma_1 = -c_0 \quad (\text{VIII})$$

$$2\bar{\alpha}_2 - 2\gamma_j = -c_j \quad (\text{IX})$$

$$2\alpha_l + (3(l-j) - 2)\gamma_l - (2l+3)\gamma_{l+1} = -c_l, \quad l = 1, \dots, j-1 \quad (\text{X})$$

Neste caso, tal como no anterior, o número de equações é igual ao número de incógnitas, logo podemos eliminar todos os monómios ressonantes de grau  $6(j+1)$ .

### 3.5 A Forma Renormalizada

Sob a hipótese de as matrizes associadas aos sistemas encontrados na secção anterior terem característica máxima, estamos em condições de exhibir a seguinte forma formal para campos de vectores genéricos e não degenerados em  $\mathbb{R}^3$ , cuja parte linear tem valores próprios  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = -1$  e  $\lambda_3 = 2$ , substancialmente mais simples que a forma normal de Poincaré-Dulac ,

$$\begin{cases} \dot{x} &= x + yz + p_1x^2y + x^4y^3f_1(x^3y^3) + xy^2zf_2(x^3y^3) \\ \dot{y} &= -y + p_2xy^2 + xy^2f_3(x^3y^3) + x^3y^4f_4(x^3y^3) \\ \dot{z} &= 2z + x^2 + p_3x^4y^4z \end{cases} . \quad (3.11)$$

**Observação 3.5.1.** De acordo com o teorema de Chen se o campo de vectores e a forma normal (3.11) forem analíticas então a mudança de coordenadas é de classe  $\mathbb{C}^\infty$ .

**Observação 3.5.2.** Optando por retirar outras equações nos sistemas de equações lineares relativos aos casos:  $p = 6j+1$ ,  $p = 6j+3$  e  $p = 6j+4$  iríamos chegar a outras formas normais renormalizadas. A escolha utilizada para retirar as equações nos três casos acima referidos apenas satisfaz o critério de simplificar ao máximo a terceira componente da forma normal renormalizada. Existindo outros critérios podemos encontrar uma forma normal renormalizada mais conveniente para o estudo de um problema específico.

**Observação 3.5.3.** No processo usado para simplificarmos os monómios ressonantes de grau  $6j+2$  existentes na forma normal de Poincaré-Dulac , obtivemos um sistema de equações com  $3j+2$  equações e  $3j+3$  incógnitas, houve portanto uma variável que foi “desperdiçada”. Iremos, na próxima secção, verificar se ainda é possível simplificar a forma normal (3.11) aproveitando a variável que não foi utilizada, i.e. simplificando simultaneamente os monómios ressonantes de grau  $6j+2$  e  $6j+3$ .

### 3.6 Transformação conjunta

De acordo com a observação 3.5.3 vamos tentar simplificar simultaneamente os monómios ressonantes de grau  $6j + 2$  e  $6j + 3$ ,  $j = 1, 2, \dots$

Suponhamos que já simplificámos todos os monómios ressonantes com grau menor ou igual a  $6j + 1$ , e, que desejamos eliminar simultaneamente os monómios de grau  $6j + 2$  e  $6j + 3$ . O campo resultante pode calcular-se com o auxílio do seguinte corolário do teorema (3.2.1).

**Corolário 3.6.1.** *Suponhamos que a um campo de vectores da forma,*

$$\dot{\mathbf{x}} = V_1 \mathbf{x} + \dots + F_k(\mathbf{x}) + F_{k+1}(\mathbf{x}) + \mathbf{t.o.s.},$$

*aplicamos uma transformação da forma,*

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} + H_{k-1}(\mathbf{y}) + H_k(\mathbf{y}),$$

*então o campo resultante tem a forma,*

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{y}} = & V_1 \mathbf{y} + \dots + F_k(\mathbf{y}) + F_{k+1}(\mathbf{y}) + \\ & + [H_{k-1}(\mathbf{y}), F_2(\mathbf{y})] + [H_{k-1}(\mathbf{y}), F_3(\mathbf{y})] + [H_k(\mathbf{y}), F_2(\mathbf{y})] + \mathbf{t.o.s.} \end{aligned} \quad (3.12)$$

**Demonstração.** Temos neste caso,  $H_j = 0$  para  $j \neq k-1$  e  $j \neq k$ ,  $[H_j, V_1] = 0$  para  $j = 2, 3 \dots$  e  $G_j = F_j$  para  $j = 2, \dots, k-1$ . Para  $j = k$ , o primeiro somatório (ver teorema 3.2.1) reduz-se a  $[H_{k-1}, F_2]$  dado que  $H_j = 0$  para  $j = 2, \dots, k-2$  e  $DH_i(F_{k-i+1} - G_{k-i+1}) = 0$ , para  $i = 2, \dots, k-1$  visto que  $H_j = 0$  para  $j = 2, \dots, k-2$  e que  $F_2 = G_2$ . A segunda linha da equação (3.1) anula-se claramente para  $m \neq 2$  e para  $m = 2$  temos  $H_{l_1}, H_{l_2} = 0$ , para todos os índices  $l_j$  que aparecem no somatório. Assim temos,

$$G_k = F_k + [H_{k-1}, F_2].$$

Para determinar-mos  $G_{k+1}$ , a única diferença relativa ao caso anterior surge no segundo somatório que se reduz a,

$$[H_k, F_2] + [H_{k-1}, F_3] + DH_2(F_k - G_k)$$

,como  $H_2 = 0$  temos,

$$G_{k+1} = F_{k+1} + [H_k, F_2] + [H_{k-1}, F_3], \quad \square.$$

Dado que o método para simplificar os monómios ressonantes de grau:  $6j + 1$ ,  $6j + 4$ ,  $6j + 5$  e  $6(j + 1)$ , é igual ao método indicado na secção anterior, apenas iremos indicar a simplificação simultânea dos monómios ressonantes de grau  $6j + 2$  e  $6j + 3$ .

### 3.6.1 Primeiro Passo ( $j = 1$ )

Neste passo iremos tentar simplificar os monómios ressonantes de grau 8 e de grau 9 (supondo que já simplificámos os monómios de grau inferior usando o processo anterior e as opções referidas na secção anterior). O campo de vectores tem portanto a forma,

$$\begin{cases} \dot{x} = x + yz + p_1x^2y + \cdots + a_1y^5z^3 + a_2x^3y^4z + a_3x^5y^4 + a_4x^2y^5z^2 + \mathbf{t.o.s.} \\ \dot{y} = -y + p_2xy^2 + \cdots + b_1x^2y^5z + b_2x^4y^5 + b_3xy^6z^2 + \mathbf{t.o.s.} \\ \dot{z} = 2z + x^2 + \cdots + c_1x^5y^3 + c_2x^2y^4z^2 + c_3x^4y^4z + c_4xy^5z^3 + \mathbf{t.o.s.} \end{cases},$$

ao qual vamos aplicar uma transformação da forma,

$$\Phi : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x + \alpha_1x^4y^3 + \alpha_2xy^4z^2 + \alpha_3y^5z^3 + \alpha_4x^3y^4z \\ y + \beta_1x^3y^4 + \beta_2y^5z^2 + \beta_3x^2y^5z \\ z + \gamma_1y^4z^3 + \gamma_2x^3y^3z + \gamma_3x^5y^3 + \gamma_4x^2y^4z^2 \end{pmatrix},$$

obtemos assim o seguinte sistema de equações lineares com 11 equações e 11 incógnitas, onde  $p_1$  e  $p_2$  são números reais determinados na simplificação dos monómios ressonantes de grau 3, recorde que optámos por eliminar o monómio da forma  $xyz \frac{\partial}{\partial z}$ .

$$\begin{aligned}
-\alpha_1 + \beta_2 + \gamma_1 &= -a_1 \\
-4\alpha_1 - 2\alpha_2 + \beta_1 + \gamma_2 &= -a_2 \\
-(2p_1 + 3p_2)\alpha_1 - \alpha_4 + p_1\beta_1 + \gamma_3 &= -a_3 \\
(p_1 - 4p_2)\alpha_2 - 3\alpha_3 - 3\alpha_4 + p_1\beta_2 + \beta_3 + \gamma_4 &= -a_4 \\
-3\beta_1 - 2\beta_2 &= -b_1 \\
p_2\alpha_1 - (3p_1 + 2p_2)\beta_1 - \beta_3 &= -b_2 \\
p_2\alpha_2 - 3p_2\beta_2 - 2\beta_3 &= -b_3 \\
2\alpha_1 - \gamma_2 &= -c_1 \\
2\alpha_2 - 3\gamma_1 - 3\gamma_2 &= -c_2 \\
2\alpha_4 - (3p_1 + 3p_2)\gamma_2 - 5\gamma_3 - 2\gamma_4 &= -c_3 \\
2\alpha_3 - 4p_2\gamma_1 - 2\gamma_4 &= -c_4
\end{aligned}$$

Sendo  $A$  a matriz associada a este sistema temos que,

$$\det(A) = 0,$$

logo, genericamente, não podemos eliminar o monómio de grau 9 existente na forma renormalizada (3.11).

### 3.6.2 Passos Seguintes ( $j > 1$ )

Supondo que queremos simplificar os monómios de grau  $6j + 2$  e de grau  $6j + 3$ , e que os monómios de grau inferior a  $6j + 2$ , já foram renormalizados, temos agora um campo de vectores da forma,

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = x + \dots + \bar{a}y^{4j+1}z^{2j+1} + \sum_{l=0}^{j-1} a_l x^{3(j-l)} y^{3j+l+1} z^{2l+1} + \\ \quad + \bar{b}x^{3j+2}y^{3j+1} + \sum_{l=0}^{j-1} b_l x^{3(j-l)-1} y^{3j+l+2} z^{2(l+1)} + \mathbf{t.o.s.} \\ \\ \dot{y} = -y + \dots + \sum_{l=0}^{j-1} c_l x^{3(j-l)-1} y^{3j+l+2} z^{2l+1} + \\ \quad + \bar{d}x^{3j+1}y^{3j+2} + \sum_{l=0}^{j-1} d_l x^{3(j-l)-2} y^{3j+l+3} z^{2(l+1)} + \mathbf{t.o.s.} \\ \\ \dot{z} = 2z + \dots + \bar{e}x^{3j+2}y^{3j} + \sum_{l=0}^{j-1} e_l x^{3(j-l)-1} y^{3j+l+1} z^{2(l+1)} + \\ \quad + \sum_{l=0}^j f_l x^{3(j-l)+1} y^{3j+l+1} z^{2l+1} + \mathbf{t.o.s.} \end{array} \right. ,$$

ao qual aplicamos a transformação,

$$\Phi : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x + \bar{\alpha}x^{3j+1}y^{3j} + \sum_{l=0}^{j-1} \alpha_l x^{3(j-l)-2} y^{3j+l+1} z^{2(l+1)} + \\ + \bar{\beta}y^{4j+1}z^{2j+1} + \sum_{l=0}^{j-1} \beta_l x^{3(j-l)} y^{3j+l+1} z^{2l+1} \\ y + \bar{\gamma}_1 x^{3j} y^{3j+1} + \bar{\gamma}_2 y^{4j+1} z^{2j} + \sum_{l=0}^{j-2} \gamma_l x^{3(j-l)-3} y^{3j+l+2} z^{2(l+1)} + \\ + \sum_{l=0}^{j-1} \delta_l x^{3(j-l)-1} y^{3j+l+2} z^{2l+1} \\ z + \bar{\varepsilon}y^{4j}z^{2j+1} + \sum_{l=0}^{j-1} \varepsilon_l x^{3(j-l)} y^{3j+l} z^{2l+1} + \\ + \bar{\eta}x^{3j+2}y^{3j} + \sum_{l=0}^{j-1} \eta_l x^{3(j-l)-1} y^{3j+l+1} z^{2(l+1)} \end{pmatrix},$$

e a simplificação dos monómios ressonantes de graus  $6j+2$  e  $6j+3$  resume-se a resolver o seguinte sistema de equações lineares com  $6j+5$  equações e  $6j+5$  incógnitas,

$$\begin{aligned}
-\alpha_{j-1} + \bar{\gamma}_2 + \bar{\varepsilon} &= -\bar{a} \\
-(3j+1)\bar{\alpha} - 2\alpha_0 + \bar{\gamma}_1 + \varepsilon_0 &= -a_0 \\
(3(l-j)-1)\alpha_{l-1} - 2(l+1)\alpha_l + \gamma_{l-1} + \varepsilon_l &= -a_l \quad (1 \leq l \leq j-1) \\
(-3j(p_1+p_2)+p_1)\bar{\alpha} - \beta_0 + p_1\bar{\gamma}_1 + \bar{\eta} &= -\bar{b} \\
(-3j(p_1+p_2)+4p_1-p_2)\alpha_0 - 3j\beta_0 - 3\beta_1 + p_1\gamma_0 + \delta_0 + \eta_0 &= -b_0 \\
(p_1-4jp_2)\alpha_{j-1} - (2j+1)\bar{\beta} - 3\beta_{j-1} + p_1\bar{\gamma}_2 + \delta_{j-1} + \eta_{j-1} &= -b_{j-1} \\
(-3j(p_1+p_2)+l(3p_1-p_2)+4p_1-p_2)\alpha_l + \\
+ 3(l-j)\beta_l - (2l+3)\beta_{l+1} + p_1\gamma_l + \delta_l + \eta_l &= -b_l \quad (1 \leq l \leq j-2) \\
-3j\bar{\gamma}_1 - 2\gamma_0 &= -c_0 \\
-2j\bar{\gamma}_2 - 3\gamma_{j-2} &= -c_{j-1} \\
3(l-j)\gamma_{l-1} - 2(l+1)\gamma_l &= -c_l \quad (1 \leq l \leq j-2) \\
p_2\bar{\alpha} + (-3j(p_1+p_2)+p_2)\bar{\gamma}_1 - \delta_0 &= -\bar{d} \\
p_2\alpha_{j-1} + (-4j+1)p_2\bar{\gamma}_2 - 2\delta_{j-1} &= -d_{j-1} \\
p_2\alpha_l + (-3j(p_1+p_2)+l(3p_1-p_2)+3p_1)\gamma_l + \\
+ (3(l-j)+1)\delta_l - (2l+3)\delta_{l+1} &= -d_l \quad (0 \leq l \leq j-2) \\
2\bar{\alpha} - \varepsilon_0 &= -\bar{e} \\
2\alpha_{j-1} - (2j+1)\bar{\varepsilon} - 3\varepsilon_{j-1} &= -e_{j-1} \\
2\alpha_l + 3(l-j)\varepsilon_l - (2l+3)\varepsilon_{l+1} &= -e_l \quad (0 \leq l \leq j-2) \\
2\beta_0 - 3j(p_1+p_2)\varepsilon_0 - (3j+2)\bar{\eta} - 2\eta_0 &= -f_0 \\
2\bar{\beta} - 4jp_2\bar{\varepsilon} - 2\eta_{j-1} &= -f_j \\
2\beta_l + (-3j(p_1+p_2)+l(3p_1-p_2))\varepsilon_l + \\
+ (3(l-j)-2)\eta_{l-1} - 2(l+1)\eta_l &= -f_l \quad (1 \leq l \leq j-1)
\end{aligned}$$

O determinante das matrizes associadas a estes sistemas é uma expressão algébrica que depende dos coeficientes  $p_1$  e  $p_2$  e não foi possível encontrar a expressão analítica do determinante das matrizes associadas aos sistemas. Nos apêndices (A10) e (A11) serão apresentados os programas elaborados em MatLab, com os quais se calculou os determinantes. Calcularam-se os determinantes para valores de  $j = 1, \dots, 15$  e todos deram zero. Assim genericamente não podemos eliminar todos os monómios ressonantes de grau  $6j+3$ , i.e. não é possível simplificar a forma renormalizada (3.11).

# Apêndice A

## Discussão dos Sistemas

Para a discussão dos sistemas do capítulo 3, elaborámos um programa em Matlab para os casos em que não foi possível provar analiticamente que a matriz associada tem característica máxima. Apresentamos os programas e os respectivos resultados. Em todos os programas a matriz completa será representada por  $A$  e, caso necessário, a matriz quadrada de dimensão máxima será denotada por  $T$ .

### A.1 Discussão do Sistema 3.4.2

Neste caso retirámos à matriz  $A$  a primeira coluna à matriz  $A$  para determinar a matriz quadrada  $T$  de dimensão máxima e calculámos o determinante da matriz  $T$  para  $j = 1, \dots, 45$  e obtivemos os resultados indicados na tabela A.1,

### A.2 Código do programa ( $p = 6j + 2$ )

```
%matriz completa mod2
A=zeros(3*j+2,3*j+3);
for j=1:45
%linha 1
A(1,1)=-(3*j+1); A(1,2)=-2; A(1,j+2)=1; A(1,2*j+4)=1;
%linha 2
A(2,j+1)=-1; A(2,j+3)=1; A(2,2*j+3)=1;
%linhas 3---->j+1
```

```

for l=1:j-1
    A(1+2,l+1)=3*(1-j)-1;
    A(1+2,l+2)=-2*(1+1);
    A(1+2,j+1+3)=1;
    A(1+2,2*j+1+4)=1;
end
%linha j+2
A(j+2,j+2)=-3*j; A(j+2,j+4)=-2;
if j>1
%linha j+3
A(j+3,j+3)=-2*j; A(j+3,2*j+2)=-3;
end
%linhas j+4----->2j+1
for l=1:j-2
    A(j+1+3,j+1+3)=3*(1-j);
    A(j+1+3,j+1+4)=-2*(1+1);
end
%linha 2j+2
A(2*j+2,1)=2; A(2*j+2,2*j+4)=-1;
%linha 2j+3
A(2*j+3,j+1)=2; A(2*j+3,2*j+3)=-2*(j+1); A(2*j+3,3*j+3)=-3;
%linhas 2j+4----->3j+2
for l=0:j-2
A(2*j+1+4,l+1)=2;
A(2*j+1+4,2*j+1+4)=3*(1-j);
A(2*j+1+4,2*j+1+5)=-2*(l+3);
end
j
T=A(:,2:3*j+3);
DET_T=det(T)
end

```

| <b>j</b> | <b>det(T)</b>    | <b>j</b> | <b>det(T)</b>    | <b>j</b> | <b>det(T)</b>    |
|----------|------------------|----------|------------------|----------|------------------|
| 1        | 22               | 16       | $2.9581e + 058$  | 31       | $-5.7668e + 136$ |
| 2        | 2880             | 17       | $-1.8633e + 063$ | 32       | $2.3503e + 142$  |
| 3        | -1267776         | 18       | $1.3883e + 068$  | 33       | $-1.0494e + 148$ |
| 4        | $1.2433e + 009$  | 19       | $-1.2127e + 073$ | 34       | $5.1194e + 153$  |
| 5        | $-2.2847e + 012$ | 20       | $1.2320e + 078$  | 35       | $-2.7218e + 159$ |
| 6        | $7.0430e + 015$  | 21       | $-1.4451e + 083$ | 36       | $1.5733e + 165$  |
| 7        | $-3.3722e + 019$ | 22       | $1.9443e + 088$  | 37       | $-9.8648e + 170$ |
| 8        | $2.3691e + 023$  | 23       | $-2.9826e + 093$ | 38       | $6.6952e + 176$  |
| 9        | $-2.3377e + 027$ | 24       | $5.1881e + 098$  | 39       | $-4.9085e + 182$ |
| 10       | $3.1289e + 031$  | 25       | $-1.0181e + 104$ | 40       | $3.8798e + 188$  |
| 11       | $-5.5229e + 035$ | 26       | $2.2437e + 109$  | 41       | $-3.3002e + 194$ |
| 12       | $1.2558e + 040$  | 27       | $-5.5285e + 114$ | 42       | $3.0156e + 200$  |
| 13       | $-3.6059e + 044$ | 28       | $1.5170e + 120$  | 43       | $-2.9553e + 206$ |
| 14       | $1.2858e + 049$  | 29       | $-4.6185e + 125$ | 44       | $3.1011e + 212$  |
| 15       | $-5.6107e + 053$ | 30       | $1.5546e + 131$  | 45       | $-3.4791e + 218$ |

Tabela A.1: Determinante para o caso  $p = 6j + 2$

### A.3 Discussão do Sistema 3.4.3

Nestes sistemas verificamos que para  $j = 1$  a matriz do sistema de equações lineares não tem característica máxima. Neste caso obtemos uma matriz,  $A$ , com 6 linhas e 5 colunas,

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -5 & -2 \end{pmatrix},$$

e esta matriz tem característica 4, logo não podemos resolver duas equações, contudo para  $j \geq 2$  se retirarmos a  $(j + 3)^{ésima}$  linha à matriz  $A$ , que corresponde à equação (V), obtemos (pelo menos até  $j = 45$ ) uma matriz regular. Estes resultados podem ser verificados na tabela A.2.

**Observação A.3.1.** Optou-se, em todos os casos, por incluir apenas resultados até  $j = 45$  dado que a matriz  $T$  é mal condicionada, na realidade, temos que o valor da condição da matriz  $T$  é da ordem de  $10^6$ .

| j  | det(T)           | j  | det(T)           | j  | det(T)           |
|----|------------------|----|------------------|----|------------------|
| 1  | 0                | 16 | $-1.9196e + 061$ | 31 | $1.4048e + 142$  |
| 2  | -6480            | 17 | $1.7907e + 066$  | 32 | $-8.5178e + 147$ |
| 3  | 4354560          | 18 | $-1.9781e + 071$ | 33 | $5.6586e + 153$  |
| 4  | $-7.0140e + 009$ | 19 | $2.5610e + 076$  | 34 | $-4.1084e + 159$ |
| 5  | $1.9228e + 013$  | 20 | $-3.8594e + 081$ | 35 | $3.2512e + 165$  |
| 6  | $-8.9862e + 016$ | 21 | $6.7145e + 086$  | 36 | $-2.7978e + 171$ |
| 7  | $6.3696e + 020$  | 22 | $-1.3409e + 092$ | 37 | $2.6120e + 177$  |
| 8  | $-6.6706e + 024$ | 23 | $3.0529e + 097$  | 38 | $-2.6401e + 183$ |
| 9  | $9.7261e + 028$  | 24 | $-7.8863e + 102$ | 39 | $2.8828e + 189$  |
| 10 | $-1.9312e + 033$ | 25 | $2.2984e + 108$  | 40 | $-3.3944e + 195$ |
| 11 | $5.0372e + 037$  | 26 | $-7.5257e + 113$ | 41 | $4.3016e + 201$  |
| 12 | $-1.6967e + 042$ | 27 | $2.7553e + 119$  | 42 | $-5.8571e + 207$ |
| 13 | $7.2041e + 046$  | 28 | $-1.1239e + 125$ | 43 | $8.5537e + 213$  |
| 14 | $-3.8051e + 051$ | 29 | $5.0866e + 130$  | 44 | $-1.3378e + 220$ |
| 15 | $2.4571e + 056$  | 30 | $-2.5463e + 136$ | 45 | $2.2371e + 226$  |

Tabela A.2: Determinante para o caso  $p = 6j + 3$

## A.4 Código do programa ( $p = 6j + 3$ )

```

%matriz completa mod3
A=zeros(3*j+3,3*j+2);
for j=1:45
%linha 1
A(1,1)=-(2*j+1); A(1,j+1)=-3; A(1,2*j+1)=1; A(1,3*j+2)=1;
%linha 2
A(2,2)=-1; A(2,2*j+2)=1;
%linhas
for l=0:j-2
    A(1+3,l+2)=3*(l-j);
    A(1+3,l+3)=-(2*l+3);
    A(1+3,j+l+2)=1;
    A(1+3,2*j+l+3)=1;
end
%5linha j+2
A(j+2,2*j+1)=-2;

```

```

%linha j+3
A(j+3,j+2)=1;
for l=0:j-2
    A(j+1+4,j+1+2)=3*(1-j)+1;
    A(j+1+4,j+1+3)=-(2*l+3);
end
%linha 2j+3
A(2*j+3,1)=2;
A(2*j+3,3*j+2)=-2;
%linha 2j+4
A(2*j+4,2)=2;
A(2*j+4,2*j+2)=-(3*j+2);
A(2*j+4,2*j+3)=-2;
for l=1:j-1
    A(2*j+1+4,1+2)=2;
    A(2*j+1+4,2*j+1+2)=3*(1-j)-2;
    A(2*j+1+4,2*j+1+3)=-2*(1-j);
end
j
T=[A(1:j+2,:);A(j+4:3*j+3,:)];
DET_T=det(T)
end

```

## A.5 Discussão do Sistema 3.4.4

Neste caso retiramos ao sistema 3.4.1 a equação (I). Das equações (II), (V) e (VII) obtemos o sistema,

$$\begin{cases} -2\alpha_{j-1} + \beta_{j-1} + \gamma_j = -a_j \\ \beta_{j-1} = \bar{b}_1 \\ \gamma_j = \bar{c}_2 \end{cases}, \quad (\text{A.1})$$

e a matriz  $A_j$  associada a este sistema linear tem determinante não nulo, ( $\det(A_j) = -2$ ) logo podemos determinar

$$\alpha_{j-1}, \beta_{j-1} \text{ e } \gamma_j. \quad (\text{A.2})$$

Das equações (III), (VI) e (X) obtemos os seguintes sistemas,

$$\begin{cases} (3(l-j)-2)\alpha_{l-1} + \beta_{l-1} + \gamma_l & = -a_l + (2l+1)\alpha_l \\ (3(l-j)-1)\beta_{l-1} & = -b_l + (2l+1)\beta_l \\ (3(l-j)-1)\gamma_l & = -c_l - 2\alpha_l + (2l+3)\gamma_{l+1} \end{cases}, l = 1, \dots, j-1. \quad (\text{A.3})$$

As matrizes  $A_l$ , onde  $l = 1, \dots, j-1$  associadas aos sistemas (A.3) são da forma,

$$\begin{pmatrix} 3(l-j)-2 & 1 & 1 \\ 0 & (3(l-j)-1) & 0 \\ 0 & 0 & (3(l-j)-1) \end{pmatrix}, \quad l = 1, \dots, j-1, \quad (\text{A.4})$$

logo temos que,

$$\det(A_l) = (3(l-j)-2)(3(l-j)-1)^2, \quad l = 1, \dots, j-1, \quad (\text{A.5})$$

e obviamente,  $\det(A_l) \neq 0$  para todo  $l = 1, \dots, j-1$ . Logo começando por resolver o sistema (A.3) ( $l = j-1$ ) determinamos,

$$\alpha_{j-2}, \beta_{j-2} \text{ e } \gamma_{j-1}, \quad (\text{A.6})$$

dado que,

$$\alpha_{j-1}, \beta_{j-1} \text{ e } \gamma_j \quad (\text{A.7})$$

já estão determinados (foram determinados no sistema A.1). Procedendo deste modo determinamos sucessivamente,

$$\alpha_{j-3}, \beta_{j-3}, \gamma_{j-2} \dots \dots \alpha_0, \beta_0, \gamma_1.$$

Finalmente as equações *IV*, *VIII* e *IX* originam o seguinte sistema com três equações e três incógnitas (dado que já determinamos  $\alpha_0, \beta_0$  e  $\gamma_1$ ),

$$\begin{cases} -\bar{\beta}_1 & = -b_0 + 2\beta_0 \\ 2\bar{\alpha}_1 - \gamma_0 & = -c_1 \\ -(3j+1)\gamma_0 & = -c_0 - 2\alpha_0 + 3\gamma_1 \end{cases}, \quad (\text{A.8})$$

que é possível e determinado, logo podemos eliminar todos os monómios ressonantes de grau  $6j + 4$  excepto os monómios do tipo,

$$x^{3j+1}y^{3j+2}z\frac{\partial}{\partial x}. \quad (\text{A.9})$$

## A.6 Discussão do Sistema 3.4.5

No presente caso calculámos os determinantes da matriz  $A$  para  $j = 1, \dots, 45$  que podem ser consultados na tabela A.3.

## A.7 Código do programa ( $p = 6j + 5$ )

```
%matriz completa mod5
A=zeros(3*j+4,3*j+4); for j=1:45
%linha 1
A(1,1)=-1; A(1,2*j+3)=1;
%linha 2
A(2,j+1)=-1; A(2,j+2)=1; A(2,2*j+4)=1;
%linhas 3---->j+2
for l=0:j-1
    A(1+3,l+1)=3*(1-j)-1;
    A(1+3,l+2)=- (2*l+3);
    A(1+3,j+1+3)=1;
    A(1+3,2*j+1+5)=1;
end
%linha j+3
A(j+3,j+2)=- (2*j+1); A(j+3,2*j+2)=-3;
%linha j+4
A(j+4,j+3)=1;
%linhas j+5----->2j+3
for l=0:j-2
    A(j+1+5,j+1+3)=3*(1-j);
    A(j+1+5,j+1+4)=- (2*l+3);
end
%linha 2j+4
A(2*j+4,1)=2; A(2*j+4,2*j+3)=-3*(j+1); A(2*j+4,2*j+5)=-2;
```

```
%linha 2j+5
A(2*j+5,j+1)=2; A(2*j+5,2*j+4)=-2*(j+1); A(2*j+5,3*j+4)=-3;
%linhas 2j+6---->3j+4
for l=1:j-1
    A(2*j+l+5,l+1)=2;
    A(2*j+l+5,2*j+l+4)=3*(1-j)-3;
    A(2*j+l+5,2*j+l+5)=-2*(1+1);
end j DET_A=det(A) end
```

| j  | det(T)         | j  | det(T)         | j  | det(T)         |
|----|----------------|----|----------------|----|----------------|
| 1  | -180           | 16 | -3.6163e + 060 | 31 | -1.4744e + 139 |
| 2  | -44100         | 17 | -2.4352e + 065 | 32 | -6.2286e + 144 |
| 3  | -27783000      | 18 | -1.9327e + 070 | 33 | -2.8795e + 150 |
| 4  | -3.5757e + 010 | 19 | -1.7924e + 075 | 34 | -1.4530e + 156 |
| 5  | -8.1811e + 013 | 20 | -1.9276e + 080 | 35 | -7.9826e + 161 |
| 6  | -3.0311e + 017 | 21 | -2.3872e + 085 | 36 | -4.7638e + 167 |
| 7  | -1.7005e + 021 | 22 | -3.3827e + 090 | 37 | -3.0812e + 173 |
| 8  | -1.3731e + 025 | 23 | -5.4533e + 095 | 38 | -2.1555e + 179 |
| 9  | -1.5340e + 029 | 24 | -9.9483e + 100 | 39 | -1.6276e + 185 |
| 10 | -2.2969e + 033 | 25 | -2.0437e + 106 | 40 | -1.3240e + 191 |
| 11 | -4.4905e + 037 | 26 | -4.7062e + 111 | 41 | -1.1583e + 197 |
| 12 | -1.1215e + 042 | 27 | -1.2098e + 117 | 42 | -1.0878e + 203 |
| 13 | -3.5125e + 046 | 28 | -3.4584e + 122 | 43 | -1.0950e + 209 |
| 14 | -1.3578e + 051 | 29 | -1.0953e + 128 | 44 | -1.1795e + 215 |
| 15 | -6.3897e + 055 | 30 | -3.8304e + 133 | 45 | -1.3575e + 221 |

Tabela A.3: Determinante para o caso  $p = 6j + 5$

## A.8 Discussão do Sistema 3.4.6

No presente caso calculámos novamente os determinantes da matriz  $A$  para  $j = 1, \dots, 45$  que podem ser consultados na tabela A.4.

## A.9 Código do programa ( $p = 6j + 6$ )

```
%matrizcompleta mod0
```

```

A=zeros(3*j+4,3*j+4);
for j=1:45
%1linha
A(1,1)=-3*(j+1); A(1,3)=-2; A(1,j+3)=1; A(1,2*j+4)=1;
%2linha
A(2,2)=-2*(j+1); A(2,j+2)=-3; A(2,2*j+3)=1; A(2,3*j+4)=1;
%linhas 3-j+2
for l=1:j-1
    A(1+2,l+2)=3*(1-j)-3;
    A(1+2,l+3)=-2*(1+1);
    A(1+2,j+1+3)=1;
    A(1+2,2*j+1+4)=1;
end
%linha j+3
A(j+2,j+3)=-(3*j+2); A(j+2,j+4)=-2;
%linha j+4
A(j+3,2*j+3)=2;
%linhas j+5-2j+2
for l=1:j-1
    A(j+1+3,j+1+3)=3*(1-j)-2;
    A(j+1+3,j+1+4)=-2*(1+1);
end
%linha 2j+3
A(2*j+3,1)=2; A(2*j+3,2*j+4)=-1;
%linha 2j+4
A(2*j+4,3)=2; A(2*j+4,2*j+4)=-(3*j+2); A(2*j+4,2*j+5)=-3;
%linha 2j+5
A(2*j+5,2)=2; A(2*j+5,3*j+4)=-2;
%linhas 2j+6-3j+4
for l=1:j-1
    A(2*j+1+5,l+3)=2;
    A(2*j+1+5,2*j+1+4)=3*(1-j)-2;
    A(2*j+1+5,2*j+1+5)=-2*(1+3);
end
j
DET_A=det(A)
end

```

| j  | det(T)           | j  | det(T)           | j  | det(T)           |
|----|------------------|----|------------------|----|------------------|
| 1  | 2400             | 16 | $-5.7657e + 064$ | 31 | $1.4056e + 146$  |
| 2  | -1056000         | 17 | $5.9894e + 069$  | 32 | $-9.0431e + 151$ |
| 3  | $1.1384e + 009$  | 18 | $-7.3219e + 074$ | 33 | $6.3643e + 157$  |
| 4  | $-2.4384e + 012$ | 19 | $1.0446e + 080$  | 34 | $-4.8867e + 163$ |
| 5  | $9.1196e + 015$  | 20 | $-1.7259e + 085$ | 35 | $4.0837e + 169$  |
| 6  | $-5.4535e + 019$ | 21 | $3.2803e + 090$  | 36 | $-3.7055e + 175$ |
| 7  | $4.8918e + 023$  | 22 | $-7.1268e + 095$ | 37 | $3.6429e + 181$  |
| 8  | $-6.2703e + 027$ | 23 | $-1.7599e + 101$ | 38 | $-3.8720e + 187$ |
| 9  | $1.1056e + 032$  | 24 | $-4.9136e + 106$ | 39 | $4.4409e + 193$  |
| 10 | $-2.6003e + 036$ | 25 | $1.5437e + 112$  | 40 | $-5.4856e + 199$ |
| 11 | $7.9544e + 040$  | 26 | $-5.4324e + 117$ | 41 | $7.2849e + 205$  |
| 12 | $-3.0982e + 045$ | 27 | $2.1327e + 123$  | 42 | $-1.0383e + 212$ |
| 13 | $1.5091e + 050$  | 28 | $-9.3046e + 128$ | 43 | $1.5857e + 218$  |
| 14 | $-9.0503e + 054$ | 29 | $4.4950e + 134$  | 44 | $-2.5908e + 224$ |
| 15 | $6.5931e + 059$  | 30 | $-2.3964e + 140$ | 45 | $4.5219e + 230$  |

Tabela A.4: Determinante para o caso  $p = 6j + 6$

### A.10 Código para o Sistema ( $j = 1$ )

```

%Matriz 11x11 (j=1)
%d1=a;d2=b
syms a b A=[0 -1 0 0 0 1 0 1 0 0 0
-4 -2 0 0 1 0 0 0 1 0 0
-2*a-3*b 0 0 -1 a 0 0 0 0 1 0
0 a-4*b -3 -3 0 a 1 0 0 0 1
0 0 0 0 -3 -2 0 0 0 0 0
b 0 0 0 -3*a-2*b 0 -1 0 0 0 0
0 b 0 0 0 -3*b -2 0 0 0 0
2 0 0 0 0 0 0 -1 0 0
0 2 0 0 0 0 0 -3 -3 0 0
0 0 0 2 0 0 0 0 -3*a-3*b -5 -2
0 0 2 0 0 0 0 -4*b 0 0 -2]
DET_A=det(A)
    
```

## A.11 Código para o Sistema ( $j \geq 2$ )

```

%matriz j>1
syms a b
for j=2:15
A=zeros(6*j+5,6*j+5);
A=sym(A);
%1linha
A(1,j+1)=-1; A(1,2*j+4)=1; A(1,4*j+4)=1;
%2linha
A(2,1)=-3*j+1; A(2,2)=-2; A(2,2*j+3)=1; A(2,4*j+5)=1; for l=1:j-1
    A(1+2,l+1)=3*(l-j)-1;
    A(1+2,l+2)=-2*(l+1);
    A(1+2,2*j+l+4)=1;
    A(1+2,4*j+l+5)=1;
end
%j+2linha
A(j+2,1)=-3*j*(a+b)+a;
A(j+2,j+3)=-1;
A(j+2,2*j+3)=a;
A(j+2,5*j+5)=1;
%j+3linha
A(j+3,2)=-3*j*(a+b)+4*a-b;
A(j+3,j+3)=-3*j;
A(j+3,j+4)=-3;
A(j+3,2*j+5)=a;
A(j+3,3*j+4)=1;
A(j+3,5*j+6)=1;
%j+4linha
A(j+4,j+1)=a-4*j*b;
A(j+4,j+2)=-2*(j+1);
A(j+4,2*j+2)=-3;
A(j+4,2*j+4)=a;
A(j+4,4*j+3)=1;
A(j+4,6*j+5)=1;
%linhas j+5--->2j+2
for l=1:j-2
    A(j+1+4,l+2)=-3*j*(a+b)+l*(3*a-b)+4*a-b;

```

```

    A(j+1+4,j+1+3)=3*(1-j);
    A(j+1+4,j+1+4)=-(2*1+3);
    A(j+1+4,2*j+1+5)=a;
    A(j+1+4,3*j+1+4)=1;
    A(j+1+4,5*j+1+6)=1;
end
%linha 2j+3
A(2*j+3,2*j+3)=-3*j;
A(2*j+3,2*j+5)=-2;
%linha 2j+4
A(2*j+4,2*j+4)=-2*j;
A(2*j+4,3*j+3)=-3;
%linhas 2j+5---->3j+2
for l=1:j-2
    A(2*j+1+4,2*j+1+4)=3*(1-j);
    A(2*j+1+4,2*j+1+5)=3*a-2*(1+1);
end
%linha 3j+3
A(3*j+3,1)=b;
A(3*j+3,2*j+3)=-3*j*(a+b)+b;
A(3*j+3,3*j+4)=-1;
%linha 3j+4
A(3*j+4,j+1)=b;
A(3*j+4,2*j+4)=(-4*j+1)*b;
A(3*j+4,4*j+3)=-2;
%linhas 3j+5---->4j+3
for l=0:j-2
    A(3*j+1+5,1+2)=b;
    A(3*j+1+5,2*j+1+5)=-3*j*(a+b)+l*(3*a-b)+3*a;
    A(3*j+1+5,3*j+1+4)=3*(1-j)+1;
    A(3*j+1+5,3*j+1+5)=-(2*1+3);
end
%linha 4j+4
A(4*j+4,1)=2; A(4*j+4,4*j+5)=-1;
%linha 4j+5
A(4*j+5,j+1)=2;
A(4*j+5,4*j+4)=-2*(j+1);
A(4*j+5,5*j+4)=-3;

```

```
%linhas 4j+6---->5j+4
for l=0:j-2
    A(4*j+1+6,l+2)=2;
    A(4*j+1+6,4*j+1+5)=3*(1-j);
    A(4*j+1+6,4*j+1+6)=-(2*l+3);
end
%linha5j+5
A(5*j+5,j+3)=2;
A(5*j+5,4*j+5)=-3*j*(a+b);
A(5*j+5,5*j+5)=-(3*j+2);
A(5*j+5,5*j+6)=-2;
%linha 5j+6
A(5*j+6,j+2)=2; A(5*j+6,4*j+4)=-4*j*b; A(5*j+6,6*j+5)=-2;
%linhas 5j+7---->6j+5
for l=1:j-1
    A(5*j+1+6,j+1+3)=2;
    A(5*j+1+6,4*j+1+5)=-3*j*(a+b)+l*(3*a-b);
    A(5*j+1+6,5*j+1+5)=3*(1-j)-2;
    A(5*j+1+6,5*j+1+6)=-2*(l+1);
end A;
j
DETA_A=det(A)
end
```

# Bibliografia

- [1] V. Arnold, Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations, Springer-Verlag, 1988.
- [2] J. Yang, Polinomial normal forms of vector fields, Thesis, Technion-Israel Inst. Tech. (1997).
- [3] Yu, P. and Yuan, P. An Efficient Method for Computing the Simplest Normal Forms of Vector Fields, *Int. J. Bifurcation and Chaos* **13**, No.1 (2003), 19-46.
- [4] J. Basto-Gonçalves, Linearization of Resonant Vector Fields. Centro de Matemática Aplicada, Universidade do Porto, (2001).
- [5] G. Belitskii, Equivalence and Normal Forms of Germs of Smooth Mappings, *Russian Math. Surveys* **33**, No.1 (1978), 107-177.
- [6] F. Takens, Normal Forms for Certain Singularities of Vectors Fields, *Ann. Inst. Fourier*, **23** No. 2 (1973), 163-195.
- [7] F. Takens, Singularities of Vectors Fields, *Publ. Math IHES*. **43** (1974), 47-100.
- [8] A. Brjuno, *Local Methods in Nonlinear Differential Equations*, Springer Verlag, 1989.
- [9] A. Brjuno, Analytical form of differential equations, *Trans. Moscow Math. Soc.*, **25** (1971), 131-288.
- [10] K. T. Chen, Equivalence and decomposition of vector fields about an elementary critical point, *Am. J. Math.* **85**, (1963) 693-722

- [11] S. Sternberg, On the Structure of Local Homeomorphisms of Euclidean  $n$ -space II, *Am. J. Math.* **80**, (1958) 623-631.
- [12] F. Ichikawa, Finitely Determinated Singularities of Formal Vector Fields, *Invent. Math.*, **66** (1982), 199-214.
- [13] F. Ichikawa, On Finite Determinacy of Formal Vector Fields, *Invent. Math.*, **70** (1982), 45-52.